

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

**Implementação Computacional de um Modelo Viscoelástico
Homogeneizado para Geomateriais Fraturados**

Ricardo Haniel Moran Ramirez

Porto Alegre
2019

RICARDO HANIEL MORAN RAMIREZ

**IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DE UM MODELO
VISCOELÁSTICO HOMOGENEIZADO PARA
GEOMATERIAIS FRATURADOS**

Dissertação apresentado ao Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul,
como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em
Engenharia.

Porto Alegre
2019

RICARDO HANIEL MORAN RAMIREZ

**IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DE UM MODELO
VISCOELÁSTICO HOMOGENEIZADO PARA
GEOMATERIAIS FRATURADOS**

Esta dissertação de mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA, Área de Concentração Estruturas, e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 05 de julho de 2019

Prof. Samir Maghous
Dr. pela École Nationale des Ponts et
Chaussées
Orientador

Prof. Eduardo Bittencourt
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande
Do Sul
Orientador

Prof. Nilo Cesar Consoli
Coordenador do PPGEC/UFRGS

BANCA EXAMINADORA

Prof. Mauro de Vasconcellos Real (FURG)
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Alexandre Luis Braun (UFRGS)
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Jorge Palomino Tamayo (UFRGS)
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Dedico este trabalho aos meus pais, pelo seu amor e apoio incondicionais demonstrados ao longo da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela vida.

Agradeço a minha família, principalmente aos meus pais pelo exemplo de amor, esforço e dedicação mostrado cada dia da minha vida. Agradeço também aos meus irmãos, sobrinho, tios e primos por estarem comigo apesar da distância física.

Agradeço à CAPES pela bolsa de estudos que possibilitou a minha total dedicação aos meus estudos para alcançar este objetivo.

Agradeço ao Prof. Samir Maghous e ao Prof. Eduardo Bittencourt pela orientação neste trabalho e pela ajuda oportuna nos momentos mais complicados no desenvolvimento desta dissertação.

Agradeço aos meus colegas de estudo pelo companheirismo e apoio mostrado nesta experiência longe da minha pátria. Entre eles, preciso mencionar alguns pela valiosa ajuda cedida em diferentes fases do trabalho: Césio Verona, Cássio Barros, Eduardo Braun e Felipe Quevedo.

Agradeço, por fim, às pessoas maravilhosas que conheci em Porto Alegre e que me ajudaram de diversas formas nesta caminhada longe da minha família. Ficarei sempre grato com o Júlio Prates e sua família e com a Edda Pfluger pela amizade e auxílio mostrados.

Porque ¿qué es vuestra vida? Ciertamente es un vapor que aparece por un poco de tiempo, y luego se desvanece.

Santiago 4:14

RESUMO

RAMIREZ, R.H.M. **Implementação Computacional de um Modelo Viscoelástico Homogeneizado para Geomateriais Fraturados**. 2019. 180 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

O comportamento constitutivo dos geomateriais é geralmente afetado pela presença em diferentes escalas de descontinuidades com vários tamanhos e orientações, que, segundo o seu comportamento mecânico, podem ser denominadas como fraturas ou fissuras e tem uma influência significativa no comportamento dependente do tempo deste materiais. A presente contribuição descreve a formulação e implementação computacional de um modelo baseado na micromecânica, especificamente concebido para representar o comportamento viscoelástico de meios microfraturados. As propriedades viscoelásticas efetivas são avaliadas através de um raciocínio baseado em esquemas de homogeneização linear (Mori-Tanaka) junto com o princípio de correspondência para materiais viscoelásticos sem envelhecimento. A formulação mostra que o comportamento viscoelástico homogeneizado pode ser descrito mediante um modelo reológico de Maxwell generalizado. No entanto, para simplificação e implementações práticas na análise estrutural, também foi formulado um modelo de Burger aproximado. A implementação computacional é desenvolvida no contexto do método dos elementos finitos para analisar o comportamento diferido de geomateriais e geo-estruturas envolvendo distribuições isotrópicas de microfraturas. Vários exemplos de aplicação são apresentados com o intuito de verificar o funcionamento do código implementado e avaliar a precisão das respostas numéricas através da comparação com as respectivas soluções analíticas. Finalmente, as capacidades preditivas da ferramenta computacional são ilustradas através da análise da resposta diferida de uma estrutura complexa.

Palavras-chave: *fratura; micromecânica; viscoelasticidade; elementos finitos.*

ABSTRACT

RAMIREZ, R.H.M. **Computational Implementation of a Homogenized Viscoelastic Model for Fractured Geomaterials.** 2019. 180 f. Dissertation (Master Degree in Civil Engineering) – Postgraduate Program in Civil Engineering, UFRGS, Porto Alegre.

The constitutive behavior of geomaterials is generally affected by the presence at different scales of discontinuity surfaces with different sizes and orientations that, according to their mechanical behavior, can be termed as fractures or cracks and have a significative influence in the time-dependent behavior of these materials. The present contribution describes the formulation and computational implementation of a micromechanics-based, specifically conceived for representation of viscoelastic behavior in micro-fractured media. The effective viscoelastic properties are assessed by implementing a reasoning based on linear homogenization schemes (Mori-Tanaka) together with the correspondence principle for non-aging viscoelastic materials. The formulation shows that the homogenized viscoelastic behavior can be described by means of a generalized Maxwell rheological model. However, for simplification and practical implementations in structural analysis, an approximate Burger model is also formulated. The computational implementation is developed within the finite element framework to analyze the delayed behavior of geomaterials and geo-structures involving isotropic distribution of micro-fractures. Several examples of applications are presented with the aim to verify the implemented code and to assess the accuracy of the numerical responses by comparing with the respective analytical solutions. Finally, the predictive capabilities of the computational tool are illustrated by analyzing the delayed response of a complex structure.

Key-words: *fracture; micromechanics; viscoelasticity; finite element.*

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	17
1.1 JUSTIFICATIVA	18
1.1 OBJETIVOS	18
1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO	19
2 MODELO VISCOELÁSTICO DE UM MEIO FRATURADO	21
2.1 CONCEITOS GERAIS E ANTECEDENTES	21
2.2 FERRAMENTAS TEÓRICAS E MATEMÁTICAS	23
2.2.1 Ferramentas da Micromecânica	23
2.2.1.1 Processo de Homogeneização em Elasticidade	24
2.2.1.2 Determinação das Propriedades Macroscópicas Elásticas em Meios Fraturados	25
2.2.2 Ferramentas da Viscoelasticidade	27
2.2.2.1 Viscoelasticidade Linear Sem Envelhecimento	28
2.2.2.2 Modelos Reológicos	30
2.3 PROPRIEDADES ELÁSTICAS HOMOGENEIZADAS DE UM MEIO FRATURADO	33
2.3.1 Comportamento Elástico da Matriz e das Fraturas	34
2.3.2 Determinação do Tensor Elástico Homogeneizado	36
2.3.2.1 Distribuição aleatória de fraturas paralelas	38
2.3.2.2 Distribuição de fraturas orientadas aleatoriamente	40
2.4 PROPRIEDADES VISCOELÁSTICAS HOMOGENEIZADAS DE UM MEIO FRATURADO	43
2.4.1 Comportamento Viscoelástico da Matriz e das Fraturas	44
2.4.2 Determinação do Tensor de Relaxação Homogeneizado	45
2.4.2.1 Determinação da inversa da transformada de Carson-Laplace	46
2.4.2.2 Modelo Viscoelástico Homogeneizado Exato	49
2.4.2.3 Distribuição aleatória de fraturas paralelas	52

2.4.2.4 Distribuição de fraturas orientadas aleatoriamente	54
2.4.2.5 Considerações Importantes na Determinação do Tensor de Relaxação Homogeneizado	55
2.5 MODELO VISCOELÁSTICO HOMOGENEIZADO OU EFETIVO DE UM MEIO FRATURADO	62
2.5.1 Modelo Viscoelástico Homogeneizado Simplificado	62
2.6 REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DAS PROPRIEDADES ELÁSTICAS E VISCOELÁSTICAS HOMOGENEIZADAS DE UM MEIO FRATURADO	66
2.6.1 Propriedades Elásticas Homogeneizadas	66
2.6.1.1 Distribuição aleatória de fraturas paralelas	67
2.6.1.2 Distribuição de fraturas orientadas aleatoriamente	69
2.6.2 Propriedades Viscoelásticas Homogeneizadas	70
2.6.2.1 Distribuição aleatória de fraturas paralelas	71
2.6.2.2 Distribuição de fraturas orientadas aleatoriamente	75
2.6.3 Propriedades Viscoelásticas Aproximadas	79
3 IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO VISCOELÁSTICO NO PROGRAMA METAFOR	84
3.1 INTRODUÇÃO AO PROGRAMA METAFOR	84
3.2 ALGORITMO PARA DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL DO MODELO	85
3.3 VERIFICAÇÃO DO CÓDIGO IMPLEMENTADO NO ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES	95
3.3.1 Características dos Modelos Numéricos desenvolvidos em METAFOR	95
3.3.2 Resolução Analítica do Problema Viscoelástico de Compressão em Deformação Plana	97
3.3.3 Comparação de Resultados do Problema de Compressão em Deformação Plana	104
3.3.3.1 Comparação das Respostas Instantâneas ou Elásticas	104
3.3.3.2 Comparação das Respostas Diferidas	106

3.3.4	Compressão em Deformação Plana: Resolução Analítica do Problema Viscoelástico com Deslocamento Imposto	108
3.3.5	Comparação de Resultados do Problema de Deslocamento Imposto em Deformação Plana	115
3.3.5.1	Comparação das Respostas Instantâneas ou Elásticas	115
3.3.5.2	Comparação das Respostas Diferidas	117
3.3.6	Resolução Analítica do Problema Viscoelástico com Taxa Constante de Deslocamento Imposta em Deformação Plana	118
3.3.7	Comparação de Resultados do Problema com Taxa de Deslocamento Constante Imposta em Deformação Plana	124
3.3.7.1	Comparação das Respostas Instantâneas ou Elásticas	124
3.3.7.2	Comparação das Respostas Diferidas	126
4 ANÁLISE DAS DEFORMAÇÕES DIFERIDAS EM GALERIAS SUBTERRÂNEAS PROFUNDAS		128
4.1	TÚNEL CIRCULAR PROFUNDO SEM REVESTIMENTO	128
4.1.1	Resposta Elástica Instantânea	131
4.1.2	Resposta Diferida: Evolução Ulterior	136
4.1.3	Comparação de resultados analíticos e numéricos	141
4.2	TÚNEL CIRCULAR PROFUNDO COM REVESTIMENTO	147
4.2.1	Resposta Diferida do Maciço	149
4.2.2	Comparação de resultados analíticos e numéricos	152
4.3	TÚNEL COM SEÇÃO TRANSVERSAL TIPO FERRADURA	157
4.3.1	Resposta Numérica Diferida	160
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS		172
5.1	CONCLUSÕES	172
5.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	173
REFERÊNCIAS		175
APÊNDICE A – FLUXOGRAMA DO MODELO ANALITICO		178

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Modelo de Mola Simples e Amortecedor	31
Figura 2.2: Modelo de Maxwell e modelo de Kelvin	32
Figura 2.3: Modelo de Kelvin-Voigt e modelo de Zener	32
Figura 2.4: Volume elementar representativo (VER) (Aguiar e Maghous, 2018)	34
Figura 2.5: Sistema de eixos local para a fratura ω_i (Aguiar e Maghous, 2018)	35
Figura 2.6: Fratura modelada como um esferoide oblato (Aguiar e Maghous, 2018)	37
Figura 2.7: Orientação de fraturas no VER	38
Figura 2.8: Orientação de fraturas por coordenadas esféricas	40
Figura 2.9: Modelo de Maxwell generalizado associado com a função $R^{\text{hom}}(t)$	50
Figura 2.10: Modelos de Maxwell generalizado para os módulos viscoelásticos k^{hom} e μ^{hom}	51
Figura 2.11: Parâmetros dos elementos de um modelo reológico	56
Figura 2.12: Modelo de mola simples no caso de uma matriz e no caso de fraturas	58
Figura 2.13: Modelo de Maxwell no caso de uma matriz e no caso de fraturas	58
Figura 2.14: Modelo de Kelvin-Voigt no caso de uma matriz e no caso de fraturas	59
Figura 2.15: Modelo de Burger no caso de uma matriz e no caso de fraturas	60
Figura 2.16: Modelo simplificado ou aproximado de Burger para o meio fraturado	63
Figura 2.17: Componentes $C_{iii}^{\text{hom}}(\varepsilon)$ normalizadas do tensor de rigidez homogeneizado	68
Figura 2.18: Componentes $C_{ijj}^{\text{hom}}(\varepsilon)$ normalizadas do tensor de rigidez homogeneizado	68
Figura 2.19: Componentes $C_{jjj}^{\text{hom}}(\varepsilon)$ normalizadas do tensor de rigidez homogeneizado	68
Figura 2.20: Módulos de compressão e cisalhamento normalizados (Fraturas e Fissuras)	69
Figura 2.21: Componentes $R_{1111}^{\text{hom}}(t)$ e $R_{3333}^{\text{hom}}(t)$ normalizadas (Caso I: Burger - Maxwell)	72
Figura 2.22: Componentes $R_{1122}^{\text{hom}}(t)$ e $R_{1133}^{\text{hom}}(t)$ normalizadas (Caso I: Burger - Maxwell)	72

Figura 2.23: Componentes $R_{1212}^{\text{hom}}(t)$ e $R_{1313}^{\text{hom}}(t)$ normalizadas (Caso I: Burger - Maxwell)	72
Figura 2.24: Componentes $R_{1111}^{\text{hom}}(t)$ e $R_{3333}^{\text{hom}}(t)$ normalizadas (Caso 2: KV - Maxwell) .	73
Figura 2.25: Componentes $R_{1122}^{\text{hom}}(t)$ e $R_{1133}^{\text{hom}}(t)$ normalizadas (Caso 2: KV - Maxwell) .	73
Figura 2.26: Componentes $R_{1212}^{\text{hom}}(t)$ e $R_{1313}^{\text{hom}}(t)$ normalizadas (Caso 2: KV - Maxwell) .	73
Figura 2.27: Componentes $R_{1111}^{\text{hom}}(t)$ e $R_{3333}^{\text{hom}}(t)$ normalizadas (Caso 3: KV – Mola Simples)	74
Figura 2.28: Componentes $R_{1122}^{\text{hom}}(t)$ e $R_{1133}^{\text{hom}}(t)$ normalizadas (Caso 3: KV – Mola Simples)	74
Figura 2.29: Componentes $R_{1212}^{\text{hom}}(t)$ e $R_{1313}^{\text{hom}}(t)$ normalizadas (Caso 3: VK – Mola Simples)	74
Figura 2.30: Módulos de relaxação em compressão k^{hom} e μ^{hom} cisalhamento normalizados (Caso: Burger – Maxwell)	76
Figura 2.31: Módulos de relaxação em compressão k^{hom} e μ^{hom} cisalhamento normalizados (Caso: Kelvin-Voigt – Maxwell)	76
Figura 2.32: Módulos de relaxação em compressão k^{hom} e μ^{hom} cisalhamento normalizados ($\varepsilon = 0,2$, $\mathcal{N} = 1$; Caso: Modelo de Burger para Matriz)	77
Figura 2.33: Módulos de relaxação em compressão k^{hom} e μ^{hom} cisalhamento normalizados ($\varepsilon = 0,2$, $\mathcal{N} = 1$; Caso: Modelo de Kelvin-Voigt para Matriz)	77
Figura 2.34: Módulos de relaxação em compressão k^{hom} e μ^{hom} cisalhamento normalizados ($\varepsilon = 0,2$, $\mathcal{N} = 1$; Caso: Fraturas Elásticas e Viscoelásticas)	78
Figura 2.35: Módulos de relaxação associados ao modelo exato e ao modelo de Burger aproximado - ($\varepsilon = 0,2$, $\mathcal{N} = 1$; Caso 1: modelo de mola simples para fraturas)	80
Figura 2.36: Módulos de relaxação associados ao modelo exato e ao modelo de Burger aproximado - ($\varepsilon = 0,2$, $\mathcal{N} = 1$; Caso 2: modelo Maxwell para fraturas)	81
Figura 2.37: Módulos de relaxação associados ao modelo exato e ao modelo de Burger aproximado - ($\varepsilon = 0,2$, $\mathcal{N} = 1$; Caso 3: modelo de Kelvin-Voigt para fraturas)	82
Figura 2.38: Módulos de relaxação associados ao modelo exato e ao modelo de Burger aproximado - ($\varepsilon = 0,2$, $\mathcal{N} = 1$; Caso 4: modelo de Burger para fraturas)	82
Figura 3.1: Esquema das sub-rotinas utilizadas para o cálculo das tensões totais	94
Figura 3.2: Nós e elementos do modelo desenvolvido em Metafor	96
Figura 3.3: Planos Y-Z e X-Z do corpo de prova submetido a compressão em EPD	98

Figura 3.4: Plano X-Y do corpo de prova submetido a compressão em EPD	98
Figura 3.5: Resposta Numérica e Analítica de Tensão σ_{xx} (Burger-Maxwell)	107
Figura 3.6: Resposta Numérica e Analítica de Deformação Horizontal (Burger-Maxwell)	107
Figura 3.7: Resposta Numérica e Analítica de Deformação Vertical (Burger-Maxwell)	107
Figura 3.8: Planos Y-Z e X-Z do corpo submetido a deslocamento vertical constante ..	108
Figura 3.9: Plano X-Y do corpo submetido a deslocamento vertical constante	109
Figura 3.10: Resposta Numérica e Analítica de Tensão Vertical (Burger-Maxwell)	117
Figura 3.11: Resposta Numérica e Analítica de Tensão σ_{xx} (Burger-Maxwell)	117
Figura 3.12: Planos Y-Z e X-Z do corpo submetido a taxa constante de deslocamento ..	118
Figura 3.13: Plano X-Y do corpo submetido a taxa constante de deslocamento	118
Figura 3.14: Resposta Numérica e Analítica de Deformação Horizontal (Burger-Maxwell)	126
Figura 3.15: Resposta Numérica e Analítica de Deformação Vertical (Burger-Maxwell)	126
Figura 3.16: Resposta Numérica e Analítica de Tensão Vertical (Burger-Maxwell)	127
Figura 3.17: Resposta Numérica e Analítica de Tensão σ_{xx} (Burger-Maxwell)	127
Figura 4.1: Representação esquemática das condições de tensão no local analisado antes e depois da escavação	129
Figura 4.2: Profundidade real e dimensões do modelo para análise	130
Figura 4.3: Condições de contorno e solicitações aplicadas no maciço	130
Figura 4.4: Representação do vetor posição \underline{X} no maciço em coordenadas polares	130
Figura 4.5: Malha de Elementos Finitos do Modelo do Túnel Circular	142
Figura 4.6: Comparação de deslocamentos radiais em $r = R$ (Maxwell-Maxwell)	143
Figura 4.7: Comparação da convergência radial U (Maxwell -Maxwell)	143
Figura 4.8: Comparação de deslocamentos em função da distância r (Maxwell-Maxwell)	144
Figura 4.9: Comparação de tensões radiais em função da distância r (Maxwell-Maxwell)	144

Figura 4.10: Comparação de tensões tangenciais em função da distância r (Maxwell-Maxwell)	144
Figura 4.11: Comparação de deslocamentos radiais em $r = R$ (Burger-Maxwell)	145
Figura 4.12: Comparação da convergência radial U (Burger -Maxwell)	145
Figura 4.13: Comparação de deslocamentos em função da distância r (Burger-Maxwell)	146
Figura 4.14: Comparação de tensões radiais em função da distância r (Burger-Maxwell)	146
Figura 4.15: Comparação de tensões tangenciais em função da distância r (Burger-Maxwell)	146
Figura 4.16: Representação esquemática das condições de deslocamento no local analisado quando considerado revestimento rígido	147
Figura 4.17: Pressão exercida pelo maciço no revestimento rígido do túnel circular	148
Figura 4.18: Comparação de tensões radiais em $r = R$ (Maxwell-Maxwell)	153
Figura 4.19: Comparação de tensões tangenciais em $r = R$ (Maxwell-Maxwell)	153
Figura 4.20: Comparação da Pressão q no Revestimento em $r = R$ (Maxwell-Maxwell)	153
Figura 4.21: Comparação de deslocamentos em função da distância r (Maxwell-Maxwell)	154
Figura 4.22: Comparação de tensões radiais em função da distância r (Maxwell-Maxwell)	154
Figura 4.23: Comparação de tensões tangenciais em função da distância r (Maxwell-Maxwell)	154
Figura 4.24: Comparação de tensões radiais em $r = R$ (Burger-Maxwell)	155
Figura 4.25: Comparação de tensões tangenciais em $r = R$ (Burger-Maxwell)	155
Figura 4.26: Comparação da Pressão q no Revestimento em $r = R$ (Burger-Maxwell)	156
Figura 4.27: Comparação de deslocamentos em função da distância r (Burger-Maxwell)	156
Figura 4.28: Comparação de tensões radiais em função da distância r (Burger-Maxwell)	156
Figura 4.29: Comparação de tensões tangenciais em função da distância r (Burger-Maxwell)	157

Figura 4.30 Representação esquemática das dimensões do modelo com seção tipo ferradura	158
Figura 4.31: Seção transversal tipo ferradura do túnel	158
Figura 4.32: Condições de contorno e solicitações aplicadas no maciço	159
Figura 4.33: Eixos de análise no modelo do túnel com seção transversal tipo ferradura	160
Figura 4.34: Malha de elementos finitos do modelo do túnel com seção transversal tipo ferradura e aproximação da zona de escavação	161
Figura 4.35: Deslocamento vertical do ponto A em função do tempo (Maxwell-Maxwell)	161
Figura 4.36: Tensão vertical do ponto A em função do tempo (Maxwell-Maxwell)	162
Figura 4.37: Tensão horizontal do ponto A em função do tempo (Maxwell-Maxwell) ...	162
Figura 4.38: Deslocamentos verticais em função da distância r_y (Maxwell-Maxwell) ..	162
Figura 4.39: Tensões verticais em função da distância r_y (Maxwell-Maxwell)	163
Figura 4.40: Tensões horizontais em função da distância r_y (Maxwell-Maxwell)	163
Figura 4.41: Deslocamento horizontal do ponto B em função do tempo (Maxwell-Maxwell)	163
Figura 4.42: Deslocamento vertical do ponto B em função do tempo (Maxwell-Maxwell)	164
Figura 4.43: Tensão horizontal do ponto B em função do tempo (Maxwell-Maxwell) ...	164
Figura 4.44: Tensão vertical do ponto B em função do tempo (Maxwell-Maxwell)	164
Figura 4.45: Deslocamentos horizontais em função da distância r_x (Maxwell-Maxwell)	165
Figura 4.46: Deslocamentos verticais em função da distância r_x (Maxwell-Maxwell) ..	165
Figura 4.47: Tensões horizontais em função da distância r_x (Maxwell-Maxwell)	165
Figura 4.48: Tensões verticais em função da distância r_x (Maxwell-Maxwell)	166
Figura 4.49: Deslocamento vertical do ponto A em função do tempo (Burger-Maxwell)	166
Figura 4.50: Tensão vertical do ponto A em função do tempo (Burger-Maxwell)	166
Figura 4.51: Tensão horizontal do ponto A em função do tempo (Burger-Maxwell)	167
Figura 4.52: Deslocamentos verticais em função da distância r_y (Burger-Maxwell)	167

Figura 4.53: Tensões verticais em função da distância r_y (Burger-Maxwell)	167
Figura 4.54: Tensões horizontais em função da distância r_y (Burger-Maxwell)	168
Figura 4.55: Deslocamento horizontal do ponto B em função do tempo (Burger-Maxwell)	168
Figura 4.56: Deslocamento vertical do ponto B em função do tempo (Burger-Maxwell)	168
Figura 4.57: Tensão horizontal do ponto B em função do tempo (Burger-Maxwell)	169
Figura 4.58: Tensão vertical do ponto B em função do tempo (Burger-Maxwell)	169
Figura 4.59: Deslocamentos horizontais em função da distância r_x (Burger-Maxwell)	169
Figura 4.60: Deslocamentos verticais em função da distância r_x (Burger-Maxwell)	170
Figura 4.61: Tensões horizontais em função da distância r_x (Burger-Maxwell)	170
Figura 4.62: Tensões verticais em função da distância r_x (Burger-Maxwell)	170

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1: Parâmetros mecânicos da matriz e das fraturas do material admitido	67
Tabela 2.2: Valores dos parâmetros mecânicos do material fissurado (Caso Elástico) ..	67
Tabela 2.3: Parâmetros mecânicos da matriz e das fraturas para o modelo de Burger ...	70
Tabela 2.4: Valores dos parâmetros mecânicos do material fissurado (Caso Viscoelástico)	71
Tabela 2.5: Número de ramos do modelo exato para os módulos de compressão e cisalhamento do tensor de relaxação efetivo	80
Tabela 2.6: Comparação entre o modelo exato e o modelo aproximado referida ao erro na diferença máxima entre curvas das funções de relaxação exata e aproximada	83
Tabela 3.1: Parâmetros mecânicos da matriz para o modelo reológico de Burger	96
Tabela 3.2: Parâmetros mecânicos das fraturas para o modelo reológico de Maxwell ..	97
Tabela 3.3: Comparação de resultados de tensão (Modelo Burger-Maxwell)	106
Tabela 3.4: Comparação de resultados de deformação (Modelo Burger-Maxwell)	106
Tabela 3.5: Comparação de resultados de tensão (Modelo Burger-Maxwell)	116
Tabela 3.6: Comparação de resultados de deformação (Modelo Burger-Maxwell)	116
Tabela 3.7: Comparação de resultados de tensão (Modelo Burger-Maxwell)	125
Tabela 3.8: Comparação de resultados de deformação (Modelo Burger-Maxwell)	125
Tabela 4.1: Parâmetros mecânicos da matriz para o modelo reológico de Burger	141
Tabela 4.2: Parâmetros mecânicos das fraturas para o modelo reológico de Maxwell ..	142

1 INTRODUÇÃO

A utilização de materiais em engenharia e ciências aplicadas é resultado de estudos ou pesquisas sobre o seu comportamento e aplicabilidade respectiva. Para entender ou descrever o comportamento destes materiais, sejam simples ou complexos, é necessário desenvolver modelos matemáticos. Estes modelos visam modificar ou melhorar modelos estabelecidos de materiais existentes para obter um comportamento mais completo ou obter a descrição de um material novo.

Uma característica principal das estruturas da Engenharia Civil envolvendo geomateriais, tais como rochas, concreto, alvenaria ou pavimentos asfálticos, é a presença em diferentes escalas de descontinuidades com vários tamanhos e orientações. Estas descontinuidades correspondem a zonas de pequena espessura ao longo das quais as propriedades físicas e mecânicas da matriz se degradam. A presença destas descontinuidades pode afetar a estabilidade e segurança de importantes estruturas da Engenharia Civil devido à redução significativa da rigidez, resistência ao cisalhamento, ductilidade e a possíveis fluxos de fluidos que poderiam ingressar através destas superfícies.

Existem dois tipos principais de descontinuidades desde o ponto de vista do comportamento mecânico de um material: fissuras e fraturas. Portanto, pode-se considerar um meio como fissurado ou como fraturado dependendo das características que apresentem estas descontinuidades. O comportamento viscoelástico (dependente do tempo) dos meios fissurados e fraturados pode ser caracterizado por meio de um modelo matemático formulado analiticamente baseado numa abordagem micromecânica.

Uma vez que a maior parte das aplicações na engenharia estrutural é realizada de forma numérica, o modelo matemático que descreve o comportamento viscoelástico de um material com presença de fraturas pode ser implementado computacionalmente por meio do desenvolvimento de modelos numéricos, geralmente concebidos no contexto do método dos elementos finitos. No presente trabalho foi utilizada uma das versões do programa de elementos finitos não linear Metafor. Esta versão permite unicamente realizar análises de problemas em estado plano de deformações e problemas axissimétricos.

Os exemplos de aplicação desenvolvidos no trabalho visam realizar a verificação da implementação computacional do modelo viscoelástico através da comparação dos resultados numéricos e analíticos de problemas submetidos a diferentes solicitações em estado plano de deformações. Estes exemplos abrangem desde pequenos corpos de prova que apresentam soluções analíticas relativamente simples até problemas mais complexos como túneis profundos com diversas seções transversais.

1.1 JUSTIFICATIVA

O comportamento constitutivo dos geomateriais é, geralmente, afetado pela presença de superfícies de descontinuidade exibindo vários tamanhos e orientações. Entre os impactos negativos da presença destas superfícies de descontinuidade nas estruturas da Engenharia Civil, pode-se mencionar: a degradação da rigidez e resistência, assim como o aumento da permeabilidade em alguns casos.

Ao longo dos anos, diversas pesquisas têm-se focado na resposta instantânea de materiais com descontinuidades. Não obstante, poucos trabalhos prestaram atenção ao comportamento diferido (dependente do tempo) dos materiais. Sabe-se que, em muitas situações, este comportamento se mostra como uma componente fundamental na deformação dos geomateriais quando submetidos a solicitações de longa duração.

Recentemente, diferentes pesquisas incorporando simultaneamente a mecânica de fraturas e o comportamento diferido homogeneizado de materiais com descontinuidades vem sendo desenvolvidas. Neste contexto, o presente trabalho pretende contribuir com a implementação computacional de um modelo analítico, baseado na micromecânica, que considera o comportamento diferido de geomateriais com presença de microfraturas e microfissuras.

1.2 OBJETIVOS

O objetivo geral desta pesquisa consiste na implementação computacional de um modelo viscoelástico baseado na micromecânica para geomateriais com presença de microfraturas distribuídas isotropicamente, possibilitando assim a análise da resposta diferida do material quando submetido a diversas solicitações considerando um estado plano de deformações.

Como objetivos específicos têm-se:

- a) Apresentar uma formulação para as propriedades viscoelásticas de um meio fraturado utilizando um raciocínio baseado em esquemas de homogeneização linear (Mori-Tanaka) junto com o princípio de correspondência para materiais viscoelásticos lineares sem envelhecimento segundo o trabalho desenvolvido por Aguiar e Maghous (2018);
- b) Desenvolver a implementação numérica das propriedades viscoelásticas formuladas analiticamente para uma distribuição isotrópica de microfraturas utilizando o software Metafor no âmbito do método dos elementos finitos e considerando um estado plano de deformações;
- c) Verificar o funcionamento do código implementado e a precisão do modelo através da comparação das soluções analíticas, baseadas na mecânica do meio contínuo e a viscoelasticidade, com as respostas numéricas para diversos exemplos de aplicação em estado plano de deformações;
- d) Mostrar a potencialidade do modelo implementado em problemas onde não é possível obter uma solução analítica geral como, por exemplo, túneis profundos com seções transversais tipo ferradura.

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

O presente trabalho abrange tanto formulações analíticas quanto desenvolvimentos numéricos para atingir os objetivos mencionados anteriormente. Portanto, a distribuição dos capítulos e seus respectivos conteúdos são apresentados a seguir:

O capítulo 2 apresenta a formulação teórica do modelo matemático que procura representar o comportamento viscoelástico de um meio fraturado. Aborda-se, inicialmente, os conceitos gerais da micromecânica e da viscoelasticidade, que são fundamentais no processo de desenvolvimento da formulação teórica. Determinam-se as propriedades elásticas e viscoelásticas de um meio fraturado através do tensor elástico homogeneizado e do tensor de relaxação homogeneizado, respectivamente. Finalmente, apresentam-se as características do

modelo homogeneizado exato e do modelo homogeneizado simplificado comparando o comportamento a curto, médio e longo prazo de cada um deles.

O capítulo 3 aborda a formulação específica utilizada no desenvolvimento do código para implementação computacional do modelo viscoelástico. Para esta implementação, considerou-se um material com presença de microfraturas distribuídas isotropicamente no meio homogeneizado e as respectivas aplicações só podem considerar um estado plano de deformações, por causa da versão utilizada do programa de elementos finitos. Também, são inclusos, neste capítulo, os exemplos de aplicação que servem para verificação do código implementado. Como passo inicial, resolve-se analiticamente cada um dos problemas propostos em estado plano de deformações utilizando os conceitos básicos da mecânica dos meios contínuos. Finalmente, comparam-se as respostas analíticas e numéricas para cada um dos casos propostos verificando a correta implementação do modelo.

O capítulo 4 visa analisar algumas estruturas como exemplos de aplicação de maior complexidade. Na análise, são comparadas as respostas diferidas analíticas e numéricas destas estruturas. Entre aquelas que permitem uma análise em estado plano de deformações, escolheu-se os túneis profundos. Por conseguinte, estuda-se o comportamento diferido de um túnel com seção transversal circular sem revestimento e com revestimento que apresentam uma solução analítica quando consideradas certas condições. Finalmente, mostra-se a capacidade do modelo para analisar túneis profundos que não apresentam uma solução analítica como, por exemplo, aqueles que tem uma seção transversal tipo ferradura.

O capítulo 5 apresenta as considerações finais sobre as características e comportamento do modelo analítico viscoelástico utilizado, assim como as considerações sobre os resultados obtidos na verificação do código implementado. Também são apresentadas recomendações e sugestões para trabalhos futuros que visem complementar o presente trabalho.

2 MODELO VISCOELÁSTICO DE UM MEIO FRATURADO

O presente capítulo visa apresentar um modelo matemático para representar o comportamento viscoelástico de um meio fraturado e, por isso, organiza-se da seguinte forma. A primeira seção do capítulo apresenta conceitos gerais sobre as descontinuidades e antecedentes das pesquisas relacionadas com o comportamento de meios fissurados e fraturados. A segunda seção envolve as ferramentas principais da micromecânica e viscoelasticidade para estabelecer as bases teóricas a serem utilizadas. A terceira e quarta seções apresentam, respectivamente, o comportamento de um meio elástico homogeneizado e viscoelástico homogeneizado de um meio fraturado. Finalmente, a última seção mostra e desenvolve o modelo viscoelástico homogeneizado exato e simplificado sob condições específicas para o material, as quais serão indicadas posteriormente no desenvolvimento do capítulo.

2.1 CONCEITOS GERAIS E ANTECEDENTES

No que diz respeito ao comportamento mecânico de um material, dois tipos principais de descontinuidades podem ser distinguidos: fissuras e fraturas. Geometricamente, ambas podem ser modeladas como interfaces, no entanto, a diferença fundamental está em sua capacidade de transmitir esforços entre as faces que interagem entre si. As fraturas se caracterizam por serem capazes de transmitir esforços normais assim como tangenciais entre as faces opostas. Enquanto que as fissuras desconsideram a interação entre as faces e, portanto, não transmitem esforços.

Neste trabalho será considerada a situação particular de microfraturas, isto é, descontinuidades de pequena extensão quando comparadas ao tamanho do volume elementar representativo do material, o qual contém todas as informações necessárias sobre o material. Estas e outras condições, a serem mencionadas posteriormente, permitem uma abordagem baseada na teoria da homogeneização para desenvolver uma modelagem constitutiva do material.

A presença de microfissuras ou microfraturas pode afetar significativamente a resistência, deformação e permeabilidade dos materiais. Neste contexto, uma importante quantidade de pesquisas tem sido realizada durante as décadas passadas, abordando o impacto das fissuras e fraturas no comportamento instantâneo geral dos materiais. Entre os trabalhos pioneiros, podem

ser citadas as contribuições do Goodman (1976) e Bandis et al. (1983). Não obstante, a maioria destas análises teóricas e computacionais tem sido focada na modelagem da resposta instantânea (elástica ou plástica) prestando pouca atenção ao comportamento diferido dos materiais.

Em muitas situações, o comportamento diferido se mostra como uma componente fundamental na deformação dos materiais. Isto pode ser evidenciado em muitos materiais compósitos poliméricos e em geomateriais, tais como o concreto ou rochas sedimentares, devido ao comportamento mecânico dependente do tempo que exibem quando submetidos a cargas de longa duração. Este comportamento pode ser afetado significativamente pela presença das microfraturas. As pesquisas presentes na literatura que abordam, simultaneamente, a mecânica de fratura e a caracterização reológica (comportamento diferido) começaram a ser apresentadas, em maior número, recentemente.

Entre os trabalhos importantes que levam em consideração o comportamento diferido, pode-se mencionar a pesquisa de Le et al. (2007), que propuseram um raciocínio para a modelagem multiescala de materiais heterogêneos no âmbito da viscoelasticidade linear sem envelhecimento. Ele utilizou o princípio de correspondência elástico-viscoelástico com os esquemas de homogeneização baseados nos trabalhos de Eshelby (1957) para estabelecer um modelo equivalente para um material heterogêneo viscoelástico. No entanto, a pesquisa de Le (2008) considerava uma análise limitada apenas a heterogeneidades clássicas. Foram os trabalhos do Nguyen (2010) e Nguyen et al. (2011, 2013) que estenderam essa abordagem a um meio fissurado, desenvolvendo um modelo baseado na micromecânica para um meio viscoelástico onde as heterogeneidades são fissuras. Estes autores formularam um modelo de Burger tridimensional para aproximar o comportamento viscoelástico homogeneizado. No entanto, esta análise foi restrita a materiais com fissuras, as quais não transmitem esforços. Finalmente, Aguiar e Maghous (2018) estenderam a análise de Nguyen, adicionando o comportamento de fraturas, estudado por Maghous et al. (2013), as quais transmitem esforços.

Neste capítulo, mostra-se a contribuição realizada por Aguiar e Maghous (2018), que formularam as propriedades viscoelásticas homogeneizadas de um meio cujos componentes são a matriz e as fraturas. A abordagem utilizada é baseada em trabalhos anteriores desenvolvidos no contexto de meios fraturados elásticos (Maghous et al. 2013, 2014), junto com o princípio de correspondência elástica-viscoelástica.

2.2 FERRAMENTAS TEÓRICAS E MATEMÁTICAS

A descrição, mediante modelos matemáticos, do comportamento elástico e viscoelástico de um meio fraturado demanda a utilização de ferramentas específicas fornecidas tanto pela micromecânica quanto pela viscoelasticidade. Nesta seção são apresentadas, de forma concisa, os principais conceitos teóricos e relações matemáticas que serão o fundamento para o desenvolvimento das seguintes seções.

2.2.1 Ferramentas da Micromecânica

A micromecânica é uma ferramenta utilizada pela ciência dos materiais com o intuito de analisar materiais heterogêneos compostos de duas ou mais fases. Mediante a micromecânica, é possível transformar um modelo de material heterogêneo em um modelo homogêneo equivalente. Não obstante, a aplicação da micromecânica implica cumprir com certas condições. Uma destas condições é a possibilidade de determinar um volume elementar representativo (VER), para a análise matemática. Este VER deve conter todas as informações necessárias sobre o material para que o processo de homogeneização seja válido.

Uma das abordagens básicas, segundo Hori e Nemat Nasser (1983), para obter os resultados de um meio heterogêneo é a teoria da homogeneização, a qual estabelece relações matemáticas entre os micro e macro campos usando o método da perturbação multiescalar. Aqueles materiais passíveis de homogeneização podem apresentar diversas formas de distribuição das heterogeneidades tal como periódicas, aleatórias ou com graduação funcional da distribuição. A distribuição aleatória é observada normalmente em geomateriais, o que demanda uma abordagem estatística.

A análise do VER oferecerá resultados matematicamente corretos desde que este cumpra com a condição de separação de escalas. No caso de meios aleatórios, três dimensões são definidas: **L** para estrutura, **l** para o VER e **d** para as heterogeneidades. Estas dimensões são relacionadas da seguinte forma: a dimensão do VER deve ser pequena em relação à estrutura ($l \ll L$) e a dimensão das heterogeneidades deve ser pequena em relação ao VER ($d \ll l$) de forma a possibilitar um tratamento estatisticamente confiável. No caso das microfraturas, estas heterogeneidades cumprem a condição de separação de escalas ao serem pequenas frente ao VER, além disso, no que diz respeito à forma de distribuição, estas admitem um comportamento fortemente aleatório.

A regra das médias é o modo preferido para conectar as propriedades nas micro e macro escalas. Ao ser aplicado no VER, é factível aproximar campos de quantidades físicas no meio heterogêneo por campos médios volumétricos representativos do meio homogêneo. Considerando que \mathcal{J} é uma quantidade física, então, sua média volumétrica $\langle \mathcal{J} \rangle$ no volume Ω , pode ser definida mediante a seguinte expressão:

$$\langle \mathcal{J} \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \mathcal{J} dV \quad (2.1)$$

2.2.1.1 Processo de Homogeneização em Elasticidade

As propriedades de um material homogêneo equivalente são obtidas mediante a análise matemática do VER considerando as condições de contorno apropriadas. Estas condições de contorno definem a abordagem utilizada durante o processo de homogeneização. Para meios aleatórios, os quais são comuns em geomateriais, duas condições de contorno são aplicadas: tensão e deformação homogêneas. No âmbito da elasticidade, a tensão homogênea admitida deve ser estaticamente admissível e para conectar as tensões locais microscópicas com as tensões macroscópicas é definido o tensor de concentração de tensões \mathbb{B} . No caso da deformação homogênea aplicada, os campos de deslocamentos devem ser cinematicamente admissíveis e para relacionar as deformações locais microscópicas com as deformações macroscópicas é definido o tensor de concentração de deformações \mathbb{A} . Os dois tensores de concentração mencionados podem ser definidos com as seguintes expressões:

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \mathbb{B}(\underline{x}) : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (2.2)$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \mathbb{A}(\underline{x}) : \underline{\underline{\Xi}} \quad (2.3)$$

onde $\underline{\underline{\sigma}}$ é o campo de tensões microscópicas, $\underline{\underline{\Sigma}}$ é o campo de tensões macroscópicas, $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})$ é o campo de deformações microscópicas e $\underline{\underline{\Xi}}$ é o campo de deformações macroscópicas. No caso de utilizar \mathbb{B} durante o processo de homogeneização, a lei do comportamento mecânico do material elástico linear homogeneizado pode ser definida da seguinte forma:

$$\underline{\underline{\Xi}} = \mathbb{S}^{\text{hom}} : \underline{\underline{\Sigma}} \quad \text{com} \quad \mathbb{S}^{\text{hom}} = \langle \mathbb{S} : \mathbb{B} \rangle \quad (2.4)$$

onde \mathbb{S}^{hom} é o tensor de flexibilidade homogeneizado e \mathbb{S} o tensor de flexibilidade na escala microscópica. Para uma abordagem por meio de \mathbb{A} , a lei do comportamento mecânico do material elástico linear homogeneizado é definida como:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}^{\text{hom}} : \underline{\underline{\Xi}} \quad \text{com} \quad \mathbb{C}^{\text{hom}} = \langle \mathbb{C} : \mathbb{A} \rangle \quad (2.5)$$

onde \mathbb{C}^{hom} é o tensor de rigidez homogeneizado e \mathbb{C} o tensor de rigidez na escala microscópica. Na elasticidade linear, a contração dupla dos tensores \mathbb{C} e \mathbb{S} produz a identidade \mathbb{I} de quarta ordem. No entanto, na homogeneização, isto não acontece devido a um erro associado à condição de separação de escalas.

2.2.1.2 Determinação das Propriedades Macroscópicas Elásticas em Meios Fraturados

A determinação das propriedades elásticas de um meio homogeneizado pressupõe a determinação do tensor \mathbb{C}^{hom} . Este tensor contém todas as informações elásticas do material. Tradicionalmente, a determinação deste tensor é realizada mediante as quatro formas seguintes: resolução analítica, limites variacionais, determinação numérica e estimativas. No presente capítulo, será utilizada a opção das estimativas. Entre as principais razões para utilizar as estimativas, pode-se mencionar: a simplicidade operacional e a capacidade de fornecer predições razoáveis.

As estimativas mais comumente utilizadas são aquelas baseadas nos resultados obtidos por Eshelby (1957), que desenvolveu uma solução analítica para uma inclusão elipsoidal em um meio infinito. Para meios com mais inclusões, foram propostas algumas estimativas. Entre as mais comuns estão: diluída, Mori-Tanaka e auto consistente. Neste capítulo será considerada a estimativa de Mori-Tanaka. Para entender a estimativa de Mori-Tanaka é importante mencionar em que consiste a estimativa diluída. A estimativa diluída admite um número muito pequeno de inclusões no meio de forma tal que a fração volumétrica da matriz (f_m) é aproximadamente 1 e a modificação no campo de deformação de uma determinada inclusão não é percebida pelas demais inclusões. Pode-se dizer, então, que a estimativa de Mori-Tanaka é a generalização da estimativa diluída de modo a considerar qualquer fração volumétrica (f_i) de inclusões.

A condição de contorno do problema auxiliar é modificada para que este possa perceber as demais inclusões do problema. Então, o tensor de rigidez homogeneizado é dado por:

$$\mathbb{C}_{MT}^{\text{hom}} = \mathbb{C}^s + \sum_{i=1}^n f_i (\mathbb{C}^f - \mathbb{C}^s) : (\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^f - \mathbb{C}^s))^{-1} : \left\langle (\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^f - \mathbb{C}^s))^{-1} \right\rangle^{-1} \quad (2.6)$$

onde n é o número de descontinuidades (inclusões) consideradas, \mathbb{C}^s é o tensor elástico da matriz e \mathbb{C}^f é o tensor elástico da inclusão. \mathbb{P} é o tensor de Hill, cujos componentes podem ser encontrados para diversas configurações de inclusão no trabalho de Mura (1987).

No âmbito dos meios fraturados, torna-se necessário considerar as propriedades de transmissão dos esforços que atuam diretamente sobre as faces opostas da fratura durante o processo de determinação do tensor de rigidez elástico homogeneizado. O comportamento destes esforços pode ser definido mediante a seguinte lei:

$$\underline{T} = \underline{k} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\xi} \\ \underline{\zeta} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

onde \underline{T} representa o vetor de esforços transmitidos entre as faces da fratura, $\begin{bmatrix} \underline{\xi} \\ \underline{\zeta} \end{bmatrix}$ representa o salto de deslocamento ou abertura da fratura em uma determinada posição e \underline{k} é o tensor de rigidez de segunda ordem da fratura. Ressalta-se que o comportamento individual das fraturas, descrito na expressão (2.7), é considerado linear ao longo das mesmas.

O comportamento descontínuo das fraturas modifica algumas características do tensor de rigidez. Portanto, o tensor de rigidez elástico homogeneizado deve ser adaptado segundo a condição de descontinuidade das fraturas. Uma das modificações, devido à presença das fraturas, aparece na expressão da deformação macroscópica ou homogeneizada $\underline{\underline{\varepsilon}}$, a qual será a soma de duas contribuições, a saber, as deformações da matriz e as deformações relacionadas com o salto de deslocamento ao longo das fraturas. A expressão da deformação macroscópica é a seguinte:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \langle \underline{\varepsilon} \rangle + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\omega} \begin{bmatrix} \underline{\xi} \\ \underline{\zeta} \end{bmatrix} \otimes \underline{n} \, dS \quad (2.8)$$

onde o conjunto total de microfraturas é denotado por $\omega = \bigcup_i \omega_i$, sendo ω_i a i -ésima fratura. O símbolo \otimes representa a parte simétrica do produto tensorial $(\underline{u} \otimes \underline{v})_{ij} = (u_i v_j + v_i u_j) / 2$. O vetor $\underline{n} = \underline{n}_i$ é o vetor unitário na direção normal ao plano da fratura ω_i . O tensor $\underline{\varepsilon}$

corresponde à deformação linearizada associada ao deslocamento $\underline{\xi}$ e, como mencionado anteriormente, $[\underline{\xi}]$ é o salto de deslocamento na interface. O segundo termo é inexistente quando o meio não apresenta descontinuidades.

Uma ferramenta essencial na micromecânica é o lema de Hill, que é válido tanto para meios aleatórios quanto para meios periódicos. Este lema é um princípio baseado na energia, no qual a média volumétrica da energia de deformação microscópica deve ser igual à energia de deformação macroscópica. Para materiais elástico-lineares, o lema pode ser escrito como:

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle : \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle = \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\Xi}} \quad (2.9)$$

Na situação particular de um meio fraturado, o lema de Hill deve ser adaptado alterando sua forma inicial. Segundo Maghous et al. (2013), a adaptação do lema de Hill é dada por:

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle : \underline{\underline{\Xi}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\omega} \underline{\underline{T}} \cdot [\underline{\underline{\xi}}] \, dS \quad (2.10)$$

Na expressão (2.10), $\underline{\underline{\sigma}}$ denota qualquer campo de tensão estaticamente admissível no VER, isto é, aquele que cumpra com o balanço local do momentum $\text{div } \underline{\underline{\sigma}} = 0$ no domínio da matriz e satisfaça a condição de continuidade do vetor de esforços $\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}_i$ ao cruzar a interface da fratura ω_i . Percebe-se que a média volumétrica da tensão $\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle$ representa a tensão macroscópica equilibrada pelo campo de tensão microscópico $\underline{\underline{\sigma}}$ definido no VER.

Nota-se na expressão (2.10) que o trabalho da tensão macroscópica $\underline{\underline{\Sigma}}$ na deformação macroscópica $\underline{\underline{\Xi}}$ engloba duas contribuições: a das forças internas dentro da matriz e do trabalho desenvolvido pelo vetor de esforços atuando nas fraturas no deslocamento relativo.

2.2.2 Ferramentas da Viscoelasticidade

Os materiais que apresentam uma resposta instantânea e uma resposta diferida, frente às solicitações aplicadas, são denominados de viscoelásticos. Enquanto que a resposta instantânea ocorre no momento exato de aplicação das condições de contorno sobre a estrutura, a resposta diferida ocorre ao longo do tempo, mantendo-se as condições de contorno constantes. Outra

característica importante dos materiais viscoelásticos é o envelhecimento, que está relacionado com a modificação das propriedades – físicas ou não – ao longo do tempo. Neste trabalho, serão considerados aqueles materiais que mantem suas propriedades constantes dentro do intervalo de tempo de análise e que, portanto, podem ser denominados como sem envelhecimento.

A viscoelasticidade pode ser mais facilmente compreendida no caso unidimensional, embora as aplicações posteriores sejam tridimensionais. No comportamento viscoelástico dos materiais existem dois fenômenos fundamentais: a fluência e a relaxação. Para explicar estes fenômenos, no caso de corpos unidimensionais, são analisados os respectivos ensaios. O ensaio de fluência consiste na aplicação de uma tensão instantânea constante nos extremos do corpo de prova para avaliar a evolução da deformação ao longo do tempo, a qual é crescente com o passar do tempo. O ensaio de relaxação consiste em aplicar uma deformação instantânea constante nos extremos do corpo de prova para avaliar a tensão ao longo do tempo, a qual é decrescente com o passar do tempo. É importante assinalar que a relaxação apresenta um tempo característico menor do que o ensaio de fluência dado que estes processos são inversos.

2.2.2.1 Viscoelasticidade Linear Sem Envelhecimento

A lei do comportamento de um material relaciona as histórias de tensão e deformação. Um material viscoelástico linear se caracteriza pela existência de uma relação linear entre as histórias de tensão e deformação, o que satisfaz o princípio de superposição de Boltzmann para as histórias mencionadas.

Admite-se, então, que a história das solicitações não interfere mais na resposta final. Materiais que apresentam estas características são denominados de materiais de Boltzmann, cujo princípio de superposição enuncia que a superposição das solicitações implica a superposição homóloga das respostas. Portanto, as funções de fluência e de relaxação podem ser consideradas como independentes da história das solicitações.

No âmbito tensorial, as respostas a uma história qualquer de tensão $\underline{\underline{\sigma}}(\tau)$ e deformação $\underline{\underline{\varepsilon}}(\tau)$ podem ser expressas, respectivamente, da seguinte forma:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{F}(t, \tau) : \underline{\underline{\dot{\sigma}}}(\tau) d\tau \quad (2.11)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{R}(t, \tau) : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}(\tau) d\tau \quad (2.12)$$

sendo $\underline{\underline{\varepsilon}}(t)$ o tensor de deformações totais do sistema e $\underline{\underline{\sigma}}(t)$ o tensor de tensões totais do sistema. $\mathbb{F}(t, \tau)$ e $\mathbb{R}(t, \tau)$ são os tensores de fluência e relaxação, respectivamente. Enquanto que τ representa o intervalo de tempo fictício para integração. No sentido das distribuições, as derivadas das solicitações totais aplicadas (tensão e deformação) sobre o sistema são $\underline{\underline{\dot{\sigma}}}(\tau) = \partial \underline{\underline{\sigma}} / \partial \tau$ e $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}(\tau) = \partial \underline{\underline{\varepsilon}} / \partial \tau$. As expressões (2.11) e (2.12) foram reescritas por Boltzmann e são apresentadas a seguir, tendo em vista o símbolo \circ como operador de Boltzmann:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \mathbb{F} \circ \underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{F}(t, t) : \underline{\underline{\sigma}}(t) - \int_{t_0}^t \dot{\mathbb{F}}(t, \tau) : \underline{\underline{\sigma}}(\tau) d\tau \quad (2.13)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = \mathbb{R} \circ \underline{\underline{\varepsilon}} = \mathbb{R}(t, t) : \underline{\underline{\varepsilon}}(t) - \int_{t_0}^t \dot{\mathbb{R}}(t, \tau) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\tau) d\tau \quad (2.14)$$

O instante de aplicação das solicitações é representado mediante t_0 . As derivadas dos tensores de fluência e relaxação são $\dot{\mathbb{F}}(t, \tau) = \partial \mathbb{F}(t, \tau) / \partial \tau$ e $\dot{\mathbb{R}}(t, \tau) = \partial \mathbb{R}(t, \tau) / \partial \tau$, respectivamente. Percebe-se que os termos $\mathbb{F}(t, t) : \underline{\underline{\sigma}}(t)$ e $\mathbb{R}(t, t) : \underline{\underline{\varepsilon}}(t)$ representam a resposta elástica instantânea observada no instante t , enquanto que os termos $-\int_{t_0}^t \dot{\mathbb{F}}(t, \tau) : \underline{\underline{\sigma}}(\tau) d\tau$ e $-\int_{t_0}^t \dot{\mathbb{R}}(t, \tau) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\tau) d\tau$ representam a integral de memória de toda a história anterior a t e expressam o comportamento diferido do material.

Por simplificação e tal como foi mencionado anteriormente, os materiais considerados neste trabalho não envelhecem, isto é, as suas propriedades não apresentam modificações no intervalo de tempo do modelo proposto. Desconsiderar o envelhecimento afeta diretamente as funções de fluência e de relaxação, alterando o operador de Boltzmann (\circ) por um operador de convolução ($*$). Este operador de convolução é definido da seguinte forma:

$$\underline{\underline{u}}(t) * \underline{\underline{v}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\underline{u}}(\tau) : \underline{\underline{v}}(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\underline{v}}(\tau) : \underline{\underline{u}}(t - \tau) d\tau \quad (2.15)$$

Na viscoelasticidade linear sem envelhecimento, utiliza-se a seguinte convenção para as funções de fluência e de relaxação: $\mathbb{F}(t, \tau) = \bar{\mathbb{F}}(t - \tau)$ e $\mathbb{R}(t, \tau) = \bar{\mathbb{R}}(t - \tau)$. Considerando as expressões (2.11) até (2.15), o comportamento viscoelástico, em termos de deformação e tensão, para um material linear sem envelhecimento pode ser expresso da seguinte maneira:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \mathbb{F} \circ \underline{\underline{\sigma}} = \dot{\mathbb{F}} * \underline{\underline{\sigma}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\mathbb{F}}(t - \tau) : \underline{\underline{\sigma}}(\tau) d\tau \quad (2.16)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = \mathbb{R} \circ \underline{\underline{\varepsilon}} = \dot{\mathbb{R}} * \underline{\underline{\varepsilon}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\mathbb{R}}(t - \tau) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\tau) d\tau \quad (2.17)$$

Uma das vantagens de adotar o não envelhecimento nos materiais é a possibilidade de utilizar a transformada de Carson-Laplace, a qual permite converter a análise viscoelástica no espaço de tempo físico a uma análise elástica em um espaço de tempo fictício substituindo os produtos de convolução por cálculos algébricos ordinários.

Sendo p uma variável fictícia, define-se a transformada de Carson-Laplace $p \rightarrow u^*(p)$ de uma função dependente do tempo $t \rightarrow u(t)$ com a seguinte expressão:

$$u^*(p) = \mathcal{L}_c(u) = p \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-pt} dt \quad (2.18)$$

Conseqüentemente, utilizando as propriedades da transformada de Carson-Laplace, o comportamento, em termos de deformação e tensão, no espaço de tempo fictício, pode-se definir com as seguintes expressões:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^*(p) = \dot{\mathbb{F}}^*(p) : \underline{\underline{\sigma}}^*(p) \quad (2.19)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^*(p) = \dot{\mathbb{R}}^*(p) : \underline{\underline{\varepsilon}}^*(p) \quad (2.20)$$

Neste trabalho, é importante obter o tensor de relaxação no espaço de tempo físico. Então, faz-se necessário realizar a operação da inversa da transformada de Carson-Laplace. Na seção correspondente ao comportamento viscoelástico homogeneizado de um meio fraturado será mostrado um procedimento capaz de realizar a transformada inversa desse tensor no espaço operacional para obtê-lo no espaço real.

2.2.2.2 Modelos Reológicos

A reologia é a ciência que estuda o comportamento de um material e o caracteriza. Este comportamento abrange o fluxo de materiais líquidos e mudanças de forma de materiais sólidos. A representação deste comportamento é realizada mediante modelos, os quais são denominados de modelos reológicos. Estes modelos são o suporte para a formulação do comportamento uniaxial de um material viscoelástico linear sem envelhecimento. Seguidamente, apresentam-

se os modelos reológicos mais tradicionais ou clássicos que podem ser utilizados para caracterizar o comportamento da matriz ou das fraturas de um material. Ressalta-se que, tradicionalmente, apenas modelos de comportamento instantâneo são utilizados para caracterizar o comportamento de fraturas.

Os modelos reológicos elementares ou mais simples são dois: o modelo de mola simples e o modelo de amortecedor. Geralmente são utilizados para formar modelos mais complexos. O modelo de mola simples é utilizado em análises onde o comportamento do sistema é assumido como puramente elástico, enquanto que o modelo de amortecedor considera um comportamento puramente viscoso. Ambos os modelos aceitam condições de contorno, tanto em tensão quanto em deformação ou taxas de deformação (amortecedor). A figura 2.1 apresenta estes modelos.

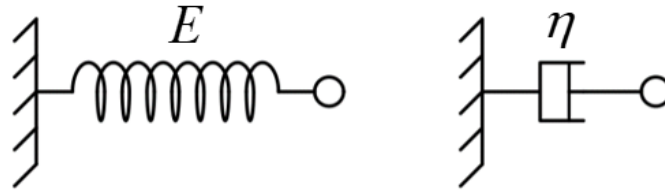


Figura 2.1: Modelo de Mola Simples e Amortecedor

sendo E a rigidez da mola e η a viscosidade do amortecedor. As funções de fluência F e relaxação R para a mola simples, sub índice m , e para o amortecedor, sub índice d , são apresentadas a seguir (adotando $t_0 = 0$):

$$\begin{aligned} F_m(t) &= \frac{1}{E} Y(t) & ; & & R_m(t) &= E Y(t) \\ F_d(t) &= \frac{t}{\eta} Y(t) & ; & & R_d(t) &= \eta \delta(t) \end{aligned} \quad (2.21)$$

onde $Y(t)$ é a função de Heaviside e a sua derivada $\delta(t)$ é a função Delta de Dirac. Para o caso unidimensional, a lei do comportamento mecânico para a mola e amortecedor, respectivamente, escreve-se como:

$$\sigma(t) = E \varepsilon_m(t) \quad ; \quad \sigma(t) = \eta \dot{\varepsilon}_d(t) \quad (2.22)$$

A mistura dos modelos de mola simples e de amortecedor origina a formação de novos modelos, quando agrupados em série ou em paralelo. Estas configurações são conhecidas como modelo

de Maxwell – em série – e modelo de Kelvin – em paralelo. A figura 2.2 apresenta ambos os modelos.

As funções de fluência F e relaxação R para o modelo de Maxwell, sub índice M , e para o modelo de Kelvin, sub índice K , são apresentadas a seguir:

$$\begin{aligned}
 F_M(t) &= \left(\frac{1}{E_M} + \frac{t}{\eta_M} \right) Y(t) & ; & \quad R_M(t) = E_M e^{\left(-\frac{E_M t}{\eta_M} \right)} Y(t) \\
 F_K(t) &= \frac{1}{E_K} \left(1 - e^{\left(-\frac{E_K t}{\eta_K} \right)} \right) Y(t) & ; & \quad R_K(t) = E_K Y(t) + \eta_K \delta(t)
 \end{aligned}
 \tag{2.23}$$

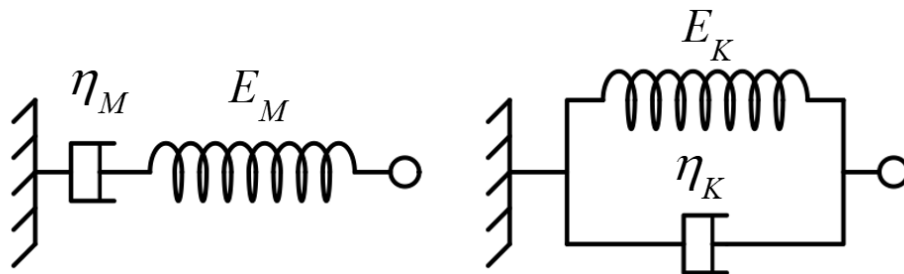


Figura 2.2: Modelo de Maxwell e modelo de Kelvin

Define-se o tempo característico como $\tau_c = \eta / E$, que pode ser denominado de fluência ou de relaxação, dependendo da função (F_K ou R_M) na qual se encontre este expoente.

Existem modelos que podem ser equivalentes entre si. Estes modelos são conhecidos como modelos sólidos lineares padrão (Standard) e estão compostos de 3 elementos. Entre estes, pode-se citar o modelo de Kelvin-Voigt e o modelo de Zener. A figura 2.3 apresenta estes dois modelos.

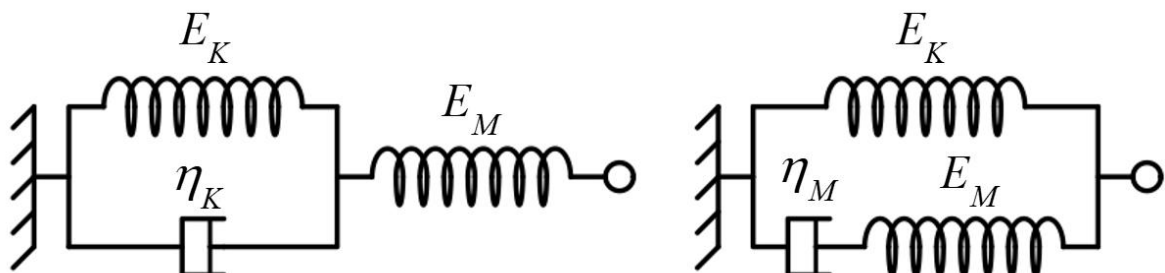


Figura 2.3: Modelo de Kelvin-Voigt e modelo de Zener

As funções de fluência e relaxação, tanto para o modelo de Kelvin-Voigt quanto para o modelo de Zener, são apresentadas na expressão (2.24). Os índices KV e Z representam Kelvin-Voigt e Zener, respectivamente.

$$\begin{aligned}
 F_{KV}(t) &= \left(\frac{E_K + E_M}{E_K E_M} - \frac{1}{E_K} e^{\left(-\frac{E_K}{\eta_K} t\right)} \right) Y(t) \\
 R_{KV}(t) &= \left(\frac{E_K E_M}{E_K + E_M} + \frac{E_M^2}{E_K + E_M} e^{\left(-\frac{E_K + E_M}{\eta_K} t\right)} \right) Y(t) \\
 F_Z(t) &= \left(\frac{1}{E_K} - \frac{E_M}{E_K (E_K + E_M)} e^{\left(-\frac{E_K E_M}{\eta_M (E_K + E_M)} t\right)} \right) Y(t) \\
 R_Z(t) &= \left(E_K + E_M e^{\left(-\frac{E_M}{\eta_M} t\right)} \right) Y(t)
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

No caso de geomateriais, é comum a utilização do modelo reológico de Burger. Este modelo será apresentado na seção correspondente ao comportamento viscoelástico homogeneizado em meios fraturados.

2.3 PROPRIEDADES ELÁSTICAS HOMOGENEIZADAS DE UM MEIO FRATURADO

Com o intuito de formular as propriedades viscoelásticas macroscópicas de um meio fraturado, o primeiro passo a seguir é a formulação das propriedades elásticas gerais desse meio, as quais são obtidas recorrendo a esquemas lineares de homogeneização como mencionado na seção anterior.

Para iniciar o processo de homogeneização, é importante definir o volume elementar representativo (VER), que será denotado por Ω e cujos componentes são: uma matriz homogênea e uma distribuição discreta de fraturas curtas (i.e., microfraturas) que cortam a matriz. O domínio da matriz é representado por $\Omega \setminus \omega$, onde o símbolo “ \setminus ” expressa a diferença de conjuntos e ω representa o conjunto total de microfraturas. A seguir, apresenta-se as características do comportamento elástico da matriz e das fraturas.

2.3.1 Comportamento Elástico da Matriz e das Fraturas

A matriz do meio fraturado pode ser modelada como um meio contínuo tridimensional, enquanto que as fraturas são modeladas como interfaces bidimensionais ω_i , cuja orientação é definida mediante um vetor unitário normal \underline{n}_i . A figura 2.4 apresenta o VER com seus respectivos componentes.

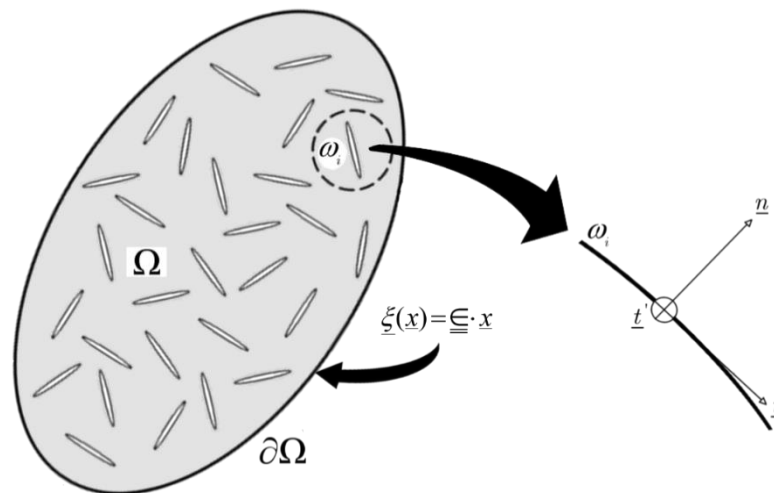


Figura 2.4: Volume elementar representativo (VER) (Aguilar e Maghous, 2018)

A obtenção das propriedades de um meio homogêneo equivalente requer a análise matemática do VER considerando as condições de contorno apropriadas. No caso dos geomateriais, duas condições de contorno são utilizadas: tensão e deformação homogêneas. Estas solicitações definem-se apenas no domínio da matriz $\Omega \setminus \omega$ e não em todo o VER. Neste capítulo, a solicitação aplicada no contorno $\partial\Omega$ do VER corresponde a uma condição de contorno de deformação homogênea, a qual pode ser observada na figura 2.4, e define-se da seguinte maneira:

$$\underline{\xi}(\underline{x}) = \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \underline{x} \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega \quad (2.25)$$

sendo $\underline{\underline{\epsilon}}$ a deformação macroscópica, $\underline{\xi}$ o campo de deslocamentos e \underline{x} o vetor posição. A relação entre uma deformação macroscópica e a respectiva deformação local, quando considerada a regra das médias, foi apresentada na expressão (2.8). Lembra-se também que a adaptação do lema de Hill para o caso de um meio fraturado, formulada por Maghous et al. (2013), foi apresentada na expressão (2.10).

No âmbito da elasticidade linear, o comportamento da matriz e das fraturas pode ser descrito mediante as seguintes relações:

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{C}^s : \underline{\underline{\varepsilon}} & \text{em } \Omega \setminus \omega \\ \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{k}} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\underline{\xi}} \end{bmatrix} & \text{ao longo de } \omega = \bigcup_i \omega_i \end{cases} \quad (2.26)$$

onde $\underline{\underline{\sigma}}$ e $\underline{\underline{\varepsilon}}$ são os campos de tensão e deformação na matriz relacionados por meio do tensor de rigidez de quarta ordem da matriz \mathbb{C}^s . Sendo $\underline{\underline{n}} = \underline{\underline{n}}_i$ e $\underline{\underline{k}} = \underline{\underline{k}}^i$ para uma fratura ω_i , o vetor de esforços $\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}_i$ é relacionado com seu correspondente salto de deslocamento relativo $\begin{bmatrix} \underline{\underline{\xi}} \end{bmatrix}$ através da rigidez elástica $\underline{\underline{k}}^i$. A figura 2.5 mostra o sistema de eixos ortonormais $(\underline{\underline{t}}_i, \underline{\underline{t}}'_i, \underline{\underline{n}}_i)$ fixado a cada fratura:

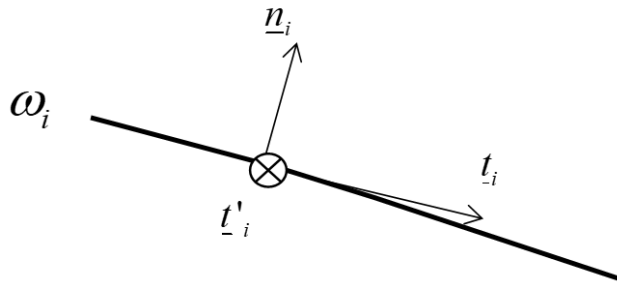


Figura 2.5: Sistema de eixos local para a fratura ω_i (Aguiar e Maghous, 2018)

Por uma questão de clareza, o subíndice ' i ' referente à fratura será omitido nas expressões consecutivas. Portanto, o sistema de eixos ortonormais para qualquer fratura será $(\underline{\underline{t}}, \underline{\underline{t}}', \underline{\underline{n}})$ e a expressão para a rigidez das fraturas, neste sistema coordenado, é definida por:

$$\underline{\underline{k}} = k_n \underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}} + k_t (\underline{\underline{t}} \otimes \underline{\underline{t}} + \underline{\underline{t}}' \otimes \underline{\underline{t}}') \quad (2.27)$$

Os escalares k_n e k_t são, respectivamente, a rigidez normal e tangencial, e suas dimensões são de pressão por comprimento unitário de fratura (Pa/m) seguindo a direção correspondente. Estas rigidezes são responsáveis pela transmissão de esforços nas direções $\underline{\underline{n}}$ normal, $\underline{\underline{t}}$ e $\underline{\underline{t}}'$ tangenciais perpendiculares entre si, e são obtidas em laboratório utilizando um espécime com fratura única. A expressão (2.27) pode ser utilizada para o caso particular de discontinuidades

sem transmissão de esforços (fissuras) desde que seja considerado um valor nulo para a rigidez correspondente (i.e., $\underline{k} = 0$). Na situação de um material sem dano, corresponde utilizar $|\underline{k}| \rightarrow +\infty$.

2.3.2 Determinação do Tensor Elástico Homogeneizado

A formulação das propriedades elásticas de um meio homogeneizado equivale à determinação do tensor de rigidez elástico homogeneizado \mathbb{C}^{hom} uma vez que a condição de contorno, definida na expressão (2.25), foi a deformação homogênea $\underline{\underline{\epsilon}}$ aplicada no meio fraturado.

A solução para o problema elástico estabelecido no VER, definido em campos de tensão e deslocamento, pode ser denotada pelo par $(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\xi}})$, respectivamente. Na seção anterior, mediante a expressão (2.3), foi estabelecida a relação entre a deformação macroscópica $\underline{\underline{\epsilon}}$ e a deformação local ou microscópica $\underline{\underline{\xi}}$ em qualquer ponto do VER utilizando o tensor de concentração de deformações \mathbb{A} . Em meios intactos ou sem discontinuidades, a média volumétrica do tensor \mathbb{A} produz a identidade de quarta ordem: $\langle \mathbb{A} \rangle = \mathbb{I}$. Não obstante, em meios fraturados, segundo Maghous et al. (2013), a média volumétrica do tensor \mathbb{A} de quarta ordem não é igual a unidade: $\langle \mathbb{A} \rangle \neq \mathbb{I}$, devido à fração de deformação macroscópica localizada ao longo das fraturas.

Pode-se determinar a lei do comportamento macroscópico (equação de estado) de um meio fraturado considerando as expressões (2.3) e (2.26) e aplicando a regra das médias na tensão microscópica $\underline{\underline{\sigma}}$, tal como realizado na expressão (2.5). Define-se, então, esta lei do comportamento como:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}^{\text{hom}} : \underline{\underline{\epsilon}} \quad \text{com} \quad \mathbb{C}^{\text{hom}} = \langle \mathbb{C}^s : \mathbb{A} \rangle \quad (2.28)$$

sendo $\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle$ a média volumétrica da tensão local $\underline{\underline{\sigma}}$ e \mathbb{C}^{hom} o tensor de quarta ordem que representa o tensor de rigidez elástica homogeneizada.

Para realizar a determinação do tensor \mathbb{C}^{hom} , deve-se, preliminarmente, determinar a forma e a orientação das fraturas, uma vez que estas características incidem no processo de homogeneização linear segundo o esquema escolhido. No que diz respeito a forma adotada para

as fraturas, admite-se fraturas oblatas – em forma de esfera achatada - uma vez que serão utilizadas técnicas de homogeneização linear baseadas na teoria de inclusão de Eshelby, que considerou inclusões elipsoidais num meio infinito. Segundo Aguiar e Maghous (2018), as fraturas oblatas são, geralmente, utilizadas devido a sua conveniente representação de fraturas em geomateriais.

A Figura 2.6 exhibe a geometria admitida para as fraturas e seu respectivo sistema de eixos ortonormais $(\underline{t}, \underline{t}', \underline{n})$. Sendo a o raio da fratura oblata e c a metade da abertura, enquanto que o fator de aspecto $X = c/a$ cumpre com a seguinte condição: $X \ll 1$.

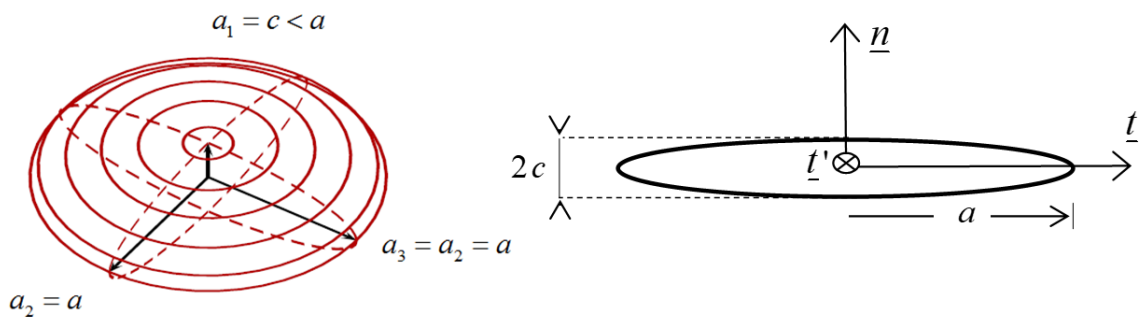


Figura 2.6: Fratura modelada como um esferoide oblato (Aguiar e Maghous, 2018)

Na abordagem micromecânica de um meio contínuo, estas fraturas são consideradas como heterogeneidades incorporadas dentro da matriz intacta e sua respectiva fração volumétrica f nesse meio tem a seguinte expressão:

$$f = \frac{4}{3} \pi \varepsilon X \quad (2.29)$$

Sendo ε o parâmetro de dano denominado de densidade de fratura definido como $\varepsilon = \mathcal{N} a^3$ por Budianski e O'Connell (1976), onde \mathcal{N} é o número de fraturas por unidade de volume. No que diz respeito à orientação das fraturas, existe uma infinidade de orientações que podem ser adotadas pelas fraturas. Não obstante, admitem-se duas que são consideradas como mais importantes: fraturas orientadas paralelamente e fraturas orientadas aleatoriamente. Importa salientar que em meios aleatórios como os geomateriais, as fraturas têm uma distribuição aleatória. Então, tanto as fraturas orientadas paralelamente quanto as orientadas aleatoriamente, possuem uma distribuição aleatória no plano. A Figura 2.7 apresenta o VER admitido nas duas situações de orientação de fraturas:

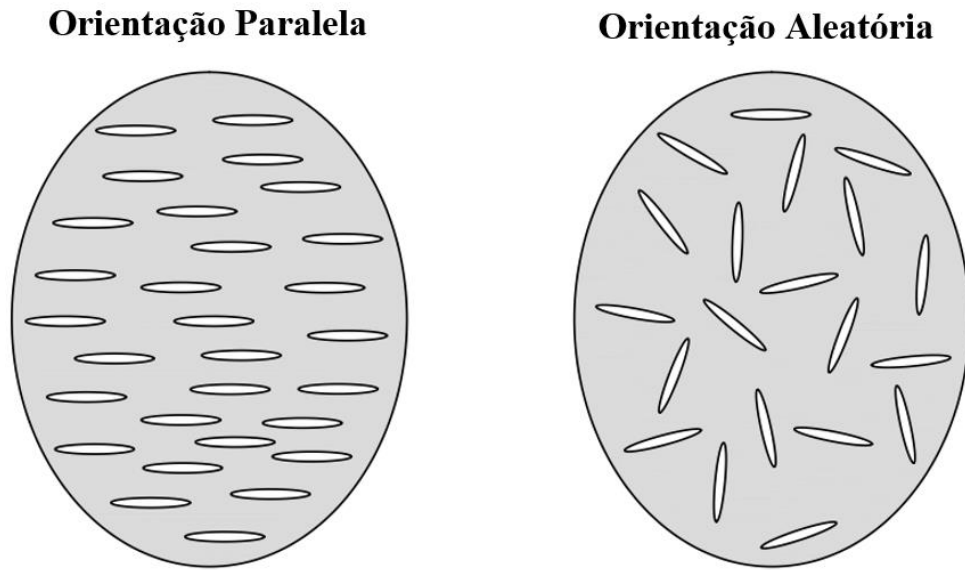


Figura 2.7: Orientação de fraturas no VER

Na sequência, apresenta-se o processo de determinação do tensor \mathbb{C}^{hom} , tanto para a distribuição aleatória de fraturas paralelas quanto para a distribuição de fraturas orientadas aleatoriamente, adotando-se o esquema de homogeneização linear mais apropriado para este fim. No presente trabalho, foi adotada a estimativa de Mori-Tanaka, sendo esta uma das mais tradicionais e baseada nos trabalhos de Eshelby.

2.3.2.1 Distribuição aleatória de fraturas paralelas

O esquema de homogeneização ou estimativa de Mori-Tanaka para o tensor de rigidez efetivo \mathbb{C}^{hom} em meios fraturados, baseado na expressão (2.6), pode ser apresentado da seguinte forma:

$$\mathbb{C}^{\text{hom}} = \lim_{X \rightarrow 0} \left(\mathbb{C}^s + f \mathbb{C}^f : \left(\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^f - \mathbb{C}^s) \right)^{-1} \right) : \left(\mathbb{I} + f \left(\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^f - \mathbb{C}^s) \right)^{-1} \right)^{-1} \quad (2.30)$$

sendo \mathbb{I} o tensor unitário de quarta ordem e $\mathbb{P} = \mathbb{P}(X, \underline{n})$ o tensor de Hill associado ao conjunto de fraturas paralelas. Este último tensor depende do fator de aspecto X e da orientação \underline{n} do esferoide oblato (normal ao plano da fratura). O tensor \mathbb{P} se relaciona com o tensor de Eshelby \mathbb{S} segundo a seguinte expressão:

$$\mathbb{P} = \mathbb{S} : (\mathbb{C}^s)^{-1} \quad (2.31)$$

Como mencionado anteriormente, as componentes do tensor de Eshelby \mathbb{S} podem ser encontradas em Handbooks (Mura, 1987) e dependem da geometria das inclusões. No presente estudo, as componentes não nulas do tensor \mathbb{S} , considerando o eixo 3 como normal ao plano da fratura, são apresentadas no trabalho de Aguiar e Maghous (2018). Supõe-se que o comportamento da matriz é elástico linear isótropo, o tensor de rigidez da matriz \mathbb{C}^s define-se da seguinte maneira:

$$\mathbb{C}^s = 3k^s \mathbb{J} + 2\mu^s \mathbb{K} \quad (2.32)$$

Com k^s sendo o módulo de compressão da matriz e μ^s o módulo de cisalhamento desta. Os tensores de quarta ordem \mathbb{J} e \mathbb{K} são os tensores esférico e desviador, respectivamente, os quais podem ser definidos como:

$$\mathbb{J} = \frac{1}{3} \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} \quad ; \quad \mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J} \quad (2.33)$$

O tensor \mathbb{C}^f relacionado com a rigidez \underline{k} das fraturas, definida na expressão (2.27), é apresentado a seguir:

$$\mathbb{C}^f = 3 X a k^f \mathbb{J} + 2 X a \mu^f \mathbb{K} \quad \text{com} \quad k^f = k_n - \frac{4}{3} k_t \quad ; \quad \mu^f = k_t \quad (2.34)$$

Considerando o sistema local de eixos ortonormais $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3) = (\underline{t}, \underline{t}', \underline{n})$ e a expressão (2.30), as componentes não nulas da estimativa de Mori-Tanaka para o tensor \mathbb{C}^{hom} podem ser, finalmente, calculadas. A seguir, são apresentadas estas componentes:

$$\begin{aligned} C_{1111}^{\text{hom}} = C_{2222}^{\text{hom}} &= (3k^s + 4\mu^s) \frac{\kappa_2 + \pi(1 + 16/3\varepsilon)\kappa_1(1 - \kappa_1)}{3\kappa_2 + 3\pi\kappa_1(1 - \kappa_1) + 4\pi\varepsilon} \\ C_{3333}^{\text{hom}} &= (3k^s + 4\mu^s) \frac{\kappa_2 + \pi\kappa_1(1 - \kappa_1)}{3\kappa_2 + 3\pi\kappa_1(1 - \kappa_1) + 4\pi\varepsilon} \\ C_{1122}^{\text{hom}} = C_{2211}^{\text{hom}} &= (3k^s - 2\mu^s) \frac{\kappa_2 + \pi(\kappa_1 + 8/3\varepsilon)(1 - \kappa_1)}{3\kappa_2 + 3\pi\kappa_1(1 - \kappa_1) + 4\pi\varepsilon} \\ C_{1133}^{\text{hom}} = C_{2233}^{\text{hom}} = C_{3311}^{\text{hom}} = C_{3322}^{\text{hom}} &= (3k^s - 2\mu^s) \frac{\kappa_2 + \pi\kappa_1(1 - \kappa_1)}{3\kappa_2 + 3\pi\kappa_1(1 - \kappa_1) + 4\pi\varepsilon} \\ C_{1313}^{\text{hom}} = C_{2323}^{\text{hom}} &= (2\mu^s) \frac{4\kappa_3 + \pi(1 - \kappa_1)(1 + 2\kappa_1)}{4\kappa_3 + 16/3\pi\varepsilon(1 - \kappa_1) + \pi(1 + 2\kappa_1)(1 - \kappa_1)} \quad ; \quad C_{1212}^{\text{hom}} = 2\mu^s \end{aligned} \quad (2.35)$$

onde os parâmetros adimensionais κ_1 , κ_2 , κ_3 e κ_4 são definidos em seguida:

$$\kappa_1 = \frac{3k^s + \mu^s}{3k^s + 4\mu^s} ; \quad \kappa_2 = \frac{3k_n a}{3k^s + 4\mu^s} ; \quad \kappa_3 = \frac{3k_t a}{3k^s + 4\mu^s} ; \quad \kappa_4 = \frac{\mu^s}{3k^s + 4\mu^s} \quad (2.36)$$

Estas componentes foram obtidas e apresentadas por Aguiar e Maghous (2018) e coincidem de forma plena com os resultados obtidos por Lorenci (2013).

2.3.2.2 Distribuição de fraturas orientadas aleatoriamente

Considera-se agora o caso de microfaturas distribuídas com orientação completamente aleatória na matriz, sem direções ou regiões privilegiadas. A disposição destas descontinuidades garante que o comportamento macroscópico do meio possa ser tratado como isotrópico e, portanto, esta distribuição pode ser chamada de isotrópica. A forma das fraturas é a mesma do caso anterior (esferoides oblatos) e seu fator de aspecto também cumpre a condição: $X \ll 1$.

A orientação das fraturas, definida pelo vetor unitário \underline{n} no espaço 3D, pode ser estabelecida por duas coordenadas esféricas $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\varphi \in [0, \pi]$, tal como consta na figura 2.8.

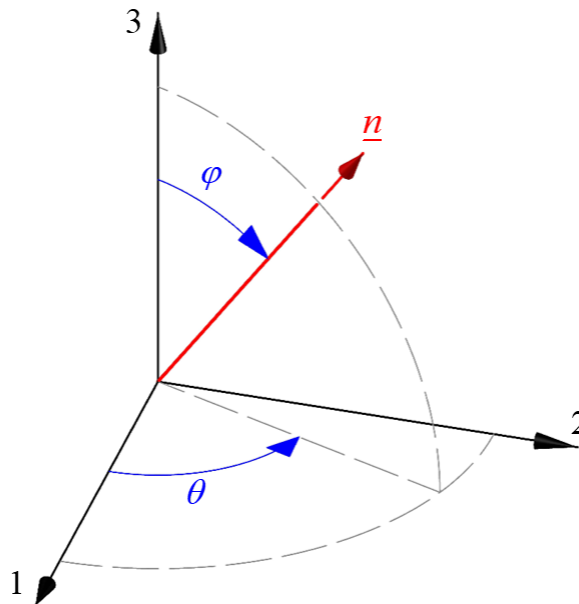


Figura 2.8: Orientação de fraturas por coordenadas esféricas

Devido à aleatoriedade das orientações das fraturas, o conjunto de todas essas possíveis orientações do vetor \underline{n} corresponde a uma esfera unitária. A integral I de uma quantidade

$\mathcal{Q}(\varphi, \theta)$ sobre a superfície da esfera, isto é, sobre todas as possíveis direções de \underline{n} , é definida como:

$$I = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \mathcal{Q}(\varphi, \theta) \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta \quad (2.37)$$

Segundo Advani e Tucker (1987), a orientação de uma inclusão pode ainda ser descrita de modo geral por meio de uma função de probabilidade de orientação $\psi(\varphi, \theta)$, a qual define a probabilidade do vetor \underline{n} estar orientado entre os ângulos $(\varphi_a) - (\varphi_a + d\varphi)$ e $(\theta_a) - (\theta_a + d\theta)$. Esta função precisa satisfazer certas condições físicas. Pode-se mencionar três condições importantes: a função $\psi(\varphi, \theta)$ deve ser periódica, a função $\psi(\varphi, \theta)$ deve ser normalizada e a função $\psi(\varphi, \theta)$ deve ser contínua.

No caso específico de uma distribuição perfeitamente aleatória de inclusões na matriz, com a mesma geometria e dimensões, a função distribuição de orientação $\psi(\varphi, \theta)$ possui um valor constante:

$$\psi(\varphi, \theta) = \frac{1}{4\pi} \quad (2.38)$$

Uma vez consideradas as hipóteses anteriores, a estimativa de Mori-Tanaka para o tensor de rigidez efetivo \mathbb{C}^{hom} , no caso de microfraturas com distribuição perfeitamente aleatória na matriz, é dada pela integração sobre todas as possíveis orientações das inclusões, ou seja, sobre a esfera unitária. Assim, a expressão para a estimativa define-se da seguinte maneira:

$$\mathbb{C}^{\text{hom}} = \lim_{X \rightarrow 0} \left(\overline{\mathbb{C}^s + \mathbb{C}^f : (\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^f - \mathbb{C}^s))^{-1}} \right) : \left(\overline{\mathbb{I} + (\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^f - \mathbb{C}^s))^{-1}} \right)^{-1} \quad (2.39)$$

onde o símbolo $\overline{\mathcal{Q}}$ denota a integral sobre as coordenadas esféricas angulares $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\varphi \in [0, \pi]$:

$$\overline{\mathcal{Q}} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} f \, \psi(\varphi, \theta) \, \mathcal{Q}(\varphi, \theta) \, \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta \quad (2.40)$$

O valor da fração volumétrica f de fraturas aleatórias foi definido na expressão (2.29). Como definido anteriormente, os tensores \mathbb{C}^s e \mathbb{C}^f são considerados como isotrópicos e, portanto, são

independentes dos ângulos φ e θ , desta forma podem ser utilizadas as mesmas expressões (2.32) e (2.34) para calcular ditos tensores.

No que diz respeito ao tensor de Hill $\mathbb{P} = \mathbb{S} : (\mathbb{C}^s)^{-1}$, este depende do tensor de Eshelby \mathbb{S} , o qual está inicialmente definido em coordenadas locais. Tal fato não interferia na distribuição de fraturas orientadas paralelamente, não obstante, para uma distribuição com orientações aleatórias é necessário expressar tal tensor \mathbb{S} em coordenadas globais (S_{ijkl}), pois cada fratura pode apresentar um sistema coordenado local diferente do global. Considerando S'_{mnop} como os termos do tensor de Eshelby em coordenadas locais, a mudança de base é expressada da seguinte maneira:

$$S_{ijkl} = q_{mi} q_{nj} q_{ok} q_{pl} S'_{mnop} \quad \text{com} \quad e_i = q_{ij} e'_j \quad (2.41)$$

Sendo e_i um vetor unitário no sistema global e e'_i o respectivo vetor unitário no sistema local.

Então, o tensor \underline{q} é definido mediante a seguinte expressão matricial:

$$\underline{q} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Como ressaltado anteriormente, o comportamento macroscópico do meio homogeneizado pode ser considerado como isotrópico devido à aleatoriedade perfeita na distribuição das fraturas. Isto permite afirmar que o tensor de rigidez elástico homogeneizado pode ser escrito como:

$$\mathbb{C}^{\text{hom}} = 3 k^{\text{hom}} \mathbb{J} + 2 \mu^{\text{hom}} \mathbb{K} \quad (2.43)$$

Sendo k^{hom} o módulo de compressão homogeneizado e μ^{hom} o módulo de cisalhamento homogeneizado. Estes módulos dependem das propriedades elásticas das componentes, assim como do tamanho das microfraturas e o parâmetro de densidade de fratura ε . No contexto da estimativa de Mori Tanaka, estes módulos são definidos como:

$$k^{\text{hom}} = \frac{k^s}{1 + \varepsilon \mathcal{M}_k} \quad ; \quad \mu^{\text{hom}} = \frac{\mu^s}{1 + \varepsilon \mathcal{M}_\mu} \quad (2.44)$$

onde as funções adimensionais $\mathcal{M}_k(k^s, \mu^s, ak_n, ak_t)$ e $\mathcal{M}_\mu(k^s, \mu^s, ak_n, ak_t)$ são apresentadas a seguir:

$$\mathcal{M}_k = \frac{\frac{4}{3}\pi k^s / \mu^s}{\pi\kappa_1 + ak_n / \mu^s} ; \mathcal{M}_\mu = \frac{16\pi \kappa_4}{15} \frac{6\kappa_2 + 4\kappa_3 + 9\pi\kappa_4(3\kappa_1 + \kappa_4)}{(3\pi\kappa_1\kappa_4 + \kappa_2)(4\kappa_3 + 9\pi\kappa_4(\kappa_1 + \kappa_4))} \quad (2.45)$$

Os parâmetros adimensionais κ_1 , κ_2 , κ_3 e κ_4 foram definidos na expressão (2.36). Finalmente, as componentes não nulas do tensor isotrópico \mathbb{C}^{hom} determinadas a partir da expressão (2.39) são:

$$\begin{aligned} C_{1111}^{\text{hom}} = C_{2222}^{\text{hom}} = C_{3333}^{\text{hom}} &= k^{\text{hom}} + \frac{4}{3}\mu^{\text{hom}} \\ C_{1122}^{\text{hom}} = C_{2211}^{\text{hom}} = C_{1133}^{\text{hom}} = C_{3311}^{\text{hom}} = C_{2233}^{\text{hom}} = C_{3322}^{\text{hom}} &= k^{\text{hom}} - \frac{2}{3}\mu^{\text{hom}} \\ C_{1212}^{\text{hom}} = C_{1313}^{\text{hom}} = C_{2323}^{\text{hom}} &= 2\mu^{\text{hom}} \end{aligned} \quad (2.46)$$

Estas componentes foram obtidas analiticamente e apresentadas por Aguiar e Maghous (2018) e coincidem de forma plena com os resultados obtidos por Maghous et al. (2014).

2.4 PROPRIEDADES VISCOELÁSTICAS HOMOGENEIZADAS DE UM MEIO FRATURADO

Na seção 2.3 foi desenvolvido o primeiro passo para a formulação das propriedades viscoelásticas macroscópicas de um meio fraturado. Nesta seção, será apresentado o segundo e último passo para atingir esse objetivo. Este passo consiste em uma combinação do teorema ou princípio de correspondência elástico-viscoelástico (Le et al., 2007) junto com a implementação de um procedimento específico para determinação da inversa da transformada de Carson-Laplace.

O princípio de correspondência elástico-viscoelástico incorpora a transformada de Carson-Laplace visando formular o problema viscoelástico, no domínio do tempo, em termos de um problema elástico equivalente no domínio de Carson-Laplace. Mediante este princípio, é possível aproveitar as propriedades elásticas do meio fraturado, apresentadas na seção anterior, para determinar as respectivas propriedades viscoelásticas. A seguir, apresenta-se as principais

características dos componentes do material fraturado e, posteriormente, a determinação do tensor de relaxação homogeneizado.

2.4.1 Comportamento Viscoelástico da Matriz e das Fraturas

Como mencionado na seção 2.2, o comportamento viscoelástico do meio fraturado será desenvolvido no âmbito da viscoelasticidade linear sem envelhecimento. Sendo a matriz e as fraturas os componentes do VER, é necessário definir suas respectivas leis do comportamento viscoelástico. Considerando uma condição de contorno de deformação homogênea aplicada no VER, são apresentadas as equações de estado para os componentes mencionados:

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{c}}^s \circ \underline{\underline{\varepsilon}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\underline{c}}^s(t-\tau) : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}(\tau) d\tau & \text{em } \Omega \setminus \omega \\ \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{k}} \circ [\underline{\underline{\xi}}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\underline{k}}(t-\tau) \cdot [\underline{\underline{\dot{\xi}}}] (\tau) d\tau & \text{ao longo de } \omega = \bigcup_i \omega_i \end{cases} \quad (2.47)$$

A expressão (2.47) tem como base a expressão (2.17), que descreve o comportamento de um material linear sem envelhecimento e onde o tensor de relaxação \mathbb{R} será denotado por $\underline{\underline{c}}^s$, que representa o tensor de relaxação da matriz.

Na expressão (2.47), o tensor $\underline{\underline{k}}$ representa o tensor de relaxação das fraturas. O argumento t corresponde à resposta instantânea do material, enquanto que o argumento τ representa a resposta diferida, ou seja, a história completa da deformação.

Percebe-se que a expressão (2.47) é a contrapartida viscosa da expressão (2.26). As derivadas do campo de deformação local $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}$ da matriz e do salto de deslocamento $[\underline{\underline{\dot{\xi}}}]$ na fratura, em relação a τ , devem ser entendidas no sentido das distribuições com o intuito de considerar possíveis descontinuidades desses campos no tempo.

Importa ressaltar que a determinação das propriedades viscoelásticas de ambos os componentes do material fraturado deveria estar baseada em procedimentos experimentais apropriados. No caso da matriz, as relações viscoelásticas $\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\varepsilon}}$ podem ser obtidas mediante ensaios clássicos de fluência. Não obstante, no caso das fraturas, a relação viscoelástica $\underline{\underline{T}} - [\underline{\underline{\xi}}]$ provavelmente requeira ensaios de laboratório específicos.

2.4.2 Determinação do Tensor de Relaxação Homogeneizado

A formulação das propriedades viscoelásticas sem envelhecimento de um meio homogeneizado equivale à determinação do tensor de relaxação homogeneizado \mathbb{R}^{hom} de quarta ordem, uma vez que a condição de contorno a considerar é deformação homogênea $\underline{\underline{\epsilon}}$ aplicada no meio fraturado. Neste contexto, a lei do comportamento macroscópico (homogeneizado) do meio viscoelástico fraturado pode ser definida da seguinte maneira:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{R}^{\text{hom}} \circ \underline{\underline{\epsilon}} \quad \text{com} \quad \mathbb{R}^{\text{hom}} = \langle \mathbb{C}^s \circ \mathbb{A} \rangle \quad (2.48)$$

Percebe-se que a expressão (2.48) é a contrapartida viscosa da expressão (2.28), onde $\mathbb{A}(x, \tau, t)$ é o tensor de concentração de deformações no âmbito da homogeneização viscoelástica linear e $\underline{\underline{\Sigma}}$ representa o tensor de tensões macroscópicas.

Para determinar o tensor \mathbb{R}^{hom} , torna-se necessária a implementação do princípio de correspondência elástico-viscoelástico, o qual está baseado na utilização da transformada de Carson-Laplace. A transformada de Carson-Laplace foi definida na expressão (2.18) e permite substituir os produtos de convolução por cálculos algébricos ordinários trabalhando em um espaço de tempo fictício ou denominado de espaço de Carson-Laplace.

No caso das relações viscoelásticas da expressão (2.47), a aplicação da transformada de Carson-Laplace gera o seguinte:

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}^*(p) = \mathbb{C}^{s*}(p) : \underline{\underline{\epsilon}}^*(p) & \text{em } \Omega \setminus \omega \\ \underline{\underline{T}}^*(p) = \underline{\underline{k}}^*(p) \cdot [\underline{\underline{\xi}}^*]^{-1}(p) & \text{ao longo de } \omega = \bigcup_i \omega_i \end{cases} \quad (2.49)$$

Na expressão anterior, observam-se relações do tipo elástico no espaço de Carson-Laplace. Do mesmo modo, o procedimento e resultados descritos na seção 2.3, no contexto da elasticidade linear para a determinação do \mathbb{C}^{hom} , podem ser apresentados em termos de transformadas de Carson-Laplace. Com base na expressão (2.48), este tensor de relaxação pode ser definido no espaço de Laplace da seguinte forma:

$$\mathbb{R}^{\text{hom}*}(p) = \langle \mathbb{C}^{s*}(p) : \mathbb{A}_v(p) \rangle \quad (2.50)$$

Sendo $\mathbb{A}_v = \mathbb{A}^*$ o tensor de concentração de deformações associado a um VER fictício que se caracteriza por ter a mesma geometria do VER real e cujos componentes são elásticos com rigidez \mathbb{C}^{v*} para a matriz e \underline{k}^* para as fraturas.

Ressalta-se que em relação a forma e orientação das fraturas, na presente seção, estas conservam as mesmas características daquelas descritas no âmbito da elasticidade linear: fraturas oblatas podendo ser orientadas, tanto paralelamente quanto aleatoriamente.

No espaço de Carson-Laplace e segundo o procedimento de análise elástica da seção 2.3, o tensor $\mathbb{R}^{\text{hom}*}$ deve ser avaliado com a estimativa de Mori-Tanaka. Uma vez realizada a aplicação da estimativa mencionada, torna-se fundamental expressar os componentes do tensor de relaxação no espaço de tempo real. Portanto, origina-se a necessidade da implementação de um procedimento que permita determinar a inversa da transformada de Carson-Laplace.

2.4.2.1 Determinação da inversa da transformada de Carson-Laplace

A obtenção das propriedades viscoelásticas homogeneizadas, havendo calculado previamente o tensor $\mathbb{R}^{\text{hom}*}$, consiste em transformar este tensor do domínio de Carson-Laplace ao domínio do tempo mediante um processo de inversão $\mathbb{R}^{\text{hom}} = \mathcal{L}_c^{-1}(\mathbb{R}^{\text{hom}*})$. A este respeito, vários procedimentos analíticos e numéricos têm sido propostos na literatura. Não obstante, a maioria destes métodos foram formulados originalmente para lidar com funções generalizadas no domínio de Laplace e, portanto, envolvem operações matemáticas ou computacionais complexas.

Com o propósito de obter uma simplificação matemática, um procedimento analítico mais específico foi desenvolvido por Aguiar e Maghous (2018). Este procedimento foi concebido para calcular a transformada inversa de Carson-Laplace do tensor de relaxação $\mathbb{R}^{\text{hom}*}$, obtido mediante o esquema de homogeneização de Mori-Tanaka, quando são utilizados modelos reológicos viscoelásticos clássicos para a matriz e para as fraturas. Entre estes modelos, temos os modelos de Maxwell, Maxwell generalizado, sólido linear padrão, Kelvin-Voigt generalizado ou o modelo de Burger. A seguir, apresenta-se o mencionado procedimento.

Na sequência, as componentes não nulas do tensor de relaxação $\mathbb{R}^{\text{hom}*}$ serão denotadas genericamente por $R^{\text{hom}*}$. Importa ressaltar que quando utilizados os modelos reológicos

viscoelásticos mencionados acima, cumpre-se automaticamente a seguinte condição: a função de relaxação R^{hom^*} se encontra como uma divisão de duas funções polinomiais que tem o mesmo grau em relação à variável p do espaço fictício de Carson-Laplace:

$$R^{\text{hom}^*}(p) = \frac{A(p)}{B(p)} \quad (2.51)$$

Os polinômios $A(p)$ e $B(p)$ podem ser expressos da seguinte forma:

$$A(p) = \sum_{k=0}^n a_k p^k \quad ; \quad B(p) = \sum_{k=0}^n b_k p^k = \prod_{k=1}^z (p - R_k)^{g_k} \quad \text{com} \quad b_n = 1 \quad (2.52)$$

onde o número inteiro n é o grau comum dos polinômios $A(p)$ e $B(p)$, os escalares a_k e b_k são coeficientes reais que dependem do modelo reológico viscoelástico adotado para a matriz e para as fraturas. O inteiro z é o número de polos principais de $B(p)$, o escalar R_k é a k -ésima raiz do polinômio e g_k a multiplicidade correspondente. Lembra-se que $\sum_{k=1}^z g_k = n$.

Pode-se definir a transformada de Laplace da função de relaxação homogeneizada $R^{\text{hom}^*}(p)$ como: $F(p) = R^{\text{hom}^*}(p) / p$. A aparição da função $F(p)$ deve-se à maior facilidade de encontrar a transformada inversa de Laplace do que encontrar a transformada inversa de Carson-Laplace.

Então, cumpre-se o seguinte: $\mathcal{L}_c^{-1}(R^{\text{hom}^*}) = \mathcal{L}^{-1}(R^{\text{hom}^*} / p) = \mathcal{L}^{-1}(F)$. A função $F(p)$ pode ser convenientemente rescrita da seguinte forma:

$$F(p) = \frac{R^{\text{hom}^*}(p)}{p} = \frac{a_0}{pb_0} + \frac{C(p)}{B(p)} \quad (2.53)$$

$$C(p) = \frac{1}{b_0} \sum_{k=1}^n [(b_0 a_k - a_0 b_k) p^{k-1}]$$

Observa-se na expressão (2.53) que a função apresenta uma parte instantânea e uma parte diferida. Embora o parâmetro b_0 reflita os comportamentos da matriz e das fraturas, este torna-se nulo (i.e., $b_0 = 0$) quando é adotado um modelo reológico sem elasticidade instantânea, por

exemplo, o modelo de Kelvin de dois elementos. Esta situação produz um comportamento viscoelástico homogeneizado sem elasticidade instantânea. Por uma questão de simplicidade, na seqüência, um valor não nulo será admitido para o parâmetro b_0 (i.e., $b_0 \neq 0$) e, portanto, não serão considerados, neste trabalho, modelos reológicos que não apresentam elasticidade instantânea.

Aplica-se a decomposição em frações parciais na função racional $C(p)/B(p)$ da expressão (2.53). Obtem-se o seguinte:

$$F(p) = \frac{a_0}{pb_0} + \sum_{i=1}^z \sum_{k=1}^{g_i} \frac{D_{i,k}}{(p-R_i)^k} \quad (2.54)$$

$$D_{i,k} = \frac{1}{(g_i - k)!} \frac{\partial^{(g_i - k)}}{\partial p^{(g_i - k)}} \left[\frac{C(p)}{B(p)} (p - R_i)^{g_i} \right]_{p=R_i}$$

Procede-se a calcular a transformada inversa de Laplace da função $F(p)$ apresentada na expressão (2.54). Neste caso, este cálculo pode ser feito mediante formulas clássicas encontradas na literatura. Portanto:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(p)] = R^{\text{hom}}(t) = \left[\frac{a_0}{b_0} + \sum_{i=1}^z \sum_{k=1}^{g_i} \frac{D_{i,k}}{(k-1)!} t^{k-1} e^{R_i t} \right] Y(t) \quad (2.55)$$

onde $Y(t)$ é a função de Heaviside ou função degrau na origem. Os termos $t^{k-1} e^{R_i t}$ representam a parcela diferida decrescente do comportamento viscoelástico homogeneizado.

$$R^{\text{hom}}(t) = \left[\frac{a_0}{b_0} + \sum_{i=1}^n D_i e^{R_i t} \right] Y(t) \quad (2.56)$$

$$D_i = \left[\frac{C(p)}{\partial B(p) / \partial p} \right]_{p=R_i} = \left[\frac{C(p)(p - R_i)}{B(p)} \right]_{p=R_i}$$

A expressão (2.56) pode ser considerada uma simplificação da expressão (2.55) sempre que as raízes do polinômio $B(p)$ não se repitam, isto é, o polinômio $B(p)$ deve admitir apenas raízes simples ($g_k = 1 \quad \forall k = 1, n$), o que de fato acontece na maioria dos modelos reológicos considerados na descrição do comportamento viscoelástico dos componentes do meio.

No caso específico de isotropia macroscópica, como visto na distribuição de fraturas orientadas aleatoriamente, a função de relaxação genérica R^{hom^*} denotará o módulo de compressão aparente k^{hom^*} ou o módulo de cisalhamento aparente μ^{hom^*} . Consequentemente, no espaço do tempo, $R^{\text{hom}}(t)$ estará se referindo ao módulo de relaxação em compressão $k^{\text{hom}}(t)$ ou ao módulo de relaxação em cisalhamento $\mu^{\text{hom}}(t)$. Lembra-se que $R^{\text{hom}}(t)$ representa qualquer componente não nulo do tensor de relaxação $\mathbb{R}^{\text{hom}}(t)$, o qual pode ser definido, neste contexto, da seguinte maneira:

$$\mathbb{R}^{\text{hom}}(t) = 3 k^{\text{hom}}(t) \mathbb{J} + 2 \mu^{\text{hom}}(t) \mathbb{K} \quad (2.57)$$

Sendo definidos os respectivos módulos $k^{\text{hom}}(t)$ e $\mu^{\text{hom}}(t)$ como:

$$k^{\text{hom}}(t) = \left[\frac{a_0^k}{b_0^k} + \sum_{i=1}^n D_i^k e^{R_i^k t} \right] Y(t) \quad ; \quad \mu^{\text{hom}}(t) = \left[\frac{a_0^\mu}{b_0^\mu} + \sum_{i=1}^n D_i^\mu e^{R_i^\mu t} \right] Y(t) \quad (2.58)$$

2.4.2.2 Modelo Viscoelástico Homogeneizado Exato

A denominação de modelo exato deve-se, principalmente, ao fato de poder representar exatamente o comportamento do material homogeneizado quando comparado com o resultado analítico da transformada inversa de Carson-Laplace e sempre que as restrições impostas a esta última sejam cumpridas (ver seção anterior).

Com o intuito de identificar um modelo reológico que represente o comportamento do material na escala macroscópica, observa-se que o comportamento descrito na expressão (2.56) é matematicamente equivalente à função de relaxação de um modelo reológico denominado de Maxwell generalizado. Este modelo é uma associação em paralelo de um modelo de mola simples com n modelos de Maxwell como mostrado na figura 2.9.

O modelo de Maxwell generalizado é um modelo clássico utilizado para representar materiais viscoelásticos lineares sem envelhecimento e sua respectiva função de relaxação $R_{G-\text{Max}}$ é definida da seguinte maneira:

$$R_{G-\text{Max}}(t) = \left[E_0 + \sum_{i=1}^n E_i e^{\left(\frac{-E_i}{\eta_i} t \right)} \right] Y(t) \quad (2.59)$$

sendo E_i a rigidez da respectiva mola elástica e η_i a viscosidade do respectivo amortecedor no ramo i (elemento Maxwell) do modelo generalizado. E_0 é a rigidez do elemento de mola simples do modelo.

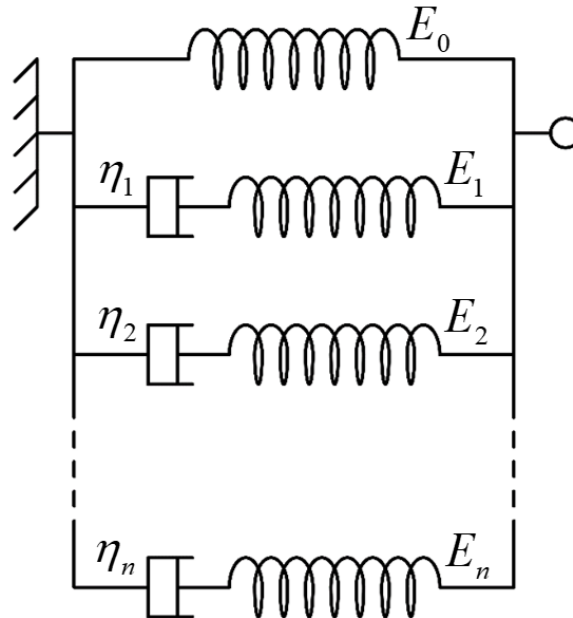


Figura 2.9: Modelo de Maxwell generalizado associado com a função $R^{\text{hom}}(t)$

Após a comparação das expressões (2.56) e (2.59), obtém-se as seguintes relações:

$$E_0 = a_0 / b_0 \quad ; \quad \begin{cases} E_i = D_i \\ -E_i / \eta_i = R_i \Rightarrow \eta_i = -D_i / R_i \end{cases} \quad 1 \leq i \leq n \quad (2.60)$$

Define-se o tempo característico de relaxação como $\tau_i = \eta_i / E_i$. O conjunto de todos os tempos característicos de relaxação constitui o denominado espectro de relaxação. Então, verifica-se que este espectro, associado com o comportamento viscoelástico efetivo, permanece discreto. Segundo Aguiar e Maghous (2018), as prováveis causas desta condição do espectro de relaxação são: o particular esquema de homogeneização utilizado junto com a admissão das fraturas como interfaces bidimensionais na modelagem, desconsiderando os efeitos geométricos tridimensionais destas inclusões.

Percebe-se também que as raízes R_i do polinômio $B(p)$ representam (em valor absoluto) a inversa dos tempos característicos τ_i para o comportamento macroscópico. Sendo que os

tempos característicos são sempre positivos, pode-se inferir que as raízes R_i são escalares negativos (Aguiar e Maghous, 2018).

No contexto da isotropia macroscópica, foi mencionado em seções anteriores que $R^{\text{hom}}(t)$ é uma função de relaxação genérica e, portanto, pode se referir tanto ao módulo de relaxação em compressão $k^{\text{hom}}(t)$ quanto ao módulo de relaxação em cisalhamento $\mu^{\text{hom}}(t)$.

Infere-se, então, que o comportamento viscoelástico em compressão e em cisalhamento do meio fraturado poder ser representado de forma exata por meio de um modelo reológico de Maxwell generalizado. Lembra-se que o tensor de relaxação homogeneizado isotrópico é definido da seguinte forma:

$$\mathbb{R}^{\text{hom}}(t) = 3 k^{\text{hom}}(t) \mathbb{J} + 2 \mu^{\text{hom}}(t) \mathbb{K} \quad (2.61)$$

onde o modelo de Maxwell generalizado se associa com os módulos de compressão e de cisalhamento do meio homogeneizado segundo o mostrado na figura 2.10.

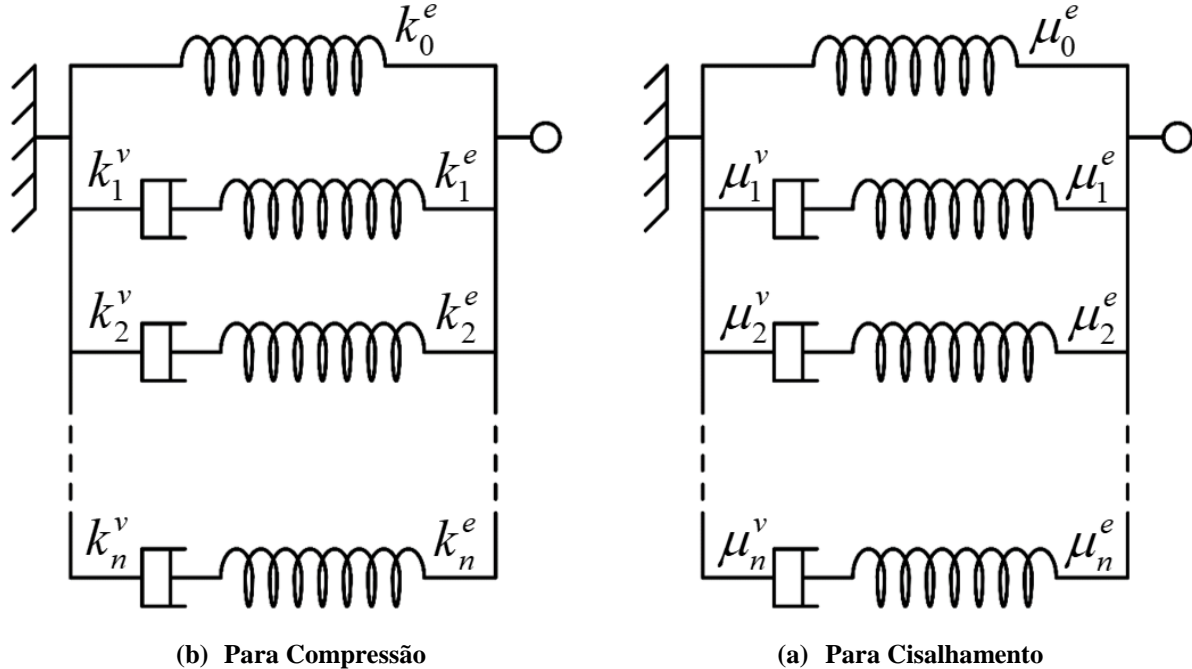


Figura 2.10: Modelos de Maxwell generalizado para os módulos viscoelásticos k^{hom} e μ^{hom}

As funções de relaxação associadas ao comportamento em compressão $R_{G-\text{Max}}^k$ e em cisalhamento $R_{G-\text{Max}}^\mu$ são definidas a seguir:

$$R_{G-Max}^k(t) = \left[k_0^e + \sum_{i=1}^n k_i^e e^{\left(\frac{k_i^e}{k_i^v} t \right)} \right] Y(t) \quad ; \quad R_{G-Max}^\mu(t) = \left[\mu_0^e + \sum_{i=1}^n \mu_i^e e^{\left(\frac{\mu_i^e}{\mu_i^v} t \right)} \right] Y(t) \quad (2.62)$$

Lembra-se que a expressão (2.58) apresenta as definições dos módulos de compressão e cisalhamento e quando comparada com a expressão (2.62) obtém-se as seguintes relações:

$$k_0^e = a_0^k / b_0^k \quad ; \quad \begin{cases} k_i^e = D_i^k \\ -k_i^e / k_i^v = R_i^k \Rightarrow k_i^v = -D_i^k / R_i^k \end{cases} \quad 1 \leq i \leq n \quad (2.63)$$

$$\mu_0^e = a_0^\mu / b_0^\mu \quad ; \quad \begin{cases} \mu_i^e = D_i^\mu \\ -\mu_i^e / \mu_i^v = R_i^\mu \Rightarrow \mu_i^v = -D_i^\mu / R_i^\mu \end{cases} \quad 1 \leq i \leq n$$

Nas expressões anteriores, os superíndices k e μ são utilizados para se referir aos módulos de compressão e cisalhamento, respectivamente. O parâmetro n é o número de ramos de elementos Maxwell montados em paralelo com a mola simples no modelo generalizado e depende dos modelos reológicos adotados para descrever os comportamentos individuais da matriz e das fraturas. Este parâmetro coincide com o número de raízes (grau) do polinômio $B(p)$.

Finalmente, considerando as restrições relativas aos modelos reológicos adotados para a matriz e as fraturas e ao esquema de homogeneização linear utilizado, é possível afirmar que um modelo de Maxwell generalizado adequado sempre poderá descrever com precisão o comportamento viscoelástico geral do meio fraturado.

2.4.2.3 Distribuição aleatória de fraturas paralelas

Conforme mencionado anteriormente, torna-se necessário utilizar o princípio de correspondência elástico-viscoelástico para transformar o problema viscoelástico em um problema elástico equivalente trabalhando em um espaço fictício denominado de Carson-Laplace. Então, avalia-se o tensor $\mathbb{R}^{\text{hom}*}$ com a estimativa de Mori-Tanaka em um contexto elástico linear. Esta avaliação foi realizada na seção 2.3.2.1 para obter as propriedades elásticas de um meio com fraturas oblatas paralelas distribuídas aleatoriamente e, portanto, estes resultados podem ser aproveitados nesta seção para determinar o tensor de relaxação no domínio de Carson-Laplace.

Os componentes não nulos do tensor $\mathbb{R}^{\text{hom}*}$ são a contrapartida viscosa daqueles apresentados na expressão (2.35) e são exibidos a seguir:

$$\begin{aligned}
R_{1111}^{\text{hom}*} &= R_{2222}^{\text{hom}*} = (3k^{s*} + 4\mu^{s*}) \frac{\kappa_2 + \pi(1 + 16/3\varepsilon)\kappa_1(1 - \kappa_1)}{3\kappa_2 + 3\pi\kappa_1(1 - \kappa_1) + 4\pi\varepsilon} \\
R_{3333}^{\text{hom}*} &= (3k^{s*} + 4\mu^{s*}) \frac{\kappa_2 + \pi\kappa_1(1 - \kappa_1)}{3\kappa_2 + 3\pi\kappa_1(1 - \kappa_1) + 4\pi\varepsilon} \\
R_{1122}^{\text{hom}*} &= R_{2211}^{\text{hom}*} = (3k^{s*} - 2\mu^{s*}) \frac{\kappa_2 + \pi(\kappa_1 + 8/3\varepsilon)(1 - \kappa_1)}{3\kappa_2 + 3\pi\kappa_1(1 - \kappa_1) + 4\pi\varepsilon} \\
R_{1133}^{\text{hom}*} &= R_{2233}^{\text{hom}*} = R_{3311}^{\text{hom}*} = R_{3322}^{\text{hom}*} = (3k^{s*} - 2\mu^{s*}) \frac{\kappa_2 + \pi\kappa_1(1 - \kappa_1)}{3\kappa_2 + 3\pi\kappa_1(1 - \kappa_1) + 4\pi\varepsilon} \\
R_{1313}^{\text{hom}*} &= R_{2323}^{\text{hom}*} = (2\mu^{s*}) \frac{4\kappa_3 + \pi(1 - \kappa_1)(1 + 2\kappa_1)}{4\kappa_3 + 16/3\pi\varepsilon(1 - \kappa_1) + \pi(1 + 2\kappa_1)(1 - \kappa_1)} \\
R_{1212}^{\text{hom}*} &= 2\mu^{s*}
\end{aligned} \tag{2.64}$$

onde os coeficientes adimensionais κ_1 , κ_2 , κ_3 são a contrapartida viscosa da expressão (2.36) e são apresentados em seguida:

$$\kappa_1 = \frac{3k^{s*} + \mu^{s*}}{3k^{s*} + 4\mu^{s*}} \quad ; \quad \kappa_2 = \frac{3k_n^* a}{3k^{s*} + 4\mu^{s*}} \quad ; \quad \kappa_3 = \frac{3k_t^* a}{3k^{s*} + 4\mu^{s*}} \tag{2.65}$$

onde os parâmetros k^{s*} e μ^{s*} representam, respectivamente, o módulo de relaxação em compressão e o módulo de relaxação em cisalhamento da matriz no domínio de Carson-Laplace. Os parâmetros k_n^* e k_t^* representam o módulo de relaxação em compressão e o módulo de relaxação em cisalhamento na interação das faces das fraturas no domínio de Carson-Laplace. Conjuntamente, no domínio de Carson-Laplace, o tensor de rigidez da matriz \mathbb{C}^{s*} e o tensor \mathbb{C}^{f*} relacionado com a rigidez das fraturas podem ser formulados da seguinte forma:

$$\mathbb{C}^{s*} = 3k^{s*} \mathbb{J} + 2\mu^{s*} \mathbb{K} \tag{2.66}$$

$$\mathbb{C}^{f*} = 3X a k^{f*} \mathbb{J} + 2X a \mu^{f*} \mathbb{K} \quad \text{com} \quad k^{f*} = k_n^* - \frac{4}{3}k_t^* \quad ; \quad \mu^{f*} = k_t^*$$

Importa ressaltar que os parâmetros (k^{s*}, μ^{s*}) e (k_n^*, k_t^*) são dependentes do modelo reológico admitido, tanto para a matriz quanto para as fraturas.

Lembra-se que os valores de k_n^* e k_t^* devem ser obtidos em laboratório. Finalmente, para determinar os componentes não nulos do tensor $\mathbb{R}^{\text{hom}}(t)$, no domínio do tempo, aplica-se o procedimento descrito na seção 2.4.2.1.

2.4.2.4 Distribuição de fraturas orientadas aleatoriamente

Tal como o realizado na seção anterior com a distribuição aleatória de fraturas paralelas, trabalha-se inicialmente no espaço fictício de Laplace para lidar com o problema elástico equivalente, o que permite utilizar os resultados elásticos obtidos na seção 2.3.2.2 para a distribuição de fraturas oblatas orientadas aleatoriamente e determinar o tensor de relaxação $\mathbb{R}^{\text{hom}*}$ no domínio de Carson-Laplace.

Pressupõe-se, como na seção 2.3.2.2, uma distribuição perfeitamente aleatória das fraturas, o que possibilita considerar o meio homogeneizado como isotrópico. Portanto, o tensor de relaxação homogeneizado $\mathbb{R}^{\text{hom}*}$ pode ser definido da seguinte maneira:

$$\mathbb{R}^{\text{hom}*} = 3 k^{\text{hom}*} \mathbb{J} + 2 \mu^{\text{hom}*} \mathbb{K} \quad (2.67)$$

onde $k^{\text{hom}*}$ e $\mu^{\text{hom}*}$ representam, respectivamente, a transformada de Carson-Laplace do módulo de relaxação homogeneizado em compressão ($t \rightarrow k^{\text{hom}}(t)$) e do módulo de relaxação homogeneizado em cisalhamento ($t \rightarrow \mu^{\text{hom}}(t)$). As expressões para estes módulos, no domínio de Carson-Laplace, são deduzidas a partir da expressão (2.44) e apresentam-se a seguir:

$$k^{\text{hom}*} = \frac{k^{s*}}{1 + \varepsilon \mathcal{M}_k} \quad ; \quad \mu^{\text{hom}*} = \frac{\mu^{s*}}{1 + \varepsilon \mathcal{M}_\mu} \quad (2.68)$$

onde as funções adimensionais $\mathcal{M}_k(k^{s*}, \mu^{s*}, ak_n^*, ak_t^*)$ e $\mathcal{M}_\mu(k^{s*}, \mu^{s*}, ak_n^*, ak_t^*)$ são a contrapartida viscosa da expressão (2.45) e definem-se da seguinte forma:

$$\mathcal{M}_k = \frac{\frac{4}{3} \pi k^{s*} / \mu^{s*}}{\pi \kappa_1 + ak_n^* / \mu^{s*}} \quad (2.69)$$

$$\mathcal{M}_\mu = \frac{16\pi \kappa_4}{15} \frac{6\kappa_2 + 4\kappa_3 + 9\pi\kappa_4(3\kappa_1 + \kappa_4)}{(3\pi\kappa_1\kappa_4 + \kappa_2)(4\kappa_3 + 9\pi\kappa_4(\kappa_1 + \kappa_4))} \quad (2.70)$$

Os parâmetros adimensionais κ_1 , κ_2 e κ_3 foram definidos na expressão (2.65) e o parâmetro κ_4 é apresentado a seguir:

$$\kappa_4 = \frac{\mu^{s^*}}{3k^{s^*} + 4\mu^{s^*}} \quad (2.71)$$

Lembra-se que os parâmetros (k^{s^*}, μ^{s^*}) e (k_n^*, k_t^*) são dependentes do modelo reológico admitido tanto para a matriz quanto para as fraturas, e empregado para descrever o respectivo comportamento viscoelástico. Da mesma forma, o comportamento da matriz e da fratura podem ser descritos pela expressão (2.66) desde que os tais $(\mathbb{C}^{s^*}$ e $\mathbb{C}^{f^*})$ sejam considerados como isotrópicos.

Consequentemente, os componentes não nulos do tensor isótropo $\mathbb{R}^{\text{hom}^*}$ são a contrapartida viscosa daqueles apresentados na expressão (2.46) e são exibidos a seguir:

$$\begin{aligned} R_{1111}^{\text{hom}^*} &= R_{2222}^{\text{hom}^*} = R_{3333}^{\text{hom}^*} = k^{\text{hom}^*} + \frac{4}{3}\mu^{\text{hom}^*} \\ R_{1122}^{\text{hom}^*} &= R_{2211}^{\text{hom}^*} = R_{1133}^{\text{hom}^*} = R_{3311}^{\text{hom}^*} = R_{2233}^{\text{hom}^*} = R_{3322}^{\text{hom}^*} = k^{\text{hom}^*} - \frac{2}{3}\mu^{\text{hom}^*} \\ R_{1212}^{\text{hom}^*} &= R_{1313}^{\text{hom}^*} = R_{2323}^{\text{hom}^*} = 2\mu^{\text{hom}^*} \end{aligned} \quad (2.72)$$

Finalmente, para determinar os componentes não nulos do tensor $\mathbb{R}^{\text{hom}}(t)$, no domínio do tempo, aplica-se o procedimento descrito na seção 2.4.2.1.

2.4.2.5 Considerações Importantes na Determinação do Tensor de Relaxação Homogeneizado

Tal como descrito por Aguiar e Maghous (2018), o procedimento completo para determinar uma função de relaxação homogeneizada genérica $R^{\text{hom}}(t)$ é essencialmente analítico. Em razão disso, na sequência, serão mencionados alguns pontos importantes que devem ser considerados no processo analítico.

Primeiramente, no domínio de Carson-Laplace, deve-se definir o comportamento viscoelástico linear sem envelhecimento $(\mathbb{C}^{s^*}$ e $\mathbb{C}^{f^*})$ dos componentes do material fraturado. Para isto, torna-se necessário escolher o modelo reológico unidimensional que descreve o comportamento da matriz e das fraturas. Estes modelos reológicos unidimensionais serão transpostos ao contexto

tensorial, pois o objetivo final é a descrição do comportamento tridimensional homogeneizado do material fraturado.

Os modelos reológicos se compõem de elementos simples (molas e amortecedores) ou de uma combinação destes elementos em diversas configurações (Maxwell, Kelvin-Voigt, Burger, etc.). Cada elemento simples de um modelo reológico tem um comportamento definido mediante uma equação de estado que depende do tipo de elemento (mola ou amortecedor), da configuração do modelo reológico e do componente do meio fraturado (matriz ou fratura) que está sendo descrito pelo modelo.

A figura 2.11 mostra os parâmetros correspondentes a cada tipo de elemento simples de um modelo reológico que pode estar representando o comportamento de uma matriz ou de uma fratura.

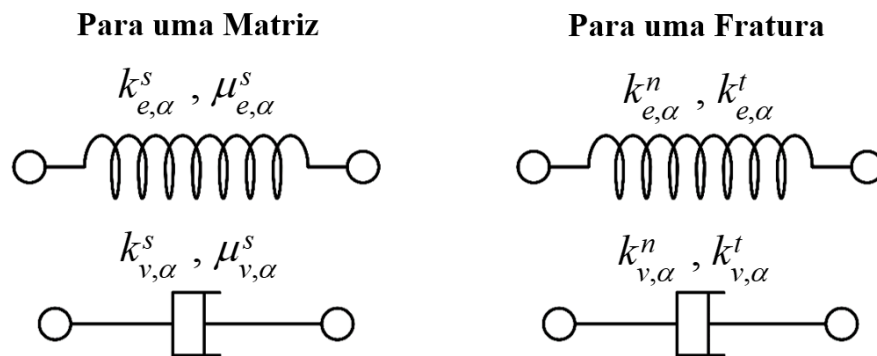


Figura 2.11: Parâmetros dos elementos de um modelo reológico

No caso de modelos reológicos descrevendo o comportamento de uma matriz isotrópica linear, as equações de estado, no contexto tensorial, relacionadas à mola e ao amortecedor do modelo são definidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} &= \mathbb{C}_{e,\alpha}^s : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad \text{com} \quad \mathbb{C}_{e,\alpha}^s = 3 k_{e,\alpha}^s \mathbb{J} + 2 \mu_{e,\alpha}^s \mathbb{K} \\ \underline{\underline{\sigma}} &= \mathbb{C}_{v,\alpha}^s : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} \quad \text{com} \quad \mathbb{C}_{v,\alpha}^s = 3 k_{v,\alpha}^s \mathbb{J} + 2 \mu_{v,\alpha}^s \mathbb{K} \end{aligned} \quad (2.73)$$

Onde as rigidezes do elemento de mola para o comportamento em compressão e para o comportamento em cisalhamento são, respectivamente, $k_{e,\alpha}^s$ e $\mu_{e,\alpha}^s$. A viscosidade do elemento de amortecedor para o comportamento em compressão e para o comportamento em cisalhamento são, respectivamente, $k_{v,\alpha}^s$ e $\mu_{v,\alpha}^s$. O superíndice s corresponde à matriz, o

subíndice e está relacionado com a parte elástica do comportamento, enquanto que v representa a parte viscosa. O subíndice α pode ser $\alpha = m, M, K$ e depende da configuração a que pertence o elemento do modelo. Para o modelo de mola simples utiliza-se m , para a configuração de Maxwell utiliza-se M e para a configuração de Kelvin, K . Para o caso de um modelo de molas simples, só pode ser aplicável a parte elástica da expressão (2.73).

No caso de modelos reológicos descrevendo o comportamento das fraturas que transmitem esforços entre suas faces, as equações de estado, no contexto tensorial, relacionadas à mola e ao amortecedor do modelo são definidas da seguinte forma:

$$\underline{T} = \underline{k}_{e,\alpha} \cdot \left[\underline{\xi} \right] \quad \text{com} \quad \underline{k}_{e,\alpha} = k_{e,\alpha}^n \underline{n} \otimes \underline{n} + k_{e,\alpha}^t (\underline{t} \otimes \underline{t} + \underline{t}' \otimes \underline{t}') \quad (2.74)$$

$$\underline{T} = \underline{k}_{v,\alpha} \cdot \left[\dot{\underline{\xi}} \right] \quad \text{com} \quad \underline{k}_{v,\alpha} = k_{v,\alpha}^n \underline{n} \otimes \underline{n} + k_{v,\alpha}^t (\underline{t} \otimes \underline{t} + \underline{t}' \otimes \underline{t}')$$

onde as rigidezes do elemento de mola para o comportamento sob esforço normal e para o comportamento sob esforço tangencial são, respectivamente, $k_{e,\alpha}^n$ e $k_{e,\alpha}^t$. Os parâmetros de viscosidade do elemento de amortecedor para o comportamento viscoso na direção normal e na direção tangencial das fraturas são, respectivamente, $k_{v,\alpha}^n$ e $k_{v,\alpha}^t$. Os subíndices são os mesmos do caso anterior. Para o caso de um modelo de molas simples, só pode ser aplicável a parte elástica da expressão (2.74): $\underline{T} = \underline{k}_{e,\alpha} \cdot \left[\underline{\xi} \right]$.

Como mencionado anteriormente, os modelos reológicos clássicos que podem ser utilizados na representação do comportamento da matriz e das fraturas incluem o modelo de mola, de Maxwell, de Kelvin-Voigt e de Burger, os quais servirão para definir as expressões dos módulos de compressão e de cisalhamento aparentes (k^{s*} , μ^{s*}), no caso da matriz, e as rigidezes normal e tangencial aparentes (k_n^* , k_t^*), no caso de fraturas.

A seguir, apresentam-se as expressões relativas a estes parâmetros, tendo em vista os quatro modelos reológicos assinalados acima. No caso do modelo reológico de mola simples, a Figura 2.12 exhibe os parâmetros do modelo utilizados tanto para a representação do comportamento de uma matriz quanto para a representação do comportamento das fraturas.

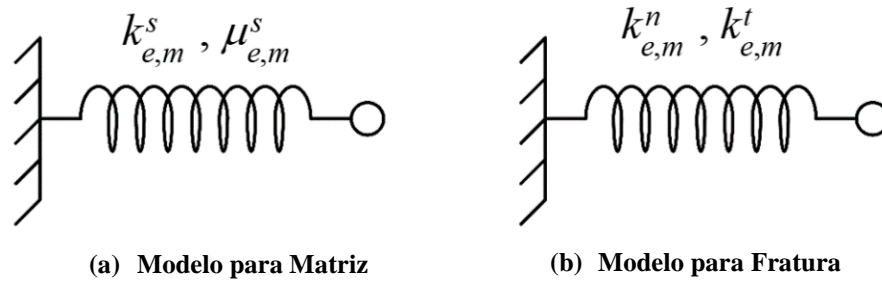


Figura 2.12: Modelo de mola simples no caso de uma matriz e no caso de fraturas

As expressões correspondentes aos módulos de compressão e de cisalhamento aparentes da matriz são apresentadas a seguir:

$$k^{s*} = k_{e,m}^s \quad ; \quad \mu^{s*} = \mu_{e,m}^s \quad (2.75)$$

As expressões correspondentes as rigidezes normal e tangencial aparentes da fratura são apresentadas a seguir:

$$k_n^* = k_{e,m}^n \quad ; \quad k_t^* = k_{e,m}^t \quad (2.76)$$

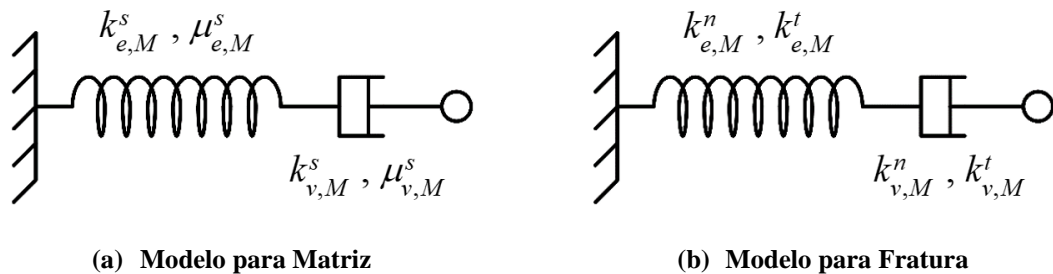


Figura 2.13: Modelo de Maxwell no caso de uma matriz e no caso de fraturas

No caso do modelo reológico de Maxwell, a Figura 2.13 exhibe os parâmetros do modelo utilizados tanto para a representação do comportamento viscoelástico de uma matriz quanto para a representação do comportamento viscoelástico das fraturas.

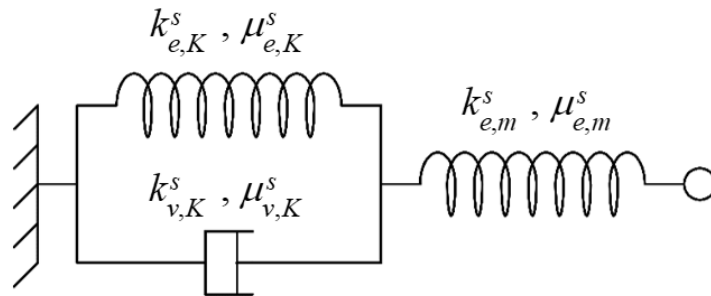
As expressões correspondentes aos módulos de compressão e de cisalhamento aparentes da matriz são apresentadas a seguir:

$$k^{s*} = \frac{P k_{v,M}^s k_{e,M}^s}{P k_{v,M}^s + k_{e,M}^s} \quad ; \quad \mu^{s*} = \frac{P \mu_{v,M}^s \mu_{e,M}^s}{P \mu_{v,M}^s + \mu_{e,M}^s} \quad (2.77)$$

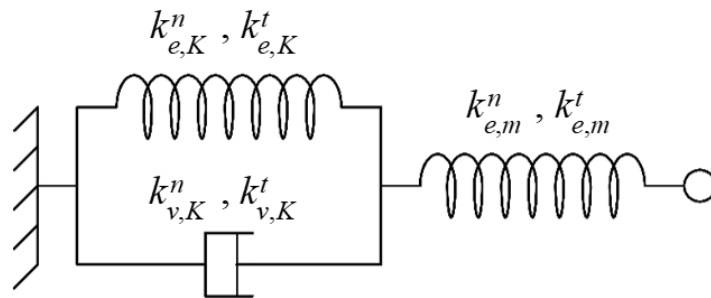
As expressões correspondentes as rigidezes normal e tangencial aparentes da fratura são apresentadas a seguir:

$$k_n^* = \frac{p k_{v,M}^n k_{e,M}^n}{p k_{v,M}^n + k_{e,M}^n} \quad ; \quad k_t^* = \frac{p k_{v,M}^t k_{e,M}^t}{p k_{v,M}^t + k_{e,M}^t} \quad (2.78)$$

sendo p uma variável fictícia no espaço de Carson-Laplace. No caso do modelo reológico de Kelvin-Voigt, a Figura 2.14 exhibe os parâmetros do modelo utilizados tanto para a representação do comportamento viscoelástico de uma matriz quanto para a representação do comportamento viscoelástico das fraturas.



(a) Modelo para Matriz



(b) Modelo para Fratura

Figura 2.14: Modelo de Kelvin-Voigt no caso de uma matriz e no caso de fraturas

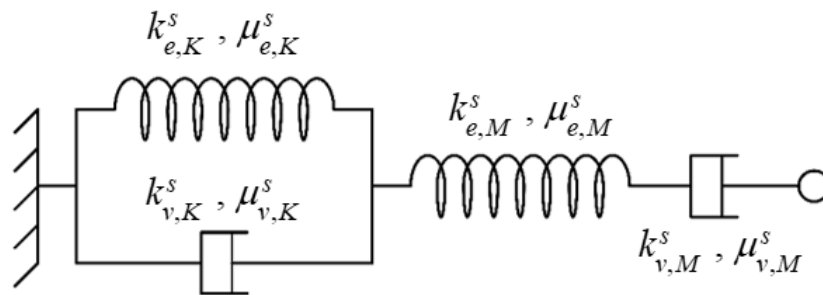
As expressões correspondentes aos módulos de compressão e de cisalhamento aparentes da matriz são apresentadas a seguir:

$$k^{s*} = \frac{k_{e,m}^s (p k_{v,K}^s + k_{e,K}^s)}{p k_{v,K}^s + k_{e,K}^s + k_{e,m}^s} \quad ; \quad \mu^{s*} = \frac{\mu_{e,m}^s (p \mu_{v,K}^s + \mu_{e,K}^s)}{p \mu_{v,K}^s + \mu_{e,K}^s + \mu_{e,m}^s} \quad (2.79)$$

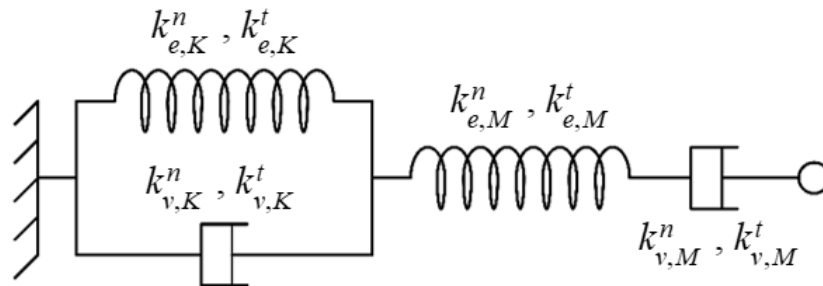
As expressões correspondentes as rigidezes normal e tangencial aparentes da fratura são apresentadas a seguir:

$$k_n^* = \frac{k_{e,m}^n (p k_{v,K}^n + k_{e,K}^n)}{p k_{v,K}^n + k_{e,K}^n + k_{e,m}^n} \quad ; \quad k_t^* = \frac{k_{e,m}^t (p k_{v,K}^t + k_{e,K}^t)}{p k_{v,K}^t + k_{e,K}^t + k_{e,m}^t} \quad (2.80)$$

No caso do modelo reológico de Burger, sendo uma combinação dos modelos de Maxwell e Kelvin dispostos em série, a Figura 2.15 exhibe os parâmetros do modelo utilizados para a representação do comportamento viscoelástico da matriz e das fraturas:



(a) Modelo para Matriz



(b) Modelo para Fratura

Figura 2.15: Modelo de Burger no caso de uma matriz e no caso de fraturas

As expressões correspondentes aos módulos de compressão e de cisalhamento aparentes da matriz são apresentadas a seguir:

$$k^{s*} = \frac{(p k_{v,K}^s + k_{e,K}^s) p k_{v,M}^s k_{e,M}^s}{p^2 k_{v,K}^s k_{v,M}^s + p(k_{e,K}^s k_{v,M}^s + k_{v,K}^s k_{e,M}^s + k_{v,M}^s k_{e,M}^s) + k_{e,K}^s k_{e,M}^s} \quad (2.81)$$

$$\mu^{s*} = \frac{(p \mu_{v,K}^s + \mu_{e,K}^s) p \mu_{v,M}^s \mu_{e,M}^s}{p^2 \mu_{v,K}^s \mu_{v,M}^s + p(\mu_{e,K}^s \mu_{v,M}^s + \mu_{v,K}^s \mu_{e,M}^s + \mu_{v,M}^s \mu_{e,M}^s) + \mu_{e,K}^s \mu_{e,M}^s}$$

As expressões correspondentes as rigidezes normal e tangencial aparentes da fratura são apresentadas a seguir:

$$k_n^* = \frac{(p k_{v,K}^n + k_{e,K}^n) p k_{v,M}^n k_{e,M}^n}{p^2 k_{v,K}^n k_{v,M}^n + p(k_{e,K}^n k_{v,M}^n + k_{v,K}^n k_{e,M}^n + k_{v,M}^n k_{e,M}^n) + k_{e,K}^n k_{e,M}^n} \quad (2.82)$$

$$k_t^* = \frac{(p k_{v,K}^t + k_{e,K}^t) p k_{v,M}^t k_{e,M}^t}{p^2 k_{v,K}^t k_{v,M}^t + p(k_{e,K}^t k_{v,M}^t + k_{v,K}^t k_{e,M}^t + k_{v,M}^t k_{e,M}^t) + k_{e,K}^t k_{e,M}^t}$$

A escolha do modelo reológico para representação do comportamento viscoelástico da matriz e das fraturas depende de vários fatores, entre os quais pode-se mencionar: as propostas realizadas em trabalhos anteriores observados na literatura e seus respectivos resultados, a possibilidade de utilizar parâmetros obtidos em laboratório e não arbitrários e os objetivos a serem atingidos no estudo dos efeitos da viscosidade tanto na matriz quanto nas fraturas.

Após ter definidos os tensores \mathbb{C}^{s*} e \mathbb{C}^{f*} , relacionados com o comportamento viscoelástico dos componentes do material fraturado na expressão (2.66), efetua-se a determinação das expressões dos polinômios $A(p)$ e $B(p)$, que definem a função de relaxação aparente $R^{\text{hom}*}(p)$ de cada um dos componentes não nulos do tensor $\mathbb{R}^{\text{hom}*}(p)$. Estes polinômios são obtidos mediante o esquema de homogeneização elástica de Mori-Tanaka (ver expressões (2.30) e (2.39)) no domínio de Carson-Laplace.

Uma vez definida a função $R^{\text{hom}*}(p)$, aplica-se analiticamente o procedimento de inversão da transformada de Carson-Laplace descrito na seção 2.4.2.1, com exceção do cálculo das raízes do polinômio $B(p)$, que pode ser realizado numericamente utilizando, por exemplo, o software Maple.

Alguns exemplos de aplicação podem ser encontrados no trabalho do Aguiar e Maghous (2018), tanto para distribuição de fraturas paralelas quanto para distribuição de fraturas orientadas aleatoriamente, utilizando diferentes modelos reológicos para descrição do comportamento viscoelástico da matriz e das fraturas.

No Anexo A é apresentado um fluxograma que mostra os passos principais do procedimento geral do modelo viscoelástico analítico com o intuito de resumir e expor de forma didática o processo completo para o cálculo do tensor de relaxação $\mathbb{R}^{\text{hom}}(t)$ no caso de distribuição isotrópica de fraturas.

2.5 MODELO VISCOELÁSTICO HOMOGENEIZADO OU EFETIVO DE UM MEIO FRATURADO

Nas seções anteriores foi visto que o comportamento viscoelástico dos componentes de um meio fraturado (matriz e fraturas) pode ser descrito mediante modelos reológicos. Não obstante, o comportamento viscoelástico geral de um meio fraturado homogeneizado (escala macroscópica) também pode ser representado por meio de um determinado modelo reológico.

Com base no desenvolvimento teórico mostrado nas seções anteriores, assim como nas características admitidas para o meio fraturado e seus respectivos componentes, pode-se propor dois tipos de modelos viscoelásticos homogeneizados para o meio estudado: um modelo exato e um modelo simplificado. O modelo exato foi desenvolvido na seção 2.4.2.2 pois está relacionado diretamente com o procedimento de determinação da transformada inversa de Carson-Laplace. Na sequência, apresenta-se a formulação do método simplificado.

2.5.1 Modelo Viscoelástico Homogeneizado Simplificado

Uma das causas principais para formular e utilizar um modelo viscoelástico homogeneizado simplificado ao invés do modelo exato é a implementação prática do modelo na análise estrutural. O modelo simplificado, ou também denominado de aproximado, torna-se mais tratável do que o modelo exato nas aplicações práticas.

Entre as desvantagens do modelo exato, pode-se mencionar a seguinte: o modelo de Maxwell generalizado pode requerer um número elevado de ramos ou elementos reológicos de Maxwell (molas e amortecedores associados em série), o que origina uma tarefa complexa no cálculo das raízes R_i do polinômio $B(p)$ durante a aplicação do procedimento da transformada inversa de Carson-Laplace.

Torna-se necessário formular um modelo que envolva um número pequeno de elementos reológicos. No contexto da abordagem micromecânica, Nguyen et al. (2011) desenvolveram um modelo simplificado baseado no modelo reológico de Burger com o intuito de aproximar o comportamento viscoelástico homogeneizado de um meio fissurado. O procedimento proposto por Nguyen foi estendido por Aguiar e Maghous (2018) para um meio fraturado. Aguiar propôs um modelo aplicável ao caso particular de isotropia na escala macroscópica devido a uma distribuição isotrópica de fraturas. Na sequência, apresenta-se a metodologia desenvolvida.

A proposta mencionada acima procura determinar um tensor de relaxação homogeneizado aproximado $\mathbb{R}^{app}(t)$ que possa ser descrito pelo mesmo modelo reológico da matriz. O comportamento viscoelástico homogeneizado aproximado pode ser definido pela seguinte expressão:

$$\mathbb{R}^{app}(t) = 3 k^{app}(t) \mathbb{J} + 2 \mu^{app}(t) \mathbb{K} \quad (2.83)$$

A representação esquemática do modelo simplificado corresponde ao modelo de Burger com as notações respectivas que são apresentadas na Figura 2.16. Assume-se, então, que o comportamento em compressão e em cisalhamento da matriz também é descrito por um modelo de Burger.

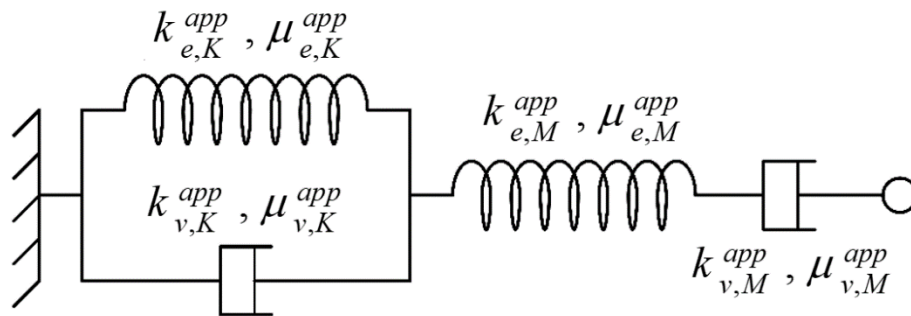


Figura 2.16: Modelo simplificado ou aproximado de Burger para o meio fraturado

A abordagem de aproximação consiste basicamente em comparar, no espaço de Carson-Laplace, os módulos homogeneizados analíticos (k^{hom*}, μ^{hom*}) e aqueles associados ao modelo de Burger aproximado:

$$\frac{1}{k^{hom*}(p)} \approx \frac{1}{k^{app*}(p)} \quad ; \quad \frac{1}{\mu^{hom*}(p)} \approx \frac{1}{\mu^{app*}(p)} \quad (2.84)$$

Onde $k^{hom*}(p)$ e $\mu^{hom*}(p)$ foram definidas na expressão (2.68) e dependem dos modelos reológicos adotados para descrever o comportamento da matriz e das fraturas. No caso de $k^{app*}(p)$ e $\mu^{app*}(p)$, podem ser definidas da seguinte forma (Aguiar e Maghous, 2018):

$$\frac{1}{k^{app*}(p)} = \frac{1}{k_{e,M}^{app}} + \frac{1}{p k_{v,M}^{app}} + \frac{1}{k_{e,K}^{app} + p k_{v,K}^{app}} \quad (2.85)$$

$$\frac{1}{\mu^{app*}(p)} = \frac{1}{\mu_{e,M}^{app}} + \frac{1}{p \mu_{v,M}^{app}} + \frac{1}{\mu_{e,K}^{app} + p \mu_{v,K}^{app}}$$

Evidentemente, na expressão (2.84), a igualdade não pode ser satisfeita rigorosamente para qualquer valor de p . Por esta razão, o modelo de Burger aproximado deve ser formulado de forma tal que, pelo menos, exista uma conveniente aproximação com o comportamento efetivo a curto tempo ($t \rightarrow 0$) e a longo tempo ($t \rightarrow +\infty$). Isto é conseguido através da comparação das expansões em série aplicadas nas relações de igualdade definidas na expressão (2.84).

Antes de continuar, importa lembrar a seguinte propriedade de Carson-Laplace relativa a qualquer função dependente do tempo $t \rightarrow u(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \lim_{p \rightarrow 0} u^*(p) \quad ; \quad \lim_{t \rightarrow 0} u(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} u^*(p) \quad (2.86)$$

Em concordância com o mencionado, a equivalência a longo tempo das relações definidas na expressão (2.84) deve ser avaliada mediante suas respectivas expansões em série na vizinhança de $p = 0$. A este respeito, as expansões em série dos módulos homogeneizados aparentes em $p = 0$ podem ser definidas da seguinte forma:

$$\frac{1}{k^{\text{hom}*}} = \frac{K_{-1}^0}{p} + K_0^0 + O(p) \quad ; \quad \frac{1}{\mu^{\text{hom}*}} = \frac{M_{-1}^0}{p} + M_0^0 + O(p) \quad (2.87)$$

onde o conjunto de funções $K_{-1}^0(\varepsilon, \mathcal{N})$, $K_0^0(\varepsilon, \mathcal{N})$, $M_{-1}^0(\varepsilon, \mathcal{N})$ e $M_0^0(\varepsilon, \mathcal{N})$ é calculado analiticamente com base nas expressões de $k^{\text{hom}*}$ e $\mu^{\text{hom}*}$, e depende do comportamento específico considerado para os componentes (matriz e fraturas) do meio fraturado. Percebe-se que estas funções dependem do parâmetro de dano ou densidade de fratura ε e do número \mathcal{N} de fraturas por unidade de volume.

Por sua vez, as expansões em série dos módulos de compressão e cisalhamento do modelo Burger aproximado na vizinhança de $p = 0$ podem ser definidas da seguinte forma:

$$\frac{1}{k^{\text{app}*}} = \frac{1}{p} \frac{1}{k_{v,M}^{\text{app}}} + \frac{1}{k_{e,M}^{\text{app}}} + \frac{1}{k_{e,K}^{\text{app}}} + O(p) \quad ; \quad \frac{1}{\mu^{\text{app}*}} = \frac{1}{p} \frac{1}{\mu_{v,M}^{\text{app}}} + \frac{1}{\mu_{e,M}^{\text{app}}} + \frac{1}{\mu_{e,K}^{\text{app}}} + O(p) \quad (2.88)$$

Aplica-se o mesmo raciocínio para a equivalência a curto tempo das relações definidas na expressão (2.84). Portanto, esta equivalência deve ser avaliada mediante suas respectivas expansões em série na vizinhança de $p = +\infty$.

Então, as expansões em série dos módulos homogeneizados aparentes em $p = +\infty$ podem ser definidas da seguinte forma (Aguiar e Maghous, 2018):

$$\frac{1}{k^{\text{hom}*}} = K_0^\infty + \frac{K_{-1}^\infty}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \quad ; \quad \frac{1}{\mu^{\text{hom}*}} = M_0^\infty + \frac{M_{-1}^\infty}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \quad (2.89)$$

onde os parâmetros $K_{-1}^\infty(\varepsilon, \mathcal{N})$, $K_0^\infty(\varepsilon, \mathcal{N})$, $M_{-1}^\infty(\varepsilon, \mathcal{N})$ e $M_0^\infty(\varepsilon, \mathcal{N})$ também são calculados analiticamente com base nas expressões de $k^{\text{hom}*}$ e $\mu^{\text{hom}*}$, e dependem do parâmetro de dano ε e do parâmetro \mathcal{N} , assim como dos modelos viscoelásticos adotados para a matriz e para as fraturas.

Por sua vez, as expansões em série dos módulos de compressão e cisalhamento do modelo Burger aproximado na vizinhança de $p = +\infty$ podem ser definidas da seguinte forma:

$$\frac{1}{k^{\text{app}*}} = \frac{1}{k_{e,M}^{\text{app}}} + \frac{1}{p} \left(\frac{1}{k_{v,M}^{\text{app}}} + \frac{1}{k_{v,K}^{\text{app}}} \right) + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \quad (2.90)$$

$$\frac{1}{\mu^{\text{app}*}} = \frac{1}{\mu_{e,M}^{\text{app}}} + \frac{1}{p} \left(\frac{1}{\mu_{v,M}^{\text{app}}} + \frac{1}{\mu_{v,K}^{\text{app}}} \right) + O\left(\frac{1}{p^2}\right)$$

As expressões de forma fechada das funções $K_{-1}^0(\varepsilon, \mathcal{N})$, $K_0^0(\varepsilon, \mathcal{N})$, $M_{-1}^0(\varepsilon, \mathcal{N})$, $M_0^0(\varepsilon, \mathcal{N})$, $K_{-1}^\infty(\varepsilon, \mathcal{N})$, $K_0^\infty(\varepsilon, \mathcal{N})$, $M_{-1}^\infty(\varepsilon, \mathcal{N})$ e $M_0^\infty(\varepsilon, \mathcal{N})$ podem ser encontradas originalmente no trabalho de Aguiar e Maghous (2018) quando um modelo de Burger é considerado para a matriz e um modelo de Maxwell para as fraturas.

Uma vez definidos os parâmetros de rigidez e viscosidade mencionados acima, pode-se inspecionar a compatibilidade entre as expressões (2.87) e (2.88), assim como entre as expressões (2.89) e (2.90) considerando que o comportamento efetivo coincide com o comportamento aproximado a curto e a longo tempo. As relações que surgem são as seguintes:

$$K_{-1}^0 = \frac{1}{k_{v,M}^{\text{app}}} \quad ; \quad K_0^0 = \frac{1}{k_{e,M}^{\text{app}}} + \frac{1}{k_{e,K}^{\text{app}}} \quad ; \quad M_{-1}^0 = \frac{1}{\mu_{v,M}^{\text{app}}} \quad ; \quad M_0^0 = \frac{1}{\mu_{e,M}^{\text{app}}} + \frac{1}{\mu_{e,K}^{\text{app}}} \quad (2.91)$$

$$K_{-1}^\infty = \frac{1}{k_{e,M}^{\text{app}}} \quad ; \quad K_0^\infty = \frac{1}{k_{v,M}^{\text{app}}} + \frac{1}{k_{v,K}^{\text{app}}} \quad ; \quad M_{-1}^\infty = \frac{1}{\mu_{e,M}^{\text{app}}} \quad ; \quad M_0^\infty = \frac{1}{\mu_{v,M}^{\text{app}}} + \frac{1}{\mu_{v,K}^{\text{app}}}$$

Finalmente, para obter os módulos ou funções de relaxação em compressão $k^{app}(t)$ e em cisalhamento $\mu^{app}(t)$ do modelo de Burger aproximado, basta aplicar a transformada inversa de Carson-Laplace na expressão (2.85).

Embora o procedimento desenvolvido por Aguiar e Maghous (2018) foi formulado no caso geral de um meio macroscopicamente isótropo, estes autores explicitaram a análise no caso específico de um modelo de Burger para a matriz e um modelo de Maxwell para as fraturas. Ressalta-se que o modelo reológico efetivo aproximado tem sido formulado considerando o mesmo modelo que foi adotado pela matriz.

2.6 REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DAS PROPRIEDADES ELÁSTICAS E VISCOELÁSTICAS HOMOGENEIZADAS DE UM MEIO FRATURADO

Nas seções anteriores foram desenvolvidas as formulações teóricas relacionadas com o comportamento elástico e viscoelástico de um meio fraturado. Nesta seção serão apresentadas diversas aplicações com o intuito de representar graficamente os dois tipos de comportamento por meio de suas propriedades homogeneizadas (macroscópicas).

Também será considerado o comportamento viscoelástico aproximado e suas respectivas propriedades quando utilizado o modelo de Burger simplificado.

Na sequência, os dados de referência utilizados para as propriedades mecânicas da matriz são os apresentados no trabalho de Le (2008) para o concreto. No caso das fraturas, os valores dos parâmetros elásticos foram tomados do trabalho de Bart (2000) como valores típicos de geomateriais, enquanto que os valores dos parâmetros viscosos serão arbitrários devido à indisponibilidade de dados publicados a este respeito.

2.6.1 Propriedades Elásticas Homogeneizadas

A representação gráfica das propriedades elásticas equivale a representar o comportamento das componentes não nulas do tensor de rigidez elástico do meio fraturado. Uma vez determinadas analiticamente as expressões para as componentes segundo sua respectiva distribuição, torna-se indispensável determinar os valores das propriedades mecânicas do material, tanto para a matriz quanto para as fraturas.

Para fins de cálculo e geração de gráficos, a Tabela 2.1 apresenta o valor dos parâmetros mecânicos admitidos para a matriz e as fraturas do material:

MATRIZ			FRATURAS		
Parâmetro	Valor	Unidade	Parâmetro	Valor	Unidade
k^s	24,42	<i>GPa</i>	k_n	42,22	<i>GPa / m</i>
μ^s	13,27	<i>GPa</i>	k_t	16,88	<i>GPa / m</i>

Tabela 2.1: Parâmetros mecânicos da matriz e das fraturas do material admitido

Os valores anteriores estão referidos aos módulos elásticos instantâneos do concreto e considerou-se que $k_n = 2,5 \cdot k_t$. No caso de contemplar material fissurado para comparação com as curvas correspondentes a fraturas, admitiu-se os seguintes valores:

FISSURAS		
Parâmetro	Valor	Unidade
k_n	0,00	<i>GPa / m</i>
k_t	0,00	<i>GPa / m</i>

Tabela 2.2: Valores dos parâmetros mecânicos do material fissurado (Caso Elástico)

Ressalta-se, em todos os casos, que o parâmetro de densidade de fratura ε pode ser visto como o parâmetro de dano na escala macroscópica. Então, admitindo que o número de fraturas por unidade de volume \mathcal{N} permanece constante, pode-se justificar a seguinte notação: $\mathbb{C}^{\text{hom}} = \mathbb{C}^{\text{hom}}(\varepsilon)$. Na sequência, o valor do parâmetro \mathcal{N} será unitário para todos os casos.

Com os parâmetros definidos tanto para a matriz quanto para as fraturas, pode-se representar graficamente as componentes não nulas do tensor de rigidez homogeneizado de cada uma das distribuições admitidas neste trabalho: distribuição aleatória de fraturas paralelas e distribuição isotrópica de fraturas orientadas aleatoriamente. O comportamento das fissuras também será adicionado para fins de comparação.

2.6.1.1 Distribuição Aleatória de Fraturas Paralelas

As seguintes figuras 2.17, 2.18 e 2.19 mostram as componentes normalizadas pelo valor da componente admitindo que não existem fraturas, isto é, $\mathbb{C}^{\text{hom}}(\varepsilon = 0)$. As figuras serão divididas em três grupos: componentes $C_{iii}^{\text{hom}}(\varepsilon)/C_{iii}^{\text{hom}}(0)$, $C_{ijj}^{\text{hom}}(\varepsilon)/C_{ijj}^{\text{hom}}(0)$ e $C_{ijj}^{\text{hom}}(\varepsilon)/C_{ijj}^{\text{hom}}(0)$.

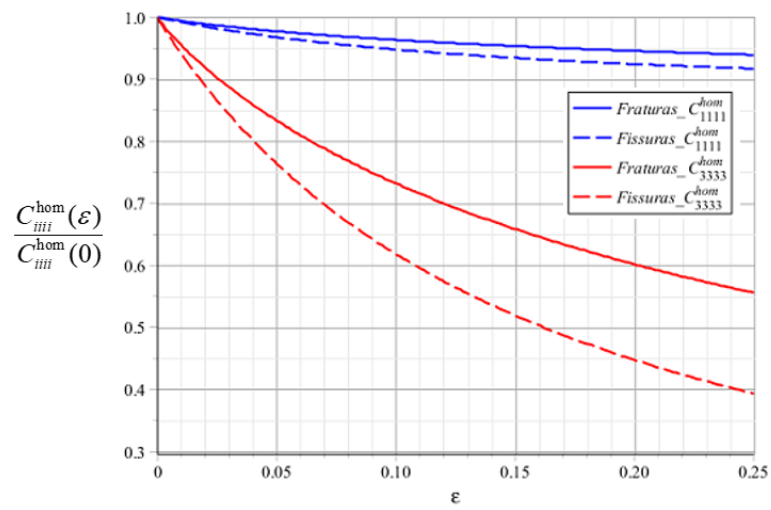


Figura 2.17: Componentes $C_{iii}^{\text{hom}}(\varepsilon)$ normalizadas do tensor de rigidez homogeneizado

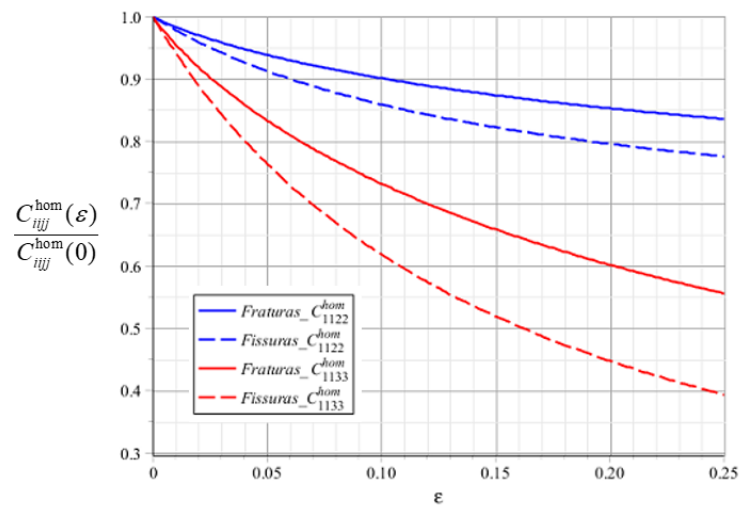


Figura 2.18: Componentes $C_{ijj}^{\text{hom}}(\varepsilon)$ normalizadas do tensor de rigidez homogeneizado

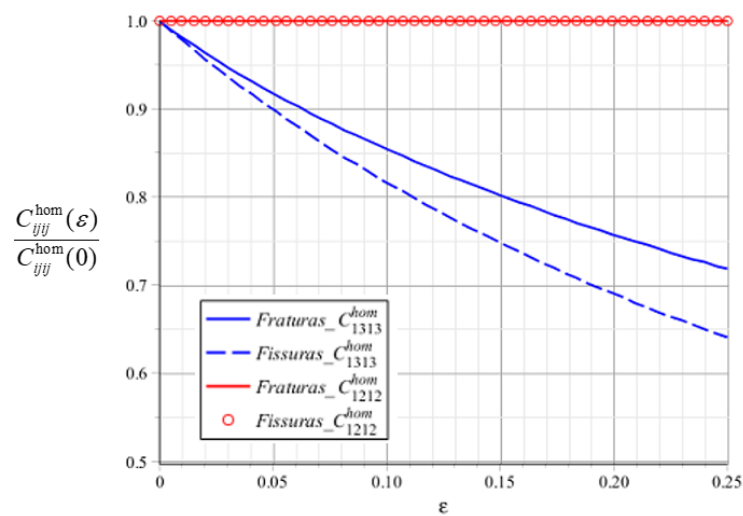


Figura 2.19: Componentes $C_{ijj}^{\text{hom}}(\varepsilon)$ normalizadas do tensor de rigidez homogeneizado

Observa-se nas três figuras acima que a degradação da rigidez, induzida pela presença de descontinuidades, aumenta com o valor do parâmetro de dano (ε), exceto na componente “1212”. Lembra-se que esta componente não depende do parâmetro de dano. A respeito das fissuras (cracks), a sua degradação é mais pronunciada do que a das fraturas em todos os casos apresentados, exceto na componente “1212”. Observa-se no intervalo analisado que a diferença ou separação entre as curvas de fratura e fissura é maior nas componentes que contem a direção 3, que é normal ao plano das descontinuidades.

2.6.1.2 Distribuição Isotrópica de Fraturas Orientadas Aleatoriamente

No caso de distribuição isotrópica de fraturas, como mencionado anteriormente, o meio homogeneizado adota um comportamento isotrópico e, portanto, as componentes não nulas do tensor de rigidez elástico homogeneizado são definidas por meio de uma combinação dos seus respectivos módulos de compressão k^{hom} e cisalhamento μ^{hom} segundo as expressões (2.43) e (2.46). Então, a representação gráfica do comportamento destes módulos em função do parâmetro de dano ε se mostra mais simples que a representação das componentes do tensor.

A seguinte Figura 2.20 mostra o comportamento dos módulos elásticos normalizados do tensor de rigidez homogeneizado. Estes módulos foram normalizados pelo seu respectivo módulo de compressão da matriz k^s e de cisalhamento da matriz μ^s . O comportamento destes módulos, no caso de material fissurado, também será incorporado para fins de comparação.

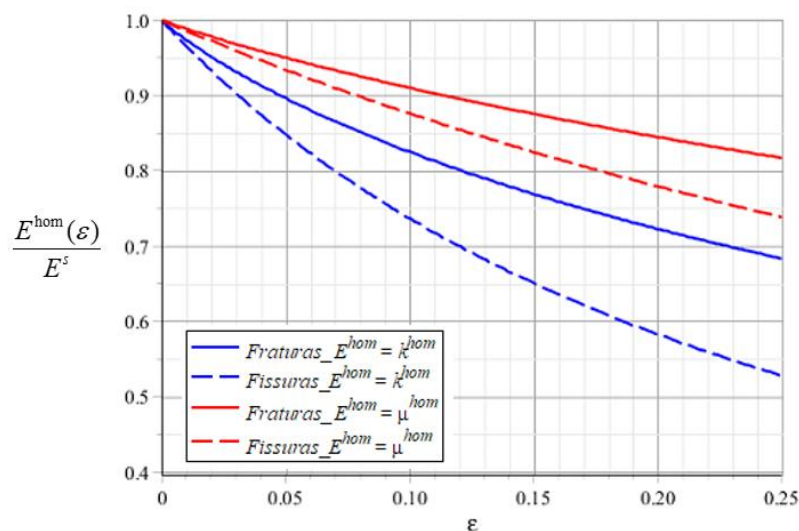


Figura 2.20: Módulos de compressão e cisalhamento normalizados (Fraturas e Fissuras)

Observa-se na Figura 2.20 que a degradação da rigidez em compressão e em cisalhamento, induzida pela presença de descontinuidades, aumenta com o incremento do valor do parâmetro de dano (ε).

A respeito das fissuras, a degradação dos módulos elásticos é mais pronunciada do que no caso das fraturas. Ressalta-se que a degradação ou redução da rigidez é um indicativo da importância das descontinuidades no comportamento mecânico do meio fraturado.

2.6.2 Propriedades Viscoelásticas Homogeneizadas

A representação gráfica das propriedades viscoelásticas equivale a representar o comportamento das componentes não nulas do tensor de relaxação homogeneizado do meio fraturado. Uma vez determinadas analiticamente as expressões das componentes segundo as respectivas distribuições admitidas neste trabalho, torna-se indispensável determinar os valores das propriedades mecânicas do material.

Para fins de cálculo e geração de gráficos, a Tabela 2.3 apresenta o valor dos parâmetros mecânicos admitidos para a matriz e as fraturas do material. Ressalta-se que estes parâmetros mecânicos correspondem a um modelo reológico de Burger.

MATRIZ			FRATURAS		
Parâmetro	Valor	Unidade	Parâmetro	Valor	Unidade
$k_{e,M}^s$	24,42	<i>GPa</i>	$k_{e,M}^n$	42,22	<i>GPa / m</i>
$k_{v,M}^s$	$7,33 \times 10^8$	<i>GPa · s</i>	$k_{v,M}^n$	7×10^7	<i>GPa · s / m</i>
$\mu_{e,M}^s$	13,27	<i>GPa</i>	$k_{e,M}^t$	16,88	<i>GPa / m</i>
$\mu_{v,M}^s$	$3,88 \times 10^8$	<i>GPa · s</i>	$k_{v,M}^t$	4×10^7	<i>GPa · s / m</i>
$k_{v,K}^s$	39,27	<i>GPa</i>	$k_{e,K}^n$	21,11	<i>GPa / m</i>
$k_{v,K}^s$	$5,07 \times 10^7$	<i>GPa · s</i>	$k_{v,K}^n$	$3,5 \times 10^7$	<i>GPa · s / m</i>
$\mu_{e,K}^s$	14,07	<i>GPa</i>	$k_{e,K}^t$	8,44	<i>GPa / m</i>
$\mu_{v,K}^s$	$1,27 \times 10^7$	<i>GPa · s</i>	$k_{v,K}^t$	2×10^7	<i>GPa · s / m</i>

Tabela 2.3: Parâmetros mecânicos da matriz e das fraturas para o modelo de Burger

Alguns dos valores da tabela 2.3 serão adotados pelos parâmetros da matriz e das fraturas dos outros modelos considerados nas expressões (2.75) a (2.80). Cumpre-se o seguinte: $k_{e,m}^s = k_{e,M}^s$, $\mu_{e,m}^s = \mu_{e,M}^s$, $k_{e,m}^n = k_{e,M}^n$ e $k_{e,m}^t = k_{e,M}^t$ no caso da mola simples e do modelo de Kelvin-Voigt.

No caso de utilizar material fissurado para fins de comparação, considera-se valores nulos para os parâmetros:

FISSURAS					
Parâmetro	Valor	Unidade	Parâmetro	Valor	Unidade
$k_{e,M}^n$	0,00	GPa / m	$k_{e,K}^n$	0,00	GPa / m
$k_{v,M}^n$	0,00	$GPa \cdot s / m$	$k_{v,K}^n$	0,00	$GPa \cdot s / m$
$k_{e,M}^t$	0,00	GPa / m	$k_{e,K}^t$	0,00	GPa / m
$k_{v,M}^t$	0,00	$GPa \cdot s / m$	$k_{v,K}^t$	0,00	$GPa \cdot s / m$

Tabela 2.4: Valores dos parâmetros mecânicos do material fissurado (Caso Viscoelástico)

Na sequência, os gráficos apresentados levarão em conta as seguintes considerações: o número de fraturas por unidade de volume \mathcal{N} permanecerá constante e seu valor será unitário para todos os casos e o parâmetro de dano admitirá cinco valores em cada gráfico para comparar o comportamento da respectiva componente quando existe variação de ε ao longo do tempo.

No que diz respeito aos modelos reológicos utilizados para representação do comportamento da matriz, serão considerados os modelos de Burger e Kelvin-Voigt, enquanto que para o comportamento das fraturas, serão considerados os modelos de mola simples, Maxwell, Kelvin-Voigt, Burger e um material fissurado com o intuito de analisar o comportamento das descontinuidades nos diferentes modelos admitidos.

Com os parâmetros definidos tanto para a matriz quanto para as fraturas, pode-se representar graficamente as componentes não nulas do tensor de relaxação homogeneizado de cada uma das distribuições admitidas neste trabalho: distribuição aleatória de fraturas paralelas e distribuição isotrópica de fraturas orientadas aleatoriamente.

2.6.2.1 Distribuição Aleatória de Fraturas Paralelas

As seguintes figuras mostram as componentes $R_{ijkl}^{\text{hom}}(t)$ do tensor de relaxação homogeneizado normalizadas pelo seu respectivo valor $R_{ijkl}^{\text{hom}}(0)$ calculado no instante inicial de aplicação de uma carga ($t=0$) e desconsiderando-se o efeito de dano ($\varepsilon=0$). Três casos são propostos nesta seção: Caso 1: Matriz (Burger) e Fratura (Maxwell); Caso 2: Matriz (Kelvin-Voigt) e Fratura (Maxwell); Caso 3: Matriz (Kelvin-Voigt) e Fratura (Mola Simples).

Caso 1 – Matriz (Burger) e Fratura (Maxwell)

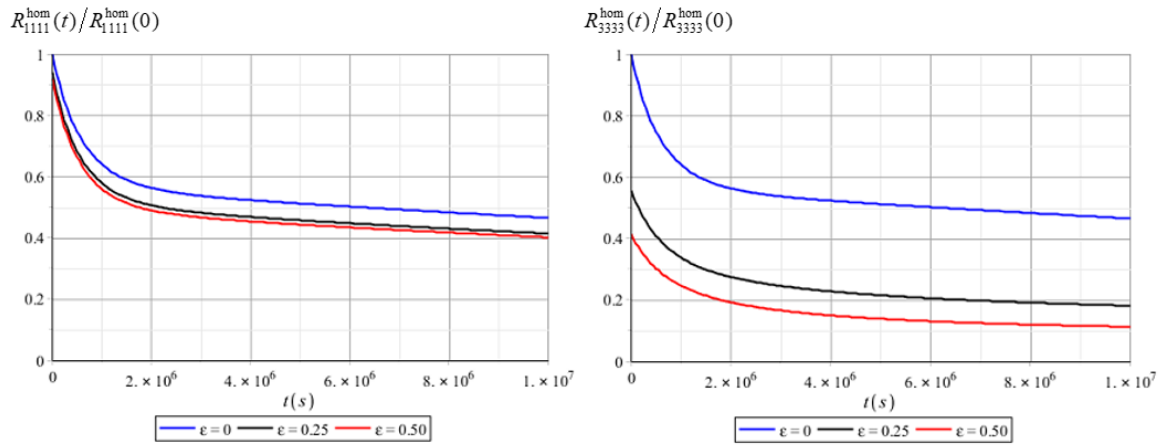


Figura 2.21: Componentes $R_{1111}^{hom}(t)$ e $R_{3333}^{hom}(t)$ normalizadas (Caso I: Burger - Maxwell)

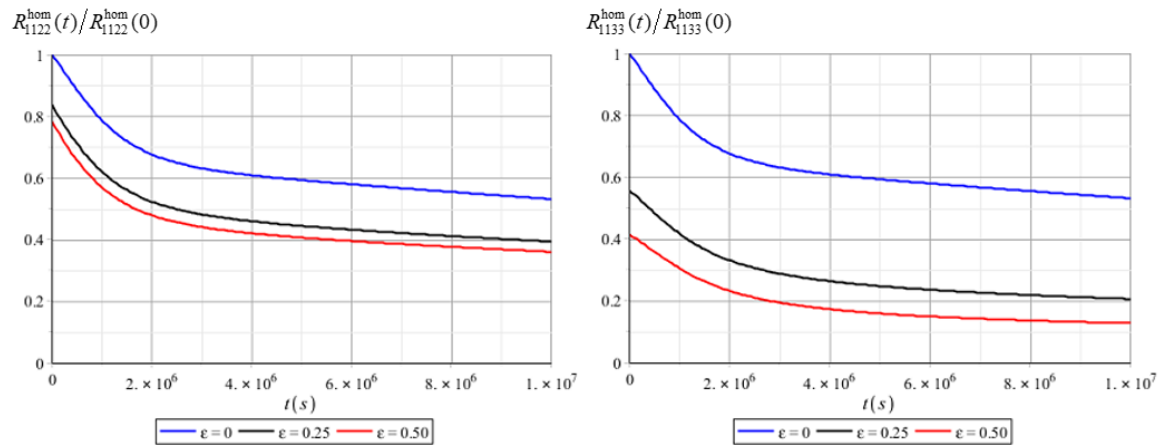


Figura 2.22: Componentes $R_{1122}^{hom}(t)$ e $R_{1133}^{hom}(t)$ normalizadas (Caso I: Burger - Maxwell)

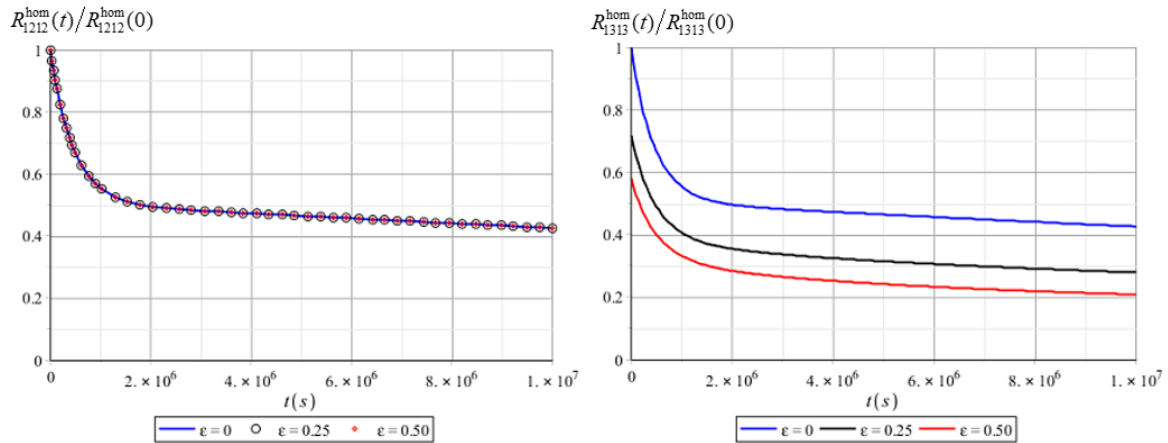


Figura 2.23: Componentes $R_{1212}^{hom}(t)$ e $R_{1313}^{hom}(t)$ normalizadas (Caso I: Burger - Maxwell)

Caso 2 – Matriz (Kelvin-Voigt) e Fratura (Maxwell)

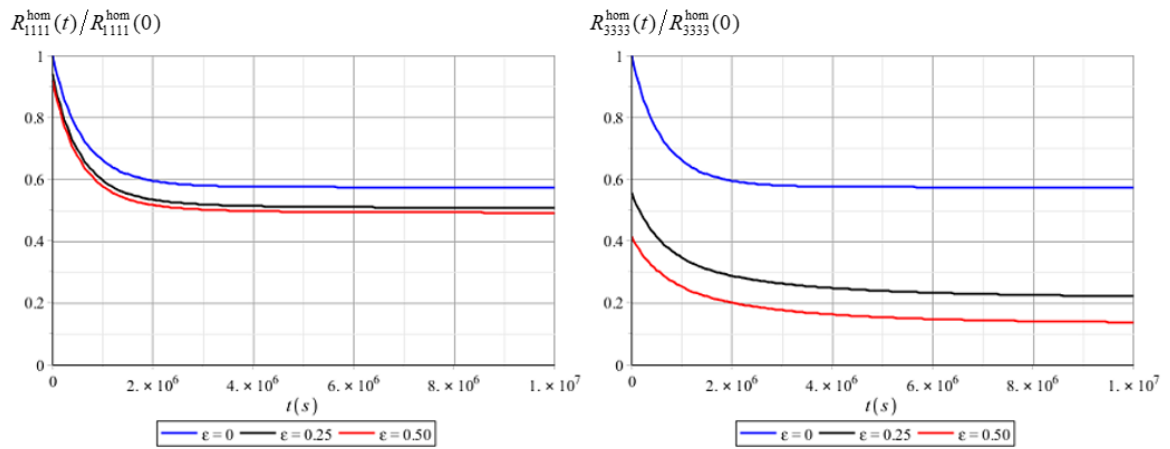


Figura 2.24: Componentes $R_{1111}^{hom}(t)$ e $R_{3333}^{hom}(t)$ normalizadas (Caso 2: KV - Maxwell)

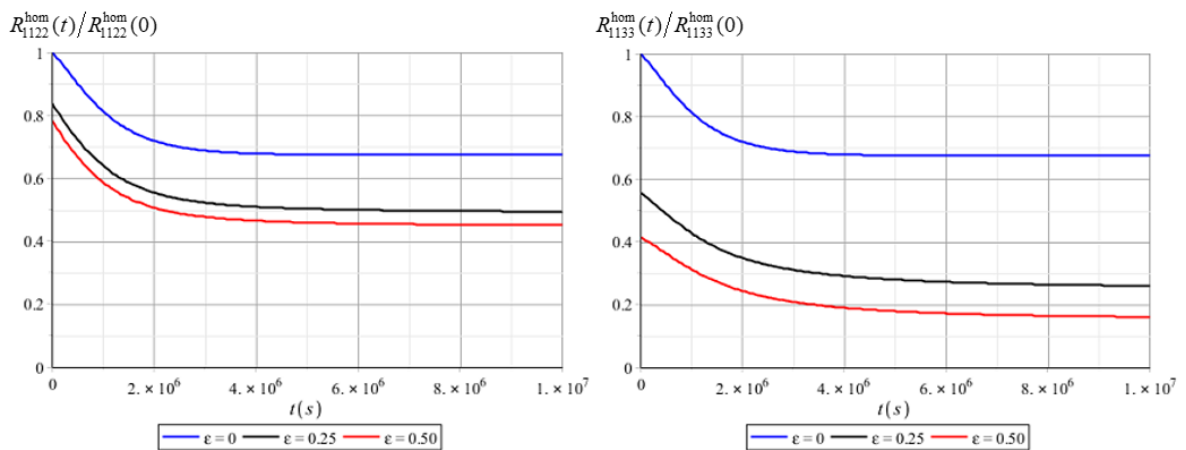


Figura 2.25: Componentes $R_{1122}^{hom}(t)$ e $R_{1133}^{hom}(t)$ normalizadas (Caso 2: KV - Maxwell)

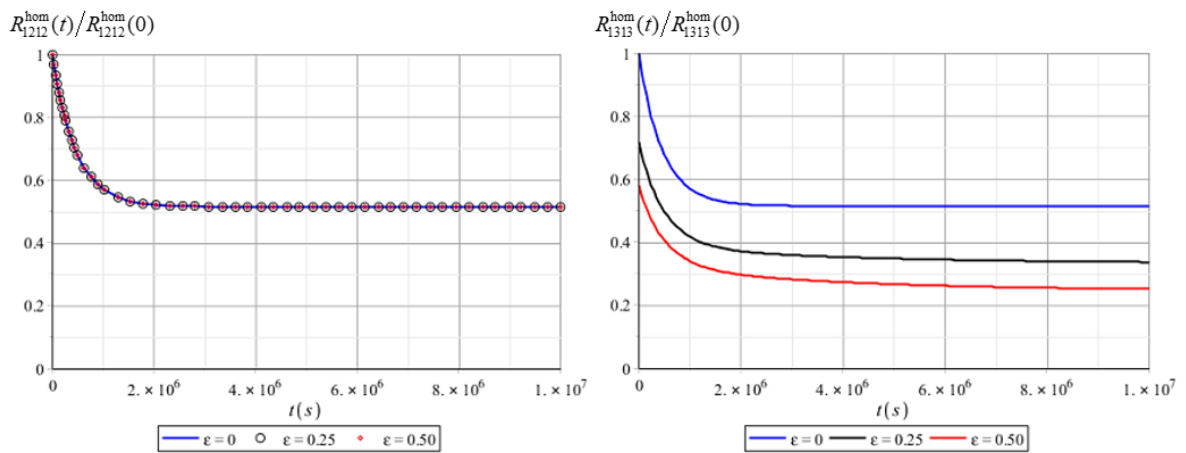


Figura 2.26: Componentes $R_{1212}^{hom}(t)$ e $R_{1313}^{hom}(t)$ normalizadas (Caso 2: KV - Maxwell)

Caso 3 – Matriz (Kelvin-Voigt) e Fratura (Mola Simples)

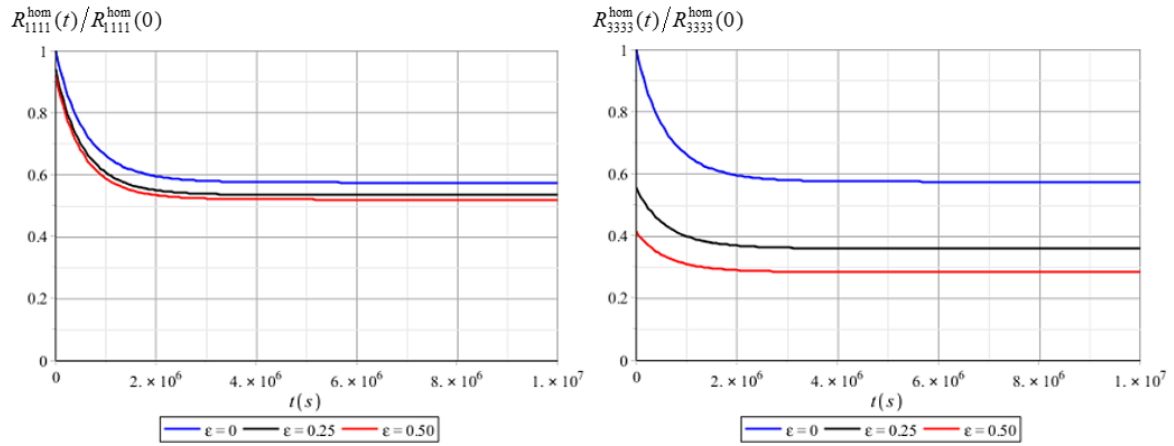


Figura 2.27: Componentes $R_{1111}^{hom}(t)$ e $R_{3333}^{hom}(t)$ normalizadas (Caso 3: KV – Mola Simples)

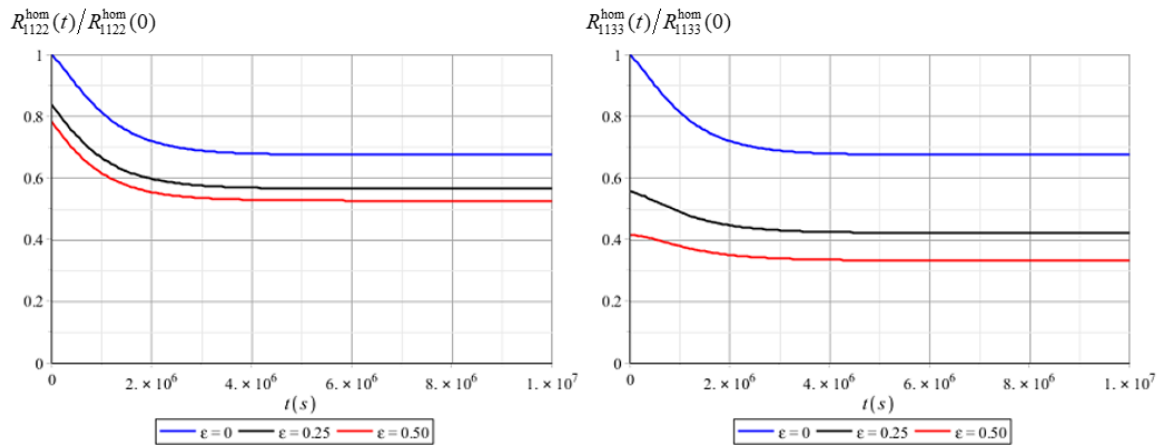


Figura 2.28: Componentes $R_{1122}^{hom}(t)$ e $R_{1133}^{hom}(t)$ normalizadas (Caso 3: KV – Mola Simples)

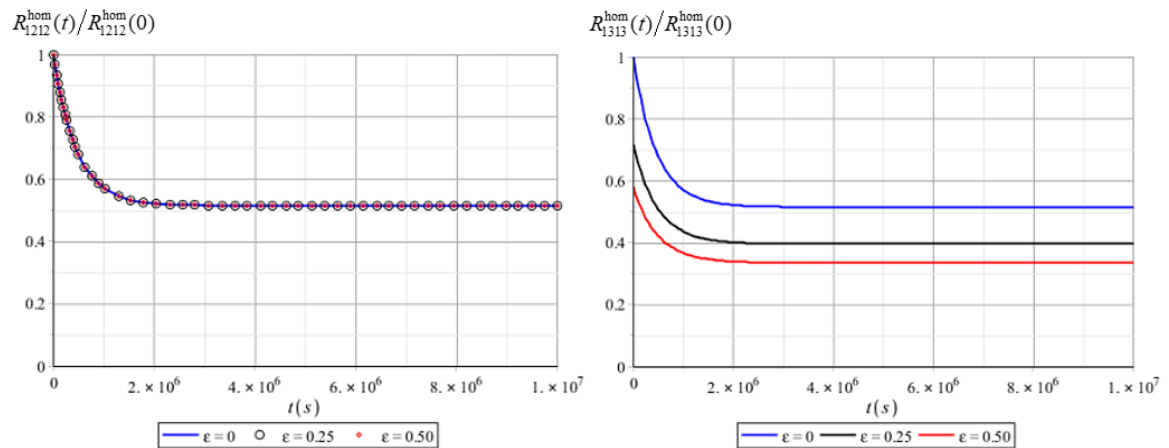


Figura 2.29: Componentes $R_{1212}^{hom}(t)$ e $R_{1313}^{hom}(t)$ normalizadas (Caso 3: KV – Mola Simples)

Da análise das figuras 2.21 a 2.29, observa-se um comportamento ou tendência esperada: a redução da componente do tensor de relaxação durante sua evolução temporal. Outra tendência esperada é visualizada nos gráficos acima, onde as componentes que envolvem apenas as direções 1 e 2 apresentam uma pequena variação quando modificado o parâmetro de dano. Pelo contrário, as componentes envolvendo a direção 3 apresentam uma considerável variação quando modificado o parâmetro de dano. Segundo Aguiar e Maghous (2018) isto acontece devido à distribuição aleatória de fraturas paralelas.

Como esperado nas figuras acima, o aumento do valor da densidade de fratura (ε) ocasiona uma diminuição do valor da função de relaxação (componente não nula do tensor de relaxação). Observa-se também que a modificação do parâmetro de dano provoca uma variação no tempo característico de relaxação da respectiva função devido à mudança do gradiente da reta tangente à função de relaxação no tempo inicial ($t=0$). Em cada curva observada nos gráficos, admitindo um parâmetro de dano constante, existem apenas perdas por viscosidade segundo Aguiar e Maghous (2018).

Observa-se nos casos 2 e 3, que o decaimento da função de relaxação é um pouco mais acentuado nas componentes com modelo viscoelástico (Maxwell) do que nas componentes como o modelo elástico de mola simples, o que mostra a influência da viscosidade no comportamento da função de relaxação. Finalmente, destaca-se o comportamento, nos quatro casos, da componente 1212, onde as curvas coincidem para qualquer parâmetro de dano. Isto acontece porque a componente mencionada independe do parâmetro de dano (ε).

2.6.2.2 Distribuição Isotrópica de Fraturas Orientadas Aleatoriamente

No caso de distribuição isotrópica de fraturas, como mencionado anteriormente, o comportamento isotrópico homogeneizado (isotropia macroscópica) do meio fraturado viscoelástico pode-se definir da seguinte forma:

$$\mathbb{R}^{\text{hom}}(t) = 3 k^{\text{hom}}(t) \mathbb{J} + 2 \mu^{\text{hom}}(t) \mathbb{K} \quad (2.92)$$

Uma vez que o sistema permanece isotrópico, é possível representar graficamente os módulos de relaxação homogeneizados em compressão (k^{hom}) e cisalhamento (μ^{hom}). Nesta primeira parte são apresentados dois casos: Burger (Matriz)-Maxwell (Fratura) e Kelvin-Voigt (Matriz)-Maxwell (Fratura).

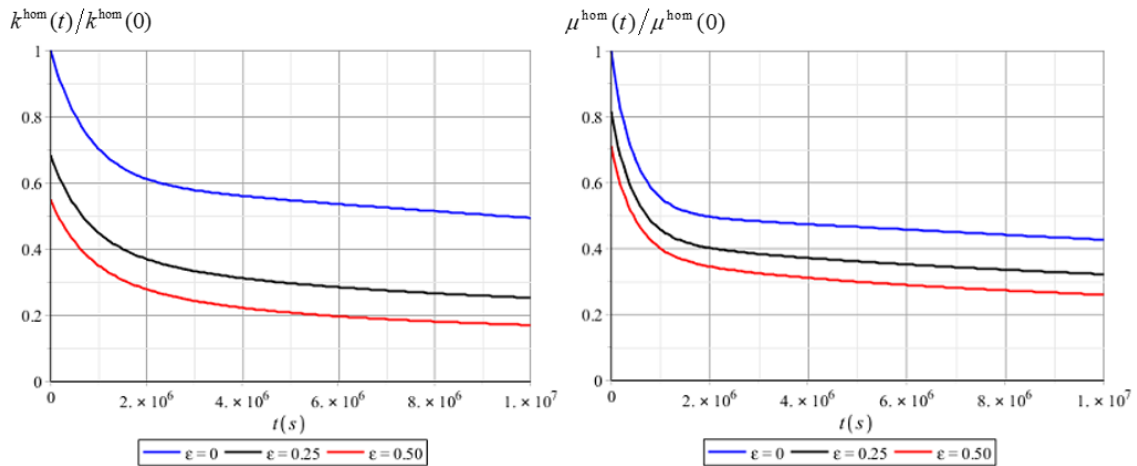


Figura 2.30: Módulos de relaxação em compressão k^{hom} e cisalhamento μ^{hom} normalizados (Caso: Burger – Maxwell)

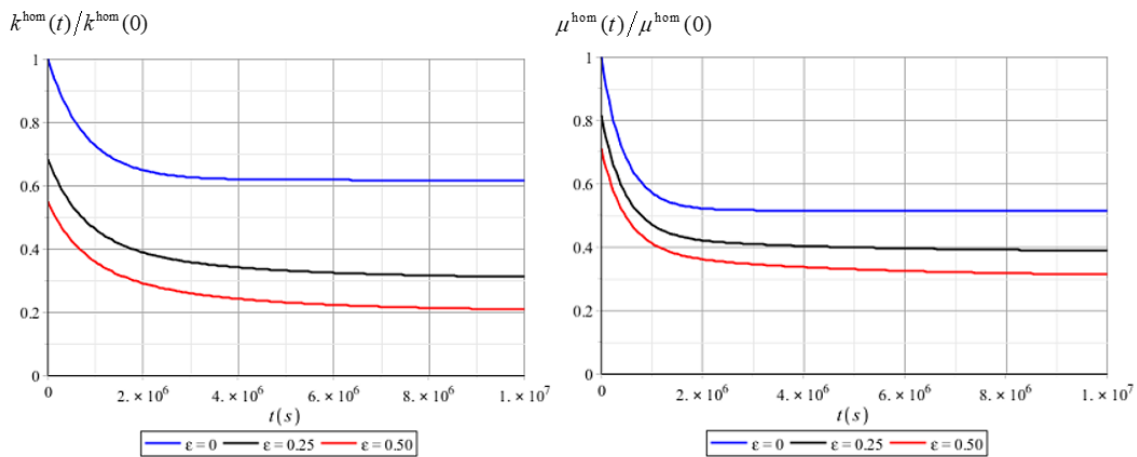


Figura 2.31: Módulos de relaxação em compressão k^{hom} e cisalhamento μ^{hom} normalizados (Caso: Kelvin-Voigt – Maxwell)

Lembra-se que o número de fraturas por unidade de volume \mathcal{N} permanece unitário e que os módulos são normalizados pelo seu respectivo valor calculado no instante inicial de aplicação de uma carga ($t = 0$) e desconsiderando-se o efeito de dano ($\varepsilon = 0$).

Observa-se nas figuras 2.30 e 2.31 uma tendência esperada: a redução da componente do tensor de relaxação durante sua evolução temporal, existindo apenas perdas por viscosidade quando constante o parâmetro de dano segundo Aguiar e Maghous (2018). Como esperado nas figuras acima, o aumento do valor da densidade de fratura (ε) ocasiona uma diminuição do valor da função de relaxação. Observa-se também que a modificação do parâmetro de dano provoca uma variação no tempo característico de relaxação da respectiva função devido à mudança do gradiente da reta tangente à função de relaxação no tempo inicial ($t = 0$).

Por uma questão de clareza, o intervalo do tempo tem sido limitado arbitrariamente para os gráficos anteriores a 10^7 s. Embora não seja mostrado nas figuras acima, no caso da matriz com modelo de Burger, o módulo assintótico tende a zero. Pelo contrário, no caso da matriz com modelo de Kelvin-Voigt, o módulo assintótico é diferente de zero.

A segunda parte serve para comparação dos modelos reológicos adotados pelas fraturas considerando três casos: Burger (Matriz) – Burger e Kelvin-Voigt (Fraturas), Kelvin-Voigt (Matriz) – Kelvin-Voigt e Maxwell (Fraturas) e Kelvin-Voigt (Matriz) – Mola Simples e Maxwell (Fraturas). Em todos os casos, serão adicionados os comportamentos de um material intacto e de um material fissurado (crack).

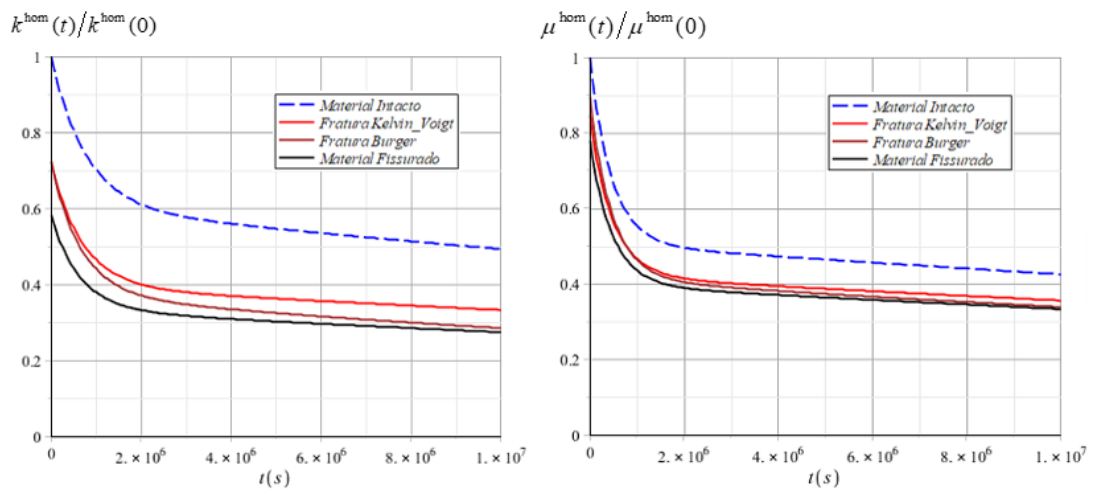


Figura 2.32: Módulos de relaxação em compressão k^{hom} e cisalhamento μ^{hom} normalizados ($\varepsilon = 0.2$, $\mathcal{N} = 1$; Caso: Modelo de Burger para Matriz)

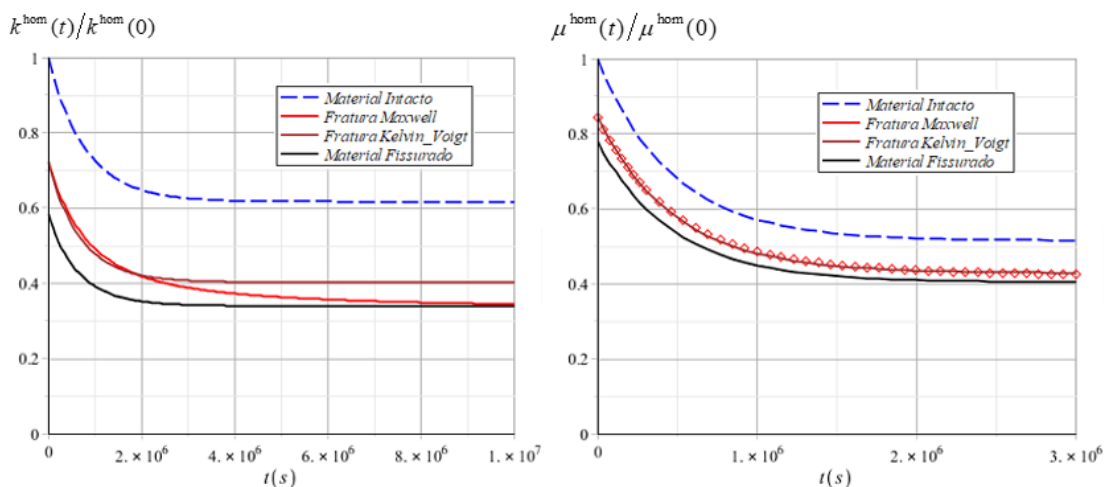


Figura 2.33: Módulos de relaxação em compressão k^{hom} e cisalhamento μ^{hom} normalizados ($\varepsilon = 0.2$, $\mathcal{N} = 1$; Caso: Modelo de Kelvin-Voigt para Matriz)

É importante ressaltar que, nesta segunda parte, o parâmetro de dano admitido será $\varepsilon = 0.2$. Para um material intacto, o valor do parâmetro de dano é considerado $\varepsilon = 0$. O número de fraturas por unidade de volume \mathcal{N} permanece unitário e os módulos são normalizados pelo seu respectivo valor calculado no instante inicial de aplicação de uma carga ($t=0$) e desconsiderando-se o efeito de dano ($\varepsilon = 0$).

Como esperado, nas figuras 2.32 e 2.33, a presença de discontinuidades provoca uma redução significativa no valor da função de relaxação. Esta redução é menor no módulo de cisalhamento do tensor. Percebe-se, também, que as funções relativas a fraturas do tipo Kelvin-Voigt e Burger permanecem entre as funções correspondentes ao material intacto e ao material fissurado, que representam, respectivamente, o limite superior e inferior para as propriedades viscoelásticas efetivas.

Embora não seja mostrado nos gráficos devido o intervalo de tempo escolhido arbitrariamente, o módulo assintótico da função de relaxação do primeiro caso (matriz Burger) tende a zero. No entanto, o módulo assintótico correspondente ao segundo caso (matriz Kelvin-Voigt) tende a um valor diferente de zero.

O terceiro caso visa comparar o comportamento de uma função de relaxação que considera dois modelos reológicos para as fraturas: um modelo elástico e um modelo viscoelástico. Neste caso, as fraturas elásticas correspondem a um modelo de mola simples e as fraturas viscoelásticas correspondem a um modelo de Maxwell, que adiciona um elemento viscoso denominado de amortecedor. O modelo reológico adotado pela matriz é Kelvin-Voigt.

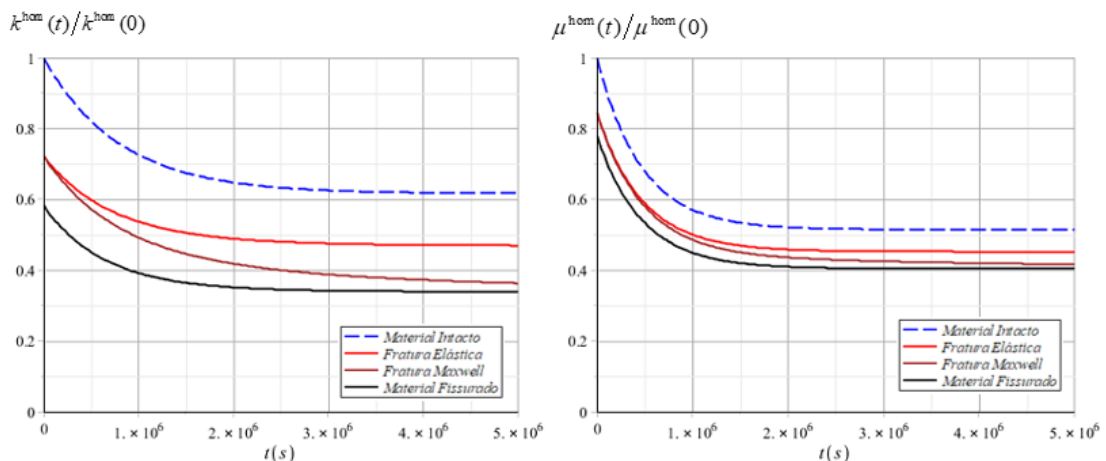


Figura 2.34: Módulos de relaxação em compressão k^{hom} e cisalhamento μ^{hom} normalizados ($\varepsilon = 0.2$, $\mathcal{N} = 1$; Caso: Fraturas Elásticas e Viscoelásticas)

A Figura 2.34 mostra a diferença na evolução temporal dos módulos de compressão e cisalhamento quando adicionado um elemento viscoso no modelo reológico da fratura. Como esperado, a incorporação do elemento viscoso provoca um decaimento da função de relaxação quando comparada com a função correspondente ao modelo simplesmente elástico para fratura. Também se cumpre que a presença de descontinuidades induz uma redução significativa no valor da função de relaxação efetiva. Esta diminuição é mais notória no caso do módulo de compressão do que no módulo de cisalhamento. Finalmente, as funções de relaxação deste caso, tendem a um valor diferente de zero no longo prazo (o módulo assintótico).

2.6.3 Propriedades Viscoelásticas Aproximadas

Como formulado na seção 2.5.1, o modelo viscoelástico homogeneizado aproximado (simplificado), aplicado ao caso particular de isotropia macroscópica, considera o modelo de Burger para representar seu comportamento homogeneizado. Devido à isotropia, os comportamentos em compressão e cisalhamento aproximados também serão representados pelo modelo de Burger. Lembra-se que o modelo da matriz deve ser o mesmo adotado pelo modelo reológico aproximado, que neste caso será o modelo de Burger.

Nesta seção será apresentada uma comparação gráfica entre o modelo exato (Maxwell Generalizado) e o modelo aproximado ou simplificado (Burger). No que diz respeito ao modelo exato, o modelo reológico para a matriz será o modelo de Burger e para as fraturas serão adotados os seguintes modelos: mola simples, Maxwell, Kelvin-Voigt, Burger. Estes modelos correspondem aos quatro casos que serão apresentados. Adicionalmente, serão considerados os comportamentos de um material fissurado e um material intacto para fins de comparação.

É importante ressaltar que os valores dos parâmetros mecânicos admitidos para a matriz e as fraturas do material correspondem aos apresentados na Tabela 2.3. O parâmetro de dano admitido será $\varepsilon = 0.2$ e o número de fraturas por unidade de volume \mathcal{N} permanece unitário. No caso do material intacto, o valor do parâmetro de dano é considerado $\varepsilon = 0$, enquanto que para o material fissurado, adota-se os valores da Tabela 2.4.

A Tabela 2.5 mostra o número de ramos do modelo exato (ver Figura 2.10) correspondente aos módulos viscoelásticos $k^{\text{hom}}(t)$ e $\mu^{\text{hom}}(t)$ de cada um dos casos desta seção, incluindo o caso com material fissurado.

Modelo da Matriz	Modelo da Fratura	Número de Ramos Mod. Exato: Maxwell Generalizado	
		Compressão (k)	Cisalhamento (μ)
Burger	Fissura	6	8
	Mola Simples	7	12
	Maxwell	7	12
	Kelvin-Voigt	8	14
	Burger	8	14

Tabela 2.5: Número de ramos do modelo exato para os módulos de compressão e cisalhamento do tensor de relaxação efetivo

Lembra-se que os comportamentos serão normalizados pelo seu respectivo valor calculado no instante inicial de aplicação de uma carga ($t = 0$) e desconsiderando-se efeito de dano ($\varepsilon = 0$). A seguir, apresentam-se os quatro casos admitidos.

O primeiro caso corresponde a um modelo reológico elástico para as fraturas, que é representado por meio do modelo de mola simples. A Figura 2.35 mostra a evolução temporal dos módulos de relaxação em compressão e cisalhamento para os modelos exato e aproximado. Observa-se nesta figura que uma melhor aproximação é obtida para o caso de um material fissurado do que para uma fratura elástica de mola simples. Embora tenha ocorrido o anterior, percebe-se que no tempo intermediário existe uma correspondência adequada entre os modelos exato e aproximado do material fraturado. No curto e no longo prazo foram cumpridas as previsões da formulação do modelo de Burger simplificado.

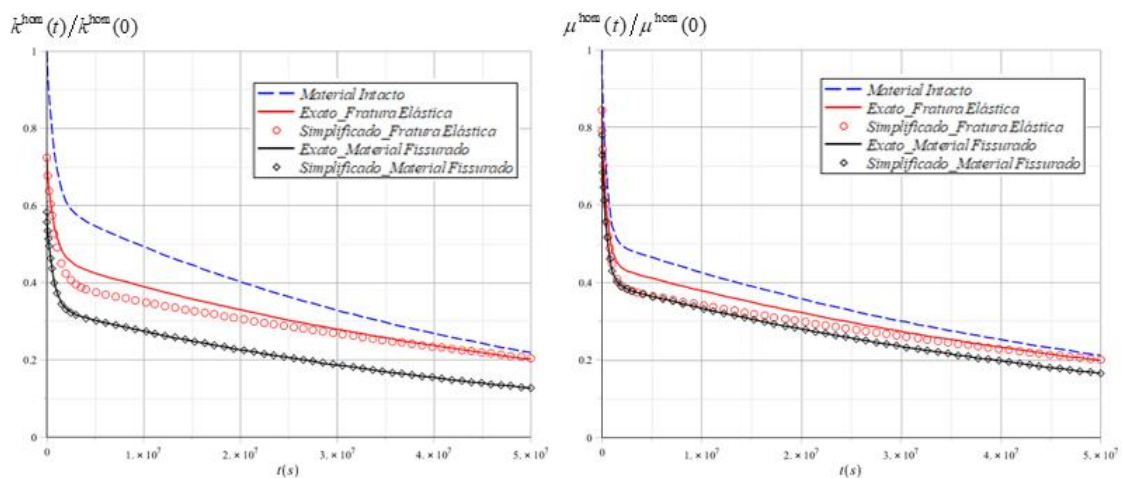


Figura 2.35: Módulos de relaxação associados ao modelo exato e ao modelo de Burger aproximado - ($\varepsilon = 0.2$, $\mathcal{N} = 1$; Caso 1: modelo de mola simples para fraturas)

O segundo caso corresponde a um modelo reológico viscoelástico para as fraturas, que é representado por meio do modelo de Maxwell. A Figura 2.36 mostra a evolução temporal dos módulos de relaxação em compressão e cisalhamento para os modelos exato e aproximado.

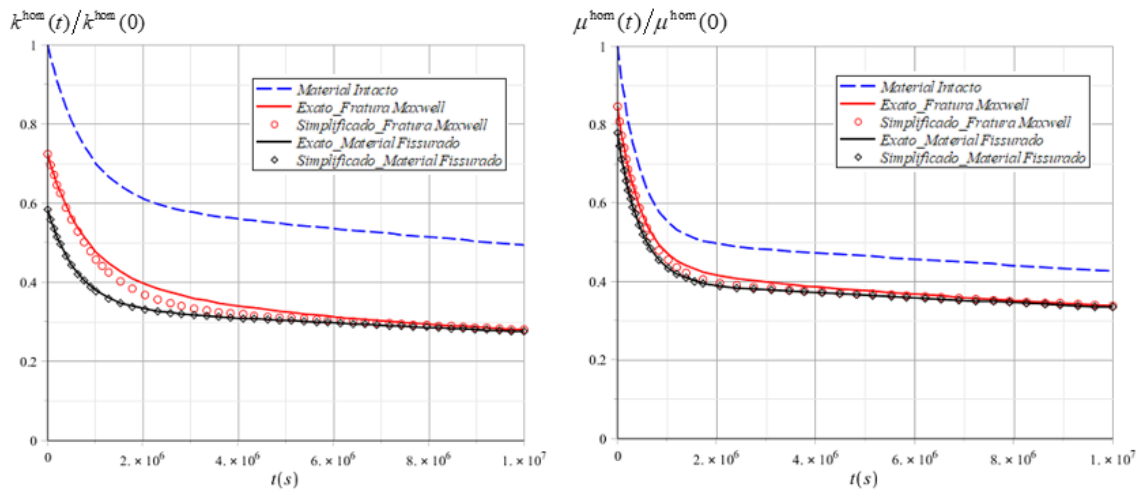


Figura 2.36: Módulos de relaxação associados ao modelo exato e ao modelo de Burger aproximado - ($\varepsilon = 0.2$, $\mathcal{N} = 1$; Caso 2: modelo de Maxwell para fraturas)

Observa-se novamente, na figura anterior, que uma melhor aproximação é obtida para o caso de um material fissurado do que para uma fratura viscoelástica de Maxwell. Percebe-se, também, que no tempo intermediário existe uma correspondência adequada entre o modelo exato e aproximado do material fraturado. No curto e no longo tempo foram cumpridas as previsões da formulação do modelo de Burger simplificado, existindo uma excelente concordância entre os modelos comparados. A fratura viscoelástica mostra um decaimento maior na função de relaxação do que o mostrado pelas fraturas elásticas no caso anterior devido ao aporte viscoso do modelo de Maxwell.

O terceiro caso corresponde ao modelo reológico viscoelástico de Kelvin-Voigt para as fraturas. A Figura 2.37 mostra a evolução temporal dos módulos de relaxação em compressão e cisalhamento para os modelos exato e aproximado. Ressalta-se que, neste caso, os comportamentos do material intacto e fissurado não foram considerados por uma questão de clareza nos gráficos. Os gráficos foram normalizados pelo seu respectivo $k^{\text{hom}}(t=0)$ e $\mu^{\text{hom}}(t=0)$.

Percebe-se que, no tempo intermediário, a correspondência entre o modelo exato e aproximado do material fraturado não é tão ótima quando comparada com os casos anteriores. No entanto,

no curto e no longo tempo foram cumpridas as previsões da formulação do modelo de Burger simplificado, existindo uma excelente concordância entre os modelos comparados.

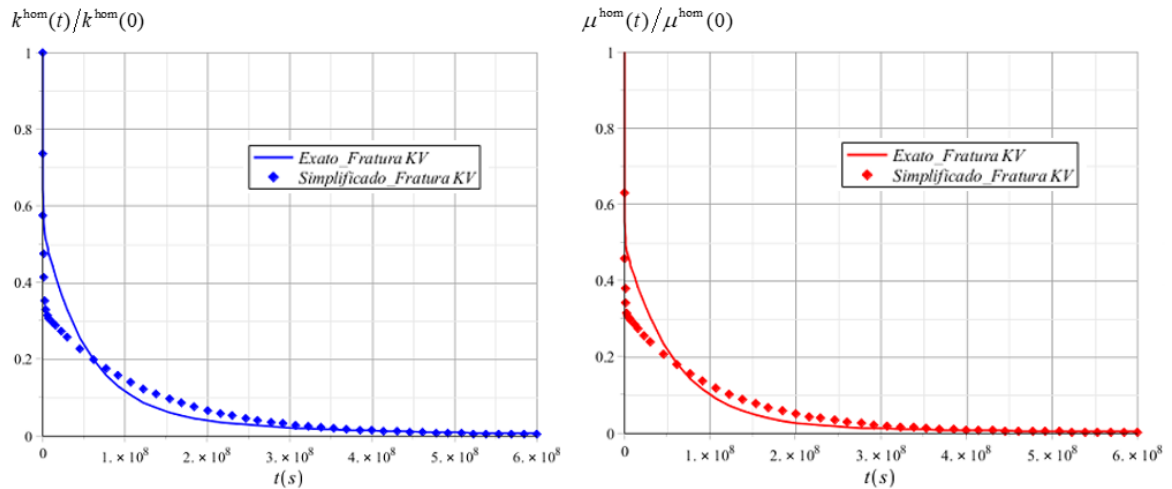


Figura 2.37: Módulos de relaxação associados ao modelo exato e ao modelo de Burger aproximado - ($\varepsilon = 0.2$, $\mathcal{N} = 1$; Caso 3: modelo de Kelvin-Voigt para fraturas)

Embora não seja mostrado na Figura 2.37, uma melhor aproximação é obtida para o caso de um material fissurado do que para uma fratura viscoelástica de Kelvin-Voigt.

O quarto caso corresponde ao modelo reológico viscoelástico de Burger para as fraturas. A Figura 2.38 mostra a evolução temporal dos módulos de relaxação em compressão e cisalhamento do tensor de relaxação para os modelos exato e aproximado.

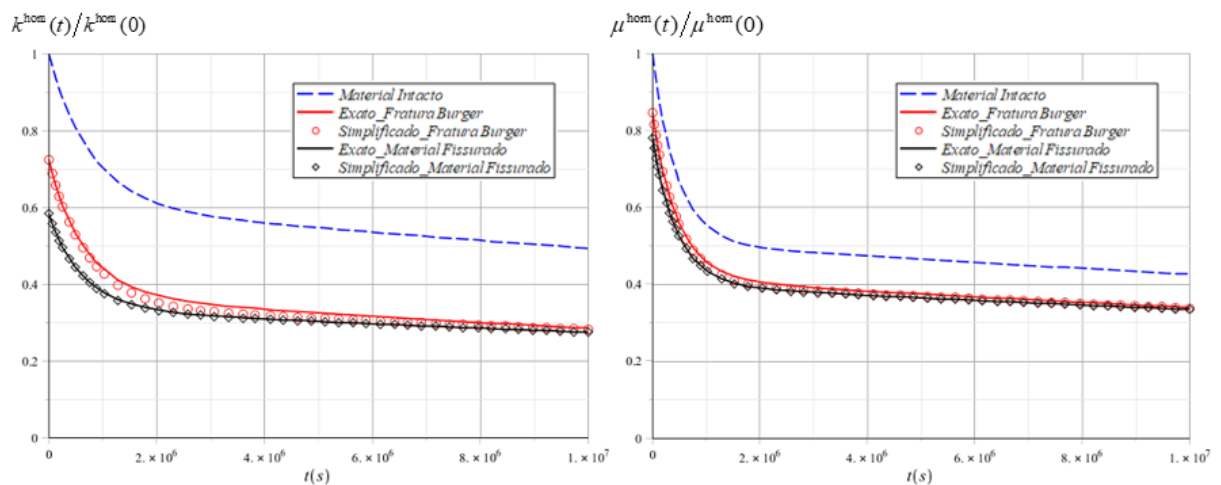


Figura 2.38: Módulos de relaxação associados ao modelo exato e ao modelo de Burger aproximado - ($\varepsilon = 0.2$, $\mathcal{N} = 1$; Caso 4: modelo de Burger para fraturas)

Observa-se, na figura acima, que uma melhor aproximação é obtida para o caso de um material fissurado do que para uma fratura viscoelástica de Burger. Percebe-se, também, que no tempo intermediário existe uma correspondência adequada entre o modelo exato e aproximado do material fraturado. No curto e no longo tempo também foram cumpridas as previsões da formulação do modelo de Burger simplificado, existindo uma excelente concordância entre os modelos comparados.

Com o intuito de conferir que modelos reológicos de fratura no modelo exato tem a melhor concordância com seu respectivo modelo de Burger aproximado, foi elaborada a Tabela 2.6. Foram comparadas as funções de relaxação correspondentes aos módulos de compressão e cisalhamento do modelo exato e aproximado.

Modelo da Matriz	Modelo da Fratura	Modelo Aproximado (Simplificado)	Erro na máxima diferença dos modelos exato e aproximado (%)	
			Compressão (k)	Cisalhamento (μ)
Burger	Fissura (Crack)	Burger	0,53	0,09
	Mola Simples		11,56	11,18
	Maxwell		6,44	3,98
	Kelvin-Voigt		35,20	33,73
	Burger		5,20	2,19

Tabela 2.6: Comparação entre o modelo exato e o modelo aproximado referida ao erro na diferença máxima entre curvas das funções de relaxação exata e aproximada

Da Tabela 2.6 e segundo as considerações utilizadas para os casos estudados, observa-se que o menor erro se apresenta quando um material fissurado é considerado para representar as discontinuidades do meio. No que diz respeito os modelos viscoelásticos para fratura, o menor erro se encontra quando adotado um modelo de Burger, enquanto que o maior erro corresponde ao modelo de fratura de Kelvin-Voigt. Estes erros correspondem a tempos intermediários.

Lembra-se que o modelo de Burger aproximado foi formulado para fornecer boas estimativas das propriedades homogeneizadas a curto e a longo prazo. Não obstante, observa-se que em alguns casos pode reproduzir com precisão o comportamento viscoelástico homogeneizado de um meio fraturado isotrópico a curto, intermediário e longo prazo. Isto acontece com maior precisão nos modelos viscoelásticos de Burger e Maxwell, que apresentam uma ótima concordância com as previsões micromecânicas do modelo exato.

3 IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO VISCOELÁSTICO NO PROGRAMA METAFOR

Neste capítulo é apresentado o desenvolvimento da implementação numérica do modelo viscoelástico anteriormente descrito para geomateriais com microfraturas no programa Metafor. O capítulo consiste em uma breve introdução sobre o programa Metafor e suas características principais, a formulação teórica específica que tem sido a base para a respectiva programação do modelo na linguagem FORTRAN e, finalmente, a apresentação de três exemplos de aplicação para comparação dos resultados da resolução analítica dos mesmos em estado plano de deformações com os resultados do programa. Estes exemplos serão utilizados para verificação da correta implementação do modelo no programa.

3.1 INTRODUÇÃO AO PROGRAMA METAFOR

O programa Metafor foi desenvolvido por Jean-Philippe Ponthot (1995) na sua tese de doutorado (J. P. Ponthot, 1995, PhD Thesis, Liege University, “Traitement unifié de la mécanique des milieux continus solides en grandes transformations par la méthode des éléments finis”), o qual consiste num programa de elementos finitos não linear com múltiplas capacidades. A versão do programa utilizada neste trabalho permite realizar análises de problemas em estado plano de deformações e também permite simular problemas axissimétricos. Existe uma outra versão que trabalha com problemas tridimensionais, mas não foi empregada neste trabalho.

O presente trabalho desenvolveu um módulo no programa, no qual, a relação constitutiva previamente descrita foi implementada. A linguagem de programação empregada é o FORTRAN 77. O método de solução segue Newton-Raphson com matriz tangente obtida por perturbação numérica. No que diz respeito à entrada de dados, esta é feita através de arquivos do tipo ASCII, sendo contido neles a informação relativa a geometria da estrutura (coordenadas e conectividades dos nós na malha de elementos finitos), propriedades mecânicas do material utilizado, solicitações impostas na estrutura (carregamentos ou deslocamentos) e outras opções necessárias para resolução do problema.

3.2 ALGORITMO PARA DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL DO MODELO

O modelo viscoelástico utilizado para descrever o comportamento de um material fraturado fornece uma lei constitutiva que deve ser implementada no programa Metafor aproveitando a vantagem que este oferece de alterar o código base ou adicionar novas leis mecânicas.

A inclusão da lei constitutiva viscoelástica no programa Metafor demanda a geração de sub-rotinas que são posicionadas em partes específicas do código base. Essas sub-rotinas são, basicamente, responsáveis pelo cálculo das tensões homogeneizadas nos pontos de Gauss dos elementos finitos utilizados pelo programa. É importante mencionar que o tipo de elemento finito utilizado é quadrilátero linear com quatro pontos de Gauss por elemento para integração numérica.

No âmbito da micromecânica e com o intuito de diferenciar os cálculos das deformações e tensões na escala macroscópica com os cálculos das mesmas na escala microscópica, foram utilizadas, no capítulo relativo à formulação do modelo, as seguintes letras gregas: $(\underline{\underline{\Sigma}}, \underline{\underline{\Xi}})$ para a escala macroscópica e $(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\varepsilon}})$ para escala microscópica. Não obstante, para o desenvolvimento teórico da implementação computacional, não é mais necessária aquela diferenciação, pois trabalha-se agora na escala macroscópica e as letras adotadas para as tensões e deformações serão as clássicas: $\underline{\underline{\sigma}}$ para o tensor de tensões e $\underline{\underline{\varepsilon}}$ para o tensor de deformações.

No que diz respeito às características do modelo viscoelástico utilizado para a implementação, considerou-se uma distribuição isotrópica de microfraturas no VER e, portanto, o comportamento macroscópico do meio homogeneizado pode ser considerado como isotrópico devido à aleatoriedade na distribuição das microfraturas. Então, pode-se expressar o tensor de relaxação, no âmbito tridimensional, da seguinte maneira:

$$\mathbb{R}^{\text{hom}}(t) = 3 k^{\text{hom}}(t) \mathbb{J} + 2 \mu^{\text{hom}}(t) \mathbb{K} \quad \text{com} \quad \mathbb{J} = \frac{1}{3} \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} \quad ; \quad \mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J} \quad (3.1)$$

Sendo definidos os módulos de compressão $k^{\text{hom}}(t)$ e cisalhamento $\mu^{\text{hom}}(t)$ como:

$$k^{\text{hom}}(t) = \left[\frac{a_0^k}{b_0^k} + \sum_{i=1}^{nk} D_i^k e^{R_i^k t} \right] Y(t) \quad ; \quad \mu^{\text{hom}}(t) = \left[\frac{a_0^\mu}{b_0^\mu} + \sum_{i=1}^{n\mu} D_i^\mu e^{R_i^\mu t} \right] Y(t) \quad (3.2)$$

onde a expressão para o termo D_i , no processo de cálculo da transformada inversa de Carson-Laplace, é:

$$D_i = \left[\frac{C(p)}{\partial B(p) / \partial p} \right]_{p=R_i} ; \quad C(p) = \frac{1}{b_0} \sum_{k=1}^n [(b_0 a_k - a_0 b_k) p^{k-1}] \quad (3.3)$$

As expressões anteriores e suas respectivas variáveis foram explicadas no capítulo 2, correspondente ao desenvolvimento do modelo viscoelástico. Portanto, não será necessário explicar o significado de cada uma delas neste capítulo. Então, o tensor de relaxação para uma distribuição isotrópica de microfraturas pode ser expresso matricialmente como:

$$\mathbb{R}^{\text{hom}} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} k^{\text{hom}} + \frac{4}{3} \mu^{\text{hom}} \\ k^{\text{hom}} - \frac{2}{3} \mu^{\text{hom}} \\ k^{\text{hom}} - \frac{2}{3} \mu^{\text{hom}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} k^{\text{hom}} - \frac{2}{3} \mu^{\text{hom}} \\ k^{\text{hom}} + \frac{4}{3} \mu^{\text{hom}} \\ k^{\text{hom}} - \frac{2}{3} \mu^{\text{hom}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} k^{\text{hom}} - \frac{2}{3} \mu^{\text{hom}} \\ k^{\text{hom}} - \frac{2}{3} \mu^{\text{hom}} \\ k^{\text{hom}} + \frac{4}{3} \mu^{\text{hom}} \end{pmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \mu^{\text{hom}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \mu^{\text{hom}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \mu^{\text{hom}} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Para a obtenção dos módulos de compressão e cisalhamento que compõem o tensor de relaxação homogeneizado, precisa-se do cálculo de raízes dos polinômios denominadores R_i e dos coeficientes D_i , segundo as expressões (3.2) e (3.3). Em vista que a lei constitutiva é fornecida pelo programador, os valores das raízes e coeficientes mencionados também serão fornecidos após seu respectivo cálculo no programa Maple.

Tendo o tensor de relaxação definido, pode-se determinar o cálculo das tensões macroscópicas ou homogeneizadas ($\underline{\underline{\sigma}}(t)$) com a seguinte expressão:

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = \int_{-\infty}^t \mathbb{R}^{\text{hom}}(s, t) : \frac{\partial \underline{\underline{\mathcal{E}}}}{\partial s}(s) ds \quad (3.5)$$

Considera-se a variável de integração como “ s ”, o tempo inicial de aplicação da carga (t_0) como 0. No contexto de não envelhecimento, o caso particular da tensão na expressão (3.5), pode ser expresso como:

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = \mathbb{R}^{\text{hom}}(t) : \underline{\underline{\mathcal{E}}}(0) + \int_0^t \mathbb{R}^{\text{hom}}(s,t) : \frac{\partial \underline{\underline{\mathcal{E}}}}{\partial s}(s) ds \quad (3.6)$$

Observa-se na expressão (3.6) que a primeira parcela $(\mathbb{R}^{\text{hom}}(t) : \underline{\underline{\mathcal{E}}}(0))$ corresponde à resposta a um ensaio de relaxação com sollicitação do tipo $\underline{\underline{\mathcal{E}}}(0) \cdot Y(t)$, onde $Y(t)$ é a função Heaviside e a segunda parcela $\left(\int_0^t \mathbb{R}^{\text{hom}}(s,t) : \frac{\partial \underline{\underline{\mathcal{E}}}}{\partial s}(s) ds \right)$ corresponde à resposta a um incremento de sollicitação $\partial \underline{\underline{\mathcal{E}}} \cdot Y(t)$.

No que diz respeito à implementação numérica, considera-se “n” passos de tempo com a mesma duração (Δt). Os tempos correspondentes podem ser descritos da seguinte maneira:

$$t_0 = 0 \quad , \quad t_1 = \Delta t \quad , \quad t_2 = t_1 + \Delta t \quad , \quad t_3 = t_2 + \Delta t \quad , \quad \dots \quad , \quad t_i = t_{i-1} + \Delta t \quad (3.7)$$

Para o passo de tempo “i+1” e considerando que $t_0 = 0$, o tempo correspondente pode ser expresso como:

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t = (i+1) \cdot \Delta t \quad \text{para} \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (3.8)$$

Utilizando a expressão (3.6), tem-se que a tensão no tempo t_{i+1} é:

$$\underline{\underline{\sigma}}(t_{i+1}) = \mathbb{R}^{\text{hom}}(t_{i+1}) : \underline{\underline{\mathcal{E}}}(0) + \int_0^{t_{i+1}} \mathbb{R}^{\text{hom}}(s,t_{i+1}) : \frac{\partial \underline{\underline{\mathcal{E}}}}{\partial s}(s) ds \quad (3.9)$$

Considerando um procedimento incremental na integração da expressão anterior, esta pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\underline{\underline{\sigma}}(t_{i+1}) = \mathbb{R}^{\text{hom}}(t_{i+1}) : \underline{\underline{\mathcal{E}}}(0) + \sum_{k=0}^i \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbb{R}^{\text{hom}}(s,t_{i+1}) : \frac{\partial \underline{\underline{\mathcal{E}}}}{\partial s}(s) ds \right] \quad (3.10)$$

Supõe-se uma variação linear da deformação no intervalo onde $s \in [t_k, t_{k+1}]$, de forma tal que a derivada dentro da integral pode ser expressa como:

$$\frac{\partial \underline{\underline{\mathcal{E}}}}{\partial s} = \frac{\Delta \underline{\underline{\mathcal{E}}}_{k+1}}{\Delta t} = \frac{\underline{\underline{\mathcal{E}}}(t_{k+1}) - \underline{\underline{\mathcal{E}}}(t_k)}{\Delta t} \quad (3.11)$$

Da expressão (3.10) e considerando a expressão (3.11), pode-se expressar a parcela que corresponde ao somatório da seguinte forma:

$$\sum_{k=0}^i \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbb{R}^{\text{hom}}(s, t_{i+1}) : \frac{\partial \underline{\underline{\mathcal{E}}}}{\partial s}(s) ds \right] = \sum_{k=0}^i \left[\frac{1}{\Delta t} \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbb{R}^{\text{hom}}(s, t_{i+1}) ds \right) : \Delta \underline{\underline{\mathcal{E}}}_{k+1} \right] \quad (3.12)$$

Substitui-se a expressão (3.12) no somatório da expressão (3.10):

$$\underline{\underline{\sigma}}(t_{i+1}) = \mathbb{R}^{\text{hom}}(t_{i+1}) : \underline{\underline{\mathcal{E}}}(0) + \sum_{k=0}^i \left[\frac{1}{\Delta t} \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbb{R}^{\text{hom}}(s, t_{i+1}) ds \right) : \Delta \underline{\underline{\mathcal{E}}}_{k+1} \right] \quad (3.13)$$

O somatório da expressão (3.13) pode ser decomposto da seguinte forma:

$$\sum_{k=0}^i \left[\frac{1}{\Delta t} \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbb{R}^{\text{hom}}(s, t_{i+1}) ds \right) : \Delta \underline{\underline{\mathcal{E}}}_{k+1} \right] = \frac{1}{\Delta t} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{R}^{\text{hom}}(s, t_{i+1}) ds \right) : \Delta \underline{\underline{\mathcal{E}}}_{i+1} + \sum_{k=0}^{i-1} \left[\frac{1}{\Delta t} \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbb{R}^{\text{hom}}(s, t_{i+1}) ds \right) : \Delta \underline{\underline{\mathcal{E}}}_{k+1} \right] \quad (3.14)$$

Substitui-se a expressão (3.14) no somatório da expressão (3.13):

$$\underline{\underline{\sigma}}(t_{i+1}) = \mathbb{R}^{\text{hom}}(t_{i+1}) : \underline{\underline{\mathcal{E}}}(0) + \frac{1}{\Delta t} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{R}^{\text{hom}}(s, t_{i+1}) ds \right) : \Delta \underline{\underline{\mathcal{E}}}_{i+1} + \sum_{k=0}^{i-1} \left[\frac{1}{\Delta t} \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbb{R}^{\text{hom}}(s, t_{i+1}) ds \right) : \Delta \underline{\underline{\mathcal{E}}}_{k+1} \right] \quad (3.15)$$

A expressão (3.15) também pode ser expressa de forma sucinta como:

$$\underline{\underline{\sigma}}(t_{i+1}) = \underline{\underline{K}}_T : \Delta \underline{\underline{\mathcal{E}}}_{i+1} + \underline{\underline{\sigma}}^{\text{histórico}}(t) \quad (3.16)$$

Sendo:

$$\begin{aligned} \Delta \underline{\underline{\mathcal{E}}}_{i+1} &= \underline{\underline{\mathcal{E}}}(t_{i+1}) - \underline{\underline{\mathcal{E}}}(t_i) \quad ; \quad \Delta \underline{\underline{\mathcal{E}}}_{k+1} = \underline{\underline{\mathcal{E}}}(t_{k+1}) - \underline{\underline{\mathcal{E}}}(t_k) \\ \underline{\underline{K}}_T &= \frac{1}{\Delta t} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{R}^{\text{hom}}(s, t_{i+1}) ds \right) \\ \underline{\underline{\sigma}}^{\text{histórico}}(t) &= \underline{\underline{\sigma}}^0(t_{i+1}) + \sum_{k=0}^{i-1} \left[\underline{\underline{A}}_{k+1} : \Delta \underline{\underline{\mathcal{E}}}_{k+1} \right] \\ \underline{\underline{\sigma}}^0(t_{i+1}) &= \mathbb{R}^{\text{hom}}(t_{i+1}) : \underline{\underline{\mathcal{E}}}(0) \quad ; \quad \underline{\underline{A}}_{k+1} = \frac{1}{\Delta t} \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbb{R}^{\text{hom}}(s, t_{i+1}) ds \right) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Antes de determinar as expressões que correspondem às resoluções das integrais \underline{K}_T (matriz tangente) e \underline{A} , considerando uma distribuição isotrópica descrita na expressão (3.1), deve-se lembrar que, segundo o modelo reológico de Maxwell Generalizado, a expressão genérica para uma função de relaxação é definida como:

$$R_{ijkl}(s,t) = R_\infty + \sum_{\alpha=1}^p R_\alpha e^{-\left(\frac{t-s}{\tau_\alpha}\right)} \quad ; \quad \tau_\alpha = \frac{\eta_\alpha}{R_\alpha} \quad (3.18)$$

A expressão (3.18) corresponde à componente “ $ijkl$ ” do tensor \mathbb{R}^{hom} . Substituindo a expressão (3.18) na expressão (3.17), para uma componente “ $ijkl$ ” do tensor \underline{K}_T , obtém-se:

$$K_{T_{ijkl}} = \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(R_\infty + \sum_{\alpha=1}^p R_\alpha e^{-\left(\frac{t_{i+1}-s}{\tau_\alpha}\right)} \right) ds \right] \quad (3.19)$$

Desenvolvendo a expressão (3.19):

$$\begin{aligned} K_{T_{ijkl}} &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_{i+1}} R_\infty ds + \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\sum_{\alpha=1}^p R_\alpha e^{-\left(\frac{t_{i+1}-s}{\tau_\alpha}\right)} \right) ds \right] \\ K_{T_{ijkl}} &= \frac{1}{\Delta t} R_\infty (t_{i+1} - t_i) + \frac{1}{\Delta t} \left[\sum_{\alpha=1}^p \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(R_\alpha e^{-\left(\frac{t_{i+1}-s}{\tau_\alpha}\right)} \right) ds \right] \\ K_{T_{ijkl}} &= \frac{\Delta t}{\Delta t} R_\infty + \frac{1}{\Delta t} \left[\sum_{\alpha=1}^p R_\alpha \tau_\alpha \left(1 - e^{-\left(\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}\right)} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.20)$$

Finalmente, baseado no desenvolvimento da expressão (3.20), a componente da matriz tangente pode ser definida como:

$$K_{T_{ijkl}} = R_\infty + \sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{R_\alpha}{\left(\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}\right)} \left(1 - e^{-\left(\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}\right)} \right) \right] \quad (3.21)$$

No caso de A_{ijkl}^{k+1} da expressão (3.17), resolve-se com o mesmo procedimento usado para K_T :

$$A_{ijkl}^{k+1} = \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(R_\infty + \sum_{\alpha=1}^p R_\alpha e^{-\left(\frac{t_{i+1}-s}{\tau_\alpha}\right)} \right) ds \right] \quad (3.22)$$

Sendo a expressão (3.22) a componente “ijkl” do tensor A_{ijkl}^{k+1} . Desenvolve-se esta expressão:

$$\begin{aligned} A_{ijkl}^{k+1} &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t_k}^{t_{k+1}} R_\infty ds + \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\sum_{\alpha=1}^p R_\alpha e^{-\left(\frac{t_{i+1}-s}{\tau_\alpha}\right)} \right) ds \right] \\ A_{ijkl}^{k+1} &= \frac{1}{\Delta t} R_\infty (t_{k+1} - t_k) + \frac{1}{\Delta t} \left[\sum_{\alpha=1}^p \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(R_\alpha e^{-\left(\frac{t_{i+1}-s}{\tau_\alpha}\right)} \right) ds \right] \\ A_{ijkl}^{k+1} &= \frac{\Delta t}{\Delta t} R_\infty + \frac{1}{\Delta t} \left[\sum_{\alpha=1}^p -R_\alpha \tau_\alpha \left(e^{-\left(\frac{t_{i+1}-t_k}{\tau_\alpha}\right)} - e^{-\left(\frac{t_{i+1}-t_{k+1}}{\tau_\alpha}\right)} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.23)$$

Da expressão (3.8), pode-se determinar o seguinte:

$$t_{i+1} - t_{k+1} = (i+1) \cdot \Delta t - (k+1) \cdot \Delta t = (i-k) \cdot \Delta t \quad (3.24)$$

$$t_{i+1} - t_k = (i+1) \cdot \Delta t - (k) \cdot \Delta t = (i-k+1) \cdot \Delta t \quad (3.25)$$

Finalmente, baseado nas expressões (3.23), (3.24) e (3.25), a componente “ijkl” do tensor A_{ijkl}^{k+1} para o passo de tempo “i+1” pode ser definida como:

$$A_{ijkl}^{k+1} = R_\infty + \sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{R_\alpha}{\left(\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}\right)} \left(e^{-\left(\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}\right)(i-k)} - e^{-\left(\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}\right)(i-k+1)} \right) \right] \quad (3.26)$$

Mencionou-se que as expressões (3.21) e (3.26) correspondiam a uma forma genérica de função de relaxação. Então, agora serão desenvolvidas as expressões para $K_{T_{ijkl}}$ e A_{ijkl}^{k+1} considerando o caso particular de distribuição isotrópica de microfaturas. Das expressões (3.2) e (3.4), pode-se determinar o seguinte:

$$\begin{aligned}
R_{1111}^{\text{hom}} &= R_{2222}^{\text{hom}} = R_{3333}^{\text{hom}} \\
R_{1122}^{\text{hom}} &= R_{1133}^{\text{hom}} = R_{2211}^{\text{hom}} = R_{2233}^{\text{hom}} = R_{3311}^{\text{hom}} = R_{3322}^{\text{hom}} \\
R_{1212}^{\text{hom}} &= R_{1313}^{\text{hom}} = R_{2323}^{\text{hom}}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}
K_{T_{1111}} &= K_{T_{2222}} = K_{T_{3333}} \\
K_{T_{1122}} &= K_{T_{1133}} = K_{T_{2211}} = K_{T_{2233}} = K_{T_{3311}} = K_{T_{3322}} \\
K_{T_{1212}} &= K_{T_{1313}} = K_{T_{2323}}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}
A_{1111}^{k+1} &= A_{2222}^{k+1} = A_{3333}^{k+1} \\
A_{1122}^{k+1} &= A_{1133}^{k+1} = A_{2211}^{k+1} = A_{2233}^{k+1} = A_{3311}^{k+1} = A_{3322}^{k+1} \\
A_{1212}^{k+1} &= A_{1313}^{k+1} = A_{2323}^{k+1}
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Sabe-se que as componentes restantes (não mostradas) dos tensores \mathbb{R}^{hom} , \underline{K}_T e \underline{A}_{k+1} são nulas. Portanto, precisa-se determinar só três componentes (1111, 1122 e 1212) dos tensores \underline{K}_T e \underline{A}_{k+1} . No caso do \underline{K}_T , considerando a expressão (3.2) e fazendo as equivalências respectivas, temos o seguinte:

$$K_{T_{1111}} = \frac{a_0^k}{b_0^k} + \sum_{\alpha=1}^{nk} \left(\frac{D_{\alpha}^k}{(-R_{\alpha}^k \cdot \Delta t)} (1 - e^{R_{\alpha}^k \cdot \Delta t}) \right) + \frac{4}{3} \left[\frac{a_0^{\mu}}{b_0^{\mu}} + \sum_{\alpha=1}^{n\mu} \left(\frac{D_{\alpha}^{\mu}}{(-R_{\alpha}^{\mu} \cdot \Delta t)} (1 - e^{R_{\alpha}^{\mu} \cdot \Delta t}) \right) \right] \tag{3.30}$$

$$K_{T_{1122}} = \frac{a_0^k}{b_0^k} + \sum_{\alpha=1}^{nk} \left(\frac{D_{\alpha}^k}{(-R_{\alpha}^k \cdot \Delta t)} (1 - e^{R_{\alpha}^k \cdot \Delta t}) \right) - \frac{2}{3} \left[\frac{a_0^{\mu}}{b_0^{\mu}} + \sum_{\alpha=1}^{n\mu} \left(\frac{D_{\alpha}^{\mu}}{(-R_{\alpha}^{\mu} \cdot \Delta t)} (1 - e^{R_{\alpha}^{\mu} \cdot \Delta t}) \right) \right] \tag{3.31}$$

$$K_{T_{1212}} = 2 \left[\frac{a_0^{\mu}}{b_0^{\mu}} + \sum_{\alpha=1}^{n\mu} \left(\frac{D_{\alpha}^{\mu}}{(-R_{\alpha}^{\mu} \cdot \Delta t)} (1 - e^{R_{\alpha}^{\mu} \cdot \Delta t}) \right) \right] \tag{3.32}$$

No caso do \underline{A}_{k+1} e considerando a expressão (3.2), temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
A_{1111}^{k^*+1} &= \frac{a_0^k}{b_0^k} + \sum_{\alpha=1}^{nk} \left(\frac{D_{\alpha}^k}{(-R_{\alpha}^k \cdot \Delta t)} \left(e^{(i-k^*) \cdot R_{\alpha}^k \cdot \Delta t} - e^{(i-k^*+1) \cdot R_{\alpha}^k \cdot \Delta t} \right) \right) + \\
&\quad \frac{4}{3} \left[\frac{a_0^{\mu}}{b_0^{\mu}} + \sum_{\alpha=1}^{n\mu} \left(\frac{D_{\alpha}^{\mu}}{(-R_{\alpha}^{\mu} \cdot \Delta t)} \left(e^{(i-k^*) \cdot R_{\alpha}^{\mu} \cdot \Delta t} - e^{(i-k^*+1) \cdot R_{\alpha}^{\mu} \cdot \Delta t} \right) \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$A_{1122}^{k^*+1} = \frac{a_0^k}{b_0^k} + \sum_{\alpha=1}^{nk} \left(\frac{D_\alpha^k}{(-R_\alpha^k \cdot \Delta t)} \left(e^{(i-k^*) \cdot R_\alpha^k \cdot \Delta t} - e^{(i-k^*+1) \cdot R_\alpha^k \cdot \Delta t} \right) \right) - \frac{2}{3} \left[\frac{a_0^\mu}{b_0^\mu} + \sum_{\alpha=1}^{n\mu} \left(\frac{D_\alpha^\mu}{(-R_\alpha^\mu \cdot \Delta t)} \left(e^{(i-k^*) \cdot R_\alpha^\mu \cdot \Delta t} - e^{(i-k^*+1) \cdot R_\alpha^\mu \cdot \Delta t} \right) \right) \right] \quad (3.34)$$

$$A_{1212}^{k^*+1} = 2 \left[\frac{a_0^\mu}{b_0^\mu} + \sum_{\alpha=1}^{n\mu} \left(\frac{D_\alpha^\mu}{(-R_\alpha^\mu \cdot \Delta t)} \left(e^{(i-k^*) \cdot R_\alpha^\mu \cdot \Delta t} - e^{(i-k^*+1) \cdot R_\alpha^\mu \cdot \Delta t} \right) \right) \right] \quad (3.35)$$

Nas expressões (3.33), (3.34) e (3.35), o valor de k^* corresponde ao valor k da expressão (3.22). No que diz respeito à implementação numérica por elementos finitos, precisa-se definir as tensões totais, segundo a expressão (3.16), para todos os passos de tempo que serão considerados. Define-se como NTR o passo de tempo atual.

Devido à forma em que foram desenvolvidas as expressões (3.16) e (3.17), torna-se mais adequado definir as expressões das componentes do tensor de tensões para três intervalos de passo de tempo diferentes: $NTR = 1$, $NTR = 2$ e $NTR \geq 3$.

Para $NTR = 1$ (tempo t_1), tem-se que o valor de $i = 0$ e pode-se definir o tensor de tensões:

$$\underline{\underline{\sigma}}_1 = \underline{\underline{K}}_T : \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_1 + \underline{\underline{R}}_1 : \underline{\underline{\varepsilon}}_0 \quad (3.36)$$

Resolvendo matricialmente a expressão (3.36), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^1 \\ \sigma_{22}^1 \\ \sigma_{33}^1 \\ \sigma_{12}^1 \\ \sigma_{13}^1 \\ \sigma_{23}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1111}^T \cdot \Delta \varepsilon_{11}^1 + K_{1122}^T \cdot \Delta \varepsilon_{22}^1 + R_{1111}^1 \cdot \varepsilon_{11}^0 + R_{1122}^1 \cdot \varepsilon_{22}^0 \\ K_{1111}^T \cdot \Delta \varepsilon_{22}^1 + K_{1122}^T \cdot \Delta \varepsilon_{11}^1 + R_{1111}^1 \cdot \varepsilon_{22}^0 + R_{1122}^1 \cdot \varepsilon_{11}^0 \\ K_{1122}^T \cdot \Delta \varepsilon_{11}^1 + K_{1122}^T \cdot \Delta \varepsilon_{22}^1 + R_{1122}^1 \cdot \varepsilon_{11}^0 + R_{1122}^1 \cdot \varepsilon_{22}^0 \\ K_{1212}^T \cdot \Delta \varepsilon_{12}^1 + R_{1212}^1 \cdot \varepsilon_{12}^0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Sendo σ_{ij}^{NTR} a componente “ ij ” do tensor de tensões $\underline{\underline{\sigma}}_{NTR}$ para o passo de tempo NTR. $\Delta \varepsilon_{ij}^{NTR}$

é a componente “ ij ” do tensor delta de deformação $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{NTR}$ para o passo de tempo NTR. K_{ijk}^T

é a componente “ $ijkl$ ” do tensor da matriz tangente $\underline{K}_{\sim T}$ para qualquer passo de tempo NTR.

R_{ijkl}^{NTR} é a componente “ $ijkl$ ” do tensor de relaxação homogeneizado \mathbb{R}_{NTR} para o passo de tempo NTR. ε_{ij}^0 é a componente “ ij ” do tensor de deformações elásticas instantâneas $\underline{\underline{\varepsilon}}_0$.

Para NTR = 2 (tempo t_2) tem-se que o valor de $i = 1$ e $k = 0$. Então, pode-se definir o tensor de tensões da seguinte forma:

$$\underline{\underline{\sigma}}_2 = \underline{K}_{\sim T} : \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_2 + \mathbb{R}_2 : \underline{\underline{\varepsilon}}_0 + \underline{A}_1 : \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_1 \quad (3.38)$$

Resolvendo matricialmente a expressão (3.38), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 \\ \sigma_{22}^2 \\ \sigma_{33}^2 \\ \sigma_{12}^2 \\ \sigma_{13}^2 \\ \sigma_{23}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1111}^T \cdot \Delta \varepsilon_{11}^2 + K_{1122}^T \cdot \Delta \varepsilon_{22}^2 + R_{1111}^2 \cdot \varepsilon_{11}^0 + R_{1122}^2 \cdot \varepsilon_{22}^0 + A_{1111}^1 \cdot \Delta \varepsilon_{11}^1 + A_{1122}^1 \cdot \Delta \varepsilon_{22}^1 \\ K_{1111}^T \cdot \Delta \varepsilon_{22}^2 + K_{1122}^T \cdot \Delta \varepsilon_{11}^2 + R_{1111}^2 \cdot \varepsilon_{22}^0 + R_{1122}^2 \cdot \varepsilon_{11}^0 + A_{1111}^1 \cdot \Delta \varepsilon_{22}^1 + A_{1122}^1 \cdot \Delta \varepsilon_{11}^1 \\ K_{1122}^T \cdot \Delta \varepsilon_{11}^2 + K_{1122}^T \cdot \Delta \varepsilon_{22}^2 + R_{1122}^2 \cdot \varepsilon_{11}^0 + R_{1122}^2 \cdot \varepsilon_{22}^0 + A_{1122}^1 \cdot \Delta \varepsilon_{11}^1 + A_{1122}^1 \cdot \Delta \varepsilon_{22}^1 \\ K_{1212}^T \cdot \Delta \varepsilon_{12}^2 + R_{1212}^2 \cdot \varepsilon_{12}^0 + A_{1212}^1 \cdot \Delta \varepsilon_{12}^1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Sendo A_{ijkl}^1 a componente “ $ijkl$ ” do tensor \underline{A}_1 para o passo de tempo 1.

Para NTR ≥ 3 (tempo $\geq t_3$) tem-se que o valor de $i = NTR - 1$ e $k \in [0, i - 1]$. Então, pode-se definir o tensor de tensões para o passo de tempo NTR da seguinte forma:

$$\underline{\underline{\sigma}}_{NTR} = \underline{K}_{\sim T} : \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{NTR} + \mathbb{R}_{NTR} : \underline{\underline{\varepsilon}}_0 + \sum_{k=0}^{i-1} \left[\underline{A}_{k+1} : \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{k+1} \right] \quad (3.40)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^{NTR} \\ \sigma_{22}^{NTR} \\ \sigma_{33}^{NTR} \\ \sigma_{12}^{NTR} \\ \sigma_{13}^{NTR} \\ \sigma_{23}^{NTR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1111}^T \cdot \Delta \varepsilon_{11}^{NTR} + K_{1122}^T \cdot \Delta \varepsilon_{22}^{NTR} + R_{1111}^{NTR} \cdot \varepsilon_{11}^0 + R_{1122}^{NTR} \cdot \varepsilon_{22}^0 + \text{SAE11} \\ K_{1111}^T \cdot \Delta \varepsilon_{22}^{NTR} + K_{1122}^T \cdot \Delta \varepsilon_{11}^{NTR} + R_{1111}^{NTR} \cdot \varepsilon_{22}^0 + R_{1122}^{NTR} \cdot \varepsilon_{11}^0 + \text{SAE22} \\ K_{1122}^T \cdot \Delta \varepsilon_{11}^{NTR} + K_{1122}^T \cdot \Delta \varepsilon_{22}^{NTR} + R_{1122}^{NTR} \cdot \varepsilon_{11}^0 + R_{1122}^{NTR} \cdot \varepsilon_{22}^0 + \text{SAE33} \\ K_{1212}^T \cdot \Delta \varepsilon_{12}^{NTR} + R_{1212}^{NTR} \cdot \varepsilon_{12}^0 + \text{SAE12} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

A expressão (3.41) é o desenvolvimento matricial da expressão (3.40), onde:

$$\begin{aligned}
 \text{SAE11} &= \sum_{k=0}^{i-1} \left(A_{1111}^{k+1} \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{11}^{k+1} + A_{1122}^{k+1} \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{22}^{k+1} \right) \\
 \text{SAE22} &= \sum_{k=0}^{i-1} \left(A_{1111}^{k+1} \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{22}^{k+1} + A_{1122}^{k+1} \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{11}^{k+1} \right) \\
 \text{SAE33} &= \sum_{k=0}^{i-1} \left(A_{1122}^{k+1} \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{11}^{k+1} + A_{1122}^{k+1} \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{22}^{k+1} \right) \quad ; \quad \text{SAE12} = \sum_{k=0}^{i-1} \left(A_{1212}^{k+1} \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{12}^{k+1} \right)
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Lembra-se que a versão utilizada do programa Metafor considera o estado plano de deformações e, portanto, a componente 33 do tensor de tensões não será necessária na programação. Porém, nas expressões anteriores, esta componente foi contemplada nos cálculos para uma futura aplicação tridimensional do trabalho.

Finalmente, as expressões (3.37), (3.39) e (3.41) serão as equações principais utilizadas na implementação do modelo viscoelástico para o cálculo de tensões nos pontos de Gauss dos elementos finitos. A seguir, apresenta-se um esquema (Fig. 3.1) referido só a sub-rotinas que envolvem o cálculo das tensões totais e que representam o trabalho de inclusão da lei viscoelástica no código base do Metafor.

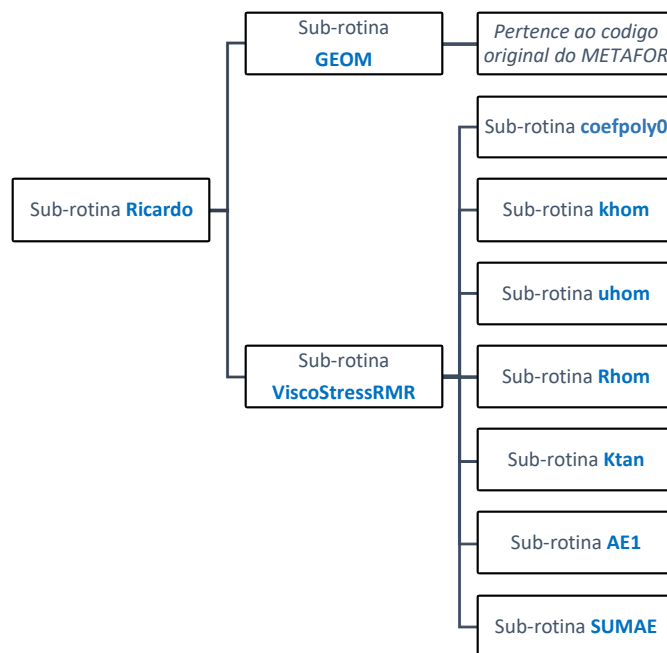


Figura 3.1: Esquema das sub-rotinas utilizadas para o cálculo das tensões totais

3.3 VERIFICAÇÃO DO CÓDIGO IMPLEMENTADO NO ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES

Na introdução deste capítulo foi mencionado que uma das principais limitações da versão utilizada do programa Metafor é a restrição a análises bidimensionais considerando um estado plano de deformações (EPD) e axissimetria. Então, com o intuito de verificar a validade dos resultados fornecidos pelo programa, faz-se necessário considerar a resolução analítica de problemas em estado plano de deformações. Desta forma, as respectivas soluções dos problemas resolvidos analiticamente poderão ser comparadas com os resultados do Metafor para validação do código implementado.

Serão resolvidos três problemas de forma analítica, considerando as condições de contorno necessárias que permitam reproduzir o comportamento do corpo de prova em estado plano de deformações. A seguir, apresentam-se as características e dados principais dos três modelos numéricos desenvolvidos em Metafor. Logo depois, serão desenvolvidas as respectivas soluções analíticas para comparação com os resultados dos modelos numéricos.

3.3.1 Características dos Modelos Numéricos desenvolvidos em METAFOR

Os três exemplos de aplicação serão úteis para verificar o correto funcionamento do código implementado e a validade dos resultados fornecidos quando comparados com as respectivas respostas analíticas. Nestes três problemas, o corpo de prova será o mesmo, tanto em dimensões quanto em características do material empregado. O que será diferente em cada problema é a solicitação aplicada no corpo de prova (tensão, deslocamento e taxa de deslocamento).

Embora os campos de tensão e deformação sejam homogêneos nos três casos, o modelo geométrico utilizado consistirá em uma estrutura quadrilátera composta de quatro elementos finitos quadriláteros que apresentam as mesmas dimensões nas duas direções de análise, isto é, elementos quadrados. Tanto a base quanto a altura total da estrutura serão de 1.00 m. Na Figura 3.2 pode-se observar o número dos nós e dos elementos finitos utilizados no modelo e gerados no programa de visualização de dados Tecplot 8.0.

O modelo apresenta restrição de deslocamento horizontal e vertical no nó 2 e restrição de deslocamento vertical nos nós 1 e 3 na base da estrutura nos três problemas. Existe livre deslocamento horizontal e vertical dos nós superiores (4, 5, 6, 7, 8 e 9) dependendo das características das solicitações aplicadas no corpo.

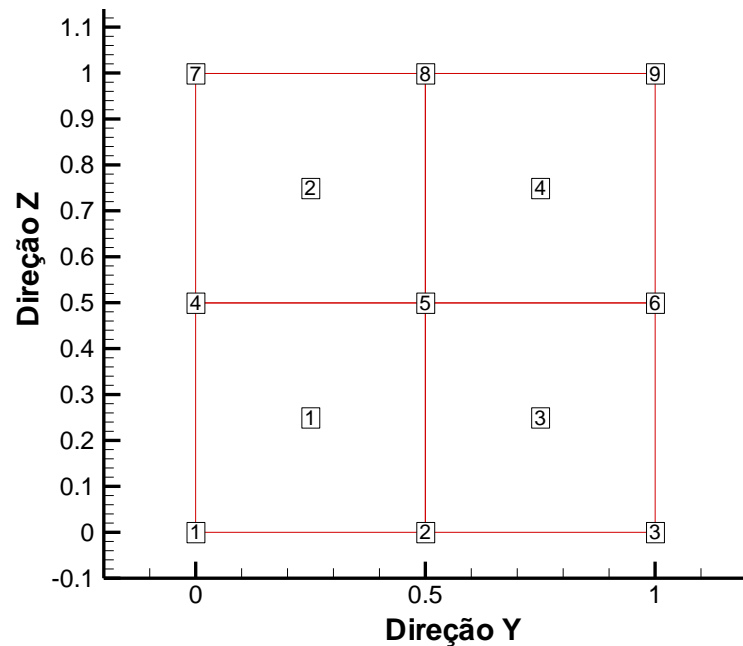


Figura 3.2: Nós e elementos do modelo desenvolvido em Metafor

É importante destacar que serão analisados dois casos de comportamento viscoelástico no Metafor em cada um dos problemas, isto é, serão utilizados modelos reológicos para descrever o comportamento da matriz e das microfaturas. O modelo reológico utilizado para descrever o comportamento da matriz será: Burger. Enquanto que para as microfaturas será utilizado o modelo de Maxwell. Portanto, teremos a combinação Burger-Maxwell para o estudo do comportamento diferido do corpo de prova.

Os parâmetros mecânicos da matriz são os mesmos que foram utilizados na seção 2.6:

MATRIZ					
Parâmetro	Valor	Unidade	Parâmetro	Valor	Unidade
$k_{e,M}^s$	24,42	<i>GPa</i>	$k_{e,K}^s$	39,27	<i>GPa</i>
$k_{v,M}^s$	$7,33 \times 10^8$	<i>GPa · s</i>	$k_{v,K}^s$	$5,07 \times 10^7$	<i>GPa · s</i>
$\mu_{e,M}^s$	13,27	<i>GPa</i>	$\mu_{e,K}^s$	14,07	<i>GPa</i>
$\mu_{v,M}^s$	$3,88 \times 10^8$	<i>GPa · s</i>	$\mu_{v,K}^s$	$1,27 \times 10^7$	<i>GPa · s</i>

Tabela 3.1: Parâmetros mecânicos da matriz para o modelo reológico de Burger

Os parâmetros mecânicos da fratura relativos ao modelo reológico empregados para descrever seu comportamento (Maxwell) são os seguintes:

FRATURAS		
Parâmetro	Valor	Unidade
$k_{e,M}^n$	42,22	<i>GPa / m</i>
$k_{v,M}^n$	7×10^7	<i>GPa · s / m</i>
$k_{e,M}^t$	16,88	<i>GPa / m</i>
$k_{v,M}^t$	4×10^7	<i>GPa · s / m</i>

Tabela 3.2: Parâmetros mecânicos das fraturas para o modelo reológico de Maxwell

O parâmetro de dano ou densidade de fratura será $\varepsilon = 0,20$ e o número de fraturas por metro cúbico será $N = 1,0$. Com relação ao tempo total considerado, para os dois primeiros exemplos, tem-se 10^9 segundos, os que foram divididos em 5000 passos de tempo de 2×10^5 segundos cada. Para o terceiro exemplo relacionado com a taxa de deslocamento, o tempo total será de 5×10^6 segundos, que será dividido em 5000 passos de tempo de 10^3 segundos cada. A tolerância assumida para as iterações realizadas no programa será de 10^{-12} .

Com relação ao restante dos dados principais (raízes de polinômios e coeficientes) do modelo viscoelástico que são utilizados nas sub-rotinas, estes serão fornecidos como dados de entrada e podem ser calculados utilizando o programa Maple. Os dados específicos para cada um dos problemas serão mencionados nos itens posteriores respectivos.

3.3.2 Resolução Analítica do Problema Viscoelástico de Compressão em Deformação Plana

Tem-se um corpo de altura H (Figuras 3.3 e 3.4) com comportamento viscoelástico submetido a compressão através de uma tensão de compressão $-\sigma \cdot Y(t)$ aplicada na parte superior e considerando um estado plano de deformações (plano $Y-Z$). A solução consiste em encontrar os campos de tensões e deslocamentos do corpo ao longo do tempo utilizando os conceitos básicos da mecânica dos meios contínuos (Salençon, 2005) e da viscoelasticidade (Salençon, 2009). As características principais deste problema são:

- a) Material homogêneo, isótropo e linear viscoelástico.
- b) Desprezam-se os efeitos da gravidade e de aceleração.
- c) Existe contato sem atrito entre o corpo de prova e as placas rígidas.
- d) O estado inicial natural é $\underline{\underline{\sigma}}^0 = 0$.

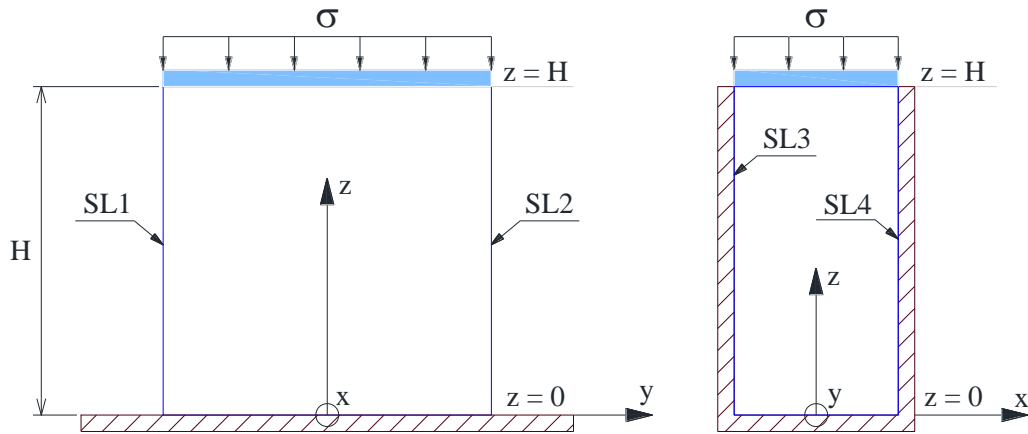


Figura 3.3: Planos Y-Z e X-Z do corpo de prova submetido a compressão em EPD

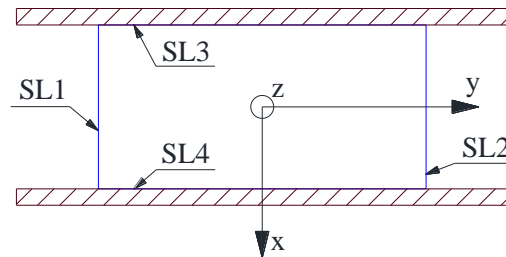


Figura 3.4: Plano X-Y do corpo de prova submetido a compressão em EPD

As condições que verificam o campo de tensões ($\underline{\underline{\sigma}}$) e o campo de deslocamentos ($\underline{\underline{\xi}}$) como solução do problema viscoelástico são: admissibilidade estática do campo de tensões, admissibilidade cinemática do campo de deslocamentos e a lei do comportamento no caso viscoelástico. No que diz respeito a admissibilidade estática do campo de tensões, considerando as características do problema mencionadas anteriormente, deve-se cumprir o seguinte:

$$\text{div } \underline{\underline{\sigma}} = 0 \quad (3.43)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} \text{ deve permanecer contínuo ao longo das superfícies} \quad (3.44)$$

Condições de Contorno :

$$SL1: \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot (-\underline{\underline{e}}_y) = 0 \rightarrow T_x = T_y = T_z = 0$$

$$SL2: \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot (\underline{\underline{e}}_y) = 0 \rightarrow T_x = T_y = T_z = 0$$

$$SL3: \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot (-\underline{\underline{e}}_x) \parallel -\underline{\underline{e}}_x \rightarrow T_y = T_z = 0$$

$$SL4: \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot (\underline{\underline{e}}_x) \parallel \underline{\underline{e}}_x \rightarrow T_y = T_z = 0$$

$$z = 0: \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot (-\underline{\underline{e}}_z) \parallel -\underline{\underline{e}}_z \rightarrow T_x = T_y = 0$$

$$z = H: \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot (\underline{\underline{e}}_z) = -\sigma \cdot \underline{\underline{e}}_z \rightarrow T_x = T_y = 0 ; T_z = -\sigma \cdot \underline{\underline{e}}_z$$

(3.45)

onde \underline{n} é o vetor unitário normal à superfície analisada, \underline{T} é o vetor tensão (N/m²) e div é o operador divergência. Ressalta-se também que SL significa superfície lateral. As superfícies laterais SL1, SL2 e superfície superior ($z = H$) mostram três condições de contorno em tensão, portanto não será necessário definir condição nenhuma em deslocamento para estas superfícies. No que diz respeito a admissibilidade cinemática do campo de deslocamentos, considerando as características do problema, deve-se cumprir o seguinte:

Condições de Contorno :

$$\begin{aligned} SL3 : \underline{\xi} \cdot (-\underline{e}_x) &= 0 \rightarrow \xi_x = 0 \\ SL4 : \underline{\xi} \cdot (\underline{e}_x) &= 0 \rightarrow \xi_x = 0 \\ z = 0 : \underline{\xi} \cdot (-\underline{e}_z) &= 0 \rightarrow \xi_z = 0 \end{aligned} \quad (3.46)$$

Com relação à lei do comportamento viscoelástico, define-se as seguintes leis constitutivas:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \mathcal{J}(t) \circ \underline{\underline{\sigma}}(t) \quad ; \quad \underline{\underline{\sigma}}(t) = \mathcal{R}(t) \circ \underline{\underline{\varepsilon}}(t) \quad (3.47)$$

onde $\underline{\underline{\varepsilon}}(t)$ é o tensor de deformações, $\underline{\underline{\sigma}}(t)$ é o tensor ou campo de tensões, $\mathcal{R}(t)$ é o tensor de relaxação macroscópico e $\mathcal{J}(t)$ é o tensor de fluência no nível macroscópico. O símbolo \circ representa o operador de Boltzmann, que foi explicado no capítulo 2 deste trabalho.

Para resolver o problema viscoelástico, será utilizada uma abordagem em tensão. Isto é, assumir um tensor de tensões para verificar sua admissibilidade estática e, posteriormente, calcular o tensor de deformações e o vetor de deslocamentos, que deve cumprir com a respectiva admissibilidade cinemática. Então, assume-se o seguinte tensor de tensões $\underline{\underline{\sigma}}(t)$:

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \cdot Y(t) \quad (3.48)$$

onde $Y(t)$ é a função Heaviside. Considera-se, também, que σ_{xx} e σ_{zz} não dependem do vetor posição \underline{X} . Lembra-se que $\underline{X} = x \cdot \underline{e}_x + y \cdot \underline{e}_y + z \cdot \underline{e}_z$. Admite-se que $\sigma_{zz} = -\sigma$, que é a tensão aplicada no topo do corpo de prova. $\underline{\underline{\sigma}}(t)$ pode ser representado tensorialmente da seguinte forma:

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = (\sigma_{xx} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \sigma \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) Y(t) \quad (3.49)$$

Tendo definido o tensor de tensões, o primeiro passo para resolver o problema viscoelástico é a verificação da sua admissibilidade estática. Para isto, é importante lembrar as expressões (3.43), (3.44) e (3.45), que definem os requerimentos para que este tensor seja considerado estaticamente admissível. Revisando a expressão (3.43), tem-se que:

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{OK!} \quad (3.50)$$

Observa-se que foi cumprido o requerimento da divergência do tensor de tensões. No caso da expressão (3.44), sendo que $\underline{\underline{\sigma}}(t)$ não depende do vetor posição \underline{X} , pode-se dizer que $\underline{\underline{\sigma}}(t)$ é um campo tensorial homogêneo e uniforme. Portanto, $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$ é contínuo.

Com relação a expressão (3.45), verificam-se as condições de contorno segundo o tensor de tensões definido para um tempo $t > 0$ ($Y(t) = 1$):

$$\begin{aligned} SL1 : (\sigma_{xx} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \sigma \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) \cdot (-\underline{e}_y) &= (\sigma_{xx} \mathbf{0} + \sigma \mathbf{0}) = 0 \Rightarrow \mathbf{OK!} \\ SL2 : (\sigma_{xx} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \sigma \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) \cdot (\underline{e}_y) &= (\sigma_{xx} \mathbf{0} + \sigma \mathbf{0}) = 0 \Rightarrow \mathbf{OK!} \\ SL3 : (\sigma_{xx} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \sigma \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) \cdot (-\underline{e}_x) &= \sigma_{xx} - \underline{e}_x Y(t) \parallel -\underline{e}_x \Rightarrow \mathbf{OK!} \\ SL4 : (\sigma_{xx} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \sigma \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) \cdot (\underline{e}_x) &= \sigma_{xx} \underline{e}_x Y(t) \parallel \underline{e}_x \Rightarrow \mathbf{OK!} \\ z = 0 : (\sigma_{xx} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \sigma \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) \cdot (-\underline{e}_z) &= -\sigma - \underline{e}_z Y(t) \parallel -\underline{e}_z \Rightarrow \mathbf{OK!} \\ z = H : (\sigma_{xx} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \sigma \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) \cdot (\underline{e}_z) &= \sigma \underline{e}_z \Rightarrow \mathbf{OK!} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Dos cálculos anteriores, determina-se que o tensor $\underline{\underline{\sigma}}(t)$ é estaticamente admissível. Agora, o segundo passo da resolução é o cálculo do tensor de deformações $\underline{\underline{\varepsilon}}(t)$. Considerando, então, a lei de comportamento da expressão (3.47), faz-se necessário definir o tensor de fluência $\underline{\underline{\mathcal{J}}}(t)$ para poder realizar o cálculo de $\underline{\underline{\varepsilon}}(t)$. Sabe-se que para uma distribuição isotrópica de microfaturas, o tensor de relaxação no espaço de Carson-Laplace ($\mathbb{R}^*(p)$) é definido como:

$$\mathbb{R}^*(p) = 3 k_{(p)}^{\text{hom}*} J^e + 2 \mu_{(p)}^{\text{hom}*} K^d \quad (3.52)$$

onde $k_{(p)}^{\text{hom}*}$ e $\mu_{(p)}^{\text{hom}*}$ são, respectivamente, os módulos de compressão e cisalhamento no espaço de Carson-Laplace. J^e representa o tensor esférico e K^d representa o tensor desviador. Baseado na distribuição isotrópica, o tensor de fluência no espaço de Carson-Laplace pode ser definido como:

$$\mathcal{J}^*(p) = \left(\mathcal{R}^*(p) \right)^{-1} = \left(\frac{1}{3} \frac{1}{k_{(p)}^{\text{hom}*}} \right) J^e + \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\mu_{(p)}^{\text{hom}*}} \right) K^d \quad (3.53)$$

No domínio de tempo, aplicando a transformada inversa de Carson-Laplace \mathcal{L}_c^{-1} , o tensor de fluência pode ser expresso da seguinte maneira:

$$\mathcal{J}(t) = \frac{1}{3} \mathcal{L}_c^{-1} \left(\frac{1}{k_{(p)}^{\text{hom}*}} \right) J^e + \frac{1}{2} \mathcal{L}_c^{-1} \left(\frac{1}{\mu_{(p)}^{\text{hom}*}} \right) K^d \quad (3.54)$$

Para simplificar os cálculos, considera-se o seguinte:

$$k'(t) = \frac{1}{\mathcal{L}_c^{-1} \left(1 / k_{(p)}^{\text{hom}*} \right)} \quad ; \quad \mu'(t) = \frac{1}{\mathcal{L}_c^{-1} \left(1 / \mu_{(p)}^{\text{hom}*} \right)} \quad (3.55)$$

Denomina-se $k'(t)$ o módulo de compressão viscoelástico e $\mu'(t)$ o módulo de cisalhamento viscoelástico. Portanto, baseado nas expressões (3.54) e (3.55), o tensor de fluência pode ser expresso como:

$$\mathcal{J}(t) = \frac{1}{3 k'(t)} J^e + \frac{1}{2 \mu'(t)} K^d \quad (3.56)$$

Outra forma de expressar o tensor de fluência é apresentada a seguir:

$$\mathcal{J}(t) = \left(\frac{2 \mu'(t) - 3 k'(t)}{18 k'(t) \mu'(t)} \right) \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} + \left(\frac{1}{2 \mu'(t)} \right) \underline{\underline{1}} \quad (3.57)$$

Tendo definido o tensor de fluência e considerando a lei de comportamento da expressão (3.47), define-se o caso particular do tensor de deformações como:

$$\underline{\underline{\mathcal{E}}}(t) = \mathcal{J}(t) \circ \underline{\underline{\sigma}}(t) = \int_{t_0}^t \mathcal{J}(s, t) : \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial s}(s) ds + \mathcal{J}(t) : \underline{\underline{\sigma}}(0) \quad (3.58)$$

Neste caso particular, o tensor de tensões permanece constante a partir do tempo $t_0 = 0$. Isto significa que durante o tempo total do ensaio de compressão em EPD, a tensão aplicada será constante, a derivada da tensão será zero e a integral da expressão (3.58) desaparece. Portanto, da expressão (3.57) e (3.58), o tensor de deformações pode ser expresso da seguinte maneira:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \mathcal{J}(t): \underline{\underline{\sigma}}(0) = \left(\frac{1}{2 \mu'(t)} \right) \underline{\underline{\sigma}}(0) + \left(\frac{2 \mu'(t) - 3 k'(t)}{18 k'(t) \mu'(t)} \right) \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}(0)) \underline{\underline{1}} \quad (3.59)$$

Sabe-se que o tensor de tensões baseado na expressão (3.48) pode ser expresso como:

$$\underline{\underline{\sigma}}(0) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

Desenvolvendo a expressão (3.59) e considerando a expressão (3.60) do tensor de tensões, o tensor de deformações, para o tempo de aplicação da carga ($t \geq 0$), é:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\varepsilon}}(t) = & \left[\left(\frac{6 k'(t) + 2 \mu'(t)}{18 k'(t) \mu'(t)} \right) \sigma_{xx} - \left(\frac{2 \mu'(t) - 3 k'(t)}{18 k'(t) \mu'(t)} \right) \sigma \right] \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \\ & \left[\left(\frac{2 \mu'(t) - 3 k'(t)}{18 k'(t) \mu'(t)} \right) (\sigma_{xx} - \sigma) \right] \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \\ & \left[\left(-\frac{6 k'(t) + 2 \mu'(t)}{18 k'(t) \mu'(t)} \right) \sigma + \left(\frac{2 \mu'(t) - 3 k'(t)}{18 k'(t) \mu'(t)} \right) \sigma_{xx} \right] \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \end{aligned} \quad (3.61)$$

Lembra-se que no estado plano de deformações (EPD) não existe deformação na direção normal ao plano de deformações Y-Z, portanto:

$$\varepsilon_{xx} = \left(\frac{6 k'(t) + 2 \mu'(t)}{18 k'(t) \mu'(t)} \right) \sigma_{xx} - \left(\frac{2 \mu'(t) - 3 k'(t)}{18 k'(t) \mu'(t)} \right) \sigma = 0 \quad (3.62)$$

Da expressão (3.62), deduz-se a expressão para σ_{xx} :

$$\sigma_{xx} = \left(-\frac{3 k'(t) - 2 \mu'(t)}{2 (3 k'(t) + \mu'(t))} \right) \sigma \quad (3.63)$$

Substituindo a expressão (3.63) na expressão (3.61), tem-se o seguinte:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \left[\frac{-\sigma (2 \mu'(t) - 3 k'(t))}{4 \mu'(t)(3 k'(t) + \mu'(t))} \right] \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \left[\frac{-\sigma (3 k'(t) + 4 \mu'(t))}{4 \mu'(t)(3 k'(t) + \mu'(t))} \right] \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \quad (3.64)$$

O terceiro passo consiste em verificar a compatibilidade geométrica do tensor $\underline{\underline{\varepsilon}}(t)$. Da expressão (3.64), percebe-se que $\underline{\underline{\varepsilon}}(t)$ é um campo de deformações homogêneo porque não depende do vetor posição \underline{X} . Do anterior, pode-se considerar o tensor de deformações como uniforme e, portanto, geometricamente compatível \Rightarrow **OK!**

O quarto passo corresponde ao cálculo do campo de deslocamentos. Das condições do problema, sabe-se que $\underline{\xi}$ é um vetor de deslocamentos associado a uma deformação homogênea e pode ser definido da seguinte forma:

$$\underline{\xi}(t) = \underline{\underline{\varepsilon}}(t) \cdot \underline{X} \quad \text{com} \quad \underline{X} = x \underline{e}_x + y \underline{e}_y + z \underline{e}_z \quad (3.65)$$

Ressalta-se que na expressão (3.65) não é considerado o deslocamento de corpo rígido pois não faz parte das características do problema. Das expressões (3.64) e (3.65) obtém-se o seguinte:

$$\underline{\xi}(t) = \left[\frac{-\sigma (2 \mu'(t) - 3 k'(t))}{4 \mu'(t)(3 k'(t) + \mu'(t))} \right] y \underline{e}_y + \left[\frac{-\sigma (3 k'(t) + 4 \mu'(t))}{4 \mu'(t)(3 k'(t) + \mu'(t))} \right] z \underline{e}_z \quad (3.66)$$

O quinto passo consiste em verificar a admissibilidade cinemática do campo de deslocamentos descrito na expressão (3.66). Da expressão (3.46), pode-se determinar que:

$$\begin{aligned} SL3 : (\xi_{yy} y \underline{e}_y + \xi_{zz} z \underline{e}_z) \cdot (-\underline{e}_x) &= \xi_{yy} y 0 - \xi_{zz} z 0 = 0 \Rightarrow \mathbf{OK!} \\ SL4 : (\xi_{yy} y \underline{e}_y + \xi_{zz} z \underline{e}_z) \cdot (\underline{e}_x) &= \xi_{yy} y 0 + \xi_{zz} z 0 = 0 \Rightarrow \mathbf{OK!} \\ z = 0 : (\xi_{yy} y \underline{e}_y + \xi_{zz} z \underline{e}_z) \cdot (-\underline{e}_z) &= \xi_{yy} y 0 - \xi_{zz} 0 1 = 0 \Rightarrow \mathbf{OK!} \end{aligned} \quad (3.67)$$

Dos cálculos anteriores, determina-se que $\underline{\xi}$ é um campo de deslocamento cinematicamente admissível. Finalmente, considerando um tempo $t > 0$ ($Y(t) = 1$), a solução do problema viscoelástico para um ensaio de compressão em estado plano de deformações é:

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = \left[\frac{-\sigma (3 k'(t) - 2 \mu'(t))}{2 (3 k'(t) + \mu'(t))} \right] \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \sigma \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \quad (3.68.a)$$

$$\underline{\underline{\xi}}(t) = \left[\frac{-\sigma (2 \mu'(t) - 3 k'(t))}{4 \mu'(t)(3 k'(t) + \mu'(t))} \right] e_y \otimes e_y + \left[\frac{-\sigma (3 k'(t) + 4 \mu'(t))}{4 \mu'(t)(3 k'(t) + \mu'(t))} \right] e_z \otimes e_z \quad (3.68.b)$$

$$\underline{\underline{\xi}}(t) = \left[\frac{-\sigma (2 \mu'(t) - 3 k'(t))}{4 \mu'(t)(3 k'(t) + \mu'(t))} \right] y e_y + \left[\frac{-\sigma (3 k'(t) + 4 \mu'(t))}{4 \mu'(t)(3 k'(t) + \mu'(t))} \right] z e_z$$

As expressões para $k'(t)$ e $\mu'(t)$ podem ser obtidas utilizando o programa Maple, e dependem dos modelos reológicos adotados tanto para a matriz quanto para as fraturas e dos parâmetros mecânicos utilizados para cada modelo reológico.

3.3.3 Comparação de Resultados do Problema de Compressão em Deformação Plana

Os resultados fornecidos pelo Metafor serão comparados com a solução analítica viscoelástica fornecida pela resolução do problema de compressão em deformação plana do item 3.3.2. Adicionalmente, será calculada a resposta elástica do problema de compressão em deformação plana para ser comparada com a resposta viscoelástica e a resposta numérica.

A apresentação de resultados e sua respectiva comparação pode ser dividida em duas partes: resultados instantâneos (elásticos) e diferidos (viscoelásticos).

3.3.3.1 Comparação das Respostas Instantâneas ou Elásticas

No caso dos resultados instantâneos, serão comparadas as tensões e deformações iniciais considerando as seguintes respostas: solução analítica elástica, solução analítica viscoelástica e cálculo elástico fornecido pelas sub-rotinas desenvolvidas no Metafor para esta dissertação. A tensão de compressão aplicada na superfície superior do corpo de prova é $\sigma = 0,02 \text{ GPa}$.

No que diz respeito à solução analítica elástica, para obter as deformações iniciais, utiliza-se o campo de deformações da solução elástica do problema de compressão em estado plano de deformações segundo a expressão (3.69). Para as tensões iniciais, será utilizado o tensor de rigidez de um material elástico linear isotrópico multiplicado pelo vetor de deformações que foi determinado na solução elástica do problema de compressão simples segundo a expressão (3.70). Lembra-se que o parâmetro de Lamé λ e o módulo elástico de cisalhamento μ dependem dos módulos viscoelásticos ($k_{(t)}^{\text{hom}}$ e $\mu_{(t)}^{\text{hom}}$) avaliados em $t = 0$ s.

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\sigma (1+\nu) \nu}{E} \quad ; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{-\sigma (1-\nu^2)}{E} \quad (3.69)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xx} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{yx} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad ; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

No que diz respeito à solução viscoelástica, para obter as deformações iniciais, utiliza-se o campo de deformações da solução viscoelástica do problema de compressão em estado plano de deformações da expressão (3.71) avaliado no tempo $t = 0$ segundos. Para as tensões iniciais, utiliza-se o campo de tensões da solução viscoelástica do problema de compressão em estado plano de deformações da expressão (3.68) avaliado no tempo $t = 0$ segundos. Estas tensões são definidas na expressão (3.72).

$$\varepsilon_{(0)}^{yy} = \frac{-\sigma (2 \mu'(0) - 3 k'(0))}{4 \mu'(0)(3 k'(0) + \mu'(0))} \quad ; \quad \varepsilon_{(0)}^{zz} = \frac{-\sigma (3 k'(0) + 4 \mu'(0))}{4 \mu'(0)(3 k'(0) + \mu'(0))} \quad (3.71)$$

$$\sigma_{(0)}^{xx} = \left[\frac{-\sigma (3 k'(0) - 2 \mu'(0))}{2 (3 k'(0) + \mu'(0))} \right] \quad ; \quad \sigma_{(0)}^{zz} = -\sigma \quad (3.72)$$

No que diz respeito ao cálculo elástico realizado pelas sub-rotinas desenvolvidas em Metafor, para as deformações, utiliza-se a sub-rotina GEOM e, no caso das tensões, emprega-se as sub-rotinas RETRAD e CONTV, que realizam, respectivamente, os cálculos das tensões desviadoras e volumétricas. Isto acontece no início da compilação do programa, que pode ser considerado teoricamente como o tempo $t = 0$ s.

Ressalta-se que para o cálculo de tensões elásticas nos pontos de Gauss para um passo de tempo Δt pequeno, baseada na expressão (3.36), o algoritmo desenvolvido utiliza a seguinte expressão:

$$\underline{\underline{\sigma}}(\Delta t) = \underline{\underline{K}}_T : \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_1 + \mathbb{R}(\Delta t) : \underline{\underline{\varepsilon}}_0 \quad (3.73)$$

Mostra-se, então, as tabelas comparativas dos valores das respostas em deformação e tensão para as soluções mencionadas acima. Para o caso Burger (matriz) – Maxwell (fraturas):

RESPOSTA ELÁSTICA EM TENSÃO			
Tensões [GPa]	MODELO BURGER-MAXWELL		
	Solução Analítica Elástica (λ, μ)	Solução Analítica Viscoelástica [t=0.0 s]	Resposta Numérica Algoritmo ($\Delta t=10^{-8}$ s.)
σ_{xx}	-4,7563488E-03	-4,7583231E-03	-4,7539912E-03
σ_{yy}	0,0000000E+00	0,0000000E+00	0,0000000E+00
σ_{zz}	-2,0000000E-02	-2,0000000E-02	-1,9995761E-02

Tabela 3.3: Comparação de resultados de tensão (Modelo Burger-Maxwell)

RESPOSTA ELÁSTICA EM DEFORMAÇÃO			
Deformações	MODELO BURGER-MAXWELL		
	Solução Analítica Elástica (E,v)	Solução Analítica Viscoelástica [t=0.0 s]	Resposta Numérica Algoritmo ($\Delta t=10^{-8}$ s.)
ϵ_{yy}	2,1214882E-04	2,1233374E-04	2,1199981E-04
ϵ_{zz}	-6,7991704E-04	-6,8013923E-04	-6,7939003E-04
ϵ_{yz}	0,0000000E+00	0,0000000E+00	0,0000000E+00

Tabela 3.4: Comparação de resultados de deformação (Modelo Burger-Maxwell)

Das tabelas 3.3 e 3.4, observa-se que as respostas numéricas fornecidas pelo Metafor são similares às respostas analíticas, tanto a elástica quanto a viscoelástica avaliada em $t = 0$ s. Observa-se que as respostas elástica e viscoelástica avaliada em $t = 0$ segundos tem resultados praticamente idênticos. Pode-se, então, deduzir que o tensor de relaxação e o tensor de fluência avaliados no tempo inicial de aplicação da carga podem ser considerados como tensores de rigidez e flexibilidade do caso elástico, respectivamente. Existe, então, uma importante semelhança de resultados numéricos e analíticos no caso instantâneo ou elástico, o que mostra o bom comportamento do algoritmo nos cálculos iniciais.

3.3.3.2 Comparação das Respostas Diferidas

Para a comparação das respostas diferidas, serão utilizadas tanto a solução viscoelástica analítica em deformação e tensão do problema de compressão em estado plano de deformações quanto a resposta numérica em deformação e tensão fornecida pelo Metafor, que faz uso do algoritmo desenvolvido neste trabalho. Para a geração das curvas analíticas, empregam-se as equações de deformação e tensão da expressão (3.68) que dependem dos modelos reológicos

adotados pela matriz e pelas fraturas, enquanto que para as curvas da resposta numérica, tomam-se os resultados de deformação vertical e horizontal, assim como os resultados de tensão de um determinado nó. A seguir, mostra-se a comparação entre as curvas considerando um modelo Burger-Maxwell:

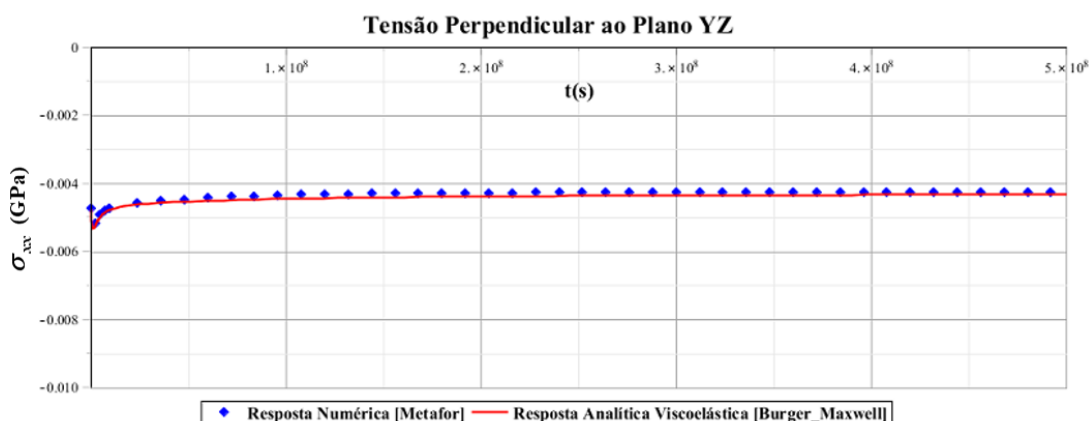


Figura 3.5: Resposta Numérica e Analítica de Tensão σ_{xx} (Burger-Maxwell)

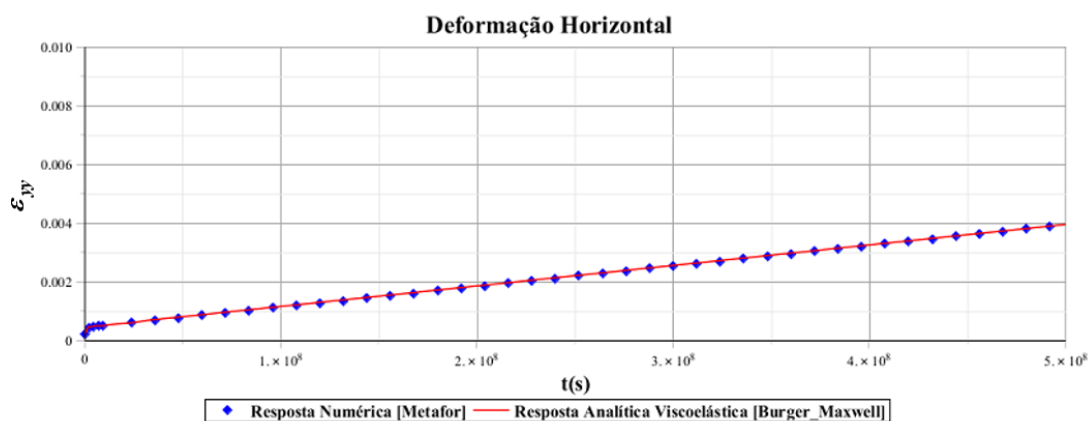


Figura 3.6: Resposta Numérica e Analítica de Deformação Horizontal (Burger-Maxwell)

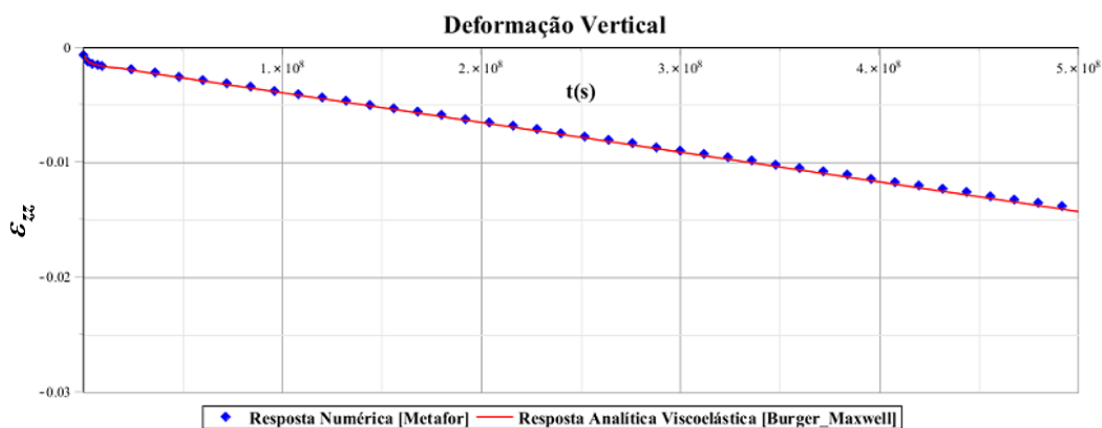


Figura 3.7: Resposta Numérica e Analítica de Deformação Vertical (Burger-Maxwell)

Observa-se nas Figuras 3.5, 3.6 e 3.7 que a resposta numérica coincide com a resposta analítica viscoelástica tal como esperado tanto na tensão σ_{xx} quanto na deformação vertical e na deformação horizontal. Desta forma, verifica-se a correta implementação do modelo viscoelástico no caso Burger-Maxwell. Ressalta-se que tanto a resposta numérica instantânea quanto a diferida apresentam um comportamento similar ao comportamento da solução analítica viscoelástica mostrando a mesma tendência ao longo do tempo.

No problema de compressão em deformação plana, a altura do corpo tende a diminuir e a largura tende a aumentar. Este comportamento é reproduzido fielmente, tanto na resposta analítica quanto na resposta numérica, nas Figuras 3.6 e 3.7. Nota-se na Figura 3.5 que a tensão σ_{xx} se estabiliza para valores altos de tempo.

3.3.4 Compressão em Deformação Plana: Resolução Analítica do Problema Viscoelástico com Deslocamento Imposto

Tem-se um corpo de altura H e largura L (Figuras 3.8 e 3.9) com comportamento viscoelástico submetido a um deslocamento vertical $-\delta_z Y(t) \underline{e}_z$ imposto e constante no tempo considerando um estado plano de deformações (plano Y-Z).

A solução consiste em encontrar os campos de tensões e deslocamentos do corpo ao longo do tempo utilizando os conceitos básicos da mecânica dos meios contínuos e a viscoelasticidade. A deformação produzida pelo deslocamento imposto pode ser definida como:

$$\varepsilon_z(t) = -\frac{\delta_z}{H} Y(t) \quad (3.74)$$

onde δ_z é dado do problema e $Y(t)$ a função Heaviside.

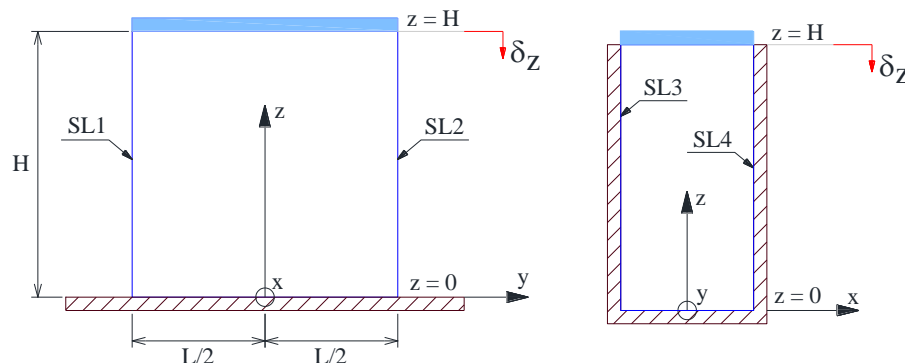


Figura 3.8: Planos Y-Z e X-Z do corpo submetido a deslocamento vertical constante

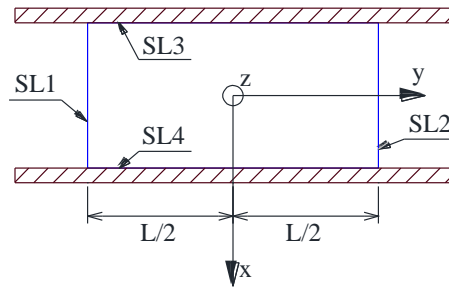


Figura 3.9: Plano X-Y do corpo de prova submetido a deslocamento vertical constante

As características principais deste problema são:

- Material homogêneo, isótropo e linear viscoelástico.
- Desprezam-se os efeitos da gravidade e de aceleração.
- Existe contato sem atrito entre o corpo de prova e as placas rígidas.
- O estado inicial natural é $\underline{\underline{\sigma}}^0 = 0$.

Considerando um procedimento similar ao aplicado na resolução do primeiro exemplo de aplicação, precisam-se definir as condições que verificam o campo de tensões $\underline{\underline{\sigma}}$ e o campo de deslocamentos $\underline{\underline{\xi}}$ como solução do problema viscoelástico. Estas condições são: admissibilidade estática do campo de tensões, admissibilidade cinemática do campo de deslocamentos e a lei do comportamento no caso viscoelástico.

No que diz respeito a admissibilidade estática do campo de tensões, cumprem-se as mesmas condições descritas nas expressões (3.43) e (3.44). Com relação às condições de contorno, deve-se cumprir o seguinte:

Condições de Contorno :

$$\begin{aligned}
 SL1 : \underline{T} &= \underline{\underline{\sigma}} \cdot (-\underline{e}_y) = 0 \rightarrow T_x = T_y = T_z = 0 \\
 SL2 : \underline{T} &= \underline{\underline{\sigma}} \cdot (\underline{e}_y) = 0 \rightarrow T_x = T_y = T_z = 0 \\
 SL3 : \underline{T} &= \underline{\underline{\sigma}} \cdot (-\underline{e}_x) \parallel -\underline{e}_x \rightarrow T_y = T_z = 0 \\
 SL4 : \underline{T} &= \underline{\underline{\sigma}} \cdot (\underline{e}_x) \parallel \underline{e}_x \rightarrow T_y = T_z = 0 \\
 z = 0 : \underline{T} &= \underline{\underline{\sigma}} \cdot (-\underline{e}_z) \parallel -\underline{e}_z \rightarrow T_x = T_y = 0 \\
 z = H : \underline{T} &= \underline{\underline{\sigma}} \cdot (\underline{e}_z) \parallel \underline{e}_z \rightarrow T_x = T_y = 0
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

Com relação à admissibilidade cinemática do campo de deslocamentos, cumprem-se as seguintes condições:

Condições de Contorno :

$$\begin{aligned}
 SL3 : \underline{\xi} \cdot (-\underline{e}_x) &= 0 \rightarrow \xi_x = 0 \\
 SL4 : \underline{\xi} \cdot (\underline{e}_x) &= 0 \rightarrow \xi_x = 0 \\
 z = 0 : \underline{\xi} \cdot (-\underline{e}_z) &= 0 \rightarrow \xi_z = 0 \\
 z = H : \underline{\xi} \cdot (\underline{e}_z) &= \xi_z = -\delta_z
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

No que diz respeito à lei do comportamento viscoelástico, será a mesma mostrada na expressão (3.47). Para resolver este problema viscoelástico, será utilizada uma abordagem em deslocamento. Isto é, assumir um vetor de deslocamentos para verificar sua admissibilidade cinemática e, posteriormente, calcular o tensor de deformações e o tensor de tensões, que deve cumprir com a respectiva admissibilidade estática. Então, assume-se o vetor de deslocamentos $\underline{\xi}(\underline{X}, t)$:

$$\underline{\xi}(\underline{X}, t) = \xi_y(y) Y(t) \underline{e}_y + \xi_z(z) Y(t) \underline{e}_z \tag{3.77}$$

sendo $\underline{X} = x \underline{e}_x + y \underline{e}_y + z \underline{e}_z$ o vetor posição e considerando que para a função $\xi_z(z)$ cumpre-se o seguinte:

$$\xi_z(0) = 0 \quad ; \quad \xi_z(H) = -\delta_z \tag{3.78}$$

Tendo definido o vetor de deslocamentos, o primeiro passo para resolver o problema viscoelástico é a verificação da sua admissibilidade cinemática. A expressão (3.76) define os requerimentos para que este tensor seja considerado cinematicamente admissível. Revisando a expressão mencionada para um tempo $t > 0$ ($Y(t) = 1$), tem-se que:

$$\begin{aligned}
 SL3 : (\xi_y(y) \cdot \underline{e}_y + \xi_z(z) \cdot \underline{e}_z) \cdot (-\underline{e}_x) &= -\xi_y(y) 0 - \xi_z(z) 0 = 0 \Rightarrow \mathbf{OK!} \\
 SL4 : (\xi_y(y) \cdot \underline{e}_y + \xi_z(z) \cdot \underline{e}_z) \cdot (\underline{e}_x) &= \xi_y(y) 0 + \xi_z(z) 0 = 0 \Rightarrow \mathbf{OK!} \\
 z = 0 : (\xi_y(y) \cdot \underline{e}_y + \xi_z(z) \cdot \underline{e}_z) \cdot (-\underline{e}_z) &= -\xi_y(y) 0 - \xi_z(0) 1 = 0 - 0 = 0 \Rightarrow \mathbf{OK!} \\
 z = H : (\xi_y(y) \cdot \underline{e}_y + \xi_z(z) \cdot \underline{e}_z) \cdot (\underline{e}_z) &= \xi_y(y) 0 + \xi_z(H) 1 = -\delta_z \Rightarrow \mathbf{OK!}
 \end{aligned} \tag{3.79}$$

Dos cálculos anteriores, determina-se que $\underline{\xi}(\underline{X}, t)$ é um campo de deslocamentos cinematicamente admissível.

O segundo passo da resolução consiste em calcular o tensor linearizado de deformações $\underline{\underline{\xi}}(t)$ definido como:

$$\underline{\underline{\xi}}(t) = \frac{1}{2}(\nabla \underline{\underline{\xi}} + {}^t \nabla \underline{\underline{\xi}}) \quad (3.80)$$

onde o símbolo ∇ representa o operador gradiente e define-se da seguinte forma:

$$\nabla \underline{\underline{\xi}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_x}{\partial x} & \frac{\partial \xi_x}{\partial y} & \frac{\partial \xi_x}{\partial z} \\ \frac{\partial \xi_y}{\partial x} & \frac{\partial \xi_y}{\partial y} & \frac{\partial \xi_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \xi_z}{\partial x} & \frac{\partial \xi_z}{\partial y} & \frac{\partial \xi_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \xi_y}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \xi_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

Então, segundo a expressão (3.81), o tensor de deformações pode ser expresso como:

$$\underline{\underline{\xi}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \xi_y}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \xi_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

O terceiro passo considera a lei do comportamento viscoelástico descrita na expressão (3.47). Tendo definidos tanto o tensor de relaxação $\mathbb{R}(t)$ quanto o tensor de deformações $\underline{\underline{\xi}}(t)$, o caso particular do tensor de tensões $\underline{\underline{\sigma}}(t)$ pode ser definido como:

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = \mathbb{R}(t) \circ \underline{\underline{\xi}}(t) = \int_{t_0}^t \mathbb{R}(s, t) : \frac{\partial \underline{\underline{\xi}}}{\partial s}(s) ds + \mathbb{R}(t) : \underline{\underline{\xi}}(0) \quad (3.83)$$

Sabe-se que neste caso particular, o tensor de deformações permanece constante a partir do tempo $t_0 = 0$. Isto significa que a derivada da deformação será zero e a integral da expressão (3.83) desaparece. Lembra-se que para o caso de distribuição isotrópica de fraturas, o tensor de relaxação pode ser expresso da seguinte forma:

$$\mathbb{R}(t) = 3 k(t) J^e + 2 \mu(t) K^d \quad (3.84)$$

onde $k(t)$ e $\mu(t)$ são, respectivamente, os módulos de compressão e cisalhamento no domínio do tempo. J^e representa o tensor esférico e K^d representa o tensor desviador. O tensor de relaxação também pode ser expresso como:

$$\mathbb{R}(t) = \left(k(t) - \frac{2}{3} \mu(t) \right) \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} + (2 \mu(t)) \underline{\underline{1}} \quad (3.85)$$

Das expressões (3.83) e (3.85), pode-se determinar a expressão para o tensor de tensões:

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = \mathbb{R}(t) : \underline{\underline{\epsilon}}(0) = \left(k(t) - \frac{2}{3} \mu(t) \right) \text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}_{(0)}) \underline{\underline{1}} + (2 \mu(t)) \underline{\underline{\epsilon}}(0) \quad (3.86)$$

Considerando as expressões (3.82) e (3.86), assim como $\xi_y' = \frac{\partial \xi_y}{\partial y}$ e $\xi_z' = \frac{\partial \xi_z}{\partial z}$, o tensor de tensões também pode ser expresso como:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}(t) = & \left[\left(k(t) - \frac{2}{3} \mu(t) \right) \cdot (\xi_y' + \xi_z') \right] \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \\ & \left[\left(k(t) + \frac{4}{3} \mu(t) \right) \cdot \xi_y' + \left(k(t) - \frac{2}{3} \mu(t) \right) \cdot \xi_z' \right] \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \\ & \left[\left(k(t) - \frac{2}{3} \mu(t) \right) \cdot \xi_y' + \left(k(t) + \frac{4}{3} \mu(t) \right) \cdot \xi_z' \right] \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \end{aligned} \quad (3.87)$$

O quarto passo consiste em verificar a admissibilidade estática do tensor de tensões. Considere-se, então, as expressões (3.43), (3.44) e (3.75), que definem os requerimentos para que este tensor seja considerado estaticamente admissível. Da expressão (3.43), tem-se que:

$$\text{div } \underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \left(k(t) + \frac{4}{3} \mu(t) \right) \cdot \xi_y'' \\ \left(k(t) + \frac{4}{3} \mu(t) \right) \cdot \xi_z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

onde $\xi_y'' = \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial y^2}$ e $\xi_z'' = \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial z^2}$. Da expressão (3.88), deduz-se que $\xi_y'' = 0$ e $\xi_z'' = 0$ para que seja cumprida a condição da divergência do tensor de tensões.

Pode-se deduzir também que quando a segunda derivada de uma função é zero, a primeira derivada é constante e a respectiva função é linear. Portanto, as funções $\xi_y(y)$ e $\xi_z(z)$ são funções lineares e, se considerarmos as condições de contorno descritas na expressão (3.78), podem ser definidas da seguinte forma:

$$\xi_y(y) = \varepsilon_y y \quad ; \quad \xi_z(z) = -\frac{\delta_z}{H} z = \varepsilon_z z \quad (3.89)$$

Das expressões (3.77) e (3.89), para um tempo $t > 0$ ($Y(t) = 1$), o vetor de deslocamentos pode ser expresso como:

$$\underline{\xi}(X, t) = \varepsilon_y y \underline{e}_y + \varepsilon_z z \underline{e}_z \quad (3.90)$$

Das expressões (3.82) e (3.89), para um tempo $t > 0$ ($Y(t) = 1$), o tensor de deformações pode ser expresso como:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \varepsilon_y \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \varepsilon_z \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \quad (3.91)$$

Das expressões (3.87) e (3.89), para um tempo $t > 0$ ($Y(t) = 1$), o tensor de tensões pode ser expresso como:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}(t) = & \left[\left(k(t) - \frac{2}{3} \mu(t) \right) (\varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \\ & \left[\left(k(t) + \frac{4}{3} \mu(t) \right) \varepsilon_y + \left(k(t) - \frac{2}{3} \mu(t) \right) \varepsilon_z \right] \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \\ & \left[\left(k(t) - \frac{2}{3} \mu(t) \right) \varepsilon_y + \left(k(t) + \frac{4}{3} \mu(t) \right) \varepsilon_z \right] \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \end{aligned} \quad (3.92)$$

Observa-se que na expressão anterior foi cumprido o requerimento da divergência do tensor de tensões. No caso da expressão (3.44), sendo que $\underline{\underline{\sigma}}(t)$ e $\underline{\underline{\varepsilon}}(t)$ não dependem do vetor posição \underline{X} , pode-se dizer que $\underline{\underline{\sigma}}(t)$ e $\underline{\underline{\varepsilon}}(t)$ são campos tensoriais homogêneos e uniformes. Portanto, $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$ é contínuo.

Com relação a expressão (3.75), serão verificadas as condições de contorno, segundo o tensor de tensões definido na expressão (3.92):

$$\begin{aligned}
SL1: \underline{\underline{\sigma}}(t) \cdot (-\underline{e}_y) &= \left[\left(k(t) + \frac{4}{3} \mu(t) \right) \underline{\varepsilon}_y + \left(k(t) - \frac{2}{3} \mu(t) \right) \underline{\varepsilon}_z \right] \underline{e}_y = 0 \\
&\Rightarrow \underline{\varepsilon}_y = - \left(\frac{3 k(t) - 2 \mu(t)}{3 k(t) + 4 \mu(t)} \right) \underline{\varepsilon}_z
\end{aligned} \tag{3.93}$$

Para a superfície lateral SL1 cumpre-se a condição de contorno desde que seja cumprida a relação entre $\underline{\varepsilon}_y$ e $\underline{\varepsilon}_z$ descrita na expressão anterior. Para o restante das superfícies tem-se:

$$\begin{aligned}
SL2: \underline{\underline{\sigma}}(t) \cdot (\underline{e}_y) &= (\sigma_{xx} \ 0 + 0 \ \underline{e}_y + \sigma_{zz} \ 0) = 0 \Rightarrow \mathbf{OK!} \\
SL3: \underline{\underline{\sigma}}(t) \cdot (-\underline{e}_x) &= (-\sigma_{xx} \ \underline{e}_x + \sigma_{yy} \ 0 + \sigma_{zz} \ 0) \parallel -\underline{e}_x \Rightarrow \mathbf{OK!} \\
SL4: \underline{\underline{\sigma}}(t) \cdot (\underline{e}_x) &= (\sigma_{xx} \ \underline{e}_x + \sigma_{yy} \ 0 + \sigma_{zz} \ 0) \parallel \underline{e}_x \Rightarrow \mathbf{OK!} \\
z = 0: \underline{\underline{\sigma}}(t) \cdot (-\underline{e}_z) &= \left[\left(k(t) - \frac{2}{3} \mu(t) \right) \underline{\varepsilon}_y + \left(k(t) + \frac{4}{3} \mu(t) \right) \underline{\varepsilon}_z \right] (-\underline{e}_z) \parallel -\underline{e}_z \Rightarrow \mathbf{OK!} \\
z = H: \underline{\underline{\sigma}}(t) \cdot (\underline{e}_z) &= \left[\left(k(t) - \frac{2}{3} \mu(t) \right) \underline{\varepsilon}_y + \left(k(t) + \frac{4}{3} \mu(t) \right) \underline{\varepsilon}_z \right] (\underline{e}_z) \parallel \underline{e}_z \Rightarrow \mathbf{OK!}
\end{aligned} \tag{3.94}$$

Dos cálculos anteriores, determina-se que o tensor $\underline{\underline{\sigma}}(t)$ é um campo de tensões estaticamente admissível e que o valor da componente $\sigma_{yy}(t)$ é zero. Finalmente, considerando um tempo $t > 0$ ($Y(t) = 1$) e a relação entre $\underline{\varepsilon}_y$ e $\underline{\varepsilon}_z$ da expressão (3.93), a solução do problema viscoelástico para um corpo submetido a um deslocamento vertical constante em estado plano de deformações é:

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\xi}}(\underline{X}, t) &= \left[- \left(\frac{3 k(t) - 2 \mu(t)}{3 k(t) + 4 \mu(t)} \right) \underline{\varepsilon}_z \ y \right] \underline{e}_y + \underline{\varepsilon}_z \ z \ \underline{e}_z \\
\underline{\underline{\varepsilon}}(t) &= \left[- \left(\frac{3 k(t) - 2 \mu(t)}{3 k(t) + 4 \mu(t)} \right) \underline{\varepsilon}_z \right] \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \underline{\varepsilon}_z \ \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \\
\underline{\underline{\sigma}}(t) &= \left[\frac{2 \mu(t) (3 k(t) - 2 \mu(t))}{(3 k(t) + 4 \mu(t))} \underline{\varepsilon}_z \right] \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \left[\frac{4 \mu(t) (3 k(t) + \mu(t))}{(3 k(t) + 4 \mu(t))} \underline{\varepsilon}_z \right] \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z
\end{aligned} \tag{3.95}$$

As expressões para $k(t)$ e $\mu(t)$ podem ser obtidas utilizando o programa Maple, dependendo dos modelos reológicos adotados tanto para a matriz quanto para as fraturas e dos parâmetros mecânicos utilizados para cada modelo reológico.

3.3.5 Comparação de Resultados do Problema de Deslocamento Imposto em Deformação Plana

Os resultados fornecidos pelo Metafor serão comparados com a solução analítica viscoelástica fornecida pela resolução do problema de deslocamento vertical constante imposto do item 3.3.4. Adicionalmente, calcula-se a resposta elástica do mesmo problema em EPD para ser comparada com a resposta viscoelástica e a resposta numérica no instante de aplicação da solicitação.

A apresentação de resultados e sua respectiva comparação pode ser dividida em duas partes: resultados instantâneos (elásticos) e diferidos (viscoelásticos).

3.3.5.1 Comparação das Respostas Instantâneas ou Elásticas

No caso dos resultados instantâneos, serão comparadas as tensões e deformações iniciais considerando as seguintes respostas: solução analítica elástica, solução analítica viscoelástica e cálculo elástico fornecido pelas sub-rotinas desenvolvidas no Metafor para esta dissertação. O deslocamento imposto aplicado na superfície superior do corpo de prova é $\delta_z = 0,01$ m.

No que diz respeito à solução analítica elástica, para obter as deformações iniciais, utiliza-se o campo de deformações da solução elástica do problema de deslocamento vertical imposto da expressão (3.96). Lembra-se que o valor da deformação ε_z é negativo devido à direção de aplicação do deslocamento δ_z .

Para as tensões iniciais, utiliza-se o campo de tensões da solução elástica do mesmo problema mostrado na expressão (3.96). O primeiro parâmetro de Lamé λ e o módulo elástico de cisalhamento μ dependem dos módulos viscoelásticos ($k_{(t)}^{\text{hom}}$ e $\mu_{(t)}^{\text{hom}}$) avaliados em $t = 0$ s.

$$\varepsilon_{yy} = \left(-\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right) \varepsilon_z \quad ; \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_z = -\frac{\delta_z}{H} \quad (\text{Dado do problema})$$

$$\sigma_{xx} = \left(\frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \right) \varepsilon_z \quad ; \quad \sigma_{zz} = 4\mu \left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \right) \varepsilon_z$$
(3.96)

No que diz respeito à solução viscoelástica, para obter as deformações e tensões iniciais, utilizam-se os campos de deformações e tensões da solução viscoelástica do problema descritos na expressão (3.95) avaliados no tempo $t = 0$ segundos:

$$\varepsilon_{yy} = -\left(\frac{3k(0) - 2\mu(0)}{3k(0) + 4\mu(0)}\right) \varepsilon_z \quad ; \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_z = -\frac{\delta_z}{H} \quad (\text{Dado do problema})$$

$$\sigma_{xx} = \left[\frac{2\mu(0)(3k(0) - 2\mu(0))}{(3k(0) + 4\mu(0))}\right] \varepsilon_z \quad ; \quad \sigma_{zz} = \left[\frac{4\mu(0)(3k(0) + \mu(0))}{(3k(0) + 4\mu(0))}\right] \varepsilon_z$$
(3.97)

No que diz respeito ao cálculo elástico realizado pelas sub-rotinas desenvolvidas em Metafor, para as deformações, utiliza-se a sub-rotina GEOM e, no caso das tensões, emprega-se as sub-rotinas RETRAD e CONTV, que realizam, respectivamente, os cálculos das tensões desviadoras e volumétricas. Isto acontece no tempo $t = 0$ s. Ressalta-se que para o cálculo de tensões elásticas nos pontos de Gauss para um passo de tempo Δt pequeno (10^{-8} segundos), o algoritmo desenvolvido utiliza a expressão (3.73).

Mostra-se, então, as tabelas comparativas dos valores das respostas em deformação e tensão para as soluções mencionadas acima. Para o caso Burger (matriz) – Maxwell (fraturas):

RESPOSTA ELÁSTICA EM TENSÃO			
Tensões [GPa]	MODELO BURGER-MAXWELL		
	Solução Analítica Elástica (λ, μ)	Solução Analítica Viscoelástica [t=0.0 s]	Resposta Numérica Algoritmo ($\Delta t=10^{-8}$ s.)
σ_{xx}	-6,9960771E-02	-6,9960771E-02	-7,0309065E-02
σ_{yy}	0,0000000E+00	0,0000000E+00	0,0000000E+00
σ_{zz}	-2,9406123E-01	-2,9406123E-01	-2,9567688E-01

Tabela 3.5: Comparação de resultados de tensão (Modelo Burger-Maxwell)

RESPOSTA ELÁSTICA EM DEFORMAÇÃO			
Deformações	MODELO BURGER-MAXWELL		
	Solução Analítica Elástica (λ, μ)	Solução Analítica Viscoelástica [t=0.0 s]	Resposta Numérica Algoritmo ($\Delta t=10^{-8}$ s.)
ε_{yy}	3,1218486E-03	3,1218486E-03	3,1399939E-03
ε_{zz}	-1,0000000E-02	-1,0000000E-02	-1,0000000E-02
ε_{yz}	0,0000000E+00	0,0000000E+00	0,0000000E+00

Tabela 3.6: Comparação de resultados de deformação (Modelo Burger-Maxwell)

Observa-se nas tabelas 3.5 e 3.6 que os resultados numéricos fornecidos pelo Metafor são bem próximos dos resultados analíticos, tanto na resposta elástica, quanto na resposta viscoelástica

avaliada em $t = 0$ s. Nota-se que os campos de solução viscoelástica avaliados no tempo inicial apresentam semelhança com o comportamento elástico. Do anterior, observa-se um bom comportamento do algoritmo nos cálculos iniciais no caso Burger-Maxwell.

3.3.5.2 Comparação das Respostas Diferidas

Para a comparação dos resultados diferidos, serão utilizadas tanto a solução viscoelástica analítica em tensão do problema de deslocamento vertical constante imposto quanto a resposta numérica em tensão fornecida pelo Metafor e que faz uso do algoritmo desenvolvido neste trabalho. Para a geração das curvas analíticas, empregam-se as equações de tensão da expressão (3.95) que dependem dos modelos reológicos adotados pela matriz e pelas fraturas, enquanto que para as curvas da resposta numérica, toma-se os resultados de tensão no sentido vertical e perpendicular ao plano YZ de um determinado nó superior. A seguir, mostra-se a comparação entre as curvas de tensão na direção vertical e perpendicular ao plano YZ da solução analítica e numérica considerando um modelo Burger-Maxwell:

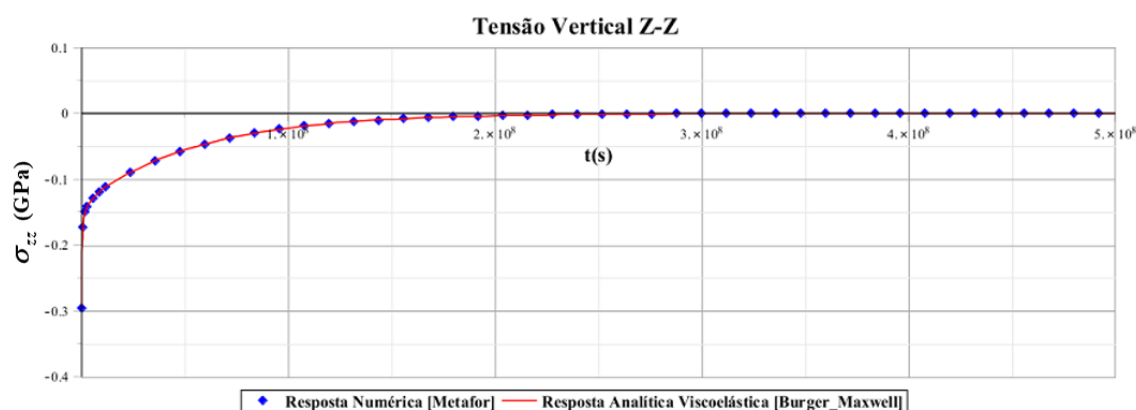


Figura 3.10: Resposta Numérica e Analítica de Tensão Vertical (Burger-Maxwell)

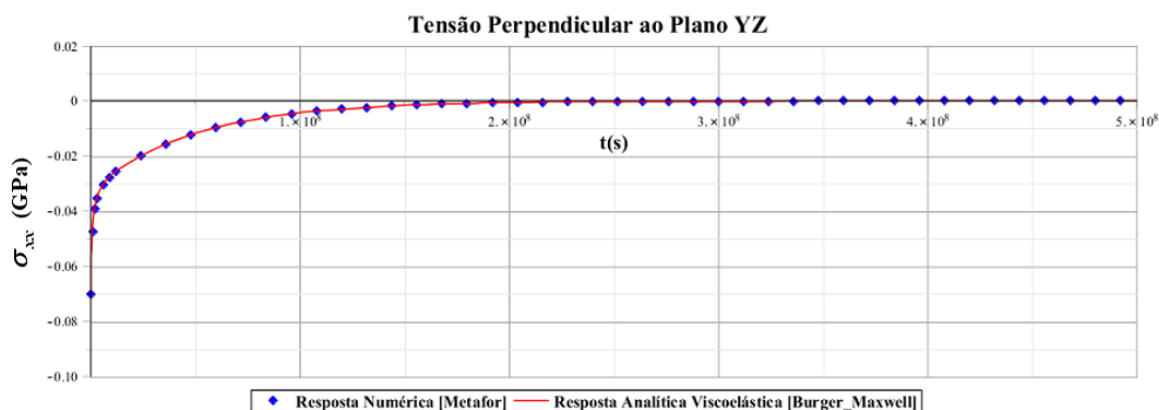


Figura 3.11: Resposta Numérica e Analítica de Tensão σ_{xy} (Burger-Maxwell)

Observa-se nas Figuras 3.10 e 3.11 que a resposta numérica coincide com a resposta analítica ao longo do tempo, mostrando uma diminuição da tensão vertical de compressão e da tensão perpendicular ao plano de deformações. Este comportamento de relaxação de tensões era esperado e a semelhança das curvas serve para verificar a correta implementação do modelo viscoelástico no caso Burger-Maxwell.

3.3.6 Resolução Analítica do Problema Viscoelástico com Taxa Constante de Deslocamento Imposta em Deformação Plana

Tem-se um corpo de altura H e largura L (Figuras 3.12 e 3.13) com comportamento viscoelástico submetido a uma taxa de deslocamento vertical $\dot{\delta}_z$ constante considerando um estado plano de deformações (plano Y-Z). Então, o deslocamento $-\delta_z(t) e_z$ pode ser expresso em função do tempo como:

$$-\delta_z(t) = -(\dot{\delta}_z t + \delta_{z0}) Y(t) \tag{3.98}$$

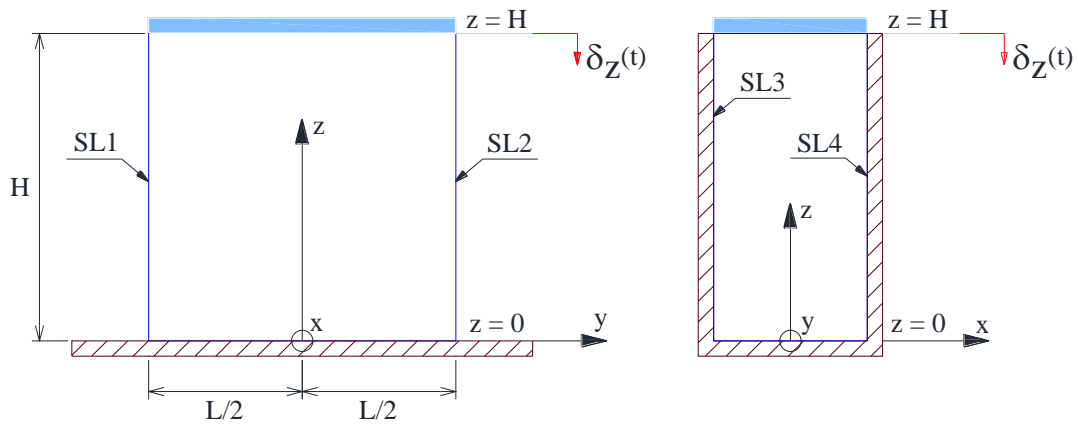


Figura 3.12: Planos Y-Z e X-Z do corpo submetido a taxa constante de deslocamento

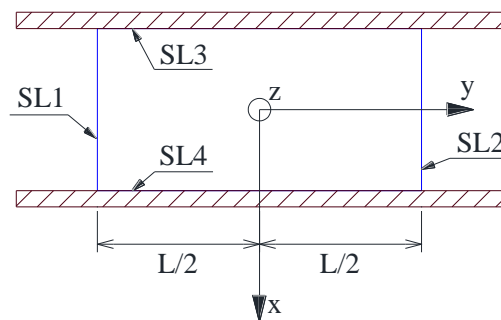


Figura 3.13: Plano X-Y do corpo submetido a taxa constante de deslocamento

Na expressão (3.98), δ_{z0} representa o deslocamento vertical imposto no instante $t = 0^+$ e $Y(t)$ a função Heaviside. O deslocamento total horizontal produzido pelo deslocamento imposto no sentido vertical será denominado $\delta_y(t)$. A deformação produzida pelo deslocamento imposto $-\delta_z(t)$ é definida da seguinte forma:

$$\varepsilon_z(t) = -\frac{\delta_z(t)}{H} = -\left(\frac{\dot{\delta}_z}{H} t + \frac{\delta_{z0}}{H}\right) Y(t) = -(\dot{\varepsilon}_z t + \varepsilon_{z0}) Y(t) \quad (3.99)$$

onde $\dot{\varepsilon}_z$ pode ser considerado como a taxa de deformação produzida pela taxa de deslocamento imposta e ε_{z0} a deformação instantânea que resulta da aplicação de δ_{z0} em $t = 0^+$.

A solução consiste em encontrar os campos de tensões e deslocamentos do corpo ao longo do tempo utilizando os conceitos básicos da mecânica dos meios contínuos e a viscoelasticidade.

As características principais deste problema são:

- a) Material homogêneo, isótropo e linear viscoelástico.
- b) Desprezam-se os efeitos da gravidade e de aceleração.
- c) Existe contato sem atrito entre o corpo de prova e as placas rígidas.
- d) O estado inicial natural é $\underline{\underline{\sigma}}^0 = 0$.

Considerando o mesmo procedimento aplicado para resolver o segundo exemplo de aplicação, é necessário definir as condições que verificam o campo de tensões $\underline{\underline{\sigma}}$ e o campo de deslocamentos $\underline{\underline{\xi}}$ como solução do problema viscoelástico. No que diz respeito a admissibilidade estática do campo de tensões, cumprem-se as mesmas condições descritas nas expressões (3.43), (3.44) e (3.75). Com relação a admissibilidade cinemática do campo de deslocamentos, cumprem-se as seguintes condições:

Condições de Contorno :

$$\begin{aligned} SL3 : \underline{\underline{\xi}} \cdot (-\underline{e}_x) &= 0 \rightarrow \xi_x = 0 \\ SL4 : \underline{\underline{\xi}} \cdot (\underline{e}_x) &= 0 \rightarrow \xi_x = 0 \\ z = 0 : \underline{\underline{\xi}} \cdot (-\underline{e}_z) &= 0 \rightarrow \xi_z = 0 \\ z = H : \underline{\underline{\xi}} \cdot (\underline{e}_z) &= \xi_z = -\delta_z(t) \end{aligned} \quad (3.100)$$

Com relação à lei do comportamento viscoelástico, esta será a mesma mostrada na expressão (3.47). Considerando a mesma abordagem utilizada no segundo exemplo de aplicação, assume-se um vetor de deslocamento para verificar sua admissibilidade cinemática e, posteriormente, calcular os tensores de deformação e tensão. Assume-se o vetor de deslocamentos $\underline{\xi}(\underline{X}, t)$:

$$\underline{\xi}(\underline{X}, t) = \xi_y(y, t) \underline{e}_y + \xi_z(z, t) \underline{e}_z \quad (3.101)$$

Sendo $\underline{X} = x \underline{e}_x + y \underline{e}_y + z \underline{e}_z$ o vetor posição e considerando que para a função $\xi_z(z, t)$ cumpre-se o seguinte:

$$\xi_z(0, t) = 0 \quad ; \quad \xi_z(H, t) = -\delta_z(t) \quad (3.102)$$

Tendo definido o vetor de deslocamentos, o primeiro passo para resolver o problema viscoelástico é a verificação da sua admissibilidade cinemática. A expressão (3.100) define os requerimentos para que este tensor seja considerado cinematicamente admissível. Revisando a expressão mencionada para um tempo $t > 0$ ($Y(t) = 1$), tem-se que:

$$\begin{aligned} SL3: & \left(\xi_y(y, t) \underline{e}_y + \xi_z(z, t) \underline{e}_z \right) \cdot (-\underline{e}_x) = -\xi_y(y, t) 0 - \xi_z(z, t) 0 = 0 \Rightarrow \mathbf{OK!} \\ SL4: & \left(\xi_y(y, t) \underline{e}_y + \xi_z(z, t) \underline{e}_z \right) \cdot (\underline{e}_x) = \xi_y(y, t) 0 + \xi_z(z, t) 0 = 0 \Rightarrow \mathbf{OK!} \\ z = 0: & \left(\xi_y(y, t) \underline{e}_y + \xi_z(z, t) \underline{e}_z \right) \cdot (-\underline{e}_z) = -\xi_y(y, t) 0 - \xi_z(0, t) 1 = 0 - 0 = 0 \Rightarrow \mathbf{OK!} \\ z = H: & \left(\xi_y(y, t) \underline{e}_y + \xi_z(z, t) \underline{e}_z \right) \cdot (\underline{e}_z) = \xi_y(y, t) 0 + \xi_z(H, t) 1 = -\delta_z(t) \Rightarrow \mathbf{OK!} \end{aligned} \quad (3.103)$$

Dos cálculos anteriores, determina-se que $\underline{\xi}(\underline{X}, t)$ é um campo de deslocamentos cinematicamente admissível. O segundo passo da resolução consiste em calcular o tensor linearizado de deformações $\underline{\varepsilon}(t)$ segundo a expressão (3.80). então, o tensor de deformações será expressado da seguinte forma:

$$\underline{\varepsilon}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \xi_y(y, t)}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \xi_z(z, t)}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y(t) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z(t) \end{bmatrix} \quad (3.104)$$

onde $\varepsilon_y(t)$ e $\varepsilon_z(t)$ são, respectivamente, a deformação horizontal e transversal.

O terceiro passo considera a lei do comportamento viscoelástico descrita na expressão (3.47) e, da mesma forma utilizada para o exemplo anterior, o tensor de tensões $\underline{\underline{\sigma}}(t)$ pode ser definido segundo a expressão (3.83). Neste caso particular, o tensor de deformações é variável no tempo a partir de $t_0 = 0$ e, portanto, a integral permanece na expressão. As componentes da derivada do tensor de deformações $\left(\frac{\partial \underline{\underline{\mathcal{E}}}}{\partial t}(t)\right)$ podem ser expressas da seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathcal{E}_y(t)}{\partial t} = \dot{\mathcal{E}}_y \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{E}_z(t)}{\partial t} = \dot{\mathcal{E}}_z \quad (3.105)$$

onde $\dot{\mathcal{E}}_z$ foi definido como taxa de deformação vertical e $\dot{\mathcal{E}}_y$ será considerado como taxa de deformação horizontal assumindo que esta deformação apresenta um comportamento linear no tempo. O tensor de relaxação $\mathcal{R}(t)$ foi definido na expressão (3.85) e o tensor de deformações no tempo inicial de aplicação da solicitação $\underline{\underline{\mathcal{E}}}(0)$ pode ser expresso como:

$$\underline{\underline{\mathcal{E}}}(0) = \mathcal{E}_{y0} \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \mathcal{E}_{z0} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \quad (3.106)$$

onde \mathcal{E}_{z0} foi definido como deformação inicial vertical e \mathcal{E}_{y0} será considerado como deformação inicial horizontal, a qual pode ser calculada considerando a solução viscoelástica para um problema de deslocamento imposto apresentada na expressão (3.95) para um tempo $t = 0$.

Das considerações anteriores, calcula-se o tensor de tensões $\underline{\underline{\sigma}}(t)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}(t) = & \left[\left(\dot{\mathcal{E}}_y + \dot{\mathcal{E}}_z \right) \left(\int_0^t R_{1122}^{(s,t)} ds \right) + \left(\mathcal{E}_{y0} + \mathcal{E}_{z0} \right) \left(R_{1122}^{(t)} \right) \right] \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \\ & \left[\dot{\mathcal{E}}_y \left(\int_0^t R_{1111}^{(s,t)} ds \right) + \dot{\mathcal{E}}_z \left(\int_0^t R_{1122}^{(s,t)} ds \right) + \mathcal{E}_{y0} R_{1111}^{(t)} + \mathcal{E}_{z0} R_{1122}^{(t)} \right] \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \\ & \left[\dot{\mathcal{E}}_y \left(\int_0^t R_{1122}^{(s,t)} ds \right) + \dot{\mathcal{E}}_z \left(\int_0^t R_{1111}^{(s,t)} ds \right) + \mathcal{E}_{y0} R_{1122}^{(t)} + \mathcal{E}_{z0} R_{1111}^{(t)} \right] \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \end{aligned} \quad (3.107)$$

O quarto passo consiste em verificar a admissibilidade estática do tensor de tensões. Considera-se, então, as expressões (3.43), (3.44) e (3.75), que definem os requerimentos para que este tensor seja considerado estaticamente admissível. Da expressão (3.43), tem-se que:

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial(\dot{\varepsilon}_y)}{\partial y} \left(\int_0^t R_{1111}^{(s,t)} ds \right) \\ \frac{\partial(\dot{\varepsilon}_z)}{\partial y} \left(\int_0^t R_{1111}^{(s,t)} ds \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.108)$$

Sabe-se que $\frac{\partial(\dot{\varepsilon}_y)}{\partial y} = \frac{\partial^2(\varepsilon_y(t))}{\partial y^2} = \frac{\partial^3(\xi_y(y,t))}{\partial y^3}$ e $\frac{\partial(\dot{\varepsilon}_z)}{\partial z} = \frac{\partial^2(\varepsilon_z(t))}{\partial z^2} = \frac{\partial^3(\xi_z(z,t))}{\partial z^3}$. Da

expressão (3.108), tem-se que $\frac{\partial(\dot{\varepsilon}_y)}{\partial y} = 0$ e $\frac{\partial(\dot{\varepsilon}_z)}{\partial y} = 0$. Se a terceira derivada é zero, pode-se

considerar que a segunda derivada é uma constante ou zero.

Neste caso, considera-se que a segunda derivada é zero e, portanto, a primeira derivada é uma constante diferente de zero. Estas considerações permitem deduzir que as funções $\xi_y(y,t)$ e $\xi_z(z,t)$ são lineares. Lembrando as condições de contorno descritas na expressão (3.102), estas funções de deslocamento podem ser definidas da seguinte forma:

$$\xi_y(y,t) = \varepsilon_y(t) y \quad ; \quad \xi_z(z,t) = \left(\frac{\delta_z(t)}{H} \right) z = \varepsilon_z(t) z \quad (3.109)$$

Enquanto que a função $\varepsilon_z(t)$ já foi definida na expressão (3.99), considera-se uma linearidade no tempo para a função $\varepsilon_y(t)$, a qual pode ser considerada da seguinte maneira:

$$\varepsilon_y(t) = (\dot{\varepsilon}_y t + \varepsilon_{y0}) Y(t) \quad (3.110)$$

onde $\dot{\delta}_y$ representa a taxa de deslocamento horizontal, $\dot{\varepsilon}_y$ a taxa de deformação horizontal e ε_{y0} já foi definido anteriormente. Então, das expressões (3.99), (3.101), (3.109) e (3.110) para um tempo $t > 0$ ($Y(t) = 1$), o campo de deslocamentos pode ser expresso como:

$$\underline{\underline{\xi}}(\underline{\underline{X}}, t) = (\dot{\varepsilon}_y t + \varepsilon_{y0}) y \underline{\underline{e}}_y + (\dot{\varepsilon}_z t + \varepsilon_{z0}) z \underline{\underline{e}}_z \quad (3.111)$$

Das expressões (3.99), (3.104) e (3.110), para um tempo $t > 0$ ($Y(t) = 1$), o tensor de deformações pode ser expresso como:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \left(\dot{\varepsilon}_y t + \varepsilon_{y0} \right) \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \left(\dot{\varepsilon}_z t + \varepsilon_{z0} \right) \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \quad (3.112)$$

Observa-se que foi cumprido o requerimento da divergência do tensor de tensões. No caso da expressão (3.44), sendo que $\underline{\underline{\sigma}}(t)$ e $\underline{\underline{\varepsilon}}(t)$ não dependem do vetor posição \underline{X} , pode-se dizer que $\underline{\underline{\sigma}}(t)$ e $\underline{\underline{\varepsilon}}(t)$ são campos tensoriais homogêneos e uniformes. Portanto, $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$ é contínuo. Com relação a expressão (3.75), serão verificadas as condições de contorno, segundo o tensor de tensões definido na expressão (3.107) para um tempo $t > 0$ ($Y(t) = 1$):

$$\begin{aligned} SL1: \underline{\underline{\sigma}}(t) \cdot (-\underline{e}_y) &= \left[\dot{\varepsilon}_y \int_0^t R_{1111}^{(s,t)} ds + \dot{\varepsilon}_z \int_0^t R_{1122}^{(s,t)} ds + \varepsilon_{y0} R_{1111}^{(t)} + \varepsilon_{z0} R_{1122}^{(t)} \right] \underline{e}_y = 0 \\ \Rightarrow \dot{\varepsilon}_y &= \frac{-\dot{\varepsilon}_z \left(\int_0^t R_{1122}^{(s,t)} ds \right) - \varepsilon_{y0} R_{1111}^{(t)} - \varepsilon_{z0} R_{1122}^{(t)}}{\left(\int_0^t R_{1111}^{(s,t)} ds \right)} \end{aligned} \quad (3.113)$$

Para a superfície lateral SL1 cumpre-se a condição de contorno desde que seja cumprida a relação entre $\dot{\varepsilon}_y$ e $\dot{\varepsilon}_z$ descrita na expressão anterior. Para o restante das superfícies tem-se:

$$\begin{aligned} SL2: \underline{\underline{\sigma}}(t) \cdot (\underline{e}_y) &= (\sigma_{xx} \ 0 + 0 \ \underline{e}_y + \sigma_{zz} \ 0) = 0 \Rightarrow \mathbf{OK!} \\ SL3: \underline{\underline{\sigma}}(t) \cdot (-\underline{e}_x) &= (-\sigma_{xx} \ \underline{e}_x + \sigma_{yy} \ 0 + \sigma_{zz} \ 0) \parallel -\underline{e}_x \Rightarrow \mathbf{OK!} \\ SL4: \underline{\underline{\sigma}}(t) \cdot (\underline{e}_x) &= (\sigma_{xx} \ \underline{e}_x + \sigma_{yy} \ 0 + \sigma_{zz} \ 0) \parallel \underline{e}_x \Rightarrow \mathbf{OK!} \\ z = 0: \underline{\underline{\sigma}}(t) \cdot (-\underline{e}_z) &= (\sigma_{xx} \ 0 + \sigma_{yy} \ 0 - \sigma_{zz} \ \underline{e}_z) \parallel -\underline{e}_z \Rightarrow \mathbf{OK!} \\ z = H: \underline{\underline{\sigma}}(t) \cdot (\underline{e}_z) &= (\sigma_{xx} \ 0 + \sigma_{yy} \ 0 + \sigma_{zz} \ \underline{e}_z) \parallel \underline{e}_z \Rightarrow \mathbf{OK!} \end{aligned} \quad (3.114)$$

Dos cálculos anteriores, determina-se que o tensor $\underline{\underline{\sigma}}(t)$ é um campo de tensões estaticamente admissível e que o valor da componente $\sigma_{yy}(t)$ é zero.

Finalmente, considerando um tempo $t > 0$ ($Y(t) = 1$) e a expressão (3.113), a solução do problema viscoelástico para um corpo submetido a uma taxa de deslocamento vertical constante em estado plano de deformações é mostrada na expressão (3.115), onde as expressões para $\left(\int_0^t R_{1111}^{(s,t)} ds \right)$, $\left(\int_0^t R_{1122}^{(s,t)} ds \right)$, $R_{1111}^{(t)}$ e $R_{1122}^{(t)}$ podem ser obtidas utilizando o programa Maple e dependem dos modelos reológicos adotados tanto para a matriz quanto para as fraturas e dos parâmetros mecânicos utilizados para cada modelo reológico.

$$\begin{aligned}
\underline{\xi}(\underline{X}, t) &= \left[\left(\dot{\underline{\varepsilon}}_y t + \varepsilon_{y0} \right) y \right] \underline{e}_y + \left[\left(\dot{\underline{\varepsilon}}_z t + \varepsilon_{z0} \right) z \right] \underline{e}_z \\
\underline{\underline{\varepsilon}}(t) &= \left[\dot{\underline{\varepsilon}}_y t + \varepsilon_{y0} \right] \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \left[\dot{\underline{\varepsilon}}_z t + \varepsilon_{z0} \right] \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \\
\underline{\underline{\sigma}}(t) &= \left[\left(\dot{\underline{\varepsilon}}_y + \dot{\underline{\varepsilon}}_z \right) \left(\int_0^t R_{1122}^{(s,t)} ds \right) + \left(\varepsilon_{y0} + \varepsilon_{z0} \right) \left(R_{1122}^{(t)} \right) \right] \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \\
&\quad \left[\dot{\underline{\varepsilon}}_y \left(\int_0^t R_{1111}^{(s,t)} ds \right) + \dot{\underline{\varepsilon}}_z \left(\int_0^t R_{1122}^{(s,t)} ds \right) + \varepsilon_{y0} R_{1111}^{(t)} + \varepsilon_{z0} R_{1122}^{(t)} \right] \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \\
&\quad \left[\dot{\underline{\varepsilon}}_y \left(\int_0^t R_{1122}^{(s,t)} ds \right) + \dot{\underline{\varepsilon}}_z \left(\int_0^t R_{1111}^{(s,t)} ds \right) + \varepsilon_{y0} R_{1122}^{(t)} + \varepsilon_{z0} R_{1111}^{(t)} \right] \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z
\end{aligned} \tag{3.115}$$

3.3.7 Comparação de Resultados do Problema com Taxa de Deslocamento Constante Imposta em Deformação Plana

Os resultados fornecidos pelo Metafor serão comparados com a solução analítica viscoelástica fornecida pela resolução do problema de taxa de deslocamento vertical constante imposta do item 3.3.6. Calcula-se, também, a resposta elástica do mesmo problema em EPD para ser comparada com a resposta viscoelástica e a resposta numérica no instante de aplicação da solicitação. A apresentação de resultados e sua respectiva comparação pode ser dividida em duas partes: resultados instantâneos (elásticos) e diferidos (viscoelásticos).

3.3.7.1 Comparação das Respostas Instantâneas ou Elásticas

No caso dos resultados instantâneos, serão comparadas as tensões e deformações instantâneas considerando as seguintes respostas: solução analítica elástica, solução analítica viscoelástica e cálculo elástico fornecido pelas sub-rotinas desenvolvidas no Metafor para esta dissertação.

O deslocamento $-\delta_z(t)$ é aplicado na superfície superior do corpo de prova, tendo um deslocamento imposto inicial $\delta_{z0} = 0,001$ m. A taxa de deslocamento imposta será $\dot{\delta}_z = 10^{-8}$ m/s. Portanto, o deslocamento vertical final do corpo será de 0,051 m.

No que diz respeito à solução analítica elástica, para obter as tensões e deformações iniciais, utiliza-se a solução elástica do problema de deslocamento vertical imposto da expressão (3.96). Lembra-se que no presente exemplo de aplicação é exercido um deslocamento inicial vertical (δ_{z0}) e, portanto, pode-se utilizar a expressão mencionada para os cálculos elásticos.

No caso da solução viscoelástica, para obter as deformações e tensões iniciais, utilizam-se os campos de deformações e tensões da solução viscoelástica do problema descritos na expressão (3.115) avaliados no tempo $t = 0$ segundos.

Com relação ao cálculo elástico realizado pelas sub-rotinas desenvolvidas em Metafor, para as deformações, utiliza-se a sub-rotina GEOM e, no caso das tensões, emprega-se as sub-rotinas RETRAD e CONTV, que realizam, respectivamente, os cálculos das tensões desviadoras e volumétricas. Isto acontece no início da compilação do programa, que pode ser considerado teoricamente como o tempo $t = 0$ s. Ressalta-se que para o cálculo de tensões elásticas nos pontos de Gauss para um passo de tempo Δt pequeno, o algoritmo desenvolvido utiliza a expressão (3.73).

A seguir, mostra-se as tabelas comparativas dos valores das respostas em deformação e tensão para as soluções mencionadas acima. Para o caso Burger (matriz) – Maxwell (fraturas):

RESPOSTA ELÁSTICA EM TENSÃO			
Tensões [GPa]	MODELO BURGER-MAXWELL		
	Solução Analítica Elástica (λ, μ)	Solução Analítica Viscoelástica [$t=0.0$ s]	Resposta Numérica Algoritmo ($\Delta t=10^{-8}$ s.)
σ_{xx}	-6,9949538E-03	-6,9949538E-03	-6,9985663E-03
σ_{yy}	0,0000000E+00	0,0000000E+00	0,0000000E+00
σ_{zz}	-2,9423587E-02	-2,9423587E-02	-2,9436641E-02

Tabela 3.7: Comparação de resultados de tensão (Modelo Burger-Maxwell)

RESPOSTA ELÁSTICA EM DEFORMAÇÃO			
Deformações	MODELO BURGER-MAXWELL		
	Solução Analítica Elástica (λ, μ)	Solução Analítica Viscoelástica [$t=0.0$ s]	Resposta Numérica Algoritmo ($\Delta t=10^{-8}$ s.)
ϵ_{yy}	3,1190511E-04	3,1190511E-04	3,1211018E-04
ϵ_{zz}	-1,0000000E-03	-1,0000000E-03	-1,0000000E-03
ϵ_{yz}	0,0000000E+00	0,0000000E+00	0,0000000E+00

Tabela 3.8: Comparação de resultados de deformação (Modelo Burger-Maxwell)

Observa-se nas Tabelas 3.7 e 3.8 que os valores fornecidos pela solução viscoelástica avaliada no tempo $t = 0$ s. são próximos dos resultados da solução elástica. Isto permite deduzir que para o caso particular estudado, os campos da solução viscoelástica, avaliados no tempo inicial de

aplicação da solicitação, apresentam um comportamento elástico. Observa-se, também, que os resultados elásticos fornecidos pelas sub-rotinas desenvolvidas em Metafor são próximos da solução elástica analítica, o que mostra o comportamento adequado do programa nos cálculos iniciais.

3.3.7.2 Comparação das Respostas Diferidas

No caso dos resultados diferidos ou viscoelásticos, serão comparadas as respostas em deformação e tensão fornecidas tanto pela solução analítica viscoelástica quanto pela solução numérica entregue pelo Metafor, que utiliza o algoritmo desenvolvido neste trabalho.

Para a geração das curvas analíticas, empregam-se as equações dos campos de deformação e tensão da expressão (3.115), que dependem dos modelos reológicos adotadas para matriz e fraturas. Podem-se comparar as deformações horizontais e verticais da solução analítica com os resultados fornecidos pelo Metafor no caso Burger-Maxwell com as seguintes figuras.

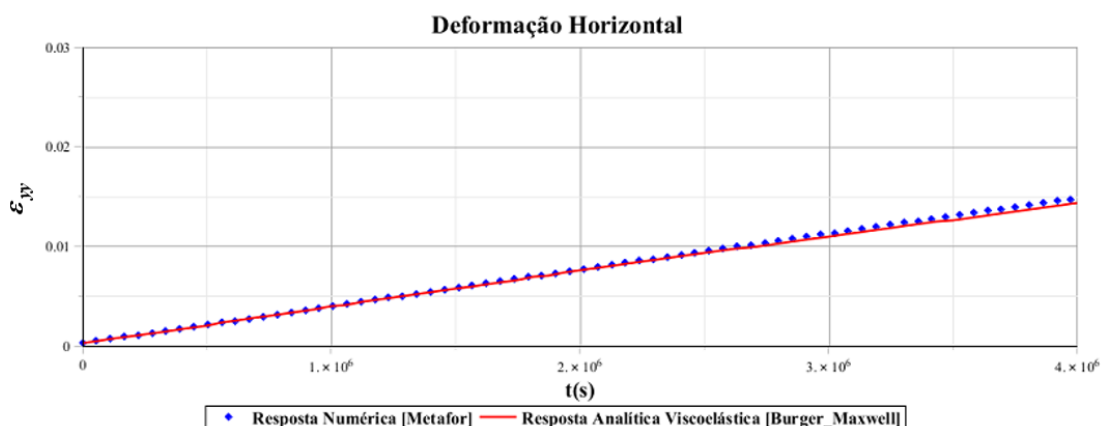


Figura 3.14: Resposta Numérica e Analítica de Deformação Horizontal (Burger-Maxwell)

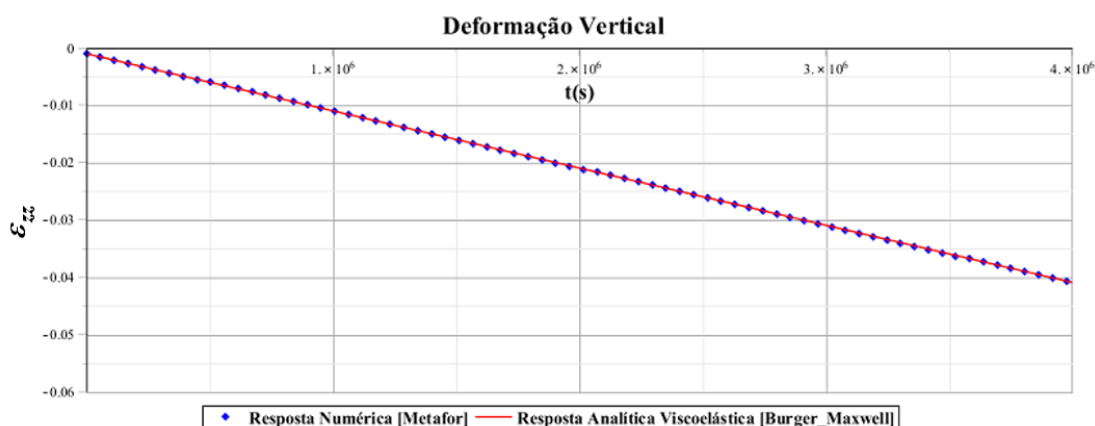


Figura 3.15: Resposta Numérica e Analítica de Deformação Vertical (Burger-Maxwell)

Nota-se na Figura 3.14 o comportamento esperado de aumento de deformação horizontal no tempo, onde ambas as curvas apresentam a mesma tendência no tempo e os valores são próximos entre si ao longo do tempo, principalmente no prazo curto e médio. No longo prazo, não se recomenda alcançar deslocamentos que correspondem às grandes deformações. Na Figura 3.15, as deformações da solução numérica coincidem com as deformações analíticas que são dados do problema. A seguir, mostra-se a comparação entre as curvas de tensão vertical e tensão perpendicular ao plano YZ da solução analítica e numérica.

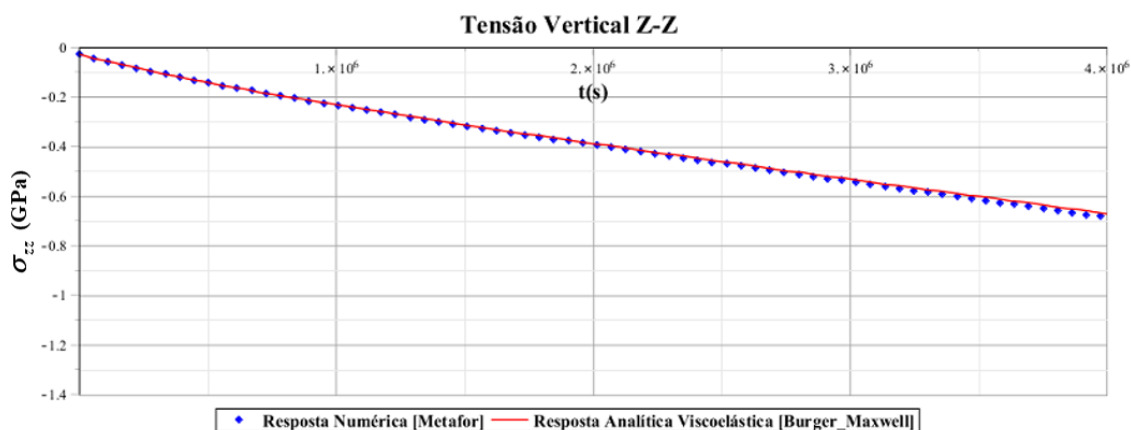


Figura 3.16: Resposta Numérica e Analítica de Tensão Vertical (Burger-Maxwell)

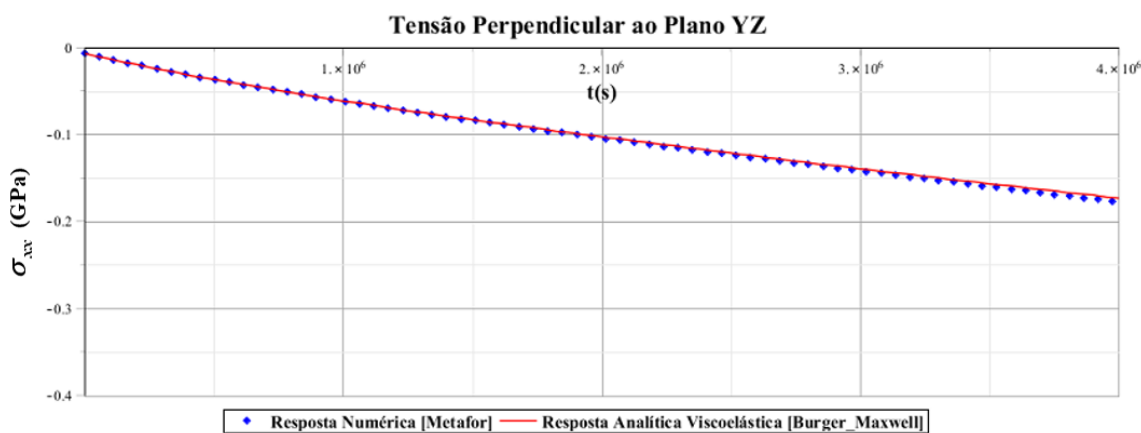


Figura 3.17: Resposta Numérica e Analítica de Tensão σ_{xx} (Burger-Maxwell)

Observa-se nas Figura 3.16 e 3.17 que a resposta numérica coincide com a resposta analítica ao longo do tempo, mostrando um aumento do valor da tensão vertical de compressão e das tensões perpendiculares ao plano de deformações YZ. A semelhança das curvas permite verificar a correta implementação do modelo viscoelástico no caso Burger-Maxwell.

4 ANÁLISE DAS DEFORMAÇÕES DIFERIDAS EM GALERIAS SUBTERRÂNEAS PROFUNDAS

De acordo com o exposto no capítulo anterior sobre a implementação computacional do modelo viscoelástico, a versão do programa utilizado fornece a possibilidade de realizar análises bidimensionais e axissimétricas, mas não contempla a análise tridimensional. Por conseguinte, considerou-se a análise de estruturas que, com o intuito de simplificação de cálculos, possam ser estudadas em estado plano de deformações. Das diferentes estruturas que consideram tal análise, foram escolhidos os túneis. O estudo de túneis permite determinar uma seção transversal de interesse para efetuar a análise bidimensional e verificar os resultados respectivos segundo as solicitações e condições de contorno aplicadas.

Nas duas primeiras seções deste capítulo são apresentados os resultados da comparação da resposta analítica e numérica do comportamento diferido de um túnel profundo com seção transversal circular sem revestimento e com revestimento. Lembra-se que a escavação provoca o deslocamento das paredes de um túnel devido à distribuição das pressões internas no maciço. Um parâmetro importante relacionado com estes deslocamentos no caso de seção não revestida é conhecido como convergência. Já no caso de uma seção revestida, é importante estudar a pressão exercida pelo maciço no revestimento ao longo do tempo.

Na última seção deste capítulo, é apresentado um breve estudo de um túnel com seção transversal tipo ferradura com o propósito de destacar as capacidades preditivas do modelo implementado na análise de túneis com seções transversais que não contemplam soluções analíticas. Nos casos de análise mencionados acima, considera-se um maciço viscoelástico com microfraturas distribuídas isotropicamente.

4.1 TÚNEL CIRCULAR PROFUNDO SEM REVESTIMENTO

Para poder analisar o comportamento instantâneo e diferido do maciço frente à uma escavação, devem-se definir algumas características do problema a ser resolvido. Em primeiro lugar, o túnel será considerado como profundo com um raio R e uma profundidade H , onde $H \gg R$.

Considera-se, também, que o tempo utilizado para escavação é muito menor que o tempo característico de fluência diferida do maciço. Esta hipótese permite considerar que o processo de escavação da galeria é instantâneo. A tensão inicial (geostática) $\underline{\underline{\sigma}}^0$, devido ao peso do maciço, será considerada uniforme na região ao redor da galeria segundo a seguinte expressão:

$$\underline{\underline{\sigma}}^0 = -p \underline{\underline{1}} \quad (4.1)$$

onde $p = \gamma H$, sendo γ o peso específico do maciço. Isto pode ser observado na Figura 4.1 (a). Após a escavação, o equilíbrio estático do local é alterado tal como mostra a Figura 4.1 (b). Observa-se que as condições de contorno em tensão na parede do túnel pode ser expressa por $\underline{\underline{T}} = -p \left(1 - Y_{t_0^+}(t)\right) \underline{\underline{n}}$.

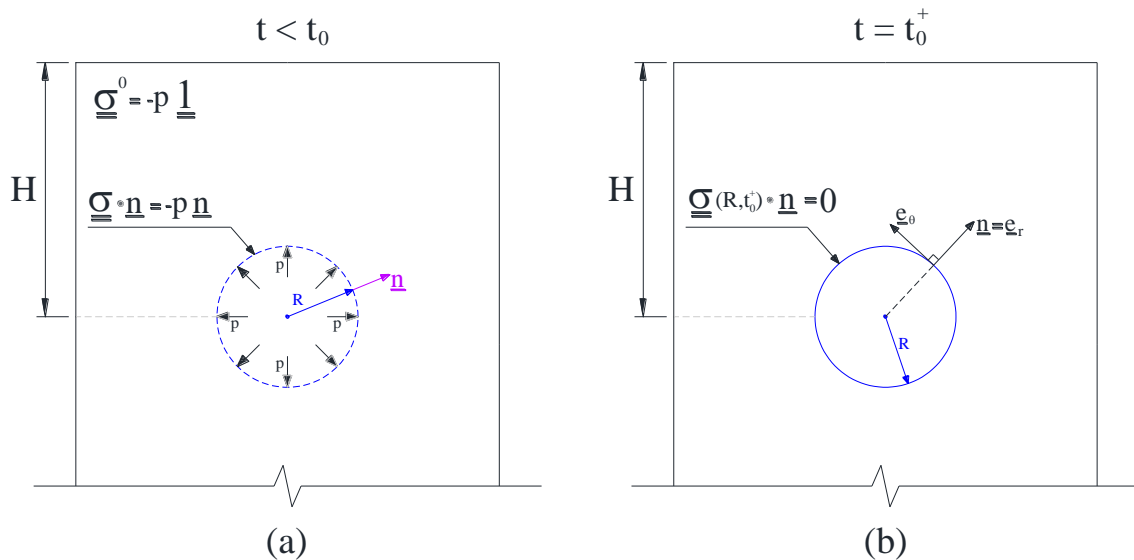


Figura 4.1: Representação esquemática das condições de tensão no local analisado antes e depois da escavação

O material do maciço será considerado como homogêneo isotrópico. Ressalta-se que quando a profundidade é grande e o maciço é homogêneo, a pressão exercida vertical e lateralmente no modelo geométrico discretizado pode ser concebida como constante e com o mesmo valor $p = \gamma H$. Devido à simetria determinada pela geometria do túnel, somente um quarto da estrutura total será utilizada para realizar as análises respectivas. A Figura 4.2 mostra que a altura e largura do modelo geométrico utilizado serão L , sendo $L < H$. A Figura 4.3 mostra as condições de contorno que serão aplicadas no modelo para a respectiva simulação numérica. A Figura 4.4 mostra o vetor posição no maciço considerando coordenadas polares.

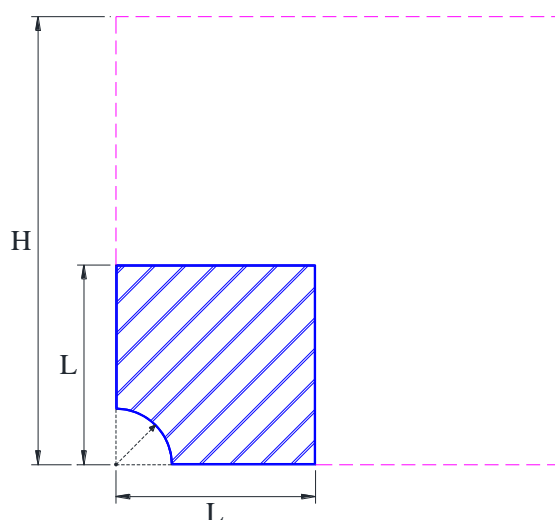


Figura 4.2: Profundidade real e dimensões do modelo geométrico discretizado para análise

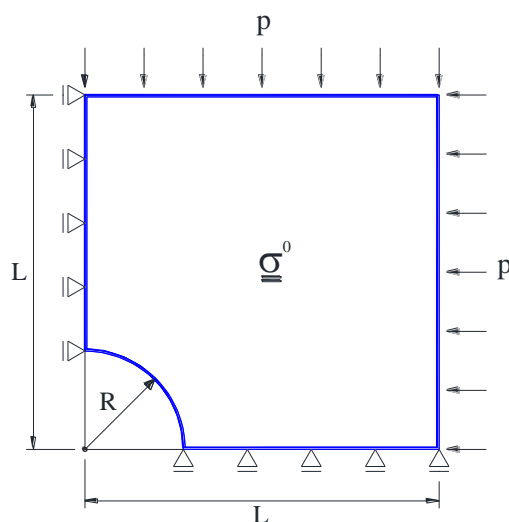


Figura 4.3: Condições de contorno e solicitações aplicadas no maciço

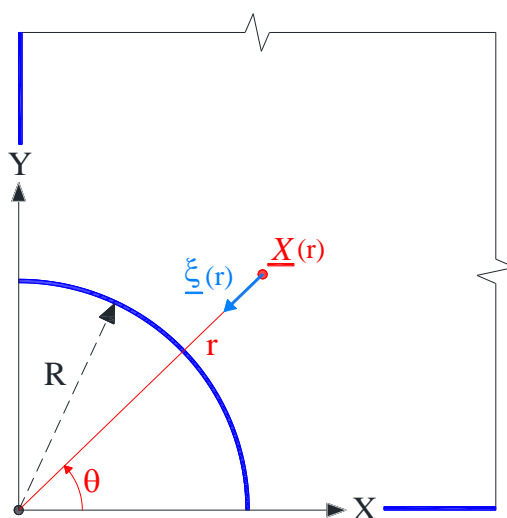


Figura 4.4: Representação do vetor posição \underline{X} no maciço em coordenadas polares

Num túnel profundo de seção circular com maciço isotrópico e homogêneo e tensões geostáticas hidrostáticas, as grandezas do problema não dependem da coordenada angular θ (BERNAUD, 1991). Portanto, o vetor posição pode ser considerado como $\underline{X} = r \cdot \underline{e}_r$ em coordenadas polares, onde r é a distância desde o centro da circunferência do túnel até um determinado ponto do maciço. Então, será necessário determinar os campos tensoriais de tensão $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{X}, t)$ e deslocamento $\underline{\underline{\xi}}(\underline{X}, t)$ que são induzidos pela escavação do túnel em $t = t_0^+$ (resposta instantânea) e $t > t_0^+$ (resposta diferida). O campo de deslocamentos $\underline{\underline{\xi}}(\underline{X}, t)$ será necessário para o cálculo da convergência $U(t)$.

4.1.1 Resposta Elástica Instantânea

A resposta elástica instantânea analisa o estado do maciço em $t = t_0^+$, que pode ser definido como o instante após a escavação realizada em t_0 . Considera-se a presença do estado inicial de tensões $\underline{\underline{\sigma}}^0(\underline{X}, t_0^-) = -p \underline{\underline{1}}$ e ressalta-se que os cálculos serão realizados em termos de $\Delta \underline{\underline{\sigma}}(\underline{X}, t_0^+)$, que pode ser definido como:

$$\Delta \underline{\underline{\sigma}}(\underline{X}, t_0^+) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{X}, t_0^+) - \underline{\underline{\sigma}}^0(\underline{X}, t_0^-) \quad (4.2)$$

onde $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{X}, t_0^+)$ é o estado de tensões elástico ou instantâneo e t_0^- representa um instante prévio a escavação, que corresponde ao estado inicial de tensões. A seguir, serão descritas as equações do problema considerando os conceitos básicos da mecânica dos meios contínuos e lembrando que \underline{X} depende de r :

$$\text{div } \Delta \underline{\underline{\sigma}}(r, t_0^+) = 0$$

$$\Delta \underline{\underline{\sigma}}(r, t_0^+) = \mathbb{R}(t_0^+) : \underline{\underline{\varepsilon}}(r, t_0^+) \quad (4.3)$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(r, t_0^+) = \mathcal{J}(t_0^+) : \Delta \underline{\underline{\sigma}}(r, t_0^+)$$

onde div é o operador divergência, $\mathbb{R}(t_0^+)$ o tensor de relaxação e $\mathcal{J}(t_0^+)$ o tensor de fluência avaliados em t_0^+ . Enquanto, $\underline{\underline{\varepsilon}}(r, t_0^+)$ é o tensor de deformações em t_0^+ . As tensões e deformações também podem ser expressas da seguinte maneira:

$$\Delta \underline{\underline{\sigma}}(r, t_0^+) = \lambda(t_0^+, t_0^+) \operatorname{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}(r, t_0^+) \underline{\underline{1}} + 2\mu(t_0^+, t_0^+) \underline{\underline{\varepsilon}}(r, t_0^+) \quad (4.4)$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(r, t_0^+) = \frac{1}{2} \left(\nabla \underline{\underline{\xi}}(r, t_0^+) + {}^t \nabla \underline{\underline{\xi}}(r, t_0^+) \right)$$

sendo $\lambda(t_0^+, t_0^+)$ o parâmetro de Lamé e $\mu(t_0^+, t_0^+)$ o módulo viscoelástico de cisalhamento no instante t_0^+ . Agora serão definidas as condições de contorno em tensão para o túnel circular profundo analisado. Sabe-se que, após a escavação, o campo de tensões no perímetro do túnel $\underline{\underline{\sigma}}(R, t_0^+)$ é zero. Portanto, cumpre-se que:

$$\text{Em } r = R \rightarrow \underline{\underline{\sigma}}(R, t_0^+) = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta \underline{\underline{\sigma}}(R, t_0^+) \cdot \underline{e}_r &= \left(\underline{\underline{\sigma}}(R, t_0^+) - \underline{\underline{\sigma}}^0(R, t_0^-) \right) \underline{e}_r = \left(0 - (-p \underline{\underline{1}}) \right) \underline{e}_r = p \underline{e}_r \quad (4.5) \\ &\rightarrow \Delta \underline{\underline{\sigma}}(R, t_0^+) = p \end{aligned}$$

As condições de contorno em deslocamento podem ser descritas da seguinte maneira:

$$\underline{\underline{\xi}}(r, t_0^+) = 0 \quad \text{quando } r \rightarrow \infty \quad (4.6)$$

Para resolver o problema, será utilizada uma abordagem em deslocamento. Assume-se então um vetor de deslocamentos para verificar sua admissibilidade cinemática e, posteriormente, calcular o tensor de deformações e o tensor de tensões. O vetor de deslocamentos $\underline{\underline{\xi}}(r, t_0^+)$ assumido é:

$$\underline{\underline{\xi}}(r, t_0^+) = \xi_r \underline{e}_r = u(r, t_0^+) \underline{e}_r \quad (4.7)$$

onde $u(r, t_0^+)$ é uma função de deslocamento que depende da distância r . A expressão geral para o gradiente do vetor deslocamento em coordenadas cilíndricas é apresentada a seguir:

$$\nabla \underline{\underline{\xi}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \xi_r}{\partial \theta} - \xi_\theta \right) & \frac{\partial \xi_r}{\partial z} \\ \frac{\partial \xi_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \xi_\theta}{\partial \theta} + \xi_r \right) & \frac{\partial \xi_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial \xi_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_z}{\partial \theta} & \frac{\partial \xi_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

onde $u' = \partial u / \partial r$. Tendo assumido o vetor deslocamento, pode-se calcular o tensor de deformações segundo a expressão (4.4):

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(r, t_0^+) = \begin{bmatrix} u' & 0 & 0 \\ 0 & u/r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Considerando a lei do comportamento viscoelástico da expressão (4.4), pode-se calcular o tensor $\Delta \underline{\underline{\sigma}}(r, t_0^+)$:

$$\begin{aligned} \Delta \underline{\underline{\sigma}}(r, t_0^+) &= \lambda(t_0^+, t_0^+) (u' + u/r) \underline{\underline{1}} + 2\mu(t_0^+, t_0^+) \left(u' \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{u}{r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \right) \\ \Rightarrow \Delta \sigma_{rr}(r, t_0^+) &= \lambda(t_0^+, t_0^+) (u' + u/r) + 2\mu(t_0^+, t_0^+) u' \\ \Rightarrow \Delta \sigma_{\theta\theta}(r, t_0^+) &= \lambda(t_0^+, t_0^+) (u' + u/r) + 2\mu(t_0^+, t_0^+) u/r \\ \Rightarrow \Delta \sigma_{zz}(r, t_0^+) &= \lambda(t_0^+, t_0^+) (u' + u/r) \quad ; \quad \text{Outros } \Delta \sigma_{ij}(r, t_0^+) = 0 \text{ com } i, j = r, \theta, z \end{aligned} \quad (4.10)$$

Utilizando a primeira equação da expressão (4.3), pode-se verificar a admissibilidade estática do tensor $\Delta \underline{\underline{\sigma}}(r, t_0^+)$. A expressão geral para a divergência do tensor $\Delta \underline{\underline{\sigma}}(r, t_0^+)$ em coordenadas cilíndricas é apresentada a seguir:

$$\text{div } \Delta \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \Delta \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\Delta \sigma_{rr} - \Delta \sigma_{\theta\theta}}{r} \\ \frac{\partial \Delta \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \Delta \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\Delta \sigma_{r\theta}}{r} \\ \frac{\partial \Delta \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \Delta \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\Delta \sigma_{zr}}{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\Delta \sigma_{rr} - \Delta \sigma_{\theta\theta}}{r} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Das expressões (4.3) e (4.11) tem-se que:

$$\lambda(t_0^+, t_0^+) (u' + u/r)' + 2\mu(t_0^+, t_0^+) u'' + \frac{2\mu(t_0^+, t_0^+) (u' - u/r)}{r} = 0 \quad (4.12 \text{ a})$$

$$\lambda(t_0^+, t_0^+) \left(u'' + \frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} \right) + 2\mu(t_0^+, t_0^+) u'' + 2\mu(t_0^+, t_0^+) (u/r)' = 0$$

$$\begin{aligned} & \left(\lambda(t_0^+, t_0^+) + 2\mu(t_0^+, t_0^+) \right) \left(u'' + \frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} \right) = 0 \\ & \Rightarrow \left(\lambda(t_0^+, t_0^+) + 2\mu(t_0^+, t_0^+) \right) (u' + u/r)' = 0 \end{aligned} \quad (4.12 \text{ b})$$

Da expressão (4.12), pode-se deduzir que $(u' + u/r)' = 0$ e, portanto, $(u' + u/r) = A$, sendo A uma constante. Pode-se determinar a forma da função de deslocamento $u(r, t_0^+)$:

$$\begin{aligned} (u' + u/r) = A & \rightarrow r u' + u = (r u)' = A r \\ \int (r u)' dr = \int A r dr & \rightarrow r u = A \frac{r^2}{2} + B \\ \Rightarrow u(r, t_0^+) = A \frac{r}{2} + \frac{B}{r} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Lembrando a condição de contorno da expressão (4.6), pode-se determinar que $A = 0$ e, por conseguinte, a expressão da função de deslocamento radial se reduz a:

$$u(r, t_0^+) = \frac{B}{r} \quad (4.14)$$

onde B é uma constante. Substituindo a expressão (4.14) nas componentes do tensor $\Delta \underline{\underline{\sigma}}(r, t_0^+)$ da expressão (4.10):

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_{rr}(r, t_0^+) &= -2\mu(t_0^+, t_0^+) \frac{B}{r^2} \\ \Delta \sigma_{\theta\theta}(r, t_0^+) &= 2\mu(t_0^+, t_0^+) \frac{B}{r^2} \\ \Delta \sigma_{zz}(r, t_0^+) &= 0 \quad ; \quad \text{Outros } \Delta \sigma_{ij}(r, t_0^+) = 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Substituindo a condição de contorno em tensão da expressão (4.5) na componente radial do tensor $\Delta \underline{\underline{\sigma}}(r, t_0^+)$ da expressão (4.15), obtem-se o valor da constante B :

$$B = -\frac{pR^2}{2\mu(t_0^+, t_0^+)} \quad (4.16)$$

Das expressões (4.14) e (4.16), determina-se a expressão para função deslocamento $u(r, t_0^+)$:

$$u(r, t_0^+) = -\frac{pR^2}{2\mu(t_0^+, t_0^+) r} \quad (4.17)$$

Dos cálculos anteriores, verificam-se as condições de contorno e as equações do problema descritas na expressão (4.3). Da expressão (4.2), determina-se o campo de tensões da resposta elástica instantânea:

$$\underline{\underline{\sigma}}(r, t_0^+) = \underline{\underline{\sigma}}^0(r, t_0^-) + \Delta\underline{\underline{\sigma}}(r, t_0^+) \quad (4.18)$$

onde $\underline{\underline{\sigma}}^0(r, t_0^-) = -p \underline{\underline{1}}$. Substituindo a expressão (4.16) nas componentes do tensor $\Delta\underline{\underline{\sigma}}(r, t_0^+)$ da expressão (4.15), obtém-se:

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{rr}(r, t_0^+) &= \frac{pR^2}{r^2} \\ \Delta\sigma_{\theta\theta}(r, t_0^+) &= -\frac{pR^2}{r^2} \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\Delta\sigma_{zz}(r, t_0^+) = 0 \quad ; \quad \text{Outros } \Delta\sigma_{ij}(r, t_0^+) = 0$$

Substituindo as componentes da expressão (4.19) na expressão (4.18) e a expressão (4.17) nas expressões (4.7) e (4.9), pode-se, finalmente, obter os campos de solução da resposta elástica instantânea do maciço:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\xi}}(r, t_0^+) &= -\frac{pR^2}{2\mu(t_0^+, t_0^+) r} \underline{\underline{e}}_r \\ \underline{\underline{\varepsilon}}(r, t_0^+) &= \left(\frac{pR^2}{2\mu(t_0^+, t_0^+) r^2} \right) \underline{\underline{e}}_r \otimes \underline{\underline{e}}_r + \left(\frac{-pR^2}{2\mu(t_0^+, t_0^+) r^2} \right) \underline{\underline{e}}_\theta \otimes \underline{\underline{e}}_\theta \\ \underline{\underline{\sigma}}(r, t_0^+) &= \left[p \left(\frac{R^2}{r^2} - 1 \right) \right] \underline{\underline{e}}_r \otimes \underline{\underline{e}}_r + \left[-p \left(\frac{R^2}{r^2} + 1 \right) \right] \underline{\underline{e}}_\theta \otimes \underline{\underline{e}}_\theta + (-p) \underline{\underline{e}}_z \otimes \underline{\underline{e}}_z \end{aligned} \quad (4.20)$$

A convergência na resposta elástica depende do raio R do túnel circular e do deslocamento radial da parede do túnel $\underline{\underline{\xi}}(R, t_0^+)$. Este parâmetro pode ser definido da seguinte forma:

$$U(t_0^+) = -\frac{\xi(R, t_0^+)}{R} = \frac{pR}{2\mu(t_0^+, t_0^+)} \quad (4.21)$$

Lembra-se que o módulo viscoelástico de cisalhamento $\mu(t_0^+, t_0^+)$ avaliado em t_0^+ depende dos modelos reológicos adotados para a matriz e para as fraturas.

4.1.2 Resposta Diferida: Evolução Ulterior

A resposta diferida analisa o estado do maciço em $t > t_0^+$, que significa a evolução do campo de tensões e deslocamentos no maciço ao longo do tempo. Da mesma forma que na resposta elástica, considera-se a presença do estado inicial de tensões $\underline{\underline{\sigma}}^0(r, t_0^-) = -p \underline{\underline{1}}$ nos cálculos, os que serão trabalhados em termos de $\Delta\underline{\underline{\sigma}}(r, t)$. Esta diferença de tensões é definida como:

$$\Delta\underline{\underline{\sigma}}(r, t) = \underline{\underline{\sigma}}(r, t) - \underline{\underline{\sigma}}^0(r, t_0^-) \quad (4.22)$$

onde $\underline{\underline{\sigma}}(r, t)$ é o estado de tensões diferido. A seguir, serão descritas as equações do problema considerando os conceitos básicos da mecânica dos meios contínuos:

$$\text{div } \Delta\underline{\underline{\sigma}}(r, t) = 0$$

$$\Delta\underline{\underline{\sigma}}(r, t) = \mathcal{R}(t) \circ \underline{\underline{\varepsilon}}(r, t) \quad (4.23)$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(r, t) = \mathcal{J}(t) \circ \Delta\underline{\underline{\sigma}}(r, t)$$

onde o símbolo \circ representa o operador de Boltzmann. Os tensores de tensão e deformação da expressão anterior também podem ser definidos como:

$$\Delta\underline{\underline{\sigma}}(r, t) = \lambda(t, t_0^+) \circ \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}(r, t) \underline{\underline{1}} + 2\mu(t, t_0^+) \circ \underline{\underline{\varepsilon}}(r, t) \quad (4.24)$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(r, t) = \frac{1}{2} \left(\nabla \underline{\underline{\xi}}(r, t) + {}^t \nabla \underline{\underline{\xi}}(r, t) \right)$$

sendo $\lambda(t, t_0^+)$ o parâmetro de Lamé e $\mu(t, t_0^+)$ o módulo viscoelástico de cisalhamento para um tempo $t > t_0^+$. Em relação às condições de contorno em tensão, trabalha-se considerando que para um tempo $t > t_0^+$, o campo de tensões na parede do túnel $\underline{\underline{\sigma}}(R, t)$ é zero. Portanto, cumpre-se o seguinte:

$$\text{Em } r = R \rightarrow \underline{\underline{\sigma}}(R, t) = 0 \quad \text{para } t > t_0^+$$

$$\Delta \underline{\underline{\sigma}}(R, t) \cdot \underline{e}_r = \left(\underline{\underline{\sigma}}(R, t) - \underline{\underline{\sigma}}^0(R, t_0^-) \right) \cdot \underline{e}_r = p \underline{e}_r \quad \text{para } t > t_0^+ \quad (4.25)$$

$$\rightarrow \Delta \underline{\underline{\sigma}}(R, t_0^+) = p Y_{t_0^+}(t)$$

onde $Y_{t_0^+}(t)$ é a função Heaviside para $t > t_0^+$. As condições de contorno em deslocamento podem ser descritas da seguinte maneira:

$$\underline{\underline{\xi}}(r, t) = 0 \quad \text{quando } r \rightarrow \infty \text{ e } t > t_0^+ \quad (4.26)$$

Utilizando a mesma abordagem do caso elástico, assume-se um vetor deslocamento para o cálculo das deformações e tensões:

$$\underline{\underline{\xi}}(r, t) = \xi_r \underline{e}_r = u(r, t) \underline{e}_r \quad (4.27)$$

onde $u(r, t)$ é uma função de deslocamento que depende da distância r e do tempo t . Devido à semelhança com os cálculos realizados na resposta elástica e seguindo o mesmo procedimento, pode-se determinar o tensor linearizado de deformações segundo a expressão (4.24) como:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(r, t) = u' \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{u}{r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \quad (4.28)$$

Segundo a expressão anterior e considerando a lei do comportamento descrita na expressão (4.24), determina-se o tensor de tensões $\Delta \underline{\underline{\sigma}}(r, t)$ e suas componentes da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \Delta \underline{\underline{\sigma}}(r, t) &= \lambda(t, t_0^+) \circ (u' + u/r) \underline{\underline{1}} + 2\mu(t, t_0^+) \circ \left(u' \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{u}{r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \right) \\ \Rightarrow \Delta \sigma_{rr}(r, t) &= \lambda(t, t_0^+) \circ (u' + u/r) + 2\mu(t, t_0^+) \circ u' \\ \Rightarrow \Delta \sigma_{\theta\theta}(r, t) &= \lambda(t, t_0^+) \circ (u' + u/r) + 2\mu(t, t_0^+) \circ u/r \\ \Rightarrow \Delta \sigma_{zz}(r, t) &= \lambda(t, t_0^+) \circ (u' + u/r) \quad ; \quad \text{Outros } \Delta \sigma_{ij}(r, t) = 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Com a primeira equação da expressão (4.23) verifica-se a admissibilidade estática do tensor $\Delta\underline{\underline{\sigma}}(r,t)$. Aproveitando a expressão (4.11) que descreve a divergência de um tensor em coordenadas cilíndricas, determina-se que:

$$\left(\frac{\partial \Delta \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\Delta \sigma_{rr} - \Delta \sigma_{\theta\theta}}{r} \right) \underline{e}_r + 0 \underline{e}_\theta + 0 \underline{e}_z = 0 \quad (4.30)$$

Das expressões (4.29) e (4.30), tem-se o seguinte:

$$\left(\lambda(t, t_0^+) + 2\mu(t, t_0^+) \right) \circ (u' + u/r)' = 0 \quad (4.31)$$

Nota-se na expressão anterior a semelhança com os cálculos realizados na solução elástica instantânea. Por conseguinte, pode-se determinar a função de deslocamento $u(r,t)$ como:

$$u(r,t) = A(t) \frac{r}{2} + \frac{B(t)}{r} \quad (4.32)$$

onde $A(t)$ e $B(t)$ são funções do tempo. Lembrando a condição de contorno da expressão (4.26), pode-se determinar que $A(t) = 0$ e, por conseguinte, a expressão da função de deslocamento radial se reduz a:

$$u(r,t) = \frac{B(t)}{r} \quad (4.33)$$

Substituindo a expressão (4.33) nas componentes do tensor $\Delta\underline{\underline{\sigma}}(r,t)$ da expressão (4.29):

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_{rr}(r,t) &= 2\mu(t, t_0^+) \circ \frac{B(t)}{-r^2} \\ \Delta \sigma_{\theta\theta}(r,t) &= 2\mu(t, t_0^+) \circ \frac{B(t)}{r^2} \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\Delta \sigma_{zz}(r,t) = 0 \quad ; \quad \text{Outros } \Delta \sigma_{ij}(r,t) = 0$$

Substituindo a condição de contorno em tensão da expressão (4.25) na componente radial do tensor $\Delta\underline{\underline{\sigma}}(r,t)$ da expressão (4.34), obtem-se a seguinte expressão:

$$\Delta \sigma_{rr}(R,t) = 2\mu(t, t_0^+) \circ \frac{B(t)}{-R^2} = pY_{t_0^+}(t) \quad (4.35)$$

A expressão (4.35) pode ser organizada da seguinte maneira:

$$2\mu(t, t_0^+) \circ \left(\frac{B(t)}{-pR^2} \right) = Y_{t_0^+}(t) \quad (4.36)$$

A expressão (4.36) pode ser relacionada com a seguinte identidade operacional da viscoelasticidade:

$$2\mu(t, t_0^+) \circ \left[(1 + n(t, t_0^+)) J(t, t_0^+) \right] = Y_{t_0^+}(t) \quad (4.37)$$

onde $(1 + n(t, t_0^+)) J(t, t_0^+)$ é definido como o inverso operacional da função de relaxação em cisalhamento simples, $J(t, t_0^+)$ é uma função de fluência em ensaio de tração simples e $n(t, t_0^+)$ é o coeficiente de Poisson na experiência de fluência em tração simples. Portanto, pode-se afirmar que $-\frac{B(t)}{pR^2}$ é o inverso operacional da função $2\mu(t, t_0^+)$. Relacionando as expressões (4.36) e (4.37), tem-se:

$$\begin{aligned} -\frac{B(t)}{pR^2} &= (1 + n(t, t_0^+)) J(t, t_0^+) \\ \Rightarrow B(t) &= -pR^2 (1 + n(t, t_0^+)) J(t, t_0^+) \end{aligned} \quad (4.38)$$

Lembra-se que no espaço de Carson-Laplace existe a seguinte propriedade:

$$2\mu^*(p) = \frac{1}{\left[(1 + n(p)) J(p) \right]^*} \quad (4.39)$$

Por consequência, aplicando a transformada inversa de Carson-Laplace, pode-se determinar no domínio do tempo que:

$$(1 + n(t, t_0^+)) J(t, t_0^+) = M(t, t_0^+) = \mathcal{L}_c^{-1} \left(\frac{1}{2\mu^*(p)} \right) \quad (4.40)$$

onde $M(t, t_0^+)$ será denominado como a transformada inversa de $1/2\mu^*(p)$. Do anterior, pode-se estabelecer que:

$$B(t) = -pR^2 M(t, t_0^+) \quad (4.41)$$

Das expressões (4.41) e (4.33), determina-se a expressão para a função deslocamento $u(r, t)$:

$$u(r, t) = -\frac{pR^2 M(t, t_0^+)}{r} \quad (4.42)$$

Dos cálculos anteriores, verificam-se as condições de contorno e as equações do problema descritas na expressão (4.23). Da expressão (4.22), determina-se o campo de tensões da resposta diferida:

$$\underline{\underline{\sigma}}(r, t) = \underline{\underline{\sigma}}^0(r, t_0^-) + \Delta \underline{\underline{\sigma}}(r, t) \quad (4.43)$$

Da expressão (4.36), tem-se que:

$$2\mu(t, t_0^+) \circ B(t) = -pR^2 Y_{t_0^+}^*(t) \quad (4.44)$$

Substituindo a expressão (4.44) nas componentes do tensor $\Delta \underline{\underline{\sigma}}(r, t)$ da expressão (4.34) obtém-se:

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_{rr}(r, t) &= \frac{pR^2}{r^2} Y_{t_0^+}^*(t) \\ \Delta \sigma_{\theta\theta}(r, t) &= -\frac{pR^2}{r^2} Y_{t_0^+}^*(t) \\ \Delta \sigma_{zz}(r, t) &= 0 \quad ; \quad \text{Outros } \Delta \sigma_{ij}(r, t) = 0 \end{aligned} \quad (4.45)$$

Substituindo as componentes da expressão (4.45) na expressão (4.43) e a expressão (4.42) nas expressões (4.27) e (4.28), pode-se, finalmente, obter os campos de solução da resposta diferida:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\xi}}(r, t) &= -\frac{pR^2}{r} M(t, t_0^+) \underline{e}_r \\ \underline{\underline{\varepsilon}}(r, t) &= \left(\frac{pR^2}{r^2} M(t, t_0^+) \right) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \left(-\frac{pR^2}{r^2} M(t, t_0^+) \right) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \\ \underline{\underline{\sigma}}(r, t) &= \left[p \left(\frac{R^2}{r^2} Y_{t_0^+}^*(t) - 1 \right) \right] \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \left[-p \left(\frac{R^2}{r^2} Y_{t_0^+}^*(t) + 1 \right) \right] \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + (-p) \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \end{aligned} \quad (4.46)$$

A convergência na resposta diferida também depende do raio R do túnel circular e do deslocamento radial da parede do túnel $\underline{\xi}(R,t)$. Este parâmetro pode ser definido da seguinte forma:

$$U(t) = -\frac{\underline{\xi}(R,t)}{R} = pM(t,t_0^+) \quad (4.47)$$

Lembra-se que o módulo $M(t,t_0^+)$ depende dos modelos reológicos adotados para a matriz e para as fraturas tendo em vista a expressão (4.40).

4.1.3 Comparação de resultados analíticos e numéricos

A comparação dos resultados analíticos e numéricos do problema do túnel circular será útil para verificar o correto funcionamento do código implementado. A seguir, são apresentados os dados geométricos do problema tendo em conta a Figura 4.2: a profundidade $H = 125,00$ m. e o raio do túnel circular $R = 2,50$ m. Os dados de carregamento do problema são: peso específico do maciço $\gamma = 24000$ N/m³, a pressão vertical e lateral do maciço $p = 0,003$ GPa e o estado inicial de tensões tem o mesmo valor da pressão p nas três direções principais.

O modelo viscoelástico implementado tem a capacidade de utilizar diferentes modelos reológicos para a matriz e para as fraturas (Mola Simples, Maxwell, Kelvin-Voigt, Burger). Um caso geral pode considerar o modelo de Burger tanto para a matriz quanto para as fraturas. Não obstante, para este problema, são utilizados os modelos de Maxwell e Burger. Os casos analisados terão as seguintes combinações de modelos: Maxwell (Matriz) – Maxwell (Fratura) e Burger (Matriz) – Maxwell (Fratura). Os parâmetros mecânicos utilizados para a matriz e para as fraturas são os mesmos utilizados no capítulo anterior:

MATRIZ					
Parâmetro	Valor	Unidade	Parâmetro	Valor	Unidade
$k_{e,M}^s$	24,42	<i>GPa</i>	$k_{e,K}^s$	39,27	<i>GPa</i>
$k_{v,M}^s$	$7,33 \times 10^8$	<i>GPa · s</i>	$k_{v,K}^s$	$5,07 \times 10^7$	<i>GPa · s</i>
$\mu_{e,M}^s$	13,27	<i>GPa</i>	$\mu_{e,K}^s$	14,07	<i>GPa</i>
$\mu_{v,M}^s$	$3,88 \times 10^8$	<i>GPa · s</i>	$\mu_{v,K}^s$	$1,27 \times 10^7$	<i>GPa · s</i>

Tabela 4.1: Parâmetros mecânicos da matriz para o modelo reológico de Burger

FRATURAS		
Parâmetro	Valor	Unidade
$k_{e,M}^n$	42,22	GPa / m
$k_{v,M}^n$	7×10^7	$GPa \cdot s / m$
$k_{e,M}^t$	16,88	GPa / m
$k_{v,M}^t$	4×10^7	$GPa \cdot s / m$

Tabela 4.2: Parâmetros mecânicos das fraturas para o modelo reológico de Maxwell

O parâmetro de dano ou densidade de fratura será $\varepsilon = 0,20$ e o número de fraturas por metro cúbico será $N = 1,0$. No que diz respeito ao restante dos dados principais (raízes de polinômios e coeficientes) do modelo viscoelástico que são utilizados nas sub-rotinas, estes serão fornecidos como dados de entrada e podem ser calculados utilizando, por exemplo, o programa Maple.

Com relação ao modelo de elementos finitos analisado em Metafor, a Figura 4.5 mostra a malha utilizada para a análise respectiva. O modelo mostrado compõe-se de 192 elementos finitos quadriláteros e 221 nós.

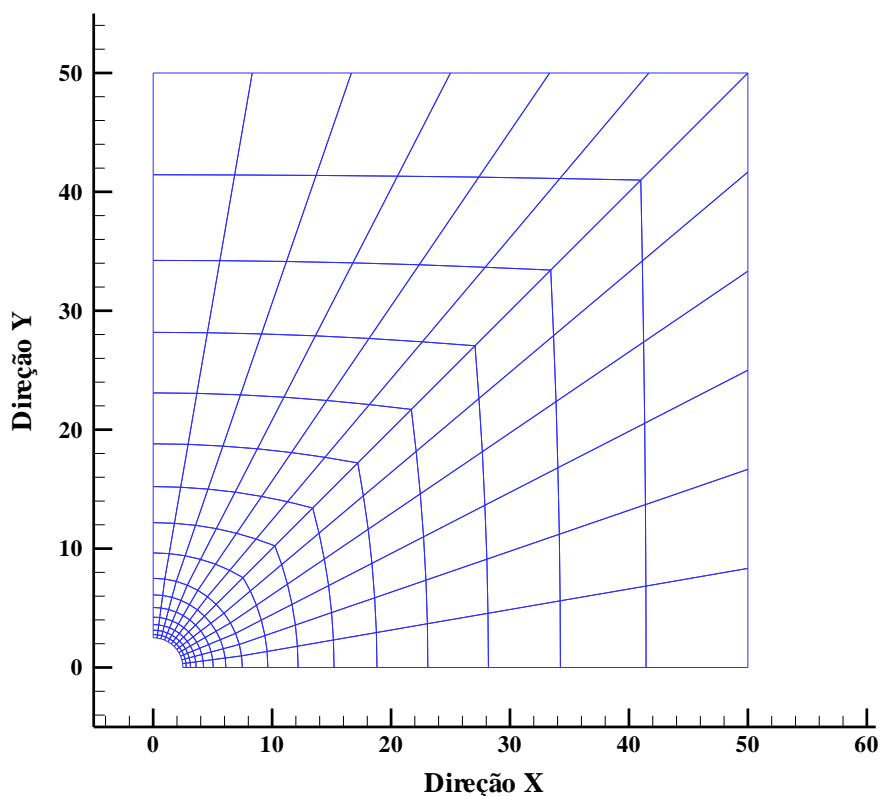


Figura 4.5: Malha de Elementos Finitos do modelo geométrico do túnel circular

Para ambos os casos de modelos reológicos utilizados, será realizada a comparação de respostas analíticas e numéricas de deslocamento radial e convergência em função do tempo para uma distância $r = R$, assim como os deslocamentos radiais, tensões radiais e tangenciais do maciço em função da distância radial r .

Os deslocamentos e tensões em função da distância radial r serão apresentados para três tempos diferentes, sendo $t1$ o correspondente a resposta elástica inicial, $t2$ é um tempo intermediário e $t3$ corresponde a um tempo grande como, por exemplo, quando as tensões se estabilizam no caso do túnel com revestimento.

A seguir, mostra-se a comparação entre respostas diferidas considerando um modelo Maxwell-Maxwell:

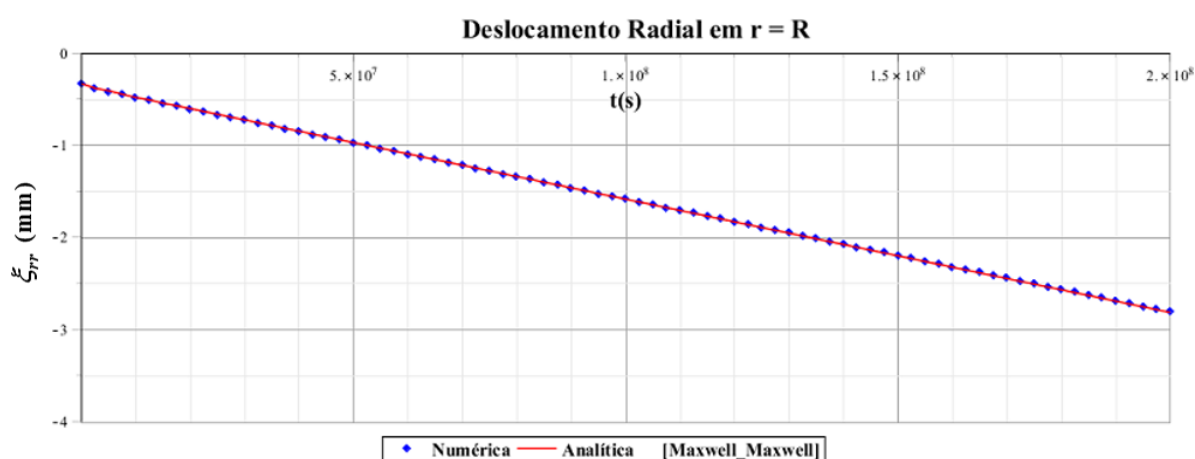


Figura 4.6: Comparação de deslocamentos radiais em $r = R$ (Maxwell-Maxwell)

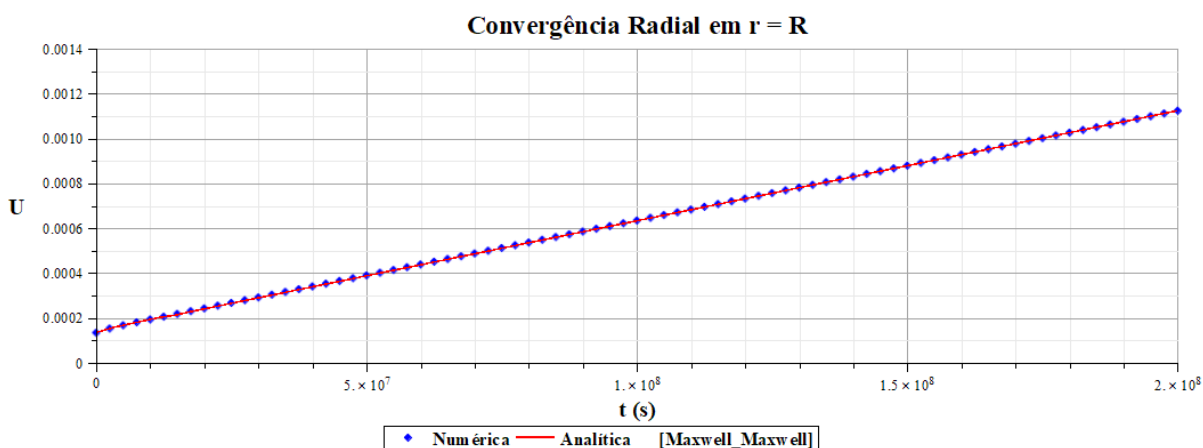


Figura 4.7: Comparação da convergência radial U (Maxwell-Maxwell)

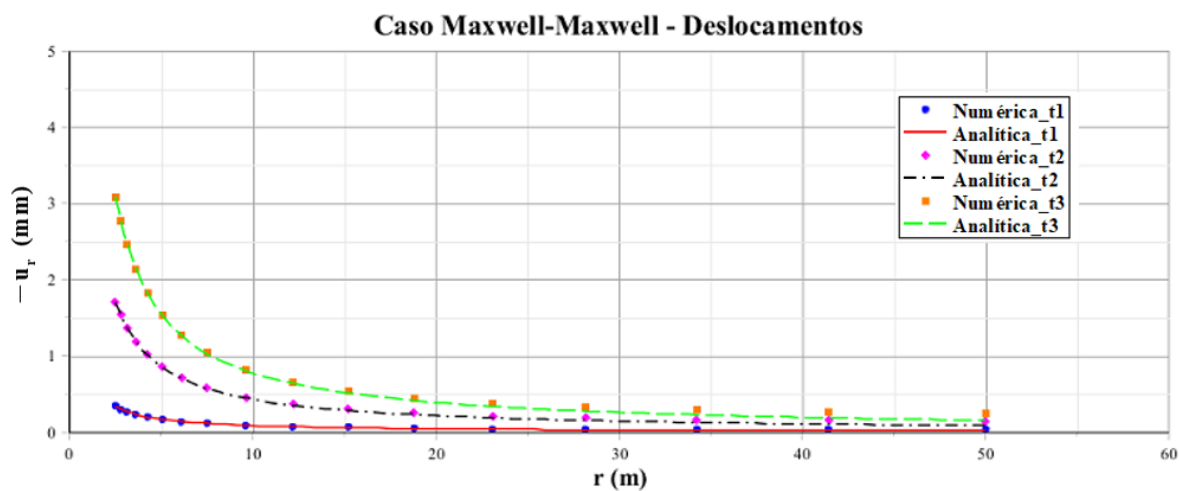


Figura 4.8: Comparação de Deslocamentos em função da distância r (Maxwell-Maxwell)

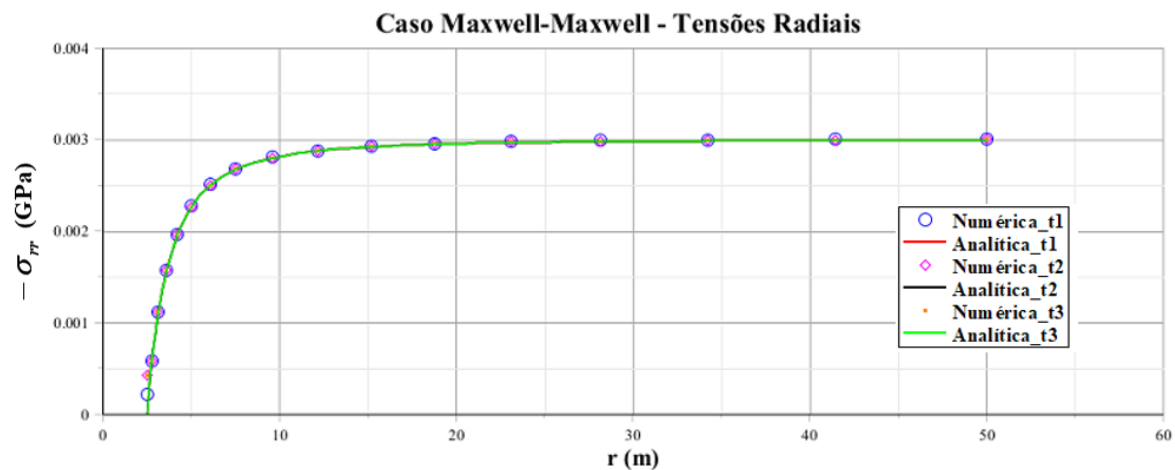


Figura 4.9: Comparação de tensões radiais em função da distância r (Maxwell-Maxwell)

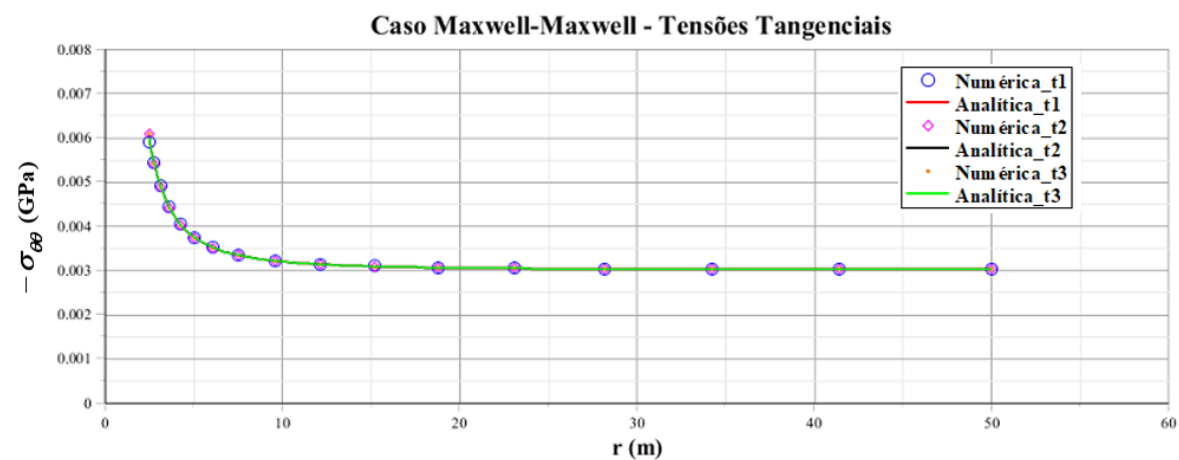


Figura 4.10: Comparação de tensões tangenciais em função de r (Maxwell-Maxwell)

Das Figuras 4.6 e 4.7, observa-se que a correspondência entre as respostas numéricas e analíticas é satisfatória no deslocamento e convergência do túnel circular. Nas Figuras 4.8 a 4.10, nota-se que também existe uma correspondência congruente entre as respostas numéricas e analíticas de deslocamento e tensões. Não obstante, observa-se que no caso dos deslocamentos da figura 4.8 aparentemente existem efeitos de borda, pois no contorno (maior r) do modelo o deslocamento deve ser nulo. Mesmo que a tendência mostrada nas curvas aponta a zero, faz-se necessário realizar estudos posteriores sobre o tamanho (altura e largura L) e refinamento da malha de elementos finitos em modelos viscoelásticos de forma tal que os efeitos de borda possam desaparecer no contorno dela. Percebe-se, da superposição das curvas nas figuras 4.9 e 4.10, que as tensões, na resposta instantânea e para diversos tempos, permanecem constantes.

A seguir, mostra-se a comparação entre respostas diferidas considerando um modelo Burger-Maxwell:

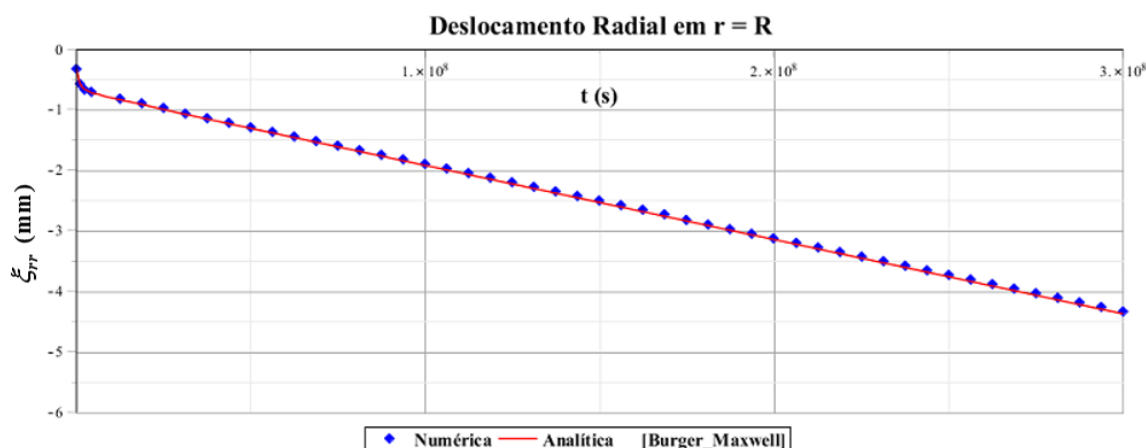


Figura 4.11: Comparação de deslocamentos radiais em $r = R$ (Burger-Maxwell)

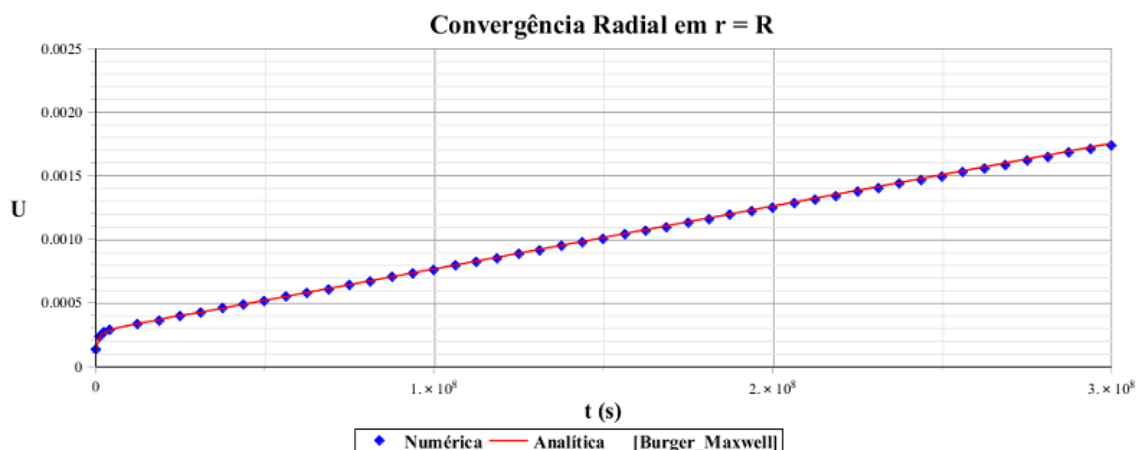


Figura 4.12: Comparação da convergência radial U (Burger-Maxwell)

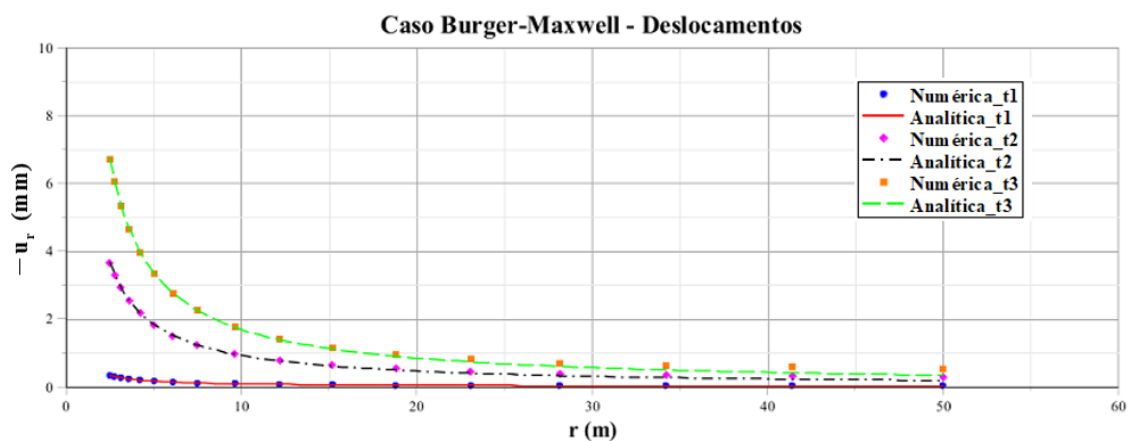


Figura 4.13: Comparação de Deslocamentos em função da distância r (Burger-Maxwell)

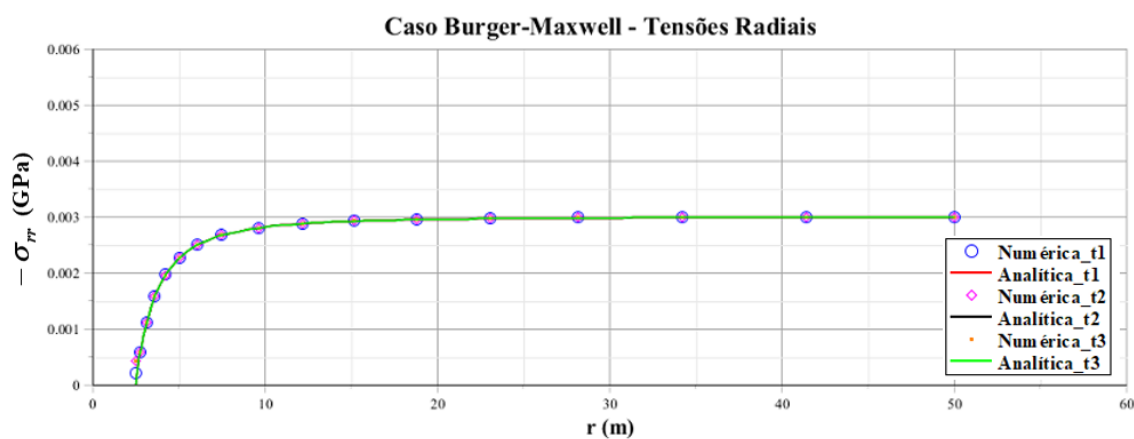


Figura 4.14: Comparação de tensões radiais em função da distância r (Burger-Maxwell)

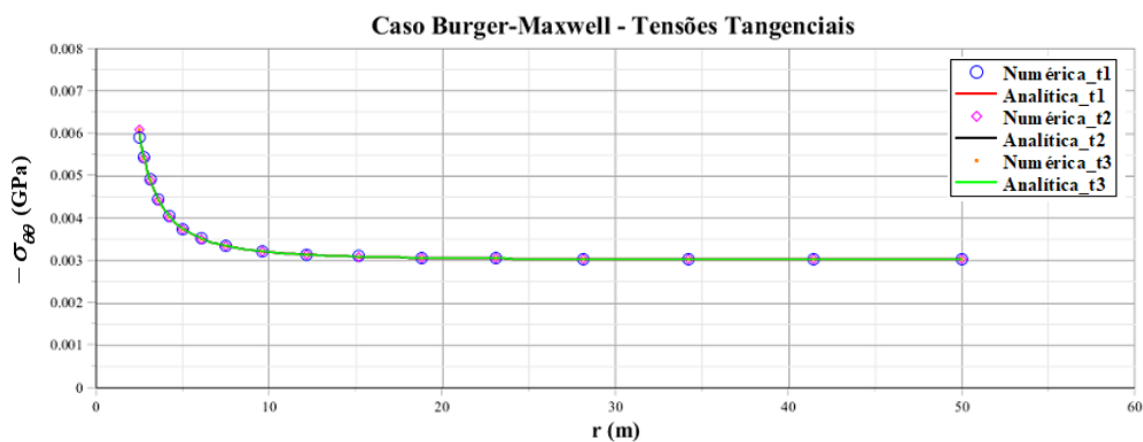


Figura 4.15: Comparação de tensões tangenciais em função de r (Burger-Maxwell)

Observa-se nas Figuras 4.11 e 4.12 que existe uma correspondência adequada entre as respostas numéricas e analíticas em função do tempo para os deslocamentos e convergência. Nas Figuras

4.13 a 4.15, nota-se que também existe uma correspondência adequada entre as respostas numéricas e analíticas de deslocamento e tensões. Não obstante, observa-se que no caso dos deslocamentos da Figura 4.13 aparentemente existem efeitos de borda, pois no contorno do modelo geométrico o deslocamento deve ser nulo. Então, consideram-se os mesmos comentários realizados para o caso anterior: é necessário estudar o tamanho da malha para reduzir os efeitos de borda, assim como o refinamento da malha para obter melhores resultados. A superposição das curvas nas Figuras 4.14 e 4.15 indica que as tensões permanecem constantes para diferentes tempos de análise.

Da correspondência vista nas curvas analíticas e numéricas, valida-se o código implementado e verifica-se o comportamento satisfatório para os modelos reológicos adotados para a matriz e para as fraturas.

4.2 TÚNEL CIRCULAR PROFUNDO COM REVESTIMENTO

Este problema se diferencia do anterior na presença de um revestimento que atua como um apoio no contorno do túnel circular. Após a abertura da galeria ou túnel no instante $t = t_0$, coloca-se imediatamente, em $t = t_0^+$, um revestimento contínuo e perfeitamente rígido na parede do túnel, tal como pode ser observado na Figura 4.16. Esta característica do revestimento é necessária para poder obter a solução analítica particular, pois poderia acontecer em outros casos que o revestimento se deforme ao longo do tempo.

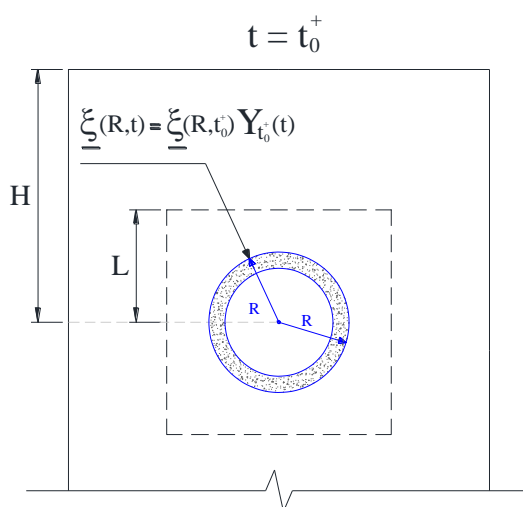


Figura 4.16: Representação esquemática das condições de deslocamento no local analisado quando considerado revestimento rígido

Da Figura 4.16, nota-se que o túnel terá as mesmas características geométricas do problema sem revestimento, isto é, será considerado como profundo com um raio R , altura e largura L e uma profundidade H , onde $H \gg R$. A presença do revestimento muda as condições do contorno do problema: após a escavação, a parede do túnel experimenta um deslocamento radial inicial $u(R, t_0^+)$ e, posteriormente, é colocado o revestimento, de forma tal que qualquer deslocamento radial será impedido.

Então, o deslocamento inicial $u(R, t_0^+)$ será mantido constante durante o tempo de existência do túnel, o que pode ser interpretado como um problema de deslocamento prescrito gerando que o maciço sofra um fenômeno de relaxação de tensões.

Com relação à tensão inicial (geostática) $\underline{\underline{\sigma}}^0(r, t_0^-)$, devido ao peso do maciço, será considerada uniforme segundo a seguinte expressão:

$$\underline{\underline{\sigma}}^0(r, t_0^-) = -p \underline{\underline{1}} \quad (4.48)$$

Devido à restrição de deslocamentos no contorno do túnel revestido, o maciço exercerá uma pressão $q(t)$ no revestimento. A Figura 4.17 mostra como é aplicada a pressão do maciço no revestimento rígido. O revestimento será dimensionado para suportar a pressão $q(t)$ ao longo do tempo.

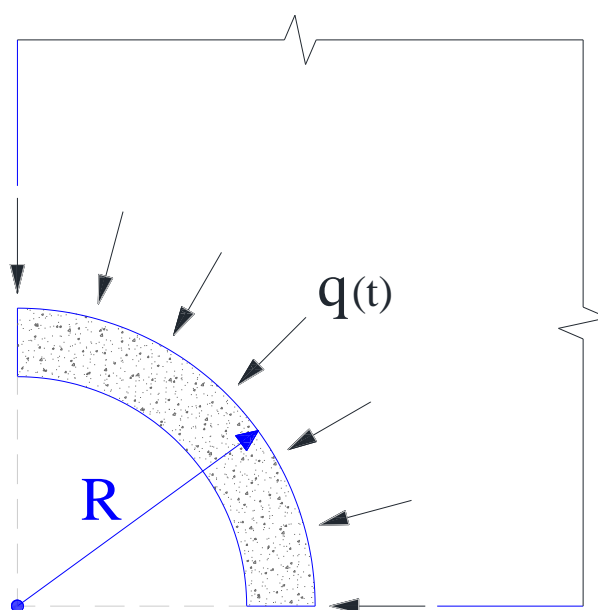


Figura 4.17: Pressão exercida pelo maciço no revestimento rígido do túnel circular

Da mesma forma que no problema anterior, o vetor posição pode ser considerado como $\underline{X} = r \underline{e}_r$ em coordenadas polares, onde r é a distância desde o centro da circunferência do túnel até um determinado ponto do maciço.

Serão determinados os campos tensoriais de tensão $\underline{\underline{\sigma}}(r,t)$ e deslocamento $\underline{\underline{\xi}}(r,t)$ e a pressão $q(t)$, que são induzidos pela escavação do túnel e a posterior colocação do revestimento em $t > t_0^+$ (resposta diferida).

4.2.1 Resposta Diferida do Maciço

Para analisar o comportamento do maciço em $t > t_0^+$, pode ser aproveitada a resposta elástica do problema do túnel sem revestimento. Considera-se como uma das condições de contorno que o deslocamento inicial antes da colocação do revestimento $u(R, t_0^+)$ é o mesmo fornecido pela solução elástica do túnel sem revestimento:

$$u(R, t_0^+) = -\frac{pR}{2\mu(t_0^+, t_0^+)} \quad (4.49)$$

Considera-se, também, a presença do estado inicial de tensões $\underline{\underline{\sigma}}^0(r, t_0^-)$ e ressalta-se que os cálculos serão realizados em termos de $\Delta\underline{\underline{\sigma}}(r,t)$, que pode ser definido como:

$$\Delta\underline{\underline{\sigma}}(r,t) = \underline{\underline{\sigma}}(r,t) - \underline{\underline{\sigma}}^0(r, t_0^-) \quad (4.50)$$

As equações do problema são as mesmas descritas nas expressões (4.23) e (4.24) no que diz respeito à resposta diferida para o problema sem revestimento. Em relação às condições de contorno em tensão, cumpre-se o descrito na expressão (4.25), enquanto que para as condições de contorno em deslocamento, cumpre-se, também, o descrito na expressão (4.26) e o seguinte para $r = R$:

$$u(R,t) = u(R, t_0^+) Y_{t_0^+}(t) = -\frac{pR}{2\mu(t_0^+, t_0^+)} Y_{t_0^+}(t) \quad (4.51)$$

onde $Y_{t_0^+}(t)$ é a função Heaviside para $t > t_0^+$. Utiliza-se um abordagem em deslocamento e assume-se um vetor deslocamento para o cálculo posterior das deformações e tensões:

$$\underline{\underline{\xi}}(r,t) = \xi_r \underline{e}_r = u(r,t) \underline{e}_r \quad (4.52)$$

onde $u(r, t)$ é uma função de deslocamento que depende da distância r e do tempo t . Devido à semelhança com os cálculos realizados no problema sem revestimento e seguindo o mesmo procedimento, pode-se determinar o tensor linearizado de deformações como:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(r, t) = u' \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{u}{r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \quad (4.53)$$

Segundo a lei do comportamento viscoelástico descrita na expressão (4.24), determina-se o tensor de tensões $\Delta \underline{\underline{\sigma}}(r, t)$ e suas componentes:

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_{rr}(r, t) &= \lambda(t, t_0^+) \circ (u' + u/r) + 2\mu(t, t_0^+) \circ u' \\ \Delta \sigma_{\theta\theta}(r, t) &= \lambda(t, t_0^+) \circ (u' + u/r) + 2\mu(t, t_0^+) \circ u/r \\ \Delta \sigma_{zz}(r, t) &= \lambda(t, t_0^+) \circ (u' + u/r) \quad ; \quad \text{Outros } \Delta \sigma_{ij}(r, t) = 0 \end{aligned} \quad (4.54)$$

Verifica-se a admissibilidade estática do tensor $\Delta \underline{\underline{\sigma}}(r, t)$ por meio do cálculo da divergência de um tensor em coordenadas cilíndricas descrita na expressão (4.30). Então, pode-se obter o seguinte:

$$\left(\lambda(t, t_0^+) + 2\mu(t, t_0^+) \right) \circ (u' + u/r)' = 0 \quad (4.55)$$

Da expressão anterior e pela semelhança nos cálculos respectivos do problema anterior, pode-se determinar que a forma da função de deslocamento $u(r, t)$ é:

$$u(r, t) = A(t) \frac{r}{2} + \frac{B(t)}{r} \quad (4.56)$$

onde $A(t)$ e $B(t)$ são funções do tempo. Da condição de contorno da expressão (4.26), pode-se determinar que $A(t) = 0$ e, por conseguinte, a expressão da função de deslocamento radial se reduz a:

$$u(r, t) = \frac{B(t)}{r} \quad (4.57)$$

Da condição de contorno descrita na expressão (4.51) e levando em conta a expressão (4.57), pode-se determinar que a função $B(t)$ é:

$$B(t) = u(R, t) R = -\frac{pR^2}{2\mu(t_0^+, t_0^+)} Y_{t_0^+}^+(t) \quad (4.58)$$

Por conseguinte, a função de deslocamento $u(r, t)$ é dada por:

$$u(r, t) = -\frac{pR^2}{2\mu(t_0^+, t_0^+) \cdot r} Y_{t_0^+}^+(t) \quad (4.59)$$

Substituindo a expressão (4.59) nas componentes do tensor $\Delta \underline{\underline{\sigma}}(r, t)$ descritas na expressão (4.54), obtém-se:

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_{rr}(r, t) &= 2\mu(t, t_0^+) \circ \left(\frac{pR^2}{2\mu(t_0^+, t_0^+) \cdot r^2} Y_{t_0^+}^+(t) \right) \\ \Delta \sigma_{\theta\theta}(r, t) &= 2\mu(t, t_0^+) \circ \left(-\frac{pR^2}{2\mu(t_0^+, t_0^+) \cdot r^2} Y_{t_0^+}^+(t) \right) \\ \Delta \sigma_{zz}(r, t) &= 0 \quad ; \quad \text{Outros } \Delta \sigma_{ij}(r, t) = 0 \end{aligned} \quad (4.60)$$

Sabe-se que $\mu(t, t_0^+) \circ Y_{t_0^+}^+(t) = \mu(t, t_0^+)$. Consequentemente, a expressão (4.60) pode ser atualizada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_{rr}(r, t) &= \frac{pR^2}{r^2} \frac{\mu(t, t_0^+)}{\mu(t_0^+, t_0^+)} \\ \Delta \sigma_{\theta\theta}(r, t) &= -\frac{pR^2}{r^2} \frac{\mu(t, t_0^+)}{\mu(t_0^+, t_0^+)} \\ \Delta \sigma_{zz}(r, t) &= 0 \quad ; \quad \text{Outros } \Delta \sigma_{ij}(r, t) = 0 \end{aligned} \quad (4.61)$$

Da expressão (4.50), determina-se a expressão geral para o campo de tensões da resposta diferida:

$$\underline{\underline{\sigma}}(r, t) = \underline{\underline{\sigma}}^0(r, t_0^-) + \Delta \underline{\underline{\sigma}}(r, t) \quad (4.62)$$

Substituindo as componentes da expressão (4.61) na expressão (4.62) e a expressão (4.59) nas expressões (4.52) e (4.53), pode-se, finalmente, obter os campos de solução da resposta diferida para um túnel circular com revestimento:

$$\begin{aligned}\underline{\xi}(r,t) &= -\frac{pR^2}{2\mu(t_0^+,t_0^+) \cdot r} Y_{t_0^+}^+(t) \underline{e}_r \\ \underline{\varepsilon}(r,t) &= \left(\frac{pR^2}{2\mu(t_0^+,t_0^+) \cdot r^2} Y_{t_0^+}^+(t) \right) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \left(-\frac{pR^2}{2\mu(t_0^+,t_0^+) \cdot r^2} Y_{t_0^+}^+(t) \right) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \\ \underline{\underline{\sigma}}(r,t) &= \left[p \left(\frac{R^2}{r^2} \frac{\mu(t,t_0^+)}{\mu(t_0^+,t_0^+)} - 1 \right) \right] \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \left[-p \left(\frac{R^2}{r^2} \frac{\mu(t,t_0^+)}{\mu(t_0^+,t_0^+)} + 1 \right) \right] \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + (-p) \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z\end{aligned}\quad (4.63)$$

Com relação à pressão $q(t)$ que o maciço exerce sobre o revestimento, esta é definida da seguinte maneira:

$$q(t) = -\sigma_{rr}(R,t) \quad (4.64)$$

Substitui-se a componente radial $\sigma_{rr}(r,t)$ do tensor de tensões da expressão (4.63) na expressão (4.64) para obter a expressão final para a pressão no revestimento:

$$q(t) = p \left(1 - \frac{\mu(t,t_0^+)}{\mu(t_0^+,t_0^+)} \right) \quad (4.65)$$

O módulo viscoelástico de cisalhamento $\mu(t,t_0^+)$ depende dos modelos reológicos adotados para a matriz e para as fraturas.

4.2.2 Comparação de resultados analíticos e numéricos

As comparações realizadas nesta seção serão consideradas como uma prova adicional para verificar o funcionamento do código numérico implementado considerando os mesmos modelos reológicos adotados para a matriz e fraturas do problema do túnel sem revestimento. Em relação aos dados geométricos e de carregamento do presente problema, utilizam-se os mesmos dados empregados no problema anterior.

Os parâmetros mecânicos utilizados para os modelos reológicos de Maxwell e Burger serão os mesmos mostrados nas Tabelas 4.1 e 4.2, da mesma forma que a densidade de fratura e o número de fraturas por metro cúbico. No que diz respeito à malha de elementos finitos utilizada para a análise numérica, utiliza-se a mostrada na Figura 4.4. Devido às características deste problema, serão analisadas as tensões radiais e tangenciais na distância $r = R$, da mesma forma

que a pressão que o maciço exerce sobre o revestimento. Também serão analisados os deslocamentos e tensões em função da distância radial r para três tempos diferentes, sendo $t1$ o correspondente a resposta elástica inicial, $t2$ é um tempo intermediário e $t3$ corresponde a um tempo muito grande quando as tensões se estabilizam. A seguir, mostra-se a comparação entre respostas diferidas considerando um modelo Maxwell-Maxwell:

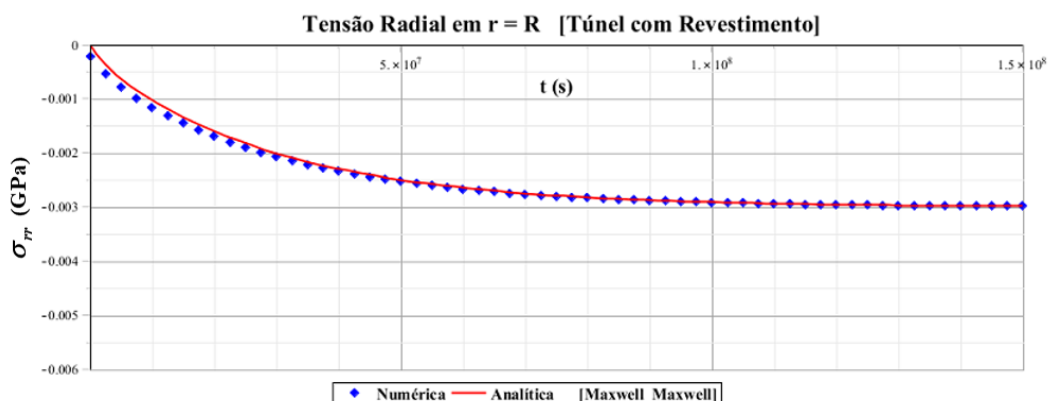


Figura 4.18: Comparação de tensões radiais em $r = R$ (Maxwell-Maxwell)

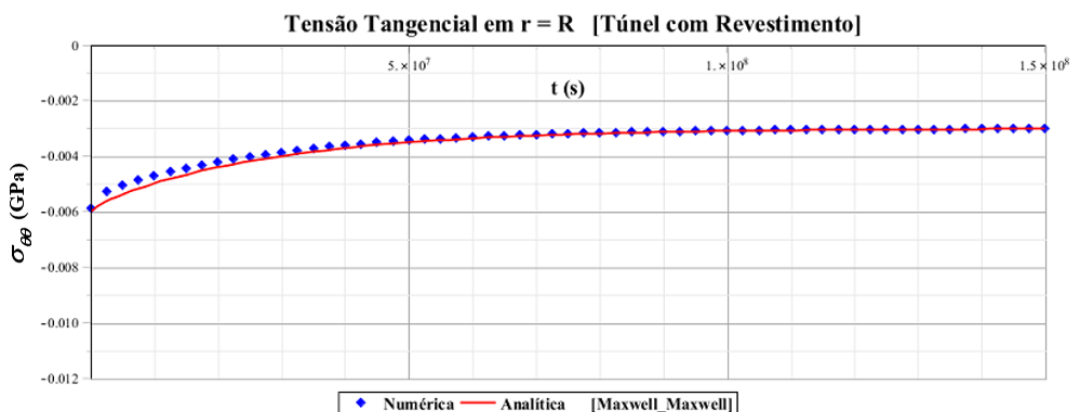


Figura 4.19: Comparação de tensões tangenciais em $r = R$ (Maxwell-Maxwell)

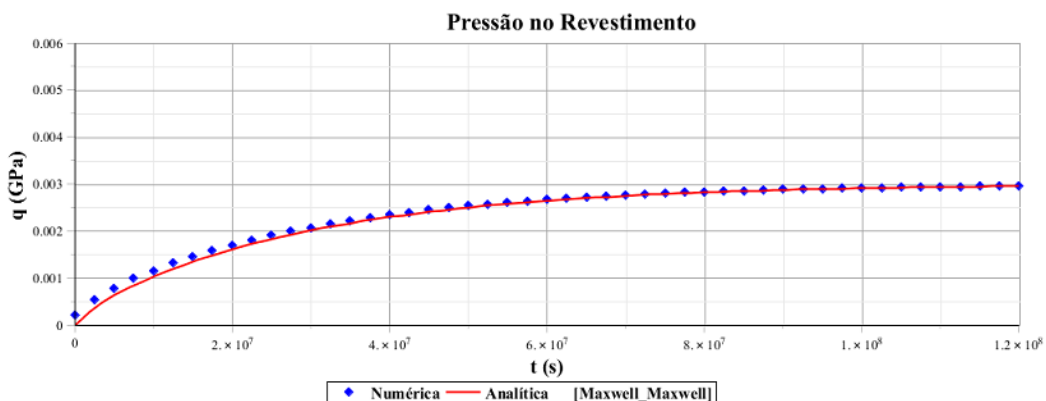


Figura 4.20: Comparação da Pressão q no Revestimento em $r = R$ (Maxwell-Maxwell)

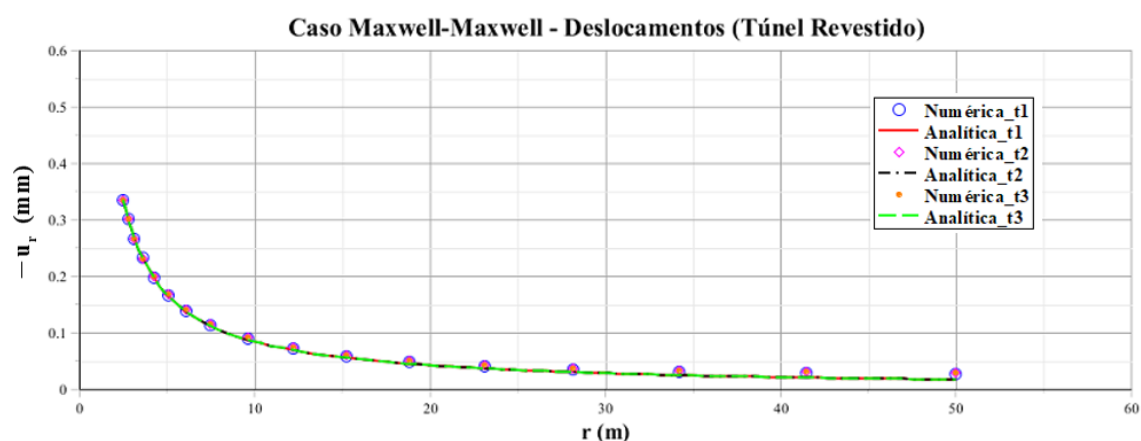


Figura 4.21: Comparação de deslocamentos em função da distância r (Maxwell-Maxwell)

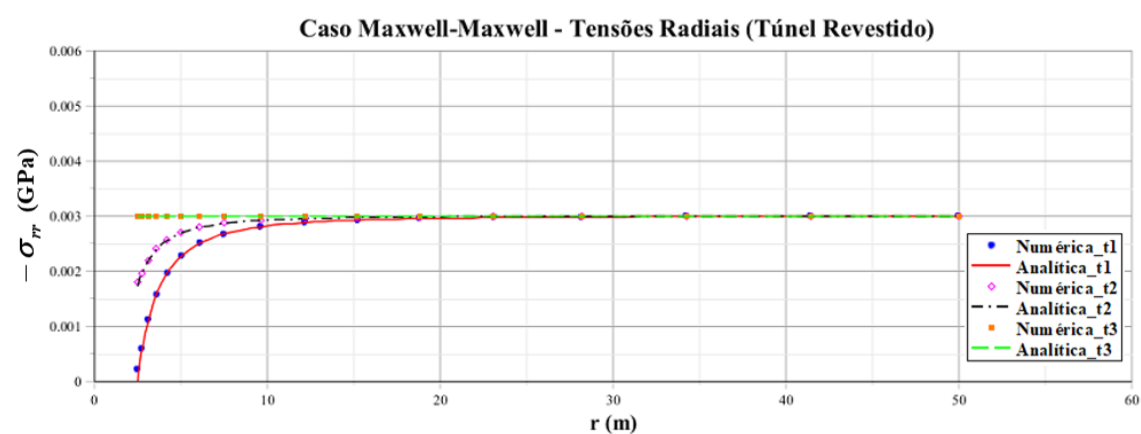


Figura 4.22: Comparação de tensões radiais em função da distância r (Maxwell-Maxwell)

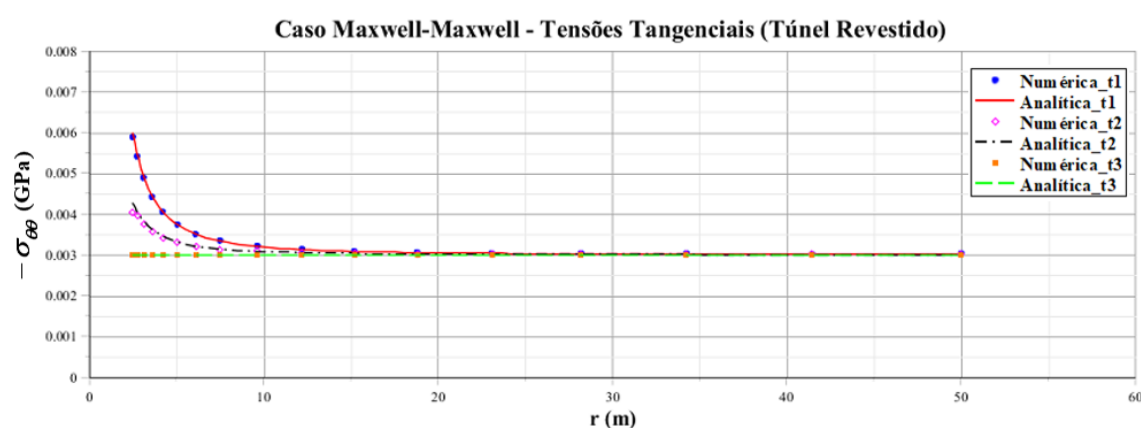


Figura 4.23: Comparação de tensões tangenciais em função de r (Maxwell-Maxwell)

Nota-se, nas Figuras 4.18 a 4.20, a correspondência satisfatória entre a resposta numérica e analítica para o campo de tensões, principalmente no médio e longo prazo. Deve ser considerado um estudo posterior do refinamento da malha para aproximar de zero as tensões

radiais instantâneas. Considera-se que este refinamento pode melhorar a correspondência no curto prazo tanto para a tensão radial quanto para a tensão tangencial. Observa-se na Figura 4.20 que a pressão máxima a ser suportada pelo revestimento rígido tem o mesmo valor de pressão do maciço p considerado como condição de contorno em tensão no modelo analisado.

Nas Figuras 4.21 a 4.23, percebe-se a adequada correspondência entre as respostas numéricas e analíticas dos campos de solução em função da distância radial r . Como era esperado, de forma similar às respostas obtidas no problema sem revestimento, aparecem efeitos de borda na Figura 4.21 que estão relacionados com o tamanho da malha considerada e que precisam de análises posteriores com o intuito de reduzir estes efeitos e os deslocamentos no contorno do modelo geométrico discretizado possam ser nulos. Percebe-se da superposição de curvas na Figura 4.21 que o deslocamento radial a uma determinada distância r será constante para diferentes tempos no caso de um túnel com revestimento rígido. A seguir, mostra-se a comparação entre respostas diferidas considerando um modelo Burger-Maxwell:

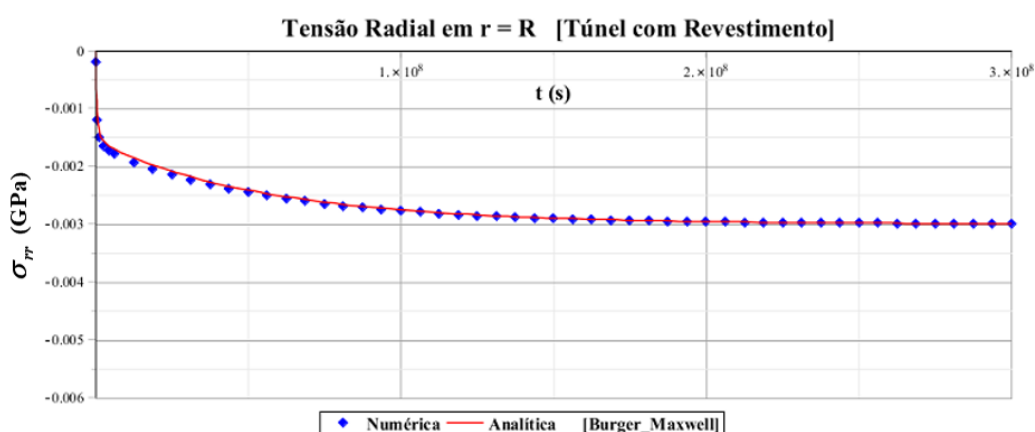


Figura 4.24: Comparação de tensões radiais em $r = R$ (Burger-Maxwell)

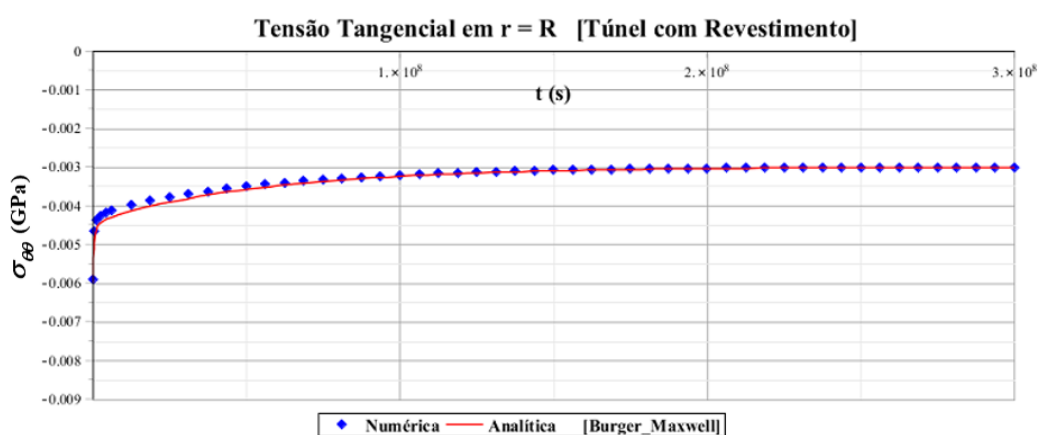


Figura 4.25: Comparação de tensões tangenciais em $r = R$ (Burger-Maxwell)

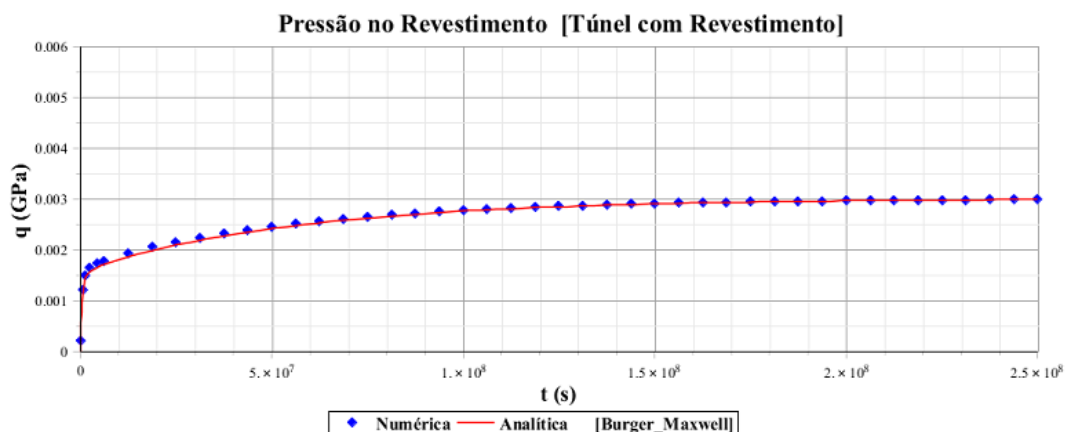


Figura 4.26: Comparação da Pressão q no Revestimento em $r = R$ (Burger-Maxwell)

Nas figuras 4.24 e 4.25 observa-se uma correspondência aceitável entre as respostas numéricas e analíticas para o campo de tensões do problema analisado. Ao longo prazo, percebe-se que as tensões alcançam o valor da pressão geostática correspondente ao estado de tensões iniciais. Esta pressão máxima p é a mesma que alcança a pressão q no revestimento rígido na Figura 4.26.

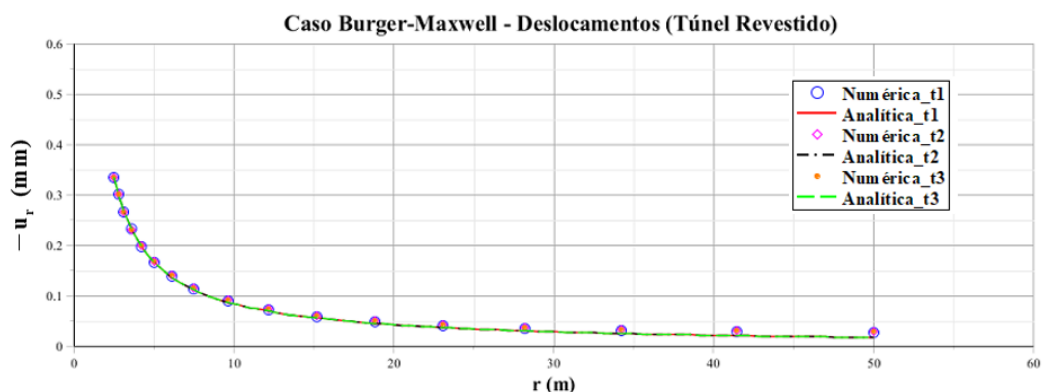


Figura 4.27: Comparação de deslocamentos em função da distância r (Burger-Maxwell)

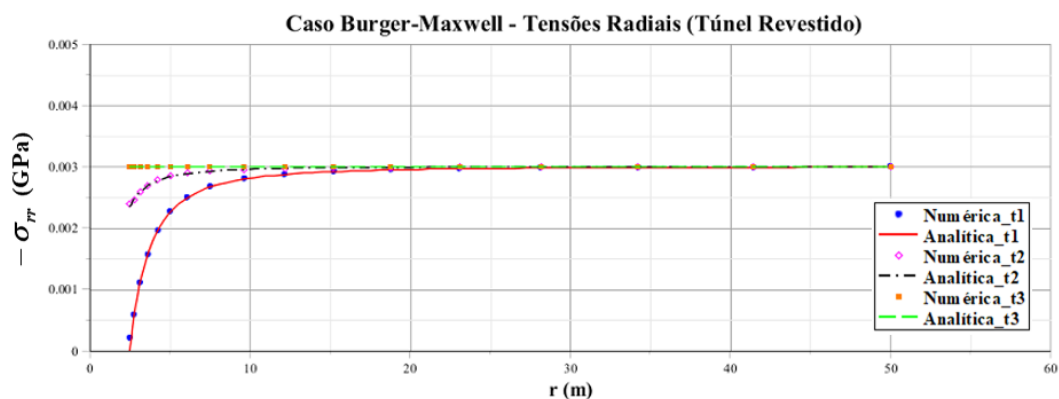


Figura 4.28: Comparação de tensões radiais em função da distância r (Burger-Maxwell)

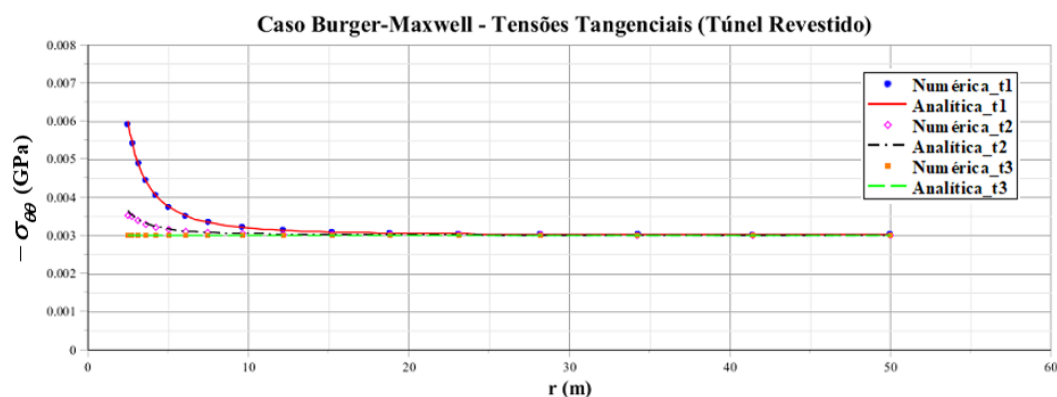


Figura 4.29: Comparação de tensões tangenciais em função de r (Burger-Maxwell)

Nas Figuras 4.27 a 4.29, observa-se uma correspondência adequada entre as respostas numéricas e analíticas. Não obstante, nota-se a aparição de efeitos de borda na Figura 4.27 no que diz respeito aos deslocamentos no contorno do modelo geométrico analisado. Por conseguinte, faz-se necessário analisar, posteriormente, o tamanho da malha de elementos finitos com o intuito de reduzir tais efeitos. Na Figura 4.27, observa-se a superposição das curvas de deslocamento para diferentes tempos, o que demonstra que no caso de um túnel circular revestido, os deslocamentos a uma distância r serão constantes para qualquer tempo considerado.

Da correspondência entre as soluções analíticas e numéricas vista nas figuras anteriores, pode-se validar o código implementado e seu comportamento para os modelos reológicos adotados para a matriz e para as fraturas.

4.3 TÚNEL COM SEÇÃO TRANSVERSAL TIPO FERRADURA

Nas aplicações mostradas no capítulo 3 e nas seções anteriores do presente capítulo foi validado o código implementado por meio das comparações entre as soluções analíticas e as respostas numéricas. Nesta seção, pretende-se mostrar as capacidades ou potencialidades do modelo implementado quando aplicado a túneis com seções transversais com campos de deslocamentos e tensões que não podem ser descritos mediante uma solução analítica definida. Desse modo, escolheu-se um túnel com seção transversal tipo ferradura para analisar seu respectivo campo de deslocamentos e tensões após a escavação. A informação correspondente a geometria da seção transversal, profundidade, peso específico do maciço e outras características principais do problema foram obtidas do trabalho realizado por Couto (2011).

O túnel mencionado corresponde à galeria subterrânea de uma usina hidroelétrica localizada em Jagran, Paquistão. A Figura 4.30 mostra a profundidade real do túnel e as dimensões que serão adotadas pelo modelo geométrico para geração da malha de elementos finitos.

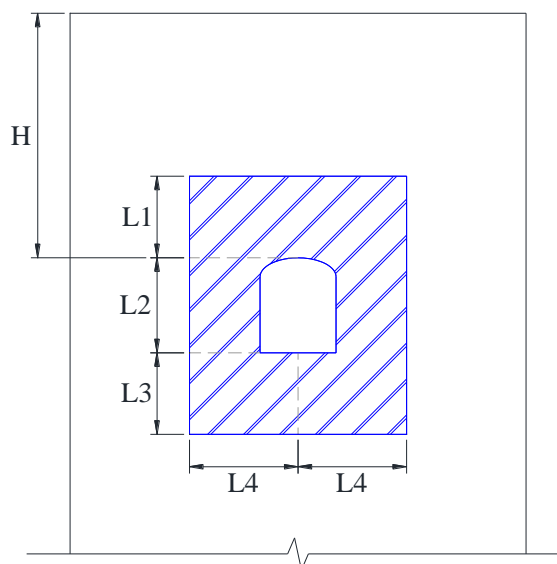


Figura 4.30: Representação esquemática das dimensões do modelo com seção tipo ferradura

Os valores adotados para as variáveis mostradas na figura anterior são: $H = 270$ m., $L1 = 45,68$ m., $L2 = 16,00$ m., $L3 = 61,68$ m. e $L4 = 48,00$ m. No que diz respeito à seção transversal tipo ferradura, a abóbada adota uma forma semielíptica. A Figura 4.31 mostra as dimensões da seção transversal utilizada.

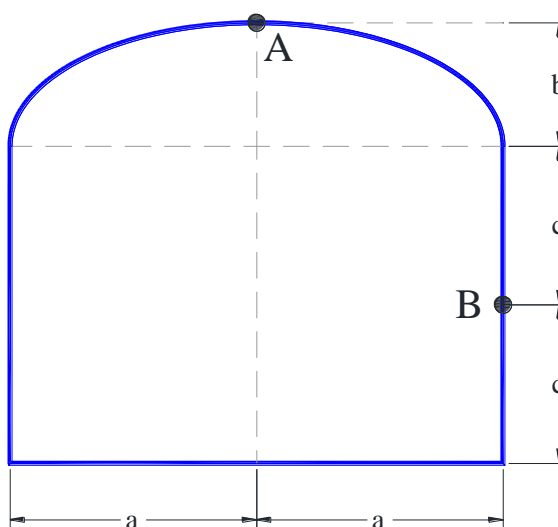


Figura 4.31: Seção transversal tipo ferradura do túnel

Observa-se na figura anterior a forma semi-elíptica da abóbada, sendo os valores das variáveis mostradas os seguintes: $a = 6,10$ m., $b = 2,32$ m. e $c = 6,84$ m. Em relação ao modelo geométrico para geração da malha de elementos finitos, devido ao eixo vertical de simetria que passa pelo ponto A, emprega-se a metade da zona mostrada na Figura 4.30. A Figura 4.32 mostra as condições de contorno utilizadas para representar a restrição de deslocamentos e as solicitações aplicadas ao modelo de elementos finitos.

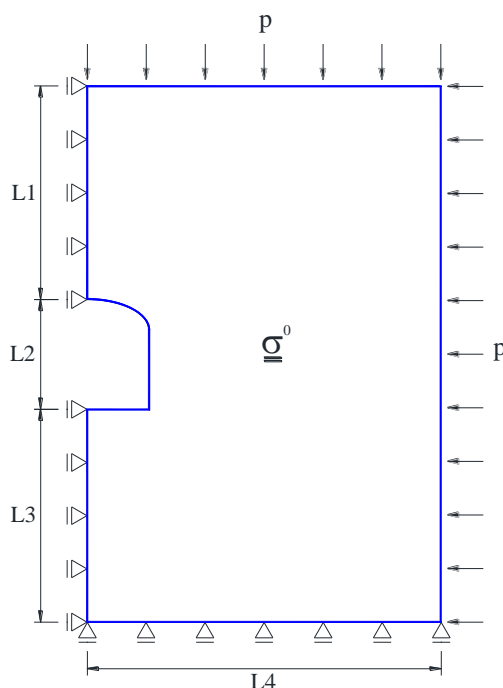


Figura 4.32: Condições de contorno e solicitações aplicadas no maciço

Da figura anterior, sabe-se que $p = \gamma H$ devido às características do problema (galeria profunda), onde γ é o peso específico do maciço e $\underline{\underline{\sigma}}^0 = -p \underline{\underline{1}}$ representa o estado inicial de tensões antes da escavação.

Para a análise de resultados, escolheu-se dois pontos de referência (A e B), mostrados anteriormente na Figura 4.31. Nestes pontos serão analisados os campos de deslocamentos e tensões diferidas resultantes após a escavação. Também serão analisadas as variações de deslocamentos e tensões em função das distâncias r_x e r_y , que podem ser vistas na Figura 4.33. Nesta figura podem-se observar os eixos de análise para as distâncias mencionadas, que coincidem com os eixos X e Y, assim como os pontos de referência A e B. É importante mencionar que o ponto B está localizado na metade da altura da parede vertical do túnel, tal como mostrou a Figura 4.31.

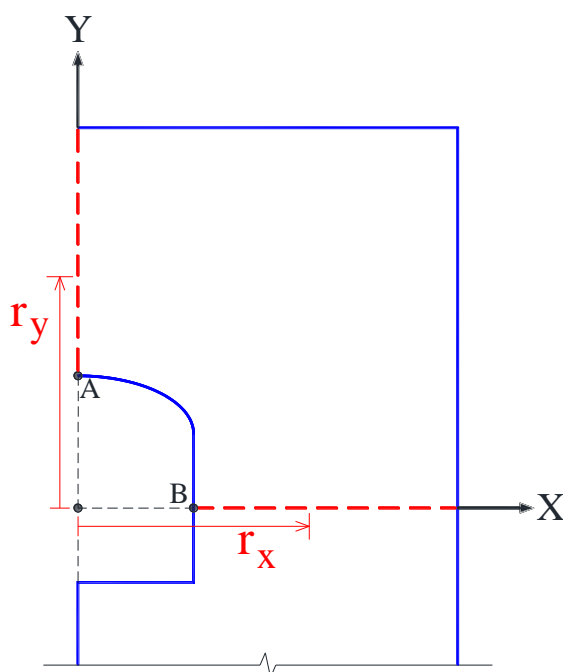


Figura 4.33: Eixos de análise no modelo do túnel com seção transversal tipo ferradura

Com relação ao maciço, o peso específico considerado é $\gamma = 25 \text{ kN/m}^3$. Os parâmetros mecânicos viscoelásticos serão os mesmos considerados nas tabelas 4.1 e 4.2. O parâmetro de dano e número de fraturas por metro cúbico também serão os mesmos considerados para o problema do túnel com seção transversal circular.

De acordo com o mencionado nas seções anteriores, os modelos reológicos utilizados serão Maxwell e Burger. Os casos apresentados correspondem às combinações: Maxwell (Matriz) – Maxwell (Fratura) e Burger (Matriz) – Maxwell (Fratura). Cabe mencionar que o modelo implementado pode trabalhar de forma geral com todos os modelos reológicos mencionados no capítulo 2. Não obstante, nestas aplicações serão utilizados só os modelos Maxwell e Burger.

4.3.1 Resposta Numérica Diferida

Como mencionado anteriormente, na resposta diferida da estrutura, será analisado o comportamento dos campos de deslocamentos e tensões dos pontos de referência A e B para os casos Maxwell-Maxwell e Burger-Maxwell. No que diz respeito ao comportamento de deslocamentos e tensões em função das distâncias r_x e r_y , serão analisados para três tempos diferentes, sendo $t1$ o correspondente à resposta inicial, $t2$ é um tempo intermédio e $t3$ corresponde a um tempo muito grande.

Com relação à malha de elementos finitos gerada para a análise em estado plano de deformações, compõe-se de 931 elementos finitos quadriláteros e 1000 nós. A Figura 4.35 mostra a malha utilizada e uma aproximação da seção transversal.

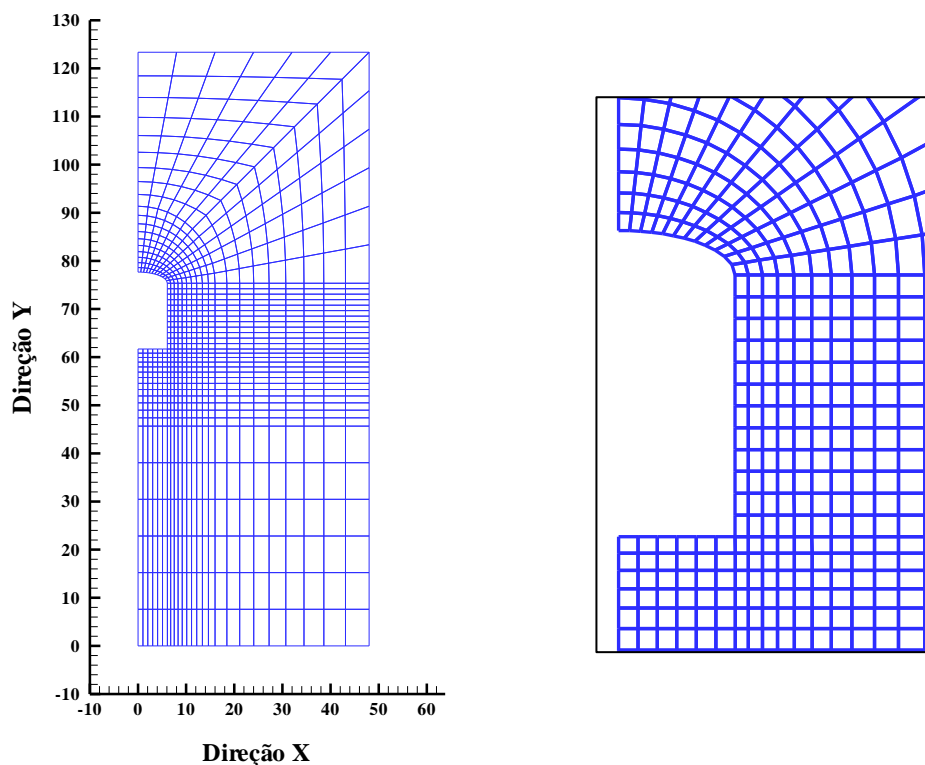


Figura 4.34: Malha de elementos finitos do modelo geométrico do túnel com seção transversal tipo ferradura e aproximação da zona de escavação

A seguir, mostra-se a resposta diferida para os campos de deslocamentos e tensões do ponto de referência A, assim como a variação destes campos em função da distância vertical r_y para o caso Maxwell-Maxwell.

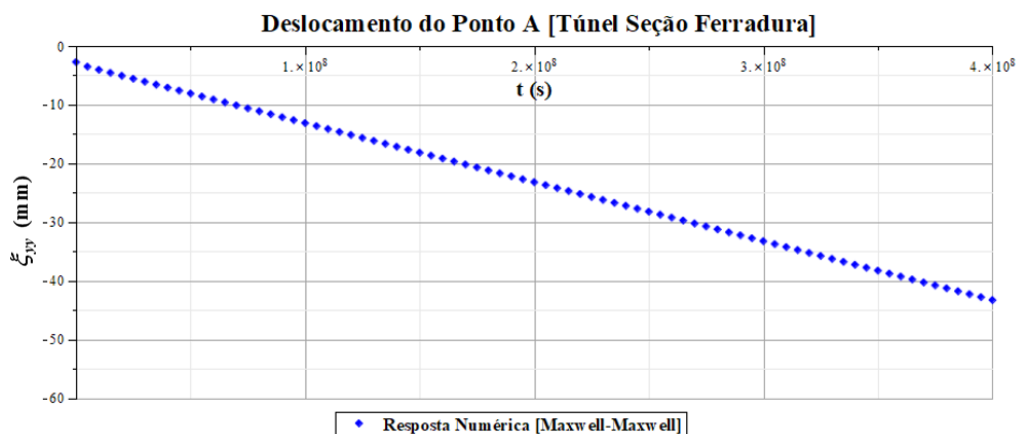


Figura 4.35: Deslocamento vertical do ponto A em função do tempo (Maxwell-Maxwell)

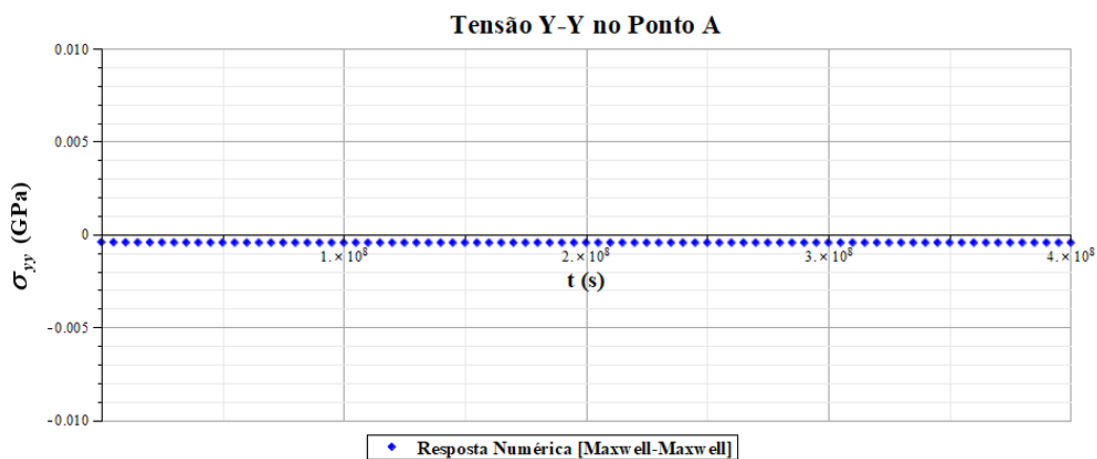


Figura 4.36: Tensão vertical do ponto A em função do tempo (Maxwell-Maxwell)

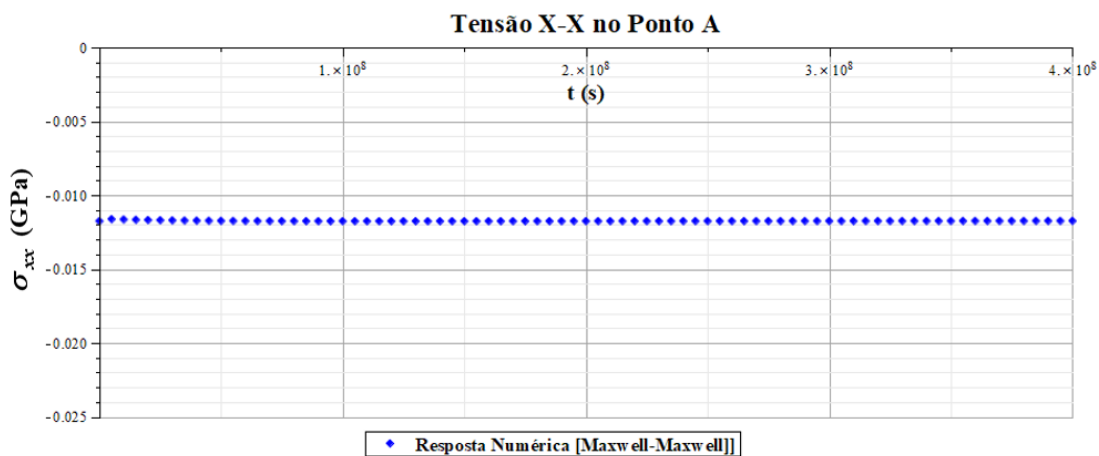


Figura 4.37: Tensão horizontal do ponto A em função do tempo (Maxwell-Maxwell)

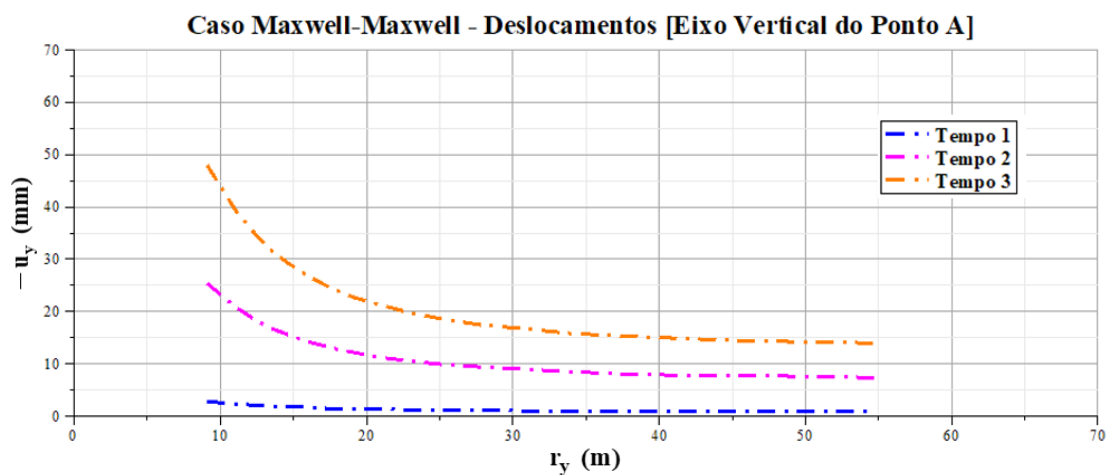


Figura 4.38: Deslocamentos verticais em função da distância r_y (Maxwell-Maxwell)

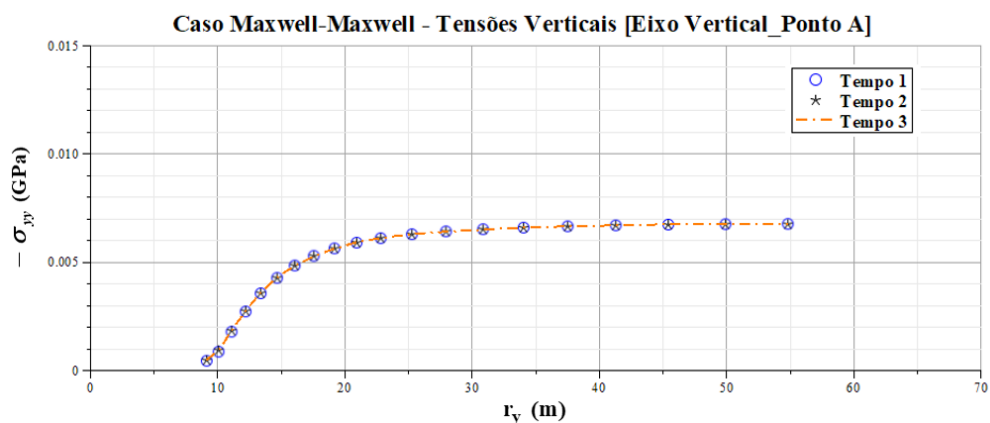


Figura 4.39: Tensões verticais em função da distância r_y (Maxwell-Maxwell)

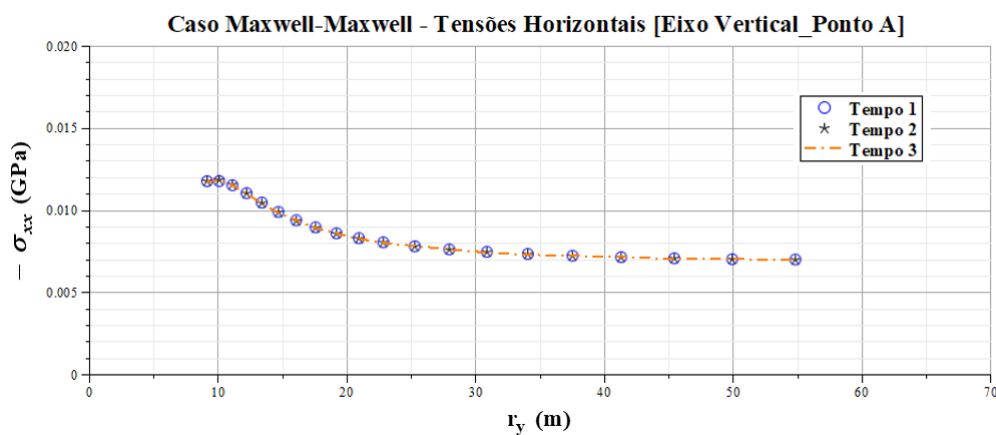


Figura 4.40: Tensões horizontais em função da distância r_y (Maxwell-Maxwell)

A seguir, mostra-se a resposta diferida para os campos de deslocamentos e tensões do ponto de referência B, assim como a variação destes campos em função da distância horizontal r_x para o caso Maxwell-Maxwell.

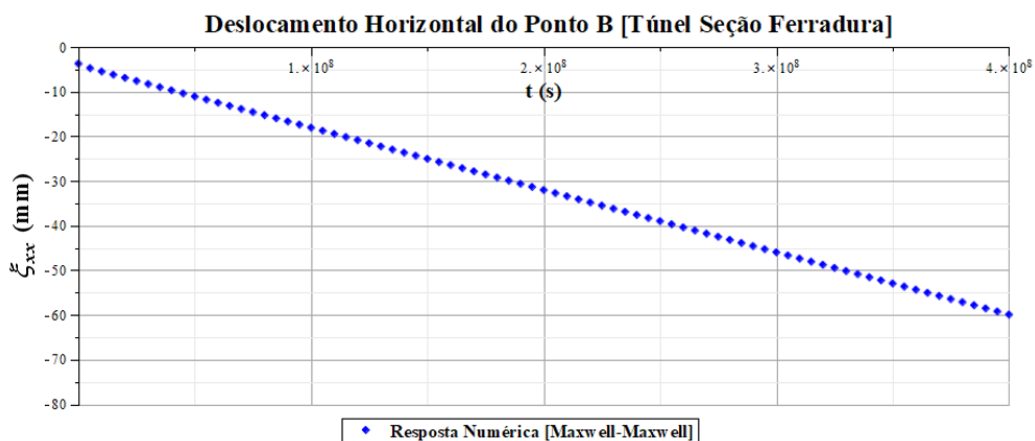


Figura 4.41: Deslocamento horizontal do ponto B em função do tempo (Maxwell-Maxwell)

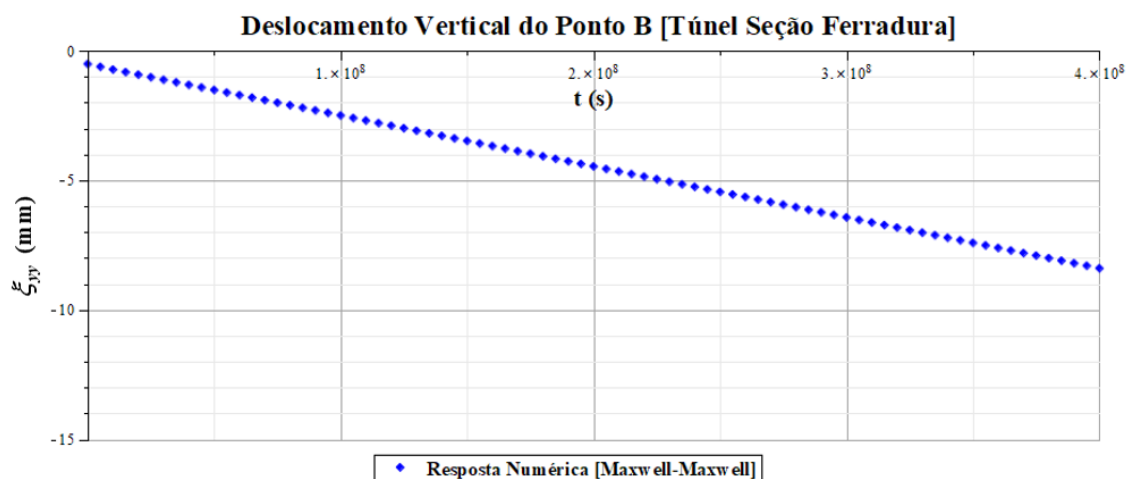


Figura 4.42: Deslocamento vertical do ponto B em função do tempo (Maxwell-Maxwell)

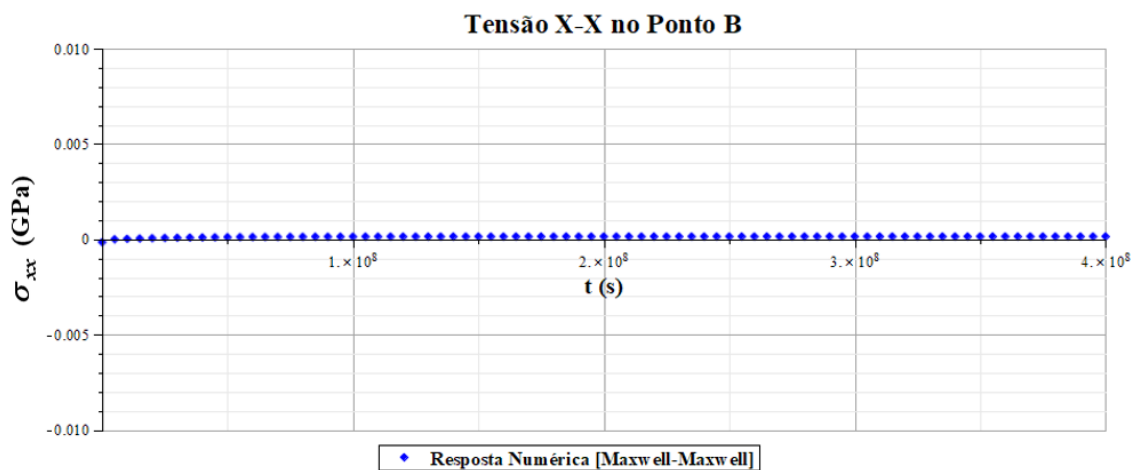


Figura 4.43: Tensão horizontal do ponto B em função do tempo (Maxwell-Maxwell)

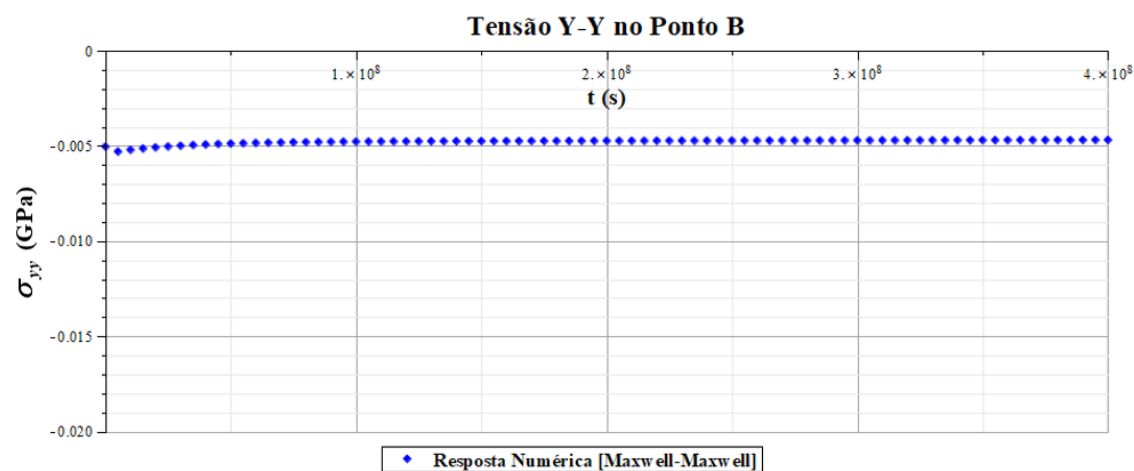


Figura 4.44: Tensão vertical do ponto B em função do tempo (Maxwell-Maxwell)

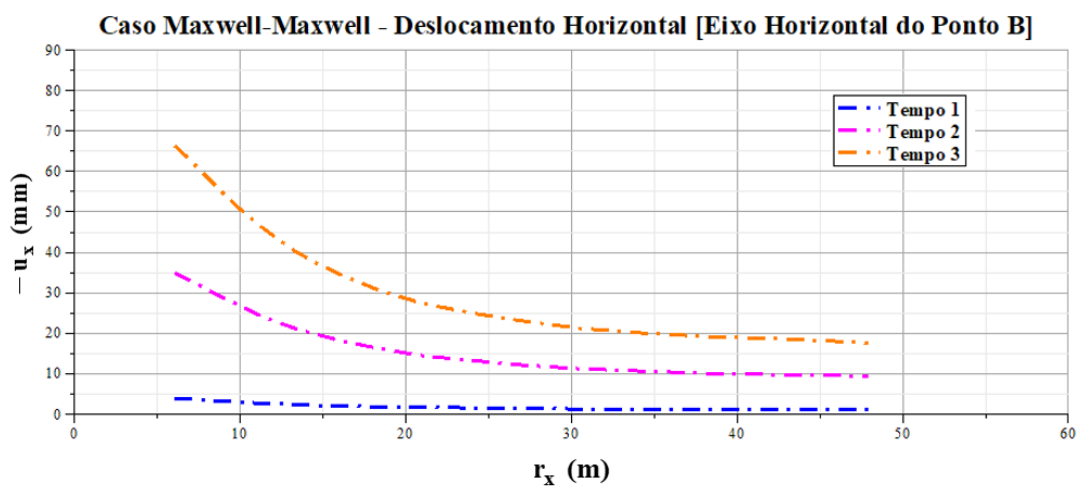


Figura 4.45: Deslocamentos horizontais em função da distância r_x (Maxwell-Maxwell)

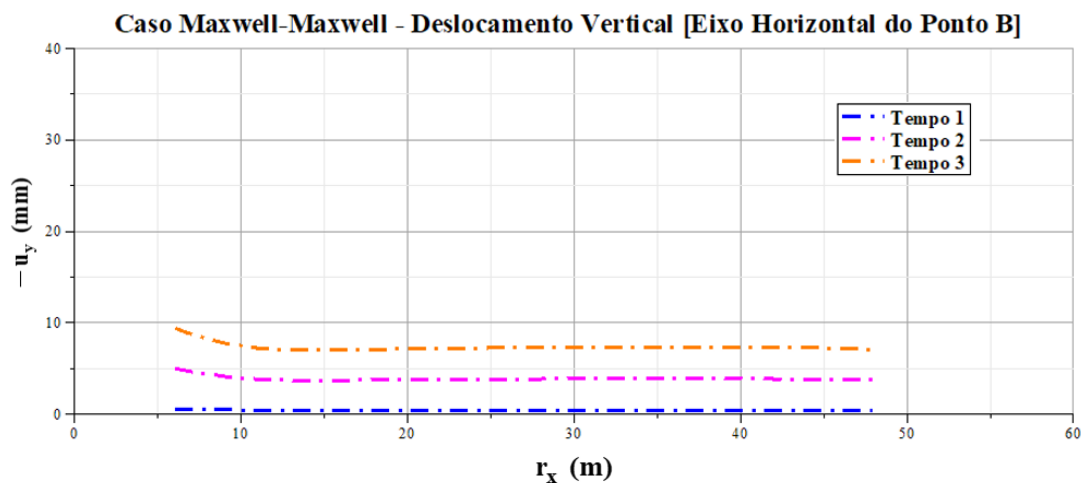


Figura 4.46: Deslocamentos verticais em função da distância r_x (Maxwell-Maxwell)

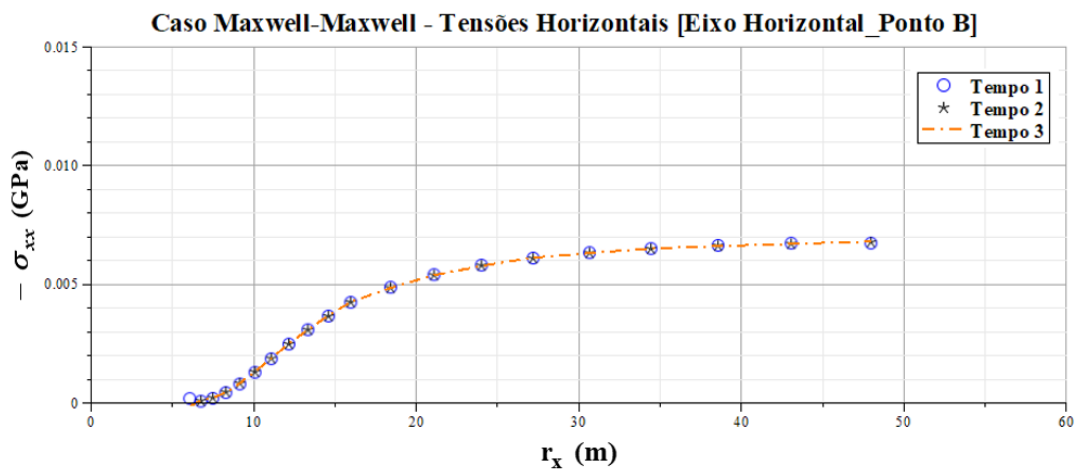


Figura 4.47: Tensões horizontais em função da distância r_x (Maxwell-Maxwell)

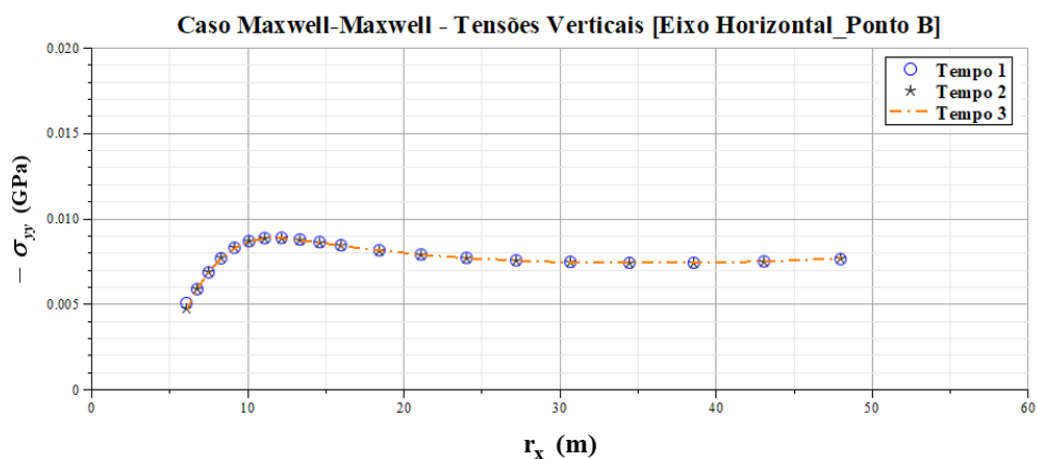


Figura 4.48: Tensões verticais em função da distância r_x (Maxwell-Maxwell)

A seguir, mostra-se a resposta diferida para os campos de deslocamentos e tensões do ponto de referência A, assim como a variação destes campos em função da distância vertical r_y para o caso Burger-Maxwell.

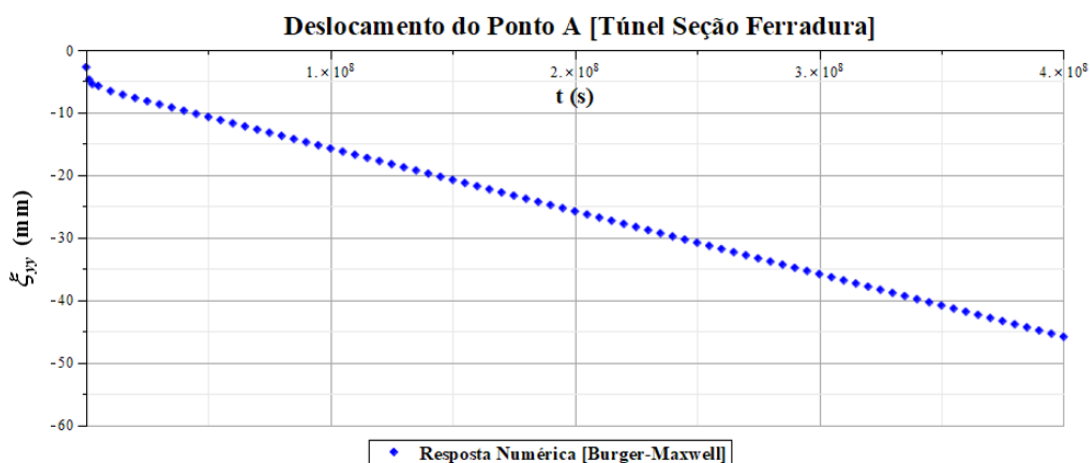


Figura 4.49: Deslocamento vertical do ponto A em função do tempo (Burger-Maxwell)

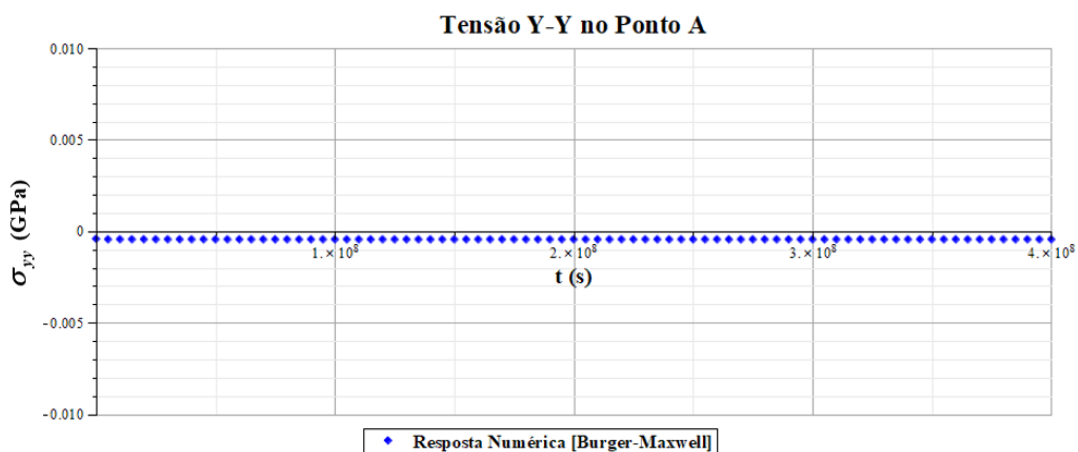


Figura 4.50: Tensão vertical do ponto A em função do tempo (Burger-Maxwell)

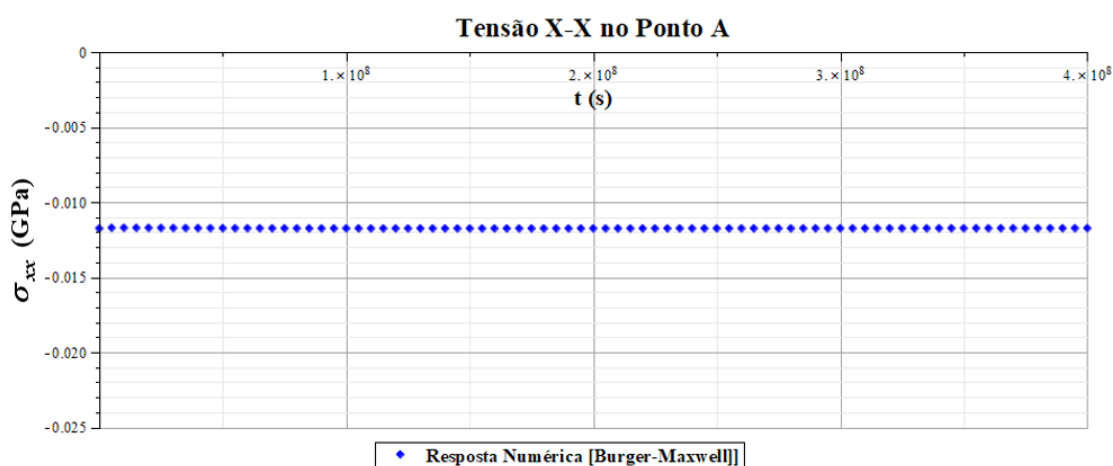


Figura 4.51: Tensão horizontal do ponto A em função do tempo (Burger-Maxwell)

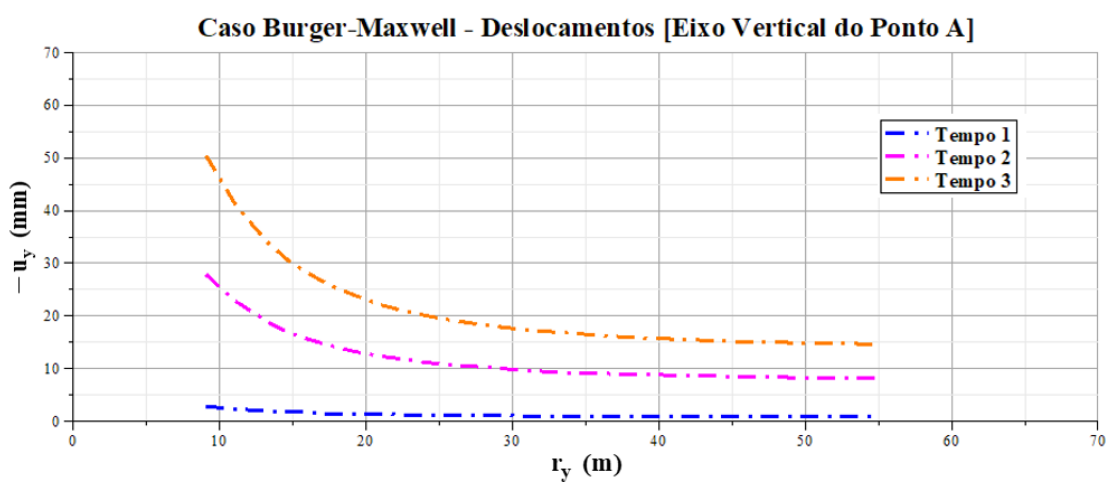


Figura 4.52: Deslocamentos verticais em função da distância r_y (Burger-Maxwell)

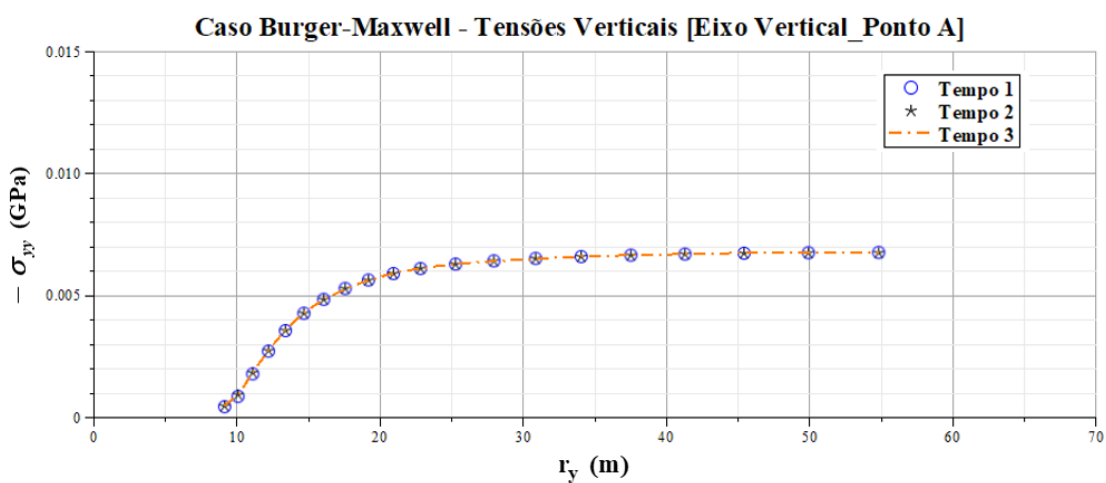


Figura 4.53: Tensões verticais em função da distância r_y (Burger-Maxwell)

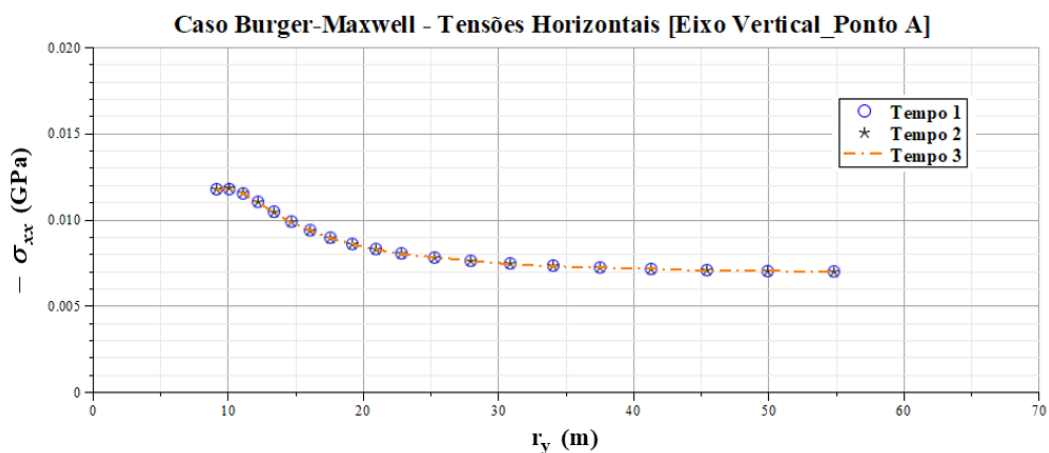


Figura 4.54: Tensões horizontais em função da distância r_y (Burger-Maxwell)

A seguir, mostra-se a resposta diferida para os campos de deslocamentos e tensões do ponto de referência B, assim como a variação destes campos em função da distância horizontal r_x para o caso Burger-Maxwell.

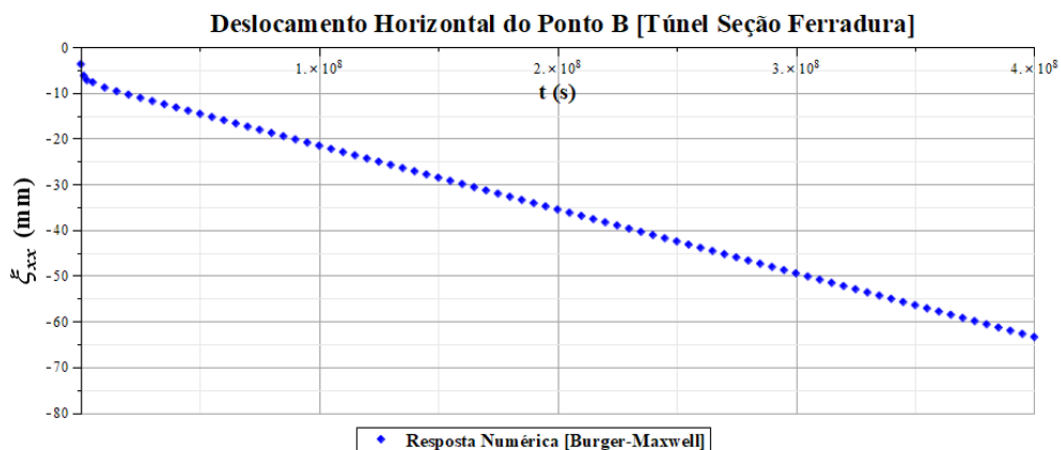


Figura 4.55: Deslocamento horizontal do ponto B em função do tempo (Burger-Maxwell)

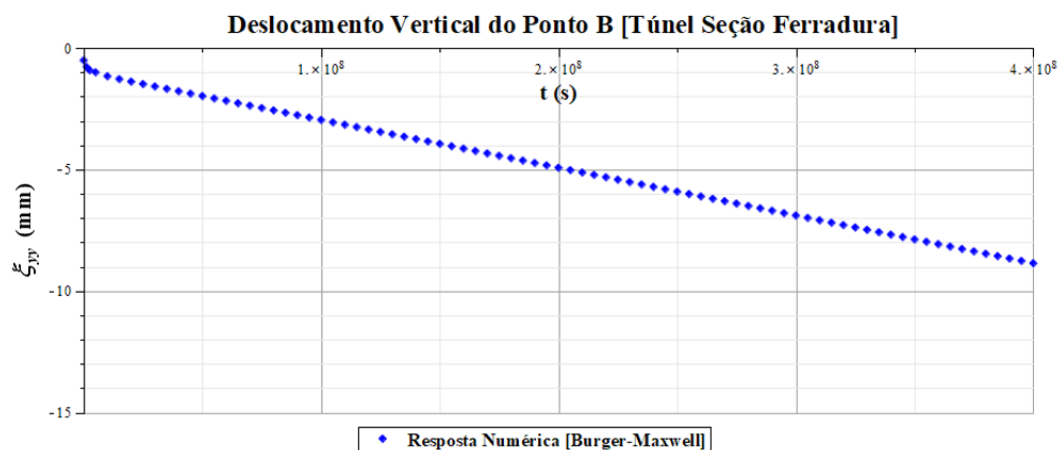


Figura 4.56: Deslocamento vertical do ponto B em função do tempo (Burger-Maxwell)

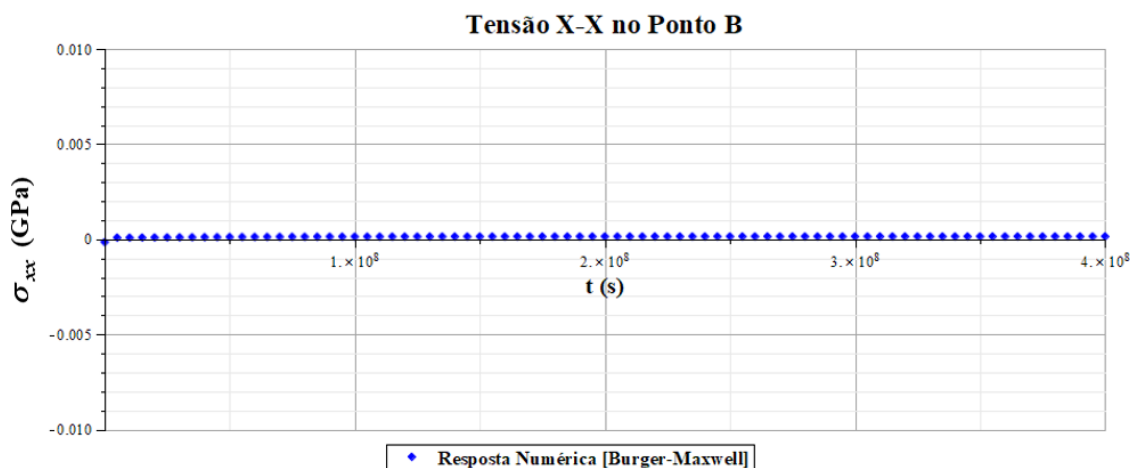


Figura 4.57: Tensão horizontal do ponto B em função do tempo (Burger-Maxwell)

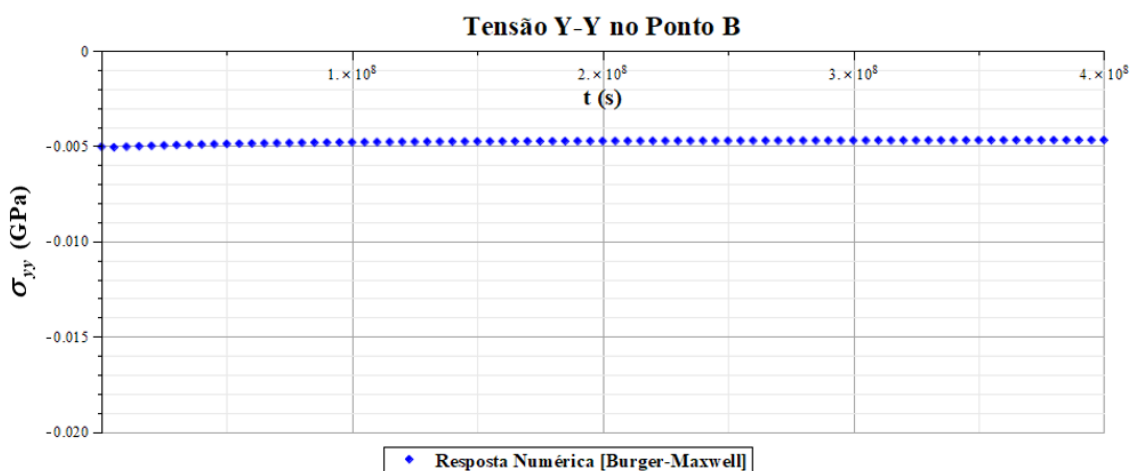


Figura 4.58: Tensão vertical do ponto B em função do tempo (Burger-Maxwell)

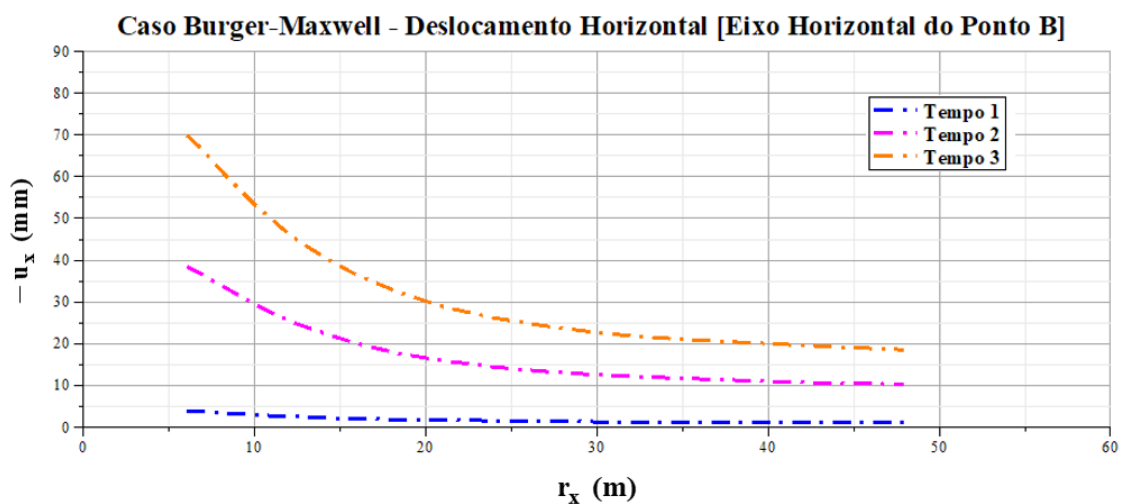


Figura 4.59: Deslocamentos horizontais em função da distância r_x (Burger-Maxwell)

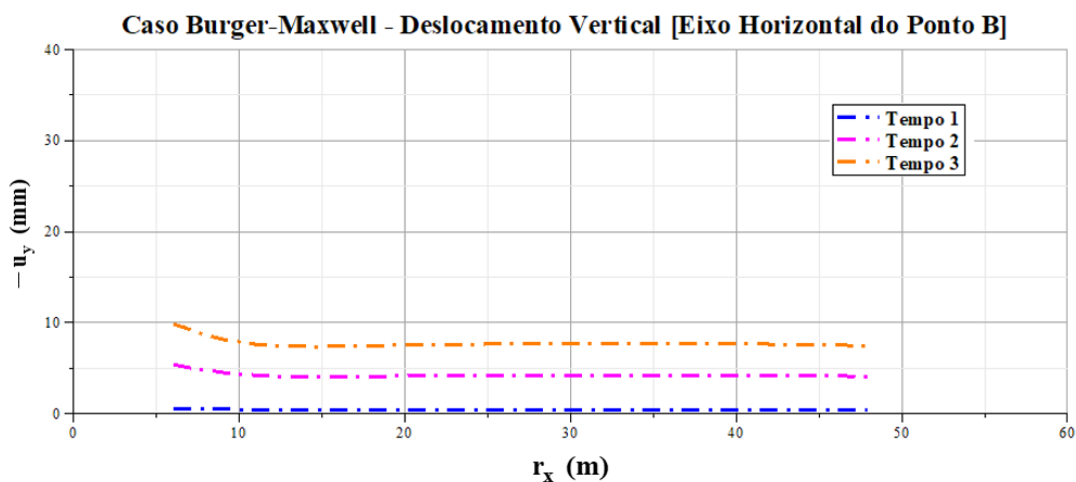


Figura 4.60: Deslocamentos verticais em função da distância r_x (Burger-Maxwell)

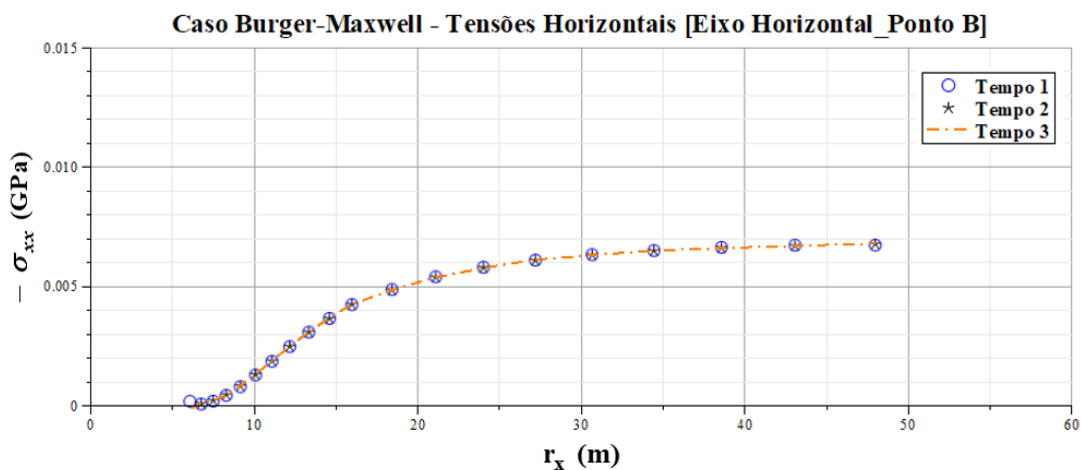


Figura 4.61: Tensões horizontais em função da distância r_x (Burger-Maxwell)

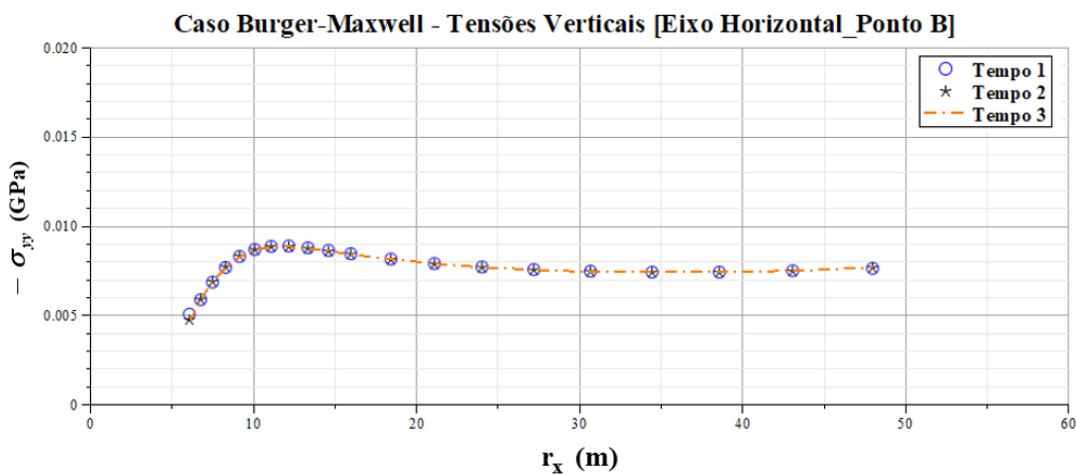


Figura 4.62: Tensões verticais em função da distância r_x (Burger-Maxwell)

Das figuras mostradas anteriormente, para ambos os casos dos modelos reológicos utilizados, observa-se um comportamento coerente de acordo com as condições do problema. Nas figuras relacionadas ao deslocamento em função da distância (4.38, 4.45, 4.46, 4.52, 4.59 e 4.60), deve-se mencionar que é necessário estudar o tamanho e refinamento adequado da malha de elementos finitos para reduzir os efeitos de borda que são visíveis nas curvas e afetam o comportamento do contorno do modelo geométrico discretizado. Pode-se dizer, finalmente, que o código implementado trabalha de forma satisfatória para os exemplos apresentados.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A resposta diferida (dependente do tempo) dos geomateriais ergue-se de vital interesse quando as estruturas analisadas são submetidas a solicitações de longa duração e torna-se uma componente fundamental nas deformações respectivas. O estudo deste comportamento é ainda mais relevante quando surgem superfícies de descontinuidade nos materiais que compõem a estrutura, pois sabe-se que a presença destas tem um impacto negativo no desempenho da mesma, o que pode conduzir a uma degradação da rigidez e resistência, aumento da permeabilidade, entre outros.

Para analisar o comportamento mencionado existem diversos modelos matemáticos que pretendem representar de forma adequada o desempenho viscoelástico do material ao longo do tempo. Neste trabalho foi apresentado um modelo viscoelástico desenvolvido por Aguiar e Maghous (2018), que utilizou um raciocínio baseado em esquemas de homogeneização linear (Mori-Tanaka) junto com o princípio de correspondência para materiais viscoelásticos sem envelhecimento. A formulação desta lei constitutiva viscoelástica serviu de base para o desenvolvimento da respectiva implementação numérica, sendo esta o objetivo principal do trabalho.

5.1 CONCLUSÕES

O modelo viscoelástico apresentado neste trabalho pode utilizar diferentes modelos reológicos para descrever o comportamento diferido individual da matriz e das fraturas. O caso geral para representação do comportamento viscoelástico das componentes do material será o modelo reológico de Burger, que é uma combinação dos modelos reológicos de Maxwell e Kelvin. A escolha do modelo reológico dependerá de vários fatores, entre os quais pode-se mencionar as propostas realizadas em trabalhos anteriores e seus respectivos resultados, a possibilidade de utilizar parâmetros obtidos em laboratório e não arbitrários e os objetivos a serem atingidos no estudo dos efeitos da viscosidade tanto na matriz quanto nas fraturas.

Foi mostrado que o comportamento viscoelástico geral de um meio fraturado homogeneizado pode ser representado por um modelo exato e por um modelo simplificado. O modelo exato

corresponde a um modelo reológico de Maxwell Generalizado, o qual foi empregado para a implementação computacional. Entre as características do modelo implementado, a distribuição das microfraturas no meio estudado determina o desenvolvimento do código elaborado. Sabe-se que as microfraturas podem ter diferentes orientações no meio, não obstante, foi escolhida a distribuição mencionada dado que permite tratar o material como isotrópico e a representação do tensor de relaxação é uma combinação dos módulos de compressão e cisalhamento.

Dos exemplos de aplicação mostrados no capítulo 3, observou-se uma correspondência satisfatória na comparação das soluções analíticas com as respostas ou previsões numéricas do modelo. Desta forma, o código implementado foi validado, destacando o bom funcionamento a curto, médio e longo prazo. Na análise dos exemplos utilizados, foi observado que quanto maior for o modelo reológico empregado para as componentes do material, maior será o esforço computacional. Do anterior, o caso Burger-Maxwell levou mais tempo de análise computacional que no caso Maxwell-Maxwell.

No caso dos túneis profundos com seção transversal circular, a correspondência entre as curvas da solução analítica e a resposta numérica também foi satisfatória, tendo-se observado uma boa aproximação entre elas e verificando mais uma vez o código implementado para os casos estudados. Contudo, ressalta-se que precisa ser estudado de forma mais aprofundada o tamanho e refinamento da malha para tentar reduzir ou eliminar os efeitos de borda que se apresentam nos deslocamentos de contorno do modelo numérico. Salienta-se que além dos casos dos modelos reológicos empregados no trabalho (Maxwell e Burger), outras combinações de modelos também podem ser utilizadas, sendo o caso geral Burger-Burger.

Finalmente, para o caso do túnel profundo com seção transversal tipo ferradura, mostrou-se a potencialidade do modelo viscoelástico implementado obtendo resultados coerentes para os campos de tensão e deslocamentos do caso analisado. Da mesma forma que para o caso dos túneis com seção transversal circular, faz-se necessário, também, estender o estudo do tamanho e refinamento da malha para reduzir os efeitos de borda.

5.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Tal como mencionado anteriormente, surgem diversas possibilidades para estender ou aprofundar o trabalho de implementação computacional do modelo viscoelástico desenvolvido

nesta dissertação. Nas próximas linhas são mencionadas algumas sugestões de complementação e extensão do trabalho.

O modelo implementado só considerou uma distribuição isotrópica de fraturas. Sugere-se, portanto, adicionar outras distribuições no código, como a distribuição aleatória de fraturas paralelas com o intuito de verificar a diferença no comportamento do material quando submetido a diversas solicitações. Dado que para os exemplos foram utilizados determinados parâmetros viscoelásticos, poderia ser considerada a possibilidade de mudança de parâmetros próprios do modelo analítico como a densidade de fratura ou o número de fraturas por metro cúbico para analisar a variação da resposta diferida das estruturas.

Como mencionado no desenvolvimento do trabalho, a versão do programa de elementos finitos empregado para a implementação computacional tem a desvantagem de trabalhar só com análises em estado plano de deformações e axissimétricas. Por conseguinte, seria de grande interesse para futuros trabalhos estender o código para análises tridimensionais. Desta forma, poderiam ser utilizados dados obtidos em laboratório para serem comparados com as previsões numéricas e assim validar o modelo viscoelástico.

Do parágrafo anterior, uma das principais sugestões seria a validação do modelo viscoelástico. O primeiro passo para conseguir esta validação é a identificação dos parâmetros mecânicos de um determinado geomaterial, o que permitiria avaliar a capacidade preditiva do modelo analítico reproduzindo o comportamento do material a curto, médio e longo prazo para ser comparado com os resultados obtidos por meio de ensaios de laboratório realizados no respectivo material e que podem ser encontrados na literatura sobre o tema. Geralmente, estes ensaios consistem em provas de compressão triaxial e os respectivos resultados fornecem as deformações axiais ao longo do tempo, que são apresentados em forma de curvas de fluência triaxial.

Finalmente, como mencionado acima, seria interessante aprofundar no estudo do tamanho e refinamento da malha de elementos finitos de materiais viscoelásticos com o intuito de reduzir ou eliminar os efeitos de borda. Poderia ser estudada a relação entre o tamanho da malha e a profundidade real de túneis profundos e, desta forma, melhorar os resultados e a correspondência entre as respostas analíticas e as previsões numéricas.

REFÊRENCIAS

ADVANI, S. G.; TUCKER III, C. L. The use of tensors to describe and predict fiber orientation in short fiber composites. **Journal of Rheology**, Urbana, US. v. 31, p. 751-784, 1987.

AGUIAR, C.B.; MAGHOUS, S. Micromechanical approach to effective viscoelastic properties of micro-fractured geomaterials. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v. 42, n. 16, p. 2018-2046, 2018.

BANDIS, S. C.; LUMSDEN, A. C.; BARTON, N. R. Fundamentals of rock joint deformation. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, v 20, n. 6, p. 249-268, 1983.

BART, M. **Contributions a la modélisation du comportement hydromecanique des massifs rocheux avec fractures**. 2000. 233 f. Tese (Docteur en Genié Civil) – Université de Lille I, cidade Villeneuve-d'Ascq, FR.

BERNAUD, D. **Tunnels profonds das les milieux viscoplastiques: approches experimentale et numerique**. 1991. 353 f. Thèse (PhD) – Marne-la-Vallée, l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, France.

BUDIANSKY, B.; O'CONNELL, R. J. Elastic moduli of a cracked solid. **International Journal of Solids Structures**, Pergamon Press, GB, v. 12, p. 81-97, 1976.

COUTO, E. C. **Um modelo tridimensional para túneis escavados em rocha reforçada por tirantes passivos**. 2011. 141 f. Tese (Doutorado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.

ESHELBY, J. D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. **Proceeding of the Royal Society of London**, vol A 241, p. 376-396, 1957.

GOODMAN, R. E. **The mechanical properties of joints**, Proc. 3rd. ISRM, Denver, v. 1A, p. 127-140, 1974.

LE, Q. **Modélisation multi-échelle des matériaux viscoélastiques hétérogènes: application à l'identification et à l'estimation du fluage propre de bétons d'enclaves de centrales nucléaires**. 2008. 257 f. Tese (Docteur en Genié Civil) – Université Paris-Est, cidade Champs-sur-Marne, FR.

LE, Q. V.; MEFTAH, F.; Q.-C., H.; LE PAPE, Y. Creep and relaxation functions of a heterogeneous viscoelastic porous medium using the Mori-Tanaka homogenization scheme and a discrete microscopic retardation spectrum. **Mechanics of Time-Dependent Materials**, v. 11, n. 3-4, p. 309–331, dez. 2007.

LORENCI, L. V. S. **Formulação micromecânica do comportamento poroelástico de um meio rochoso fraturado**. 2013. 135 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.

MAGHOUS, S.; DORMIEUX, L.; KONDO, D.; SHAO, J. F. Micromechanics approach to poroelastic behavior of a jointed rock. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v. 37, n. 2, p. 111-129, 2013.

MAGHOUS, S.; LORENCI, G.; BITTENCOURT, E. Effective poroelastic behavior of a jointed rock. **Mechanics Research Communications**, v. 59, p. 64-69, jul. 2014.

MURA, T. **Micromechanics of defects in solids**. 2.ed., Dordrecht: Martinus Nijhoff Publishers, 1987. 587 p.

NEMAT-NASSER, S.; HORI, M. Overall moduli of solids with micro-cracks: load induced anisotropy. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 31, n. 2, p. 155-171, out. 1983.

NGUYEN, S. T. **Propagation de fissures et endommagement par microfissures dans un milieu viscoélastique linéaire non vieillissant**. 2010. 209 f. Tese (Docteur Spécialisé en Structures et Matériels) – Université Paris-Est, cidade Champs-sur-Marne, FR.

NGUYEN, S. T.; DORMIEUX, L.; LE PAPE, Y.; SANAHUJA, J. A Burger model for the effective behavior of a microcracked viscoelastic solid. **International Journal of Damage Mechanics**, v. 20, n. 8, p. 1116-1129, nov 2011.

NGUYEN, S. T.; JEANNIN, L.; DORMIEUX, L.; RENARD, F. Fracturing of viscoelastic geomaterials and application to sedimentary layered rocks. **Mechanics Research Communications**, v. 49, p. 50-56, abr. 2013.

PONTHOT, J. P., **Traitement unifié de la mécanique des milieux continus solides en grandes transformations par la méthode des éléments finis**. 1995. Thèse (PhD), Université de Liège, Liège, Belgium.

SALENÇON, J. **Mécanique des milieux continus: concepts généraux**. Paris: L'École Polytechnique, 2005. v.1. 390 p. ISBN 978-2-7302-1245-8.

SALENÇON, J. **Viscoélasticité pour le Calcul des structures**. Paris: L'École Polytechnique, 2009. 158 p. ISBN 978-2-7302-1557-2.

APÊNDICE A – FLUXOGRAMA DO MODELO ANALÍTICO

Com o intuito de expor de forma didática e resumida os passos principais do procedimento específico de obtenção do tensor de relaxação $\mathbb{R}^{\text{hom}}(t)$ para uma distribuição isotrópica de microfraturas, o presente apêndice mostra um fluxograma com o processo que deve ser executado para obter de forma analítica as componentes do tensor de relaxação. Adicionalmente, são mostrados os parâmetros e módulos obtidos em cada passo considerado, assim como as expressões necessárias para os respectivos cálculos. Estas expressões pertencem ao capítulo 2 do presente trabalho.

FLUXOGRAMA DO MODELO ANALÍTICO VISCOELÁSTICO PARA GEOMATERIAIS COM DISTRIBUIÇÃO ISOTRÓPICA DE MICROFRATURAS

