UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

# CONVERSANDO COM O LIVRO DIDÁTICO: O QUE ESTÁ SENDO EXPLICADO SOBRE EQUAÇÕES DE PRIMEIRO GRAU?

FERNANDA DE ABREU LIMA

**Porto Alegre**
**2019**

Fernanda de Abreu Lima

# Conversando com o livro didático: O que está sendo explicado sobre equações de primeiro grau?

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial e último à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Egger Moellwald.

**Porto Alegre**
**2019**

Fernanda de Abreu Lima

# Conversando com o livro didático: O que está sendo explicado sobre equações de primeiro grau?

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial e último à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

**BANCA EXAMINADORA**

Prof.ª Dr.ª Adair Mendes Nacarato (Universidade São Francisco – SP)

Prof.ª Dr.ª Lisete Bampi (Faculdade de Educação – UFRGS)

Prof.ª Dr.ª Luisa Doering (Instituto de Matemática e Estatística– UFRGS)

Orientador: Prof. Dr. Francisco Egger Moellwald (Faculdade de Educação – UFRGS)

## AGRADECIMENTOS

Agradecer é uma maneira de reconhecer que nossas aventuras se tornam especiais quando temos companhia, é poder retribuir o carinho daqueles que aceitaram nos acompanhar...

E nesta aventura, tive companheiros incríveis!

Corajosos, pois muitas vezes me acompanhavam sem nem saber por onde estávamos indo. Amigos, pois me lembravam de que não podemos seguir sempre no mesmo ritmo; as aventuras pedem pausas. Artistas, pois, às vezes, mesmo sem saber, me faziam encontrar passagens onde nem imaginava.

Agradeço ao orientador, que foi corajoso, amigo e artista. Sem as palavras dele esta pesquisa certamente não existiria, tampouco minha versão atual. Produzir esta pesquisa constituiu um processo de desconstrução intenso. E, mesmo considerando que a cada momento mudamos um pouquinho, me sinto segura em dizer que estou distante daquela que começou a pesquisa há dois anos. Hoje consigo ver poesia onde antes nem imaginava que podia. Obrigada!

Agradeço à coordenação do programa, aos professores e professoras, aos colegas e às colegas de mestrado. Agradeço às professoras Adair, Lisete e Luisa por avaliarem a pesquisa, por me questionarem e me fazerem dizer o porquê daquilo que estava dizendo.

Agradeço à minha família e aos amigos, por estarem sempre presentes, por enfrentarem tantas outras aventuras comigo!

Agradeço aos encontros...

Ser sensível aos signos, considerar o mundo como coisas a ser decifrada é, sem dúvida, um dom. Mas esse dom correria o risco de permanecer oculto em nós mesmos se não tivéssemos os encontros necessários; e esses encontros ficariam sem efeito se não conseguíssemos vencer certas crenças.

Gilles Deleuze

## Resumo

O texto desta dissertação constitui-se por meio de uma análise de livro didático. Buscamos no livro didático respostas à pergunta que movimenta a pesquisa: "O que está sendo explicado sobre equações de primeiro grau?". Pergunta que se constitui do encontro das palavras de Rancière e de Lins e Gimenez com situações vivenciadas em sala de aula. Deste encontro os movimentos da pesquisa constituem-se com o objetivo de pensar o ensino introdutório das equações de primeiro grau em consonância com o conceito de emancipação intelectual. Explorando as explicações do livro didático foi possível problematizá-las e potencializar outros modos de ver, pensar e fazer um estudo de conceitos matemáticos que compõem o ensino dessas equações.



Palavras-chave: Atividade algébrica. Emancipação intelectual. Explicação. Equação. Livro didático.

## LISTA DE FIGURAS

## SUMÁRIO

# PRIMEIRO ATO: COMEÇANDO

## Cena I – Olhando pelo retrovisor

*Quando começou não se sabe, tampouco se sabe como vai seguir esta andança.*
*Mas torna-se possível identificar alguns dos momentos que a forçaram...*

Esta pesquisa se constitui por uma composição de muitos momentos, de um longo exercício de sensibilização; não se trata de um texto impessoal, nem de desenvolvimento de métodos, nem de verificação de métodos. A sensação que talvez mais tenha me acompanhado nesse período de pesquisa tenha sido *inquietação*. O que via quando olhava para o ensino das equações de primeiro grau não me satisfazia. E por meio dos movimentos nada lineares que essa inquietação provocava a pesquisa foi sendo produzida.

E dentre esses momentos que provocaram inquietações torna-se possível destacar alguns. A primeira leitura de Rancière (2015) já me fazia andar acompanhada de algumas interrogações, as quais ganharam força quando, em uma turma de 7º ano, me vi envolvida no ensino de equações de primeiro grau e de expressões algébricas. As interrogações se faziam fortes, mas ainda não muito nítidas, se manifestavam como uma sensação de desconforto, mas não se mostravam. No entanto, por meio de uma nova leitura de Rancière (2015), as interrogações começaram a sair do esconderijo, e assim a pesquisa pode ganhar seus movimentos.

Enquanto as interrogações ainda estavam pouco visíveis, confesso que olhava para o ensino de equações de primeiro grau e de expressões algébricas e não me parecia tão desafiador. No entanto, uma grande dificuldade surgiu no momento de falar com os alunos sobre o assunto. Para eles a presença de uma incógnita e aqueles "novos" cálculos geravam um grande estranhamento. Desenvolver cálculos literais, encontrar o valor da incógnita para determinada equação e aceitar uma expressão algébrica como resultado final eram situações muito estranhas em relação ao que vinham fazendo até então. E minhas palavras não tinham capacidade de transmitir a eles os conhecimentos que visavam transformar aqueles monstros monstruosos em monstros de estimação (LINS, 2005).

Tomar o aluno pela mão e explicar aquilo que deveria ser feito, repetidamente, a cada exercício, parecia incontestável, pois mesmo que os discursos se oponham a isso, a pressão do meio escolar reforça que o aluno não pode sair com dúvidas de uma aula, ou seja, as palavras do professor devem ser capazes de conduzi-lo por um caminho linear, no qual dúvidas não durem mais do que o período de uma aula. Não sendo incomum ouvirmos que um "bom professor é aquele que explica bem", me sentia distante da qualidade de "boa professora", pois estava longe de ser aquela que não deixava brechas para dúvidas. Naquele momento me parecia necessário explicar de modo que os alunos pudessem resolver os exercícios sem precisar parar para pensar, de modo que o desconforto da dúvida fosse eliminado. O que fazer então? Buscar refúgio no livro didático?

Os livros didáticos faziam parte do meu repertório desde o começo, como referência para preparar as aulas, selecionar exercícios. No entanto, diante da dificuldade, passei a recorrer com maior frequência a ele para saber o que fazer. Perguntava ao livro: Como explicar? Como apresentar conceitos e propriedades? Quais exemplos utilizar? Que tipo de exercício propor? Qual sequência seguir? E assim o ouvia cada vez mais.

Isto me pareceu causar uma leve sensação de acerto, algo que acontecia enquanto nos centrávamos, alunos e professora, cada vez mais em procedimentos de resolução. Uma leve sensação de acerto surgia, pois a agitação e o desespero dos alunos pareciam diminuir ante um passo a passo para saber o que fazer naqueles exercícios estranhos, o que consequentemente diminuía o desespero de uma professora que não sabia mais o que fazer. Embora permanecesse uma sensação de desconforto.

A situação foi amenizada, mas não deixava de me causar incômodo. Não conseguia me sentir confortável com uma docência centrada em procedimentos e em exercícios de fixação, mas também não conseguia forças para sair daquele padrão. Algo que, na época, não soube expressar dessa forma. O tempo foi passando, e pouco depois de um ano me encontro novamente com *O mestre ignorante* de Rancière, e ele, que de modo pouco perceptível já me acompanhava nesta andança, trouxe à superfície alguns dos motivos daquele desconforto.

Ao refazer essa leitura algumas passagens me trouxeram à lembrança momentos compartilhados com aquela turma de 7º ano, percebendo-os, no entanto, de outra maneira; Antes, as lembranças vinham acompanhadas de uma sensação de incapacidade. A partir da segunda leitura, das lembranças começavam a surgir interrogações. Rancière problematiza a explicação, e minha preocupação em buscar explicações mais lineares, que, sem perceber, focavam cada vez mais em procedimentos, em um enfadonho *faça assim*, talvez não fosse mesmo uma boa escolha. Centrando-me apenas nesta forma de explicação pouco estaria fazendo para que os alunos pudessem produzir conhecimentos relativos àquelas equações e expressões, que passavam despercebidas entre a repetição de procedimentos e do desenvolvimento de cálculos literais, muitas vezes associados biunivocamente à álgebra, e muito estaria fazendo pelo embrutecimento daqueles alunos. Pois não estaria instigando aqueles alunos a reconhecerem sua capacidade, estaria reforçando a ideia de que necessitam de alguém que lhes tome pela mão e indique o caminho a seguir.

Essa composição de inquietações me instigou, e ainda me instiga a buscar alternativas a explicações focadas na reprodução de procedimentos. Busca que não se mostra fácil, mas que se impõe a mim como necessária. Deste modo, o objetivo da pesquisa centra-se em pensar o ensino introdutório das equações de primeiro grau em consonância com o conceito de emancipação intelectual, questionando palavras que expressam um *faça assim*, produzindo assim uma conversa entre formas de explicação. Objetivo que se constitui como manifestação de um desejo maior: Provocar alguma ressonância entre o ensino da matemática escolar e o conceito de emancipação intelectual (RANCIÈRE, 2015), conceito a ser explorado ao longo da dissertação.

## Cena II – Fazendo o percurso

O encontro das vibrações de emancipação intelectual e da experiência, que se constituiu por meio do ensino introdutório das equações de primeiro grau, provocou os movimentos de percurso desta pesquisa. A explicação que visa a reprodução de procedimentos constitui uma forma, a qual chamamos de *faça assim*. Uma forma que se apresenta com frequência, utilizando-se essencialmente de exemplos. Mas o incômodo não está na utilização de exemplos, ou seja, no ato de explicitar um procedimento. O incômodo está na intenção. No *faça assim*, o exemplo não surge com a intenção de ser passagem, surge na intenção de ser fim, de encerrar o exercício do pensamento, pois a reprodução do exemplo constitui a intenção das palavras do explicador.

No *faça assim* as palavras vêm para dizer o que deve ser feito para resolver determinado tipo de exercício, o exemplo torna-se o cerne desta forma de explicação. Definição e exemplo não necessariamente se conectam, enquanto enunciados e procedimentos são forçadamente associados. Ou seja, basta que as palavras digam o que deve ser feito para que os alunos reproduzam. As palavras que solicitam reprodução induzem ao isolamento de conteúdos e ao automatismo. O que não significa dizer que nada mais deve ser repetido, ou mesmo reproduzido. A repetição permeia o aprendizado, mas o aprendizado não se constitui apenas por essa via. O *faça assim* se esforça em mostra "o" caminho a seguir, inibindo a percepção da multiplicidade de percursos que podem ser produzidos. Não buscamos oposição ou negação, buscamos alternância e coexistência entre formas de explicação...

E nessa busca talvez estejamos produzindo outra forma, mas não uma nova forma finalizada e bem definida, talvez uma forma que intenciona provocar o encontro de passagens pelos contornos daquela forma que incomoda quando se torna predominante, o *faça assim*. E para encontrar um percurso que permitisse a busca por alternativas foi preciso olhar muitas vezes pelo retrovisor, para rever as inquietações e lembranças, e assim encontrar novas inquietações e provocações, novos movimentos que induzissem a produção de um percurso. E nesse olhar para trás, em certo momento, passamos a perceber a presença da forma *faça assim* no livro didático, pois nele encontramos palavras que, de certo modo, se impõem ao discente e ao docente, explicando constantemente *o que fazer*, *como fazer*, *quando fazer e quanto fazer*. Palavras que tentam esconder passagens ...

Deste modo, o livro didático se mostrou um meio potente para nossa busca por alternativas, por passagens que nos permitam produzir formas distintas do *faça assim*. Uma busca que se constitui ao experimentarmos outro tipo de relação entre professor e livro didático, uma relação que possibilite ao professor tornar-se um questionador, pois entendemos que o questionamento pode abrir passagens, propulsar novos movimentos, outras formas de estar em sala de aula.

Lendo as palavras do livro didático para buscar respostas à pergunta central de nossa pesquisa: "O que está sendo explicado sobre equações de primeiro grau?", novas perguntas e inquietações foram surgindo, as quais conduziram a pesquisa à exploração de conceitos matemáticos e a reflexões em relação ao ensino introdutório dessas equações. Nesta pesquisa o questionamento, que de acordo com Kuhn (2018) constitui também uma forma de explicação, conduziu os movimentos da pesquisa por entre as palavras do *faça assim*. Deste modo, podemos dizer que produzimos uma análise de livro didático por meio da exploração de algumas formas de explicação, uma conversa entre essas formas.

Tínhamos inquietações quanto à explicação, mas era necessário encontrar um meio para explorar explicações sobre equações de primeiro grau. O livro didático demonstrou-se um meio potente para encontrarmos explicações e formas de explicação legitimadas no contexto escolar. Assim, produzimos um percurso nada linear entre as explicações escritas no livro didático. A pesquisa constitui-se na forma de uma análise de livro didático, a qual foi produzida por meio de questionamentos, confrontamentos e comparações. Ao longo da produção da análise, uma conversa acontecia entre a personagem-pesquisadora {Questionadora} e as palavras do livro didático {Explicadora}. A interação e a composição entre essas palavras constituíram o movimento de análise. A personagem-pesquisadora ao ler as palavras do livro didático e de seus referenciais teóricos buscava composições, mas esbarrava em questionamentos e começava a buscar respostas, e no meio da busca novas perguntas e inquietações surgiam. Cada questionamento abria passagens por entre as palavras do livro didático, e nessas passagens produzíamos outras palavras, buscando um aprofundamento teórico e reflexivo em relação ao ensino introdutório das equações de primeiro grau.

O texto da dissertação está dividido em cenas, atos e entreatos. Este ato é o primeiro, aqui contamos o que vimos pelo retrovisor e como fizemos o percurso. No segundo e terceiro atos exploramos os referenciais teóricos da pesquisa. No segundo ato, o conceito de emancipação intelectual, com Rancière (2012/2015), e, no terceiro, o conceito de atividade algébrica, com Lins (1992/1994) e Lins e Gimenez (1997). No quarto ato o livro didático entra em cena, momento em que dedicamos nossa atenção a ele, pois no quinto ato começa o diálogo entre Questionadora e Explicadora, as personagens que dão vida à conversa com o livro didático. Conversa que, na tentativa de evidenciar as brechas que existem no *faça assim*, constitui outra forma, mas uma forma de explicação que não deseja ser fim, que busca ser meio, que deseja desacomodar e provocar ao invés de ser percebida como forma ideal.

## ENTREATO I

*Olhar pelo retrovisor foi necessário para ir em frente...*

Pelo retrovisor enxergamos tudo ao contrário
Letras, lados, lestes
O relógio de pulso pula de uma mão para outra
E na verdade nada muda.

O menino que me pediu R$0,10
É um homem de idade no meu retrovisor
A menina debruçando favores toda suja
É mãe de filhos que não conhece
Vendeu-os por açúcar, prendas de quermesse.

A placa do carro da frente
Se inverte quando passo por ele
E nesse tráfego acelero o que posso
Acho que não ultrapasso
E quando o faço nem noto.

Outras flores e carros surgem em meu retrovisor
Retrovisor é passado, é de vez em quando do meu lado
Nunca é na frente
É o segundo mais tarde, próximo, seguinte
É o que passou e muitas vezes ninguém viu.

Retrovisor nos mostra o que ficou
O que partiu, o que agora só ficou no pensamento
Retrovisor é mesmice em dia de trânsito lento
Retrovisor mostra meus olhos com lembranças mal resolvidas
Mostra as ruas que escolhi
Calçadas e avenidas
Deixa explícito que se vou pra frente
Coisas ficam pra trás
A gente só nunca sabe que coisas são essas...

Retrovisor – O Teatro Mágico
https://youtu.be/asMu1eDsnGo

## SEGUNDO ATO: EMANCIPAÇÃO INTELECTUAL

### Cena I – Sobre a palavra explicação

Começamos este ato explorando uma palavra bastante presente em nosso texto: explicação. Iniciamos com uma breve exploração para situarmos o sentido que estamos atribuindo a essa palavra. Afinal, explicação possui forte vínculo com o ensino escolar e, em Rancière (2015), encontramos o termo associado a embrutecimento, condição que contrasta com emancipação intelectual. Enquanto emancipação intelectual consiste no reconhecimento da capacidade que cada inteligência possui para produzir, de modo autêntico, suas próprias aventuras intelectuais, embrutecimento consiste no esforço em manter inteligências subjugadas a percursos que inteligências supostamente superiores determinam e explicam.

No entanto explicações podem ser produzidas de modos distintos. De acordo com a intenção que nos move, vamos escolhendo palavras para compô-las e um modo para expressá-las. Por meio da problematização de Rancière percebemos que ao explicarmos algo a alguém, certas intenções se fazem presentes, as quais variam de acordo com a natureza da situação. Ao passarmos informações, tais como um endereço ou uma instrução de segurança, nossas explicações serão compostas e expressas de modo distinto daquelas que produzimos quando estamos explicando algo que sentimos a alguém. As palavras e o modo de utilizá-las estão entrelaçados às intenções daquele que as fala ou escreve.

No ensino escolar também somos movidos por nossas intenções. E nesta pesquisa, não estamos nos opondo à explicação de um modo geral, estamos buscando alternativas à explicação que se constitui quando as palavras são utilizadas na intenção de transmitir um saber que, frequentemente, limita-se à reprodução de procedimentos.

*No ato de palavra, o homem não transmite seu saber,*
*ele poetiza, traduz e convida os outros a fazer a mesma coisa.*
*Rancière, 2015, p.96*

A explicação enquanto transmissão, de tão entrelaçada com o ensino, por vezes parece ser inseparável e indistinguível da docência, parecendo não haver outra maneira de se usar as palavras. Na matemática da escola básica as palavras parecem ocupar-se em transmitir procedimentos. Deste modo, um professor de matemática cumpre seu papel quando o aluno consegue reproduzir o procedimento que foi explicado. E o papel de professor de matemática pode desdobrar-se em muitos, mas nossa intenção nos faz questionar: O que demonstra a reprodução de procedimentos? O que pode nos diz uma reprodução que muitas vezes silencia o aluno?

Podemos dizer que uma docência centrada na reprodução de procedimentos não demonstra potencialidade para evidenciar brechas à emancipação intelectual. Brechas que existem independentemente de nossas intenções e desejos: que escapam do nosso controle. No entanto, quando centramos o ensino da matemática escolar na reprodução de procedimentos, mesmo sem o perceber, contribuímos para que essas brechas passem despercebidas. E para justificar nossa preocupação com tais brechas, convém refletir sobre um possível efeito da forma de explicação que se vincula a reprodução de procedimentos. No *faça assim* a intenção das palavras consiste na transmissão, ou seja, estamos lidando com uma forma que condiz com o embrutecimento intelectual, com uma relação que torna a inteligência do aluno dependente da inteligência do professor. E, por esse motivo, buscamos alternativas que se mostrem potentes para que nossas palavras possam se manifestar de forma diferente, não se restringindo à intenção de transmitir saberes, reconhecendo e considerando a multiplicidade de percursos possíveis para o aprendizado, silenciando menos a inteligência daquele que busca aprender, permitindo e provocando sua expressão e seus questionamentos...

## Cena II – A aventura intelectual de Mestre Jacotot

*Seriam, pois, supérfluas as explicações do mestre?*
*Ou, se não o eram, para que e para quem teriam, então, utilidade?*
*Rancière, 2015, p.20*

Essas questões se fizeram presentes na aventura intelectual de Mestre Jacotot, personagem e autor da problematização reavivada por Rancière em *O Mestre Ignorante.* Jacotot fora capturado por tais questionamentos ao ter sido impossibilitado de expressar suas explicações. Momento em que se sentiu forçado a buscar uma saída e, desacreditando no potencial desta, foi surpreendido pelo inesperado. Essa aventura intelectual o levou a questionar o inquestionável e a desdobrar o conceito de emancipação intelectual.

Jacotot, após ter vivido na França entre o fim do século XVIII e início do XIX, período marcado pela Revolução Francesa, foi exilado nos Países Baixos devido à retomada da monarquia e ao seu envolvimento com a revolução. Nos Países Baixos recebeu liberação para ser professor por meio período. E assim surge a situação que forçou sua aventura intelectual, um encontro intensivo, um grão de areia que se introduziu na engrenagem (RANCIÈRE, 2015) que até então mantinha em funcionamento um professor consciencioso que acreditava na relação de causa-efeito entre explicar e aprender.

Nessa aventura os alunos de Jacotot desconheciam o idioma francês e Jacotot desconhecia a língua deles, o holandês. Não havia língua comum que viabilizasse a comunicação entre eles. Para ensinar francês a esses alunos Jacotot precisou encontrar outra maneira, já que suas explicações se mostravam impossibilitadas naquela situação. E, na busca por uma saída, a obra *As aventuras de Telêmaco* passou a acompanhá-lo.

Uma versão bilíngue dessa obra fora publicada naquela época. E com essa versão foi possível estabelecer entre ele e seus alunos "o laço mínimo de uma coisa comum" (RANCIÈRE, 2015, p.18). Por meio de um intérprete, aos alunos foi indicado que estudassem o texto escrito em francês dessa obra, amparados pela sua tradução em holandês. Uma orientação e um material que estabelecia um laço entre Jacotot e seus alunos foi o suficiente para que aquele fosse surpreendido.

Enquanto o mestre esperava por um desastre, o inesperado o surpreendeu: os alunos não apenas aprenderam o novo idioma como produziram escritas de um modo que não pudera imaginar. "(...) qual não foi sua surpresa quando descobriu que seus alunos, abandonados a si mesmos, se haviam saído tão bem dessa difícil situação quanto o fariam muitos franceses!" (p.18). Jacotot não explicou o passo a passo. Não passou lições progressivamente mais difíceis com o intuito de prepará-los para a tarefa de ler um texto escrito em idioma desconhecido e de escrever, naquele mesmo idioma, o que pensavam a respeito daquela leitura. O mestre não disse *façam assim* e depois *assim* e *assim...* Apenas indicou uma direção e disse: *façam.* O que se mostrou surpreendentemente suficiente naquela situação. As palavras não foram utilizadas como meio de transmissão do saber de Jacotot, foram utilizadas de outra forma, suas palavras não determinaram um caminho estreito e linear, apenas indicaram uma direção. E então, para que serviam suas explicações? Não pareciam mais tão necessárias.

## Cena III – O conceito de emancipação intelectual

A partir desta aventura, Jacotot passou a questionar a necessidade e os possíveis efeitos políticos da explicação. Esta passou então a ser percebida como uma maneira de confirmar e manter a divisão do mundo entre capazes e incapazes, "o mito da pedagogia, a parábola de um mundo dividido em espíritos sábios e espíritos ignorantes" (RANCIÈRE, 2015, p. 23). Uma lição de embrutecimento.

Quando uma inteligência torna-se submissa à outra, há embrutecimento. Na aventura de Jacotot, ele ensinou aquilo que ignorava. Tornara-se, por obra do acaso, um mestre ignorante. Um mestre que não pôde impor sua inteligência, tampouco transmitir seus conhecimentos por meio de suas explicações. A subordinação da inteligência de seus alunos à dele foi impedida ante essa impossibilidade. Um impedimento que, acompanhado de surpresa, provocou o desdobramento do conceito de emancipação intelectual. Conceito que contrasta com embrutecimento, consequência e condição da ordem explicadora.

As explicações nos cativam. Convencem-nos de que precisamos delas. E embrutecidos pedimos por explicações e explicamos. E assim segue esse ciclo de submissões de inteligências que parece interminável... Explicar algo indica a existência de um saber ideal e uma distância entre a ignorância de um e o saber de outro, a qual deve ser eliminada. E visando o fim dessa distância explicamos e recebemos explicações. No entanto, segundo Rancière (2012, p.15), "a distância que o ignorante precisa transpor não é o abismo entre sua ignorância e o saber do mestre. É simplesmente o caminho que vai daquilo que ele já sabe àquilo que ele ainda ignora (...)".

Considerar que o ato de aprender acontece no encurtamento da distância entre um e outro, entre professor e aluno, constitui uma desigualdade que hierarquiza as inteligências, valorando a inteligência do explicador como superior. Explicamos porque consideramos essa distância e queremos reduzi-la, porque objetivamos tornar algo específico reconhecível. Explicamos conceitos matemáticos e algoritmos, pois queremos que nossos alunos os aprendam. No entanto, a potencialidade da explicação, enquanto transmissão, parece residir em outro objetivo, que geralmente passa despercebido aos nossos sentidos. Há um papel político que se engendra na lógica explicadora. Uma lógica que legitima a existência de uma hierarquia de inteligência e condiciona o aprendizado daquelas ditas inferiores às palavras de suas superiores, o ato de aprender torna-se dependente das palavras de um explicador.

> O procedimento próprio do explicador consiste nesse duplo gesto inaugural: por um lado, ele decreta o começo absoluto — somente agora tem início o ato de aprender; por outro lado, ele cobre todas as coisas a serem aprendidas desse véu de ignorância que ele próprio se encarrega de retirar. (RANCIÈRE, 2015, p. 24)

Mesmo aquilo que, por ventura, a inteligência ousa aprender sem uma explicação torna-se encoberto, pois apenas o explicador teria a suposta capacidade de validar aquela aprendizagem. Convencem-nos de que aquilo que aprendemos observando, comparando, repetindo, associando e investigando, por meio de um exercício que se assemelha com aquele que a criança faz quando aprende a língua materna, não tem muito valor. Perde-se muito tempo e ainda corre-se o risco de não percorrer os caminhos ditos ideais.

O explicador, constituindo-se como inteligência superior, é quem teria condições de saber a ordem e a maneira adequadas para proceder à retirada daquele véu. A inteligência de um explicador estaria sempre à frente. Condição que lhe confere uma capacidade para mostrar o que o aluno deve ver. A inteligência submetida a do explicador deve apenas seguir o caminho produzido por suas explicações, sem se perder. O caminho do embrutecimento é sustentado pela falsa sensação de aproximação dessas inteligências ditas distantes.

A igualdade de inteligências pela lógica explicadora torna-se algo por vir, algo que depende de méritos, métodos e explicações. Um por vir que se afasta à medida que surge a necessidade de outras explicações. "A exata distância é a distância que nenhuma régua mede, a distância que se comprova tão somente pelo jogo das posições ocupadas, que se exerce pela prática interminável do 'passo à frente' que separa o mestre daquele que ele deve ensinar a alcançá-lo" (RANCIÈRE, 2012, p.14). Postergando a igualdade, hierarquizando as manifestações de inteligência, mantendo a desigualdade. Fazendo da desigualdade uma comprovação interminável. Enquanto o embrutecimento se alimenta da suposta desigualdade de inteligências, a emancipação intelectual reverte o caminho: pressupõe a igualdade de inteligências.

Porém essa pressuposição não consiste em uma simples ação discursiva que anula singularidades. Conforme menciona Rancière, em uma entrevista concedida a

Giuliano e Cantarelli (2016), pressupor a igualdade de inteligências não significa declarar que todos os estudantes são iguais e que possuem as mesmas oportunidades, independentemente de gênero, etnia, etc. Rancière não nos convida a ignorar a desigualdade de condições sociais que existe em nosso país, não podemos fazer um uso equivocado da expressão *igualdade de inteligências*, imaginando que pressupô-la constitua um meio para eximir-se da busca pela equidade dessas condições. A igualdade de inteligências consiste em

> um axioma que concebemos e que nos esforçamos em verificar. Não diz: todos os estudantes são iguais sejam brancos ou negros, homens ou mulheres, etc. Apenas demanda àqueles que se dirigem a esses estudantes que o façam de acordo com a pressuposição de que possuem a mesma inteligência que eles. (p. 616, tradução minha).

Trata-se de um axioma que inverte a lógica do explicador: Não há mais uma distância interminável em direção à igualdade, há diferentes manifestações.

> A mesma inteligência faz os nomes e os signos matemáticos. A mesma inteligência faz os signos e os raciocínios. Não há dois tipos de espíritos. Há desigualdades nas manifestações da inteligência, segundo a energia mais ou menos grande que a vontade comunica à inteligência para descobrir e combinar relações novas, mas não há hierarquia de *capacidade intelectual*. É a tomada de consciência dessa igualdade de *natureza* que se chama emancipação, e que abre o caminho para toda a aventura no país do saber. (RANCIÈRE, 2015, p.49)

Por meio desta tomada de consciência podemos ver as inteligências e suas manifestações em um mesmo plano. Percebemos que o modo como buscamos participar do processo de aprendizagem de nossos alunos poderá reafirmar lições de embrutecimento e manter a hierarquia ou produzir potencialidades que incitem a aventura no país do saber, valorizando suas distintas manifestações. A inteligência se manifesta de acordo com as necessidades de cada um. "Ali onde a necessidade cessa, a inteligência repousa, a menos que uma vontade mais forte se faça ouvir e diga: continua" (RANCIÈRE, 2015, p.79). A vontade que se faz ouvir pode ser a de um professor que inclui em suas atuações o papel de um mestre emancipador. Aquele que deseja "forçar uma capacidade que se ignora ou se denega a se reconhecer e a desenvolver todas as consequências desse reconhecimento" (p.11).

Emancipação intelectual constitui uma aventura sem roteiro. Não há um *faça assim* que determine o que devemos fazer para sermos provocadores dessa aventura. Afinal, qualquer palavra, dita ou escrita, pode ser meio para emancipação. Não conseguimos controlar os efeitos de nossas palavras, mas conseguimos identificar nossas intenções. E por meio delas passamos a experimentar movimentos, escolher palavras e formas que potencializem nossas intenções. Nosso desejo parece contraditório ao que propõe o sistema escolar, e isso nos exige movimentos cautelosos, que passam por vibrações distintas, e talvez seja reproduzindo e questionando que conseguiremos encontrar esse caminho provocador. No entanto, haveria uma condição ou, talvez, uma provocação para que se comece a aventura?

Rancière (2015, p.57) menciona que

> Para emancipar a outrem, é preciso que se tenha emancipado a si próprio. É preciso conhecer-se a si mesmo como viajante do espírito, semelhante a todos os outros viajantes, como sujeito intelectual que participa da potência comum dos seres intelectuais.

Para pensarmos a potencialidade desse conceito na educação matemática, consideramos necessário começar buscando essa potência na preparação do professor. Estamos cercados pela lógica explicadora, por aquela explicação em que as palavras são consideradas meio de transmissão de saberes, a qual se manifesta, entre outras formas, por meio do *faça assim* que tanto recebemos, buscamos e repassamos. Quebrar essa resistência não parece tarefa fácil. E justamente por percebermos que a estrutura escolar é cercada e impregnada pelo embrutecedor *faça assim*, nos parece um esforço necessário provocar alguma ressonância no conceito de emancipação intelectual, buscar nossa própria emancipação e senti-la reverberar em nossa prática; uma busca que inclui refletir sobre o que estamos sendo e sobre o que fazemos na ordem social. (RANCIÈRE, 2015)

## Cena IV – A forma de explicação *faça assim*

Pensar o conceito de emancipação intelectual no ensino escolar nos faz refletir sobre as formas que uma explicação pode assumir. Para isso consideramos as formas de explicação que Camargo (2011) e Kuhn (2018), constituíram por meio do encontro de uma empiria com as palavras de Rancière (2015). Em Camargo (2011), objetivos de uma explicação em uma aula de matemática são explorados. E neste contexto, em geral, a explicação tem por objetivo responder a duas perguntas: "O que é determinado conteúdo?" e "Como utilizar este conteúdo para resolver exercícios?".

E para responder a essas duas perguntas a explicação se desdobra entre definições e exemplos, desempenhado papel de informativa, necessária e/ou facilitadora. Informativa, quando, por meio da linguagem, esforça-se para informar algo a alguém; necessária, quando considerada como única via para se aprender ou para se ensinar algo; e facilitadora quando associa o aprender à aplicação de técnicas prontas, dadas como se fosse uma receita, e que deste modo reduz o trabalho do aluno. (CAMARGO, 2011).

Uma explicação que informa tudo que considera necessário, reduzindo o trabalho do aluno, tende a delimitar um percurso para um suposto aprendizado. Um percurso curto, cheio de convites à acomodação, pois se constitui com palavras que não provocam a exploração de outras possibilidades. Por meio dos desdobramentos de Camargo (2011), percebemos que muitas vezes as palavras de uma explicação vêm nos dizer: *faça assim*. Uma forma de explicação facilitadora, que, apesar do nome, em nada facilita um cenário potente ao ensino da matemática. Pois se trata de uma explicação que nos acomoda, e consequentemente, vai constituindo-se como necessária.

Nesta pesquisa buscamos alternativas ao *faça assim* por meio de questionamentos, que, segundo Kuhn (2018), também constituem uma forma de explicação. Uma forma que se constitui, empiricamente, por entre as formas definidas por Camargo (2011). Uma forma de explicação que busca desacomodar.

> E foi durante o encontro do improvável com o imprevisto que se manifestou a explicação-questionadora. Não uma explicação que afirma, informa, exemplifica, define ou facilita. Uma explicação que *provoca*, *instiga* e *sugere* a ação de procurar por respostas no próprio processo de aprendizado. Um exercício do pensar que não explica, não legitima, não consolida, mas que desconstrói-se como verdade, polemiza e interroga (Kohan, 2003). Uma explicação que foge do esperado que, depois que surge, liberta-se e nada se espera em troca (...) (KUHN, 2018, p.37)

Provocar, instigar e sugerir ações constituem as intenções dessa forma de explicação, em outras palavras, na explicação questionadora a pergunta está dissociada de respostas predeterminadas. A intenção das interrogações consiste em provocar movimentos. Por este motivo, um cuidado se faz necessário, não basta finalizar uma frase com um ponto de interrogação para que existam questionamentos. Para haver um questionamento o ponto de interrogação não deve estar associado a uma resposta predeterminada.

O *faça assim*, pode disfarçar-se entre interrogações. As palavras que determinam o que deve ser feito podem vir em tom interrogativo, conforme ocorre no diálogo Mênon, de Platão (2001), entre Sócrates e um escravo de Mênon; uma forma aperfeiçoada de embrutecimento, de acordo com Rancière (2015).

> Por suas interrogações, Sócrates leva o escravo de Mênon a reconhecer as verdades matemáticas que nele estão. Há aí, talvez, um caminho para o saber, mas ele não é em nada o da emancipação. Ao contrário. Sócrates deve tomar o escravo pelas mãos para que esse possa reencontrar o que está nele próprio. A demonstração de seu saber é, ao mesmo tempo, a de sua impotência: jamais ele caminhará sozinho e, aliás, ninguém lhe *pede* que caminhe, senão para ilustrar a lição do mestre. (p. 52)

No referido diálogo, Sócrates propõe "um problema técnico específico da arte matemática" (KOHAN, 2011, p.100), um exercício que envolve a obtenção de um novo quadrado, cuja área da superfície mede o dobro da área da superfície de um quadrado inicial.

> SO. Dize-me aí, menino: reconheces que uma superfície quadrada é desse tipo?
>
> ESC. Reconheço.
>
> SO. A superfície quadrada então é <uma superfície> que tem iguais todas estas linhas, que são quatro?
>
> ESC. Perfeitamente.
>
> SO. E também não é <uma superfície> que tem iguais estas <linhas> aqui, que atravessam pelo meio?
>
> ESC. Sim
>
> SO. E não é verdade que pode haver uma superfície desse tipo tanto maior quanto menor?
>
> ESC. Perfeitamente.

> SO. Se então este lado for de dois pés e este de dois, de quantos pés será o todo? Examina da seguinte maneira. Se <por este lado> fosse de dois e por este de um só pé, a superfície não seria de uma vez dois pés?
>
> ESC. Sim.
>
> SO. Mas, uma vez que por este também é de dois pés <a superfície> não vem a ser de duas vezes dois?
>
> ESC. Vem a ser.
>
> SO. Logo, ela vem a ser de duas vezes dois pés.
>
> ESC. Sim.
>
> (PLATÃO, 2001, p.55)

O padrão presente neste pequeno trecho se estende até o término do diálogo. E, perceptivelmente, ao longo deste, as respostas já estão dadas nas próprias perguntas. Ao escravo restava concordar. Assim, o conhecimento de que o escravo de Mênon estava supostamente a lembrar-se coincidia com aquele que estava sendo *transmitido* pelas falas de Sócrates. Coincidência que não parece obra do acaso. Sócrates partia do pressuposto que conhecimento fosse algo sagrado, já sabido pela alma. E, portanto, suas perguntas apenas ajudavam o outro a acessar os seus supostos próprios conhecimentos. Afinal, em Sócrates "a alma é imortal, e investigar e aprender são totalmente uma reminiscência" (KOHAN, 2011, p.99). Uma reminiscência comum a todos, conhecida por Sócrates[1].

As palavras de Sócrates silenciavam o escravo, nada lhe perguntavam, não provocavam a expressão do que ele via, pensava ou imaginava poder fazer. O diálogo Mênon (PLATÃO, 2001) se fez presente nesta escrita, pois não apenas remete à boa parte dos diálogos produzidos entre professor e aluno, como também ao diálogo que parece predominar entre livro didático e professor e entre livro didático e aluno: perguntas acompanhadas de respostas, exemplos explicitando procedimentos de resolução, respostas que antecedem perguntas, exercícios para aplicar procedimentos já explicitados, perguntas que só aceitam sim como resposta, etc, condicionando a busca por respostas ao retorno à página ou ao parágrafo anterior e inibindo o surgimento de outros percursos.

Quando usamos as palavras desta maneira, é provável que algumas informações fiquem guardadas na memória daquele que nos ouve. Memorizar e obter informações

[1] Segundo Kohan (2011, p.9), "Há muitos Sócrates. Infinitos. E não só porque há testemunhos diferentes. O Sócrates de Platão é bastante contraditório: em algumas passagens, ele nega o que afirma em outras e faz o que, em outros lugares, critica os demais.". O Sócrates ao qual nos referimos é o Sócrates de Rancière, conforme Kohan (2011) menciona.

constituem ações que compõem nossas aventuras intelectuais, no entanto não as consideramos condições suficientes para um aprendizado. No ensino da matemática escolar torna-se necessário que o aluno tenha contato com informações próprias da matemática. Definições, propriedades e algoritmos, por exemplo, serão enunciados em uma aula, não nos opomos a isto enquanto buscamos alternativas e pensamos o ensino introdutório das equações de primeiro grau em consonância com emancipação intelectual. Porém não consideramos tais informações como fins, mas meios. Viabilizar o contato com tais informações não condiciona professor enquanto transmissor e aluno enquanto receptor dessas informações e saberes.

Refletir sobre as intenções que nos movem ao produzirmos uma explicação nos fez perceber que não queremos palavras que silenciem o aluno. No entanto é importante considerar que assim como o excesso de palavras, a ausência delas também pode silenciar. Encontrar uma alternativa que permita-nos estar entre esses dois extremos torna-se necessário. E isso não nos leva a reproduzir a aventura de Jacotot, sua aventura serve para nos inspirar nessa busca.

Rancière (2015) traz uma problematização e um princípio, não um método. Considerar a leitura de seu livro como um texto do tipo *faça assim* não nos possibilita movimentos, seria um contrassenso, uma contradição. O texto de *O mestre ignorante* constitui um espaço potente para encontros, uma força que faz da história de Jacotot um grão de areia capaz de se infiltrar nas engrenagens do docente que estamos sendo. Provocando-nos a pensar o que até então parecia impensável, a questionar o que até então parecia inquestionável. Uma problematização, que, segundo Kohan (2003), "permite-nos pensar, ser e ensinar de outro modo" (p. 225).

No *faça assim* as palavras são utilizadas para exemplificar o que deve ser feito, sem demonstrar interesse na exploração e na expressão daquilo que se vê ou pensa. As respostas insistem em estar à frente, uma antecipação que inibe sua busca. A intenção, nesta forma de explicação, no contexto da matemática escolar, consiste em *transmitir* um saber que sirva para resolver certos tipos de exercícios, aplicando fórmulas e desenvolvendo os cálculos que se fizerem necessários. Questionamentos, poesia e problematizações são evitados. Nada parece nos convidar a comparar, associar, questionar, traduzir e poetizar as palavras que lemos ou escutamos. As palavras nesta forma de explicação parecem convidar a reproduzir aquilo que uma inteligência dita superior se dispôs a explicar, adequadamente.

E no livro didático encontramos essa forma de explicação, as palavras nele escritas nos dizem constantemente qual percurso seguir, como fazer, como resolver, como pensar... E de tanto recebermos e aceitarmos percursos prontos, torna-se possível que uma crença seja afirmada, aquela que faz com que sintamos necessidade de alguém que nos tome pela mão e nos mostre "o" caminho a seguir. Uma lição de embrutecimento que se faz presente constantemente na vida do professor da escola básica.

Sem sugerir que um professor ignore os conhecimentos de sua área ou que se abandonem as explicações e os livros didáticos, passamos a considerar a importância de questionar o *faça assim* que reverbera na prática docente. E, ao invés de propor o abandono dessa forma de explicação, queremos, entre suas palavras, encontrar passagens para aventuras. Questionar o *faça assim* foi o modo que encontramos para produzir nossa busca por alternativas a essa forma de explicação. Experimentando outra relação entre professor e explicações escritas no livro didático, uma relação em que o professor não apenas receba aquelas explicações, mas em que ele reconheça sua capacidade de questioná-las, ousando descobrir aquilo que o *faça assim* não consegue nos mostrar.

## ENTREATO II

*Duas vibrações se encontram.*

Basta o encontro de duas vibrações semelhantes,
ainda que ricas em diferenças, para haver ressonância.
Uma na outra nota, um no outro som.
Dois timbres se acrescentando entre si.
Um cruzamento de interesses. Um se prolongando no outro.
Se será um bom ou mau encontro, nunca se sabe.

(...)

Na raiz da ressonância está o conflito, o choque, o encontrão.
É o único jeito de descobrir que atravessar o outro pode ser atravessar a si.
Bater de frente pode ser o melhor caminho para sair do lugar.
Deixar o pensamento, o som, a onda seguir seu curso
é ainda a melhor maneira de descobrir seus prolongamentos.

Filosofia em tom maior: Ressonância
Rafael Lauro – A razão inadequada (2015)

## Terceiro Ato: Equações de primeiro grau

### Cena I – O que vemos?

Para pensar o ensino introdutório das equações de primeiro grau em consonância com emancipação intelectual, nos perguntamos: O que vemos quando olhamos para o ensino introdutório das equações de primeiro grau? O que pensamos sobre o que vemos? O que podemos fazer por meio do ensino dessas equações?

Perguntas que se inspiram na tríplice questão de Jacotot: "O aluno deve ver tudo por ele mesmo, comparar incessantemente e sempre responder a tríplice questão: O que vês? O que pensas disso? O que fazes com isso? E, assim até o infinito." (RANCIÈRE, 2012, p.44). E nesta pesquisa nos permitimos trocar o sujeito dessa oração. Não apenas o aluno necessita ver tudo por ele mesmo, o professor também necessita.

Nesta cena começamos nossa busca por respostas para essas questões, contando um pouco do que vemos... Quando olhamos para o ensino dessas equações, vemos o predomínio do treinamento de procedimentos para encontrar o valor de $x$. Percepção essa, que se mostrou predominante ao considerarmos situações vivenciadas em sala de aula e ao observarmos o modo como boa parte dos livros didáticos costuma abordar o conteúdo, considerações que se intensificaram com o estudo de outras pesquisas, tais como as de Viola dos Santos (2007), Cyrino e Oliveira (2011) e Aguiar (2014).

No ensino introdutório das equações de primeiro grau as palavras podem compor explicações de modo alternativo ao *faça assim*, que estimula o desenvolvimento de atividades mecânicas e automáticas, pouco ou nada reflexivas. No ensino fundamental, frequentemente as atividades propostas têm foco na resolução de equações e as explicações manifestam-se para dizer o que fazer para resolvê-las. O que parece nos distanciar daquilo que a álgebra tem a nos oferecer, a produção de conhecimentos relativos a números e operações aritméticas de modo genérico, conhecimento que não se contenta com afirmações específicas de casos particularidades e se abre à lógica das operações e a propriedades dos números. Explicar apenas procedimentos de resolução, ignorando a possibilidade de produção desses conhecimentos que a álgebra nos oferece, constitui uma lição de embrutecimento, pois pouco importa o que se vê ou o que se pensa. Importa seguir um *faça assim*, resolver uma equação e passar para a próxima, sem questionar, refletir, associar e comparar.

Uma equação constitui-se como uma composição de outros conceitos, tais como igualdade, variável, expressão algébrica, generalização... Há um longo caminho a ser percorrido, o qual resulta da composição desses conceitos, ou seja, não basta reproduzir procedimentos isoladamente. Um percurso que poderia ser provocado desde os anos iniciais do ensino fundamental, mas também pode ser instigado em outros momentos da vida escolar. O ensino das equações pode constituir um motivo para explorarmos esses conceitos.

O cenário inicial, centrado em procedimentos, nos pareceu pouco potente em relação ao desejo maior que move esta pesquisa: provocar alguma ressonância com o conceito de emancipação intelectual. Com essa percepção inicial, que não nos satisfez, partimos em busca de outro modo de ver o ensino introdutório dessas equações. E nessa busca, a perspectiva de Lins (1992/1994) e Lins e Gimenez (1997) tem se mostrado potente na lida com nossas inquietações. A potência dessa perspectiva reside em suas provocações e reflexões, que desacomodam aquilo que possivelmente já está legitimado e internalizado no ensino da aritmética e da álgebra escolar, nos forçando a pensa-lo de outro modo. Não basta encontrar o valor de $x$, é preciso considerar os significados sendo produzidos para uma equação e suas transformações. Não basta utilizar artifícios aparentemente facilitadores e sequências que consistem em algoritmo e exercício de aplicação. Torna-se necessário refletir sobre o que fazemos em sala de aula, e ao refletirmos, percebemos oportuno considerar atividade algébrica enquanto possibilidade para o ensino introdutório das equações de primeiro grau.

Por meio da composição dos conceitos de emancipação intelectual e de atividade algébrica, percebemos que as explicações tendem a ser produzidas de acordo com o tipo de atividade que pretendemos propor. A forma de explicação *faça assim* parece satisfatória quando propomos atividades mecânicas, nas quais a reprodução de procedimentos torna-se suficiente. Deste modo, nos parece importante refletir sobre o tipo de atividade que vem sendo proposto no ensino fundamental, para viabilizar e provocar a produção de alternativas, bem como outros modos de ver, pensar e fazer o ensino das equações.

Consideramos que o tipo de atividade potente para o ensino introdutório das equações de primeiro grau seja a algébrica, e não a mecânica. O ensino introdutório das equações de primeiro grau não precisa restringir-se à reprodução de algoritmos e procedimentos, resolver uma equação pode torna-se uma atividade a ser realizada, que envolva produção de conhecimento em relação a números e operações. Assim, o conceito de atividade algébrica torna-se central nesta pesquisa, pois harmoniza o encontro de duas vibrações que se chocaram: Emancipação intelectual e ensino introdutório de equações de primeiro grau. Foi preciso encontrar outro cenário para o ensino introdutório das equações de primeiro grau.

## Cena II – Atividade Algébrica

Na perspectiva de Lins (1992, 1994) e Lins e Gimenez (1997) encontramos uma caracterização para atividade algébrica que não depende exclusivamente da presença de determinados conteúdos ou do uso de uma linguagem formal. Para esses autores, "a atividade algébrica consiste no processo de produção de significado para a álgebra" (LINS e GIMENEZ, 1997, p.137). Uma abordagem que coloca técnicas e procedimentos de resolução em segundo plano, promovendo espaço para que números e operações fiquem em evidência. Ao invés de encontrar o valor de $x$, torna-se central a produção de conhecimentos relativos ao "conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade ou desigualdade." [2] (p.137).

A caracterização de atividade algébrica nessa perspectiva envolve a produção de significados e uma noção não essencialista de conhecimento; conhecimento não é percebido como algo que já está dado e que possa ser transmitido, mas sim como algo em vias de produção, que constitui a própria realidade, ao invés de descrevê-la. De acordo com Lins (1994), conhecimento constitui-se pelo par formado por uma crença-afirmação e uma justificação, e significado constitui a relação estabelecida entre ambas no momento da enunciação. Por exemplo, "$2 + 2 = 4$" constitui uma crença-afirmação que, ao ser enunciada junto de uma justificação, constitui um conhecimento. Um conhecimento que não é igual para todos, pois varia de acordo com a justificação e com o significado produzido. "Uma criança de 5 anos acredita – e diz – que '$2 + 2 = 4$', o mesmo que um matemático acredita – e diz. Mas as justificações de cada um são provavelmente distintas: a criança exibe os dedos, o matemático fala de conjuntos." (LINS, 1994, p.29).

Uma mesma crença-afirmação pode compor conhecimentos distintos. No exemplo mencionado dois conhecimentos diferentes foram produzidos a partir de uma mesma afirmação. E isso ocorre porque as justificações foram elaboradas considerando objetos diferentes; o objeto do matemático constitui um núcleo distinto daquele constituído pelo objeto considerado pela criança. O matemático produz significado e justificação a partir de conjuntos e a criança a partir do campo semântico possível para

[2] Concepção de álgebra, segundo Lins e Gimenez (1997).

seu próprio corpo, contando seus dedos. Núcleos distintos, a partir dos quais se produzem conhecimentos diferentes.

> Justificações estabelecem um vínculo entre crenças-afirmações e núcleos, que são um conjunto de objetos já estabelecidos e em relação aos quais significado está sendo produzido. Um núcleo pode ser constituído por um diagrama, por um desenho, por uma balança, por um conjunto de princípios (axiomas, por exemplo), por uma situação "realista" ou ficcional. (LINS e GIMENEZ, 1997, p.144).

Em outras palavras, podemos dizer que um núcleo constitui-se por um ou mais objetos e que a partir do campo semântico relativo a esse(s) objeto(s) torna-se possível produzir significados para certas afirmações. A justificação, expressa em consonância com o campo semântico possível em certo núcleo, nos vincula ao mesmo, viabilizando comparações e associações entre o(s) objeto(s) desse núcleo e a crença-afirmação.

Assim, cada núcleo terá suas particularidades, que variam de acordo com o campo semântico possível para os objetos que o compõem. Diferenças que às vezes inviabilizam a produção de significados para afirmações relativas à álgebra. Essa percepção nos sensibiliza a considerar a existência de diferentes justificações para uma mesma afirmação e nos torna cuidadosos e atentos aos objetos e palavras que compõem nossas explicações, pois enquanto algumas dessas composições viabilizam a produção de significados em relação a números e operações, outras a inviabilizam. Um cuidado que se torna evidente em um dos exemplos exemplares de Lins e Gimenez (1997): Para a equação $3x + 10 = 100$ é possível produzir significado a partir do campo semântico constituído pela balança de dois pratos, no entanto, para a equação $3x + 100 = 10$ não conseguimos produzir significados em relação a este mesmo núcleo.

Escrevendo equações equivalentes à primeira, de modo a determinar o valor da incógnita, justificamos cada nova afirmação a partir do campo semântico possível para uma balança de dois pratos, pensando em equilíbrio, retiradas, distribuições... Podemos dizer que $3x + 10 = 100$ é equivalente a $3x = 90$, pois podemos retirar "10" de cada um dos pratos da balança mantendo o equilíbrio. E assim, comparando as transformações da equação com objetos em uma balança em equilíbrio, podemos concluir que $x = 30$. No entanto, para a equação $3x + 100 = 10$ não é possível produzir significado a partir do mesmo núcleo. Como retirar "100" de "10" em uma balança de dois pratos? Neste núcleo conseguimos produzir significado para operações em $\mathbb{N}$, no entanto o objeto não suporta a abstração das operações com números negativos, inviabilizando a produção de significados para operações em $\mathbb{Z}$.

Não podemos permanecer no núcleo da balança, torna-se necessário encontrar um núcleo que viabilize produção de significados para afirmações relativas a equações e suas transformações de modo genérico. E com isso Lins e Gimenez (1997) não afirmam que o núcleo da balança é insuficiente, ou que não devemos explorar tal objeto no ensino dessas equações, mas afirmam a existência de diferenças entre núcleos e enfatizam que essas devem ser consideradas. Caso contrário, se tentarmos vincular afirmações a núcleos, cujo campo semântico e objeto inviabilizem a produção de significados, considerando que *tudo é a mesma coisa*, possivelmente estaremos utilizando tais objetos como um recurso que chamaremos de embrutecedor.

A balança de dois pratos muitas vezes surge como recurso embrutecedor, pois a partir do campo semântico referente a este objeto produzem-se justificações possíveis para algumas equações e, posteriormente, essas justificações são estendidas para afirmações que nada significam naquele núcleo. Como acontece para equações como $3x + 100 = 10$. Tenta-se vincular uma afirmação a um núcleo em que a produção de significados torna-se inviável. Explicações que não convencem, mas ainda assim, são impostas, embrutecimento em forma bruta. Diferentemente de Sócrates que produz uma forma refinada de embrutecimento ao apresentar uma argumentação convincente e coerente.

Considerar o que é possível afirmar em cada núcleo nos ajuda a praticar certa empatia em relação ao aluno. Mencionar a afirmação "$3x + 100 = 10$ é equivalente a $3x = -90$", acompanhada da justificação "pois posso retirar '100' de cada um dos pratos de uma balança mantendo-a em equilíbrio", para nós, professores, talvez não pareça tão monstruoso, pois possivelmente alternamos de um objeto a outro sem esforço, passamos da balança à equação de modo automático e, de acordo com a situação, consideramos uma ou outra. Mas para um aluno de ensino fundamental essa alternância não é evidente, possivelmente ele procure ver na equação aquilo que consegue ver na balança de dois pratos. Afinal a equação está associada a esse objeto.

O aluno que diz não ser possível resolver a equação $3x + 100 = 10$, por estar buscando justificações no campo semântico da balança de dois pratos, está exercitando sua liberdade. Ao associar o que é possível para esse núcleo com as afirmações relativas a essa equação e suas transformações, o aluno depara-se com um vazio; as palavras que antes viabilizavam produção de significados, já não servem mais. Mas quando ignoramos esse detalhe e dizemos que, independentemente do núcleo, *é tudo a mesma coisa*, anulamos a referência do aluno, demonstramos que seu exercício não possui valor. Vale a palavra do mestre explicador, que se sobrepõe ao exercício de liberdade, que interrompe a busca por respostas para a tríplice questão ao decretar que não importa o que se vê, pensa e tenta fazer. Ao aluno é dito aquilo que deve ver quando olha para aquele objeto e o que deve ser feito para resolver os exercícios propostos. O que reforça a superioridade das palavras do explicador e a resignação daquele que as ouve ou lê.

Considerar a atividade algébrica como possibilidade para o ensino das equações de primeiro grau viabiliza e potencializa nossa busca por alguma ressonância com o conceito de emancipação intelectual. Pois, por meio desta noção de atividade, conseguimos ver o ensino das equações de primeiro grau se abrindo à realização de uma atividade. A atividade algébrica, nesta perspectiva, não cabe em um *faça assim*, nos convida a perceber o ensino dessas equações como meio para a produção de conhecimento algébrico. Pois quando o professor enuncia uma afirmação e uma justificação ele não transmite um conhecimento, ele vincula essa afirmação a um núcleo, e o aluno, por meio dessas palavras e objetos, pode produzir e enunciar seus conhecimentos.

Desejar que o estudo das equações de primeiro grau constitua-se enquanto atividade algébrica, nos parece um caminho cheio de incertezas, pois não basta definir conteúdos, procedimentos, falas e materiais. Esses aspectos, não são desconsiderados, mas também não são determinantes. Consideramos conteúdos, palavras e objetos que nos remetam a uma potencial possibilidade para a atividade algébrica, no entanto essas variáveis não garantem a realização de atividade algébrica. Talvez seja no esforço que fazemos para constatar se a atividade constitui-se como algébrica ou não, que a atividade ganhe potencialidade. Constatar se estamos ou não diante de uma atividade algébrica não constitui um fim: "é preciso investigar os significados sendo produzidos no interior dessa atividade" (LINS e GIMENEZ, 1997, p.138). Investigar distancia-nos da intenção de transmitir. Ao investigar a produção de significados nos tornamos atentos às palavras que usamos. Se nossas palavras silenciarem, como investigaremos os significados? Se nossas palavras buscarem transmitir procedimentos e fizerem dos objetos recursos embrutecedores, estaremos viabilizando a produção de significados?

O campo semântico de um núcleo compõe uma linguagem própria. Quando falamos do núcleo da balança não estamos propriamente falando de equações, estamos falando de balanças de dois pratos, fazendo uma comparação que permite a produção de significados em relação a alguns casos particulares de equações. Quando falamos de equações falamos de um núcleo comum, composto por números, operações aritméticas, igualdade e desigualdade.

## Cena III – Sobre o núcleo comum

*Mas ele deve aprender a língua própria a cada uma das coisas que quer fazer: sapato, máquina ou poema*
*Rancière, 2015, p.100*

Lins e Gimenez (1997) mencionam que podemos produzir significados para equações em núcleos distintos, mas explicitam interesse em possibilitar a produção de significado para equações em relação a um núcleo comum: números, operações aritméticas e igualdade e desigualdade. (p.139). E associamos, nesta pesquisa, os objetos do núcleo comum à língua própria das equações.

Enunciar um conhecimento pressupõe um trabalho com as palavras que compõem o campo semântico das *coisas* das quais falamos. Equações, enquanto próprio objeto de estudo, remete ao núcleo que Lins e Gimenez (1997) chamam comum. E no ensino fundamental, as equações constituem um de nossos objetos de estudo. Aprender a língua própria desse objeto torna-se necessário.

Números Subtração
Incógnita Simétrico
Divisão Igualdade
Multiplicação Equivalência
Adição Inverso

Essas são algumas das palavras que constituem a língua do núcleo comum. Incluir essas palavras em nossas aulas potencializa a nossa fala em relação às equações. E não supomos que seja suficiente apenas incluí-las em nossas falas, supomos que tais palavras necessitem passar por um processo de tradução. Assim trataremos de viabilizar o contato com elas, provocando o aluno em suas aventuras intelectuais no núcleo comum.

Partimos do princípio de que o aluno é capaz de exercitar a liberdade de sua inteligência, de fazer e expressar suas comparações e associações, traduzindo as novas afirmações por meio desse movimento que passa entre o conhecido e o desconhecido, sem deixar de considerar as diferenças percebidas entre ambos. Um exercício que não sugere isolamento, tampouco legitimação daquilo que vemos em um primeiro momento; o aluno e nós, professores, somos desafiados a sempre mostrar o porquê daquilo que dizemos.

*Mostra-me o que te faz dizer o que dizes.*

*Rancière, 2015, p.44.*

E esse mostrar exige que nos expressemos de modo que o outro possa nos entender. Assim, ao falarmos de equações precisamos aprender e recorrer à língua própria desse objeto. O que não implica um engessamento na forma dessa expressão. No ensino fundamental, provavelmente não nos expressaremos ao modo formal de um matemático, mas se não permitirmos que nossa expressão seja atravessada pelo campo semântico possível para o núcleo comum, possivelmente estaremos falando mais de outros objetos do que propriamente de equações.

## Cena IV – Investigando uma atividade

Reconhecer a importância da composição palavras-objeto e distinguir a língua própria de cada objeto nos proporciona empatia em relação ao aluno. Possivelmente, nós, professores, já nos tenhamos acostumado a ver como se *tudo fosse a mesma coisa*, diferentemente do aluno, que recebe esse *tudo* com muita estranheza. Talvez pouquíssimas vezes tenhamos tido oportunidade de refletir sobre essas diferenças, pois frequentemente estamos atentos aos procedimentos de resolução.

Essa atenção, que influencia no modo como vemos o ensino das equações de primeiro grau, nos centra na transmissão de procedimentos de resolução. O procedimento insiste em estar à frente. A sequência da aula, e também do livro didático, costuma indicar, na explicação que antecede os exercícios, quais procedimentos devem ser desenvolvidos, inibindo outras explorações e a própria produção de significado. O que deve ser visto e feito já está imposto pelo procedimento preestabelecido. Não importa exercitar a liberdade da inteligência, ao contrário, importa fazer aquilo que foi indicado por meio das palavras e desenvolver os exercícios propostos, do modo solicitado. Assim, o desenvolvimento de exercícios constitui possibilidade para uma atividade mecânica.

Lins e Gimenez (1997) mencionam duas grandes caracterizações para atividade algébrica, sendo uma relacionada ao uso de certas notações e outra à presença de determinados conteúdos, e para confrontar as duas, nos provocam com o seguinte questionamento:

> Se, diante da 'conta', $\frac{5+5+5}{3}$ alguém diz, 'o resultado é 5', estamos ou não diante de atividade algébrica? Dos dois pontos de vista, a resposta deve ser "não": não há notação literal (talvez querendo dizer com isso que não há variáveis), e o conteúdo é tipicamente aritmético e não algébrico. Acrescentamos agora a seguinte informação: a pessoa pensou que são quatro (sic) cincos, e depois vai-se dividir por quatro (sic), de modo que uma coisa 'compensa' a outra, e o resultado é 5. (p.98).

Quando estamos presos a conteúdos e notações ignoramos certas afirmações e justificações sem sequer investigar o significado produzido. A presença de equações, cálculos literais e representações algébricas não determina, nem garante o desenvolvimento de uma atividade algébrica. No entanto, tais elementos constituem um recorte de conteúdos da álgebra, para os quais podemos, ao perceber potencialidade, nos dedicar a provocar a produção de significados. Dependendo do modo como lidamos com esses conteúdos, um mesmo exercício pode potencializar ou não a atividade algébrica, uma constatação que podemos fazer somente depois de sua realização e investigação. Antes somente haverá possibilidade e expectativa. E ainda assim, determinar se uma atividade é algébrica ou não consiste em um procedimento bastante peculiar, pois estará fortemente relacionado às percepções daquele que investiga a atividade e a classifica. Na perspectiva de Lins e Gimenez (1997) não encontramos uma lista de critérios para avaliar tais atividades, mas há uma condição que não podemos ignorar: a investigação dos significados sendo produzidos em relação a números e operações.

Nosso interesse nesta pesquisa não consiste em classificar atividades como algébricas ou não algébricas, mas pensar em meios para potencializar a expressão de afirmações e de suas justificações, considerando aquilo que o aluno vê, pensa e faz. E para isso torna-se necessário expandir nossa atenção. Ao investigar os significados produzidos possibilitamos a abertura de nossa sensibilidade ao imperceptível. E durante a pesquisa o acaso nos proporcionou a investigação do desenvolvimento de uma atividade proposta a uma turma de 8º ano.

"Um triângulo isósceles tem dois lados cuja medida é igual a $x$. A medida do terceiro lado é igual à medida de um desses dois lados mais *30* unidades. Sabendo que seu perímetro é igual a *150 cm*, determine medida dos lados desse triângulo" (GAY, 2014, p.57).

Ao conversar com uma aluna de 8º ano sobre essa atividade, foi possível investigar afirmações e justificações desenvolvidas em sua realização, momento no qual algumas das considerações que reverberam nesta pesquisa tornaram-se mais perceptíveis. E para escrevermos sobre essa investigação vamos associar um nome fictício a essa aluna. Passamos a chamá-la de Ana.

Ana, que à época estudava a unidade "monômios e polinômios", mostrou-me esse exercício e disse ter conseguido resolvê-lo, junto a alguns colegas. No entanto, não havia compreendido o modo como sua professora o desenvolvera durante a correção. Ao ler o exercício, pensei prontamente em expressar uma equação e desenvolver as transformações necessárias para determinar o valor da incógnita. Provavelmente algo parecido com o que a professora de Ana havia sugerido em sua correção. No entanto, antes de dizer aquilo que eu estava pensando, pedi que ela contasse como o havia desenvolvido.

Mostrando alguns cálculos feitos no papel, sua fala se desenvolveu de modo similar ao descrito a seguir:

"tiramos 30 de 150, pois 30 era o valor que tinha a mais"

$$150 - 30 = 120$$

"então dividimos por 3 para descobrir o lado do triângulo"

$$\frac{120}{3} = 40$$

Sem cálculos literais e sem expressar a situação através de uma equação, tornava-se possível encontrar as medidas dos lados daquele triângulo. Depois, Ana e eu complementamos que $x = 40$ ainda não era resposta para o exercício, ainda faltava concluir que os lados do triângulo mediam 40 cm, 40 cm e 70 cm.

Por outro lado, a resolução pensada por mim estava de acordo com o conteúdo indicado no título em que se encontrava o exercício: "Expressões algébricas; monômio; polinômio" e dos procedimentos vinculados a esses conteúdos, procedimentos que visam a obtenção de uma representação adequada ao conteúdo, neste caso, uma equação polinomial de grau 1. Precisava de uma equação, então prontamente pensei em montá-la: $x + x + (x + 30) = 150$. Por meio de equações equivalentes, obtive a seguinte sequência:

$$3x + 30 = 150$$

$$3x = 120$$

$$x = 40$$

Duas maneiras distintas de expressar a resolução, a segunda envolvendo equações e cálculo literal e a outra não. Embora ambas estejam corretas os elementos que se fizeram presentes na segunda não garantem atividade algébrica. Ao expressar a equação agi de modo automático, pois além de já estar acostumada com a linguagem das equações, também estava condicionada a encontrar a solução daquela maneira. Os significados que poderiam ser produzidos se tornaram perceptíveis apenas quando me interessei em descobrir como Ana havia desenvolvido sua resposta. E por meio das afirmações e justificações que surgiram na resposta dela pude perceber que significados foram produzidos em relação à igualdade estabelecida entre aqueles números e operações.

Não vamos classificar esta atividade como algébrica, pois as afirmações e justificações de Ana estavam vinculadas às particularidades daquela situação descrita no enunciado da atividade. No entanto, a expressão daquilo que foi visto, pensado e feito por ela e seus colegas indicou a produção de significados para aquele caso específico. Mencionamos a investigação desse exercício, porque às vezes estamos tão condicionados ao *faça assim*, que não percebemos e, até mesmo, tentamos evitar outros tipos de resolução. Embora, muitas vezes, as resoluções que escapam do *faça assim* demonstrem maior potencialidade para expressar aquilo que foi realizado e para produzir significados, sejam eles referentes a números e operações, de modo genérico, ou a casos particulares.

## Cena V – O que pensamos? O que queremos fazer?

Percebemos que frequentemente falamos de equações sem falar a língua própria desse objeto, descrevemos procedimentos, misturamos palavras de campos semânticos distintos e as utilizamos para indicar o que deve ser feito para resolver uma equação. Dificilmente nos preocupamos com o que o aluno está vendo, importa que ele esteja fazendo aquilo que lhe foi instruído. Mas pensamos que se torna possível ver de outra maneira: o estudo introdutório de equações pode tornar-se tanto um convite à reprodução de procedimentos e algoritmos, como um convite a forçar oportunidades para a atividade algébrica. Quando nos limitamos apenas à reprodução de algoritmos, possivelmente produzimos uma lição de embrutecimento. Quando pensamos atividade enquanto algo a ser realizado por aquele que dela participa, abrem-se possibilidades para aventuras intelectuais.

Cada conteúdo traz consigo procedimentos. E cada conteúdo, assim como seus procedimentos, parece ter um tempo determinado, um prazo de validade. Termina um, começa outro. A partir do momento em que é anunciado o estudo das equações de primeiro grau parece que temos obrigação de sempre expressá-las e de desenvolver a maior quantidade de cálculos literais possível. Poucas vezes nos interessamos em explorar outras resoluções que escapem daquilo que devemos fazer naquele momento, em ouvir nossos alunos. Pois aprendemos que perdemos tempo ao ousar exercitar nossa liberdade; raramente essas explorações são consideradas importantes. Trilhar o caminho indicado pelo procedimento constitui um caminho seguro para que a inteligência não se afaste daquilo que deve fazer.

A explicação na forma *faça assim* pode parecer suficiente quando vemos o ensino introdutório das equações desse modo, focado em procedimentos e isolado de outros conteúdos, sendo um convite a atividades mecânicas. O mesmo não acontece quando vemos o ensino das equações como possibilidade para a atividade algébrica, como potencialidade para provocar aventuras intelectuais. O que não significa dizer: *Não explique nada!*

Significa dizer que existem outras formas de explicação, podemos falar sobre equações de primeiro grau com o intuito de provocar ao invés de acomodar. Um sábio e um ignorante coexistem em cada um de nós. Somos sábios em relação à matemática, somos ignorantes em relação às aventuras de nossos alunos. E se quisermos provocar e compreender essas aventuras, necessitaremos perguntar como ignorantes e não como sábios. Nossas palavras devem provocar a expressão do aluno, instigando-o a investigar o porquê daquilo que está dizendo. Algo que em nada se parece com as perguntas de Sócrates ao escravo de Mênon. Mas que tem relação com a explicação-questionadora, caracterizada por Kuhn (2018).

E enquanto estamos buscando atender a expectativa de oportunizar a atividade algébrica, inevitavelmente deixamos de nos ocupar tanto com a explicação de procedimentos e passamos a buscar formas de explicação que favoreçam a produção de significados. Uma preparação se engendra nesta busca. Precisamos refletir e descobrir o que vemos, pensamos e podemos fazer em relação ao ensino das equações de primeiro grau. E para essa preparação, escolhemos um caminho: Questionar um mestre explicador com a intenção de encontrar passagens para aventuras intelectuais, para encontras outras formas de explicação...

## Entreato III

*Traduzir e poetizar...*

*Reconhecer que as palavras não dizem sempre a mesma coisa...*

As palavras são sempre as mesmas,
mas o sentido do que dizem
morre e renasce a cada vez,
na voz de cada locutor,
em cada palavra que se diz ou se escuta,
em cada palavra que se escreve ou se lê.
Às vezes, enganamo-nos,
e acreditamos poder atrelar de modo permanente
os sentidos às palavras,
mas é nesse momento que deixamos de escutar as palavras.
Porque saber escutar é, precisamente,
advertir que o sentido nasce e morre com cada palavra.

(LÓPEZ, 2008, p. 70)

# QUARTO ATO: LIVRO DIDÁTICO

## Cena I – Palavras e intenções

*Na realidade, todo leitor, quando lê, é o leitor de si mesmo.*
*A obra do escritor não passa de uma espécie de instrumento óptico*
*que ele oferece ao leitor a fim de permitir que este*
*distinga aquilo que, sem o livro, talvez não pudesse ver em si mesmo.*

*Marcel Proust, p.218, 1995*

Quando lemos as palavras de um livro didático vemos uma composição que remete à intenção de determinar *o que fazer, como fazer, quando fazer, quanto fazer*. Composição que pouco difere de um manual de instruções, palavras que não nos contam aventuras, tampouco nos convidam a produzir nossas próprias aventuras. Quando olhamos para o livro didático vemos as palavras de um mestre explicador. Palavras e estruturas que se estabelecem a partir de uma composição formada por autores, editores e editais.

No livro didático encontramos uma seleção de conteúdos e uma forma de apresentação. Esse livro constitui um instrumento elaborado em consonância com normas e regras já estabelecidas em edital redigido pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD 2017, considerando, dentre suas exigências específicas, legislações, diretrizes e normas oficiais referentes ao ensino fundamental. Não se trata de um instrumento isolado, a estrutura na qual o livro didático se insere constituiu-se política e historicamente. Segundo Choppin (2004),

> A partir do século XIX, com a constituição dos estados nacionais e com o desenvolvimento, nesse contexto, dos principais sistemas educativos, o livro didático se afirmou como um dos vetores essenciais da língua, da cultura e dos valores das classes dirigentes. (p. 553).

Consideramos a existência e a complexidade desta estrutura, no entanto não abordaremos esta questão. Para esta pesquisa consideramos suficiente assumir que, de modo mais ou menos explícito, o livro didático constitui-se como um "instrumento privilegiado de construção de identidade" (CHOPPIN, 2004, p.553). Intenção essa, de construir identidade, que também se faz presente na lógica explicadora. Uma lógica que classifica as inteligências em superiores e inferiores, delimitando ao menos duas classes, sendo as superiores aquelas capazes de compor uma classe dirigente, legitimada a transmitir determinados conhecimentos, culturas e valores às inteligências inferiores.

Assim, por meio de textos, imagens e exercícios, o livro didático constitui um meio que contribui com a determinação de conteúdos e com a legitimação de certas formas de explicação. E o *faça assim* prevalece nas palavras do livro didático. Enquanto reproduzirmos o que sugerem essas palavras, o *faça assim* prevalecerá em nossas aulas. Não queremos reproduzir o *faça assim* expresso nos livros didáticos, mas também não estamos nos opondo à natureza didática destes livros.

Mestre Jacotot questionou a necessidade de um mestre que explicasse ao aluno aquilo que ele poderia aprender por ele mesmo, mas não sugeriu a ausência de um mestre. Nesta pesquisa não sugerimos que o livro didático seja ignorado, mas que este faça composições, que converse com outras formas de explicação.

Segundo Rancière (2015), as inteligências são consideradas iguais, mas a vontade expressa diferenças em suas manifestações. A palavra do professor não transmite saberes, mas ao poetizar pode fazer surgir, ou mesmo impor, uma vontade. "Chamar-se-á emancipação à diferença conhecida e mantida entre as duas relações, o ato de uma inteligência que não obedece senão a (sic) ela mesma, ainda que a vontade obedeça a uma outra vontade." (RANCIÈRE, 2015, p.32). Assim, as palavras do livro didático podem, também, tornar-se poetizadas; mesmo que sejam escritas na intenção de transferir conhecimentos, mesmo que o livro didático constitua-se como um mestre explicador que se dirige a professores.

*Entre o livro didático e o aluno há a voz do professor.*
*Entre a versão do estudante e a voz do professor há o manual do professor.*

O professor pode ser um explicador, pode considerar-se e ser considerado uma inteligência superior no interior da lógica explicadora. No entanto, sentimos que as palavras do livro didático são consideradas superiores às palavras do professor. Pois o livro didático, tanto a versão do estudante quanto o manual, explica ao professor aquilo que deve ver, pensar e fazer, em outras palavras, no livro encontramos uma forma que se esforça em *transmitir* ao professor aquilo que este precisa *transmitir* aos alunos. Constitui-se o livro didático como um mestre explicador do professor.

A versão do estudante, ao explicar conteúdos e ao associar procedimentos a exercícios, indica ao professor o que fazer em suas aulas, determinando o que precisa ser abordado e enfatizado. Por meio de textos que apresentam pouca potência para provocar comparações, associações e explorações, o livro didático, em geral, expõe exercícios e exemplifica o procedimento a ser utilizado. Se nos limitarmos em reproduzir as palavras do livro didático inviabilizaremos a expressão daquilo que vemos, pensamos ou imaginamos possível fazer. Tampouco nos sensibilizaremos a olhar para o que estamos fazendo.

*O que faço com minhas palavras?*
*Como estou sentindo esta aula?*
*Será que posso dizer de outra forma?*
*O que o aluno tem a dizer?*
*Posso perguntar o que não sei?*
*Como meus alunos se sentem?*

Perguntas como essas se perdem enquanto nos ocupamos em cumprir sequências de conteúdos predeterminados, explicar procedimentos, propor exercícios para que os procedimentos sejam reproduzidos. E ainda recebemos a explicação da explicação do manual do professor. Um reforço ao livro didático, pois de acordo com o Guia de Livros Didáticos do Ensino Fundamental, o manual deve obrigatoriamente, entre outras prescrições,

> Apresentar orientações para a condução de atividades propostas no Livro do Estudante; (...) Descrever com precisão e funcionalidade a organização dos livros, inclusive no que diz respeito aos objetivos a serem atingidos nas atividades propostas e aos encaminhamentos necessários; (...) Propor formas de articulação entre as propostas e atividades do livro didático e os demais materiais didáticos distribuídos por programas oficiais; (BRASIL, 2016, p.21)

Encontramos na coleção analisada, além das respostas dos exercícios, explicações sobre *como usar* as palavras que compõem o livro do estudante. As explicações da versão do estudante não são consideradas suficientes, mais instruções se fazem necessárias para que o docente possa utilizar esse material. Quanto mais nos explicam *como fazer* mais difícil fica perceber que somos capazes de caminhar sozinhos, de procurar outras formas, outras palavras. Mas, ao questionarmos, podemos perceber que somos capazes de encontrar passagens e de caminharmos pelas possibilidades que nelas encontrarmos.

Ao expressar o que vimos ao olhar para o ensino introdutório das equações de primeiro grau, mencionamos que percebíamos o predomínio de um treinamento mecânico de procedimentos, todos centrados no objetivo de determinar o valor da incógnita. Algo que percebemos ao considerar algumas práticas docentes e textos de livros didáticos. Embora essa responsabilidade não possa ser atribuída unicamente ao livro didático, não podemos deixar de considerar que esse instrumento frequentemente representa uma autoridade na prática docente, conforme mencionam Lins e Gimenez (1997).

O livro didático parece ser frequentemente considerado instrumento básico e, por vezes, único capaz de orientar as tarefas do professor, assumindo "configurações de autoridade, de detentor das verdades que deverão ser ensinadas, além de ser o condutor, o norteador das atitudes do professor, já que a ele é destinada a tarefa de orientar o professor sobre o *como* ensinar, o *quando* ensinar, o *que* ensinar, etc." (WITZEL, 2002, p. 20). Constitui-se como uma forte referência à preparação do professor. Uma superioridade que parece reverberar na prática e no entendimento de conteúdos.

No contexto da álgebra escolar, Lins e Gimenez (1997) mencionam que a tendência em associar atividade algébrica apenas ao cálculo literal tem relação com a forma como os livros didáticos apresentavam esse conteúdo, forma que se desenhava por meio da sequência algoritmo e exercícios de fixação. Um padrão que, segundo Lins e Gimenez (1997), predominava "na quase total maioria dos livros didáticos disponíveis no mercado brasileiro" (p.105). A manutenção de uma combinação de autoridade com repetição ainda constitui fator que contribui para que padrões se estabeleçam.

Uma consideração feita há mais de 20 anos, mas que presumimos atual, pois nos livros didáticos com maior distribuição, no período de 2014 a 2017, ainda prevalece a sequência algoritmo e exercício na unidade dedicada às equações. Outras palavras e imagens são utilizadas, mas a lógica segue a mesma. Primeiro encontramos um *faça assim* e depois exercícios para treinar o procedimento. O que pode dificultar, mas não nos impede de encontrar passagens a outras formas de explicação.

O que faremos com os exercícios e com as explicações? Seguiremos a ordem ou nos abriremos ao inesperado? O desenvolvimento dos exercícios estará correto apenas quando estiver de acordo com o *faça assim* ou quando as afirmações e justificações estiverem coerentes em relação a números e operações? Forçaremos brechas para investigações e reflexões ou vamos seguir o *faça assim*?

As palavras que compõem o livro didático, em geral, acompanham o professor em seus planejamentos, em sua preparação. E por isso, não queremos apenas ouvir e seguir o que essas palavras nos dizem. E também não queremos julgá-las com a finalidade de explicar o que elas deveriam nos dizer. Nesta pesquisa nos propomos a encontrar um modo alternativo de lidar com essas palavras, visando outras formas de explicação, não formas substitutivas, mas coexistentes.

## Cena II – Propondo uma conversa com o livro didático

Desejamos que as palavras desta pesquisa possam servir para que alguém vivencie algo que até agora não tenha conseguido distinguir olhando apenas para as palavras do livro didático. Não há garantias, mas acreditamos que exista potencialidade... Estamos contando nosso percurso sem a intenção de torná-lo um exemplo, nossa intenção é que nossas palavras sejam meio para provocar a busca por outros percursos. Assim, propomos uma conversa com o livro didático, conversar para encontrar passagens por entre as explicações e suas formas.

*Ler, questionar, pensar, ler de novo.*
*Tentar fazer algo, pensar, comparar, ler mais uma vez.*
*Escrever outras palavras, e perceber que há muito a escrever.*
*Seguir lendo, escrevendo, pensando... tudo ao mesmo tempo.*
*E perceber que sempre haverá palavras novas para escrever.*

Começamos lendo as palavras do livro didático e, ao ler, questionamentos brotavam constantemente e nos convidavam a olhar para outras páginas, para outros livros, didáticos ou não, para definições matemáticas... Por meio desses questionamentos nos movimentamos na busca de possíveis respostas, fizemos das palavras que diziam *faça assim* uma passagem para novas aventuras intelectuais.

Usar palavras para contar as experiências de uma aventura intelectual compõe um trabalho poético de tradução, que, segundo Rancière (2012), está no cerne de toda aprendizagem. Esse trabalho consiste na ação de "uma inteligência que traduz signos em outros signos e procede por comparações e figuras para comunicar suas aventuras intelectuais e compreender o que outra inteligência se esforça por comunicar-lhe." (p. 15). Ler as explicações do livro didático em companhia das vozes de Rancière, Lins e Gimenez, oportunizou uma tradução poética dos signos daquelas explicações. Essa composição nos fez ver aspectos antes ignorados, os quais passavam imperceptíveis aos nossos sentidos antes de sermos provocados pelas palavras desses autores. E estamos certos de que ainda há muito a aprender e conscientes de que as palavras deste texto não conseguem expressar toda a aventura; o indizível faz parte dos movimentos das aventuras. E inspirados no modo de apresentação de uma peça teatral, escrevemos a parte dizível dessa aventura em forma de diálogos que se dividem em cenas.

Ler as explicações do livro, ser capturado por questionamentos e escrever para contar a aventura que cada questionamento provocou, desenvolvendo um trabalho poético de tradução, constituiu uma dinâmica que nos remeteu a uma conversa entre duas personagens. E por esse motivo optamos por um texto em forma de diálogo, no qual uma personagem questiona e conta as aventuras, expressando aquilo que vê, pensa e faz, enquanto a outra personagem nos aproxima das explicações do livro didático: Questionadora e Explicadora. Personagens que colocam formas de explicação a conversar.

E para começarmos a conversa foi necessário escolher um livro didático. Optamos pelo livro de 7º ano da coleção Praticando Matemática – Edição Renovada de Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos. Em um primeiro momento, a coleção chamou a atenção pela sua aparente popularidade. Algo que pudemos confirmar pelo índice de distribuição e por sua estabilidade.

A partir dos dados estatísticos divulgados pelo Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação – FNDE (BRASIL) foi possível constatar que esta coleção vem sendo a mais distribuída no país. Em 2014 e 2017 a coleção atingiu o maior índice de distribuição, um percentual de 22% e 26%, respectivamente. No entanto, o título Praticando Matemática não é recente, há pelo menos 27 anos o título já constava nas listas de obras indicadas pelo PNLD.

Verificando materiais disponíveis no site do FNDE, encontramos, em 1985, o nome de Álvaro Andrini dentre os autores de obras indicadas pelo programa, naquele ano com os títulos: Matemática e Ensino objetivo de matemática, ambos dedicados às séries finais do ensino fundamental. Entre 1992 e 2017 surgem, nesta sequência, os títulos: Praticando Matemática, Novo Praticando Matemática e Praticando Matemática – Edição Renovada. A partir do título Novo Praticando Matemática a autoria que antes era de Andrini passa a ser de Andrini e Vasconcellos. Praticando Matemática – Edição Renovada foi o título distribuído em 2014 e 2017.

E apesar de não estar sempre presente nas listas de coleções aprovadas, o título consolidou-se através do tempo. Estabilidade e percentuais consideráveis nas duas últimas distribuições são fatores que conferem popularidade à coleção. Ou seja, provavelmente as palavras desta coleção vêm sendo frequentes na preparação de professores. E, embora cada nova edição, traga suas diferenças, observamos que faz algum tempo que as palavras não mudam muito. Comparando a unidade Equações das edições de 2002, 2012 e 2015, encontramos, em relação aos textos, mais semelhanças do que diferenças. Esta coleção parece ser um dos mestres explicadores mais presentes na vida de professores que atuam nos anos finais do ensino fundamental, o que nos fez sentir interesse em *conversar* com ela. E nossa pergunta inicial nos direciona à unidade 9 do livro de 7º ano, unidade dedicada a uma introdução às equações.

*O que está sendo explicado sobre equações de primeiro grau?*

Começamos com esta pergunta, apenas esta. E foi buscando sua resposta que outras perguntas foram surgindo e nos movimentando, pelas explicações da unidade Equações, por páginas de outros livros, por definições e propriedades matemáticas. Enquanto na primeira cena exploramos as explicações do livro didático para buscar por respostas para a pergunta que fizemos, as cenas seguintes resultam das passagens que encontramos por entre essas palavras, passagens que se abriram por meio de novas perguntas e estranhamentos.

## ENTREATO IV

*O que a gente faria se não houvesse poesia?*

Separô toda a minha correria
Separô o joio do trigo e da padaria
Separô diante de mim quando minha tristeza era parte do dia
Separô Dona Beleza de Dona Maria

Separô o que não restava do que já não tinha
Separô diante minha palavra e se fez poesia
Separô pra ouvir meu protesto, meu gesto que incerto talvez não faria.
Separô o silêncio da dor me trazendo alegria

Separô pra pensar no que a gente faria se não houvesse a poesia,
se não restasse farinha pro nosso pão!

Iria só até o fim
Daria tudo e mais um pouco de mim
Separa um tanto que o outro eu te dou
Separa a chuva pra continuar flor!

Separô – O Teatro Mágico
https://youtu.be/cPmR7m9hhrg

## QUINTO ATO: CONVERSANDO COM O LIVRO DIDÁTICO

### Cena I – Começando a conversa

*Encontram-se Explicadora e Questionadora*
*para explorar as explicações do livro didático.*
*Explicadora conta o que dizem as palavras do livro didático.*
*Questionadora diz o que vê e começa seus questionamentos...*

**Questionadora:** Vamos explorar as explicações da unidade 9 do livro didático Praticando matemática, unidade chamada Equações. Explicadora, nos conte o que está sendo explicado sobre equações de primeiro grau?

**Explicadora:** A unidade *Equações* está organizada em cinco títulos:

- Letras e padrões;
- Equações;
- Algumas operações com letras;
- Balanças em equilíbrio e equações;
- Mais problemas e equações.

E ao final de cada título há uma sequência de exercícios. No primeiro título, *Letras e Padrões*, o livro nos propõe a exploração de sequências de figuras – Figura 1 e Figura 2.

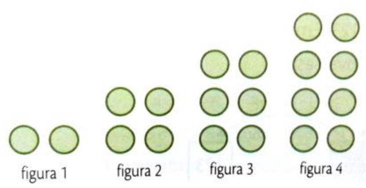



Figura 1: Andrini e Vasconcellos, 2015, 7º ano, p. 203.

Essa sequência de figuras, de acordo com o livro, pode ser generalizada de dois modos, por palavras ou utilizando linguagem matemática.

*O número de bolinhas da figura é igual a duas vezes o número da posição que ela ocupa na sequência.* (p.203)

ou

*Representando pela letra p a posição da figura e pela letra n o número de bolinhas, escrevemos:* $n = 2p$. (p.203)

A outra sequência proposta é formada por caixas brancas e vermelhas. Para exploração, o livro faz perguntas relativas à quantidade de caixas em determinadas posições, por exemplo, *Qual será o total de caixas na figura 12?* (p.203).

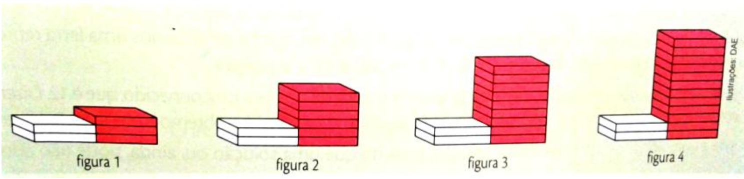



Figura 2: Andrini e Vasconcellos, 2015, 7º ano, p. 203.

**Questionadora:** Vemos, nas primeiras explicações, uma preparação para começarmos a usar as letras. E uma distinção que se faz importante, estamos lidando com uma linguagem diferente. No entanto apropriar-se desta nova linguagem não nos parece tão simples quanto o livro tenta nos dizer, consideramos que é um processo que exige aventuras, traduções... E há outras formas de descrever essa sequência. É possível pensar, por exemplo, que a sequência pode ser descrita da seguinte maneira $a_n = a_{n-1} + 3$. Vemos também que o livro inicia trazendo a noção de letra como variável, no entanto nas equações de primeiro grau as letras representam incógnitas. Uma diferença que não foi explorada.

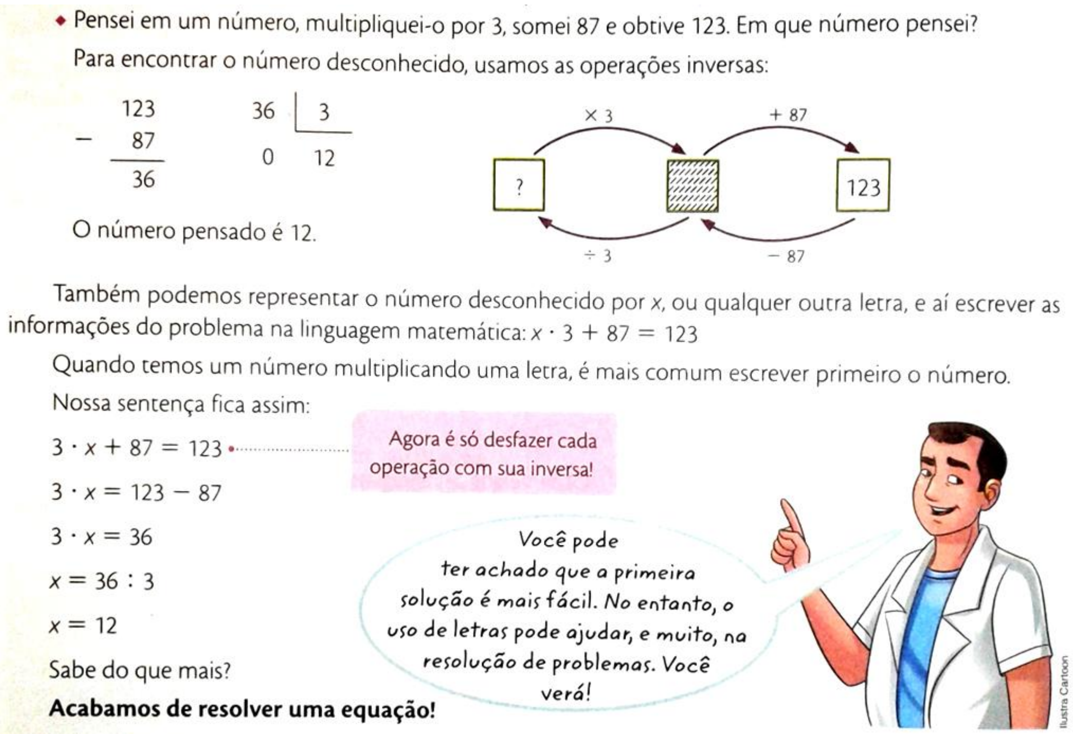
**Explicadora:** Vamos ver o que há nas próximas páginas... Continuando temos *Equações*, o segundo título, o qual é dividido em dois subtítulos: *O que é uma equação?* e *Verificando a solução de uma equação.*

Em *O que é uma equação?* temos alguns exemplos de expressões numéricas e algébricas, escritas em palavras e em linguagem matemática:

*Dois somado a cinco:* $2 + 5$ *(...)*

*Um número menos seis:* $n - 6$. (p. 204)

Depois desses exemplos, o livro pede que observemos o uso das letras, explicando que uma **letra** representa um **número desconhecido** (palavras em destaque no livro didático) e que usá-las desta maneira constitui um procedimento que pode nos ajudar a resolver problemas[3]. Por meio do exemplo da Figura 3, o livro busca demonstrar essa afirmação.



- Pensei em um número, multipliquei-o por 3, somei 87 e obtive 123. Em que número pensei?

Para encontrar o número desconhecido, usamos as operações inversas:

$$\begin{array}{r} 123 \\ -\ 87 \\ \hline 36 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 36 & 3 \\ \cline{2-2} 0 & 12 \end{array}$$

O número pensado é 12.



Também podemos representar o número desconhecido por $x$, ou qualquer outra letra, e aí escrever as informações do problema na linguagem matemática: $x \cdot 3 + 87 = 123$

Quando temos um número multiplicando uma letra, é mais comum escrever primeiro o número.

Nossa sentença fica assim:

$3 \cdot x + 87 = 123$

$3 \cdot x = 123 - 87$

$3 \cdot x = 36$

$x = 36 : 3$

$x = 12$

Sabe do que mais?

**Acabamos de resolver uma equação!**



Figura 3: Andrini e Vasconcellos, 2015, 7º ano, p. 204.

**Questionadora:** Por enquanto vimos como resolver uma equação, de maneira simplificada, invertendo operações, mas... O que é uma equação?

---

[3] Embora não conste uma definição, observamos que, no livro didático, a palavra problema refere-se a exercícios, cujo enunciado descreve uma situação que envolve o desenvolvimento de operações, conforme o exercício apresentado na Figura 3.

**Explicadora:** A definição vem depois deste exemplo.

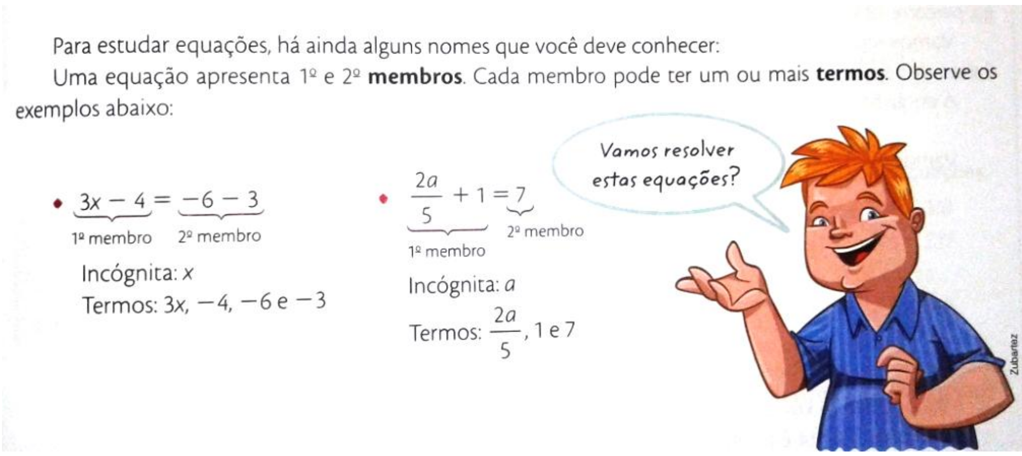
*Equações são igualdades em que há pelo menos uma letra representando um número desconhecido. Portanto,* $3x + 87 = 123$ *é uma* ***equação.*** (p. 204)

O livro também menciona que quando resolvemos uma equação encontramos o valor do número desconhecido e esse valor é chamado de **solução** ou **raiz**. E quando substituímos $x$ por esse valor obtemos uma igualdade verdadeira.

Informa também que uma equação pode ter solução ou não, e quando há solução esta pode ser única ou não. Apresentando como exemplo: $n + 2 = 5$ como equação que admite apenas uma solução; $x = x + 3$ como equação que não admite solução; $y = y$ como equação que admite infinitas soluções.

**Questionadora:** Há algo que precisamos olhar com mais atenção aqui... Ao que tudo indica o livro está tratando de equações de primeiro grau e, pela definição, toda equação deste tipo possui solução única em $\mathbb{R}$. Mas vamos ver o que mais diz o livro, antes de entrarmos nessa aventura...

**Explicadora:** Depois dessa classificação o livro nos traz *algumas informações importantes*. Ele diz que precisamos conhecer alguns nomes: **incógnita, membro** e **termo**.


Para estudar equações, há ainda alguns nomes que você deve conhecer:
Uma equação apresenta 1º e 2º **membros**. Cada membro pode ter um ou mais **termos**. Observe os exemplos abaixo:

- $\underbrace{3x - 4}_{\text{1º membro}} = \underbrace{-6 - 3}_{\text{2º membro}}$

  Incógnita: $x$

  Termos: $3x$, $-4$, $-6$ e $-3$

- $\underbrace{\frac{2a}{5} + 1}_{\text{1º membro}} = \underbrace{7}_{\text{2º membro}}$

  Incógnita: $a$

  Termos: $\frac{2a}{5}$, 1 e 7



Figura 4: Andrini e Vasconcellos, 2015, 7º ano, p. 205.

**Questionadora:** E incógnita? Como o livro está definindo?

**Explicadora:** O livro menciona que as letras serão chamadas de incógnitas e que podemos utilizar qualquer letra minúscula para representá-las. Também informa que nesta unidade serão estudadas apenas equações que tenham uma incógnita. E para finalizar a seção referente ao subtítulo *O que é uma equação?*, as equações apresentadas na Figura 4 são desenvolvidas de modo análogo à da Figura 3, isolando a incógnita através da inversão de operações.

Já no próximo subtítulo, *Verificando a solução de uma equação*, é explicado como conferir se o valor encontrado para a incógnita está correto. Essa explicação é feita por meio do exemplo apresentado na Figura 5.

*A solução de uma equação é o valor que, quando colocado no lugar da incógnita, transforma essa equação numa igualdade verdadeira*. (p.206)

Marcos pratica corrida. Em seu treinamento, percorre 102 km por semana. De segunda a sábado, corre sempre a mesma distância e, no domingo, percorre 18 km. Quantos quilômetros Marcos corre às segundas-feiras?

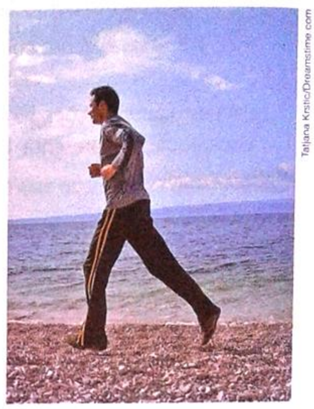
Vamos representar por $d$ a distância percorrida em cada um dos 6 dias, de segunda a sábado.

A equação que representa o problema é:

$$6d + 18 = 102$$

Vamos resolvê-la para encontrar o valor de $d$.

$$6d + 18 = 102$$
$$6d = 102 - 18$$
$$6d = 84$$
$$d = \frac{84}{6}$$
$$d = 14$$




Marcos corre 14 km às segundas-feiras.

Para conferir se 14 é a solução correta da equação, basta substituir $d$ por 14 e verificar se a igualdade obtida é verdadeira:

$$6d + 18 = 102$$
$$6 \cdot 14 + 18 = 102$$
$$84 + 18 = 102$$
Verdade!

14 é o número que torna a igualdade verdadeira. Então, 14 é a solução da equação.

REFLETINDO

A solução da equação $-7x = 10$ é 10?

Figura 5: Andrini e Vasconcellos, 2015, 7º ano, p. 206.

**Questionadora:** A expressão *transformar uma equação em uma igualdade verdadeira* causa estranhamento, pois o valor da incógnita pode ser determinado justamente pela relação de igualdade.

A palavra igualdade já ganha novos significados quando começamos a estudar essas equações. Talvez, no lugar da palavra transformação pudéssemos usar verificação. Ao substituir a incógnita pelo valor deduzido ou calculado poderemos verificar se a relação de igualdade se verifica. Da relação de igualdade obtemos uma sentença verdadeira ou uma sentença falsa. Mas não uma equação que se transforma em igualdade verdadeira.

Ainda falaremos mais sobre os significados da palavra igualdade, algo que consideramos muito importante para o ensino das equações... Mas agora voltemos às explicações do livro.

**Explicadora:** No próximo título, *Algumas operações com letras*, temos explicações sobre cálculo literal, o livro traz uma comparação entre números e letras.

Observe as igualdades:

- $7 + 7 = 2 \cdot 7$
- $4 + 4 + 4 = 3 \cdot 4$
- $x + x = 2 \cdot x = 2x$
- $a + a + a = 3 \cdot a = 3a$

Daí,

- $x + 2x = 3x$; $9n - 7n = 2n$; $8x + x - 5x = 4x$; $12y - 5y - 7y = 0$, e assim por diante.

Figura 6: Andrini e Vasconcellos, 2015, 7º ano, p. 209.

Menciona também que *não há nada de complicado, pois as letras se comportam de forma semelhante aos números* (p. 209). E no subtítulo *A propriedade distributiva*, utiliza-se do mesmo tipo de comparação.

Você já conhece a propriedade distributiva. Como o nome já diz, ela permite distribuir a multiplicação. Veja exemplos:

- $2 \cdot (4 + 5) = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5$
- $3 \cdot (7 - 2) = 3 \cdot 7 - 3 \cdot 2$

Distribuímos a multiplicação pelas parcelas da adição:

Essa propriedade continua valendo quando trabalhamos com letras:

- $4 \cdot (x + 3) = 4 \cdot x + 4 \cdot 3 = 4x + 12$
- $(-5) \cdot (a + 2) = (-5) \cdot a + (-5) \cdot 2 = -5a - 10$
- $7 \cdot (3 - 2y) = 7 \cdot 3 + 7 \cdot (-2y) = 21 - 14y$

Figura 7: Andrini e Vasconcellos, 2015, 7º ano, p. 209.

Encontramos neste título dois exemplos, situações que podem ser representadas por uma equação e possibilitam o desenvolvimento de cálculos literais. O primeiro exercício exemplifica o desenvolvimento de cálculos com letras e o segundo inclui a distributividade da multiplicação em relação à adição.

1- Mário pagou R$ 8,40 por um caderno e uma caneta. O preço do caderno é igual ao dobro do preço da caneta. Qual o preço da caneta? E do caderno?

2- Dona Sílvia gastou R$ 60,00 comprando uma torta de limão e duas tortas de morango. A torta de morango custa R$ 3,00 a mais que a de limão. Qual é o preço de cada torta?

**Questionadora:** Comparar nos interessa, mas não podemos ignorar as diferenças... Desenvolver operações entre números e desenvolver cálculos literais não nos parece semelhante.

**Explicadora:** O próximo título, *Balanças em equilíbrio e equações*, indica que a balança de dois pratos nos ajudará *a compreender as propriedades das igualdades* (p.212).

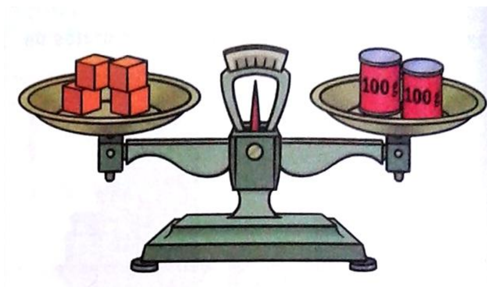



Figura 8: Andrini e Vasconcellos, 2015, 7º ano, p. 212.

O livro explica que os pratos desta balança estão em equilíbrio, pois a *massa dos quatro cubos é igual à massa dos dois cilindros.* (p.212) E nos pede para responder as seguintes perguntas:

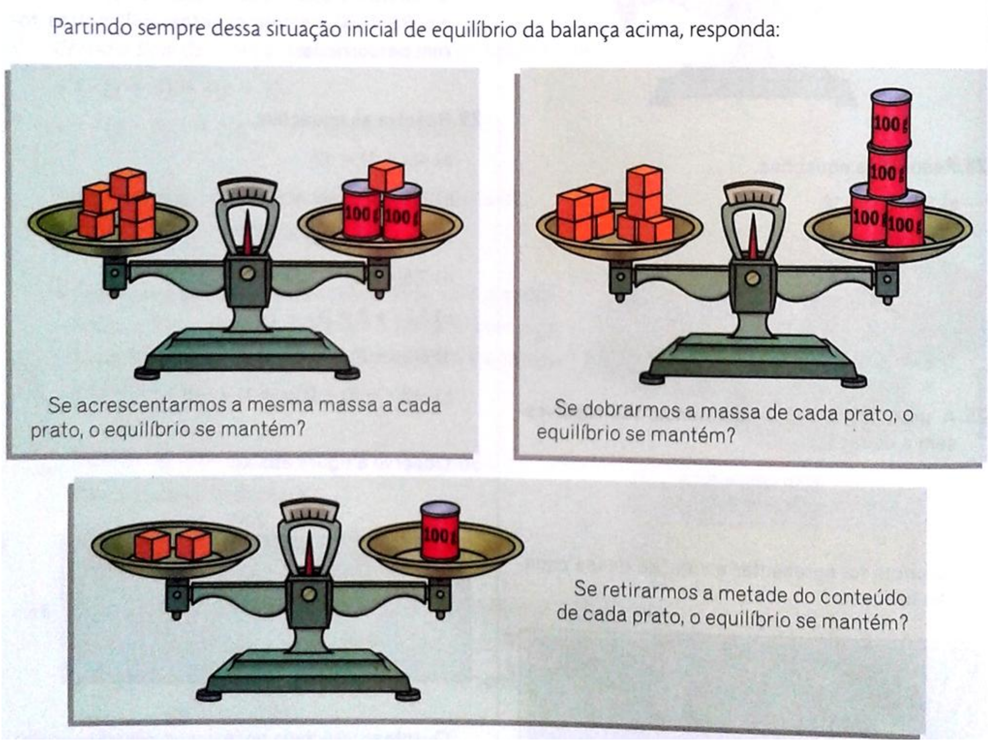



Figura 9: Andrini e Vasconcellos, 2015, 7º ano, p. 212.

E conclui explicando que as equações funcionam de modo semelhante, pois podemos somar e subtrair o mesmo número dos dois membros de uma equação, bem como multiplicar e dividir ambos os membros por um mesmo número, desde que este seja diferente de zero.

Na sequência, traz alguns exemplos para aplicarmos o que foi explicado. O primeiro exemplo vem acompanhado de ilustrações e do seguinte enunciado:

*Para resolver a equação* $3x = 2x + 100 + 50$ *podemos imaginá-la como uma balança de dois pratos em equilíbrio.* (p.213)

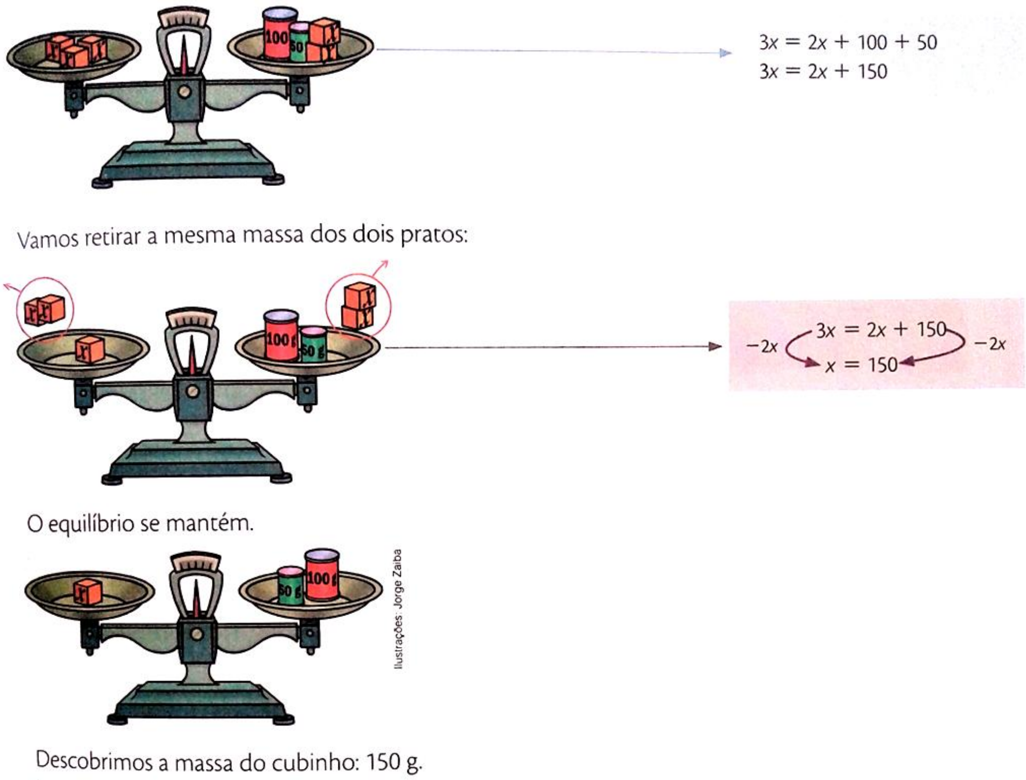



Figura 10: Andrini e Vasconcellos, 2015, 7º ano, p. 213.

**Questionadora:** Aqui sentimos que a balança foi utilizada como recurso embrutecedor. Dizer que as equações funcionam de modo semelhante ao de uma balança equivale a dizer que *é quase a mesma coisa*. No entanto, conforme mencionado no terceiro ato – cena II, entre equações e balanças de dois pratos há diferenças consideráveis, conseguimos produzir significado apenas para algumas equações. Além disso, no começo desse título o livro menciona que as balanças podem nos ajudar na compreensão de propriedades da igualdade. Mas quais propriedades seriam essas?

**Explicadora:** O livro não explicita tais propriedades. E já estamos indo para o último título da unidade, *Mais problemas e equações*. Neste título encontramos alguns exercícios resolvidos. Todos os desenvolvimentos apresentam a expressão de uma equação e o desenvolvimento dos cálculos necessário para determinar o valor da incógnita. Seguem os exercícios deste título:

1. Em certa cidade, aconteceu um fato interessante. Num período de quatro dias consecutivos, a temperatura mínima registrada diminuiu exatamente 1º C por dia.
   A média das temperaturas mínimas nesse período foi de $-2{,}5$ ºC.

Quais foram as temperaturas mínimas registradas em cada dia?

2. É possível construir um quadrado e um triângulo equilátero de modo que:
   - os dois tenham mesmo perímetro?
   - o lado do quadrado meça 2 unidades a menos que o lado do triângulo?

E para finalizar esta cena, encontramos o subtítulo *Eliminando denominadores*, onde, por meio de dois exemplos, o livro nos explica como resolver uma equação com coeficientes racionais não inteiros.

1. Todo início de mês, João separa a metade de seu salário para pagar o aluguel, contas de água, luz, etc., e mais dois quintos de seu salário são gastos com alimentação e transporte. Sobram R$ 160,00 para outras despesas. Qual o salário de João?

2. A professora propôs um problema para os alunos do 7º ano. Vamos resolvê-lo?

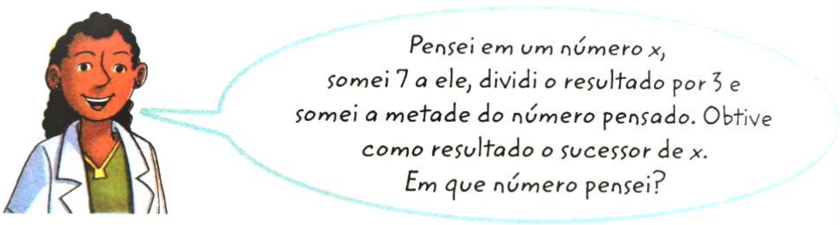



Figura 11: Andrini e Vasconcellos, 2015, 7º ano, p. 216.

**Questionadora:** Parece que o foco está mesmo nos procedimentos, o último subtítulo chama muito a atenção. Deixa curiosidade em saber por que precisamos eliminar denominadores. Vamos retomar a explicação deste procedimento em alguma das próximas cenas...

E os exercícios, há algum padrão?

**Explicadora:** Dentre os 47 exercícios desta unidade, predominam os de aplicação direta, sendo aproximadamente $\frac{1}{3}$ desses exercícios do tipo *resolva*. Ainda nesta unidade constam os títulos *Revisando*, *Desafios*, *Seção livre e Autoavaliação*. Títulos que fazem parte de uma estrutura comum às unidades do livro. Em *Seção Livre* consta um texto acompanhado de um exercício e em *Revisando*, *Desafios* e *Autoavaliação* encontramos mais exercícios. Considerando esses títulos, temos um total de 94 exercícios na unidade.

**Questionadora:** Olhar para os exercícios também pode nos trazer muitas passagens. Em alguns momentos olharemos para alguns dos exercícios, conforme surgir curiosidade ou necessidade, mas não vamos aprofundar nem nos exercícios, nem nos quatro últimos títulos. Já temos muita aventura garantida...

Por meio desta conversa inicial foi possível ter uma noção do que está sendo explicado sobre as equações de primeiro grau, sentimos o predomínio de explicações do tipo *faça assim*, mas encontramos passagem por entre essas explicações. Agora começamos a contar as aventuras e explorações que fizemos por meio dessas passagens.

## Cena II – As letras, afinal elas ajudam a resolver problemas ou elas constituem um problema?

*Questionadora conta as inquietações provocadas pela forma como foi explicado o uso das letras.*

**Questionadora:** As letras constituem um recurso gráfico... Com letras nascem palavras, cada letra tem seu som, e sua combinação com outras gera outros sons, e assim torna-se possível uma forma de falar, ouvir, ler, escrever...

Mas as letras não tem sempre o mesmo formato, o mesmo som, às vezes proporcionam outra sensação que não auditiva ou visual. As letras mudam de som de um alfabeto para outro, e às vezes de forma também, podem ter outro desenho, ou constituírem-se por uma combinação de pontos em relevo. Há também símbolos de pontuação que substituem palavras e pequenas frases, de modo que dois pontos e fecha parênteses já vira um sorriso.

Mas enquanto não descobrimos o que podemos fazer com as letras, elas são apenas letras, apenas traços que um lápis fez no papel, apenas um pontinho em relevo, apenas símbolos soltos em uma tela, em um papel...

E na matemática, para que servem as letras? Como elas se misturaram aos números? Um entendimento sobre essa mistura está vinculado aos três momentos históricos da álgebra: retórica, sincopada e simbólica. E, repetindo as palavras de Lins e Gimenez (1997), caracterizamos esses momentos de modo breve. Na fase retórica as respostas e os desenvolvimentos se constituíam apenas por palavras; na sincopada, algumas notações especiais foram incluídas, em particular palavras abreviadas; e na simbólica, apenas símbolos e suas manipulações.

As letras estiveram presentes desde a fase retórica, mas passaram a ser utilizadas de modos diferentes nas fases seguintes. Primeiro constituindo as palavras que descreviam respostas e desenvolvimentos, depois combinando e compondo outras notações, por fim como símbolos que admitem manipulações próprias da aritmética. No livro didático encontramos a descrição do padrão da sequência apresentada na Figura 1, em palavras e na linguagem algébrica; as letras estavam presentes nos dois modos, mas de forma diferente.

Entre usar as letras para compor palavras e usá-las para poder lidar com o desconhecido no contexto da matemática escolar há diferenças. E, mesmo no contexto da matemática, há diferenças no uso das letras. Nem sempre elas significam a mesma coisa.

O livro anuncia que usaremos letras para representar a incógnita, o número desconhecido que podemos determinar. No entanto, nos primeiros exemplos as letras estão representando variáveis, números desconhecidos que não conseguimos determinar, pois podem ser substituídos por distintos valores. Não basta ser letra para ser incógnita.

As letras e a linguagem que elas possibilitam na matemática escolar podem nos ajudar a resolver problemas quando conseguimos aprender a falar essa língua. Possivelmente para um aluno das séries finais do ensino fundamental, aprender essa nova língua seja o próprio problema. No ensino das equações de primeiro grau as letras representam o desconhecido, no entanto, quando compreendemos a língua dos objetos que constituem o núcleo comum, conseguimos lidar com esse desconhecido como se fosse um conhecido. Como as letras representam números desconhecidos, precisamos aprender a língua dos números e das operações para lidar dessa maneira com esse desconhecido.

Também consideramos que a incógnita não precisa ser fixada a letras, às vezes outro signo a representa e às vezes nem se torna necessário expressar uma equação para lidar com esse desconhecido, como fez Ana e seus colegas, na determinação dos lados de um triângulo – terceiro ato, cena IV. Explicar que letras serão utilizadas para representar incógnitas não é inconveniente, torna-se embrutecedor quando não provocamos a exploração dos significados, quando ignoramos as diferenças. Por exemplo, em $3x + 87 = 123$ e $n = 2p$ as letras estão presentes, mas significam coisas diferentes. No primeiro caso, a letra representa uma incógnita, um número que desconhecemos, mas que podemos determinar. No segundo, letras surgem como variáveis, não há um número a determinar, há uma relação em que para cada valor de $p$ obtém-se um valor para $n$. No primeiro caso, única solução, no segundo, para cada valor de entrada, uma solução.

Cena III – A balança de dois pratos

*Questionadora investiga as explicações*
*referentes à balança de dois pratos.*
*Explicadora ajuda nesta investigação.*

**Questionadora:** No livro encontramos a balança de dois pratos, um objeto bastante frequente no ensino das equações de primeiro grau. E o modo como este objeto surge nas explicações remete ao que chamamos anteriormente de recurso embrutecedor. O objeto foi utilizado para exemplificar o que fazer para resolver uma equação.

Mas observamos que a balança não surge nas primeiras explicações, o livro começa explicando outro tipo de procedimento, no qual para resolver uma equação precisamos isolar a incógnita e para isso diz que devemos *desfazer cada operação com sua inversa* (p. 204) – Figura 3. Explicações envolvendo a balança de dois pratos surgem apenas no quarto título da unidade...

**Explicadora:** Mas antes deste título, *Balança em equilíbrio e equações*, a balança surge em alguns exercícios.

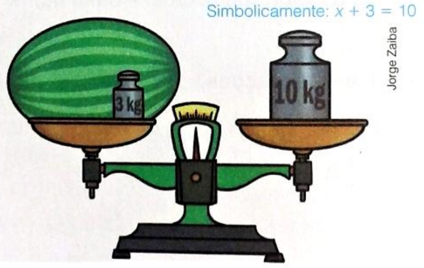

6. A balança está com os pratos em equilíbrio. Qual é o peso da melancia? 7 kg
Simbolicamente: $x + 3 = 10$


Figura 12: Andrini e Vasconcellos, 2015, 7º ano, p. 207.


Figura 13: Andrini e Vasconcellos, 2015, 7º ano, p. 207.

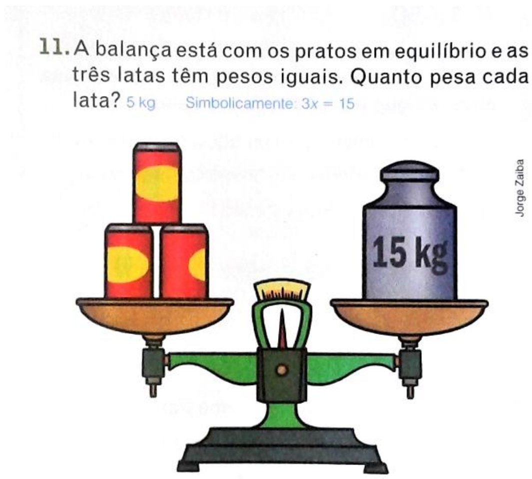



Figura 14: Andrini e Vasconcellos, 2015, 7º ano, p. 208.

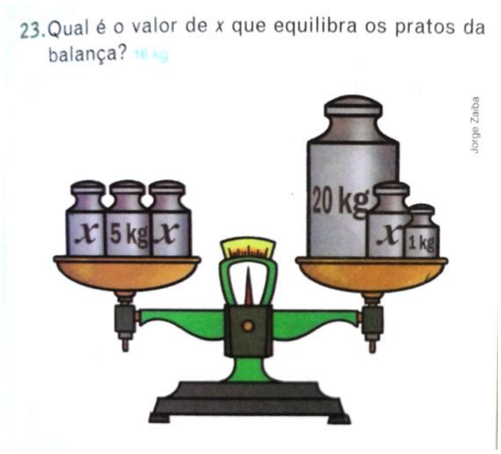
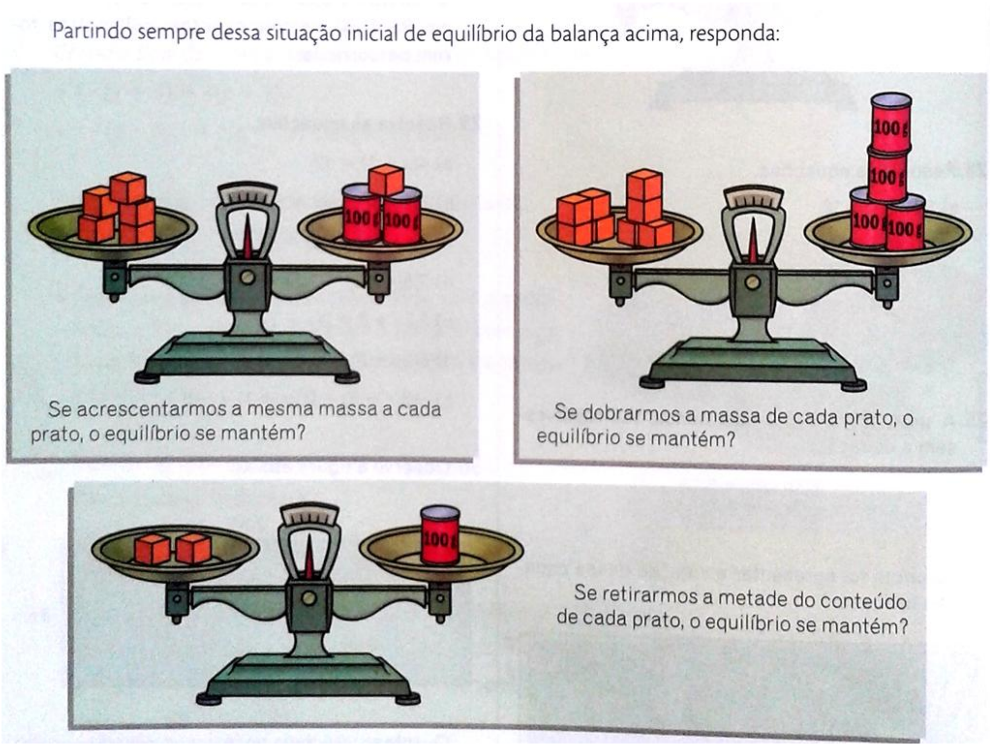



Figura 15: Andrini e Vasconcellos, 2015, 7º ano, p. 211.

**Questionadora:** Isso parece um bom começo! Antes da explicação encontramos exercícios. Uma quebra na sequência explicação-aplicação. Vamos começar olhando para estes exercícios.

Começamos pelo exercício 9 – figura 13, o qual, assim como as perguntas da figura 9, remete ao diálogo de Sócrates com o escravo de Mênon.

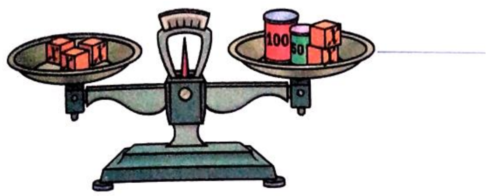
Relembrando a figura 9...



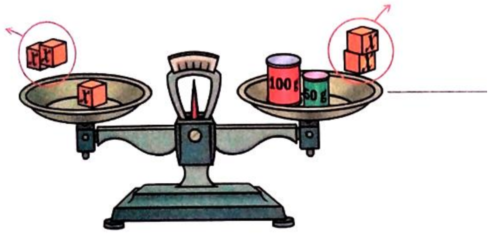
A composição palavras-imagem produz um tipo de pergunta que busca apenas *sim* como resposta. No entanto, isso não nos impede de fazer outras perguntas. Podemos expressar as equações que representem a situação de equilíbrio do exercício 9, $x + 4 = 5$ e $5 = x + 4$, e questionar: Será que nas equações, a relação de igualdade se mantém quando trocamos os membros de lugar, assim como acontece com o equilíbrio da balança?

Podemos também comparar a situação do exercício 6, figura 12, ou do exercício 9, figura 13 com a situação apresentada na figura 10.

Relembrando a figura 10...



Vamos retirar a mesma massa dos dois pratos:



O equilíbrio se mantém.

É possível pensar da mesma maneira em ambos os casos? Na figura 10 objetos de mesma massa são retirados de ambos os pratos até chegarmos à situação em que de um lado temos a incógnita, a massa do cubo, e do outro, o valor numérico correspondente, mas nos exercício 6 e 9 podemos proceder da mesma forma? Apenas retirando objetos é possível determinar o valor da incógnita? Ou teremos que pensar de outro modo? Talvez, para responder, o aluno busque identificar quanto falta para completar determinada massa. Por exemplo, no exercício 6 temos 3kg e uma melancia de um lado e 10kg do outro, a massa da melancia corresponde ao que falta para completar 10 kg. Mesmo na balança não é sempre a mesma coisa, nem sempre é possível proceder exatamente da mesma maneira.

Olhando para as imagens percebemos também que objetos de formatos e tamanhos iguais foram, na maioria das vezes, associados à mesma massa, e isso nos faz imaginar que no exercício 23 – figura 15, página 72, o aluno possa responder $x = 5$ por considerar que a figura de massa $x$ apresenta o mesmo tamanho e formato da figura que representa 5 kg de massa. O aluno estaria errado ou apenas expressando aquilo que viu, tomando como referência o desenho, a representação visual? Consideramos que não podemos ignorar a validade de sua afirmação, mas isso não significa que devemos aceitar esse tipo de resposta; o aluno deve também nos dizer o porquê do que diz em relação a números e operações. Pediremos que o aluno investigue se o que diz se mostra coerente em relação aos números e ao contexto produzido pela condição de equilíbrio daqueles objetos, mas sem ignorar sua observação quanto à imagem.

Além dessas, outras explorações podem ser feitas a partir dos exercícios. Aqui expressamos apenas algumas que imaginamos, mas provavelmente as explorações mais potentes surjam quando ouvirmos aquilo que os alunos estão vendo em cada situação.

Agora vamos olhar para as explicações do título *Balanças em equilíbrio e equações*, pois há algumas palavras que nos provocaram por lá. Começamos pelas imagens apresentadas na figura 9, relembrada na página 72, pensamos que os pratos daquelas balanças poderiam estar vazios, e que o próprio aluno poderia inventar as situações. Inventar novas situações e explorar, e verificar o que mantém o equilíbrio e o que gera desequilíbrios. Deste modo, o aluno faria muito mais do que responder *sim* àquelas perguntas iniciais.

Entendemos que estas perguntas e imagens estão ali para exemplificar o que está sendo explicado a seguir.

**Explicadora:** Logo depois dessas imagens está escrito o seguinte:

*... As equações, que são igualdades, funcionam de modo semelhante.*
*Numa equação podemos:*

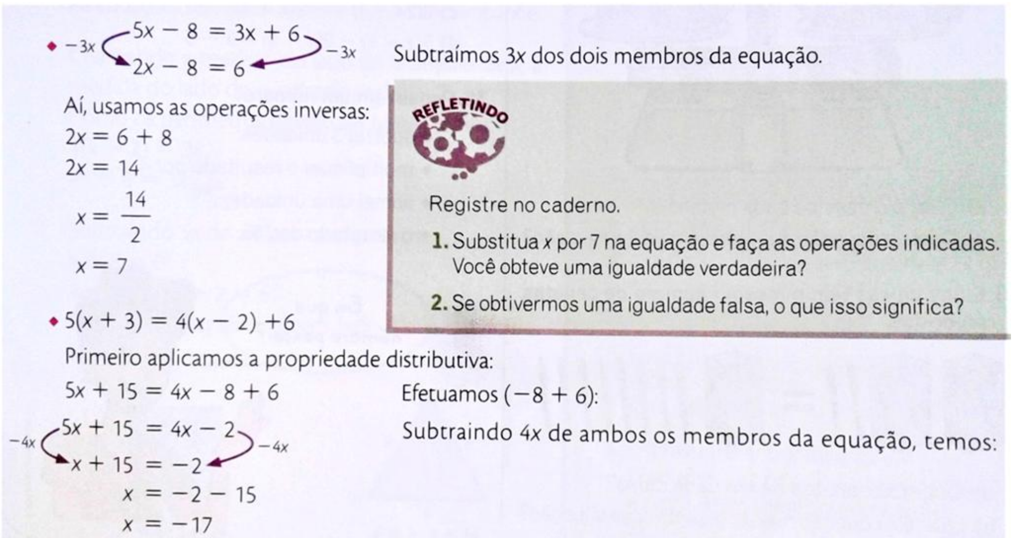
- *Somar o mesmo número aos dois membros da equação;*
- *Subtrair o mesmo número dos dois membros da equação;*
- *Multiplicar os dois membros da equação por um mesmo número diferente de zero;*
- *Dividir os dois membros da equação por um mesmo número diferente de zero.* (p.212)

**Questionadora:** Para manter a relação de igualdade e obter equações equivalentes é necessário realizar as mesmas operações nos dois membros. As quatro afirmações estão coerentes. O problema está na associação, como já foi mencionado: há equações para as quais este núcleo inviabiliza a produção de significados. Algumas equações podem ser imaginadas como uma situação de equilíbrio em uma balança de dois pratos, mas nem todas.

Olhando para a primeira representação da balança na figura 8, podemos obter a equação $4x = 200$, que equivale à $-4x = -200$ e também à $4x - 300 = -100$, equivalências matematicamente corretas, mas que não fazem o menor sentido no núcleo da balança. Diferenças que consideramos importante destacar, para que o aluno valorize seu exercício de liberdade, para que reconheça a importância daquilo que vê, bem como a potência de expressar, reconhecer e acolher as diferenças, buscando justificar o porquê daquilo que vê e descobrindo que há também outras formas de ver situações e objetos. Questionar o aluno sobre essa inviabilidade pode tornar-se um exercício provocador: Todas as equações podem ser representadas como uma situação na balança de dois pratos? Quais são possíveis? Quais não? Quais as dificuldades?

Os exemplos do título *Balanças em equilíbrio e equações* também chamaram a atenção...

**Explicadora:** Há três exemplos: o primeiro, na figura 10, explica como resolver a equação $3x = 2x + 100 + 50$, um exemplo em que as afirmações são justificadas por ilustrações da balança de dois pratos, e os outros dois exemplos seguem na figura 16.



- $5x - 8 = 3x + 6$ Subtraímos $3x$ dos dois membros da equação.

$2x - 8 = 6$

Aí, usamos as operações inversas:

$2x = 6 + 8$

$2x = 14$

$x = \frac{14}{2}$

$x = 7$

REFLETINDO

Registre no caderno.

**1.** Substitua $x$ por 7 na equação e faça as operações indicadas. Você obteve uma igualdade verdadeira?

**2.** Se obtivermos uma igualdade falsa, o que isso significa?

- $5(x + 3) = 4(x - 2) + 6$

Primeiro aplicamos a propriedade distributiva:

$5x + 15 = 4x - 8 + 6$ Efetuamos $(-8 + 6)$:

$5x + 15 = 4x - 2$ Subtraindo $4x$ de ambos os membros da equação, temos:

$x + 15 = -2$

$x = -2 - 15$

$x = -17$

Figura 16: Andrini e Vasconcellos, 2015, 7º ano, p. 213.

**Questionadora:** Aqui percebemos algo bastante sutil, mas que gerou estranhamento: Uma mistura de procedimentos. Os três exemplos se constituem por sentenças em que a incógnita aparece nos dois membros. Para operar a parte literal o livro sugere o procedimento exemplificado a partir da balança, fazendo retiradas, e para operar a parte numérica *Aí, usamos as operações inversas* (p.213).

O procedimento que foi explicado com a balança de dois pratos refere-se à obtenção de equações equivalentes, embora essa expressão sequer tenha sido mencionada nas palavras do livro. Mas falar em operação inversa não constitui um modo simplificado para nos referirmos à obtenção de equações equivalentes? No livro parecem procedimentos distintos que devem ser aplicados em casos específicos.

A balança de dois pratos não foi explorada como núcleo, mas sim como recurso para explicar um *faça assim* para certo tipo de exercício. Mas isso não nos impede de fazer deste objeto um núcleo, de observar as diferenças, de questionar o porquê deste ou daquele procedimento e de nos tornarmos mais cuidadosos com o campo semântico possível para cada objeto ou situação. E assim vamos aos poucos escapando do *faça assim.*

*Quão fácil era ensinar quando se dizia: – Vai, faz assim!*
*Ficou difícil quando se passou a dizer: – Vem, faz comigo!*
*Corazza, 2007, p. 17*

*Vai, faz assim...* Um fácil que, depois de Rancière-Jacotot, ficou difícil de dizer.

## Cena IV – Significados da igualdade

*Questionadora percebe a importância em considerar*
*os diferentes significados que a relação de igualdade pode assumir.*
*Explicadora auxilia,*
*trazendo algumas palavras e exercícios do livro didático.*

**Questionadora:** Compreender os significados que a igualdade pode assumir constitui um dos aspectos centrais no estudo das equações de primeiro grau.

O que o livro explica sobre essa relação?

**Explicadora:** A palavra igualdade aparece em alguns momentos.

Na definição de equação:

*Equações são igualdades em que há pelo menos uma letra representando um número desconhecido.* (p.204)

Na verificação da solução:

*A solução de uma equação é o valor que, quando colocado no lugar da incógnita, transforma essa equação numa igualdade verdadeira.* (p.206)

No título dedicado à balança de dois pratos:

*Essas balanças nos ajudarão a compreender as propriedades das igualdades.* (p.212)

**Questionadora:** Embora o livro tenha mencionado que existem propriedades a serem consideradas, não as encontramos. E talvez *propriedades das igualdades* não seja a expressão mais adequada. No entanto, essa expressão nos oportunizou o encontro com os diferentes significados que a relação de igualdade pode assumir.

Muitas vezes parece suficiente indicar o símbolo de igualdade nomeando-o "igual". Mas as relações que esse símbolo indica seriam tão óbvias quanto nos parece? Será que essa relação significa sempre a *mesma coisa*?

Em Lins (1992) encontramos desdobramentos, a relação de igualdade pode ser unidirecional ou bidirecional. Há diferentes formas de se ver e pensar uma relação de igualdade, podendo ser:

> (i) uma relação unidirecional, onde o lado direito é o *resultado* dos *cálculos* do lado esquerdo; (ii) uma relação bidirecional, significando que se realizarmos os cálculos do lado esquerdo e do lado direito os *resultados* serão os mesmos e, (iii) como uma relação bidirecional, significando que as expressões de ambos os lados podem ser *substituídas* uma pela outra em qualquer outra expressão algébrica onde uma delas aparece. (tradução minha, p.159-160).

Antes das equações de primeiro grau é possível, e bastante provável, que a relação de igualdade tenha sido explorada apenas de modo unidirecional, sendo o sinal de igualdade percebido como operador, conforme mencionam Ponte, Branco e Matos (2009). A associação do símbolo de igualdade ao desenvolvimento de cálculos e à obtenção de um resultado "final" numérico se constitui por meio de "situações aritméticas, como $7 + 5 = 12$ ou $8 \cdot 3 = 24$, e na simplificação de expressões algébricas, como $3x - 5(2 - x) = 8x - 10$ (lida da esquerda para a direita)" (p.22). Por vezes nomes diferentes são considerados ao inverter a direção da leitura: se temos $a(b + c) = ab + ac$, distributividade, e se temos $ab + ac = a(b + c)$, evidenciação.

No entanto, a partir do momento em que equações de primeiro grau passam a fazer parte das aulas de matemática, o símbolo de igualdade deixa de corresponder apenas ao operacional e também passa a significar equivalência entre o que está a sua esquerda e a sua direita, uma relação bidirecional. Dizer ou considerar que o sinal de igualdade significa *sempre a mesma coisa* torna-se embrutecedor. Olhar e explorar os diferentes significados que podem ser produzidos por meio deste símbolo, considerando também os diferentes contextos e motivos que justificam a relação, torna-se importante para que possamos expressar o que vemos, pensamos e fazemos.

Porém esses significados parecem pouco explorados na escola básica. Trivilin e Riberio (2015) desenvolveram uma pesquisa, investigando quais conhecimentos os professores das séries iniciais do ensino fundamental demonstravam ter a respeito dos significados do símbolo de igualdade, e mencionam que os professores envolvidos em sua pesquisa apresentaram dificuldade em perceber essas diferenças, e declararam que "até a realização da pesquisa, não haviam refletido sobre o fato de o sinal de igualdade poder assumir diferentes significados e também não haviam ponderado sobre a importância de os alunos se apropriarem desse conhecimento” (TRIVILIN e RIBEIRO, 2015, p.48).

O livro didático também ignora esses diferentes significados, pois apenas associa igualdade a equilíbrio e não os explora. Apenas afirma que podemos aplicar as mesmas operações nos dois membros de uma equação pelo fato de equações *funcionarem de modo semelhante ao de uma balança*. Uma associação que não demonstra potencialidade, pois igualdade nem sempre pode ser pensada como equilíbrio. Entre equilíbrio em uma balança de dois pratos e igualdade em uma equação há diferenças que precisam ser consideradas. Neste caso comparar tais situações nos parece mais potente do que associá-las.

Quando consideramos as equações como matéria própria de estudo, a igualdade passa a relacionar objetos abstratos, e tentar imaginar esses objetos sem massa em equilíbrio provavelmente inviabilize a produção de significados para as equações. Torna-se necessário considerar igualdade como relação entre expressões algébricas e entre essas expressões e números. Equilíbrio, retiradas e distribuições são palavras que compõem o campo semântico da balança de dois pratos. Associar igualdade a equilíbrio nos causará o mesmo tipo de problema que mencionamos na Cena III, nos manteremos vinculados ao núcleo da balança, e a produção de significado para equações como $-4x = -200$ permanecerá inviabilizada. Torna-se necessário falar a língua das equações de primeiro grau e considerar os significados que a relação de igualdade pode assumir quanto a números e operações.

E olhando para equações, sem compará-las a outros objetos, percebemos implicações dos significados do símbolo de igualdade no modo como vemos, pensamos e resolvemos uma equação. Segundo Lins (1992), o modo como resolvemos uma equação está associado ao modo como vemos a relação de igualdade. Quando consideramos igualdade conforme caracterização apresentada em *i* e *ii* (Lins, 1992), resolver uma equação consiste em desenvolver os cálculos necessários para determinar o número que ao substituir a incógnita preserve a igualdade. No entanto, quando pensamos igualdade conforme caracterizada em *iii*, resolver uma equação consiste em “transformar a equação até obter uma equação do tipo $x = \cdots$.” (LINS, 1992, p.160). Durante o processo de transformação são consideradas propriedades de números e operações: Se $a = b$ então $a + c = b + c$, e se $c \neq 0$ então também podemos dizer que $c \cdot a = c \cdot b$... E ao longo dessas transformações obtemos uma sequência de equações, denominadas equivalentes, pois todas possuem mesma solução. A tais modos distintos de ver, pensar e resolver equações, passamos a nos referir, respectivamente, como modo operacional e modo por transformações.

Enquanto no modo operacional o desenvolvimento de cálculos é enfatizado, obscurecendo a expressão de manipulações aritméticas, no modo por transformações essas manipulações são enfatizadas e o desenvolvimento de cálculos pode ser percebido como um modo particular dessas manipulações (LINS, 1992). E observar essas diferenças não significa dizer que a caracterização em *iii* é melhor que as demais. As três caracterizações para igualdade coexistem em sala de aula. No entanto, convém diferenciá-las, de modo que seja possível perceber qual se mostra mais potente para explorar cada situação. E para as equações de primeiro grau, a presença da caracterização *iii* potencializa o estudo das propriedades de números e operações e um envolvimento maior com manipulações aritméticas. Sem considerarmos essa maneira de ver a relação de igualdade possivelmente o ensino das equações permanecerá focado no desenvolvimento de cálculos, conforme acontece no modo operacional, vinculado às caracterizações *i* e *ii*. Um modo coerente ao *faça assim*, pois a atenção está centrada em fazer pela reprodução de um passo a passo: "passar" números de um lado da igualdade para o outro, invertendo operações. Com isso o aluno resolve uma equação, mas saberia expressar o porquê desses procedimentos?

Percebemos, no livro didático, uma tendência em considerar o modo operacional em suas explicações. A transformação da equação inicial em equações equivalentes aparece nos procedimentos, no entanto passa despercebida entre as palavras que nos dizem *faça assim e assim e depois assim* para resolver. Resoluções centradas no desenvolvimento de cálculos.

*Agora é só desfazer cada operação com sua inversa!* (p.204)

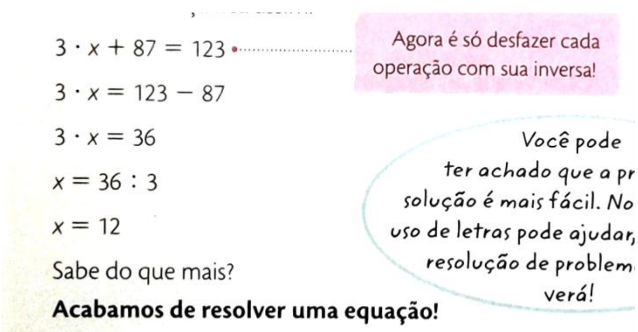



Figura 17: Andrini e Vasconcellos, 2015, 7º ano, p.204.

Neste procedimento, que nos remete ao modo operacional de resolução, o sinal de igualdade parece transformar-se em um referencial para indicar de qual lado as operações devem ser *desfeitas*. Explorar os significados que a relação de igualdade pode assumir parece realmente desnecessário quando nos centramos em procedimentos deste tipo. O *faça assim* não nos convida a tal exploração, podemos seguir ignorando estes significados e ainda assim resolver equações. Até que algo nos provoque a olhar para o que fazemos e nos force a buscar o porquê daquilo que estamos fazendo ou dizendo, seguiremos dependentes de alguém que nos diga o que devemos ver, pensar e fazer. Ao considerarmos e explorarmos os diferentes significados da relação de igualdade, podemos olhar para as equações e ver as manipulações aritméticas que possibilitam suas transformações ao invés de ver apenas cálculos; podemos expressar o que vemos, pensamos e fazemos, ao invés de seguir silenciosamente um *faça assim.*

E para explorarmos o modo de resolução por transformações, modo no qual o objetivo centra-se em transformar a equação inicial em uma equação do tipo $x = c$, onde $c \in \mathbb{R}$, vamos contar nossas aventuras ao resolver a equação $3x + 87 = 123$ – figura 17.

*Vamos resolver a equação* $3x + 87 = 123$.
*Como chegamos a essa equação já nem lembramos, mas tudo bem.*
*É apenas mais um monstro de estimação*
*do professor de matemática...*

*O que vemos quando olhamos para essa equação?*
*Números, operações, incógnita e uma relação de igualdade.*
*E para resolvê-la precisamos determinar o valor de x...*
*Precisamos chegar à equação x igual a algum número.*
*E para chegar lá, vamos escrever equações equivalentes à primeira.*

*No núcleo da balança de dois pratos poderíamos retirar* $87$ *de cada prato,*
*mas queremos justificações que nos vinculem ao núcleo comum...*
*Afinal, alguns dos monstros de estimação do professor de matemática*
*não passam nem perto da balança de dois pratos...*

*Podemos começar adicionando o simétrico de* $87$ *à expressão da esquerda,*
*assim nos aproximamos da forma desejada.*
*Na balança, precisaríamos retirar a mesma massa dos dois pratos*
*para manter o equilíbrio...*

*Mas agora estamos considerando uma relação de igualdade no núcleo comum.*
*Precisamos de outra justificação!*
*E podemos usar a seguinte proposição:* $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$.

*Para manter a igualdade entre os dois membros dessa equação,*
*precisamos adicionar o simétrico de* $87$ *a* $123$ *também...*
*Então* $3x + 87 = 123$
*é equivalente à* $3x + 87 - 87 = 123 - 87$,
*E assim* $3x = 36$.

*Agora, ao invés de dizer o que deve ser feito, vamos imaginar...*
*Talvez algum aluno possa perguntar:*
*Agora temos que adicionar o simétrico de* $3x$*!?*
*O que você diria?*
*Vamos tentar, diríamos nós.*
$0 = 36 - 3x$
*Opa! Trocamos até o* $x$ *de lugar...*
*E estaria errado?*
*Ou apenas estaríamos explorando outras formas*
*de equivalência da equação inicial?*

*Estaríamos certamente fazendo um caminho mais longo,*
*mas buscando alguma ressonância com emancipação intelectual*
*não estamos preocupados em encontrar o caminho mais curto,*
*e sim o mais potente.*

*Adicionar o simétrico, neste caso,*
*não está nos aproximando da forma desejada.*

*Precisamos achar outra proposição que possa ajudar...*

*Vamos voltar à equação anterior* $3x = 36$...

*Mas espere!*

*Antes, deixe que outras transformações aconteçam na sua imaginação...*

*E não deixe nada sem justificação!*

...

*Para chegarmos à forma "$x$ igual a algum número",*

$3x$ *deve transformar-se em* $x$,

*mas não podemos só passar a borracha e nos despedirmos do* $3$.

$3x$ *indica uma multiplicação entre esses dois números: um conhecido, outro desconhecido.*

*Podemos pensar em números inversos!*

*Se* $a$ *é inverso de* $b$, *então* $a \cdot b = 1$.

*E isso no conjunto dos Naturais nem tem muita graça,*

*pois* $a \cdot b = 1 \Leftrightarrow a = b = 1$.

*No conjunto dos Inteiros tem só mais uma maneira de isso acontecer,*

$a = b = -1$.

*Mas no conjunto dos Racionais, conseguimos inverter quase todos os números!*

*Quase todos, não podemos nos esquecer do zero!*

*Ele absorve todos os números que multiplica...*

*Não sendo zero, até número desconhecido tem inverso!*

*Multiplicamos* $3x$ *por* $\frac{1}{3}$ *e eis ai o x da equação.*

*Mas se multiplicamos* $3x$ *por* $\frac{1}{3}$,

*não podemos nos esquecer de multiplicar* $36$ *por* $\frac{1}{3}$.

*E justificamos essa afirmação com a seguinte proposição:*

$a = b \Leftrightarrow ac = bc, c \neq 0$.

*Multiplicação que acabou em divisão!*

*Coisas desses monstros de estimação do professor de matemática...*

Ao resolvermos a equação $3x + 87 = 123$, buscamos justificações no núcleo comum e enfatizamos as manipulações aritméticas que viabilizaram as transformações da equação inicial. Expressamos nossa forma de resolução com a intenção de provocar outras formas... Aqui nos obrigamos a imaginar aquilo que um aluno poderia expressar, mas em sala de aula não precisamos necessariamente imaginar; ouvir os alunos e provocar a expressão daquilo que veem torna-se potente para que outras aventuras possam surgir.

Por meio desta aventura foi possível perceber e expressar a importância de conhecer e de provocar a exploração dos diferentes significados da relação de igualdade, uma vez que o modo como vemos esta relação constitui-se central no estudo das equações de primeiro grau. E para o aluno que está acostumado a ler números e operações da esquerda para direita, vendo no símbolo de igualdade um operador, considerar os novos significados deste símbolo torna-se um desafio. E lidar com esse desafio implica olhar para as diferenças. Consideramos importante conhecê-las e provocar os alunos a explora-las, ao invés de insistir em dizer e acreditar que o símbolo de igualdade significa *sempre a mesma coisa*. Quando ignoramos os diferentes significados reforçamos o modo operacional de resolver equações e nos mantemos resignados a explicações do tipo *faça assim*, o que inviabiliza a produção de significados para afirmações da álgebra e a expressão daquilo que se vê, pensa e faz.

Cena V – Números e letras: *quase a mesma coisa*?

*Questionadora menciona as diferenças que percebe*
*entre operações envolvendo números e letras.*
*Explicadora traz, novamente, palavras e exemplos do livro.*

**Questionadora:** O livro nos diz que as letras se comportam de forma semelhante aos números, e nos traz como exemplo as seguintes comparações:

$$7+7=2\cdot 7 \quad \text{e} \quad x+x=2\cdot x=2x$$

$$4+4+4=3\cdot 4 \quad \text{e} \quad a+a+a=3\cdot a=3a$$

E nos parecem boas comparações, no entanto há diferenças que precisam ser consideradas. Até então, para um aluno de sétimo ano, $7+7=2\cdot 7$ ou $7+7=14$? O aluno está provavelmente acostumado a responder $7+7=14$, provavelmente reconheça a igualdade $7+7=2\cdot 7$, mas pode ser que ainda lhe pareça necessário efetuar $7+7=2\cdot 7=14$, como sempre fora solicitado. Antes era preciso encontrar um valor final, uma resposta numérica, e agora, operando parte numérica e literal, o objetivo consiste em buscar a forma irredutível para indicar quais operações serão desenvolvidas com o número desconhecido, que pode ser uma incógnita ou uma variável. Incógnita quando o valor do número desconhecido pode ser determinado; variável quando o número desconhecido pode variar entre valores de determinado conjunto numérico.

Com o uso das letras podemos representar o desconhecido, e assim, por meio de manipulações e propriedades aritméticas, conseguimos lidar com esse desconhecido como se fosse um conhecido. As manipulações que podemos fazer com as letras também são possíveis com os números, no entanto com números podemos fazer manipulações específicas que não conseguimos com as letras. Esta diferença fica mais evidente quando comparamos outros exemplos, tais como $7+4$ e $x+a$, no primeiro caso $7+4=11$, no segundo $x+a=x+a$. Quando as operações envolvem números conhecidos é pouco provável que fiquemos satisfeitos com expressões tais como $7+4$, os números em geral nos pedem um fechamento, um valor final, diferentemente do que ocorre quando operamos com letras. Operando com números desconhecidos, como em $x+a$, sabemos que dois números serão adicionados, no entanto essa forma não pode ser reduzida da mesma maneira como fazemos com números.

A forma como costumamos lidar com números não evidencia manipulações e propriedades aritméticas, e por esse motivo consideramos que a comparação não pode ser feita de modo tão simplificado. Para um aluno de sétimo ano, que vem desenvolvendo operações apenas com números conhecidos, há mais semelhanças ou diferenças?

É bastante provável que tais propriedades e manipulações não tenham sido exploradas quando as operações eram desenvolvidas apenas em relação a números conhecidos. E para olharmos para as diferenças, podemos comparar as expressões $3x + 2x$ e $3 \cdot 2 + 2 \cdot 2$. O que há de semelhante e o que há de diferente?

Vemos como semelhança a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, $3x + 2x = (3 + 2)x$ e $3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = (3 + 2)2$, ou seja, a propriedade é válida tanto para letras como para números. No entanto, seja com letras ou com números a propriedade pode passar despercebida. A expressão numérica pode ser desenvolvida da seguinte maneira: $3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 6 + 4 = 10$. A expressão algébrica pode ser desenvolvida por meio de procedimento que instrui a agrupar os termos semelhantes e somar os coeficientes. Ambos os procedimentos presentes e frequentes no ensino fundamental. A semelhança, que reside na propriedade, passa despercebida, pois mesmo na expressão algébrica, onde seria relevante explicitar a propriedade, o *faça assim* se sobrepõe.

Quando lidamos com números desconhecidos podemos nos manter centrados em cálculos e produzir explicações do tipo *faça assim* esquivando-nos da exploração de propriedades e manipulações, o que nos parece pouco potente, pois o cálculo constitui um modo específico de lidar com números e operações. A comparação sugerida pelo livro pode tornar-se potente se não nos contentarmos em seguir o *faça assim*, se ao invés de dizermos que número e letra *é quase a mesma coisa* considerarmos as propriedades e manipulações aritméticas.

Observamos que em algum momento o livro menciona algo quanto à igualdade $2 \cdot x = 2x$ ...

**Explicadora:** O livro menciona:

*O sinal de multiplicação não precisa ser escrito nas multiplicações envolvendo letras*

- $2 \cdot x$ *será escrito como* $2x$
- $7 \cdot y + 8$ *será escrito como* $7y + 8$, *e assim por diante.* (p.209)

**Questionadora:** Esta é uma consideração que nos parece importante, pois $2x$ não consiste em um resultado, é apenas uma forma usual para indicar a operação de multiplicação entre número e letra, entre conhecido e desconhecido.

Ao mencionar a distributividade da multiplicação em relação à adição o livro faz algo similar, compara números e letras novamente. Vamos ver essas comparações...

**Explicadora:** O livro parte do princípio de que a propriedade já é conhecida, e menciona que, pelo próprio nome fica evidente que a propriedade nos *permite distribuir a multiplicação.*

Trazendo como exemplo:

$$2 \cdot (4 + 5) = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5$$

$$3 \cdot (7 - 2) = 3 \cdot 7 - 3 \cdot 2$$ (p.210)

E para nos mostrar que a propriedade segue valendo para as letras, apresenta os exemplos:

$$4 \cdot (x + 3) = 4 \cdot x + 4 \cdot 3 = 4x + 12$$

$$(-5) \cdot (a + 2) = (-5) \cdot a + (-5) \cdot 2 = -5a - 10$$

$$7 \cdot (3 - 2y) = 7 \cdot 3 + 7 \cdot (-2y) = 21 - 14y$$ (p.210)

**Questionadora:** Não consideramos óbvia a relação entre nome e propriedade, afinal as palavras *propriedade distributiva*, por si só, não dizem nada, outras palavras tornam-se necessárias para falar dessa propriedade. Distributividade pode estar associada à multiplicação e adição, multiplicação e subtração, divisão e adição, potenciação e multiplicação, união e interseção de conjuntos, interseção e união de conjuntos. Em geral, no ensino básico, distributividade refere-se à distribuição da multiplicação em relação à adição: $a(b + c) = ab + ac$. Mas há várias possibilidades para a expressão *propriedade distributiva*. Duas palavras podem ser passagem para uma aventura, mas apenas duas palavras não podem ser consideradas suficientes para substituir a definição de uma propriedade como a distributividade. E, além da não obviedade entre nome da propriedade e definição, há ainda diferenças consideráveis entre desenvolver $4 \cdot (x + 3)$ e $2 \cdot (4 + 5)$, por exemplo.

Em $4 \cdot (x + 3)$, a expressão final tornou-se $4x + 12$ e não $4 \cdot x + 4 \cdot 3$, pois com os números ainda era possível efetuar uma operação, mas entre letra e número isso não era mais possível. Outro aspecto que também podemos mencionar refere-se ao desenvolvimento de $2 \cdot (4 + 5)$. Neste tipo de situação tendemos a efetuar $2 \cdot 9 = 18$ e não $2 \cdot 4 + 2 \cdot 5$, embora pudéssemos explorar essa e muitas outras formas:

$$2 \cdot (4 + 5) = 2 \cdot (5 + 4) = 2 \cdot (0 + 9) = 2 \cdot (1 + 8) =$$

$$= 2 \cdot (2 + 7) = 2 \cdot (3 + 6) = 2 \cdot 3(1 + 2).$$

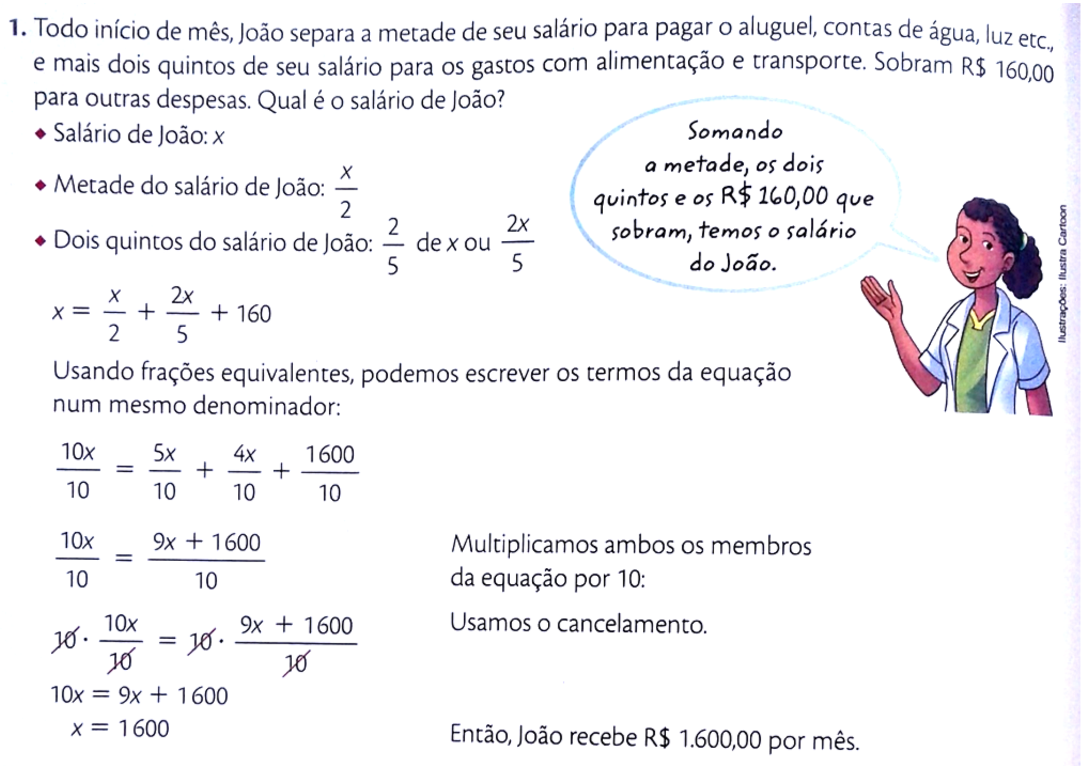
Uma exploração que pode nos ajudar a perceber os números e operações de outra forma, bem como a relação de igualdade que, nesta reescrita, deixa de ser operador e passa a estabelecer uma relação bidirecional. Comparar letras com números, sem ignorar as diferenças, constitui um meio potente para que o aluno possa aprender a língua dos objetos que compõem o núcleo comum, o que também poderá implicar em uma expansão no modo como vinha explorando números e operações específicas. Uma expansão que, incluindo a exploração de propriedades e manipulações aritméticas, permite-nos perceber números e operações para além do modo particular, o cálculo.

## Cena VI – Por que precisamos eliminar denominadores?

*Questionadora está curiosa com o subtítulo Eliminando denominadores, e quer saber o que foi explicado. Explicadora nos aproxima das palavras deste subtítulo.*

**Questionadora:** O título *Eliminando denominadores* nos deixa curiosos quanto às explicações.

**Explicadora:** O livro traz dois exemplos, vejamos o primeiro que está mais detalhado:



**1.** Todo início de mês, João separa a metade de seu salário para pagar o aluguel, contas de água, luz etc., e mais dois quintos de seu salário para os gastos com alimentação e transporte. Sobram R$ 160,00 para outras despesas. Qual é o salário de João?

- Salário de João: $x$
- Metade do salário de João: $\frac{x}{2}$
- Dois quintos do salário de João: $\frac{2}{5}$ de $x$ ou $\frac{2x}{5}$

$$x = \frac{x}{2} + \frac{2x}{5} + 160$$

Usando frações equivalentes, podemos escrever os termos da equação num mesmo denominador:

$$\frac{10x}{10} = \frac{5x}{10} + \frac{4x}{10} + \frac{1600}{10}$$

$$\frac{10x}{10} = \frac{9x + 1600}{10}$$

Multiplicamos ambos os membros da equação por 10:

$$\cancel{10} \cdot \frac{10x}{\cancel{10}} = \cancel{10} \cdot \frac{9x + 1600}{\cancel{10}}$$

Usamos o cancelamento.

$$10x = 9x + 1600$$

$$x = 1600$$

Então, João recebe R$ 1.600,00 por mês.



Figura 18: Andrini e Vasconcellos, 2015, 7º ano, p. 216.

**Questionadora:** Este exemplo nos remete a um *faça assim* específico para equações com coeficientes racionais não inteiros. Vemos que essa situação pode ser resolvida sem necessitarmos de uma equação que a descreva. Sabendo que João gasta $\frac{1}{2} + \frac{2}{5}$ de seu salário é possível concluir que $\frac{9}{10}$ do salário de João é dedicado aos gastos mencionados.

Deste modo, $\frac{1}{10}$ de seu salário corresponde a R$ 160,00, ou seja, o salário completo corresponde a R$ 1.600,00.

Pensar a resolução desta situação por meio de equações parece mais uma imposição do conteúdo do que um modo potente de explorá-la, mas ainda assim constitui uma possibilidade. No entanto, o que chama a atenção não é o tipo de resolução sugerida, mas sim o procedimento que explica a eliminação de denominadores.

O livro expressa a equação $x = \frac{x}{2} + \frac{2x}{5} + 160$ a partir da situação apresentada no exercício. Uma equação que apresenta dois coeficientes racionais não inteiros, expressos em forma de fração. A expressão *eliminar denominadores* pode fazer sentido quando estamos considerando a resolução das equações ao modo operacional, conforme caracterizamos na cena IV; um modo centrado em desenvolver cálculos para determinar o valor da incógnita. O objetivo do procedimento explicado para eliminar denominadores consiste em facilitar o desenvolvimento desses cálculos, viabilizando a aplicação do *faça assim* explicado para equações com coeficientes inteiros.

Com isso, sentimos que vamos ficando cada vez mais presos às explicações, pois para cada nova particularidade, um procedimento. Se a equação resulta de sentença que envolve uma relação de igualdade entre duas expressões algébricas, tais como $3x = 2x + 100 + 50$, o livro sugere que imaginemos a equação como uma balança em equilíbrio. Se os coeficientes são não inteiros, expressos em forma de fração, o livro instrui a desenvolver cálculos para eliminar denominadores.

No entanto, quando consideramos a resolução ao modo por transformações, a expressão *eliminar denominadores* torna-se um tanto dissonante. O procedimento que explica a eliminação de denominadores não trata propriamente da exclusão de certos números, consiste na transformação da equação por meio de manipulações aritméticas. Não eliminamos, transformamos. Não apagamos, nem excluímos os denominadores, encontramos uma forma equivalente, com coeficientes inteiros, empregando as mesmas operações aos dois membros da equação.

Consideramos uma boa estratégia transformar a equação inicial em uma equação com coeficientes inteiros para facilitar o desenvolvimento da resolução, no entanto encontramos muitas afirmações e poucas justificações. O livro não conta o porquê daquilo que diz, mas podemos fazer de suas palavras meio para buscar por esses porquês. E por isso fazemos tantas perguntas, para procurar alguns dos porquês e para tentar provocar a busca de outros porquês. E olhando para a resolução explicada no livro, podemos fazer esse exercício, sozinhos ou acompanhados de nossos alunos, podemos fazer perguntas para que justificações possam ser enunciadas. Duvidar, perguntar e buscar respostas constitui um modo de resistência ao embrutecedor *faça assim*. Encerramos esta cena contando nossa aventura nessa resolução...

O livro nos diz que $x = \frac{x}{2} + \frac{2x}{5} + 160$ equivale à $\frac{10x}{10} = \frac{5x}{10} + \frac{4x}{10} + \frac{1600}{10}$

Mas como justificamos esta afirmação?

O livro partiu da reescrita de frações equivalentes, e reescrevendo todos os termos da equação sobre um mesmo denominar obteve essa equivalência, mas podemos pensar de forma diferente...

Ainda seguindo a estratégia de obter uma equação equivalente com coeficientes inteiros, podemos observar quais operações precisam ser desenvolvidas para chegarmos à forma desejada...

Começamos olhando para os coeficientes que são não inteiros, e pensamos que podemos investigar como transformar $\frac{x}{2}$ em $x$ e $\frac{x}{5}$ em $x$, e para isso podemos recorrer à definição de número inverso novamente: $a$ é inverso de $b \Leftrightarrow a \cdot b = 1$.

Para realizarmos as transformações desejadas precisamos dos inversos de $\frac{1}{2}$ e de $\frac{1}{5}$, respectivamente, $2$ e $5$. Então podemos começar as manipulações...

$$2 \cdot x = 2 \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{2x}{5} + 160\right) \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot 5 \cdot x = 2 \cdot 5 \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{2x}{5} + 160\right)$$

Assim, $10x = 5x + 4x + 1600 = 9x + 1600$

Portanto, $10x = 9x + 1600 \Leftrightarrow 10x - 9x = 9x + 1600 - 9x$

Logo, $x = 1600$

Ou ainda,

$$x = \frac{x}{2} + \frac{2x}{5} + 160 = 0{,}5x + 0{,}4x + 160 = 0{,}9x + 160$$

Assim, $x = 0{,}9x + 160 \Leftrightarrow x - 0{,}9x = 0{,}9x + 160 - 0{,}9x$

Ou seja, $0{,}1x = 160 \Leftrightarrow 10 \cdot 0{,}1x = 10 \cdot 160$

Assim, $x = 1600$.

E há ainda outros modos...

## Cena VII – Afinal, o que é uma equação?

*Questionadora considera oportuno reverter a ordem do livro didático*
*e faz de uma das primeiras perguntas do livro a cena final.*
*Explicadora segue nos aproximando das palavras do livro didático*
*e, nesta cena, arrisca fazer algumas perguntas.*

**Questionadora:** Um dos títulos da unidade *Equações* chama-se *O que é uma equação?* E o livro responde com a seguinte afirmação:

*Equações são igualdades em que há pelo menos uma letra representando um número desconhecido. Por tanto 3x + 87 = 123 é uma* ***equação.*** (p. 204)

Sentimos que a definição foi simplificada e isso pode nos trazer algumas confusões. Mas antes de falarmos mais sobre a definição, há uma explicação, neste título, que causou estranhamento. O livro explica que há três tipos de equação, e as classifica quanto às soluções.

Vamos rever essa explicação e os exemplos que o livro apresenta.

**Explicadora:** O livro nos diz que *uma equação pode ter uma única solução, mais do que um solução ou, ainda, pode não admitir solução. Observe:*

- $n + 2 = 5$ → *admite somente uma solução:* $n = 3$*;*
- $x = x + 3$ → *não admite soluções: um número nunca é igual à sua soma com* 3*;*
- $y = y$ → *tem infinitas soluções, pois todo número é igual a ele mesmo.* (p.204)

**Questionadora:** O livro, embora não mencione a expressão *equações de primeiro grau*, de um modo geral refere-se expressivamente a esse tipo de equação. Uma percepção que se constitui ao observarmos o modo como define e exemplifica aquilo que considera ser uma equação e o predomínio de equações de primeiro grau em toda a unidade. Existem vários tipos de equações, as quais podemos classificar quanto ao grau da incógnita e quanto a quantidade de incógnitas. Consideramos importante destacar essas distintas classificações. E constituem o foco desta pesquisa as equações de primeiro grau com apenas uma incógnita, ou seja, aquelas que podem ser escritas na forma $ax + b = 0$, com $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Portanto, se $a = 0$ não temos uma equação de primeiro grau, temos uma sentença fechada que envolve relação de igualdade. [4]

Do Teorema Fundamental da Álgebra decorre que toda equação de primeiro grau com coeficientes reais possui uma única raiz real. Vamos incluir a seguir uma demonstração direta deste resultado.

Dada a equação $ax + b = 0$, com $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$,

$-\frac{b}{a}$ é solução, pois $a\left(-\frac{b}{a}\right) + b = 0$

Suponhamos que $c \in \mathbb{R}$ também seja solução de $ax + b = 0$

Logo $ac + b = 0$, mas

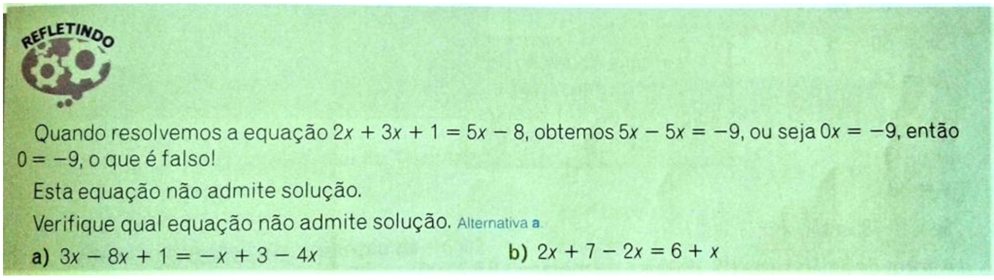
$$ac + b = 0 \Leftrightarrow ac + b - b = 0 - b \Rightarrow ac = -b$$

Assim, como $\mathrm{a} \neq 0, ac = -b \Leftrightarrow \frac{1}{a}ac = \frac{1}{a}(-b) \Rightarrow c = -\frac{b}{a}$

Portanto, se estamos tratando de equações de primeiro grau não faz sentido classificá-las como equações sem solução, com única solução ou com infinitas soluções. Essa classificação nos causou estranhamento, pois foi mencionada brevemente em uma unidade que, embora não esteja explicito, dedica-se a equações de primeiro grau. Afinal, se as equações funcionam como a balança de dois pratos, uma balança teria seus pratos em equilíbrio se em um prato tivéssemos o peso $x$ e no outro o peso $x + 3$? Equações do tipo *sem solução* ou *com infinitas soluções* aparecem em quais partes do livro?

[4] O universo numérico do aluno de sétimo ano constitui-se do conjunto dos números racionais. No entanto, nos referimos ao conjunto dos números reais, pois o texto foi produzido pensando no professor, em convidá-lo à reflexão e ao aprofundamento de conceitos e definições matemáticos.

**Explicadora:** Revendo a unidade, encontramos exemplos que remetem a essa classificação:


REFLETINDO

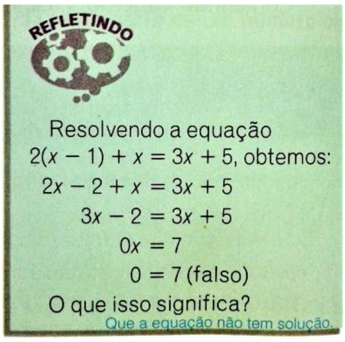
Quando resolvemos a equação $2x + 3x + 1 = 5x - 8$, obtemos $5x - 5x = -9$, ou seja $0x = -9$, então $0 = -9$, o que é falso!

Esta equação não admite solução.

Verifique qual equação não admite solução. Alternativa a.

a) $3x - 8x + 1 = -x + 3 - 4x$ b) $2x + 7 - 2x = 6 + x$

Figura 19: Andrini e Vasconcellos, 2015, 7º ano, p. 209.

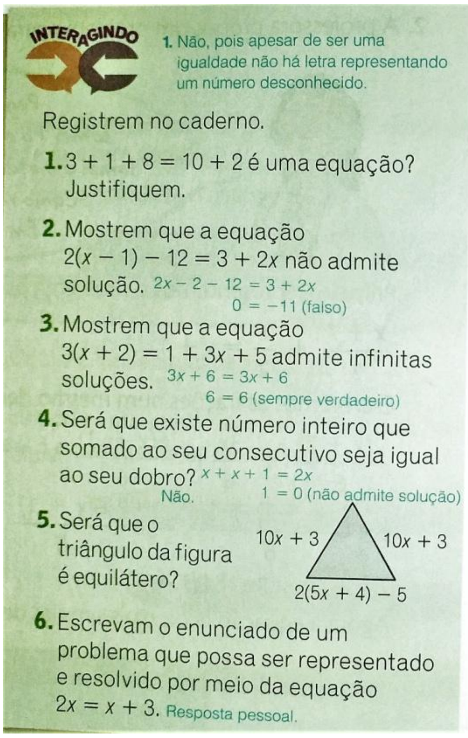

REFLETINDO

Resolvendo a equação $2(x - 1) + x = 3x + 5$, obtemos:

$$2x - 2 + x = 3x + 5$$
$$3x - 2 = 3x + 5$$
$$0x = 7$$
$$0 = 7 \text{ (falso)}$$

O que isso significa? Que a equação não tem solução.

Figura 20: Andrini e Vasconcellos, 2015, 7º ano, p.210.


INTERAGINDO

1. Não, pois apesar de ser uma igualdade não há letra representando um número desconhecido.

Registrem no caderno.

**1.** $3 + 1 + 8 = 10 + 2$ é uma equação? Justifiquem.

**2.** Mostrem que a equação $2(x - 1) - 12 = 3 + 2x$ não admite solução. $2x - 2 - 12 = 3 + 2x$ $0 = -11$ (falso)

**3.** Mostrem que a equação $3(x + 2) = 1 + 3x + 5$ admite infinitas soluções. $3x + 6 = 3x + 6$ $6 = 6$ (sempre verdadeiro)

**4.** Será que existe número inteiro que somado ao seu consecutivo seja igual ao seu dobro? $x + x + 1 = 2x$ $1 = 0$ (não admite solução) Não.

**5.** Será que o triângulo da figura é equilátero?



**6.** Escrevam o enunciado de um problema que possa ser representado e resolvido por meio da equação $2x = x + 3$. Resposta pessoal.

Figura 21: Andrini e Vasconcellos, 2015, 7º ano, p.215.

**Questionadora:** A partir desses exemplos e exercícios podemos perceber que, no livro, as *equações sem solução* surgem de sentenças que apresentam, em um primeiro momento, uma letra que representa um número desconhecido, conforme mencionado na definição. No entanto, desenvolvendo as operações, chegamos a uma sentença sem letras, sem número desconhecido. Não temos uma equação de primeiro grau, mas sim uma sentença fechada para a qual a relação de igualdade não se verifica.

O argumento que supõe a existência de *equações sem solução* torna-se duvidoso, mesmo ao considerarmos a definição que encontramos no livro didático. Se por um lado podemos dizer que $2x + 3x + 1 = 5x - 8$ é uma equação, pois trata-se de uma igualdade *em que há pelo menos uma letra representando um número desconhecido* (p.204), por outro lado, ao desenvolvermos os cálculos, obtemos $0 \cdot x = -9$, "igualdade" em que não há letras, visto que a multiplicação de qualquer número por zero resulta no produto zero, excluindo a eventual incógnita da sentença. Assim não teríamos uma equação. No entanto, $0 \cdot x = -9$, no livro didático, constitui um exemplo de equação sem solução. Uma ambiguidade que pode ser evitada ao fazermos uso da linguagem algébrica na definição. E, por que evitar o uso dessa linguagem se um dos objetivos do ensino escolar é que o aluno a compreenda?

Algo similar, em relação à definição, acontece com as equações que apresentam infinitas soluções, para as quais encontramos apenas um exercício, item 3 da figura 21. Neste exercício, para mostrar que $3(x + 2) = 1 + 3x + 5$ constitui uma *equação com infinitas soluções*, o livro nos diz que basta desenvolver os cálculos e justificar que $6 = 6$ *é sempre verdadeiro*. No entanto, poderíamos também concluir que $3x = 3x$, $x = x$, $0 = 0$ ... Uma sentença que também resultou em uma igualdade *sem letras*, contrariando novamente a definição apresentada pelo livro. Aqui novamente não obtemos uma equação de primeiro grau. Trata-se de uma sentença para a qual a igualdade se mantém para todo e qualquer valor real. Dizer que essa sentença admite infinitas soluções porque $6 = 6$ *é sempre verdadeiro*, não justifica a afirmação que foi feita. Neste caso a ideia de variação nos traria uma justificação mais adequada, pois, $x = x$, ou seja, qualquer valor satisfaz essa relação de igualdade.

**Explicadora:** Mas a expressão *equação sem solução* às vezes surge. Isso está errado? Equações sempre têm solução?

**Questionadora:** Nem sempre. Se uma equação de primeiro grau, por exemplo, for produzida em um contexto, no qual apenas soluções inteiras fazem sentido, podemos dizer que se trata de uma equação sem solução em $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$. Não podemos dizer que uma equação não possui solução sem especificar o universo numérico ou sem evidenciar o motivo que restringe a solução, pois em $\mathbb{R}$ sempre existe solução única.

**Explicadora:** Afinal, o que é uma equação?

**Questionadora:** O livro produz uma definição de equação quando nos diz que *Equações são igualdades em que há pelo menos uma letra representando um número desconhecido. Portanto,* $3 \cdot x + 87 = 123$ *é uma equação.* (p.204). Responder com precisão "O que é uma equação?" não constitui um interesse desta pesquisa, e não nos parece uma tarefa simples. Mas podemos escrever uma definição para equações de primeiro grau...

*Não podemos dizer que equação e igualdade são a mesma coisa.*
*Uma equação constitui-se por uma relação de igualdade.*
*Podemos dizer que uma equação não existe se não houver essa relação,*
*mas nem toda igualdade constitui uma equação.*
*E, se estamos tratando de equações de primeiro grau de*
*uma incógnita.*
*Conseguimos escrevê-la na forma* $ax + b = 0$, *com* $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$.
*E quando* $a = 0$ *temos uma sentença fechada,*
*e não mais uma equação de primeiro grau.*

## ENTREATO V

E com essas cenas, que foram bastante ensaiadas, foi possível trazer um pouquinho de nossa aventura, que contamos na expectativa de que outras possam surgir. Não imaginamos esses diálogos sendo reproduzidos, desejamos que nossas palavras sejam passagens para outras. Esperamos que esta conversa com o livro didático constitua-se enquanto um convite, uma possibilidade para a poesia coexistir entre as palavras do *faça assim*, abrindo passagens a aventuras intelectuais.

# SEXTO ATO: ENCERRANDO

## Cena I – Antes que desça a cortina

O conceito de emancipação intelectual provocou, desde o começo, os movimentos desta pesquisa. Buscando alternativas para escapar por entre as palavras do *faça assim* conseguimos pensar o ensino das equações de primeiro grau de outro modo, conseguimos ver o que antes não víamos. Cada uma das cenas que compõem o diálogo tornou-se possível por nos sensibilizarmos às palavras de Rancière, de Lins e de Gimenez. Palavras que poetizaram nossa busca. E esperamos que as palavras e a forma de apresentação deste texto possam inspirar seus leitores a exercitar a liberdade de sua inteligência. Exercício que se constitui enquanto expressamos aquilo que vemos, pensamos e fazemos, sem deixar de investigar e contar os porquês daquilo que expressamos. Um exercício que nos possibilita ver poesia onde antes não víamos.

Acreditamos que conseguimos pensar o ensino das equações de primeiro grau em consonância com o conceito de emancipação intelectual, pois a emancipação não se relaciona com o encontro de certos percursos, mas sim em conseguir encontrar de modo autônomo um percurso, expressando o porquê dos movimentos que o compuseram. A atividade algébrica tem um norte: números e operações, mas também não se relaciona a um percurso predeterminado. Olhar para as equações como um conteúdo que apresenta potencialidade para este tipo de atividade produziu ressonância, pois expressar aquilo que vemos, pensamos e fazemos constitui um meio para produzirmos significados para afirmações da álgebra. Na expressão dos porquês de nossas afirmações encontramos a ressonância que desejamos.

Esperamos que a conversa entre Explicadora e Questionadora possa provocar outras formas de explicação no ensino introdutório das equações de primeiro grau. Que essa conversa possa ser meio para busca por alternativas, que nos sensibilize a nos tornarmos mais cuidadosos e atentos ao campo semântico de cada um dos objetos que mencionamos em nossas aulas, cultivando um olhar aberto à diferença, considerando o aluno capaz de aventurar-se no mundo dos números e das operações. Fazendo dessas alternativas um meio para que o ensino introdutório das equações de primeiro grau possa, em algum momento, entrar em ressonância com emancipação intelectual.

Buscar passagens por entre as palavras do *faça assim* nos oportunizou considerar definições que nem imaginávamos necessárias, nos fez refletir sobre o modo como usamos as palavras em nossas explicações. Em geral as usamos para dizer o que deve ser feito e não para poetizar. E quando estamos sintonizados com o *faça assim*, produzimos perguntas ao estilo Sócrates-Mênon, simplificamos conceitos, antecipamos respostas e mantemos o foco em procedimentos.

Ao perguntarmos ao estilo Sócrates-Mênon não desejamos nada além de *sim* como resposta. Ao olharmos apenas para procedimentos e antecipá-los estendemos um véu que encobre outras formas de resolução, que tenta esconder passagens para aventuras. Ao simplificarmos, por vezes, produzimos definições que não pertencem ao conjunto de afirmações da álgebra escolar, produzimos dissonância entre o conceito original e sua simplificação. Nenhuma dessas manifestações da forma *faça assim* provoca o reconhecimento de capacidades, seguem nos ditando o que devemos ver, pensar e fazer. As palavras, nesta forma de explicação, não nos convidam a aventuras intelectuais, mas também não impedem que encontremos passagens para essas aventuras. Assumir o papel de Questionadora constitui um meio de procurar essas passagens.

*Toda palavra, dita ou escrita, é uma tradução*
*que só ganha seu sentido na contratradução,*
*na invenção das causas possíveis*
*para o som que ouviu ou para o traço escrito (...)"*
*Rancière, 2015, p.95*

As cortinas já começam a descer, e precisamos escolher as palavras para este momento. Vamos aproveitar para reforçar o convite que fizemos incansavelmente, o convite ao exercício de liberdade...

*O que vejo? O que penso? O que posso fazer?*
*Por que vejo desta forma e não de outra?*
*Por que penso desta forma e não de outra?*
*Por que faço desta forma e não de outra?*

## Referências


AGUIAR, Márcia. **O percurso da didatização do pensamento algébrico no Ensino Fundamental: Uma análise a partir da Transposição Didática e da Teoria Antropológica do Didático**. 2014. 312 f. Tese. (Doutorado). Ensino de ciências e Matemática, Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014. Disponível em: <10.11606/T.48.2014.tde-01042015-135259>. Acesso em: 24 set. 2017.

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria José. **Praticando matemática (Edição Renovada)**. 4 ed. São Paulo: Brasil, 2015.

ANITELLI, Fernando. **Amem (Retrovisor).** In: O Teatro Mágico. Entrada para raros. 2013. Disponível em: https://youtu.be/asMu1eDsnGo. Acesso: 23/02/2019.

ANITELLI, Fernando. **Separô.** In: O Teatro Mágico. Entrada para raros. 2013. Disponível em: https://youtu.be/cPmR7m9hhrg. Acesso: 23/02/2019.

BRASIL. MEC. SEB. **Dados estatísticos**. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica. (2017). Disponível em: <https://www.fnde.gov.br/centrais-de-conteudos/publicacoes/category/35-dados-estatisticos?download=10068:pnld-2017-cole%C3%A7%C3%B5es-mais-distribu%C3%ADdas-por-componente-curricular-s%C3%A9ries-finais-ensino-fundamental>. Acesso em: 06/02/2019.

BRASIL. MEC. SEB. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, DF, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/02/bncc-20dez-site.pdf.>. Acesso em: 06/02/2019.

BRASIL. MEC. SEB. **Guia de Livros didáticos**. PNLD 2017: matemática – Ensino fundamental anos finais. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, 2016.

BRASIL. MEC. SEB. **Dados estatísticos**. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica. (2014). Disponível em: <https://www.fnde.gov.br/centrais-de-conteudos/publicacoes/category/125-guias?download=8499:colecoes-mais-distribuidas-por-componente-curricular-ensino-fundamental>. Acesso em: 06/02/2019.

CHOPPIN, Alain. **História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte.** Educação e Pesquisa, São Paulo, v.30, n.3, p. 549-566, set./dez. 2004. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/ep/v30n3/a12v30n3.pdf>. Acesso em: 03/06/2018.

CORAZZA, Sandra. **Artistagens: Filosofia da diferença e educação**. Coleção Educação: Experiência e Sentido. Belo Horizonte: Autêntica. 2007.

CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade; OLIVEIRA, Hélia Margarida de. Pensamento Algébrico ao longo do Ensino Básico em Portugal. **Bolema**. Rio Claro (SP), v. 24, n.38, p. 97-126, abr. 2011. Disponível em: <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/4598/3704>. Acesso em: 14/02/2019.

GAY, Mara Regina Garcia. **Araribá Plus Matemática**. Caderno de Atividades 8º ano. 1ed. São Paulo: Moderna, 2014.

GIULIANO, Facundo. CANTARELLI, María N. La Igualdad en la Revuelta Educativa: una conversación con Jacques Rancière. **Educação & Realidade**, Porto Alegre, v. 41, n. 2, p. 613-627, abr./jun. 2016.

KOHAN, Walter Osmar. **Sócrates & a Educação: O enigma da filosofia**. Trad. Ingrid M. Xavier. Coleção Pensadores & Educação. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

KOHAN, Walter Osmar. Três lições de filosofia da Educação. **Educação & Sociedade**, 2003, vol.24, n.82. p.221-228. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1590/S0101-73302003000100012>. Acesso em: 01/06/2018.

KUHN, Letícia Diello. **Formas da explicação: Matemática, então?** Trabalho de conclusão de curso. UFRGS. Porto Alegre. 2018. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/184252>. Acesso em: 06/02/2019.

LAURO, Rafael. Filosofia em tom maior - Ressonância. **Razão Inadequada**. São Paulo. 2015. Disponível em: <https://razaoinadequada.com/2015/10/28/ressonancia/>. Acesso em: 27/02/2019.

LINS, Romulo Campos. **Matemática, monstros, significados e educação matemática**. In: BICUDO, Maria A. V.; BORBA, Marcelo de C. (Orgs.). Educação Matemática: pesquisa em movimento. 2ª Edição. São Paulo: Cortez, 2005. p. 92-120.

LINS, Romulo Campos. **A framework for understanting what algebraic thinking is**. 1992. PhD Thesis. University of Nottingham, UK.

LINS, Romulo Campos; GIMENEZ. Joaquim. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. São Paulo: Papirus, 1997.

LÓPEZ, Maximiliano Valério. **Acontecimento e Experiência no Trabalho Filosófico com Crianças**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2008.

PLATÃO. **Mênon**. Trad. Maura Iglésias. Texto estabelecido e anotado por John Burnet. 1ed. Rio de Janeiro: PUC-RJ. São Paulo: Edições Loyola, 2001.

PONTE, João Pedro; BRANCO, Neusa; Matos, Ana. **Álgebra no ensino básico**. Lisboa: DGIDC. 2009.

PROUST, Marcel. **Em busca do tempo perdido: o tempo recuperado.** vol. 7. Trad. Fernando Py. Rio de Janeiro: Ediouro. 1995.

RANCIÈRE, Jacques. **O mestre ignorante: Cinco lições sobre a emancipação intelectual**. Trad. Lílian do Valle. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

RANCIÈRE, Jacques. **O espectador emancipado**. Trad. Ivone C. Benedetti. São Paulo: WMF Martins Fontes, 2012.

TRIVILIN, Linéia Ruiz; RIBEIRO, Alessandro Jacques. Conhecimento Matemático para o Ensino de Diferentes Significados do Sinal de Igualdade: um estudo desenvolvido com professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. **Bolema**. Rio Claro (SP). v.29, n.51, p.38-59, abr. 2015.
Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a03>. Acesso em: 03/02/2019.

VIOLA DOS SANTOS, João Ricardo. **O que alunos da escola básica mostram saber por meio de sua produção escrita em matemática.** 2007. 108f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2007. Disponível em: < http://www.uel.br/grupo-estudo/gepema/Disserta%E7%F5es/2007%20Disserta%E7%E3o%20-%20Jo%E3o%20Viola.pdf>. Acesso em: 10 set. 2017.

WITZEL, Denise. **Identidade e livro didático: Movimentos identitários do professor de Língua Portuguesa.** 2002. 181 f. Dissertação (Mestrado em Linguística aplicada) – Centro ciências humanas, letras e artes. Universidade Estadual de Maringá, Maringá/PR, 2002.