Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Ações Parciais de Grupos Sobre Anéis Semiprimos

por Laerte Bemm

Orientador: Prof. Dr. Miguel Angel Alberto Ferrero

Porto Alegre - RS
2011

Tese submetida por Laerte Bemm* como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Dr. Miguel Angel Alberto Ferrero

Banca Examinadora:

Dr. Antonio Paques

Dr. Mikhajolo Dokuchaev

Dr. Eduardo do Nascimento Marcos

Dr. Wagner de Oliveira Cortes

Dr. João Roberto Lazzarin

Dr. Miguel Angel Alberto Ferrero

Data da Defesa: 12 de Agosto de 2011

*Bolsista do CNPq de 03/2008 a 08/2011

Dedico este trabalho aos meus pais, meus eternos ídolos.

Agradecimentos

Esta tese não é resultado do trabalho de apenas uma pessoa, mas sim de um família inteira. Por isso quero manifestar minha sincera gratidão a todos que de alguma forma me ajudaram para que esse momento se tornasse realidade.

A Deus por sempre me iluminar e me guiar no caminho certo.

Aos meus pais Cacildo e Terezinha, por sempre estarem ao meu lado e me incentivarem a continuar estudando, independente de qualquer dificuldade.

A minha tia Eusébia, meu irmão Charles, minha cunhada Carla e aos meus sogros Edna e Celso pela torcida, pelas orações e por tuda ajuda que me prestaram.

Aos meus melhores amigos de Porto Alegre Léo, Cleber, Rosane e Luciane pela oportunidade de convívio durante esses três anos e meio.

Ao meu orientador, Prof.º Miguel Ferrero, por ter aceito meu convite de orientação, pelos constantes incentivos, pelas críticas, pela excelente escolha do tema, por ter me ensinado muita Álgebra e, obviamente, pelos cafés.

A minha noiva Priscila, pela paciência, compreensão, carinho, amor e, especialmente, por ser essa pessoa maravilhosa que ela sempre foi comigo.

As amigas Hannah e Tatiane por terem cuidado da minha pequena enquanto eu estava longe e por terem dividido algumas cervejas conosco no Democrático.

Aos membros da banca examinadora pela disposição de leitura e correção deste trabalho.

Finalmente, quero agradecer ao Instituto de Matemática e ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFRGS pela oportunidade de realização deste curso e ao CNPq pelo incentivo financeiro.

Resumo

Neste trabalho, consideramos uma ação parcial α de um grupo G sobre um anel semiprimo R. Estudamos condições necessárias e suficientes para que o skew anel de grupo parcial $R *_\alpha G$ seja um anel semiprimo de Goldie. Além disso, obtemos alguns novos critérios para a existência de uma ação envolvente de α. Finalizamos a tese introduzindo o conceito de ação parcial com uma ação quase-envolvente e estudando algumas propriedades destas ações parciais.

Abstract

In this work we consider a partial action α of a group G on a semiprime ring R. We study necessary and sufficient conditions for the partial skew group ring $R *_\alpha G$ to be a semiprime Goldie ring. Moreover, we give some new criteria for the existence of a enveloping action for α. Finally, we introduce the concept of partial action with a quasi-enveloping action and we study some proprieties of these partial actions.

Índice de Notações

$\emptyset$	conjunto vazio.
M_R	R-módulo à direita.
${}_RM$	R-módulo à esquerda.
$\mathbb{Z}$	conjunto dos números inteiros.
$\mathbb{Q}$	conjunto dos números racionais.
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais.
(m, n)	máximo divisor comum entre m e n.
$\|A\|$	cardinalidade do conjunto A.
$\|G : H\|$	índice do subgrupo H em G.
$Z(R)$	centro do anel R.
$Aut(R)$	grupo de automorfismos do anel R.
$R \cong S$	R é isomorfo a S.
$A \oplus B$	soma direta dos anéis (ou módulos) A e B.
$A \subset B$	A é um subconjunto próprio de B.
$A \subseteq B$	A é um subconjunto de B.
$I \lhd_r R$	I é um ideal à direita do anel R.
$I \lhd_l R$	I é um ideal à esquerda do anel R.
$I \lhd R$	I é um ideal (bilateral) do anel R.
$lAnn_R(A)$	anulador à esquerda de A em R.
$rAnn_R(A)$	anulador à direita de A em R.
$\mathcal{Z}_r(M_R)$	submódulo singular à direita do R-módulo à direita M.
$\mathcal{Z}_r(R)$	ideal singular à direita do anel R.
$E \lhd_e R$	E é um ideal essencial do anel R.

$\mathcal{E}(R)$	conjunto do ideais essenciais de R.
$[I]$	fecho do ideal I.
$Q_r(R)$	anel de quocientes à direita de Martindale do anel R.
$Q_{cl}(R)$	anel de quocientes clássico do anel R
$udim(M_R)$	dimensão uniforme do R-módulo à direita M.
$udim(R)$	dimensão uniforme à direita do anel R.
$M \otimes_R N$	produto tensorial de M_R por ${}_RN$.
$R \overset{M}{\simeq} S$	os anéis R e S são Morita equivalentes.
$dev(X)$	desvio do conjunto X.
T^G	subanel dos elementos fixos de T por uma ação de G.
$T *_\beta G$	skew anel de grupos global.
R^α	subanel dos elementos α-invariantes de R.
$\circ(\alpha)$	ordem da ação parcial α.
$R *_\alpha G$	skew anel de grupos parcial.
$Kdim(M_R)$	dimensão de Krull do R-módulo à direita M.
$Kdim(R)$	dimensão de Krull à direita do anel R.
$Spec(R)$	conjunto dos ideais primos do anel R.
$U(R)$	grupo das unidades do anel R.
$\mathcal{C}_R$	conjunto dos elementos regulares de R.
$\mathcal{L}_R(M)$	conjunto dos submódulos do R-módulo M.
$Nil_*(R)$	radical primo.
$J(R)$	radical de Jacobson.
$Lrad(R)$	radical de Levitzki.
$\mathcal{C}(\mathbb{R})$	conjunto das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.
$\mathcal{M}(R)$	anel de multiplicadores do anel R.

Sumário

Introdução

Num contexto puramente algébrico, o conceito de ação parcial de grupos foi introduzido por M. Dokuchaev e R. Exel em [9]. No mesmo trabalho os autores introduziram a noção de skew anel de grupo parcial e deram condições necessárias e suficientes para que uma ação parcial sobre um anel com unidade admita uma envolvente.

A partir daí duas questões em especial passaram a serem estudadas: dar condições para que uma ação parcial de um grupo sobre um anel, não necessariamente com unidade, admita uma envolvente e propriedades do skew anel de grupo parcial.

O problema da envolvente foi considerado em dois artigos: em [8], para o caso em que o anel base é s-unitário e em [4], para o caso em que o anel base é semiprimo, não necessariamente com unidade.

Por outro lado, há muita literatura que trata de propriedades do skew anel de grupo parcial, para caso em que a ação parcial admite uma envolvente (ver, por exemplo, [3], [5], [10], [14], [15] e [17]). Portanto, é natural considerar esta questão para o caso em que a ação parcial não admite necessariamente uma envolvente. Isto foi feito pela primeira vez em [6] para ações parciais de grupos cíclicos infinitos sobre anéis semiprimos.

Neste trabalho, os objetivos são obter resultados semelhantes os de [6] para grupos finitos e policíclicos infinitos e melhorar aos resultados obtidos em [4].

No Capítulo 1, tratamos das principais definições e resultados que necessitamos para o desenvolvimento deste trabalho. Muitas destas definições e resultados, que se referem principalmente a Teoria de Anéis, ações globais e ações parciais, são bem conhecidos. Mesmo assim, sempre daremos uma referência para possíveis consultas de detalhes. Além disso, fixamos notações que serão utilizadas livremente no decorrer do trabalho.

No Capítulo 2, vamos considerar uma ação parcial α, não necessariamente com envolvente, de um grupo G sobre um anel semiprimo R com unidade e dar condições necessárias e suficientes para que o skew anel de grupo parcial $R *_\alpha G$ seja um anel semiprimo de Goldie. Por exemplo, vamos mostrar que se G é finito e R é livre de $|G|$-torção, então $R *_\alpha G$ é um anel semiprimo de Goldie à direita se e somente se R é um anel semiprimo de Goldie à direita. Obtemos um resultado análogo para o caso em que G é policíclico infinito.

Em [13], M. Ferrero mostrou que toda ação parcial $\alpha = \{\alpha_g : D_{g^{-1}} \longrightarrow D_g \mid g \in G\}$ de um grupo G sobre um anel semiprimo R (não necessariamente com unidade) se estende a uma ação parcial α^* de G sobre o anel de quocientes à direita de Martindale Q de R e α^* admite uma envolvente (T, β). Em [4] os autores deram condições para que $T' = \sum_{g \in g} \beta_g(R)$ seja um anel e $(T', \beta' = \beta|_{T'})$ seja uma envolvente de α, sempre que os ideais D_g forem fechados.

No Capítulo 3, vamos dar melhores condições para que (T', β') seja uma envolvente de α. Por exemplo, se o ideais D_g são todos fechados, então (T', β') é uma envolvente de α se e somente se T' é um anel e R é um ideal de T'. Vamos mostrar que o mesmo não é válido quando os ideais D_g não são todos fechados. No entanto, o principal resultado deste capítulo afirma que se cada ideal D_g é um somando direto de R então α admite uma ação envolvente que é equivalente a (T', β'). Porém, a recíproca não é verdadeira. Mais precisamente, vamos mostrar que existe uma ação parcial α de $\mathbb{Z}$ sobre um anel semiprimo R que admite uma envolvente, os ideais D_n, $n \in \mathbb{Z}$, são todos fechados, mas não são necessariamente somandos diretos de R.

Finalmente, no Capítulo 4, vamos introduzir o conceito de ação quase-envolvente de uma ação parcial e dar condições necessárias e suficientes para que uma ação parcial sobre um anel semiprimo com unidade admita uma quase-envolvente. Encerramos com algumas propriedades do skew anel de grupo parcial e do anel dos elementos invariantes parciais, para ações parciais de grupos finitos sobre anéis semiprimos com unidade que admitem uma quase-envolvente.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste primeiro capítulo estabelecemos alguns conceitos e resultados conhecidos, os quais o leitor pode encontrar em livros ou em artigos já publicados. Iniciamos com alguns conceitos básicos de Teoria de Anéis tais como anéis primos, semiprimos, artinianos, noetherianos, simples e semisimples. Também apresentamos as definições de radical primo, radical de Jacobson e radical de Leviztki de anéis. Algumas propriedades de tais anéis e radicais também serão enunciadas.

Num segundo momento, estudamos um pouco sobre a dimensão uniforme, o ideal singular e os anéis de Goldie. Em seguida, apresentamos a contrução do anel de quocientes de Martindale de um anel semiprimo e enunciamos algumas de suas propriedades. Depois faremos uma breve abordagem sobre contextos (e equivalências) de Morita, bem como sobre a dimensão de Krull de um anel.

Na sequência, falamos sobre ações globais de grupos em anéis e apresentamos alguns resultados devido a J. Osterburg e J. Matzuk, os quais generalizamos no Capítulo 2.

Finalmente, na penúltima seção, abordamos ações parciais de grupos sobre anéis e encerramos o capítulo mostrando que é possível estender ações parciais de grupos sobre anéis semiprimos a seu anel de quocientes de Martindale e que esta extensão sempre admite uma envolvente.

Nós não faremos as demonstrações dos resultados apresentados neste capítulo, mas sempre informamos referências para que o leitor interessado possa obtê-las.

1.1 Conceitos Básicos

Nesta primeira seção do nosso trabalho, vamos descrever alguns conceitos e resultados bem conhecidos da Teoria de Anéis. Optamos em apresentá-los logo no início para não precisarmos fazer isto no decorrer do texto e por consequência desviar o foco do assunto abordado naquele momento. Maiores detalhes não apresentados aqui, podem ser encontrados nos Capítulos 1, 2, 3 e 4 de [21].

Um *anel* R significa um anel associativo não nulo e não necessariamente comutativo. O fato de R ter ou não uma unidade é dito no início de cada seção. Nesta primeira seção, os anéis não possuem necessariamente unidade e menos que mencionemos o contrário. Também, *ideal* significa ideal bilateral e usaremos a notação $I \lhd R$ para indicar que I é um ideal do anel R. As notações $I \lhd_r R$ e $I \lhd_l R$ indicam, respectivamente, que I é um ideal à direita e à esquerda do anel R.

Para um anel R, a notação ${}_RM$ (resp. N_R) significa que M (resp. N) é um R-módulo à esquerda (resp. à direita).

Um módulo M é dito *simples* se seus únicos submódulos são (0) e M. Analogamente, um anel R é dito ser *simples* se seus únicos ideais forem (0) e R. Um anel R é dito ser *semisimples* se qualquer ideal à direita de R é um somando direto de R. Isto é equivalente a dizer que todo ideal à esquerda de R é um somando direto de R. O clássico Teorema de Wedderburn-Artin (ver Teorema 3.5 de [21]) nos diz que um anel com unidade R é semisimples se e somente se R é isomorfo a um produto direto de anéis de matrizes $M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_r}(D_r)$, onde os D_i's são anéis de divisão. Os anéis $M_{n_i}(D_i)$ são simples, também chamados de *componentes simples* de R. Com isso, todo anel semisimples com unidade R pode ser decomposto em uma soma direta $R = R_1 \oplus \cdots \oplus R_r$, onde cada R_i é isomomorfo $M_{n_i}(D_i)$, para algum inteiro n_i e algum anel de divisão D_i.

Dizemos que um R-módulo à direita (resp. à esquerda) é *fiel* se para todo $r \in R$, $r \neq 0$, temos $Mr \neq 0$ (resp. $rM \neq 0$). Um anel R é dito ser *primitivo à direita* (resp. *à esquerda*) se existe um R-módulo à direita (resp. à esquerda) simples fiel.

O *radical de Jacobson* de um anel R, denotado por $J(R)$, é a interseção de todos os ideais maximais à direita (esquerda) de R. Dizemos que um anel R é *Jacobson-semisimples*, ou simplesmente *J-semisimples*, se $J(R) = 0$. Estes anéis também são chamados por alguns autores de semiprimitivos. Notemos que todo anel semisimples com unidade é J-semisimples.

Um anel R é dito ser *artiniano*(resp. *noetheriano*) à direita se toda cadeia descendente (resp. ascendente) de ideais à direita de R for estacionária. Analogamente definimos anéis artinianos e noetherianos à esquerda. Um anel é dito artiniano (resp. noetheriano) se ele for artiniano (resp. noetheriano) à esquerda e à direita. É conhecido que um anel com unidade R é noetheriano à direita (à esquerda) se e somente se todo ideal à direita (à esquerda) de R é finitamente gerado.

Pelo Teorema de Hopkins-Levitzki (ver Teorema 4.5 de [21]) todo anel com unidade artiniano à direita (resp. esquerda) é noetheriano à direita (resp. esquerda). No entanto, o anel dos números inteiro $\mathbb{Z}$ é noetheriano, pois todo ideal de $\mathbb{Z}$ é principal, mas mas $\mathbb{Z}$ não é artiniano, pois a cadeia de ideais $2\mathbb{Z} \supsetneq 4\mathbb{Z} \supsetneq 8\mathbb{Z} \supsetneq \cdots$ não estaciona.

Um anel R é dito ser *von Neumann regular* se para todo $a \in R$, existe $x \in R$ tal que $a = axa$. Pelo Corolário 4.24 de [21], todo anel semisimples com unidade é von Neumann regular. Em particular, produto direto de anéis de matrizes $M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_r}(D_r)$, onde os D_i's são anéis de divisão, é um anel von Neumann regular.

Num anel R, um ideal P é dito ser um *ideal primo* se $P \subsetneq R$ e para ideais $A, B \subseteq R$, $A \cdot B \subseteq P$ implica $A \subseteq P$ ou $B \subseteq P$. Isto é equivalente a dizer que para ideais à direita (à esquerda) $A, B \subseteq R$, $A \cdot B \subseteq P$ implica $A \subseteq P$ ou $B \subseteq P$. Mais ainda, um ideal $P \subsetneq R$ é primo se e somente se para $a, b \in R$, $aRb \subseteq P$ implica $a \in P$ ou $b \in P$.

Um I de um anel R é dito ser um *ideal semiprimo* se para todo ideal A de R, $A^2 \subseteq I$ implica que $A \subseteq I$. Isto é equivalente a dizer que para todo ideal à direita (à esquerda) A de R, $A^2 \subseteq I$ implica que $A \subseteq R$. Também, um é um ideal I de R é semiprimo se e somente se para $a \in R$, $aRa \subseteq I$ implica $a \in I$. Um anel R é dito ser *primo* (resp. *semiprimo*) se o ideal (0) é um ideal primo (resp. semiprimo).

Observamos que domínios de integridade e anéis simples com unidade são exemplos de anéis primos. Também, qualquer produto direto de anéis semiprimos (não necessariamente com unidade) é uma anel semiprimo, porém, o produto direto de anéis primos não é um anel primo. Além disso, por definição, todo anel primo é semiprimo. No entanto, a recíproca não é verdadeira, pois $\mathbb{Z}_6$ é um anel semiprimo mas $\mathbb{Z}_6$ não é um domínio de integridade e portanto não é um anel primo.

O *radical primo*, denotado por $Nil_*(R)$, é definido como sendo a interseção de todos os ideais primos de R. Se R possui unidade, temos que $Nil_*(R) \subseteq J(R)$.

Proposição 1.1 *([21], Proposição 10.16) Um anel com unidade R é semiprimo se e somente se $Nil_*(R) = 0$.*

Como caso particular da proposição anterior temos que se R possui unidade então $rad(R) = 0$ implica que $Nil_*(R) = 0$, i.é, qualquer anel com unidade J-semisimples é um anel semiprimo. Em particular anéis semisimples com unidade são semiprimos.

Proposição 1.2 *([21], Proposição 11.7) Seja R um anel artiniano à direita com unidade. Então R é semisimples $\Longleftrightarrow$ R é J-semisimples $\Longleftrightarrow$ R é semiprimo.*

Dado um anel R, um subconjunto $S \subseteq R$ é dito ser *localmente nilpotente* se para todo subconjunto finito $\{s_1, \cdots, s_r\} \subseteq S$, existe um inteiro n tal que qualquer produto de n elementos de $\{s_1, \cdots, s_r\}$ é zero.

A soma de todos os ideais localmente nilpotentes de um anel R é um ideal localmente nilpotente. Tal soma é o *radical de Levitzki* de R denotada por $Lrad(R)$. Temos que $Nil_*(R) \subseteq Lrad(R) \subseteq J(R)$. Um anel R é dito *Levitzki-semisimples* se $Lrad(R) = 0$.

1.2 Anéis de Goldie

Nesta seção apresentamos mais alguns conceitos conhecidos, como ideais essenciais, uniformes, dimensão uniforme e anéis de Goldie. Para maiores detalhes que não apresentamos aqui, sugerimos ao leitor a Seção 11 de [22] e o Capítulo 2 de [26].

Nesta seção os anéis não possuem necessariamente unidade a menos que se mencione o contrário.

Seja R um anel e M um R-módulo à direita (à esquerda, R-bimódulo). Um submódulo N de M é dito *essencial* se para todo submódulo não nulo L de M, temos que $L \cap N \neq 0$. Usamos a notação $N \triangleleft_e M$ para indicar que N é um submódulo essencial de M. Naturalmente, um ideal à direita (à esquerda) I de um anel R é dito essencial se ele for essencial como submódulo à direita (à esquerda) de R. Finalmente, um ideal J de R é dito ser essencial se para todo ideal $L \neq 0$ de R, $J \cap L \neq 0$.

Por exemplo, se R é um anel primo, então todo ideal não nulo H de R é essencial como ideal à direita, pois de I é um ideal não nulo de R, então $0 \neq HI \subseteq H \cap I$.

Sejam R um anel qualquer e B um subconjunto de R. Denotamos por $lAnn_R(B)$ o anulador à esquerda de B em R, i.é, $lAnn_R(B) = \{a \in R : aB = 0\}$. Analogamente definimos o anulador à direita de B em R, denotado por $rAnn_R(B)$. É fácil ver que $lAnn_R(B)$ e $rAnn_R(B)$ são, respectivamente, um ideal à esquerda e um ideal à direita de R. Porém, se B é um ideal à direita de R então $rAnn_R(B)$ é um ideal de R e, analogamente, se B é um ideal à esquerda de R então $lAnn_R(B)$ também é um ideal de R. Consequentemente, se B é um ideal então $lAnn_R(B)$ e $rAnn_R(B)$ também são ideais.

Neste trabalho, os ideais essenciais de anéis semiprimos serão de grande importância, pois será com esses ideais que contruiremos adiante o anel de quocientes de Martindale de um anel semiprimo dado.

É fácil ver que para um anel semiprimo R, um ideal H é essencial se e somente se $Ann_R(H) = 0$, onde $Ann_R(H) = \{a \in R \,|\, Ha = 0\} = \{a \in R \,|\, aH = 0\}$. Mais ainda, um ideal F de um anel semiprimo R é essencial se F é essencial como ideal à direita. Denotamos por $\mathcal{E}(R)$ o conjunto de todos os ideais essenciais de um anel R.

Apresentamos agora algumas propriedades dos ideais essenciais de um anel semiprimo.

Lema 1.3 *Seja R um anel semiprimo. As seguintes condições são verificadas:*

(i) Se I é um ideal de R, então $I + Ann_R(I) = I \oplus Ann_R(I) \in \mathcal{E}(R)$;

(ii) Se $I, J \in \mathcal{E}(R)$, então $J \cap I \in \mathcal{E}(R)$ e $I \cdot J \in \mathcal{E}(R)$;

(iii) Se H é um ideal de R que contém $I \in \mathcal{E}(R)$, então $H \in \mathcal{E}(R)$.

O *submódulo singular* de um R-módulo à direita M é definido como sendo o submódulo $\mathcal{Z}_r(M_R) = \{x \in M : xE = 0,$ *para algum ideal à direita essencial* E *de* $R\}$. Considerando R como um módulo à direita sobre si mesmo, nós temos definido $\mathcal{Z}_r(R_R)$. É conhecido que $\mathcal{Z}_r(R_R)$ é um ideal de R, chamado de *ideal singular à direita* de R. Por comodidade, escrevemos simplesmente $\mathcal{Z}_r(R)$ para indicar $\mathcal{Z}_r(R_R)$. Dizemos que um anel R é *não singular à direita* se $\mathcal{Z}_r(R) = 0$. É fácil ver que $x \in \mathcal{Z}_r(R)$ se e somente se para todo ideal à direita não nulo J de R, existe $0 \neq y \in J$ tais que $xy = 0$.

Os conceitos de ideal singular à esquerda de um anel e de anel não singular à esquerda são definidos de maneira análoga.

Observamos que, anéis simples, semisimples e von Neumann regulares (com unidade) são exemplos de anéis não singulares à direita (à esquerda). Mais exemplos podem ser encontrados na Seção 7 do Capítulo 3 de [22].

Um R-módulo à direita M é dito *uniforme* se $M \neq 0$ e se todo submódulo de M é essencial. Em outras palavras, um R-módulo à direita não nulo M é uniforme se e somente se para quaisquer elementos não nulos $x_1, x_2 \in M$, existem $a_1, a_2 \in R$ tais que $x_1a_1 = x_2a_2 \neq 0$. Deste modo, um R-módulo à direita $M \neq 0$ é *não uniforme* se e somente se existem elementos não nulos $x_1, x_2 \in M$ tal que $x_1R \cap x_2R = 0$.

Todo R-módulo à direita simples é uniforme. Se R é semisimples, então um R-módulo à direita M é simples se e somente se M é uniforme. Porém, sobre $R = \mathbb{Z}$, os R-módulos à direita $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Z}_{p^n}$, ($n \geq 2$, p primo), são todos uniformes, mas não são simples.

Teorema 1.4 *([22], Teorema 6.1) Sejam R um anel com unidade e $U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$ e $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ submódulos essenciais de um R-módulo à direita M, onde os $U_i's$ e $V_j's$ são módulos uniformes. Então $m = n$.*

Como consequência deste teorema, o seguinte conceito fica bem definido.

Definição 1.5 *Seja R um anel com unidade. Dizemos que um R-módulo à direita M tem dimensão uniforme n (escrevemos $udim(M_R) = n$) se existe um submódulo essencial V de M que é uma soma direta de n submódulos uniformes. Por outro lado, se um tal n não existe, então dizemos que M tem dimensão uniforme infinita e escrevemos $udim(M_R) = \infty$.*

Seja R um anel com unidade e M um R-módulo à direita. É fácil verificar, pela definição, que $udim(M_R) = 0$ se e somente se $M = 0$ e $udim(M_R) = 1$ se e somente se M_R é um módulo uniforme. Para módulos sobre anéis de divisão, a dimensão uniforme é justamente a dimensão de espaço vetorial como definida em Álgebra Linear.

O próximo resultado dá uma boa interpretação para dimensão uniforme infinita.

Proposição 1.6 *([22], Proposição 6.4) Seja R um anel com unidade e M um R-módulo à direita. Então, $udim(M_R) = \infty$ se e somente se M contém uma soma direta infinita de submódulos não nulos.*

Definimos a dimensão uniforme à direita de um anel com unidade R como sendo a dimensão uniforme de R_R. Escrevemos simplesmente $udim(R)$ para indicar $udim(R_R)$.

De maneira análoga, definimos a dimensão uniforme à esquerda de um anel com unidade R. Porém, este conceito será pouco abordado neste trabalho e por isso a notação acima não causará confusão alguma. Quando trabalharmos com dimensão uniforme à esquerda, nós deixaremos isso claro.

Dizemos que R satisfaz a *condição de cadeias ascendentes* para anuladores à direita (resp. à esquerda), se toda cadeia ascendente de ideais anuladores à direita (resp. à esquerda) estaciona. Quando isso acontece, dizemos simplesmente que R satisfaz a ACC sobre ideias anuladores à direita (resp. à esquerda). A abreviação ACC deriva do inglês "ascending chain condition".

Com todos esses conceitos, estamos aptos a introduzir o conceito de anel de Goldie.

Definição 1.7 *Um anel R é dito ser um anel de Goldie à direita, se $udim(R) < \infty$ e R satisfaz a ACC sobre ideais anuladores à direita.*

Observamos que todo anel noetheriano à direita é de Goldie à direita. A recíproca, no entanto, não é válida pois claramente todo domínio de integridade comutativo é um anel de Goldie à direita, mas nem todo domínio de integridade é noetheriano.

Analogamente, um anel R é dito ser um anel de Goldie à esquerda se a dimensão uniforme à esquerda de R é finita e R satisfaz a ACC sobre ideais anuladores à esquerda.

Um elemento a de um anel R é dito ser *regular à direita* se $ab = 0$ implica $b = 0$, para $b \in R$. Analogamente, $a \in R$ é *regular à esquerda* se $ba = 0$ implica $b = 0$, para $b \in R$. Finalmente, $a \in R$ é um elemento *regular* se a for regular à direita e à esquerda. O conjunto de todos os elementos regulares de R será denotado por $\mathcal{C}_R$.

Dado um inteiro $m > 0$, dizemos que um anel arbitrário R é livre de m-torção (aditiva) se para todo $0 \neq r \in R$, temos $mr \neq 0$.

Suponhamos que R tem unidade. Dizemos que um elemento não nulo $a \in R$ é *inversível* em R se existe $b \in R$ tal que $ab = ba = 1$. O elemento b (que é único) é dito ser o *inverso* de a em R. Denotamos por $U(R)$ o conjunto de todos os elementos inversíveis de R. É fácil ver que $U(R)$ é um grupo multiplicativo, chamado *grupo das unidades* de R.

Se $R \subseteq Q$ são anéis com a mesma unidade, dizemos que R é uma *ordem à direita* (resp. *à esquerda*) em Q se $\mathcal{C}_R \subseteq U(Q)$ e todo elemento de Q é da forma as^{-1} (resp. $s^{-1}a$), onde $a \in R$ e $s \in \mathcal{C}_R$. Quando isso ocorre, dizemos que Q é um anel de *quocientes clássico à direita* (resp. *à esquerda*) de R e o denotamos por $Q_{cl}^r(R)$ (resp. $Q_{cl}^l(R)$).

Notemos que $x \in Q_{cl}^r(R)$ (resp. $x \in Q_{cl}^l(R)$) se e somente se existe $c \in \mathcal{C}_R$ tal que $xc \in R$ (resp. $cx \in R$). Ressaltamos ainda que um anel clássico de quocientes de um anel nem sempre existe. Para maiores detalhes sobre este assunto, veja §10 de [22].

Os anéis semiprimos de Goldie à direita com unidade sempre possuem um anel clássico de quocientes e além disso ele é semisimples, como mostra o resultado a seguir.

Teorema 1.8 (Teorema de Goldie) *Para um anel com unidade R, são equivalentes:*

(i) R é uma ordem à direita em um anel semisimples artiniano.

(ii) R é um anel semiprimo de Goldie à direita.

(iii) R é semiprimo, $udim(R) < \infty$ e $\mathcal{Z}_r(R) = 0$.

(iv) Para qualquer ideal à direita E de R, $E \lhd_e R$ se e somente se $E \cap \mathcal{C}_R \neq \emptyset$.

O Teorema de Goldie também vale para anéis de Goldie à esquerda.

1.3 Anel de Quocientes de Martindale

Nesta seção vamos construir um anel de quocientes de um anel semiprimo que será de grande importância para o desenvolvimento de nosso trabalho. Trata-se do anel de quocientes de Martindale. Tal anel será fundamental quando estudarmos ações parciais sobre anéis semiprimos na última seção deste capítulo e também nos capítulos seguintes.

Originalmente essa teoria foi desenvolvida para anéis primos, mas Amitsur a generalizou para anéis semiprimos. Por isso, no decorrer desta seção, R sempre denotará um anel semiprimo, não necessariamente com unidade, a menos que se mencione o contrário. Lembramos que $\mathcal{E}(R)$ denota o conjunto de todos os ideais essenciais de R.

Considere o conjunto

$$\mathcal{S} = \{(I, f) \,|\, I \in \mathcal{E}(R), f : I_R \longrightarrow R_R \textit{ é um } R\textit{-homomorfismo à direita}\}$$

e defina a seguinte relação: para quaisquer $(I, f), (J, g) \in \mathcal{S}$,

$$(I, f) \sim (J, g) \Leftrightarrow \exists\ K \in \mathcal{E}(R), K \subseteq I \cap J, \text{ tal que } f\,|_K = g\,|_K.$$

É fácil ver que $\sim$ é uma relação de equivalência sobre $\mathcal{S}$. Denotamos por $[I, f]$ a classe de equivalência de $(I, f) \in \mathcal{S}$ e

$$Q_r(R) = \{[I, f] \,|\, I \in \mathcal{E}(R), f : I \longrightarrow R \text{ é } \textit{um } R\textit{-homomorfismo à direita}\}.$$

Em $Q_r(R)$, definimos as seguintes operações:

$$[I, f] + [J, g] = [I \cap J, f + g] \quad \text{e} \quad [I, f] \cdot [J, g] = [J \cdot I, f \circ g],$$

onde $f + g : I \cap J \longrightarrow R$ é definida por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, para todo $x \in I \cap J$, e $f \circ g : J \cdot I \longrightarrow R$ é definida por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, para todo $x \in J \cdot I$. Note que $f \circ g$ está bem definida, pois $g(J \cdot I) \subseteq I$.

O conjunto $Q := Q_r(R)$ com as operações definidas acima é um anel com elemento neutro $0_Q = [R, 0]$ e unidade $1_Q = [R, id_R]$, chamado *anel de quocientes à direita de Martindale* de R.

O anel de quocientes à esquerda de Martindale de um anel semiprimo R, denotado por $Q_l(R)$, é definido de maneira análoga, considerando-se R-homomorfismos à esquerda no lugar de R-homomorfismos à direita como fizemos acima.

Observe que se R é um anel semiprimo com unidade, então a unidade de R e a unidade de $Q_r(R)$ (e $Q_l(R)$) coincidem.

Se R é um domínio de integridade comutativo, então o corpo das frações de R coincide com o anel de quocientes à direita (à esquerda) de Martindale. Também, de R é simples, então o anel de quaocientes à direita (à esquerda) de Martindale de R concide com o próprio R.

O seguinte resultado é uma caracterização de $Q_r(R)$.

Proposição 1.9 *([2], Proposição 2.2.1) Em $Q_r(R)$ são válidos:*

(i) *R é um subanel de $Q_r(R)$.*

(ii) *Para todo $H \in \mathcal{E}(R)$ e todo R-homomorfismo à direita $f : H \longrightarrow R$, existe um elemento $q \in Q_r(R)$ tal que $f(h) = qh$, para todo $h \in H$.*

(iii) *Se $q \in Q_r(R)$, então existe $J \in \mathcal{E}(R)$ tal que $qJ \subseteq R$.*

(iv) *Se $q \in Q_r(R)$ e $H \in \mathcal{E}(R)$ são tais que $qH = 0$ ou $Hq = 0$, então $q = 0$.*

Mais ainda, $Q_r(R)$ é único, a menos de isomorfismo.

Observamos que R é um subanel de $Q_r(R)$ via o homomorfismo injetor de anéis $R \ni a \longmapsto [R, l_a] \in Q_r(R)$, onde l_a é a multiplicação à esquerda em R determinada por a. Além disso, pelos itens (iii) e (iv), para todo $0 \neq q \in Q_r(R)$, existe $I \in \mathcal{E}(R)$ tal que $0 \neq qI \subseteq R$. Em particular, dois elementos $p, q \in Q_r(R)$ são iguais se e somente se existe $H \in \mathcal{E}(R)$ tal que $(p - q)H = 0$.

Seja A um R-submódulo à direita não nulo de $Q = Q_r(R)$ e considere $0 \neq q \in A$. Então existe $I \in \mathcal{E}(R)$ tal que $0 \neq qI \subseteq R$. Como A é um R-módulo à direita, $qI \subseteq A$ e portanto, $0 \neq qI \subseteq A \cap R$. Disto segue facilmente que Q também é um anel semiprimo. Existem outras propriedades que se transferem de R para Q como vemos no resultado a seguir.

Proposição 1.10 *Em $Q = Q_r(R)$ as seguintes condições são verificadas:*

(i) *Seja n um inteiro positivo. Então, R é livre de n-torção se e somente se Q é livre de n-torção.*

(ii) *Se H é um ideal à direita essencial de R, então HQ é um ideal à direita essencial de Q.*

(iii) *Se F é um ideal à direita essencial de Q, então $F \cap R$ é um ideal à direita essencial de R.*

(iv) *Se U é um ideal à direita uniforme de R, então UQ é um ideal à direita uniforme de Q.*

(v) *Se E é um ideal à direita uniforme de Q, então $E \cap R$ é um ideal à direita uniforme de R.*

(vi) *Se R tem unidade, então $udim(R) = udim(Q)$.*

(vii) $\mathcal{Z}_r(R) = \mathcal{Z}_r(Q) \cap R$;

(viii) *R é não singular à direita se e somente se Q é não singular à direita;*

(ix) *Se R tem unidade, então R é um anel de Goldie à direita se e somente se Q é um anel de Goldie à direita;*

Nós não encontramos a demostração da proposição anterior na literatura, mas ressaltamos que é fácil mostrar cada item. O item (i), por exemplo, é evidente, enquanto que (ii), (iii), (iv), (v) e (vii) seguem da Proposição 1.9(iii) e do fato que todo ideal à direita não nulo de Q intersepta R não trivialmente. Já (vi) é consequência de (ii), (iii), (iv) e (v). O item $(viii)$ segue de (vii) e finalmente, (iv) segue do Teorema 1.8 e dos items (vi) e $(viii)$.

É conhecido que se $\{R_i \,|\, i = 1, \cdots, n\}$ é uma família de anéis semipiprimos (não necessariamente com unidade) então $R = \bigoplus_{i=1}^n R_i$ é um anel semiprimo e portanto existe o anel de quocientes à direta de Martindale de R, bem como de cada R_i. O próximo resultado relaciona tais anéis de quocientes.

Proposição 1.11 *Sejam $\{R_i \,|\, i = 1, \cdots, n\}$ é uma família de anéis semiprimos (não necessariamente com unidade) e $R = \bigoplus_{i=1}^{n} R_i$. Então, $Q_r(R) = \bigoplus_{i=1}^{n} Q_r(R_i)$.*

Nós também não encontramos a demostração deste resultado na literatura e como ela não é difícil, nós a deixamos a cargo do leitor.

Definição 1.12 *O centro do anel $Q = Q_r(R)$ é chamado o centróide estendido de R e é denotado por C.*

Daremos agora uma descrição completa dos elementos do centróide estendido de R.

Proposição 1.13 *([22], Proposição 14.19) Os elementos do centróide estendido de R são da forma $[H, f]$, onde $H \in \mathcal{E}(R)$ e $f : H \longrightarrow R$ é um homomorfismo de R-bimódulos.*

Também temos que um elemento $q \in Q_r(R)$ está em C se e somente se q comuta com todos os elementos de R.

Observação 1.14 É natural se perguntar porque C é chamado de centróide estendido do anel semiprimo R. Para anéis que não possuem necessariamente unidade, existe a noção de "centróide", que é definido como sendo o anel de todos os endomorfismos de R como um (R, R)-bimódulo. Sob razoáveis hipóteses sobre R (por exemplo, $R \cdot R \subseteq R$), pode-se mostrar que o centróide é um anel comutativo (e este concide com o centro de R caso R possui uma unidade). Via Proposição 1.13, o centróide de R pode ser visto como um subanel do centro de $Q_r(R)$. Assim, o centro C de $Q_r(R)$ é um objeto um tanto maior que centróide e, portanto, é razoável chamar C de "centróide estendido"de R.

Para finalizar a seção damos uma descrição completa dos elementos idempotentes de C. Isto nos será útil na seção 1.8 e também na demonstração do Teorema 3.10.

Seja H um ideal não nulo de R e coloque $K_H = H \oplus Ann_R(H) \in \mathcal{E}(R)$. Assim, a aplicação $f_H : K_H \longrightarrow R$ definida por $f_H(a + b) = a$, para $a \in H$ e $b \in Ann_R(H)$, é um homomorfismo de R-bimódulos, de modo que existe $e_H \in C$ tal que $e_H(a + b) = e_H a = a$. Explicitamente, $e_H = [K_H, f_H]$. Claramente, e_H é um elemento idempotente de C. Reciprocamente, seja e um idempotente de C. Então existe $I \in \mathcal{E}(R)$ tal que

$H = eI \subseteq R$. Como e é central em R, $H := eI$ é um ideal de R. Consideremos $K_H = H \oplus Ann_R(H) \in \mathcal{E}(R)$ e $f_H : K_H \longrightarrow R$ definida por $f_H(a+b) = a$, para todo $a \in H$ e $b \in Ann_R(H)$. É fácil ver que $e = e_H = [K_H, f_H]$.

Observamos que tudo o que fizemos nesta seção para o anel de quocientes à direita de Martindale pode ser feito para o anel de quocientes à esquerda de Martindale de um anel semiprimo.

1.4 Contexto de Morita

Nesta seção vamos lembrar dois importantes conceitos da Álgebra. Trata-se dos contextos de Morita e das equivalências de Morita de dois anéis com unidade. Uma equivalência de Morita entre dois anéis com unidade R e S tem uma importância particular, pois com isso é possível transferir muitas propriedades de R para S e vice-versa. Os detalhes deste assunto podem ser encontrados no Capítulo 7 de [22] e no Capítulo 3 de [26].

Nesta seção todos os anéis possuem unidade.

Um *contexto de Morita* é uma sêxtupla $(R, S, V, W, \Gamma, \Gamma')$, onde

(1) R e S são anéis com unidade.

(2) V é um (R, S)-bimódulo e W é um (S, R)-bimódulo.

(3) $\Gamma : V \otimes_S W \longrightarrow R$ e $\Gamma' : W \otimes_R V \longrightarrow S$ são homomorfismos de bimódulos,

que satisfazem as seguintes propriedades associativas:

$$v_1\Gamma'(w \otimes v_2) = \Gamma(v_1 \otimes w)v_2,$$

para quaisquer $v_1, v_2 \in V$ e $w \in W$, e

$$\Gamma'(w_1 \otimes v)w_2 = w_1\Gamma(v \otimes w_2),$$

para quaisquer $v \in V$ e $w_1, w_2 \in W$.

Um contexto de Morita como acima é dito ser uma *equivalência de Morita*, se Γ e Γ' são isomorfismos. É conhecido que isto é equivalente a dizer que Γ e Γ' são sobrejetoras. Quando isso ocorre, dizemos que R e S são anéis Morita equivalentes. Dados dois anéis que são Morita equivalentes, existem várias propriedades que se transferem de um anel para o outro. As propriedades que são preservadas por uma equivalência de Morita são chamadas *Morita invariantes*.

Algumas propriedades Morita invariantes são descritas a seguir. A demonstração pode ser encontrada na página 482 de [22] e nas páginas 84 e 85 de [26].

Proposição 1.15 *Sejam R e S anéis com unidade. Se R e S são Morita equivalentes e R é um anel primo (resp. semiprimo, não singular à direita, semiprimo de Goldie à direita, com dimensão uniforme finita), então S é um anel primo (resp. semiprimo, não singular à direita, semiprimo de Goldie à direita, com dimensão uniforme finita).*

Existem muitas outras propriedades Morita invariantes. Dentre estas propriedades destacamos a dimensão de Krull que será definida na próxima seção.

Quando nós temos apenas um contexto de Morita entre dois anéis, nós podemos relacionar alguns radicais, como veremos a seguir. No entanto, precisamos definir primeiro o conceito de radical.

Definição 1.16 *([18], Definição 2.1.1) Uma classe radical (ou simplesmente um radical) é uma classe de anéis Λ satisfazendo as seguintes condições:*

(i) *Toda imagem homomórfica de um anel de Λ está em Λ.*

(ii) *Para todo anel R, a soma $\Lambda(R) = \sum\{I \lhd R \mid I \in \Lambda\}$ está em Λ.*

(iii) $\Lambda(R/\Lambda(R)) = 0$*, para todo anel R.*

O ideal $\Lambda(R)$ da definição acima é dito ser o Λ-*radical* (ou simplesmente *radical*) do anel R. Um anel R é dito ser um *anel* Λ-*radical* (ou *anel radical*) se $\Lambda(R) = R$.

É conhecido que os radicais primo, de Jacobson e de Levitzki definidos na Seção 1, são exemplos de radicais.

Definição 1.17 *([33], pág. 335) Um radical será chamado de N-radical se as seguintes condições são válidas:*

(N1) Todo anel R tal que $R^2 = 0$ é um anel N-radical.

(N2) Um ideal à esquerda em um anel N-radical é ele mesmo um anel N-radical.

(N3) Um ideal à esquerda não nulo de um anel semisimples não é um anel N-radical.

É fácil ver que os radicais primo, de Jacobson e de Levitzki são exemplos de N-radicais (ver pág. 342 de [33]).

Em [33], A. Sands relaciona os N-radicais dos anéis de um contexto de Morita. Como esta relação nos será útil, nós a apresentamos agora.

Teorema 1.18 *([33], Teorema 2) Se $(R, S, V, W, \Gamma, \Gamma')$ é um contexto de Morita, então para todo N-radical rad temos*

$$\Gamma(V \otimes_S rad(S)W) \subseteq rad(R) \quad e \quad \Gamma'(W \otimes_R rad(R)V) \subseteq rad(S).$$

Dado um anel R, denotamos por $Spec(R)$ o conjunto de todos os ideais primos de R.

Quando existe um contexto de Morita entre dois anéis, então é possível relacionar determinados ideais primos destes anéis.

Teorema 1.19 *([26], Teorema 3.6.2) Seja $(R, S, V, W, \Gamma, \Gamma')$ um contexto de Morita. Então existe uma correspondência biunívoca entre os conjuntos de ideais primos*

$$\{P \in Spec(R) \,|\, \Gamma(V \otimes_S W) \nsubseteq P\} \;\; e \;\; \{P' \in Spec(S) \,|\, \Gamma'(W \otimes_R V) \nsubseteq P'\}$$

dada por $P \longmapsto \{s \in S \,|\, \Gamma(V \otimes_S sW) \subseteq P\}$.

As definições e resultados desta seção serão utilizados especialmente no capítulo 4, quando estudarmos ações parciais sobre anéis semiprimos com uma quase-envolvente.

1.5 Dimensão de Krull

Nesta seção descrevemos uma das dimensões que podem ser atribuidas a qualquer anel ou módulo noetheriano, chamada dimensão de Krull. Segundo McConnel e Robson (ver página 173 de [26]), esta dimensão mede o quão perto um anel ou módulo está de ser artiniano. No caso comutativo, a medida usual é o comprimento máximo de uma cadeia de ideais primos. Porém, para anéis não comutativos, isto não dá uma boa estimativa, visto que, por exemplo, existem muitos anéis noetherianos simples que não estão nem perto de serem artinianos. Por exemplo, dado um corpo K, a álgebra de Weyl sobre K, denotada por $\mathcal{A}_1(K)$, (ver exemplo 1.3 de [21]) é um anel noetheriano simples, mas não é artiniano.

Para anéis não comutativos, a dimensão de Krull é medida sobre o reticulado de ideais à esquerda (conjunto dos ideais à esquerda de um anel) (ou à direita). Assim, se o reticulado é artiniano, a dimensão é zero e dimensão 1 significa que qualquer cadeia com fatores não artinianos deve estacionar.

Ressaltamos ao leitor que as demonstrações dos resultados desta seção podem ser encontrados em no Capítulo 6 de [26] e no Apêndice B de [28].

Lembramos que uma *ordem parcial* em um conjunto X é uma relação binária " $\geq$ " sobre X que é reflexiva, antisimétrica e transitiva, i.é, para quaisquer $a, b, c \in X$, valem:

(i) $a \geq a$ (reflexiva).

(ii) Se $a \geq b$ e $b \geq a$, então $a = b$ (antisimétrica).

(iii) Se $a \geq b$ e $b \geq c$, então $a \geq c$ (transitiva).

Um conjunto com uma ordem parcial é chamado um *conjunto parcialmente ordenado.* Observamos que o conjunto dos números naturais, o conjunto dos números inteiros e o conjunto dos números reais são parcialmente ordenados pela ordem usual. Também, o conjunto de todos os subconjuntos de um conjunto X é parcialmente ordenado pela inclusão " $\supseteq$ ". Finalmente, note que se X e Y são dois conjuntos parcialmente ordenados, então $X \times Y$ é parcialmente ordenado com a ordem parcial dada por $(x, y) \geq (x', y')$ se e somente se $x \geq x'$ e $y \geq y'$.

Dizemos que um conjunto parcialmente ordenado X é *trivial* se X não possui dois elementos distintos comparáveis. Isto significa que a relação de ordem sobre X é a diagonal.

Seja X um conjunto parcialmente ordenado, a, $b \in X$ e $a \geq b$. Definimos a/b como sendo o conjunto $a/b = \{x \in X \,|\, a \geq x \geq b\}$. Este é um subconjunto parcialmente ordenado de A, chamado de *fator* de a por b.

Uma *cadeia descendente* de um conjunto parcialmente ordenado X é uma família $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de X tais que $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq \cdots$; os fatores x_i/x_{i+1} são chamados *fatores da cadeia*. Dizemos que um conjunto parcialmente ordenado X satisfaz a *condição de cadeia descendente* (brevemente DCC, do inglês "descending chain condition"), se para toda cadeia descendente $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq \cdots$ em X existe $m \geq 1$ tal que $x_m = x_{m+1} = \cdots$, i.é, toda cadeia descendente em X estaciona.

Agora nós iremos definir o desvio de um conjunto parcialmente ordenado X. Por comodidade, escrevemos $dev(X)$ para indicar o desvio de X.

Definição 1.20 *Seja X um conjunto parcialmente ordenado. Se X é trivial, então $dev(X) = -\infty$. Se X é não trivial mas satisfaz DCC então $dev(X) = 0$. Para um ordinal n, definimos $dev(X) = n$ se:*

(i) $dev(X) \neq m$, para todo $m < n$;

(ii) Em qualquer cadeia descendente de elementos de X, todos os fatores, salvo uma quantidade finita, tem desvio menor que n.

Notemos que o desvio de um conjunto pode não existir, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 1.21 *([26], Exemplo 6.1.12)* Considere o conjunto $D = \{m/n \in \mathbb{Q} \,|\, 0 \leq m/n \leq 1,$ n é uma potência de $2\}$ e suponha que $dev(D)$ existe. Note que para todo $0 \neq m/n \in D$, existe um isomorfismo entre D e $D \cap [m/2n, m/n]$ dado por $d \longmapsto (d+1)m/2n$. Isto mostra que D tem uma cadeia descendente infinita $\{2^{-k} \,|\, k \in \mathbb{N}\}$, cujos fatores tem o mesmo desvio que D. Mas isso contradiz a definição de desvio. Portanto, $dev(D)$ não existe.

Lema 1.22 *([26], Lema 6.1.5) Se Y é um subconjunto de um conjunto parcialmente ordenado X, então Y é parcialmente ordenado e $dev(Y) \leq dev(X)$.*

O seguinte resultado permite calcular o desvio de um produto direto de dois conjuntos parcialmente ordenados.

Lema 1.23 *([26], Lema 6.1.14) Se X e Y são dois conjuntos parcialmente ordenados, então $dev(X \times Y) = sup\{dev(X), dev(Y)\}$.*

Sejam X e Y dois conjuntos parcialmente ordenados. Uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ é dita ser *estritamente decrescente* se f é injetora e para quaisquer $x_1, x_2 \in X$, se $x_1 \geq x_2$, então $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Lema 1.24 *([28], Lema B.1.1) Sejam X e Y dois conjuntos parcialmente ordenados e $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação estritamente decrescente. Se $dev(Y)$ existe então $dev(X)$ existe e $dev(X) \leq dev(Y)$.*

Dado um R-módulo à direita (ou à esquerda) M, denotamos por $\mathcal{L}_R(M)$ o conjunto de todos os submódulos de M. Como já sabemos, $\mathcal{L}_R(M)$ é um conjunto parcialmente ordenado pela inclusão " $\supseteq$ ", que é chamado o *reticulado dos submódulos* de M.

Definição 1.25 *Para um R-módulo à direita M, a dimensão de Krull de M, denotada por $Kdim(M_R)$, é definida como sendo $Kdim(M_R) = dev(\mathcal{L}_R(M))$. Se $dev(\mathcal{L}_R(M))$ não existe, dizemos que a dimensão de Krull de M não existe.*

Para um R-módulo à esquerda M, a dimensão de Krull é definida de maneira análoga e denotada por $Kdim({}_RM)$.

A dimensão de Krull à direita (resp. à esquerda) de um anel R é definida como sendo a dimensão de Krull de R visto como R-módulo à direita (resp. à esquerda). Por comodidade denotamos a dimensão de Krull à direita de R por $Kdim(R)$. Isto não causará confusão, pois nós não trabalharemos com dimensão de Krull à esquerda de anéis.

Como consequência imediata do Lema 1.22, temos o

Lema 1.26 *Se M é um R-módulo à direita (resp. à esquerda) com dimensão de Krull e N é um submódulo de M, então N tem dimensão de Krull e $Kdim(N_R) \leq Kdim(M_R)$ (resp. $Kdim(_RN) \leq Kdim(_RM)$).*

Utilizando a noção de dimensão de Krull é possível dizer quando um anel semiprimo é um anel de Goldie.

Proposição 1.27 *([26], Proposição 6.3.5) Um anel semiprimo com dimensão de Krull é um anel de Goldie à direita.*

1.6 Ações Globais de Grupos Sobre Anéis

Nesta seção apresentamos alguns resultados conhecidos para o skew anel de grupo global. Como não faremos as demonstrações dos resultados aqui incluídos, deixaremos sempre indicado uma referência onde o leitor pode encontrá-las.

Seja T um anel, $Aut(T)$ o grupo dos automorfismos de T e G um grupo com elemento neutro 1_G. Uma *ação* (*global*) de G sobre T é uma aplicação $\beta : G \ni g \longmapsto \beta_g \in Aut(T)$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\beta_{1_G} = Id_T$.

(ii) $\beta_g \circ \beta_h(t) = \beta_{gh}(t)$, para quaisquer $g, h \in G$ e qualquer $t \in T$.

Observamos que por definição, β é um homomorfismo de grupos, de modo que $G/ker(\beta)$ e $Im(\beta)$ são grupos isomorfos. Portanto, toda ação global β de um grupo G sobre T induz uma ação global $\overline{\beta}$ de $G/ker(\beta)$ sobre T. Por isso podemos supor sem perda de generalidade que G é um subgrupo de $Aut(T)$.

Uma ação global como a anterior será denotada por (T, β) (ou simplesmente β quando não houver confusão) e neste caso dizemos que G age globalmente sobre T.

Para não nos tornarmos repetitivos, no decorrer desta seção vamos considerar T um anel com unidade, G um grupo e β uma ação global de G sobre T.

Denotamos por T^G o *subanel dos elementos invariantes* de T pela ação de G, i.é,

$$T^G = \{t \in T \mid \beta_g(t) = t, \ \ para \ \ todo \ \ g \in G\}.$$

Se G for um grupo finito, a aplicação *traço* $tr_G : T \longrightarrow T^G$ é definida por $tr_G(t) = \sum_{g \in G} \beta_g(t)$, para todo $t \in T$.

O *skew anel de grupo (global)* de uma ação β de G sobre T, denotado por $T *_\beta G$, é o conjunto de todas as somas formais finitas $\sum_{g \in G} t_g u_g$, onde $t_g \in T$ e u_g são símbolos, para todo $g \in G$. A adição é definida de maneira usual e a multiplicação é determinada por

$$au_g.bu_h = a\beta_g(b)u_{gh}.$$

A semiprimidade de um skew anel de grupos $T *_\beta G$ já foi estudada para os casos em que G é um grupo finito ou cíclico infinito.

Teorema 1.28 *([32], Corolário 18.12 e [26], Teorema 1.4.5) Para um skew anel de grupo $T *_\beta G$ são válidos:*

(i) Se G é finito e T é semiprimo livre de $|G|$-torção, então $T *_\beta G$ é semiprimo.

(ii) Se G é cíclico infinito e T é semiprimo, então $T *_\beta G$ é semiprimo.

O próximo resultado, devido a J. Osterburg, dá condições necessárias e suficientes para que um skew anel de grupos seja um anel semiprimo de Goldie à direita, no caso em que o grupo é finito.

Teorema 1.29 *([29], Teorema 2) Suponhamos que G é um grupo finito e que T é livre de $|G|$-torção. Então T é um anel semiprimo de Goldie à direita se e somente se $T *_\beta G$ é um anel semiprimo de Goldie à direita.*

Nós dizemos que um grupo H é *policíclico por finito* se existe uma cadeia finita de subgrupos $1 = H_0 \lhd H_1 \lhd \cdots \lhd H_n = H$ tal que cada H_{i-1} é normal em H_i e cada grupo quociente H_i/H_{i-1} é ou um grupo cíclico infinito ou um grupo finito, $1 \leq i \leq n$. No caso em que todos os grupos quocientes H_i/H_{i-1}, $i = 1, \cdots, n$ são cíclicos infinitos, dizemos que H é *policíclico infinito*.

Para grupos policíclicos infinitos, J. Matczuk obteve o seguinte resultado.

Teorema 1.30 *([25], Corolário 3.4) Se G é um grupo policíclico infinito, então:*

(i) $udim(T *_\beta G) = udim(T)$ *e* $\mathcal{Z}_r(T *_\beta G) = \mathcal{Z}_r(T)(T *_\beta G)$.

(ii) Se T é semiprimo, então $T *_\beta G$ é um anel semiprimo de Goldie à direita se e somente se T é um anel de Goldie à direita.

1.7 Ações Parciais de Grupos

Na seção anterior definimos o conceito de ação (global) de um grupo sobre um anel e apresentamos o chamado skew anel de grupo global. Agora vamos estudar ações parciais de grupos sobre anéis. Além de apresentar a definição de ação parcial, definimos também dois conceitos muito importantes: as ações envolventes e o skew anel de grupo parcial. Num contexto puramente algébrico, estas definições foram dadas pela primeira vez por M. Dokuchaev e R. Exel em [9]. Também apresentamos alguns resultados, cujas demonstrações podem ser encontradas em [3], [4], [9], [15] e [17].

Embora estejamos interessados basicamente em ações parciais de grupos sobre anéis, daremos a seguir a definição geral.

Definição 1.31 *Seja G um grupo com elemento neutro 1_G e X um conjunto não vazio. Uma ação parcial de G sobre X é uma coleção de subconjuntos D_g de X e bijeções $\alpha_g : D_{g^{-1}} \longrightarrow D_g$, $g \in G$, tais que:*

(i) $D_{1_G} = X$ *e* α_{1_G} *é a função identidade de* X.

(ii) $\alpha_h^{-1}(D_{g^{-1}} \cap D_h) \subseteq D_{(gh)^{-1}}$, *para quaisquer* $g, h \in G$.

(iii) $(\alpha_g \circ \alpha_h)(x) = \alpha_{gh}(x)$, *para quaisquer* $g, h \in G$ *e* $x \in \alpha_h^{-1}(D_{g^{-1}} \cap D_h)$.

Denotamos por $\alpha = \{\alpha_g : X_{g^{-1}} \longrightarrow X_g \,|\, g \in G\}$ ou simplesmente por α uma ação parcial de um grupo G sobre o conjunto X.

Observamos que pelo item (iii), $(\alpha_g \circ \alpha_{g^{-1}})(x) = x$ e $(\alpha_{g^{-1}} \circ \alpha_g)(y) = y$, para todo $x \in D_g$ e todo $y \in D_{g^{-1}}$. Assim, $\alpha_g^{-1} = \alpha_{g^{-1}}$, para todo $g \in G$. Além disso, um cálculo simples nos mostra que $\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) = D_g \cap D_{gh}$, para quaisquer $g, h \in G$. Assim, as condições $(i) - (iii)$ acima são equivalentes as seguintes:

(i') $D_{1_G} = X$ e α_{1_G} é a função identidade de X.

(ii') $\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) = D_g \cap D_{gh}$, para quaisquer $g, h \in G$

(iii') $\alpha_g(\alpha_h(x)) = \alpha_{gh}(x)$, para quaisquer $g, h \in G$ e $x \in D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}$.

Obviamente, quando o conjunto X possui alguma estrutura, os subconjuntos D_g bem como as aplicações α_g deverão ter relações com a estrutura em questão. No nosso caso, $X = R$ será sempre um anel, não necessariamente com unidade. Além disso, os subconjuntos D_g serão ideias bilaterais, e as aplicações α_g serão isomorfismos de anéis.

Formalmente temos a

Definição 1.32 *Uma ação parcial α de um grupo G sobre um anel R é uma família de ideais $\{D_g\}_{g \in G}$ e isomorfismos de anéis $\alpha_g : D_{g^{-1}} \longrightarrow D_g$ tais que os itens $(i) - (iii)$ da Definição 1.31 são verificadas.*

Se na definição anterior tomarmos $D_g = R$, para todo $g \in G$, então temos exatamente a definição de ação global apresentada na seção anterior. Por isso podemos dizer que a definição de ação parcial estende a definição de ação global.

Assim como no caso global, a definição anterior permite definir a noção de skew anel de grupos parcial.

Definição 1.33 *Seja α uma ação parcial de um grupo G sobre um anel R. O skew anel de grupos parcial, denotado por $R *_\alpha G$, é definido como sendo o conjunto de todas as somas formais finitas $\sum\limits_{g \in G} a_g u_g$, onde $a_g \in D_g$ e os $u_g{}'s$ são símbolos. A adição é definida de maneira usual e a multiplicação é determinada por*

$$a_g u_g \cdot a_h u_h = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g) a_h) u_{gh}.$$

É fácil ver que esta multiplicação está bem definida.

Observação 1.34 Note que se na definição de ação parcial de grupo sobre um anel tivessemos considerado cada D_g como um subanel e não como um ideal de R, então a multiplicação $a_g u_g \cdot a_h u_h = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)a_h)u_{gh}$ não estaria bem definida.

Um problema em aberto na área de ações parciais é dar condições necessárias e suficientes para que o skew anel grupos parcial seja associativo. Existem algumas condições suficientes, como por exemplo, quando R é semiprimo ou quando α possui uma envolvente. Este último conceito é definido agora:

Definição 1.35 *Seja α um ação parcial de um grupo G sobre um anel R. Dizemos que uma ação global β de G sobre um anel T é uma envolvente (ou uma globalização) de α se existe um isomorfismo de anéis φ de R sobre um ideal de T, tal que para cada $g \in G$, valem:*

(i) $\varphi(D_g) = \varphi(R) \cap \beta_g(\varphi(R))$.

(ii) $\varphi(\alpha_g(x)) = \beta_g(\varphi(x))$, *para todo* $x \in D_{g^{-1}}$.

(iii) $T = \sum_{g \in G} \beta_g(\varphi(R))$.

Notemos que se (T, β) é uma envolvente de α, então podemos identificar R com o ideal $\varphi(R)$ de T. Assim, com esta identificação podemos dizer, sem perda de generalidade, que (T, β) é uma envolvente de α se R é um ideal de T e as se seguintes condições são satisfeitas:

(1) $D_g = R \cap \beta_g(R)$, para todo $g \in G$.

(2) $\alpha_g(x) = \beta_g(x)$, para todo $g \in G$ e todo $x \in D_{g^{-1}}$.

(3) $T = \sum_{g \in G} \beta_g(R)$.

Definição 1.36 *Duas ações globais (T, β) e (T', β') de um grupo G sobre T e T' são equivalentes se existe um isomorfismo de anéis $\phi : T \longrightarrow T'$tal que $\beta'_g \circ \phi = \phi \circ \beta_g$, para todo $g \in G$.*

Quando R possui unidade, Dokuchaev e Exel em [9] deram condições necessárias e suficientes para que uma ação parcial admita uma envolvente.

Teorema 1.37 *([9], Teorema 4.5) Sejam R um anel com unidade e α uma ação parcial de um grupo G sobre R. Então, α possui uma envolvente (T, β) se e somente se cada ideal D_g, $g \in G$, é um anel com unidade. Além disso, se (T, β) existe, então ela é única a menos de equivalências.*

No teorema acima, a condição de que cada ideal D_g, $g \in G$, é um anel com unidade significa que cada D_g é gerado por um idempontente central de $1_g \in R$. Pela definição de ação envolvente tal idempotente é dado por $1_g = 1_R\beta_g(1_R)$, para todo $g \in G$.

Observamos que se uma ação parcial α de um grupo G sobre um anel R possui uma envolvente (T, β), então $R *_\alpha G$ pode ser mergulhado em $T *_\beta G$. Em particular, $R *_\alpha G$ é associativo.

Agora, introduzimos uma condição de finitude para ações parciais.

Definição 1.38 *Dizemos que uma ação parcial α de um grupo G sobre um anel R é de tipo finito, se existe um subconjunto finito $\{g_1, \cdots, g_n\}$ de G tal que $R = \sum\limits_{1 \leq i \leq n} D_{gg_i}$, para todo $g \in G$.*

É fácil ver que toda ação parcial de um grupo finito sobre um anel é de tipo finito.

A definição anterior apareceu pela primeira vez em [6] para ações parciais de grupos cíclicos infinitos sobre anéis semiprimos. A definição geral de ação parcial de tipo finito foi dada em [15] e algumas propriedades destas ações parciais podem ser encontradas em [3] e [15].

A seguir apresentamos uma caracterização do conceito anterior.

Proposição 1.39 *([15], Proposição 1.2) Seja α uma ação parcial de um grupo G sobre um anel com unidade R com envolvente (T, β). Então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) α é de tipo finito.

(ii) *Existem* $g_1, \cdots, g_n \in G$ *tais que* $T = \sum_{1 \leq i \leq n} \beta_{g_i}(R)$.

(iii) T *é um anel com unidade.*

Se uma ação parcial de um grupo G sobre um anel com unidade R é de tipo finito, então pela Proposição 1.39, existe um menor inteiro $n \geq 1$ e elementos $g_1, \cdots, g_n \in G$ tais que $T = \sum_{1 \leq i \leq n} \beta_{g_i}(R)$. Neste caso dizemos que α tem *ordem* n.

O próximo resultado é uma coleção de propriedades da envolvente de uma ação parcial. Tais resultados podem ser encontrados na Seção 1 de [15] e fazem parte da tese de doutorado de J. Lazzarin (ver [24]).

Proposição 1.40 *Sejam* R *um anel com unidade,* α *uma ação parcial de um grupo* G *sobre* R *e* (T, β) *uma envolvente de* α*. Então as seguintes propriedades se verificam:*

(i) R *é semiprimo se e somente se* T *é semiprimo.*

(ii) T *é semisimples se e somente se* R *é semisimples e* α *é de tipo finito.*

(iii) T *é artiniano (noetheriano) à esquerda (à direita) se e somente se* R *é artiniano (noetheriano) à esquerda (à direita) e* α *é de tipo finito.*

(iv) *Se* α *é de tipo finito, então* $udim(R) \leq udim(T) \leq o(\alpha)udim(R)$*, onde* $o(\alpha)$ *denota a ordem de* α.

(v) R *é não singular à direita se e somente se* T *é não singular à direita.*

(vi) T *é um anel semiprimo de Goldie à direita se e somente se* R *é um anel semiprimo de Goldie à direita e* α *é de tipo finito.*

(vii) *Se* m *é um inteiro positivo, então* R *é livre de* m*-torção se e somente se* T *é livre de* m*-torção.*

A seguir apresentamos um resultado que relaciona os anéis $R *_\alpha G$ e $T *_\beta G$, sempre que α é de tipo finito, i.é, sempre que T é um anel com unidade.

Teorema 1.41 *([9], Teorema 5.4) Sejam R um anel com unidade e α uma ação parcial de tipo finito de um grupo G sobre R com envolvente (T, β). Então $R *_{\alpha} G$ e $T *_{\beta} G$ são Morita equivalentes.*

Em [15], os autores utilizaram o teorema anterior para provar o seguinte resultado:

Proposição 1.42 *([15], Proposição 5.3 e Corolário 6.8) Sejam R um anel com unidade e α uma ação parcial com envolvente de um grupo finito G sobre R.*

(i) Se R é um anel semiprimo livre de $|G|$-torção, então $R *_{\alpha} G$ é semiprimo.

(ii) Se R é Jacobson-semisimples e $|G|$ é inversível em R, então $R *_{\alpha} G$ é Jacobson-semisimples.

Assim como no caso global, é possível definir o subanel dos elementos α-invariantes.

Definição 1.43 *Seja α uma ação parcial de um grupo G sobre um anel R. O subanel dos elementos α-invariantes (ou subanel α-fixo) de R é definido como sendo o conjunto*

$$R^{\alpha} = \{x \in R \,|\, \alpha_g(xa) = x\alpha_g(a), \text{ para todo } g \in G \text{ e todo } a \in D_{g^{-1}}\}.$$

Observamos que o conceito de subanel dos elementos α-invariantes foi estabelecido pela primeira vez em [10] para o caso parcial.

É fácil ver que se uma ação parcial α de um grupo G sobre um anel com unidade R admite uma envolvente, i.é, cada D_g é gerado por um idempotente central $1_g \in R$, então o subanel dos elementos α-invariantes de R é dado por

$$R^{\alpha} = \{x \in R \,|\, \alpha_g(x1_{g^{-1}}) = x1_g, \text{ para todo } g \in G\}.$$

O anel dos elementos α-invariantes para ações parciais com envolvente (para grupos finitos) foi estudado, especialmente, em [17] e [20]. Neste último artigo, por exemplo, os autores mostram que existe um contexto de Morita entre o anel dos elementos α-invariantes e o skew anel de grupos parcial e que sob certas condições esse contexto é, de fato, uma equivalência de Morita. Porém, nós temos interesse especial no seguinte resultado de [17].

Teorema 1.44 *([17], Teorema 1.4) Se α é uma ação parcial de um grupo finito G sobre um anel com unidade R com envolvente (T, β), então $R^\alpha = T^G 1_R$ e R^α é um anel isomorfo a T^G.*

Além do teorema acima, nas Seções 1 e 5 de [17] encontramos os seguinte resultado:

Teorema 1.45 *([17], Corolário 1.8, Teoremas 5.5 e 5.6) Seja α é uma ação parcial de um grupo finito G sobre um anel com unidade R que admite uma envolvente (T, β). Se R é semiprimo e livre de $|G|$-torção, então:*

(i) R^α é semiprimo.

(ii) $udim(R^\alpha) \leq udim(R) \leq |G| udim(R^\alpha)$.

(iii) R^α é um anel de Goldie à direita se e somente se R é um anel de Goldie à direita.

1.8 Extensão de Ações Parciais Sobre Anéis Semiprimos

Em [13], M. Ferrero mostrou que sempre é possível estender uma ação parcial sobre um anel semiprimo R ao seu anel de quocientes de Martindale Q de R e que tal extensão sempre admite uma envolvente. Nesta seção introduzimos os conceitos e resultados necessários para podermos enunciar o teorema obtido por Ferrero que garante a existência da extensão citada. Maiores detalhes que não apresentamos, podem ser encontrados em [13].

Vamos estabelecer primeiro algumas notações que serão utilizadas durante a seção: R é um anel semiprimo (não necessariamente com unidade), Q é o anel de quociente à direita de Martindale de R e C é o centróide estendido de R.

Definição 1.46 *Dado um ideal I de R, o fecho de I em R é definido como sendo o conjunto*

$$\begin{aligned} [I] &= \{x \in R \,|\, \exists\ H \in \mathcal{E}(R)\, com\, xH \subseteq I\} \\ &= \{x \in R \,|\, \exists\ H \in \mathcal{E}(R)\, com\, Hx \subseteq I\}. \end{aligned}$$

É fácil ver que $[I] = Ann_R(Ann_R(I))$ e assim, $[I]$ é um ideal de R que contém I. Dizemos que I é um ideal fechado se $I = [I]$. Portanto, os ideais fechados de R são os ideais anuladores. Além disso, $[[I]] = [I]$, i.é, o fecho de um ideal é um ideal fechado.

Notamos que se R é um anel semiprimo e I é um ideal de R tal que I é um somando direto de R, então I é um ideal fechado de R. Em particular, todo ideal de um anel semisimples é fechado. Por outro lado, os únicos ideais fechados de um anel primo são os ideais triviais.

Por resultados de [12], existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos ideais fechados de R, o conjunto dos ideais Q-fechados de Q e o conjunto dos ideais C-fechados de C. Esta correspondência é dada da seguinte maneira: sejam A um ideal fechado de R, A^* um ideal fechado de Q e A_0 um ideal fechado de C. Então estes ideais são correspondentes se e somente se $A^* \cap R = A$ (equivalentemente $A^* = \{q \in Q \mid \exists\ H \in \mathcal{E}(R)\, com\, qH \subseteq A\}$) e $A^* \cap C = A_0$ (equivalentemente $A^* = A_0 Q$).

É fácil ver que para qualquer ideal I de R, o ideal fechado I^* de Q correspondente ao fecho $[I]$ de I em R é dado pelo ideal $I^* = \{q \in Q \mid \exists\ H \in \mathcal{E}(R)\, com\, qH \subseteq I\}$.

Vimos na Seção 1.3 que os elementos idempotentes de C são da forma e_H, para algum ideal não nulo H de R, onde $e_H(a + b) = a$, para todo $a + b \in H \oplus Ann_R(H)$, $a \in H$ e $b \in Ann_r(H)$. É fácil verificar que se A^* é um ideal fechado de Q, então $A^* = e_A Q$, onde A é o ideal de R correspondente a A^*.

Consideremos um ideal não nulo A de R. Então A é semiprimo como anel, pois se $a \in A$ e $aAa = 0$, então $Aa \cdot Aa = 0$ o que implica que $Aa = 0$ e assim, $a \in A \cap Ann_r(A) = 0$. Portanto existe o anel de quocientes à direita de Martindale $Q_r(A)$ de A.

Proposição 1.47 *([13], Proposição 2.2) Com a notação acima, existe um isomorfismo $\psi : Q_r(A) \longrightarrow A^*$ tal que $\psi|_A = Id_A$.*

Pela proposição anterior, se A é um ideal de R, então podemos ver A^* (ideal fechado de Q correspondente a $[A]$) como sendo o anel de quocientes à direita de Martindale de A.

Sejam A e B dois ideais de R, $\phi : A \longrightarrow B$ um isomorfismo de anéis e $q \in Q_r(A)$. Então existe $H \in \mathcal{E}(A)$ e um A-homomorfismo à direita $f : H \longrightarrow A$ tais que $qh = f(h)$, para todo $h \in H$. Note que $\phi(H) \in \mathcal{E}(B)$ e que $\phi^*(f) : \phi(H) \longrightarrow B$ definida por $\phi^*(f)(\phi(h)) = (\phi \circ f)(h)$, para todo $h \in H$, é um B-homomorfismo à direita. É fácil verificar que $\phi^* : Q_r(A) \longrightarrow Q_r(B)$ definida por $\phi^*(q) = [\phi(H), \phi^*(f)]$, para todo $q \in Q_r(A)$, é um isomorfismo de anéis que estende ϕ.

Em resumo temos o seguinte resultado:

Proposição 1.48 *([13], Proposição 2.3) Suponhamos que A e B são ideais de R e que $\phi : A \longrightarrow B$ é um isomorfismo de anéis. Então existe um único isomorfismo de anéis $\phi^* : Q_r(A) \longrightarrow Q_r(B)$ que estende ϕ.*

Finalmente estamos aptos a enunciar o principal resultado dessa seção.

Teorema 1.49 *([13], Teoremas 1.6 e 3.1) Sejam G um grupo, R um anel semiprimo e $\alpha = \{\alpha_g : D_{g^{-1}} \longrightarrow D_g \mid g \in G\}$ uma ação parcial de G sobre R. Para todo $g \in G$, denote por D_g^* o ideal fechado de Q correspondente ao fecho $[D_g]$ de D_g em R. Então existe uma ação parcial $\alpha^* = \{\alpha_g^* : D_{g^{-1}}^* \longrightarrow D_g^* \mid g \in G\}$ de G sobre Q tal que $\alpha_g^* |_{D_{g^{-1}}} = \alpha_g$, para todo $g \in G$. Mais ainda, α^* admite uma ação envolvente (T, β).*

Dizemos que α^* é a extensão de α a Q. Note que o fato de que α^* admite uma envolvente é imediato, uma vez que cada ideal D_g^*, $g \in G$, é gerado por um idempotente central de Q.

Notemos também que uma extensão análoga a do teorema anterior pode ser obtida para o anel de quocientes à esquerda de Martindale de R.

Encerramos a seção com as seguintes observações em relação ao último teorema.

Observação 1.50 O teorema anterior é um dos mais importantes para o desenvolvimento do nosso trabalho. Primeiro, com ele podemos concluir que $R *_\alpha G$ é um anel associativo. Mais ainda, nós temos o seguinte diagrama de anéis:

$$\begin{array}{ccccc} R & \hookrightarrow & Q & \hookrightarrow & T \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ R *_\alpha G & \hookrightarrow & Q *_{\alpha^*} G & \hookrightarrow & T *_\beta G \end{array}$$

Este diagrama nos permite demonstrar algumas propriedades de $R *_\alpha G$, como veremos no Capítulo 2. Finalmente, observamos que $T' = \sum_{g \in G} \beta_g(R)$ é um subgrupo aditivo de $T = \sum_{g \in G} \beta_g(Q)$ e que $\beta' = \beta|_{T'}$ é uma ação de G sobre T'. No Capítulo 3, daremos condições necessárias e suficientes para que T' seja um anel e (T', β') seja uma envolvente de α.

Capítulo 2

O Skew Anel de Grupos Parcial e Anéis de Goldie

Lembramos que o skew anel de grupo parcial para ações parciais com envolvente foi bastante estudado por vários autores, mas há poucos resultados conhecidos para ações parciais que não admitem necessariamente uma envolvente. O artigo [6] de W. Cortes, M. Ferrero e H. Marubayashi é um dos poucos neste sentido. Nele os autores estudaram o skew anel grupo parcial para o caso em que G é um grupo cíclico infinito e R é um anel semiprimo com unidade e mostraram, por exemplo, que a dimensão uniforme à direita de R e $R *_\alpha G$ são iguais. Mais ainda, mostraram que R é um anel de Goldie à direita se e somente se $R *_\alpha G$ é um anel semiprimo de Goldie à direita.

Neste capítulo vamos considerar R um anel semiprimo com unidade, α uma ação parcial de um grupo G sobre R e provar resultados semelhantes aos encontrados em [6] para os seguintes casos: G é finito e R é livre de $|G|$-torção; G é policíclico infinito e α é de tipo finito; G é policíclico por finito, α é de tipo finito. Para tanto, a nossa estratégia é estudar algumas propriedades que se transferem de $R *_\alpha G$ para $Q *_{\alpha^*} G$ e vice-versa, onde Q é o anel de quocientes à direita de Martindale de R e α^* é a extensão de α a Q. Assim sendo, podemos utilizar resultados já conhecidos para estabelecer propriedades de $R *_\alpha G$.

Primeiro, provamos que todo ideal à direita não nulo de $Q *_{\alpha^*} G$ intercepta $R *_\alpha G$ não trivialmente e descrevemos a relação entre o ideal singular à direita de $R *_\alpha G$ e o ideal singular à direita de $Q *_{\alpha^*} G$. Como consequência disto, obtemos que $R *_\alpha G$ é não singular à direita se e somente se $Q *_{\alpha^*} G$ é não singular à direita. Em seguida mostramos que $udim(R *_\alpha G) = udim(Q *_{\alpha^*} G)$. Na sequência, obtemos generalizações do Teorema de Osterburg e do Teorema de Matczuk (ver Teoremas 1.29 e 1.30(ii)) para o caso parcial. Finalizamos o capítulo estudando a dimensão de Krull e mostrando que se R tem dimensão de Krull à direita então $R *_\alpha G$ também tem dimensão de Krull à direita.

2.1 Condições para $R *_\alpha G$ ser um Anel Semiprimo de Goldie

Para não nos tornarmos repetitivos, vamos estabelecer agora algumas notações que serão usadas durante todo o capítulo, a menos que se mencione o contrário.

• R é um anel semiprimo com unidade, Q é o anel de quocientes à direita de Martindale de R e G é um grupo

• $\alpha = \{\alpha_g : D_{g^{-1}} \longrightarrow D_g \mid g \in G\}$ é uma ação parcial (não necessariamente com envolvente) de G sobre R, $\alpha^* = \{\alpha_g^* : D_{g^{-1}}^* \longrightarrow D_g^* \mid g \in G\}$ é a extensão de α a Q definida em [13] (ver seção 1.8) e (T, β) é a envolvente de α^*.

O primeiro resultado deste capítulo mostra que se α é de tipo finito, então α^* também é tipo finito. No entanto, para provarmos isso nós precisamos do seguinte lema:

Lema 2.1 *([9], Lema 2.4) Sejam R um anel com unidade qualquer e I um ideal de R gerado por dois idempotentes centrais $e_1, e_2 \in R$. Então I é gerado por um único idempotente central de R dado por $e = e_1 + e_2 - e_1e_2$.*

Proposição 2.2 *Se α é uma ação parcial de tipo finito, então α^* também é uma ação parcial de tipo finito.*

Demonstração: Suponhamos que α é de tipo finito. Então, existe $\{g_1, \cdots, g_n\} \subseteq G$ tal que $R = \sum_{i=1}^{n} D_{gg_i}$, para todo $g \in G$. Vamos mostrar que $Q = \sum_{i=1}^{n} D^*_{gg_i}$, para todo $g \in G$.

De fato, como cada ideal $D^*_{gg_i}$ é gerado por um idempotente central de Q, temos do lema anterior que existe um idempotente central $e \in Q$ tal que $\sum_{i=1}^{n} D^*_{gg_i} = Qe$. É fácil ver que $f = 1_Q - e$ é um idempotente central de Q tal que $Q = Qe \oplus Qf$.

Se $qf \in Qf$, então existe $H \in \mathcal{E}(R)$ tal que $(qf)H \subseteq Qf \cap R \subseteq Qf \cap \sum_{i=1}^{n} D_{gg_i} \subseteq Qf \cap \sum_{i=1}^{n} D^*_{gg_i} = Qf \cap Qe = 0$. Logo $Qf = 0$ e temos $Q = \sum_{i=1}^{n} D^*_{gg_i}$, para todo $g \in G$. □

Observação 2.3 Pela Proposição 2.2 e pelo Teorema 1.41, se α é de tipo finito, então $Q *_{\alpha^*} G$ e $T *_\beta G$ são Morita equivalentes.

A seguir demonstramos uma das propriedades mais importantes da extensão de anéis $R *_\alpha G \subseteq Q *_{\alpha^*} G$, pois como veremos adiante, a maioria dos resultados deste capítulo são demonstrados usando-se esta propriedade de maneira direta ou indireta.

Lema 2.4 *Na extensão de anéis $R *_\alpha G \subseteq Q *_{\alpha^*} G$ as seguintes propriedades se verificam:*

(i) Se $y \in Q *_{\alpha^*} G$ é não nulo, então existe $H \in \mathcal{E}(R)$ tal que $0 \neq yH \subseteq R *_\alpha G$. Mais ainda, se $y_1, \cdots, y_m \in Q *_{\alpha^*} G$, então existe $E \in \mathcal{E}(R)$ tal que $y_j E \subseteq R *_\alpha G$, para todo $j = 1, \cdots, m$.

(ii) Se $y \in Q *_{\alpha^*} G$ e $H \in \mathcal{E}(R)$ são tais que $yH = 0$ ou $Hy = 0$, então $y = 0$.

Demonstração: (i) Seja $y = \sum_{i=1}^{n} q_{g_i} u_{g_i} \in Q *_{\alpha^*} G$ um elemento não nulo. Podemos supor sem perda de generalidade que os índices g_i's que aparecem em y são todos distintos entre si e que os coeficientes q_{g_i} são todos não nulos, para $i = 1, \cdots, n$.

Para cada $g \in G$, denote por 1_g o idempotente central de Q que gera D^*_g. Daí, $y = \sum_{i=1}^{n} (1_{g_i} u_{g_i}) p_i$, onde $p_i \in D^*_{g_i^{-1}}$ e $\alpha^*_{g_i}(p_i) = q_{g_i}$, para $1 \leq i \leq n$.

Sabemos que para todo $i = 1, \cdots, n$ existe $H_i \in \mathcal{E}(R)$ tal que $p_i H_i \subseteq D_{g_i^{-1}}$. Tomando $H = \bigcap_{i=1}^{n} H_i \in \mathcal{E}(R)$, temos que $p_i H \subseteq D_{g_i^{-1}}$, para todo $i = 1, \cdots, n$. Assim, para todo $b \in H$,

$$\begin{aligned} yb &= \sum_{i=1}^{n} (1_{g_i} u_{g_i})(p_i b) = \sum_{i=1}^{n} \alpha^*_{g_i}(\alpha^*_{g_i^{-1}}(1_{g_i}) p_i b) u_{g_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha^*_{g_i}(1_{g_i^{-1}} p_i b) u_{g_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha^*_{g_i}(p_i b) u_{g_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{g_i}(p_i b) u_{g_i} \in R *_\alpha G, \ \textit{pois } p_{g_i} b \in p_i H \subseteq D_{g_i^{-1}}. \end{aligned}$$

Agora, em particular, $p_1 = \alpha^*_{g_1^{-1}}(q_{g_1}) \neq 0$ e portanto, pela Proposição 1.9 (iv), existe $a \in H$ tal que $p_1 a \neq 0$. Deste modo, $R *_\alpha G \ni ya = \alpha_{g_1}(p_1 a) u_{g_1} + \sum_{i=2}^{n} \alpha_{g_i}(p_i a) u_{g_i} \neq 0$. Logo, $0 \neq yH \subseteq R *_\alpha G$.

Mais ainda, se $y_1, \cdots, y_m \in Q *_{\alpha^*} G$, então para cada $j = 1, \cdots, m$ existe $E_j \in \mathcal{E}(R)$ tal que $y_j E_j \subseteq R *_\alpha G$. Tomando $E = \bigcap_{j=1}^{m} E_j \in \mathcal{E}(R)$, obtemos $y_j E \subseteq R *_\alpha G$, para todo $j = 1, \cdots, m$.

(ii) Vamos considerar apenas o caso $yH = 0$, pois o outro é análogo. Suponhamos que existe um elemento não nulo $y = \sum_{i=1}^{n} q_{g_i} u_{g_i} \in Q *_{\alpha^*} G$ e um ideal essencial H de R tais que $yH = 0$. Da mesma maneira que no item (i), podemos supor sem perda de generalidade que os índices $g_i's$ que aparecem em y são todos distintos entre si e que os coeficientes q_{g_i}'s são todos não nulos. Em particular, $\alpha^*_{g_1^{-1}}(q_{g_1}) \neq 0$. Assim, $\alpha^*_{g_1^{-1}}(q_{g_1}) H \neq 0$, de onde obtemos que $\alpha^*_{g_1}(\alpha^*_{g_1^{-1}}(q_{g_1}) H) \neq 0$. Deste modo, existe $a \in H$ tal que $\alpha^*_{g_1}(\alpha^*_{g_1^{-1}}(q_{g_1}) a) \neq 0$. Portanto,

$$yH \ni ya = \alpha^*_{g_1}(\alpha^*_{g_1^{-1}}(q_{g_1}) a) u_{g_1} + \sum_{i=2}^{n} \alpha^*_{g_i}(\alpha^*_{g_i^{-1}}(q_{g_i}) a) u_{g_i} \neq 0,$$

contradizendo a hipótese de que $yH = 0$. □

Corolário 2.5 *As seguintes afirmações são válidas em $R *_\alpha G$:*

(i) Se I é um ideal à direita não nulo de $Q *_{\alpha^*} G$ então $I \cap (R *_\alpha G)$ é um ideal à direita não nulo de $R *_\alpha G$.

(ii) Se $R *_\alpha G$ é semiprimo então $Q *_{\alpha^*} G$ também é semiprimo.

Demonstração:

(i) Seja x um elemento não nulo de I. Então, pelo Lema 2.4(i), existe $H \in \mathcal{E}(R)$ tal que $0 \neq xH \subseteq R *_\alpha G$. Mas como I é um ideal à direita de $Q *_{\alpha^*} G$, temos $xH \subseteq I$. Portanto, $0 \neq xH \subseteq R *_\alpha G \cap I$.

(ii) Suponhamos que existe um ideal à direita não nulo I de $Q *_{\alpha^*} G$ tal que $I^2 = 0$. Então, pelo item (i), $I \cap R *_\alpha G$ é um ideal à direita não nulo de $R *_\alpha G$. Mas, $(I \cap R *_\alpha G)^2 \subseteq I^2 = 0$, contradizendo o fato de que $R *_\alpha G$ é semiprimo. □

A seguir veremos qual é a relação entre os centros de $Q *_{\alpha^*} G$ e $R *_\alpha G$.

Proposição 2.6 $Z(R *_\alpha G) = Z(Q *_{\alpha^*} G) \cap R *_\alpha G$, *onde* $Z(A)$ *denota o centro do anel* A.

Demonstração: Obviamente $Z(Q *_{\alpha^*} G) \cap R *_\alpha G \subseteq Z(R *_\alpha G)$. Agora considere $x \in Z(R *_\alpha G)$ e $y \in Q *_{\alpha^*} G$. Pelo Lema 2.4(i), existe $H \in \mathcal{E}(R)$ tal que $yH \subseteq R *_\alpha G$. Assim, pela associatividade de $Q *_{\alpha^*} G$ e sendo que $x \in Z(R *_\alpha G)$ temos

$$(xy)H = x(yH) = (yH)x = y(Hx) = y(xH) = (yx)H$$

Deste modo, $(xy - yx)H = 0$. Pelo Lema 2.4(ii), $xy - yx = 0$ de onde obtemos $xy = yx$. Portanto, $x \in Z(Q *_{\alpha^*} G) \cap R *_\alpha G$ e a igualdade segue. □

O Corolário 2.5 será usado a seguir para determinarmos a relação entre os ideais singulares à direita de $R *_\alpha G$ e de $Q *_{\alpha^*} G$.

Proposição 2.7 *Para os ideais singulares à direita de* $R *_\alpha G$ *e* $Q *_{\alpha^*} G$ *temos:*

$$\mathcal{Z}_r(R *_\alpha G) = \mathcal{Z}_r(Q *_{\alpha^*} G) \cap R *_\alpha G.$$

Demonstração: Seja $x \in \mathcal{Z}_r(R *_\alpha G)$ e J um ideal à direita não nulo de $Q *_{\alpha^*} G$. Então pelo Corolário 2.5 (i), temos que $J \cap (R *_\alpha G)$ é um ideal à direita não nulo de $R *_\alpha G$. Assim, existe $0 \neq y \in J \cap (R *_\alpha G)$ tal que $xy = 0$, pois $x \in \mathcal{Z}_r(R *_\alpha G)$. Portanto, $x \in \mathcal{Z}_r(Q *_{\alpha^*} G)$ e temos $\mathcal{Z}_r(R *_\alpha G) \subseteq \mathcal{Z}_r(Q *_{\alpha^*} G) \cap R *_\alpha G$.

Agora consideremos $x \in \mathcal{Z}_r(Q *_{\alpha^*} G) \cap R *_\alpha G$ e seja I um ideal à direita não nulo de $R *_\alpha G$. Então $I(Q *_{\alpha^*} G)$ é um ideal à direita não nulo de $Q *_{\alpha^*} G$ e portanto existe $0 \neq z \in I(Q *_{\alpha^*} G)$ tal que $xz = 0$.

Como $z \in I(Q*_{\alpha^*}G)$, existem $a_1, \cdots, a_n \in I$ e $y_1, \cdots, y_n \in Q*_{\alpha^*}G$ tais que $z = \sum_{i=1}^{n}(a_i y_i) \neq 0$. Pelo Lema 2.4($i$), existe $E \in \mathcal{E}(R)$, tal que $y_i E \subseteq R*_\alpha G$, para todo $i = 1, \cdots, n$. Disso e do fato de que $a_i \in I$, obtemos

$$(a_i y_i)E = a_i(y_i E) \subseteq a_i R*_\alpha G \subseteq I,$$

para todo $i = 1, \cdots, n$. Daí, $zE \subseteq I$ e $zE \neq 0$, pelo Lema 2.4(ii). Consideremos $b \in E$ tal que $zb \neq 0$. Então, $0 \neq zb \in I$ e $x(zb) = (xz)b = 0.b = 0$. Logo, $x \in \mathcal{Z}_r(R *_\alpha G)$ e temos que, $\mathcal{Z}_r(Q*_{\alpha^*}G) \cap R*_\alpha G \subseteq \mathcal{Z}_r(R *_\alpha G)$. □

Corolário 2.8 *Se α é de tipo finito, então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) $R *_\alpha G$ é não singular à direita.

(ii) $Q*_{\alpha^*}G$ é não singular à direita.

(iii) $T *_\beta G$ é não singular à direita.

Demonstração: A primeira equivalência é consequência direta do Corolário 2.5(i) e da Proposição 2.7. A segunda equivalência é válida pois $Q*_{\alpha^*}G$ e $T *_\beta G$ são Morita equivalentes, uma vez que se α é de tipo finito então α^* é de tipo finito. □

Observamos que no corolário acima a hipótese de que α é de tipo finito foi utilizada apenas para demonstrar que (ii) é equivalente a (iii).

Anteriormente, quando estudamos o anel de quocientes à direita de Martindale, nós observamos uma relação entre os ideais à direita essenciais de R e de Q (veja a Proposição 1.10). Na sequência, veremos que a mesma relação é válida para os ideais à direita essenciais de $R *_\alpha G$ e de $Q *_{\alpha^*} G$.

Proposição 2.9 *As seguintes propriedades se verificam em $R *_\alpha G \subseteq Q*_{\alpha^*}G$:*

(i) Se I é um ideal à direita essencial de $R *_\alpha G$, então $I(Q*_{\alpha^*}G)$ é um ideal à direita essencial de $Q*_{\alpha^*}G$.

(ii) Se J é um ideal à direita essencial de $Q*_{\alpha^*}G$, então $J \cap (R *_\alpha G)$ é um ideal à direita essencial de $R *_\alpha G$.

Demonstração: (i) Seja K um ideal à direita não nulo de $Q*_{\alpha^*}G$. Então pelo Corolário 2.5(i), $K \cap R*_\alpha G$ é um ideal à direita não nulo de $R*_\alpha G$. Como I é essencial em $R*_\alpha G$ e $Q*_{\alpha^*}G$ tem unidade, temos

$$0 \neq I \cap (K \cap (R *_\alpha G)) \subseteq I \cap K \subseteq I(Q*_{\alpha^*}G) \cap K.$$

Portanto, $I(Q*_{\alpha^*}G)$ é essencial em $Q*_{\alpha^*}G$.

(ii) Seja L um ideal à direita não nulo de $R *_\alpha G$. Então, $J \cap L(Q*_{\alpha^*}G) \neq 0$, pois J é um ideal à direita essencial de $Q*_{\alpha^*}G$. Tome $0 \neq y = \sum_{i=1}^{n} l_i z_i \in J \cap L(Q*_{\alpha^*}G)$, onde $l_i \in L$ e $z_i \in Q*_{\alpha^*}G$. Pelo Lema 2.4(i), existe $E \in \mathcal{E}(R)$ tal que $z_i E \subseteq R *_\alpha G$ para todo $i = 1, \cdots, n$. Assim, $yE = \sum_{i=1}^{n} l_i(z_i E) \subseteq (J \cap (R *_\alpha G)) \cap L$, pois $L \lhd_r R *_\alpha G$ e $y \in J \lhd_r Q*_{\alpha^*}G$.

Além disso, como $y \neq 0$ e $E \in \mathcal{E}(R)$, temos do Lema 2.4(ii) que $yE \neq 0$. Portanto, $J \cap (R *_\alpha G)$ é um ideal à direita essencial de $R *_\alpha G$. □

Nosso próximo passo é mostrar que a Proposição 2.9 é válida se substituirmos "essencial" por "uniforme".

Proposição 2.10 *As seguintes afirmações se verificam:*

(i) Seja U é um ideal à direita não nulo de $R*_\alpha G$. Se U é uniforme em $R*_\alpha G$, então $U(Q*_{\alpha^*}G)$ é um ideal à direita uniforme de $Q*_{\alpha^*}G$.

(ii) Seja V é um ideal à direita não nulo de $Q*_{\alpha^*}G$. Se V é uniforme em $Q*_{\alpha^*}G$, então $V \cap (R *_\alpha G)$ é um ideal à direita uniforme de $R *_\alpha G$.

Demonstração: (i) Como $Q*_{\alpha^*}G$ tem unidade e $U \neq 0$, temos $U(Q*_{\alpha^*}G) \neq 0$. Suponhamos que $U(Q*_{\alpha^*}G)$ não é uniforme. Então existem elementos não nulos $\mu = \sum_{i=1}^{n} u_i y_i$, $\omega = \sum_{j=1}^{m} v_j x_j \in U(Q*_{\alpha^*}G)$ tais que $\mu(Q*_{\alpha^*}G) \cap \omega(Q*_{\alpha^*}G) = 0$, onde $u_i, v_j \in U$ e $y_i, x_j \in Q*_{\alpha^*}G$ são todos não nulos.

Visto que μ e ω são não nulos, temos do Corolário 2.5(i) que $\mu(Q*_{\alpha^*}G) \cap R *_\alpha G$ e $\omega(Q*_{\alpha^*}G) \cap R *_\alpha G$ são ideais à direita não nulos de $R *_\alpha G$, mas

$$(\mu(Q*_{\alpha^*}G) \cap R *_\alpha G) \cap (\omega(Q*_{\alpha^*}G) \cap R *_\alpha G) = 0.$$

Por outro lado, como os $y_i's$ e os $x_j's$ são elementos não nulos de $Q*_{\alpha^*}G$ e são em número finito, segue do Lema 2.4(i) que existe $E \in \mathcal{E}(R)$ tal que $y_iE \subseteq R *_\alpha G$ e $x_jE \subseteq R *_\alpha G$, para todo $i = 1, \cdots, n$ e todo $j = 1, \cdots, m$. Disso e do fato de que U é um ideal à direita de $R *_\alpha G$, segue que $\mu E, \omega E \subseteq U$. Também, como μ e ω são ambos não nulos e $E \in \mathcal{E}(R)$ temos $\mu E \neq 0$ e $\omega E \neq 0$. Tome $a, b \in E$ tal que $\mu a \neq 0$ e $\omega b \neq 0$. Como U é uniforme em $R *_\alpha G$, temos $((\mu a)(R *_\alpha G)) \cap ((\omega b)(R *_\alpha G)) \neq 0$. Mas isso contradiz o fato de que

$$((\mu a)(R *_\alpha G)) \cap ((\omega b)(R *_\alpha G)) \subseteq (\mu(Q*_{\alpha^*}G) \cap R *_\alpha G) \cap (\omega(Q*_{\alpha^*}G) \cap R *_\alpha G) = 0.$$

Portanto $U(Q*_{\alpha^*}G)$ é uniforme.

(ii) Seja V um ideal à direita uniforme de $Q*_{\alpha^*}G$. Então $V \neq 0$ e assim, $V \cap (R *_\alpha G)$ é um ideal à direita não nulo de $R *_\alpha G$. Suponhamos que existam dois ideais à direita não nulos A e B de $R *_\alpha G$ contidos em V tais que $A \cap B = 0$. Então $A(Q*_{\alpha^*}G)$ e $B(Q*_{\alpha^*}G)$ são dois ideais à direita não nulos de $Q*_{\alpha^*}G$ contidos em V. Pelo Lema 2.4, $A(Q*_{\alpha^*}G) \cap B(Q*_{\alpha^*}G) = 0$, contradizendo o fato de que V é uniforme. $\square$

Como consequência imediata das Proposições 2.9 e 2.10 temos o

Corolário 2.11 *As dimensões uniformes à direita de $R *_\alpha G$ e de $Q*_{\alpha^*}G$ são iguais, i.é, $udim(R *_\alpha G) = udim(Q*_{\alpha^*}G)$.*

Além disso, temos o

Corolário 2.12 *Se R é um anel semiprimo com unidade e $R *_\alpha G$ é um anel semiprimo de Goldie à direita, então $Q*_{\alpha^*}G$ é um anel semiprimo de Goldie à direita.*

Demonstração: Se $R *_\alpha G$ é um anel semiprimo de Goldie à direita, então pelo Teorema 1.8 $R *_\alpha G$ é semiprimo, $\mathcal{Z}_r(R *_\alpha G) = 0$ e $udim(R *_\alpha G) < \infty$. Assim, pelos Corolários 2.5(ii), 2.8 e 2.11 temos que $Q*_{\alpha^*}G$ é semiprimo, $\mathcal{Z}_r(Q*_{\alpha^*}G) = 0$ e $udim(Q*_{\alpha^*}G) < \infty$. Logo, pelo Teorema 1.8 $Q*_{\alpha^*}G$ é um anel semiprimo de Goldie à direita. $\square$

Demonstramos no Corolário 2.5 que se $R *_\alpha G$ é um anel semiprimo então $Q*_{\alpha^*}G$ também é semiprimo. No entanto, se R é um anel semiprimo de Goldie à direita, temos o seguinte resultado:

Proposição 2.13 *Se R é um anel semiprimo de Goldie à direita com unidade, então $R *_\alpha G$ é um anel semiprimo de Goldie à direita se e somente se $Q*_{\alpha^*}G$ também o é.*

Demonstração: Pelo Corolário 2.12, basta provar a recíproca. Suponha que $Q*_{\alpha^*}G$ é um anel semiprimo de Goldie à direita. Então por definição, $udim(Q*_{\alpha^*}G) < \infty$ e $Q*_{\alpha^*}G$ satisfaz ACC sobre ideais anuladores à direita. Assim, pelo Corolário 2.11, $udim(R *_\alpha G) < \infty$ e $R *_\alpha G$ satisfaz ACC sobre ideais anuladores à direita por ser um subanel de $Q*_{\alpha^*}G$. Portanto, por definição $R *_\alpha G$ é um anel de Goldie à direita.

Resta mostrar que $R *_\alpha G$ é semiprimo. Para tanto, vamos mostrar que os anéis de quocientes clássicos $Q_{cl}^r(R *_\alpha G)$ e $Q_{cl}^r(Q*_{\alpha^*}G)$ são iguais.

Afirmação: $\mathcal{C}_R \subseteq \mathcal{C}_{R*_\alpha G} = \mathcal{C}_{Q*_{\alpha^*}G} \cap R *_\alpha G$.

De fato, é fácil ver que a primeira inclusão se verifica. Agora, sejam $x \in \mathcal{C}_{R*_\alpha G}$ e $y \in Q*_{\alpha^*}G$ tais que $xy = 0$. Pelo Lema 2.4(i), existe $H \in \mathcal{E}(R)$ tal que $yH \subseteq R *_\alpha G$. Então, $0 = (xy)H = x(yH)$, de onde obtemos que $yH = 0$, pois $x \in \mathcal{C}_{R*_\alpha G}$. Logo, pelo Lema 2.4$(ii)$, segue que $y = 0$. Isto mostra que x é um elemento regular à direita de $Q*_{\alpha^*}G$. Portanto, x também regular à esquerda, pois $Q*_{\alpha^*}G$ é um semiprimo de Goldie à direita. Consequentemente, $x \in \mathcal{C}_{Q*_{\alpha^*}G}$ e a inclusão " $\subseteq$ " se verifica. A inclusão contrária é óbvia.

Considere agora $y \in Q_{cl}^r(Q*_{\alpha^*}G)$. Então, existe $x \in \mathcal{C}_{Q*_{\alpha^*}G}$ tal que $yx \in Q*_{\alpha^*}G$ e pelo Lema 2.4(i), existe $H \in \mathcal{E}(R)$ tal que $xH \subseteq R *_\alpha G$. Por outro lado, existe $F \in \mathcal{E}(R)$ tal que $(yx)F \subseteq R *_\alpha G$. Tomando $L = H \cap F \in \mathcal{E}(R)$, temos $xL, (yx)L \subseteq R *_\alpha G$. Sendo R um anel semiprimo de Goldie à direita, temos do Teorema 1.8 (iv) que existe $e \in \mathcal{C}_R \cap L \subseteq \mathcal{C}_{Q*_{\alpha^*}G} \cap L$. Assim, $xe \in \mathcal{C}_{Q*_{\alpha^*}G} \cap R *_\alpha G = \mathcal{C}_{R*_\alpha G}$ é tal que $y(xe) \in R *_\alpha G$. Portanto, $y \in Q_{cl}^r(R *_\alpha G)$ o que implica $Q_{cl}^r(Q*_{\alpha^*}G) \subseteq Q_{cl}^r(R *_\alpha G)$. A inclusão contrária é óbvia, pois $\mathcal{C}_{R*_\alpha G} \subseteq \mathcal{C}_{Q*_{\alpha^*}G}$.

Como $Q*_{\alpha^*}G$ é um anel semiprimo de Goldie à direita, temos do Teorema 1.8 que $Q_{cl}^r(R *_\alpha G) = Q_{cl}^r(Q*_{\alpha^*}G)$ é semisimples artiniano. Logo, pelo Teorema 1.8, $R *_\alpha G$ é semiprimo. □

O próximo resultado é a versão parcial do Teorema 1.29.

Teorema 2.14 *Se $|G| < \infty$ e R é um anel semiprimo com unidade livre de $|G|$-torção, então R é um anel de Goldie à direita se e somente se $R *_\alpha G$ é um anel semiprimo de Goldie à direita.*

Demonstração: Suponhamos que R é um anel Goldie à direita com unidade. Como R é livre de $|G|$-torção, temos das Proposições 1.10(i) e 1.40(vii) que T é livre de $|G|$-torção. Além disso, como R é um anel semiprimo de Goldie à direita e α^* é de tipo finito, já que $|G| < \infty$, segue das Proposições 1.10(ix), 1.39 e 1.40(vi) que T é um anel semiprimo de Goldie à direita com unidade. Portanto, pelo Teorema 1.29, $T *_\beta G$ é um anel semiprimo de Goldie à direita. Sendo $T *_\beta G$ e $Q *_{\alpha^*} G$ Morita equivalentes, temos que $Q *_{\alpha^*} G$ é um anel semiprimo de Goldie à direita. Logo, pela Proposição 2.13 $R *_\alpha G$ é um anel semiprimo de Goldie à direita.

Reciprocamente, se $R *_\alpha G$ é um anel semiprimo de Goldie à direita então pelo Corolário 2.12, $Q *_{\alpha^*} G$ é um anel semiprimo de Goldie à direita. Como esta propriedade é Morita invariante, temos que $T *_\beta G$ é um anel semiprimo de Goldie à direita. Além disso, T é livre de $|G|$-torção. Portanto, pelo Teorema 1.29, T é um anel semiprimo de Goldie à direita. Logo, pelas Proposições 1.40(vi) e 1.10(ix), temos que R é um anel de Goldie à direita. $\square$

O próximo objetivo é mostrar que a equivalência dada no teorema anterior também vale se G é um grupo policíclico infinito e α é de tipo finito. Porém, para mostrarmos isso, precisamos dos dois próximos lemas.

Lema 2.15 *Se α é de tipo finito e G é um grupo policíclico infinito, então R é um anel não singular à direita se e somente se $R *_\alpha G$ também o é.*

Demonstração: Suponhamos que $\mathcal{Z}_r(R) = 0$. Então pelas Proposições 1.10($viii$) e 1.40(v), $\mathcal{Z}_r(T) = 0$. Assim, pelo Teorema 1.30(i), $\mathcal{Z}_r(T *_\beta G) = \mathcal{Z}_r(T)(T *_\beta G) = 0$ e portanto, pelo Corolário 2.8, $\mathcal{Z}_r(R *_\alpha G) = 0$.

Reciprocamente, suponhamos que $\mathcal{Z}_r(R *_\alpha G) = 0$. Como α é de tipo finito, segue do Corolário 2.8 que $\mathcal{Z}_r(T *_\beta G) = 0$. Como α é de tipo finito, temos das Proposições 2.2 e 1.39 que T tem unidade. Pelo Teorema 1.30(i), $0 = \mathcal{Z}_r(T *_\beta G) = \mathcal{Z}_r(T)(T *_\beta G)$, o que implica que $\mathcal{Z}_r(T) = 0$. Assim, $\mathcal{Z}_r(Q) = 0$, pela Proposição 1.40(v) e portanto $\mathcal{Z}_r(R) = 0$, pela Proposição 1.10($viii$). $\square$

Lema 2.16 *Se α é de tipo finito e G é um grupo policíclico infinito, então $udim(R) < \infty$ se e somente se $udim(R *_\alpha G) < \infty$.*

Demonstração: Como α é de tipo finito, α^* também é de tipo finito. Em particular, T tem unidade T tem unidade, pela Proposição 1.39.

Se $udim(R) < \infty$, então pelo Teorema 1.30(i) e pelas Proposições 1.40(iv) e 1.10(vi),

$$udim(T *_\beta G) = udim(T) \leq o(\alpha^*)udim(Q) = o(\alpha^*)udim(R) < \infty.$$

Visto que $T *_\beta G$ e $Q *_{\alpha^*} G$ são Morita equivalentes, $udim(Q *_{\alpha^*} G) < \infty$. Logo, pelo Corolário 2.11, $udim(R *_\alpha G) < \infty$.

Reciprocamente, se $udim(R *_\alpha G) < \infty$, então, pelo Corolário 2.11 e pelo fato de que $T *_\beta G$ e $Q *_{\alpha^*} G$ são Morita equivalentes, temos $udim(T *_\beta G) < \infty$. Assim, pelo Teorema 1.30(i), segue que $udim(T) = udim(T *_\beta G) < \infty$. Logo, pelas Proposições 1.10(vi) 1.40(iv), temos $udim(R) = udim(Q) \leq udim(T) < \infty$. $\square$

O Teorema 1.30(ii) pode ser generalizado para $R *_\alpha G$, sempre que α é de tipo finito.

Teorema 2.17 *Suponhamos que R é um anel semiprimo com unidade, G é um grupo policíclico infinito e α é uma ação parcial de tipo finito de G sobre R. Então R é um anel de Goldie à direita se e somente se $R *_\alpha G$ é um anel semiprimo de Goldie à direita.*

Demonstração: Suponhamos que R é um anel semiprimo de Goldie à direita. Então, pelo Teorema 1.8, temos que $udim(R) < \infty$ e $\mathcal{Z}_r(R) = 0$, de modo que pelos Lemas 2.15 e 2.16, $udim(R *_\alpha G) < \infty$ e $\mathcal{Z}_r(R *_\alpha G) = 0$. Portanto, pelo Teorema 1.8, resta mostrar que $R *_\alpha G$ é semiprimo.

Como Q é um anel semiprimo de Goldie à direita e α^* é de tipo finito, temos da Proposição 1.40(vi) que T é um anel semiprimo de Goldie à direita com unidade. Assim, pelo Teorema 1.30(ii), $T *_\beta G$ é um anel semiprimo de Goldie à direita. Do fato de que $T *_\beta G$ e $Q *_{\alpha^*} G$ são Morita equivalentes, temos que $Q *_{\alpha^*} G$ é um anel semiprimo de Goldie à direita. Pela Proposição 2.13, $R *_\alpha G$ é um anel semiprimo.

Agora, suponhamos que $R *_\alpha G$ seja um anel semiprimo de Goldie à direita. Pelo Corolário 2.12, $Q *_{\alpha^*} G$ é um anel semiprimo de Goldie à direita e assim $T *_\beta G$ é um anel semiprimo de Goldie à direita, pois $Q *_{\alpha^*} G$ e $T *_\beta G$ são Morita equivalentes. Além disto, como Q é semiprimo, segue da Proposição 1.40(i) que T é semiprimo. Portanto, pelo Teorema 1.30(ii), T é um anel de Goldie à direita. Logo, das Proposições 1.40(vi) e 1.10(ix), segue que R é um anel de Goldie à direita. $\square$

Para finalizar, vamos estudar a dimensão de Krull de $R *_\alpha G$. Mas antes, observemos que os resultados obtidos neste capítulo para dimensão uniforme à direita (resp. ideal singular à direita, anéis semiprimos de Goldie à direita) também são válidos para dimensão uniforme à esquerda (resp. ideal singular à esquerda, anéis semiprimos de Goldie à esquerda). Para tanto, basta considerar a extensão de α ao anel de quocientes à esquerda de Martindale de R.

Também observamos que $R *_\alpha G = \bigoplus_{g\in G} u_g D_{g^{-1}}$. Assim, $R *_\alpha G$ tem uma estrutura natural de R-módulo à direita. Além disso, para todo $g \in G$, $D_{g^{-1}}$ e $u_g D_{g^{-1}}$ são R-módulos à direita isomorfos pelo R-isomorfismo $\phi : D_{g^{-1}} \ni a \longmapsto u_g a \in u_g D_{g^{-1}}$.

Proposição 2.18 *Sejam R um anel qualquer e $\alpha = \{\alpha_g : D_{g^{-1}} \longrightarrow D_g \,:\, g \in G\}$ uma ação parcial de um grupo finito G sobre R. Se R tem dimensão de Krull então $R *_\alpha G$ tem dimensão de Krull e $Kdim(R *_\alpha G) \leq Kdim(R)$.*

Demonstração: Suponhamos que R tem dimensão de Krull à direita. Como D_g é um ideal de R, segue do Lema 1.26 que D_g tem dimensão de Krull como R-módulo à direita, para todo $g \in G$. Disso e do fato de que $D_{g^{-1}}$ é isomorfo a $u_g D_{g^{-1}}$ como R-módulo à direita, temos que $u_g D_{g^{-1}}$ tem dimensão Krull como R-módulo à direita e $Kdim\,((D_{g^{-1}})_R) = Kdim\,((u_g D_{g^{-1}})_R)$. Assim, pelo Lema 1.23, $R *_\alpha G = \bigoplus_{g\in G} u_g D_{g^{-1}}$ tem dimensão de Krull como R-módulo à direita.

Agora, note que todo $R *_\alpha G$-submódulo à direita de $R *_\alpha G$ é um R-submódulo à direita de $R *_\alpha G$. Daí, a aplicação $\varphi : \mathcal{L}_{R*_\alpha G}(R *_\alpha G) \longrightarrow \mathcal{L}_R(R *_\alpha G)$ definida por $\varphi(M) = M$, para todo $M \in \mathcal{L}_{R*_\alpha G}(R *_\alpha G)$, preserva inclusões próprias. Logo, pelo Lema 1.24, $R *_\alpha G$ tem dimensão de Krull à direita e $Kdim(R *_\alpha G) \leq Kdim((R *_\alpha G)_R)$.

Finalmente, vamos mostrar que $Kdim(R *_\alpha G) \leq Kdim(R)$. Como já vimos acima, $Kdim\,((D_{g^{-1}})_R) = Kdim\,((u_g D_{g^{-1}})_R)$ e $R *_\alpha G = \bigoplus_{g \in G} u_g D_{g^{-1}}$. Assim, pelo Lema 1.23

$$\begin{aligned}
Kdim\,(R *_\alpha G)_R &= sup\,\{Kdim\,((u_g D_{g^{-1}})_R)\,|\,g \in G\} \\
&= sup\,\{Kdim((D_{g^{-1}})_R)\,|\,g \in G\} \\
&= sup\,\{Kdim(R),\ Kdim((D_{g^{-1}})_R)\,|\,g \in G \setminus 1_G\} \\
&= Kdim(R),\ \ pois\ \ Kdim((D_{g^{-1}})_R) \leq Kdim(R).
\end{aligned}$$

Logo, $Kdim(R *_\alpha G) \leq Kdim\,((R *_\alpha G)_R) = Kdim(R)$. □

Como já vimos na Proposição 1.27, todo anel semiprimo com dimensão de Krull à direita é um anel de Goldie à direita.

Corolário 2.19 *Sejam R um anel semiprimo com unidade, G um grupo finito e $\alpha = \{\alpha_g : D_{g^{-1}} \longrightarrow D_g\,|\,g \in G\}$ uma ação parcial de G sobre R. Se R é livre de $|G|$-torção e tem dimensão de Krull, então $R *_\alpha G$ é um anel semiprimo de Goldie à direita.*

Demonstração: Se R é um anel semiprimo e tem dimensão de Krull à direita, então pela Proposição 1.27, R é um anel de Goldie à direita. Assim, pelo Teorema 2.14 $R *_\alpha G$ é semiprimo e proposição anterior $R *_\alpha G$ tem dimensão de Krull à direita. Novamente pela Proposição 1.27 temos que $R *_\alpha G$ é um anel de Goldie à direita. □

Observação 2.20 Sabemos que os anéis com dimensão de Krull à direita nula são exatamente os anéis artinianos à direita não nulos. Assim, se R um anel semiprimo e artiniano à direita não nulo e $\alpha = \{\alpha_g : D_{g^{-1}} \longrightarrow D_g\ :\ g \in G\}$ uma ação parcial de um grupo finito G sobre R, então $R *_\alpha G$ também é artiniano à direita.

Capítulo 3

Ações Parciais Globalizáveis

Suponhamos que R é um anel semiprimo (não necessariamente com unidade), G um grupo e $\alpha = \{\alpha_g : D_{g^{-1}} \longrightarrow D_g \mid g \in G\}$ uma ação parcial de G sobre R. Como vimos na Seção 1.8, existe uma ação parcial α^* de G sobre $Q_r(R)$ que estende α e α^* possui uma envolvente (T, β), digamos. Então, $T = \sum_{g \in G} \beta_g(Q_r(R))$, de modo que $T' = \sum_{g \in G} \beta_g(R)$ é um subgrupo aditivo de T invariante pela ação $\beta' = \beta|_{T'}$ de G.

No caso em que os ideais D_g, $g \in G$, são todos fechados, W. Cortes e M. Ferrero deram condições necessárias e suficientes para que α tenha uma envolvente (ver [4], Corolário 2.4). Mais ainda, os autores mostraram que tais condições implicam que T' é um anel, α possui uma envolvente semiprima e que esta envolvente é equivalente a (T', β') (Corolários 3.3 e 3.4 de [4]).

O nosso objetivo neste capítulo é aprofundar este estudo e dar outras condições para que (T', β') seja uma envolvente de α. Primeiro faremos isso para o caso em que R tem unidade, mostrando que (T', β') é uma envolvente de α se e somente se T' é um anel, R é um ideal de T' e cada ideal D_g, $g \in G$, é fechado em R. Em seguida veremos que se cada ideal D_g, $g \in G$, é fechado em R, então (T', β') é uma envolvente de α se e somente se T' é um anel e R é um ideal de T'. Através de um contra exemplo, veremos que isto não é válido para o caso em que os ideais D_g não são todos fechados. Finalmente, vamos mostrar que se cada ideal D_g, $g \in G$, é um somando direto de R, então (T', β') é uma envolvente de α e veremos que a recíproca não é válida (nem mesmo quando os ideais

D_g forem fechados). Como aplicação, estudaremos a existência de uma envolvente para ações parcias sobre anéis que são soma direta de anéis primos, não necessariamente com unidade.

3.1 Condições para Existência de uma Envolvente

Antes de começarmos o estudo que propomos, vamos lembrar o conceito de anel de multiplicadores. Maiores detalhes sobre este assunto, podem ser encontrados na Seção 2 de [9].

Dado um anel R, o *anel de multiplicadores* $\mathcal{M}(R)$ de R é o conjunto dos pares ordenados (λ, μ), onde λ e μ são, respectivamente, um R-endomorfismo à esquerda e um R-endomorfismo à direita de R, que satisfazem $\lambda(a)b = a\mu(b)$, para quaisquer $a, b \in R$.

A adição e a multiplicação de dois elementos $(\lambda, \mu), (\lambda', \mu') \in \mathcal{M}(R)$, são definidas da seguinte maneira:

$$(\lambda, \mu) + (\lambda', \mu') = (\lambda + \lambda', \mu + \mu') \quad \text{e} \quad (\lambda, \mu) \cdot (\lambda', \mu') = (\lambda' \circ \lambda, \mu \circ \mu')$$

Para um multiplicador $\gamma = (\lambda, \mu) \in \mathcal{M}(R)$ e um elemento $a \in R$, nós escrevemos $a\gamma = \lambda(a)$ e $\gamma a = \mu(a)$. Dizemos que λ é um *multiplicador à direita* de R e μ é um *multiplicador à esquerda* de R. É fácil ver que $\mathcal{M}(R)$ é um anel com unidade (Id_R, Id_R).

Note que um elemento $a \in R$ sempre determina o multiplicador $\gamma_a = (r_a, l_a)$, onde r_a e l_a são, respectivamente, a multiplicação à direita e à esquerda em R determinada por a. Também, se I é um ideal de R, então todo elemento $a \in R$ define o multiplicador $\gamma_a = (r_a, l_a) \in \mathcal{M}(I)$.

Agora estamos em condições de começar o estudo da existência de envolvente, como dissemos anteriomente. Para tanto, vamos novamente estabelecer algumas notações que serão usadas no restante do capítulo, a menos que se mencione o contrário.

• R é um anel semiprimo (não necessariamente com unidade), Q é o anel de quocientes à direita de Martindale de R.

• G é um grupo, $\alpha = \{\alpha_g : D_{g^{-1}} \longrightarrow D_g \,|\, g \in G\}$ é uma ação parcial de G sobre R e $\alpha^* = \{\alpha^*_g : D^*_{g^{-1}} \longrightarrow D^*_g \,|\, g \in G\}$ é a extensão de α a Q definida na Seção 1.8.

- (T, β) é uma envolvente de α^*, $T' = \sum_{g \in G} \beta_g(R)$ e $\beta' = \beta|_{T'}$.

Observação 3.1 Note que T' é um anel e R é um ideal de T' se e somente se $R \cdot \beta_g(R) \subseteq R$, para todo $g \in G$. De fato, se $R \cdot \beta_g(R) \subseteq R$, para todo $g \in G$, então $\beta_g(R) \cdot \beta_h(R) = \beta_g(R \cdot \beta_{g^{-1}h}(R)) \subseteq \beta_g(R) \subseteq T'$, para quaisquer $g, h \in G$. Logo, T' é um anel. Além disso, é claro que R é um ideal de T'. A recíproca é evidente.

No decorrer de todo o capítulo quando dissermos que R é um ideal de T' ou quando escrevermos simplesmente $R \lhd T'$, estaremos assumindo implicitamente que T' é um anel.

Na introdução do capítulo, mencionamos o Corolário 2.4 de [4]. Sendo ele de grande importância para o desenvolvimento do que segue, nós o apresentamos agora.

Teorema 3.2 *([4], Corolário 2.4) Sejam R um anel semiprimo e α uma ação parcial de um grupo G sobre R. Se os ideais D_g, $g \in G$, são todos fechados, então α possui uma envolvente se e somente se para todo $a \in R$ e todo $g \in G$, existe um multiplicador $\gamma_g(a)$ de R tal que:*

(i) $R\gamma_g(a) \subseteq D_g$.

(ii) $\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(x)a) = x\gamma_g(a)$, *para todo* $x \in D_g$.

Também em [4], os autores provaram que se os ideais D_g, $g \in G$, são todos fechados em R e α possui uma envolvente, então α possui uma envolvente semiprima (S, σ) (ou seja, S é um anel semiprimo) e tal envolvente é única a menos de equivalência. Mais precisamente:

Teorema 3.3 *([4], Corolários 3.3 e 3.5) Sejam R um anel semiprimo e α uma ação parcial de G sobre R. Suponha que os ideais D_g, $g \in G$, são todos fechados e para todo $a \in R$ e todo $g \in G$, existe $\gamma_g(a) \in \mathcal{M}(R)$ satisfazendo as condições (i) e (ii) do Teorema 3.2. Então, α possui uma envolvente semiprima (S, σ) que é única a menos de equivalência. Mais ainda, T' é um anel e (S, σ) é equivalente a (T', β').*

Pelos dois resultados anteriores vemos claramente que se α possui uma envolvente, então podemos supor sem perda de generalidade que ela é (T', β'). Inspirados nesse fato, podemos nos perguntar se existem outras condições para que (T', β') seja uma envolvente de α. Para o caso em que R tem unidade, temos a

Proposição 3.4 *Sejam R um anel semiprimo com unidade e α uma ação parcial de um grupo G sobre R. Então (T', β') é uma envolvente de α se somente se R é um ideal de T' e cada ideal D_g é fechado em R. Mais ainda, quando isso acontece, (T', β') é única a menos de equivalência.*

Demonstração: Suponhamos que (T', β') é uma envolvente de α. Pela Proposição 1.40, T' é um anel semiprimo e pelo Teorema 1.37 cada ideal D_g, $g \in G$, é gerado por um idempotente central $1_g \in R$, i.é, cada ideal D_g é um somando direto de R. Neste caso, $R = R1_g \oplus R(1_R - 1_g)$, para todo $g \in G$. Portanto, cada ideal D_g, $g \in G$, é fechado, Portanto, cada ideal D_g é fechado, pois é o anulador de $R(1_R - 1_g)$, . Além disso, o fato de R ser um ideal de T' segue da definição de envolvente.

Reciprocamente, suponha que $R \lhd T'$ e que para todo $g \in G$, temos $D_g = [D_g]$. Denotemos o gerador de D_g^* por 1_g, $g \in G$. Como R tem unidade, $1_R = 1_Q$. Assim, de $D_g^* = \beta_g(Q) \cap Q$ e de $R \lhd T'$, temos $1_g = 1_Q\beta_g(1_Q) = 1_R\beta_g(1_R) \in R$, pois $\beta_g(1_R) \in T'$. Notemos que $Q1_g \cap R = R1_g = R \cap \beta_g(R)$. De fato, se $q1_g \in Q1_g \cap R$, então $q1_g = (q1_g)1_g \in R1_g$ e assim, $Q1_g \cap R \subseteq R1_g$. A inclusão contrária é óbvia pois $1_g \in R$. A segunda igualdade é válida, pois $1_g = 1_R\beta_g(1_R)$ é um gerador de $R \cap \beta_g(R)$. Deste modo, $D_g = [D_g] = D_g^* \cap R = Q1_g \cap R = R1_g = R \cap \beta_g(R)$. Além disso, $\alpha_g(x) = \alpha_g^*(x) = \beta_g(x)$, para todo $x \in D_{g^{-1}}$ e $g \in G$. Portanto,

(i) $R \lhd T'$ e $T' = \sum_{g \in G} \beta_g'(R)$.

(ii) $D_g = R \cap \beta_g(R) = R \cap \beta_g'(R)$, para todo $g \in G$.

(iii) $\alpha_g(x) = \beta_g'(x)$, para todo $g \in G$ e todo $x \in D_{g^{-1}}$.

Logo, por definição (T', β') é uma envolvente de α. A unicidade da envolvente segue do Teorema 1.37. □

Observação 3.5 Note que se R é um anel com unidade, então pelo Teorema 1.37, α possui uma envolvente se e somente se todo ideal D_g, $g \in G$, tem uma unidade. Logo, $R \lhd T'$ e cada ideal D_g é fechado em R se e somente se cada ideal D_g tem uma unidade.

Observação 3.6 Na demonstração da Proposição 3.4 fica claro que se R é um anel semiprimo com unidade e $R \lhd T'$, então $[D_g] = R \cap \beta_g(R)$, mesmo que os ideais D_g não sejam fechados.

Como veremos adiante, no caso em que R não possui necessariamente unidade, a existência de uma envolvente de α não implica que os ideais D_g, $g \in G$, são todos fechados (ver Exemplo 3.13). Porém, nós temos o seguinte resultado.

Teorema 3.7 *Sejam R um anel semiprimo e α uma ação parcial de um grupo G sobre R tal que cada ideal D_g, $g \in G$, é fechado em R. Então (T', β') é uma envolvente de α se e somente se $R \lhd T'$.*

Demonstração: Suponhamos que R é um ideal de T'. Lembremos que para todo $g \in G$ e todo $x \in D_{g^{-1}}$, $\alpha_g(x) = \alpha_g^*(x) = \beta_g(x)$.

Agora, para todo $g \in G$ e todo $a \in R$, defina $\gamma_g(a) = (r_{\beta_g(a)}, l_{\beta_g(a)}) \in \mathcal{M}(R)$. Notemos que $\gamma_g(a)$ é um multiplicador de R, pois R é um ideal de T'. Como R e $\beta_g(R)$ são ideais de T' e como $R \cap \beta_g(R) \subseteq R \cap (Q \cap \beta_g(Q)) = R \cap D_g^*$, temos

$$R\gamma_g(a) = R\beta_g(a) \subseteq R \cap \beta_g(R) \subseteq R \cap D_g^* = [D_g] = D_g.$$

Além disso, para todo $x \in D_g$,

$$x\gamma_g(a) = x\beta_g(a) = \beta_g(\beta_{g^{-1}}(x)a) = \beta_g(\alpha_{g^{-1}}(x)a) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(x)a).$$

Portanto, pelo Teorema 3.3, (T', β') é uma envolvente de α.

A recíproca é evidente. □

A pergunta natural a ser feita é a seguinte: o teorema anterior continua válido se os ideais D_g não são todos fechados? A resposta é negativa.

Exemplo 3.8 Vamos mostrar neste exemplo que existe uma ação parcial α de um grupo G sobre uma anel semiprimo R tal que os ideais D_g não são todos fechados, R é um ideal de T', mas (T', β') não é uma envolvente de α.

Considere o grupo cíclico de ordem três $G = \{1, g, g^2\}$ e o anel $R = 3\mathbb{Z} \oplus 3\mathbb{Z}$. O anel de quocientes à direita de Martindale de R é $Q = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} = Qe_1 \oplus Qe_2$, onde e_1 e e_2

são idempotentes centrais ortogonais de Q dados por $e_1 = (1,0)$ e $e_2 = (0,1)$. Assim, $R = Re_1 \oplus Re_2$, mesmo que $e_1, e_2 \notin R$.

Considere também os ideais $D_1 = R$, $D_g = 0 \oplus 9\mathbb{Z} = 3Re_2$ e $D_{g^2} = 9\mathbb{Z} \oplus 0 = 3Re_1$ de R, bem como os seguintes isomorfismos de anéis: $\alpha_1 = Id_R$, $\alpha_g : D_{g^2} \ni ae_1 \longmapsto ae_2 \in D_g$ e $\alpha_{g^2} : D_g \ni ae_2 \longmapsto ae_1 \in D_{g^2}$. É fácil verificar que $\alpha = \{\alpha_h : D_{h^{-1}} \longrightarrow D_h \,|\, h \in G\}$ é uma ação parcial de G sobre R.

Note que $D_1^* = Q$, $D_g^* = 0 \oplus \mathbb{Q} = Qe_2$ e $D_{g^2}^* = \mathbb{Q} \oplus 0 = Qe_1$. Também, $\alpha_1^* = Id_Q$, $\alpha_g^* : D_{g^2}^* \ni qe_1 \longmapsto qe_2 \in D_g^*$ e $\alpha_{g^2}^* : D_g^* \ni qe_2 \longmapsto qe_1 \in D_{g^2}^*$, para todo $q \in Q$. Então o anel $T = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} = Te_1 \oplus Te_2 \oplus Te_3$ juntamente com a ação global de G sobre T definida por $\beta_1 = Id_T$; $\beta_g(e_1) = e_2, \beta_g(e_2) = e_3$ e $\beta_g(e_3) = e_1$; $\beta_{g^2}(e_1) = e_3, \beta_{g^2}(e_2) = e_1$ e $\beta_{g^2}(e_3) = e_2$, é uma envolvente de α^*.

Além disso, os ideais D_g e D_{g^2} não são fechados em R, pois $[D_g] = D_g^* \cap R = Re_2 \neq 3Re_2 = D_g$ e $[D_{g^2}] = D_{g^2}^* \cap R = Re_1 \neq 3Re_1 = D_{g^2}$.

Agora considere o subanel $R' = 3\mathbb{Z} \oplus 3\mathbb{Z} \oplus 3\mathbb{Z}$ de T. Então, em T, o anel $R = 3\mathbb{Z} \oplus 3\mathbb{Z}$ pode ser escrito como $R = R'e_1 \oplus R'e_2$, onde e_1 é identificado com $(1,0,0)$ e e_2 é identificado com $(0,1,0)$. Assim,

$$\begin{aligned} T' &= \beta_1(R) + \beta_g(R) + \beta_{g^2}(R) \\ &= \beta_1(R'e_1 \oplus R'e_2) + \beta_g(R'e_1 \oplus R'e_2) + \beta_{g^2}(R'e_1 \oplus R'e_2) \\ &= (R'e_1 \oplus R'e_2) + (R'e_2 \oplus R'e_3) + (R'e_3 \oplus R'e_1) \\ &= R'e_1 \oplus R'e_2 \oplus R'e_3 \\ &= 3\mathbb{Z} \oplus 3\mathbb{Z} \oplus 3\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Portanto, $R = R'e_1 \oplus R'e_2$ é um ideal de T', mas $(T', \beta' = \beta|_{T'})$ não é uma envolvente de α, pois

$$R \cap \beta_g'(R) = (R'e_1 \oplus R'e_2) \cap (R'e_2 \oplus R'e_3) = R'e_2 \neq D_g$$

e

$$R \cap \beta_{g^2}'(R) = (R'e_1 \oplus R'e_2) \cap (R'e_3 \oplus R'e_1) = R'e_1 \neq D_{g^2}.$$

Logo, quando os ideais D_h, $h \in G$, não são todos fechados, então $R \lhd T'$ não implica que $(T', \beta' = \beta|_{T'})$ é uma envolvente de α. $\square$

Em [4] ficou em aberto a seguinte questão: é válido o Teorema 3.3 para o caso em que os ideais D_g, $g \in G$, não são todos fechados? A resposta é dada agora.

Exemplo 3.9 Vamos mostrar que existe uma ação parcial α de um grupo G sobre um anel semiprimo R tal que os itens (i) e (ii) do Teorema 3.3 são válidos, mas (T', β') não é uma envolvente de α.

Considere o mesmo anel R e a mesma ação parcial α do Exemplo 3.8. Para cada elemento $a = a_1e_1 + a_2e_2 \in R$, defina os seguintes multiplicadores de R: $\gamma_1(a) = (r_a, l_a)$, $\gamma_g(a) = (r_{\beta_g(a)}, l_{\beta_g(a)})$ e $\gamma_{g^2}(a) = (r_{\beta_{g^2}(a)}, l_{\beta_{g^2}(a)})$. Então, para cada $x = ue_1 + ve_2 \in R$,

$$\begin{aligned} x\gamma_1(a) &= xa \in R = D_1 \\ x\gamma_g(a) &= x\beta_g(a) = (ue_1 + ve_2)(a_1e_2 + a_2e_3) = va_1e_2 \in 3Re_2 = D_g \\ x\gamma_{g^2}(a) &= x\beta_{g^2}(a) = (ue_1 + ve_2)(a_1e_3 + a_2e_1) = ua_2e_1 \in 3Re_1 = D_{g^2}. \end{aligned}$$

Com isto, o item (i) do Teorema 3.3 está satisfeito.

Agora, para $y \in D_1 = R$, temos $\alpha_1(\alpha_1^{-1}(y)a) = ya = y\gamma_1(a)$. Também, para todo $y' = we_2 \in D_g$ e todo $y'' = ze_1 \in D_{g^2}$, temos:

$$\begin{aligned} \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(y')a) &= \alpha_g(\alpha_{g^2}(we_2)a) = \alpha_g(we_1(a_1e_1 + a_2e_2)) = \alpha_g(wa_1e_1) \\ &= wa_1e_2 = we_2(a_1e_2 + a_2e_3) = y'\beta_g(a_1e_1 + a_2e_2) = y'\gamma_g(a) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \alpha_{g^2}(\alpha_{g^{-2}}(y'')a) &= \alpha_{g^2}(\alpha_g(ze_1)a) = \alpha_{g^2}(ze_2(a_1e_1 + a_2e_2)) = \alpha_{g^2}(za_2e_2) \\ &= za_2e_1 = ze_1(a_2e_1 + a_1e_3) = y''\beta_{g^2}(a_1e_1 + a_2e_2) = y''\gamma_{g^2}(a). \end{aligned}$$

Assim, o item (ii) do Teorema 3.3 também se verifica.

Logo, α satisfaz as condições (i) e (ii) do Teorema 3.3 mas, como vimos no Exemplo 3.8, mas (T', β') não é uma envolvente de α. Notemos que os ideais D_g e D_{g^2} não são fechados. $\square$

Suponhamos que A é um ideal fechado de R. Então, como já vimos na Seção 1.8, $A^* = e_AQ$, onde $e_A = [K_A, f_A]$, $K_A = A \oplus Ann_R(A)$ e $f_A : K_A \longrightarrow R$ é definida por $f_A(a + b) = a$, para quaisquer $a \in A$ e $b \in Ann_R(A)$. Em particular, $e_A(a + b) = a$ para qualquer $a + b \in K_A$.

O seguinte teorema estende um dos principais resultados de [9] para anéis semiprimos (ver Teorema 1.37).

Teorema 3.10 *Sejam R um anel semiprimo e α uma ação parcial de um grupo G sobre R. Se todo ideal D_g, $g \in G$, é um somando direto de R, então (T', β') é uma envolvente de α.*

Demonstração: Como cada D_g é um somando direto de R, temos que D_g é um ideal fechado e $R = D_g \oplus Ann_R(D_g)$, para todo $g \in G$. Além disso, para todo $g \in G$, existe um idempotente central 1_g de Q tal que $D_g^* = Q1_g$. Pelo que vimos acima, $1_g = e_{D_g}$ e para todo $a = a_g + b_g \in R = D_g \oplus Ann_R(D_g)$, onde $a_g \in D_g$ e $b_g \in Ann_R(D_g)$, temos $1_g a = a_g \in D_g$, ou seja, todo $a \in R$ pode ser escrito como $a = 1_g a + b_g$, para algum $b_g \in Ann_R(D_g)$.

Para todo $g \in G$ e todo $a \in R$ definimos o seguinte multiplicador de R:

$$\gamma_g(a) = (r_{\alpha_g(1_{g^{-1}}a)}, l_{\alpha_g(1_{g^{-1}}a)}).$$

Então temos:

(i) $R\gamma_g(a) = R\alpha_g(1_{g^{-1}}a) \subseteq D_g$, pois $\alpha_g(1_{g^{-1}}a) \in D_g$.

(ii) Para todo $x \in D_g$,

$$\begin{aligned}\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(x)a) &= \alpha_g((\alpha_{g^{-1}}(x)1_{g^{-1}})a) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(x)(1_{g^{-1}}a)) \\ &= \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(x))\alpha_g(1_{g^{-1}}a) = x\alpha_g(1_{g^{-1}}a) \\ &= x\gamma_g(a).\end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema 3.2, α possui uma envolvente e pelo Teorema 3.3 podemos considerar que tal envolvente é (T', β'). □

Observamos que se R tem unidade, então a recíproca do Teorema 3.10 é válida, pelo Teorema 1.37.

Suponhamos que R_1 e R_2 são anéis primos (não necessariamente com unidade) e $R = R_1 \oplus R_2$. Sejam I um ideal fechado de R e I^* o ideal fechado de $Q_r(R)$ correspondente a I. Como $Q_r(R) = Q_r(R_1) \oplus Q_r(R_2)$ tem unidade, existem ideais J_1 de $Q_r(R_1)$ e J_2 de $Q_r(R_2)$ tais que $I^* = J_1 \oplus J_2$. Assim,

$$I = [I] = I^* \cap R = (J_1 \oplus J_2) \cap (R_1 \oplus R_2) = (J_1 \cap R_1) \oplus (J_2 \cap R_2).$$

É fácil ver que $J_1 \cap R_1$ e $J_2 \cap R_2$ são ideais fechados de R_1 e R_2, respectivamente. Porém, os únicos ideais fechados de um anel primo são os ideais triviais. Portanto, temos quatro possibilidades: $I = 0 \oplus 0$, ou $I = R_1 \oplus 0$, ou $I = 0 \oplus R_2$, ou $I = R_1 \oplus R_2 = R$.

Isto e uma simples indução, mostram a

Proposição 3.11 *Sejam $\{R_i \,|\, i = 1, \cdots, n\}$ uma família de anéis primos não necessariamente com unidade e $R = \bigoplus_{i=1}^{n} R_i$. Então os ideais fechados não nulos de R são somas diretas de alguns R_i's que aparecem na decomposição de R.*

Como uma consequência temos que todo ideal fechado de R é um somando direto de R. Logo, segue do Teorema 3.10 o seguinte resultado:

Corolário 3.12 *Suponhamos que $\{R_i \,|\, i = 1, \cdots, n\}$ que uma família de anéis primos não necessariamente com unidade e consideremos o anel $R = \bigoplus_{i=1}^{n} R_i$. Sejam G é um grupo e $\alpha = \{\alpha_g : D_{g^{-1}} \longrightarrow D_g \,|\, g \in G\}$ uma ação parcial de G sobre R. Se cada ideal D_g, $g \in G$, é um ideal fechado de R, então α possui uma envolvente.*

Notamos que se R é um anel semiprimo com unidade, então a recíproca do carolário anterior é válida, pelo Teorema 3.4.

O próximo objetivo é mostrar, através de um contra exemplo, que a recíproca do Teorema 3.10 não é válida. Tal exemplo é muito parecido com o Exemplo 3.8 e por isso nos tornaremos um pouco repetitivos.

Exemplo 3.13 Vamos construir agora uma ação parcial $\alpha = \{\alpha_g : D_g \longrightarrow D_{g^{-1}}\}$ de um grupo G sobre um anel semiprimo R que admite uma envolvente, mas os ideais D_g não são todos fechados.

Sejam $G = \{1, g, g^2\}$ um grupo cíclico de ordem três e o anel $R = 2\mathbb{Z} \oplus 3\mathbb{Z}$. Da mesma maneira que no Exemplo 3.8, o anel de quocientes à direita de Martindale de R é $Q = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} = Qe_1 \oplus Qe_2$, onde e_1, e_2 são idempotentes centrais ortogonais de Q dados por $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$. Assim, $R = Re_1 \oplus Re_2$. Fixe o ideal $B = 6\mathbb{Z} \oplus 6\mathbb{Z}$ de R.

Definimos uma ação parcial de G sobre R por $D_1 = R$, $D_g = 0 \oplus 6\mathbb{Z} = Be_2$, $D_{g^2} = 6\mathbb{Z} \oplus 0 = Be_1$, $\alpha_1 = Id_R$, $\alpha_g : D_{g^2} \ni be_1 \longmapsto be_2 \in D_g$ e $\alpha_{g^2} : D_g \ni be_2 \longmapsto be_1 \in D_{g^2}$, onde $b \in B$. É fácil ver que $\alpha = \{\alpha_h : D_{h^{-1}} \longrightarrow D_h \,|\, h \in G\}$ é uma ação parcial de G sobre R.

Além disso, a extensão α^* de α a Q é dada por $D_1^* = Q$, $D_g^* = \mathbb{Q}e_2$, $D_{g^2}^* = \mathbb{Q}e_1$, $\alpha_1^* = Id_Q$, $\alpha_g^* : D_{g^2}^* \ni qe_1 \longmapsto qe_2 \in D_g^*$ e $\alpha_{g^2}^* : D_g^* \ni qe_2 \longmapsto qe_1 \in D_{g^2}^*$, onde $q \in Q$.

Então, o anel $T = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} = Te_1 \oplus Te_2 \oplus Te_3$ juntamente com a ação global β de G sobre T, definida por $\beta_1 = Id_T$; $\beta_g(e_1) = e_2$, $\beta_g(e_2) = e_3$ e $\beta_g(e_3) = e_1$; $\beta_{g^2}(e_1) = e_3$, $\beta_{g^2}(e_2) = e_1$ e $\beta_{g^2}(e_3) = e_2$ é uma envolvente de α^*.

Note que podemos considerar que R está contido em T via aplicação natural $R \ni (x, y) \longmapsto (x, y, 0) \in T$. Deste modo, temos:

$$\begin{aligned} T' &= \beta_1(R) + \beta_g(R) + \beta_{g^2}(R) \\ &= \beta_1(2\mathbb{Z} \oplus 3\mathbb{Z} \oplus 0) + \beta_g(2\mathbb{Z} \oplus 3\mathbb{Z} \oplus 0) + \beta_{g^2}(2\mathbb{Z} \oplus 3\mathbb{Z} \oplus 0) \\ &= (2\mathbb{Z} \oplus 3\mathbb{Z} \oplus 0) + (0 \oplus 2\mathbb{Z} \oplus 3\mathbb{Z}) + (3\mathbb{Z} \oplus 0 \oplus 2\mathbb{Z}) \\ &= (2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z}) \oplus (2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z}) \oplus (2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z}) \\ &= \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Assim, pela identificação do parágrafo anterior obtemos que $R \lhd T'$ e para $\beta' = \beta|_{T'}$, temos $\alpha_1 = \beta_1'|_{D_1}$, $\alpha_g = \beta_g'|_{D_{g^2}}$, $\alpha_{g^2} = \beta_{g^2}'|_{D_g}$ e

$$\begin{aligned} R \cap \beta_1'(R) &= R \cap R = R = D_1, \\ R \cap \beta_g'(R) &= (2\mathbb{Z} \oplus 3\mathbb{Z} \oplus 0) \cap (0 \oplus 2\mathbb{Z} \oplus 3\mathbb{Z}) = 0 \oplus 6\mathbb{Z} \oplus 0 = D_g, \\ R \cap \beta_{g^2}'(R) &= (2\mathbb{Z} \oplus 3\mathbb{Z} \oplus 0) \cap (3\mathbb{Z} \oplus 0 \oplus 2\mathbb{Z}) = 6\mathbb{Z} \oplus 0 \oplus 0 = D_{g^2}. \end{aligned}$$

Logo, por definição, (T', β') é uma envolvente de α, mas D_g e D_{g^2} não são somandos diretos de R. Observamos também que os ideais D_g e D_{g^2} não são fechados. $\square$

Vimos no exemplo anterior que α ter envolvente não garante que os ideais D_g, $g \in G$, são somandos diretos de R. Mas se os ideais D_g são fechados, então α ter envolvente implica que os ideais D_g são somandos diretos? A resposta é novamente negativa, como veremos a seguir.

Seja $\mathbb{R}$ o conjunto do números reais com a topologia usual e consideremos o conjunto $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ de todas as funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ e para todo

$x \in \mathbb{R}$, defina $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$. É fácil ver que com estas operações, $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ é um anel semiprimo com unidade.

Para cada $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ definimos $Z(f) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) = 0\}$ e para todo ideal I de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, definimos $Z[I] = \{Z(f) \,|\, f \in I\}$. Finalmente, como é comum na literatura, para todo ideal I de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, vamos denotar por $\cap Z[I]$ o conjunto

$$\cap Z[I] = \bigcap_{Z(f) \in Z[I]} Z(f) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) = 0, \;\; para \;\; todo \;\; f \in I\}.$$

Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ é dito ser *nunca denso* em $\mathbb{R}$ se o fecho $\overline{X}$ de X em $\mathbb{R}$ não contém nenhum intervalo aberto. Em outras palavras, $X \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto nunca denso em $\mathbb{R}$ se e somente se o interior de $\overline{X}$ é vazio. Maiores detalhes sobre $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ podem ser encontrados [19].

O próximo resultado, devido a F. Azarpanah, caracteriza os ideais essenciais de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ em termos da topologia de $\mathbb{R}$.

Proposição 3.14 *([1], Proposição 2.1) Um ideal $E \neq 0$ de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ é essencial se e somente se $\cap Z[E]$ é um conjunto nunca denso em $\mathbb{R}$.*

Em [1], o autor prova o resultado anterior para espaços topológicos completamente regulares, i.é, espaços topológicos Hausdorff X tais que, sempre que V é um conjunto fechado de X e $x \notin V$, existe uma função contínua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1$ e $f(V) = 0$. Porém, para os nossos objetivos, não é necessário o enunciado geral. Por isso optamos pela versão apresentada acima.

A partir de agora, vamos fixar o ideal $A = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \,|\, f(x) = 0, \;\; para \;\; todo \;\; x \in [0,1]\}$ de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

Lema 3.15 *O ideal A é um ideal fechado de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$. Mais ainda, se $\phi \in Aut(\mathcal{C}(\mathbb{R}))$, então $A \cap \phi(A)$ também é um ideal fechado de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.*

Demonstração: Para todo ideal I de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, vamos denotar o fecho de I em $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ por $[I]_{\mathcal{C}(\mathbb{R})}$. Considere $f \in [A]_{\mathcal{C}(\mathbb{R})}$. Então existe um ideal essencial H de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ tal que $fH \subseteq A$. Assim, para todo $h \in H$ e todo $x \in [0,1]$, temos

$$f(x)h(x) = 0. \tag{3.1}$$

Vamos mostrar que $f(x) = 0$ para todo $x \in [0, 1]$.

Suponhamos que existe $a \in (0, 1)$ tal que $f(a) \neq 0$. Então, existe $\delta_1 > 0$ tal que $f(x) \neq 0$, para todo $x \in (a - \delta_1, a + \delta_1)$. Por outro lado, como $a \in (0, 1)$, existe $\delta_2 > 0$ tal que $(a - \delta_2, a + \delta_2) \subseteq (0, 1)$. Tomando $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos $(a - \delta, a + \delta) \subseteq (0, 1)$ e $f(x) \neq 0$, para todo $x \in (a - \delta, a + \delta)$. Daí, por (3.1) temos $h(x) = 0$ para todo $h \in H$ e todo $x \in (a - \delta, a + \delta)$. Assim, $(a - \delta, a + \delta) \subseteq \cap Z[H]$. Mas isto é um absurdo pois, pela Proposição 3.14, $\cap Z[H]$ é um conjunto nunca denso em $\mathbb{R}$. Portanto, $f(x) = 0$, para todo $x \in (0, 1)$. Mais ainda, pela continuidade de f, temos $f(0) = f(1) = 0$. Logo, $f \in A$ e temos $[A]_{\mathcal{C}(\mathbb{R})} = A$.

Além disso, se ϕ é um automorfismo de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, então $[\phi(A)]_{\mathcal{C}(\mathbb{R})} = \phi(A)$ e consequentemente, $[A \cap \phi(A)]_{\mathcal{C}(\mathbb{R})} = [A]_{\mathcal{C}(\mathbb{R})} \cap [\phi(A)]_{\mathcal{C}(\mathbb{R})} = A \cap \phi(A)$. Logo, $A \cap \phi(A)$ é um ideal fechado de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$. $\square$

Consideremos agora um ideal essencial H de A. Se $h \in H$ e $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, então para todo $x \in [0, 1]$, temos $(h \cdot f)(x) = h(x) \cdot f(x) = 0 \cdot f(x) = 0$. Deste modo, $H\mathcal{C}(\mathbb{R}) \subseteq A$. Disto e de $H \subseteq H\mathcal{C}(\mathbb{R})$, temos que $H\mathcal{C}(\mathbb{R})$ também é um ideal essencial de A. Mais ainda, se $g \in Ann_{\mathcal{C}(\mathbb{R})}(H\mathcal{C}(\mathbb{R}))$, então, em particular, $gH = 0$. Assim, $(gA)H = A(gH) = A \cdot 0 = 0$. Isto mostra que $gA \subseteq Ann_A(H) = 0$. Portanto, $Ann_{\mathcal{C}(\mathbb{R})}(H\mathcal{C}(\mathbb{R})) \subseteq Ann_{\mathcal{C}(\mathbb{R})}(A)$.

Lema 3.16 *Se ϕ é um automorfismo de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, então $A \cap \phi(A)$ é um ideal fechado de A.*

Demonstração: Para todo ideal J de A, denotamos o fecho de J em A por $[J]_A$. Seja $f \in [A \cap \phi(A)]_A$. Então, $f \in A$ e existe um ideal essencial H de A tal que $fH \subseteq A \cap \phi(A)$. Considerando o ideal essencial $F = H\mathcal{C}(\mathbb{R}) \oplus Ann_{\mathcal{C}(\mathbb{R})}(H\mathcal{C}(\mathbb{R}))$ de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, temos:

$$\begin{aligned} f \cdot F &= f(H\mathcal{C}(\mathbb{R})) + f \cdot Ann_{\mathcal{C}(\mathbb{R})}(H\mathcal{C}(\mathbb{R})) \\ &\subseteq (fH)\mathcal{C}(\mathbb{R}) + f \cdot Ann_{\mathcal{C}(\mathbb{R})}(A) \\ &= (fH)\mathcal{C}(\mathbb{R}) + 0 \\ &\subseteq (A \cap \phi(A))\mathcal{C}(\mathbb{R}) \\ &\subseteq A \cap \phi(A). \end{aligned}$$

Assim sendo, $f \in [A \cap \phi(A)]_{\mathcal{C}(\mathbb{R})} = A \cap \phi(A)$. Portanto, $[A \cap \phi(A)]_A = A \cap \phi(A)$. $\square$

Exemplo 3.17 Neste exemplo vamos mostrar que existe uma ação parcial $\alpha = \{\alpha_n : D_{-n} \longrightarrow D_n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$ de $\mathbb{Z}$ sobre A que admite uma envolvente, cada ideal D_n, $n \in \mathbb{Z}$, é um ideal fechado em A, mas os ideais D_n não são todos somandos diretos de A.

Para cada $n \in \mathbb{Z}$ e cada $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, defina $\beta_n(f) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por $\beta_n(f)(t) = f(t+n)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. É fácil ver que para todo $n \in \mathbb{Z}$, $\beta_n : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \ni f \longmapsto \beta_n(f) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ é um automorfismo de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$. Mais ainda, $\beta_0 = Id_{\mathcal{C}(\mathbb{R})}$ e $\beta_{n+m} = \beta_n \circ \beta_m$, para quaisquer $n, m \in \mathbb{Z}$. Portanto, β uma ação global de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

Agora, para todo $n \in \mathbb{Z}$, definimos $D_n = A \cap \beta_n(A)$ e $\alpha_n = \beta_n|_{D_{-n}}$. Claramente, $\alpha = \{\alpha_n : D_{-n} \longrightarrow D_n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$ é uma ação parcial de $\mathbb{Z}$ sobre A cuja envolvente é o anel $T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \beta_n(A)$ juntamente com a ação global $\beta = \beta|_T$. Além disso, pelo lema anterior, cada ideal D_n, $n \in \mathbb{Z}$, é um ideal fechado de A. Notemos também que para todo $n \in \mathbb{Z}$, $D_n \subseteq \{f \in A \,|\, f(x) = 0, \ \textit{para todo} \ x \in [-n, -n+1]\}$. Em particular, $D_1 \subseteq \{f \in A \,|\, f(x) = 0, \ \textit{para todo} \ x \in [-1, 0]\}$.

Afirmamos que o ideal D_1 não é um somando direto de A.

De fato, suponha que D_1 é um somando direto de A. Então, como A é um anel semiprimo, temos $A = D_1 \oplus Ann_A(D_1)$.

Considere a função $l \in A$ definida por

$$l(x) = \begin{cases} x, & se \quad x \in (-\infty, 0], \\ 0, & se \quad x \in [0, 2], \\ x-2, & se \quad x \in [2, +\infty). \end{cases}$$

É fácil ver que

$$\beta_1(l)(x) = \begin{cases} x+1, & se \quad x \in (-\infty, -1], \\ 0, & se \quad x \in [-1, 1], \\ x-1, & se \quad x \in [1, +\infty). \end{cases}$$

e $\beta_1(l) \in A \cap \beta_1(A) = D_1$.

Agora, se $g \in Ann_A(D_1)$, então $g(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 0)$. Com efeito, se $g \in Ann_A(D_1)$ então, em particular, $g \cdot \beta_1(l) = 0$, i.é, $g(x) \cdot \beta_1(l)(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Uma vez que $\beta_1(l)(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, temos que $g(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$. Disto e de $g \in A$, temos que $g(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 0)$.

Além disso, a continuidade de g nos garante que $g(-1) = 0$. Assim, para todo $g \in Ann_A(D_1)$, temos $g(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 0)$.

Consideremos a função $h \in A$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} x, & se \quad x \in (-\infty, 0], \\ 0, & se \quad x \in [0, 1], \\ x - 1, & se \quad x \in [1, +\infty). \end{cases}$$

Como $A = D_1 \oplus Ann_A(D_1)$, existem $f \in D_1$ e $g \in Ann_A(D_1)$ tal que $h = f + g$, ou seja, $h(x) = f(x) + g(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Mas como $g \in Ann_A(D_1)$, temos $g(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 0)$. Por outro lado, para todo $x \in (-1, 0)$, $f(x) = 0$, pois $f \in D_1$. Daí, para todo $x \in (-1, 0)$, temos $x = h(x) = f(x) + g(x) = g(x)$, de modo que,

$$g(x) = \begin{cases} x, & se \quad x \in (-1, 0), \\ 0, & se \quad x \notin (-1, 0). \end{cases}$$

Isto implica que g não é uma função contínua, contradizendo o fato de que $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. A contradição mostra que D_1 não é um somando direto de A.

Portanto, $\alpha = \{\alpha_n : D_{-n} \longrightarrow D_n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$ é uma ação parcial de $\mathbb{Z}$ sobre A com envolvente, cada ideal D_n, $n \in \mathbb{Z}$, é um ideal fechado A, mas os ideais D_n não são todos somandos diretos de A. □

Observação 3.18 Este último exemplo foi obtido graças a uma sugestão dada pelo professor Ruy Exel .

Capítulo 4

Quase-Envolvente de Ações Parciais

No Capítulo 2 nós demonstramos algumas propriedades do skew anel de grupos parcial $R *_\alpha G$ para o caso em que R é um anel semiprimo e α é uma ação parcial de um grupo G sobre R que não possui necessariamente envolvente.

Neste capítulo vamos introduzir o conceito de ação quase-envolvente de uma ação parcial sobre um anel e dar condições necessárias e suficientes para que uma ação parcial sobre um anel semiprimo com unidade admita uma quase-envolvente. Na sequência, vamos considerar uma ação parcial α de um grupo G sobre um anel semiprimo com unidade R que tenha uma quase-envolvente e provar algumas propriedades do skew anel de grupo parcial $R *_\alpha G$ e do anel dos elementos α-invariantes R^α.

4.1 Ações Quase-Envolventes

Nesta seção introduzimos o conceito de ação quase-envolvente e damos condições necessárias e suficientes para que uma ação parcial sobre um anel semiprimo admita uma quase envolvente. Finalizamos a seção estudando algumas propriedades do subanel dos elementos invariantes parciais, para ações parciais com uma quase-envolvente de grupos finitos sobre anéis semiprimos.

Definição 4.1 *Sejam G um grupo e α uma ação parcial de G sobre um anel R. Uma ação global β de G sobre um anel T é dita ser uma ação quase-envolvente de α se existe um isomorfismo φ de R sobre um ideal de T, satisfazendo as seguintes condições:*

(i) $\varphi(D_g) \subseteq \varphi(R) \cap \beta_g(\varphi(R))$, *para todo* $g \in G$.

(ii) $\varphi \circ \alpha_g(x) = \beta_g \circ \varphi(x)$, *para todo* $g \in G$ *e todo* $x \in D_{g^{-1}}$.

(iii) $T = \sum_{g \in G} \beta_g(\varphi(R))$.

Se (T, β) é uma quase-envolvente de uma ação parcial α, então identificando R com o ideal $\varphi(R)$ podemos considerar

(1) $D_g \subseteq R \cap \beta_g(R)$, para todo $g \in G$.

(2) $\alpha_g(x) = \beta_g(x)$, para todo $g \in G$ e todo $x \in D_{g^{-1}}$.

(3) $T = \sum_{g \in G} \beta_g(R)$.

Observação 4.2 No item (i) da definição anterior temos uma inclusão. Quando vale a igualdade para todo elemento $g \in G$, então uma quase-envolvente é, de fato, uma envolvente como definido por Dokuchaev e Exel em [9]. Portanto, a definição de ação quase-envolvente estende a definição de ação envolvente.

Assim como fizemos em capítulos anteriores, vamos estabelecer algumas hipóteses que serão utilizadas livremente durante o capítulo, a menos que se mencione o contrário.

• R é um anel semiprimo com unidade e Q é o anel de quocientes à direita de Martindale de R.

• G é um grupo, $\alpha = \{\alpha_g : D_{g^{-1}} \longrightarrow D_g \mid g \in G\}$ é uma ação parcial de G sobre o anel R e $\alpha^* = \{\alpha_g : D^*_{g^{-1}} \longrightarrow D^*_g \mid g \in G\}$ é a extensão de α a Q.

• (T, β) é uma envolvente de α^*, $T' = \sum_{g \in G} \beta_g(R)$ e $\beta' = \beta|_{T'}$.

Da mesma maneira que no Capítulo 3, sempre que dissermos que R é um ideal de T' estaremos assumindo implicitamente que T' é um anel.

Lema 4.3 *Com a notação acima, temos que R é um ideal de T' se e somente se (T', β') é uma quase-envolvente de α.*

Demonstração: De fato, suponhamos que R é um ideal de T'. Então, para que (T', β') seja uma quase-envolvente de α basta verificar as condições (1) e (2) acima, pois $T' = \sum_{g \in G} \beta_g(R) = \sum_{g \in G} \beta'_g(R)$.

Pela Observação 3.6, temos que $D_g \subseteq [D_g] \subseteq R \cap \beta_g(R)$, para todo $g \in G$. Finalmente, para todo $g \in G$ e todo $x \in D_{g^{-1}}$, temos $\alpha_g(x) = \alpha^*_g(x) = \beta_g(x) = \beta'_g(x)$. Logo, por definição, (T', β') é uma quase-envolvente de α.

A recíproca é óbvia. □

A seguir definimos um conceito que será muito útil para o desenvolvimento do capítulo.

Definição 4.4 *Sejam R um anel qualquer, G um grupo e $\alpha = \{\alpha_g : D_{g^{-1}} \longrightarrow D_g \mid g \in G\}$ e $\alpha' = \{\alpha'_g : D'_{g^{-1}} \longrightarrow D'_g \mid g \in G\}$ duas ações parciais de G sobre R. Dizemos que α' estende α (ou que α' é uma extensão de α) se $D_g \subseteq D'_g$ e $\alpha_g = \alpha'_g|_{D_{g^{-1}}}$, para todo $g \in G$.*

Lembramos que, pela Observação 3.6, se R é um ideal de T' então $[D_g] = R \cap \beta_g(R)$, para todo $g \in G$.

A seguir daremos condições necessárias e suficientes para que (T', β') seja uma quase-envolvente de α.

Teorema 4.5 *Sejam R um anel semiprimo com unidade e α uma ação parcial de um grupo G sobre R. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) (T', β') *é uma quase-envolvente de* α.

(ii) $R \lhd T'$.

(iii) *Existe uma ação parcial $\alpha' = \{\alpha'_g : D'_{g^{-1}} \longrightarrow D'_g \mid g \in G\}$ de G sobre R, onde $D'_g = [D_g]$ para todo $g \in G$, tal que α' estende α e α' admite uma envolvente.*

Demonstração: Pelo Lema 4.3 temos que (i) é equivalente a (ii).

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Suponhamos que R é um ideal de T'. Então pela Observação 3.6, $[D_g] = R \cap \beta_g(R)$, para todo $g \in G$. Definindo $D'_g = [D_g] = R \cap \beta_g(R)$ e $\alpha'_g = \beta_g|_{D'_{g^{-1}}}$, temos que $\alpha' = \{\alpha'_g : D'_{g^{-1}} \longrightarrow D'_g \,|\, g \in G\}$ é uma ação parcial de G sobre R e pela Proposição 3.4, (T', β') é uma envolvente de α'. Além disso, para todo $g \in G$, $D_g \subseteq [D_g] = D'_g$. Também, para todo $x \in D_{g^{-1}}$, temos $\alpha_g(x) = \alpha^*_g(x) = \beta_g(x) = \beta_g|_{D_{g^{-1}}}(x) = \alpha'_g(x)$. Logo, α' estende α e a afirmação (iii) se verifica.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Suponhamos que exista uma ação parcial $\alpha' = \{\alpha'_g : D'_{g^{-1}} \longrightarrow D'_g \,|\, g \in G\}$, onde $D'_g = [D_g]$ para todo $g \in G$, tal que α' estende α e α' possui uma envolvente, digamos (S, γ). Agora, como $D^*_g = [D_g]^*$ para todo $g \in G$, segue que α^* também é a extensão de α' a Q. Assim, pela Proposição 3.4, (S, γ) é equivalente a (T', β') e, portanto, R é um ideal de T'. □

Observação 4.6 Com a notação do teorema anterior, se a ação parcial α admite (T', β') como uma quase-envolvente, então podemos considerar sem perda de generalidade que a envolvente de α' é (T', β').

Exemplo 4.7 Sejam n um número inteiro maior que 1. Consideremos o anel semiprimo com unidade $R = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, o grupo cíclico de ordem três $G = \{1, g, g^2\}$, os ideais $D_1 = R$, $D_g = 0 \oplus n\mathbb{Z}$ e $D_{g^2} = n\mathbb{Z} \oplus 0$, bem como os isomorfismos de anéis $\alpha_1 = Id_R$, $\alpha_g : D_{g^2} \ni (x, 0) \longmapsto (0, x) \in D_g$ e $\alpha_{g^2} : D_g \ni (0, x) \longmapsto (x, 0) \in D_{g^2}$. É fácil verificar que $\alpha = \{\alpha_h : D_{h^{-1}} \longrightarrow D_h \,|\, h \in G\}$ é uma ação parcial de G sobre R.

Notemos que os fechos dos ideais D_1, D_g e D_{g^2} são, respectivamente, $[D_1] = R$, $[D_g] = 0 \oplus \mathbb{Z}$ e $[D_{g^2}] = \mathbb{Z} \oplus 0$. Claramente, a ação parcial α se estende a uma ação parcial $\alpha' = \{\alpha'_h : D'_{h^{-1}} \longrightarrow D'_h \,|\, h \in G\}$ de G sobre R, onde $D'_h = [D_h]$, para todo $h \in G$. Como cada D'_h, $h \in G$, é gerado por um idempotente central de R, temos dos Teoremas 1.37 e 4.5 que α admite uma quase-envolvente. □

O exemplo anterior mostra que existem muitas ações parciais sobre anéis semiprimos com unidade que possuem uma ação quase-envolvente mesmo que não admitam uma ação envolvente. Por isso, no que segue, estudaremos um pouco mais sobre elas.

O próximo resultado generaliza o Teorema 1.44 para ações parciais sobre anéis semiprimos com unidade que admitem (T', β') como uma quase-envolvente.

Proposição 4.8 *Sejam R um anel semiprimo com unidade e α uma ação parcial de um grupo finito G sobre R. Se (T', β') é uma quase-envolvente de α, então $R^{\alpha} = T'1_R$. Mais ainda, os anéis R^{α} e T'^{G} são isomorfos.*

Demonstração: Como (T', β') é uma quase-envolvente de α, segue do Teorema 4.5 que existe uma ação parcial $\alpha' = \{\alpha'_g : D'_{g^{-1}} \longrightarrow D'_g \,|\, g \in G\}$ de G sobre R, onde $D'_g = [D_g]$ para todo $g \in G$, tal que α' estende α e (T', β') é uma envolvente de α'. Assim, pelo Teorema 1.44, $R^{\alpha'} = T'^{G}1_R$ e os anéis $R^{\alpha'}$ e T'^{G} são isomorfos.

Para finalizar, vamos mostrar que $R^{\alpha} = R^{\alpha'}$.

Seja $x \in R^{\alpha'}$. Então, para todo $g \in G$ e todo $a \in D_{g^{-1}} \subseteq D'_{g^{-1}}$, temos que $\alpha_g(xa) = \alpha'_g(xa) = x\alpha'_g(a) = x\alpha_g(a)$. Portanto, $x \in R^{\alpha}$.

Agora, consideremos $x \in R^{\alpha}$ e $b \in D'_{g^{-1}}$. Devemos mostrar que $\alpha'_g(xb) = x\alpha'_g(b)$. Se $D'_{g^{-1}} = 0$, nada temos a provar. Portanto, podemos supor que $D'_{g^{-1}} \neq 0$ e que $b \neq 0$. Como $D'_g \subseteq D^*_g$ e D^*_g é isomorfo a $Q_r(D_g)$, é suficiente mostrar que existe um ideal essencial L de D_g tal que $(\alpha'_g(xb) - x\alpha'_g(b))L = 0$.

Uma vez que $b \in D'_{g^{-1}} = [D_{g^{-1}}]$, existe um ideal essencial F de R tal que $bF \subseteq D_{g^{-1}}$. Consideremos o ideal essencial $L = \alpha_g(F \cap D_{g^{-1}})$ de D_g. Então, para todo $l = \alpha_g(a) \in L$, $a \in F \cap D_{g^{-1}}$, temos:

$$
\begin{aligned}
(\alpha'_g(xb) - x\alpha'_g(b))l &= \alpha'_g(xb)\alpha_g(a) - x\alpha'_g(b)\alpha_g(a) = \alpha'_g(xb)\alpha'_g(a) - x\alpha'_g(b)\alpha'_g(a) \\
&= \alpha'_g(xba) - x\alpha'_g(ba) = \alpha_g(xba) - x\alpha_g(ba) \\
&= x\alpha_g(ba) - x\alpha_g(ba) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Logo, $(\alpha'_g(xb) - x\alpha'_g(b))L = 0$, como queríamos provar. $\square$

O seguinte resultado é uma generalização do Teorema 1.45.

Teorema 4.9 *Sejam R um anel semiprimo com unidade e α é uma ação parcial de um grupo finito G sobre R. Se (T', β') é uma quase-envolvente de α e R é livre de $|G|$-torção, então:*

(i) R^α *é semiprimo.*

(ii) $udim(R^\alpha) \leq udim(R) \leq |G| udim(R^\alpha)$.

(iii) R^α *é um anel de Goldie à direita se e somente se* R *é um anel de Goldie à direita.*

Demonstração: Consideremos a ação parcial $\alpha' = \{\alpha'_g : D'_{g^{-1}} \longrightarrow D'_g \,|\, g \in G\}$ de G sobre R dada no Teorema 4.5. Então (T', β') é uma envolvente de α' e como vimos na demonstração anterior, $R^\alpha = R^{\alpha'}$. Logo, pelo Teorema 1.45, o resultado segue. □

4.2 Um Contexto de Morita

Sejam R um anel semiprimo com unidade e α uma ação parcial de um grupo G sobre R. Como vimos no Teorema 4.5, se (T', α') é uma quase-envolvente de α, então existe uma ação parcial $\alpha' = \{\alpha'_g : D'_{g^{-1}} \longrightarrow D'_g \,|\, g \in G\}$ de G sobre R, onde $D'_g = [D_g]$ para todo $g \in G$, tal que α' estende α e (T', β') é uma envolvente de α'. Assim, nós temos $R *_\alpha G \subseteq R *_{\alpha'} G \subseteq T *_\beta G$.

Nesta seção, nosso objetivo é mostrar que existe um contexto de Morita entre os anéis $R *_\alpha G$ e $R *_{\alpha'} G$, sempre que o número de ideais D_g, $g \in G$, não nulos é finito. Isto acontece, por exemplo, quando G é finito. Com isso, vamos provar que existe uma correspondência biunívoca entre os ideais primos P de $R *_\alpha G$ tais que $P \cap R = 0$ e os ideais primos P' de $R *_{\alpha'} G$ tais que $P' \cap R = 0$. Em seguida, descrevemos uma relação entre $rad(R *_\alpha G)$ e $rad(R *_{\alpha'} G)$, onde rad denota qualquer N-radical. Como consequência, obtemos que $R *_\alpha G$ é semiprimo (resp. Jacobson-semisimples, Levitzki-semisimples) se e somente se $R *_{\alpha'} G$ é semiprimo (resp. Jacobson-semisimples, Levitzki-semisimples).

Daqui em diante, assumimos que (T', β') é uma quase-envolvente de α e $R *_\alpha G$ e $R *_{\alpha'} G$ sempre denotarão os skew anéis de grupos descritos acima, a menos que mencionemos o contrário.

O próximo resultado nos dá uma importante relação entre $R *_\alpha G$ e $R *_{\alpha'} G$.

Lema 4.10 *Se α é uma ação parcial tal que o número de ideais D_g não nulos é finito, $g \in G$, então existe um ideal essencial H de R tal que $H(R *_{\alpha'} G)$ e $(R *_{\alpha'} G)H$ estão ambos contidos em $R *_{\alpha} G$.*

Demonstração: Iremos provar o resultado para o caso em que G é finito, pois o caso enunciado é análogo.

Suponhamos que G é finito. Pelo Teorema 1.37, para cada $g \in G$ existe um idempotente central 1_g de R tal que $D'_g = [D_g] = R1_g$. Então, para cada $g \in G$, existe um ideal essencial H_g de R tal que $H_g 1_g = 1_g H_g \subseteq D_g$. Assim, $H_g D'_g = H_g(1_g R) = (H_g 1_g)R \subseteq D_g R \subseteq D_g$, de modo que $H_g(D'_g u_g) = (H_g D'_g)u_g \subseteq D_g u_g$.

Como G é um grupo finito, o ideal $H = \bigcap\limits_{g\in G} H_g$ é um ideal essencial de R. Portanto,

$$H(R *_{\alpha'} G) = H \sum_{g\in G} D'_g u_g \subseteq \sum_{g\in G} H D'_g u_g \subseteq R *_{\alpha} G.$$

Por outro lado, se $au_g \in D'_g u_g$, então para todo $x \in H \subseteq H_{g^{-1}}$, temos

$$au_g x = \alpha'_g(\alpha'_{g^{-1}}(a)x)u_g = \alpha'_g(\alpha'_{g^{-1}}(a)1_{g^{-1}}x)u_g = \alpha_g(\alpha'_{g^{-1}}(a)1_{g^{-1}}x)u_g \in R *_{\alpha} G.$$

Portanto,

$$(R *_{\alpha'} G)H = \left(\sum_{g\in G} D'_g u_g\right) H \subseteq \sum_{g\in G} (D'_g u_g H) \subseteq R *_{\alpha} G,$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Observação 4.11 Seja R um anel semiprimo, α uma ação parcial de um grupo finito G sobre R e α^* a extensão de α ao anel quocientes à direita de Martindale Q de R. Sabemos que cada ideal D^*_g, $g \in G$, é gerado por um idempotente central e_g de Q e existe um ideal essencial H_g de R tal que $e_g H_g = H_g e_g \subseteq D_g$. Como G é finito, temos que $H = \bigcap_{g\in G} H_g$ é um ideal essencial de R tal que $e_g H = He_g \subseteq D_g$, para todo $g \in G$. No entanto, não sabemos se $HD^*_g = He_g Q$ está contido em D_g, pois geralmente $(He_g)Q \subseteq D_g Q \nsubseteq D_g$. Portanto, em geral, não podemos garantir que $H(Q *_{\alpha^*} G)$ e $(Q *_{\alpha^*} G)H$ estão contidos em $R *_{\alpha} G$.

Teorema 4.12 *Se α é uma ação parcial tal que o número de ideais D_g não nulos é finito, $g \in G$, então existe um contexto de Morita entre $R *_\alpha G$ e $R *_{\alpha'} G$.*

Demonstração: Vamos denotar $S = R *_\alpha G$ e $S' = R *_{\alpha'} G$. Pelo lema anterior, existe um ideial essencial H de R tal que HS', $S'H \subseteq S$. Assim, $M = SHS'$ é um (S, S')-bimódulo e $N = S'HS$ é um (S', S)-bimódulo. Além disso, $MN = SHS'HS \subseteq S$ é um ideal de S e $NM = S'HSHS' \subseteq S \subseteq S'$ é um ideal de S'. Finalmente, definimos $\tau : M \otimes_{S'} N \ni m \otimes n \longmapsto mn \in S$ e $\tau' : N \otimes_S M \ni n \otimes m \longmapsto nm \in S'$. Como S e S' são anéis associativos, segue facilmente que τ e τ' são homomorfismos de bimódulos e portanto $(R *_\alpha G, R *_{\alpha'} G, M, N, \tau, \tau')$ é um contexto de Morita. □

Como consequência dos Teoremas 4.12 e 1.19, temos:

Proposição 4.13 *Se α é uma ação parcial tal que o número de ideais D_g não nulos é finito, $g \in G$, então existe um correspondência biunívoca, via contração, entre*

(i) O conjunto de todos os ideais primos P de $R *_\alpha G$ tais que $P \cap R = 0$.

(ii) O conjunto de todos os ideais primos P' de $R *_{\alpha'} G$ tais que $P' \cap R = 0$.

Demonstração: Considere o ideal essencial H de R dado pelo Lema 4.10(i) e o contexto de Morita $(R *_\alpha G, R *_{\alpha'} G, M, N, \tau, \tau')$ dado pelo Teorema 4.12. Seja P um ideal primo de $R *_\alpha G$ tal que $P \cap R = 0$. Como $R *_\alpha G$ e $R *_{\alpha'} G$ tem unidade 1_R, temos que $H^2 \subseteq MN$ e deste modo, $MN \nsubseteq P$. Assim, pelo Teorema 1.19, $P' = \{x \in R *_{\alpha'} G \,|\, MxN \subseteq P\}$ é um ideal primo de $R *_{\alpha'} G$. Afirmamos que $P = P' \cap (R *_\alpha G)$. De fato, uma vez que M e N estão contidos em $R *_\alpha G$, temos que $MPN \subseteq P$ e assim, $P \subseteq P' \cap (R *_\alpha G)$. Por outro lado, se $y \in P' \cap (R *_\alpha G)$, então $NyM \subseteq P'$, pois $P' \lhd R *_{\alpha'} G$. Daí, pelo Teorema 1.19, temos $y \in P$. Isso mostra que $P' \cap (R *_\alpha G) \subseteq P$ e a igualdade segue. Além disso, $P' \cap R = 0$, pois se $r \in P' \cap R$, então $NrM \subseteq P'$, pois $P' \lhd R *_{\alpha'} G$. Pelo Teorema 1.19 temos $r \in P$ e portanto, $r \in P \cap R = 0$.

Agora, seja P' um ideal primo de $R *_{\alpha'} G$ tal que $P' \cap R = 0$. Como $H^2 \subseteq NM$ temos que $NM \nsubseteq P'$, pois $P' \cap R = 0$. Daí, pelo Teorema 1.19, $P = \{x \in R *_\alpha G \,|\, NxM \subseteq P'\}$ é um ideal primo de $R *_\alpha G$. Da mesma maneira que antes, temos $P = P' \cap (R *_\alpha G)$ e $P \cap R = 0$. □

Lema 4.14 *Se G é um grupo qualquer, então as seguintes propriedades são válidas:*

(i) Se $y_1, \cdots, y_n$ são elementos não nulos de $R *_{\alpha'} G$, então existe um ideal essencial H de R tal que $0 \neq y_i H \subseteq R *_{\alpha} G$, para todo $i = 1, \cdots, n$.

(ii) Sejam $y \in R *_{\alpha'} G$ e H um ideal essencial de R. Se $yH = 0$ ou $Hy = 0$ então $y = 0$.

(iii) Se I é um ideal à direita não nulo de $R *_{\alpha'} G$, então $I \cap (R *_{\alpha} G) \neq 0$.

Demonstração: Notemos que a extenção α'^* de α' a Q concide com α^*. Assim, $R *_{\alpha'} G \subseteq Q *_{\alpha^*} G$ e portanto (i) e (ii) são consequências do Corolário 2.5 e do Lema 2.4. Finalmente, (iii) segue de (i) e (ii). □

Como consequência dos Lemas 4.14 e 4.10 temos:

Proposição 4.15 *Se α é uma ação parcial tal que o número de ideais D_g não nulos é finito, $g \in G$, então $R *_{\alpha} G$ é semiprimo se e somente se $R *_{\alpha'} G$ é semiprimo.*

Demonstração: Suponha que $R *_{\alpha} G$ é semiprimo e seja I um ideal não nulo de $R *_{\alpha'} G$ tal que $I^2 = 0$. Então, pelo Lema 4.14 (iii), $I \cap (R *_{\alpha} G)$ é um ideal não nulo de $R *_{\alpha} G$. Porém, $(I \cap R *_{\alpha} G)^2 \subseteq I^2 = 0$, contradizendo o fato de que $R *_{\alpha} G$ é semiprimo.

Reciprocamente, suponha que $R *_{\alpha'} G$ é semiprimo e seja I um ideal de $R *_{\alpha} G$ tal que $I^2 = 0$. Pelo Lema 4.10, existe um ideal essencial H de R tal que $H(R *_{\alpha'} G)$ e $(R *_{\alpha'} G)H$ estão ambos contidos em $R *_{\alpha} G$. Assim, $(R *_{\alpha'} G)HIH(R *_{\alpha'} G)$ é um ideal de $R *_{\alpha'} G$ contido em I, pois $I \triangleleft R *_{\alpha} G$. Daí, $((R *_{\alpha'} G)HIH(R *_{\alpha'} G))^2 = 0$, o que implica que $(R *_{\alpha'} G)HIH(R *_{\alpha'} G) = 0$, pois $R *_{\alpha'} G$ é semiprimo. Como $R *_{\alpha'} G$ tem unidade, obtemos que $(HI)H = 0$. Logo, do Lema 4.14 (ii), segue que $I = 0$. □

Observação 4.16 No Capítulo 2, mostramos que se $R *_{\alpha} G$ é semiprimo, então $Q *_{\alpha^*} G$ também é semiprimo. No entanto, nós não conseguimos provar a recíproca. A dificuldade está em que, dado um ideal I de $R *_{\alpha} G$ tal que $I^2 = 0$ como determinar um ideal J de $Q *_{\alpha^*} G$ tal que $J^2 = 0$. Observamos que esse problema é superado na proposição anterior, graças ao ideal essencial H de R determinado no Lema 4.10.

Lembramos que pelo Teorema 1.18, se $(S, S', V, W, \Gamma, \Gamma')$ é um contexto de Morita, então para todo N-radical rad, temos

$$\Gamma(V \otimes_{S'} rad(S')W) \subseteq rad(S) \quad e \quad \Gamma'(W \otimes_S rad(S)V) \subseteq rad(S').$$

Assim, nós obtemos a seguinte relação entre os N-radicais de $R *_\alpha G$ e $R *_{\alpha'} G$:

Proposição 4.17 *Se α é uma ação parcial tal que o número de ideais D_g não nulos é finito, $g \in G$, e rad é um N-radical, então existe um ideal essencial H de R tal que*

(i) $Hrad(R *_{\alpha'} G)H \subseteq rad(R *_\alpha G)$.

(ii) $Hrad(R *_\alpha G)H \subseteq rad(R *_{\alpha'} G)$.

Demonstração: Denote $S = R *_\alpha G$ e $S' = R *_{\alpha'} G$ e consideremos o contexto de Morita do Teorema 4.12. Pelo Teorema 1.18, $\tau(M \otimes_{S'} rad(S')N) \subseteq rad(S)$. Mas pela definição de τ e como S e S' tem a mesma unidade, segue que

$$Hrad(S')H \subseteq (SHS')rad(S')(S'HS) = \tau(M \otimes_{S'} rad(S')N) \subseteq rad(S).$$

Portanto, $Hrad(R *_{\alpha'} G)H \subseteq rad(R *_\alpha G)$ e (i) é válido.

Analogamente, $Hrad(R *_\alpha G)H \subseteq rad(R *_{\alpha'} G)$ e (ii) também é válido. □

O próximo resultado é uma consequência imediata da Proposição 4.17 e do Lema 4.14(ii).

Corolário 4.18 *Se α é uma ação parcial tal que o número de ideais D_g não nulos é finito, $g \in G$, então $R *_\alpha G$ é semiprimo (resp. Jacobson-semisimples, Levitzki-semisimples) se e somente se $R *_{\alpha'} G$ é semiprimo (resp. Jacobson-semisimples, Levitzki-semisimples).*

Demonstração: Segue da proposição anterior e do fato de que os radicais primos, de Jacobson e de Levitzki são N-radicais. □

Corolário 4.19 *Suponhamos que G é um grupo finito.*

(i) Se R é livre de $|G|$-torção, então $R *_\alpha G$ é semiprimo.

(ii) Se R é Jacobson-semisimples e $|G|$ é invertivel em R, então $R *_\alpha G$ é Jacobson-semisimples.

Demonstração: (i) Pela Proposição 1.42(i), temos que $R *_{\alpha'} G$ é semiprimo. Logo, pelo corolário anterior, $R *_\alpha G$ também é semiprimo.

(ii) Se R é Jacobson-semisimples e $|G|$ é invertível em R, segue da Proposição 1.42(ii) que $R *_{\alpha'} G$ é Jacobson-semisimples e portanto, pelo corolário anterior, $R *_\alpha G$ também é Jacobson-semisimples. □

Definição 4.20 *Dizemos que uma classe de anéis $\mathcal{F}$ é uma classe especial, se as seguintes condições são satifeitas:*

(i) Todo anel da classe $\mathcal{F}$ é um anel primo.

(ii) Todo ideal não nulo de um anel de $\mathcal{F}$ é ele mesmo um anel de $\mathcal{F}$.

(ii) Se I é um anel de $\mathcal{F}$ e I é um ideal de um anel R, então $R/Ann_R(I)$ está em $\mathcal{F}$, onde $Ann_R(I) = \{x \in R \,|\, xI = Ix = 0\}$.

Notemos que a classe de todos os anéis primos, simples com unidade e primitivos à esquerda (à direita) são classes especiais de anéis. Maiores detalhes sobre este assunto podem ser encontrados no Capítulo 7 de [7]

Em [16], M. Ferrero e E. Miranda provaram o seguinte resultado para uma classe especial de anéis.

Lema 4.21 *Sejam $S \subseteq S'$ anéis e $\mathcal{F}$ uma classe especial de anéis. Suponhamos que existe um ideal I de S' tal que I está contido em S. Então existe uma correspondência biunívoca, via contração, preservando ordem, entre*

(i) O conjunto de todos os ideais P de S tais que $S/P \in \mathcal{F}$ e $I \nsubseteq P$.

(ii) O conjunto de todos os ideais L de S' tais que $S'/L \in \mathcal{F}$ e $I \nsubseteq L$.

Voltemos ao nosso estudo da extensão $R *_\alpha G \subseteq R *_{\alpha'} G$. Suponhamos que α é uma ação parcial tal que o número de ideais D_g não nulos é finito, $g \in G$, e denotemos $S = R *_\alpha G$ e $S' = R *_{\alpha'} G$. Então, $S \subseteq S'$ e pelo Lema 4.10, existe um ideal essencial H de R tal que HS' e $S'H$ estão contidos em S. Portanto, $I = S'H^2S'$ é um ideal de S' contido em S.

Proposição 4.22 *Com a notação acima, existe uma correspondência biunívoca, via contração, preservando ordem, entre*

(i) O conjunto de todos os ideais P de S que não contém I tais que S/P é um anel primo (resp. primitivo à esquerda (à direita), simples com unidade).

(ii) O conjunto de todos os ideais L de S' que não contém I tais que S'/L é um anel primo (resp. primitivo à esquerda (à direita), simples com unidade).

Demonstração: De fato, como já sabemos, a classe dos anéis primos (primitivos à esquerda (à direita), simples com unidade) é uma classe especial de anéis.

Agora, seja P um ideal de S que não contém I tal que S/P é um anel primo (resp. primitivo à esquerda (à direita), simples com unidade). Portanto, pelo lema anterior, existe um único ideal L de S' tal que $P = L \cap S$, $I \nsubseteq L$ e S'/L é um anel primo (resp. primitivo à esquerda (à direita), simples com unidade).

Analogamente, se L é um ideal de S' que não contém I tal que S'/L é um anel primo (resp. primitivo à esquerda (à direita), simples com unidade), então um raciocínio análogo ao anterior, mostra que existe um único ideal P de S tal que $P = L \cap S$, $I \nsubseteq P$ e S/P é um anel primo (resp. primitivo à esquerda (à direita), simples com unidade).

A preservação da ordem também é garantida pelo lema anterior. □

Bibliografia

[1] AZARPANAH. F.; *Intersection of Essential Ideals in* $\mathcal{C}(X)$. Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997), 2149-2154.

[2] BEIDAR, K. I., MARTINDALE, W. S., MIKHALEV, A. V.; *Rings With Generalized Identities*. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Marcel Dekker Inc., New York, 1996.

[3] CARVALHO, P. A. A. B., CORTES, W., FERRERO, M.; *Partial Skew Group Rings Over Polycyclic by Finite Groups*. Algebra and Representation Theory, Online Firts (2009).

[4] CORTES, W., FERRERO, M.; *Globalizations of Partial Actions on Semiprime Rings*. Contemporary Math. 499 (2009), 27-35.

[5] CORTES, W., FERRERO, M.; *Partial Skew Polynomial Rings: Prime and Maximal Ideals*. Comm. Algebra 35 (2007), 1183-1199.

[6] CORTES, W., FERRERO, M., MARUBAYASHI, H.; *Partial Skew Polynomial Rings and Goldie Rings*. Comm. Algebra 36 (2008), 4284-4295.

[7] DIVINSKY, N.; *Rings and Radicals.* Allen and Unwin, London, 1965.

[8] DOKUCHAEV, M., DEL RIO, A., SIMÓN, J. J.;*Globalizations of Partial Actions on Nonunital Rings*. Proc. Amer. Math. Soc. 135 (2007), 343-352.

[9] DOKUCHAEV, M., EXEL, R.; *Associativity of Crossed Products by Partial Actions, Enveloping Actions and Partial Representations* . Trans. Amer. Math. Soc. 357 (5) (2005), 1931-1952.

[10] DOKUCHAEV, M., FERRERO, M., PAQUES, A.; *Partial Actions and Galois Theory*. J. Pure Appl. Algebra 208 (2007), 77-87.

[11] FERRERO, M.; *Closed and Prime Ideals in Free Centred Extentions*. J. Algebra 148 (1992), 1-16.

[12] FERRERO, M,: *Closed Submodules of Centred Bimodules Over Semiprime Rings.* Nova J. Math., Game Theory and Alg., 5, (1996) 309-345.

[13] FERRERO, M.; *Partial Actions of Groups on Semiprime Rings.* A Series of Lectures Notes in Pura and Applied Mathematics, 248, Chapman and Hall, 2006.

[14] FERRERO, M., GUZMÁN, J. A., *Closed and Prime Ideals in Partial Skew Groups Rings of Abelian Groups*. To apear.

[15] FERRERO, M., LAZZARIN, J.; *Partial Actions and Partial Skew Group Rings*. J. Algebra 319 (2008), 5247-5264.

[16] FERRERO, M., MIRANDA, E. S.; *Prime, Maximal and Primitive Ideals in Some Subrings of Polynomial Rings*. To apear.

[17] FERRERO, M., GUZMÁN, J.A., LAZZARIN, J.; *Partial Actions and Partial Fixed Rings*. Comm. Algebra 38 (2010), 2079-2091

[18] GARDNER, B. J., *Radical Theory of Rings*. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 261, New York: Marcel Dekker Inc., 2004.

[19] GILLMAN, L., MEYER. J.; *Ring of Continuous Functions* University Series in Higher Math., Van Nostrand, Princeton, 1960.

[20] GUZMÁN, J. A., LAZZARIN, J.; *A Morita Context Related to Finite Groups Acting Partially on a Ring*. Algebra and Discrete Mathematics, 3 (2009), 49 – 60.

[21] LAM, T. Y.; *A First Course on Noncommutative Rings*, 2ª ed., Grad. Text in Math., vol. 131, Springer-Verlag, New York, 2001.

[22] LAM, T. Y.; *Lectures on Modules and Rings*. Grad. Text in Math., 189, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1998.

[23] LAMBEK, J., *Lectures Notes on Rings and Modules*. 3ª ed., Chelsea Publishing Company, New York, 1986.

[24] LAZZARIN, J. R.; *Ações Parciais de Grupos Sobre Anéis: O Skew Anel de Grupos Parcial e o Subanel dos Invariantes*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre (Brasil), 2006.

[25] MATCZUK, J.; *S-Conh-Jordan Extentions*. Comm. Algebra 35 (2007), 725-746.

[26] McCONNEL, J. C., ROBSON, J.C.; *Noncommutative Noetherian Rings*, John Wiley and Sons, New York, 1988.

[27] MONTGOMERY, S.; *Fixed Rings of Finite Automorphism Groups of Associative Rings*. Lectures Notes in Math., 818, Springer, New York, 1980.

[28] NĂSTĂLESCU, C., OYESTAEYEN, F.V.; *Methods of Graded Rings*, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 2004.

[29] OSTERBURG, J.; *The Coefficient Ring of the Skew Group Ring*. Czechoslovak Mathematical Journal 29 (1979), 144-147.

[30] PARK, J. K.; *Artinian Skew Group Rings*. Proc. Amer. Math. Soc., vol. 75, (1979), 1-7.

[31] PARK, J. K.; *Skew Groups Rings With Krull Dimension*. Math. J. Okayama Univ. 25, (1983), 75-80.

[32] PASSMAN, D. S.; *Infinite Crossed Products*. Academic Press Inc., San Diego, 1989.

[33] SANDS, A. D.; *Radicals and Morita Contexts*. J. of Algebra, 24, (1973), 335-345.

Índice