NS 442952

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
CADERNOS DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
SÉRIE B: TRABALHO DE APOIO DIDÁTICO

NÚMEROS RACIONAIS, REAIS E COMPLEXOS
VOLUME 1

JAIME BRUCK RIPOLL
CYDARA CAVEDON RIPOLL
JOSÉ FRANCISCO PORTO DA SILVEIRA

SÉRIE B, N° 67
PORTO ALEGRE, SETEMBRO DE 2003

No Capítulo 6 aborda-se o problema da determinação de coordenadas para pontos da reta euclidiana, chegando então à noção de número real. Demonstra-se aí o Teorema Fundamental da Geometria Analítica, e constrói-se o corpo dos números reais.

No Capítulo 7 faz-se um estudo mais aprofundado dos números reais, concentrando-se em suas representações aritmética e algébrica e suas respectivas complexidades.

No Capítulo 8 discute-se o problema da insuficiência algébrica dos números racionais e reais, motivando-se a construção dos números complexos, que é também feita neste capítulo. Encerra-se o capítulo com um dos resultados mais importantes da Álgebra, conhecido como o Teorema Fundamental da Álgebra.

APRESENTAÇÃO

Esta apostila foi escrita ao longo de quatro semestres de discussões sobre o ensino dos números reais e complexos aos alunos de Licenciatura em Matemática; a parte referente aos números reais vem sendo lecionada, nos moldes desta apostila, há dois anos na disciplina de Matemática Elementar I, da UFRGS.

Os conceitos, idéias e resultados associados aos temas centrais desta apostila, a saber, o estudo dos números reais e o estudo dos números complexos, foram desenvolvidos ao longo de muitos séculos, durante os quais várias crises foram enfrentadas. A força dessas dificuldades históricas era tão grande que muitas delas ainda sobrevivem em vários tipos de erros e confusões comuns a grande maioria de livros de Matemática destinados ao Ensino Fundamental e Médio. Nesta apostila esclarecemos grande parte deles.

O Capítulo 1, Introdução ao Pensamento Matemático, tem como objetivo dar a um aluno que está ingressando em um curso superior de Matemática uma idéia inicial do método matemático de argumentação; em particular, discute-se o método dedutivo e apresentam-se alguns tipos muito comuns de demonstrações matemáticas.

O Capítulo 2 é uma breve revisão dos números inteiros; já o Capítulo 3 consiste em uma revisão mais aprofundada dos números racionais; em ambos salientam-se propriedades e fatos que nortearão o que constitui uma das partes centrais desta apostila: o estudo dos números reais.

A passagem dos números racionais para os reais é motivada geometricamente, através da necessidade de ampliarmos o campo numérico dos racionais de modo a sermos capazes de medir qualquer segmento da reta euclidiana. Para tal, é necessário um estudo prévio da reta euclidiana que inclua a discussão de algumas de suas propriedades básicas fundamentais, em especial o Postulado do Continuum, o que é feito no Capítulo 4.

No Capítulo 5 aborda-se efetivamente o problema de medição de um segmento de reta via o método da régua decimal infinita; esta última é uma idealização matemática, muito conveniente, da familiar régua decimal utilizada no Ensino Básico. É então introduzida e discutida a noção de número real absoluto.

ÍNDICE

1 INTRODUÇÃO AO PENSAMENTO MATEMÁTICO

1.1 Em Matemática, não basta intuir, não basta fazer experimentações: é preciso demonstrar

A Matemática é uma ciência exata e, como tal, não podemos nos contentar, ao intuirmos novos resultados (seja através da experimentação, simulação, ou mesmo pela intuição pura e simples) em aceitá-los como verdadeiros sem que os mesmos venham acompanhados de uma argumentação que os valide de maneira clara e precisa. Além de isso ser um "protocolo oficial", a prática mostra que a preocupação com a demonstração é fundamental, pois muitas vezes a intuição nos engana.

Em Matemática, costumamos usar a palavra **conjectura** para indicar uma afirmação decorrente de uma intuição cuja veracidade ou falsidade ainda não se conseguiu demonstrar.

É comum em Matemática uma conjectura passar por várias gerações de matemáticos, até que alguém consiga "resolvê-la", seja comprovando-as (através de uma demonstração), seja mostrando sua falsidade (o que, em geral, é feito com o que chamamos de **contra-exemplos**; veja exemplo a seguir). A História tem mostrado que, muitas vezes, uma dada conjectura se confirma mas outras vezes não, tornando assim clara a necessidade de uma demonstração. Vejamos três exemplos importantes de conjecturas resistentes:

Exemplo 1 -
O famoso matemático Pierre de Fermat, por volta de 1620, conjecturou que

$$P(n) = 1 + 2^{(2^n)}$$

é um número primo, para todos os infinitos valores $n \in \{0, 1, 2, ...\}$. *Ele verificou que*

$$P(0) = 3,\ P(1) = 5,\ P(2) = 17,\ P(3) = 257,\ P(4) = 65\,537$$

são primos, mas ficou por aí, pois esses valores crescem muito rápido, e decidir se um número muito grande é primo é muito trabalhoso. Cerca de 100 anos depois, Leonhard Euler mostrou que $P(5)$ *não é primo:*

$$P(5) = 1 + 2^{32} = 4\,294\,967\,297 = 641 \times 6\,700\,417,$$

provando assim a falsidade dessa conjectura.

Exemplo 2 -

Uma das mais famosas conjecturas matemáticas foi enunciada pelo mesmo matemático francês, em 1637 e ficou conhecida como ***a Conjectura de Fermat:*** *ao estudar as equações*

$$x + y = z,\ x^2 + y^2 = z^2,\ x^3 + y^3 = z^3, \ldots,$$

onde as incógnitas x, y e z podem assumir apenas valores inteiros, depois de constatar que a primeira equação tem muitas soluções, que a segunda tem bem menos (apesar de ainda serem em número infinito) e não conseguir achar nenhuma solução não trivial - ou seja, outra que ($x = 0$ e $y = z$) ou ($y = 0$ e $x = z$) ou ($z = 0$ e $x = -y$ para o caso em que n é ímpar) - para a terceira e seguintes, ele conjecturou que, para $n \geq 3$, não existem soluções inteiras não triviais para

$$x^n + y^n = z^n.$$

Mesmo após o esforço de muitos dos maiores matemáticos de todos os tempos, a prova dessa conjectura só foi conseguida 356 anos depois de Fermat, pelo americano Andrew Wiles, em 1993. Este é um magnífico exemplo que mostra o quão grande pode ser a distância entre uma intuição e uma demonstração. Mais do que isso, é importante observarmos que, na tentativa de demonstrar a conjectura de Fermat, os matemáticos desenvolveram uma enorme quantidade de idéias e resultados que serviram para fertilizar muitos campos da Matemática, produzindo até tecnologias que servem ao cidadão, como alguns métodos de criptografia (codificação e decodificação de mensagens). O leitor interessado poderá ler mais sobre essa conjectura e sua prova no livro de Simon Singh, "O Último Teorema de Fermat", da Editora Record.

O exemplo acima serve também de ilustração para o seginte fato: a História tem mostrado que, muitas vezes, os esforços dos matemáticos na tentativa de resolver estas conjecturas resistentes, acabam produzindo desenvolvimentos importantes.

Nos dois exemplos anteriores apresentamos conjecturas que afinal foram resolvidas. No entanto, ainda existem muitas conjecturas em aberto em Matemática. Provavelmente a mais famosa delas é a seguinte:

Exemplo 3 - ***A conjectura de Goldbach*** -

Formulada por Christian Goldbach, em 1742, ela afirma:

"Todo número inteiro par maior do que 2 pode ser escrito como a soma de dois números primos".

Apesar de ter sido testada, em computadores, até inteiros menores ou iguais a 10^{14}, ainda não existe uma prova, 261 anos após sua formulação, que ateste de fato sua veracidade. Recentemente foi oferecido um prêmio de 1 milhão de dólares a quem for capaz de resolvê-la, demonstrando-a ou apresentando um exemplo que mostre sua falsidade (ou seja, apresentando um contra-exemplo).

O leitor interessado em saber mais detalhes sobre esta conjectura pode ler o fascinante livro "Tio Petros e a Conjectura de Goldbach", de Apostolos Doxiadis, Editora■34.

Não podemos deixar de comentar que, relacionado à questão da possibilidade de se vir a provar ou não uma dada conjectura, existe um resultado de Lógica Matemática, conhecido como o **Teorema da Incompletude de Gödel,** demonstrado pelo matemático austríaco Kurt Gödel, por volta de 1930, que é tremendamente perturbador, pois afirma: em Matemática existem afirmações legítimas (proposições) que jamais poderão ser provadas, ou seja, existem enunciados matemáticos que são indemonstráveis !

Este resultado causou um grande impacto na Matemática por ocasião de sua divulgação e nos anos seguintes, vindo a contrariar a expectativa do que os matemáticos imaginavam sobre o assunto, incluindo aí grandes nomes da época como David Hilbert e Bertrand Russel.

A questão que decorre naturalmente deste teorema é: é possível se saber a priori quando um enunciado matemático (tal como uma conjectura ainda não resolvida) é ou não um resultado demonstrável? A resposta veio na negativa um pouco depois do trabalho de Gödel, dada pelo matemático Alan Turing, que era estudante de graduação na época em que Gödel apresentou seu resultado. Turing provou que não é possível saber, a priori, quando um enunciado matemático é demonstrável ou não.

Deixando de lado estes fatos um tanto quanto desconcertantes da Lógica Matemática, e voltando para a discussão sobre a relevância da prova em Matemática, é importante que se diga que a experiência nos mostra, também, que muitas vezes a demonstração de um resultado tem até mais valor do que o mesmo, pois freqüentemente ela pode ser adaptada para demonstrar outros resultados. Por exemplo, veremos futuramente que a demonstração de que não existe número racional cujo quadrado é 2 pode ser adaptada para também demonstrar que não existe número racional cujo quadrado é um número inteiro primo. Salientamos, no entanto, que o real ganho que temos com a demonstração de uma afirmação é a certeza da sua veracidade.

Infelizmente, no sistema escolar de nossos dias, não faltam situações fazendo com que o aluno se preocupe tão somente com o intuir a verdade. As questões de múltipla escolha do vestibular são um exemplo muito significativo. Quando solicitamos ao aluno assinalar a opção correta de uma questão do vestibular, estamos estimulando que ele exercite, prioritariamente, sua capacidade de intuir, pois dele não está sendo exigida a justificativa de sua escolha. Isso tende a desenvolver a esperteza ao invés de desenvolver o pensamento científico.

Para finalizar, reiteramos que não estamos negando o valor da intuição, mas sim enfatizando que, como diz o título desta seção, "em Matemática não basta intuir: é preciso demonstrar".

Exercício 1 -

Intua um padrão geral sugerido pelas igualdades

$$\begin{aligned} 5^2 - 5 &= 4^2 + 4 \\ 7^2 - 7 &= 6^2 + 6. \end{aligned}$$

A seguir responda: o padrão que Você intuiu é uma afirmação falsa ou verdadeira? Por quê?

Exercício 2 -

Idem exercício acima, considerando as igualdades

$$\begin{aligned} (20 + 25)^2 &= 2025 \\ (30 + 25)^2 &= 3025. \end{aligned}$$

1.2 Em Matemática, demonstrar não é o mesmo que verificar muitos casos

Nesta seção nos preocuparemos com um certo tipo de afirmações que ocorrem freqüentemente em Matemática: aquelas cuja veracidade depende da análise de casos particulares. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 4 -
É par qualquer número do conjunto $\{10, \ -234, \ 4578, \ 1200\}$.

Exemplo 5 -
$n^2 - n + 41$ *é um número primo, para qualquer número natural* n.

Exemplo 6 -
n^2 *é um número par, para qualquer número inteiro par* n.

Exemplo 7 -
$n^2 - n + 10$ *é um número par, para qualquer número natural* n.

Em Matemática uma demonstração para este tipo de afirmações só é aceita quando cobrir **todos** os casos do universo de possibilidades envolvidas. Assim, podemos concluir que a afirmação do Exemplo 4 acima é verdadeira, através da seguinte demonstração:

Demonstração da veracidade da afirmação do Exemplo 4.

Lembrando que número par é todo inteiro múltiplo de 2 e que

$$\begin{aligned} 10 &= 2 \times 5 \\ -234 &= 2 \times -117 \\ 4578 &= 2 \times 2289 \\ 1200 &= 2 \times 600, \end{aligned}$$

podemos concluir que a afirmação do Exemplo 4 é verdadeira. ▲

A exigência da verificabilidade de todos os casos envolvidos torna-se um problema quando o universo de possibilidades for infinito, que é o que mais comumentemente ocorre em Matemática; as afirmações dos Exemplos 5, 6 e acima são desse tipo.

Decisão da veracidade da afirmação do Exemplo 5.

Reiteramos que, aqui, argumentos do tipo

"Sim, pois por exemplo,
$1^2 - 1 + 41 = 41$, $\quad 2^2 - 2 + 41 = 43$, $\quad 3^2 - 3 + 41 = 47$, $\quad 4^2 - 4 + 41 = 53$,
$5^2 - 5 + 41 = 61$, $\quad 6^2 - 6 + 41 = 71$, $\quad 7^2 - 7 + 41 = 83$ $\quad$ são todos números primos."

não servem como comprovação da veracidade desta afirmação, já que apenas a comprovamos para um número finito de valores para n, enquanto que n varia no conjunto $\mathbb{N}$, que é infinito. E, só para mostrar que um argumento experimental do tipo acima pode até nos levar a conclusões erradas, observamos que, embora o matemático Euler tenha mostrado que, até $n = 40$, $n^2 - n + 41$ é sempre primo, na verdade a afirmação do Exemplo 5 é **falsa** para $n = 41$, pois $41^2 - 41 + 41 = 41^2$, que obviamente não é um número primo. ▲

Consideremos agora os Exemplos 6 e 7. Se testarmos as afirmações para diversos valores de n, por exemplo, $n = 1, 2, ..., 100$, veremos que ambas as afirmações são verdadeiras nestes casos; isto nos leva a crer (isto é, intuir) que as mesmas devam ser verdadeiras para qualquer valor de n. Entretanto, para podermos garantir isto com a certeza exigida pela Matemática, temos que descobrir algum argumento genérico que seja aplicável a qualquer uma das infinitas possibilidades de n ou achar algum artifício para reduzir o universo das infinitas possibilidades a um número finito de famílias de casos, cada uma das quais podendo ser examinada genericamente. Ilustramos isto a seguir, discutindo a veracidade dos Exemplos 6 e 7:

Decisão da veracidade da afirmação do Exemplo 6.

Sendo n um inteiro par, podemos escrevê-lo na forma $n = 2k$, com k inteiro. Daí,

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2).$$

Como $2k^2$ é ainda um inteiro, a igualdade

$$n^2 = 2(2k^2)$$

nos permite concluir que n^2 é par. Portanto, a afirmação é verdadeira do Exemplo 6. ▲

Exercício 3 -

Prove que se n é um inteiro ímpar então n^2 também é ímpar.

Decisão da veracidade da afirmação do Exemplo 7.

Consideremos os dois seguintes casos:

1°*caso* : n é um inteiro par.

Pelo Exemplo 6 sabemos então que n^2 é par. Deixamos ao leitor o exercício de mostrar que então $n^2 - n$ é par.

2°*caso* : n é ímpar.

Pelo Exercício 3 sabemos então que n^2 é ímpar. Deixamos ao leitor o exercício de mostrar que também aqui $n^2 - n$ é par.

Provamos assim que, em qualquer caso, $n^2 - n$ é um número par, digamos,

$$n^2 - n = 2k,$$

com k inteiro. Daí:

$$n^2 - n + 10 = 2k + 10 = 2(k + 5),$$

e como $k + 5$ é também inteiro, concluimos que, em qualquer caso, $n^2 - n - 10$ é par. Fica assim demonstrado que a afirmação do Exemplo 7 é verdadeira. ▲

Para finalizar esta seção, salientamos que em muitas ciências - como é o caso da Física, Química, Biologia etc - é aceita como comprovação da *veracidade* de afirmações semelhantes às acima a verificação de uma quantidade finita de casos particulares da mesma. Dizemos que essas ciências são **empíricas**. Com os exemplos anteriores procuramos salientar que - é essencial que o leitor entenda isto! - em Matemática, o exame de uma quantidade de casos, mesmo que enorme, tem no máximo um valor heurístico. Isso nunca poderá ser aceito como prova matemática.

Resumindo:

TESTAR ALGUMAS ou mesmo MUITAS possibilidades de uma afirmação matemática não é DEMONSTRAR, nem quando o universo de possibilidades da afirmação for finito nem quando for infinito.
Em afirmações com um número finito de possibilidades, temos duas estratégias de demonstração: ou usamos um argumento genérico ou testamos **TODAS** as possibilidades.
Em afirmações com um número infinito de possibilidades, temos que recorrer a um raciocínio que não dependa de casos particulares, temos que usar um raciocínio genérico.

Insistimos que este padrão de rigor é uma característica da Matemática: ela é uma ciência exata; ela não aceita demonstrações que se resumem à verificação de milhões de possibilidades, se ficar faltando a demonstração de um único caso que seja, pois esse caso pode tornar a afirmação falsa.

Exemplo 8 -
É verdade que se p for um número primo então

$$d(p) = 2^{p-1} - 1$$

não é divisível por p^2?
Esta pergunta foi feita pelo russo D. A. Grave, e é verdadeira até $p = 1092$. Contudo $d(1093)$ é divisível por 1093^2.

Exemplo 9 -
É verdade que o valor

$$P(n) = 1 + 991n^2$$

nunca é um quadrado, qualquer que seja $n \in \{1, 2, ...\}$?
A resposta é sim para uma enormidade de casos: até

$$n_0 = 12\,055\,735\,790\,331\,359\,447\,442\,538\,766 \cong 12 \times 10^{27}.$$

Contudo, o valor seguinte de n já dá $P(n)$ um quadrado perfeito:

$$\begin{aligned} P(n_0 + 1) &= \\ &= 144\,032\,698\,557\,259\,999\,607\,886\,110\,560\,755\,362\,973\,171\,476\,419\,973\,199\,366\,400 \\ &= (379\,516\,400\,811\,930\,638\,014\,896\,080)^2. \end{aligned}$$

1.3 Conceitos Básicos e Notações

Nesta seção, e nas duas que a seguem, fazemos uma abordagem prática e objetiva da lógica da Matemática, especialmente no que toca aos elementos envolvidos em suas proposições e demonstrações. Não pretendemos em momento algum dar "receitas", e sim esclarecer ou exemplificar alguns pontos que temos observado provocarem confusão entre os alunos.

Definição 1 -

Uma ***proposição,*** *em Lógica, é uma afirmação à qual podemos atribuir um* ***valor lógico****, i.e., dizer se ela é* ***verdadeira*** *(V) ou* ***falsa*** *(F).*

Exemplo 10 -

São exemplos de proposições:

i) Pelé foi jogador profissional de basquete.

ii) 28 é número par.

iii) O triângulo é uma figura plana.

iv) Para todo $x \in \mathbb{N}$*, o algarismo da unidade de* x^2 *é igual ao de* x*.*

Não são proposições as afirmações:

v) Amanhã vai chover.

vi) $x = 3$*.*

viii) $m < n$*.*

Notação: Costumamos representar proposições por letras latinas minúsculas:

p : Pelé foi jogador profissional de basquete

q : 28 é par

r : $2 > 3$

Salientamos que uma proposição nunca pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo. Ou seja tem um e só um valor lógico. O que pode ocorrer é que nem sempre conhecemos seu valor lógico.

Em Matemática as proposições verdadeiras podem receber o nome de **postulados ou axiomas, lemas, proposições, teoremas** e **corolários.** Estas designações são bastante antigas em Matemática, tendo sido usadas nem sempre com o mesmo significado que elas têm atualmente.

Os axiomas ou postulados (atualmente considerados sinônimos) servem como alicerce de toda uma teoria; e, por serem justamente o "ponto de partida" dela, não temos com o quê demonstrá-los. Assim, são aceitos sem qualquer demonstração.

Exemplo 11 -

"Por dois pontos distintos passa uma e somente uma reta" é um postulado da Geometria Euclidiana.

Já os lemas, proposições, teoremas e corolários são afirmações verdadeiras acompanhadas de uma demonstração que comprova a veracidade das mesmas. As argumentações utilizadas em tal demonstração se apóiam em conceitos e resultados já estabelecidos, incluindo os axiomas (ou postulados). A diferente nomenclatura utilizada para estas afirmações refere-se a uma hierarquia entre eles: em geral, lemas são resultados intermediários que têm como objetivo facilitar a demonstração de uma proposição ou teorema. Já a diferença entre proposição e teorema está na importância do resultado que estas estão estabelecendo. Finalmente, os corolários são afirmações caracterizadas por decorrerem de maneira mais direta dos teoremas ou proposições.

Às vezes os teoremas são tão importantes que recebem nomes dos seus autores (p.e.: Teorema de Pitágoras, Teorema de Tales) ou nomes especiais. Por exemplo, nos próximos capítulos, mencionaremos o Teorema Fundamental da Aritmética, o Teorema Fundamental da Álgebra, o Teorema Fundamental da Geometria Analítica.

Vamos agora nos concentrar num outro tipo de afirmações que encontramos em Matemática: note que sentenças da forma

$$
\begin{aligned}
&x = 3, \\
&x + y \leq 5, \\
&T \text{ é um triângulo equilátero}, \\
&x = 3 \\
&m < n
\end{aligned}
$$

não são proposições, mas o que podemos observar é que se dermos valores numéricos para x, y, m, n, ou subtituirmos T por um triângulo específico, elas se tornam proposições. Os símbolos x, y, T, m, n, são por isso chamados **variáveis,** e as sentenças acima são chamadas **sentenças abertas** (por envolverem variáveis de uma tal forma que, ao substituirmos as variáveis por algum valor ou expressão as tornamos proposições).

Notação: $p(x, y)$ para uma sentença aberta que envolve as variáveis x e y;
$q(z)$ para uma sentença aberta que envolve a variável z

Exemplo 12 -

$$
\begin{aligned}
&q(x) : x = 3 \\
&p(x, y) : x + y \leq 5
\end{aligned}
$$

É possível construirmos proposições em Matemática envolvendo sentenças abertas. Para tal fazemos uso de **quantificadores para a(s) variável(is) envolvida(s),** e as proposições criadas são denominadas **proposições quantificadas.** Os símbolos

$\forall$ (leia-se "qualquer" ou "para todo")
$\exists$ (leia-se "existe pelo menos um")

são os quantificadores mais usados na Matemática, denominados **universal** e **existencial** respectivamente. (Observe como a terminologia tenta de fato expressar o conceito envolvido). Salientamos que estes não são os únicos quantificadores existentes: por exemplo, $\exists!$ significa "existe um único".

Exemplo 13 -

i) O Exemplo 1 podia ter sido escrito simplesmente da seguinte forma: $\forall\, n \in \{0, 1, 2, 3, ...\}$, $P(n) = 1 + 2^{(2^n)}$ *é um número primo.*

ii) O Exemplo 2 podia ter sido escrito simplesmente da seguinte forma: $\forall\, n \in \{3, 4, 5...\}$, *a equação* $x^n + y^n = z^n$ *não admite soluções além da trivial.*

iii) O Exemplo 3 podia ter sido escrito da seguinte forma: $\forall\, x \in \{10,\ -234,\ 4578,\ 1200\}$, x *é par.*

iv) O Exemplo 4 podia ter sido escrito da seguinte forma: $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n^2 - n + 41$ *é primo.*

v) $\exists\, x \in \mathbb{N}$, $x = 3$ *(leia-se: "existe (pelo menos) um número natural que é igual a 3")*

vi) $\forall\, x \in \{2, 3, 4, 5\}$, $1 < x \leq 3$ *(leia-se: "todo elemento do conjunto* $\{2, 3, 4, 5\}$ *é um número entre 1 e 3, podendo ser inclusive igual a 3)*

vii) $\forall\, T \in \{\textit{triângulos isósceles}\}, T$ *é um triângulo equilátero (leia-se: "todo triângulo isósceles é um triângulo equilátero")*

Observe que tais expressões são de fato proposições. Qual seu valor lógico?

E qual é o valor lógico das proposições abaixo?
viii) $\forall\, T \in \{\textit{triângulos equiláteros}\}, T$ *é um triângulo isósceles*
ix) $\exists\, T \in \{\textit{triângulos isósceles}\}, T$ *é um triângulo equilátero*

Quando mais de uma variável está envolvida na sentença aberta, necessitamos usar mais de um quantificador para torná-la uma proposição. Mais precisamente, cada variável precisa ser quantificada.

Exemplo 14 -

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x \in \mathbb{Q}$, $x^n = 4$ *(leia-se: "para todo número natural existe um número racional que elevado à quarta potência é igual a este número")*

Definição 2 -

Uma proposição quantificada sempre apresenta o conjunto dos possíveis valores que a variável pode assumir. Tal conjunto é chamado ***universo da variável.***

Exemplo 15 -

No exemplo 13 temos para universo das variáveis envolvidas:
i) o conjunto $\mathbb{N}$
ii) o conjunto $\{3, 4, 5, ...\}$
iii) o conjunto $\{10, -234, 4578, 1200\}$
iv) o conjunto $\mathbb{N}$
v) o conjunto $\mathbb{N}$
vi) o conjunto $\{2, 3, 4, 5\}$
vii) o conjunto {triângulos isósceles}
viii) o conjunto {triângulos equiláteros}
ix) o conjunto {triângulos isósceles}
Já no Exemplo 14, o universo para n *é* $\mathbb{N}$ *e o universo para* x *é* $\mathbb{Q}$

Salientamos ainda que as proposições

$$\forall x \in \mathbb{N},\ 2x > x \qquad \text{e} \qquad \forall y \in \mathbb{N},\ 2y > y$$

exprimem exatamente o mesmo fato, a saber, "o dobro de um número natural é sempre maior do que este número". A diferença é que na primeira, simbolizamos este número natural genérico por x, enquanto que na segunda o chamamos de y, assim como podíamos também ter usado "fulano".

Definição 3 -

Seja $p(x)$ *uma sentença aberta de variável* x, *e seja* a *um valor do universo de* x. *Denotamos por* $p(a)$ *a proposição obtida da sentença aberta* $p(x)$ *através da substituição de* x *por* a. *Se esta proposição for verdadeira, costumamos dizer que* a ***satisfaz*** $p(x)$, ***ou que*** a ***satisfaz a condição*** $p(x)$.

Exemplo 16 -

Com relação às sentenças abertas do exemplo 10:

$6/2$ satisfaz $q(x)$, pois é verdade que $6/2 = 3$;
o par $(2, 3)$ satisfaz $p(x, y)$, pois $p(2, 3)$: $2 + 3 = 5 \leq 5$ é V.

1.4 O Método Dedutivo

Para estabelecer-se o valor lógico de uma proposição (isto é provar que ela é verdadeira ou provar que ela é falsa) a Matemática usa exclusivamente o **método dedutivo.** Para apresentá-lo e discutí-lo, começamos introduzindo a sua noção mais fundamental, a saber, a noção de **implicação.**

Definição 4 -
Dizemos que uma proposição p ***implica uma proposição*** *q se for possível* ***provar*** *(ou* ***deduzir)*** *que "***se*** p for verdadeira* ***então*** *q também o será".*

Notação: $p \Rightarrow q$.
Quando p implica q, costuma-se também dizer que a implicação $p \Rightarrow q$ é verdadeira. Além disso é tradicional em Matemática nos referirmos a p como **premissa** ou **hipótese** e q como **tese** da implicação $p \Rightarrow q$.

Exemplo 17 -
$(123\,466)^2 = 234\,456\,236 \Rightarrow$ *o sucessor de* $(123\,466)^2$ *é* $234\,456\,237$.

Exemplo 18 -
$20\,008$ *é par* $\Rightarrow 4 + 20\,008$ *é par.*

É essencial entendermos que a veracidade de uma dedução é sempre baseada em conceitos já estabelecidos e/ou em outros resultados já demonstrados.

No primeiro exemplo acima, fizemos uso de uma definição para deduzir a validade da implicação, a saber, a definição de sucessor. É comum numa demonstração expressarmos isto assim:

$$(123\,466)^2 = 234\,456\,236 \overset{def.de\ sucessor}{\Rightarrow} \text{o sucessor de } (123\,466)^2 \text{ é } 234\,456\,237$$

Já no segundo exemplo poderíamos escrever

$$20\,008 \text{ e } 4 \text{ são pares} \overset{soma\ de\ pares\ é\ par}{\Rightarrow} 4 + 20\,008 \text{ é par}$$

(aqui fizemos uso de um resultado já "previamente estabelecido" para deduzir esta outra proposição).

Note que para decidirmos que a implicação $p \Rightarrow q$ é verdadeira, não é preciso saber se a hipótese, p, é realmente verdadeira. De fato, no primeiro exemplo acima concluimos que a implicação é verdadeira sem sabermos se realmente é verdade que $(123\,466)^2 = 234\,456\,236$. E, de fato, isto é até falso:

$$(123\,466)^2 = 15\,243\,853\,156.$$

Em Matemática também utilizamos implicação entre sentenças abertas: dizemos que uma sentença aberta $p(x)$ **implica** outra $q(x)$ quando, as sentenças abertas $p(x)$ e $q(x)$ estão "amarradas" uma à outra de tal forma que quando $p(x)$ e $q(x)$ se tornarem proposições por alguma substituição da variável x, o valor lógico de $q(x)$ vai depender do valor lógico de $p(x)$ no sentido que se $p(x)$ for verdadeira então $q(x)$ também o será.

Notação: $p(x) \Rightarrow q(x)$.

Podemos expressar esta idéia de implicação de diferentes formas:
- $q(x)$ **segue de** $p(x)$

- $q(x)$ é **conseqüência** de $p(x)$
- $p(x)$ é **condição suficiente para** $q(x)$
- para que ocorra $q(x)$ **basta ocorrer** $p(x)$
- $q(x)$ é **condição necessária para** $p(x)$
- se ocorre $p(x)$ então **necessariamente** ocorre $q(x)$.

Como no caso das implicações entre proposições, em uma implicação entre sentenças abertas $p(x) \Rightarrow q(x)$, $p(x)$ é dita **hipótese** e $q(x)$ de **tese** da implicação.

Exemplo 19 -

$$x \text{ é } par \Rightarrow x + 10 \text{ é } par,$$

e a justificativa para este exemplo é a mesma utilizada acima: soma de pares ainda é par.

Salientamos novamente:

> **Importante!** Nunca precisamos saber se uma **hipótese** é de fato verdadeira para decidirmos se uma **implicação** é verdadeira. Isto vale tanto para implicações entre proposições quanto para implicações entre sentenças abertas.

No exemplo acima, de fato a sentença "x é par" para alguns valores de x torna-se verdadeira e para outros torna-se falsa. E também podemos dar um exemplo não matemático: não precisamos conhecer Darci para afirmarmos com convição que é verdadeira a implicação

Darci é o Presidente $\Rightarrow$Darci é homem,

e portanto não precisamos saber se é ou não verdade que Darci é o Presidente. Uma demonstração em Matemática é muitas vezes uma seqüência de implicações, onde a cada passo obtemos uma nova afirmação que é verdadeira se todas as proposições anteriormente citadas forem verdadeiras.

Definição 5 -

*A **recíproca** da implicação $p \Rightarrow q$ (ou $p(x) \Rightarrow q(x)$) é a implicação $q \Rightarrow p$, (ou $q(x) \Rightarrow p(x)$).*

Se duas sentenças p e q (ou $p(x)$ e $q(x)$) são tais que $p \Rightarrow q$ (ou $p(x) \Rightarrow q(x)$), nada obriga que também seja verdadeira a implicação recíproca $q \Rightarrow p$, (ou $q(x) \Rightarrow p(x)$). Começamos ilustrando com um exemplo não matemático:

Exemplo 20 -

"Darci é o Presidente" $\Rightarrow$ "Darci é homem"

é uma implicação verdadeira, mas não podemos afirmar que é verdadeira sua recíproca

"Darci é homem" $\Rightarrow$ "Darci é o Presidente".

Costumamos escrever "Darci é homem"$\not\Rightarrow$"Darci é o Presidente". No entanto:

Exemplo 21 -

Se $p : [123\ 466]^2 = 234\ 456\ 236$ *e* $q : [123\ 466]^2 + 2 = 234\ 456\ 238$ *então temos* $p \Rightarrow q$, *também podemos afirmar que* $q \Rightarrow p$.

Definição 6 -

Quando duas proposições (ou duas sentenças abertas) são tais que a primeira implica a segunda e a segunda implica a primeira dizemos que elas ***são equivalentes.***

Notação: $p \Leftrightarrow q$ (ou $p(x) \Leftrightarrow q(x)$)

Exemplo 22 -

$[123\ 466]^2 = 234\ 456\ 236 \Leftrightarrow [123\ 466]^2 + 2 = 234\ 456\ 238$

Podemos expressar esta idéia de equivalência de diferentes formas:
- q segue de p e p segue de q
- p é uma **condição necessária e suficiente** para q
- q é uma **condição necessária e suficiente** para p.

Note que quando duas proposições são equivalentes então **ou são ambas V ou são ambas F,** pois se uma for V e a outra F então não teremos a verdadeira implicando na falsa. Portanto, quando as proposições p e q são equivalentes, temos uma outra maneira de expressarmos equivalência:

p é verdadeiro **se e somente se** q o for.

Analogamente, quando duas sentenças abertas são equivalentes então, no momento em que elas se tornarem proposições **ou serão ambas V ou serão ambas F.**

Exemplo 23 -

Para todo número natural n,

$$n^2 < 9 \Leftrightarrow n < 3$$

Por exemplo, para $n = 2$ *temos* $2^2 < 9$ *e* $2 < 3$ *ambas V, e para* $n = 5$ *temos* $5^2 < 9$ *e* $5 < 3$ *ambas F.*

No entanto:

Exemplo 24 -

Para todo número inteiro r, $r^2 < 9 \not\Leftrightarrow r < 3$, *pois é V a implicação* $\Rightarrow$ *mas não é verdadeira a implicação* $\Leftarrow$. *Por exemplo,* $(-20)^2 < 9$ *é F mas* $-20 < 3$ *é V.*

1.5 Demonstração de proposições enunciadas como implicações

Para demonstrar uma implicação, por exemplo, uma implicação do tipo

$$p(x) \Rightarrow q(x),$$

onde $p(x)$ e $q(x)$ denotam sentenças abertas na variável x, podemos fazer uso de um dos seguintes tipos de demonstração:

a) Demonstração Direta:

Consiste em supor que $p(x)$ é **V** e chegar por inferências à conclusão (ou deduzir) que $q(x)$ é **V**.

Exemplo 25 -
Provemos diretamente que produto de inteiros pares é par. Ou seja,
$\forall x, y \in \mathbb{Z}$ [x *e* y *pares* $\Rightarrow xy$ *é par*].

Prova: Sejam $x, y \in \mathbb{Z}$, ambos pares, digamos,

$$x = 2n \quad \text{e } y = 2m,$$

com $m, n \in \mathbb{Z}$. Daí: $xy = (2n)(2m) = 4mn = 2(2mn)$. Como $2mn \in \mathbb{Z}$, concluimos que o produto xy é par. ▲

Exemplo 26 -
Para todo $x \in \mathbb{Z}$, *se* x *é par então* x^2 *é par. Ou seja,*
$\forall x \in \mathbb{Z}$. [x *par* $\Rightarrow x^2$ *par*].

Prova: Basta tomar $x = y$ no exemplo anterior. ▲

b) Demonstração por Contraposição:

Baseia-se no seguinte fato, fundamentado pela Lógica: se $p(x)$ e $q(x)$ são sentenças abertas e se for verdade que $p(x)$ implica $q(x)$ então, se não ocorrer $q(x)$ (ou equivalentemente, se $q(x)$ for F, ou ainda, se a negação de $q(x)$ é V), então necessariamente não vai ocorrer $p(x)$ (ou seja, $p(x)$ tem que ser também F, ou ainda, a negação de $p(x)$ é V).

Notação: simbolizamos a negação de $p(x)$ por $\neg p(x)$. É fácil ver que $\neg\neg p(x) = p(x)$.

Mas então concluimos que se a implicação $p(x) \Rightarrow q(x)$ é verdadeira, então é também verdadeira a implicação $\neg q(x) \Rightarrow \neg p(x)$.

Definição 7 -
A implicação $\neg q(x) \Rightarrow \neg p(x)$ *é chamada* ***a contrapositiva de*** $p(x) \Rightarrow q(x)$.

Salientamos que com o mesmo argumento acima podemos concluir que, se for verdade que $\neg q(x) \Rightarrow \neg p(x)$, então é também verdadeira a implicação $\neg\neg p(x) \Rightarrow \neg\neg q(x)$, ou seja, é também verdadeira a implicação $p(x) \Rightarrow q(x)$.

Assim, vemos que, se queremos concluir que $p(x) \Rightarrow q(x)$ é verdadeira, então podemos tentar provar que $\neg q(x) \Rightarrow \neg p(x)$ é V. Esta forma de demonstração é chamada **demonstração por contraposição.**

Resumindo:

Provar por contraposição uma implicação $p(x) \Rightarrow q(x)$ consiste em provar de forma direta sua contrapositiva $\neg q(x) \Rightarrow \neg p(x)$. Ou seja: partindo da suposição que $\neg q(x)$ é verdadeira, deduzimos que $\neg p(x)$ também é verdadeira.

Exemplo 27 -

Provemos a seguinte proposição: para todo $x \in \mathbb{Z}$, x tem a mesma paridade do seu quadrado. Note inicialmente que tal sentença pode ser reescrita na forma de equivalência

$$\forall x \in \mathbb{Z}[x \text{ é par} \Leftrightarrow x^2 \text{ é par}].$$

Prova: Observemos que a implicação ($\Rightarrow$) já foi feita acima (de forma direta). Por contraposição, provemos a recíproca ($\Leftarrow$), a saber

$$\text{não é verdade que } x \text{ é par } \Rightarrow \text{ não é verdade que } x^2 \text{ é par},$$

ou seja (já que um inteiro que não é par é necessariamente ímpar), que

$$x \text{ é ímpar} \Rightarrow x^2 \text{ é ímpar}.$$

E, de fato:

$$\begin{aligned} x \text{ é ímpar} &\Rightarrow x = 2k+1, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \\ x^2 &= (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1. \end{aligned}$$

Como $2k^2 + 2k$ é um inteiro, concluímos que x^2 é um inteiro ímpar. ▲

Exemplo 28 -

Afirmamos que, para todo racional positivo x,

$$x^2 = 2 \Rightarrow x > 1.$$

Prova: Por contraposição, provemos que

$$0 < x \leq 1 \Rightarrow x^2 \neq 2.$$

De fato,

$$0 < x \leq 1 \overset{\text{propriedade da ordem}}{\Longrightarrow} x.x \leq 1.1 \Rightarrow x^2 \leq 1 < 2 \Rightarrow x^2 \neq 2. \quad ▲$$

Exercício 4 -

Prove que se x é um racional positivo tal que $x^2 = 2$ então $x < \frac{3}{2}$.

c) Demonstração por Absurdo:

É baseada no fato que se a implicação $p(x) \Rightarrow q(x)$ é V então não é possível serem verdadeiras ao mesmo tempo $p(x)$ e $\neg q(x)$. Assim, se supusermos que $p(x)$ é **V** e que $q(x)$ é **F** e chegarmos a algum conflito em nosso raciocínio (isto é, "algo der errado"), concluiremos que não é possível acontecer que $p(x)$ é **V** e $q(x)$ é **F**.

Tendo provado isto, poderemos concluir que se $p(x)$ é **V** então $q(x)$ é necessariamente **V**; teremos assim provado a implicação $p(x) \Rightarrow q(x)$.

Resumindo:

Provar por absurdo que $p(x) \Rightarrow q(x)$ consiste em mostrar que a possibilidade de $p(x)$ ser verdadeira e $q(x)$ falsa nos leva a alguma contradição.

Exemplo 29 -
Para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$n^2 + 2n + 3 \neq (n+1)^2 - 5.$$

Prova: Por absurdo, suponhamos que exista $n \in \mathbb{N}$ tal que $n^2 + 2n + 3 = (n+1)^2 - 5$. Então:

$$\begin{aligned} n^2 + 2n + 3 &= (n+1)^2 - 5 \Rightarrow n^2 + 2n + 3 = n^2 + 2n + 1 - 5 \Rightarrow \\ n^2 + 2n + 3 &= n^2 + 2n - 4 \Rightarrow 3 = -4, \text{ absurdo!} \end{aligned}$$

Concluímos então que $n^2 + 2n + 3 \neq (n+1)^2 - 5$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ▲

1.6 Demonstração de proposições não enunciadas como implicações

Comentamos agora demonstrações de algumas proposições matemáticas que ocorrem muito freqüentemente mas que não estão enunciadas sob a forma de implicação:

a) Demonstrações de afirmações existenciais

Para comprovar que uma proposição da forma

$$\exists a \in A \text{ tal que } p(a) \text{ é V}$$

ou

$$\exists a \in A \text{ tal que } a \text{ satisfaz } p(x).$$

podemos **exibir** um elemento do conjunto A que satisfaça a condição $p(x)$.

Exemplo 30 -
$\exists x \in \mathbb{Z}$, *x é multiplo de* 2 *e* 35 *simultaneamente.*

Prova: De fato, basta tomar $x = 2 \times 35$. ▲

No entanto, nem sempre é possível provar-se a validade de uma afirmação de existência exibindo-se o elemento procurado: por exemplo, se $P(x)$ é um polinômio real em x de grau ímpar então pode-se provar existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $P(a) = 0$. A prova da existência de a é feita de maneira indireta, não sendo conhecida uma fórmula explícita que dê o valor de a quando o grau é maior ou igual a 5 (e, de fato, prova-se que, neste caso, se uma tal fórmula existir, ela não pode envolver apenas as operações adição, subtração multiplicação, potenciação, divisão e radiciação envolvendo os coeficientes de P, tipo a fórmula de Bhaskara).

b) Demonstração de afirmações de impossibilidade

Para comprovar a validade de uma proposição da forma

$$\nexists a \in A \text{ tal que } p(a) \text{ é V},$$

podemos, por exemplo, raciocinar por absurdo.

Exemplo 31 -

Não existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n^2 + 2n + 3 = n(n+1)$.

Prova: Por absurdo:

$$\begin{aligned}
&\exists n_o \in \mathbb{N} \text{ tal que } n_o^2 + 2n_o + 3 = n_o(n_o+1) \Rightarrow \\
&\exists n_o \in \mathbb{N} \text{ tal que } n_o^2 + 2n_o + 3 = n_o(n_o+1) \Rightarrow \\
&\exists n_o \in \mathbb{N} \text{ tal que } n_o^2 + 2n_o + 3 = n_o^2 + n_o \Rightarrow \\
&\exists n_o \in \mathbb{N} \text{ tal que } n_o + 3 = 0,
\end{aligned}$$

absurdo.

Assim, concluímos que não existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n^2 + 2n + 3 = n(n+1). \qquad \blacktriangle$$

c) Demonstração de afirmações de universalidade

Para comprovar a validade de proposições da forma

$$\forall a \in A,\ p(a) \text{ é } \mathbf{V},$$

podemos raciocinar de forma direta, provando a implicação

$$a \in A \Rightarrow p(a) \text{ é } \mathbf{V},$$

como fizemos nos exemplos 3, 5 e 6 da seção 1.2.

Um caso particularmente importante é quando $A = \mathbb{N}$: proposições da forma

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p(n) \text{ é } \mathbf{V},$$

tais como

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1},$$

podem ser provadas fazendo-se uso do **Princípio da Indução Matemática**, uma das técnicas fundamentais de demonstração em Matemática. Este é o assunto da seção 1.7.

d) Demonstração da falsidade de afirmações universais

Como comprovamos a **não validade** de uma proposição da forma

$$\forall a \in A,\ p(a) \text{ é } \mathbf{V}$$

ou seja,

$$\forall a \in A,\ a \text{ satisfaz } p(x)?$$

Ora, uma proposição é falsa se e só se sua negação é **V**, e portanto, mostrar que a afirmação acima é falsa é o mesmo que mostrar que sua negação é verdadeira. No caso então quereríamos mostrar que

$$\exists a \in A \text{ tal que } a \text{ não satisfaz } p(x).$$

Quando provamos a afirmação acima exibindo um elemento (veja (a)), tal elemento é chamado um **contra-exemplo** para a proposição original.

Exemplo 32 -
A afirmação

$$\forall x \in \mathbb{N},\ n^2 - n + 41 \text{ é um número primo}$$

*é **F**, sendo* 41 *um contra-exemplo para ela (veja o Exemplo 4 e a decisão de sua veracidade).*

Exemplo 33 -
A afirmação

$$\forall \in \mathbb{N},\ 2^n > n^2$$

*é **F**, sendo* 2 *um contra-exemplo para ela.*

1.7 Demonstração por Indução Matemática

O princípio da indução matemática é a idealização matemática de uma experiência muito popular, conhecida como o **efeito dominó.** Este efeito é muito bem visualizado em uma brincadeira que todos fazemos na infância e que lhe dá o dito nome: enfileiramos as peças de um jogo de dominó, afastadas a uma certa distância umas das outras. A seguir, damos um toque em alguma peça da fila, derrubando-a; notamos então que se esta estiver convenientemente afastada da seguinte, esta derrubará a seguinte que, por sua vez, se estiver convenientemente afastada da próxima, derrubará a próxima e assim por diante. Ao final, se as peças estiverem todas convenientemente afastadas uma das outras, acabarão por serem derrubadas todas as peças a partir daquela em que se deu o toque.

Podemos notar que para que o efeito dominó se efetive, no sentido de que se tenha a derrubada de **todas** as peças enfileiradas a partir de uma determinada (digamos, a $a-$ésima da fila), as seguintes condições devem ser atendidas:

1) que a $a-$ésima peça seja derrubada
2) que as peças sejam convenientemente dispostas, mais precisamente:
de tal forma que, se uma certa peça (digamos a $k-$ésima peça da fileira)
for derrubada, então a próxima peça (ou seja, a $(k+1)-$ésima peça),
também será derrubada,

e nenhuma delas é dispensável (pelo menos para $k \geq a$ na segunda condição). De fato, se a $a-$ésima peça não for derrubada o efeito falha, pois nenhuma peça será derrubada. Por outro lado, mesmo que a 5^a peça seja derrubada, por exemplo, se a separação entre, digamos, o 12^o e o 13^o dominós não estiver ok, de modo que a derrubada do 12^o não cause (implique) a derrubada do 13^o, cairão no máximo o 5^o, o 6^o, o 7^o, o 8^o, o 9^o, o 10^o, o 11^o e o 12^o dominós da fileira. Ainda, se apenas a 3^a e a 4^a peças não estiverem bem espaçadas, não teremos nenhum problema: a derrubada da quinta peça junto com o conveniente espaçamento de todas as peças a partir desta ocasionarão a derrubada de todas as peças da fileria a partir da quinta.

Esta simples e ingênua brincadeira, traz em si um dos fatos mais importantes em Matemática, a saber

Teorema 1 ***O Princípio da Indução Matemática - primeira forma -***

Sejam a um número natural e $P(n)$ uma afirmação feita envolvendo um natural n. Se

i) $P(a)$ é V

ii) para todo $k \geq a$ vale a implicação

$$P(k) \text{ é } V \Rightarrow P(k+1) \text{ é } V,$$

então a afirmação $P(n)$ é V para todo natural $n \geq 1$.

Observamos que o teorema anterior "estende" a brincadeira dos dominós. De fato, se enumerarmos as peças enfileiradas de um dominó por 1, 2, 3, ..., $n, \ldots$ e se entendermos $P(n)$ como a afirmação "o $n-$ésimo dominó é derrubado", então as condições *(i)* e *(ii)* do teorema anterior nada mais são do que a tradução matemática das condições (1) e (2), que, como destacamos anteriormente, são as condições necessárias e suficientes para a ocorrência do "efeito dominó".

As aplicações matemáticas do Princípio da Indução Matemática (ou simplesmente Princípio da Indução) ultrapassam de longe algumas aplicações que poderíamos suspeitar ou imaginar a partir da simples brincadeira dos dominós. Antes de darmos vários exemplos que convencerão o leitor deste fato, introduzimos uma nomenclatura muito usada neste princípio.

Definição 8 -

A condição (i) no Princípio da Indução é muitas vezes chamada de ***base de indução;*** *a premissa da implicação em (ii) é denominada* ***hipótese de indução*** *e a implicação dada em (ii) é denominada* ***passagem de indução.***

Damos a seguir vários exemplos de demonstrações utilizando o Princípio da Indução. Costumamos dizer então que "a demonstração foi feita por indução". Note então que, para poder aplicá-lo, temos que provar que as condições *(i)* (base de indução) e *(ii)* (passagem de indução) são de fato satisfeitas. As deduções envolvidas nas provas da base de indução e da passagem de indução dependem do contexto da afirmação.

Exemplo 34 -

Indução no contexto da Teoria de Números: provemos que

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1},$$

para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Seja $P(n)$ a afirmação dada pela equação anterior, isto é,

$$P(n) : \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Notemos então que

$$\frac{1}{1.2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1},$$

de modo que $P(1)$ é verdadeira.

Seja $k \geq 1$ e suponhamos que $P(k)$ é verdadeira, ou seja,

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}.$$

Verifiquemos se isto implica que a afirmação é verdadeira para o inteiro $k+1$, ou seja, que $P(k+1)$ é verdadeira. Temos:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{(k+1)[(k+1)+1]} \\
= \; & \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \quad \overset{\text{hipótese de indução}}{=} \\
= \; & \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
= \; & \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} \\
= \; & \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} \\
= \; & \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} \\
= \; & \frac{k+1}{k+2} \\
= \; & \frac{k+1}{(k+1)+1}.
\end{aligned}$$

e portanto $P(k+1)$ é também verdadeira.

Assim, pelo Princípio da Indução, concluímos que

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n-1}.$$

para todo n inteiro maior ou igual a 1.

Exercício 5 -

Prove que a soma dos quadrados dos n primeiros números naturais não nulos é igual a

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercício 6 -

Prove que

$$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n-1)}{2}.$$

para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemplo 35 -

Indução no contexto de polinômios: provemos que

$$(X^m - 1) = (X-1)(1 + X + X^2 + ... + X^{m-1}),$$

para todo inteiro $m \geq 2$.

Ou, equivalentemente:

$$1 + X + X^2 + ... + X^{m-1} = \frac{X^m - 1}{X - 1},$$

para todo $m \geq 2$. *É esta a identidade que vamos provar.*

Note que

$$(X^2 - 1) = (X-1)(X+1),$$

e portanto a afirmação é verdadeira para $m = 2$*:*

$$1 + X = \frac{X^2 - 1}{X - 1}.$$

- *Seja* $k \geq 2$ *e suponhamos que a afirmação é verdadeira para* k, *ou seja,*

$$1 + X + X^2 + ... + X^{k-1} = \frac{X^k - 1}{X - 1}.$$

Verifiquemos agora se a afirmação é verdadeira para o inteiro $k+1$.

$$\begin{aligned}
& 1 + X + X^2 + ... + X^{(k+1)-1} \\
= \; & 1 + X + X^2 + ... + X^{k-1} + X^k \\
\overset{\text{hipótese de indução}}{=} \; & \frac{X^k - 1}{X - 1} + X^k \\
= \; & \frac{X^k - 1 + X^k(X-1)}{X - 1} \\
= \; & \frac{X^{k+1} - 1}{X - 1},
\end{aligned}$$

e portanto a afirmação é também verdadeira para o inteiro $k+1$.

Exercício 7 -

Aplique o resultado enunciado no exemplo acima para deduzir a fórmula da soma dos m *primeiros termos de uma progressão geométrica.*

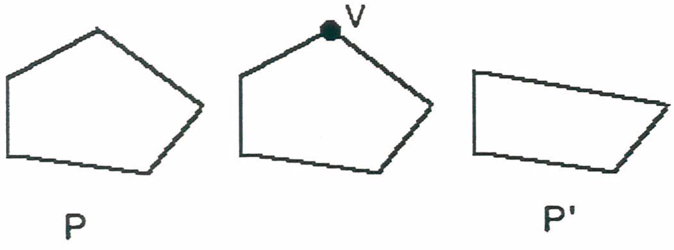
Exemplo 36 -

Indução no contexto da Geometria: Provemos a seguinte afirmação: todo polígono convexo de n *lados tem para soma de seus ângulos internos* $(n-2)180°$.

Seja $P(n)$: *todo polígono convexo de* n *lados tem para soma de seus ângulos internos* $(n-2)180°$.

Note que aqui a base de indução é a afirmação $P(3)$, *uma vez que o triângulo é o polígono com o menor número possível de lados. Ora,* $P(3)$ *é uma afirmação verdadeira bem conhecida na Geometria. Preocupamo-nos então aqui em provar a passagem de indução: suponhamos que* $k \geq 3$ *e* que todo polígono convexo com k lados tem para soma de seus ângulos internos o número $(k-2)180°$, e provemos que então todo polígono convexo de $(k+1)$ lados tem para soma de seus ângulos internos o número $(k+1-2)180° = (k-1)180°$.

Seja P um polígono convexo de $k+1$ lados, e fixemos um vértice V deste polígono. Por ser convexo, ao eliminarmos V emendando os dois vértices de P adjascentes a V, vamos formar um polígono P' de k lados ainda convexo (veja figura).



Daí, como $P(k)$ é por hipótese verdadeira, temos que P' tem para soma de seus ângulos internos o número $(k-2)180°$. Ora, P é simplesmente a "emenda" de P' com o triângulo cujos vértices são V e seus adjascentes. Portanto, a soma dos ângulos internos de P é igual à soma dos ângulos internos de P'(que por hipótese vale $(k-2)180°$) com os ângulos internos deste triângulo (que, pela base de indução, sabemos ser igual a $180°$) :

$$(k-2)180° + 180° = (k-1)180°.$$

como queríamos demonstrar. Assim, a afirmação $P(k+1)$ é também verdadeira. Pelo Princípio da Indução, conclui-se que, para todo natural $n \geq 3$, a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é igual a $(n-2)180°$.

Exemplo 37 -

Indução no contexto da Trigonometria: Supondo conhecida a fórmula da Trigonometria válida para dois ângulos quaisquer a e b

$$sen(a+b) = sena.\cos b + \cos a.senb. \qquad (*)$$

provemos que para todo natural $n \geq 2$ e para todo ângulo a,

$$sen2^n a = 2^n sena.\cos a.\cos 2a.....\cos 2^{n-1}a.$$

Seja $P(n)$ a afirmação $sen2^n a = 2^n sena.\cos a.\cos 2a.....\cos 2^{n-1}a$. Note que $P(2)$ é então dada por $sen2a = 2sena.\cos a$, que é de fato verdadeira: basta-nos tomar, em $(*)$, $b = a$.

Suponhamos agora que k é um natural maior ou igual a 2 e que $P(k)$ é verdadeira, isto é, que

$$sen2^k a = 2^k sena.\cos a.\cos 2a.....\cos 2^{k-1}a, \qquad (**)$$

e provemos que $P(k+1)$ é também verdadeira. Ora, podemos escrever

$$\begin{aligned} sen2^{k+1}a &= sen(2^k a + 2^k a) \overset{(*)}{=} \\ &= 2sen2^k a \cos 2^k a \overset{(**)}{=} \\ &= 2\left(2^k sena.\cos a.\cos 2a.....\cos 2^{k-1}a\right)\cos 2^k a \\ &= 2^{k+1} sena.\cos a.\cos 2a.....\cos 2^{k-1}a \cos 2^k a. \end{aligned}$$

e portanto $P(k+1)$ é também verdadeira.

Pelo Princípio da Indução, conlui-se que, para todo natural $n \geq 2$ e para todo ângulo a, vale a fórmula $sen 2^n a = 2^n sen a . \cos a . \cos 2a \ldots . \cos 2^{n-1} a$.

Os exemplos acima mostram a utilidade da Indução Matemática em demonstrações. No entanto, tem-se que ter bastante cuidado na sua aplicação. Os exemplos abaixo apresentam **erros** de aplicação da Indução Matemática, e o leitor é convidado a descobrir a falha em cada um deles.

Exemplo 38 -

Em qualquer grupo de pessoas, todas têm o cabelo da mesma cor.

Prova: Por indução no número n de pessoas do grupo. Para $n = 1$ o resultado é óbvio. Supondo válida para um grupo de k pessoas, mostremos que vale para grupos de $k+1$ pessoas. Dado um grupo de $k+1$ pessoas, pela hipótese de indução, no subgrupo das suas k primeiras pessoas, todas elas têm o cabelo da mesma cor, e isto também ocorre no subgrupo das k últimas pessoas do grupo dado. Ora, esses dois subgrupos têm uma pessoa em comum, e então todas as $k+1$ pessoas dadas têm o cabelo da mesma cor.

Exemplo 39 -

Todos os números inteiros positivos são ímpares.

Prova: Por indução: o primeiro inteiro positivo, 1, é ímpar. Além disso, se os k primeiros inteiros positivos forem ímpares, então $k+1 = (k-1)+2 =$ ímpar $+$ par $=$ ímpar.

Exemplo 40 -

Sempre temos que $a^{n-1} = 1$, para todo número real a e todo inteiro positivo n.

Prova: Basta usarmos indução começando em $n = 1$ e observar que

$$a^{(k+1)-1} = \frac{a^{k-1}a^{k-1}}{a^{k-2}}.$$

Finalmente, salientamos que nem sempre precisamos usar indução para mostrar que uma afirmação vale para todo número natural: a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética pode ser demonstrada sem indução, por exemplo.

2 NÚMEROS INTEIROS

Neste capítulo, apresentaremos alguns conceitos e resultados, relativos aos números inteiros, que serão usados nos próximos capítulos.

2.1 Notação e terminologia

$\mathbb{N}$: conjunto dos números naturais: 0, 1, 2, 3, ...
$\mathbb{Z}$: conjunto dos números inteiros relativos: ....., -3, -2, -1, 0, 1, 2, ...

Ainda, se A denota um conjunto numérico e $0 \in A$, então A^* denotará o conjunto $A - \{0\}$.

2.2 O Teorema Fundamental da Aritmética

O seguinte resultado é bem conhecido desde as primeiras séries do Ensino Fundamental:

Teorema 2 -
(Teorema Fundamental da Aritmética para números naturais - TFA): Todo número natural não nulo e diferente de 1 *possui uma fatoração em fatores primos. Além disso, tal fatoração é **única** se exigirmos que ela seja escrita com os primos listados em ordem não decrescente.*

Assim, por exemplo,

$$\begin{aligned} 24 &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 = \\ &= 2^3 \times 3. \end{aligned}$$

Relembramos que 1 não é considerado um número primo.

Note que o teorema anterior (TFA) consiste de duas afirmações, uma de **existência** e outra de **unicidade**. Ele pode ser mais precisamente enunciado se usarmos o simbolismo matemático, embora este simbolismo seja bastante difícil de ser entendido para quem não está treinado com o mesmo. Como é muito importante que o estudante adquira familiaridade com o formalismo matemático, enunciamos o TFA também desta forma:

Teorema 3 -

*(**Enunciado simbólico do TFA para os números naturais**):*

Seja a um número natural não nulo e diferente de 1. Então:

*- **Existência:** existem números naturais primos distintos $p_1, ..., p_n$, e naturais não nulos $j_1, ..., j_n$ tais que*

$$a = p_1^{j_1} \times ... \times p_n^{j_n}.$$

*- **Unicidade:** se*

$$p_1 < p_2 < ... < p_n$$

e se $q_1, ..., q_m$ são números naturais primos e distintos e $k_1, ..., k_m$ são naturais não nulos tais que

$$a = q_1^{k_1} \times ... \times q_m^{k_m}$$

e

$$q_1 < q_2 ... < q_m$$

então

$$n = m, \quad p_1 = q_1, ..., \quad p_n = q_n \quad e \quad j_1 = k_1, .., \quad j_n = k_n.$$

Um número natural pode ter muitas fatorações:

$$24 = 2 \times 12 = 3 \times 8 = 4 \times 6,$$

mas o que o teorema acima nos diz é que há só uma fatoração em primos ordenados em ordem não decrescente.

Convenção: A igualdade

$$a = p_1^{j_1} \times ... \times p_n^{j_n},$$

com $p_1, ..., p_n$ números naturais primos e distintos tais que $p_1 < p_2 < ... < p_n$ e com $j_1, ..., j_n$ naturais não nulos é dita **a fatoração** (ou decomposição) **do número natural a em fatores primos.**

E quando nos referirmos **à fatoração de um número inteiro negativo** a estaremos nos referindo à fatoração da forma

$$a = - \text{ (a fatoração do número natural } -a).$$

Assim, por exemplo, **a** fatoração de -24 é para nós a fatoração

$$-24 = -2 \times 2 \times 2 \times 3 = -2^3 \times 3.$$

Quando nos referirmos apenas a "**uma** fatoração para a" estaremos nos referindo a qualquer fatoração de a, com fatores não necessariamente primos.

Exercício 8 -

Certifique-se que se a, b são números inteiros, então

(uma fatoração em primos de ab) = (uma fatoração em primos de a) $\times$ (uma fatoração em primos de b).

*Como Você poderia obter **a** fatoração de ab através d**as** fatorações de a e de b?*

Para entender a idéia do exercício, observe que

$$\begin{aligned} 200 &= 2^3 \times 5^2 \\ 63 &= 3^2 \times 7. \end{aligned}$$

Daí tem-se

$$12600 = 200 \times 63 = (2^3 \times 5^2) \times (3^2 \times 7) = 2^3 \times 5^2 \times 3^2 \times 7,$$

que é uma fatoração de 12600 em fatores primos. Esta fatoração facilmente nos leva à fatoração de 12600 em fatores primos:

$$12600 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$$

Exercício 9 -

Um aluno da 4ª série do Ensino Fundamental apresentou a seguinte resolução para o problema "Fatore 78 em fatores primos":

$$\begin{array}{r|l} 78 & 3 \\ 26 & 2 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad 78 = 3 \times 2 \times 13$$

Discuta esta resolução quanto à sua ***correção.***

Definição 9 -

Dizemos que um inteiro a é um ***divisor*** *de um inteiro b (ou que b é* ***múltiplo*** *de a) se existe um inteiro c tal que $ac = b$.*

Do exercício acima tiramos como conseqüências:

Corolário 1 -

Sejam p, a inteiros (não necessariamente distintos) tais que p é primo positivo. Se p é um divisor de a então p aparece na fatoração de a. Reciprocamente, se p aparece na fatoração de a então p é divisor de a.

Em outras palavras: p é divisor de a se e só se p aparece na fatoração de a.

Prova: Provemos inicialmente a implicação

$$p \text{ é divisor de } a \Rightarrow p \text{ aparece na fatoração de } a.$$

$$\begin{aligned} p \text{ é divisor de } a &\overset{\text{def. de divisor}}{\Longrightarrow} \text{existe } c \in \mathbb{Z} \text{ tal que } pc = a \\ \overset{\text{Exerc.8}}{\Longrightarrow} \text{uma fatoração em primos de } a &= (\text{a fatoração de } p)(\text{a fatoração de c}) = \\ &\overset{p \text{ é primo positivo}}{=} p.(\text{a fatoração de c}). \end{aligned}$$

Assim, encontramos uma fatoração em primos de a que envolve o primo p. Também do exercício 8 sabemos que a fatoração de a pode ser obtida de qualquer uma fatoração em primos de a apenas reordenando-se os primos que aparecem naquela fatoração. Portanto, concluímos que p aparece na fatoração de a.

Provemos agora a recíproca

$$p \text{ aparece na fatoração de } a \Rightarrow p \text{ é divisor de } a.$$

Seja $a = \pm p_1^{j_1} \times ... \times p_n^{j_n}$ a fatoração de a (o sinal $\pm$ refere-se apenas ao sinal de a). Então, se p aparece na fatoração de a então p é algum dos primos $p_1, ..., p_n$, digamos, $p = p_i$ para algum $i \in \{1, ..., n\}$. Mas então podemos escrever

$$a = p \times (\pm p_1^{j_1} \times ... \times p_i^{j_i - 1} \times ... \times p_n^{j_n},$$

e portanto, por definição de divisor, concluímos que p é um divisor de a.

Exercício 10 -

V ou F? Justifique. Sejam p, a inteiros tais que p é primo e p é divisor de a. Então qualquer múltiplo de a é também múltiplo de p.

Corolário 2 -

Sejam p, a, b inteiros (não necessariamente distintos) tais que p é primo e p é um divisor de ab. Então p é um divisor de a ou p é um divisor de b. Ou ainda: se um primo p é um divisor de ab, e p não é um divisor de a, então p é um divisor de b.

Exercício 11 -

V ou F? Justifique. Sejam n, a inteiros tais que n é divisor de a^2. Então n é divisor de a.

Exercício 12 -

V ou F? Justifique. Seja a um inteiro tal que a^2 é par. Então a é par.

Exercício 13 -

V ou F? Justifique. Seja a um inteiro tal que a^2 é ímpar. Então a é ímpar.

Exercício 14 -

Prove que se n é um número inteiro e p um primo p tal que p é um divisor de n^2, então p é um divisor de n.

Note que as recíprocas dos exercícios 11 e 12 acima já foram provadas anteriormente.

Convenção: Em todo este texto quando quisermos dizer que dois inteiros a e b são relativamente primos escreve remos apenas $mdc(a, b) = 1$, pois de fato dois inteiros são relativamente primos se e só se o máximo divisor comum entre eles é 1.

3 NÚMEROS RACIONAIS

3.1 Conceito e Notação

O conceito de número racional procura expressar a **essência numérica** do conceito de fração ordinária. Explicamo-nos melhor com o seguinte exemplo envolvendo o nosso proverbial amigo "bolo": embora servir dois pedaços de um bolo que foi dividido em três partes iguais não seja o mesmo que servir quatro pedaços do mesmo bolo que foi dividido em seis partes iguais, a **quantidade** de bolo servida é a mesma. Ou seja, as frações $2/3$ e $4/6$ são **numericamente** iguais. Escrevemos então

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}.$$

De um modo geral, dadas duas frações a/b e a'/b', elas podem estar ou não representando uma mesma quantidade. Quando elas representarem a mesma quantidade, como as frações do exemplo do bolo, diremos que elas são iguais, ou seja

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}.$$

E como podemos decidir, a partir dos valores de a, b, a' e b', se as quantidades representadas por a/b e a'/b' são as mesmas? Levando em conta que ninguém tem dúvidas quanto a comparar duas frações de mesmo denominador, e que ao tomarmos a pedaços de um bolo que foi dividido em b partes estamos tomando a mesma quantidade que quando tomamos na partes de um bolo que foi dividido em nb partes (n aqui é um número natural não nulo), ou seja,

$$\frac{a}{b} = \frac{na}{nb},$$

temos

$$\frac{a}{b} = \frac{ab'}{bb'} \quad \text{e} \quad \frac{a'}{b'} = \frac{a'b}{bb'}.$$

Levando em conta que ninguém tem dúvidas quanto a decidir se duas frações de mesmo denominador são ou não iguais, concluímos:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Longleftrightarrow \frac{ab'}{bb'} = \frac{a'b}{bb'} \Longleftrightarrow ab' = a'b.$$

Salientamos então:

> O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais **não** é o conjunto das frações ordinárias, mas sim o conjunto das **quantidades numéricas** que elas representam; ou seja, $\mathbb{Q}$ é o conjunto das frações ordinárias **submetidas** à seguinte noção de igualdade: sendo a, b, a', b' números inteiros com b e b' não nulos, teremos que
>
> $$\tfrac{a}{b} = \tfrac{a'}{b'}$$
>
> quando e só quando
>
> $$ab' = a'b.$$

Definição 10 -

*Todas as frações ordinárias iguais a uma mesma fração a/b são ditas **representações (fracionárias)** de a/b.*

Exercício 15 -

i) Ache infinitas representações para o número racional $2/3$.

ii) Ache infinitas representações fracionárias para um número racional qualquer a/b.

*iii) Na lista que Você obteve em (ii) estão incluídas **todas** as possíveis representações para tal fração a/b? [DICA: por exemplo, partindo de $22/33$, em sua lista estaria presente a fração $4/6$?]*

*iv) Tente intuir e demonstrar sua intuição: em que casos as representações indicadas em (ii) constituem **todas** as representações possíveis para o racional dado?*

Exercício 16 -

i) Suponhamos que

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{3},$$

com $b > 0$ e $mdc(a, b) = 1$. Tente concluir que necessariamente $a = 2$ e $b = 3$ [Sugestão: é conveniente utilizar o Teorema e Corolários de números inteiros mencionados anteriormente].

*ii) Tente generalizar seu raciocínio acima, mostrando que qualquer número racional é representado por uma **única** fração irredutível de denominador positivo. Em outras palavras: dado um racional a/b com $mdc(a, b) = 1$ e $b > 0$, se um racional c/d é tal que*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

com $mdc(c, d) = 1$ e $d > 0$, então $a = c$ e $b = d$.

Observação 1 -
Note que podemos representar o conjunto dos número racionais da seguinte maneira:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b > 0 \right\},$$

uma vez que, para cada racional a/b,

$$\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}.$$

> **Convenção:** A partir de agora, ao escrevermos um racional na forma a/b, **estaremos sempre subentendendo** $b > 0$, mas não necessariamente $mdc(a, b) = 1$.

Obviamente $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, pois cada $m \in \mathbb{Z}$ pode ser representado na forma $m/1$.

Exercício 17 -
Prove que se existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x^2 \in \mathbb{N}$ então $x \in \mathbb{Z}$. [Sugestão: Utilize o TFA]

3.2 Frações Decimais

Definição 11 -
*Uma **fração decimal** é uma fração com denominador igual a uma potência positiva de* 10.

Exemplos:

$$\frac{2}{10}, \frac{2}{100}, \frac{13}{10}, \frac{13}{100}.$$

A representação de um número racional como uma fração decimal terá um papel fundamental na construção dos números reais, conforme veremos neste e nos próximos capítulos.

Definição 12 -
*Dizemos que um número racional r **pode ser representado por uma fração decimal** se existe uma fração decimal cujo valor numérico é r.*

Por exemplo, o racional $2/5$ pode ser representado por uma fração decimal, pois $2/5 = 4/10$.

Exercício 18 -
V ou F? Justifique. Uma soma de racionais representáveis por frações decimais é também um racional representável por uma fração decimal

Note que, no entanto, nem todo número racional pode ser representado por uma fração decimal. O leitor é convidado a encontrar um contra exemplo. Comece tentando responder para os seguintes racionais:

$$\frac{1}{5}, \frac{3}{50}, \frac{1}{3}, \frac{12}{7}.$$

Surge-nos então a seguinte questão de caráter geral: que condições sobre a e b nos garantem que a/b possa ser representado por uma fração decimal?

Exercício 19 -

Seja a/b um número racional com $mdc(a,b) = 1$.

i) Prove que se a/b pode ser representado por uma fração decimal, então $b = 1$ ou então $b \neq 1$ e os únicos primos que aparecem na fatoração de b são 2 e 5.

ii) Vale a recíproca de (i), ou seja, se $b = 1$ ou, no caso de $b \neq 1$, se os únicos fatores primos de b são 2 e/ou 5 então a/b pode ser representado por uma fração decimal? Justifique.

iii) Determine uma representação para o racional $3/50$ com denominador potência de dez. A seguir responda: é única esta representação? Em caso negativo, quantas representações deste tipo existem para $3/50$?

iv) Idem (iii) para o racional $3/8$.

3.3 O corpo dos racionais

Esta seção tem como principal objetivo relembrar as operações fundamentais entre os racionais, chamando a atenção para alguns aspectos matemáticos da teoria que não são discutidos ou mesmo mencionados no Ensino Fundamental e no Ensino Médio; além disso, esta seção também servirá de base para uma posterior seção, no Capítulo 6, mais complicada, quando discutiremos a extensão das operações fundamentais dos racionais aos números reais.

Nos racionais estão definidas as quatro operações fundamentais da aritmética: adição, subtração, multiplicação e divisão[1]. Estas operações são definidas a partir das operações de adição e multiplicação nos inteiros as quais vamos admitir conhecidas, junto com suas propriedades.

A definição da operação de adição entre os racionais se baseia na mesma idéia para a soma de frações ordinárias: se as frações têm o mesmo denominador, então basta somarmos seus numeradores. Assim, por exemplo,

$$\frac{3}{9} + \frac{8}{9} = \frac{11}{9}$$

E, se os racionais estão representados por frações ordinárias de diferentes denominadores, então basta-nos encontrar representações para ambos que sejam frações de mesmo denominador.

Exemplo 41 -

$$\frac{2}{10} + \frac{9}{5} = \frac{10}{50} + \frac{90}{50} = \frac{100}{50} = 2,$$

mas também, apelando para o mínimo múltiplo comum dos denominadores,

$$\frac{2}{10} + \frac{9}{5} = \frac{2}{10} + \frac{18}{10} = \frac{20}{10} = 2.$$

Em geral: na seção 3.1 vimos que, dados dois quaisquer racionais a/b e c/d, sempre é possível encontrar representações para ambos com o mesmo denominador, por exemplo,

$$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$$

[1] Na verdade estamos aqui utilizando um "abuso de linguagem" ao falarmos na "operação de divisão". Rigorosamente falando, divisão é uma operação apenas no conjunto $\mathbb{Q}^*$, ou ainda, uma função definida no conjunto $\mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^*$. O que fazemos é estender esta função a uma função definida no conjunto $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^*$.

e

$$\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}.$$

Somos então levados a definir soma de racionais quaisquer da seguinte maneira:

Definição 13 -

Dados racionais $r = a/b$ e $s = c/d$, a soma $r + s$ é definida por

$$r + s = \frac{ad + bc}{bd}. \tag{1}$$

Exercício 20 -

Um aluno da 4ª série do Ensino Fundamental apresentou a seguinte resolução para o problema "Efetue: $\frac{9}{5} + \frac{7}{20}$."

$$\frac{9}{5} + \frac{7}{20} = \frac{180 + 35}{100} = \frac{215}{100} \overset{\div 5}{=} \frac{43}{20}.$$

Discuta esta resolução quanto à sua ***correção.***

Chamamos aqui a atenção que esta definição é em geral apresentada sem comentários adicionais, deixando-se se ressaltar a seguinte questão: ora, sabemos que um dado racional tem infinitas representações fracionárias. Assim, existem certamente inteiros a', b', c', d' **distintos** de a, b, c, d tais que

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= r = \frac{a'}{b'} \\ \frac{c}{d} &= s = \frac{c'}{d'}. \end{aligned}$$

Assim, para que a definição acima faça sentido, devemos ter também

$$r + s = \frac{a'd' + b'c'}{b'd'}$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{ad + bc}{bd} = \frac{a'd' + b'c'}{b'd'}. \tag{2}$$

(ou seja, a soma realizada com quaisquer representantes para r e s deve nos fornecer sempre o mesmo resultado, caso contrário a soma não estaria bem definida). Mas, sendo a', b', c', d' distintos de a, b, c, d, quem nos garante que (2) é verdadeiro? A igualdade acima de fato ocorre, mas para termos esta garantia uma prova é necessária. Situação análoga acontece com as demais operações. No exercício que se segue convidamos o leitor a resolver estas questões.

Exercício 21 -

a) Prove que a soma de racionais r e s dada por (1) está bem definida, não dependendo das representações fracionárias de r e s, ou seja, se

$$r = \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$
$$s = \frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$$

então

$$\frac{ad+bc}{bd} = \frac{a'd'+b'c'}{b'd'}.$$

b) Enuncie e prove um resultado similar para as operações de subtração, multiplicação e divisão de racionais.

As operações de adição e multiplicação entre os racionais satisfazem uma série propriedades bastante familiares ao leitor, que a seguir enunciamos e cujas provas deixamos como exercícios.

Observamos que, na maioria dos casos, para resolver estes exercícios, o leitor deverá usar algumas propriedades operatórias correspondentes que são válidas entre os inteiros (tais como comutatividade da adição de inteiros, existência de elemento neutro para a multiplicação de inteiros, distributividade da multiplicação de inteiros em relação à adição de inteiros, etc).

Exercício 22 -

Propriedades básicas satisfeitas pelas quatro operações fundamentais entre os racionais:

Prove as seguintes propriedades satisfeitas pelas quatro operações fundamentais entre os racionais:

Sobre a operação de adição:

Dados racionais r, s, t :

i) $r + s = s + r$ (comutatividade)

ii) $(r + s) + t = r + (s + t)$ (associatividade)

iii) $r + 0 = r$ ($\mathbb{Q}$ admite elemento neutro em relação à adição)

iv) $r + (-r) = 0$ ($\mathbb{Q}$ admite simétricos em relação à adição, e o simétrico de um elemento r é o $-r$)

(Note que com este exercício, a subtração pode ser vista simplesmente como $r - s = r + (-s)$)

Sobre a operação de multiplicação:

v) $r.s = s.r$ (comutatividade)

vi) $(r.s)t = r(s.t)$ (associatividade)

vii) $r.1 = r$ ($\mathbb{Q}$ admite elemento neutro em relação à multiplicação)

viii) se $r \neq 0$, $r.r^{-1} = 1$ (qualquer elemento não nulo de $\mathbb{Q}$ admite inverso em relação à multiplicação, e o inverso de um elemento não nulo $r = a/b$ é o número b/a, que é denotado por r^{-1}).

(Note que, como a subtração, a divisão pode ser vista simplesmente como $r \div s = r.s^{-1}$)

ix) $r(s + t) = r.s + r.t$ (distributividade da multiplicação em relação à adição)

O conjunto dos números racionais, considerado com as operações de adição e multiplicação e, com o fato adicional destas operações satisfazerem as nove propriedades acima, constitui uma **estrutura algébrica** que chamamos de **corpo.** Veremos também que o conjunto dos reais, munido de operações que são extensões naturais destas operações entre os racionais, bem como o conjunto dos complexos, com extensões naturais das operações dos reais, constituem ambos exemplos de corpos.

Em textos mais avançados de Álgebra são considerados outros exemplos de corpos, bem como estudadas e demonstradas propriedades gerais, válidas neste tipo de estrutura algébrica.

3.4 Ordenação dos Números Racionais

Existe uma maneira natural de comparar duas frações de mesmo denominador: é maior aquela fração que envolve o maior numerador. Daí, do fato de dois quaisquer racionais sempre poderem ser representados por frações de mesmo denominador, decorre uma **ordenação** natural para o conjunto $\mathbb{Q}$, isto é, uma maneira de decidir quem é o maior entre dois racionais dados. Por exemplo, dados $r = 15/21$ e $s = 7/10$, temos

$$\frac{15}{21} = \frac{15 \times 10}{21 \times 10} = \frac{150}{210} > \frac{147}{210} = \frac{21 \times 7}{21 \times 10} = \frac{7}{10}.$$

Assim, a idéia é que, para compararmos dois quaisquer racionais, basta-nos comparar os numeradores de frações com o mesmo denominador que representam tais racionais. No entanto, note que esta maneira de comparar frações só vai servir para comparar racionais (que são números!) se for verdade que, com quaisquer outras duas representações para tais racionais envolvendo um mesmo denominador, chegamos à mesma conclusão. Por exemplo, no exemplo acima, o quê nos garante que, se representarmos r e s por duas frações de denominadores iguais a 140, chegamos à mesma conclusão?

Exercício 23 -
Prove que se r e s são dois racionais e $a, b, c, d, a', b', c', d'$ são inteiros tais que

$$\frac{a}{b} = r = \frac{a'}{b'} \quad e \quad \frac{c}{d} = s = \frac{c'}{d'}$$

então

$$ad < bc \Rightarrow a'd' < b'c'.$$

Agora sim podemos definir uma ordem entre números racionais:

Definição 14 -
Dados dois racionais a/b e c/d (lembre que, por convenção, $b, d > 0$), definimos:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

se, e somente se,

$$ad < bc.$$

Cuidado!, para racionais com denominador(es) negativo(s) não valem as mesmas conclusões acima. Convidamos o leitor a apresentar contra-exemplos.

Exercício 24 -
Mostre que nem sempre precisamos recorrer ao critério mencionado acima para comparar dois racionais. Por exemplo, como Você poderia decidir, de uma forma mais "econômica" que a apresentada na proposição acima, quem é o maior entre $4/10^4$ e $32/10^5$? E entre $13/8$ e $33/24$? E entre $5/6000$ e $7/9000$?

No exercício que se segue vemos que, em adição às propriedades satisfeitas pelas quatro operações fundamentais entre os racionais acima listadas, são válidas também propriedades satisfeitas por estas operações combinadas com a ordem entre os racionais:

Exercício 25 -

Prove que, se $r, s, t \in \mathbb{Q}$ e $r < t$ então

i) $r + s < t + s$ (compatibilidade da ordem com a adição)

ii) se $s > 0$ então $rs < ts$ (compatibilidade da ordem com a multiplicação)

iii) a hipótese $s > 0$ em (ii) é essencial, isto é, se não sabemos que $s > 0$ então não podemos garantir que $rs < ts$.

Definição 15 -

As propriedades listadas no exercício acima, junto com as propriedades de corpo, nos permitem falar no ***corpo ordenado dos racionais.***

Veremos futuramente que o conjunto dos números reais é também um corpo ordenado, mas que o corpo dos números complexos **não** é um corpo ordenado.

Definição 16 -

$\mathbb{Q}$ possui a ***propriedade arquimediana:*** *dados dois racionais distintos r e s, digamos, com $r < s$, sempre é possível encontrar $n \in \mathbb{Z}$ tal que $s < nr$.*

Exemplo 42 -

i) tem-se

$$\frac{3}{2} < \frac{20}{3},$$

mas

$$\frac{20}{3} < 10 \times \frac{3}{2}.$$

ii) Note que, às vezes, tal n precisa mesmo ser negativo:

$$-\frac{2}{3} < \frac{1}{5}$$

mas

$$\frac{1}{5} < (-1)\frac{-2}{3}.$$

Exercício 26 -

Prove que a seqüência de racionais

$$1,\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{10^2},\ \dots,\ \frac{1}{10^n}, \dots$$

é decrescente. Prove também que esta seqüência ***tende a zero,*** *ou seja, que seus termos se tornam tão próximos de zero quanto queiramos, bastando para isso tomarmos n suficientemente grande. Precisamente, dado um racional $r > 0$, prove que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que*

$$0 < \frac{1}{10^n} < r.$$

(Com isto estamos comprovando que, mesmo que tomemos um racional bem pequeno - tão pequeno quanto se queira, vamos encontrar um elemento desta seqüência que é ainda menor do que este racional).

Exercício 27 -

Sejam x, y números racionais positivos e distintos, digamos $x < y$, mostre que existem $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grandes tais que

$$x < \frac{m}{10^n} < \frac{m+1}{10^n} < y.$$

Dados racionais r e s, com $0 < r \leq s$ é claro que se n é um inteiro (positivo) tal que $s < nr$ então qualquer $m \geq n$ também satisfaz $s < mr$. Será de interesse futuro saber-se qual o **menor** inteiro n_0 tal que $s < n_0 r$. Observe que podemos caracterizar n_0 pelas condições:

$$s < n_0 r$$

e, se n é tal que

$$n < n_0,$$

então

$$nr \leq s.$$

Exercício 28 -

i) Qual o menor inteiro n que nos permite, a partir de $2/3$, ultrapassar $21/6$?

ii) Generalizando: se

$$\frac{1}{2} < \frac{a}{b},$$

como Você calcularia o menor inteiro n que nos permite, a partir de $1/2$, ultrapassar a/b?

Exercício 29 -

Dado o racional $134/7$, determine:

i) o inteiro m que satisfaz

$$m \leq \frac{134}{7} \leq m+1$$

ii) o inteiro m que satisfaz

$$\frac{m}{10} \leq \frac{134}{7} \leq \frac{m+1}{10}$$

iii) o inteiro m que satisfaz

$$\frac{m}{10^2} \leq \frac{134}{7} \leq \frac{m+1}{10^2}$$

iv) o inteiro m que satisfaz

$$\frac{m}{10^3} \leq \frac{134}{7} \leq \frac{m+1}{10^3}$$

v) em geral, dado $n \in \mathbb{N}$, o inteiro m que satisfaz

$$\frac{m}{10^n} \leq \frac{134}{7} \leq \frac{m+1}{10^n}$$

Discuta a unicidade do valor de m encontrado em cada um dos ítens anteriores.

Exercício 30 -

Idem o exercício anterior, para o racional $15/8$.

Exercício 31 -

Você deve ter constatado a unicidade de m *no Exercício 29 mas não no Exercício 30. Procure uma explicação para isto!*

Observação. Futuramente, para garantir a unicidade de m em qualquer caso, vamos requerer que

$$\frac{m}{10^n} \leq \frac{a}{b} < \frac{m+1}{10^n}.$$

3.5 Densidade dos Racionais

Queremos agora discutir uma propriedade importante dos racionais, que o torna muito diferente do conjunto dos números inteiros: enquanto que em $\mathbb{Z}$ podemos falar da noção de "consecutivo" (por exemplo: o consecutivo de 2 é 3; o consecutivo de -4 é -3), esta noção não faz sentido em $\mathbb{Q}$, pois entre dois racionais distintos sempre podemos encontrar outro racional, diferente de ambos. Por exemplo, entre $1/2$ e $4/5$ temos $3/5$, mas entre $1/2$ e $3/5$ temos $5/8$.

Exercício 32 *(retirado do livro "Matemática Atual ", de Antônio José Lopes Bigode, 7ª. série, Ed.Atual)* -

i) Dê o valor de um número racional que seja maior do que $2/5$ *e menor do que* $2/3$.

ii) Apresente um número racional que seja maior do que $3/4$ *e menor do que* r, *sabendo que* $r > 3/4$.

iii) Mostre que entre dois racionais distintos, digamos, r *e* s *com* $r < s$, *sempre existe algum racional diferente destes.*

iv) A partir de (iii) responda: entre dois racionais distintos, quantos racionais existem? Justifique.

Conclusão:

Entre dois quaisquer racionais distintos sempre existe uma **infinidade** de racionais.

Costumamos nos referir a esta propriedade dizendo que $\mathbb{Q}$ é um conjunto **denso.** Em geral

Definição 17 -

Um subconjunto A *de* $\mathbb{Q}$ *é dito* **denso** *se entre dois quaisquer elementos de* A *existem infinitos elementos do próprio* A.

Assim, $\mathbb{Z}$ não é um conjunto denso (por quê?) e $\mathbb{Q}$ é denso.

Será que existem subconjuntos de $\mathbb{Q}$ que são densos?

Exercício 33 -

a) Prove que o conjunto dos racionais representáveis por uma fração decimal é um conjunto denso.

b) Prove que o conjunto dos racionais representáveis por uma fração com denominador potência de 13 é um conjunto denso.

Exercício 34 -

(retirado do livro "Matemática Atual", de Antônio José Lopes Bigode, 7ª série, Ed.Atual)
Dê três exemplos de subconjuntos de $\mathbb{Q}$
i) que sejam densos
ii) que não sejam densos

Salientamos que a densidade diferencia drasticamente os conjuntos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$:

> Entre quaisquer dois **inteiros** sempre existe apenas uma quantidade finita de inteiros. Em particular, cada inteiro tem um **consecutivo.**
> Entre quaisquer dois **racionais** distintos sempre existe uma quantidade infinita de racionais. Em particular, **não** podemos falar em consecutivo de um racional.

3.6 Representação Decimal dos Racionais

Nesta seção estaremos interessados em discutir outra forma especial de representar números racionais, também bastante conhecida pelo leitor, distinta da fracionária, dita **representação decimal.** Ela permite que representemos um racional como uma lista envolvendo apenas os naturais $0, 1, \ldots, 9$ (que chamaremos, desde já, de **dígitos**). Esta representação é a conhecida "representação com vírgula" de um número racional. Esta forma de representar um número racional será muito importante para a conceituação e estudo dos números reais que faremos nos capítulos que se seguem, e nada mais é do que uma extensão, para os números racionais, da representação decimal dos números naturais.

Embora não tenhamos comentado anteriormente, quando nos referimos, por exemplo, ao número natural três mil cento e noventa e quatro, 3194, estamos utilizando uma especial **representação posicional** para representar este número natural (quantidade), dita **representação decimal** ou **representação em base dez.** A importância de uma representação como esta é que, através dela, podemos representar **qualquer** número natural através de uma **lista finita** constituída por símbolos previamente escolhidos. No caso da representação decimal, pelos dez símbolos $0, 1, \ldots, 9$, que denominamos de dígitos. Por exemplo

$$23568899990710333 44.$$

A denominação *posicional* significa que não é apenas importante quais os símbolos (no caso os dígitos) que entram na lista, mas a *posição* que estes símbolos ocupam na lista. Por exemplo, as listas 3194 e 9413 têm os mesmos símbolos mas representam naturais (quantidades) diferentes.

No caso em questão, da representação, 3194 representa o número de elementos de um conjunto constituído por 3 agrupamentos de $1000 = 10^3$ elementos, adicionado de 1 agrupamento de $100 = 10^2$ elementos, adicionado de 9 agrupamentos de $10 = 10^1$ elementos, adicionado de 4 agrupamentos de $1 = 10^0$ elementos. Isto pode ser abreviadamente escrito, a partir das operações aritméticas básicas dos naturais, escrevendo-se:

$$3194 = 3 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 4 \times 10^0$$

ou simplesmente

$$3194 = 3 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 9 \times 10 + 4.$$

De um modo geral, dado um número natural k, representar k em base 10, ou dar a representação decimal de k, significa escrevermos

$$k = u_n u_{n-1} ... u_0,$$

onde $u_0, u_1, ..., u_n \in \{0, ..., 9\}$, significando que

$$k = u_n \times 10^n + u_{n-1} \times 10^{n-1} + ... + u_1 \times 10 + u_0. \tag{3}$$

Com o intuito de permitir uma melhor compreensão da representação decimal, é conveniente que comentemos, para efeitos de comparação, uma outra base, além da decimal, para a representação dos números naturais. Com o advento do computador, ficou bastante comum trabalhar-se com representações binárias de um número natural k, o que consiste em escrever

$$k = (b_m b_{m-1} ... b_0)_2,$$

significando com esta notação que

$$k = b_m \times 2^m + b_{m-1} \times 2^{m-1} + ... + b_1 \times 2 + b_0,$$

tendo-se $b_i \in \{0, 1\}$, $0 \leq i \leq m$. Por exemplo, a representação binária de 5 é

$$5 = (101)_2,$$

pois

$$5 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1.$$

Não nos ocuparemos aqui em aprofundar um estudo sobre representações de um número natural; isto faz parte de um texto de Aritmética. E, de fato, não será necessário, para o nosso estudo, um tal aprofundamento. Para nós, basta que saibamos trabalhar com alguma representação posicional de um número natural. Poderíamos utilizar qualquer base, mas escolhemos a base dez pela familiaridade que temos em lidar com a representação decimal. Salientamos apenas as seguintes propriedades provenientes de tal representação que nos serão úteis adiante:

Lema 1 -
Para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$10^n - 1 = \underbrace{9...9}_{n \text{ vezes}},$$

ou seja

$$10^n - 1 = 9 + 9.10 + 9.10^2 + ... + 9.10^{n-1}.$$

Exercício 35 -
Demonstre o lema acima. [Sugestão: utilize indução sobre n]

Corolário 3 -
Para $m, n \in \mathbb{N}$ temos $10^m(10^n - 1) = \underbrace{9...9}_{n}\underbrace{0...0}_{m}$.

A idéia para acharmos a representação posicional em base 10 de um número racional **positivo** representado, digamos, pela fração a/b, é a seguinte: numa primeira etapa encontramos a parte inteira de a/b. Assim, podemos escrever

$$\frac{a}{b} = k + \frac{c}{b}$$

sendo k um número natural e c/b uma fração maior ou igual a zero e menor do que 1. É claro que k pode se representado na forma decimal, digamos

$$k = u_n u_{n-1} ... u_1 u_0.$$

Como $0 \leq c/b < 1$, é natural que, numa segunda etapa, tentemos expressar c/b como uma soma de frações decimais. Mais precisamente: no caso em que $c/b \neq 0$, procuramos dígitos $a_j \in \{0, 1, ..., 9\}$, $1 \leq j \leq m$ tais que

$$\begin{aligned} \frac{c}{b} &= \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + ... + \frac{a_m}{10^m} = \\ &= 0, a_1 + 0, 0a_2 + ... + 0, \underbrace{0...0}_{m-1}a_m. \end{aligned}$$

No caso de encontrarmos estes números, escreveremos

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= k + \frac{c}{b} = \\ &= u_n u_{n-1} ... u_1 u_0 + 0, a_1 + 0, 0a_2 + ... + 0, \underbrace{0...0}_{m-1}a_m, \end{aligned}$$

pois daí utilizamos a seguinte representação **posicional** para a/b :

$$\frac{a}{b} = u_n u_{n-1} ... u_1 u_0, a_1 a_2 ... a_m \tag{4}$$

Note então que a vírgula serve para separar a representação decimal da parte inteira de a/b do que chamamos "representação decimal" da parte menor do que 1 de a/b.

Observe que este procedimento é de fato uma extensão da representação decimal de um número natural pois, se a/b é um número natural, ou seja, se a é um múltiplo de b, digamos $a = kb$, então

$$\frac{a}{b} = k,$$

e (4) se resume à expansão decimal (3) de k, pois teremos $c = 0$.

A seguir, aplicamos a idéia acima a dois exemplos.

Exemplo 43 -
Vamos obter a representação decimal de $3837/250$. Notemos que, aplicando o Algoritmo da Divisão,

$$3837 = 15 \times 250 + 87.$$

obtemos

$$\frac{3837}{250} = \frac{15 \times 250 + 87}{250} = \frac{15 \times 250}{250} + \frac{87}{250}$$

ou ainda,

$$\frac{3837}{250} = 15 + \frac{87}{250} = 1 \times 10 + 5 + \frac{87}{250}.$$

Obviamente $87/250 < 1$, *e então podemos passar a considerar o problema de expressar* $87/250$ *como uma soma de frações decimais, começando com décimos, depois centésimos, depois milésimos, e assim sucessivamente, tanto quanto necessário.*

Como 250 *é divisor de uma potência de* 10, *a saber,*

$$250 \times 4 = 1000,$$

podemos desenvolver o seguinte raciocínio:

$$\begin{aligned}\frac{87}{250} &= \frac{87 \times 4}{250 \times 4} = \frac{348}{1000} \\ &= \frac{300 + 40 + 8}{1000} = \frac{300}{1000} + \frac{40}{1000} + \frac{8}{1000} \\ &= \frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{8}{1000}.\end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{3837}{250} = 1 \times 10 + 5 + \frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{8}{1000},$$

o que nos dá

$$\frac{3837}{250} = 15,348.$$

Note que, no exemplo acima, não foi tão difícil determinar a expansão decimal de $3837/250$ porque conseguimos desde o início escrever a parte não inteira $87/250$ na forma de uma única fração decimal (precisamente porque 250 é divisor de uma potência de 10). No entanto, já sabemos que isto nem sempre é possível (veja Exercício 19), mas tais casos podem ser tratados fazendo uso repetido do algoritmo da divisão, conforme nos mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 44 -

Vamos obter a representação decimal de $17/37$.

Para achar o dígito da casa dos décimos, respondemos a seguinte questão: quantos décimos existem no racional $17/37$?

Inicialmente note que a fração $17/37$ *é irredutível e 37 não é divisor de uma potência de 10. Logo, o procedimento a ser adotado aqui neste exemplo não pode seguir completamente os passos do exemplo anterior.*

Neste caso, podemos responder a questão acima da seguinte maneira:

$$\frac{17}{37} = \frac{17 \times 10}{37 \times 10} = \frac{1}{10} \times \frac{170}{37},$$

e agora fazer uso do algoritmo da divisão, dividindo 170 *por* 37*:*

$$\frac{17}{37} = \frac{1}{10} \times \frac{4 \times 37 + 22}{37} = \frac{4}{10} + \frac{22}{370};$$

agora, como $22/37 < 1$, *temos* $22/370 < 1/10$. *Portanto é* 4 *o total de décimos que cabem em* $17/37$.

Para achar o dígito dos centésimos da expansão de $17/37$, *procuramos determinar quantos centésimos cabem em* $22/370$:

$$\begin{aligned} \frac{22}{370} &= \frac{22 \times 10}{370 \times 10} = \frac{1}{100} \times \frac{220}{37} \overset{\text{Algoritmo da Divisão}}{=} \\ &= \frac{1}{100} \times \frac{5 \times 37 + 35}{37} = \frac{5}{100} + \frac{35}{3700}, \end{aligned}$$

e como $35/37 < 1$ *temos* $35/3700 < 1/100$. *Portanto são* 5 *centésimos que cabem em* $22/370$. *Portanto, até agora temos:*

$$\frac{17}{37} = \frac{4}{10} + \frac{5}{100} + \frac{35}{3700},$$

ou ainda:

$$\frac{17}{37} = 0,45 + \frac{35}{3700},$$

com

$$\frac{35}{3700} < \frac{1}{100}$$

e portanto, para determinar o dígito dos milésimos da expansão de $17/37$, *procuraríamos determinar quantos milésimos existem em* $35/3700$.

Exercício 36 -

É possível aplicar o método do exemplo acima para o racional $3837/250$ *do exemplo anterior?*

Exercício 37 -

É possível aplicar o método do exemplo acima para o racional $301/300$?

Vamos generalizar agora o que fizemos no último exemplo acima, uma vez que apenas em alguns casos uma fração pode ser transformada numa fração decimal. Assim, dado um número racional positivo $a/b < 1$, podemos achar os dígitos dos décimos, centésimos, milésimos, etc. de sua representação decimal aplicando o Algoritmo da Divisão Euclidiana tantas vezes quantas forem as casas decimais a serem determinadas. Mais detalhadamente: para encontrar o dígito dos décimos de $a/b < 1$, iniciamos escrevendo

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times 10}{b \times 10} = \frac{1}{10} \times \frac{a \times 10}{b}.$$

e então fazemos a divisão euclidiana de $a \times 10$ por b :

$$\begin{aligned} a \times 10 &= q_1 b + r_1, \ 0 \leq r_1 < b \Rightarrow \\ \frac{a}{b} &= \frac{1}{10} \times \frac{q_1 b + r_1}{b} = \frac{1}{10} \times (q_1 + \frac{r_1}{b}) \\ &= \frac{q_1}{10} + \frac{r_1}{10b}; \end{aligned}$$

acabamos então de determinar quantos décimos cabem em r/b, uma vez que, como $0 \leq r_1 < b$, temos

$$\frac{r_1}{b} < 1 \text{ e portanto } \frac{r_1}{10b} < \frac{1}{10}.$$

O que temos até agora então é

$$\frac{a}{b} = \frac{q_1}{10} + \frac{r_1}{10b}, \text{ com } \frac{r_1}{10b} < \frac{1}{10};$$

salientamos que q_1 é um dígito, pois obviamente teremos no máximo 9 décimos em a/b, já que

$$\frac{a}{b} < 1 = \frac{10}{10}.$$

Nosso próximo passo é determinar o valor do dígito da casa dos centésimos de a/b. Isso equivale a determinar quantos centésimos cabem em $r_1/(10b)$. Note novamente que serão no máximo 9, já que

$$\frac{r}{10b} < \frac{1}{10} = \frac{10}{100}.$$

Repetimos a idéia acima:

$$\frac{r_1}{10b} = \frac{r_1 \times 10}{100b} = \frac{1}{100} \times \frac{r_1 \times 10}{b}.$$

Daí, utilizando o Algoritmo da Divisão, dividimos $r_1 \times 10$ por b :

$$\begin{aligned} r_1 \times 10 &= q_2 \times b + r_2,\ 0 \leq r_2 < b \Rightarrow \\ \frac{r_1}{10b} &= \frac{1}{100} \times \frac{q_2 \times b + r_2}{b} = \frac{1}{100} \times (q_2 + \frac{r_2}{b}) = \frac{q_2}{100} + \frac{r_2}{100b} \Rightarrow \\ \frac{a}{b} &= \frac{q_1}{10} + \frac{r_1}{10b} = \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{100} + \frac{r_2}{100b}, \text{ com } \frac{r_2}{100b} < \frac{1}{100}; \end{aligned}$$

e assim encontramos q_2, que é o dígito correspondente aos centésimos da representação decimal de a/b.

Para as demais casas, continuamos semelhantemente este processo: tendo estabelecido o $n-$é-simo dígito depois da vírgula e supondo que ele gerou uma fração $r_n/10^n b < 1/10^n$, procuramos a maior fração de denominador 10^{n+1} que "cabe" dentro da parte que restou $r_n/10^n b$, com $0 \leq r_n < b$.

Ressaltamos que o processo que fizemos acima é a explicação do algoritmo da divisão com vírgula que aprendemos, ou melhor, que nos informaram no Ensino Fundamental. De fato, a vírgula apenas separa a parte inteira da parte menor do que 1.

54	$\underline{\vert\,37}$	54	$\underline{\vert\,37}$	54	$\underline{\vert\,37}$	54	$\underline{\vert\,37}$	54	$\underline{\vert\,37}$	...
17	1	**170**	1,	170	1,4	170	1,4	170	1,45	...
$\Vert$		$\Vert$		**22**		**220**		220		...
r_1		$r_1 \times 10$		$\Vert$		$\Vert$		**35**		...
				r_2		$r_2 \times 10$		$\Vert$		...
								r_3		...
										...

Uma questão importante e que ainda não abordamos é a seguinte: o que nos garante que o processo acima termina? Em termos mais concretos, isso corresponde a indagar se todo número racional pode ser escrito como uma soma de uma quantidade **finita** de frações decimais, obtendo então uma lista finita de dígitos para representá-lo. Equivalentemente: a representação decimal de qualquer número racional sempre tem um número finito de dígitos depois da vírgula?

Todo o mundo sabe que a resposta é **não,** pois todos sabemos dar exemplos de "divisões com vírgula" que não acabam nunca. Um desses exemplos é $1/3$, sendo a correspondente divisão simbolizada por

$$\frac{1}{3} = 0,333...,$$

onde a notação "..." é utilizada para indicar que o processo de divisão nunca termina. Dizemos, então, que $1/3$ tem uma expansão decimal **infinita.** No que segue, passaremos a estudar esses casos e iremos tornar preciso o que é, em geral, informado aos alunos no Ensino Fundamental, sem grandes explicações, ou, pior ainda, com explicações além de pouco rigorosas, um tanto "forçadas". Começamos por um exercício que especifica os casos em que a expansão decimal é finita:

Exercício 38 -

Seja a/b um número racional com $mdc(a, b) = 1$.

i) Prove que se a/b tem expansão decimal finita e $b \neq 1$, então os únicos primos que podem aparecer na fatoração em primos de b são 2 e 5.

ii) Vale a recíproca de (i), ou seja, se $b \neq 1$ e os únicos fatores primos de b são 2 e/ou 5 então a/b tem expansão decimal finita? Justifique.

Em outras palavras:

Os racionais que admitem uma expansão decimal finita são **precisamente** aqueles que podem ser representados por uma fração decimal.

Se experimentarmos achar a expansão decimal de vários racionais que **não** são do tipo acima - como $1/3$, $11/12$, $5/7$, etc - veremos que suas expansões, necessariamente **infinitas,** têm um padrão repetitivo: elas são "periódicas". Precisamente:

Definição 18 -

*Uma **dízima periódica** é uma expressão da forma*

$$m, a_1 a_2 ... a_n ...$$

*onde $m \in \mathbb{N}$ e a_i é dígito para $i = 1, 2, ...$, na qual, após um número finito de termos, aparece um bloco de termos (chamado **período**) com a propriedade que, a partir dele, a lista de dígitos é constituída exclusivamente pela repetição sucessiva deste bloco.*

Exemplo 45 *e Notação* -

$0.444... = 0,\overline{4}$

$0.235747474... = 0,235\overline{74}$

Exercício 39 -

V ou F? Justifique.

$$0,235\overline{74} = 0,2357\overline{47} = 0,235\overline{7474}$$

Queremos mostrar no que segue que todo número racional tem uma expansão decimal finita ou infinita periódica. E queremos mostrar também que vale a recíproca "em quase que sua totalidade". Neste caso, também queremos mostrar que tal número pode ser efetivamente calculado. Para simplificar, convidamos o leitor a refletir e se convencer que representação finita nada mais é do que uma representeção infinita periódica de período zero. Assim, o enunciado da próxima proposição fica encurtado:

Proposição 1 -

Todo racional tem uma expansão decimal infinita periódica.

Prova: Escrevendo o racional como um inteiro adicionado de um racional positivo menor do que um, vemos que, para determinarmos a expansão decimal de um racional, basta-nos nos concentrarmos nos racionais menores do que um. Assim, seja a/b um racional positivo menor do que um. O processo de divisões sucessivas exposto nas págimas anteriores nos leva a

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times 10}{b \times 10} = \frac{1}{10} \times \frac{a \times 10}{b},$$

e então, dividindo $a \times 10$ por b : $a \times 10 = q_1 b + r_1$, $0 \leq r_1 < b$. Continuando então:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{1}{10} \times \frac{q_1 b + r_1}{b} = \frac{1}{10} \times (q_1 + \frac{r_1}{b}) \\ &= \frac{q_1}{10} + \frac{r_1}{10b}. \end{aligned}$$

Daí, escrevendo

$$\frac{r_1}{10b} = \frac{r_1 \times 10}{100b} = \frac{1}{100} \times \frac{r_1 \times 10}{b},$$

obtemos, pelo Algoritmo da Divisão, $r_1 \times 10 = q_2 \times b + r_2$, $0 \leq r_2 < b$, donde

$$\frac{r_1}{10b} = \frac{q_2}{100} + \frac{r_2}{100b},$$

e portanto

$$\frac{a}{b} = \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{100} + \frac{r_2}{100b}.$$

Para as demais casas, continuamos semelhantemente este processo. Não podemos garantir contudo que o processo acima acabe, ou seja, que em algum momento iremos chegar a um resto zero e, a partir daí, continuar obtendo dígitos zero. Mas podemos garantir que, se nunca obtivermos resto zero, então o processo nunca vai acabar e estaremos gerando infinitos restos não nulos. Daí, com certeza algum resto vai se repetir, pois os restos só podem ser iguais a $1, 2, ..., b-1$, e portanto, no máximo na $b-$ésima divisão estaremos repetindo um resto. A partir do momento em que um resto se repete, todas as próximas divisões vão se repetir, e a lista de dígitos será periódica. ▲

Exemplo 46 -

Continuemos a determinar a expansão decimal de 17/37 iniciada no Exemplo 44: lá chegamos a

$$\frac{17}{37} = \frac{4}{10} + \frac{5}{100} + \frac{35}{3700},$$

com $35/3700 < 1/100$ e restos sucessivamente iguais a $r_1 = 22$, $r_2 = 35$. Daí:

$$\begin{aligned}\frac{35}{3700} &= \frac{1}{1000} \times \frac{350}{37} = \frac{1}{1000} \times \frac{9 \times 37 + 17}{37} \\ &= \frac{1}{1000}\left(9 + \frac{17}{37}\right) = \frac{9}{1000} + \frac{17}{37000},\end{aligned}$$

donde $r_3 = 17$. Nossa próxima divisão seria 170 por 37, que foi a primeira divisão que efetuamos.

Conclusão: vamos obter $r_4 = 22$, $r_5 = 35$, $r_6 = 17$, donde concluímos que a expansão decimal de 17/37 é de fato periódica: $0,459459459... = 0,\overline{459}$.

Corolário 4 -

*O processo descrito na demonstração da proposição acima **nunca** gera período 9 (ou 99, ou 999, etc.).*

Prova: A prova é por absurdo. Suponha que $a/b < 1$ e que pelo processo descrito acima tenhamos chegado a $a/b = 0.a_1...a_2999... = 0,a_1...a_2\overline{9}$. Isto significa que fomos gerando quocientes $a_1, ..., a_s$ e respectivos restos $r_1, ..., r_s$ e que, a partir daí, digamos, nas próximas t etapas, obtivemos:

$$\begin{aligned}10 \times r_s &= 9b + r_{s-1}, \text{ com } 0 < r_{s-1} < b \\ 10 \times r_{s+1} &= 9b + r_{s-2}, \text{ com } 0 < r_{s-2} < b \\ &\dots \\ 10 \times r_{s+t-2} &= 9b + r_{s-t-1}, \text{ com } 0 < r_{s-t-1} < b \\ 10 \times r_{s+t-1} &= 9b + r_{s-t}, \text{ mas agora } r_{s-t} = r_s,\end{aligned}$$

o que nos garante que a partir de agora o bloco de t quocientes iguais a 9 vai se repetir, caracterizando assim período 9 para a expansão decimal de a/b. Somando as t igualdades acima, obtemos:

$$\begin{aligned}10(r_s + r_{s-1} + ... + r_{s-t-1}) &= 9bt + (r_{s-1} + ... + r_{s-t-1} + r_{s+t}) = \\ &= 9bt + (r_{s-1} + ... + r_{s-t-1} + r_s),\end{aligned}$$

donde obtemos

$$9(r_s - r_{s-1} + ... + r_{s+t-1}) = 9bt,$$

ou ainda,

$$r_s - r_{s-1} + ... + r_{s+t-1} = bt,$$

o que é absurdo, pois cada resto é estritamente menor do que b, e como são t restos na igualdade acima, com certeza temos

$$r_s - r_{s-1} + ... + r_{s+t-1} < bt.$$

Assim, o processo de divisões sucessivas nunca gera período só formado por 9's. ▲

Exercício 40 -

Determine a expansão decimal do racional $8/15$, *mostrando que ela é infinita periódica e concluindo que nem sempre o primeiro dígito após a vírgula faz parte do período. Tente explicar por quê.*

Definição 19 -

Dizemos que, numa dízima periódica da forma

$$0, a_1 a_2 ... a_s \overline{c_1 c_2 .... c_t},$$

os dígitos $a_1, ..., a_s$ *constituem a* ***parte não periódica*** *da dízima, e neste caso dizemos que a dízima é* ***composta.***

Quando a dízima periódica tem a forma

$$0, \overline{c_1 c_2 .... c_t},$$

dizemos que ela é ***simples.***

Exemplo 47 -

$0, \overline{12}$ *é uma dízima simples, enquanto que* $0, 235\overline{74}$ *é uma dízima composta.*

Exercício 41 -

Prove que se c_1, $c_2, ...,$ c_t *são dígitos não todos iguais a 9 então a expansão decimal do racional*

$$\frac{c_1 c_2 ... c_t}{\underbrace{9...9}_{t}}$$

é precisamente $0, \overline{c_1 c_2 ... c_t}$.

Tratemos agora da recíproca: será que toda lista de dígitos infinita e periódica de período diferente de 9 (ou 99 ou 999 ou ...) é expansão decimal de algum racional?

Inicialmente, é claro que toda expansão decimal finita (ou seja, infinita periódica de período 0) é igual a um número racional:

$$0, a_1 a_2 ... a_n = \frac{a_1}{10} + ... + \frac{a_n}{10^n} = \frac{a_1 \times 10^{n-1} + a_2 \times 10^{n-2} + ... + a_n}{10^n} \in \mathbb{Q}$$

Exercício 42 -

Prove a recíproca do Exercício 41, mostrando que se um racional $a/b < 1$*tem para expansão decimal* $0, \overline{c_1 c_2 ... c_t}$, *com* c_1, $c_2, ...,$ c_t *dígitos nem todos iguais a 9, então necessariamente*

$$\frac{a}{b} = \frac{c_1 c_2 ... c_t}{\underbrace{9...9}_{t}},$$

ou seja,

$$\frac{a}{b} = \frac{c_1 c_2 ... c_t}{10^t - 1}$$

[Sugestão: Utilize um racicínio análogo ao utilizado na demonstração do Corolário 4]

Exercício 43 -

i) Determine o racional que tem representação decimal igual a $0.\overline{123456}$, *expressando-o através de uma fração irredutível.*

ii) Determine o racional que tem representação decimal igual a $5.\overline{123456}$, *expressando-o através de uma fração irredutível.*

Passemos agora a abordar as expansões decimais periódicas infinitas de período diferente de 9 (ou 99 ou 999 ou ...). Dividiremos este estudo em dois casos: dízima periódica simples e dízima periódica composta.

1º caso (dízima periódica simples). No Exercício 42, vimos que se existir um racional $a/b < 1$ cuja expansão decimal tem a forma $0,\overline{c_1c_2....c_t}$ então ele é necessariamente o racional $c_1c_2...c_t/(10^t - 1)$. Assim, $c_1c_2...c_t/(10^t - 1)$ é o único candidato a ter expansão decimal igual a $0,\overline{c_1c_2....c_t}$. E, pelo Exercício 41, temos que de fato a expansão decimal de $c_1c_2...c_t/(10^t - 1)$ é $0,\overline{c_1c_2....c_t}$. ▲

Exemplo 48 -

O raciocínio desenvolvido acima nos garante que a dízima $0,121212...$ *é proveniente do racional*

$$\frac{12}{99} = \frac{4}{33}.$$

E, de fato:

$$\begin{aligned} 40 &= 1 \times 33 + 7 \\ 70 &= 2 \times 33 + 4, \end{aligned}$$

donde concluímos que $r_1 = 7$, $r_2 = 4$, $r_3 = 7$, *e a expansão decimal de* $4/33$ *é então* $0,121212...$.

2º caso (dízima periódica composta). Verifiquemos se existe um racional $a/b < 1$ cuja expansão decimal tem a forma $0,a_1a_2...a_s\overline{c_1c_2....c_t}$ (dízima periódica composta). Se este fosse o caso, teríamos

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{10} + ... + \frac{a_s}{10^s} + \frac{d}{10^s b},$$

onde d é um resto de divisão por b, portanto satisfazendo $d/10^s b < 1/10^s$, ou ainda, $d/b < 1$; daí, escrevendo

$$\frac{d}{10^s b} = \frac{1}{10^s} \times \frac{d}{b},$$

vamos gerar, a partir de d/b, os dígitos $c_1, c_2, ...c_t$. Pelo mesmo raciocínio desenvolvido no Exercício 41, sabemos que

$$\frac{d}{b} = \frac{c_1...c_t}{99...9},$$

e portanto se existirem tais inteiros a e b, deverá ocorrer

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{a_1}{10} + ... + \frac{a_s}{10^s} + \frac{d}{10^s b} = \\ &= \frac{a_1}{10} + ... + \frac{a_s}{10^s} + \frac{1}{10^s}\frac{c_1...c_t}{\underbrace{99...9}_{t}}. \end{aligned}$$

Não é difícil, a partir daqui, conversar-se que a expansão decimal do racional

$$\frac{a_1}{10} + ... + \frac{a_s}{10^s} + \frac{1}{10^s}\frac{c_1...c_t}{10^t - 1}$$

é de fato $0, a_1a_2...a_s\overline{c_1c_2....c_t}$.

Finalmente, observamos que

$$\begin{aligned}
& \frac{a_1}{10} + ... + \frac{a_s}{10^s} + \frac{1}{10^s}\frac{c_1...c_t}{10^t - 1} \\
= \; & \frac{a_1 \times 10^{s-1} + a_2 \times 10^{s-2} + ... + a_{s-1} \times 10 + a_s}{10^s} + \frac{1}{10^s}\frac{c_1...c_t}{10^t - 1} \\
= \; & \frac{a_1...a_s}{10^s} + \frac{c_1...c_t}{10^s(10^t - 1)} = \\
= \; & \frac{a_1...a_s \times (10^t - 1)}{10^s(10^t - 1)} + \frac{c_1...c_t}{10^s(10^t - 1)} = \\
= \; & \frac{a_1...a_s \times 10^t + c_1...c_t - a_1...a_s}{10^s(10^t - 1)} = \\
= \; & \frac{a_1...a_sc_1...c_t - a_1...a_s}{10^s(10^t - 1)}.
\end{aligned}$$

Acabamos então de demonstrar o seguinte

Teorema 4 ***Transformação de dízimas periódicas em frações ordinárias -***
Sejam $s \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{N}^*$ e $a_1, ..., a_s, c_1, ..., c_t$ dígitos. A dízima periódica $0, a_1a_2...a_s\overline{c_1c_2....c_t}$ é um número racional (menor do que 1); mais precisamente:

$$0, a_1a_2...a_s\overline{c_1c_2....c_t} = \frac{a_1}{10} + ... + \frac{a_s}{10^s} + \frac{c_1...c_t}{\underbrace{99...9}_{t}\underbrace{0...0}_{s}}.$$

Ou equivalentemente,

$$0, a_1a_2...a_s\overline{c_1c_2....c_t} = \frac{a_1...a_sc_1...c_t - a_1...a_s}{\underbrace{99...9}_{t}\underbrace{0...0}_{s}}$$

Ou seja, repetindo a regra que aparece nos livros de 1ºgrau:

Para numerador do racional toma-se a parte não periódica seguida do período menos a parte não periódica. E, para denominador, tomamos um número de $9's$ igual ao número de dígitos do período seguido de um número de $0's$ igual ao número de dígitos da parte não periódica.

Resumindo:

$$0,a_1 \ldots a_s\overline{c_1 \ldots c_t} = \frac{a_1 \ldots a_s c_1 \ldots c_t - a_1 \ldots a_s}{\underbrace{99 \ldots 9}_{t}\underbrace{0 \ldots 0}_{s}};$$

s = número de termos da parte não periódica
t = número de termos da parte periódica.

Exercício 44 -

i) Determine o racional que tem representação decimal igual a $0,12\overline{123456}$, *expressando-o através de uma fração irredutível.*

ii) Determine o racional que tem representação decimal igual a $5,12\overline{123456}$, *expressando-o através de uma fração irredutível.*

Exercício 45 -

Pesquise nos livros de Ensino Fundamental como é feita a dedução da regra que transforma uma dízima periódica em um racional. A seguir faça uma discussão, comparando a maneira vista acima com a maneira exposta nos livros e atentando para o seguinte aspecto:

São ambas as deduções corretas matematicamente? Mais precisamente, existe algum "deslize" na demonstração utilizada naqueles livros?

-se não: por que será que aqui foi feita uma demonstração mais complicada?

-se sim: precisamente em que ponto(s)?

3.7 Considerações finais importantes

a) Ampliando um conceito: um ponto de vista característico do método Matemático

A expansão de um número natural em base 10 permite representar **qualquer** número natural através de uma **lista finita** constituída pelos dígitos $0, 1, \ldots, 9$. Nas seções anteriores vimos que existe uma forma natural, decorrente da aplicação do algoritmo da divisão de Euclides, de estender a expansão decimal dos naturais para os racionais. No entanto, para que este processo venha a representar **qualquer** racional, temos que **admitir** expansões com **infinitos termos**. Este fato introduz uma diferença **marcante** entre a representação decimal de um natural e a representação decimal de um racional positivo. Em particular, decorre daí que, diferentemente do que acontece com os inteiros, embora alguns racionais sejam também representáveis por listas finitas de dígitos, muitos outros deles só são representáveis por listas envolvendo um número **infinito de dígitos.**

O ponto aqui a se enfatizar é o seguinte: se só aceitássemos como representação de um número uma lista finita de símbolos, ficaríamos então impossibilitados de dispor de representações para todos os racionais (pelo menos através da representação decimal). Não é difícil de imaginar que, se assim o fizéssemos, surgiriam muitas dificuldades no trato dos racionais; em especial, surgiriam tremendas dificuldades na realização de diversas operações envolvendo estes números. Assim, por uma questão teórico/prática, digamos assim, é extremamente conveniente que ampliemos o universo das representações decimais finitas dos inteiros passando a incluir representações decimais infinitas e permitindo, assim, representações decimais para todos os racionais. E é, de fato, como todos sabem, assim que se procede no tratamento dado a este assunto.

Gostaríamos de mencionar que este ponto de vista, ou seja, o de ampliar, por conveniência teórica, uma certa definição ou conceito, com o objetivo de incluir novos casos, considerados relevantes para a teoria, é muito característico do método Matemático. Teremos ocasião de adotá-lo novamente na construção dos números reais. Assim, a compreensão deste ponto de vista, exemplificado aqui na passagem da representação decimal dos inteiros para os racionais, serve como um preparo importante para o que será feito adiante quando formos "construir" os números reais.

b) A lista $0,99999999....$

Vimos, na teoria desenvolvida anteriormente, que todo racional é representável por uma lista finita ou lista periódica, envolvendo os 10 dígitos 0, 1, 2, ..., 9 e que, no caso de a lista ser periódica, ela jamais será uma lista de período 9. Surge daí a pergunta fundamental:

> **Questão:** a lista $0,999...$ representa algum número racional?

É claro que a questão anterior se aplica a qualquer lista periódica com 9 terminante. No momento ainda não temos condições de dar uma resposta rápida, e ao mesmo tempo satisfatória, a esta questão. O leitor terá de aguardar o estudo dos reais, que faremos, com detalhes adiante; seremos então lá capazes de dar uma resposta adequada a esta questão, do ponto de vista matemático, de maneira correta e rigorosa e, do ponto de vista psicológico, de maneira plenamente satisfatória.

3.8 Leitura Complementar

A seguir estabelecemos condições que nos permitem reconhecer se a expansão periódica de um racional menor do que um vai ser uma dízima periódica simples ou composta. Salientamos no entanto que o que estudaremos aqui não será necessário para os capítulos seguintes.

Exercício 46 -
Prove que toda dízima periódica simples de período diferente de zero e de 9 (ou 99, ou 999 ou...) quando expressa por uma fração irredutível, tem denominador que não é divisível nem por 2 nem por 5.

Corolário 5 -
Uma dízima periódica composta que possui s termos na parte não periódica, quando escrita de forma que sua parte não periódica seja a "mais econômica" possível, é igual a uma fração irredutível cujo denominador é divisível por 2^s ou 5^s mas não por potências mais elevadas de 2 ou 5.

Prova: Consideremos a dízima composta $0,a_1...a_s\overline{c_1...c_t}$, onde estamos aqui supondo que $a_1,...,a_s$ constituem a parte não periódica mais econômica possível, isto é, a_s não é igual a c_t. Pelo Teorema, tal dízima pode ser escrita como

$$0,a_1...a_s\overline{c_1...c_t} = \frac{a_1...a_sc_1...c_t - a_1...a_s}{\underbrace{99...9}_{t}\underbrace{0...0}_{s}}. \qquad (*)$$

Afirmamos inicialmente que o numerador em $(*)$ não pode ser simultaneamente divisível por 2 e 5. De fato: se o numerador em $(*)$ é divisível por 2 e 5 simultaneamente, então ele é divisível por 10, o que implica $a_1...a_sc_1...c_t - a_1...a_s = 10k$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Daí temos que $c_t = a_s$, absurdo.

Concluímos que, como o numerador em $(*)$ não pode ser simultaneamente divisível por 2 e 5, se o racional em $(*)$ não for uma fração irredutível então o denominador em $(*)$ só poderá ser simplificado com potências de 2 ou com potências de 5, nunca de ambos. E, obviamente, a potência máxima não poderá ultrapassar o número de zeros que possui o denominador, no caso s, uma vez que

$$\underbrace{99...9}_{t}\underbrace{0...0}_{s} = \underbrace{99...9}_{t}.2^s.5^s,$$

e $\underbrace{99...9}_{t} = 10^t - 1$ não é divisível nem por 2 nem por 5. ▲

Afirmamos que as recíprocas do exercício e do corolário acima são também verdadeiras:

Corolário 6 -

Uma fração irredutível a/b positiva e menor do que 1 cujo denominador b não seja divisível nem por 2 nem por 5, é igual a uma dízima periódica simples.

Exemplo 49 -

$$\frac{10}{23} = 0.\overline{769230}; \qquad \frac{6}{21} = 0.\overline{285714}$$

Prova do Corolário: Temos $mdc(b, 10) = 1$, já que o denominador b não é divisível nem por 2 nem por 5). Sabemos também que na divisão de um número inteiro por b só há b possíveis restos. Assim, considerando as infinitas divisões de potências de 10 por b, vemos que necessariamente existe um resto que se repete infinitas vezes. Em particular, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ com $n_1 > n_2$ tais que 10^{n_1} e 10^{n_2} têm o mesmo resto na divisão por b. Ou ainda:

$$\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}, \exists q_1, q_2 \in \mathbb{N}, \ 10^{n_1} - q_1 b = 10^{n_2} - q_2 b,$$

donde obtemos:

$$10^{n_1} - 10^{n_2} \text{ é divisível por } b.$$

E, como $n_1 > n_2$, podemos ainda escrever, pondo $n = n_1 - n_2$:

$$10^{n_1} - 10^{n_2} = 10^{n_2}(10^n - 1),$$

donde concluios que b é um divisor de $10^{n_2}(10^n - 1)$. Como $mdc(b, 10) = 1$ implica $mdc(b, 10^{n_2}) = 1$, concluimos que necessariamente b divide $(10^n - 1)$ (esta última afirmação é um exercício de Aritmética para o leitor). Ou seja, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$10^n - 1 = bk$$

Daí vem:

$$\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk} = \frac{ak}{10^n - 1}.$$

Ainda, como $a/b < 1$, temos $ak < 10^n - 1$, de modo que a representação decimal do inteiro ak envolve no máximo n dígitos, digamos, $ak = c_1...c_n$.

Mas então

$$\frac{a}{b} = \frac{c_1...c_n}{10^n - 1} = 0, \overline{c_1...c_n}. \qquad ▲$$

Corolário 7 -

Seja $a/b \in [0,1)$ uma fração irredutível, e suponhamos que b seja divisível por uma potência de 2 ou 5. Mais precisamente sejam m_1 e m_2 as potências de 2 e 5 na fatoração de b. Se $m = \max\{m_1, m_2\}$ então a/b é uma dízima periódica composta, com m termos na parte não periódica.

Prova: Da hipótese temos $b = 2^{m_1}5^{m_2}k$, com $mdc(k, 10) = 1$.
Multiplicando a/b por 10^m temos:

$$\begin{aligned}\frac{10^m a}{b} &= \frac{2^m 5^m a}{2^{m_1}5^{m_2}k} \\ &\overset{m=\max\{m_1,m_2\}}{=} \frac{2^{m-m_1}5^{m-m_2}a}{k} \\ &= t + \frac{r}{k},\end{aligned}$$

onde r é o resto da divisão de $2^{m-m_1}5^{m-m_2}a$ por k, e portanto $r/k \in [0,1)$.

Daí, escrevendo $r/k = a_1/b_1$ com $mdc(a_1, b_1) = 1$ (isto é escrevendo r/k em sua forma irredutível), temos que b_1 é divisor de k. Como $mdc(k, 10) = 1$, temos também $mdc(b_1, 10) = 1$. Mas então, pelo Corolário 6, temos que $\frac{a_1}{b_1}$ é uma dízima periódica simples, digamos:

$$\frac{a_1}{b_1} = 0,\overline{c_1c_2...c_n}.$$

Daí:

$$\begin{aligned}10^m\frac{a}{b} &= t + \frac{r}{k} = t + \frac{a_1}{b_1} = t + 0,\overline{c_1c_2...c_n} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{t}{10^m} + \frac{1}{10^m}0,\overline{c_1c_2...c_n} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{t}{10^m} + 0.\underbrace{0...0}_{...m...}\overline{c_1c_2...c_n} \qquad (1)\end{aligned}$$

Note agora que

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} &\in [0,1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow t + \frac{r}{k} = \frac{10^m a}{b} < 10^m \overset{r/k<1}{\Rightarrow} \\ &\Rightarrow t < 10^m \Rightarrow \\ &\Rightarrow t \text{ envolve em sua expansão decimal no máximo } m \text{ dígitos} : t = a_1...a_m,\end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} \overset{(1)}{=} \frac{t}{10^m} + 0,\underbrace{0...0}_{...m...}\overline{c_1c_2...c_n} &= \\ &= 0,a_1...a_m + 0,\underbrace{0...0}_{...m...}\overline{c_1c_2...c_n} = \\ &= 0,a_1...a_m\overline{c_1c_2...c_n},\end{aligned}$$

comprovando que a/b envolve m dígitos na parte não periódica ▲

Exemplo 50 -

$5500 = 2^2 5^3 11$, *e portanto* $m = 3$. *E, de fato,*

$$\frac{1234}{10^4} + \frac{54}{10^4 99} = \frac{679}{5500} = 0.123\,45.$$

Resumindo:

- Uma fração irredutível dá origem a uma dízima periódica simples se e só se seu denominador não é divisível nem por 2 nem por 5.
- Uma fração irredutível dá origem a uma dízima periódica composta com m termos na parte não periódica se e só se seu denominador é divisível por 2^m ou 5^m e não por potências mais elevadas de 2 ou 5.

Observação: Note que a demonstração do resultado acima não nos garante que $a_m \neq c_n$ e que portanto o período podia estar começando "mais cedo", ou seja, talvez a parte não periódica não seja "a mais econômica". Deixamos ao leitor a análise se é possível de fato garantir que $a_m \neq c_n$.

4 NOÇÕES BÁSICAS SOBRE A RETA EUCLIDIANA

Neste capítulo fazemos a apresentação e discussão de alguns fatos e resultados básicos da Geometria Euclidiana, relativos à noção de reta. A razão desta breve incursão em Geometria Euclidiana é que, no capítulo seguinte, vamos considerar o problema da medição de segmentos de reta e, para que possamos fazer isto de maneira matematicamente consistente, precisamos ter uma descrição matemática da reta, como feito na Geometria Euclidiana.

A Geometria Euclidiana é um dos campos matemáticos mais importantes que existem, sendo seu estudo iniciado desde as séries iniciais do Ensino Fundamental. Apesar disso, nos tempos atuais, o aluno chega à Universidade tendo um conhecimento apenas intuitivo da reta euclidiana. Isso não só lhe impede de ver o porquê da adjetivação "euclidiana" como não lhe dá um embasamento que lhe permita provar teoremas que estabelecem relações precisas entre a reta e o conjunto dos números reais.

Uma das principais propriedades da reta euclidiana, ao menos para o estudo dos números reais, é a sua *continuidade topológica.* Com efeito: a reta euclidiana é o mais importante exemplo de *continuum topológico.* O propósito maior deste capítulo é explicar o significado disso.

Em outros estudos o aluno tratará de outros aspectos da reta. Por exemplo, estudando outros tipos de retas, como a reta projetiva. Também ficará para outras matérias o estudo de outros exemplos de *continuum.*

4.1 Congruência e ordem entre segmentos de reta

Inicialmente fixemos algumas notações já bastante consagradas: utilizaremos letras latinas maiúsculas para pontos $(P, Q, ...)$, e denotaremos por PQ o segmento de extremos P e Q.

Definição 20 -
Na reta euclidiana, dizemos que dois segmentos de reta são **congruentes** *se for possível superpô-los exatamente.*

A operação de "superposição" é uma idealização matemática de uma construção geométrica, prática, que podemos fazer com a ajuda de um compasso: dados dois segmentos P_1Q_1 e P_2Q_2, para sabermos se estes segmentos são congruentes, colocamos uma das pontas do compasso em P_1 e a outra em Q_1, determinando uma abertura para o compasso; a seguir, mantendo esta abertura do compasso, colocamos uma das pontas do compasso em P_2 e verificamos se a outra ponta coincide com Q_2. Nestas operações de determinação da abertura do compasso e de verificação se a ponta do compasso coincide ou não com o ponto da reta é que está embutida a "idealização matemática" à qual nos referimos acima.

Também é possível estabelecer uma ordem entre dois segmentos AB e CD:

Definição 21 -
*Dizemos que um segmento AB é **menor ou igual ao segmento** CD (ou **menor que o segmento** CD) se, com a ajuda do compasso, for possível deslocar/transladar o segmento AB de forma a deixar o novo segmento obtido $A'B'$ totalmente contido (ou estritamente contido) no conjunto CD.*

Notação: $AB \subseteq CD$ quando AB é menor ou igual a CD (ou $AB \subset CD$ quando AB é menor que CD).

4.2 Algumas palavras sobre "construções com régua e compasso".

O estudo dos objetos geométricos planos envolve a construção de linhas retas e curvas. Para isso se usam instrumentos de vários tipos. Esses instrumentos variaram bastante ao longo dos tempos e das civilizações. Por exemplo, os geômetras e agrimensores da Civilização Egípcia tinham como instrumento de trabalho uma corda na qual tinham sido feitos nós uniformemente espaçados.

Quando, lá por volta de 500 a.C., os gregos iniciaram o estudo científico da Geometria, como sua cultura tinha em alta estima a simplicidade, elegeram como instrumentos geométricos preferidos a régua e o compasso, pois estes são os instrumentos que nos permitem construir as linhas mais simples possíveis: retas e círculos. Alguns gregos, entre os quais Arquimedes, aceitavam usar outros instrumentos.

Euclides – em seu livro "Elementos", escrito por volta de 300 a.C. e que por quase 2000 anos ficou sendo o mais importante livro de Matemática em boa parte do mundo civilizado – adotou o costume já tradicional de permitir apenas o uso de régua e compasso. Dada a sua enorme autoridade, esses instrumentos (na verdade, suas "traduções matemáticas", passaram a ter um caráter oficial, e as correspondentes construções passaram a ser chamadas de "construções euclidianas", hoje mais conhecidas como "construções com régua e compasso".

Assim, de um modo inicial e grosseiro, as construções euclidianas são as construções geométricas que podemos fazer com uma régua e um compasso. A função maior da régua é estabelecer colinearidade, e a do compasso é estabelecer equidistância.

O compasso não serve apenas para desenhar círculos. Por exemplo, podemos usar suas pontas para transportar distâncias, e com um pouco de criatividade, somos capazes de inventar inúmeros outros usos geométricos para o mesmo. Isso levou os próprios gregos a delimitarem esses usos. Por exemplo, quanto ao uso do compasso, os gregos não permitiam que o mesmo fosse levantado do plano onde estava sendo feita a construção.

A régua euclidiana também tem restrições: ela não pode ser graduada, ou seja, a régua euclidiana não pode ter marcas, como as réguas graduadas em centímetros e milímetros que estamos acostumados a usar. Semelhante ao que foi feito com o compasso, o uso dessa régua não graduada também deve obedecer restrições. Por exemplo, não podemos "arrastar" a régua.

É perfeitamente possível darmos uma caracterização formal e rigorosa do que são as "construções euclidianas", mas o esforço e grau de abstração para tal é excessivamente grande para os propósitos deste texto. Além disso, as construções que aqui consideraremos serão bastante simples e intuitivas, não deixando margem para que se duvide da possibilidade de serem matematicamente validadas. No entanto, não podemos deixar de ressaltar que existem muitas questões delicadas e sutis, algumas das quais constituiram desafios matemáticos por mais de 2000 anos, cujo enfrentamento exige uma formulação matematicamente precisa dessas construções, acompanhada de uma rigorosa teoria.

Um desses famosos desafios foi posto já pelos gregos da Antigüidade e pedia a trisseção de um ângulo, ou seja, a divisão de um ângulo qualquer em três partes iguais. Os próprios gregos resolveram esse problema fazendo uso de outros instrumentos além da régua e do compasso. Contudo, a resolução euclidiana – no sentido "oficial" e tradicional: somente régua não graduada e compasso – resistiu por muitos séculos, até que, em torno de 1840, Pierre L. Wantzel, (depois de muitas noites passadas à base de café e ópio!), mostrou que existem ângulos que **não** podem ser trisseccionados euclidianamente.

Que fique bem claro ao leitor que o costume de se considerar um problema geométrico como resolvido somente quando sua solução for passível de ser obtida através de uma construção euclidiana é apenas uma tradição, e que esta tradição está obsoleta. A nossa posição neste texto será a de adotar soluções euclidianas quando as mesmas existirem e forem simples (encontraremos um exemplo dessas situações logo a seguir, quando tratarmos da divisão de um segmento qualquer de reta em um número dado qualquer de partes iguais), caso contrário, não hesitaremos em partir para construções não-euclidianas (como, por exemplo, ocorrerá ao termos de dividir um ângulo qualquer em um número dado qualquer de partes iguais).

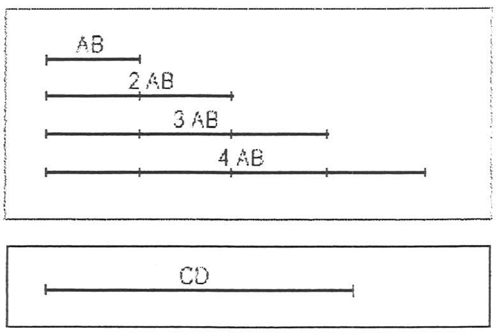
4.3 Propriedade arquimediana da reta

A partir de um segmento AB, sempre é possível, com a ajuda do compasso, "emendar" várias translações (ou deslocamentos, ou cópias) de AB; diremos que os segmentos assim formados são o dobro, o triplo, etc. de AB.

Notação: Denotamos tais segmentos por $2AB$, $3AB$, etc. e, em geral, nAB se foram emendadas n cópias de AB.

A propriedade da reta euclidiana que a seguir enunciamos é fundamental para que possamos medir, como veremos no próximo capítulo, qualquer segmento de reta:

Propriedade arquimediana -
Dados dois segmentos AB e CD com AB não reduzido a um ponto, sempre é possível, com a ajuda do compasso, "emendar" várias translações do segmento AB, de forma a obter um segmento que é maior do que CD (ou seja, CD é estritamente menor do que este segmento). Em outras palavras, sempre existe um n tal que $CD \subset nAB$.



AB e' menor do que CD, mas
4AB e' MAIOR do que CD

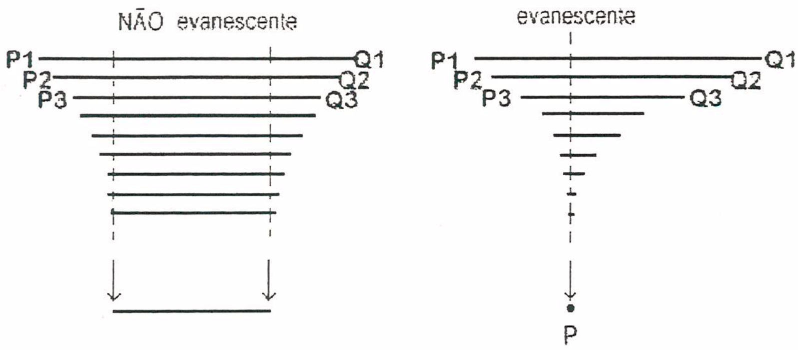
4.4 Postulado do Continuum

As definições que se seguem fornecem o ingrediente básico com o qual podemos enunciar o postulado da continuidade da reta euclidiana.

Definição 22 -
Uma seqüência (infinita) de segmentos P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3, ... *é dita* ***encaixante*** *se para cada* $n \in \mathbb{N}^*$ *tivermos* $P_{n+1}Q_{n+1} \subseteq P_nQ_n$.

Definição 23 -
Uma seqüência (infinita) encaixante de segmentos P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3, ... *é dita* ***evanescente*** *se, dado um segmento qualquer* AB, *com* $A \neq B$, *sempre pudermos encontrar um* n *tal que* P_nQ_n *é menor do que* AB.

As figuras abaixo nos fornecem exemplos de duas seqüências de segmentos encaixantes, uma evanescente e outra não.



Princípio dos segmentos evanescentes / Postulado do Continuum -
Se P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3, ... *é uma seqüência de segmentos evanescentes da reta euclidiana, então existe um, e somente um ponto* P *comum a todos os segmentos desta seqüência.*

Intuitivamente, este postulado ou axioma diz que a reta euclidiana é "contínua", isto é, não tem "buracos". Isso pode ser interpretado ainda mais concretamente dos seguintes modos:
1) Se numa posição qualquer da reta Euclidiana colocássemos as pontas de uma pinça e, depois, começássemos a fechá-la, fazendo-a ficar com abertura sucessivamente 1/10, 1/100 etc da abertura inicial e se continuássemos com este processo eternamente, então teríamos um único ponto que está prensado pela pinça em todas as etapas.

2) Se focássemos um microscópio sobre a reta e sucessivamente formos aumentando a resolução do microscópio em 10 vezes, 100 vezes etc, então, no "infinito" veríamos exatamente um ponto, e isso qualquer que tenha sido a posição inicial do microscópio. Em outras palavras, existirá apenas um ponto que permanecerá no campo de visão do microscópio em todas as etapas.

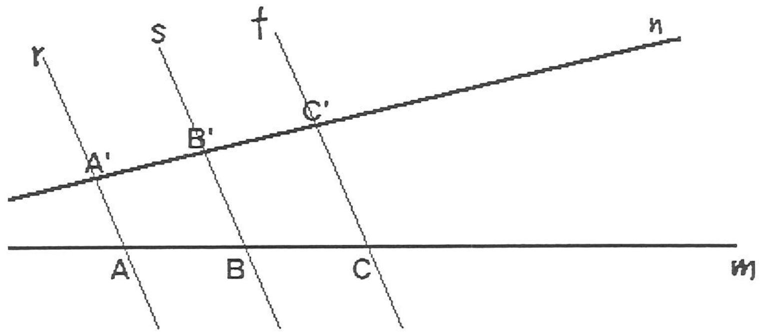
Relacionando ainda com a questão da continuidade, comentamos que, enquanto a Teoria Atômica diz que a matéria é discreta, todas as evidências conhecidas sugerem que o espaço físico se aproxima de um continuum e que, como tal, comprimentos, áreas e volumes, quando aplicados ao espaço físico, sejam melhor modelados por variáveis contínuas.

Finalmente, observamos que a adjetivação "euclidiana" decorre do fato que as propriedades características da reta acima listadas são básicas na Geometria Euclidiana, tendo sido apresentadas pelo famoso matemático grego Euclides em seu igualmente famoso tratado de Geometria, os *Elementos*.

4.5 Divisão de um segmento de reta em partes iguais

Vimos acima que podemos emendar segmentos, formando segmentos que são múltiplos do segmento original. O importante resultado da Geometria Euclidiana enunciado a seguir nos permite dividir um segmento em um número arbitrário de partes iguais:

Teorema 5 ***Teorema de Thales*** *(versão simplificada)* -
Suponha que três retas paralelas r, s, t *cortam as retas* m, n *nos pontos* A, B, C *e* A', B', C', *respectivamente. Então, se* AB *e* BC *são congruentes, são congruentes também os segmentos* $A'B'$ *e* $B'C'$ *(veja Figura)*

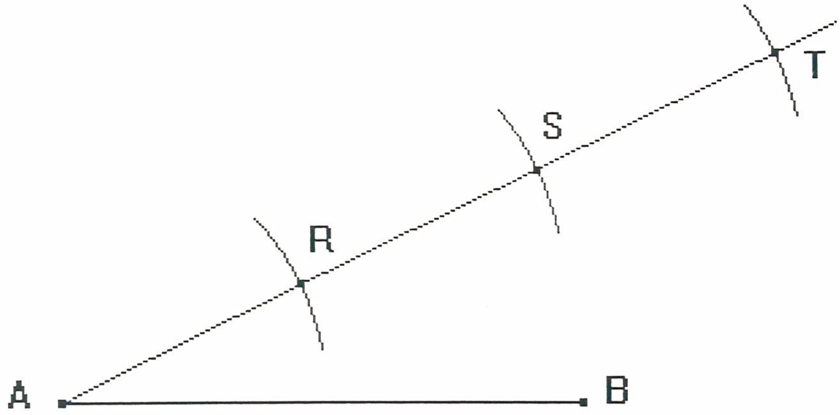


Usaremos, no próximo capítulo, a seguinte aplicação do Teorema de Thales.

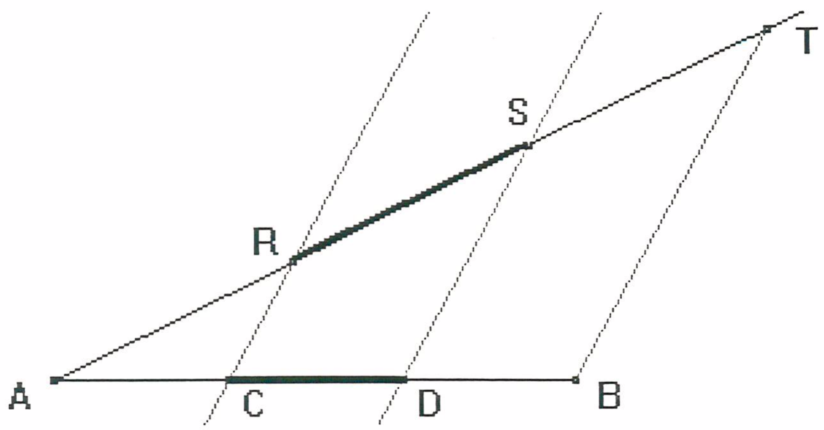
Divisão de um segmento em partes iguais.

Dados um segmento de reta qualquer AB e um número $n \in \mathbb{N}^*$, consegue-se subdividir AB em n segmentos congruentes. Vejamos como o teorema de Thales nos permite fazer isto. Para que o raciocínio fique bem simples, iniciemos com o caso concreto $n = 3$.

Iniciemos com o traçado de uma semi-reta de origem A (acompanhe na figura abaixo), cuja direção não coincida com a direção de AB. A seguir, marcamos sobre tal reta, a partir do ponto A, com o compasso, três segmentos congruentes quaisquer AR, RS e ST:

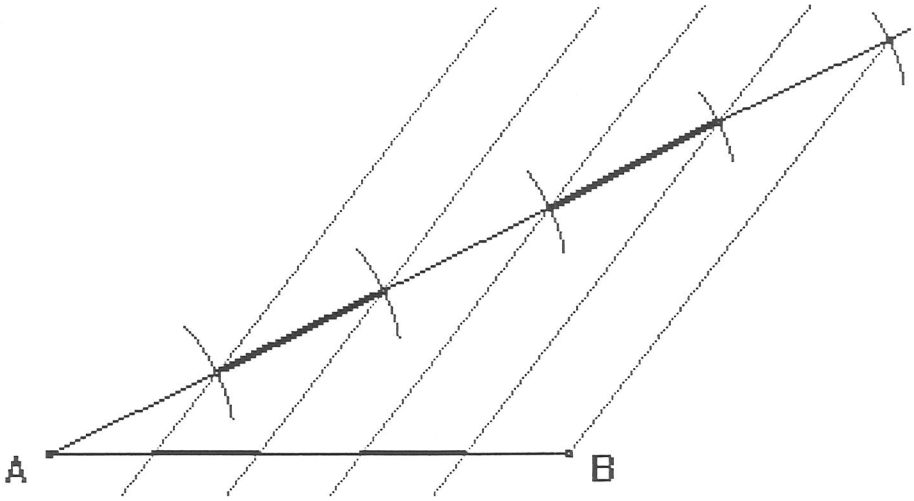


Traçando paralelas, obtemos o ponto D (que é a intersecção entre AB e a paralela a BT passando por S) e o ponto C (que é a intersecção entre AB e a paralela a BT passando por R), conforme a seguinte figura:



Pelo teorema de Thales, é imediato vermos que: AC, CD e DB são congruentes. Assim, dividimos AB em três partes iguais.

Para dividirmos AB em cinco partes iguais fazemos raciocínio análogo: sobre uma semi-reta de origem A e direção diferente de AB, marcamos com o compasso cinco segmentos congruentes e traçamos paralelas de modo semelhante ao feito acima.
A figura abaixo e o teorema de Thales nos mostram que dividimos o segmento AB em cinco partes iguais.



Certamente, o leitor não terá a menor dificuldade em ver que os procedimentos acima são fáceis de modificar para o caso de querermos dividir AB em qualquer outro número de partes iguais, tais como dez, cem, etc.

Notação: $\frac{1}{m}AB$ denotará um segmento obtido dividindo-se o segmento AB em m partes iguais.

5 OS NÚMEROS REAIS ABSOLUTOS

Neste capítulo vamos introduzir a noção de número real absoluto. Com este propósito, inicialmente vamos discutir a idéia fundamental, subjascente à noção de um tal número, que é a idéia de medida de comprimento. Apresentaremos então uma maneira de medir um segmento qualquer de reta através de um processo que denominamos de processo de medição via régua decimal infinita. Como veremos, o conceito de número real absoluto surge naturalmente como o conceito numérico necessário, de fato indispensável, para a validação deste processo.

Todos nós temos uma idéia, ao menos intuitiva, de como efetuar medições. Para realizar uma medida de comprimento (que é com a qual vamos estar interessados neste texto), temos que fixar, para começar, uma unidade de comprimento. Dito de maneira mais matemática, fixar uma unidade de medida de comprimento significa escolher um segmento não nulo da reta euclidiana, dito então também **segmento unitário**. Uma vez escolhido o segmento unitário, medir um segmento qualquer de reta euclidiana significa determinar o número de vezes que o segmento unitário cabe no mesmo.

No nosso dia a dia freqüentemente temos que fazer medições de comprimento. Para isso, fazemos em geral uso de instrumentos muito populares tais como a fita métrica, a trena ou, também, a régua decimal, esta última mais utilizada para fins escolares.

Embora estes instrumentos sejam artefatos construídos para facilitar, na prática, a realização de medidas de comprimento, eles podem ser utilizados como "inspiração" para o tratamento matemático do problema da medição **exata** de segmentos.

E, de fato, nosso texto sobre medição de segmentos apóia-se totalmente nesta inspiração. O que vamos fazer a seguir é construir uma régua decimal **matemática**, que é uma versão, um pouco mais sofisticada, da régua decimal escolar.

Enquanto que na prática nos contentamos em obter medições aproximadas, na Matemática queremos obter medições **exatas**. Por esta razão, temos que dispor de réguas que permitam realizar medidas arbitrariamente pequenas, diferentemente das réguas escolares que permitem medidas com no máximo os milímetros de precisão. A régua matemática terá de ter, portanto, infinitas subdivisões: metros, decímetros, centímetros, milímetros, décimos de milímetros, centésimos de milímetros e assim por diante. Por esta razão, chamamos a régua decimal matemática de Régua Decimal Infinita.

Ressaltamos que a diferença fundamental entre a régua decimal comum e a régua decimal infinita é que, num pedaço qualquer de régua, a primeira tem apenas um número finito de marcações (em geral até os centésimos da unidade de medida) enquanto que a outra tem um número infinito de marcações (possibilitando assim, como veremos adiante, medidas com a precisão que se desejar).

É importante salientar que o que faremos a seguir é uma idealização matemática; no mundo material, jamais conseguiremos construir uma régua com *infinitas* marcações. Isto só é possível em uma "reta abstrata", como a reta euclidiana, apresentada na seção anterior. Será com esta noção abstrata de reta que desenvolveremos um processo matemático de medição.

Para podermos explicar como medir um segmento de reta usando a régua decimal infinita precisamos, antes de mais nada, fazer a construção matemática desta régua. Para construir uma régua (decimal ou não, infinita ou não) precisamos de uma unidade de medida.

5.1 Unidade de medida para a reta euclidiana. Segmento unitário.

Consideremos uma reta euclidiana r, e fixemos sobre r um segmento de reta qualquer, com a única restrição que o mesmo não seja reduzido a um único ponto.

Denotamos tal segmento por δ. O segmento δ é então nossa **unidade de medida**. δ é dito também **segmento unitário**.

> **Convenção:** Para facilitar a visualização da construção que estaremos fazendo, é conveniente sempre imaginarmos a reta r horizontal.

Notação: Denotamos por O a extremidade "esquerda" de δ.

5.2 Construção da Régua Decimal Infinita sobre a reta euclidiana

A contrução desta régua é feita marcando-se, em uma primeira etapa, uma série de pontos de r, que formarão a **rede de graduação unitária** de r, do seguinte modo: o primeiro ponto é simplesmente o ponto extremo direito de δ. Denotamos este ponto por $P(1)$. Para marcarmos o segundo ponto, tomamos um compasso com a abertura do segmento δ (ou seja, tal que suas duas pontas coincidam com os pontos extremos de δ). A seguir colocamos a ponto seca do compasso em $P(1)$ e marcamos com a outra ponta do compasso um ponto de r à direita de $P(1)$. Denotamos este novo ponto por $P(2)$. A seguir colocamos a ponta seca do compasso em $P(2)$ e marcamos com a outra ponta um novo ponto de r, que denotaremos por $P(3)$, à direita de $P(2)$. Repetindo este processo indefinidamente, obtemos um conjunto de infinitos pontos de r:

$$O,\ P(1),\ P(2),\ P(3),\ P(4),\ \ldots,\ P(n),\ \ldots,$$

que constituem a rede de graduação unitária da régua decimal.

- Numa segunda etapa colocamos no compasso uma abertura igual a um décimo do segmento unitário (o que pode ser feito dividindo-se OP em dez partes iguais usando, para isso, por exemplo, a aplicação do Teorema de Thales discutida no capítulo anterior), e marcamos sucessivamente, à direita de O, de maneira inteiramente similar à feita para marcar os pontos da rede unitária, os pontos $P(1/10)$, $P(2/10)$, $P(3/10)$,..., $P(10/10)$, $P(11/10)$,... . Ficamos, assim, com um novo conjunto infinito de pontos:

$$\begin{aligned} O,\ P(\tfrac{1}{10}),\ P(\tfrac{2}{10}),\ P(\tfrac{3}{10}),\ P(\tfrac{4}{10}),\ \ldots,\ P(\tfrac{10}{10}) &= P(1), \\ P(\tfrac{11}{10}),\ P(\tfrac{12}{10}),\ \ldots,\ P(\tfrac{20}{10}) &= P(2), \\ &\quad P(\tfrac{21}{10}),\ P(\tfrac{22}{10}),\ \ldots, \end{aligned}$$

o qual chamaremos de **rede de graduação decimal** da régua decimal infinita.

Note que a rede de graduação decimal, eventualmente, poderá ser representada mais convenientemente usando a representação decimal dos racionais:

$$\begin{aligned} O,\ P(0,1),\ P(0,2),\ P(0,3),\ P(0,4),\ ...,\ P(1,0) &= P(1), \\ P(1,1),\ P(1,2),\ ...,\ P(2,0) &= P(2), \\ & \quad P(2,1),\ P(2,2), ... \\ & \quad \cdots \end{aligned}$$

- Numa terceira etapa usamos o compasso com abertura um centésimo da abertura de δ e marcamos, de maneira inteiramente análoga, os pontos da **rede de graduação centesimal**:

$$\begin{aligned} O,\ P(\frac{1}{100}),\ P(\frac{2}{100}),\ P(\frac{3}{100}),\ P(\frac{4}{100}),\ ...,\ P(\frac{100}{100}) &= P(1), \\ P(\frac{101}{100}),\ P(\frac{102}{100}),\ ...,\ P(\frac{200}{100}) &= P(2), \\ & \quad P(\frac{201}{100}),\ P(\frac{202}{100}),\ ... \\ & \quad \cdots \end{aligned}$$

ou, usando expansão decimal:

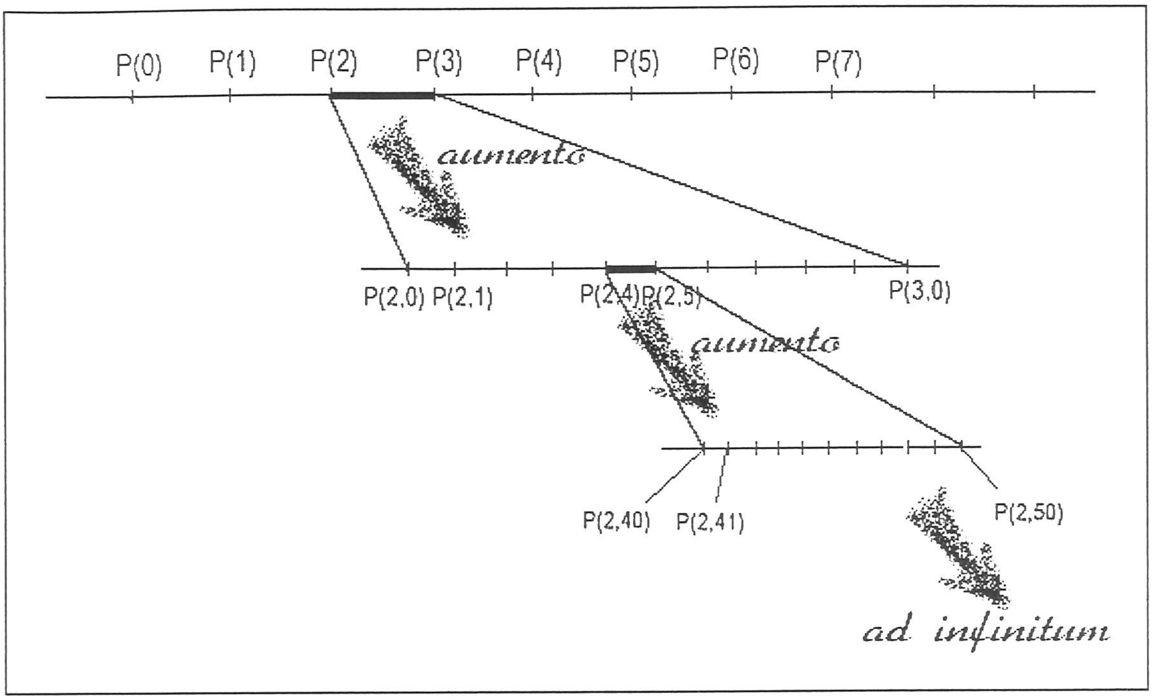
$$\begin{aligned} O,\ P(0,01),\ P(0,02),\ P(0,03),\ P(0,04),\ ...,\ P(1,00) &= P(1), \\ P(1,01),\ P(1,02),\ ...,\ P(2,00) &= P(2), \\ & \quad P(2,01),\ P(2,02), ... \\ & \quad \cdots \end{aligned}$$

E assim por diante: para cada número natural n, construímos ou marcamos os pontos da **rede de graduação $1/10^n$ da régua decimal**:

$$\begin{aligned} O,\ P(\frac{1}{10^n}),\ P(\frac{2}{10^n}),\ P(\frac{3}{10^n}),\ P(\frac{4}{10^n}),\ ...,\ P(\frac{10^n}{10^n}) &= P(1), \\ P(\frac{10^n+1}{10^n}),\ P(\frac{10^n+2}{10^n}),\ ...,\ P(\frac{2\times 10^n}{10^n}) &= P(2), \\ & \quad P(\frac{2\times 10^n+1}{10^n}),\ P(\frac{2\times 10^n+2}{10^n}),\ ... \\ & \quad \cdots \end{aligned}$$

O conjunto de todos esses pontos, ou equivalentemente, a união de todas essas redes, é o que chamaremos de **régua decimal infinita de unidade de medida** δ. Note que este conjunto consta de todos os pontos (à direita de O) da forma $P(m/10^n)$.

Eles serão denominados simplesmente de **pontos graduados da reta** quando não for necessário fazer referência à rede que os originou. O ponto O poderá, eventualmente, ser indicado por $P(0)$.



Podemos resumir isso tudo dizendo que:

A régua decimal infinita de unidade δ consiste de todos os pontos P que estão à direita de O (incluindo o próprio O) e que satisfazem, para algum m e algum n, ambos naturais,

$$OP = m\left(\tfrac{1}{10^n}\delta\right),$$

ou ainda,

$$10^n OP = m\delta.$$

Neste caso, este ponto P é denotado por $P\left(\frac{m}{10^n}\right)$, e portanto concluímos:

$$OP\left(\tfrac{m}{10^n}\right) = \tfrac{m}{10^n}\delta = \tfrac{m}{10^n}OP(1)$$

Exercício 47 -

i) Seja Q um ponto da rede de graduação unitária. É Q também um ponto da rede de graduação decimal? Justifique.

ii) Seja Q um ponto da rede de graduação decimal. É Q também um ponto da rede de graduação centesimal? Justifique.

iii) Em geral: seja Q um ponto da rede de graduação $1/10^n$ da régua decimal. É Q também um ponto da rede de graduação $1/10^{n+1}$? Justifique.

iv) Dados dois pontos consecutivos da rede de graduação $1/10^n$, digamos, $P(m/10^n)$ e $P((m+1)/10^n)$ quantos pontos entre eles existem da rede de graduação $1/10^{n+1}$? Justifique.

Exercício 48 -

V ou F? Justifique. A rede de graduação $1/10^n$ *é um subconjunto da rede de graduação* $1/10^{n+s}$, *para qualquer natural* s.

Exercício 49 -

Determine o segmento que tem para extremos pontos consecutivos da rede de graduação $1/10^{s+1}$ *que está contido no segmento* $P(\frac{r}{10^s})P(\frac{r+1}{10^s})$ *e que contém o ponto* $P(\frac{r+1}{10^s})$, *determinando seus extremos.*

Exercício 50 -

Determine o segmento que tem para extremos pontos consecutivos da rede de graduação $1/10^{s+1}$ *que está contido no segmento* $P(\frac{r}{10^s})P(\frac{r+1}{10^s})$ *e que contém o ponto* $P(\frac{r}{10^s})$, *determinando seus extremos.*

Exercício 51 -

V ou F? Justifique. Em cada pedaço limitado da régua decimal infinita, digamos, entre os pontos $P(\frac{m}{10^n})$ *e* $P(\frac{r}{10^s})$ *existem infinitas marcações, isto é, infinitos pontos graduados.*

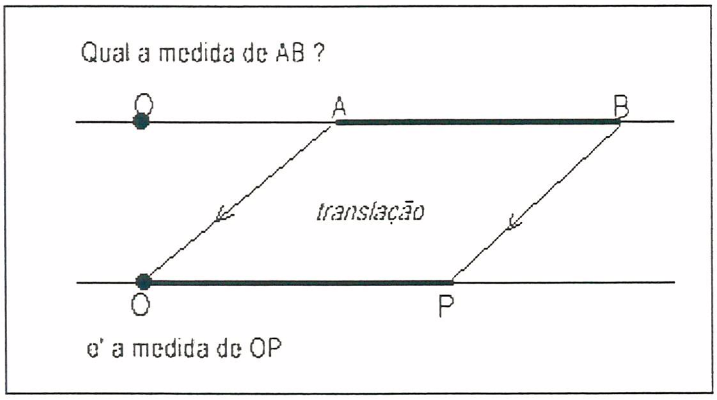
5.3 Medindo segmentos via a Régua Decimal Infinita.

Queremos, a seguir, definir a medida de um segmento de reta qualquer AB. Denotaremos a medida de AB por $|AB|$.

Note que se $AB = \delta$, então obviamente temos que definir $|AB| = 1$. E, se $A = B$, então definimos $|AB| = 0$.

No que segue vamos então supor $A \neq B$.

Com a ajuda do compasso, podemos transladar AB de tal forma que uma das suas extremidades coincida com a origem O e a outra extremidade fique à direita de O. Denotemos este segmento transladado por OP, que é então congruente ao segmento original AB.



Assim, é natural definirmos $|AB| = |OP|$, de modo que nosso problema agora é definir apenas medidas do tipo $|OP|$.

A idéia é desdobrarmos o processo de medição de OP em uma seqüência de etapas procurando, a cada etapa, obter uma medida aproximada do segmento, nos aproximando pela esquerda o mais possível do ponto P por pontos graduados de uma fixada rede da régua decimal infinita. E fazemos isto determinando pontos consecutivos desta rede que cercam P.

Assim, na primeira etapa queremos determinar inteiros consecutivos m e $m+1$ tais que P está entre $P(m)$ e $P(m+1)$ ou P coincide com $P(m)$ (caso em que P é um ponto da rede unitária). E, para descobrir tal inteiro m, fazemos uso da propriedade arquimediana da reta: sabemos que existe $m \in \mathbb{N}$ (que pode eventualmente ser 0) tal que

$$mOP(1) \subseteq OP \subset (m+1)OP(1),$$

ou, equivalentemente,

$$OP(m) \subseteq OP \subset OP(m+1).$$

Se acontecer que $OP(m) = OP$, ou seja, se P é um ponto da rede de graduação unitária, então nosso processo de medição está encerrado. Com efeito: neste caso,

$$m\delta = OP,$$

ou seja, δ cabe exatamente m vezes em OP, de modo que é natural definirmos

$$|OP| = m,$$

já que $|\delta| = 1$.

Suponha que $OP(m) \neq OP$, ou seja,

$$OP(m) \subset OP \subset OP(m+1).$$

Neste caso, podemos apenas dizer que m é uma **medida aproximada** do que imaginamos ser, naturalmente, a medida de OP, e com erro menor do que 1, já que o segmento $P(m)P(m+1)$ é congruente ao segmento δ que tem medida 1. Por outro lado, como $OP(m) \neq OP$, m não pode ser tomado como a medida exata de OP. Por isso, para obter uma melhor aproximação para a "medida de OP", recorremos à rede decimal.

Verificamos então quantos segmentos congruentes a $(1/10)\delta$ cabem, **a partir de** $P(m)$, no segmento OP. Seja a_1 tal número. Note então que $a_1 \in \{0, 1, ..., 9\}$, ou seja, a_1 é um dígito (já que $P \in P(m)P(m+1)$ e $P(m)P(m+1)$ é congruente a δ que tem medida $1 = 10/10$). Ou seja, procuramos um dígito a_1 tal que

$$OP\left(m + \frac{a_1}{10}\right) \subseteq OP \subset OP\left(m + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10}\right),$$

ou seja, tal que

$$OP\left(m, a_1\right) \subseteq OP \subset OP\left(m, a_1 + \frac{1}{10}\right).$$

Se acontecer que $OP(m, a_1) = OP$, então P é um ponto da rede de graduação decimal, e neste caso nosso processo de medição está encerrado, pois podemos dizer que δ cabe exatamente m, a_1 vezes dentro de OP:

$$OP = OP\left(m, a_1\right) = (m, a_1)\delta$$

Assim, é natural definirmos

$$|OP| = m, a_1.$$

No entanto, se $OP(m, a_1) \neq OP$, ou seja, se

$$OP(m, a_1) \subset OP \subset OP\left(m, a_1 + \frac{1}{10}\right),$$

podemos no máximo dizer que m, a_1 é uma aproximação da "medida de OP" com erro menor que $1/10$. Para obtermos então uma melhor aproximação da medida de OP, recorremos à rede de graduação centesimal e repetimos o mesmo raciocínio: procuramos um dígito a_2 que nos indique quantas vezes um segmento congruente a $(1/10^2)\delta$ cabe em OP a partir de $P(m, a_1)$, ou seja, tal que

$$OP\left(m, a_1 + \frac{a_2}{100}\right) \subseteq OP \subset OP\left(m, a_1 + \frac{a_2}{100} + \frac{1}{100}\right),$$

ou ainda, tal que

$$OP(m, a_1a_2) \subseteq OP \subset OP\left(m, a_1a_2 + \frac{1}{100}\right).$$

Concluímos que se $P = P(m, a_1a_2)$, então P é um ponto da rede de graduação centesimal de r, e neste caso é natural definrmos

$$|OP| = m, a_1a_2;$$

mas, se $P \neq P(m, a_1a_2)$, então m, a_1a_2 é apenas um valor aproximado da "medida de OP" com erro menor do que $1/10^2$.

Podemos repetir este processo quantas vezes necessário for. Mas aí nos surge naturalmente a seguinte questão: é verdade que sempre encontraremos, após um número finito de repetições deste processo, digamos n, um racional $m, a_1...a_n$ tal que

$$P = P(m, a_1...a_n)?$$

(Esta pergunta é equivalente à seguinte pergunta: é verdade que qualquer ponto P à direita de O pertence a alguma rede de graduação da reta?)

Se este for o caso, concluímos que δ cabe exatamente $m, a_1...a_n$ vezes dentro de OP de modo que fica naturalmente definida a medida $|OP|$ de OP, a saber:

$$|OP| = m, a_1...a_n.$$

Podemos então dizer que se a reposta à questão acima for positiva (seja qual for o ponto P escolhido), então nosso problema de medição fica completamente resolvido, fazendo uso exclusivamente de números racionais positivos.

No entanto, o exemplo a seguir mostra que a resposta à questão acima é **negativa**:

Exemplo 51 -

Divida a unidade de medida δ em três partes iguais. Seja OP a primeira terça parte. Afirmamos então que P ***não é*** *um ponto graduado da reta.*

Para ver isto, suponha por absurdo que P é um ponto graduado da reta, digamos,

$$P = P(m/10^n)$$

ou seja,

$$|OP| = \frac{m}{10^n}.$$

Por outro lado, como $3OP = \delta$, obtemos também

$$|OP| = \frac{1}{3},$$

de modo que

$$\frac{1}{3} = \frac{m}{10^n}.$$

Mas isto está significando que $1/3$ é uma fração decimal, o que já sabemos, pelo Exercício 19, ser impossível.

Embora o exemplo anterior mostre que os pontos graduados da reta euclidiana não esgotam **todos** os pontos de r que estão à direita de O, afirmamos que este conjunto é "muito grande". O que queremos dizer com "muito grande" está precisado no exercício seguinte, usando novamente a noção de densidade.

Exercício 52 -
Já definimos o que é um conjunto ***numérico*** *denso. Mas podemos considerar densidade em qualquer conjunto no qual esteja definida uma ordem (no sentido de podermos decidir se, dados dois quaisquer elementos distintos do conjunto, um terceiro elemento está ou não* ***entre*** *os dois fixados). Assim, dizemos que um conjunto ordenado A é* ***denso*** *se entre dois elementos distintos $a, a' \in A$ existem infinitos elementos de A.*
Não é difícil convencer-se que a reta euclidiana é um conjunto denso.
Prove que o conjunto dos pontos graduados da reta euclidiana é também um conjunto denso, mas que o conjunto formado por uma só rede de graduação não é um conjunto denso.

Continuemos agora com o nosso processo de medição do segmento OP. Vimos que se o ponto P não é um ponto graduado da reta (caso que pode efetivamente ocorrer, de acordo com o exemplo anterior), o máximo que conseguimos, através do processo de medição via régua decimal infinita, é obtermos valores numéricos para o que seria a medida de OP com erro arbitrariamente pequeno; dito de forma mais precisa: se P não é um ponto graduado da reta, o processo acima garante que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ dado, pode-se construir um racional $m, a_1a_2...a_n$ que é um valor aproximado da "medida de OP" com erro menor do que $1/10^n$. (Mais até: este racional pode ser expresso por uma fração decimal).

Salientamos que este método, pelo fato de fornecer medidas "tão aproximadas quanto se queira" na medição de comprimentos, é suficiente para fornecer respostas adequadas aos problemas **práticos** de medição que surgem nas aplicações técnicas.

No entanto sabemos que, **teoricamente** (pelo menos no caso em que P não é um ponto graduado), $m, a_1, ..., a_n$ jamais poderá ser tomado como a medida exata de OP pois, como $P \neq P(m, a_1...a_n)$, o erro cometido na aproximação da medida de OP jamais será **exatamente** zero. Por outro lado, como para cada n o erro é menor do que $1/10^n$, concluímos que "o erro será zero só quando n for **infinito**"!

Qual o significado disto? A resposta é óbvia: para termos a **medida exata** de OP, no caso em que P não é um ponto graduado da reta, não podemos nos contentar em considerar como expressão exata da medida de OP nenhuma lista finita $m, a_1a_2...a_n$; no entanto, nada nos impede de considerarmos, como expressão exata desta medida, a lista **completa**, portanto infinita,

$$m, a_1a_2...a_k... \tag{5}$$

Assim, a lista infinita está significando um processo de medição que não tem fim.

Como veremos logo a seguir, esta maneira de expressar a medida exata de um segmento vai nos permitir encaminhar de forma inteiramente satisfatória o problema da medição de um segmento qualquer de reta, de sorte que **definimos**, de fato:

$$|OP| = m, a_1a_2...$$

onde, lembramos, $m \in \mathbb{N}$ e $a_1, a_2, ...$ são dígitos.

Com base no que vimos acima podemos também dizer que, se $|OP| = m, a_1a_2...$, então, para cada n, o racional $m, a_1...a_n$ é uma aproximação da medida de OP com erro menor do que $1/10^n$.

Exercício 53 -

Suponhamos que a lista

$$13,01001000100001...$$

tenha sido obtida pelo processo acima para medir um certo segmento. Obtenha racionais que aproximem a medida deste segmento com erro

(i) menor do que 1, $1/10$, $1/100$, $1/1000$.

(ii) menor do que $1/25$.

(iii) menor do que $1/30$.

É conveniente registrarmos, resumidamente, o mais importante de tudo o que fizemos até agora:

Dado um segmento de reta AB, o processo de obtenção da medida de AB via régua decimal infinita associa a AB :
i) o número 0 se $A = B$,
ii) uma lista finita da forma $m, a_1a_2...a_n$, com $m \in \mathbb{N}$ e $a_1, ..., a_n$ dígitos, no caso de AB ser congruente a um segmento OP sendo P um ponto graduado da reta diferente de O,
ii) uma lista infinita da forma $m, a_1a_2....$, com $m \in \mathbb{N}$ e $a_1, ..., a_n, ...$ dígitos, no caso de AB ser congruente a um segmento OP sendo P um ponto não graduado da reta.

Decorre do que obtivemos até aqui que, em particular, se quisermos medir qualquer segmento de reta via o processo da régua decimal infinita, temos que admitir, como uma possibilidade de expressão numérica destas medidas, listas infinitas do tipo (5).

Observe que não é novidade expressarmos um número por uma lista infinita como a (5). Basta lembrar que muitos racionais têm como expansão decimal uma lista infinita (por exemplo $1/3 = 0,333333...$). Na verdade, já vimos que uma infinidade de racionais tem como expansão decimal uma lista infinita.

Consideremos agora a seguinte questão: já aprendemos a dividir um segmento em um número qualquer de partes iguais, e aprendemos também a superpor segmentos. Assim, dados quaisquer naturais a e b com $b \neq 0$, consegue-se construir um segmento OP tal que

$$OP = \frac{a}{b}\delta.$$

Tal processo está salientado no Exercício abaixo.

Exercício 54 -

i) Como Você construiria, usando régua e compasso, um segmento OC tal que $3OC = 2\delta$?

ii) Em geral, fixados dois naturais a e b com $b \neq 0$, como Você construiria, usando régua e compasso, um segmento OP tal que

$$OP = \frac{a}{b}\delta\ ?$$

A questão que podemos nos colocar é a seguinte: se

$$OP = \frac{a}{b}\delta, \tag{6}$$

então é natural esperarmos que

$$|OP| = \frac{a}{b}|\delta| = \frac{a}{b},$$

ou seja, de alguma maneira a lista que geramos geometricamente deve ter alguma coisa a ver com o número racional a/b. E, de fato, afirmamos que o processo de medida de qualquer segmento de reta através da régua decimal infinita que descrevemos acima, para o caso de um segmento da forma , nada mais é do que a tradução geométrica do processo de determinação da expansão decimal do número racional a/b : de fato, note que

$$\begin{aligned} OP(m) &\subseteq OP \subset OP(m+1) \Leftrightarrow \\ m\delta &\subseteq \frac{a}{b}\delta \subset (m+1)\delta \Leftrightarrow \\ m &\leq \frac{a}{b} < m+1, \end{aligned}$$

e portanto $|OP| = m, ...$ se e só se m for a parte inteira de a/b, isto é, se e só se a expansão decimal de a/b é da forma $m, ...$.

Comparemos agora o primero dígito depois da vírgula: por um lado, temos que OP é a justaposição de $OP(m)$ com $P(m)P$, de modo que se $|OP| = a/b$ então

$$|P(m)P| = |OP| - |OP(m)| = \frac{a}{b} - m.$$

Então, ao contarmos o número de vezes que o segmento $\frac{1}{10}\delta$ cabe em OP a partir de $P(m)$ estamos nada mais do que contando o número de vezes que o segmento $\frac{1}{10}\delta$ cabe em $P(m)P$. Daí, escrevendo $\frac{a}{b} = m + \frac{c}{b}$, temos

$$\begin{aligned} OP(m, a_1) &\subseteq OP \subset OP(m, a_1 + \frac{1}{10}) \Leftrightarrow \\ (m + \frac{a_1}{10})\delta &\subseteq \frac{a}{b}\delta \subset (m + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10})\delta \Leftrightarrow \\ m + \frac{a_1}{10} &\leq m + \frac{c}{b} < m + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10} \Leftrightarrow \\ \frac{a_1}{10} &\leq \frac{c}{b} < \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10}, \end{aligned}$$

ou seja, $|OP|$ é da forma $|OP| = m, a_1...$ se e só se a_1 for o dígito da parte decimal de a/b, isto é, se e só se a expansão decimal de a/b é da forma $m, a_1...$. O leitor não terá dificuldades de se convencer que, em geral:

> Se OP é um segmento da forma $OP = \frac{a}{b}\delta$ então a_n é o $n-$ésimo dígito da expressão obtida para a medida de OP pelo método da régua decimal se e só se a_n é o $n-$ésimo dígito da expansão decimal do racional a/b,e portanto podemos escrever
>
> $$|OP| = m, a_1a_2... = \tfrac{a}{b},$$
>
> sem ambigüidade de interpretação.

Abordemos agora o problema inverso: suponha que a lista obtida através do processo de medição de um segmento via régua decimal infinita seja igual à lista que representa a expansão decimal de um racional (pelo Capítulo 3, sabemos que isto acontece quando a lista for finita ou infinita periódica). Podemos então dizer, buscando uma coerência, que este racional é a medida do segmento?

A resposta é sim, e a justificativa é a proposição que segue:

Proposição 2 -

Suponha que pelo processo de medição via régua decimal infinita de um segmento OP tenhamos obtido uma lista finita ou infinita periódica de período não composto só por 9's, e seja p/q o racional cuja expansão decimal é dada por esta mesma lista. Então o segmento unitário δ cabe exatamente p/q vezes dentro de OP, ou seja,

$$\frac{p}{q}\delta = OP$$

Prova: Relembramos que dizer que a expansão decimal de p/q é igual a $m, a_1...a_n(...)$ (com estes parênteses estamos querendo significar que a expansão pode ou não ser finita), significa dizer que cabem em p/q exatamente m inteiros mais $a_1/10$ mais $a_2/100$ mais etc.

E dizer que a medida de OP é igual a $m, a_1...a_n(...)$ significa dizer que em OP cabem m inteiros mais $a_1/10$ mais $a_2/100$ mais etc. cópias de δ.

Ou seja, em OP cabem precisamente p/q cópias de δ, e portanto

$$OP = \frac{p}{q}\delta.$$

Mas então, pelo que discutimos acima, temos $|OP| = a/b$. ▲

É importante salientar que o resultado acima se verifica porque, no método da régua decimal infinita, escolhemos subdividir o segmento unitário δ em potências de dez. Todo o método funcionaria se tivéssemos dividido por exemplo δ em potências de três (gerando as redes de graduação $1/3^n$). No entanto, o leitor é convidado a refletir e concluir que, se este tivesse sido o caso, a proposição acima não seria verdadeira.

Exercício 55 -

Suponha que a lista

$$3,2245245245245... \tag{7}$$

tenha sido obtida através do processo de medição, via régua decimal infinita, de um segmento de reta OP. Prove que

$$32213\,\delta = 9990\,OP.$$

Exercício 56 -

Considere o segmento OB obtido pela divisão de $7OP(23/10)$ em oito partes iguais, ou seja,

$$8OB = 7OP(2,3).$$

Determine $|OB|$.

Exercício 57 -

Como Você construiria, usando régua e compasso, um segmento OC tal que $3OC = 2\delta$?

Exercício 58 -

Dizemos que um segmento AB é ***comensurável com a unidade*** *δ se existirem naturais não nulos m, n tais que mAB e $n\delta$ são congruentes.*

a) Prove a seguinte propriedade dos segmentos comensuráveis com a unidade: se AB é um segmento comensurável com a unidade então sua medida é um número racional.

b) V ou F? Justifique: se AB é um segmento que tem medida racional então AB é comensurável com a unidade.

c) Prove que a lista obtida pelo processo de medição via régua decimal infinita de um segmento OC que é comensurável com a unidade é precisamente a expansão decimal do racional que é a medida deste segmento (e que existe, por (a)).

A questão que temos de nos colocar agora é evidente: será que toda lista do tipo (5), obtida pelo processo de medição via régua decimal infinita de um segmento de reta, é a expansão decimal de um número racional?

Se a resposta for sim, então decorre da Proposição 3 que nosso processo de medição fica resolvido: poderemos medir qualquer segmento de reta através de um número racional, a saber, o número racional cuja expansão decimal é a lista obtida pelo método de medição via régua decimal infinita.

Obter, portanto, uma resposta para a questão acima, é decisivo para sabermos qual o encaminhamento a ser dado ao nosso processo de medição. Queremos registrar aqui que o entendimento e solução desta questão demandou muitos esforços dos matemáticos da Antigüidade, tendo tido um papel importantíssimo no desenvolvimento da Matemática. Por esta razão, daremos uma atenção especial a ela na seção que se segue.

5.4 A insuficiência geométrica dos racionais

Nesta seção vamos mostrar exemplos que respondem negativamente a questão colocada na seção anterior, de modo que, como veremos,

Existem segmentos de reta que não podem ser medidos através de um número racional.

Antes de apresentarmos exemplos, achamos oportuno e interessante mencionar que, por um certo período na Antigüidade, acreditava-se que a afirmação acima fosse falsa. Com efeito, os matemáticos gregos da Antigüidade, inicialmente, defendiam que a medição das grandezas contínuas, como é caso da medição de segmentos da reta euclidiana, poderia ser feita usando-se apenas as frações. Assim, por exemplo, eles achavam que, uma vez escolhida livremente uma unidade de comprimento, a medida do comprimento de qualquer segmento de reta poderia ser expressa como um múltiplo fracionário adequado da medida da unidade de comprimento adotada (ou seja, qualquer segmento de reta era comensurável com a unidade - veja Exercício 57).

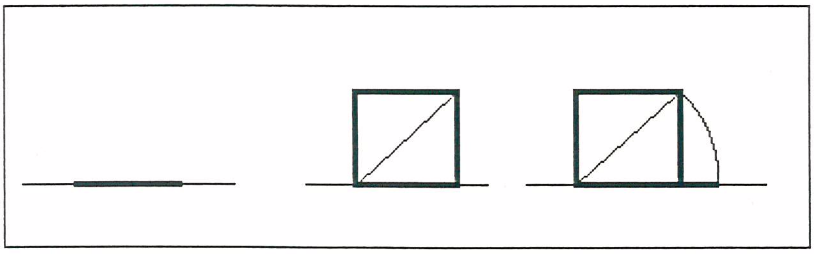
Coube aos matemáticos da Escola Pitagórica, entre 450 e 400 a.C., descobrirem exemplos de segmentos de reta que não podem ser medidos através de números racionais, como é o caso da diagonal de um quadrado de lado unitário, exemplo que discutiremos a seguir.

A descoberta dos pitagóricos produziu a primeira grande crise na Matemática, a chamada Crise dos Incomensuráveis. Para os gregos, a resolução dessa crise passaria pela introdução de "números" capazes de medir todas as grandezas contínuas: geométricas (segmentos de reta, superfícies e sólidos) ou físicas (massa, tempo, etc). Os próprios gregos, com Eudoxos e Theaithetos, produziram soluções para essa crise. Nos séculos que se sucederam muitas outras soluções surgiram, variando em naturalidade e grau de rigor. Como veremos, o trabalho que desenvolvemos até agora, neste texto, nos permitirá apresentar uma solução para o problema da medida das grandezas contínuas, solução esta natural, simples e rigorosa. Isto será feito em detalhes na seção seguinte.

Vamos primeiramente apresentar um exemplo que mostra a impossibilidade de medirmos qualquer segmento através de um número racional.

Exemplo 52 -

Consideremos uma reta euclidiana r em um plano euclidiano. Fixemos um segmento unitário δ nesta reta. Construímos a seguir um quadrado no plano que tem como um dos lados o segmento δ, e, com um compasso, construímos um segmento S de r congruente à diagonal deste quadrado.



Se S pudesse ser medido por um racional, ou seja, se existissem $a, b \in \mathbb{N}^*$ tais que

$$|S| = \frac{a}{b},$$

teríamos, pelo Teorema de Pitágoras,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

Isto no entanto é um absurdo, pois não existe um número racional cujo quadrado vale 2*, conforme provaremos na proposição que segue.*

Proposição 3 -
Não existe um número racional cujo quadrado vale 2.

Antes de iniciarmos com a prova propriamente dita, é interessante comentar que, nos últimos 2500 anos, os matemáticos descobriram muitas demonstrações desta afirmação, todas elas podendo ser consideradas não triviais, não óbvias. Apresentaremos aqui a mais antiga que ficou registrada, e que, acredita-se, ser devida a Aristóteles. Ela foi transcrita nos Elementos de Euclides, livro escrito por volta de 300 a.C., e baseia-se no resultado que qualquer inteiro tem a mesma paridade que seu quadrado (veja Exemplo 27).

Prova: Vamos raciocinar por absurdo, supondo que exista um racional $x = a/b$ tal que $x^2 = 2$. Como $a^2 = (-a)^2$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $a > 0$. Ainda, sem perda de generalidade, podemos supor que a fração a/b já está na forma irredutível, isto é, $mdc(a, b) = 1$ (veja Exercício 16). Então

$$2 = x^2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 2b^2 = a^2.$$

Assim, o inteiro a^2 é par, e portanto a é também par. Ou seja, a é um inteiro da forma $a = 2k$, com k inteiro. Daí:

$$\begin{aligned} 2b^2 &= a^2 = (2k)^2 = 4k^2 \Rightarrow \\ b^2 &= 2k^2, \end{aligned}$$

donde concluimos que b^2 é par. Mas então b é também par, o que é um absurdo, pois são contraditórias as conclusões que a e b são pares com a hipótese de que a fração a/b é irredutível. ▲

Exercício 59 -
i) Prove que não existe x *racional tal que* $x^2 = 3$.
ii) Generalize as demonstrações anteriores para provar que não existe x *racional tal que* $x^2 = p$*, sendo* p *um número primo positivo.*

Nos exercícios que se seguem são propostas extensões dos resultados acima.

Exercício 60 -
i) Prove que, fixado qualquer número racional l*, não existe um racional* x *tal que* $x^2 = 2l^2$.
ii) Conclua de (i) que, num quadrado cujo lado tem medida racional, a medida da diagonal não é dada por um número racional.

Exercício 61 -

Sabemos que todo número natural k pode ser escrito na forma

$$k = a_n a_{n-1} ... a_1 a_0,$$

onde cada a_i é um dígito, isto é, um elemento do conjunto $\{0, 1, ..., 8, 9\}$. Lembremos que com isto queremos significar que

$$k = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + ... + a_1 10 + a_0.$$

Seja n um número natural que é múltiplo de 10^5 mas não é múltiplo de 10^6. Prove que

$$\nexists x \in \mathbb{Q} \text{ tal que } x^2 = n.$$

Os exemplos que acima apresentamos mostram a **insuficiência aritmética dos racionais**, e podem ser vistos também como casos particulares do que chamamos de insuficiência algébrica dos racionais, assunto que voltaremos a comentar no Capítulo 7.

5.5 Os números reais absolutos

Chegamos a um ponto crítico da caminhada que viemos percorrendo neste texto. Estamos para introduzir uma das noções mais importantes e básicas da Matemática: a de número real absoluto.

Vimos, na seção anterior, que as listas obtidas na medição de um segmento de reta, com régua decimal infinita, não representam necessariamente a expansão decimal de um racional, de modo que estas listas não são números no sentido familiar do termo (ou seja, números racionais).

Notamos entretanto que, como comentamos na seção anterior, do ponto de vista das aplicações técnicas, a impossibilidade de medirmos qualquer segmento via um número racional não traz problemas, pois podemos obter aproximações tão precisas quanto queiramos desta medida. Assim, podemos dizer que nossa discussão sobre medição de segmentos se encerraria por aí se tivéssemos em vista apenas estas aplicações.

Contudo, do ponto de vista teórico, a conclusão do penúltimo parágrafo gera uma pergunta relevante e não trivial:

Dado um segmento de reta da reta euclidiana, suponhamos que as tentativas de medí-lo através da régua decimal nunca consigam produzir um número racional que expresse exatamente a medida deste segmento. Pergunta-se: seremos forçados a concluir que o segmento de reta dado não tem medida?

A resposta é **sim** se nos limitarmos a esperar como medida apenas números racionais; neste caso, seríamos obrigados a conviver com uma muito incômoda situação: alguns segmentos de reta seriam mensuráveis e outros não.

Depois de muita discussão, os matemáticos convenceram-se que a possibilidade de deixarmos alguns segmentos de reta sem medida seria um defeito muito grave, uma vez que impossibilitaria (ou dificultaria imensamente) o desenvolvimento de uma teoria matemática que desse conta, de maneira satisfatória, tanto teórica quanto prática, de diversos problemas provenientes tanto da Matemática quanto da Física ou mesmo de outras Ciências (problemas estes mais sofisticados que aqueles provenientes das aplicações técnicas e muito importantes para as Ciências).

Assim, para que possamos medir de maneira exata **todos** os segmentos de reta através da régua decimal infinita, não resta outra alternativa a não ser a de ampliar nosso conceito de número, incluindo neste conceito listas do tipo $m_0, a_1a_2...$ com $m_0 \in \mathbb{N}$ e a_i dígito, para todo i, e que não provêm da expansão decimal de nenhum racional (isto é, periódicas).

É possível que nesta altura isto pareça, ao leitor, um procedimento natural e justificável; talvez o leitor até já tenha se dado conta que um tal procedimento ilustraria, novamente, uma estratégia muito comum em Matemática, utilizada anteriormente neste texto na passagem da representação decimal dos naturais para a representação decimal dos racionais: a estratégia de ampliar um conceito matemático de modo que ele possa vir a incluir casos relevantes para a teoria que, de outra maneira, ficariam fora.

No entanto, surgem aqui duas questões fundamentais que devem ser ressaltadas e discutidas antes de adotarmos definitivamente esta estratégia:

1) A noção de número pode ser usada para contar (no caso dos naturais), ou para medir. No nosso caso, esta importante interpretação de número (expressar medidas) vai continuar sendo válida se pudermos responder afirmativamente à seguinte pergunta: uma lista qualquer

$$m_0, a_1a_2...$$

com $m_0 \in \mathbb{N}$ e a_i dígitos, representa sempre a medida de algum segmento de reta?

2) Como vimos no estudo sobre os racionais, no Capítulo 3, existem frações distintas representando a mesma quantidade e, portanto, determinando um mesmo número racional (por exemplo, $1/2$ e $2/4$). Não poderia uma situação análoga ocorrer com as listas (5), ou seja, não podem duas listas distintas estar representando uma mesma medida?

Passamos então a nos concentrar nas questões acima, começando pela questão (1). Consideremos a lista infinita $x = m, a_1a_2...a_n....$ Podemos associar a x a seguinte seqüência de segmentos

$$\begin{aligned}
&P(m)P(m+1)\\
&P(m, a_1)P(m, a_1 + \frac{1}{10})\\
&P(m, a_1a_2)P(m, a_1a_2 + \frac{1}{100})\\
&...\\
&P(m, a_1a_2...a_n)P(m, a_1a_2...a_n + \frac{1}{10^n})\\
&...
\end{aligned}$$

Observamos que esta seqüência é encaixante e evanescente:

Exercício 62 -

a) Prove que a seqüência acima é encaixante.

b) Prove que a seqüência acima é evanescente.

Portanto, associada à lista infinita $m, a_1a_2...a_n...$ temos uma seqüência evanescente que, pelo Postulado do Contínuo, possui um único ponto P comum a todos os seus segmentos. Podemos agora finalizar nossa resposta à primeira questão, convidando o leitor a provar:

Exercício 63 -

Prove que a lista obtida, via régua decimal infinita, para medir o segmento OP, sendo P o ponto acima construído, é precisamente a lista $m, a_1a_2...$.

Conclusão:

Toda lista infinita $m, a_1a_2...$, onde m é um inteiro e a_i são dígitos, para todo i, representa a medida de algum segmento de reta.

Passemos agora a considerar a questão (2) acima: podem duas listas distintas estarem expressando uma mesma medida? Considere o exemplo abaixo.

Exemplo 53 -

Consideremos a lista infinita $12,344999...$. *A tal lista associamos a seguinte seqüência de segmentos evanescentes:*

$$P(12,344)P(12345/10^3)$$
$$P(12,3449)P(12345/10^3)$$
$$P(12,34499)P(12345/10^3)$$
$$P(12,344999)P(12345/10^3)$$
$$...$$
$$P(12,344999...9)P(12345/10^3) \text{ (pontos da rede de graduação } 1/10^n\text{)}$$
$$...$$

Note que o ponto $P(12345/10^3)$ está presente em todos os segmentos acima de modo que, como estes são evanescentes, $P(12345/10^3)$ é o **único** ponto comum a todos estes segmentos. Ou seja: a lista infinita $12,345999...$ expressa a medida do segmento $OP(12345/10^3)$. Mas $P(12345/10^3)$ é um ponto graduado, e então, pelo método da régua decimal infinita, já conhecíamos, para o segmento $OP(12345/10^3)$, a lista que expressa sua medida, a saber, a lista finita $12,345$.

Conclusão:

A lista $12,344999...$ expressa a mesma medida que a lista $12,345$.

Exercício 64 -

Considere a lista infinita $12,345000...$. *Prove que ela expressa a mesma medida que a lista* $12,345$.

Concluímos que as listas $12,344999...$, $12,345000...$ e $12,345$ expressam todas a medida de um mesmo segmento de reta.

O exemplo e exercício acima podem ser generalizados no seguinte

Lema 2 -

Sejam $c, a_1a_2...$ *e* $d, b_1b_2...$ *duas listas como em (5)* ***distintas****, e sejam* P_1, P_2 *pontos à direita de* O *tais que*

$$|OP_1| = c, a_1a_2...$$

e

$$|OP_2| = d, b_1b_2...$$

Então $P_1 = P_2$ *(isto é, as listas medem o mesmo segmento) se e somente se as listas* $c, a_1a_2...$ *e* $d, b_1b_2...$ *se enquadram em algum dos seguintes casos:*

i) existe $n \in \mathbb{N}^*$ *tal que elas coincidem até a posição* n *e, a partir daí, digamos, se* $a_{n+1} < b_{n+1}$, *então*

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 1 + a_{n+1}, \\ 9 &= a_{n+2} = a_{n+3} = ... \\ 0 &= b_{n+2} = b_{n+3} = ... \ . \end{aligned}$$

ii) se $c \neq d$, digamos, $c < d$ então

$$d = 1 + c$$

e, para todo i,

$$\begin{aligned} a_i &= 9 \\ b_i &= 0 \end{aligned}$$

Prova: ($\Rightarrow$) Suponhamos inicialmente $P_1 = P_2$, que denotaremos então simplesmente por A. Obviamer precisamos provar que se as listas não forem idênticas, então acontece alguma das situações descritas em i), ii). Suponhamos inicialmente que as listas não são idênticas mas começam iguais. Assim, existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que elas coincidem até a posição n e que $a_{n+1} \neq b_{n+1}$. Ou seja,

$$d, b_1 b_2 \ldots = c, a_1 a_2 \ldots a_n b_{n+1} b_{n+2} \ldots$$

Sem perda de generalidade, podemos supor $a_{n+1} < b_{n+1}$. Então

$$A \in P(c, a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1}) P(c, a_1 a_2 \ldots a_{n+1} + \frac{1}{10^{n+1}}),$$

mas também

$$A \in P(c, a_1 a_2 \ldots a_n b_{n+1}) P(c, a_1 a_2 \ldots a_n b_{n+1} + \frac{1}{10^{n+1}}).$$

Portanto, A é um ponto comum aos segmentos $P(c, a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1}) P(c, a_1 a_2 \ldots a_{n+1} + \frac{1}{10^{n+1}})$ e $P(c, a_1 a_2 \ldots a_n b_{n+1}) P(c, a_1 a_2 \ldots a_n b_{n+1} + \frac{1}{10^{n+1}})$. Como $a_{n+1} < b_{n+1}$, temos que b_{n+1} é no mínimo igual a $1 + a_{n+1}$, donde concluímos que os segmentos

$$P(c, a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1}) P(c, a_1 a_2 \ldots a_{n+1} + 1/10^{n+1})$$

e

$$P(c, a_1 a_2 \ldots a_n b_{n+1}) P(c, a_1 a_2 \ldots a_n b_{n+1} + 1/10^{n+1})$$

têm um ponto em comum se e só se $b_{n+1} = 1 + a_{n+1}$, e ainda

$$A = P(c, a_1 a_2 \ldots a_{n+1} + 1/10^{n+1}) = P(c, a_1 a_2 \ldots a_n b_{n+1}).$$

Em particular,

- A é um ponto graduado da rede de graduação $1/10^{n+1}$;
- o dígito a_{n+1} é no máximo igual a 8, uma vez que b_{n+1} é também dígito e $b_{n+1} = 1 + a_{n+1}$.

Analisemos agora os dígitos que seguem nestas listas. Para determinar a_{n+2}, observamos que a_{n+2} é tal que o segmento

$$P(c, a_1 a_2 \ldots a_{n+1} a_{n+2}) P(c, a_1 a_2 \ldots a_{n+1} a_{n+2} + \frac{1}{10^{n+2}})$$

contém o ponto A e está contido no segmento

$$P(c, a_1 a_2 \ldots a_{n+1}) P(c, a_1 a_2 \ldots a_{n+1} a_{n+1} + \frac{1}{10^{n+1}}).$$

Ora, como

$$A = P(c, a_1 a_2 \ldots a_{n+1} + 1/10^{n+1}),$$

afirmamos que necessariamente $a_{n+2} = 9$, com base no seguinte

Exercício 65 -

Determine o segmento que tem para extremos pontos consecutivos da rede de graduação $1/10^{s+1}$ *que está contido no segmento* $P(\frac{r}{10^s})P(\frac{r+1}{10^s})$ *e que contém o ponto* $P(\frac{r+1}{10^s})$*, determinando seus extremos.*

Para determinar b_{n+2} fazemos raciocínio análogo: b_{n+2} é tal que o segmento

$$P(c, a_1a_2...a_nb_{n+1}b_{n+2})P(c, a_1a_2...a_nb_{n+1}b_{n+2} + \frac{1}{10^{n+2}})$$

contém o ponto A e está contido no segmento

$$P(c, a_1a_2...a_nb_{n+1})P(c, a_1a_2...a_nb_{n+1} + \frac{1}{10^{n+1}}).$$

Ora, como

$$A = P(c, a_1a_2...a_{n+1} + 1/10^{n+1}) = P(\frac{m}{10^n} + \frac{b_{n+1}}{10^{n+1}}),$$

afirmamos que necessariamente $b_{n+1} = 0$, com base no seguinte

Exercício 66 -

Determine o segmento que tem para extremos pontos consecutivos da rede de graduação $1/10^{s+1}$ *que está contido no segmento* $P(\frac{r}{10^s})P(\frac{r+1}{10^s})$ *e que contém o ponto* $P(\frac{r}{10^s})$*, determinando seus extremos.*

Os dois exercícios acima, aplicados agora à rede de graduação $1/10^{n+3}$, nos permitem concluir que $a_{n+3} = 9$ e $b_{n+3} = 0$, e assim sucessivamente.

Concluimos então que as duas listas só podem ser da forma

$$c, a_1a_2...a_na_{n+1}999... \text{ e } c, a_1a_2...a_nb_{n+1}000...,$$

com $b_{n+1} = 1 + a_{n+1}$.

O leitor não deverá ter dificuldades em fazer uso da mesma idéia acima para mostrar que, no caso em que as listas já começam diferentes, isto é, $c \neq d$, digamos, $c < d$ então as listas têm necessariamente as formas indicadas em (ii).

$(\Leftarrow)$ Provemos agora a recíproca, isto é, se duas listas são idênticas ou são do tipo (i) ou (ii), então elas estão medindo o mesmo segmento.

Já mostramos anteriormente que uma lista expressa a medida de um único segmento. Assim, listas idênticas expressam a medida de um mesmo segmento.

Suponhamos agora que as listas satisfazem a condição (i). Isto significa que elas são da forma $c, a_1a_2...a_na_{n+1}999...$ e $c, a_1a_2...a_nb_{n+1}000...$, com $b_{n+1} = 1 + a_{n+1}$. Aplicando o mesmo raciocínio do Exemplo 53, podemos concluir que tais listas expressam a medida do mesmo segmento, a saber, $OP(c, a_1a_2...a_nb_{n+1})$.

Finalmente, se as listas satisfazem a condição (ii) então elas são da forma $c, 999...$ e $d, 000...$, com $d = 1 + c$. Aplicando novamente o mesmo raciocínio do exemplo 53, podemos concluir que tais listas expressam a medida do mesmo segmento, a saber, $OP(d)$. ▲

Da demonstração acima, é evidente o seguinte

Corolário 8 -
Um segmento OP admite duas listas distintas para sua medida se, e somente se, P é um ponto graduado.

Podemos agora resumir o que provamos antes com a seguinte conclusão fundamental:

Todo segmento de reta pode ser medido por uma lista infinita $m_0, a_1a_2...$, onde m_0 é um nú - mero natural e $a_1, a_2, ...$ são dígitos.

Reciprocamente, toda lista $m_0, a_1a_2...$ é medida de algum segmento de reta.

Além disso, um segmento admite duas listas distintas expressando sua medida se e sómente se é congruente a um segmento OP sendo P um ponto graduado.

Considerando as conclusões sobre as listas $m_0, a_1a_2...$ ressaltadas acima, somos levados a ampliar o conceito de número, considerando também como números tais listas infinitas, criando assim os chamados reais absolutos, mas mediante a condição de igualdade explicitada na seguinte definição:

Definição 24 -
O conjunto dos ***números reais absolutos*** *é o conjunto de todas as listas infinitas*

$$m, a_1a_2...,$$

(onde m é um inteiro não negativo e a_i é dígito, para $i = 1, 2, ...$) submetidas ao seguinte critério de igualdade: escrevemos

$$m_1, a_1a_2... = m_2, b_1b_2....$$

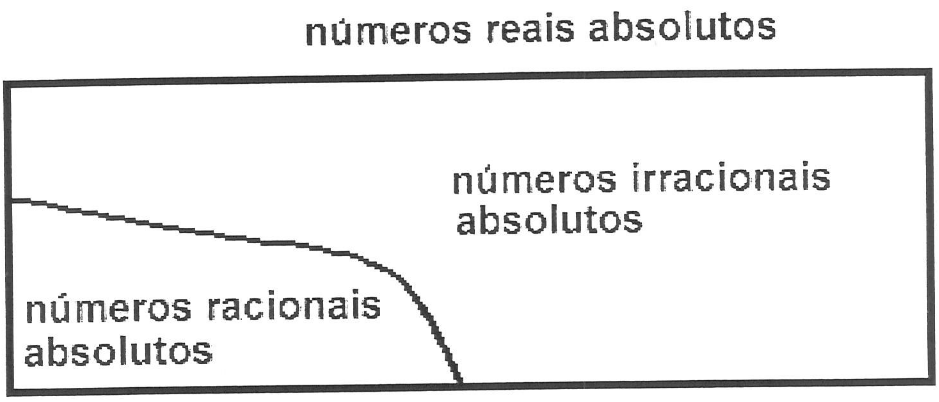
quando, e só quando, ambas as listas medirem um mesmo segmento da reta euclidiana.

É oportuno agora colocar uma questão nem sempre discutida no Ensino Fundamental e, às vezes, erroneamente explicada pelos livros-texto:

Exercício 67 -
*V ou **F**? Justifique*
$$0,999... = 1,000...$$

Exercício 68 -
*V ou **F**? Justifique*
$$12,344999... = 12,345000... = 12,345$$

Definição 25 -
Conforme a definição acima, o conjunto dos números reais absolutos inclui todos os números racionais não negativos, uma vez que ele é formado tanto de listas periódicas como não periódicas. Essas listas periódiocas podem ser identificadas com os números racionais absolutos (positivos) e, então, chamaremos as listas não periódicas de ***números irracionais absolutos****.*



Definição 26 *Continuamos a denominar qualquer lista infinita $m, a_1a_2...$ que representa um número real absoluto x de **expansão decimal de** x. Estendemos, assim, a nomenclatura utilizada no Capítulo 3.*

É conveniente agora ressaltarmos pontos chaves do que foi feito:

> Os números reais absolutos são listas do tipo $m, a_1a_2...$, onde m é um inteiro não negativo e os a_i são dígitos, para $i = 1, 2, ...$ É essencial que sempre tenhamos em mente que:
>
> · esses números estão associados ao processo de medição de segmentos da reta euclidiana;
> · dois números reais absolutos são considerados iguais se estiverem medindo um mesmo segmento de reta. É devido a isso que escrevemos coisas como: $1,0000... = 0,9999....$

A partir dessas considerações e dos teoremas já demonstrados, podemos enunciar o seguinte:

Teorema 6 -
- A todo segmento da reta euclidiana o método de medida pela régua decimal infinita sempre associa um, e só um, número real absoluto como medida exata de seu comprimento.
- Reciprocamente, para cada número real absoluto, pode-se achar um segmento de reta cujo comprimento é esse número; além disso, todos os segmentos de reta que admitem esse número como medida são congruentes.

Chamamos a atenção do leitor para o seguinte fato importante: o teorema acima **resolve de maneira completa** o problema de medição de segmentos de reta.

Neste sentido, é interessante retomarmos a discussão de medida da diagonal de um quadrado de lado 1. Sabemos agora que existe um real absoluto, digamos d, que mede este segmento. Como real absoluto que é, d é uma lista infinita, digamos

$$d = m, a_1a_2...$$

e, pelo Exemplo 52, sabemos que tal lista não é periódica.

O problema que surge agora é: como determinar explicitamente os valores de m, a_1, a_2 etc? No exemplo seguinte tratamos desta questão.

Exemplo 54 -

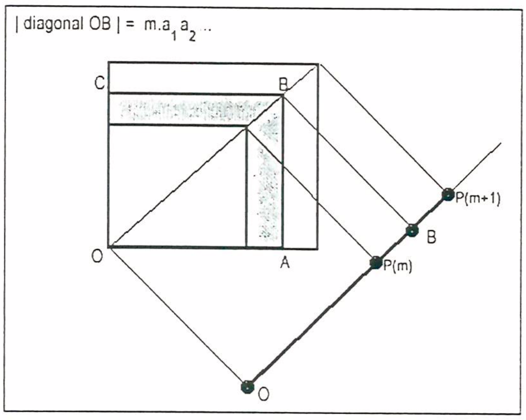
Estimando a diagonal do quadrado de lado 1.

Suponhamos que

$$d = m, a_1 a_2 ...$$

mede a diagonal D do quadrado de lado 1. Observamos então que o natural m mede um segmento menor do que D, enquanto que $m + 1$ mede um segmento maior do que D. Assim, por Pitágoras,

$$m^2 \leq 2 \leq (m+1)^2. \tag{8}$$



Sendo m um natural, a única possibilidade para m satisfazer (8) é $m = 1$.

Da mesma forma, a_1 deve ser um dígito tal que

$$(1, a_1)^2 \leq 2 \leq (1, a_1 + \frac{1}{10})^2. \tag{9}$$

Como existem no máximo 10 possibilidades para o valor de a_1 ($a_1 \in \{0, .., 9\}$), depois de no máximo dez tentativas testando (9), iremos descobrir que $a_1 = 4$ (pois $(1.4)^2 = 1.96$, enquanto que $(1.5)^2 = 2.25$). Concluímos assim que

$$d = 1, 4... .$$

Para determinarmos a_2 vemos que

$$(1, 4a_2)^2 \leq 2 \leq (1, 4a_2 + \frac{1}{100})^2$$

de modo que, após no máximo 10 tentativas, encontramos $a_2 = 1$. Assim,

$$d = 1, 41... .$$

Procedendo desta forma mais vezes, podemos obter aproximações racionais de d tão acuradas quanto quisermos; dito de forma precisa, podemos determinar o dígito a_n, seja qual for o n dado. De fato, convidamos o leitor a provar, usando indução matemática, que o processo descrito neste exemplo pode ser generalizado para provar que, dado $n \geq 2$, o dígito a_n fica bem determinado a partir do conhecimento de $a_1, ..., a_{n-1}$

O real absoluto d é denotado por $d = \sqrt{2}$.

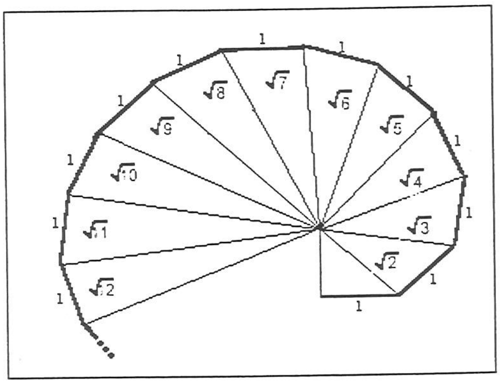
Exercício 69 -

Usando o raciocínio do exemplo anterior, determine os três primeiros elementos da lista que representa o número real absoluto que mede a diagonal de um retângulo cujos lados medem 1 *e* 2 *(ou seja, de* $\sqrt{5}$*).*

A determinação da expansão decimal de um número real, seja êle racional ou não, pode ser uma tarefa bastante difícil. De fato, este tipo de problema tem bastante interesse em Matemática, originando ainda hoje, inclusive, uma grande quantidade de pesquisa nesta área. No Capítulo 7 voltamos a discutir, com mais detalhes, este assunto.

Exercício 70 - *O Caramujo de Theodoros*

Considere a seqüência de triângulos retângulos ao lado, iniciada pelo triângulo retângulo isósceles de lado 1.



Exercício 71 -

i) Prove que a medida h_n *da hipotenusa do* $n-$*ésimo triângulo satisfaz*

$$h_n^2 = n + 1$$

[Sugestão: Utilize indução sobre n*]*

ii) Dê exemplos que comprovem que, para alguns valores de n*, a medida* h_n *é racional e, para outros, a medida de* h_n *não é racional.*

iii) Complete a sentença abaixo de acordo com sua intuição, de modo a torná-la verdadeira. A seguir, demonstre-a.

$$h_n \text{ é racional} \Leftrightarrow n + 1 \ldots.$$

iv) A partir de sua intuição em (iii) responda:

a) Quantas hipotenusas têm medida racional inteira?

b) Quantas hipotenusas têm medida racional não inteira?

c) Quantas hipotenusas têm medida irracional?

Finalmente, uma observação: note que quando quisermos construir um segmento de medida racional temos agora duas maneiras: por uma aplicação do Teorema de Thales e por listas. Convidamos o leitor a provar esta afirmação.

6 NÚMEROS REAIS

Vários povos da Antigüidade, tais como os egípcios, romanos e gregos, usavam sistemas de coordenadas em várias situações, tanto da vida prática (como no traçado das ruas das cidades), como no estudo de problemas científicos (como o estudo dos fenômenos celestes e a investigação das cônicas). Esses sistemas de coordenadas iniciais eram semelhantes ao sistema de latitudes e longitudes que ainda hoje usamos e, como tal, não exploravam plenamente o potencial da idéia de número.

Foi só com Fermat e Descartes, lá por cerca de 1630, que surgiu a idéia de se considerar sistemas de coordenadas verdadeiramente numéricos, onde as alternâncias de orientação dos eixos de referência fosse determinada de maneira estritamente algébrica: números positivos passaram a indicar um sentido de percurso de eixo e números negativos passaram a indicar o sentido oposto. Com isso, não só terminou, de uma vez por todas, a milenar resistência contra os números negativos, como foram abertas as portas que nos levaram a um sem-número de desenvolvimentos matemáticos extremamente poderosos que tornaram viáveis as ciências e tecnologias modernas.

No que segue, iniciaremos vendo em detalhe como poderemos ampliar os números reais absolutos de modo a obter sistemas de coordenadas com as características acima. Isso nos levará ao campo dos números reais. A seguir, iniciaremos o estudo de suas propriedades algébricas e sua interpretação geométrica.

6.1 Construção de um sistema de coordenadas para a reta euclidiana e os números reais.

Suponha o leitor que alguém lhe pare na rua para perguntar onde fica uma determinada loja que ele só sabe que está em tal rua. Duas maneiras de responder seriam dizer "o Sr. encontrará tal loja andando 100 metros adiante" ou "o Sr. passou tal loja 50 metros atrás". Essas respostas têm três ingredientes comuns: um ponto de referência (no caso, o ponto de encontro das duas pessoas), um sentido de percurso da reta (o sentido em que vinha andando o cidadão que nos parou, ou o sentido inverso) e uma unidade de medida de distâncias (no caso, o metro).

No caso abstrato da localização dos pontos de uma reta qualquer podemos proceder de modo análogo. Assim, começamos selecionando um ponto da reta, que servirá como **ponto de referência**, ou **origem.** Denotamos este ponto por O.

Dado agora um ponto P da reta, é natural considerarmos como "localizador" de P a distância de P a O, ou seja, o comprimento do segmento OP. Conforme vimos no capítulo anterior, sobre medição de segmentos, desde que tenhamos escolhido uma unidade de medida de comprimentos, esta distância está bem definida e é dada por um número real absoluto, digamos x; ou seja $x = |OP|$.

Entretanto, é claro que este número x ainda não determina o ponto de maneira unívoca, uma vez que sabemos que existe um outro ponto P' da reta distinto de P mas também satisfazendo $|OP'| = x$, a saber, o simétrico de P em relação a O.

Podemos observar no entanto que, dado um número real absoluto x, o ponto da reta cuja distância a O é igual a x estará bem determinado se, além da distância x, informarmos também em qual das semiretas com origem O localiza-se tal ponto. Isto requer a adoção de um critério adicional, critério este que permita distinguir as duas semiretas de r determinadas pela origem O.

Uma reta onde uma tal distinção está bem determinada é denominada de **eixo euclidiano**, conceito que a seguir definimos com precisão.

Definição 27 -

*Um **eixo euclidiano** é uma reta euclidiana r na qual foram escolhidos e fixados **dois pontos** distintos, sendo um deles considerado **origem** e denotado por O; o outro ponto é denotado por U e serve para fixar a unidade OU de medida de comprimentos, bem como o conjunto de pontos que chamamos de **pontos positivos** do eixo r. Mais precisamente, denominamos **semi-reta positiva** ou **semi-reta dos pontos positivos** de r a semi-reta com origem O que contém o ponto U. A outra semi-reta é denominada de **semi-reta negativa** ou **semi-reta dos pontos negativos** de r.*

Notação: Um eixo euclidiano constituído por uma reta r, uma origem O e um ponto U como acima é denotado por (r, O, U).

Definição 28 -

*Dados pontos distintos Q_1 e Q_2 de um eixo (r, O, U), dizemos que Q_2 está **à direita** de Q_1 se*
i) Q_2 é positivo e Q_1 é negativo
ou
ii) Q_2 é positivo e Q_1 é positivo e pertence ao segmento OQ_2
ou
iii) Q_2 é negativo e Q_1 é negativo e Q_2 pertence ao segmento OQ_1.

Voltando agora à discussão da construção de um sistema de coordenadas para a reta, podemos observar que, através da noção de eixo euclidiano, consegue-se uma maneira natural e óbvia de localizar de maneira unívoca os **pontos positivos** de um eixo, a saber:

> Dado um ponto positivo Q do eixo (r, O, U), definimos como **coordenada** de Q o real absoluto que mede o comprimento do segmento OQ – ou seja, que expressa a distância de O a Q – relativamente à unidade de medida OU.
> Reciprocamente, dado um real absoluto x, existe um único ponto **positivo** de r que tem x para coordenada, ou seja, cuja distância a O vale exatamente x.

Exercício 72 -

V ou F? Justifique.
A coordenada de um ponto graduado da forma $P(\frac{m}{10^n})$ é $m/10^n$.

O sistema de coordenadas acima tem o defeito óbvio de não contemplar todos os pontos de r. É claro que poderíamos ter usado os reais absolutos como coordenadas para a semi-reta dos pontos negativos; no entanto, em qualquer um dos casos, não conseguiríamos coordenadas para toda a reta. Vamos agora procurar corrigir isto.

Primeiro notamos que se nos limitarmos apenas ao conjunto dos reais absolutos, não poderemos ir adiante, uma vez que já utilizamos todos eles para coordenadas dos pontos positivos da reta. Portanto, para conseguirmos coordenadas para todos os pontos da reta, temos necessariamente que ampliar o conjunto dos reais absolutos.

Considerando a simetria do problema, a idéia de introduzir os "números" $-x$, onde x é um real absoluto, deve parecer agora suficientemente natural. Considerando que os reais absolutos são listas submetidas a uma certa condição de igualdade, é conveniente definir, de maneira similar, os reais negativos:

Definição 29 -

O conjunto dos ***reais negativos*** *é o conjunto de todas as listas da forma*

$$-m, a_1a_2...,$$

onde m é um número natural e $a_1, a_2, ...$ são dígitos. submetidos à seguinte noção de igualdade:

$$-m_1, a_1a_2... = -m_2, b_1b_2..$$

se e só se as listas $m_1, a_1a_2...$ e m_2, b_1b_2 representam os mesmos reais absolutos, ou seja, se e só se

$$m_1, a_1a_2... = m_2, b_1b_2... .$$

Exercício 73 -

V ou F? Justifique.

$-0,4999... = -0,5000...$.

A união dos reais absolutos com os reais negativos e o zero constitui o familiar conjunto dos reais. Precisamente:

Definição 30 -

Os reais absolutos, unidos aos reais negativos e ao 0 (ou seja, à lista $0,00...$) constituem o conjunto dos ***números reais.***

Através do conjunto dos reais podemos resolver de forma definitiva o problema de localizar um ponto na reta através de coordenadas. Na seção seguinte estabelecemos este fato de forma mais explícita.

As seguintes notações são já tradicionais:

$\mathbb{R}$ = conjunto dos números reais

$\mathbb{R}_+$ = conjunto dos números reais positivos

$\mathbb{R}_-$ = conjunto dos números reais negativos.

Assim,

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- \cup \{0\}.$$

Tendo-se a noção de número real negativo, passa a ser natural também chamarmos os reais absolutos de reais **positivos**.

Convenção: Daqui para a frente, usaremos apenas a denominação "reais positivos" ao nos referirmos aos reais absolutos; esta denominação, de fato, é muito mais comum.

6.2 O teorema fundamental da Geometria Analítica

Definição 31 -

Dado um ponto Q de um eixo euclidiano (r, O, U), vamos associar a Q um número real x, dito ***coordenada*** *de Q, da seguinte forma:*

i) se $Q = 0$ então $x = 0$;

ii) se Q é um ponto positivo de r então $x = |OQ|$;

iii) se Q é um ponto negativo de r então $x = -|OQ|$.

Assim, por exemplo, O é o ponto da reta de coordenada zero.

Notação: Escrevemos $x(Q)$ para denotar a coordenada do ponto Q.

Reciprocamente, dado um real y, se $y = 0$ associamos a y a origem O; se y é positivo associamos a y o ponto positivo Q do eixo r tal que $|OQ| = y$. Se y é negativo, então $y = -y'$, sendo y' um real absoluto. Associamos então a y o ponto negativo Q de r tal $|OQ| = y'$.

Notação: Escrevemos $Q(y)$ para denotar o ponto que tem o número real y para coordenada.

Com o que desenvolvemos até agora, temos já demonstrado, de fato, um teorema muito importante, estabelecendo uma relação fundamental entre números reais e pontos da reta euclidiana.

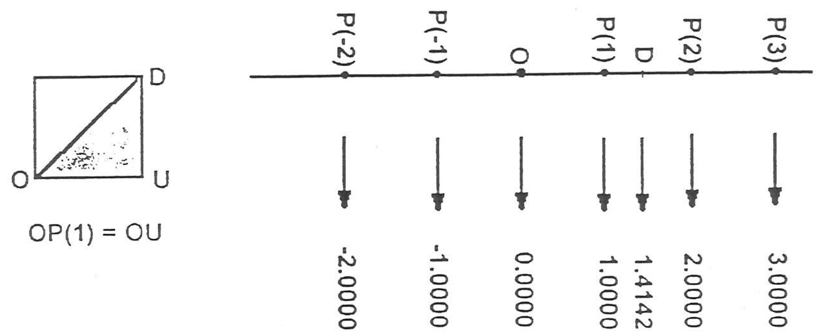
Antes de enunciarmos tal teorema, lembremos que uma correspondência entre os elementos de dois conjuntos A e B é dita uma **correspondência biunívoca** (ou **um a um**) quando **todo** elemento de A corresponde a um **único** elemento de B e **todo** elemento de B corresponde a um **único** elemento de A. Costumamos expressar isto resumidamente escrevendo

$$A \leftrightarrow B$$

Teorema 7 - *Teorema Fundamental da Geometria Analítica*

A correspondência que associa a cada ponto de um eixo euclidano r a coordenada deste ponto é uma correspondência biunívoca entre r e o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

O teorema Fundamental da Geometria Analítica nos permite identificar cada ponto da reta com o número real que é a sua coordenada, nos dando assim uma **visualização geométrica** para o conjunto $\mathbb{R}$, comumente chamada de **reta real**:



Enfatizamos que

Com o Teorema Fundamental da Geometria Analítica, resolvemos de maneira completa o problema de localizar um ponto qualquer na reta através do sistema de coordenadas, associando a cada ponto da reta uma coordenada e vice-versa.

6.3 O corpo ordenado dos números reais

Por muitos anos, a maneira de pensar grega de tudo geometrizar dominou o pensamento matemático. No entanto, por volta de 1600, através das idéias de Viète, Fermat e Descartes, iniciou-se um movimento que queria substituí-la por uma maneira mais mecânica, ou algébrica, e aplicável não apenas às grandezas geométricas como ao estudo do movimento e mecânica dos corpos físicos, ao estudo das propriedades da matéria e às transformações da energia. Em última instância, precisava-se ser capaz de operar aritmética e algébricamente com os números reais. Esta necessidade determinou o início do desenvolvimento de um raciocínio matemático mais abstrato, marcando o começo do moderno pensamento Matemático.

Dos trabalhos de Descartes, Fermat e outros, até nossos dias, ocorreram muitas mudanças relativas à abordagem das questões acima, surgindo novas maneiras de lidar algebricamente com os números racionais e reais.

Presentemente, temos à nossa disposicão uma linguagem matemática mais algebrizada, mais abstrata mas também mais simples e concisa, tornando-se bem mais fácil a definição e discussão das quatro operações elementares entre os racionais, sendo este estudo feito já no Ensino Fundamental (veja Exercício 22). Bem mais difícil é a extensão destas operações a todos os reais, percebendo-se uma grande omissão dos livros-texto sobre este assunto.

O propósito desta seção é então suprir esta lacuna, apresentando e discutindo a ampliação das quatro operações definidas sobre o conjunto $\mathbb{Q}$ (veja seção 3.3) para o conjunto $\mathbb{R}$, bem como a ampliação da ordenação que existe em $\mathbb{Q}$ (veja seção 3.4) a uma ordenação para o conjunto $\mathbb{R}$. Assim, dados $x, y \in \mathbb{R}$, queremos definir $x+y$, $x-y$, $x.y$, $x \div y$ (neste caso quando $y \neq 0$), bem como saber dizer, entre x e y, qual deles é o maior quando $x \neq y$; e empregamos aqui um ponto de vista típico do pensamento moderno da Matemática, a saber, vamos fazer tudo de uma forma tal que:

i) quando x e y forem números racionais, as respostas sejam as mesmas, tanto encarando-se x e y como reais como encarando-os como racionais;

ii) as propriedades que valem para a ordem e para as quatro operações entre números racionais continuem válidas entre os números reais (veja Exercícios 22 e 25).

Este princípio é chamado de **Princípio da Permanência de Haenkel.**

Através do Teorema Fudamental da Geometria Analítica temos uma maneira natural não só de ordenarmos os reais, como também de introduzir a operação de adição entre os mesmos; para isso, interpretamos cada real como um ponto da reta, de modo que a ordenação dos números corresponde à ordenação dos pontos na reta, e a adição de números reais positivos corresponde à justaposição de segmentos de reta. Esta era a maneira que os matemáticos gregos da Antigüidade usavam para operar com grandezas numéricas: "geometrizando" as operações com números. No entanto, esta maneira de operar pode ser bem trabalhosa; além disso, para outras operações que aparecem naturalmente entre os reais, a correspondente interpretação geométrica pode ser bastante difícil de ser obtida. Tal é o caso da operação de potenciação: x^2, x^3, x^4 etc.

No que se segue, vamos introduzir **algebricamente** tanto a ordenação quanto as 4 operações ariméticas entre os números reais.

Ordenando o conjunto dos números reais.

A partir da representação decimal de um número real podemos obter uma maneira (também natural, como a geométrica) de compararmos dois números reais: suponha que dois reais **não negativos e distintos** x, y sejam escritos como

$$\begin{aligned} x &= m, a_1 a_2 ... \\ y &= l, b_1 b_2 .... \end{aligned}$$

Com o intuito de dizer "quem é o maior" entre x e y, primeiro comparamos m com l. Se $m < l$ então diremos que x é menor do que y e escrevemos $x < y$. Se $l < m$ então invertemos a conclusão: $y < x$. Agora, se $m = l$, então comparamos a_1 com b_1. Novamente, se $a_1 < b_1$ então $x < y$ e se $b_1 < a_1$ então $y < x$. Resta então a possibilidade de $a_1 = b_1$. Temos assim $m = l$ e $a_1 = b_1$. Comparamos então a_2 com b_2 aplicando o mesmo critério. Se $a_2 = b_2$ então comparamos a_3 com b_3 e assim por diante. Pode acontecer de termos muitos dígitos da representação decimal de x iguais aos dígitos da representação de y mas, como $x \neq y$, certamente ocorrerá um primeiro valor para n para o qual $a_n \neq b_n$. Neste caso, temos $a_i = b_i$ para $i = 0, 1, ..., n-1$. Escreveremos então $x < y$ se $a_n < b_n$ e $y < x$ se $b_n < a_n$.

O raciocínio acima fornece uma maneira de ordenar **todos** os reais não negativos.

Para compararmos dois reais distintos quaisquer x e y agora fica simples:

- Positivos são sempre mairoes do que zero e negativos são sempre menores do que zero.

- Se x e y têm sinais opostos, o maior será o positivo. Se ambos são não positivos, então convencionamos, como usual, $x < y$ se $-y < -x$.

Com esta ordenação dos reais, temos válida a propriedade denominada

Lei da Tricotomia: Dados dois reais quaisquer x e y, temos uma e exatamente uma das condições abaixo satisfeitas:

$$x = y \quad \text{ou} \quad x < y \quad \text{ou} \quad y < x.$$

Notação: Também usaremos a notação $x \leq y$ significando que $x = y$ ou $x < y$.

Exercício 74 -

Verifique qual entre os dois números reais dados é o maior:

a) $3,1415161711111...$ *e* $3,14151617102122122212222122222....$

b) $1,33333$ *e* $1,333...$

c) -10 *e* $-10,999...$

Exercício 75 -

Seja $a = 2,235 = 2,34999....$ *Certifique-se que o critério de ordenação dos reais introduzido acima, ao ser empregado para comparar um dado real* x *com* a, *dá o mesmo resultado seja comparando a expansão decimal de* x *com a expansão decimal* $2,235$ *de* a, *ou com a expansão decimal* $2,34999...$ *de* a

O exercício a seguir dá uma interpretação geométrica para a ordenação dos reais:

Exercício 76 -
Dados números reais distintos x e y, tem-se $x < y$ se, e somente se, no eixo euclidiano, x é a coordenada de um ponto que está à direita do ponto que tem y para coordenada. Ou seja:

$$x = x(P) \text{ e } y = x(Q), \text{ com } Q \text{ à direita de } P.$$

No Capítulo 3, vimos como comparar dois racionais através de representações fracionárias destes racionais: escrevemo-os como frações com mesmo denominador e comparamos os numeradores (veja Seção 3.4). Então queremos nos certificar que a ordenação dos reais acima discutida, ao ser aplicada aos racionais, conduz à mesma conclusão que aquela dada pelo critério usando frações (satisfazendo, assim, o princípio da permanência de Haenkel). Com este propósito, propomos o seguinte

Exercício 77 -
Sejam r e s dois racionais quaisquer. Prove que tem-se $r \leq s$, segundo o critério de comparação de r com s através da representação de r e s por frações se, e somente se, tem-se $r \leq s$ segundo o critério de comparação de r com s através da representação decimal de r e s.

O Teorema dos Intervalos Evanescentes.

A ordenação dos reais, junto com o Teorema Fundamental da Geometria Analítica origina um teorema que é a versão numérica do Princípio dos Segmentos Evanescentes (ou Postulado do Continuum). Com efeito:

Definição 32 -
*Dados reais x, y com $x \leq y$, definimos o **intervalo (fechado) de extremos** x e y, por*

$$[x, y] = \{z \in \mathbb{R} \mid x \leq z \leq y\}$$

*Uma seqüência de intervalos $[x_n, y_n]$ com $n \in \mathbb{N}$ é dita **encaixante** se $[x_{n+1}, y_{n+1}] \subseteq [x_n, y_n]$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Exercício 78 -
Prove que uma seqüência de intervalos $[x_n, y_n]$ com $n \in \mathbb{N}$ é encaixante se, e somente se, $x_{n+1} \geq x_n$ e $y_{n+1} \leq y_n$, para todo n.

Exercício 79 -
Conforme notação introduzida anteriormente, dado $x \in \mathbb{R}$, $P(x)$ denota o ponto da reta euclidiana que tem x como coordenada. Prove que uma seqüência de intervalos $[x_n, y_n]$ com $n \in \mathbb{N}$ é encaixante se, e somente se, a seqüência de segmentos $P(x_n)P(y_n)$ é encaixante.

Definição 33 -
*Dizemos que uma seqüência encaixante de intervalos $[x_n, y_n]$ com $n \in \mathbb{N}$ é **evanescente** se a correspondente seqüência encaixante de segmentos $P(x_n)P(y_n)$ é evanescente.*

Temos daí a tradução numérica do Princípio dos Segmentos Evanescentes:

Teorema 8 - *Teorema dos Intervalos Evanescentes (também conhecido como Teorema dos Intervalos Encaixantes)*

Seja $[x_n, y_n]$ *com* $n \in \mathbb{N}$ *uma seqüência de intervalos encaixantes e evanescentes. Então existe um único número real* x *pertencente a todos os intervalos da seqüência, isto é, existe um único* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $x \in [x_n, y_n]$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Exercício 80 -

Prove o teorema anterior.

Passamos agora a abordar as quatro operações aritméticas entre os números reais, ditas também operações fundamentais, a saber: adição, subtração, multiplicação e divisão, de uma forma tal que elas sejam ampliações das operações fundamentais entre os racionais. Discutiremos detalhadamente apenas a operação de adição.

A operação de adição em $\mathbb{R}$.

Na seção anterior, utilizamos a representação decimal dos reais para introduzir uma ordem entre estes números. Poderíamos usar aqui também esta representação para procurar definir, de maneira natural, a adição entre os mesmos. Em alguns casos fica bem claro de que maneira uma tal adição deve ser feita. Por exemplo, é natural esperar-se que a soma dos reais

$$1,01001000100001...$$
$$3,02002000200002...$$

seja o real

$$4,030030003000003.....$$

No entanto, em outros casos, fica bastante difícil descrever qual o resultado esperado. Por exemplo, tente o leitor descrever o resultado da adição de

$$1,01001000100001...$$

com o real

$$3,09009000900009...$$

Provavelmente o leitor já deve ter sentido uma certa dificuldade em fazer tal operação. No entanto, este caso ainda é razoavelmente simples. Tente agora somar

$$1,01001000100001...$$

com

$$3,09009900099900009999...$$

Na verdade, não é muito difícil de se perceber (é importante que o leitor faça algumas tentativas, até adquirir esta percepção), de que para se estabelecer uma operação natural de adição entre os reais, através de uma regra envolvendo os dígitos das representações decimais dos números a serem somados, embora sendo possível, é tremendamente difícil. O que se verifica é que é necessária a consideração de muitos casos, subcasos, subsubcasos e assim por diante.

Assim, para evitar uma tamanha complicação, vamos proceder de uma maneira indireta, usando as aproximações por racionais dos reais a serem somados e reduzindo a definição de adição dos reais à fácil e familiar adição de racionais.

Sejam x, y dois reais quaisquer.

$1^o caso$: x e y são positivos, digamos, com expansões decimais

$$\begin{aligned} x &= m, a_1 a_2 \ldots \\ y &= l, b_1 b_2 \ldots . \end{aligned}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos os racionais dados por

$$\begin{aligned} z_n &= m, a_1 a_2 \ldots a_n \\ w_n &= m, a_1 a_2 \ldots a_n + \frac{1}{10^n}. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} u_n &= l, b_1 b_2 \ldots b_n \\ v_n &= l, b_1 b_2 \ldots b_n - \frac{1}{10^n}. \end{aligned}$$

Então sabemos que, para todo n,

$$\begin{aligned} z_n &\leq x \leq w_n \\ u_n &\leq y \leq v_n. \end{aligned}$$

e, mais até, para cada n,

$$\begin{aligned} z_n &\leq z_{n+1} \leq x \leq w_{n+1} \leq w_n \\ u_n &\leq u_{n+1} \leq y \leq v_{n+1} \leq v_n. \end{aligned}$$

Ora, z_n, w_n, u_n, v_n são todos números racionais, e portanto já sabemos somá-los em $\mathbb{Q}$ (isto é, representando-os como frações e aplicando a familiar regra de adição de frações). Além disso, queremos definir a adição de números reais de uma tal forma que as propriedades válidas para adição de racionais continuem válidas para números reais (veja Exercício ??). Em particular, então, gostaríamos de definir $x + y$ de tal forma que seja verdadeira a seguinte implicação

$$z_n \leq x \leq w_n \quad \text{e} \quad u_n \leq y \leq v_n \Rightarrow u_n + z_n \leq x + y \leq w_n + v_n. \tag{10}$$

Note que, se isto fosse verdade, teríamos o novo número real $x+y$ pertencente a todos os intervalos $[z_n + u_n, w_n + v_n]$. Temos aí uma dica de como definir tal número: mostramos a seguir que a seqüência de intervalos $[z_n + u_n, w_n + v_n]$ é encaixante e evanescente, e definimos $x + y$ como sendo o único número real pertencente a todos estes intervalos (e cuja existência e unicidade está garantida pelo Teorema dos Intervalos Evanescentes - veja Teorema 8). Ao definirmos desta maneira, teremos automaticamente a propriedade (10) sendo satisfeita.

De fato, inicialmente note que

$$\begin{aligned} w_n - z_n &= \frac{1}{10^n} \\ v_n - u_n &= \frac{1}{10^n}. \end{aligned}$$

Daí, pelas propriedades da adição e da ordenação em $\mathbb{Q}$ (veja Exercício 25), afirmamos que

$$z_n + u_n \leq z_{n+1} + u_{n+1} \leq w_{n+1} + u_{n+1} \leq w_n + v_n \tag{11}$$

e

$$w_n + v_n - (z_n + u_n) = (w_n - z_n) + (v_n - u_n) = \frac{2}{10^n}. \tag{12}$$

Exercício 81 -
Comprove (11) e (12).

Decorre de (11) e (12) que $[z_n + u_n, w_n + v_n]$ forma uma seqüência de intervalos encaixante e evanescente.

Definição 34 -
Sejam x e y dois números reais positivos, e sejam

$$\begin{aligned} x &= m, a_1 a_2 \ldots \\ y &= l, b_1 b_2 \ldots. \end{aligned}$$

suas expansões decimais. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos os racionais dados por

$$\begin{aligned} z_n &= m, a_1 a_2 \ldots a_n \\ w_n &= m, a_1 a_2 \ldots a_n + \frac{1}{10^n}. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} u_n &= l, b_1 b_2 \ldots b_n \\ v_n &= l, b_1 b_2 \ldots b_n + \frac{1}{10^n}. \end{aligned}$$

O número real $x + y$ é o único número real comum a todos os intervalos da seqüência de intervalos $[z_n + u_n, w_n + v_n]$ com $n \in \mathbb{N}$.

O procedimento que usamos acima para definir a soma dos reais positivos x e y não nos diz explicitamente como é a expansão decimal de $x + y$ em termos das expansões decimais de x e de y, mas nos fornece aproximações racionais de $x + y$ tão boas quanto se queira. De fato, basta notar que $z_n + u_n$ e $w_n + v_n$ fornecem aproximações racionais, por falta e por excesso, para o número real $x + y$, com a precisão que se desejar, mas - **atenção!** - com erro menor ou igual a $2/10^n$ por (12), e não $1/10^n$. Esta possibilidade de termos aproximações racionais tão boas quanto queiramos para a soma nos diz que, do ponto de vista das aplicações técnicas, por exemplo, este procedimento é satisfatório.

Exercício 82 -

Use a definição de adição dada acima para justificar um dos nossos exemplos iniciais

$$1,01001000100001..+3,02002000200002...=4,030030003000003.....$$

Exercício 83 -

Sejam $x = 2,79323189...$ *e* $y = 13,83452153...$. *Determine um racional próximo de* $x+y$, *com uma precisão maior do que* $1/10^5$, *(isto é, com um erro menor do que* $1/10^5$*).*

Exercício 84 -

Aplique o processo acima para somar os racionais $0,32\overline{15}$ *e* $2,134\overline{120}$ *e mostre que o resultado é de fato o esperado: a expansão decimal do racional*

$$\frac{3215-32}{9900} \quad e \quad 2+\frac{134120-134}{999000}.$$

2^o*caso* : A regra de adição de dois reais negativos segue um caminho óbvio, sendo por isso deixado como exercício:

Exercício 85 -

i) Defina a soma de dois reais negativos.

ii) Determine um racional próximo da soma de $x = -2,79323189...$ *e* $y = -13,83452153...$ *com erro menor do que* $1/10^3$.

3^o*caso* : Para somarmos um real positivo com um real negativo, digamos,

$$\begin{aligned} x &= m, a_1 a_2 ... \\ y &= -l, b_1 b_2 ..., \end{aligned} \tag{13}$$

tendo em vista que queremos que a definição seja uma ampliação de uma tal soma no conjunto $\mathbb{Q}$, consideramos, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} z_n &:= m, a_1 a_2 ... a_n \\ w_n &:= m, a_1 a_2 ... a_n + \frac{1}{10^n}, \end{aligned} \tag{14}$$

e

$$\begin{aligned} u_n &= l, b_1 b_2 ... b_n \\ v_n &= l, b_1 b_2 ... b_n + \frac{1}{10^n}. \end{aligned} \tag{15}$$

Então sabemos que

$$\begin{aligned} z_n &\leq x \leq w_n \\ u_n &\leq -y \leq v_n, \end{aligned}$$

(onde por $-y$ estamos denotando o real absoluto $l, b_1 b_2 ...$), com

$$\begin{aligned} w_n - z_n &= \frac{1}{10^n} \\ v_n - u_n &= \frac{1}{10^n}. \end{aligned}$$

Ora, z_n, w_n, u_n, v_n são todos números racionais, e pelas propriedades válidas em $\mathbb{Q}$ temos

$$(w_n - u_n) - (z_n - v_n) = (w_n - z_n) + (v_n - u_n) = \frac{2}{10^n}, \tag{16}$$

e portanto

$$z_n - v_n \leq w_n - u_n. \tag{17}$$

Exercício 86 -
Comprove as afirmações feitas em (16) e (17).

Exercício 87 -
Prove que $z_n - v_n$ e $w_n - u_n$ são extremos de uma seqüência de intervalos encaixantes e evanescentes.

Portanto, pelo Exercício acima e pelo Teorema dos Intervalos Evanescentes, existe um único número comum a todos os intervalos desta seqüência. A este número denominamos a **soma** de x com y e a denotamos por $x + y$.

Exercício 88 -
Prove que a adição de números reais ainda é comutativa, associativa, admite o número $0 = 0,000...$ como elemento neutro e admite simétricos, (Veja Exercício 22 para a definição destas propriedades), e portanto o Princípio de Haenkel está de fato sendo obedecido com a definição dada acima para soma de reais.

Exercício 89 -
Prove que se $x, y, z \in \mathbb{R}$ e $x < y$ então $x + z < y + z$, ou seja, a propriedade (i) enunciada no Exercício 25 para racionais continua válida para reais.

Exercício 90 -
Determine (sem usar calculadora), um racional próximo de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, com um erro menor do que $1/10^2$. (Veja Exercício ??).

Agora podemos definir comprimento de um intervalo fechado qualquer:

Definição 35 -
Sejam a, b números reais tais que $a < b$. Definimos o comprimento do intervalo $[a, b]$ como sendo o número real positivo $b - a$.

Tratemos agora da operação de multiplicação.

Operação de multiplicação em $\mathbb{R}$

Sejam x, y dois reais quaisquer.
1^o*caso* : x e y são positivos como em (13) e, para cada $n \in \mathbb{N}$, sejam z_n, w_n, u_n, v_n os racionais dados em (14) e em (15). Então das propriedades dos racionais (veja Exercício 25) afirmamos que podemos deduzir que

$$z_n.u_n \leq w_n.v_n,$$

com

$$
\begin{aligned}
w_n.v_n - z_n.u_n &\leq (z_n + \frac{1}{10^n})(u_n + \frac{1}{10^n}) - z_n.u_n \\
&= \frac{1}{10^n}(u_n + z_n) + \frac{1}{10^{2n}} \\
&\leq \frac{1}{10^n}(v_0 + w_0) + \frac{1}{10^{2n}} \\
&= \frac{1}{10^n}(z_0 + u_0 + \frac{2}{10^n}) + \frac{1}{10^{2n}} \\
&= \frac{1}{10^n}(z_0 + u_0) + \frac{3}{10^{2n}}.
\end{aligned}
$$

Exercício 91 -

Prove a afirmação acima, e conclua que os intervalos $[z_n u_n, w_n v_n]$ formam uma seqüência de intervalos encaixantes e evanescentes.

Do Exercício acima e do Teorema dos Intervalos Evanescentes, concluímos que existe um único real comum a todos estes intervalos.

Definição 36 -

Sejam x e y dois números reais positivos, e sejam

$$
\begin{aligned}
x &= m, a_1 a_2 \ldots \\
y &= l, b_1 b_2 \ldots.
\end{aligned}
$$

suas expansões decimais. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos os racionais dados por

$$
\begin{aligned}
z_n &= m, a_1 a_2 \ldots a_n \\
w_n &= m, a_1 a_2 \ldots a_n + \frac{1}{10^n}.
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
u_n &= l, b_1 b_2 \ldots b_n \\
v_n &= l, b_1 b_2 \ldots b_n + \frac{1}{10^n}.
\end{aligned}
$$

*O **produto de x por y** é o único número real comum a todos os intervalos da seqüência de intervalos $[z_n u_n, w_n v_n]$ com $n \in \mathbb{N}$, e é denotado por xy.*

Exercício 92 -

Definimos acima a operação de multiplicação entre reais positivos. Estenda esta operação a todos os reais.

Exercício 93 -

Prove que a multiplicação de números reais ainda é comutativa, associativa, admite o número $1 = 1,000\ldots$ como elemento neutro e todo numero real não nulo tem um inverso multiplicativo, (Veja Exercício 22 para a definição destas propriedades), e portanto o Princípio de Haenkel está de fato sendo obedecido com a definição dada acima para produto de reais.

Exercício 94 -

Prove a "regra de multiplicação por potências de 10": para todo natural n e para todo número real r,

$$10^n \times r = u_m...u_0 a_1 a_2 ... a_n, a_{n+1} a_{n+2} ...,$$

se a expansão decimal de r é dada por

$$r = u_m...u_0, a_1 a_2 ... a_n a_{n+1} a_{n+2} ... .$$

Resumindo: No que se segue reenunciamos as propriedades básicas das operações entre os números reais ressaltadas nos Exercícios 88, 89 e 93. A prova destas propriedades pode parecer um tanto quanto repetitiva. No entanto, se o leitor desejar adquirir mais familiaridade com as operações dos reais (usando as definições que apresentamos acima), recomendamos a resolução destes exercícios.

Propriedades básicas da ordem e das quatro operações nos reais.
Sejam x, y, z quaisquer números reais. Então:

- **sobre a ordem:**

i) $x \leq x$
ii) $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$
iii) $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

- **sobre as operações de adição (e subtração):**

iv) $x + y = y + x$ (comutatividade)
v) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (associatividade)
vi) $x + 0 = x$ ($\mathbb{R}$ admite elemento neutro em relação à adição, a saber, o número 0)
vii) $x + (-x) = 0$ ($\mathbb{R}$ admite simétricos em relação à adição, e o simétrico de um número real x é o $-x$)
(Note que com este exercício, a subtração pode ser vista simplesmente como $x - y = x + (-y)$)

Sobre as operações de multiplicação e divisão):

viii) $x.y = y.x$ (comutatividade)
ix) $(x.y).z = x.(y.z)$ (associatividade)
x) $x.1 = x$ ($\mathbb{R}$ admite elemento neutro em relação à multiplicação)
xi) se $x \neq 0$, $x.x^{-1} = 1$ ($\mathbb{R}$ admite inversos em relação à multiplicação para números reais não nulos, e o inverso de um elemento $x \neq 0$ é o $1/x = x^{-1}$)
(Note que, como a subtração, a divisão pode ser vista simplesmente como $x \div y = x.y^{-1}$)
xii) $x.(y + z) = x.y + x.z$ (distributividade da multiplicação em relação à adição)

Sobre a ordem comparada às operações:

xiii) $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ (compatibilidade da ordem com a adição)
(Note que se este z for negativo então estaremos enunciando o mesmo tipo de propriedade com a subtração)
xiv) $x \leq y$ e $z > 0 \Rightarrow x.z \leq y.z$ (compatibilidade da ordem com a multiplicação)
(Note que se este z for o inverso de algum número real então estaremos enunciando o mesmo tipo de propriedade com a divisão)

Todas as propriedades listadas acima nos permitem falar no **corpo ordenado dos reais.**

Exercício 95 -

Mostre que a propriedade (xiv) acima não vale se tomamos $z < 0$.

Exercício 96 -

Prove, a partir das proriedades listadas acima, que também são válidas as seguintes propriedades para os números reais: para x, y *números reais quaisquer, temos*

i) $x > 0$ *e* $y > 0 \Rightarrow x + y > 0$ *e* $xy > 0$

ii) $x < 0$ *e* $y < 0 \Rightarrow x + y < 0$ *e* $xy > 0$

iii) $x > 0$ *e* $y < 0 \Rightarrow xy < 0$ *e que* $x + y$ *às vezes pode ser positivo e às vezes pode ser negativo.*

Exercício 97 -

Prove que a propriedade arquimediana continua válida entre os números reais: Dados $a, b \in \mathbb{R}$ *com* $a \neq 0$ *existe um inteiro* m *tal que* $ma > b$.

Exercício 98 -

a) Demonstre que se $x, y \in \mathbb{R}$ *e* $x < y$ *então*

$$x < \frac{x+y}{2} < y.$$

O número $\frac{x+y}{2}$ *chama-se* **média aritmética** *entre* x *e* y.

b) Demonstre que se $x, y \in \mathbb{R}$ *e* $0 < x < y$ *então*

$$x < \sqrt{xy} < y.$$

O número $\sqrt{xy}$ *chama-se* **média geométrica** *entre* x *e* y.

Exercício 99 -

Responda as seguintes questões, justificando sua resposta

i) $2 + \sqrt{2}$ *é ou não racional?*

ii) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ *é ou não racional?*

Exercício 100 -

Complete a tabela abaixo, onde x *e* y *são números reais:*

x	y	$x + y$	$x \times y$
$\in \mathbb{Q}$	$\in \mathbb{Q}$		
$\in \mathbb{Q}$	$\notin \mathbb{Q}$		
$\notin \mathbb{Q}$	$\in \mathbb{Q}$		
$\notin \mathbb{Q}$	$\notin \mathbb{Q}$		

Qual sua conclusão sobre a subtração entre números reais e a divisão de um número real por outro número real não nulo?

Exercício 101 -

Prove que se $a, b, c \in \mathbb{R}$ *são tais que*

i) $a + b = c$ *e* $c \in \mathbb{Q}$ *então não podemos concluir que* $a, b \in \mathbb{Q}$.

ii) $a + b = c$ *e* $a, c \in \mathbb{Q}$ *então necessariamente* $b \in \mathbb{Q}$.

Exercício 102 -

i) Prove que o conjunto $\mathbb{I}$ *dos números irracionais é um conjunto denso (veja Definição 17).*

ii) V ou F? Justifique. O conjunto $\mathbb{I}$ *é infinito.*

6.4 Equações e inequações envolvendo números reais

Queremos agora mostrar como são as propriedades das operações com números reais que nos garantem a resolução de equações e inequações envolvendo tais números. Em inequações são muito úteis as regras de sinal, como nos mostra o exemplo a seguir:

Exemplo 55 -

Resolvamos a seguinte inequação: $(x-1)(x-3) > 0$. *O leitor é convidado a, em cada passo, identificar (tanto para* $\Rightarrow$ *quanto para* $\Leftarrow$, *a propriedade que está sendo utilizada).*

$(x-1)(x-3) > 0 \Leftrightarrow (x-1)$ *e* $(x-3)$ *têm mesmo sinal, ou seja, são ambos positivos ou ambos negativos. Daí:*

- resolução geométrica: levando em conta que $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$ *e* $x-3>0 \Leftrightarrow x>3$, *marcamos em uma reta real os sinais de* $x-1$ *para cada valor de* x *e, noutra reta, os sinais de* $x-3$:

Daí, vemos que ambos têm o mesmo sinal se e só se $x \in (3, +\infty)$ *ou* $x \in (-\infty, 1)$.

-resolução algébrica: dividindo-se em dois casos:

$(x-1)$ *e* $(x-3)$ *são ambos positivos*$\Leftrightarrow x > 1$ *e* $x > 3 \Leftrightarrow x > 3 \Leftrightarrow x \in (3, +\infty)$;

$(x-1)$ *e* $(x-3)$ *são ambos negativos*$\Leftrightarrow x < 1$ *e* $x < 3 \Leftrightarrow x < 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1)$,

e portanto são ambos positivos ou ambos negativos se e só se $x \in (3, +\infty)$ *ou* $x \in (-\infty, 1)$.

Exercício 103 -

Resolva as seguintes inequações:

i) $(x-1)(x-3) > 3$ *ii)* $\frac{x-2}{x+3} > 0$ *iii)* $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} > 0$

Exemplo 56 -

Resolvamos a seguinte inequação: $3 - x^2 < 7$.

$3 - x^2 < 7 \Leftrightarrow 0 < x^2 + 10$, *ou, de outra forma,* $-10 < x^2$

Conclusão: ***Qualquer*** *número real satisfaz a inequação.*

Exercício 104 -

Onde está o erro na demonstração a seguir?

$$
\begin{aligned}
x = y \Rightarrow x^2 &= xy \Rightarrow \\
x^2 - y^2 &= xy - y^2 \Rightarrow \\
(x+y)(x-y) &= y(x-y) \Rightarrow \\
x + y &= y \Rightarrow \\
y + y &= y \Rightarrow \\
2y &= 2 \Rightarrow \\
2 &= 1
\end{aligned}
$$

Exercício 105 -

V ou F? Justifique. Se a, b *são números reais tais que* $a < b$ *então necessariamente* $a^2 < b^2$.

Exercício 106 -

Sejam x, y *números reais. Prove que* $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ *quando e só quando* $x = 0$ *ou* $y = 0$.

Definição 37 -

O ***módulo*** *de um número real qualquer* x *é denotado por* $|x|$ *e definido da seguinte forma:*

$$|x| = \begin{cases} x, & se\ x \geq 0 \\ -x, & se\ x < 0 \end{cases}.$$

Exemplo 57 -

A expressão $|x-4|$, *sem fazer uso de módulo, pode ser reescrita da seguinte forma*

$$|x-4| = \begin{cases} x-4, \text{ se } x-4 \geq 0 \\ -(x-4), \text{ se } x-4 < 0 \end{cases},$$

ou seja,

$$|x-4| = \begin{cases} x-4, \text{ se } x \geq 4 \\ -x+4, \text{ se } x < 4 \end{cases},$$

e portanto a equação $|x-4| = 5$ *pode ser resolvida em dois casos:*

1°*caso* : $x \geq 4$, *caso em que a equação se reescreve na forma*

$$x - 4 = 5,$$

que tem para solução $x = 9$,

2°*caso* : $x < 4$, *caso em que a equação se reescreve na forma*

$$-(x-4) = 5,$$

ou seja,

$$-x + 4 = 5,$$

que tem para solução $x = -1$.

Daí concluímos que existem duas soluções para a equação dada: 9 *e* -1.

Exercício 107 -

a) Reescreva a expressão abaixo sem fazer uso de módulo.

i) $|x| - |x^2|$ *ii)* $|x+3| - |x-5|$

b) Agora resolva as seguintes inequações:

iii) $|x| - |x^2| > 3$ *ii)* $|x+3| - |x-5| < 7$

Exercício 108 -

Resolva as seguintes equações:

i) $\frac{x^2-6x+9}{x^2+6x+9} = 0$ *ii)* $|7x+5| = 10$

iii) $|x^2 - 5| = 4$ *iv)* $2|x+1| + |x-1| = 12$

Exercício 109 *(UFRGS/96)* -

Se $-1 < 2x + 3 < 1$ *então* $2 - x$ *está entre que valores?*

Exercício 110 -

Resolva as seguintes inequações:

i) $(x-1)(x-2) < 0$ *ii)* $\frac{x+1}{3-x} < 0$

iii) $x^3 - x^2 \geq 0$ *iv)* $\frac{1}{3x-1} < \frac{2}{x+5}$

v) $3x - 1 < 2x + 5 \leq x + 1 \geq 0$

Exercício 111 -

Resolva as seguintes inequações envolvendo módulo:

i) $|5x+3| < 5$ *ii)* $|\frac{7-2x}{5+3x}| \leq \frac{1}{2}$

iii) $|7x+5| > 12$ *iv)* $1 < |x-2| < 5$

v) $|3-2x| \leq |8+4x|$ *vi)* $|x+4| \leq |2x-6|$

6.5 Leitura complementar: supremo e ínfimo de um conjunto

O assunto que aqui abordamos é parte obrigatória dos cursos mais avançados de Análise Matemát: Nós o apresentamos aqui pois ele será utilizado posteriormente, ao estudarmos funções trigonométricas

Definição 38 -
Um subconjunto não vazio $S \subset \mathbb{R}$ é dito ***limitado superiormente*** *se existe um real M que é maior ou igual a todo elemento de S, ou seja, tem-se $x \leq M$ para todo $x \in S$. Analogamente, S é dito* ***limitado inferiormente*** *se existe m tal que $m \leq x$ para todo $x \in S$.*

Definição 39 -
Seja S um subconjunto de $\mathbb{R}$ limitado superiormente. Qualquer real w que satisfaz $x \leq w$ para todo $x \in S$ é dito uma ***cota superior*** *de S. Analogamente define-se* ***cota inferior*** *de S.*

Definição 40 -
Seja S um conjunto de $\mathbb{R}$ limitado superiormente. O ***supremo*** *de S é a menor das cotas superiores de S. Em outras palavrs, um número real a é dito o* ***supremo*** *de S se*
i) a é uma cota superior de S
ii) se w é também uma cota superior de S então $a \leq w$.

Notação: O supremo de S é denotado por $\sup S$.

Exercício 112 -
a) Sejam u, v reais com $u < v$, e seja

$$I = [u, v]$$

ou

$$I = [u, v) := \{x \in \mathbb{R} \mid u \leq x < v\}.$$

Prove que, em qualquer um dos casos, $\sup I = v$
b) Determine

$$\sup\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}.$$

Exercício 113 -
De maneira análoga ao supremo de um conjunto limitado superiormente, defina ***ínfimo*** *de um conjunto S limitado inferiormente (e denote-o por $\inf S$).*

Exercício 114 -
Dizemos que um conjunto numérico $U \subset \mathbb{R}$ satisfaz o ***Axioma do Supremo*** *se qualquer subconjunto $S \subset U$ limitado superiormente tem um supremo e ele está em U.*
a) Prove que $\mathbb{Z}$ satisfaz o axioma do supremo.
b) Prove que $\mathbb{Q}$ não satisfaz o axioma do supremo.

Exercício 115 -
Prove que o Axioma do Supremo para $S = \mathbb{R}$ é equivalente ao Teorema dos Intervalos Evanescentes.