

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ADMINISTRAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ADMINISTRAÇÃO
MESTRADO ACADÊMICO EM ADMINISTRAÇÃO

Eduardo Nesi Bubicz

**Utilização da Carta de Controle Estatístico de
Processos CUSUM para Monitoramento de
Carteiras de Index Tracking**

Porto Alegre
Janeiro/2020

Eduardo Nesi Bubicz

Utilização da Carta de Controle Estatístico de Processos CUSUM para Monitoramento de Carteiras de Index Tracking

Dissertação apresentada à Escola de Administração da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Administração.

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Administração
Programa de Pós-Graduação em Administração

Orientador: Tiago Pascoal Filomena

Porto Alegre
Janeiro/2020

CIP - Catalogação na Publicação

Nesi Bubicz, Eduardo

Utilização da Carta de Controle Estatístico de Processos CUSUM para Monitoramento de Carteiras de Index Tracking / Eduardo Nesi Bubicz. -- 2020.

54 f.

Orientador: Tiago Pascoal Filomena.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de Administração, Programa de Pós-Graduação em Administração, Porto Alegre, BR-RS, 2020.

1. Index Tracking. 2. Rebalanço. 3. CUSUM. 4. EWMA.
I. Pascoal Filomena, Tiago, orient. II. Título.

Eduardo Nesi Bubicz

Utilização da Carta de Controle Estatístico de Processos CUSUM para Monitoramento de Carteiras de Index Tracking

Dissertação apresentada à Escola de Administração da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Administração.

Trabalho aprovado. Porto Alegre, 30 de Janeiro de 2020:

Prof. Dr. Tiago Pascoal Filomena
Orientador

Prof. Dr. Denis Borenstein
UFRGS

Prof. Dr. Flávio Sanson Fogliatto
UFRGS

Prof. Dr. Leonardo Riegel Sant'Anna
UFRGS

Porto Alegre
Janeiro/2020

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer as seguintes pessoas que influenciaram esta conquista, direta ou indiretamente:

Ao meu orientador, Prof. Dr. Tiago Pascoal Filomena, pela disponibilidade, valiosos conselhos e amizade construída neste período;

A todos os membros da banca que deram grandes contribuições para a melhoria deste trabalho;

Aos meus pais, Paulo e Ana, pelo carinho e suporte. Este mestrado é dedicado a vocês!

Aos meus avós, Lírio, Neiva e Stefania, exemplos de vida;

A toda a minha família, em especial ao núcleo porto-alegrense;

A Nathália, pelo amor, apoio e bons momentos que vivemos nesta nova etapa;

Muito obrigado aos professores e funcionários do PPGA, por permitirem aos alunos uma formação de excelência. Faço um agradecimento especial ainda a CNPq, pelo apoio financeiro que viabilizou todo este trabalho.

Grande agradecimento aos colegas de pós, especialmente ao Marcos Reichert, Eduardo Bered, Raphael Baseggio e ao portuga Miguel Caceiro, que acompanharam de perto todo o percurso até aqui e ajudaram em vários momentos;

Ao mestre Lucas Nesi, pelo apoio, trocas de ideias e memoráveis partidas de Eldritch Horror;

A toda a família Urmersbach, especialmente ao meu grande amigo Gustavo, aka umebar, por terem dado um voto de confiança e condições para um recém retornado emigrante rapidamente se estabelecer em Porto Alegre (apartamento carinhosamente apelidado de Urmershauss), a fim de cursar o mestrado que aqui se finda.

A todos os meus amigos, espalhados por este planeta.

Àqueles que me apoiaram e não encontraram referência aqui, peço desculpa e fica meu obrigado!

"Um homem precisa viajar para lugares que não conhece para quebrar essa arrogância que nos faz ver o mundo como o imaginamos, e não simplesmente como é ou pode ser. Que nos faz professores e doutores do que não vimos, quando deveríamos ser alunos, e simplesmente ir ver"

Amyr Klink

RESUMO

Nesta dissertação é proposta a utilização da carta de controle estatístico de processos de soma acumulativa, CUSUM, para controle do rebalço de carteiras de *index tracking*. O método é comparado primeiramente com rebalços fixos, utilizando base de dados que compreende os índices Ibovespa (Brasil) e S&P100 (EUA). Gráficos de controle CUSUM com ARL_1 igual a 5 e parâmetros κ iguais a 0.5, 1.0 e 1.5, são avaliadas em relação a carteiras com períodos fixos de rebalço de 20, 60, e 120 dias. Os resultados mostram um maior equilíbrio das cartas de controle com κ igual a 1.0, bem como resultados competitivos em relação ao rebalço fixo. Em um segundo momento, a metodologia CUSUM é comparada ao método de médias móveis exponencialmente ponderadas, EWMA, a partir da base de dados e resultados obtidos por [Sant'Anna et al. \(2019\)](#). A comparação mostrou que não há vantagens claras na escolha de um método em detrimento ao outro.

Palavras-chave: *Index Tracking*. Rebalço. CUSUM. EWMA.

ABSTRACT

In this work it is proposed the use of cumulative sum control chart, CUSUM, to monitor index tracking portfolio's rebalancing. The method is compared with fixed rebalancing using a database comprising the Ibovespa (Brazil) and S&P100 (USA) indexes. CUSUM control charts with ARL_1 equal to 5 and κ parameter equal to 0.5, 1.0, and 1.5 are evaluated against portfolios with rebalancing intervals of 20, 60, and 120 days. The results show a better balance of the CUSUM charts with κ 1.0 as well as competitive results compared to the fixed rebalancing. Secondly, the CUSUM methodology is compared to the exponentially weighted moving averages method, EWMA, using database and results obtained by [Sant'Anna et al. \(2019\)](#). The comparison showed that there are no clear advantages in choosing one method over the other.

Keywords: Index Tracking. Rebalance. CUSUM. EWMA.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Processo em controle (esquerda) e fora de controle (direita).	21
Figura 2 – Exemplo de carta de controle CUSUM.	24
Figura 3 – Fluxograma do processo.	31
Figura 4 – Retorno Acumulado x Volatilidade: (a)Ibovespa; (b)S&P100.	42
Figura 5 – Retorno Acumulado Carteira x Retorno Acumulado Índice: (a)Ibovespa; (b)S&P100.	42
Figura 6 – Retorno Acumulado Carteira x Retorno Acumulado Índice Ibovespa: (a)CC15 κ 1.0; (b)C15-SPC; (c)O15-SPC.	43
Figura 7 – Retorno Acumulado Carteira x Retorno Acumulado Índice S&P100: (a)CC15 κ 1.0; (b)C15-SPC; (c)O15-SPC.	44

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Relação entre os parâmetros e o ARL_1	29
Tabela 2 – Características das carteiras formadas.	36
Tabela 3 – <i>Tracking Error</i> Anual.	37
Tabela 4 – Número de rebalços por ano.	38
Tabela 5 – Médias dos desvios padrão utilizados para montagem dos limites do CUSUM.	38
Tabela 6 – Comparativo entre os métodos EWMA e CUSUM.	40
Tabela 7 – Comparativo do número de rebalços ao ano entre EWMA e CUSUM.	40
Tabela 8 – Comparativo do TE anual entre EWMA e CUSUM.	41
Tabela 9 – Análise de Sensibilidade ARL_1 - Comparação Geral.	52
Tabela 10 – Análise de Sensibilidade ARL_1 - <i>Tracking Error</i> Anual.	52
Tabela 11 – Análise de Sensibilidade ARL_1 - Números de Rebalços	53

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	OBJETIVOS	14
2.1	Objetivos	14
2.2	Limitações	14
3	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	15
3.1	Index Tracking	15
3.1.1	Otimização de Portfólios de Index Tracking	15
3.1.2	Rebalanços Presentes na Literatura	18
3.2	Controle Estatístico de Processos (CEP)	20
3.2.1	CEP - Conceitos Gerais	20
3.2.2	Utilização de Cartas de Controle no Mercado Financeiro	21
3.2.3	CUSUM	22
3.2.3.1	Funcionamento	22
3.2.3.2	Definição ARL	23
3.2.3.3	Escolhas de κ e h	24
3.2.3.4	Escolha da Carta de Controle CUSUM	25
4	METODOLOGIA	27
4.1	Modelo de Otimização	27
4.2	Implementação da Carta de Controle CUSUM	28
4.3	Descrição do Problema	30
4.4	Base de Dados e Experimentos	31
5	RESULTADOS	33
5.1	Etapa 1: Comparação CUSUM x Rebalanços Fixos	34
5.2	Etapa 2: Comparação CUSUM x EWMA	35
5.3	Considerações Gerais	39
6	CONCLUSÕES	45
6.1	Trabalhos Futuros	45
	REFERÊNCIAS	47

APÊNDICES	50
APÊNDICE A – Análise de Sensibilidade do Parâmetro ARL_1 . . .	51

1 INTRODUÇÃO

Fundos de investimento de *index tracking*, conhecidos no Brasil como fundos de índice, têm sua estratégia de investimento voltada a replicar o desempenho de índices de mercado, independentemente das condições econômicas correntes. Em geral, reproduzem índices amplos como o S&P500 (Estados Unidos) e o Ibovespa (Brasil)([CHIAM; TAN; MAMUN, 2013](#)). Os fundos de índice são classificados como fundos de administração passiva, pois possuem gestão menos flexível e seguem critérios rígidos previamente definidos. Tais características os fazem ter menores custos, pois não demandam investimento em seleção de ativos individuais e ainda necessitam de menos transações em relação aos fundos de gestão ativa ([SANT'ANNA; FILOMENA; BORENSTEIN, 2014; STRUB; BAUMANN, 2018](#)).

A motivação para utilização de gestão passiva e, em especial, de *index tracking*, remete a hipótese do mercado eficiente. Nesta, os mercados refletem de maneira eficiente nos preços dos ativos, as informações públicas disponíveis em dado momento, não sendo possível de maneira consistente obter retornos superiores à média do mercado ([FAMA, 1970](#)). Estudos empíricos mostram que rendimentos sustentáveis e estáveis que excedam os retornos do mercado são raros e, além disso, fundos indexados superam a grande maioria dos fundos administrados ativamente após deduzidos os custos de manutenção ([BOGLE, 1992; MALKIEL, 1995; FRINO; GALLAGHER, 2001; FAMA; FRENCH, 2010](#)).

A forma mais direta de se fazer *index tracking* consiste em manter uma carteira com todos os ativos que compõem o índice a ser seguido, usando as mesmas proporções (método conhecido como replicação total - *full replication*). Porém, na presença de fricções de mercado, a replicação total gera uma quantidade substancial de custos de transação que reduzem o capital do fundo, especialmente para índices com muitos constituintes ([CHIAM; TAN; MAMUN, 2013](#)). Abordagens alternativas envolvem a utilização de métodos computacionais e estatísticos para selecionar apenas os ativos mais representativos, mas que consigam replicar o retorno do índice dentro de limites de tolerância predefinidos ([KARLOW, 2012](#)).

Em geral, para compor um fundo de índice são necessárias três etapas. A primeira se caracteriza pela escolha do índice a ser seguido. A segunda, envolve a escolha da estratégia de *tracking* a ser utilizada. E finalmente, a terceira etapa se refere à estratégia de rebalço da carteira a fim de garantir a qualidade do *tracking* ([SANT'ANNA et al., 2019](#)). A segunda etapa tem sido abordada amplamente na literatura, podendo-se citar alguns métodos como: cointegração ([ALEXANDER; DIMITRIU, 2005; SANT'ANNA; FILOMENA; CALDEIRA, 2017](#)), otimização e heurísticas ([BEASLEY; MEADE; CHANG,](#)

2003; RUIZ-TORRUBIANO; SUÁREZ, 2009; DÍAZ et al., 2019), programação estocástica (BARRO; CANESTRELLI, 2009; CHEN; KWON, 2012), entre outros. Em se tratando da terceira etapa, porém, pouca literatura pode ser encontrada. A escolha usual são de intervalos fixos de rebalço (semanal, mensal, trimestral, etc.) ou decisões implícitas ao algoritmo de otimização, baseadas em restrição de custos e fluxo de dinheiro no fundo (GAIVORONSKI; KRYLOV; Van Der Wijst, 2005; STOYAN; KWON, 2010; STRUB; BAUMANN, 2018).

Um método alternativo de rebalço proposto é a utilização de ferramentas de controle estatístico de processos, CEP, em especial as cartas de controle, para monitorar a necessidade de rearranjo ao longo do tempo. Assim sendo, o portfólio é controlado de forma dinâmica em relação ao índice que deseja seguir. Em as cartas de controle estando dentro dos limites propostos, não há necessidade de atualização do portfólio de *tracking*, evitando-se custos transacionais desnecessários.

O controle estatístico de processos é uma ferramenta de qualidade originalmente desenvolvida para aplicações na indústria. Através da coleta e tratamento de informações referentes aos processos produtivos, o CEP auxilia a mitigar e detectar rapidamente falhas e desvios nestas operações, gerando aumento de produtividade e economia de recursos (MONTGOMERY, 2009). Para a avaliação das atividades, o CEP utiliza principalmente cartas de controle, que são gráficos de características do processo no tempo, com limites estatísticos determinados (STAPENHURST, 2005). Se o valor estatístico da variável observada ultrapassar quaisquer destes limites, significa que o processo saiu de controle, e atitudes devem ser tomadas a fim de restabelecer o funcionamento previsto.

No campo de finanças, alguns estudos utilizam cartas de controle aplicadas a problemas de otimização de portfólio, tais quais: Bodnar e Schmid (2009), Golosnoy e Schmid (2007), Golosnoy, Ragulin e Schmid (2009). Nestes, duas técnicas de CEP se sobressaem: médias móveis exponencialmente ponderadas (EWMA) e soma cumulativa (CUSUM). Já Sant'Anna et al. (2019) utilizam a carta de controle EWMA especificamente para o problema de rebalço de portfólios de *tracking*. O presente trabalho propõe estudar o método CUSUM - excelso para detecção de pequenas variações e, em geral, com maior sensibilidade que o EWMA (OAKLAND, 2003) - como opção aos métodos fixos e EWMA de rebalço, investigando viabilidade e vantagens de tal prática.

2 OBJETIVOS

2.1 Objetivos

Dadas as questões levantadas, esta dissertação tem como objetivo contribuir com a literatura de *index tracking* em três pontos principais, quais sejam:

- a) Propor um algoritmo para rebalço dinâmico de fundos de *index tracking* baseado em cartas de controle CUSUM;
- b) Investigar o desempenho e viabilidade do método proposto;
- c) Comparar os resultados obtidos utilizando o método CUSUM com aqueles encontrados por [Sant'Anna et al. \(2019\)](#), utilizando a carta de controle EWMA.

2.2 Limitações

A limitação mais importante desta análise é a dificuldade de obtenção de bases de dados consistentes. Para que a análise esteja alinhada com a realidade prática, faz-se necessária a reconstrução das composições do índice estudado para cada período em que ocorre rebalço. Por exemplo, ao analisar o intervalo de tempo de 2010 a 2018, devem-se obter todas as composições do índice indexado dentro deste período, e.g., quais ativos entraram, quais saíram e quando isso ocorreu, além dos retornos históricos dos mesmos dentro dos períodos em que constituíram o índice, incluindo aqueles que em algum momento vieram a fazer parte mas deixaram de existir por motivos diversos, seja por falência, deslistagem, fusões, etc.

Outra limitação envolvendo o estudo que pode ser mencionada é o custo de processamento para formação das carteiras de *tracking*. Devido à utilização de restrição inteira para escolha dos ativos que entram no portfólio, combinada com a imposição de um tamanho de carteira relativamente pequeno frente ao número de constituintes dos índices de mercado usados como referência, o processo de otimização demanda um alto tempo de processamento para redução de pequenas margens de *gap* da solução. Em contrapartida, a implementação do método CUSUM para rebalço demanda tempo de desenvolvimento, porém sua aplicação é simples e direta, com baixo custo computacional.

3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A revisão bibliográfica é organizada da seguinte maneira: primeiramente são apresentados artigos com técnicas de resolução do problema de *index tracking*. Posteriormente é feita uma revisão dos métodos de rebalço presentes na literatura. Por fim, o controle estatístico de processos é debatido, com enfoque na técnica CUSUM.

3.1 Index Tracking

Este capítulo dedica-se à revisão referente ao problema de *index tracking*. Primeiramente são abordadas técnicas de composição de carteiras de *tracking*. Em seguida, é apresentado um estudo dos métodos de rebalço presentes na literatura.

3.1.1 Otimização de Portfólios de Index Tracking

A forma mais direta de se abordar o problema de *index tracking* é através da replicação total do índice referência, adquirindo-se todos os ativos na mesma proporção que o compõem. Porém, devido a grande quantidade de ativos que em geral fazem parte dos índices, esta técnica torna-se de manutenção onerosa e complexa. Diante de tal fato, ocorreu o desenvolvimento de novas técnicas com o intuito de replicar um índice com apenas uma amostra dos ativos originais, facilitando assim a sua implementação e manutenção. Uma das primeiras alternativas à replicação total é a estratificação, na qual são selecionados ativos de modo a manter uma mesma proporção e representatividade entre os setores de mercado que compõem o índice, e, para cada setor, são selecionados ativos que estejam dentro de um nível de capitalização estipulado. Apesar de ser um método simples de implementar e manter, pode ocorrer concentração excessiva em ativos de maior capitalização, além de não haver garantias de que as escolhas dos ativos sejam ótimas no sentido de minimizar o *tracking error* - diferença entre o retorno da carteira indexada e o retorno do índice. Ambas as técnicas anteriores são descritas por [Rudd \(1980\)](#), que também é um dos primeiros a propor a otimização aplicada a formação de fundos de índice. A função objetivo proposta minimiza a variância do *tracking error* sujeita a restrições de equivalência entre as variâncias do portfólio e índice. Testes comparativos aplicados ao S&P 500 resultaram em menores valores de *tracking error* da otimização em relação a estratificação.

Desenvolvendo a otimização aplicada a formação de fundos de índice, [Meade e Salkin \(1989\)](#) formulam o *tracking error* por meio de uma aproximação matemática para resolver o problema via programação quadrática, e testes empíricos apresentam bons resultados de

tracking. É examinado o efeito da adição de restrições de estratificação, na qual o fundo tem a mesma proporção investida em diferentes setores de mercado componentes do índice seguido, não apresentando melhora significativa em relação ao modelo sem tais restrições. Meade e Salkin (1990) expandem o trabalho anterior utilizando um modelo multivariado de retornos sobre ações para formular o problema de *tracking* em programação quadrática, com objetivo de minimizar o *tracking error*. Os custos de transação são levados em conta na montagem e rebalço do fundo, evidenciando o *trade-off* existente entre qualidade de *tracking* e custos transacionais.

Já Kwiatkowski (1992) propõe uma abordagem em dois estágios para montagem do portfólio de *tracking*. Primeiramente é estimada uma solução inicial com a cardinalidade desejada, de forma a minimizar a variância do *tracking error* através de programação quadrática. Após é utilizada a heurística de busca local de recozimento simulado (*simulated annealing*, técnica em que ocorre uma restrição gradual das buscas na vizinhança do espaço de soluções até convergência). A técnica apresentou viabilidade de aplicação em testes no mercado britânico. Outros autores utilizaram heurísticas de busca a fim de obter melhores tempos de solução; Maringer e Kellerer (2003) formulam o problema com programação quadrática mista e sugerem um algoritmo de busca local híbrido que combina princípios de recozimento simulado e estratégias evolutivas. Testes no mercado britânico e alemão mostraram a eficiência e ganho de desempenho do algoritmo proposto. Em Guastaroba e Speranza (2012) a heurística *kernel search* é utilizada, obtendo melhora dos tempos de processamento quando comparado a não utilização de heurística, levando em conta custos transação, fluxo de caixa no fundo e rebalços.

No âmbito da utilização de heurísticas em problemas de *tracking*, algoritmos evolutivos (os quais buscam a solução dos problemas baseados na interação entre parâmetros inspirados na evolução biológica) têm se destacado na literatura. Beasley, Meade e Chang (2003) utiliza heurísticas evolutivas e otimização em programação não linear. O estudo foca também na influência dos custos de transação e no rebalanceamento do portfólio, estando estes implícitos na função objetivo. Os autores reportam boa relação entre qualidade e tempo de resolução para uma ampla gama de conjuntos de dados que justificam a adoção das heurísticas. Ruiz-Torrubiano e Suárez (2009) baseiam o *index tracking* no uso de um algoritmo genético para decidir o conjunto de ativos a serem incluídos no portfólio, com programação quadrática sendo usada para decidir a proporção investida em cada um dos ativos escolhidos. Embora bons resultados empíricos tenham sido obtidos, o método apresentou alguns problemas de convergência quando o número de ativos no universo era alto. Sant'Anna et al. (2017) trazem estratégia similar a de Ruiz-Torrubiano e Suárez (2009), porém utilizam uma forma alternativa de cálculo de modo a não precisar calcular a matriz de covariância do portfólio, diminuindo a complexidade, além de empregarem uma heurística baseada em Guastaroba e Speranza (2012) para encontrar o candidato inicial. Os autores comparam o método proposto com o apresentado por Beasley, Meade e Chang

(2003), Guastaroba e Speranza (2012), além de realizarem testes no mercado brasileiro, revelando resultados competitivos e viabilidade de aplicação para a técnica proposta. Díaz et al. (2019) empregam uma abordagem em duas etapas utilizando algoritmos genéticos e programação não linear inteira mista, de maneira similar a Sant'Anna et al. (2017), porém, os autores incrementam as restrições levando em conta, entre outros fatores, diversificação por setor e capitalização de mercado. Resultados empíricos demonstram uma boa qualidade de *tracking*, conseguindo manter diversificação setorial próxima aos índices estudados.

Métodos de programação estocástica também aparecem na literatura de *index tracking*, nos quais a carteira é composta no início do período considerando diferentes cenários possíveis e não apenas valores passados. Barro e Canestrelli (2009) consideram o problema de *tracking* através de uma análise multi-estágios utilizando programação estocástica inteira mista. São considerados custos de transação e restrições de liquidez. A abordagem mostra-se uma alternativa competitiva em relação a métodos de otimização não estocásticos. Stoyan e Kwon (2010) também utilizam programação estocástica inteira mista. Além dos custos de transação, restrições no número de ativos, incertezas nos retornos dos ativos e fluxos de capital no fundo, os autores também impõem restrições para garantir diversificação dos setores nos ativos escolhidos. Na abordagem de Chen e Kwon (2012), é utilizada otimização robusta para modelagem do portfólio de *tracking*, a qual leva em consideração o comportamento do portfólio diante dos piores cenários estimados. Em comparação com as carteiras construídas com o modelo não robusto, os portfólios robustos com grau moderado de conservadorismo mostram um menor *tracking error* e perfis de risco mais semelhantes ao índice alvo.

Além dos métodos baseados em otimização e heurísticas apresentados, o método estatístico de cointegração, utilizado para modelar a dinâmica de preços de ativos no longo prazo, também é uma alternativa na montagem de carteiras de *tracking* com limite de ativos. Alexander e Dimitriu (2005) são um dos primeiros a estudar a técnica para este fim, variando o número de ações utilizadas e o período de rebalço. É realizada, também, a comparação da cointegração com métodos de otimização tradicionais. Os resultados não demonstram diferenças significativas na qualidade dos resultados para ambas as técnicas, porém a cointegração indica maior robustez para períodos maiores de tempo. Dunis e Ho (2005) também utilizam o conceito de cointegração para elaborar portfólios de *tracking* de ações européias. Os resultados mostram viabilidade da técnica como alternativa à otimização, com bom desempenho de *tracking*. Já Sant'Anna, Filomena e Caldeira (2017) se baseiam em Alexander e Dimitriu (2005) e utilizam simulações para encontrar a carteira com melhores propriedades de cointegração. Testes são realizados também comparando-se métodos de otimização quadrática. Os resultados encontrados são similares aos de Alexander e Dimitriu (2005) no sentido de não haver tendência de melhor qualidade de *tracking* de um método em detrimento ao outro.

Para a montagem das carteiras de *tracking* deste trabalho é implementada otimização baseada em Sant'Anna et al. (2017), por ser um método consolidado e com bom balanço entre facilidade de implementação e qualidade/tempo de resolução, sendo utilizada programação quadrática inteira mista para este fim. Heurísticas para melhora do tempo de resolução não foram implementadas, dado que o foco desta dissertação é avaliar o uso de cartas de controle para rebalanceamento dos ativos, de modo que o processo de otimização e montagem do portfólio compreende parte necessária, porém secundária do trabalho, não havendo grande preocupação em desempenho computacional. A implementação da otimização é discutida no Capítulo 4.

3.1.2 Rebalanços Presentes na Literatura

A etapa de rebalço de carteiras de *index tracking* é pouco explorada na literatura. O uso de intervalos fixos de tempo é a prática mais difundida, e, em geral, são escolhidos períodos mensais, trimestrais e/ou semestrais (SANT'ANNA et al., 2019). Tal prática apresenta a desvantagem de não levar em consideração informações atuais sobre o portfólio, o que pode ocasionar períodos longos com má qualidade de *tracking* ou custos transacionais desnecessários. Por exemplo, supondo que os valores de *tracking error* estejam elevados e o portfólio não esteja mais replicando o índice de maneira satisfatória, ele só será rebalanceado quando atingido o intervalo determinado, mesmo que ainda falem vários dias para tal. Do contrário, se o *tracking error* estiver em nível considerado satisfatório e o intervalo de rebalço for atingido, ocorrerá uma reformulação desnecessária da carteira, incorrendo em custos evitáveis.

Uma forma de amenizar as desvantagens mencionadas é a implementação de um rebalço dinâmico, que leve em consideração alguma medida de controle (como, por exemplo, o *tracking error*) e faça o reajuste da carteira somente quando necessário. Em uma das primeiras abordagens ao tema, Meade e Salkin (1990) testam o rebalço dinâmico utilizando dois parâmetros diferentes, o erro quadrático médio do *tracking error* e o erro absoluto médio. Para ambos são definidos limites de tolerância que, se ultrapassados, acionam o rebalço. São definidos também tempos mínimos e máximos para que ocorra rebalço, a fim de evitar rearranjos muito prematuros ou períodos longos demais sem ajustes. Testes empíricos para uma ampla faixa de valores demonstraram que uma política de rebalço dinâmica reduziu os custos de transação com uma performance similar ou melhor de *tracking* quando comparada a reajustes em intervalo fixo.

Gaivoronski, Krylov e Van Der Wijst (2005) vinculam a decisão de rebalço com base em novas informações de mercado, baseadas em várias medidas discutidas pelo autor. Nesta abordagem, um novo candidato a portfólio é calculado primeiro. Em seguida, o *tracking error* do portfólio atual é comparado ao do portfólio candidato. Se a diferença entre os erros for maior que um limite específico (atualizado de acordo com as condições

de mercado), o portfólio candidato será selecionado como o novo portfólio atual. Ou seja, ao contrário do proposto por Meade e Salkin (1990), o portfólio atual só será alterado se houver, dentro das condições de mercado vigentes, portfólio que apresente desempenho superior, do contrário, o portfólio atual é mantido. Experimentos numéricos com dados da bolsa de valores de Oslo comparam o método com intervalos de rebalço fixo, e confirmam a eficácia do método dinâmico em relação à qualidade de *tracking* e custos.

Crítérios adicionais são levados em consideração por Stoyan e Kwon (2010), que, dentro de uma formulação estocástica, definem os critérios para rebalço de acordo com: *tracking error*, presença investimentos representativos em todos os setores, controle de um tamanho de portfólio desejável e minimização do número de títulos comprados e vendidos. Ou seja, além da preocupação com a qualidade do *tracking* e custos transacionais para realização do rebalço, há também a preocupação com a estratificação, ou seja, em evitar a superexposição em algum setor do mercado. A formulação proposta apresentou bons resultados na comparação com métodos fixos, porém, demandou grande número de ativos no portfólio (em geral em torno de 100 ativos) para viabilidade computacional do modelo.

Já a contribuição de Chiam, Tan e Mamun (2013) é dada por uma ampla comparação entre diferentes métodos de rebalço. Utilizando otimização aliada a algoritmos genéticos, os autores simulam portfólios sem rebalço, com rebalço em períodos fixos (trimestrais, semestrais e anuais) e rebalços com período variável, este sendo acionado somente se um valor limite pré-definido de *tracking error* for ultrapassado. Os resultados obtidos mais uma vez demonstram vantagem para a estratégia dinâmica de rebalço, a qual, na média dentre uma ampla gama de testes, apresenta melhores relações entre *tracking error* e custos de transação. Os resultados de Strub e Baumann (2018) também indicam esta vantagem. Os autores utilizam programação linear inteira mista para resolver o problema de *tracking*. O rebalço do portfólio é feito com base em novas informações de mercado, limitando os custos de transação e mantendo a carteira autofinanciável. Testes empíricos mostram menores custos de transação do método dinâmico quando comparado aos métodos fixos.

Em uma abordagem recente, Sant'Anna et al. (2019) utilizam cartas de controle estatístico de processos para acompanhar o desempenho do portfólio de *tracking* ao longo do tempo. O *tracking error* é mensurado dentro de cartas de controle EWMA e, uma vez ultrapassados os limites propostos, a carteira é recalculada e rebalanceada. A implementação é baseada em dois gráficos combinados: o desempenho de *tracking error* das carteiras montadas e a volatilidade das mesmas, de modo a controlar de forma endógena o rebalço dos portfólios de acordo com seus retornos e volatilidade ao longo do tempo. Testes computacionais são realizados para avaliar a abordagem desenvolvida em comparação com a estratégia tradicional de período fixo, utilizando dados do mercado brasileiro e norte-americano. Métodos de cointegração e otimização são aplicados para formar as carteiras. Os resultados mostram a viabilidade do CEP para este fim, o qual tende

a favorecer custos de transação em períodos de baixa volatilidade, e permite rebalços mais frequentes em períodos de alta volatilidade.

Baseado no trabalho de [Sant'Anna et al. \(2019\)](#), o presente estudo pretende utilizar uma abordagem alternativa ao EWMA, a carta de controle de soma cumulativa, CUSUM, investigando a viabilidade do método para o problema de *index tracking* e a performance relativa ao EWMA, além de definir critérios para a escolha dos parâmetros de entrada específicos a esta aplicação.

3.2 Controle Estatístico de Processos (CEP)

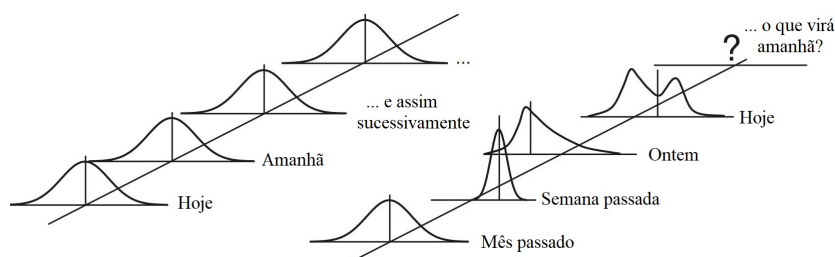
Este capítulo aborda o conceito de controle estatístico de processos (CEP), apresentando primeiramente uma explanação geral do método. Após, é dado enfoque à carta de controle de soma cumulativa, CUSUM, onde são debatidas as premissas gerais e seus parâmetros.

3.2.1 CEP - Conceitos Gerais

O controle estatístico de processos foi desenvolvido por Shewhart em meados de 1930 a fim de monitorar rotinas industriais e detectar rapidamente desvios de qualidade na linha de produção ([SHEWHART, 1930](#); [SHEWHART, 1931](#)). De forma geral, o CEP constitui-se no uso de ferramentas e técnicas baseadas em estatística para gerenciamento e melhoria de processos ([STAPENHURST, 2005](#)). Entende-se por processo a transformação de um conjunto de entradas (materiais, ações, dados, entre outros) em saídas desejadas, tais quais produtos, serviços, informações, etc. Estas saídas devem atender a um conjunto de características previamente definidas, ou seja, a um critério de qualidade, a fim de servirem adequadamente à sua utilidade. A prevenção de falhas (desvios de qualidade) em qualquer transformação só é possível se as entradas e as saídas estiverem devidamente documentadas e monitoradas, permitindo a obtenção de dados confiáveis sobre o processo. A análise destes dados indicará a necessidade de ações a serem tomadas para melhorar o processo e evitar falhas ou não-conformidade com os requisitos ([OAKLAND, 2003](#)). A principal ferramenta associada ao CEP e a análise dos dados de processo é chamada gráfico de controle.

Um gráfico de controle (ou carta de controle) é um gráfico de uma característica do processo ao longo do tempo, com limites estatisticamente determinados. Processos que operam apenas com pequenas variações aleatórias, chamadas de causas comuns, são considerados em controle (processos previsíveis). Por outro lado, quando as variações são especiais, causadas por defeitos que requerem uma ação, são considerados fora de controle (processos não previsíveis). Uma exemplificação do conceito é apresentada na [Figura 1](#).

Figura 1 – Processo em controle (esquerda) e fora de controle (direita).



Fonte – Adaptado de [Stapenhurst \(2005\)](#).

A carta de controle foi desenvolvida especificamente para determinar se as saídas de um processo exibem somente uma variação de causa comum ou se uma variação de causa especial está acontecendo ([STAPENHURST, 2005](#)). Quando esta última situação ocorre, os limites da carta de controle são ultrapassados, sinalizando a necessidade de uma ação corretiva no processo ([MONTGOMERY, 2009](#)). Existe uma gama variada de gráficos de controle com diferentes parâmetros associados, citando-se como exemplo o gráfico de média - desvio padrão, média - amplitude, médias móveis exponencialmente ponderadas, soma cumulativa, entre outros. A próxima sessão apresenta uma revisão da aplicação de cartas de controle no mercado financeiro.

3.2.2 Utilização de Cartas de Controle no Mercado Financeiro

No âmbito do mercado financeiro, a literatura apresenta o uso de cartas de controle aplicadas a Teoria Moderna do Portfólio de [Markowitz \(1952\)](#), a qual estabelece a volatilidade (desvio-padrão) dos retornos dos ativos como medida de risco e define a carteira de mínima variância global (GMVP) como a carteira com a menor volatilidade dentre todas as combinações possíveis de ativos. [Golosnoy e Schmid \(2007\)](#) estuda a aplicação de cartas de controle EWMA uni e multivariadas (mais de uma carta de controle atuando de forma acoplada) para monitoramento dos pesos dos ativos da GMVP. Através de simulações de Monte Carlo os autores atestam a viabilidade do método para tal, indicando as melhores configurações para aplicação prática. Já em [Bodnar e Schmid \(2009\)](#) as cartas de controle de Shewhart, EWMA e CUSUM são utilizadas para o mesmo fim. Testes empíricos demonstram que as duas últimas apresentam melhores desempenhos, tendo a EWMA desempenho levemente superior. Por fim, [Golosnoy, Ragulin e Schmid \(2011\)](#) estudam a capacidade de gráficos de controle CUSUM aplicados na carteira de mínima variância global e o testam através de um extenso estudo com simulação Monte Carlo. Os resultados são comparados com [Golosnoy e Schmid \(2007\)](#), não sendo encontradas vantagens significativas de um método em detrimento ao outro.

[Dumičić e Žmuk \(2015\)](#) propõem o uso de controle estatístico de processos para

identificar sinais de compra e venda em ações negociadas no mercado croata. As capacidades dos gráficos de controle para negociação de ações no curto prazo são analisadas utilizando os métodos EWMA e CUSUM. Testes mostraram que as cartas de controle geraram excessivos sinais de compra e venda, na maioria falsos, levando os autores a concluir que a metodologia não é válida para este fim. Conforme citado anteriormente, [Sant'Anna et al. \(2019\)](#) utilizam a carta de controle EWMA com foco em *index tracking*, controlando o rebalço do portfólio de *tracking* com base em dois gráficos combinados: o desempenho de TE das carteiras montadas e a volatilidade das mesmas. Os resultados mostram a viabilidade do CEP para este fim, com bons balanços entre qualidade do *tracking* e custos de transação.

A partir da revisão feita, nota-se que as implementações de cartas de médias móveis exponencialmente ponderadas (EWMA) e soma cumulativa (CUSUM) têm destaque, muito devido as suas características de memória dos processos e facilidade de implantação. A próxima seção é dedicada à discussão da carta de controle CUSUM e seus parâmetros.

3.2.3 CUSUM

O controle estatístico de processos por soma acumulada, CUSUM, foi proposto pela primeira vez por [Page \(1954\)](#), como uma alternativa às dificuldades encontradas nas cartas de controle predominantes à época em detectar desvios pequenos (de até um desvio padrão) na média monitorada, mesmo que estes desvios persistissem no tempo. O método elaborado por [Page \(1954\)](#) introduziu memória à carta de controle, através da soma acumulada dos sucessivos desvios entre os valores da amostra e um valor objetivo, em detrimento a outros métodos que levam em conta apenas a última informação aferida ([HAWKINS; OLWELL, 1998](#); [MONTGOMERY, 2009](#); [OAKLAND, 2003](#); [STAPENHURST, 2005](#)).

3.2.3.1 Funcionamento

Apesar de ser adaptável a outras distribuições, o CUSUM é geralmente empregado para supervisionar variáveis de processo em distribuição normal. Neste caso, o método assume três hipóteses: as leituras são independentes e identicamente distribuídas, seguem uma distribuição normal e o processo em controle possui desvio padrão σ_0 e média μ_0 conhecidos ([HAWKINS; OLWELL, 1998](#)). O monitoramento da variável (ou subgrupo racional) medida, X_n , em relação a um desvio para cima na média de referência, μ_0 , é feito calculando-se a sequência a partir de $n = 1$:

$$C_0^+ = 0 \quad (3.1)$$

$$C_n^+ = \max(0, C_{n-1}^+ + X_n - \mu_0 - K) \quad (3.2)$$

Que sinaliza a inconformidade quando:

$$C_n^+ > H \quad (3.3)$$

De modo análogo, um desvio para baixo na média é computado construindo-se a seguinte sequência:

$$C_0^- = 0 \quad (3.4)$$

$$C_n^- = \min(0, C_{n-1}^- + X_n - \mu_0 + K) \quad (3.5)$$

Que sinaliza a inconformidade quando:

$$C_n^- < -H \quad (3.6)$$

O valor K é chamado de valor de compensação, definido como:

$$K = \kappa \sigma_0 \quad (3.7)$$

Onde σ_0 é o desvio padrão do valor de referência e κ é a proporção do desvio padrão que se deseja detectar.

O valor H é chamado de limite de controle, definido como:

$$H = h \sigma_0 \quad (3.8)$$

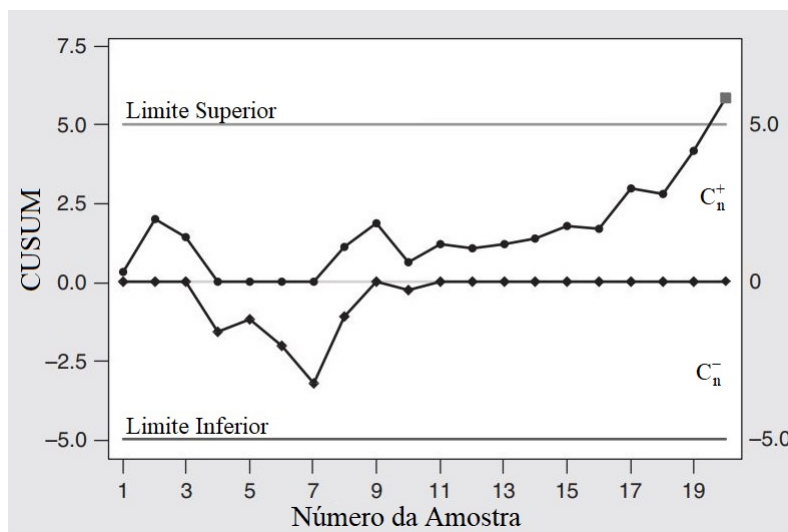
Onde h é a proporção do desvio padrão que se usará como limítrofe a fim de sinalizar não conformidade.

A [Figura 2](#) apresenta um exemplo do gráfico de controle CUSUM.

3.2.3.2 Definição ARL

A carta de controle CUSUM acumula valores até detecção de uma situação fora de controle. O número de leituras desde o momento zero até um intervalo de decisão ser cruzado se chama comprimento de corrida (*run length*). É possível que o CUSUM sinalize um processo fora de controle quando nenhuma mudança ocorreu. Esta situação é análoga, em um teste de hipóteses clássico, a um erro tipo I. Reciprocamente, a carta de controle pode permanecer dentro de seus limites mesmo quando da ocorrência de uma causa especial, em situação análoga a um erro tipo II ([HAWKINS; OLWELL, 1998](#)).

Figura 2 – Exemplo de carta de controle CUSUM.



Fonte – Adaptado de [Ryan \(2011\)](#).

O número médio de leituras até que ocorra um alarme falso (ou seja, um erro tipo I) é chamado comprimento de corrida médio em controle (ARL_0 - *in control average run length*). Já o número médio de leituras realizadas sem cruzar o intervalo de decisão após um processo sair de controle (ou seja, erro tipo II) é chamado comprimento de corrida médio fora de controle (ARL_1 - *out of control average run length*). Deseja-se que o valor do ARL_0 seja o maior possível a fim de diminuir as chances de um sinal equivocado, e que o valor de ARL_1 seja o menor possível para que a detecção de desvios ocorra de forma mais rápida possível. Estes objetivos conflitam, devendo haver um balanço entre ambos no momento da configuração do CUSUM.

Dadas as considerações a respeito do ARL , é importante notar que os parâmetros κ , h e ARL são dependentes entre si, de modo que a escolha de quaisquer dois valores implica no terceiro. Em vistas dessa relação, é dever do operador definir o melhor balanço entre os parâmetros a fim de satisfazer as necessidades específicas do processo controlado ([HAWKINS, 1993](#); [HAWKINS](#); [OLWELL, 1998](#); [MONTGOMERY, 2009](#)). O cálculo da relação entre os parâmetros não é trivial e uma série de métodos foram propostos na literatura, tais quais o uso de cadeias de Markov, simulações de Monte Carlo e métodos numéricos, bem como fórmulas empíricas para geração de valores aproximados ([MONTGOMERY, 2009](#); [ROGERSON, 2006](#)).

3.2.3.3 Escolhas de κ e h

A escolha de κ controla a sensibilidade da carta de controle para mudanças dentro de uma magnitude desejada, medida em números de desvio padrão. Por exemplo, a seleção

de um κ igual a 0.5 implica em uma sensibilidade de detecção de um desvio padrão. O parâmetro κ é escolhido para uma resposta ótima a um deslocamento do tamanho especificado, não sendo ideal para mudanças de tamanhos substancialmente diferentes. Em geral, quando κ é selecionado, h é escolhido de modo a fixar a taxa de alarmes falsos (ARL_0). Qualquer que seja o valor dado a κ , é possível encontrar algum h tal que o ARL_0 seja igual a um determinado alvo maior que 1 (HAWKINS, 1993; HAWKINS; OLWELL, 1998; MONTGOMERY, 2009).

Para o problema de index tracking se deseja que o conjunto de valores de κ e h não seja tão sensível e que o tempo médio para detecção de uma situação fora de controle não seja muito baixo, de modo a ocasionar rebalancos excessivos. Por conseguinte, neste trabalho os valores destes parâmetros seguem um tratamento alternativo. Primeiramente, opta-se por selecionar um valor de ARL_1 a fim de evitar que um eventual rebalanco seja acionado cedo ou tarde demais. A preocupação primária é com o tempo médio de detecção, ao invés da abordagem mais difundida na literatura de preocupação primária com a taxa de alarmes falsos. Em sendo selecionado o valor de ARL_1 , é possível selecionar o valor de κ , h ou ARL_0 de forma a regular a sensibilidade desejada. Rogerson (2006) apresenta fórmulas aproximadas para o cálculo destes parâmetros, que serão discutidas posteriormente na seção 4.2.

3.2.3.4 Escolha da Carta de Controle CUSUM

Como discutido no subseção 3.2.2 as cartas de controle EWMA e CUSUM se sobressaem no campo de finanças pelas suas características de memória de processo. A carta EWMA consiste na média ponderada exponencialmente das observações, ou seja, os pesos dados as observações são maiores para as mais recentes e decaem em progressão geométrica com o aumento da idade das mesmas, sendo o grau de importância dado para os valores mais recentes regido por uma constante definida pelo usuário.

De forma geral, a aplicação de ambas as cartas de controle apresenta performance similar, porém, a literatura indica certa vantagem do método CUSUM no que tange velocidade de detecção de desvios e estimação do momento em que estes ocorrem (HAWKINS; OLWELL, 1998). Ryan (2011) cita o problema de inércia, o qual se refere ao fato de que, se o EWMA tiver um valor pequeno(grande) e houver um aumento(redução) nos valores de leitura, o EWMA poderá ser lento para detectar a alteração em comparação com um gráfico CUSUM. Hawkins e Wu (2014) fazem um extenso estudo visando comparar o desempenho das duas cartas. As simulações concordam com a teoria de que, se o desvio da variável controlada estiver próximo do configurado para a carta, o CUSUM supera o EWMA, com vantagem substancial para grandes desvios. O EWMA só terá resposta melhor se a configuração for feita para grandes desvios e um menor ocorrer.

Baseado na revisão literária feita e no fato da aplicação de cartas de controle para

o problema de *index tracking* ser pioneira, justifica-se a investigação do método CUSUM como alternativa ao EWMA. É realizado um estudo do desempenho da carta de controle para este fim, bem como um comparativo com os resultados apresentados em [Sant'Anna et al. \(2019\)](#).

4 METODOLOGIA

Nesta seção é discutido o método de otimização utilizado para montagem do portfólio de *index tracking*, bem como os parâmetros usados. Também é apresentada a implementação da carta de controle CUSUM e o procedimento adotado especificamente para o problema de *tracking*. Por fim, os critérios de resolução e base de dados são apresentados.

4.1 Modelo de Otimização

Para formação dos portfólios de *index tracking* é adotada a formulação da 4.1 proposta por Gaivoronski, Krylov e Van Der Wijst (2005). A função objetivo procura minimizar a variância da diferença entre o retorno do portfólio montado e o retorno do índice de referência, ou seja, minimizar a variância do *tracking error*, conforme segue:

$$\min \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left[\left(\sum_{i=1}^I x_i \cdot r_{i,t} \right) - R_t \right]^2 \quad (4.1)$$

$$S.t. \sum_{i=1}^I (x_i \cdot r_{i,t}) - R_t \geq v, \forall t \quad (4.2)$$

$$\sum_{i=1}^I (x_i \cdot r_{i,t}) - R_t \leq \theta, \forall t \quad (4.3)$$

$$\sum_{i=1}^I x_i = 1 \quad (4.4)$$

$$\sum_{i=1}^I z_i \leq A \quad (4.5)$$

$$x_i \leq z_i, \forall i \quad (4.6)$$

$$x_i \geq 0, \forall i \quad (4.7)$$

$$z_i \in \{0, 1\} \quad (4.8)$$

Onde t representa o instante de tempo sendo analisado; T é o período de aprendizado (período *in-sample*); x_i é a fração de capital investido no ativo i , com $0 \geq x_i \leq 1$; $r_{i,t}$ é o retorno do ativo i no tempo t ; R_t é o retorno do índice no período t ; v é o limite mínimo de tracking error para cada instante t ; θ é o limite máximo de tracking error para cada instante t ; A é o máximo de ativos que podem ser utilizados para replicar o índice; z_i é uma variável de decisão binária que representa a inclusão ($z_i = 1$) ou não ($z_i = 0$) do ativo i no portfólio.

As restrições 4.2 e 4.3 limitam, para cada momento t , a diferença de rendimento mínima (parâmetro v) e máxima (parâmetro θ) admissível entre a carteira e o índice. Na restrição 4.4 garante-se que todo o capital disponível é investido no portfólio. As restrições 4.5 e 4.6 definem o limite de ativos que podem ser adicionados à carteira (com o máximo de ativos definido pelo parâmetro A). A restrição 4.7 impede que posições vendidas sejam tomadas ("aluguel" de ações a fim de ganhar com a desvalorização do papel), permitindo apenas operações compradas na carteira (aquisição da ação e ganho em cima da valorização do preço). Por fim, a restrição 4.8 define o parâmetro z_i como uma variável de decisão binária.

O parâmetro de tempo de aprendizado (in-sample), T , é definido como 150 períodos, seguindo prática já adotada na literatura por (GAIVORONSKI; KRYLOV; Van Der Wijst, 2005; SANT'ANNA; FILOMENA; BORENSTEIN, 2014; SANT'ANNA; FILOMENA; CALDEIRA, 2017). As bases de dados utilizadas nesta dissertação são constituídas de preços em frequência diária, logo, o período *in-sample* corresponde a 150 dias (aproximadamente 7 meses úteis).

Os valores de v e θ são definidos como -0,01 e 0,01, respectivamente, e mantidos constantes ao longo da análise. Isto significa que na formação do portfólio, o *tracking error* limite para cada período t computado *in-sample* é de 1% em módulo. Estes valores são escolhidos devido a testes preliminares mostrarem que, para ordens de grandeza inferiores, não foi possível formar carteiras que atendessem estes critérios. Resultado coerente com o reportado por Sant'Anna, Filomena e Caldeira (2017).

4.2 Implementação da Carta de Controle CUSUM

A carta de controle CUSUM é implementada a fim de monitorar a qualidade de *tracking*, que é medida através do *tracking error* (conforme Equação 4.9 para cada período t *out-of-sample*), e acionar o rebalço quando necessário.

$$TE_t = \sum_{i=1}^I (x_i \cdot r_{i,t}) - R_t \quad (4.9)$$

Idealmente busca-se que o valor de TE seja zero ao longo do tempo, de modo que

a replicação do índice seja perfeita. Diante de tal fato, a média de referência, μ_0 , é definida como zero. Isto significa que o "alvo" do processo é um *tracking error* nulo para cada tempo t . Se o TE_t computado for zero não haverá acumulação no gráfico CUSUM, do contrário, se o TE_t for diferente de zero, a diferença será acumulada.

O desvio padrão de referência, σ_0 , é o desvio padrão do *tracking error* calculado dentro do período *in-sample*, T , após a carteira ter sido formada, conforme [Equação 4.10](#).

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left[\sum_{i=1}^I (x_i \cdot r_{i,t}) - R_t \right]^2} \quad (4.10)$$

Este valor é utilizado como referência e mantido constante para o período *out-of-sample* até que um rebalço seja acionado, quando então um novo portfólio é formado e um novo desvio padrão de referência é computado.

Os valores de κ e h são escolhidos levando em consideração o tempo médio de detecção de uma situação fora de controle (ARL_1). Este parâmetro é definido como 5 dias, com o intuito de evitar que o CUSUM gere novos sinais de rebalço em períodos inferiores a uma semana útil, o que acarretaria rebalços excessivos e altos custos de transação. Para este valor de ARL_1 , [Rogerson \(2006\)](#) traz fórmulas para o cálculo aproximado e apresenta as relações entre os parâmetros, conforme [Tabela 1](#):

Tabela 1 – Relação entre os parâmetros e o ARL_1 .

ARL_1	κ	h	ARL_0
5	0.5	2.33	58.6
	0.6	2.67	128.5
	0.8	3.46	1235
	1.0	4.33	28299
	1.2	5.25	1541229
	1.5	6.68	3570325493

Fonte – Adaptado de [Rogerson \(2006\)](#).

Percebe-se, a partir da [Tabela 1](#), o *trade-off* entre a sensibilidade do desvio que se deseja detectar e a taxa média de alarmes falsos gerada (ARL_0), tornando necessário um estudo de sensibilidade para os valores de κ (e consequentemente h). Portanto, a presente análise avalia as propriedades de tracking para o conjunto de valores de κ igual a $[0.5; 1.0; 1.5]$. Após definidos os valores de κ e h , e obtido o valor σ_0 , são utilizadas as fórmulas [3.7](#) e [3.8](#) para calcular diretamente o valor de compensação, K , e o limite de controle, H , respectivamente.

Por fim, de posse da totalidade dos parâmetros, a carta de controle CUSUM pode ser iniciada. Para cada tempo t *out-of-sample*, o *tracking error* é calculado e acumulado

ao anterior até que ocorra um sinal e seja acionado o rebalço, reiniciando o processo. O passo a passo do método é detalhado na [seção 4.3](#).

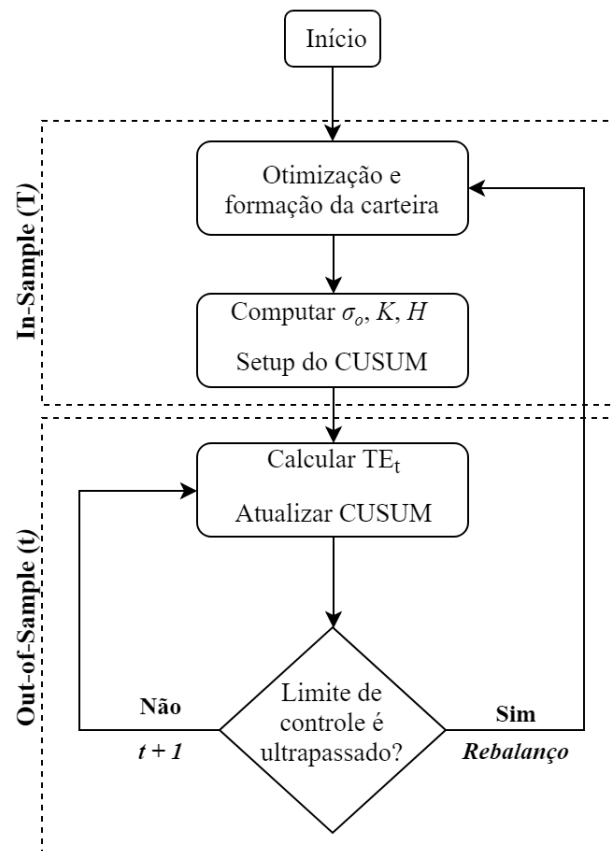
4.3 Descrição do Problema

A partir do apresentado na [seção 4.1](#) e na [seção 4.2](#), a montagem e execução do problema é feita de acordo com os seguintes passos:

- a) Definição dos parâmetros de entrada do modelo de otimização: número máximo de ativos (A), período de aprendizagem (T) e os limites de *tracking error* (v e θ). No caso específico deste trabalho são testados números máximos de ativos de [20; 30; 40], período de aprendizagem de 150 dias e limites de *tracking error* de -0,01 e 0,01.
- b) Definição dos parâmetros de entrada da carta de controle CUSUM: constante do valor de compensação (κ) e constante do limite de controle (h). Os valores aqui utilizados são os de κ iguais a [0,5; 1,0; 1,5] e os respectivos valores de h conforme [Tabela 1](#).
- c) Período *in-sample* (T): formação de carteira e *setup* do CUSUM com o desvio padrão do *tracking error* do período.
- d) Período *out-of-sample* (t): cálculo do *tracking error* diário (TE_t) e atualização do gráfico CUSUM. Então, se:
 - O limite de controle da carta CUSUM não for ultrapassado: mantém-se a carteira em vigor e repete-se o [Item d](#)) para $t + 1$;
 - O limite de controle da carta CUSUM for ultrapassado: um novo período de aprendizagem é selecionado, compreendendo o t atual e os dias passados subsequentes, totalizando T dias. Retorna-se para o [Item c](#)) e se reinicia o processo para a nova carteira formada.

De forma resumida, após definidos os parâmetros de entrada da otimização e carta de controle, é formada a primeira carteira e feito o *setup* do CUSUM dentro do período de treinamento. Então, já no período fora da amostra, é calculado o *tracking error* diário e atualizada a carta de controle. Não sendo ultrapassados os limites de controle, segue-se para o próximo período, quando um novo *tracking error* é calculado e uma nova atualização na carta é feita. Em sendo ultrapassado o limite de controle, define-se o novo período de aprendizagem e forma-se um novo portfólio e um novo *setup*, repetindo o processo. A [Figura 3](#) apresenta um fluxograma com os passos do modelo.

Figura 3 – Fluxograma do processo.



Fonte – Elaborado pelo autor.

4.4 Base de Dados e Experimentos

O índice Ibovespa reúne as empresas mais importantes do mercado brasileiro (B3, 2019), já o índice S&P 100 é um subconjunto do S&P 500 e mede o desempenho de empresas de grande capitalização nos Estados Unidos (S&P, 2019). Os ativos de ambos os índices são selecionados e avaliados de acordo com metodologia própria de seus mantenedores, podendo ocorrer exclusão e/ou adição de ativos aos índices de acordo com os critérios adotados. Estes índices são escolhidos para efetuar as análises deste trabalho devido a facilidade de acesso/manipulação dos dados e também para manter base de comparação com o trabalho de Sant’Anna et al. (2019).

Em um primeiro momento são realizadas análises com dados compreendendo janeiro de 2010 a dezembro de 2018. As composições quadrimestrais do índice Ibovespa são levadas em consideração na hora da montagem do portfólio de *tracking*. A mesma abordagem não pôde ser realizada com o índice S&P 100 devido a falta de dados, utilizando-se a composição do primeiro trimestre de 2019 durante toda a análise. Em um segundo momento, é realizada a comparação direta com o trabalho de Sant’Anna et al. (2019),

utilizando os dados do índice Ibovespa e S&P 100 disponibilizados pelos autores no artigo, abrangendo o período de 2005 a 2014.

Os preços de fechamento ajustados do índice e dos ativos componentes são adquiridos através da base de dados *Economática* e seus retornos são calculados de acordo com as fórmulas 4.11 e 4.12, respectivamente:

$$R_t = \frac{(\text{índice fechamento})_t}{(\text{índice fechamento})_{t-1}} - 1 \quad (4.11)$$

$$r_{i,t} = \frac{(\text{preço fechamento})_t}{(\text{preço fechamento})_{t-1}} - 1 \quad (4.12)$$

O problema é montado e desenvolvido em linguagem de programação *Python* (versão 3.6.8). As otimizações são resolvidas com o solver comercial *Cplex* (versão 12.8.0) acoplado ao *Python* através do pacote *docplex* (versão 2.9.141).

A fim de limitar o tempo de formação de cada carteira, são utilizados dois parâmetros concorrentes: o *gap* de resposta e o tempo máximo de solução. O primeiro corresponde a diferença percentual entre a solução obtida e a solução ótima estimada, já o segundo corresponde ao tempo decorrido desde o momento que a otimização da carteira inicia. O *gap* é definido em 5% e o tempo máximo de solução em 900 segundos, a fim de não deixar a solução alcançar tempos excessivamente longos. Isto significa que a carteira formada ou terá um *gap* igual ou menor a 5% ou um *gap* maior porém com tempo de solução igual a 900 segundos.

5 RESULTADOS

Os dados obtidos nos testes empíricos são apresentados nas seções subsequentes e, para comparação entre os portfólios formados, são utilizadas as seguintes medidas:

- a) Retorno Anual Geométrico: é calculado pela composição geométrica anual dos retornos conforme [Equação 5.1](#);

$$[(1 + r_1) \times (1 + r_2) \times \dots (1 + r_n)]^{\frac{1}{n}} - 1 \quad (5.1)$$

- b) Volatilidade Anual: é o desvio padrão calculado para todo o período multiplicado por $\sqrt{252}$, correspondente ao número de dias úteis aproximados em um ano;
- c) Retorno Acumulado no Período: retorno composto acumulado no intervalo total de estudo;
- d) *Tracking Error*(TE) Diário Médio: corresponde à média aritmética do TE durante todo o intervalo de análise;
- e) Volatilidade do TE Diário: desvio padrão do TE relativo aos valores diários;
- f) TE Máximo: máximo TE registrado em todo o período de análise;
- g) TE Mínimo: mínimo TE registrado em todo o período de análise;
- h) *Turnover* Mensal: medida percentual da mudança efetiva de ativos/pesos das carteiras para cada rebalço, conforme [Equação 5.2](#):

$$\left[\frac{\sum_{p=2}^P \left(\frac{\sum_{i=1}^I |x_i^p - x_i^{p-1}|}{2} \right)}{P - 1} \right] \times \frac{1}{f} \quad (5.2)$$

Na qual x_i^p refere-se à fração de capital aplicada no ativo i quando do portfólio p e o parâmetro f representa o tempo médio mensal que cada carteira formada é mantida, expresso pela [Equação 5.3](#):

$$f = \frac{N}{20 \times P} \quad (5.3)$$

Na qual N representa o número total de dias analisados, e o número 20 no denominador corresponde ao número de dias aproximado de um mês útil;

5.1 Etapa 1: Comparação CUSUM x Rebalanços Fixos

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos para os índices Ibovespa e S&P100 a partir da base de dados apresentada na ???. A fim de facilitar a apresentação dos resultados, denominam-se as carteiras com 20, 30 e 40 ativos pelos códigos C20, C30 e C40, respectivamente. Em relação ao parâmetro κ utilizado na carta de controle CUSUM, são utilizados os códigos $\kappa 0.5$, $\kappa 1.0$ e $\kappa 1.5$ para representar os valores de κ iguais a 0.5, 1.0 e 1.5, respectivamente. Para as carteiras com rebalço fixo, são utilizados os códigos F20, F60 e F120 para caracterizar períodos de rebalço de 20, 60 e 120 dias, respectivamente. A junção da simbologia da carteira com a do método de rebalço caracteriza a corrida em análise. Por exemplo, o código C20 $\kappa 1.0$ refere-se à carteira composta de 20 ativos com parâmetro κ igual a 1.0 na carta CUSUM. Já o código C40F120 refere-se à carteira composta por 40 ativos e com período fixo de rebalço de 120 dias.

Avaliando as diferentes configurações estudadas do CUSUM, representadas na nomenclatura pelo valor κ , percebem-se *turnovers* mensais elevados para as carteiras $\kappa 0.5$, excedendo em muito os valores de *turnover* obtidos para os rebalanços fixos utilizados como referência. Tomando como exemplo as carteiras C20 $\kappa 0.5$, enquanto os *turnovers* mensais para o Ibovespa e S&P100 são de 79.75% e 169.99%, respectivamente, estes mesmos indicadores têm valores de 29.22% e 45.29% para as carteiras de rebalço fixo definido em 20 dias, C20F20, as quais representam os maiores *turnovers* entre as carteiras de rebalço fixo. Mesmo com mais rearranjos, os portfólios $\kappa 0.5$ não demonstram resultados superiores aos demais, obtendo retornos anualizados e *tracking errors* médios similares as carteiras F20, conforme Tabela 2 e Tabela 3. A maior quantidade de rebalanços (o que implica maiores custos transacionais) não resulta diretamente em *trackings* mais precisos. Estes resultados penalizam a utilização da configuração $\kappa 0.5$.

As carteiras $\kappa 1.5$, na perspectiva do índice S&P100, possuem desempenho similar as demais carteiras CUSUM, porém com número de rearranjos inferior. Em relação aos portfólios de rebalço fixo, o *turnover* encontra-se sempre entre os valores obtidos nas carteiras F20 e F120, com resultados também similares. Já sob a perspectiva do índice Ibovespa, o *turnover* inferior levou a piores resultados de *tracking* relativos aos outros portfólios. Especialmente as carteiras C20 $\kappa 1.5$ e C30 $\kappa 1.5$ obtiveram retorno anualizado muito aquém ao das demais. Esta diferença de desempenho pode ser relacionada a maior volatilidade anual do Ibovespa, 22.68%, em relação aos 14.37% atribuídos ao S&P100, conforme Tabela 2. Esta maior volatilidade torna os limites de controle mais relaxados, o que faz a perda de sensibilidade ser demasiada.

Por fim, as carteiras $\kappa 1.0$ apresentam o melhor equilíbrio entre sensibilidade e número de rebalanços. Partindo-se da Tabela 4 é possível observar que estes portfólios ocupam a posição intermediária de rearranjos para qualquer índice ou número de componentes, quando comparados aos outros portfólios do método CUSUM. Na Tabela 2 isto se

reflete em um *turnover* também intermediário. Analisando em relação às carteiras fixas, os portfólios $\kappa 1.0$ obtiveram bom desempenho de *tracking* tanto para o Ibovespa quanto para o S&P100, sendo que para o primeiro índice o *turnover* é similar ao rebalço fixo de 20 dias, enquanto que para o segundo este resultado é válido para a carteira composta por 20 ativos, enquanto que as carteiras com C30 $\kappa 1.0$ e C40 $\kappa 1.0$ ativos resultaram em *turnover* maior que as carteiras C30F20 e C40F20.

A Tabela 3 apresenta os valores de *tracking error* para cada ano estudado (o TE neste caso é calculado como o retorno acumulado pelo portfólio em cada ano menos o retorno acumulado pelo índice em cada ano). É possível notar que para o Ibovespa o ano de 2014 concentra os maiores TE, qualquer que seja o método de rebalço. A partir da análise da Figura 4, a qual traz o retorno acumulado pela volatilidade calculada através do método EWMA (com parâmetro de suavização ajustado em 0.94 e período dos dados igual a 150), percebe-se um pico na volatilidade em torno de setembro de 2014. Apesar de ser uma possível explicação para o comportamento deste ano, outros picos de volatilidade para ambos os índices não implicaram em TE tão significativos, não ficando clara uma relação causa-efeito.

A diferença na quantidade de rebalços entre as configurações do CUSUM pode ser observada na Tabela 4, com variações consideráveis dentro do período estudado. A Figura 5 apresenta graficamente a distribuição dos rebalços nas carteiras C20 $\kappa 1.0$ para ambos os índices. Um comportamento interessante a ser notado é que, tudo mais constante, quanto maior o número de ativos na carteira, maior é o número de rebalços. Em um primeiro momento tal fato parece contraditório visto que, quanto maior o número de ativos no portfólio, maior a similaridade com a composição do índice (o que implicaria menor necessidade de correção). Uma possível explicação se deve ao cálculo dos limites de controle do CUSUM, que são proporcionais ao desvio padrão do *tracking error* entre as carteiras formadas e o índice para cada período de aprendizagem. Com mais ativos no portfólio, maior é a similaridade em relação ao índice e menor o desvio padrão do *tracking error*, o que afunila os limites no *setup* do CUSUM e o torna mais sensível a variações, tal qual observado na Tabela 5.

5.2 Etapa 2: Comparação CUSUM x EWMA

Esta etapa compreende a comparação dos resultados obtidos por Sant'Anna et al. (2019), os quais utilizaram a carta de controle EWMA para acompanhamento de rebalços, com o uso da carta de controle CUSUM para o mesmo fim. Os autores disponibilizam a base de dados utilizada em *link* no artigo original, sendo esta utilizada para a comparação. Os parâmetros comuns a ambos os *setups* são mantidos iguais, a saber: tempo de aprendizagem (T) de 120 dias; portfólios de 15 e 30 ativos e limite

Tabela 2 – Características das carteiras formadas.

Ibovespa										
	Ibovespa	C20 κ 0.5	C20 κ 1.0	C20 κ 1.5	C30 κ 0.5	C30 κ 1.0	C30 κ 1.5	C40 κ 0.5	C40 κ 1.0	C40 κ 1.5
Retorno Anual Médio	4.29%	3.61%	3.44%	1.37%	3.41%	3.89%	2.27%	3.66%	3.62%	3.40%
Retorno Acumulado	46.00%	37.54%	35.52%	13.05%	35.25%	41.02%	22.34%	38.20%	37.74%	35.11%
Volatilidade Anual	22.68%	23.02%	22.93%	22.80%	22.89%	22.86%	22.76%	22.81%	22.78%	22.70%
TE Diário Médio	-	0.00%	0.00%	-0.01%	0.00%	0.00%	-0.01%	0.00%	0.00%	0.00%
Volatilidade TE Diário	-	0.20%	0.22%	0.25%	0.17%	0.18%	0.20%	0.14%	0.16%	0.17%
TE máximo	-	1.09%	1.22%	1.24%	1.03%	1.00%	0.97%	0.91%	0.92%	0.82%
TE mínimo	-	-0.86%	-1.15%	-1.29%	-0.91%	-0.91%	-1.27%	-0.97%	-0.87%	-1.27%
Turnover Mensal	-	79.75%	22.69%	8.45%	67.00%	23.47%	10.18%	50.61%	19.72%	8.45%
S&P100										
	S&P100	C20F20	C20F60	C20F120	C30F20	C30F60	C30F120	C40F20	C40F60	C40F120
Retorno Anual Médio	4.29%	3.75%	3.72%	3.21%	3.60%	4.03%	3.92%	3.83%	4.54%	4.38%
Retorno Acumulado	46.00%	39.22%	38.95%	32.95%	37.50%	42.66%	41.38%	40.29%	49.08%	47.07%
Volatilidade Anual	22.68%	23.05%	23.17%	23.35%	22.91%	23.05%	23.06%	22.86%	22.94%	22.94%
TE Diário Médio	-	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
Volatilidade TE Diário	-	0.21%	0.22%	0.25%	0.17%	0.18%	0.20%	0.15%	0.16%	0.18%
TE máximo	-	1.24%	1.17%	1.61%	1.03%	0.94%	1.10%	0.91%	0.93%	1.11%
TE mínimo	-	-0.93%	-1.23%	-0.88%	-0.97%	-1.11%	-1.35%	-0.96%	-1.08%	-1.05%
Turnover Mensal	-	29.22%	14.10%	8.31%	22.51%	10.32%	6.71%	17.31%	9.40%	5.93%
S&P100										
	S&P100	C20F20	C20F60	C20F120	C30F20	C30F60	C30F120	C40F20	C40F60	C40F120
Retorno Anual Médio	9.02%	9.66%	10.28%	10.78%	10.09%	11.61%	11.39%	10.84%	11.10%	11.04%
Retorno Acumulado	117.62%	129.31%	141.29%	151.25%	137.51%	168.77%	164.10%	152.54%	157.79%	156.62%
Volatilidade Anual	14.37%	14.55%	14.42%	14.63%	14.46%	14.44%	14.56%	14.44%	14.47%	14.46%
TE Diário Médio	-	0.00%	0.00%	0.01%	0.00%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%
Volatilidade TE Diário	-	0.16%	0.16%	0.16%	0.12%	0.12%	0.12%	0.10%	0.10%	0.10%
TE máximo	-	0.72%	0.92%	0.81%	0.44%	0.59%	0.66%	0.47%	0.44%	0.41%
TE mínimo	-	-0.72%	-0.79%	-0.66%	-0.62%	-0.60%	-0.67%	-0.52%	-0.41%	-0.35%
Turnover Mensal	-	45.29%	17.82%	10.43%	36.98%	15.70%	8.69%	30.61%	12.79%	7.46%

Fonte – Elaborado pelo autor.

de tempo da otimização de 5 minutos ou *gap* de 5%. Sant’Anna et al. (2019) testam dois métodos de formação de carteiras: cointegração e otimização. Logo, possuem dois portfólios distintos para cada limite de ativos (15 e 30). A fim de facilitar a comparação, é utilizada a nomenclatura original do artigo para identificação das carteiras: C15-SPC, O15-SPC, C30-SPC, O30-SPC, correspondendo a cointegração com 15 ativos, otimização com 15 ativos, cointegração com 30 ativos e otimização com 30 ativos, respectivamente, todas utilizando a carta de controle EWMA com os mesmo parâmetros para controle de rebalços. As carteiras CUSUM para comparação possuem nomenclatura similar a seção anterior, porém com a primeira letra duplicada para evitar confusão com os outros testes. Assim sendo, a denominação fica: CC15, CC30 para as carteiras com 15 e 30 ativos, mantendo-se a convenção do parâmetro κ (κ 0.5, κ 1.0 e κ 1.5 para representar os valores de κ iguais a 0.5, 1.0 e 1.5, respectivamente).

Tabela 3 – Tracking Error Anual.

Ibovespa									
Ano	C20 κ 0.5	C20 κ 1.0	C20 κ 1.5	C30 κ 0.5	C30 κ 1.0	C30 κ 1.5	C40 κ 0.5	C40 κ 1.0	C40 κ 1.5
2010	0.65%	-0.14%	-0.89%	-0.18%	-0.15%	0.48%	0.18%	0.19%	0.7%
2011	0.5%	1.97%	1.84%	0.52%	1.98%	-0.96%	1.61%	2.56%	1.78%
2012	1.27%	2.86%	-5.6%	-0.1%	1.35%	-3.08%	-0.48%	0.14%	-0.67%
2013	-0.09%	0.71%	2.78%	-0.42%	1.61%	1.38%	1.34%	1.88%	4.62%
2014	-7.24%	-14.09%	-10.43%	-7.18%	-7.51%	-11.23%	-8.45%	-9.34%	-10.28%
2015	-0.86%	1.89%	-5.28%	0.65%	0.04%	-1.91%	1.17%	-0.69%	-2.39%
2016	0.03%	0.35%	-1.03%	3.63%	0.41%	2.23%	0.55%	1.5%	-0.17%
2017	-0.87%	1.79%	-3.63%	-2.06%	0.5%	-1.47%	1.44%	0.64%	0.61%
2018	1.79%	-0.51%	-3.92%	-1.7%	-1.34%	-1.45%	-2.5%	-1.95%	-1.23%
Média	-0.54%	-0.57%	-2.91%	-0.76%	-0.34%	-1.78%	-0.57%	-0.56%	-0.78%
Ano	C20F20	C20F60	C20F120	C30F20	C30F60	C30F120	C40F20	C40F60	C40F120
2010	0.42%	-0.21%	-0.89%	-0.23%	0.32%	0.71%	0.10%	0.51%	0.70%
2011	0.91%	1.99%	0.67%	0.19%	2.35%	0.27%	0.94%	2.56%	1.67%
2012	-1.47%	-0.13%	-0.65%	-2.80%	-0.98%	2.68%	-4.03%	1.26%	1.86%
2013	3.11%	2.46%	4.92%	2.95%	2.88%	2.27%	4.66%	3.96%	4.15%
2014	-7.52%	-9.76%	-7.09%	-6.54%	-7.23%	-7.84%	-6.97%	-7.77%	-7.00%
2015	-0.77%	-0.44%	-3.04%	0.72%	0.55%	-1.29%	0.52%	0.29%	-0.67%
2016	0.51%	2.77%	0.00%	0.80%	2.94%	2.00%	0.32%	2.70%	0.47%
2017	-0.92%	0.69%	1.07%	-0.09%	-0.93%	1.03%	1.55%	1.46%	0.71%
2018	1.53%	-0.89%	-4.22%	-0.96%	-2.25%	-1.43%	-1.07%	-2.14%	-0.73%
Média	-0.47%	-0.39%	-1.03%	-0.66%	-0.26%	-0.18%	-0.44%	0.31%	0.13%
S&P100									
Ano	C20 κ 0.5	C20 κ 1.0	C20 κ 1.5	C30 κ 0.5	C30 κ 1.0	C30 κ 1.5	C40 κ 0.5	C40 κ 1.0	C40 κ 1.5
2010	-1.76%	1.33%	1.33%	-0.5%	0.53%	2.23%	0.49%	0.6%	0.35%
2011	-2.23%	-0.55%	4.17%	1.25%	-0.32%	4.44%	1.63%	-0.21%	2.25%
2012	2.46%	6.41%	1.62%	3.00%	4.06%	4.43%	3.86%	3.71%	3.51%
2013	0.74%	4.22%	5.17%	4.88%	4.64%	4.39%	4.67%	3.83%	3.55%
2014	2.44%	-2.83%	-3.71%	1.11%	0.97%	0.26%	1.29%	1.64%	2.87%
2015	4.17%	-1.24%	5.04%	3.97%	3.06%	1.65%	2.45%	2.04%	1.32%
2016	2.73%	1.85%	0.42%	2.99%	1.09%	0.6%	3.8%	3.06%	2.65%
2017	2.53%	2.86%	0.29%	-0.19%	1.34%	2.32%	0.89%	2.4%	1.13%
2018	-3.08%	0.57%	0.42%	1.96%	1.76%	1.22%	1.82%	2.37%	-1.54%
Média	0.89%	1.4%	1.64%	2.05%	1.9%	2.39%	2.32%	2.16%	1.79%
Ano	C20F20	C20F60	C20F120	C30F20	C30F60	C30F120	C40F20	C40F60	C40F120
2010	-1.33%	1.18%	2.58%	0.40%	0.82%	2.23%	0.45%	0.72%	1.94%
2011	-1.15%	2.31%	5.03%	-1.65%	1.57%	2.04%	0.95%	2.15%	4.27%
2012	1.00%	1.48%	2.61%	2.94%	2.44%	2.47%	3.66%	1.31%	3.23%
2013	1.51%	-0.22%	2.43%	2.97%	2.23%	0.74%	5.15%	3.27%	1.43%
2014	-3.68%	-0.88%	1.81%	-1.56%	2.08%	1.40%	0.23%	3.47%	2.60%
2015	3.09%	6.28%	1.41%	2.38%	3.47%	4.00%	0.72%	3.23%	2.37%
2016	-0.04%	-0.77%	0.01%	4.47%	6.47%	2.73%	3.45%	2.96%	1.41%
2017	5.29%	-1.80%	2.61%	-0.50%	-0.69%	1.87%	1.57%	1.06%	0.76%
2018	1.51%	2.70%	-2.01%	0.60%	4.33%	3.27%	1.00%	0.62%	0.08%
Média	0.69%	1.14%	1.83%	1.12%	2.52%	2.31%	1.91%	2.09%	2.01%

Fonte – Elaborado pelo autor.

Tabela 4 – Número de rebalços por ano.

Ibovespa									
Ano	C20 κ 0.5	C20 κ 1.0	C20 κ 1.5	C30 κ 0.5	C30 κ 1.0	C30 κ 1.5	C40 κ 0.5	C40 κ 1.0	C40 κ 1.5
2010	13	4	0	17	3	1	16	2	0
2011	42	6	4	49	11	2	62	14	4
2012	47	10	2	66	17	4	63	18	4
2013	42	14	3	58	17	6	64	21	9
2014	45	9	1	54	8	2	57	8	4
2015	42	6	2	47	10	3	59	14	4
2016	36	7	3	47	12	4	59	19	6
2017	38	2	0	36	4	0	40	4	1
2018	44	7	3	58	13	6	64	19	5
Total	349	65	18	432	95	28	484	119	37
S&P100									
Ano	C20 κ 0.5	C20 κ 1.0	C20 κ 1.5	C30 κ 0.5	C30 κ 1.0	C30 κ 1.5	C40 κ 0.5	C40 κ 1.0	C40 κ 1.5
2010	17	0	0	24	4	0	22	4	1
2011	57	13	0	63	17	1	75	23	5
2012	45	8	0	54	8	0	64	18	3
2013	47	12	1	66	18	3	79	19	11
2014	53	9	2	74	15	4	79	21	3
2015	54	14	6	76	21	10	89	29	11
2016	48	11	1	70	19	3	81	22	11
2017	60	16	2	72	21	3	80	31	7
2018	56	21	7	82	28	8	92	29	13
Total	437	104	19	581	151	32	661	196	65

Fonte – Elaborado pelo autor.

Tabela 5 – Médias dos desvios padrão utilizados para montagem dos limites do CUSUM.

Ibovespa									
	C20 κ 0.5	C20 κ 1.0	C20 κ 1.5	C30 κ 0.5	C30 κ 1.0	C30 κ 1.5	C40 κ 0.5	C40 κ 1.0	C40 κ 1.5
Média do Desvio Padrão ($\times 1000$)	1.13	1.22	1.19	0.79	0.80	0.81	0.63	0.63	0.63
S&P100									
	C20 κ 0.5	C20 κ 1.0	C20 κ 1.5	C30 κ 0.5	C30 κ 1.0	C30 κ 1.5	C40 κ 0.5	C40 κ 1.0	C40 κ 1.5
Média do Desvio Padrão ($\times 1000$)	0.76	0.76	0.75	0.50	0.50	0.50	0.37	0.36	0.37

Fonte – Elaborado pelo autor.

Observando a [Tabela 6](#) e a [Tabela 7](#) percebe-se a concordância com os resultados da [seção 5.1](#). As carteiras CUSUM $\kappa 0.5$ apresentam valores mais elevados de rebalços e *turnover* mensal para todos os casos, enquanto as carteiras $\kappa 1.5$ apresentam os menores valores e as carteiras $\kappa 1.0$ apresentam valores intermediários. Observando os dados dos portfólios EWMA, nota-se que para o índice Ibovespa, o número de rebalços é maior do que os portfólios $\kappa 1.0$ e $\kappa 1.5$, já para o índice S&P100, este número é maior apenas que os portfólios $\kappa 1.5$.

Uma observação interessante a ser feita é que, no método EWMA, o número de rebalços cai com o aumento do número de ativos máximo das carteiras, ao contrário do CUSUM, no qual ocorre um aumento do número de rebalços com o aumento do número de constituintes (resultado este em consonância com o observado na [seção 5.1](#)). No método EWMA implementado por [Sant'Anna et al. \(2019\)](#), os limites de controle são dinâmicos e atualizados diariamente, relaxando ou comprimindo de acordo com as novas informações que são adicionadas. Isto faz com que o método não fique vinculado à volatilidade do TE no momento da formação das carteiras como o CUSUM (tal qual discutido na [seção 5.1](#)), de tal sorte que uma maior proximidade em quantidade de ativos entre o portfólio e o índice diminui o número de rebalços. Nos TE atualizados vistos na [Tabela 8](#), a média para o método EWMA é menor que as do CUSUM para a maioria dos casos. Provavelmente a maior adaptatividade da forma de implementação do EWMA contribui para estes resultados. Na [Figura 6](#) e [Figura 7](#) é possível observar a evolução dos retornos acumulados para as carteiras CC15 κ 1.0, C15-SPC e O15-SPC, em ambos os índices.

5.3 Considerações Gerais

A primeira série de resultados, apresentados na [seção 5.1](#), busca entender a viabilidade do CUSUM como alternativa ao rebalço fixo. Na [Tabela 2](#) é possível notar que a escolha de κ igual a 0.5 torna a carta de controle demasiado sensível. Mesmo com os altos valores de *turnover* médio mensal (ou seja, rebalços mais frequentes implicando maiores custos transacionais), as carteiras κ 0.5 não apresentam desempenho consistentemente superior as κ 1.0 sob a ótica de retornos acumulados e anuais. Bem verdade, nas carteiras C30 o desempenho dos portfólios C30 κ 1.0 é superior aquele dos C30 κ 0.5, mesmo com um *turnover* quase 3 vezes maior deste último em relação ao primeiro. Na direção oposta, as carteiras κ 1.5 apresentaram os menores valores de *turnover* e os piores resultados em termos de retornos. A configuração da carta CUSUM desta maneira se mostra pouco eficiente, permitindo grandes desvios sem sinalização de rebalço. Em geral, as carteiras κ 1.0 mostraram o melhor equilíbrio entre desempenho e rebalços.

Na comparação com os rebalços fixos, o *turnover* mensal das carteiras κ 1.0 apresentam-se similares aos das carteiras com períodos de 20 dias, porém com performance geral levemente inferior no que tange retornos acumulados e atualizados. As volatilidades das carteiras se mostraram bem similares, tanto para os critérios fixos quanto para com carta de controle, levando a inferir que um rebalço endógeno não implica em aumento de risco em relação aos métodos tradicionais. A [Tabela 3](#) apresenta os valores de *tracking error* para cada ano estudado (o TE neste caso é calculado como o retorno acumulado pelo portfólio em cada ano menos o retorno acumulado pelo índice em cada ano).

Tabela 6 – Comparativo entre os métodos EWMA e CUSUM.

Ibovespa											
	Ibovespa	CC15 κ 0.5	CC15 κ 1.0	CC15 κ 1.5	C15-SPC	O15-SPC	CC30 κ 0.5	CC30 κ 1.0	CC30 κ 1.5	C30-SPC	O30-SPC
Retorno Anual Médio	3.18%	5.23%	6.88%	6.79%	3.33%	4.01%	5.41%	6.59%	8.34%	3.63%	4.06 %
Retorno Acumulado no Período	28.43%	50.35%	70.32%	69.16%	29.96%	36.93%	52.39%	66.67%	89.83%	32.98%	37.45 %
Volatilidade Anual	29.53%	29.72%	29.37%	29.20%	30.22%	29.67%	29.51%	29.53%	29.27%	29.50%	29.37 %
TE Diário Médio	-	0.01%	0.01%	0.01%	0.00%	0.00%	0.01%	0.01%	0.02%	0.00%	0.00 %
Volatilidade TE Diário	-	0.30%	0.34%	0.33%	0.40%	0.31%	0.23%	0.25%	0.27%	0.35%	0.24 %
Turnover Mensal	-	65.17%	12.08%	4.60%	22.86%	23.25%	42.28%	11.20%	3.89%	13.76%	13.73 %
S&P100											
	S&P100	CC15 κ 0.5	CC15 κ 1.0	CC15 κ 1.5	C15-SPC	O15-SPC	CC30 κ 0.5	CC30 κ 1.0	CC30 κ 1.5	C30-SPC	O30-SPC
Retorno Anual Médio	3.59%	4.36%	6.48%	7.39%	2.29%	4.49%	6.44%	5.68%	7.69%	9.77%	5.78%
Retorno Acumulado no Período	32.59%	40.69%	65.30%	76.94%	19.88%	42.09%	64.80%	55.60%	80.87%	110.73%	56.72%
Volatilidade Anual	21.85%	22.59%	22.47%	22.31%	26.82%	22.14%	22.47%	22.54%	21.89%	24.51%	22.29%
TE Diário Médio	-	0.00%	0.01%	0.02%	0.00%	0.00%	0.01%	0.01%	0.02%	0.03%	0.01%
Volatilidade TE Diário	-	0.25%	0.27%	0.30%	0.60%	0.25%	0.18%	0.18%	0.21%	0.35%	0.18%
Turnover Mensal	-	151.97%	39.52%	8.72%	37.48%	27.00%	178.26%	67.03%	10.27%	21.73%	18.01%

Fonte – Elaborado pelo autor com adaptações de Sant’Anna et al. (2019).

Tabela 7 – Comparativo do número de rebalços ao ano entre EWMA e CUSUM.

Ibovespa											
Ano	CC15 κ 0.5	CC15 κ 1.0	CC15 κ 1.5	C15-SPC	O15-SPC	CC30 κ 0.5	CC30 κ 1.0	CC30 κ 1.5	C30-SPC	O30-SPC	
2007	32	1	1	10	8	30	1	1	10	10	
2008	55	13	3	21	19	58	13	6	20	20	
2009	18	0	0	0	2	30	1	0	6	2	
2010	49	0	0	0	5	55	9	0	0	2	
2011	41	2	0	5	3	40	6	0	5	3	
2012	35	5	2	4	8	45	7	3	7	7	
2013	43	12	4	16	17	54	12	3	14	15	
2014	23	0	0	18	7	27	0	0	10	4	
Total	296	33	10	74	69	339	49	13	72	63	
S&P100											
Ano	CC15 κ 0.5	CC15 κ 1.0	CC15 κ 1.5	C15-SPC	O15-SPC	CC30 κ 0.5	CC30 κ 1.0	CC30 κ 1.5	C30-SPC	O30-SPC	
2007	53	13	2	26	21	88	29	6	13	16	
2008	73	33	13	25	20	91	43	20	22	23	
2009	34	4	2	0	6	73	10	5	4	5	
2010	52	0	0	0	2	88	18	0	0	0	
2011	60	9	0	0	0	86	30	0	0	1	
2012	51	11	0	0	0	80	23	0	0	0	
2013	64	12	0	0	2	87	34	0	0	1	
2014	34	6	0	0	3	54	18	0	0	2	
Total	421	88	17	51	54	647	205	31	39	48	

Fonte – Elaborado pelo autor com adaptações de Sant’Anna et al. (2019).

Em geral os resultados apresentados mostram que a implementação do método CUSUM como ferramenta para rebalço endógeno é viável em relação aos rebalços fixos analisados. Em se utilizando a volatilidade como medida de risco, é possível perceber que todas as carteiras mantiveram um grau de risco similar aos índices, tal qual observa-se na [Tabela 2](#). Neste quesito, rebalços fixos ou dinâmicos não têm distinção de desempenho. Das carteiras CUSUM estudadas, as pertencentes ao grupo $\kappa 1.0$ são as que se apresentam mais promissoras, com maior equilíbrio nos resultados.

A segunda série de resultados é apresentada na [seção 5.2](#) e compara os rebalços controlados pelas cartas EWMA e CUSUM. A partir da [Tabela 6](#) é possível notar diferenças no comportamento dos rebalços. No índice Ibovespa, o *turnover* mensal das carteiras

Tabela 8 – Comparativo do TE anual entre EWMA e CUSUM.

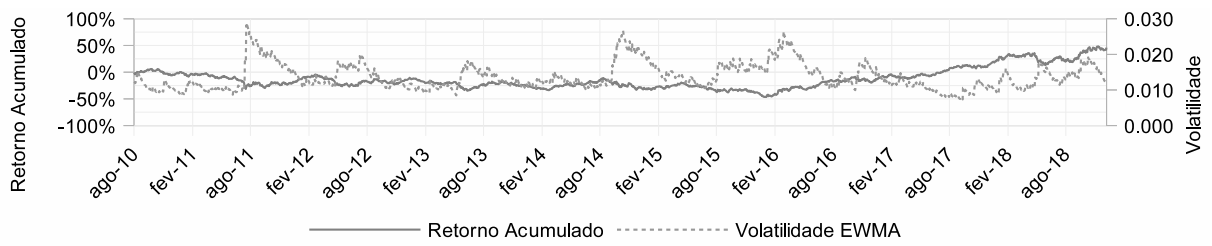
Ibovespa										
Ano	CC15 κ 0.5	CC15 κ 1.0	CC15 κ 1.5	C15-SPC	O15-SPC	CC30 κ 0.5	CC30 κ 1.0	CC30 κ 1.5	C30-SPC	O30-SPC
2007	9.33%	12.78%	10.15%	3.83%	6.58%	6.77%	6.30%	6.74%	3.62%	5.38%
2008	2.19%	4.11%	7.72%	-4.65%	-0.34%	-0.41%	2.58%	4.38%	0.06%	-2.36%
2009	1.51%	3.45%	0.44%	9.71%	0.92%	-0.57%	3.30%	5.73%	-3.19%	4.31%
2010	-0.29%	4.50%	2.06%	2.58%	-0.72%	0.53%	-1.29%	3.76%	1.46%	-0.99%
2011	2.73%	5.26%	6.19%	-1.93%	0.94%	2.82%	2.88%	5.51%	0.89%	2.00%
2012	2.96%	2.75%	-2.55%	6.99%	6.17%	7.03%	9.76%	9.33%	1.44%	9.08%
2013	7.13%	6.95%	10.31%	11.45%	8.66%	10.67%	11.65%	12.51%	11.44%	7.50%
2014	-9.36%	-10.49%	-10.82%	-17.83%	-14.27%	-9.16%	-8.61%	-8.61%	-14.37%	-13.70%
Média	2.02%	3.66%	2.94%	1.27%	0.99%	2.21%	3.32%	4.92%	0.17%	1.40%
S&P100										
Ano	CC15 κ 0.5	CC15 κ 1.0	CC15 κ 1.5	C15-SPC	O15-SPC	CC30 κ 0.5	CC30 κ 1.0	CC30 κ 1.5	C30-SPC	O30-SPC
2007	5.51%	4.24%	4.24%	-4.02%	0.04%	3.06%	3.84%	3.15%	3.51%	0.47%
2008	1.17%	2.53%	4.82%	-6.82%	1.29%	6.30%	4.82%	6.97%	7.43%	1.82%
2009	-1.18%	5.99%	6.98%	11.64%	-3.13%	4.63%	4.39%	7.74%	24.74%	6.51%
2010	2.88%	4.15%	2.52%	-3.89%	1.65%	3.67%	-1.28%	3.01%	1.86%	1.78%
2011	-1.08%	6.03%	8.09%	-9.29%	8.08%	-0.82%	0.12%	7.19%	-1.42%	1.07%
2012	3.25%	-0.39%	3.60%	2.93%	1.08%	2.74%	2.30%	-2.35%	4.98%	3.85%
2013	-6.48%	-1.80%	0.78%	11.38%	-6.55%	-0.77%	0.03%	4.80%	8.17%	0.66%
2014	0.84%	1.56%	-2.04%	-1.94%	2.85%	1.32%	0.41%	0.10%	2.36%	1.69%
Média	0.61%	2.79%	3.62%	0.00%	0.66%	2.52%	1.83%	3.82%	6.45%	2.23%

Fonte – Elaborado pelo autor com adaptações de [Sant'Anna et al. \(2019\)](#).

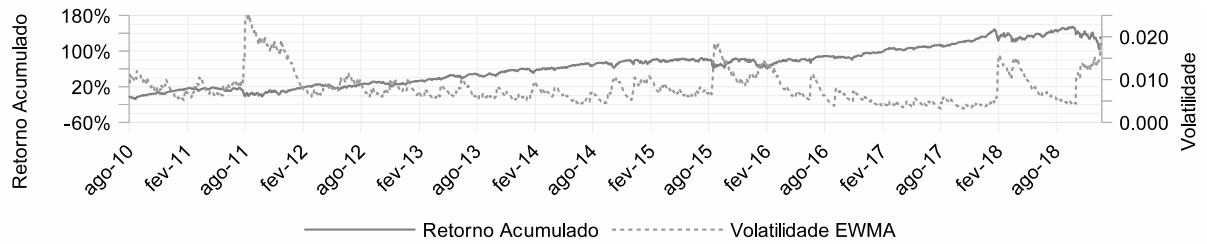
EWMA é maior que o das carteiras CUSUM, com exceção da carteira mais sensível (κ igual a 0.5). Já para o índice S&P100, o *turnover* mensal das carteiras EWMA só é maior que o da carteira menos sensível do CUSUM (κ igual a 1.5). Na [Tabela 7](#) estes resultados se evidenciam no total de rebalços para cada caso.

A volatilidade do índice Ibovespa no período, 29.53%, é superior àquela registrada na [seção 5.1](#). Neste cenário de alta volatilidade, tomando as carteiras κ 1.0 como referência (por terem apresentando resultados mais equilibrados na [seção 5.1](#)), o CUSUM se comporta de forma menos sensível em relação a quantidade de rebalços, enquanto as carteiras EWMA têm uma sensibilidade maior. No cenário do índice S&P100, com volatilidade de 21.85%, ocorre o inverso - CUSUM torna-se mais rígido perante variações, com maior número de rearranjos que o EWMA. Para o Ibovespa, os portfólios EWMA tem uma performance de *tracking* melhor que as das carteiras κ 1.0, porém as custas de um maior *turnover* mensal. Para o S&P100 os resultados são mistos, variando de acordo com o número de ativos. Por fim, o método CUSUM se apresenta como uma alternativa no uso de CEP para controle de rebalços em problemas de *tracking error*, na comparação com o EWMA os resultados são mistos e variam com as características dos índices estudados.

Figura 4 – Retorno Acumulado x Volatilidade: (a)Ibovespa; (b)S&P100.



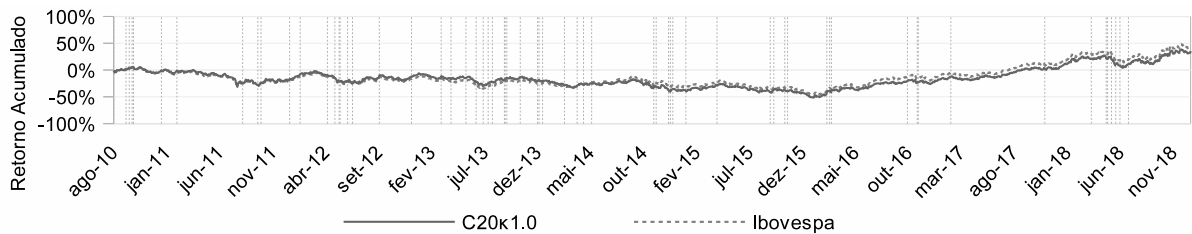
(a) Ibovespa



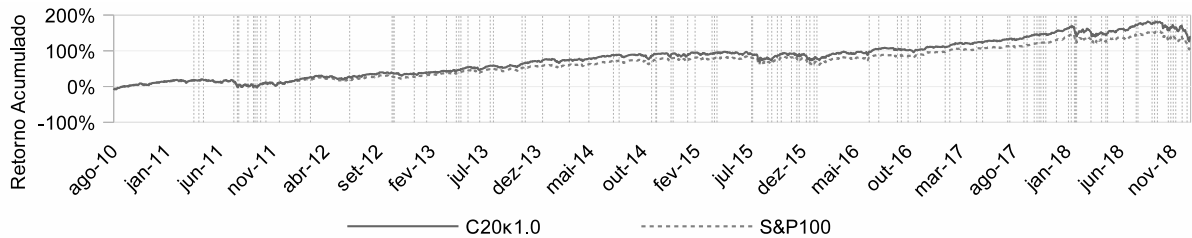
(b) S&P100

Fonte – Elaborado pelo autor.

Figura 5 – Retorno Acumulado Carteira x Retorno Acumulado Índice: (a)Ibovespa; (b)S&P100.



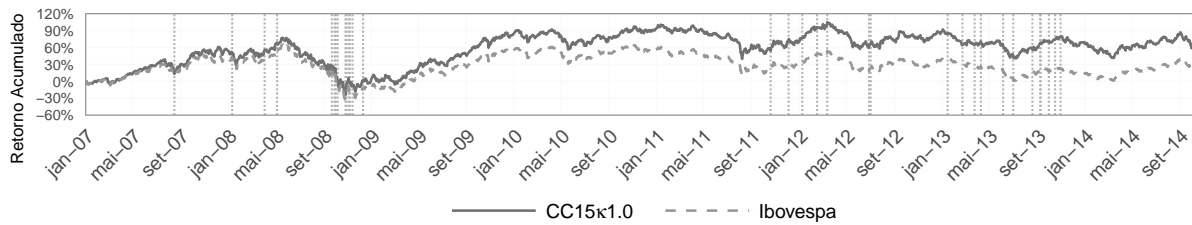
(a) C20κ1.0 x Ibovespa



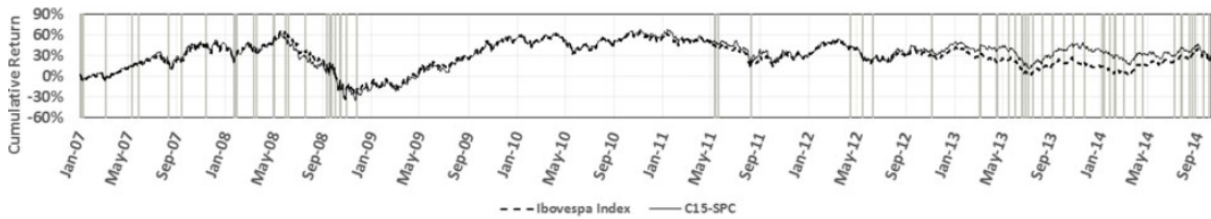
(b) C20κ1.0 x S&P100

Fonte – Elaborado pelo autor.

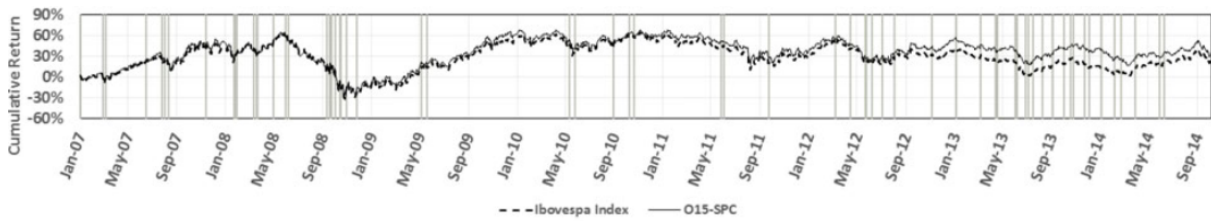
Figura 6 – Retorno Acumulado Carteira x Retorno Acumulado Índice Ibovespa: (a)CC15 κ 1.0; (b)C15-SPC; (c)O15-SPC.



(a) CC15 κ 1.0 x Ibovespa



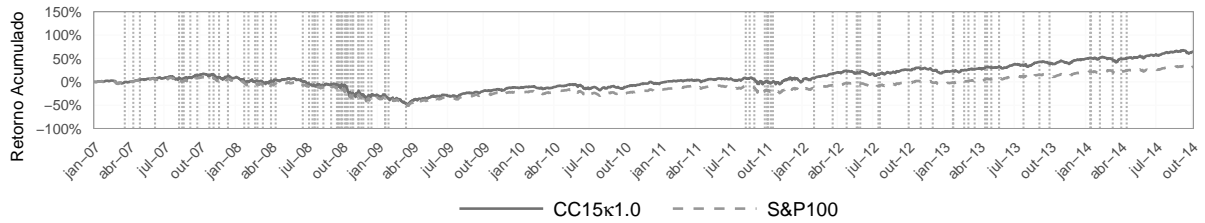
(b) C15-SPC x Ibovespa



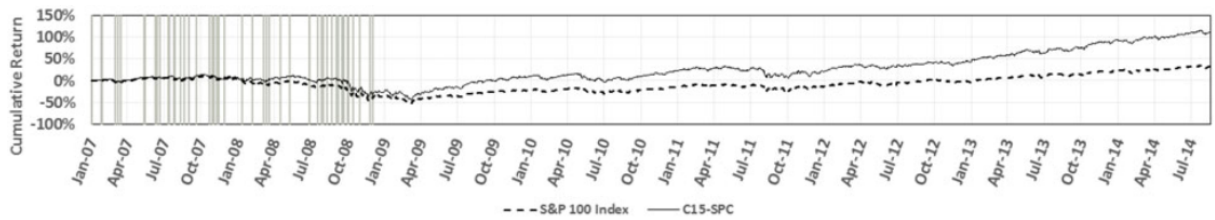
(c) O15-SPC x Ibovespa

Fonte – Autor e adaptações de (SANT'ANNA et al., 2019).

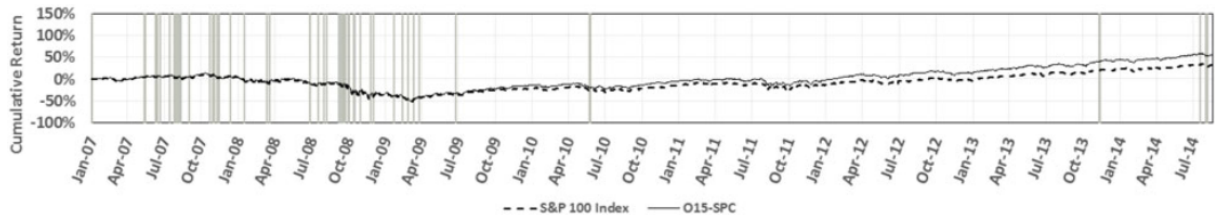
Figura 7 – Retorno Acumulado Carteira x Retorno Acumulado Índice S&P100: (a)CC15 κ 1.0; (b)C15-SPC; (c)O15-SPC.



(a) CC15 κ 1.0 x S&P100



(b) C15-SPC x S&P100



(c) O15-SPC x S&P100

Fonte – Autor e adaptações de (SANT'ANNA et al., 2019).

6 CONCLUSÕES

Este trabalho estudou a utilização da carta de controle CUSUM aplicada ao problema de *index tracking*. Através do controle do *tracking error* diário feito pelo CUSUM foi possível avaliar de forma endógena a necessidade de rebalço das carteiras, de modo a ser uma alternativa aos métodos mais difundidos baseados em períodos fixos de rebalço. Foi realizada também uma comparação com o método EWMA aplicado ao mesmo fim, com o intuito de observar as diferenças entre os métodos.

Na primeira etapa de testes foi utilizada uma base de dados compreendendo os índices Ibovespa e S&P100 entre 2010 e 2018, a fim de comparar o método CUSUM com rebalços fixos. As análises são conduzidas com carteiras de 20, 30 e 40 ativos, utilizando cartas de controle CUSUM com valores κ iguais a 0.5, 1.0 e 1.5, bem como rebalços fixos de 20, 60 e 120 dias. O *setup* do CUSUM com κ igual 1.0 apresentou o melhor equilíbrio em relação a sensibilidade, com *turnover* similar aos rebalços fixos de 20 dias. Em relação aos retornos anualizados, o método se mostra competitivo na comparação com os rebalços fixos, além de apresentar volatilidade similar, o que indica que não há aumento do risco dos portfólios no rebalanceamento endógeno.

Na segunda etapa foi realizada a comparação entre as cartas de controle EWMA e CUSUM aplicados ao *index tracking*. A base de dados e os resultados EWMA são extraídos do artigo de [Sant'Anna et al. \(2019\)](#). O *turnover* do método EWMA foi maior para o índice Ibovespa (de maior volatilidade no período em relação ao S&P100) e menor para o índice S&P100 (menor volatilidade) quando comparado ao CUSUM de κ igual a 1.0, e, em geral, os retornos anualizados e acumulados foram melhores para o método EWMA. Uma das principais diferenças entre as implementações refere-se aos limites de controle da carta EWMA serem configurados de forma a sofrerem atualizações diárias, levando em consideração os dados do dia anterior e se adaptando as condições correntes do índice. O método CUSUM, tal qual implementado, mantém fixos os limites de controle até o momento de um novo rebalço. A partir dos dados obtidos na análise, os resultados se mostraram mistos, não havendo clara vantagem de um método em relação ao outro. Ambos mostram-se como alternativa viável ao rebalço fixo.

6.1 Trabalhos Futuros

Como primeira sugestão para trabalhos futuros pode-se citar o custo das operações, que foi considerado de forma genérica sobre o retorno da carteira formada. A inclusão de uma função de custos mais apurada poderia contribuir para um melhor panorama deste

efeito nas operações. Outra característica que pode ser levada em conta são regras de aporte e retirada de capital, considerando choques no valor total do fundo.

A metodologia adotada neste trabalho implica em uma reformulação total do portfólio tão logo ocorra um sinal na carta de controle CUSUM. Uma sugestão de trabalho futuro seria a reformulação parcial do portfólio vigente, ou seja, dado o aviso de não conformidade, apenas um subconjunto de ativos da carteira seria alterado a fim de diminuir o TE, não condenando a carteira como um todo. Para operacionalizar esta abordagem, uma série de alterações deve ser implementada no método até então proposto. Primeiramente, devem-se controlar os retornos individuais dos ativos de modo que seja possível identificar aqueles que de fato estão contribuindo para o TE fora dos limites indicados pelo CUSUM. Uma possível implementação seria acompanhar a correlação de cada ativo com o índice seguido e definir um *ranking* para exclusão daqueles que estiverem com maior dissonância em relação ao índice. Não se pode esquecer, porém, que a atribuição de peso é diferente para cada constituinte, de modo que um afastamento não tão expressivo em relação ao índice de um ativo pode ser motivo para rebalço, dado que ele tenha um peso na carteira relevante em relação aos demais. A segunda etapa seria justamente o critério para exclusão ou não dos ativos no *ranking* construído. E por fim, para montar a nova carteira sem alterar de forma significativa a composição original, poderia-se travar os constituintes que sobraram e realizar uma otimização deixando livre apenas a fração da carteira que está vacante.

REFERÊNCIAS

- ALEXANDER, C.; DIMITRIU, A. Indexing and Statistical Arbitrage. *The Journal of Portfolio Management*, v. 31, n. 2, p. 50–63, 2005.
- B3. *Índice Ibovespa*. 2019. Disponível em: <http://www.b3.com.br/pt/_br/market-data-e-indices/indices/indices-amplos/ibovespa>
- BARRO, D.; CANESTRELLI, E. Tracking error: A multistage portfolio model. *Annals of Operations Research*, v. 165, n. 1, p. 47–66, 2009.
- BEASLEY, J. E.; MEADE, N.; CHANG, T. J. An evolutionary heuristic for the index tracking problem. *European Journal of Operational Research*, v. 148, n. 3, p. 621–643, 2003.
- BODNAR, O.; SCHMID, W. Discussion on “Optimal Sequential Surveillance for Finance, Public Health, and Other Areas” by Marianne Frisé. *Sequential Analysis*, v. 28, n. 3, p. 375–380, 2009.
- BOGLE, J. C. Selecting equity mutual funds. *The Journal of Portfolio Management*, v. 18, n. 2, p. 94–100, 1992.
- CHEN, C.; KWON, R. H. Robust portfolio selection for index tracking. *Computers and Operations Research*, Elsevier, v. 39, n. 4, p. 829–837, 2012.
- CHIAM, S.; TAN, K.; MAMUN, A. A. Dynamic index tracking via multi-objective evolutionary algorithm. *Applied Soft Computing*, Elsevier B.V., v. 13, n. 7, p. 3392–3408, 2013.
- DÍAZ, J. et al. Index fund optimization using a hybrid model: genetic algorithm and mixed-integer nonlinear programming. *The Engineering Economist*, Taylor & Francis, v. 0, n. 0, p. 1–12, 2019.
- DUMIČIĆ, K.; ŽMUK, B. Statistical Control Charts: Performances of Short Term Stock Trading in Croatia. *Business Systems Research Journal*, v. 6, n. 1, p. 22–35, 2015.
- DUNIS, C. L.; HO, R. Cointegration portfolios of European equities for index tracking and market neutral strategies. *Journal of Asset Management*, v. 6, n. 1, p. 33–52, 2005.
- FAMA, E. F. Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. *The Journal of Finance*, v. 25, n. 2, p. 383, 1970.
- FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. Luck versus Skill in the cross-section of mutual fund returns. *Journal of Finance*, v. 65, n. 5, p. 1915–1947, 2010.
- FRINO, A.; GALLAGHER, D. R. Tracking S&P 500 Index Funds. *The Journal of Portfolio Management*, v. 28, n. 1, p. 44–55, 2001.
- GAIVORONSKI, A. A.; KRYLOV, S.; Van Der Wijst, N. Optimal portfolio selection and dynamic benchmark tracking. *European Journal of Operational Research*, v. 163, n. 1, p. 115–131, 2005.

- GOLOSNOY, V.; RAGULIN, S.; SCHMID, W. Multivariate CUSUM chart: properties and enhancements. *ASTA Advances in Statistical Analysis*, v. 93, n. 3, p. 263–279, 2009.
- GOLOSNOY, V.; RAGULIN, S.; SCHMID, W. CUSUM control charts for monitoring optimal portfolio weights. *Computational Statistics and Data Analysis*, Elsevier B.V., v. 55, n. 11, p. 2991–3009, 2011.
- GOLOSNOY, V.; SCHMID, W. EWMA control charts for monitoring optimal portfolio weights. *Sequential Analysis*, v. 26, n. 2, p. 195–224, 2007.
- GUASTAROBA, G.; SPERANZA, M. Kernel Search: An application to the index tracking problem. *European Journal of Operational Research*, Elsevier B.V., v. 217, n. 1, p. 54–68, 2012.
- HAWKINS, D. M. Cumulative Sum Control Charting: An Underutilized SPC Tool. *Quality Engineering*, v. 5, n. 3, p. 463–477, 1993.
- HAWKINS, D. M.; OLWELL, D. H. *Cumulative Sum Charts and Charting for Quality Improvement*. New York: Springer New York, 1998.
- HAWKINS, D. M.; WU, Q. The CUSUM and the EWMA Head-to-Head. *Quality Engineering*, v. 26, n. 2, p. 215–222, 2014.
- KARLOW, D. *Comparison and Development of Methods for Index Tracking*. Tese (Doutorado) — Frankfurt School of Finance & Management, 2012.
- KWIATKOWSKI, J. W. Algorithms for index tracking. *IMA Journal of Management Mathematics*, v. 4, n. 3, p. 279–299, 1992.
- MALKIEL, B. G. Returns from Investing in Equity Mutual Funds 1971 to 1991. *The Journal of Finance*, v. 50, n. 2, p. 549, 1995.
- MARINGER, D.; KELLERER, H. Optimization of cardinality constrained portfolios with a hybrid local search algorithm. *OR Spectrum*, v. 25, n. 4, p. 481–495, 2003.
- MARKOWITZ, H. Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, v. 7, n. 1, p. 77–91, 1952.
- MEADE, N.; SALKIN, G. R. Index Funds-Construction and Performance Measurement. *The Journal of the Operational Research Society*, v. 40, n. 10, p. 871, 1989.
- MEADE, N.; SALKIN, G. R. Developing and maintaining an equity index fund. *Journal of the Operational Research Society*, v. 41, n. 7, p. 599–607, 1990.
- MONTGOMERY, D. C. *Introduction to Statistical Quality Control*. 6. ed. Hoboken: John Wiley and Sons, 2009.
- OAKLAND, J. S. *Statistical process control*. 5. ed. Oxford: Butterworth Heinemann, 2003.
- PAGE, E. S. Continuous Inspection Schemes. *Biometrika*, v. 41, n. 1-2, p. 100–115, 1954.
- ROGERSON, P. A. Formulas for the design of CUSUM quality control charts. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, v. 35, n. 2, p. 373–383, 2006.
- RUDD, A. Optimal Selection of Passive Portfolios. *Financial Management*, v. 9, n. 1, p. 57, 1980.

- RUIZ-TORRUBIANO, R.; SUÁREZ, A. A hybrid optimization approach to index tracking. *Annals of Operations Research*, v. 166, n. 1, p. 57–71, 2009.
- RYAN, T. P. *Statistical Methods for Quality Improvement*. 3. ed. Hoboken: John Wiley and Sons, 2011.
- SANT'ANNA, L. R.; FILOMENA, T. P.; BORENSTEIN, D. Index Tracking com Controle do Número de Ativos. *Rev. Bras. Finanças*, v. 12, n. 1, p. 89–119, 2014.
- SANT'ANNA, L. R.; FILOMENA, T. P.; CALDEIRA, J. F. Index tracking and enhanced indexing using cointegration and correlation with endogenous portfolio selection. *Quarterly Review of Economics and Finance*, v. 65, p. 146–157, 2017.
- SANT'ANNA, L. R. et al. Investigating the use of statistical process control charts for index tracking portfolios. *Journal of the Operational Research Society*, Taylor & Francis, v. 0, n. 0, p. 1–17, 2019.
- SANT'ANNA, L. R. et al. Index tracking with controlled number of assets using a hybrid heuristic combining genetic algorithm and non-linear programming. *Annals of Operations Research*, Springer US, v. 258, n. 2, p. 849–867, 2017.
- SHEWHART, W. A. Economic Quality Control of Manufactured Product. *Bell System Technical Journal*, v. 9, n. 2, p. 364–389, 1930.
- SHEWHART, W. A. *Economic Control of Quality of Manufactured Product*. New York: Van Nostrand, 1931.
- S&P. *S&P 100*. 2019. Disponível em: <<https://us.spindices.com/indices/equity/sp-100>>.
- STAPENHURST, T. *Mastering Statistical Process Control: A Handbook for Performance Improvement Using Cases*. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.
- STOYAN, S. J.; KWON, R. H. A two-stage stochastic mixed-integer programming approach to the index tracking problem. *Optimization and Engineering*, v. 11, n. 2, p. 247–275, 2010.
- STRUB, O.; BAUMANN, P. Optimal construction and rebalancing of index-tracking portfolios. *European Journal of Operational Research*, Elsevier B.V., v. 264, n. 1, p. 370–387, 2018.

Apêndices

APÊNDICE A – Análise de Sensibilidade do Parâmetro ARL_1

Este apêndice apresenta a análise de sensibilidade do parâmetro ARL_1 , o qual, ao longo dos testes empíricos reportados no [Capítulo 5](#), foi mantido constante com valor igual a 5. Como os resultados mais equilibrados encontrados se deram para as carteiras com κ igual a 1.0, este valor é escolhido para ser mantido constante, enquanto o parâmetro h é variado a fim de avaliar os valores alternativos de ARL_1 de 3 e 7. Baseado na formulação de [Rogerson \(2006\)](#) e mantido κ constante igual a 1.0, os valores de h de 2.3 e 6.3 implicam em valores de ARL_1 iguais a 3 e 7, respectivamente. A comparação é realizada entre carteiras contendo 20 ativos, nomeadas com os seguintes códigos - $C20ARL_13$, $C20ARL_15$ e $C20ARL_17$ - representando os portfólios de ARL_1 iguais a 3, 5 e 7, respectivamente. É utilizada a mesma base de dados da [seção 5.1](#). A [Tabela 9](#) mostra a comparação geral entre os portfólios, enquanto a [Tabela 10](#) traz os *tracking errors* anuais e a [Tabela 11](#) apresenta o número de rebalços de cada carteira.

Como esperado, um valor de ARL_1 menor torna o gráfico de controle mais sensível, enquanto um valor mais alto o torna menos sensível, o que pode ser observado nos valores de *turnover* da [Tabela 9](#) e rebalços na [Tabela 11](#). A carta com ARL_1 igual a 3 apresentou números mais altos de rebalços, enquanto a carta com ARL_1 igual a 7 apresentou os menores valores. Em geral, todas tiveram desempenho similar no que tange volatilidade e *tracking errors*. Nos retornos anualizados, o portfólio $C20ARL_17$ apresenta números mais afastados em relação ao índice, o que é coerente com o menor número de rebalços. Os resultados deste apêndice mostram a influência do parâmetro ARL_1 no *setup* do gráfico de controle e nas análises, ressaltando a importância da definição de critérios e valores na montagem da carta CUSUM.

Tabela 9 – Análise de Sensibilidade ARL_1 - Comparação Geral.

Ibovespa				
	Ibovespa	C20 ARL_1 3	C20 ARL_1 5	C20 ARL_1 7
Retorno Anual Médio	4.29%	3.32%	3.44%	2.94%
Retorno Acumulado no Período	46.00%	34.21%	35.52%	29.83%
Volatilidade Anual	22.68%	22.99%	22.93%	22.98%
TE Diário Médio	-	0.00%	0.00%	-0.01%
Volatilidade TE Diário	-	0.21%	0.22%	0.23%
TE máximo	-	1.09%	1.22%	1.22%
TE mínimo	-	-1.05%	-1.15%	-1.29%
Turnover Mensal	-	55.17%	22.69%	14.41%
S&P100				
	S&P100	C20 ARL_1 3	C20 ARL_1 5	C20 ARL_1 7
Retorno Anual Médio	9.02%	10.51%	10.27%	10.54%
Retorno Acumulado no Período	117.62%	145.78%	141.04%	146.36%
Volatilidade Anual	14.37%	14.49%	14.59%	14.52%
TE Diário Médio	-	0.01%	0.01%	0.01%
Volatilidade TE Diário	-	0.15%	0.15%	0.16%
TE máximo	-	0.58%	0.77%	0.81%
TE mínimo	-	-0.82%	-0.69%	-0.69%
Turnover Mensal	-	102.79%	47.76%	24.34%

Fonte – Elaborado pelo autor.

Tabela 10 – Análise de Sensibilidade ARL_1 - *Tracking Error* Anual.

Ibovespa			
Ano	C20 ARL_1 3	C20 ARL_1 5	C20 ARL_1 7
2010	0.35%	-0.14%	-0.89%
2011	-1.02%	1.97%	1.11%
2012	0.23%	2.86%	0.32%
2013	-0.16%	0.71%	4.36%
2014	-7.08%	-14.09%	-9.75%
2015	-0.91%	1.89%	-4.35%
2016	-1.56%	0.35%	0.31%
2017	0.74%	1.79%	0.12%
2018	2.55%	-0.51%	-1.76%
Média	-0.76%	-0.57%	-1.17%
S&P100			
Ano	C20 ARL_1 3	C20 ARL_1 5	C20 ARL_1 7
2010	-0.39%	1.33%	0.86%
2011	-3.22%	-0.55%	2.19%
2012	3.65%	6.41%	2.37%
2013	1.87%	4.22%	2.53%
2014	3.84%	-2.83%	-2.11%
2015	5.06%	-1.24%	5.16%
2016	1.07%	1.85%	0.47%
2017	3.33%	2.86%	0.93%
2018	-0.89%	0.57%	1.10%
Média	1.59%	1.40%	1.50%

Fonte – Elaborado pelo autor.

Tabela 11 – Análise de Sensibilidade ARL_1 - Números de Rebalanços

Ibovespa			
Ano	$C20ARL_13$	$C20ARL_15$	$C20ARL_17$
2010	5	4	0
2011	24	6	2
2012	27	10	6
2013	29	14	8
2014	28	9	5
2015	23	6	4
2016	21	7	4
2017	12	2	1
2018	21	7	3
Total	190	65	33
S&P100			
Ano	$C20ARL_13$	$C20ARL_15$	$C20ARL_17$
2010	6	0	1
2011	31	13	5
2012	21	8	1
2013	38	12	6
2014	25	9	9
2015	40	14	5
2016	29	11	5
2017	31	16	8
2018	39	21	9
Total	260	104	49

Fonte – Elaborado pelo autor.