

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DERIVAÇÃO DA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE CINÉTICA ESPACIAL DE
NÊUTRONS EM GEOMETRIA CILÍNDRICA A PARTIR DA SOLUÇÃO
CARTESIANA

por

Lucas Mussoi Almeida

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, Março de 2019

DERIVAÇÃO DA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE CINÉTICA ESPACIAL DE
NÊUTRONS EM GEOMETRIA CILÍNDRICA A PARTIR DA SOLUÇÃO
CARTESIANA

por

Lucas Mussoi Almeida
Bacharel em Matemática

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Marco Tullio Menna Barreto de Vilhena

Aprovada por:

Prof. Dr. Ricardo Carvalho de BarrosUERJ

Prof. Dr. Rogério José Marczak PROMEC / UFRGS

Prof. Dr. Rubem Mário Figueiró VargasPUCRS

Prof. Dr. Fernando Marcelo Pereira
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 15 de Março de 2019

*Hands, do what you are bid:
Bring the ballon of the mind
That bellies and drags in the wind
Into its narrow shed.*

William Butler Yeats
(1865 - 1939)

RESUMO

Neste trabalho construiu-se a solução hierárquica da equação de cinética de difusão de nêutrons em coordenadas cartesianas iniciando através do prévio da solução em geometria cartesiana. A solução construída é para o problema uni-dimensional. Para isto, através da ideia do método de decomposição, é construído um sistema recursivo de equações de cinética de difusão de nêutrons de tal modo que os termos fontes de cada subsequente passo da recursão portam a informação da curvatura devido a geometria cilíndrica. Mais especificamente, a inicialização da recursão coincide formalmente com o problema cartesiano. As restantes recursões são baseadas nas equações que tenham o termo fonte conhecido através das recursões anteriores e que corrigem a solução para uma curvatura cilíndrica. Por fim, apresenta-se resultados numéricos em comparação com os da literatura.

Palavras-chave: Nêutrons; Difusão; Cartesiana; Cilíndrica; Hierárquica.

ABSTRACT

In this work we construct a hierarchical solution of the kinetic neutron diffusion equation in cylindrical geometry starting from the knowledge of the solution in Cartesian geometry, which plays the role of the recursion initialisation. We construct the solution for a one-dimensional problem. To this end, following the idea of the decomposition method, we construct a recursive system of kinetic neutron diffusion equations such that the source terms of all subsequent recursion steps carry the information of curvature due to the cylindrical geometry. To be more specific, the recursion initialisation coincides formally with the Cartesian problem. The remaining recursion steps are based on equations that have known source terms from the previous recursions and correct the solution for the cylindrical curvature. Finally, we report on numerical results and their comparison against findings in the literature.

Keywords: Neutron; Diffusion; Cartesian; Cylindrical; Hierarchical.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
2	SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE CINÉTICA ESPACIAL PARA GEOMETRIA CARTESIANA	2
2.1	Caso monoenergético com um grupo de nêutrons atrasados	2
2.1.1	Caso com dois grupos de energia e seis grupos precursores de nêutrons atrasados	11
3	SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE CINÉTICA ESPACIAL EM GEOMETRIA CILÍNDRICA	23
3.1	Caso monoenergético com um grupo de nêutrons atrasados	23
3.2	Caso com dois grupos de energia e seis grupos precursores de nêutrons atrasados	30
4	APLICAÇÃO DO PROCEDIMENTO RECURSIVO PRO-POSTO	42
4.1	Problema Monoenergético com um grupo de precursores de nêutrons atrasados	42
4.2	Problema com dois grupos de energia e seis grupos de precursores de nêutrons atrasados	52
5	CONCLUSÕES E PROBLEMAS EM ABERTO	66
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	66
	APÊNDICE A Solução da equação de difusão de nêutrons estacionária e homogênea	71
	ANEXO I Tabelas complementares	77

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Fluxo escalar $\hat{\phi}$ - em coordenadas cilíndricas - em função da variável espacial para alguns instantes com número de truncamento $n = 1$ e $\varepsilon = 10^{-15}$	10
Figura 2.2	Concentração de precursores \hat{C} - em coordenadas cilíndricas - em função da variável espacial para alguns instantes com número de truncamento $n = 1$ e $\varepsilon = 10^{-15}$	11
Figura 2.3	Fluxo escalar $\hat{\phi}_1$ - rápido, em coordenadas cartesianas - em função da variável espacial para alguns instantes com número de truncamento $n = 1$ e $\varepsilon = 10^{-15}$	21
Figura 2.4	Fluxo escalar $\hat{\phi}_2$ - térmico, em coordenadas cartesianas - em função da variável espacial para alguns instantes com número de truncamento $n = 1$ e $\varepsilon = 10^{-15}$	21
Figura 2.5	Concentração de precursores \hat{C}_1 - primeiro grupo de nêutrons atrasados, em coordenadas cartesianas - em função da variável espacial para alguns instantes com número de truncamento $n = 1$ e $\varepsilon = 10^{-15}$	22
Figura 3.1	Fluxo escalar $\hat{\phi}$ - em coordenadas cilíndricas - em função da variável espacial para alguns instantes com número de truncamento $n = 1$ e $\varepsilon = 10^{-15}$	29
Figura 3.2	Concentração de precursores \hat{C} - em coordenadas cilíndricas - em função da variável espacial para alguns instantes com número de truncamento $n = 1$ e $\varepsilon = 10^{-15}$	30
Figura 3.3	Fluxo escalar $\hat{\phi}_1$ - rápido, em coordenadas cilíndricas - em função da variável espacial para alguns instantes com número de truncamento $n = 1$ e $\varepsilon = 10^{-15}$	40
Figura 3.4	Fluxo escalar $\hat{\phi}_2$ - térmico, em coordenadas cilíndricas - em função da variável espacial para alguns instantes com número de truncamento $n = 1$ e $\varepsilon = 10^{-15}$	40

Figura 3.5	Concentração de precursores \hat{C}_1 - primeiro grupo de nêutrons atrasados, em coordenadas cilíndricas - em função da variável espacial para alguns instantes com número de truncamento $n = 1$ e $\varepsilon = 10^{-15}$	41
Figura 4.1	Partições para o intervalo $[0, t]$	48
Figura 4.2	Fluxo escalar $\hat{\phi}(r, t)$ com $n = 10$, $j = 50$, $p = 400$ e $\varepsilon = 10^{-15}$	52
Figura 4.3	Concentração de precursores $\hat{C}(r, t)$ com $n = 10$, $j = 50$, $p = 400$ e $\varepsilon = 10^{-15}$	52
Figura 4.4	Fluxo escalar $\hat{\phi}_1(r, t)$ - rápido - com $n = 10$, $j = 50$, $p = 400$ e $\varepsilon = 10^{-15}$	64
Figura 4.5	Fluxo escalar $\hat{\phi}_2(r, t)$ - térmico - com $n = 10$, $j = 50$, $p = 400$ e $\varepsilon = 10^{-15}$	65
Figura 4.6	Concentração de precursores $\hat{C}_1(r, t)$ com $n = 10$, $j = 50$, $p = 400$ e $\varepsilon = 10^{-15}$	65

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1	Parâmetros nucleares [Lamarsh e Baratta, 2001; Sood, 2003; Oliveira, 2007].	6
Tabela 2.2	Limite do fluxo e da concentração de precursores de nêutrons em relação ao decréscimo de ε variando entre 1 e 10^{-15} , com número de truncamento $n = 1$	8
Tabela 2.3	Valores do fluxo e da concentração de precursores para $t = 1$ s em alguns pontos no intervalo de 0,20, com número de truncamento $n = 1$	9
Tabela 2.4	Valores do fluxo - com coeficiente A escalado em relação a potência do reator - e da concentração de precursores para $t = 1$ s, $n = 1$ e $\varepsilon = 10^{-15}$ em alguns pontos no intervalo de 0,20.	10
Tabela 2.5	Parâmetros nucleares para dois grupos energéticos [ANL-7416, 1972; Sood, 2003].	17
Tabela 2.6	Constantes de decaimento e frações de nêutrons atrasados para cada grupo [ANL-7416, 1972].	17
Tabela 2.7	Limite do fluxo rápido, térmico - tanto com o coeficiente A_1 quanto com A_2 normalizados - e da concentração de precursores de nêutrons em relação ao decréscimo de ε variando entre 1 e 10^{-15} , com número de truncamento $n = 1$	19
Tabela 2.8	Valores do fluxo térmico e rápido - com coeficientes A_1 e A_2 normalizados - para $t = 1$ s, $n = 1$ e $\varepsilon = 10^{-15}$ em alguns pontos no intervalo de 0,20.	20
Tabela 3.1	Limite do fluxo e da concentração de precursores de nêutrons - em geometria cilíndrica - em relação ao decréscimo de ε variando entre 1 e 10^{-15} , com número de truncamento $n = 1$	28
Tabela 3.2	Valores do fluxo - com coeficiente A escalado em relação a potência do reator - e da concentração de precursores para $t = 1$ s, $n = 1$ e $\varepsilon = 10^{-15}$ em alguns pontos no intervalo de 0,10.	29

Tabela 3.3	Limite do fluxo rápido e térmico de nêutrons - com coeficientes A_1 e A_2 escalados em relação a potência do reator - em geometria cilíndrica com relação ao decréscimo de ε variando entre 1 e 10^{-15} , com número de truncamento $n = 1$	37
Tabela 3.4	Convergência da concentração de precursores de nêutrons - em geometria cilíndrica - com relação ao decréscimo de ε variando entre 1 e 10^{-15} , com número de truncamento $n = 1$	38
Tabela 3.5	Valores do fluxo rápido e térmico - com coeficientes A_1 e A_2 escalados em relação a potência do reator - para $t = 1$ s em alguns pontos no intervalo de 0, 10 com número de truncamento $n = 1$	39
Tabela 3.6	Valores da concentração de precursores para $t = 1$ s em alguns pontos no intervalo de $[0, 10]$ com número de truncamento $n = 1$	39
Tabela 4.1	Parâmetros nucleares [Oliveira, 2007][Sood, 2003].	49
Tabela 4.2	Convergência do fluxo escalar $\hat{\phi}$ - com coeficiente A escalado em relação a potência do reator - e da concentração de precursores de nêutrons atrasados \hat{C} para o acréscimo do número de partições (p) onde estão fixados $n = 10$, $j = 50$ e $\varepsilon = 10^{-15}$	50
Tabela 4.3	Convergência do fluxo escalar $\hat{\phi}$ - com coeficiente A escalado em relação a potência do reator - e da concentração de precursores de nêutrons atrasados \hat{C} para o acréscimo do número de recursões (j) onde estão fixados $n = 10$, $p = 400$ e $\varepsilon = 10^{-15}$	50
Tabela 4.4	Valores do fluxo escalar e da concentração de precursores de nêutrons - em coordenadas cilíndricas, com o coeficiente da condição inicial normalizado - para alguns pontos do intervalo $[0, 10]$ onde $t = 10^{-5}$ s e fixados $n = 10$, $j = 50$, $p = 400$ e $\varepsilon = 10^{-15}$	51
Tabela 4.5	Valores do fluxo escalar e da concentração de precursores de nêutrons - em coordenadas cilíndricas, com o coeficiente da condição inicial normalizado - para alguns pontos do intervalo $[0, 10]$ onde $t = 1.5 \times 10^{-5}$ s e fixados $n = 10$, $j = 50$, $p = 400$ e $\varepsilon = 10^{-15}$	51

Tabela 4.6	Parâmetros nucleares para dois grupos energéticos [ANL-7416, 1972; Sood, 2003].	60
Tabela 4.7	Constantes de decaimento e frações de nêutrons atrasados para cada grupo, retiradas do <i>BSS-6</i> [ANL-7416, 1972].	61
Tabela 4.8	Convergência dos fluxos escalares - com coeficientes A_1 e A_2 , respectivamente, escalados em função da potência do reator - $\hat{\phi}_1$, rápido, e ϕ_2 , térmico, em relação ao número de partições do intervalo temporal (p) onde são fixados $n = 10$, $j = 50$ e $\varepsilon = 10^{-15}$	61
Tabela 4.9	Covergência da concentração do primeiro grupo de precursores de nêutrons atrasados, em relação ao número de partições do intervalo temporal (p) onde são fixados $n = 10$, $j = 50$ e $\varepsilon = 10^{-15}$	62
Tabela 4.10	Convergência dos fluxos escalares - com coeficientes A_1 e A_2 , respectivamente, escalados em função da potência do reator - $\hat{\phi}_1$, rápido, e ϕ_2 , térmico, em relação ao número de recursões (j) onde são fixados $n = 10$, $p = 400$ e $\varepsilon = 10^{-15}$	62
Tabela 4.11	Convergência da concentração de precursores de nêutrons atrasados \hat{C}_1 , em relação ao número de recursões (j) onde são fixados $n = 10$, $p = 400$ e $\varepsilon = 10^{-15}$	62
Tabela 4.12	Valores do fluxo escalar rápido, térmico e do primeiro grupo de concentração de precursores de nêutrons atrasados - em coordenadas cilíndricas, com os coeficientes das condições iniciais, A_1 e A_2 escalados em função da potência do reator - para alguns pontos do intervalo $[0, 10]$ onde $t = 10^{-5}$ s e fixados $n = 10$, $j = 50$, $p = 400$ e $\varepsilon = 10^{-15}$	63
Tabela 4.13	Valores do fluxo escalar rápido, térmico e do primeiro grupo de concentração de precursores de nêutrons atrasados - em coordenadas cilíndricas, com os coeficientes das condições iniciais, A_1 e A_2 escalados - para alguns pontos do intervalo $[0, 10]$ onde $t = 10^{-5}$ s e fixados $n = 10$, $j = 50$, $p = 400$ e $\varepsilon = 10^{-15}$	64
Tabela A.1	Distribuição da energia de fissão com fragmentos de cripton e bário [Murray, 2004]	71

Tabela I.1	Valores do fluxo escalar e da concentração de precursores de nêutrons atrasados - em coordenadas cartesianas, com o coeficiente da condição inicial normalizado - para alguns pontos do intervalo $[0, 20]$, $t = 5 [s]$ e $\varepsilon = 10^{-15}$	77
Tabela I.2	Valores do fluxo escalar e da concentração de precursores de nêutrons atrasados - em coordenadas cartesianas, com o coeficiente da condição inicial normalizado - para alguns pontos do intervalo $[0, 20]$, $t = 10 [s]$ e $\varepsilon = 10^{-15}$	78
Tabela I.3	Valores do fluxo escalar rápido, térmico e da concentração de precursores de nêutrons atrasados -em coordenadas cartesianas, com o coeficiente da condição inicial normalizado - para alguns pontos do intervalo $[0, 20]$, $t = 5 [s]$ e $\varepsilon = 10^{-15}$	79
Tabela I.4	Valores do fluxo escalar rápido, térmico e da concentração de precursores de nêutrons atrasados -em coordenadas cartesianas, com o coeficiente da condição inicial normalizado - para alguns pontos do intervalo $[0, 20]$ e $t = 10 [s]$	80
Tabela I.5	Valores do fluxo escalar e da concentração de precursores de nêutrons atrasados - em coordenadas cilíndricas, com o coeficiente da condição inicial normalizado - para alguns pontos do intervalo $[0, 10]$, $t = 5 [s]$ e $\varepsilon = 10^{-15}$	81
Tabela I.6	Valores do fluxo escalar e da concentração de precursores de nêutrons atrasados - em coordenadas cilíndricas, com o coeficiente da condição inicial normalizado - para alguns pontos do intervalo $[0, 10]$, $t = 10 [s]$ e $\varepsilon = 10^{-15}$	82
Tabela I.7	Valores do fluxo escalar rápido, térmico e da concentração de precursores de nêutrons atrasados - em coordenadas cilíndricas, com o coeficiente da condição inicial normalizado - para alguns pontos do intervalo $[0, 10]$, $t = 5 [s]$ e $\varepsilon = 10^{-15}$	83
Tabela I.8	Valores do fluxo escalar rápido, térmico e da concentração de precursores de nêutrons atrasados - em coordenadas cilíndricas, com o coeficiente da condição inicial normalizado - para alguns pontos do intervalo $[0, 10]$, $t = 10 [s]$ e $\varepsilon = 10^{-15}$	84

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Latinos

$C_i(\mathbf{r}, t)$	concentração do precursor do i -ésimo grupo na posição \mathbf{r} e no tempo t , $cm^{-2}s^{-1}$
D	coeficiente de difusão, cm
E	energia dos nêutrons, $cm^{-2}s^{-1}$
L	comprimento do reator, cm
M	matriz de coeficientes do problema transformado genérico
N	matriz de coeficientes dos termos que corrigem a curvatura
R	raio do reator. [cm]
t	variável temporal
v	velocidade dos nêutrons
V	matriz dos autovetores
V^{-1}	inversa da matriz de autovetores

Símbolos Gregos

$\phi_g(\mathbf{r}, t)$	fluxo escalar de nêutrons na posição \mathbf{r} do grupo g no tempo t Ξ
β	fração total de nêutrons atrasados
β_i	fração de nêutrons atrasados para o i -ésimo grupo
γ_n	autovalores do problema de <i>Sturm-Liouville</i>
ε	parâmetro relacionado ao termo fictício de difusão
Σ_a	seção de choque macroscópica de absorção, cm^{-1}
Σ_f	seção de choque macroscópica de fissão, cm^{-1}
Σ_{s12}	seção de choque de espalhamento do grupo 1 para o grupo 2, cm^{-1}
Σ_{s21}	seção de choque de espalhamento do grupo 2 para o grupo 1, cm^{-1}
ν	número de médio de nêutrons emitidos pela fissão χ

1 INTRODUÇÃO

Com originalidade, será exposto no presente trabalho uma solução para a equação de cinética de nêutrons com um e seis grupos de precursores de nêutrons atrasados em coordenadas cilíndrica, considerando um domínio homogêneo, fazendo uso de uma favorável interpretação do operador laplaciano simultaneamente à aplicação da *Técnica da Transformada Integral Generalizada* (comumente utilizada sua sigla em inglês GITT). A intitulada *interpretação favorável* do operador laplaciano é um mero eufemismo para a convergência desse operador cilíndrico em um operador cartesiano, ao tomar-se um cilindro e uma placa onde, respectivamente, o raio e o comprimento tendem ao infinito. Propõe-se, de maneira recursiva, a solução da equação de cinética de nêutrons de tal maneira que, o termo de curvatura é considerado como fonte da equação em coordenadas cartesianas sendo retroalimentado pela prévia solução e sua inicialização dada pelo resultado do problema em geometria cartesiana, com condições de contorno originais - cuja solução já é conhecida [Ceolin, 2009] e estendido em Oliveira et al., 2013. Através do conceito do método de decomposição um sistema recursivo é então construído, é importante notar que a principal característica é tal que os termos de fonte corrigem a contribuição da curvatura cilíndrica. O sistema é então resolvido pelo método espectral assim, a expansão da solução em séries é dada em termos de autofunções ortogonais obtidas da solução do problema auxiliar de Sturm-Liouville e a ortogononalidade das ditas autofunções completam o procedimento. Este procedimento resulta em uma equação matricial diferencial linear e não-homogênea cuja solução já é conhecida.

Com o propósito de metodizar o procedimento proposto, a presente dissertação está disposta da seguinte forma: no capítulo 1 será apresentado o modelo físico-matemático que constitui a base para este estudo; no capítulo 2 é apresentada a solução da equação de cinética de difusão de nêutrons com um e dois grupos energéticos e, respectivamente, um e seis grupos de precursores de nêutrons atrasados em coordenadas cartesianas; no capítulo 3 a solução da mesma equação, no entanto, em coordenadas cilíndricas; no capítulo, 4, o procedimento recursivo proposto é apresentado e resolvido tanto para o caso monoenergético quanto para o multigrupos e são apresentados os resultados. Por fim, são apresentadas as conclusões e as sugestões para trabalhos futuros, respectivamente.

2 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE CINÉTICA ESPACIAL PARA GEOMETRIA CARTESIANA

2.1 Caso monoenergético com um grupo de nêutrons atrasados

Considerada em um domínio homogêneo a equação unidimensional de cinética de difusão de nêutrons com um grupo de precursores de nêutrons atrasados [Ceolin, 2009] é dada pelo seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi(x, t) &= D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x, t) + [-\Sigma_a + (1 - \beta)\nu\Sigma_f] \phi(x, t) + \lambda C(x, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} C(x, t) &= -\lambda C(x, t) + \beta\nu\Sigma_f \phi(x, t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

para $t > 0$ e $0 < x < L$, sujeitas às condições de contorno de fluxo nulo onde $\phi(0, t) = \phi(L, t) = 0$ e cujas condições iniciais são

$$\begin{aligned} \phi(x, 0) &= \phi_0(x) \\ C(x, 0) &= \frac{\beta\nu\Sigma_f}{\lambda} \phi_0(x) \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde, $\phi(x, t)$ - em unidades de $cm^{-2}s^{-1}$ - denota o fluxo escalar de nêutrons, ϕ_0 o fluxo escalar de nêutrons no tempo inicial, $C(x, t)$ - com unidades $cm^{-2}s^{-1}$ - a concentração dos precursores de nêutrons atrasados, v - em cm/s - a velocidade dos nêutrons, D - com unidade cm - o coeficiente de difusão, Σ_a - em cm^{-1} - a seção de choque macroscópica de absorção, $(1 - \beta)$ a fração de nêutrons prontos, ν o número médio de nêutrons emitidos na fissão, Σ_f - em cm^{-1} - a seção e choque macroscópica de fissão e λ - em s^{-1} - a constante de decaimento.

Com o intuito de fazer uso da **GITT** - mantendo o rigor matemático - para resolver o sistema de Equações 2.1 deve-se observar que é necessário introduzir um hipotético termo de difusão na equação para a concentração de precursores:

$$\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} C(x, t)$$

onde ε é um parâmetro que deve-se manter sempre positivo e próximo de zero.

Agregando esse elemento complementar ao sistema de Equações 2.1 temos:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi(x, t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x, t) + [-\Sigma_a + (1 - \beta)\nu\Sigma_f] \phi(x, t) + \lambda C(x, t) \quad (2.3a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} C(x, t) = \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} C(x, t) - \lambda C(x, t) + \beta\nu\Sigma_f \phi(x, t) \quad (2.3b)$$

Com a devida exigência para a aplicação da **GITT**, já incluída no sistema de Equações 1.3a-b a determinação do problema auxiliar de *Sturm-Liouville* dado por

$$\zeta_n''(x) + \gamma_n^2 \zeta_n(x) = 0 \quad em \quad 0 < x < L \quad (2.4)$$

com as condições de contorno

$$\zeta_n(0) = \zeta_n(L) = 0$$

e cuja solução dá-se através das autofunções $\left\{ \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right\}_{n=0}^N$, com os seguintes autovalores $\gamma_n = n\pi/L$, para $n \in \mathbb{N}$. Como $C(r, t)$ tem seu perfil espacial determinado por $\phi(r, t)$ é possível portanto, escrever as expansões com as mesmas autofunções. A partir de tais resultados pode-se supor que haja possíveis soluções para o sistema de Equações 2.3a-b no formato de séries que envolvam o produto de autofunções ortonormais no espaço por funções no tempo, ou seja:

$$\phi(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \text{sen}(\gamma_n x) \quad (2.5)$$

$$C(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(t) \text{sen}(\gamma_n x) \quad (2.6)$$

A seguinte etapa do processo consiste em substituir as expansões 2.5 e 2.6 no sistema de Equações 2.3a-b, com isso temos para a Equação 2.3a

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{2}{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \varphi_n(t) \operatorname{sen}(\gamma_n x) &= -vD \sqrt{\frac{2}{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 \varphi_n(t) \operatorname{sen}(\gamma_n x) \\
&+ v[(1-\beta)\nu\Sigma_f - \Sigma_a] \sqrt{\frac{2}{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \operatorname{sen}(\gamma_n x) \\
&+ v\lambda \sqrt{\frac{2}{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(t) \operatorname{sen}(\gamma_n x)
\end{aligned} \tag{2.7a}$$

e para a Equação 2.3b

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{2}{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \xi_n(t) \operatorname{sen}(\gamma_n x) &= -\varepsilon \sqrt{\frac{2}{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 \xi_n(t) \operatorname{sen}(\gamma_n x) \\
&- \lambda \sqrt{\frac{2}{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(t) \operatorname{sen}(\gamma_n x) \\
&+ \beta\nu\Sigma_f \sqrt{\frac{2}{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \operatorname{sen}(\gamma_n x)
\end{aligned} \tag{2.7b}$$

Dando continuidade ao procedimento, deve-se multiplicar as Equações 2.7a e 2.7b por $\sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen}(\gamma_m x)$, $m \in \mathbb{N}$ e depois integrar a variável espacial em todo o intervalo espacial $[0, L]$, sendo equivalente dizer que será aplicado o seguinte operador integral

$$\sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L (\cdot) \operatorname{sen}(\gamma_n x) dx \tag{2.8}$$

após aplicá-lo e ao rearranjar os termos, temos:

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \varphi_n(t) \int_0^L \operatorname{sen}(\gamma_m x) \operatorname{sen}(\gamma_n x) dx \\
+ \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} v[D\gamma_n^2 + \Sigma_a - (1-\beta)\nu\Sigma_f] \varphi_n(t) \int_0^L \operatorname{sen}(\gamma_m x) \operatorname{sen}(\gamma_n x) dx \\
+ \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} [-v\lambda] \xi_n(t) \int_0^L \operatorname{sen}(\gamma_m x) \operatorname{sen}(\gamma_n x) dx = 0
\end{aligned} \tag{2.9a}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \xi_n(t) \int_0^L \operatorname{sen}(\gamma_m x) \operatorname{sen}(\gamma_n x) dx \\
+ \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} [-\beta\nu\Sigma_f] \varphi_n(t) \int_0^L \operatorname{sen}(\gamma_m x) \operatorname{sen}(\gamma_n x) dx \\
+ \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} [\varepsilon\gamma_n^2 + \lambda] \xi_n(t) \int_0^L \operatorname{sen}(\gamma_m x) \operatorname{sen}(\gamma_n x) dx = 0
\end{aligned} \tag{2.9b}$$

Fazendo uso da propriedade da ortogonalidade onde

$$\int_0^L \text{sen}(\gamma_m x) \text{sen}(\gamma_n x) dx = \begin{cases} \text{se } m = n, \frac{L}{2} \\ \text{se } m \neq n, 0 \end{cases}$$

e truncando a série para um valor onde $1 \leq n \leq N$, pode-se reescrever o sistema na seguinte forma matricial

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varphi_n(t) \\ \xi_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_n(t) \\ \xi_n(t) \end{bmatrix} = \vec{0} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{A} = \{a_{m,n}\}, \text{ onde } a_{n,n} = v \left[D \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \Sigma_a - (1 - \beta)\nu\Sigma_f \right] \text{ e } a_{m,n} = 0 \text{ se } m \neq n$$

$$\mathbf{B} = \{b_{m,n}\}, \text{ onde } b_{n,n} = -v\lambda \text{ e } b_{m,n} = 0 \text{ se } m \neq n$$

$$\mathbf{C} = \{c_{m,n}\}, \text{ onde } c_{n,n} = -\beta\nu\Sigma_f \text{ e } c_{m,n} = 0 \text{ se } m \neq n$$

$$\mathbf{D} = \{d_{m,n}\}, \text{ onde } d_{n,n} = \varepsilon \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \lambda \text{ e } d_{m,n} = 0 \text{ se } m \neq n$$

As matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{D} são matrizes diagonais. A Equação 2.10 é uma equação matricial linear, homogênea e de primeira ordem que pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\mathbf{X}'(t) + \mathbf{M}\mathbf{X}(t) = 0$$

cuja solução é obtida via transformada de *Laplace*

$$\mathbf{X}(t) = e^{-\mathbf{M}t} \mathbf{X}(0) \quad (2.11)$$

e onde $\mathbf{X}(0)$ é o vetor condição inicial

$$\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} \varphi_n(0) \\ \xi_n(0) \end{bmatrix}$$

Analogamente, o método espectral pode ser aplicado às condições iniciais de maneira que seus componentes do vetor $\mathbf{X}(0)$ são

$$\begin{aligned}\varphi_n(0) &= \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L \phi_0(x) \text{sen}(\gamma_n x) dx \\ \xi_n(0) &= \frac{\beta \nu \Sigma_f}{\varepsilon \gamma_n^2 + \lambda} \varphi_n(0)\end{aligned}\tag{2.12}$$

Pode-se expressar a exponencial da Equação 2.11 como

$$e^{-\mathbf{F}t} = \mathbf{V}e^{-\mathbf{\Xi}t}\mathbf{V}^{-1}$$

onde \mathbf{V} , \mathbf{V}^{-1} e $\mathbf{\Xi}$ são respectivamente a matriz de autovetores, sua inversa e a matriz diagonal dos autovalores todas em relação à matriz \mathbf{M} . Podemos então reescrever a Equação 2.11 como:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{V}e^{-\mathbf{\Xi}t}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}(0)$$

Resultados Numéricos

Os resultados numéricos aqui apresentados foram resolvidos computacionalmente, utilizando o software **MATLAB**. Os parâmetros nucleares compilados na Tabela 2.1 foram extraídos, em sua maioria, de Oliveira et al., 2007, em particular a informação referente ao valor de ν foi retirada do relatório de *benchmarks* do laboratório de *Los Alamos* [Sood, 2003, e [Lamarsh e Baratta, 2001].

Tabela 2.1 – Parâmetros nucleares [Lamarsh e Baratta, 2001; Sood, 2003; Oliveira, 2007].

D cm	0.96343
v cm/s	1.1035×10^7
Σ_a cm ⁻¹	1.5843×10^{-2}
Σ_f cm ⁻¹	1.1233×10^{-2}
ν	2.7
β	0.0065
λ_s^{-1}	0.0764467
P J/s]	10^8
E_R J	3.2043×10^{-11}

O modelo em geometria cartesiana foi concebido para um meio homogêneo em uma placa de $L = 20$ cm com condições de contorno dadas por $\phi(0, t) = \phi(L, t) = 0$. A condição inicial do problema proposto é dada pela solução da equação estacionária de difusão de nêutrons A.5, apresentada no Apêndice A.

Repetindo o mesmo procedimento nas condições iniciais dadas pelas Equações 2.12

$$\phi(x, 0) = A \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{L} x \right)$$

onde $A = \frac{\pi P}{2E_R \Sigma_f L}$ têm-se,

$$\sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(0) \operatorname{sen}(\gamma_n x) = A \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{L} x \right)$$

em seguida aplica-se o operador integral e fazendo uso da propriedade da ortogonalidade das autofunções

$$\begin{aligned} \varphi_n(0) &= A \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{L} x \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx \\ \Rightarrow \varphi_n(0) &= \begin{cases} A \frac{L}{2} \sqrt{\frac{2}{L}}, & \text{se } n = 1 \\ 0, & \text{se } n > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Nota-se que devido à ortogonalidade têm-se o seguinte vetor

$$\varphi_n(0) \begin{bmatrix} A \frac{L}{2} \sqrt{\frac{2}{L}} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} A \frac{L}{2} \sqrt{\frac{2}{L}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A \frac{\beta \nu \Sigma_f L}{2(\varepsilon \gamma_1^2 + \lambda)} \sqrt{\frac{2}{L}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

No entanto, há a necessidade de mostrar o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$ para valores do fluxo escalar e da concentração de precursores com tempo, $t = 1$ s, e posição, $x = 5$ cm,

fixados. Assumindo os valores de P - potência do reator - e E_R , apresentados na Tabela 2.1, obtêm-se os resultados dispostos na Tabela 2.2, já na Tabela 2.3 apontam-se valores do fluxo escalar no tempo $t = 1$ s para alguns pontos no intervalo 0, 20.

Fixando a escala em relação a potência do reator, de tal maneira que $A = 1$, na condição inicial, adotou-se a seguinte notação: $\hat{\phi}(x, t)$ e $\hat{C}(x, t)$. A Tabela 2.4 comprime os resultados em relação a $t = 1$ s, onde os demais valores podem ser encontrados nas Tabelas I.1 e I.2 do Anexo A, apresentados nas Figuras 2.1 e 2.2 onde, devido a sub-criticalidade do reator ($k_{eff} < 1$), apura-se o comportamento de decaimento desejado.

Tabela 2.2 – Limite do fluxo e da concentração de precursores de nêutrons em relação ao decréscimo de ε variando entre 1 e 10^{-15} , com número de truncamento $n = 1$.

ε	$\phi(5, 1) \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$	$C(5, 1) \text{ cm}^{-3}$
1	$3.191781826220700 \times 10^{17}$	$2.725612504277725 \times 10^{16}$
10^{-1}	$4.181793903707183 \times 10^{17}$	$3.571031445250617 \times 10^{16}$
10^{-2}	$4.312443449919866 \times 10^{17}$	$3.682599380757734 \times 10^{16}$
10^{-3}	$4.325926910909342 \times 10^{17}$	$3.694113557065230 \times 10^{16}$
10^{-4}	$4.327279577019697 \times 10^{17}$	$3.695268663761914 \times 10^{16}$
10^{-5}	$4.327414886970148 \times 10^{17}$	$3.695384211441197 \times 10^{16}$
10^{-6}	$4.327428418398728 \times 10^{17}$	$3.695395766579342 \times 10^{16}$
10^{-7}	$4.327429771545922 \times 10^{17}$	$3.695396922096858 \times 10^{16}$
10^{-8}	$4.327429906860684 \times 10^{17}$	$3.695397037648649 \times 10^{16}$
10^{-9}	$4.327429920392161 \times 10^{17}$	$3.695397049203826 \times 10^{16}$
10^{-10}	$4.327429921745308 \times 10^{17}$	$3.695397050359345 \times 10^{16}$
10^{-11}	$4.327429921880623 \times 10^{17}$	$3.695397050474897 \times 10^{16}$
10^{-12}	$4.327429921894155 \times 10^{17}$	$3.695397050486451 \times 10^{16}$
10^{-13}	$4.327429921895505 \times 10^{17}$	$3.695397050487606 \times 10^{16}$
10^{-14}	$4.327429921895642 \times 10^{17}$	$3.695397050487722 \times 10^{16}$
10^{-15}	$4.327429921895656 \times 10^{17}$	$3.695397050487734 \times 10^{16}$

Tabela 2.3 – Valores do fluxo e da concentração de precursores para $t = 1$ s em alguns pontos no intervalo de 0, 20, com número de truncamento $n = 1$.

x cm	$\phi(x, 1)$ $cm^{-2}s^{-1}$	$C(x, 1)$ cm^{-3}
0	0	0
1	$9.573648603608019 \times 10^{16}$	$8.175391271658388 \times 10^{15}$
2	$1.891156220547712 \times 10^{17}$	$1.614947727764049 \times 10^{16}$
3	$2.778381038197082 \times 10^{17}$	$2.372590955600485 \times 10^{16}$
4	$3.597192893768033 \times 10^{17}$	$3.071813119932101 \times 10^{16}$
5	$4.327429921895656 \times 10^{17}$	$3.695397050487734 \times 10^{16}$
6	$4.951111263429703 \times 10^{17}$	$4.227988041340693 \times 10^{16}$
7	$5.452879813861901 \times 10^{17}$	$4.656471934728016 \times 10^{16}$
8	$5.820380366206266 \times 10^{17}$	$4.970298035137997 \times 10^{16}$
9	$6.044563837199674 \times 10^{17}$	$5.161738902449427 \times 10^{16}$
10	$6.119910085763981 \times 10^{17}$	$5.226080627153287 \times 10^{16}$
11	$6.044563837199674 \times 10^{17}$	$5.161738902449427 \times 10^{16}$
12	$5.820380366206267 \times 10^{17}$	$4.970298035137998 \times 10^{16}$
13	$5.452879813861901 \times 10^{17}$	$4.656471934728016 \times 10^{16}$
14	$4.951111263429703 \times 10^{17}$	$4.227988041340693 \times 10^{16}$
15	$4.327429921895656 \times 10^{17}$	$3.695397050487734 \times 10^{16}$
16	$3.597192893768033 \times 10^{17}$	$3.071813119932101 \times 10^{16}$
17	$2.778381038197082 \times 10^{17}$	$2.372590955600482 \times 10^{16}$
18	$1.891156220547712 \times 10^{17}$	$1.614947727764049 \times 10^{16}$
19	$9.573648603608022 \times 10^{16}$	$8.175391271658392 \times 10^{15}$
20	74.947282976004630	6.400102912129266

Tabela 2.4 – Valores do fluxo - com coeficiente A escalado em relação a potência do reator - e da concentração de precursores para $t = 1$ s, $n = 1$ e $\varepsilon = 10^{-15}$ em alguns pontos no intervalo de 0, 20.

x cm	$\hat{\phi}(x, 1)$ $cm^{-2}s^{-1}$	$\hat{C}(x, 1)$ cm^{-3}
0	0	0
1	0.004817706284045	$4.114067220845245 \times 10^{-4}$
2	0.009516784650326	$8.126832452906979 \times 10^{-4}$
3	0.013981528194119	0.001193948809857
4	0.018102000111741	0.001545815392235
5	0.021776740709518	0.001859618869390
6	0.024915265678167	0.002127632358259
7	0.027440294116794	0.002343256477260
8	0.029289651445151	0.002501181844969
9	0.030417800348148	0.002597519814709
10	0.030796962055682	0.002629898225936
11	0.030417800348148	0.002597519814709
12	0.029289651445151	0.002501181844969
13	0.027440294116794	0.002343256477260
14	0.024915265678167	0.002127632358259
15	0.021776740709518	0.001859618869390
16	0.018102000111741	0.001545815392235
17	0.013981528194119	0.001193948809857
18	0.009516784650326	$8.126832452906982 \times 10^{-4}$
19	0.004817706284045	$4.114067220845248 \times 10^{-4}$
20	$3.771540100495358 \times 10^{-18}$	$3.220696444475622 \times 10^{-19}$

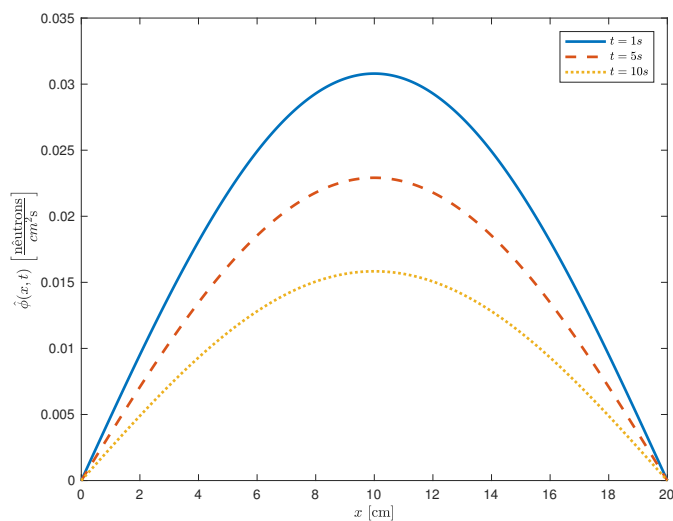


Figura 2.1 – Fluxo escalar $\hat{\phi}$ - em coordenadas cilíndricas - em função da variável espacial para alguns instantes com número de truncamento $n = 1$ e $\varepsilon = 10^{-15}$.

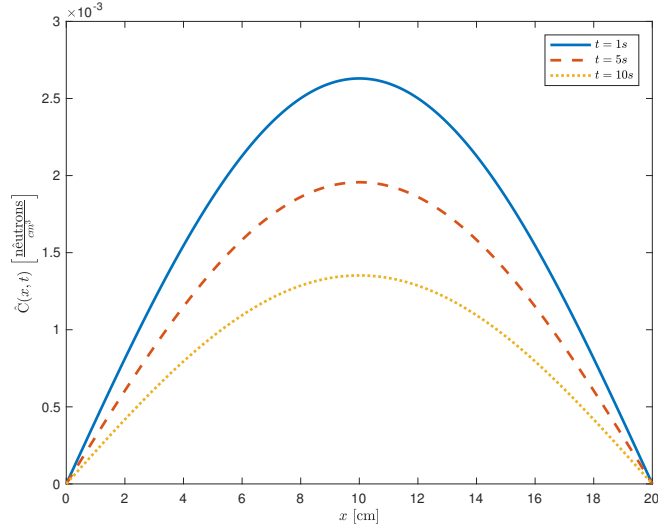


Figura 2.2 – Concentração de precursores \hat{C} - em coordenadas cilíndricas - em função da variável espacial para alguns instantes com número de truncamento $n = 1$ e $\varepsilon = 10^{-15}$.

2.1.1 Caso com dois grupos de energia e seis grupos precursores de nêutrons atrasados

Para este caso a metodologia abrange uma situação com dois grupos de energia e seis grupos de precursores de nêutrons atrasados [Ceolin, 2010]. Com as mesmas considerações utilizadas anteriormente o sistema de equações é reescrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_1} \frac{\partial}{\partial t} \phi_1(x, t) &= D_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi_1(x, t) - \Sigma_{a1} \phi_1(x, t) + \Sigma_{s21} \phi_2(x, t) \\ &+ (1 - \beta) \chi_1^p [\nu_1 \Sigma_{f1} \phi_1(x, t) + \nu_2 \Sigma_{f2} \phi_2(x, t)] + \chi_1^d \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(x, t) \end{aligned} \quad (2.13a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_2} \frac{\partial}{\partial t} \phi_2(x, t) &= D_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi_2(x, t) - \Sigma_{a2} \phi_2(x, t) + \Sigma_{s12} \phi_1(x, t) \\ &+ (1 - \beta) \chi_2^p [\nu_1 \Sigma_{f1} \phi_1(x, t) + \nu_2 \Sigma_{f2} \phi_2(x, t)] + \chi_2^d \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(x, t) \end{aligned} \quad (2.13b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} C_i(x, t) = -\lambda_i C_i(x, t) + \beta_i [\nu_1 \Sigma_{f1} \phi_1(x, t) + \nu_2 \Sigma_{f2} \phi_2(x, t)] \quad i = 1 : 6 \quad (2.13c)$$

e definido em um intervalo espacial onde $x \in [0, L]$, $t > 0$, sujeito às condições de contorno onde $\phi(0, t) = \phi(L, t) = 0$ e cujas condições iniciais são

$$\begin{aligned}
\phi_1(x, 0) &= \phi_{1,0}(x) \\
\phi_2(x, 0) &= \phi_{2,0}(x) \\
C_i(x, 0) &= \frac{\beta_i}{\lambda_i} [\nu_1 \Sigma_{f1} \phi_{1,0}(x) + \nu_2 \Sigma_{f2} \phi_{2,0}(x)]
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Onde têm-se que Σ_a é a seção de choque de absorção do respectivo grupo, Σ_{s21} é a seção e choque de espalhamento do grupo 2 para o grupo 1 e Σ_{s12} é a seção de choque de espalhamento do grupo 1 para o grupo 2.

Como os nêutrons de fissão são substancialmente gerados no grupo rápido é válido considerar que $\chi_1^p = \chi_1^d = 1$, $\chi_2^p = \chi_2^d = 0$ e como somente os nêutrons térmicos de baixa energia apresentam *upscattering* é conveniente também considerar, nesta abordagem, que $\Sigma_{21} = 0$. Portanto, pode-se reescrever o sistema de Equações 2.13a-c como

$$\begin{aligned}
\frac{1}{v_1} \frac{\partial}{\partial t} \phi_1(x, t) &= D_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi_1(x, t) - \Sigma_{a1} \phi_1(x, t) + \Sigma_{s21} \phi_2(x, t) \\
&+ (1 - \beta) [\nu_1 \Sigma_{f1} \phi_1(x, t) + \nu_2 \Sigma_{f2} \phi_2(x, t)] + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(x, t)
\end{aligned} \tag{2.15a}$$

$$\frac{1}{v_2} \frac{\partial}{\partial t} \phi_2(x, t) = D_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi_2(x, t) - \Sigma_{a2} \phi_2(x, t) + \Sigma_{s12} \phi_1(x, t) \tag{2.15b}$$

De maneira análoga ao caso monoenergético um termo fictício de difusão na Equação 2.13c referente à concentração de precursores será introduzido, tendo assim

$$\frac{\partial}{\partial t} C_i(x, t) = \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} C_i(x, t) - \lambda_i C_i(x, t) + \beta_i [\nu_1 \Sigma_{f1} \phi_1(x, t) + \nu_2 \Sigma_{f2} \phi_2(x, t)] \quad i = 1 \dots 6 \tag{2.15c}$$

portanto, concluindo assim o sistema.

Para dar início à aplicação do método espectral é necessário a identificação do problema auxiliar de *Sturm-Liouville* do sistema de Equações 2.15a-c. Do mesmo modo que anteriormente, com condições de contorno idênticas, a solução do problema auxiliar dá-se através das autofunções $\left\{ \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right\}_{n=1}^{\infty}$ onde $\frac{n\pi}{L} = \gamma_n$ portanto, sendo possível construir uma possível solução através da expansão desses fluxos para o grupo 1, para o grupo 2 e para as concentrações:

$$\phi_1(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1,n}(t) \text{sen}(\gamma_n x) \quad (2.16)$$

$$\phi_2(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{2,n}(t) \text{sen}(\gamma_n x) \quad (2.17)$$

$$C_i(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{i,n}(t) \text{sen}(\gamma_n x) \quad i = 1 \dots 6 \quad (2.18)$$

Substituindo as expansões dadas pelas Equações 2.16, 2.17 e 2.18 no sistema de equações 2.15a-c e reagrupando os termos, obtêm-se

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \varphi_{1,n}(t) \text{sen}(\gamma_n x) &= -v_1 D_1 \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 \varphi_{1,n}(t) \text{sen}(\gamma_n x) \\ &+ v_1 [(1 - \beta) \nu_1 \Sigma_{f1} - \Sigma_{a1}] \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1,n}(t) \text{sen}(\gamma_n x) \\ &+ v_1 [(1 - \beta) \nu_2 \Sigma_{f2}] \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{2,n}(t) \text{sen}(\gamma_n x) \\ &+ v_1 \sum_{i=1}^6 \lambda_i \sqrt{\frac{2}{L}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{i,n}(t) \text{sen}(\gamma_n x) \right\} \end{aligned} \quad (2.19a)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \varphi_{2,n}(t) \text{sen}(\gamma_n x) &= -v_2 D_2 \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 \varphi_{2,n}(t) \text{sen}(\gamma_n x) \\ &- v_2 (\Sigma_{a2} + \Sigma_{s12}) \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{2,n}(t) \text{sen}(\gamma_n x) \\ &+ v_2 \Sigma_{s12} \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1,n}(t) \text{sen}(\gamma_n x) \end{aligned} \quad (2.19b)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \xi_{i,n}(t) \text{sen}(\gamma_n x) &= -\varepsilon \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 \xi_{i,n}(t) \text{sen}(\gamma_n x) \\ + \beta_i \nu_1 \Sigma_{f1} \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1,n}(t) \text{sen}(\gamma_n x) &+ \beta_i \nu_2 \Sigma_{f2} \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{2,n}(t) \text{sen}(\gamma_n x) \\ &- \lambda_i \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{i,n}(t) \text{sen}(\gamma_n x) \end{aligned} \quad (2.19c)$$

Dando continuidade ao método espectral aplica-se, de maneira análoga, o operador integral

$$\sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L (\cdot) \text{sen}(\gamma_m x) dx$$

no sistema de Equações 2.19a-c

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \varphi_{1,n}(t) \int_0^L \text{sen}(\gamma_m x) \text{sen}(\gamma_n x) dx \\
& + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} v_1 [D_1 \gamma_n^2 + (\Sigma_{a1}) - (1 - \beta) \nu_1 \Sigma_{f1}] \varphi_{1,n}(t) \int_0^L \text{sen}(\gamma_m x) \text{sen}(\gamma_n x) dx \\
& + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} [-v_1 ((1 - \beta) \nu_2 \Sigma_{f2})] \varphi_{2,n}(t) \int_0^L \text{sen}(\gamma_m x) \text{sen}(\gamma_n x) dx \\
& + \frac{2}{L} \sum_{i=1}^6 [-v_1] \lambda_i \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{i,n}(t) \int_0^L \text{sen}(\gamma_m x) \text{sen}(\gamma_n x) dx = 0
\end{aligned} \tag{2.20a}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \varphi_{2,n}(t) \int_0^L \text{sen}(\gamma_m x) \text{sen}(\gamma_n x) dx \\
& + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} [-v_2 \Sigma_{s12}] \varphi_{1,n}(t) \int_0^L \text{sen}(\gamma_m x) \text{sen}(\gamma_n x) dx \\
& + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} v_2 [D_2 \gamma_n^2 + (\Sigma_{a2} + \Sigma_{s12})] \varphi_{2,n}(t) \int_0^L \text{sen}(\gamma_m x) \text{sen}(\gamma_n x) dx = 0
\end{aligned} \tag{2.20b}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \xi_{i,n}(t) \int_0^L \text{sen}(\gamma_m x) \text{sen}(\gamma_n x) dx \\
& + [-\beta_i \nu_1 \Sigma_{f1}] \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1,n}(t) \int_0^L \text{sen}(\gamma_m x) \text{sen}(\gamma_n x) dx \\
& + [-\beta_i \nu_2 \Sigma_{f2}] \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{2,n}(t) \int_0^L \text{sen}(\gamma_m x) \text{sen}(\gamma_n x) dx \\
& + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} [\varepsilon \gamma_n^2 + \lambda_i] \xi_{i,n}(t) \int_0^L \text{sen}(\gamma_m x) \text{sen}(\gamma_n x) dx = 0
\end{aligned} \tag{2.20c}$$

Fazendo uso da ortogonalidade das autofunções e truncando em n para um valor onde $n \in \mathbb{N}$, temos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \varphi_{1,n}(t) + v_1 [D_1 \gamma_n^2 + \Sigma_{a1} - (1 - \beta) \nu_1 \Sigma_{f1}] \varphi_{1,n}(t) \\
+ [-v_1 (1 - \beta) \nu_2 \Sigma_{f2}] \varphi_{2,n}(t) \\
+ \sum_{i=1}^6 [-v_1 \lambda_i] \xi_{i,n}(t) = 0
\end{aligned} \tag{2.21a}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \varphi_{2,n}(t) + [-v_2 \Sigma_{s12}] \varphi_{1,n}(t) \\
+ v_2 [D_2 \gamma_n^2 + (\Sigma_{a2} + \Sigma_{s12})] \varphi_{2,n}(t) = 0
\end{aligned} \tag{2.21b}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\xi_{i,n}(t) + [-\beta_i\nu_1\Sigma_{f1}]\varphi_{1,n}(t) + [-\beta_i\nu_2\Sigma_{f2}]\varphi_{2,n}(t) \\ + [\varepsilon\gamma_n^2 + \lambda_i]\xi_{i,n}(t) = 0 \quad i = 1\dots 6 \end{aligned} \quad (2.21c)$$

onde pode-se escrever o sistema de Equações 2.21a-c da seguinte forma matricial

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varphi_{1,n}(t) \\ \varphi_{2,n}(t) \\ \xi_{1,n}(t) \\ \vdots \\ \xi_{6,n}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C}_1 & \dots & \mathbf{C}_6 \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} & \mathbf{F}_1 & \dots & \mathbf{F}_6 \\ \mathbf{G}_1 & \mathbf{H}_1 & \mathbf{J}_1 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}_6 & \mathbf{H}_6 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{J}_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{1,n}(t) \\ \varphi_{2,n}(t) \\ \xi_{1,n}(t) \\ \vdots \\ \xi_{6,n}(t) \end{bmatrix} = \vec{\mathbf{0}} \quad (2.22)$$

e as matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C}_i , \mathbf{D} , \mathbf{E} , \mathbf{F}_i , \mathbf{G}_i , \mathbf{H}_i e \mathbf{J}_i são matrizes diagonais de ordem N representadas por

$$\mathbf{A} = \{a_{n,n}\}, \text{ onde } a_{n,n} = v_1 [D_1\gamma_n^2 + \Sigma_{a1} - (1 - \beta)\nu_1\Sigma_{f1}]$$

$$\mathbf{B} = \{b_{n,n}\}, \text{ onde } b_{n,n} = [-v_1(1 - \beta)\nu_2\Sigma_{f2}]$$

$$\mathbf{C}_i = \{c_{n,n}^i\}, \text{ onde } c_{n,n}^i = [-v_1\lambda_i], \text{ para } i = 1\dots 6$$

$$\mathbf{D} = \{d_{n,n}\}, \text{ onde } d_{n,n} = [-v_2\Sigma_{s12}]$$

$$\mathbf{E} = \{e_{n,n}\}, \text{ onde } e_{n,n} = v_2 [D_2\gamma_n^2 + (\Sigma_{a2} + \Sigma_{s12})]$$

$$\mathbf{F}_i = \{f_{n,n}^i\}, \text{ onde } f_{n,n}^i = 0$$

$$\mathbf{G}_i = \{g_{n,n}^i\}, \text{ onde } g_{n,n}^i = [-\beta_i\nu_1\Sigma_{f1}], \text{ para } i = 1\dots 6$$

$$\mathbf{H}_i = \{h_{n,n}^i\}, \text{ onde } h_{n,n}^i = [-\beta_i\nu_2\Sigma_{f2}], \text{ para } i = 1\dots 6$$

$$\mathbf{J}_i = \{j_{n,n}^i\}, \text{ onde } j_{n,n}^i = [\varepsilon\gamma_n^2 + \lambda_i], \text{ para } i = 1\dots 6$$

Semelhantemente ao caso monoenergético a Equação 2.22 é uma equação diferencial matricial linear homogênea de primeira ordem e portanto, pode ser escrita de forma reduzida como

$$\mathbf{X}'(t) + \mathbf{M}\mathbf{X}(t) = \vec{\mathbf{0}} \quad (2.23)$$

onde

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \varphi_{1,n}(t) \\ \varphi_{2,n}(t) \\ \xi_{1,n}(t) \\ \vdots \\ \xi_{6,n}(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}'(t) = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varphi_{1,n}(t) \\ \varphi_{2,n}(t) \\ \xi_{1,n}(t) \\ \vdots \\ \xi_{6,n}(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C}_1 & \dots & \mathbf{C}_6 \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} & \mathbf{F}_1 & \dots & \mathbf{F}_6 \\ \mathbf{G}_1 & \mathbf{H}_1 & \mathbf{J}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}_6 & \mathbf{H}_6 & 0 & \dots & \mathbf{J}_6 \end{bmatrix}$$

A solução para a Equação 2.23 é, semelhantemente ao caso anterior, dada por

$$\mathbf{X}(t) = e^{-\mathbf{M}t} \mathbf{X}(0) \quad (2.24)$$

no qual $\mathbf{X}(0)$ é o vetor

$$\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} \varphi_{1,n}(0) \\ \varphi_{2,n}(0) \\ \xi_{1,n}(0) \\ \vdots \\ \xi_{6,n}(0) \end{bmatrix}$$

e cujos elementos são

$$\begin{aligned} \varphi_{1,n}(0) &= \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L \phi_1(x, 0) \operatorname{sen}(\gamma_n x) dx \\ \varphi_{2,n}(0) &= \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L \phi_2(x, 0) \operatorname{sen}(\gamma_n x) dx \\ \xi_{i,n}(0) &= \frac{\beta_i}{\varepsilon \gamma_n^2 + \lambda_i} [\nu_1 \Sigma_{f1} \varphi_{1,n}(0) + \nu_2 \Sigma_{f2} \varphi_{2,n}(0)]; \quad i = 1 \dots 6 \end{aligned} \quad (2.25)$$

Resultados Numéricos

A obtenção dos resultados numéricos, aqui apresentados, foi feita através do uso do *software* **MATLAB**. Fez-se uso dos parâmetros nucleares, para dois grupos de energia, das constantes de decaimento e frações de nêutrons atrasados respectivamente apresentadas nas Tabelas 2.5 e 2.6 cujas informações foram retirados do problema de *benchmark BSS-6* [ANL-7416] e, mais especificamente, ν tem seu valor proveniente do problema de *benchmark* de um reator experimental, de urânio, com dois grupos [Sood, 2003].

Tabela 2.5 – Parâmetros nucleares para dois grupos energéticos [ANL-7416, 1972; Sood, 2003].

Parâmetro	Grupo 1	Grupo 2
D cm	1.0	0.5
v cm/s	10^7	3×10^5
$\Sigma_{ag} \text{ cm}^{-1}$	0.02	0.08
$\Sigma_{s12} \text{ cm}^{-1}$	0.01	-
ν_g	2.5	2.5
$\Sigma_{fg} \text{ cm}^{-1}$	0.0020	0.0396

Tabela 2.6 – Constantes de decaimento e frações de nêutrons atrasados para cada grupo [ANL-7416, 1972].

i	β_i	$\lambda_i \text{ s}^{-1}$
1	0.00022	0.0124
2	0.00164	0.0305
3	0.00147	0.111
4	0.00296	0.31
5	0.00086	1.14
6	0.00032	3.01

Reitera-se que o modelo em coordenada cartesiana foi concebido para um meio homogêneo em uma placa com comprimento de $L = 10 \text{ cm}$ e condições de contorno dadas por $\phi_g(0, t) = \phi_g(L, t) = 0$. A condição inicial do problema proposto é dada pela solução da equação estacionária de difusão de nêutrons, apresentada por inteira no Apêndice A. Utilizando as Equações A.15, A.16 - do Apêndice A - e através das Equações 2.25, obtêm-se os elementos do vetor de valor inicial, $\mathbf{X}(0)$, no qual os elementos que são correspondentes ao grupo rápido são

$$\varphi_{1,n}(0) = A_1 \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{L} x \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx$$

$$\Rightarrow \varphi_{1,n}(0) = \begin{cases} A_1 \frac{L}{2} \sqrt{\frac{2}{L}}, & \text{se } n = 1 \\ 0, & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

e ao grupo térmico

$$\varphi_{2,n}(0) = A_2 \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{L} x \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx$$

$$\Rightarrow \varphi_{2,n}(0) = \begin{cases} A_2 \frac{L}{2} \sqrt{\frac{2}{L}}, & \text{se } n = 1 \\ 0, & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

onde conseqüentemente para a concentração de precursores de nêutrons

$$\xi_{i,n}(0) = \begin{cases} \frac{\beta_i L}{2(\varepsilon \gamma_n^2 + \lambda_i)} (\nu_1 \Sigma_{f1} A_1 + \nu_2 \Sigma_{f2} A_2) \sqrt{\frac{2}{L}}, & \text{se } n = 1 \\ 0, & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Na Tabela 2.7 apresenta-se os valores para o fluxo rápido e térmico - com coeficientes A_1 e A_2 escalados em relação a potência do reator - e para o primeiro grupo de precursores de nêutrons à medida que se faz a redução do valor de ε , $1 \leq \varepsilon \leq 10^{-15}$, para um tempo, $t = 1$ s, e posição, 5 cm, fixados.

Na Tabela 2.8 foram selecionados alguns pontos no intervalo $[0, R]$, $R = 20$ cm neste caso, sendo possível constatar que o comportamento do fluxo rápido, térmico e da concentração de precursores de nêutrons é condizente com o esperado.

Tabela 2.7 – Limite do fluxo rápido, térmico - tanto com o coeficiente A_1 quanto com A_2 normalizados - e da concentração de precursores de nêutrons em relação ao decréscimo de ε variando entre 1 e 10^{-15} , com número de truncamento $n = 1$.

ε	$\hat{\phi}_1(5, 1)_{cm^{-2}s^{-1}}$	$\hat{\phi}_2(5, 1)_{cm^{-2}s^{-1}}$	$\hat{C}_1(5, 1)_{cm^{-3}}$
1	0.010314763501654	0.001007930500141	0.000420543718003
10^{-1}	0.013130860814065	0.001283109491840	0.001072183186833
10^{-2}	0.013599413786269	0.001328894804574	0.001263244492581
10^{-3}	0.013650156875465	0.001333853236717	0.001286107274436
10^{-4}	0.013655274912069	0.001334353352841	0.001288438585269
10^{-5}	0.013655787157255	0.001334403407565	0.001288672175597
10^{-6}	0.013655838388177	0.001334408413686	0.001288695539248
10^{-7}	0.013655843510764	0.001334408914225	0.001288697875541
10^{-8}	0.013655844023543	0.001334408964372	0.001288698109423
10^{-9}	0.013655844072215	0.001334408969114	0.001288698132704
10^{-10}	0.013655844079321	0.001334408969817	0.001288698134891
10^{-11}	0.013655844079208	0.001334408969749	0.001288698135154
10^{-12}	0.013655844079574	0.001334408969851	0.001288698135414
10^{-13}	0.013655844079138	0.001334408969790	0.001288698135336
10^{-14}	0.013655844078357	0.001334408969706	0.001288698135330
10^{-15}	0.013655844078154	0.001334408969690	0.001288698135331

Tabela 2.8 – Valores do fluxo térmico e rápido - com coeficientes A_1 e A_2 normalizados - para $t = 1$ s, $n = 1$ e $\varepsilon = 10^{-15}$ em alguns pontos no intervalo de 0, 20.

x cm	$\hat{\phi}_1(x, 1)$ $cm^{-2}s^{-1}$	$\hat{\phi}_2(x, 1)$ $cm^{-2}s^{-1}$	$\hat{C}_2(x, 1)$ cm^{-3}
0	0	0	0
1	0.003021106176561	0.000295213621121	0.000285100933528
2	0.005967822692570	0.000583158103115	0.000563181735878
3	0.008767591607815	0.000856743297299	0.000827395134797
4	0.011351473319697	0.001109232628267	0.001071235319532
5	0.013655844085038	0.001334408970578	0.001288698135472
6	0.015623962647829	0.001526727735200	0.001474428926374
7	0.017207367397275	0.001681453395941	0.001623854383760
8	0.018367069653450	0.001794776093722	0.001733295156954
9	0.019074513697971	0.001863905447688	0.001800056450907
10	0.019312279910589	0.001887139263618	0.001822494380994
11	0.019074513698063	0.001863905447800	0.001800056450909
12	0.018367069653634	0.001794776093921	0.001733295156957
13	0.017207367397496	0.001681453396090	0.001623854383764
14	0.015623962648001	0.001526727735142	0.001474428926380
15	0.013655844085144	0.001334408970351	0.001288698135478
16	0.011351473319800	0.001109232628093	0.001071235319537
17	0.008767591607962	0.000856743297318	0.000827395134802
18	0.005967822692726	0.000583158103252	0.000563181735881
19	0.003021106176659	0.000295213621229	0.000285100933530
20	$2.365072177788775 \times 10^{-18}$	$2.311079059435400 \times 10^{-19}$	$2.231911910155256 \times 10^{-19}$

Os gráficos apresentados nas Figuras 2.3, 2.4 e 2.5 têm como função evidenciar o comportamento do fluxo rápido, térmico e da concentração de precursores que apresentam um decaimento, devido a subcriticalidade do reator ($k_{eff} < 1$), à medida que aumenta-se o tempo - $t = 1$ s, $t = 5$ s e $t = 10$ s - com resultados apresentados na Tabela 2.8 e complementados pelas Tabelas I.3 e I.4, presentes no Anexo A.

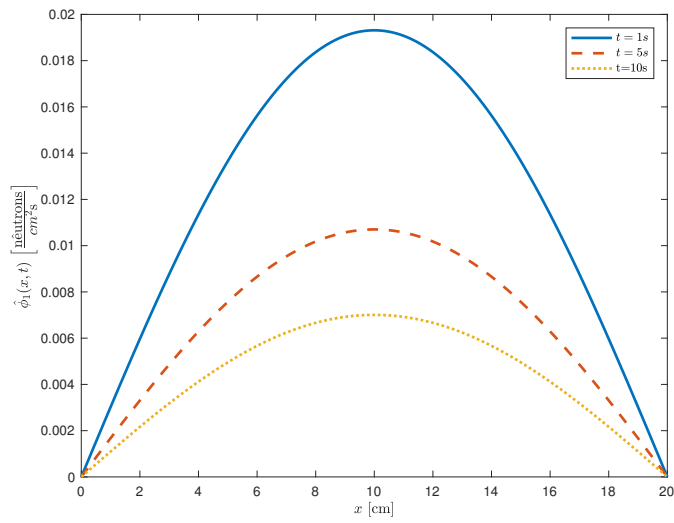


Figura 2.3 – Fluxo escalar $\hat{\phi}_1$ - rápido, em coordenadas cartesianas - em função da variável espacial para alguns instantes com número de truncamento $n = 1$ e $\varepsilon = 10^{-15}$.

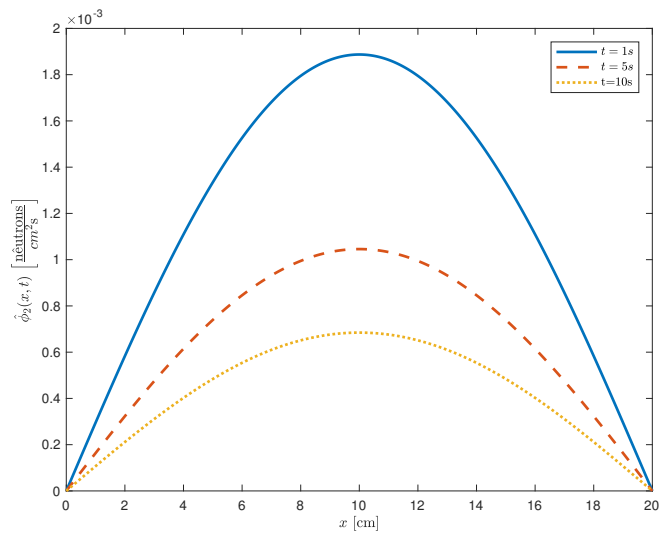


Figura 2.4 – Fluxo escalar $\hat{\phi}_2$ - térmico, em coordenadas cartesianas - em função da variável espacial para alguns instantes com número de truncamento $n = 1$ e $\varepsilon = 10^{-15}$.

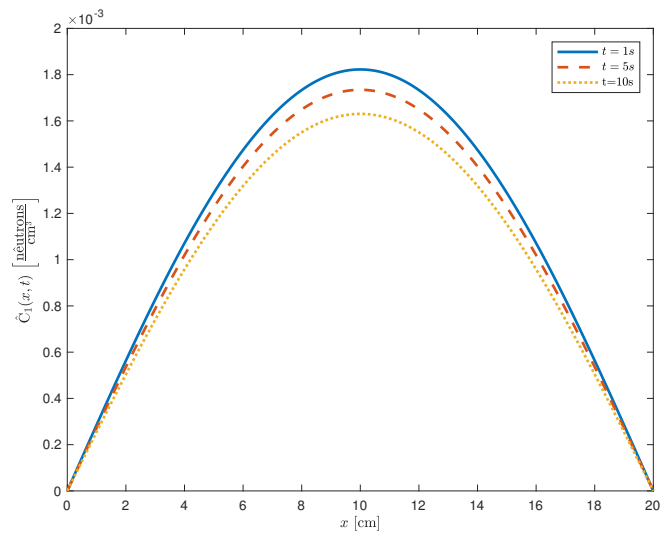


Figura 2.5 – Concentração de precursoros \hat{C}_1 - primeiro grupo de nêutrons atrasados, em coordenadas cartesianas - em função da variável espacial para alguns instantes com número de truncamento $n = 1$ e $\varepsilon = 10^{-15}$.

3 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE CINÉTICA ESPACIAL EM GEOMETRIA CILÍNDRICA

3.1 Caso monoenergético com um grupo de nêutrons atrasados

Considerada em um domínio homogêneo a equação unidimensional de cinética de difusão de nêutrons em coordenadas cilíndricas com um grupo de precursores de nêutrons atrasados [Oliveira, 2013] é dada pelo seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi(r, t) = & D \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} \phi(r, t) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \phi(r, t) \right] - \Sigma_a \phi(r, t) \\ & + (1 - \beta) \nu \Sigma_f \phi(r, t) + \lambda C(r, t) \end{aligned} \quad (3.1a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} C(r, t) = -\lambda C(r, t) + \beta \nu \Sigma_f \phi(r, t) \quad (3.1b)$$

com as seguintes condições de simetria e contorno

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dr} \phi(r, t) \right|_{r=0} &= 0 \\ \phi(R, t) &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

e com condições iniciais dadas por

$$\begin{aligned} \phi(r, 0) &= \phi_0(r) \\ C(r, 0) &= \frac{\beta \nu \Sigma_f}{\lambda} \phi_0(r) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Como anteriormente um termo fictício de difusão é introduzido na Equação 3.1b, assim o sistema é reescrito como

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi(r, t) = & D \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} \phi(r, t) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \phi(r, t) \right] \\ & + [(1 - \beta) \nu \Sigma_f - \Sigma_a] \phi(r, t) + \lambda C(r, t) \end{aligned} \quad (3.4a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} C(r, t) = \varepsilon \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} C(r, t) + \frac{1}{r} \frac{\partial C(r, t)}{\partial r} \right] - \lambda C(r, t) + \beta \nu \Sigma_f \phi(r, t) \quad (3.4b)$$

onde ε é um valor positivo extremamente pequeno, cujo propósito é fazer com que a solução desse sistema tenda a solução do sistema inicial. Dando continuidade ao procedimento há

a necessidade de obter a solução para o problema auxiliar de *Sturm-Liouville*

$$\frac{d^2}{dr^2}\zeta(r) + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\zeta(r) + \gamma^2\zeta(r) = 0$$

assumi-se portanto, as condições de contorno, Equações 3.2, do problema original.

Como solução do problema auxiliar têm-se as seguintes autofunções $\{J_0(\gamma_n r)\}_{n=1}^N$, funções de *Bessel* de primeira espécie de índice 0 (J_0), onde $\gamma_n = \frac{\alpha_n}{R}$ e $\alpha_n > 0$ satisfaz $J_0(\alpha_n) = 0$. Em vista disso, supõe-se que haja como possível solução em série para o sistema 3.4a-b que envolva o produto de autofunções ortonormais no espaço por funções no tempo:

$$\begin{aligned}\phi(r, t) &= \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \frac{J_0(\gamma_n r)}{J_1(\alpha_n)} \\ C(r, t) &= \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(t) \frac{J_0(\gamma_n r)}{J_1(\alpha_n)}\end{aligned}\tag{3.5}$$

Substituindo as Expansões 3.5 no sistema de Equações 3.4a-b

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \varphi_n(t) \frac{J_0(\gamma_n r)}{J_1(\alpha_n)} &= -vD \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 \varphi_n(t) \frac{J_0(\gamma_n r)}{J_1(\alpha_n)} \\ &+ v[(1 - \beta)\nu\Sigma_f - \Sigma_a] \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \frac{J_0(\gamma_n r)}{J_1(\alpha_n)} \\ &+ v\lambda \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(t) \frac{J_0(\gamma_n r)}{J_1(\alpha_n)}\end{aligned}\tag{3.6a}$$

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \xi_n(t) \frac{J_0(\gamma_n r)}{J_1(\alpha_n)} &= -\varepsilon \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 \xi_n(t) \frac{J_0(\gamma_n r)}{J_1(\alpha_n)} - \lambda \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(t) \frac{J_0(\gamma_n r)}{J_1(\alpha_n)} \\ &+ \beta\nu\Sigma_f \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t)\end{aligned}\tag{3.6b}$$

De acordo com a resolução aplica-se o operador integral dado por

$$\frac{\sqrt{2}}{R} \int_0^R (\cdot) r \frac{J_0(\gamma_m r)}{J_1(\alpha_m)} dr\tag{3.7}$$

nas Equações 3.6a-b, obtendo

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \varphi_n(t) \frac{1}{J_1(\alpha_m) J_1(\alpha_n)} \int_0^R r J_0(\gamma_n r) J_0(\gamma_m r) dr \\
& + \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v[D\gamma^2 + \Sigma_f - (1-\beta)\nu\Sigma_f]}{J_1(\alpha_m) J_1(\alpha_n)} \varphi_n(t) \int_0^R r J_0(\gamma_n r) J_0(\gamma_m r) dr \\
& + \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[-v\lambda]}{J_1(\alpha_m) J_1(\alpha_n)} \xi_n(t) \int_0^R r J_0(\gamma_n r) J_0(\gamma_m r) dr = 0
\end{aligned} \tag{3.8a}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \xi_n(t) \frac{1}{J_1(\alpha_m) J_1(\alpha_n)} \int_0^R r J_0(\gamma_n r) J_0(\gamma_m r) dr \\
& + \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[-\beta\nu\Sigma_f]}{J_1(\alpha_m) J_1(\alpha_n)} \varphi_n(t) \int_0^R r J_0(\gamma_n r) J_0(\gamma_m r) dr \\
& + \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\varepsilon\gamma^2 + \lambda]}{J_1(\alpha_m) J_1(\alpha_n)} \xi_n(t) \int_0^R r J_0(\gamma_n r) J_0(\gamma_m r) dr = 0
\end{aligned} \tag{3.8b}$$

Vide a ortogonalidade das autofunções $J_0(\gamma_n r)$ e truncando as séries na ordem N , onde $1 \leq n \leq N$, pode-se reescrever o sistema na seguinte forma matricial

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varphi_n(t) \\ \xi_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_n(t) \\ \xi_n(t) \end{bmatrix} = \vec{0} \tag{3.9}$$

Onde as matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{D} são matrizes diagonais de ordem N representadas por

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \{a_{m,n}\}, \text{ onde } a_{m,n} = v \left[D \left(\frac{\alpha_n^2}{R} \right)^2 + \Sigma_a - (1-\beta)\nu\Sigma_f \right] \\
\mathbf{B} &= \{b_{m,n}\}, \text{ onde } b_{m,n} = -v\lambda \\
\mathbf{C} &= \{c_{m,n}\}, \text{ onde } c_{m,n} = -\beta\nu\Sigma_f \\
\mathbf{D} &= \{d_{m,n}\}, \text{ onde } d_{m,n} = \varepsilon \left(\frac{\alpha_n}{L} \right)^2 + \lambda
\end{aligned}$$

Desta maneira pode-se notar que a Equação 3.9 é uma equação matricial linear homogênea de primeira ordem que pode ser escrita, de maneira reduzida, como

$$\mathbf{X}'(t) + \mathbf{M}\mathbf{X}(t) = \vec{0} \tag{3.10}$$

onde

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(t) &= \begin{bmatrix} \varphi_n(t) \\ \xi_n(t) \end{bmatrix} \\ \mathbf{X}'(t) &= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varphi_n(t) \\ \xi_n(t) \end{bmatrix} \\ \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

A solução para a Equação 3.10 é conhecida e dada por

$$\mathbf{X}(t) = e^{-\mathbf{M}t} \mathbf{X}(0)$$

portanto, podendo ser expressa como

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{V} e^{-\Xi t} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}(0)$$

onde \mathbf{V} e Ξ são respectivamente os autovetores e os autovalores da matriz \mathbf{M} .

De maneira análoga aos casos anteriores o vetor $\mathbf{X}(0)$ é

$$\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} \varphi_n(0) \\ \xi_n(0) \end{bmatrix}$$

com seus respectivos elementos sendo

$$\begin{aligned}\varphi_n(0) &= \frac{\sqrt{2}}{R J_1(\alpha_n)} \int_0^R \phi_0(r) r J_0(\gamma_n r) dr \\ \xi_n(0) &= \frac{\beta \nu \Sigma_f}{\varepsilon \gamma_n^2 + \lambda} \varphi_n(0)\end{aligned}\tag{3.11}$$

Resultados Numéricos

Os parâmetros nucleares utilizados na obtenção dos resultados numéricos deste capítulo estão apresentados na Tabela 2.1, as condições de simetria e de contorno são

$$\left. \frac{d}{dr} \phi(r, t) \right|_{r=0} = 0 \quad \phi(R, t) = 0$$

para um cilindro unidimensional de tamanho $R = 10 \text{ cm}$ e a condição inicial dada pela solução da equação estacionária de difusão de nêutrons em coordenadas cilíndricas -

Equação A.11. Substituindo-as na Equação 3.11) obtêm-se,

$$\varphi_n(0) = \frac{\sqrt{2}}{RJ_1(\alpha_n)} A \int_0^R r J_0\left(\frac{\alpha_1}{R}r\right) J_0\left(\frac{\alpha_n}{R}r\right) dr$$

$$\Rightarrow \varphi_n(0) = \begin{cases} A \frac{RJ_1(\alpha_1)\sqrt{2}}{2}, & \text{se } n = 1 \\ 0, & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

$$\xi_n(0) = \begin{cases} A \frac{\beta\nu\Sigma_f RJ_1(\alpha_1)}{2(\varepsilon\gamma_1^2 + \lambda)}, & \text{se } n = 1 \\ \text{se } n > 1, 0 \end{cases}$$

e para um coeficiente A escalado em relação a potência do reator adota-se a nomenclatura anteriormente utilizada.

Portanto, o vetor que corresponde aos valores iniciais pode ser escrito como

$$\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} \frac{RJ_1(\alpha_1)\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\beta\nu\Sigma_f RJ_1(\alpha_1)}{2(\varepsilon\gamma_1^2 + \lambda)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Na Tabela 3.1, encontram-se os resultados tanto para o fluxo - com coeficiente A escalado em relação a potência do reator - quanto para a concentração de precursores de nêutrons à medida que se faz a redução do valor de ε , $1 \leq \varepsilon \leq 10^{-15}$, para um tempo, $t = 1$ s, e posição, 5 cm, fixados.

Tabela 3.1 – Limite do fluxo e da concentração de precursores de nêutrons - em geometria cilíndrica - em relação ao decaimento de ε variando entre 1 e 10^{-15} , com número de truncamento $n = 1$.

ε	$\hat{\phi}(5, 1)_{cm^{-2}s^{-1}}$	$\hat{C}(5, 1)_{cm^{-3}}$
1	0.001877102144901	$9.446910425708736 \times 10^{-4}$
10^{-1}	0.003229008864460	0.001625066666133
10^{-2}	0.003465193953601	0.001743931804183
10^{-3}	0.003490585186127	0.001756710478625
10^{-4}	0.003493143376337	0.001757997941919
10^{-5}	0.003493399387469	0.001758126784932
10^{-6}	0.003493424990504	0.001758139670201
10^{-7}	0.003493427550827	0.001758140958737
10^{-8}	0.003493427806860	0.001758141087591
10^{-9}	0.003493427832463	0.001758141100476
10^{-10}	0.003493427835023	0.001758141101765
10^{-11}	0.003493427835279	0.001758141101894
10^{-12}	0.003493427835305	0.001758141101907
10^{-13}	0.003493427835307	0.001758141101908
10^{-14}	0.003493427835308	0.001758141101908
10^{-15}	0.003493427835308	0.001758141101908

Os gráficos apresentados nas Figuras 3.1 e 3.2 tem como função evidenciar o comportamento do fluxo e da concentração de precursores que apresentam um decaimento, devido a subcriticalidade do reator ($k_{eff} < 1$), à medida que se aumenta o tempo - $t = 1 s$, $t = 5 s$ e $t = 10 s$ - com resultados apresentados na Tabela 3.2 e complementados pelas Tabelas I.5 e I.6, presentes no *Anexo A*.

Tabela 3.2 – Valores do fluxo - com coeficiente A escalado em relação a potência do reator - e da concentração de precursores para $t = 1$ s, $n = 1$ e $\varepsilon = 10^{-15}$ em alguns pontos no intervalo de 0, 10.

r cm	$\hat{\phi}(x, 1)$ $\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$	$\hat{C}(x, 1)$ cm^{-3}
0	0.005214618238329	0.002624366406801
1	0.005139497539960	0.002586560333903
2	0.004917379356338	0.002474774681954
3	0.004557839807972	0.002293828835197
4	0.004076328220179	0.002051497991838
5	0.003493427835308	0.001758141101908
6	0.002833873420761	0.001426206457820
7	0.002125375100588	0.001069639762857
8	0.001397307336880	$7.032243334577858 \times 10^{-4}$
9	$6.793285437567746 \times 10^{-4}$	$3.418863908986303 \times 10^{-4}$
10	0	0

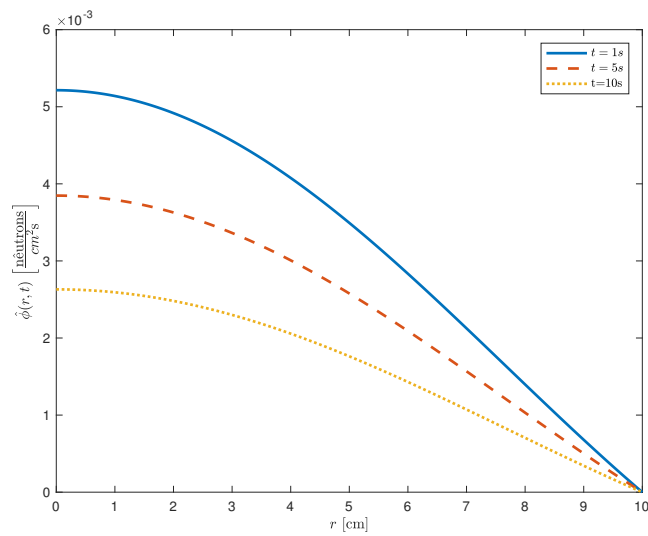


Figura 3.1 – Fluxo escalar $\hat{\phi}$ - em coordenadas cilíndricas - em função da variável espacial para alguns instantes com número de truncamento $n = 1$ e $\varepsilon = 10^{-15}$.

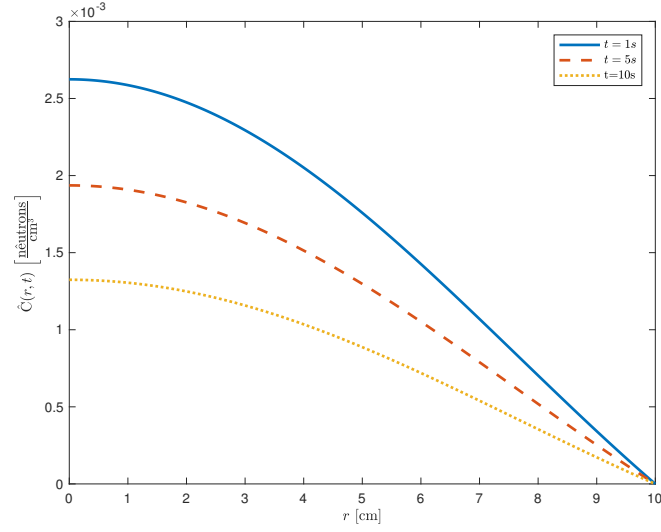


Figura 3.2 – Concentração de precursores \hat{C} - em coordenadas cilíndricas - em função da variável espacial para alguns instantes com número de truncamento $n = 1$ e $\varepsilon = 10^{-15}$.

3.2 Caso com dois grupos de energia e seis grupos precursores de nêutrons atrasados

Para este caso a metodologia abrange uma situação com dois grupos de energia e seis grupos de precursores de nêutrons atrasados [Oliveira, 2007; Oliveira, 2013]. Com as mesmas considerações utilizadas anteriormente o sistema de equações é reescrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_1} \frac{\partial}{\partial t} \phi_1(r, t) &= D_1 \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} \phi_1(r, t) + \frac{1}{r} \phi_1(r, t) \right] \\ &+ [(1 - \beta) \chi_1^p \nu_2 \Sigma_{f2} - (\Sigma_{a1} + \Sigma_{s21})] \phi_1(r, t) \\ &+ [(1 - \beta) \chi_1^p \nu_2 \Sigma_{f2} + \Sigma_{s21}] \phi_2(r, t) + \chi_1^d \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(r, t) \end{aligned} \quad (3.12a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_2} \frac{\partial}{\partial t} \phi_2(r, t) &= D_1 \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} \phi_2(r, t) + \frac{1}{r} \phi_2(r, t) \right] \\ &+ [(1 - \beta) \chi_2^p \nu_2 \Sigma_{f2} - (\Sigma_{a2} + \Sigma_{s12})] \phi_2(r, t) \\ &+ [(1 - \beta) \chi_2^p \nu_1 \Sigma_{f1} + \Sigma_{s12}] \phi_1(r, t) + \chi_2^d \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(r, t) \end{aligned} \quad (3.12b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} C_i(r, t) = \beta_i \nu_1 \Sigma_{f1} \phi_1(r, t) + \beta_i \nu_2 \Sigma_{f2} \phi_2(r, t) - \lambda_i C_i(r, t) \quad i = 1 \dots 6 \quad (3.12c)$$

Como os nêutrons de fissão são substancialmente gerados no grupo rápido é válido considerar que $\chi_1^p = \chi_1^d = 1$, $\chi_2^p = \chi_2^d = 0$ e como somente os nêutrons térmicos de baixa energia apresentam *upscattering* é conveniente também considerar, nesta abordagem, que $\Sigma_{21} = 0$. Portanto, pode-se reescrever o sistema 3.12a-c como

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_1} \frac{\partial}{\partial t} \phi_1(r, t) &= D_1 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi_1(r, t) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \phi_1(r, t) \right] \\ &+ [(1 - \beta) \nu_1 \Sigma_f - \Sigma_{a1}] \phi_1(r, t) \\ &+ [(1 - \beta) \nu_2 \Sigma_{f2}] \phi_2(r, t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(r, t) \end{aligned} \quad (3.13a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_2} \frac{\partial}{\partial t} \phi_2(r, t) &= D_2 \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} \phi_2(r, t) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \phi_2(r, t) \right] \\ &- [\Sigma_{a2} + \Sigma_{s12}] \phi_2(r, t) + \Sigma_{s12} \phi_1(r, t) \end{aligned} \quad (3.13b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} C_i(r, t) = \beta_i \nu_1 \Sigma_{f1} \phi_1(r, t) + \beta_i \nu_2 \Sigma_{f2} \phi_2(r, t) - \lambda_i C_i(r, t) \quad i = 1 \dots 6 \quad (3.13c-1)$$

com condições de contorno e iniciais análogas ao problema anterior

$$\begin{aligned} \phi_1(r, 0) &= \phi_{1,0}(r) \\ \phi_2(r, 0) &= \phi_{2,0}(r) \\ C_i(r, 0) &= \frac{\beta_i}{\lambda_i} [\nu_1 \Sigma_{f1} \phi_{1,0}(r) + \nu_2 \Sigma_{f2} \phi_{2,0}(r)] \end{aligned} \quad (3.14)$$

Deve-se, similarmente ao feito no caso de geometria cartesiana, introduzir um termo de difusão fictício na equação de concentração de precursores de nêutrons atrasados, assim a Equação 3.13c-1 torna-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} C_i(r, t) &= \varepsilon \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} C_i(r, t) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} C_i(r, t) \right] + \beta_i \nu_1 \Sigma_{f1} \phi_1(r, t) \\ &+ \beta_i \nu_2 \Sigma_{f2} \phi_2(r, t) - \lambda_i C_i(r, t) \quad i = 1 \dots 6 \end{aligned} \quad (3.13c-2)$$

Para resolver o sistema composto pelas Equações 3.13a, 3.13b e 3.13c-2 supõe-se que hajam funções para fluxo do grupo térmico, rápido e para os precursores de nêutrons

atrasados que possam ser expandidos pelas seguintes expansões

$$\phi_1(r, t) = \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1,n}(t) \frac{J_0(\gamma_n r)}{J_1(\alpha_n)} \quad (3.14)$$

$$\phi_2(r, t) = \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{2,n}(t) \frac{J_0(\gamma_n r)}{J_1(\alpha_n)} \quad (3.15)$$

$$C_i(r, t) = \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{i,n}(t) \frac{J_0(\gamma_n r)}{J_1(\alpha_n)} \quad i = 1 \dots 6 \quad (3.16)$$

Ao substituir as Expansões 3.14, 3.15 e 3.16 nas Equações 3.13a, 3.13b e 3.13c-2; como as autofunções satisfazem $\frac{d^2}{dr^2} J_0(\gamma_n r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} J_0(\gamma_n r) = -\gamma_n^2 J_0(\gamma_n r)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \varphi_{1,n}(t) \frac{J_0(\gamma_n r)}{J_1(\alpha_n)} &= -v_1 D_1 \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 \varphi_{1,n}(t) \frac{J_0(\gamma_n r)}{J_1(\alpha_n)} \\ &+ v_1 [(1 - \beta) \nu_1 \Sigma_{f1} - \Sigma_{a1}] \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1,n}(t) \frac{J_0(\gamma_n r)}{J_1(\alpha_n)} \\ &+ v_1 [(1 - \beta) \nu_2 \Sigma_{f2}] \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{2,n}(t) \frac{J_0(\gamma_n r)}{J_1(\alpha_n)} \\ &+ v_1 \sum_{i=1}^6 \lambda_i \frac{\sqrt{2}}{R} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{i,n}(t) \frac{J_0(\gamma_n r)}{J_1(\alpha_n)} \right\} \end{aligned} \quad (3.17a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \varphi_{1,n}(t) \frac{J_0(\gamma_n r)}{J_1(\alpha_n)} &= -v_2 D_2 \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 \varphi_{2,n}(t) \frac{J_0(\gamma_n r)}{J_1(\alpha_n)} \\ &- v_2 [\Sigma_{a2} + \Sigma_{s12}] \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{2,n}(t) \frac{J_0(\gamma_n r)}{J_1(\alpha_n)} \\ &+ v_2 [\Sigma_{s12}] \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1,n}(t) \frac{J_0(\gamma_n r)}{J_1(\alpha_n)} \end{aligned} \quad (3.17b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \xi_{i,n}(t) \frac{J_0(\gamma_n r)}{J_1(\alpha_n)} &= -\varepsilon \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 \xi_{i,n}(t) \frac{J_0(\gamma_n r)}{J_1(\alpha_n)} \\ + \beta_i \nu_1 \Sigma_{f1} \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1,n}(t) \frac{J_0(\gamma_n r)}{J_1(\alpha_n)} &+ \beta_i \nu_2 \Sigma_{f2} \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{2,n}(t) \frac{J_0(\gamma_n r)}{J_1(\alpha_n)} \\ &- \lambda_i \frac{\sqrt{2}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{i,n}(t) \frac{J_0(\gamma_n r)}{J_1(\alpha_n)} \end{aligned} \quad (3.17c)$$

Após aplicar o Operador integral 3.7 no sistema de Equações 3.17a-c e reagrupando seus termos, temos:

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \varphi_{1,n}(t) \frac{1}{J_1(\alpha_n) J_1(\alpha_m)} \int_0^R r J_0(\gamma_n r) J_0(\gamma_m r) dr + \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} v_1 [D_1 \gamma_n^2 \\
& + \Sigma_{a1} - (1 - \beta) \nu_1 \Sigma_{f1}] \frac{\varphi_{1,n}(t)}{J_1(\alpha_n) J_1(\alpha_m)} \int_0^R r J_0(\gamma_n r) J_0(\gamma_m r) dr \\
& + \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} [-v_1 (1 - \beta) \nu_2 \Sigma_{f2}] \frac{\varphi_{2,n}(t)}{J_1(\alpha_n) J_1(\alpha_m)} \int_0^R r J_0(\gamma_n r) J_0(\gamma_m r) dr \\
& + \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^6 [-v_1] \lambda_i \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_{1,n}(t)}{J_1(\alpha_n) J_1(\alpha_m)} \int_0^R r J_0(\gamma_n r) J_0(\alpha_m r) dr \right\} = 0
\end{aligned} \tag{3.18a}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \varphi_{2,n}(t) \frac{1}{J_1(\alpha_n) J_1(\alpha_m)} \int_0^R r J_0(\gamma_n r) J_0(\gamma_m r) dr \\
& + \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} [\Sigma_{s12}] \frac{\varphi_{1,n}(t)}{J_1(\alpha_n) J_1(\alpha_m)} \int_0^R r J_0(\gamma_n r) J_0(\gamma_m r) dr \\
& + \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} v_2 [D_2 \gamma_n^2 + \Sigma_{a2} + \Sigma_{s12}] \frac{\varphi_{2,n}(t)}{J_1(\alpha_n) J_1(\alpha_m)} \int_0^R r J_0(\gamma_n r) J_0(\gamma_m r) dr = 0
\end{aligned} \tag{3.18b}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \xi_{1,n}(t) \frac{1}{J_1(\alpha_n) J_1(\alpha_m)} \int_0^R r J_0(\gamma_n r) J_0(\gamma_m r) dr \\
& + [-\beta_i \nu_1 \Sigma_{f1}] \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_{1,n}(t)}{J_1(\alpha_n) J_1(\alpha_m)} \int_0^R r J_0(\gamma_n r) J_0(\gamma_m r) dr \\
& + [-\beta_i \nu_2 \Sigma_{f2}] \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_{2,n}(t)}{J_1(\alpha_n) J_1(\alpha_m)} \int_0^R r J_0(\gamma_n r) J_0(\gamma_m r) dr \\
& \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} [\varepsilon \gamma_n^2 + \lambda_i] \frac{\xi_{i,n}(t)}{J_1(\alpha_n) J_1(\alpha_m)} \int_0^R r J_0(\gamma_n r) J_0(\gamma_m r) dr = 0 \quad i = 1 \dots 6
\end{aligned} \tag{3.18c}$$

Fazendo uso da ortogonalidade das autofunções e reagrupando os termos, temos o seguinte sistema

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varphi_{1,n}(t) + v_1[D_1\gamma_n^2 + \Sigma_{a1} - (1 - \beta)\nu_1\Sigma_{f1}]\varphi_{1,n}(t) + [-v_1(1 - \beta)\nu_2\Sigma_{f2}]\varphi_{2,n}(t) \\ + \sum_{i=1}^6[-v_1\lambda_i]\xi_{1,n}(t) = 0 \end{aligned} \quad (3.19a)$$

$$\frac{d}{dt}\varphi_{2,n}(t) + [-v_2\Sigma_{s12}]\varphi_{1,n}(t) + v_2[D_2\gamma_n^2 + \Sigma_{a2} + \Sigma_{s12}]\varphi_{2,n}(t) = 0 \quad (3.19b)$$

$$\frac{d}{dt}\xi_{i,n}(t) + [-\beta_i\nu_1\Sigma_{f1}]\varphi_{1,n}(t) + [-\beta_i\nu_2\Sigma_{f2}]\varphi_{2,n}(t) + [\varepsilon\gamma_n^2 + \lambda_i]\xi_{i,n}(t) = 0 \quad (3.19c)$$

que ao truncar as séries na ordem N , tal que $1 \leq n \leq N$, pode-se escrever o sistema na seguinte forma matricial

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varphi_{1,n}(t) \\ \varphi_{2,n}(t) \\ \xi_{1,n}(t) \\ \vdots \\ \xi_{6,n}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C}_1 & \cdots & \mathbf{C}_6 \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} & \mathbf{F}_1 & \cdots & \mathbf{F}_6 \\ \mathbf{G}_1 & \mathbf{H}_1 & \mathbf{J}_1 & \cdots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}_6 & \mathbf{H}_6 & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{J}_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{1,n}(t) \\ \varphi_{2,n}(t) \\ \xi_{1,n}(t) \\ \vdots \\ \xi_{6,n}(t) \end{bmatrix} = \vec{\mathbf{0}} \quad (3.20)$$

Tal que \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C}_i , \mathbf{D} , \mathbf{E} , \mathbf{F}_i , \mathbf{G}_i , \mathbf{H}_i e \mathbf{J}_i são matrizes diagonais definidas por

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \{a_{m,n}\}, \text{ onde } a_{m,n} = v_1 \left[D_1 \left(\frac{\alpha_n}{R} \right)^2 + \Sigma_{a1} - (1 - \beta)\nu_1 \Sigma_{f1} \right] \\
\mathbf{B} &= \{b_{m,n}\}, \text{ onde } b_{m,n} = [-v_1((1 - \beta)\nu_2 \Sigma_{f2})] \\
\mathbf{C}_i &= \{c_{m,n}^i\}, \text{ onde } c_{m,n}^i = [-v_1 \lambda_i], \text{ para } i = 1 \dots 6 \\
\mathbf{D} &= \{d_{m,n}\}, \text{ onde } d_{m,n} = [-v_2 \Sigma_{s12}] \\
\mathbf{E} &= \{e_{m,n}\}, \text{ onde } e_{m,n} = v_2 \left[D_2 \left(\frac{\alpha_n}{R} \right)^2 + (\Sigma_{a2} + \Sigma_{s12}) \right] \\
\mathbf{F}_i &= \{f_{m,n}^i\}, \text{ onde } f_{m,n}^i = 0 \\
\mathbf{G}_i &= \{g_{m,n}^i\}, \text{ onde } g_{m,n}^i = [-\beta_i \nu_1 \Sigma_{f1}], \text{ para } i = 1 \dots 6 \\
\mathbf{H}_i &= \{h_{m,n}^i\}, \text{ onde } h_{m,n}^i = [-\beta_i \nu_2 \Sigma_{f2}], \text{ para } i = 1 \dots 6 \\
\mathbf{J}_i &= \{j_{m,n}^i\}, \text{ onde } j_{m,n}^i = \left[\varepsilon \left(\frac{\alpha_n}{R} \right)^2 + \lambda_i \right], \text{ para } i = 1 \dots 6
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Nota-se, novamente, que a Equação 3.20 é uma equação diferencial matricial linear homogênea de primeira ordem e pode, de maneira compacta, ser reescrita como

$$\mathbf{X}'(t) + \mathbf{M}\mathbf{X}(t) = \vec{\mathbf{0}}$$

Esse sistema, por sua vez, tem a solução

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{V}e^{-\Xi t}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}(0) \tag{3.22}$$

onde \mathbf{V} e Ξ são respectivamente os autovetores e autovalores da matriz \mathbf{M} e $\mathbf{X}(0)$ é o vetor

$$\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} \varphi_{1,n}(0) \\ \varphi_{2,n}(0) \\ \xi_{1,n}(0) \\ \vdots \\ \xi_{6,n}(0) \end{bmatrix}$$

com componentes dados por:

$$\begin{aligned}
\varphi_{1,n}(0) &= \frac{\sqrt{2}}{RJ_1(\alpha_n)} \int_0^R \phi_{1,0}(r) r J_0(\gamma_n r) dr \\
\varphi_{2,n}(0) &= \frac{\sqrt{2}}{RJ_1(\alpha_n)} \int_0^R \phi_{2,0}(r) r J_0(\gamma_n r) dr \\
\xi_{i,n}(0) &= \frac{\beta_i}{\varepsilon\gamma_n^2 + \lambda_i} [\nu_1 \Sigma_{f1} \varphi_{1,n}(0) + \nu_2 \Sigma_{f2} \varphi_{2,n}(0)] \quad i = 1 \dots 6
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Resultados Numéricos

Os parâmetros nucleares utilizados e as constantes de decaimento provém, respectivamente, das Tabelas 2.5 e 2.6. As condições de contorno de fluxo nulo são fiéis as do problema original 3.2 onde leva-se em consideração um reator de raio $R = 10 \text{ cm}$. As condições iniciais, tanto para o grupo rápido quanto para o térmico, tem seus valores provenientes da utilização da solução estacionária da equação de difusão de nêutrons, Apêndice A.16; substituindo-a em nas Equações 3.23 obtêm-se,

$$\begin{aligned}
\varphi_{1,n}(0) &= \frac{\sqrt{2}}{RJ_1(\alpha_n)} A_1 \int_0^R r J_0\left(\frac{\alpha_1}{R} r\right) J_0\left(\frac{\alpha_n}{R} r\right) dr \\
\Rightarrow \varphi_{1,n}(0) &= \begin{cases} A_1 \frac{RJ_1(\alpha_1)\sqrt{2}}{2}, & \text{se } n = 1 \\ \text{se } n > 1, & 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{2,n}(0) &= \frac{\sqrt{2}}{RJ_1(\alpha_n)} A_2 \int_0^R r J_0\left(\frac{\alpha_1}{R} r\right) J_0\left(\frac{\alpha_n}{R} r\right) dr \\
\Rightarrow \varphi_{2,n}(0) &= \begin{cases} A_2 \frac{RJ_1(\alpha_1)\sqrt{2}}{2}, & \text{se } n = 1 \\ \text{se } n > 1, & 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

consequentemente

$$\xi_{i,n}(0) = \begin{cases} \frac{\beta_i RJ_1(\alpha_1)\sqrt{2}}{2(\varepsilon\gamma_1^2 + \lambda_i)} [\nu_1 \Sigma_{f1} A_1 + \nu_2 \Sigma_{f2} A_2], & \text{se } n = 1 \\ \text{se } n > 1, & 0 \end{cases}$$

e o vetor $\mathbf{X}(0)$ pode ser montado de maneira similar aos anteriores.

A solução do sistema composto pelas Equações 3.13a-b e 3.13c-2 através do método espectral da **GITT** tem uma solução que independe do número n de truncamento da

fórmula inversa da **GITT** - Equações 3.14, 3.15 e 3.16 - devido exclusivamente à escolha da condição inicial. No entanto, há a necessidade de demonstrar a confluência dos resultados tanto do fluxo rápido e térmico - com coeficientes A_1 e A_2 escalados em relação a potência do reator - quanto para a concentração de precursores de nêutrons à medida que se faz a redução do valor de ε , $1 \leq \varepsilon \leq 10^{-15}$, para um tempo, $t = 1$ s, e posição, 5 cm, fixados. Os resultados são apresentados nas Tabelas 3.3, 3.4.

Tabela 3.3 – Limite do fluxo rápido e térmico de nêutrons - com coeficientes A_1 e A_2 escalados em relação a potência do reator - em geometria cilíndrica com relação ao decréscimo de ε variando entre 1 e 10^{-15} , com número de truncamento $n = 1$.

ε	$\hat{\phi}_1(5, 1)_{cm^{-2}s^{-1}}$	$\hat{\phi}_2(5, 1)_{cm^{-2}s^{-1}}$
1	0.003624586246938	$3.048053666991746 \times 10^{-4}$
10^{-1}	0.005531199905349	$4.651384291777310 \times 10^{-4}$
10^{-2}	0.005968384239272	$5.019025973172921 \times 10^{-4}$
10^{-3}	0.006020213747022	$5.062610988648839 \times 10^{-4}$
10^{-4}	0.006025500747009	$5.067056988404521 \times 10^{-4}$
10^{-5}	0.006026030519889	$5.067502490935876 \times 10^{-4}$
10^{-6}	0.006026083508044	$5.067547049878784 \times 10^{-4}$
10^{-7}	0.006026088806466	$5.067551505963182 \times 10^{-4}$
10^{-8}	0.006026089336973	$5.067551951783563 \times 10^{-4}$
10^{-9}	0.006026089388586	$5.067551995326304 \times 10^{-4}$
10^{-10}	0.006026089393796	$5.067551999777316 \times 10^{-4}$
10^{-11}	0.006026089394862	$5.067552000510067 \times 10^{-4}$
10^{-12}	0.006026089393498	$5.067551999279942 \times 10^{-4}$
10^{-13}	0.006026089394327	$5.067552000137433 \times 10^{-4}$
10^{-14}	0.006026089394781	$5.067552000519619 \times 10^{-4}$
10^{-15}	0.006026089395309	$5.067552000979868 \times 10^{-4}$

Tabela 3.4 – Convergência da concentração de precursores de nêutrons - em geometria cilíndrica - com relação ao decréscimo de ε variando entre 1 e 10^{-15} , com número de truncamento $n = 1$.

ε	$\hat{C}_1(5, 1) \text{ cm}^{-3}$
1	$2.034593459823892 \times 10^{-4}$
10^{-1}	$8.278057293247752 \times 10^{-4}$
10^{-2}	0.001165837506739
10^{-3}	0.001215177674361
10^{-4}	0.001220339417047
10^{-5}	0.001220857974844
10^{-6}	0.001220909854390
10^{-7}	0.001220915042914
10^{-8}	0.001220915561578
10^{-9}	0.001220915613415
10^{-10}	0.001220915618515
10^{-11}	0.001220915619186
10^{-12}	0.001220915619225
10^{-13}	0.001220915619213
10^{-14}	0.001220915619226
10^{-15}	0.001220915619229

Os gráficos apresentados nas Figuras 3.3, 3.4 e 3.5 tem como função evidenciar o comportamento do fluxo rápido, térmico e da concentração de precursores que apresentam um decaimento, devido a subcriticalidade do reator ($k_{eff} < 1$), à medida que se aumenta o tempo - $t = 1 \text{ s}$, $t = 5 \text{ s}$ e $t = 10 \text{ s}$ - com resultados apresentados nas Tabelas 3.5, 3.6 e complementados pelas Tabelas I.7 e I.8, presentes no Anexo A.

Tabela 3.5 – Valores do fluxo rápido e térmico - com coeficientes A_1 e A_2 escalados em relação a potência do reator - para $t = 1$ s em alguns pontos no intervalo de 0, 10 com número de truncamento $n = 1$.

r cm	$\hat{\phi}_1(r, 1)$ $cm^{-2}s^{-1}$	$\hat{\phi}_2(r, 1)$ $cm^{-2}s^{-1}$
0	0.008995106568174	$7.564303695620281 \times 10^{-4}$
1	0.008865524946579	$7.455333920633710 \times 10^{-4}$
2	0.008482375760743	$7.133130200272422 \times 10^{-4}$
3	0.007862177616742	$6.611583615399379 \times 10^{-4}$
4	0.007031580275168	$5.913104893513607 \times 10^{-4}$
5	0.006026089395309	$5.067552000979868 \times 10^{-4}$
6	0.004888371929672	$4.110805089276275 \times 10^{-4}$
7	0.003666227258283	$3.083060349975094 \times 10^{-4}$
8	0.002410325709209	$2.026928256560704 \times 10^{-4}$
9	0.001171827421783	$9.854311821801431 \times 10^{-5}$
10	$3.975622909832422 \times 10^{-30}$	$-4.941957020838121 \times 10^{-30}$

Tabela 3.6 – Valores da concentração de precursores para $t = 1$ s em alguns pontos no intervalo de $[0, 10]$ com número de truncamento $n = 1$.

r cm	$\hat{C}_1(r, 1)$ cm^{-3}
0	0.001822453233803
1	0.001796199354149
2	0.001718571427514
3	0.001592916205472
4	0.001424633061781
5	0.001220915619229
6	$9.904084141515391 \times 10^{-4}$
7	$7.427958381725324 \times 10^{-4}$
8	$4.883439512369038 \times 10^{-4}$
9	$2.374180514837083 \times 10^{-4}$
10	$3.753397302745754 \times 10^{-31}$

Cabe o interesse do comportamento dos fluxos rápido e térmico para determinados tempos - $t = 1$ s, $t = 5$ s, $t = 10$ s - e são eles condizentes com o esperado.

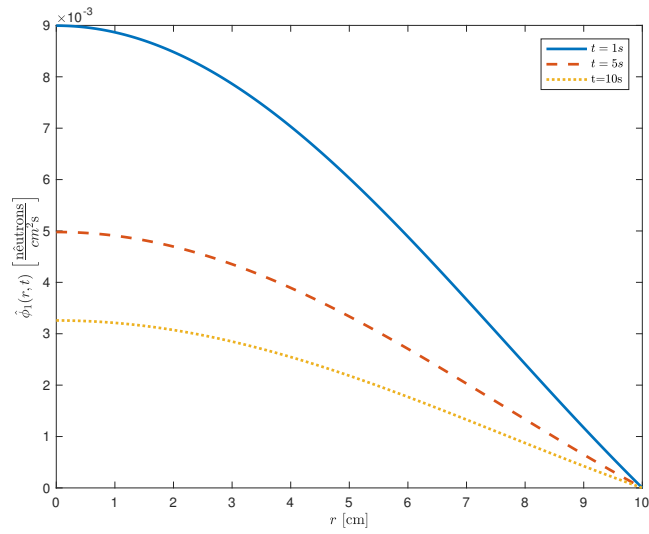


Figura 3.3 – Fluxo escalar $\hat{\phi}_1$ - rápido, em coordenadas cilíndricas - em função da variável espacial para alguns instantes com número de truncamento $n = 1$ e $\varepsilon = 10^{-15}$.

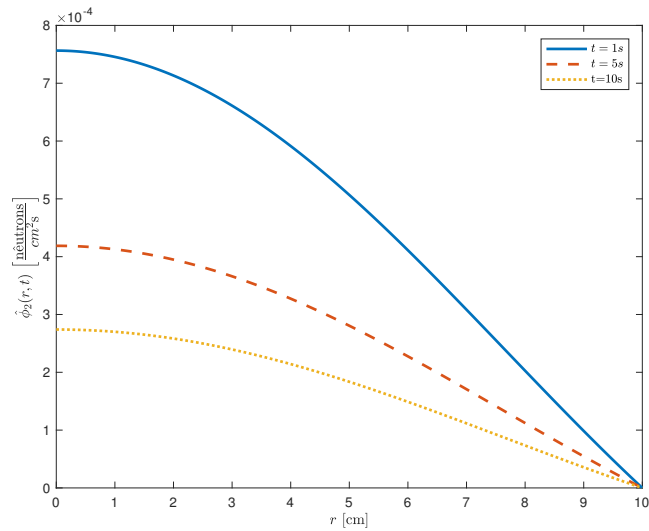


Figura 3.4 – Fluxo escalar $\hat{\phi}_2$ - térmico, em coordenadas cilíndricas - em função da variável espacial para alguns instantes com número de truncamento $n = 1$ e $\varepsilon = 10^{-15}$.

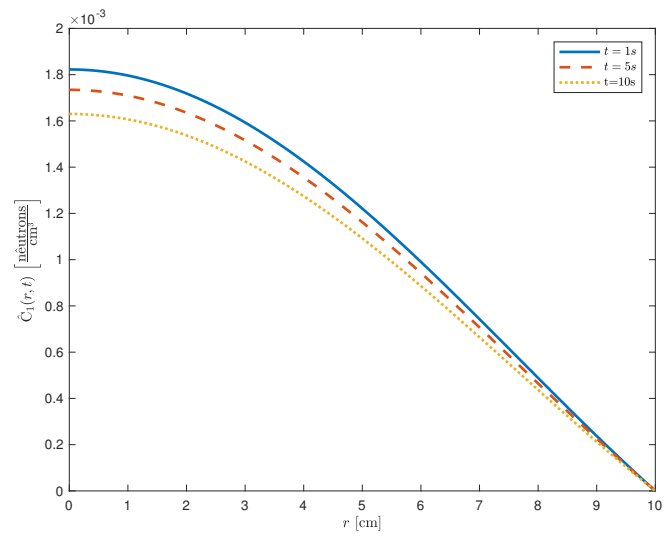


Figura 3.5 – Concentração de precursores \hat{C}_1 - primeiro grupo de nêutrons atrasados, em coordenadas cilíndricas - em função da variável espacial para alguns instantes com número de truncamento $n = 1$ e $\varepsilon = 10^{-15}$.

4 APLICAÇÃO DO PROCEDIMENTO RECURSIVO PROPOSTO

O entendimento fundamental que precede a aplicação do método espectral é a igualdade referente ao limite tomado do operador laplaciano unidimensional em coordenadas cartesianas e cilíndricas portanto, a solução se aproxima da cartesiana no limite.

4.1 Problema Monoenergético com um grupo de precursores de nêutrons atrasados

Dentre outros fatores a serem abordados pode-se de maneira cautelosa, e preliminar, escrever a equação unidimensional de cinética de difusão de nêutrons como

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi(r, t) = D \frac{\partial^2}{\partial r^2} \phi(r, t) + [(1 - \beta)\nu\Sigma_f + \Sigma_a] \phi(r, t) + \lambda C(r, t) + \underbrace{\frac{D}{r} \frac{\partial}{\partial r} \phi(r, t)}_{\text{I}} \quad (4.1a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} C(r, t) = \underbrace{\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial r^2} C(r, t) + \frac{\varepsilon}{r} \frac{\partial}{\partial r} C(r, t)}_{\text{II}} + \beta\nu\Sigma_f \phi(r, t) - \lambda C(r, t) \quad (4.1b)$$

Como invocado na proposta deste trabalho ambos os elementos em destaque (I), comumente intitulados de *termos de curvatura*, serão caracterizados como fontes retroalimentadas no procedimento recursivo que o constitui. Falta ressaltar que os termos em destaque representados por (II) são termos difusivos adicionais e onde $\varepsilon \rightarrow 0$.

Ademais, o procedimento aqui apresentado se desdobra da combinação de um método espectral e de um de decomposição em séries. De maneira formal a decomposição do fluxo escalar de nêutrons e da concentração de precursores são

$$\phi(r, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi^{(i)}(r, t) \quad \text{e} \quad C(r, t) = \sum_{i=0}^{\infty} C^{(i)}(r, t) \quad (4.2)$$

Substituindo nas Equações 4.1a-b as respectivas expansões torna-se possível uma decomposição do sistema de equações. A inicialização do sistema recursivo proposto é dada pela solução da equação

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi^{(0)}(r, t) - D \frac{\partial^2}{\partial r^2} \phi^{(0)}(r, t) - [(1 - \beta)\nu\Sigma_f - \Sigma_a] \phi^{(0)}(r, t) - \lambda C^{(0)}(r, t) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} C^{(0)}(r, t) - \beta\nu\Sigma_f \phi^{(0)}(r, t) + \lambda C^{(0)}(r, t) &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

que é idêntico ao problema em coordenadas cartesianas com um grupo de energia e um grupo de nêutrons atrasados [Ceolin, 2009].

Restituindo a cautela anteriormente tomada e rescrevendo as Equações 4.1a-b já com a decomposição em séries e com suas características recursivas

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi^{(j)}(r, t) &= D \frac{\partial^2}{\partial r^2} \phi^{(j)}(r, t) + [(1 - \beta)\nu\Sigma_f + \Sigma_a] \phi^{(j)}(r, t) \\ &+ \lambda C^{(j)}(r, t) + \frac{D}{r} \frac{\partial}{\partial r} \phi^{(j-1)}(r, t) \end{aligned} \quad (4.4a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} C^{(j)}(r, t) &= \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial r^2} C^{(j)}(r, t) + \beta\nu\Sigma_f \phi^{(j)}(r, t) \\ &- \lambda C^{(j)}(r, t) + \frac{\varepsilon}{r} \frac{\partial}{\partial r} C^{(j-1)}(r, t) \end{aligned} \quad (4.4b)$$

onde $j \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$ e $r \in [0, R]$; deve-se, de maneira a evitar um vício na solução, modificar as condições de simetria e de contorno para que correspondam à nova geometria do problema - cilíndrica - dadas por

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dr} \phi^{(j)}(r, t) \right|_{r=0} &= 0 & \phi^{(j)}(R, t) &= 0 \\ \left. \frac{d}{dr} C^{(j)}(r, t) \right|_{r=0} &= 0 & C^{(j)}(R, t) &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

As condições iniciais para $j = 0$ neste trabalho são dadas pela solução da equação estacionária de difusão de nêutrons em coordenadas cilíndricas apresentada no Apêndice A, mais especificamente a Equação A.11. No entanto, generalizando as condições iniciais têm-se

$$\begin{aligned} \phi^{(0)}(r, 0) &= \phi_0(r) \\ C^{(0)}(r, 0) &= \frac{\beta\nu\Sigma_f}{\lambda} \phi_0(r) \end{aligned} \quad (4.6)$$

para as demais recursões, $j \geq 1$, $\phi^{(j)}(r, 0) = C^{(j)}(r, 0) = 0$.

Mantendo coerentes as estruturas das soluções apresentadas anteriormente seguem-se os passos retirados de [Wortmann, 2003], para uma correta aplicação do método espectral no sistema apresentado anteriormente inicia-se com a identificação e solução do problema auxiliar. À vista disso

$$\frac{d}{dr}\zeta(r) + \gamma_n^2\zeta(r) = 0 \quad (4.7)$$

com suas já estabelecidas condições de contorno, a Equação 4.7 tem solução dada através das autofunções $\left\{ \cos\left(\frac{(2n-1)\pi r}{2R}\right) \right\}_{n=1}^N$ - de maneira a se comprometer com uma leitura mais dinâmica e direta emprega-se $\gamma_n = \frac{(2n-1)\pi}{2R}$ em todas as futuras equações.

Portanto, é possível supor que haja uma solução para o sistema de Equações 4.4a-b contemplada por uma série que envolve o produto de autofunções ortonormais no espaço por funções no tempo:

$$\phi^{(j)}(r, t) = \sqrt{\frac{2}{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{(j)}(t) \cos(\gamma_n r) \quad (4.8)$$

$$C^{(j)}(r, t) = \sqrt{\frac{2}{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^{(j)}(t) \cos(\gamma_n r) \quad (4.9)$$

Para dar continuidade ao procedimento, substituem-se as Equações 4.8 e 4.9 no sistema de Equações 4.4a-b. Obtêm-se para a Equação 4.4a

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \sqrt{\frac{2}{R}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_n^{(j)}(t) \cos(\gamma_n r) &= -D \sqrt{\frac{2}{R}} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^2 \varphi_n^{(j)} \cos(\gamma_n r) \\ &\quad - [(1 - \beta)\nu\Sigma_f - \Sigma_a] \sqrt{\frac{2}{R}} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^{(j)}(t) \cos(\gamma_n r) \\ &\quad + \lambda \sqrt{\frac{2}{R}} \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n^{(j)}(t) \cos(\gamma_n r) \\ &\quad - \frac{D}{r} \sqrt{\frac{2}{R}} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \varphi_n^{(j-1)}(t) \text{sen}(\gamma_n r) \end{aligned} \quad (4.10a)$$

semelhantemente para a Equação 4.4b

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{R}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \xi_n^{(j)}(t) &= -\varepsilon \sqrt{\frac{2}{R}} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^2 \xi_n^{(j)}(t) \cos(\gamma_n r) \\ &\quad + \lambda \sqrt{\frac{2}{R}} \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n^{(j)}(t) \cos(\gamma_n r) \\ &\quad + \beta\nu\Sigma_f \sqrt{\frac{2}{R}} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^{(j)} \cos(\gamma_n r) \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{r} \sqrt{\frac{2}{R}} \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n^{(j-1)}(t) \text{sen}(\gamma_n r) \end{aligned} \quad (4.10b)$$

O próximo passo consiste em multiplicar as Equações 4.10a-b por $\sqrt{\frac{2}{R}} \cos(\gamma_m r)$, onde $m \in \mathbb{N}$, e posteriormente integrar a variável espacial em todo o intervalo $[0, R]$ - é condizente, portanto, dizer que no sistema será aplicado um operador integral, dado por

$$\sqrt{\frac{2}{R}} \int_0^R (\cdot) \cos(\gamma_n r) dr$$

Por conseguinte, para a Equação 4.10a

$$\begin{aligned} & \frac{2}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_n^{(j)}(t) \int_0^R \cos(\gamma_m r) \cos(\gamma_n r) dr \\ & + \frac{2}{R} \sum_{n=0}^{\infty} v[D\gamma_n^2 - (1 - \beta)\nu\Sigma_f + \Sigma_a] \varphi_n^{(j)}(t) \int_0^R \cos(\gamma_m r) \cos(\gamma_n r) dr \\ & - v\lambda \frac{2}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n^{(j)}(t) \int_0^R \cos(\gamma_m r) \cos(\gamma_n r) dr \\ & + \left\{ vD \frac{2}{R} \gamma_n \int_0^R \frac{1}{r} \cos(\gamma_m r) \operatorname{sen}(\gamma_n r) dr \right\} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^{(j-1)}(t) = 0 \end{aligned} \quad (4.11a)$$

de conseqüentemente

$$\begin{aligned} & \frac{2}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \xi_n^{(j)}(t) \int_0^R \cos(\gamma_m r) \cos(\gamma_n r) dr \\ & + \frac{2}{R} \sum_{n=0}^{\infty} [\varepsilon\gamma_n^2 + \lambda] \xi_n^{(j)}(t) \int_0^R \cos(\gamma_m r) \cos(\gamma_n r) dr \\ & - \beta\nu\Sigma_f \frac{2}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^{(j)}(t) \int_0^R \cos(\gamma_m r) \cos(\gamma_n r) dr \\ & + \left\{ \varepsilon \frac{2}{R} \gamma_n \int_0^R \frac{1}{r} \cos(\gamma_m r) \operatorname{sen}(\gamma_n r) dr \right\} \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n^{(j-1)}(t) = 0 \end{aligned} \quad (4.11b)$$

De forma a dar continuidade à solução é conveniente apurar a ortogonalidade de $\cos(\gamma_n r)$

$$\int_0^R \cos(\gamma_m r) \cos(\gamma_n r) dr = \begin{cases} \frac{R}{2}, & \text{se } m = n \\ 0, & \text{se } m \neq n \end{cases}$$

Observa-se que o último termo de ambas as Equações 4.11a e 4.11b correspondem aos termos de curvatura. Levando em conta a ortogonalidade e a informação precedente pode-se escrever um sistema de equações diferenciais ordinárias dado por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_n^{(j)}(t) + v[D\gamma_n^2 - (1 - \beta)\nu\Sigma_f + \Sigma_a] \varphi_n^{(j)}(t) + [-v\lambda] \xi_n^{(j)}(t) \\ + \left\{ vD \frac{2}{R} \gamma_n \int_0^R \cos(\gamma_m r) \text{sen}(\gamma_n r) dr \right\} \varphi_n^{(j-1)}(t) = 0 \end{aligned} \quad (4.12a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \xi_n^{(j)}(t) + [\varepsilon\gamma_n^2 + \lambda] \xi_n^{(j)}(t) + [-\beta\nu\Sigma_f] \varphi_n^{(j)}(t) \\ + \left\{ \varepsilon \frac{2}{R} \gamma_n \int_0^R \frac{1}{r} \cos(\gamma_m r) \text{sen}(\gamma_n r) dr \right\} \xi_n^{(j-1)}(t) = 0 \end{aligned} \quad (4.12b)$$

E em forma matricial o sistema 4.12a-b pode ser representado como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varphi_n^{(j)}(t) \\ \xi_n^{(j)}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{m,n} & \mathbf{B}_{m,n} \\ \mathbf{C}_{m,n} & \mathbf{D}_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_n^{(j)}(t) \\ \xi_n^{(j)}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{m,n}^1 & 0 \\ 0 & S_{m,n}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_n^{(j-1)}(t) \\ \xi_n^{(j-1)}(t) \end{bmatrix} = \vec{\mathbf{0}} \quad (4.13)$$

para $1 \leq n \leq N$, nas quais \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{D} são matrizes diagonais e $S_{n,n}^1$ e $S_{n,n}^2$ são matrizes densas. Podendo, separadamente, serem identificadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{m,n} &= \{a_{m,n}\} = v[D\gamma_n^2 - (1 - \beta)\nu\Sigma_f + \Sigma_a] \\ \mathbf{B}_{m,n} &= \{b_{m,n}\} = -v\lambda \\ \mathbf{C}_{m,n} &= \{c_{m,n}\} = -\beta\nu\Sigma_f \\ \mathbf{D}_{m,n} &= \{d_{m,n}\} = \varepsilon\gamma_n^2 + \lambda \end{aligned}$$

Similarmente para as matrizes densas, é possível apurar que

$$\begin{aligned} S_{m,n}^1 &= \{s_{m,n}^1\} = vD \frac{2}{R} \gamma_n \int_0^R \frac{1}{r} \cos(\gamma_m r) \text{sen}(\gamma_n r) dr \\ S_{m,n}^2 &= \{s_{m,n}^2\} = \varepsilon \frac{2}{R} \gamma_n \int_0^R \frac{1}{r} \cos(\gamma_m r) \text{sen}(\gamma_n r) dr \end{aligned}$$

ressalta-se que as integrais $S_{m,n}^1$ e $S_{m,n}^2$ foram avaliadas numericamente. Nota-se portanto, que a Equação 4.13 é uma equação matricial não-homogênea de primeira ordem que pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X}^{(j)}(t) + \mathbf{M}\mathbf{X}^{(j)}(t) + \mathbf{N}\mathbf{X}^{(j-1)}(t) = \vec{\mathbf{0}} \quad (4.14)$$

como

$$\mathbf{X}^{(j)}(t) = \begin{bmatrix} \varphi_n^{(j)}(t) \\ \xi_n^{(i)}(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{m,n} & \mathbf{B}_{m,n} \\ \mathbf{C}_{m,n} & \mathbf{D}_{m,n} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} S_{m,n}^1 & 0 \\ 0 & S_{m,n}^2 \end{bmatrix}$$

Verifica-se, de maneira mais instrutiva, que a matriz \mathbf{M} é expressa como

$$\begin{bmatrix} v[D\gamma_1^2 - (1 - \beta) + \Sigma_a] & 0 & 0 & -v\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & v[D\gamma_N^2 + \Sigma_a - (1 - \beta)\nu\Sigma_f] & 0 & \cdots & -v\lambda \\ -\beta\nu\Sigma_f & 0 & 0 & \varepsilon\gamma_1^2 + \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\beta\nu\Sigma_f & 0 & \cdots & \varepsilon\gamma_N^2 + \lambda \end{bmatrix}$$

e, conduzido de maneira similar, a matriz \mathbf{N} é expressada como

$$\begin{bmatrix} s_{1,1}^1 & s_{1,2}^1 & \cdots & s_{1,N}^1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{2,1}^2 & \cdots & \cdots & s_{N-1,N}^1 & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{N,1}^1 & \cdots & s_{N,N-1}^1 & s_{N,N}^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & s_{1,1}^2 & s_{1,2}^2 & \cdots & s_{1,N}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & s_{N-1,N}^2 & \cdots & \cdots & s_{N-1,N}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & s_{N,1}^2 & \cdots & s_{N,N-1}^2 & s_{N,N}^2 \end{bmatrix}$$

A solução da Equação 4.14 pode ser obtida através das transformadas de *Laplace* e dada a decomposição espectral da matriz \mathbf{M} a solução da equação diferencial matricial não-homogênea pode ser escrita como

$$\mathbf{X}^{(j)}(t) = \mathbf{V}e^{-\Xi t}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}(0) - \int_0^t \mathbf{V}e^{-\Xi(t-\tau)}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{X}^{(j-1)}(\tau) d\tau \quad (4.15)$$

onde \mathbf{V} e \mathbf{D} são respectivamente a matriz dos autovetores e a matriz diagonal de autovalores correspondentes à matriz \mathbf{M} e tem como condição inicial o vetor $\mathbf{X}(0)$ para a primeira recursão $j = 0$,

$$\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} \varphi_n^{(0)}(0) \\ \xi_n^{(0)}(0) \end{bmatrix}$$

e seus elementos são os seguintes

$$\begin{aligned} \varphi_n^{(0)}(0) &= \sqrt{\frac{2}{R}} \int_0^R \phi_0(x) \cos(\gamma_n r) dr \\ \xi_n^{(0)}(0) &= \frac{\beta \nu \Sigma_f}{\varepsilon \gamma_n^2 + \lambda} \varphi_n^{(0)}(0) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Portanto, pode-se resumir a Equação 4.15 - com mais clareza - da seguinte forma

$$\mathbf{X}^{(j)}(t) = \begin{cases} \mathbf{V} e^{-\Xi t} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}(0) & \text{para } j = 0 \\ - \int_0^t \mathbf{V} e^{-\Xi(t-\tau)} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{N} \mathbf{X}^{(j-1)}(\tau) d\tau & \text{para } j \geq 1 \end{cases}$$

de tal maneira que

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{X}^{(j)}(t)$$

pode ser substituído nas Expansões 4.8 e 4.9. Onde j_t é o número total de recursões desejadas.

Resultados Numéricos

Como método para uma solução numérica da Equação 4.15 optou-se por particionar igualmente a integral em p intervalos contidos em $[0, t]$ para que de maneira prática o integrando possa ser aproximado através do uso de polinômios de *Hermite* possibilitando, portanto, uma integração analítica mas dependente de número de partições (p).

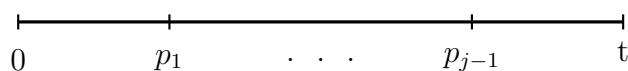


Figura 4.1 – Partições para o intervalo $[0, t]$.

Devido à diferença em relação às ordens de magnitudes, das partes reais, dos autovalores da matriz \mathbf{F} considerou-se factível apresentar os resultados para um intervalo máximo de $t = 10^{-5}$ segundos.

Para o caso monoenergético, com um grupo de nêutrons atrasados em um meio homogêneo com uma condição de contorno de fluxo nulo; tamanho $R = 10$ cm de raio do cilindro. A condição inicial adotada para a implementação deste procedimento tem seus valores apresentados, para um grupo de energia, pela solução estacionária da equação de difusão de nêutrons no Anexo A.11 e considerando também as Equações 4.16 têm-se

$$\begin{aligned}\varphi_n^{(0)}(0) &= A\sqrt{\frac{2}{R}} \int_0^R J_0\left(\frac{\alpha_1}{R}r\right) \cos(\gamma_n r) dr \\ \xi_n^{(0)}(0) &= \frac{\beta\nu\Sigma_f}{\varepsilon\gamma_n^2 + \lambda} \varphi_n^{(0)}(0)\end{aligned}\tag{4.17}$$

onde as integrais foram avaliadas numericamente através de polinômios de *Hermite*.

Na Tabela 4.1 estão apresentados os parâmetros nucleares utilizados.

Tabela 4.1 – Parâmetros nucleares [Oliveira, 2007][Sood, 2003].

D cm	0.96343
v cm/s	1.1035×10^7
Σ_a cm ⁻¹	1.5843×10^{-2}
Σ_f cm ⁻¹	1.1233×10^{-2}
ν	2.7
β	0.0065
λ s ⁻¹	0.764467

O objetivo fundamental é validar o método hierárquico proposto com os valores já obtidos e reconhecidos na literatura. Na Tabela 4.2 são mostrados os valores do fluxo escalar de nêutrons para um ponto fixo do domínio em função do número de partições (p) mantendo fixo os números de recursões (j) e do termo n das séries - Equações 4.8 e 4.9. Ao variar p entre 10 e 400, por inspeção, é possível notar que há uma precisão de 3 dígitos significativos para o fluxo - com coeficiente A escalado em relação a potência do reator - e de 4 dígitos significativos para a concentração de precursores de nêutrons (onde o valores, considerados de referência são os resultados obtidos no *Capítulo 3*, para $t = 10^{-15}$ e ε equivalentes).

Tabela 4.2 – Convergência do fluxo escalar $\hat{\phi}$ - com coeficiente A escalado em relação a potência do reator - e da concentração de precursores de nêutrons atrasados \hat{C} para o acréscimo do número de partições (p) onde estão fixados $n = 10$, $j = 50$ e $\varepsilon = 10^{-15}$.

p	$\hat{\phi}(5, 10^{-5})_{cm^{-2}s^{-1}}$	$\hat{C}(5, 10^{-5})_{cm^{-3}}$
10	$1.75505955058039 \times 10^{29}$	$5.651706281339371 \times 10^{18}$
50	-0.239378595355537	0.001896842884836
100	0.013299816898311	0.001896842915466
150	0.013304125981729	0.001896842915488
200	0.013306738535360	0.001896842915499
250	0.013307981150756	0.001896842915505
300	0.013308891750331	0.001896842915509
350	0.013309441576435	0.001896842915512
400	0.013309818041505	0.001896842915514
Valores de referência	0.013314063944849	0.001896998444513

Para a Tabela 4.3 um procedimento semelhante foi adotado: fixou-se o número de partições (p) e fez-se variar o número de recursões entre 10 e 40. De maneira similar, há uma precisão de 3 dígitos significativos para o fluxo - $\hat{\phi}(r, t)$ - e de 4 dígitos significativos para a concentração de precursores de nêutrons atrasados - $\hat{C}(r, t)$.

Tabela 4.3 – Convergência do fluxo escalar $\hat{\phi}$ - com coeficiente A escalado em relação a potência do reator - e da concentração de precursores de nêutrons atrasados \hat{C} para o acréscimo do número de recursões (j) onde estão fixados $n = 10$, $p = 400$ e $\varepsilon = 10^{-15}$.

j	$\hat{\phi}(5, 10^{-5})_{cm^{-2}s^{-1}}$	$\hat{C}(5, 10^{-5})_{cm^{-3}}$
10	0.026994425386818	0.001896842920925
15	0.013647710699267	0.001896842915626
20	0.013305634144043	0.001896842915512
25	0.013309655616628	0.001896842915514
30	0.013309818052827	0.001896842915514
35	0.013309818060299	0.001896842915514
40	0.013309818041524	0.001896842915514
Valores de referência	0.013314063944849	0.001896998444513

As Tabelas 4.4 e 4.5 comprimem os resultados numéricos do fluxo e da concentração de precursores de nêutrons para diversos valores do intervalo $[0, R]$, onde $R = 10$ cm, e tempos $t = 10^{-5}$ s e $t = 1.5 \times 10^{-5}$ s, respectivamente. O gráfico apresentado na Figura 4.2 enfatiza o decaimento do fluxo ao longo do tempo devido a subcriticalidade do reator ($k_{eff} < 1$).

Empenhado com a eficácia do procedimento hierárquico proposto, optou-se por apresentar na Figura 4.3 o gráfico da concentração de precursores de nêutrons, ao longo do intervalo $[0, 10]$, somente para $t = 10^{-5}$ s.

Tabela 4.4 – Valores do fluxo escalar e da concentração de precursores de nêutrons - em coordenadas cilíndricas, com o coeficiente da condição inicial normalizado - para alguns pontos do intervalo $[0, 10]$ onde $t = 10^{-5}$ s e fixados $n = 10$, $j = 50$, $p = 400$ e $\varepsilon = 10^{-15}$.

r cm	$\hat{\phi}(r, 10^{-5})$ [nêutrons/cm ⁻² s ⁻¹]	$\hat{C}(r, 10^{-5})$ cm ⁻³
0.0	0.019867350178816	0.002831750886760
1.0	0.019580815241071	0.002790731618701
2.0	0.018737096423079	0.002670349924379
3.0	0.017365454652977	0.002474868714859
4.0	0.015533178289940	0.002213662189536
5.0	0.013309818041505	0.001896842915514
6.0	0.010799651267651	0.001539030712352
7.0	0.008096570780681	0.001153892802183
8.0	0.005326970167574	0.000759065077981
9.0	0.002585247418932	0.000368465784263
10.0	0.000000000000000	0.000000000000000

Tabela 4.5 – Valores do fluxo escalar e da concentração de precursores de nêutrons - em coordenadas cilíndricas, com o coeficiente da condição inicial normalizado - para alguns pontos do intervalo $[0, 10]$ onde $t = 1.5 \times 10^{-5}$ s e fixados $n = 10$, $j = 50$, $p = 400$ e $\varepsilon = 10^{-15}$.

r cm	$\hat{\phi}(r, 1.5 \times 10^{-5})$ cm ⁻² s ⁻¹	$\hat{C}(r, 1.5 \times 10^{-5})$ cm ⁻³
0.0	0.007329578190510	0.002831749816827
1.0	0.007223846723623	0.002790730564275
2.0	0.006912768546463	0.002670348915439
3.0	0.006406561109319	0.002474867779780
4.0	0.005730810399443	0.002213661353149
5.0	0.004910289981135	0.001896842198831
6.0	0.003984520278679	0.001539030130861
7.0	0.002986838179439	0.001153892366208
8.0	0.001965696355780	0.000759064791182
9.0	0.000953362063929	0.000368465645043
10.0	0.000000000000000	0.000000000000000

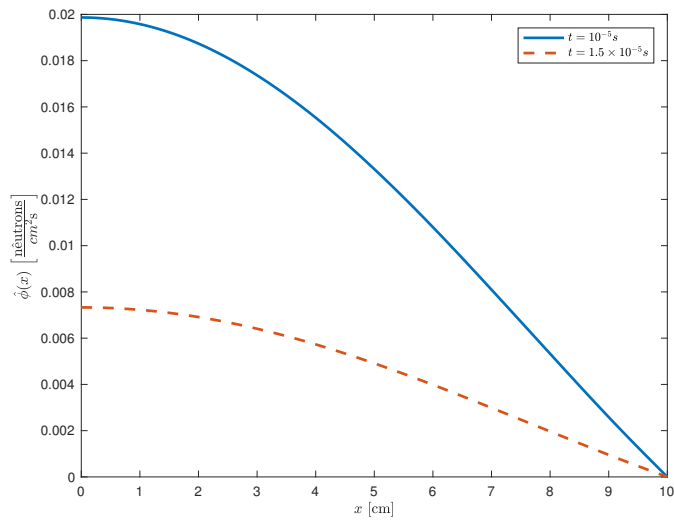


Figura 4.2 – Fluxo escalar $\hat{\phi}(r, t)$ com $n = 10$, $j = 50$, $p = 400$ e $\varepsilon = 10^{-15}$.

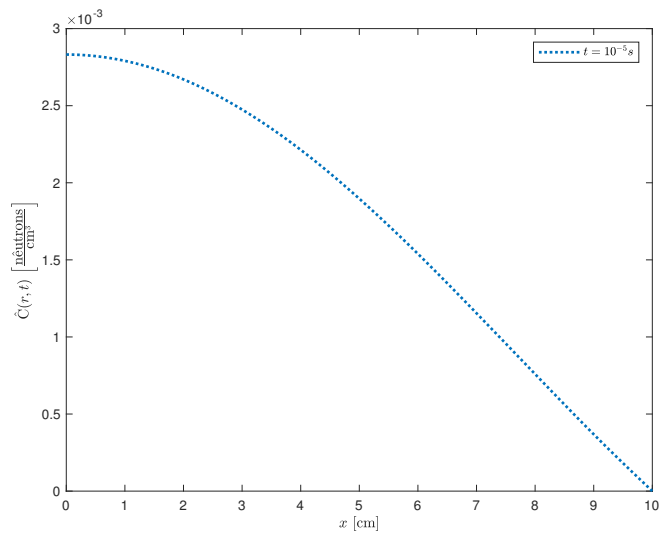


Figura 4.3 – Concentração de precursores $\hat{C}(r, t)$ com $n = 10$, $j = 50$, $p = 400$ e $\varepsilon = 10^{-15}$.

4.2 Problema com dois grupos de energia e seis grupos de precursores de nêutrons atrasados

A equação unidimensional de cinética de difusão com dois grupos energéticos e seis grupos de precursores de nêutrons atrasados em geometria cilíndrica e já incluso o termo fictício de difusão é dada por

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_1} \frac{\partial}{\partial t} \phi_1(r, t) &= D_1 \frac{\partial r^2}{\partial r^2} \phi_1(r, t) + \phi_1(r, t)[(1 - \beta)\nu_1 \Sigma_{f1} - \Sigma_{a1}] + \phi_2(r, t)[(1 - \beta)\nu_2 \Sigma_{f2}] \\ &+ \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(r, t) + \frac{D_1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \phi_1(r, t) \end{aligned} \quad (4.17a)$$

$$\frac{1}{v_2} \frac{\partial}{\partial t} \phi_2(r, t) = D_2 \frac{\partial r^2}{\partial r^2} \phi_2(r, t) - \Sigma_{a2} \phi_2(r, t) + \Sigma_{s12} \phi_1(r, t) + \frac{D_2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \phi_2(r, t) \quad (4.17b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} C_i(r, t) &= \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial r^2} C_i - \lambda_i C_i(r, t) + \beta_i \nu_1 \Sigma_{f1} \phi_1(r, t) + \beta_i \nu_2 \Sigma_{f2} \phi_2(r, t) \\ &+ \frac{\varepsilon}{r} \frac{\partial}{\partial r} C_i(r, t) \quad i = 1, \dots, 6 \end{aligned} \quad (4.17c)$$

Como indicado, o procedimento se desdobra da combinação de um método espectral e um de decomposição. Desta maneira, supõe-se que as soluções para o grupo rápido, térmico e para as concentrações possam ser expandidas nas seguintes séries:

$$\phi_1(r, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^{(j)}(r, t) \quad (4.18)$$

$$\phi_2(r, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_2^{(j)}(r, t) \quad (4.19)$$

$$C_i(r, t) = \sum_{j=0}^{\infty} C_i^{(j)}(r, t) \quad (4.20)$$

Substituindo as Equações 4.18, 4.19 e 4.20 nas Equações 4.17a-c podemos escrever um sistema de equações recursivos cuja inicialização é dada pela solução do seguinte problema

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_1} \frac{\partial}{\partial t} \phi_1^{(0)}(r, t) &= D_1 \frac{\partial r^2}{\partial r^2} \phi_1^{(0)}(r, t) + \phi_1^{(0)}(r, t)[(1 - \beta)\nu_1 \Sigma_{f1} - \Sigma_{a1}] \\ &+ \phi_2^{(0)}(r, t)[(1 - \beta)\nu_2 \Sigma_{f2}] \end{aligned} \quad (4.21a)$$

$$\frac{1}{v_2} \frac{\partial}{\partial t} \phi_2^{(0)}(r, t) = D_2 \frac{\partial r^2}{\partial r^2} \phi_2^{(0)}(r, t) - \Sigma_{a2} \phi_2^{(0)}(r, t) + \Sigma_{s12} \phi_1^{(0)}(r, t) \quad (4.21b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} C_i^{(0)}(r, t) = \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial r^2} C_i^{(0)}(r, t) - \lambda_i C_i^{(0)}(r, t) + \beta_i \nu_1 \Sigma_{f1} \phi_1^{(0)}(r, t) \\ + \beta_i \nu_2 \Sigma_{f2} \phi_2^{(0)}(r, t) \end{aligned} \quad (4.21c)$$

que é idêntico ao problema em coordenadas cartesianas com dois grupos de energia e seis grupos de nêutrons atrasados apresentado na seção 2.1.1. Pode-se escrever o sistema de equações com suas características recursivas para $j \geq 1$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_1} \frac{\partial}{\partial t} \phi_1^{(j)}(r, t) = D_1 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \phi_1^{(j)}(r, t) + \phi_1^{(j)}(r, t) [(1 - \beta) \nu_1 \Sigma_{f1} - \Sigma_{a1}] + \phi_2^{(j)}(r, t) [(1 - \beta) \nu_2 \Sigma_{f2}] \\ + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i^{(j)}(r, t) + \frac{D_1}{r} \frac{\partial}{\partial t} \phi_1^{(j-1)}(r, t) \end{aligned} \quad (4.22a)$$

$$\frac{1}{v_2} \frac{\partial}{\partial t} \phi_2^{(j)}(r, t) = D_2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \phi_2^{(j)}(r, t) - \Sigma_{a2} \phi_2^{(j)}(r, t) + \Sigma_{s12} \phi_1^{(j)}(r, t) + \frac{D_2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \phi_2^{(j-1)}(r, t) \quad (4.22b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} C_i^{(j)}(r, t) = \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial r^2} C_i^{(j)}(r, t) - \lambda_i C_i^{(j)}(r, t) + \beta_i \nu_1 \Sigma_{f1} \phi_1^{(j)}(r, t) + \beta_i \nu_2 \Sigma_{f2} \phi_2^{(j)}(r, t) \\ + \frac{\varepsilon}{r} \frac{\partial}{\partial r} C_i^{(j-1)}(r, t) \quad i = 1 \dots 6 \end{aligned} \quad (4.22c)$$

onde $i \in \mathbb{N}$ e $r \in [0, R]$; como para o caso anterior, as condições de simetria e de contorno são dadas por

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dr} \phi_1^{(j)}(r, t) \right|_{r=0} = 0 \quad \phi_1^{(j)}(R, t) = 0 \\ \left. \frac{d}{dr} \phi_2^{(j)}(r, t) \right|_{r=0} = 0 \quad \phi_2^{(j)}(R, t) = 0 \\ \left. \frac{d}{dr} C_i^{(j)}(r, t) \right|_{r=0} = 0 \quad C_i^{(j)}(R, t) = 0 \end{aligned}$$

e como assumiu-se o termo difusivo fictício pode-se estender as condições de contorno para os precursores de nêutrons atrasados. As condições iniciais para $j = 0$ neste trabalho são dadas pela solução da equação estacionária de difusão de nêutrons em coordenadas cilíndricas apresentada no Apêndice A, mais especificamente a Equação A.11. No entanto,

generalizando as condições iniciais têm-se

$$\begin{aligned}\phi_1^{(0)}(r, 0) &= \phi_{1,0} \\ \phi_2^{(0)}(r, 0) &= \phi_{2,0} \\ C_i^{(0)}(r, 0) &= \frac{\beta_i}{\lambda_i} [\nu_1 \Sigma_{f1} \phi_{1,0} + \nu_2 \Sigma_{f2} \phi_{2,0}]\end{aligned}$$

para as demais recursões, $j \geq 1$, $\phi_1^{(j)}(r, 0) = \phi_2^{(j)}(r, 0) = C^{(j)}(r, 0) = 0$.

De maneira idêntica, as autofunções do problema auxiliar de *Sturm-Liouville* são $\left\{ \cos\left(\frac{(2n-1)\pi r}{2R}\right) \right\}_{n=1}^N$, tal que $\gamma_n = \frac{(2n-1)\pi}{2R}$. Com as autofunções em mãos, supõe-se que haja uma expansão, em forma de séries, da solução para o sistema de Equações 4.21a-c que envolva o produto de autofunções ortonormais no espaço por funções no tempo:

$$\phi_1^{(j)}(r, t) = \sqrt{\frac{2}{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1,n}^{(j)}(r, t) \cos(\gamma_n r) \quad (4.23)$$

$$\phi_2^{(j)}(r, t) = \sqrt{\frac{2}{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{2,n}^{(j)}(r, t) \cos(\gamma_n r) \quad (4.24)$$

$$C_i^{(j)}(r, t) = \sqrt{\frac{2}{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{i,n}^{(j)}(r, t) \cos(\gamma_n r) \quad (4.25)$$

Dando continuidade ao procedimento, substitui-se as Equações 4.23, 4.24 e 4.25 no sistema de Equações 4.22a-c obtendo-se

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{2}{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \varphi_{1,n}^{(j)}(t) \cos(\gamma_n r) &= -v_1 D_1 \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 \varphi_{1,n}^{(j)}(t) \cos(\gamma_n r) \\ &+ v_1 [(1 - \beta) \nu_1 \Sigma_{f1} - \Sigma_{a1}] \sqrt{\frac{2}{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1,n}^{(j)}(t) \cos(\gamma_n r) \\ &+ v_1 [(1 - \beta) \nu_2 \Sigma_{f2}] \sqrt{\frac{2}{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{2,n}^{(j)}(t) \cos(\gamma_n r) \\ + v_1 \sum_{i=1}^6 \lambda_i \sqrt{\frac{2}{R}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{i,n}^{(j)}(t) \cos(\gamma_n r) \right\} &- v_1 \frac{D_1}{r} \sqrt{\frac{2}{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \varphi_{1,n}^{(j-1)}(t) \text{sen}(\gamma_n r)\end{aligned} \quad (4.26a)$$

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{2}{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \varphi_{2,n}^{(j)}(t) \cos(\gamma_n r) &= -v_2 D_2 \sqrt{\frac{2}{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 \varphi_{2,n}^{(j)}(t) \cos(\gamma_n r) \\ &- v_2 (\Sigma_{a2} + \Sigma_{s12}) \sqrt{\frac{2}{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{2,n}^{(j)}(t) \cos(\gamma_n r) \\ + v_2 \Sigma_{s12} \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1,n}^{(j)}(t) \cos(\gamma_n r) &- v_2 \frac{D_2}{r} \sqrt{\frac{2}{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \varphi_{2,n}^{(j-1)}(t) \text{sen}(\gamma_n r)\end{aligned} \quad (4.26b)$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\frac{2}{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \xi_{i,n}^{(j)}(t) \cos(\gamma_n r) = -\varepsilon \sqrt{\frac{2}{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 \xi_{i,n}^{(j)}(t) \cos(\gamma_n r) \\
& + \beta_i \nu_1 \Sigma_{f1} \sqrt{\frac{2}{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1,n}^{(j)}(t) \cos(\gamma_n r) + \beta_i \nu_2 \Sigma_{f2} \sqrt{\frac{2}{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{2,n}^{(j)}(t) \cos(\gamma_n r) \\
& - \lambda_i \sqrt{\frac{2}{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{i,n}^{(j)}(t) \cos(\gamma_n r) - \frac{\varepsilon}{r} \sqrt{\frac{2}{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \xi_{i,n}^{(j-1)}(t) \operatorname{sen}(\gamma_n r)
\end{aligned} \tag{4.26c}$$

Aplicando o operador integral

$$\int_0^R (\cdot) \cos(\gamma_m r) dr$$

ao sistema 4.26a-c

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \varphi_{1,n}^{(j)}(t) \int_0^R \cos(\gamma_m r) \cos(\gamma_n r) dr \\
& + [v_1 D_1] \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 \varphi_{1,n}^{(j)}(t) \int_0^R \cos(\gamma_m r) \cos(\gamma_n r) dr \\
& + [-v_1 [(1-\beta) \nu_1 \Sigma_{f1} - \Sigma_{a1}]] \frac{2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1,n}^{(j)}(t) \int_0^R \cos(\gamma_m r) \cos(\gamma_n r) dr \\
& + [-v_1 [(1-\beta) \nu_2 \Sigma_{f2}]] \frac{2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{2,n}^{(j)}(t) \int_0^R \cos(\gamma_m r) \cos(\gamma_n r) dr \\
& + [-v_1] \sum_{i=1}^6 \lambda_i \frac{2}{R} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{i,n}^{(j)}(t) \right\} \int_0^R \cos(\gamma_m r) \cos(\gamma_n r) dr \\
& + \left\{ v_1 D_1 \frac{2}{R} \int_0^R \frac{1}{r} \cos(\gamma_m r) \operatorname{sen}(\gamma_n r) dr \right\} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \varphi_{1,n}^{(j-1)}(t) = 0
\end{aligned} \tag{4.27a}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \varphi_{2,n}^{(j)}(t) \int_0^R \cos(\gamma_m r) \cos(\gamma_n r) dr \\
& + v_2 D_2 \frac{2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 \varphi_{2,n}^{(j)}(t) \int_0^R \cos(\gamma_m r) \cos(\gamma_n r) dr \\
& + v_2 (\Sigma_{a2} + \Sigma_{s12}) \frac{2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{2,n}^{(j)}(t) \int_0^R \cos(\gamma_m r) \cos(\gamma_n r) dr \\
& + [-v_2 \Sigma_{s12}] \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1,n}^{(j)}(t) \int_0^R \cos(\gamma_m r) \cos(\gamma_n r) dr \\
& + \left\{ v_2 D_2 \frac{2}{R} \int_0^R \frac{1}{r} \cos(\gamma_m r) \operatorname{sen}(\gamma_n r) dr \right\} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \varphi_{2,n}^{(j-1)}(t) = 0
\end{aligned} \tag{4.27b}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \xi_{i,n}^{(j)}(t) \int_0^R \cos(\gamma_m r) \cos(\gamma_n r) dr \\
& + \varepsilon \frac{2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 \xi_{i,n}^{(j)}(t) \int_0^R \cos(\gamma_m r) \cos(\gamma_n r) dr \\
& + [-\beta_i \nu_1 \Sigma_{f1}] \frac{2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1,n}^{(j)}(t) \int_0^R \cos(\gamma_m r) \cos(\gamma_n r) dr \\
& + [-\beta_i \nu_2 \Sigma_{f2}] \frac{2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{2,n}^{(j)}(t) \int_0^R \cos(\gamma_m r) \cos(\gamma_n r) dr \\
& + \lambda_i \frac{2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{i,n}^{(j)}(t) \int_0^R \cos(\gamma_m r) \cos(\gamma_n r) dr \\
& + \left\{ \varepsilon \frac{2}{R} \int_0^R \frac{1}{r} \cos(\gamma_m r) \operatorname{sen}(\gamma_n r) dr \right\} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \xi_{i,n}^{(j-1)}(t) = 0
\end{aligned} \tag{4.27c}$$

e similarmente ao caso anterior observa-se a ortogonalidade das autofunções e rearranjando os termos, é possível escrever o sistema de equações da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \varphi_{1,n}^{(j)}(t) + v_1 [D_1 \gamma_n^2 - (1 - \beta) + \Sigma_{a1}] \varphi_{1,n}^{(j)}(t) + [-v_1 (1 - \beta) \nu_2 \Sigma_{f2}] \varphi_{2,n}^{(j)}(t) \\
& + [-v_1 \lambda_i] \xi_{i,n}^{(j)}(t) + \left\{ v_1 D_1 \frac{2}{R} \gamma_n \int_0^R \frac{1}{r} \cos(\gamma_m r) \operatorname{sen}(\gamma_n r) dr \right\} \varphi_{1,n}^{(j-1)}(t) = 0
\end{aligned} \tag{4.28a}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \varphi_{2,n}^{(j)}(t) + [-v_2 \Sigma_{s12}] \varphi_{1,n}^{(j)}(t) + v_2 [D_2 \gamma_n^2 + \Sigma_{a2} + \Sigma_{s12}] \varphi_{2,n}^{(j)}(t) \\
& + \left\{ v_2 D_2 \frac{2}{R} \gamma_n \int_0^R \frac{1}{r} \cos(\gamma_m r) \operatorname{sen}(\gamma_n r) dr \right\} \varphi_{2,n}^{(j-1)}(t) = 0
\end{aligned} \tag{4.28b}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \xi_{i,n}^{(j)}(t) + [-\beta_i \nu_1 \Sigma_{f1}] \varphi_{1,n}^{(j)}(t) + [-\beta_i \nu_2 \Sigma_{f2}] \varphi_{2,n}^{(j)}(t) \\
& + [\varepsilon \gamma_n^2 + \lambda_i] \xi_{i,n}^{(j)}(t) + \left\{ \varepsilon \frac{2}{R} \gamma_n \int_0^R \cos(\gamma_m r) \operatorname{sen}(\gamma_n r) dr \right\} \xi_{i,n}^{(j-1)}(t) = 0
\end{aligned} \tag{4.28c}$$

Ao truncar a número de elementos da série pode-se representa-la da seguinte forma

matricial

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi_{1,n}^{(j)}(t) \\ \varphi_{2,n}^{(j)}(t) \\ \xi_{1,n}^{(j)}(t) \\ \vdots \\ \xi_{6,n}^{(j)}(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}^{(j)}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C}_1 & \dots & \mathbf{C}_6 \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} & \mathbf{F}_1 & \dots & \mathbf{F}_6 \\ \mathbf{G}_1 & \mathbf{H}_1 & \mathbf{J}_1 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}_6 & \mathbf{H}_6 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{J}_6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} \varphi_{1,n}^{(j)}(t) \\ \varphi_{2,n}^{(j)}(t) \\ \xi_{1,n}^{(j)}(t) \\ \vdots \\ \xi_{6,n}^{(j)}(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_1 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{T}_6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \begin{bmatrix} \varphi_{1,n}^{(j-1)}(t) \\ \varphi_{2,n}^{(j-1)}(t) \\ \xi_{1,n}^{(j-1)}(t) \\ \vdots \\ \xi_{6,n}^{(j-1)}(t) \end{bmatrix} = \vec{0}$$

Onde os componentes, \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C}_i , \mathbf{D} , \mathbf{E} , \mathbf{F}_i , \mathbf{G}_i , \mathbf{H}_i , \mathbf{J}_i são matrizes diagonais:

$$\mathbf{A} = \{a_{m,n}\}, \text{ onde } a_{m,n} = v_1 [D_1 \gamma_n^2 + \Sigma_{a1} - (1 - \beta) \nu_1 \Sigma_{f1}]$$

$$\mathbf{B} = \{b_{m,n}\}, \text{ onde } b_{m,n} = [-v_1 (1 - \beta) \nu_2 \Sigma_{f2}]$$

$$\mathbf{C}_i = \{c_{m,n}^i\}, \text{ onde } c_{m,n}^i = [-v_1 \lambda_i], \text{ para } i = 1 \dots 6$$

$$\mathbf{D} = \{d_{m,n}\}, \text{ onde } d_{m,n} = [-v_2 \Sigma_{s12}]$$

$$\mathbf{E} = \{e_{m,n}\}, \text{ onde } e_{m,n} = v_2 [D_2 \gamma_n^2 + (\Sigma_{a2} + \Sigma_{s12})]$$

$$\mathbf{F}_i = \{f_{m,n}^i\}, \text{ onde } f_{m,n}^i = 0$$

$$\mathbf{G}_i = \{g_{m,n}^i\}, \text{ onde } g_{m,n}^i = [-\beta_i \nu_1 \Sigma_{f1}], \text{ para } i = 1 \dots 6$$

$$\mathbf{H}_i = \{h_{m,n}^i\}, \text{ onde } h_{m,n}^i = [-\beta_i \nu_2 \Sigma_{f2}], \text{ para } i = 1 \dots 6$$

$$\mathbf{J}_i = \{j_{m,n}^i\}, \text{ onde } j_{m,n}^i = [\varepsilon \gamma_n^2 + \lambda_i], \text{ para } i = 1 \dots 6$$

E, de maneira oposta, os componentes \mathbf{S}_1 , \mathbf{S}_2 , \mathbf{T}_i são matrizes densas:

$$\mathbf{S}_1 = \{s_{m,n}^1\}, \text{ onde } s_{m,n}^1 = \left\{ v_1 D_1 \frac{2}{R} \gamma_n \int_0^R \frac{1}{r} \cos(\gamma_m r) \sin(\gamma_n r) dr \right\}$$

$$\mathbf{S}_2 = \{s_{m,n}^2\}, \text{ onde } s_{m,n}^2 = \left\{ v_2 D_2 \frac{2}{R} \gamma_n \int_0^R \frac{1}{r} \cos(\gamma_m r) \sin(\gamma_n r) dr \right\}$$

$$\mathbf{T}_i = \{t_{m,n}^i\}, \text{ onde } t_{m,n}^i = \left\{ \varepsilon \frac{2}{R} \gamma_n \int_0^R \frac{1}{r} \cos(\gamma_m r) \sin(\gamma_n r) dr \right\}$$

ou de forma simplificada

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X}^{(j)}(t) + \mathbf{M} \mathbf{X}^{(j)}(t) + \mathbf{N} \mathbf{X}^{(j-1)}(t) = 0 \quad \text{para } j \geq 1 \quad (4.29)$$

A Equação 4.29 tem conhecida solução dada

$$\mathbf{X}^{(j)}(t) = e^{-\mathbf{M}t} \mathbf{X}(0) - \int_0^t e^{-\mathbf{M}(t-\tau)} \mathbf{N} \mathbf{X}^{(j-1)}(\tau) d\tau \quad (4.30)$$

onde o vetor $\mathbf{X}(0)$ é

$$\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} \varphi_{1,n}^{(j)}(0) \\ \varphi_{2,n}^{(j)}(0) \\ \xi_{1,n}^{(j)}(0) \\ \vdots \\ \xi_{6,n}^{(j)}(0) \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

e seus componentes para $j = 0$, são

$$\begin{aligned} \varphi_{1,n}^{(0)}(0) &= \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L \phi_{1,0}(0) \cos(\gamma_n r) dr \\ \varphi_{2,n}^{(0)}(0) &= \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L \phi_{2,0}(x) \cos(\gamma_n r) dr \\ \xi_{i,n}^{(0)} &= \frac{\beta_i}{\varepsilon \gamma_n^2 + \lambda_i} \left[\nu_1 \Sigma_{f1} \varphi_{1,n}^{(0)}(0) + \nu_2 \Sigma_{f2} \varphi_{2,n}^{(0)}(0) \right] \end{aligned} \quad (4.32)$$

Sendo os autovalores da matriz \mathbf{M} distintos, pode-se expressar a Equação 4.30 como

$$\mathbf{X}^{(j)}(t) = \mathbf{V} e^{-\Xi t} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}(0) - \int_0^t \mathbf{V} e^{-\Xi(t-\tau)} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{N} \mathbf{X}^{(j-1)}(\tau) d\tau \quad \text{para } j \geq 1 \quad (4.33)$$

onde \mathbf{V} é a matriz dos autovetores de \mathbf{M} , \mathbf{V}^{-1} é a sua inversa e Ξ é a matriz diagonal dos autovalores de \mathbf{M} .

Portanto, pode-se resumir a Equação 4.33 - com mais clareza - da seguinte forma

$$\mathbf{X}^{(j)}(t) = \begin{cases} \mathbf{V} e^{-\Xi t} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}(0) & \text{para } j = 0 \\ - \int_0^t \mathbf{V} e^{-\Xi(t-\tau)} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{N} \mathbf{X}^{(j-1)}(\tau) d\tau & \text{para } j \geq 1 \end{cases}$$

de tal maneira que

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{X}^{(j)}(t)$$

Resultados Numéricos

Semelhantemente aos resultados numéricos apresentados para o caso anterior, a solução numérica da Equação 4.33 consiste em particionar o intervalo, $[0, t]$, de integração

em p partições para que de maneira prática o integrando possa ser aproximado através do uso de polinômios interpoladores de *Hermite* possibilitando, portanto, uma integração analítica. Devido a diferença em relação às ordens de magnitudes, das partes reais, dos autovalores da matriz \mathbf{M} considerou-se factível, novamente, apresentar resultados para um intervalo máximo de $t = 10^{-5}$ segundos.

No caso de um reator cilíndrico unidimensional, de raio $R = 10$, onde há dois grupos energéticos e seis grupos de nêutrons atrasados em um meio homogêneo a condição de contorno é de fluxo nulo e ressalta-se que devido a introdução do termo difusivo fictício assumem-se condições de contorno nulas para a concentração de precursores de nêutrons atrasados. Para as condições iniciais considerou-se que $\phi_{1,0}(r)$ e $\phi_{2,0}(r)$ como as soluções da equação estacionária de difusão de nêutrons, dada pela Equações A.16 e 4.32 portanto,

$$\begin{aligned}\varphi_{1,n}^{(0)}(0) &= A_1 \sqrt{\frac{2}{R}} \int_0^R J_0\left(\frac{\alpha_1}{R}x\right) \cos(\gamma_n x) dx \\ \varphi_{2,n}^{(0)}(0) &= A_2 \sqrt{\frac{2}{R}} \int_0^R J_0\left(\frac{\alpha_1}{R}x\right) \cos(\gamma_n x) dx \\ \xi_{i,n}^{(0)}(0) &= \frac{\beta_i}{\varepsilon\gamma_n^2 + \lambda_i} [\nu_1 \Sigma_{f1} \varphi_{1,n}^{(0)}(0) + \nu_2 \Sigma_{f2} \varphi_{2,n}^{(0)}(0)]\end{aligned}$$

onde as integrais foram avaliadas numericamente através de polinômios de *Hermite*.

As Tabelas 4.6 e 4.7 referem-se, respectivamente, aos parâmetros nucleares considerando dois grupos energéticos e as constantes de decaimento e frações de nêutrons atrasados para cada grupo.

Tabela 4.6 – Parâmetros nucleares para dois grupos energéticos [ANL-7416, 1972; Sood, 2003].

Parâmetro	Grupo 1	Grupo 2
D cm	1.0	0.5
v cm/s	10^7	3×10^5
$\Sigma_{ag} \text{ cm}^{-1}$	0.02	0.08
$\Sigma_{s12} [\text{cm}^{-1}]$	0.01	-
$\Sigma_{fg} \text{ cm}^{-1}$	0.002	0.0396
ν_g	2.5	2.5

Tabela 4.7 – Constantes de decaimento e frações de nêutrons atrasados para cada grupo, retiradas do *BSS-6* [ANL-7416, 1972].

i	β_i	$\lambda_i \text{ s}^{-1}$
1	0.00022	0.0124
2	0.00164	0.0305
3	0.00147	0.111
4	0.00296	0.31
5	0.00086	1.14
6	0.00032	3.01

O objetivo central deste trabalho concentra-se em validar o método hierárquico proposto e conforme foi realizado para o caso monoenergético aqui será repetido para o caso com dois grupos de energia. Nas Tabelas 4.8 e 4.9 são apresentados os valores obtidos do fluxo rápido, térmico e da concentração precursores de nêutrons atrasados para um ponto fixo do domínio em função do número de partições (p) - $10 \leq p \leq 400$ - mantendo fixos, também, o número de recursões (j) e os termos de truncamento da série (N). Observa-se que para $\hat{\phi}_1$ há uma precisão de dígitos significativos, $\hat{\phi}_2$ tem precisão de 4 dígitos significativos e para \hat{C}_1 tem uma precisão de 4 dígitos significativos (onde os valores, considerados de referência obtidos através de procedimento semelhante apresentado no *Capítulo 3* para t e ε equivalentes).

Tabela 4.8 – Convergência dos fluxos escalares - com coeficientes A_1 e A_2 , respectivamente, escalados em função da potência do reator - $\hat{\phi}_1$, rápido, e ϕ_2 , térmico, em relação ao número de partições do intervalo temporal (p) onde são fixados $n = 10$, $j = 50$ e $\varepsilon = 10^{-15}$.

p	$\hat{\phi}_1(5, 10^{-5}) \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$	$\hat{\phi}_2(5, 10^{-5}) \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$
10	$5.330966907945068 \times 10^{25}$	$2.984733606385333 \times 10^{22}$
50	0.694746712618655	0.488428616859740
100	0.695052886180759	0.488430853607675
150	0.695132991043912	0.488431389396341
200	0.695172146377033	0.488431664806708
250	0.695194488716247	0.488431824260399
300	0.695207710061853	0.488431919089059
350	0.695215715429349	0.488431976693719
400	0.695220690563919	0.488432012802843
Valores de referência	0.695303834654180	0.488471776184071

Tabela 4.9 – Convergência da concentração do primeiro grupo de precursores de nêutrons atrasados, em relação ao número de partições do intervalo temporal (p) onde são fixados

$$n = 10, j = 50 \text{ e } \varepsilon = 10^{-15}.$$

p	$\hat{C}_1(5, 10^{-5})_{cm^{-3}}$
10	$2.474739513959491 \times 10^{13}$
50	0.001236027055602
100	0.001236027055603
150	0.001236027055603
Valor de referência	0.001236128401913

Nas Tabelas 4.10 e 4.11 está fixado o número de truncamento da série em $N = 10$ e o número de partições do intervalo temporal em $p = 100$, variando o número de recursões (j) entre 10 e 40. Na Tabela 4.10 apura-se uma precisão de 3 dígitos significativos para o fluxo rápido - $\hat{\phi}_1$ - e de 4 dígitos significativos para o fluxo térmico - $\hat{\phi}_2$. A concentração de precursores de nêutrons atrasados \hat{C}_1 - apresentados na Tabela 4.11 - têm precisão de 4 dígitos significativos.

Tabela 4.10 – Convergência dos fluxos escalares - com coeficientes A_1 e A_2 , respectivamente, escalados em função da potência do reator - $\hat{\phi}_1$, rápido, e ϕ_2 , térmico, em relação ao número de recursões (j) onde são fixados $n = 10, p = 400$ e $\varepsilon = 10^{-15}$.

j	$\hat{\phi}_1(5, 10^{-5})_{cm^{-2}s^{-1}}$	$\hat{\phi}_2(5, 10^{-5})_{cm^{-2}s^{-1}}$
10	0.696798180298227	0.488444915157374
15	0.695246117139750	0.488432167652222
20	0.695220429877123	0.488432011397506
25	0.695220684675042	0.488432012780245
30	0.695220690573973	0.488432012802916
35	0.695220690564377	0.488432012802866
40	0.695220690563992	0.488432012802865
Valores de referência	0.695303834654180	0.488471776184071

Tabela 4.11 – Convergência da concentração de precursores de nêutrons atrasados \hat{C}_1 , em relação ao número de recursões (j) onde são fixados $n = 10, p = 400$ e $\varepsilon = 10^{-15}$.

j	$\hat{C}_1(5, 10^{-5})_{cm^{-3}}$
10	0.001236027055609
15	0.001236027055604
20	0.001236027055604
Valor de referência	0.001236128401913

As Tabelas 4.12 e 4.13 comprimem os resultados numéricos do fluxo rápido, térmico e da concentração de precursores de nêutrons atrasados para diversos valores do intervalo $[0, R]$, onde $R = 10 \text{ cm}$, e tempos $t = 10^{-5} \text{ s}$ e $t = 1.5 \times 10^{-5} \text{ s}$, respectivamente. Os gráficos apresentados nas Figuras 4.4 e 4.5 enfatizam o decaimento do fluxo ao longo do tempo, devido a subcriticalidade do reator ($k_{eff} < 1$). É importante apontar que devido a diferença de valores da concentração de precursores de nêutrons atrasados entre $t = 10^{-5} \text{ [s]}$ e $t = 1.5 \times 10^{-5} \text{ [s]}$ ser da ordem de 10^{-11} , mais especificamente para $r = 5 \text{ cm}$, a visualização gráfica, simultânea, dos dos dois tempos escolhidos fica comprometida. No entanto, comprometido com a eficácia do procedimento hierárquico proposto, optou-se por apresentar na Figura 4.6 o gráfico da concentração de precursores de nêutrons atrasados, ao longo do intervalo $[0, 10]$, somente para $t = 10^{-5} \text{ s}$.

Tabela 4.12 – Valores do fluxo escalar rápido, térmico e do primeiro grupo de concentração de precursores de nêutrons atrasados - em coordenadas cilíndricas, com os coeficientes das condições iniciais, A_1 e A_2 escalados em função da potência do reator - para alguns pontos do intervalo $[0, 10]$ onde $t = 10^{-5} \text{ s}$ e fixados $n = 10$, $j = 50$, $p = 400$ e $\varepsilon = 10^{-15}$.

$r \text{ cm}$	$\hat{\phi}_1(r, 10^{-5}) \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$	$\hat{\phi}_2(r, 10^{-5}) \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$	$\hat{C}_1(r, 10^{-5}) \text{ cm}^{-3}$
0.0	1.037748112927019	0.729097854195901	0.001845234880655
1.0	1.022781937317139	0.718582402201827	0.001818505769490
2.0	0.978702131595959	0.687600452182304	0.001740062251590
3.0	0.907061960588377	0.637269752584622	0.001612682139161
4.0	0.811345305755330	0.570010209153662	0.001442473879023
5.0	0.695220690563919	0.488432012802843	0.001236027055604
6.0	0.564093504676118	0.396295053708737	0.001002868284091
7.0	0.422919257819256	0.297125773250644	0.000751903444980
8.0	0.278228863943728	0.195457348792541	0.000494624497195
9.0	0.135051381674731	0.094884938597015	0.000240100893271
10.0	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000

Tabela 4.13 – Valores do fluxo escalar rápido, térmico e do primeiro grupo de concentração de precursores de nêutrons atrasados - em coordenadas cilíndricas, com os coeficientes das condições iniciais, A_1 e A_2 escalados - para alguns pontos do intervalo

$[0, 10]$ onde $t = 10^{-5}$ s e fixados $n = 10$, $j = 50$, $p = 400$ e $\varepsilon = 10^{-15}$.

r cm	$\hat{\phi}_1(r, 1.5 \times 10^{-5})$ $cm^{-2}s^{-1}$	$\hat{\phi}_2(r, 1.5 \times 10^{-5})$ $cm^{-2}s^{-1}$	$\hat{C}_1(r, 1.5 \times 10^{-5})$ cm^{-3}
0.0	0.888711911892520	0.623155838643652	0.001845234845017
1.0	0.875892778266334	0.614169062469693	0.001818505734373
2.0	0.838162361028231	0.587690492946924	0.001740062217990
3.0	0.776794908253428	0.544674435087398	0.001612682108021
4.0	0.694844647908205	0.487188635598446	0.001442473851170
5.0	0.595373058358301	0.417464113940052	0.001236027031737
6.0	0.483104727724696	0.338714750691625	0.001002868264726
7.0	0.362164068851997	0.253954773899862	0.000751903430462
8.0	0.238304551663081	0.167058612759699	0.000494624487645
9.0	0.115631328210399	0.081098889164062	0.000240100888636
10.0	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000

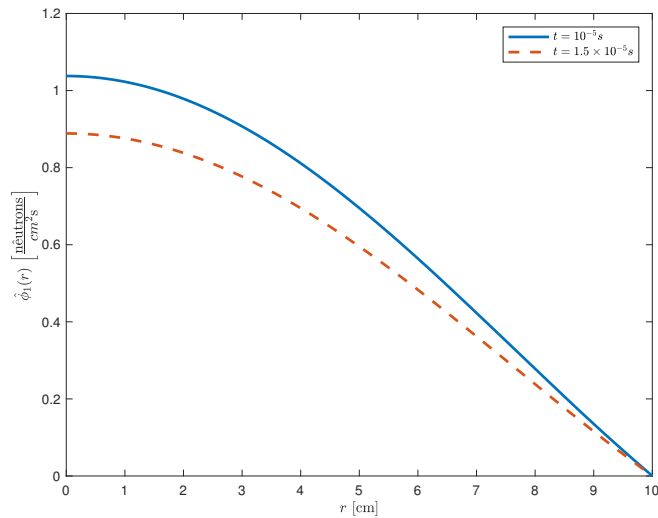


Figura 4.4 – Fluxo escalar $\hat{\phi}_1(r, t)$ - rápido - com $n = 10$, $j = 50$, $p = 400$ e $\varepsilon = 10^{-15}$.

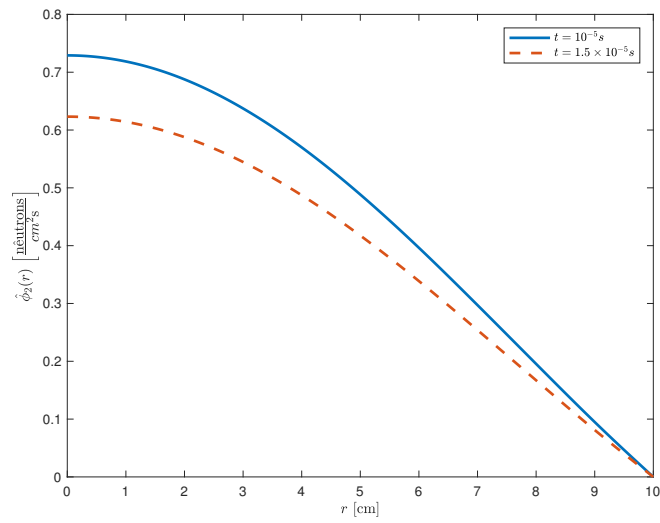


Figura 4.5 – Fluxo escalar $\hat{\phi}_2(r, t)$ - térmico - com $n = 10$, $j = 50$, $p = 400$ e $\varepsilon = 10^{-15}$.

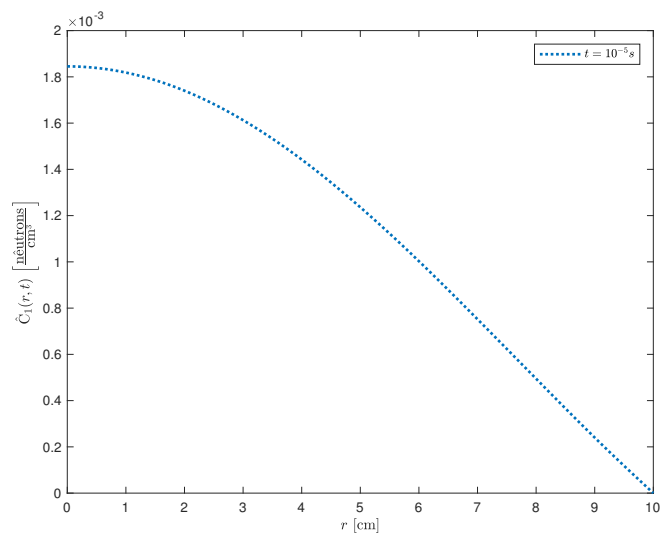


Figura 4.6 – Concentração de precursores $\hat{C}_1(r, t)$ com $n = 10$, $j = 50$, $p = 400$ e $\varepsilon = 10^{-15}$.

5 CONCLUSÕES E PROBLEMAS EM ABERTO

Os resultados obtidos pelo procedimento hierárquico proposto nesta dissertação apresentam uma razoável concordância com aqueles encontrados na literatura [Oliveira, 2013]. Apesar de a base funcional serem funções Bessel na abordagem espectral, quando inicia-se a partir da solução cartesiana, com funções trigonométricas, e fazendo uso da prévia solução recursiva como fonte é possível portanto, construir a solução em termos de uma base trigonométrica. Essa característica é útil ao construir a solução para outras geometrias, bastando apenas fazer alterações no termo de curvatura - não sendo necessário passar por todo processo de criação de um novo e complicado método. As restrições encontradas no procedimento hierárquico são, claramente, o intervalo temporal de aplicação, o qual será trabalhado através de abordagens analíticas e numéricas ambas priorizando o núcleo da integral de convolução. Além das supracitadas abordagens, a solução será estendida para outras dimensões e geometrias

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Amaldi E, Fermi E (1936) Sull'Assorbimento dei Neutroni Lenti. – III. *Ricerca Scientifica* vol. 7, p. 56–59.

ANL-7416, 1972. **Argonne Code Center: Benchmark Problem Book**, Argonne, Illinois.

Barichello, L. B. and Vilhena, M. T., 1993. A General Approach to One Group One Dimensional Transport Equation, **Kerntechnik**, vol. 58, p. 182-184.

Becker, M., 1968, A generalized formulation of point nuclear reactor kinetics equations. **Nuclear Science and Engineering**, vol. 31, p. 458–463.

Case, K. M., Hoffman, R., and Packzek, G., 1953. **Introduction to the theory of neutron diffusion**. Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos.

Ceolin, C., Vilhena, M. T., Leite, S. B., and Petersen, C. Z., 2009. An Analytical Solution of the One-dimensional Neutron Diffusion Kinet Equation in Cartesian Geometry, **International Nuclear Atlantic Conference - INAC**.

Clark, M. and Hansen, K.,F., 1964. **Numerical methods of reactor analysis**. Academic, New York.

Corno, S. E., Dulla, S., Picca, P., and Ravetto, P., 2008. Analytical Approach to the Neutron Kinetics of the Non-homogeneous Reactor, **Progress in Nuclear Energy**, vol. 50, p. 847-865.

Cotta, R., 1993. **Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow**. CRC Press, Florida.

Cotta, R., and Mikhaylov, M., 1997. **Heat Conduction Lumped Analysis, Integral Transform, Symbolic Computation**. John Wiley & Sons, Baffins Lane, Chinchester, England.

Dorning, J. J., 1980. Point kinetics with omega-mode shape functions via multiple-time-scale asymptotics. **American Nuclear Society**, vol 34, p. 281–283.

Dulla, S., Mund, E., and Ravetto, P., 2008. The Quasi-Static Method Revisited, **Progress in Nuclear Energy**, vol. 50, p. 908-920.

Dulla, S., Ravetto, P., Picca, P., and Tomatis, D., 2007. Analytical benchmarks for the kinetics of accelerator-driven systems, **Joint International Topical Meeting on Mathematics & Computation and Supercomputing in Nuclear Applications**.

Fermi, E., 1942. **Problem of time dependence of the reaction rate: effect of delayed neutrons emission**, CP-291, Chicago University.

Fernandes, J. C. L., 2011. **Solução analítica da equação da difusão de nêutrons multi-grupo em cilindro infinito pela técnica da transformada de Hankel**, Dissertação de Mestrado, UFRGS.

Fernandes, J. C. L., Vilherna, M. T., Bodmann, B. E. J., 2013. On a comparative analysis of the solutions of the kinetic neutron diffusion equation by the Hankel transform formalism and the spectral method, **Progress in Nuclear Energy**, vol. 63, p. 71-76.

Gonçalves, G. A., Vilhena, M. T., Bodmann, B., E., J., 2010. Heuristic Geometric "*Eigenvalue Universaly* in a one-dimensional neutron transport problem with anisotropic scatterin", **Kertechnik**, **75**, p. 50-52.

Gyftopoulos, E. P., 1964. **General reactor dynamics**.The technology of nuclear reactor safety, vol I. MIT Press, Cambridge, MA, p. 175–204.

Henry, A. F., 1955. **Computation of parameters appearing in the reactor kinetics equations**, WAPD-124, Dezembro 1955, Westinghouse Electric Corp. Bettis Plant, Pittsburgh.

Henry, A. F., 1958. Application of reactor kinetics to the analysis of experiments. **Nuclear Science and Engineering**, vol. 3, p. 52–70.

Lawrence, R. D., 1986. Progress in nodal methods for the solution of the neutron diffusion and transport equations. **Progress in Nuclear Energy** vol. 17, p. 271–301.

Lima, Z. R., Silva, F. C., and Alvim, A. C. M., 2009. A modal multidimensional kinetics method using pseudo-harmonics, **Annals of Nuclear Energy**, vol. 36, p. 752-759.

Sood, A., Forster, R. A. and Parsons, D. K., 2003. Analytical Benchmark Test Set for Criticality Code Verification, **Progress in Nuclear Energy**, vol. 42, p. 55-106.

Oliveira, F. L., Maiorino, J. R., and Santos, R. S., 2007. The analytical benchmark solution of spatial diffusion kinetics in source driven systems for homogeneous media, **International Nuclear Atlantic Conference - INAC**.

Oliveira, F. R., 2013. **Solução Analítica da Equação de Multigrupo de Cinética de Nêutrons em Geometria Cartesiana e Cilíndrica Unidimensionais**, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada, UFRGS, Porto Alegre.

Ott, K. O. and Madell, J. T., 1966. Quasistatic treatment of spatial phenomenon in reactor dynamics, **Nuclear Science and Engineering**, vol. 26.

Özisik, M., 1974. **Heat Conduction**. John Wiley & Sons, New York, 2nd Edition.

Segré, E., (Chairman of the Editorial Board) (1962) Enrico Fermi – Collected

Papers, vol I, Italy 1921–1938. *The University of Chicago Press*, Chicago, IL.

Stacey, W. M., 1967. **Modal Approximations: Theory and an Application to Reactor Physics**. M.I.T. Press, Massachussets.

Sutton, T. M. and Aviles, B. N., 1996. Diffusion theory methods for spatial kinetics calculations, **Progress in Nuclear Energy**, vol. 30, p. 119-182.

Ussachoff, L., N., 1955. Equation for the importance of neutrons, kinetics and the theory of perturbations. **Proceedings international conference on peaceful uses of atomic energy**, 1955, P/656, 5: p. 503–510. *Columbia University Press*, New York.

Vilhena, M. T., Segatto, C. F. and Barrichello, L. B., 1995. A particular solution for the Sn radiative transfer problems, **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, vol. 53, No. 4, p. 467-469.

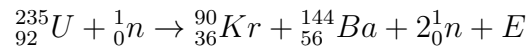
Wigner, E., P., 1942. **On Variations of the power output in a running pile**, CP-351, Chicago University.

Wortmann, S., 2003. **Formulação Semi-analítica para a Equação de Transformada Resultante da Aplicação da GITT em Problemas Difusivos-Advectivos**, Tese de doutorado, Programa de pós-graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS, Porto Alegre.

Yasinsky, J.B. e Henry, A.F., 1965. **Some numerical experiments concerning space-time reactor kinetics behavior**. *Nuclear Science Engineering*, vol. 22, p. 171-181.

APÊNDICE A – Solução da equação de difusão de nêutrons estacionária e homogênea

Uma típica reação de fissão no U^{235} induzida por nêutrons térmicos é



fazendo o balanço de massas obtêm-se que $E = 0.2146 u$, vide que $1 u = 931.141 MeV$ portanto $E \approx 200 MeV$. A equivalência em *joules*, $200 MeV = 3.2043 \times 10^{-11} J kg \cdot \frac{m^2}{s^2}$.

Tabela A.1 – Distribuição da energia de fissão com fragmentos de cripton e bário [Murray, 2004]

	MeV
Energia cinética do fragmento da fissão	166
Nêutrons	5
Raios gama imediatos	7
Raios gama dos produtos da fissão	7
Partículas beta	5
Neutrinos	10
Total	200

A.1 Um grupo de energia

A.1.1 Geometria Cartesiana

A equação de difusão de nêutrons estacionária e homogênea em coordenadas cartesianas é dada por Lamarsh, 2001, e Duderstadt, 1976.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x) + B^2 \phi(x) = 0 \quad (\text{A.1})$$

sendo B um parâmetro arbitrário, por enquanto. A Equação A.1 tem solução geral dada na seguinte forma

$$\phi(x) = A \text{sen}(Bx) + C \text{cos}(Bx) \quad (\text{A.2})$$

e aplicando as seguintes condições de contorno

$$\phi(0) = \phi(L) = 0$$

obtêm-se

$$\phi(x) = A \text{sen}(Bx)$$

tal que

$$B = B_n = \frac{n\pi}{L} \quad n = 1, 2, \dots, n$$

é um autovalor. Sabendo que o reator é crítico têm-se que o fluxo assume a forma estacionária da autofunção fundamental, $n = 1$,

$$\phi(x) = A \text{sen}\left(\frac{\pi}{L}x\right) \quad (\text{A.3})$$

A raiz quadrada do autovalor fundamental é chamado de *buckling* do reator - $B_1^2 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2$. O coeficiente A na equação A.3 não foi obtido através da análise anterior pois, a Equação A.1 é homogênea e ϕ multiplicado por qualquer constante continua solução da equação. A razão pela qual o valor de A ainda não foi estabelecido deve-se ao fato de que a magnitude do fluxo em um reator é determinado pela potência a qual o sistema está operando e não por suas propriedades materiais [Lamarsh,2001]. A potência de um reator é dado por

$$\begin{aligned} P &= E_R \Sigma_f \int_0^L \phi(x) dV \\ &= E_R \Sigma_f \int_0^L \phi(x) dx \\ &= A E_R \Sigma_f \int_0^L \text{sen}\left(\frac{\pi}{L}x\right) dx \\ &= A E_R \Sigma_f \left[-\cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) \right]_0^L \\ &= 2A E_R \Sigma_f \frac{L}{\pi} \end{aligned}$$

onde E_R é a energia de cada fissão. Portanto o coeficiente A pode ser escrito como

$$A = \frac{\pi P}{2E_R \Sigma_f L} \quad (\text{A.4})$$

Substituindo a Equação A.4 em A.3 obtêm-se

$$\phi(x) = \frac{\pi P}{2E_R \Sigma_f L} \text{sen}\left(\frac{\pi}{L}x\right) \left[\frac{\text{nêutrons}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s}} \right] \quad (\text{A.5})$$

A.1.2 Geometria Cilíndrica

A equação de difusão de nêutrons estacionária e homogênea em coordenadas cilíndricas é dada por Lamarsh, 2001, e Duderstadt, 1976.

$$\frac{d^2}{dr^2}\phi(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\phi(r) + B^2\phi(r) = 0 \quad (\text{A.6})$$

A Equação A.6 é um caso específico da equação de *Bessel*,

$$\frac{d^2}{dr^2}\phi(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\phi(r) + \left(B^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)\phi(r) = 0 \quad (\text{A.7})$$

onde m é uma constante e B um parâmetro arbitrário, por enquanto. Verificando-se que em A.7 $m=0$, têm-se a solução geral dada na seguinte forma

$$\phi(r) = AJ_0(Br) + CY_0(Br) \quad (\text{A.8})$$

onde A e C são, novamente, constantes. Como $Y_0 \rightarrow -\infty$ quando $r \rightarrow 0$ e $J_0 = 1$ quando $r = 0$ cm, como o fluxo escalar dever ser finito conseqüentemente o coeficiente C deve ser tomado como nulo. Portanto, a Equação A.8 torna-se

$$\phi(r) = AJ_0(Br)$$

A condição de contorno, $\phi(R) = 0$ agora imposta, torna-se

$$\phi(R) = AJ_0(BR)$$

onde o autovalor B tem a seguinte forma

$$B = B_n = \frac{\alpha_n}{R}$$

e α_n são as raízes da função de bessel de primeira espécie de ordem zero. Novamente, analisando-se o fato de que o fluxo não pode assumir valores negativos e de que em um reator crítico somente o menor autovalor é de suma importância têm-se que o *buckling* do reator é

$$B_1^2 = \left(\frac{\alpha_1}{R}\right)^2$$

e comprometendo-se com a precisão, $\alpha_1 = 2.404825557695773$.

Portanto, o fluxo escalar de um grupo de nêutrons é

$$\phi(r) = AJ_0\left(\frac{\alpha_1 r}{R}\right) \quad (\text{A.9})$$

Novamente, segue o fato de que há a necessidade de determinar o coeficiente A . Para um cilindro infinito $dV = 2\pi r dr$ portanto, a potência por unidade de comprimento do cilindro é

$$\begin{aligned} P &= E_R \Sigma_f \int_0^R \phi(r) dV \\ &= 2\pi E_R \Sigma_f \int_0^R \phi(r) r dr \\ &= 2\pi E_R \Sigma_f A \int_0^R J_0\left(\frac{\alpha_1 r}{R}\right) r dr \\ &= 2\pi \frac{J_1(\alpha_1)}{\alpha_1} E_R \Sigma_f R^2 A \end{aligned}$$

assim,

$$A = \frac{\alpha_1 P}{2\pi J_1(\alpha_1) E_R \Sigma_f R^2} \quad (\text{A.10})$$

onde

$$\kappa = \frac{\alpha_1}{2\pi J_1(\alpha_1)} = 0.737246884130885$$

Portanto, a Equação A.9 pode ser escrita como

$$\phi(r) = \frac{\kappa P}{E_R \Sigma_f R^2} J_0\left(\frac{\alpha_1 r}{R}\right) \left[\frac{\text{nêutrons}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s}} \right] \quad (\text{A.11})$$

A.2 Dois grupos de energia

A equação estacionária de difusão nêutrons com dois grupos de energia é pode ser escrita como

$$\begin{aligned} 0 &= D_1 \nabla^2 \phi_1(x) + [(1 - \beta)\nu_1 \Sigma_{f1} - \Sigma_a] \phi_1(x) + [(1 - \beta)\nu_2 \Sigma_{f2} + \Sigma_{s21}] \phi_2(x) \\ 0 &= D_2 \nabla^2 \phi_2(x) - \Sigma_{a2} \phi_2(x) + \Sigma_{s12} \phi_1(x) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Pode-se tentar encontrar uma solução para os fluxos a qual é separável entre um termo espacial e um termo de energia, i.e, onde o vetor

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{bmatrix}$$

pode ser escrito como uma amplitude, dependente do grupo de energia, vezes o formato do fluxo, independente do grupo de energia. Se a solução satisfaz o sistema A.12 então é o suficiente para considerá-la uma solução satisfatória:

$$\begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \Psi(x) \\ B_2 \Psi_2(x) \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

Substituindo a primeira equação do sistema A.12 na Equação A.13 têm-se

$$0 = D_1 \nabla^2 \Psi(\vec{r}) + (1 - \beta)[B_1 \nu_1 \Sigma_{f1} - B_1 \Sigma_a + B_2 \nu_2 \Sigma_{f2} + B_2 \Sigma_{s21}] \Psi(\vec{r})$$

e dividindo por $\Psi(\vec{r})$

$$\frac{\nabla^2 \Psi(\vec{r})}{\Psi(\vec{r})} = - \frac{(1 - \beta)[B_1 \nu_1 \Sigma_{f1} - B_1 \Sigma_a + B_2 \nu_2 \Sigma_{f2} + B_2 \Sigma_{s21}]}{B_1 D_1} \quad (\text{A.14})$$

O lado direito da equação (A.14) é um valor, independente da variável espacial, o qual pode ser escrito como $-B^2$. A Equação A.14 é análoga a Equação A.3, i.e., B^2 é um *buckling* geométrico independente do grupo de energia e aplicável tanto para o grupo rápido quanto para o térmico:

$$\nabla^2 \phi_g(\vec{r}) = -B^2 \phi_g(\vec{r}) \quad g = 1, 2.$$

Portanto, por ser exatamente a mesma solução encontrada para o caso com um único grupo, a distribuição do fluxo é dado exatamente pelo mesmo produto de senos para em coordenadas cartesianas e de funções de *Bessel* para coordenadas cilíndricas

Para a abordagem de dois grupos em coordenadas cartesianas

$$\begin{aligned} \phi_g(x) &= \frac{\pi P}{2E_R \Sigma_{fg} L} \text{sen} \left(\frac{\pi}{L} x \right) \\ &= A_g \text{sen} \left(\frac{\pi}{L} x \right) \quad g = 1, 2. \quad \left[\frac{\text{nêutrons}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s}} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Para a abordagem de dois grupos em coordenadas cilíndricas onde os coeficientes A_g são dados pela constante A.10

$$\begin{aligned}\phi_g(x) &= \frac{\alpha_1 P}{2\pi J_1(\alpha_1) E_R \Sigma_{fg} R^2} J_0\left(\frac{\alpha_1}{R} x\right) \\ &= A_g J_0\left(\frac{\alpha_1}{R} x\right) \quad g = 1, 2. \quad \left[\frac{\text{nêutrons}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s}} \right]\end{aligned}\tag{A.16}$$

ANEXO I – Tabelas complementares

I.1 Coordenadas Cartesianas

Um grupo de energia e um grupo de precursores de nêutrons atrasados

Tabela I.1 – Valores do fluxo escalar e da concentração de precursores de nêutrons atrasados - em coordenadas cartesianas, com o coeficiente da condição inicial normalizado - para alguns pontos do intervalo $[0, 20]$, $t = 5$ [s] e $\varepsilon = 10^{-15}$.

x [cm]	$\hat{\phi}(x, 5)$ [$cm^{-2}s^{-1}$]	$\hat{C}(x, 5)$ [cm^{-3}]
0.0	0.0000000000000000	0.0000000000000000
1.0	0.003584614199394	0.000306107157797
2.0	0.007080963300546	0.000604676941458
3.0	0.010402955584868	0.000888357572012
4.0	0.013468792577262	0.001150163890854
5.0	0.016202983196043	0.001383649357527
6.0	0.018538202593919	0.001583064784950
7.0	0.020416949919166	0.001743499903476
8.0	0.021792964177431	0.001861004268034
9.0	0.022632363330947	0.001932684531194
10.0	0.022914478586747	0.001956775686984
11.0	0.022632363330947	0.001932684531194
12.0	0.021792964177431	0.001861004268034
13.0	0.020416949919166	0.001743499903476
14.0	0.018538202593919	0.001583064784950
15.0	0.016202983196043	0.001383649357527
16.0	0.013468792577262	0.001150163890854
17.0	0.010402955584868	0.000888357572012
18.0	0.007080963300546	0.000604676941458
19.0	0.003584614199394	0.000306107157797
20.0	0.0000000000000000	0.0000000000000000

Tabela I.2 – Valores do fluxo escalar e da concentração de precursores de nêutrons atrasados - em coordenadas cartesianas, com o coeficiente da condição inicial normalizado - para alguns pontos do intervalo $[0, 20]$, $t = 10$ [s] e $\varepsilon = 10^{-15}$.

x [cm]	$\hat{\phi}(x, 10)$ [$cm^{-2}s^{-1}$]	$\hat{C}(x, 10)$ [cm^{-3}]
0.0	0.000000000000000	0.000000000000000
0.5	0.001242384156146	0.000106093058214
1.0	0.002477108600835	0.000211532017444
1.5	0.003696560847277	0.000315666811445
2.0	0.004893222566865	0.000417855414584
2.5	0.006059715942166	0.000517467800141
3.0	0.007188849153624	0.000613889824634
3.5	0.008273660719515	0.000706527014220
4.0	0.009307462415798	0.000794808229819
4.5	0.010283880511243	0.000878189188380
5.0	0.011196895063599	0.000956155818568
5.5	0.012040877034542	0.001028227430180
6.0	0.012810622994570	0.001093959677764
6.5	0.013501387203871	0.001152947300157
7.0	0.014108910871394	0.001204826619050
7.5	0.014629448411706	0.001249277781192
8.0	0.015059790537774	0.001286026730385
8.5	0.015397284047288	0.001314846897138
9.0	0.015639848180535	0.001335560595539
9.5	0.015785987448971	0.001348040118750
10.0	0.015834800855410	0.001352208526360
10.5	0.015785987448971	0.001348040118750
11.0	0.015639848180535	0.001335560595539
11.5	0.015397284047288	0.001314846897138
12.0	0.015059790537774	0.001286026730385
12.5	0.014629448411706	0.001249277781192
13.0	0.014108910871394	0.001204826619050
13.5	0.013501387203871	0.001152947300157
14.0	0.012810622994570	0.001093959677764
14.5	0.012040877034542	0.001028227430180
15.0	0.011196895063599	0.000956155818568
15.5	0.010283880511243	0.000878189188380
16.0	0.009307462415798	0.000794808229819
16.5	0.008273660719515	0.000706527014220
17.0	0.007188849153624	0.000613889824634
17.5	0.006059715942166	0.000517467800141
18.0	0.004893222566865	0.000417855414584
18.5	0.003696560847277	0.000315666811445
19.0	0.002477108600835	0.000211532017444
19.5	0.001242384156146	0.000106093058214
20.0	0.000000000000000	0.000000000000000

Dois grupos de energia e seis grupos de precursores de nêutrons atrasados

Tabela I.3 – Valores do fluxo escalar rápido, térmico e da concentração de precursores de nêutrons atrasados -em coordenadas cartesianas, com o coeficiente da condição inicial normalizado - para alguns pontos do intervalo $[0, 20]$, $t = 5$ [s] e $\varepsilon = 10^{-15}$.

x [cm]	$\hat{\phi}_1(x, 5)$ [$cm^{-2}s^{-1}$]	$\hat{\phi}_2(x, 5)$ [$cm^{-2}s^{-1}$]	$\hat{C}_1(x, 5)$ [cm^{-3}]
0.0	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000
0.5	0.000839647417499	0.000082047583001	0.000136085825720
1.0	0.001674118129459	0.000163589315370	0.000271332637072
1.5	0.002498267346449	0.000244122465210	0.000404906592489
2.0	0.003307013914491	0.000323150518873	0.000535984164118
2.5	0.004095371642056	0.000400186242129	0.000663757215142
3.0	0.004858480041598	0.000474754684127	0.000787437982213
3.5	0.005591634296076	0.000546396105625	0.000906263932275
4.0	0.006290314265710	0.000614668813437	0.001019502463830
4.5	0.006950212356156	0.000679151883616	0.001126455423677
5.0	0.007567260076245	0.000739447756591	0.001226463411253
5.5	0.008137653121595	0.000795184688256	0.001318909844058
6.0	0.008657874829406	0.000846019041892	0.001403224759092
6.5	0.009124717859858	0.000891637406805	0.001478888326867
7.0	0.009535303970428	0.000931758530605	0.001545434056326
7.5	0.009887101761209	0.000966135053223	0.001602451670919
8.0	0.010177942281838	0.000994555031965	0.001649589638092
8.5	0.010406032403790	0.001016843248212	0.001686557336601
9.0	0.010569965875616	0.001032862287700	0.001713126848293
9.5	0.010668731992948	0.001042513387722	0.001729134363293
10.0	0.010701721829830	0.001045737046037	0.001734481189948
10.5	0.010668731992948	0.001042513387722	0.001729134363293
11.0	0.010569965875616	0.001032862287700	0.001713126848293
11.5	0.010406032403790	0.001016843248212	0.001686557336601
12.0	0.010177942281838	0.000994555031965	0.001649589638092
12.5	0.009887101761209	0.000966135053223	0.001602451670919
13.0	0.009535303970428	0.000931758530605	0.001545434056326
13.5	0.009124717859858	0.000891637406805	0.001478888326867
14.0	0.008657874829406	0.000846019041892	0.001403224759092
14.5	0.008137653121595	0.000795184688256	0.001318909844058
15.0	0.007567260076245	0.000739447756591	0.001226463411253
15.5	0.006950212356156	0.000679151883616	0.001126455423677
16.0	0.006290314265710	0.000614668813437	0.001019502463830
16.5	0.005591634296076	0.000546396105625	0.000906263932275
17.0	0.004858480041598	0.000474754684127	0.000787437982213
17.5	0.004095371642056	0.000400186242129	0.000663757215142
18.0	0.003307013914491	0.000323150518873	0.000535984164118
18.5	0.002498267346449	0.000244122465210	0.000404906592489
19.0	0.001674118129459	0.000163589315370	0.000271332637072
19.5	0.000839647417499	0.000082047583001	0.000136085825720
20.0	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000

Tabela I.4 – Valores do fluxo escalar rápido, térmico e da concentração de precursores de nêutrons atrasados -em coordenadas cartesianas, com o coeficiente da condição inicial normalizado - para alguns pontos do intervalo $[0, 20]$ e $t = 10$ [s].

x [cm]	$\hat{\phi}_1(x, 10)$ [$cm^{-2}s^{-1}$]	$\hat{\phi}_2(x, 10)$ [$cm^{-2}s^{-1}$]	$\hat{C}_1(x, 10)$ [cm^{-3}]
0.0	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000
0.5	0.000549644142289	0.000053709342831	0.000127915242011
1.0	0.001095899545666	0.000107087549703	0.000255041844018
1.5	0.001635398363920	0.000159805526221	0.000380596028248
2.0	0.002164814407436	0.000211538248529	0.000503803711402
2.5	0.002680883650255	0.000261966767191	0.000623905277143
3.0	0.003180424353887	0.000310780173621	0.000740160259382
3.5	0.003660356683778	0.000357677516935	0.000851851907493
4.0	0.004117721697522	0.000402369659418	0.000958291605325
4.5	0.004549699587720	0.000444581059149	0.001058823116746
5.0	0.004953627067030	0.000484051468812	0.001152826631557
5.5	0.005327013788224	0.000520537540207	0.001239722586831
6.0	0.005667557698002	0.000553814324569	0.001318975240108
6.5	0.005973159229917	0.000583676659459	0.001390095972426
7.0	0.006241934248903	0.000609940433651	0.001452646300820
7.5	0.006472225667591	0.000632443722244	0.001506240581716
8.0	0.006662613662804	0.000651047784980	0.001550548388549
8.5	0.006811924429243	0.000665637921627	0.001585296548958
9.0	0.006919237416380	0.000676124179139	0.001610270828977
9.5	0.006983891003966	0.000682441906254	0.001625317253866
10.0	0.007005486581132	0.000684552152081	0.001630343057413
10.5	0.006983891003966	0.000682441906254	0.001625317253866
11.0	0.006919237416380	0.000676124179139	0.001610270828977
11.5	0.006811924429243	0.000665637921627	0.001585296548958
12.0	0.006662613662804	0.000651047784980	0.001550548388549
12.5	0.006472225667591	0.000632443722244	0.001506240581716
13.0	0.006241934248903	0.000609940433651	0.001452646300820
13.5	0.005973159229917	0.000583676659459	0.001390095972426
14.0	0.005667557698002	0.000553814324569	0.001318975240108
14.5	0.005327013788224	0.000520537540207	0.001239722586831
15.0	0.004953627067030	0.000484051468812	0.001152826631557
15.5	0.004549699587720	0.000444581059149	0.001058823116746
16.0	0.004117721697522	0.000402369659418	0.000958291605325
16.5	0.003660356683778	0.000357677516935	0.000851851907493
17.0	0.003180424353887	0.000310780173621	0.000740160259382
17.5	0.002680883650255	0.000261966767191	0.000623905277143
18.0	0.002164814407436	0.000211538248529	0.000503803711402
18.5	0.001635398363920	0.000159805526221	0.000380596028248
19.0	0.001095899545666	0.000107087549703	0.000255041844018
19.5	0.000549644142289	0.000053709342831	0.000127915242011
20.0	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000

I.2 Coordenadas Cilíndricas

Um grupo de energia e um grupo de precursores de nêutrons atrasados

Tabela I.5 – Valores do fluxo escalar e da concentração de precursores de nêutrons atrasados - em coordenadas cilíndricas, com o coeficiente da condição inicial normalizado - para alguns pontos do intervalo $[0, 10]$, $t = 5$ [s] e $\varepsilon = 10^{-15}$.

r [cm]	$\hat{\phi}(r, 5)$ [$cm^{-2}s^{-1}$]	$\hat{C}(r, 5)$ [cm^{-3}]
0.0	0.003847407641144	0.001936288891193
0.5	0.003833513781093	0.001929296513628
1.0	0.003791982692337	0.001908395118897
1.5	0.003723264037993	0.001873811009431
2.0	0.003628101242564	0.001825918329260
2.5	0.003507522550694	0.001765234564149
3.0	0.003362828667957	0.001692414321560
3.5	0.003195577139734	0.001608241468996
4.0	0.003007563665323	0.001513619729930
4.5	0.002800800582944	0.001409561855938
5.0	0.002577492796799	0.001297177511476
5.5	0.002340011449260	0.001177660023859
6.0	0.002090865669308	0.001052272165071
6.5	0.001832672752076	0.000922331143986
7.0	0.001568127143459	0.000789192997224
7.5	0.001299968618109	0.000654236574057
8.0	0.001030950048352	0.000518847315437
8.5	0.000763805165790	0.000384401029342
9.0	0.000501216716285	0.000252247864106
9.5	0.000245785402885	0.000123696678286
10.0	0.000000000000000	0.000000000000000

Tabela I.6 – Valores do fluxo escalar e da concentração de precursores de nêutrons atrasados - em coordenadas cilíndricas, com o coeficiente da condição inicial normalizado - para alguns pontos do intervalo $[0, 10]$, $t = 10$ [s] e $\varepsilon = 10^{-15}$.

r [cm]	$\hat{\phi}(r, 5)$ [$cm^{-2}s^{-1}$]	$\hat{C}(r, 5)$ [cm^{-3}]
0.0	0.002630875569452	0.001324043515630
0.5	0.002621374882137	0.001319262094729
1.0	0.002592975726920	0.001304969622006
1.5	0.002545985585573	0.001281320844135
2.0	0.002480912815290	0.001248571602576
2.5	0.002398460534631	0.001207075756545
3.0	0.002299518172228	0.001157280929727
3.5	0.002185150784991	0.001099723134433
4.0	0.002056586280604	0.001035020341055
4.5	0.001915200705476	0.000963865073917
5.0	0.001762501783544	0.000887016126830
5.5	0.001600110913193	0.000805289502666
6.0	0.001429743848706	0.000719548690889
6.5	0.001253190308891	0.000630694405165
7.0	0.001072292768617	0.000539653909759
7.5	0.000888924698767	0.000447370068334
8.0	0.000704968526477	0.000354790251977
8.5	0.000522293590367	0.000262855244699
9.0	0.000342734364764	0.000172488284326
9.5	0.000168069222731	0.000084584374540
10.0	0.000000000000000	0.000000000000000

Dois grupos de energia e seis grupos de precursores de nêutrons atrasados

Tabela I.7 – Valores do fluxo escalar rápido, térmico e da concentração de precursores de nêutrons atrasados - em coordenadas cilíndricas, com o coeficiente da condição inicial normalizado - para alguns pontos do intervalo $[0, 10]$, $t = 5$ [s] e $\varepsilon = 10^{-15}$.

r [cm]	$\hat{\phi}_1(r, 5)$ [$cm^{-2}s^{-1}$]	$\hat{\phi}_2(r, 5)$ [$cm^{-2}s^{-1}$]	$\hat{C}_1(r, 5)$ [cm^{-3}]
0.0	0.004979648129792	0.000418754943571	0.001734339670496
0.5	0.004961665492994	0.000417242724664	0.001728076577288
1.0	0.004907912361600	0.000412722447548	0.001709355136383
1.5	0.004818970728555	0.000405243053917	0.001678378047534
2.0	0.004695802798224	0.000394885458694	0.001635480432654
2.5	0.004539739413867	0.000381761576851	0.001581125805268
3.0	0.004352464061270	0.000366012978230	0.001515900499211
3.5	0.004135992650538	0.000347809187323	0.001440506626917
4.0	0.003892649331199	0.000327345649485	0.001355753656168
4.5	0.003625038645635	0.000304841389228	0.001262548711535
5.0	0.003336014371793	0.000280536390099	0.001161885722746
5.5	0.003028645447457	0.000254688729140	0.001054833556597
6.0	0.002706179404630	0.000227571501970	0.000942523281677
6.5	0.002372003773312	0.000199469577096	0.000826134725859
7.0	0.002029605938703	0.000170676220177	0.000706882495144
7.5	0.001682531954404	0.000141489630492	0.000586001628892
8.0	0.001334344826160	0.000112209432880	0.000464733070647
8.5	0.000988582786135	0.000083133168889	0.000344309135676
9.0	0.000648718076331	0.000054552830737	0.000225939155821
9.5	0.000318116751833	0.000026751481037	0.000110795479553
10.0	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000

Tabela I.8 – Valores do fluxo escalar rápido, térmico e da concentração de precursores de nêutrons atrasados - em coordenadas cilíndricas, com o coeficiente da condição inicial normalizado - para alguns pontos do intervalo $[0, 10]$, $t = 10$ [s] e $\varepsilon = 10^{-15}$.

r [cm]	$\hat{\phi}_1(r, 10)$ [$cm^{-2}s^{-1}$]	$\hat{\phi}_2(r, 10)$ [$cm^{-2}s^{-1}$]	$\hat{C}_1(r, 10)$ [cm^{-3}]
0.0	0.003258243051237	0.000273996017681	0.001630132727883
0.5	0.003246476797907	0.000273006556029	0.001624245949538
1.0	0.003211305484135	0.000270048888430	0.001606649377163
1.5	0.003153109914832	0.000265155037981	0.001577533531398
2.0	0.003072519671772	0.000258377948213	0.001537213398522
2.5	0.002970405541539	0.000249790846339	0.001486124642078
3.0	0.002847869048926	0.000239486363081	0.001424818366322
3.5	0.002706229227913	0.000227575420199	0.001353954497610
4.0	0.002547006797203	0.000214185899764	0.001274293867252
4.5	0.002371905939883	0.000199461111949	0.001186689095687
5.0	0.002182793916836	0.000183558080658	0.001092074392866
5.5	0.001981678770589	0.000166645668573	0.000991454403252
6.0	0.001770685399990	0.000148902565191	0.000885892235737
6.5	0.001552030306245	0.000130515163149	0.000776496828818
7.0	0.001327995327007	0.000111675349427	0.000664409809496
7.5	0.001100900687360	0.000092578239132	0.000550792010398
8.0	0.000873077704379	0.000073419880128	0.000436809813590
8.5	0.000646841485488	0.000054394957161	0.000323621491284
9.0	0.000424463959965	0.000035694523986	0.000212363713216
9.5	0.000208147577725	0.000017503791621	0.000104138387877
10.0	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000