

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

UM ALGORITMO NUMÉRICO DE INTEGRAÇÃO DE TEMPO
PARA ESTRUTURAS DINÂMICAS COM DISSIPACÕES: O
MÉTODO GENERALIZADO- α

por

Carmo Henrique Kamphorst

Dissertação para a obtenção do Grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Porto Alegre
Janeiro de 2003

**UM ALGORITMO NUMÉRICO DE INTEGRAÇÃO DE TEMPO
PARA ESTRUTURAS DINÂMICAS COM DISSIPACÕES: O
MÉTODO GENERALIZADO- α**

por

Carmo Henrique Kamphorst

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, PPGMAp, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Área de Concentração: Vibrações e Métodos Numéricos

Orientador: Prof. Dr. Julio Cesar Ruiz Claeysen

Aprovada por:

Prof. Dra. Elba Orocía Bravo Asenjo (UASP)

Prof. Dr. João Batista da Paz Carvalho (PPGMAp/UFRGS)

Prof. Dra. Teresa Tsukazan de Ruiz (PPGMAp/UFRGS)

Prof. Dr. Vilmar Trevisan

Coordenador do PPGMAp

Porto Alegre, Janeiro de 2003

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo estudar e aplicar um método de integração numérica de tempo para estruturas dinâmicas com dissipação de energia. Nessa dissertação tal método é analisado e posteriormente implementado em MATLAB, afim de resolver algumas aplicações em sistemas dinâmicos dotados de massas, molas e amortecedores que são apresentados no primeiro capítulo.

Usando o método implementado em MATLAB, também é apresentada uma aplicação para vibrações transversais em cordas aceleradas axialmente.

ABSTRACT

TITLE: “A TIME INTEGRATION ALGORITHM FOR STRUCTURAL DYNAMICS WITH IMPROVED NUMERICAL DISSIPATION: THE GENERALIZED- α METHOD”

The objective of this work is to study and to apply a method of numerical time-integration for dynamical structures with energy dissipation. In this dissertation such method is analyzed and later implemented in MATLAB, in order to solve some applications in dynamical systems with masses, springs and shock absorbers introduced in the first chapter.

Using the method implemented in MATLAB, an application for transverse vibrations in axially-accelerated strings is also presented.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
2	SISTEMAS DINÂMICOS COM DISSIPACÕES	2
2.1	Sistemas Massa-Mola-Freio Amortecedor	2
2.2	Sistemas Dinâmicos com n graus de liberdade	4
3	OS MÉTODOS NUMÉRICOS DIRETOS DE INTEGRAÇÃO E O MÉTODO GENERALIZADO-α	10
3.1	Introdução	10
3.2	Métodos Numéricos de Integração	10
3.2.1	Método de Runge-Kutta-Felhberg	10
3.2.2	Método de Houbolt	13
3.2.3	Método θ de Wilson	15
3.2.4	Método de Newmark	16
3.3	Algoritmo do Método Generalizado- α	18
3.4	Análise do Algoritmo Generalizado- α	20
3.5	Relações Entre os Parâmetros α_m , α_f , β e γ	21
3.6	O Método Generalizado- α na Resolução de Problemas com n Massas Acopladas a Molas e Amortecedores	25

4	VIBRAÇÕES TRANSVERSAIS NUMA CORDA ACELERADA AXIALMENTE	33
5	CONCLUSÕES	44
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	46

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1	Um sistema massa-mola-freio amortecedor	3
Figura 2.2	Três massas acopladas a molas	5
Figura 3.1	Solução exata e aproximada de $x'' + 0.05x' + 4x = 0$ com $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, $\alpha_f = 0.4$ e $\alpha_m = 0.2$	24
Figura 3.2	Solução exata e aproximada de $x'' + 0.05x' + 4x = 0$, com $X(0) =$ 1 , $x'(0) = 0$, $\alpha_f = 0.5$ e $\alpha_m = 0.506$	25
Figura 3.3	Sistema livre com 3 graus de liberdade	26
Figura 3.4	Deslocamentos no domínio tempo - Sistema não Forçado	27
Figura 3.5	Velocidades no domínio tempo - Sistema não Forçado	28
Figura 3.6	Acelerações no domínio tempo - Sistema não Forçado	29
Figura 3.7	Deslocamentos no domínio tempo - Sistema Forçado	30
Figura 3.8	Velocidades no domínio tempo - Sistema Forçado	31
Figura 3.9	Acelerações no domínio tempo - Sistema Forçado	32
Figura 4.1	Sistema de duas polias acopladas a uma correia	33
Figura 4.2	Primeira componente do vetor deslocamento	37
Figura 4.3	Quinta componente do vetor deslocamento no intervalo $[2, 5]$	37
Figura 4.4	Quinta componente do vetor deslocamento no intervalo $[5, 7.5]$	38
Figura 4.5	Segunda, quarta e sexta componentes do vetor velocidade	38
Figura 4.6	Segunda, quarta e sexta componentes do vetor aceleração	39

Figura 4.7	<i>Décima componente do vetor deslocamento</i>	40
Figura 4.8	<i>Décima quinta componente do vetor deslocamento no intervalo [2, 5]</i>	41
Figura 4.9	<i>Vigésima componente do vetor deslocamento no intervalo [2, 5]</i>	41
Figura 4.10	<i>Décima quinta componente do vetor deslocamento no intervalo [5, 7.5]</i>	42
Figura 4.11	<i>Vigésima componente do vetor deslocamento no intervalo [5, 7.5]</i>	42
Figura 4.12	<i>Quarta, oitava e décima segunda componentes do vetor velocidade</i>	43
Figura 4.13	<i>Quarta, oitava e décima segunda componentes do vetor aceleração</i>	43

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 4.1	Tabela de Símbolos	34
Tabela 4.2	Dados para a primeira simulação	36
Tabela 4.3	Dados para a segunda simulação	40

1 INTRODUÇÃO

Toda a matéria (sólida, líquida ou gasosa) é capaz de vibrar, isto é, de oscilar em torno de uma posição de equilíbrio. O estudo deste, que é chamado fenômeno de vibração, abrange a inter-relação entre causas do movimento (forças) e o movimento em si (que nesta dissertação será representado por suas variáveis de estado), e é de extrema importância em todos os projetos de máquinas de lavar, peneiras, correntes transportadoras, prédios, entre outros.

Tendo em vista as dificuldades numéricas encontradas ao se resolver problemas de integração de tempo em estruturas dinâmicas com oscilações, estudar e aplicar-se-á neste trabalho, um método de integração numérica de tempo para tais situações. Tal método é conhecido como **Método Generalizado- α** .

Iniciamente será realizada uma rápida abordagem quanto a modelagem de problemas envolvendo sistemas dinâmicos com oscilações, com o intuito de demonstrar o porquê de tais problemas serem resolvidos por equações diferenciais de segunda ordem. Constatar-se-á o grau de dificuldade com que nos deparamos ao tentar solucionar algumas destas equações, procurando desta maneira mostrar a importância do uso de um método numérico eficiente.

A seguir é feita uma recapitulação de alguns métodos numéricos diretos como: Runge-Kutta-Fehlberg, Houbolt, θ de Wilson e Newmark.

Posteriormente apresenta-se o algoritmo do Método Generalizado- α . Discutiremos alguns parâmetros dos quais depende a sua precisão e analisaremos o seu desempenho. Também implementa-se este método numérico no MATLAB, afim de solucionar algumas aplicações em sistemas dinâmicos dotados de massas, molas e amortecedores, e com vibrações transversais em cordas aceleradas axialmente. Usa-se o método de Galerkin para determinar as matrizes de massa, amortecimento e rigidez associadas ao sistema.

2 SISTEMAS DINÂMICOS COM DISSIPACÕES

2.1 Sistemas Massa-Mola-Freio Amortecedor

O estudo teórico dos fenômenos de vibração é efetuado com base em modelos: o **modelo físico**, que é a representação esquemática do sistema real, e o **modelo matemático**, que é a representação analítica, através de uma equação ou de um sistema de equações, que descreve o comportamento dinâmico do modelo físico em estudo.

Os modelos físicos envolvem basicamente três elementos: massa (elemento inercial), mola (elemento elástico) e amortecimento (elemento dissipativo).

Afim de fazer um estudo de sistemas dissipativos com dois ou mais corpos, considera-se uma massa m ligada a uma mola comum que possua uma extremidade presa a uma parede fixa, e que resista a compressão, bem como ao estiramento; o que serve como um exemplo relativamente simples das vibrações que ocorrem em sistemas dinâmicos mais complexos.

Sendo assim, caso o corpo esteja sobre uma superfície horizontal sem atrito, poderá movimentar-se apenas para frente e para trás; sendo que o deslocamento x em relação à posição original, de acordo com a Lei de Hooke, é diretamente proporcional à força restauradora F_S :

$$F_S = -kx, \quad (2.1)$$

onde k é a constante elástica da mola.

Considera-se também que o corpo de massa m esteja preso numa extremidade a uma mola e que a outra extremidade esteja presa a um dispositivo amortecedor, conforme a figura:

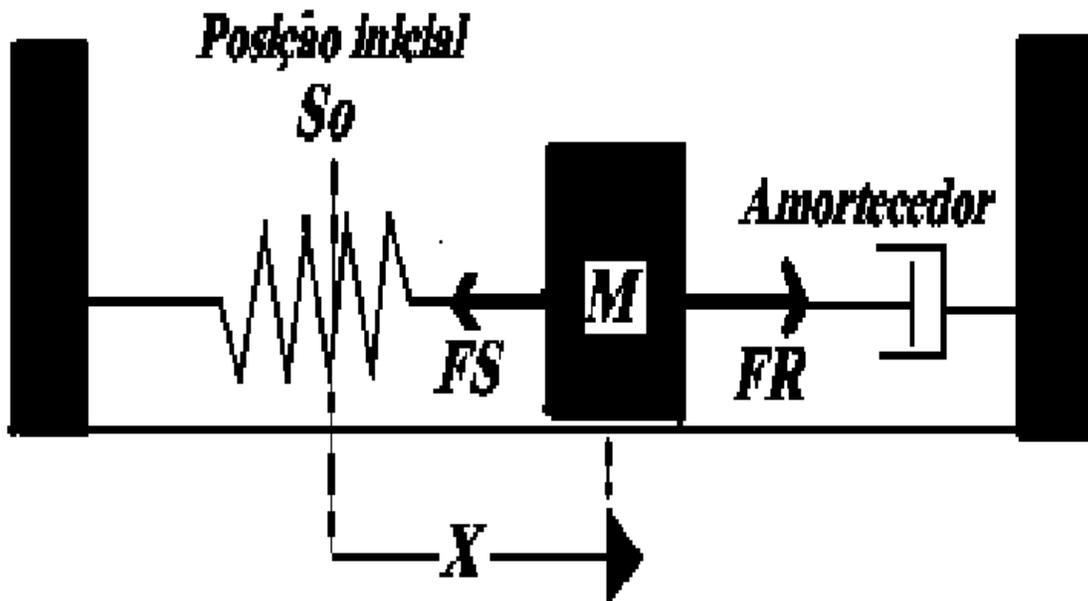


Figura 2.1 *Um sistema massa-mola-freio amortecedor*

Observe que o amortecedor produz uma força freio F_R oposta ao movimento e proporcional à velocidade da massa:

$$F_R = -cx' = -c \frac{dx}{dt}, \quad (2.2)$$

onde c é uma constante positiva denominada de constante de amortecimento do freio amortecedor. Geralmente consideramos F_R como representando forças de atrito do nosso sistema, tais como a resistência do ar.

Considerando ainda uma força externa F_E agindo sobre o corpo, teremos como força resultante F do sistema:

$$F = F_S + F_R + F_E \quad (2.3)$$

Usando a lei de Newton em (2.3) temos:

$$m.a = F_S + F_R + F_E, \quad \text{com } a = \text{aceleração}$$

$$mx'' + cx' + kx = F_E \quad (2.4)$$

que rege o movimento da massa.

Assim sendo, pode-se classificar um sistema dinâmico com vibrações como:

- NÃO AMORTECIDO: caso $c = 0$;
- LIVRE: caso $F_E(t) = 0$;
- FORÇADO: caso $F_E(t) \neq 0$

2.2 Sistemas Dinâmicos com n graus de liberdade

O número de coordenadas generalizadas independentes necessárias para descrever a dinâmica de um sistema de vibrações determina o seu número de graus de liberdade. Assim, o sistema vibratório que descreveu-se anteriormente é um sistema com 1 grau de liberdade.

Nos casos em que se possui n corpos dotados de massa expostos a forças dissipativas (sistema com n graus de liberdade), aplicam-se métodos matriciais para investigar as oscilações das variáveis de estado.

A figura (2.2) mostra três massas ligadas a uma parede por três molas e três amortecedores. Assume-se que essas massas deslizam sem atrito e que cada mola obedece à Lei de Hooke.

Se os deslocamentos para a direita x_1 , x_2 e x_3 das três massas (a partir de suas posições de equilíbrio) são todos positivos, então:

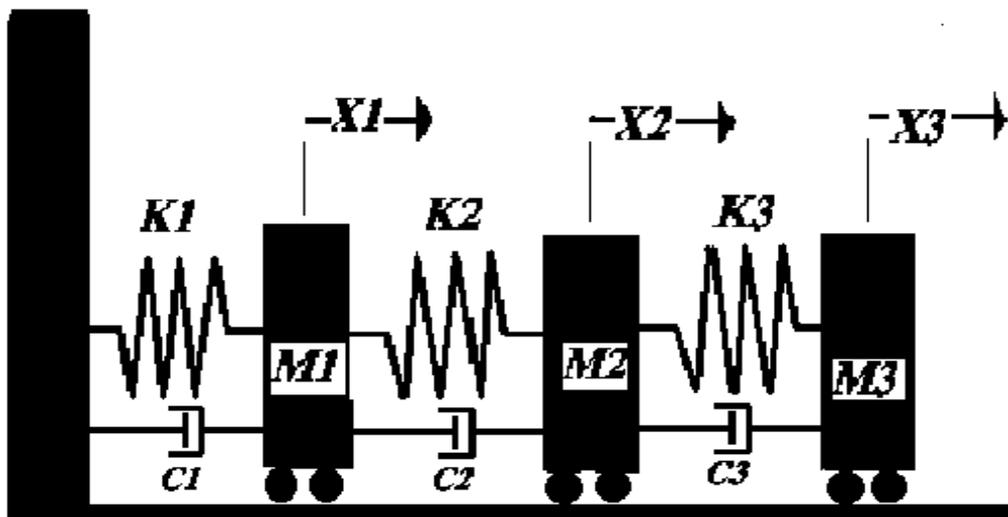


Figura 2.2 Três massas acopladas a molas

- A primeira mola e o primeiro amortecedor estão esticados da distância x_1 ;
- A segunda mola e o segundo amortecedor estão esticados da distância $x_2 - x_1$;
- A terceira mola e o terceiro amortecedor estão esticados da distância $x_3 - x_2$;

Portanto, considerando-se a equação $mx'' + cx' + kx = F(t)$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 m_1 x_1'' + [c_1 x_1' - c_2(x_2' - x_1')] + [k_1 x_1 - k_2(x_2 - x_1)] &= f_1(t) \\
 m_2 x_2'' + [c_2(x_2' - x_1') - c_3(x_3' - x_2')] + [k_2(x_2 - x_1) - k_3(x_3 - x_2)] &= f_2(t) \\
 m_3 x_3'' + c_3(x_3' - x_2') + k_3(x_3 - x_2) &= f_3(t)
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

onde $f_1(t)$, $f_2(t)$ e $f_3(t)$ são funções escalares que representam excitações externas.

O sistema (2.5), em termos do vetor de deslocamento $q(t) = [x_1, x_2, x_3]^T$ pode ser escrito na forma matricial:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (2.6)$$

sendo:

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

a matriz de massa do sistema;

$$C = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

a matriz de amortecimento do sistema;

$$K = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

a matriz de rigidez do sistema; e

$$F(t) = [f_1(t), f_2(t), f_3(t)]^T \quad (2.10)$$

o vetor das funções escalares $f_n(t)$ que representam as excitações externas.

Observando o comportamento dos deslocamentos das massas num sistema amortecido com três graus de liberdade, pode-se generalizar a notação para sistemas com n graus de liberdade:

- $q(t)$ é o vetor de deslocamento:

$$q(t) = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \quad (2.11)$$

- $\dot{q}(t)$ é o vetor de velocidade:

$$\dot{q}(t) = [x'_1, x'_2, \dots, x'_n]^T \quad (2.12)$$

- $\ddot{q}(t)$ é o vetor de aceleração:

$$\ddot{q}(t) = [x''_1, x''_2, \dots, x''_n]^T \quad (2.13)$$

- M é a matriz de massa do sistema:

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_n \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

- C é a matriz de amortecimento do sistema:

$$C = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & \cdots & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -c_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{n-1} + c_n & -c_n \\ 0 & 0 & \cdots & -c_n & c_n \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

- K é a matriz de rigidez do sistema:

$$K = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \cdots & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -k_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{n-1} + k_n & -k_n \\ 0 & 0 & \cdots & -k_n & k_n \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

- $F(t)$ é o vetor força do sistema:

$$F(t) = [f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)]^T \quad (2.17)$$

As funções escalares $f_n(t)$ representam excitações externas. Normalmente, são considerados três tipos especiais de excitações:

Excitação Impulsiva: onde $F(t) = b\delta(t)$, possui a função Dirac $\delta(t)$.

Excitação de Passo: onde $F(t) = bH(t)$, possui a função Heaviside $H(t)$.

Excitação Harmônica: onde $F(t) = b \cos(\omega t + \varphi)$.

sendo que o vetor $b \in \mathbb{R}^n$ é um vetor constante.

Pode-se encontrar respostas de alguns sistemas lineares amortecidos pela solução da equação (2.6). A solução desta equação pode ser obtida pelo *método espectral* ou pelo *método operacional*.

O método espectral envolve duas etapas:

1. A decomposição da solução em duas partes: uma livre e outra forçada;

2. A obtenção da resposta para a vibração livre, considerando-a como uma função do tipo exponencial.

O método operacional consiste em converter a equação diferencial, munida das condições iniciais (deslocamento e velocidade no tempo $t = 0$), com o uso da transformada de Laplace, numa equação operacional de resolução mais simples em outra variável. Determina-se a solução desta equação e, através da transformada inversa, volta-se à variável original. Neste método, as condições iniciais apresentam-se incorporadas à equação resultante.

Em sistemas lineares classicamente amortecidos, as soluções podem ser obtidas pela análise modal. Porém, não para sistemas amortecidos não-clássicos, pois são mais difíceis de integrar (Nicholson 1987).

Assim sendo, a obtenção das respostas de problemas vibratórios nem sempre é possível por procedimentos analíticos. Daí a grande importância prática de sua determinação com o auxílio de dispositivos computacionais, para tanto, faz-se necessária a utilização de métodos numéricos de integração.

3 OS MÉTODOS NUMÉRICOS DIRETOS DE INTEGRAÇÃO E O MÉTODO GENERALIZADO- α

3.1 Introdução

Neste capítulo, serão apresentados diversos métodos de integração direta que basicamente são esquemas numéricos em diferenças, isto é, aproximações pontuais para as grandezas envolvidas na equação diferencial matricial de segunda ordem: o deslocamento, a velocidade e a aceleração. Para tal propósito, na seção 3.2 são descritos métodos em diferenças finitas clássicos, isto é, que aparecem comumente na literatura. Já, na seção 3.3, é apresentado um método que generaliza as diversas idéias dos métodos apresentados na seção e que foi projetado para controlar um fenômeno que acontece com relativa frequência denominado amortecimento numérico.

3.2 Métodos Numéricos de Integração

3.2.1 Método de Runge-Kutta-Fehlberg

Um bom integrador de equações diferenciais ordinárias deve exercer algum controle sobre seu próprio desempenho, fazendo mudanças freqüentes no seu tamanho de passo. Em geral, o objetivo deste controle adaptativo sobre o tamanho de passo é atingir alguma precisão prescrita na solução com o menor esforço computacional. Tamanhos pequenos de passo são requeridos quando a função de entrada varia intensamente e tamanhos de passo maiores são requeridos quando tal função de entrada mostra pouca variação. Dessa forma, o processo de solução numérica ganha enorme eficiência.

A implementação de um controle adaptativo no tamanho de passo requer informação sobre o desempenho do algoritmo e isto é feito mediante o cálculo de uma estimativa do erro de truncamento.

Este método faz parte dos métodos de tipo preditor-corretor [BUT 87] com tamanho de passo variável, características muito desejáveis para a resolução de problemas “duros” (*stiff problems*) freqüentemente encontrados nas áreas da engenharia civil.

O sistema $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t)$ pode ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{K} & -\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}(t) \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Se a matriz \mathbf{M} é não-singular, então(3.1) pode-se escrever como:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(t) \end{bmatrix},$$

quer dizer, como um sistema da forma:

$$\dot{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{G}\mathbf{w}(t) + \mathbf{g}(t) \quad (3.2)$$

onde $\mathbf{w}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix}$, $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}$, $\mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(t) \end{bmatrix}$.

Seja \mathbf{w}_t a aproximação de $\mathbf{w}(t)$ e \mathbf{g}_t a aproximação de $\mathbf{g}(t)$. Temos o método de Runge-Kutta de ordem 5 [BUT 87]:

$$\hat{\mathbf{w}}_{t+\Delta t} = \mathbf{w}_t + \frac{16}{135}\mathbf{k}_1 + \frac{6656}{12825}\mathbf{k}_3 + \frac{28561}{56430}\mathbf{k}_4 - \frac{9}{50}\mathbf{k}_5 + \frac{2}{55}\mathbf{k}_6 \quad (3.3)$$

e o método de Runge-Kutta de ordem 4 [BUT 87]:

$$\mathbf{w}_{t+\Delta t} = \mathbf{w}_t + \frac{25}{216}\mathbf{k}_1 + \frac{1408}{2565}\mathbf{k}_3 + \frac{2197}{4104}\mathbf{k}_4 - \frac{1}{5}\mathbf{k}_5 \quad (3.4)$$

onde:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \Delta t [\mathbf{C}\mathbf{w}_t + \mathbf{g}_t], \\ \mathbf{k}_2 &= \Delta t \left[\mathbf{C} \left(\mathbf{w}_t + \frac{1}{4}\mathbf{k}_1 \right) + \mathbf{g}_{t+\frac{1}{4}\Delta t} \right], \\ \mathbf{k}_3 &= \Delta t \left[\mathbf{C} \left(\mathbf{w}_t + \frac{3}{32}\mathbf{k}_1 + \frac{9}{32}\mathbf{k}_2 \right) + \mathbf{g}_{t+\frac{3}{8}\Delta t} \right], \\ \mathbf{k}_4 &= \Delta t \left[\mathbf{C} \left(\mathbf{w}_t + \frac{1932}{2197}\mathbf{k}_1 - \frac{7200}{2197}\mathbf{k}_2 + \frac{7296}{2197}\mathbf{k}_3 \right) + \mathbf{g}_{t+\frac{12}{13}\Delta t} \right], \\ \mathbf{k}_5 &= \Delta t \left[\mathbf{C} \left(\mathbf{w}_t + \frac{439}{216}\mathbf{k}_1 - 8\mathbf{k}_2 + \frac{3680}{513}\mathbf{k}_3 - \frac{845}{4104}\mathbf{k}_4 \right) + \mathbf{g}_{t+\Delta t} \right], \\ \mathbf{k}_6 &= \Delta t \left[\mathbf{C} \left(\mathbf{w}_t - \frac{8}{27}\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 - \frac{3544}{2565}\mathbf{k}_3 - \frac{1859}{4104}\mathbf{k}_4 - \frac{11}{40}\mathbf{k}_5 \right) + \mathbf{g}_{t+\frac{1}{2}\Delta t} \right]. \end{aligned}$$

Considerando que $\mathbf{w}_t \approx \mathbf{w}(t) \approx \hat{\mathbf{w}}_t$ e que o erro de truncamento local $\hat{\tau}(\Delta t; t + \Delta t)$ do método (3.3) pode ser desprezado com respeito ao erro de truncamento local $\tau(\Delta t; t + \Delta t)$ do método (3.4), obtém-se a seguinte aproximação:

$$\tau(\Delta t; t + \Delta t) \approx \frac{1}{\Delta t} (\hat{\mathbf{w}}_{t+\Delta t} - \mathbf{w}_{t+\Delta t}). \quad (3.5)$$

Além disso, como (3.4) é um método de ordem 4, existe uma constante não nula α tal que:

$$\tau(\Delta t; t + \Delta t) \approx \alpha \Delta t^4. \quad (3.6)$$

De (3.5) e (3.6) temos:

$$\alpha \Delta t^4 \approx \frac{1}{\Delta t} (\hat{\mathbf{w}}_{t+\Delta t} - \mathbf{w}_{t+\Delta t}). \quad (3.7)$$

A idéia do método de Runge-Kutta-Fehlberg é determinar um tamanho adequado $q\Delta t$, $q > 0$ de modo que o erro $\tau(q\Delta t; t + \Delta t)$ pode ser limitado por certa tolerância ϵ . Tem-se que:

$$\tau(q\Delta t; t + \Delta t) \approx \alpha(q\Delta t)^4 = q^4(\alpha\Delta t^4) \approx \frac{q^4}{\Delta t} (\hat{\mathbf{w}}_{t+\Delta t} - \mathbf{w}_{t+\Delta t})$$

Se é requerido que $\|\tau(q\Delta t; t + \Delta t)\| \leq \epsilon$ deve-se ter que:

$$\frac{q^4}{\Delta t} \|\hat{\mathbf{w}}_{t+\Delta t} - \mathbf{w}_{t+\Delta t}\| \leq \epsilon,$$

isto é,

$$q \leq \left(\frac{\epsilon\Delta t}{\|\hat{\mathbf{w}}_{t+\Delta t} - \mathbf{w}_{t+\Delta t}\|} \right)^{1/4}. \quad (3.8)$$

O parâmetro q modifica Δt de modo que se tenha um passo muito pequeno em regiões irregulares e um passo maior quando não houver muita variação entre as aproximações (3.3) e (3.4).

3.2.2 Método de Houbolt

O método de Houbolt foi criado por J. C. Houbolt, em 1950, para calcular as respostas estruturais de aeronaves sujeitas a cargas dinâmicas. Utiliza o conceito de diferença de deslocamentos equivalentes para aproximar as componentes de velocidade e aceleração e, portanto, estabelece uma relação de recorrência que pode ser usada para resolver a resposta da estrutura passo-a-passo. No método de Houbolt, a generalidade e os aspectos físicos do equilíbrio básico são preservados. Do ponto de vista da estabilidade e precisão, é incondicionalmente estável e possui segunda ordem em precisão mas não é adequado para problemas dinâmicos de alta frequência. Uma desvantagem desse método é a necessidade de utilizar um grande volume de dados.

Este método usa as seguintes aproximações em diferenças finitas:

$$\ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t^2} (2\mathbf{q}_{t+\Delta t} - 5\mathbf{q}_t + 4\mathbf{q}_{t-\Delta t} - \mathbf{q}_{t-2\Delta t}) \quad (3.9)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{6\Delta t} (11\mathbf{q}_{t+\Delta t} - 18\mathbf{q}_t + 9\mathbf{q}_{t-\Delta t} - 2\mathbf{q}_{t-2\Delta t}) \quad (3.10)$$

cujos erros são de ordem Δt^2 .

Para achar a solução no instante seguinte de tempo, consideramos a aproximação da equação

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t)$$

no tempo $t + \Delta t$, que resulta:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} + \mathbf{K}\mathbf{q}_{t+\Delta t} = \mathbf{f}_{t+\Delta t}. \quad (3.11)$$

Substituindo (3.9) e (3.10) em (3.11) obtemos a seguinte expressão para $\mathbf{q}_{t+\Delta t}$ [BUT 87]:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{11}{6\Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K} \right) \mathbf{q}_{t+\Delta t} &= \mathbf{f}_{t+\Delta t} + \left(\frac{5}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{3}{\Delta t} \mathbf{C} \right) \mathbf{q}_t \\ &\quad - \left(\frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{3}{2\Delta t} \mathbf{C} \right) \mathbf{q}_{t-\Delta t} \\ &\quad + \left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{3\Delta t} \mathbf{C} \right) \mathbf{q}_{t-2\Delta t}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde necessitamos conhecer previamente os vetores $\mathbf{q}_{\Delta t}$ e $\mathbf{q}_{2\Delta t}$ que podem ser calculados conhecendo \mathbf{q}_0 , $\dot{\mathbf{q}}_0$ e $\ddot{\mathbf{q}}_0$, mediante algum método possivelmente condicionalmente estável (por exemplo, o método de diferenças centrais ou o de Runge-Kutta, entre outras possíveis). com passo de tempo igual a uma fração suficientemente pequena de Δt .

A equação (3.12) foi deduzida a partir de (3.11); esta última considera a aproximação da equação

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t)$$

no tempo $t + \Delta t$, e por este motivo o método de Houbolt é implícito, diferente do método considerado na subseção 3.2.1.

3.2.3 Método θ de Wilson

O método θ de Wilson é essencialmente uma extensão da aproximação da aceleração média em que a variação entre os instantes de tempo n e $n+1$ é suposta linear. Quando $\theta = 1.4$ obtém-se soluções mais precisas e estáveis [BUT 87].

Este método supõe que a aceleração é linear desde o instante t até o instante $t + \theta\Delta t$ com $\theta \geq 1$, quer dizer, se $0 \leq \tau \leq \theta\Delta t$, supomos:

$$\ddot{\mathbf{q}}_{t+\tau} = \ddot{\mathbf{q}}_t + \frac{\tau}{\theta\Delta t} (\ddot{\mathbf{q}}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{\mathbf{q}}_t). \quad (3.13)$$

Se integramos (3.13) com respeito a τ , obtemos:

$$\dot{\mathbf{q}}_{t+\tau} = \dot{\mathbf{q}}_t + \ddot{\mathbf{q}}_t\tau + \frac{\tau^2}{2\theta\Delta t} (\ddot{\mathbf{q}}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{\mathbf{q}}_t), \quad (3.14)$$

e integrando novamente:

$$\mathbf{q}_{t+\tau} = \mathbf{q}_t + \tau\dot{\mathbf{q}}_t + \frac{1}{2}\tau^2\ddot{\mathbf{q}}_t + \frac{\tau^3}{6\theta\Delta t} (\ddot{\mathbf{q}}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{\mathbf{q}}_t). \quad (3.15)$$

Fazendo $\tau = \theta\Delta t$ em (3.14) e (3.15) se chega às seguintes igualdades:

$$\dot{\mathbf{q}}_{t+\theta\Delta t} = \dot{\mathbf{q}}_t + \frac{\theta\Delta t}{2} (\ddot{\mathbf{q}}_{t+\theta\Delta t} + \ddot{\mathbf{q}}_t), \quad (3.16)$$

$$\mathbf{q}_{t+\theta\Delta t} = \mathbf{q}_t + \theta\Delta t\dot{\mathbf{q}}_t + \frac{\theta^2\Delta t^2}{6} (\ddot{\mathbf{q}}_{t+\theta\Delta t} + 2\ddot{\mathbf{q}}_t). \quad (3.17)$$

Resolvendo (3.16) e (3.17), considerando como incógnitas $\ddot{\mathbf{q}}_{t+\theta\Delta t}$ e $\dot{\mathbf{q}}_{t+\theta\Delta t}$, tem-se:

$$\ddot{\mathbf{q}}_{t+\theta\Delta t} = \frac{6}{\theta^2\Delta t^2} (\mathbf{q}_{t+\theta\Delta t} - \mathbf{q}_t) - \frac{6}{\theta\Delta t} \dot{\mathbf{q}}_t - 2\ddot{\mathbf{q}}_t, \quad (3.18)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{t+\theta\Delta t} = \frac{3}{\theta\Delta t} (\mathbf{q}_{t+\theta\Delta t} - \mathbf{q}_t) - 2\dot{\mathbf{q}}_t - \frac{\theta\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{q}}_t. \quad (3.19)$$

Agora, consideramos a aproximação:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{t+\theta\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_{t+\theta\Delta t} + \mathbf{K}\mathbf{q}_{t+\theta\Delta t} = \bar{\mathbf{f}}_{t+\theta\Delta t}, \quad (3.20)$$

onde $\bar{\mathbf{f}}_{t+\theta\Delta t} = \mathbf{f}_t + \theta (\mathbf{f}_{t+\theta\Delta t} - \mathbf{f}_t)$, isto é, usamos o vetor de forças externas como a projeção linear de \mathbf{f}_t . Substituindo (3.18) e (3.19) em (3.20) obtemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{6}{\theta^2\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{3}{\theta\Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K} \right) \mathbf{q}_{t+\theta\Delta t} &= \bar{\mathbf{f}}_{t+\theta\Delta t} + \mathbf{M} \left(\frac{6}{\theta^2\Delta t^2} \mathbf{q}_t + \frac{6}{\theta\Delta t} \dot{\mathbf{q}}_t + 2\ddot{\mathbf{q}}_t \right) \\ &\quad + \mathbf{C} \left(\frac{3}{\theta\Delta t} \mathbf{q}_t + 2\dot{\mathbf{q}}_t + \frac{\theta\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{q}}_t \right), \end{aligned}$$

e obtemos sucessivamente $\ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}$, $\dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}$ e $\mathbf{q}_{t+\Delta t}$ que é a aproximação desejada, usando (3.13), (3.14) e (3.15) com $\tau = \Delta t$.

3.2.4 Método de Newmark

Em 1959, Newmark apresentou um método implícito para a solução de problemas em dinâmica estrutural. O algoritmo assume que a aceleração média é constante sobre um passo de tempo de integração. Belytschko and Hughes, 1983, documentaram a família β de Newmark conseguindo métodos implícitos ou explícitos dependendo das escolhas dos dois parâmetros livres que controlam a estabilidade e precisão dos algoritmos. Como esquema implícito, o método de Newmark é incondicionalmente estável e com precisão de segunda ordem. Como esquema explícito, o método de Newmark é apenas condicionalmente estável e com precisão de segunda ordem.

Este método, como o anterior, supõe que a aceleração $\ddot{\mathbf{q}}_t$ é linear, isto é,

$$\ddot{\mathbf{q}}_{t+\beta\Delta t} = (1 - \beta)\ddot{\mathbf{q}}_t + \beta\ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}, \quad \text{para } 0 < \beta < 1$$

e considera as seguintes equações que são aproximações de Taylor de primeira e segunda ordem da velocidade e do deslocamento no tempo $t + \Delta t$, respectivamente,

$$\dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{q}}_t + [(1 - \delta)\ddot{\mathbf{q}}_t + \delta\ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}] \Delta t, \quad (3.21)$$

$$\mathbf{q}_{t+\Delta t} = \mathbf{q}_t + \dot{\mathbf{q}}_t \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{\mathbf{q}}_t + \alpha \ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} \right] \Delta t^2, \quad (3.22)$$

onde os parâmetros α e δ podem ser determinados de modo que se obtenha estabilidade e precisão. Se $\delta = 1/2$ e $\alpha = 1/6$, as equações (3.21) e (3.22) correspondem ao método θ de Wilson com $\theta = 1$ (ver as equações (3.16) e (3.17)). Com $\delta = 1/2$ e $\alpha = 1/4$ obtém-se um método incondicionalmente estável.

Utiliza-se a aproximação :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} + \mathbf{K}\mathbf{q}_{t+\Delta t} = \mathbf{f}_{t+\Delta t}, \quad (3.23)$$

para determinar $\mathbf{q}_{t+\Delta t}$ do seguinte modo: de (3.22) obtém-se:

$$\ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\alpha\Delta t^2} (\mathbf{q}_{t+\Delta t} - \mathbf{q}_t) - \frac{1}{\alpha\Delta t} \dot{\mathbf{q}}_t - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{\mathbf{q}}_t, \quad (3.24)$$

e substituindo (3.24) em (3.21) tem-se:

$$\dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} = (\mathbf{q}_{t+\Delta t} - \mathbf{q}_t) + \left(1 - \frac{\delta}{\alpha} \right) \dot{\mathbf{q}}_t + \left(2 - \frac{\delta}{\alpha} \right) \ddot{\mathbf{q}}_t, \quad (3.25)$$

por último substitui-se (3.24) e (3.25) em (3.23) para obter $\mathbf{q}_{t+\Delta t}$.

Para controlar o amortecimento algorítmico, têm sido feitas extensões e/ou modificações utilizando a família Newmark de esquemas trapezoidais como ponto inicial. O método α de Hilber-Hughes-Taylor (HHT), [BUT 87], entre muitos

outros, apresenta formulações com o propósito de controlar o amortecimento algorítmico.

3.3 Algoritmo do Método Generalizado- α

Atualmente são conhecidos inúmeros algoritmos de integração de tempo para solucionar sistemas vibratórios, entre eles podemos citar: o método de Newmark (1959), o método α de Wilson (1968), o método HHT- α de Hilber, Hughes e Taylor (1977), o método WBZ- α de Wood, Bossak e Zienkiewicz (1981), o método ρ de Bazzi e Anderheggen (1982) e o método θ_1 de Hoff e Pahl (1988).

Todos esses métodos usam determinados algoritmos com o intuito de obterem respostas particulares a partir de uma função $q = q(t)$ que satisfaz a equação matricial

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (3.26)$$

para todo $t \in [0, t_N]$, $t_N > 0$, com condições iniciais:

$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{d} \quad (3.27)$$

$$\dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{v} \quad (3.28)$$

onde \mathbf{d} e \mathbf{v} são respectivamente, os vetores de deslocamento inicial e velocidade inicial.

Apresenta-se aqui, uma nova família de algoritmos conhecida como Método Generalizado- α que consiste em expressões pelas quais d_{n+1} e v_{n+1} são aproximados como combinações lineares de d_n , v_n e a_{n+1} , e uma terceira equação que determina a_{n+1} a partir de uma versão modificada da equação (3.26); sendo $d_{n+1} = q(t_{n+1})$, $V_{n+1} = \dot{q}(t_{n+1})$ e $a_{n+1} = \ddot{q}(t_{n+1})$.

O Método Generalizado- α consiste num algoritmo de um passo, e sua forma básica é dada por:

$$d_{n+1} = d_n + \Delta t v_n + \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \beta \right) a_n + \beta a_{n+1} \quad (3.29)$$

$$v_{n+1} = v_n + \Delta t \left((1 - \gamma) a_n + \gamma a_{n+1} \right) \quad (3.30)$$

$$M a_{n+1-\alpha_m} + C v_{n+1-\alpha_f} + K d_{n+1-\alpha_f} = F(t_{n+1-\alpha_f}) \quad (3.31)$$

α_f e α_m são constantes

$$d_0 = d \quad (3.32)$$

$$v_0 = v \quad (3.33)$$

$$a_0 = M^{-1}(F(0) - C v - K d) \quad (3.34)$$

onde:

$$d_{n+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f) d_{n+1} + \alpha_f d_n \quad (3.35)$$

$$v_{n+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f) v_{n+1} + \alpha_f v_n \quad (3.36)$$

$$a_{n+1-\alpha_m} = (1 - \alpha_m)a_{n+1} + \alpha_m a_n \quad (3.37)$$

$$t_{n+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f)t_{n+1} + \alpha_f t_n \quad (3.38)$$

nos quais $n \in 0, 1, \dots, N - 1$, e N é o número de passos de tempo Δt .

3.4 Análise do Algoritmo Generalizado- α

As atualizações do deslocamento e da velocidade do Método Generalizado- α , descritas pelas equações (3.29) e (3.30), são idênticas ao algoritmo de Newmark. A estrutura destas equações foi obtida restringindo-se a soma dos coeficientes das condições de aceleração para igualar ao coeficiente do termo de aceleração em uma expansão da série de Taylor para $d(t_{n+1})$ e $v(t_{n+1})$ em função de t_n .

Para solucionar tal problema, o novo método usa a equação de equilíbrio (3.31), que resulta da combinação dos métodos HHT- α e WBZ- α ; A eficiência do método depende da escolha dos parâmetros α_f , α_m , β e γ .

Podemos constatar que a nova família de algoritmos teve sua origem nos métodos HHT- α , WBZ- α e de Newmark, pois uma vez escolhidas expressões apropriadas para β e γ , então:

- se $\alpha_m = 0$, o método se reduz ao método HHT- α ;
- se $\alpha_f = 0$, o método se reduz ao método WBZ- α ;
- se $\alpha_m = \alpha_f = 0$, o método se reduz ao método de Newmark;

3.5 Relações Entre os Parâmetros α_m , α_f , β e γ

Como vimos anteriormente, a eficiência do Algoritmo Generalizado- α depende da escolha dos parâmetros α_m , α_f , β e γ .

As relações que serão apresentadas são resultados encontrados em (Hughes, 1987).

Hughes determina as relações necessárias entre os parâmetros α_m , α_f , β e γ a partir do estudo do problema escalar:

$$u'' + 2\xi\omega u' + \omega^2 u = 0 \quad (3.39)$$

sendo: $u(0) = d$ e $u'(0) = v$

Inicialmente, Hughes aplica o algoritmo do Método Generalizado- α em (3.39) e escreve o sistema na forma:

$$X_{n+1} = AX_n, n \in [0, 1, \dots, N - 1] \quad (3.40)$$

na qual $X_n = [d_n, \Delta t v_n, \Delta t^2 a_n]^T$ e A é a matriz de ganho.

Assim sendo, constatou que a precisão do novo algoritmo pode ser determinada pelo seu erro de truncamento local τ , definido por:

$$\tau = \Delta t^{-2} \sum_{i=0}^3 (-1)^i A_i u(t_{n+1-i}) \quad (3.41)$$

onde: $A_0 = 1$, A_1 é o traço da matriz A, A_2 é a soma dos menores principais da matriz A e A_3 é o determinante da matriz A. Considerando que um algoritmo de k-ésima ordem é preciso se $\tau = O(\Delta t^k)$, o Método Generalizado- α é preciso em segunda ordem se:

$$\gamma = \frac{1}{2} - \alpha_m + \alpha_f \quad (3.42)$$

Também segundo Hughes, a estabilidade e a dissipação de um algoritmo dependem dos autovalores de sua matriz de ganho. Desta forma, sendo o raio espectral ρ de uma matriz definido por:

$$\rho = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|) \quad (3.43)$$

onde λ_1 , λ_2 e λ_3 são autovalores de A e considerando que um algoritmo é absolutamente estável se e somente se $0 \leq \rho < 1$, o Método Generalizado- α é absolutamente estável se:

$$\begin{aligned} \alpha_m &\leq \alpha_f \leq \frac{1}{2} \\ \beta &\geq \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\alpha_f - \alpha_m) \end{aligned} \quad (3.44)$$

Continuando o estudo dos valores possíveis para o raio espectral, Hughes, constatou que para o Método Generalizado- α dissipações de altas frequências são maximizadas quando $|\lambda_3| < |\lambda_{1,2}|$ e $\lambda_{1,2}$ são autovalores complexos conjugados, e isso ocorre se e somente se:

$$\beta = \frac{1}{4}(1 - \alpha_m + \alpha_f)^2 \quad (3.45)$$

Assim sendo, pode-se definir o novo método em função de apenas dois parâmetros: α_m e α_f , ao invés de quatro, usando as equações (3.42) e (3.45).

Hughes também afirma que as dissipações de frequência que aparecem nos métodos HHT- α e WBZ- α podem ser minimizadas pelo valor do raio espectral dentro do limite de altas frequências $\rho_\infty = |\lambda_{1,2}^\infty|$, sendo:

$$\lambda_{1,2}^\infty = \frac{\alpha_f - \alpha_m - 1}{\alpha_f - \alpha_m + 1} \quad (3.46)$$

Assim, determinado ρ_∞ , podemos definir α_m e α_f para:

- o Método HHT- α :

$$\begin{aligned}\alpha_m &= 0 \\ \alpha_f &= \frac{1-\rho_\infty}{1+\rho_\infty}\end{aligned}\tag{3.47}$$

com $\rho_\infty \in [1, 1/2]$

- o Método WBZ- α :

$$\begin{aligned}\alpha_f &= 0 \\ \alpha_m &= \frac{\rho_\infty-1}{\rho_\infty+1}\end{aligned}\tag{3.48}$$

com $\rho_\infty \in [0, 1]$

Isso levou Hughes a crer que as dissipações de baixas frequências seriam minimizadas se $|\lambda_3| = |\lambda_{1,2}|$, o que resulta em:

$$\begin{aligned}\lambda_3 &= \frac{\alpha_f}{\alpha_f-1} \\ \alpha_f &= \frac{\alpha_m+1}{3}\end{aligned}\tag{3.49}$$

o que é mais conveniente escrevermos como:

$$\begin{aligned}\alpha_m &= \frac{2\rho_\infty-1}{\rho_\infty+1} \\ \alpha_f &= \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty+1}\end{aligned}\tag{3.50}$$

Desta maneira, pode-se obter respostas absolutamente estáveis para equações de segunda ordem utilizando o algoritmo do Método Generalizado- α se forem observadas as equações (3.42), (3.45) e (3.50), pois tais parâmetros tornam o algoritmo preciso, com uma ótima combinação de alta frequência e baixa dissipação de frequência.

Afim de verificar a veracidade das condições de obtenção de precisão para o Método Generalizado- α , observa-se os gráficos a seguir:

- O primeiro gráfico (figura 3.1) ilustra a solução exata (linha azul) para um sistema livre de 1 grau de liberdade caracterizado por $x'' + 0.05x' + 4x = 0$, $x(0) = 1$ e $x'(0) = 0$ obtida pela método espectral; e a solução determinada pelo Método Generalizado- α (linha vermelha) com coeficientes ($\alpha_f = 0.4$ e $\alpha_m = 0.2$), que segundo Hughes garantem uma boa precisão:

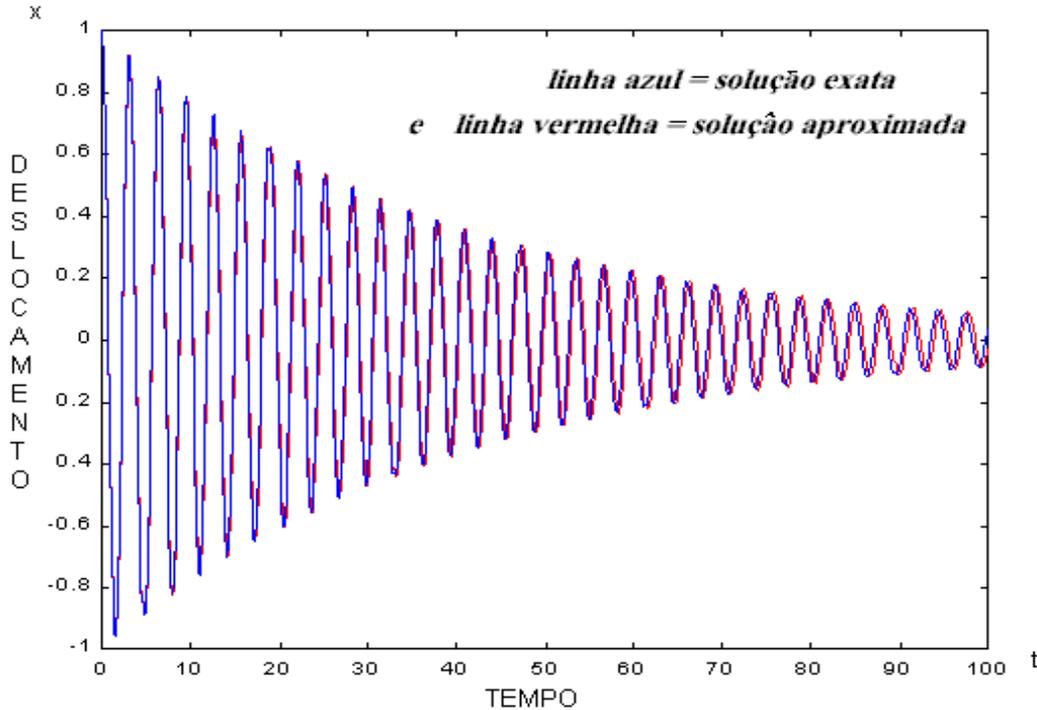


Figura 3.1 Solução exata e aproximada de $x'' + 0.05x' + 4x = 0$ com $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, $\alpha_f = 0.4$ e $\alpha_m = 0.2$

Pode-se observar que para estes valores de α_f e α_m o Método Generalizado- α realmente fornece uma solução precisa.

- O segundo gráfico (figura 3.2) ilustra o mesmo sistema do caso anterior (solução exata em azul e do Método Generalizado- α em vermelho), porém, os valores usados para α_f e α_m , neste caso, foram respectivamente, 0.5 e 0.506; valores que contradizem as condições de precisão determinados por Hughes.

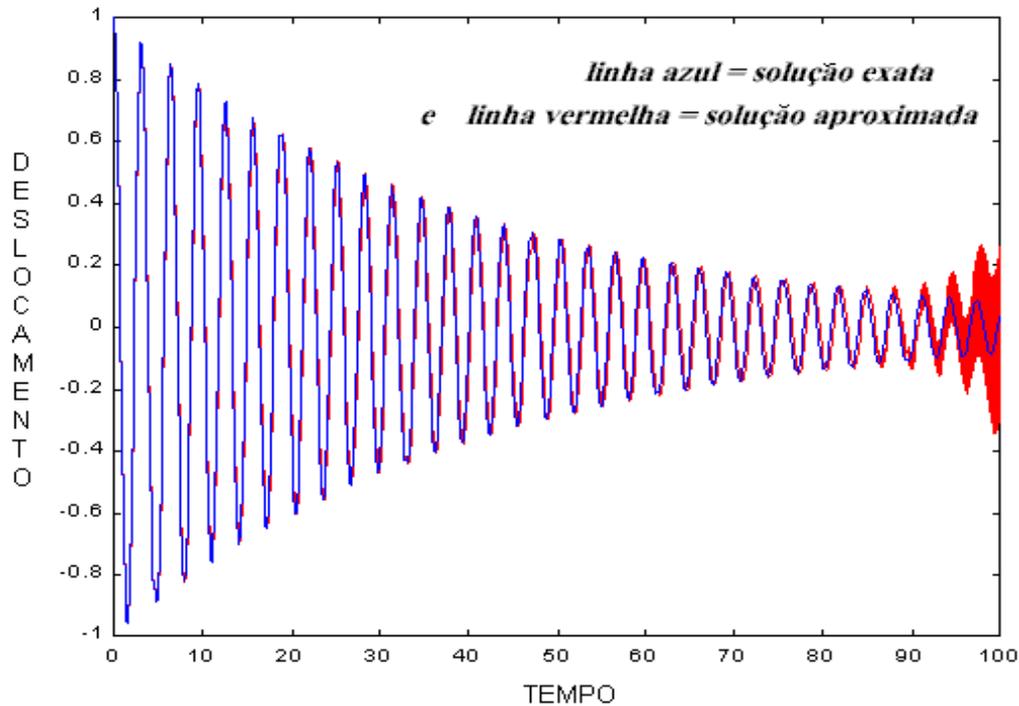


Figura 3.2 Solução exata e aproximada de $x'' + 0.05x' + 4x = 0$, com $X(0) = 1$, $x'(0) = 0$, $\alpha_f = 0.5$ e $\alpha_m = 0.506$

Pode-se observar que tais valores de α_f e α_m realmente provocam erros em frequência e amplitude que aumentam com o tempo.

3.6 O Método Generalizado- α na Resolução de Problemas com n Massas Acopladas a Molas e Amortecedores

Com o intuito de resolver problemas envolvendo sistemas vibratórios com n graus de liberdade, implementa-se o Método Generalizado- α em MATLAB.

Primeiramente consideremos um sistema livre com três graus de liberdade, conforme a figura (3.3) onde $m_1 = m_2 = m_3 = 1$, $c_1 = 0.1$, $c_2 = 0.075$, $c_3 = 0.05$ e $k_1 = k_2 = k_3 = 1$.

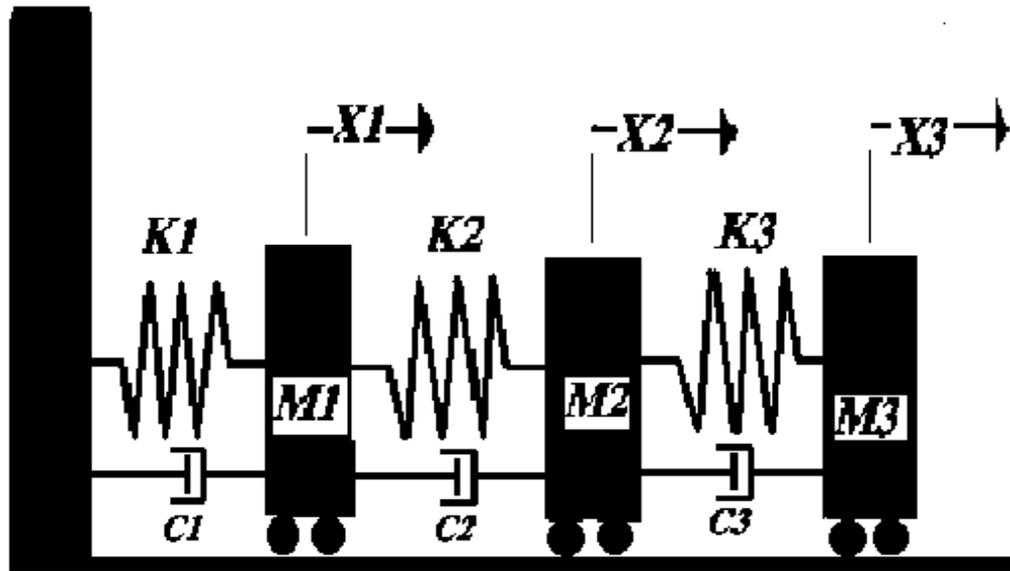


Figura 3.3 Sistema livre com 3 graus de liberdade

Através das equações (2.14), (2.15) e (2.16) obtemos as matrizes de massa, amortecimento e rigidez respectivamente iguais a:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0.175 & -0.075 & 0 \\ -0.075 & 0.125 & -0.05 \\ 0 & -0.05 & 0.05 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Assim sendo, para as condições iniciais: posição inicial $X(0) = [1, 0, 0]$ e velocidade inicial $X'(0) = [0, 0, 0]$; usando $\alpha_f = 0.4$, $\alpha_m = 0.2$ e $\Delta t = 0.05$ obteve-se os seguintes resultados pelo Método Generalizado- α (figuras 3.4, 3.5 e 3.5 que indicam os deslocamentos x_1 , x_2 e x_3 , as velocidades x'_1 , x'_2 e x'_3 e as acelerações x''_1 , x''_2 e x''_3 de cada um dos três corpos dotados de massas respectivamente).

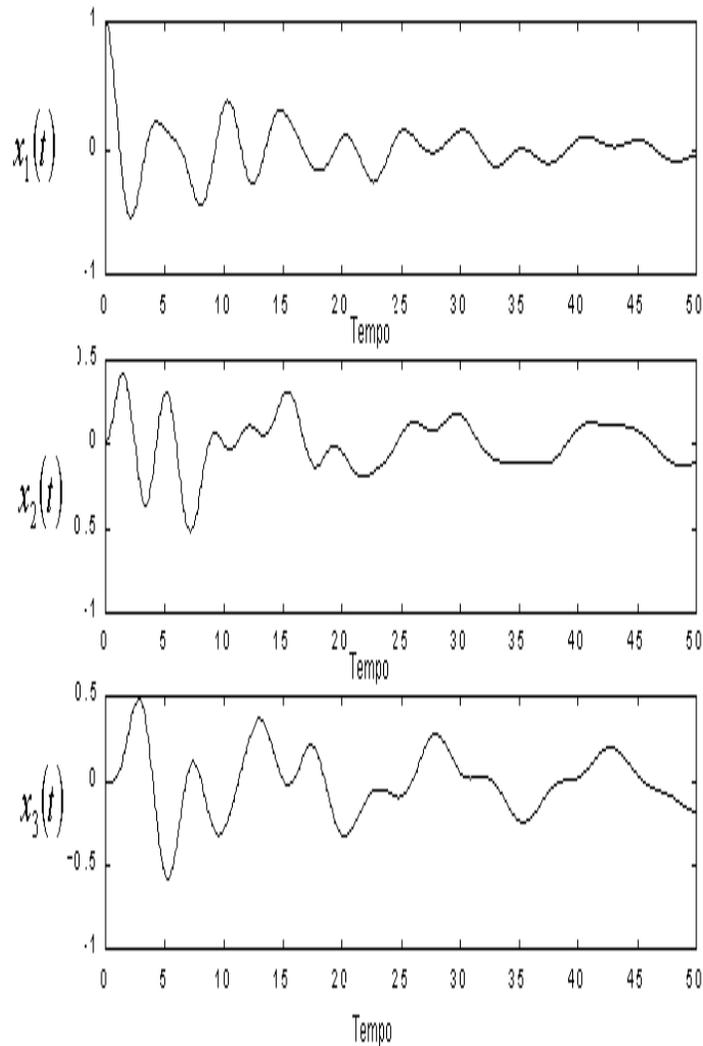


Figura 3.4 *Deslocamentos no domínio tempo - Sistema não Forçado*

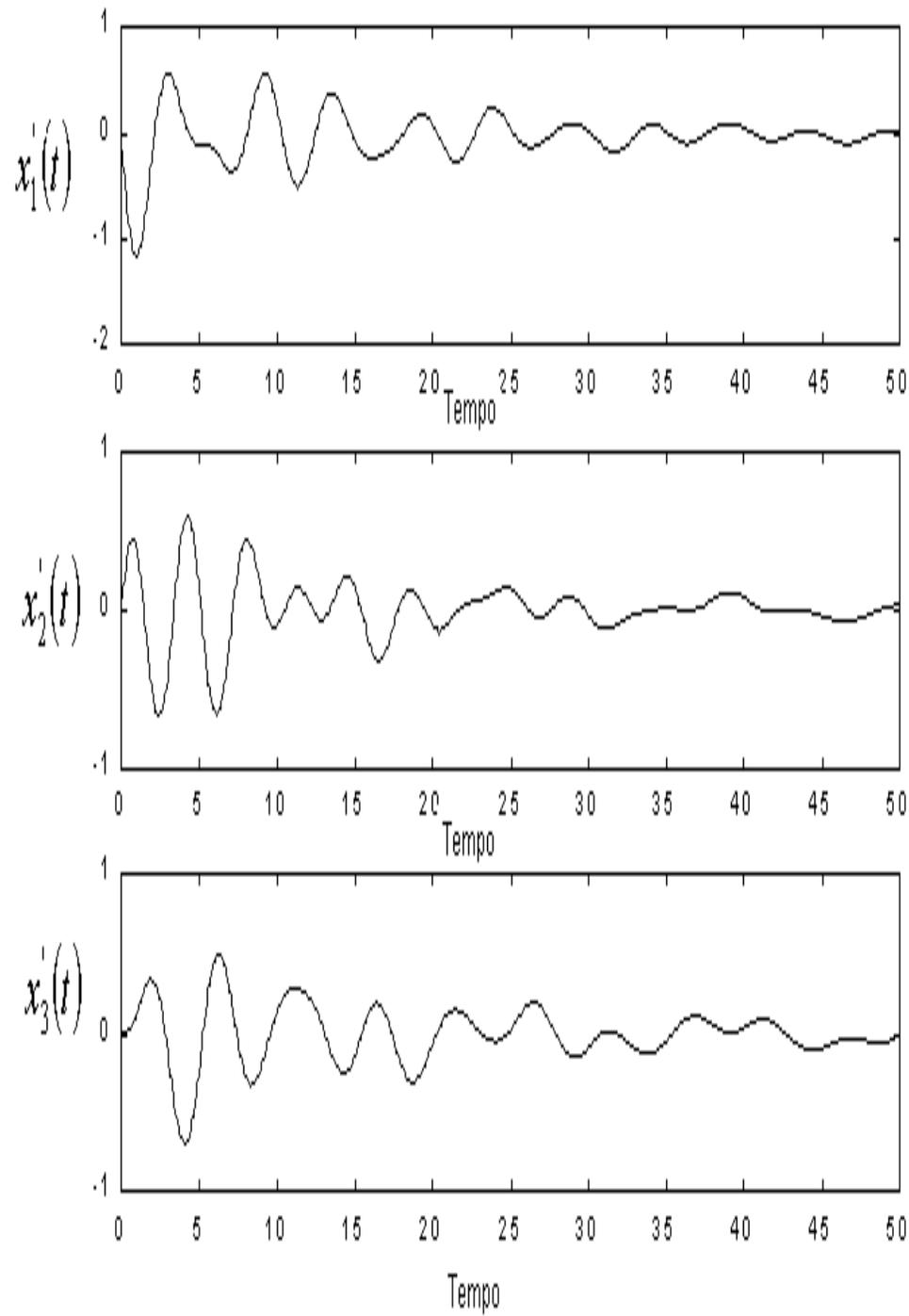


Figura 3.5 *Velocidades no domínio tempo - Sistema não Forçado*

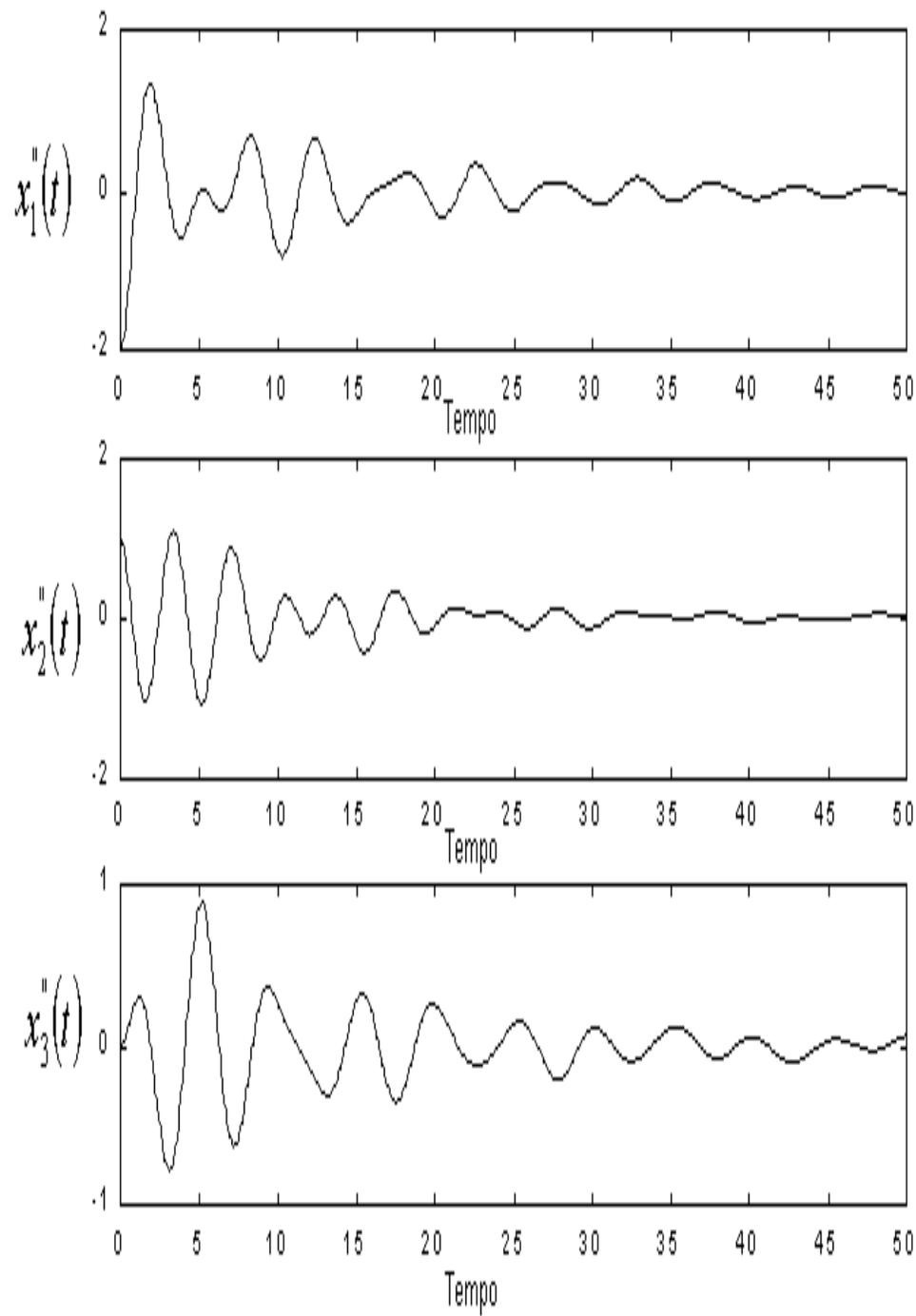


Figura 3.6 *Acelerações no domínio tempo - Sistema não Forçado*

Nas figuras 3.7, 3.8 e 3.9 temos os resultados fornecidos pelo Método Generalizado- α para o problema anterior, com os mesmos dados, porém considerando o forçado, ou seja, considerando que cada corpo esteja submetido a uma força externa na direção horizontal, sendo estas: $f_1(t) = e^{-\frac{t}{4}} \cdot \cos(10t)$, $f_2(t) = (t^2 + 2) \cdot \frac{\cos(5t)}{t^2+1}$ e $f_3(t) = t \cdot \frac{\sin(10t)}{t^4+1}$.

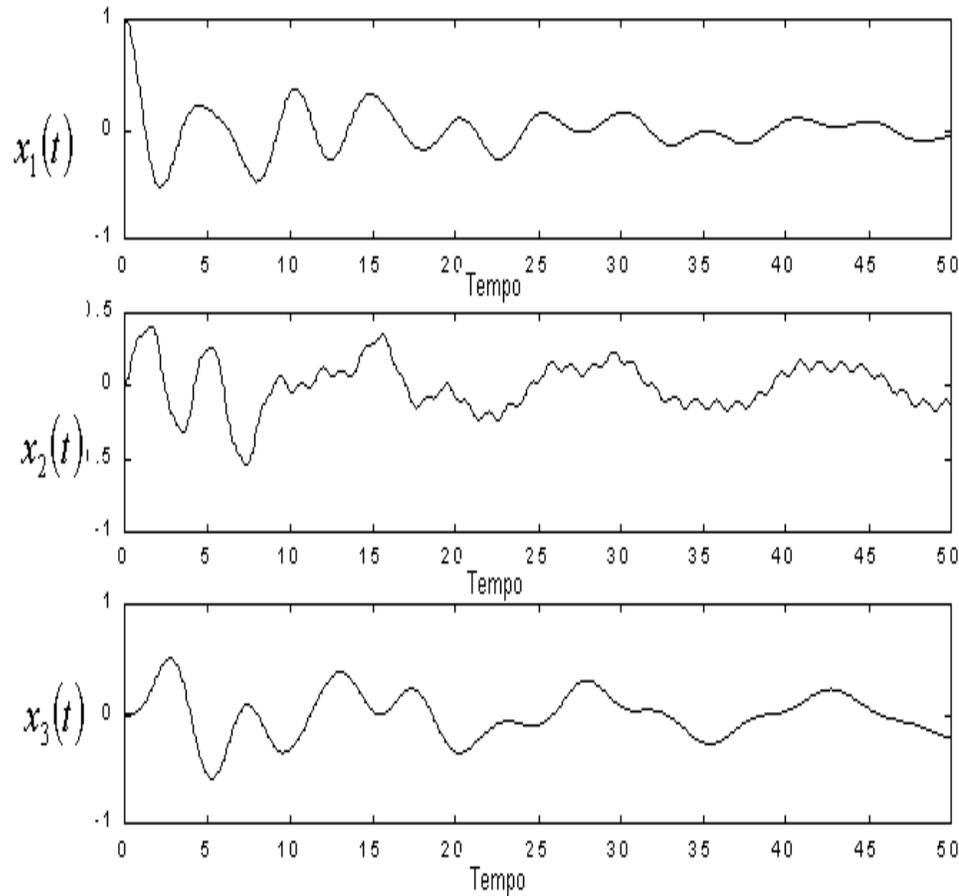


Figura 3.7 *Deslocamentos no domínio tempo - Sistema Forçado*

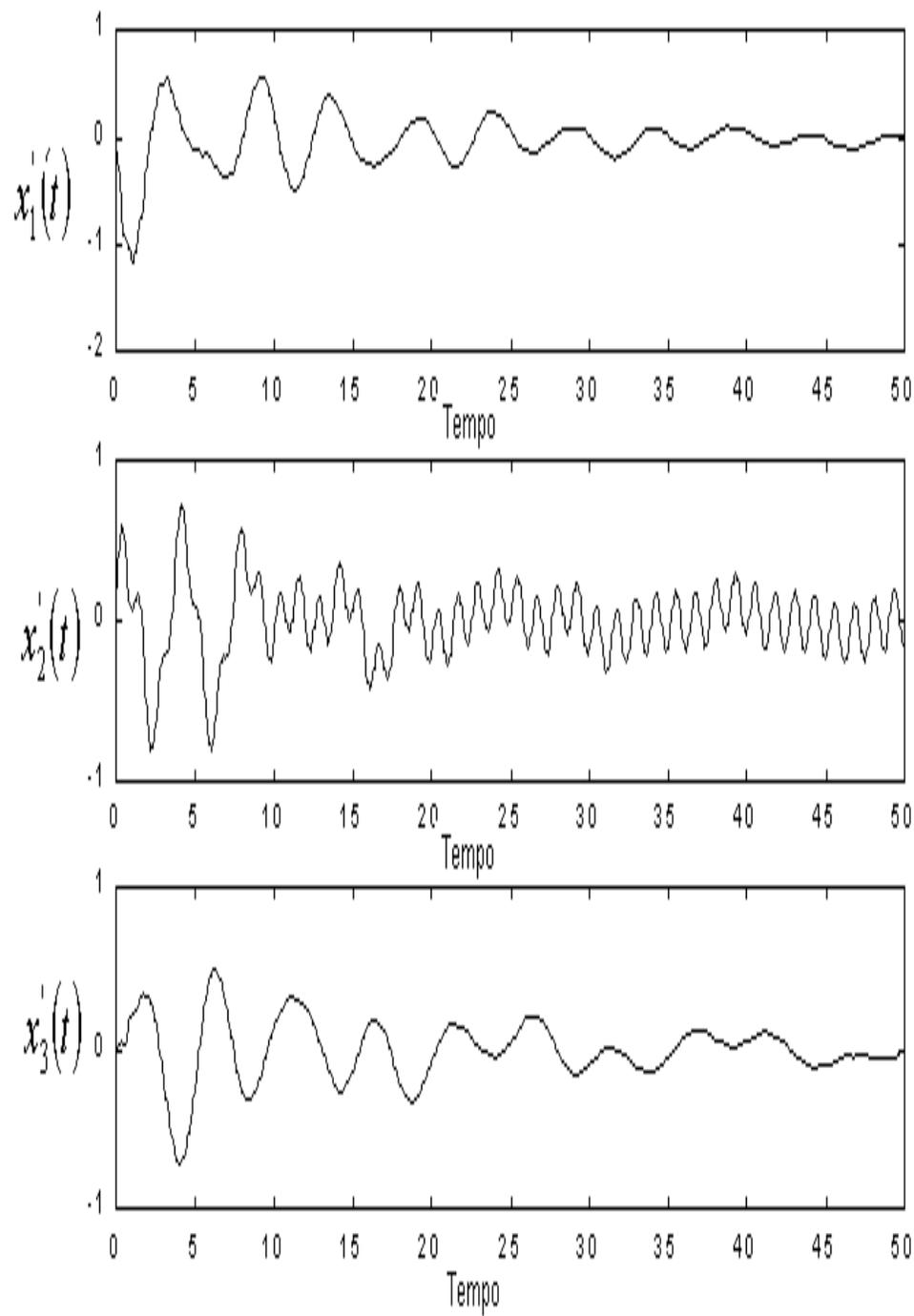


Figura 3.8 Velocidades no domínio tempo - Sistema Forçado

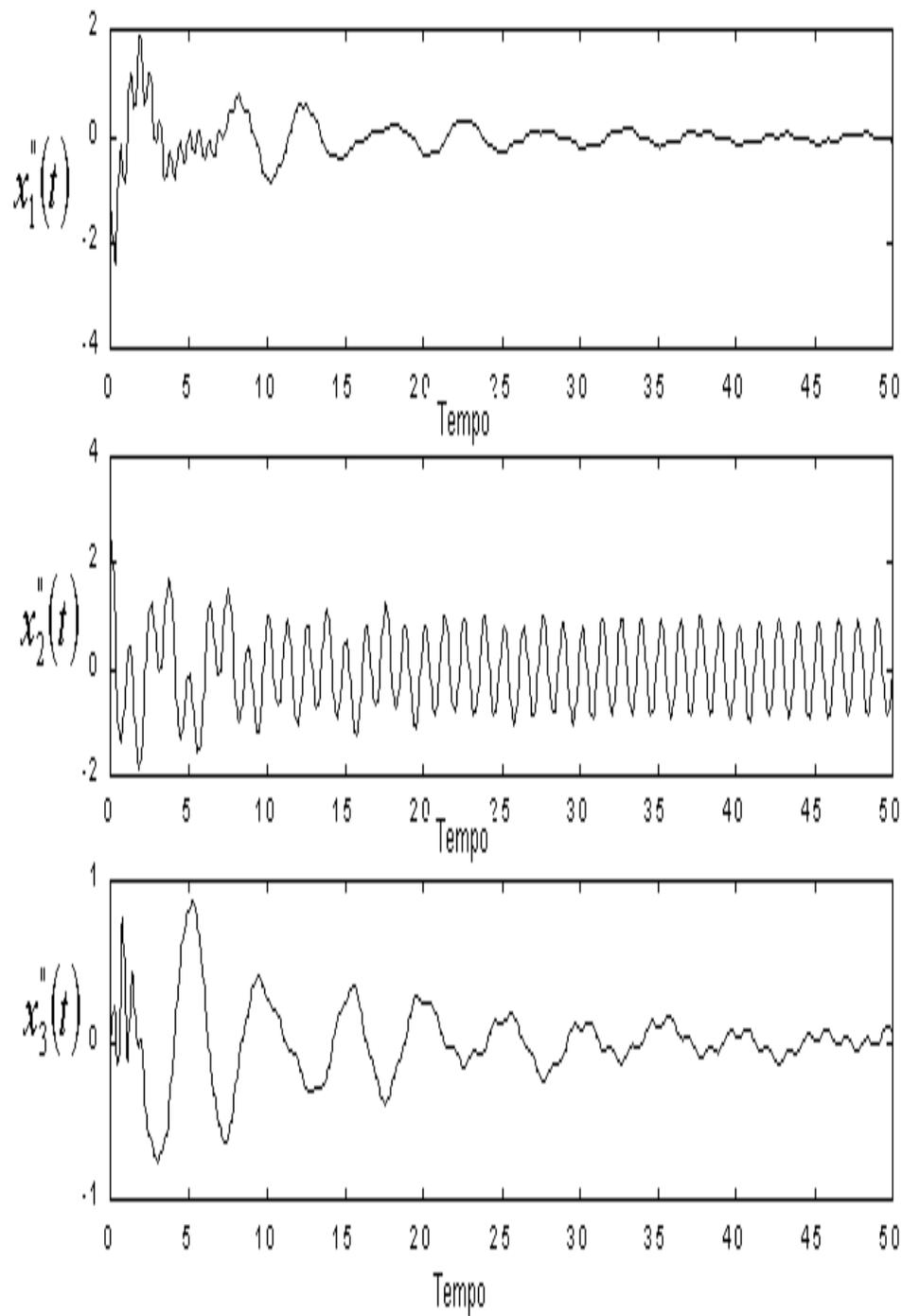


Figura 3.9 *Acelerações no domínio tempo - Sistema Forçado*

4 VIBRAÇÕES TRANSVERSAIS NUMA CORDA ACELERADA AXIALMENTE

Muitos mecanismos tecnológicos envolvem vibração transversal de materiais movendo-se axialmente. Por exemplo, o rolamento de uma fibra em alta velocidade, sistemas de fita magnética, linhas de fio, aletas de lâminas de serras, correias e tubos transportando fluídos. Inúmeros pesquisadores [Ulsoy e Mote,1982; Wickert e Mote, 1988], têm analisado a resposta dinâmica de tais sistemas. Vibrações acopladas da correia e tensiômetro na indústria automotriz têm sido investigadas experimentalmente e analiticamente [Chonan,1986]. Em 1994, Pakdemirli et al. consideraram o sistema mostrado na figura, no qual uma corda contínua passa por duas polias com uma velocidade constante v .

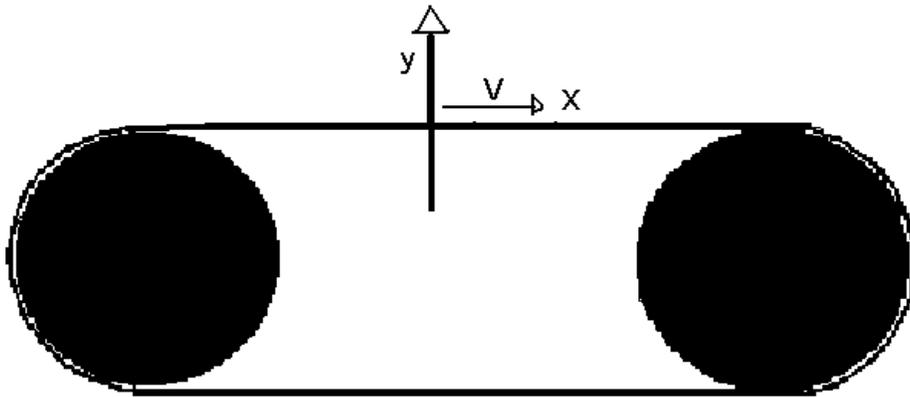


Figura 4.1 *Sistema de duas polias acopladas a uma correia*

As equações do modelo são derivadas utilizando o princípio estendido de Hamilton para o modelo de uma corda simplesmente apoiada [Younger, 1958], [Mote,1965] sendo que a discretização espacial foi realizada através do método de Galerkin.

Tabela 4.1 Tabela de Símbolos

Símbolo	designação
ρ	densidade
A	área da seção transversal
L	comprimento
y	deslocamento transversal
v	velocidade axial da corda
P	tensão da corda
e	constante de deformação
E	módulo de Young
F	força externa
Δ	deslocamento longitudinal da correia

A energia cinética T do sistema é dada por

$$T = \frac{\rho A}{2} \int_0^L [(\dot{y} + vy')^2 + v^2] dx, \quad (4.1)$$

e a energia potencial V_0 , incluindo o trabalho W realizado pela força F , é dada por

$$V_0 = \int_0^L [Pe + \frac{EA}{2}e^2 + F\Delta] dx, \quad (4.2)$$

onde $\dot{()}$ denota a derivada em relação ao tempo e $()'$ a derivada em relação ao espaço.

Aplicando o princípio estendido de Hamilton,

$$\delta \left(\int_{t_1}^{t_2} (L + W) dt \right) = 0, \quad (4.3)$$

onde $L = T - V$, $V = V_0 - W$ e δ denota a variação, decorre a equação de vibração transversal

$$\rho A(\ddot{y} + \dot{v}y') + (\rho A v^2 - P)y'' = 0. \quad (4.4)$$

Essa equação do movimento linear para vibração transversal de cordas movendo-se axialmente é válida para pequenos deslocamentos y e para grandes valores de P , a força de tensão.

Através do método de Galerkin, é possível resolver a equação (4.4) escolhendo uma aproximação da forma

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^n u_i(t) \text{sen}(i\pi x/L), \quad (4.5)$$

onde n é o número de termos (nós) considerados e $\text{sen}(i\pi x/L)$ é o i -ésimo modo da corda estacionária simplesmente apoiada, e $u_i(t)$ são os deslocamentos generalizados, obtendo-se assim uma equação diferencial da forma [Pakdermirli et al., 1994]

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = 0 \quad (4.6)$$

onde os elementos das matrizes M , C e K são dadas como:

$$m_{ij} = \int_0^L \text{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{i\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} L/2, & i = j \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (4.7)$$

$$c_{ij} = \int_0^L \frac{2\pi x}{L} \cos\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{i\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0, & i = j \\ 0, & i \neq j, \quad i + j = 2k \\ \frac{4vij}{i^2 - j^2}, & i \neq j, \quad i + j = 2k + 1 \end{cases} \quad (4.8)$$

$$k_{ij} = \int_0^L \left[\left(\frac{P}{\rho A} - v^2 \right) \left(\frac{j\pi}{L} \right)^2 \operatorname{sen} \left(\frac{j\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{i\pi x}{L} \right) + \frac{i\pi x}{L} \cos \left(\frac{j\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{i\pi x}{L} \right) \right] dx$$

$$= \begin{cases} (P/(\rho A) - v^2)(j\pi/L)^2 L/2, & i = j \\ 0, & i \neq j, \quad i + j = 2k \\ \frac{2vij}{i^2 - j^2}, & i \neq j, \quad i + j = 2k + 1, \end{cases} \quad (4.9)$$

para i e j (número de linha e coluna) variando de 1 até n .

A seguir mostramos algumas respostas obtidas através da implementação do Método Generalizado- α em MATLAB, usando o método de Galerkin para determinar as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, com aproximações de 8 termos (nós) no primeiro caso e 20 no segundo.

Para as primeiras respostas, o Método Generalizado- α é usado com $\alpha_f = 0.4$, $\alpha_m = 0.2$ e 1000 passos com intervalos de tempo de 0.01, sendo fornecidos os dados da tabela 4.2, onde a velocidade axial é assumida ser constante, assim determinando um parâmetro v :

Tabela 4.2 Dados para a primeira simulação

Parâmetro	Valor numérico	Unidade
P	76.22	N
ρ	7754.0	kg/m^3
A	0.5202×10^{-5}	m^2
L	0.3681	m
v	30	m/s

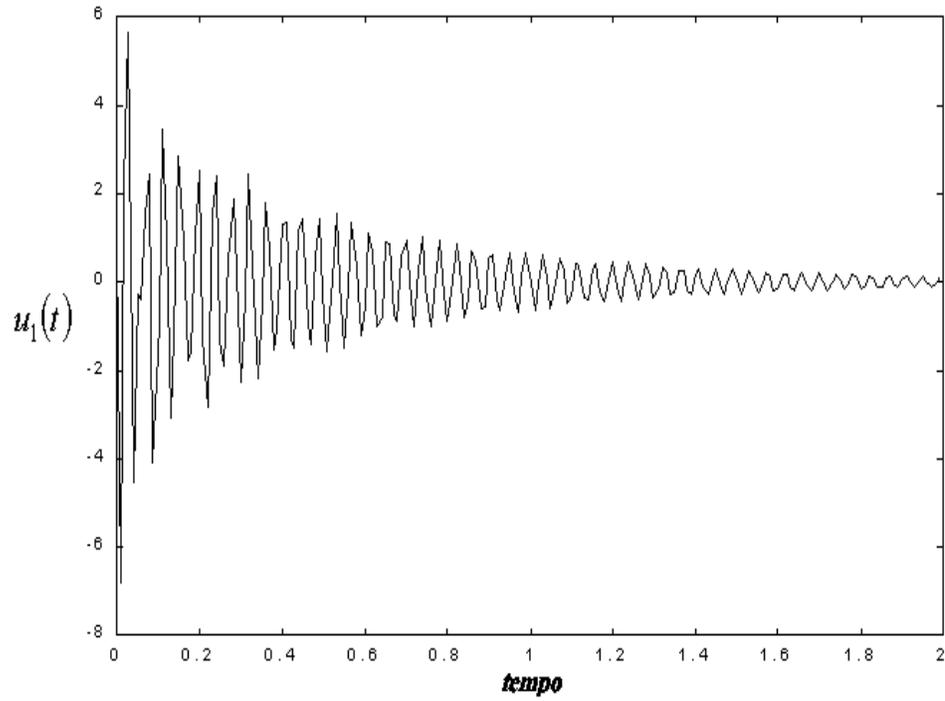


Figura 4.2 *Primeira componente do vetor deslocamento*

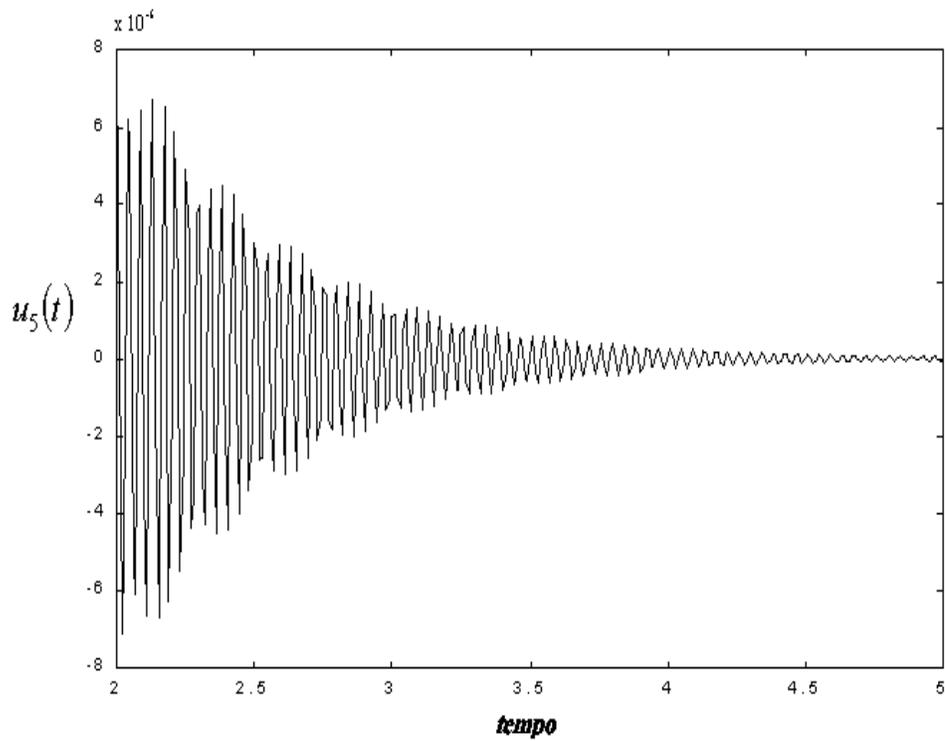


Figura 4.3 *Quinta componente do vetor deslocamento no intervalo [2, 5]*

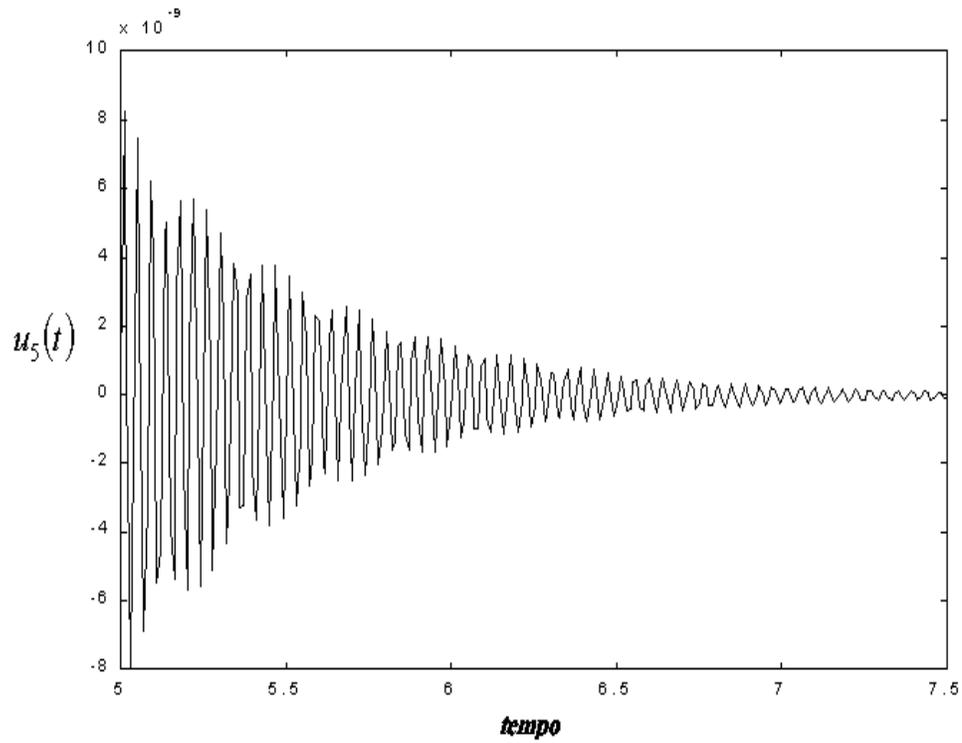


Figura 4.4 Quinta componente do vetor deslocamento no intervalo [5, 7.5]

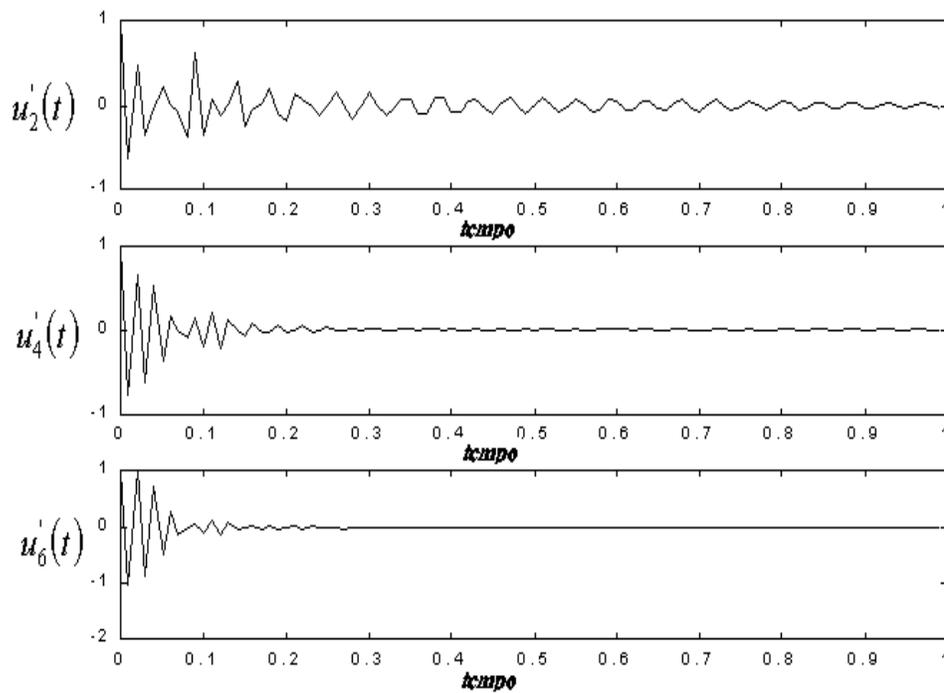


Figura 4.5 Segunda, quarta e sexta componentes do vetor velocidade

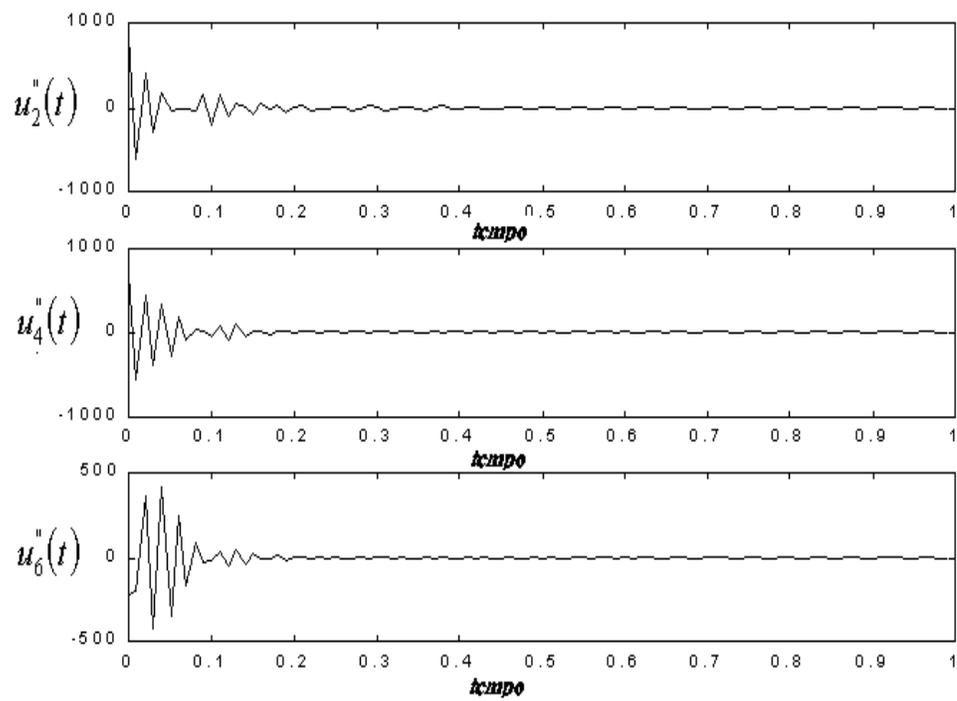


Figura 4.6 Segunda, quarta e sexta componentes do vetor aceleração

Para as próximas respostas o método Generalizado- α também é usado com $\alpha_f = 0.4$, $\alpha_m = 0.2$ e 1000 passos com intervalos de tempo de 0.01, sendo fornecidos os seguintes dados da tabela 4.3:

Tabela 4.3 Dados para a segunda simulação

Parâmetro	Valor numérico	Unidade
P	9	N
ρ	7	kg/m^3
A	0.005202	m^2
L	1	m
v	1.5	m/s

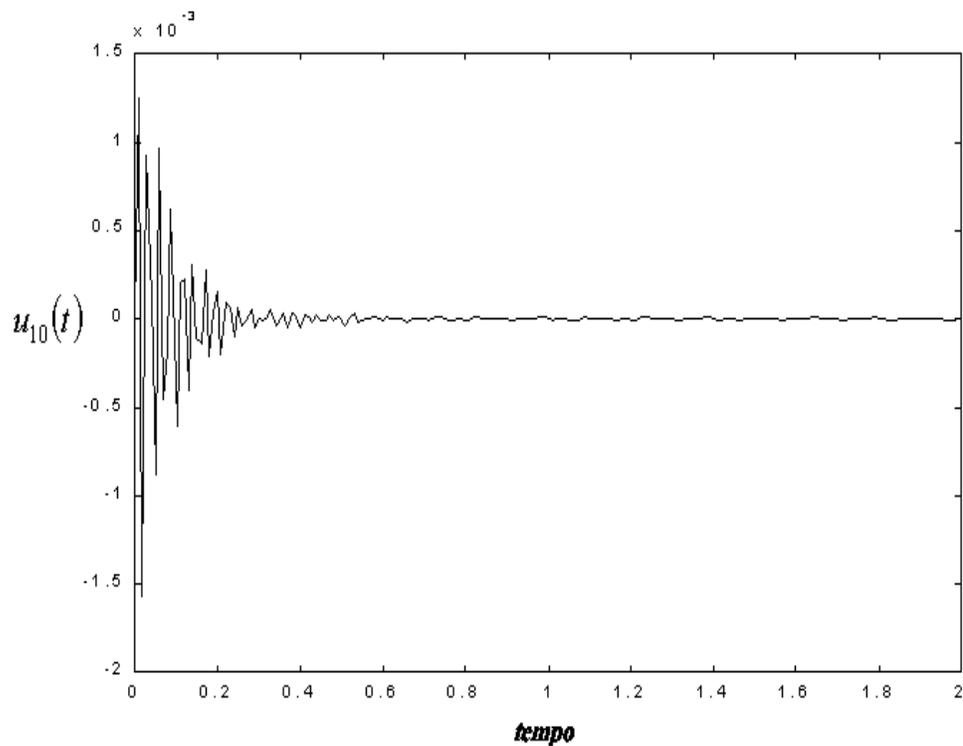


Figura 4.7 *Décima componente do vetor deslocamento*

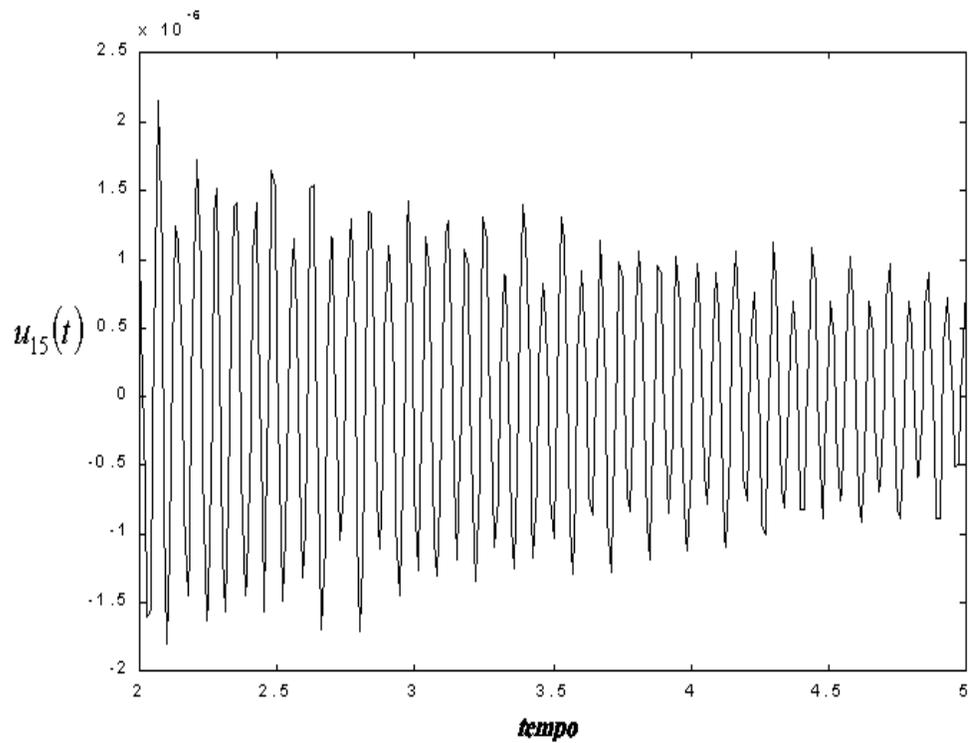


Figura 4.8 *Décima quinta componente do vetor deslocamento no intervalo [2, 5]*

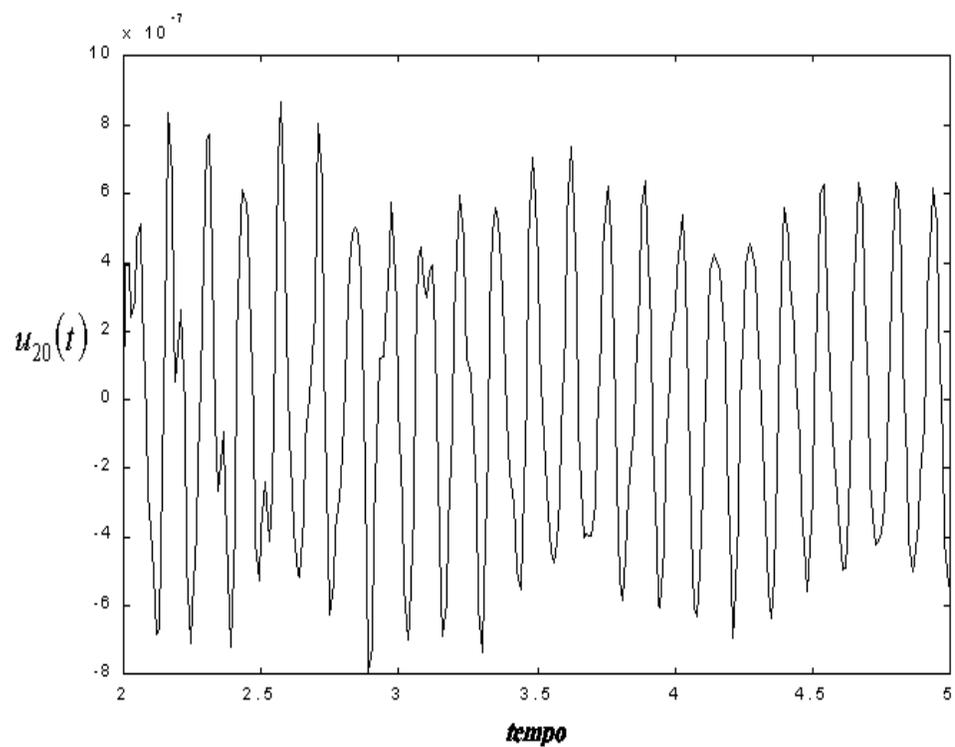


Figura 4.9 *Vigésima componente do vetor deslocamento no intervalo [2, 5]*

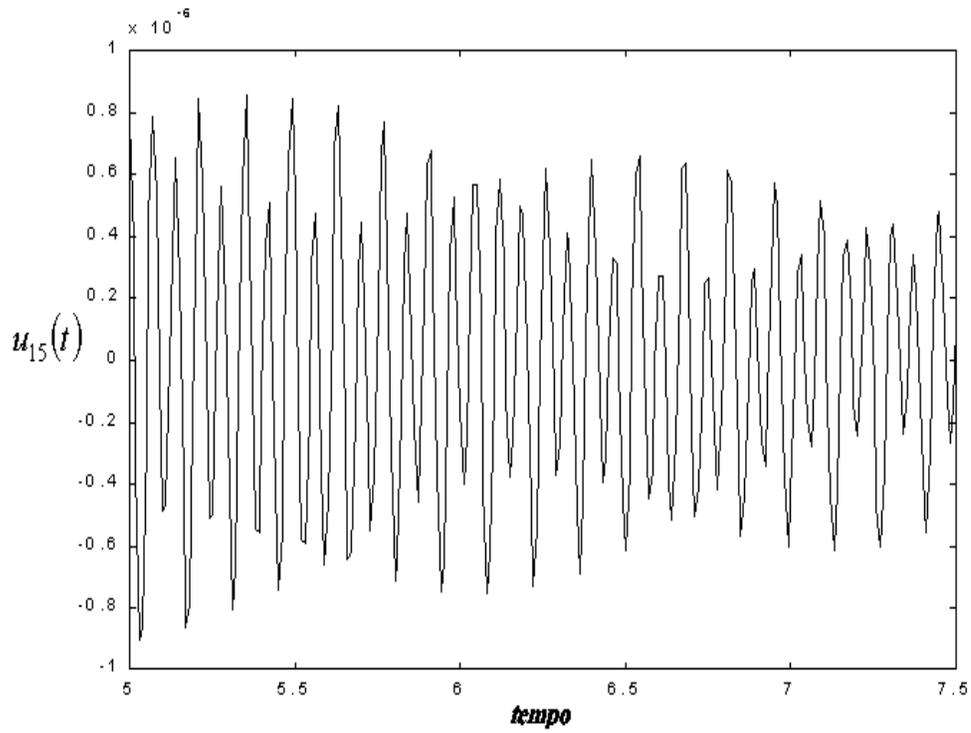


Figura 4.10 *Décima quinta componente do vetor deslocamento no intervalo [5, 7.5]*

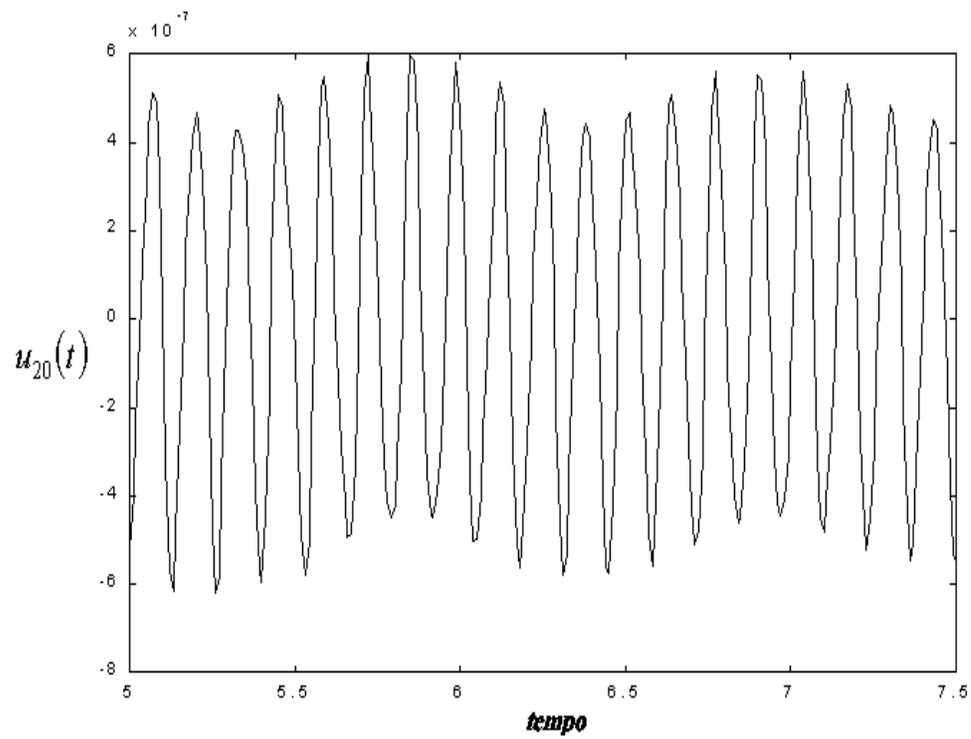


Figura 4.11 *Vigésima componente do vetor deslocamento no intervalo [5, 7.5]*

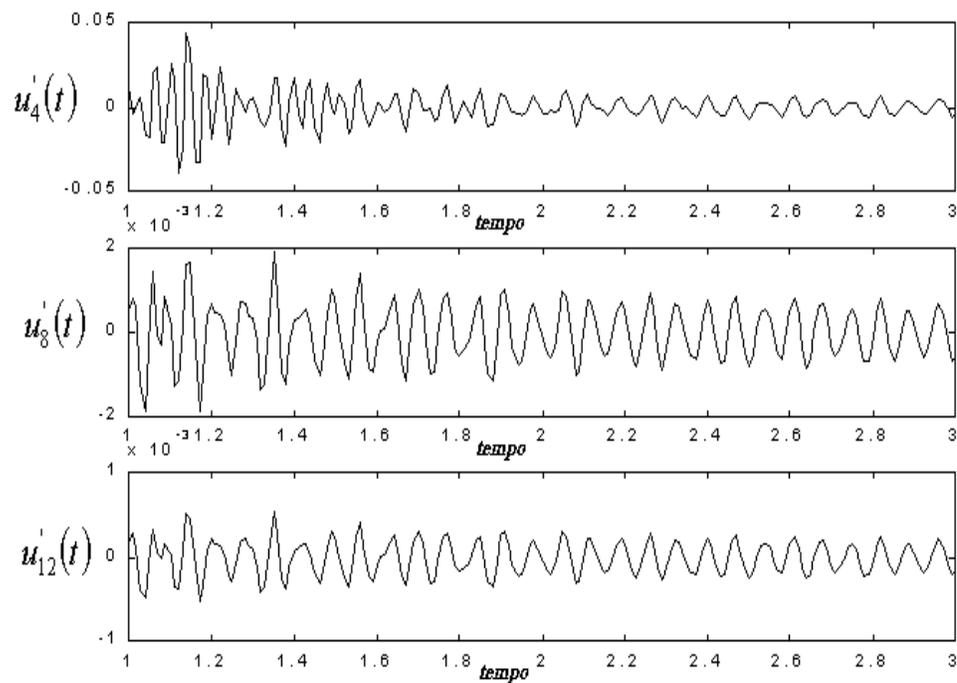


Figura 4.12 Quarta, oitava e décima segunda componentes do vetor velocidade

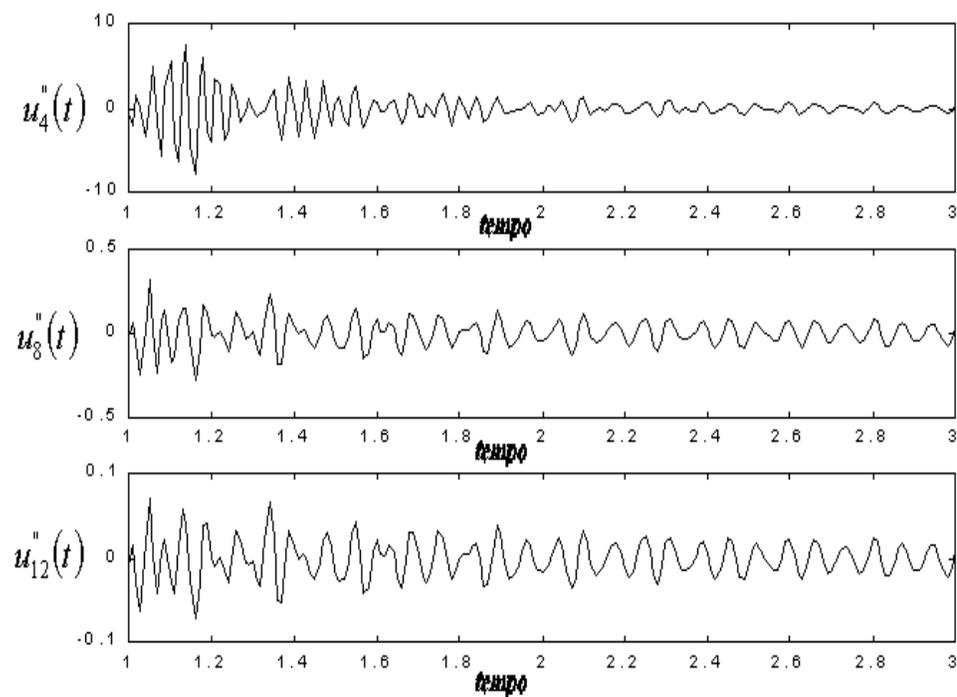


Figura 4.13 Quarta, oitava e décima segunda componentes do vetor aceleração

5 CONCLUSÕES

Constata-se que a obtenção de resposta para problemas envolvendo sistemas dinâmicos com vibrações está associada à resolução de equações diferenciais de segunda ordem; respostas estas que nem sempre podem ser obtidas facilmente através de métodos analíticos.

Apresenta-se, então, um método numérico de integração de tempo, o Método Generalizado- α , que possibilita a resolução de tais problemas independentemente do seu grau de complexibilidade.

O algoritmo do novo método consiste em atualizar numericamente os valores do deslocamento d_{n+1} de cada uma das massas envolvidas no sistema e de suas velocidades v_{n+1} como combinações lineares de d_n , v_n e a_{n+1} ; e os valores das suas acelerações a_{n+1} a partir de uma equação modificada da equação diferencial de segunda ordem. Constituído-se num método de passo simples, que depende do deslocamento inicial e da velocidade inicial como dados iniciais para a determinação do deslocamento, da velocidade e da aceleração dos corpos dotados de massas do sistema no domínio tempo.

Através da análise dos estudos realizados por Hughes, constata-se que a eficiência do método numérico depende da escolha apropriada de dois parâmetros: α_f e α_m . Uma vez tomados valores apropriados para estes parâmetros, o Método Generalizado- α torna-se preciso para equações diferenciais de segunda ordem (não interessando o número de graus de liberdade do problema).

Enfatiza-se que o Método Generalizado- α pode ser considerado uma síntese dos métodos HHT- α e WBZ- α ; e que o seu desempenho melhorado não é obtido aumentando a complexidade do algoritmo, pois apesar de triplicar a ordem das matrizes de massa, amortecimento e rigidez fornecidas pelas equações (2.14),

(2.15) e (2.16) para um problema de n graus de liberdade, pode ser facilmente implementado em programas numéricos como o MATLAB.

Usa-se o Método Generalizado- α , também, para solucionar problemas vibratórios transversais em cordas que se movem axialmente. Para tanto, primeiramente, obtivemos as matrizes de massa, amortecimento e de rigidez do sistema, através do método de Garlekin, sendo dados: a tensão da corda, sua densidade, a área de sua secção transversal, seu comprimento e sua velocidade.

Pretende-se que este trabalho sirva de motivação para futuros estudos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [BEL 60] BELLMAN, R. *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw Hill, New York, 1960.
- [BUT 87] BUTCHER, J. C. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, John Wiley, 1987.
- [CHU 93] CHUNG, J., & HULBERT, G. M. *A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics with Improved Numerical Dissipation: The Generalized- α Method*. Journal of Applied Mechanics, ASME, V. 60 , Jun , 1993.
- [CLA 90] CLAEYSSSEN, J. R., *On Predicting the Response of Non-Conservative Linear Vibrating Systems by Using Dynamical Matrix Solutions*, Journal of Sound and Vibration, 140(1), pp. 73-84, 1990.
- [CLA 90] CLAEYSSSEN, J. R. *Dynamical Solutions of Linear Matrix Differential Equations*, Quarterly of Applied Mathematics, XLVIII(1), 1990.
- [CLA 99] CLAEYSSSEN, J. R.; SUAZO; JUNG, *A direct approach to second-order matrix non-classical vibrating equations*, Applied Numerical Mathematics, 30(1), pp. 65-78,1999.
- [CLA 99] CLAEYSSSEN, J. R., *An Extension of the Cayley-Hamilton Identity for Characteristic Polynomials Involving Several Matrices*, Tech. Rep. 07/99, LNCC, Petropolis, 1999.
- [DAT 95] DATTA, B. N., *Numerical Linear Algebra and Applications*, Brooks/Cole Publishing Company, Pacific Grove, California, 1995.
- [EBE 99] EBERHARD, P., & HU, B. *Response Bounds for Linear Damped Systems*. Journal of Applied Mechanics, ASME, V. 66 , Dec , 1999.
- [EDW 87] EDWARDS, C. H. Jr., PENNEY, D. E. *Equações Diferenciais Elementares com Problemas de Contorno*. Prentice Hall do Brasil, 1987

- [FOR 84] FORSYTH, A. F., *Proof a Theorem by Cayley in Regard to Matrices.* Mess. Math., 13, 1984.
- [GAL 00] GALLICCHIO, E. D. *A Resposta Impulso em Sistemas Vibratórios.* Tese de Doutorado, UFRGS/CPGMAP, Porto Alegre, 2000.
- [GOL 89] GOLUB, G. H. & VANLOAN, C. F. , *Matrix Computations*, Second ed., The John Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1989.
- [HOF 87] HOFF, C., & PAHL, J. P. *Development of an Implicit Method with Numerical Dissipation from a Generalized Single-Step Algorithm for Structural Dynamics.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, V. 67, 31, Mar , 1987.
- [HOF 87] HOFF, C., & PAHL, J. P. *Practical Performance of the θ_1 -Method and Comparison with Other Dissipative Algorithms in Structural Dynamics.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, V. 67, 31, Mar , 1987.
- [HOF 89] HOFF, C., HUGHES, T. J. R., HULBERT, G. & PAHL, J. P. *Extended Comparison of the Hilbert-Hughes-Taylor α -Method and the θ_1 -Method.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, V. 76, 30, Jan , 1989.
- [NIC 87] NICHOLSON, D. W. *Response Bounds for Nonclassically Damped Mechanical Systems under Transient Loads.* Journal of Applied Mechanics, ASME, V. 54 , Jun , 1987.
- [PLA 72] PLAUT, R. H., & INFANTE, E.F. *Bounds on Motions of Some Lumped and Continuous Dynamics Systems.* Journal of Applied Mechanics, ASME , V. 39 , Mar , 1972.
- [SCH 95] SCHIEHLEN, W., & HU, B. *Amplitude Bounds of Linear Free Vibrations.* Journal of Applied Mechanics, ASME, V. 62 , Mar , 1995.

- [SHA 98] SHAHRUZ, S. M. & MAHAVAMANA, P. A. *An Upper Bound on Responses of Non-Classically Damped Linear Systems*. Journal of Sound and Vibration, V. 35 , 15, Jun , 1998.
- [SUA 95] SUAZO, G. R. C. *A Solução em Sistemas Mecânicos Amortecidos*. Dissertação de Mestrado, UFRGS/CPGMAP, Porto Alegre, 1995.
- [WED 34] WEDDERBURG, H.M. *Lectures on Matrices*, Am. Math. Soc. Collq. Publ., 17 , 1934.
- [WOO 80] WOOD, W. L., BOSSAK, M., & ZIENKIEWICS, O. C. *An Alpha Modification of Newmark's Method*. Short Communications, V. 15, 14, Feb, 1980.