

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

DANIEL DENARDI HUFF

**IDENTIFICAÇÃO POR MEIO DO ERRO
DE PREDIÇÃO APLICADA AO
PROJETO BASEADO EM DADOS DE
CONTROLADORES MULTIVARIÁVEIS**

Porto Alegre
2019

DANIEL DENARDI HUFF

**IDENTIFICAÇÃO POR MEIO DO ERRO
DE PREDIÇÃO APLICADA AO
PROJETO BASEADO EM DADOS DE
CONTROLADORES MULTIVARIÁVEIS**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Controle e Automação

ORIENTADOR: Profa. Dra. Lucíola Campes-
trini

Porto Alegre
2019

DANIEL DENARDI HUFF

**IDENTIFICAÇÃO POR MEIO DO ERRO
DE PREDIÇÃO APLICADA AO
PROJETO BASEADO EM DADOS DE
CONTROLADORES MULTIVARIÁVEIS**

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Orientador: _____
Profa. Dra. Lucíola Campestrini, UFRGS
Doutora pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul –
Porto Alegre, Brasil

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Luis Antonio Aguirre, UFMG
Doutor pela University of Sheffield – Sheffield, Inglaterra

Prof. Dr. Diego Eckhard, UFRGS
Doutor pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Porto Alegre, Brasil

Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr., UFRGS
Doutor pela Université Toulouse III - Paul Sabatier – Toulouse, França

Coordenador do PPGEE: _____
Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr.

Porto Alegre, março de 2019.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Profa. Lucíola Campestrini pela orientação e pela ajuda; ao PPGEE e ao CNPq pelo ensino de qualidade e pela concessão da bolsa; e aos colegas que me acompanharam durante esses dois anos.

RESUMO

Neste trabalho, um método de controle baseado em dados – o *Optimal Controller Identification* (OCI) – é estendido para sistemas multivariáveis. Com base em uma única batelada de dados de entrada e de saída coletados da planta, um controlador de estrutura fixa é identificado sem usar um modelo para o processo, através da adaptação do método de identificação pelo erro de predição para o problema de projeto do controlador. Apesar de a formulação MIMO (*multiple-input multiple-output*) ser obtida a partir da versão SISO (*single-input single-output*) de uma maneira natural, a solução do problema de otimização é consideravelmente mais complexa devido à estrutura especial que a inversa do controlador assume no caso MIMO. Uma versão flexível do método OCI também é desenvolvida para lidar com sistemas de fase não-mínima (FNM), sem o conhecimento *a priori* do zero de transmissão de FNM, o qual é identificado em paralelo com os parâmetros do controlador. Uma abordagem similar já existe para o método VRFT (*Virtual Reference Feedback Tuning*) para modelos de referência diagonais. Aqui, considera-se estruturas de modelo de referência não apenas diagonais mas mais genéricas. Resultados de simulação assim como um experimento em uma planta de nível validam a metodologia apresentada, além de comparar o OCI com o método VRFT.

Palavras-chave: Controle baseado em dados, OCI, Sistemas de fase não-mínima, Método do erro de predição.

ABSTRACT

In this work, a data-driven control method – the Optimal Controller Identification (OCI) – is extended for multivariable systems. Based on a single batch of input-output data collected from the process, a fixed structure controller is estimated without using a process model, by embedding the control design problem in the prediction error identification of an optimal controller. Even though the multiple-input multiple-output (MIMO) formulation is extended from its single-input single-output (SISO) version in a natural way, the solution of the optimization problem is rather complex due to the special structure the inverse of the controller assumes in its MIMO version. A flexible formulation of the OCI method is also developed to cope with non-minimum phase (NMP) systems, without *a priori* knowledge of the NMP transmission zero, which is identified along with the controller parameters. A similar approach has already been developed for the Virtual Reference Feedback Tuning (VRFT) method for diagonal reference models. Here we consider not only diagonal but more general reference model structures. Simulated results as well as an experiment on a level plant show the efficiency of the proposed methodology, also comparing the OCI with the VRFT method.

Keywords: Data-driven control, OCI, Non-minimum phase systems, Prediction error method.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1:	Diagrama do sistema em malha fechada.	29
Figura 2:	Resposta do sistema (122) em malha fechada com o controlador (130).	57
Figura 3:	Gráfico da função custo assintótica $\bar{V}(P)$ do Exemplo 5.6.	75
Figura 4:	Respostas em malha fechada do sistema (230) com os controladores (233) e (234).	81
Figura 5:	Resposta em malha aberta do sistema (235)-(236) para uma entrada do tipo onda quadrada.	82
Figura 6:	Respostas em malha fechada do sistema (235)-(236) com os controladores (240) e (241).	83
Figura 7:	Respostas em malha fechada do sistema (235)-(236) com os controladores (243) e (244).	85
Figura 8:	Distribuição do custo \hat{J}^{MR} considerando 100 execuções de Monte Carlo para os métodos OCI e VRFT-IV considerando os dados de projeto da Figura 5.	85
Figura 9:	Resposta em malha fechada do sistema (235)-(236) com o controlador (245) para uma referência do tipo PRBS de amplitude unitária (SNR $\cong 5$ dB).	86
Figura 10:	Distribuição do custo \hat{J}^{MR} para 100 execuções de Monte Carlo considerando os modelos (246), (247), (248) e (249) para o ruído e SNR $\cong 20$ dB.	87
Figura 11:	Distribuição do custo \hat{J}^{MR} para 100 execuções de Monte Carlo considerando os modelos (246), (247), (248) e (249) para o ruído e SNR $\cong 5$ dB.	88
Figura 12:	Respostas em malha fechada do sistema (235)-(236) com os controladores projetados considerando os modelos (246) e (249) para o ruído quando SNR $\cong 5$ dB.	88
Figura 13:	Resposta em malha fechada do sistema (253) com o controlador (255).	90
Figura 14:	Respostas ao salto de (259)-(261).	92
Figura 15:	Resposta em malha fechada do sistema (253) com o controlador (264).	93
Figura 16:	<i>Box plots</i> de $\hat{J}^{MR}(\hat{P}_N)$ e \hat{z}_{nm} para 100 execuções de Monte Carlo usando o modelo de referência dado por (257).	94
Figura 17:	<i>Box plots</i> de $\hat{J}^{MR}(\hat{P}_N)$ e \hat{z}_{nm} para 100 execuções de Monte Carlo usando o modelo de referência dado por (266).	94
Figura 18:	Resposta em malha fechada do sistema (253) com o controlador (267).	95
Figura 19:	Diagrama esquemático da planta de nível.	96
Figura 20:	Entradas da planta de nível no experimento em malha aberta.	97
Figura 21:	Saídas da planta de nível no experimento em malha aberta.	98

Figura 22:	Saídas da planta de nível no experimento em malha fechada.	99
Figura 23:	Entradas da planta de nível no experimento em malha fechada.	99

LISTA DE TABELAS

Tabela 1:	Exemplos de modelos comuns para sistemas SISO.	40
Tabela 2:	Medianas de \hat{J}^{MR} e E_c obtidas considerando que $C_d(q) \in \mathcal{C}$ e a batelada de dados da Figura 5.	83
Tabela 3:	Medianas de \hat{J}^{MR} e E_c obtidas considerando que $C_d(q) \notin \mathcal{C}$ e a batelada de dados da Figura 5.	84
Tabela 4:	Medianas de \hat{J}^{MR} e E_c obtidas considerando os modelos (246), (247), (248) e (249) para o ruído.	89
Tabela 5:	Custo (228) associado aos modelos de referência (259)-(261) consi- derando referências do tipo salto.	91

LISTA DE ABREVIATURAS

ARMAX	Auto regressive moving average with external inputs
ARX	Auto regressive with external inputs
BJ	Box-Jenkins
CbT	Correlation-based Tuning
FIR	Finite Impulse Response
FNM	Fase não-mínima
IFT	Iterative Feedback Tuning
IV	Instrumental Variable
LS	Least Squares
MIMO	Multiple-Input Multiple-Output
MR	Modelo de Referência
OCI	Optimal Controller Identification
OE	Output error
PI	Proporcional-Integral
PID	Proporcional-Integral-Derivativo
PRBS	Pseudo random binary sequence
SISO	Single-Input Single-Output
SNR	Signal-to-Noise Ratio
VI	Variável Instrumental
VRFT	Virtual Reference Feedback Tuning

LISTA DE SÍMBOLOS

A^T	transposto de A
A^H	transposto conjugado de A
A^{-1}	inversa de A
$\text{cof}(A)$	matriz cofatora de A
$\det(A)$	determinante de A
$\text{tr}(A)$	traço de A
$\ \cdot\ $	norma de Frobenius
$\ \cdot\ _2$	norma 2 induzida
$E(\cdot)$	esperança matemática
$\bar{E}(\cdot)$	$\triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} 1/N \sum_{t=1}^N E(\cdot)$
I_n	matriz identidade de dimensões $n \times n$
q	operador de avanço
$s(t)$	sinal de tempo discreto
$\text{deg}(\cdot)$	grau relativo
\mathbb{R}	conjunto dos números reais
\mathbb{R}^n	espaço euclidiano de dimensão n
$\arg \min_{\Theta \in \mathcal{D}_\Theta} V(\Theta)$	argumento $\Theta \in \mathcal{D}_\Theta$ que minimiza $V(\Theta)$
$\inf_{\Theta \in \mathcal{D}_\Theta} V(\Theta)$	ínfimo de $V(\Theta)$ para $\Theta \in \mathcal{D}_\Theta$
$\nabla V(\Theta)$	gradiente da função escalar $V(\cdot)$ avaliado no vetor Θ
$\nabla^2 V(\Theta)$	hessiana (aproximada) da função escalar $V(\cdot)$ avaliada no vetor Θ
$\frac{\partial f(\Theta)}{\partial \Theta}$	matriz jacobiana da função vetorial $f(\cdot)$ avaliada no vetor Θ

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
2	DEFINIÇÕES PRELIMINARES	25
2.1	Sistemas e sinais	25
2.2	O processo	27
2.3	Polos e zeros de matrizes de transferência	29
2.4	Controle por modelo de referência	32
2.4.1	Crítérios de desempenho alternativos	34
2.5	Controle baseado em dados	35
2.6	Considerações finais	36
3	O MÉTODO DO ERRO DE PREDIÇÃO	39
3.1	Estruturas de modelo	40
3.2	O preditor ótimo	42
3.3	Identificação dos parâmetros	43
3.4	Ferramentas computacionais	47
3.5	Identificação caixa-cinza	47
3.6	Considerações finais	47
4	O MÉTODO OCI - <i>OPTIMAL CONTROLLER IDENTIFICATION</i>	49
4.1	Fundamentos	49
4.2	Aspectos práticos do método	52
4.3	Solução do problema de otimização	56
4.3.1	Cálculo das derivadas	58
4.4	Considerações finais	59
5	FORMULAÇÃO FLEXÍVEL DO MÉTODO OCI	61
5.1	Tratamento dos zeros de fase não-mínima	61
5.1.1	Estrutura do modelo de referência	63
5.2	O critério de desempenho flexível	65
5.2.1	Parametrização do modelo de referência	66
5.2.2	Identificabilidade	67
5.3	Uso de filtro passa-tudo	70
5.3.1	Consistência	73
5.3.2	Cálculo das derivadas	74
5.4	Considerações finais	77

6	RESULTADOS	79
6.1	Identificação do polo derivativo de um controlador PID	80
6.2	Comparação entre os métodos do erro de predição e da variável instrumental	81
6.2.1	O caso ideal: $C_d(q) \in \mathcal{C}$	83
6.2.2	O caso não-ideal: $C_d(q) \notin \mathcal{C}$	84
6.3	Identificação do modelo do ruído	86
6.4	Sistema de fase não-mínima	89
6.4.1	Modelo de referência diagonal	90
6.4.2	Modelo de referência bloco-triangular	91
6.5	Resultados Experimentais	95
6.5.1	Coleta de dados	96
6.5.2	Projeto dos controladores	97
6.5.3	Validação dos controladores	98
7	CONCLUSÕES	101
	REFERÊNCIAS	103

1 INTRODUÇÃO

Existe uma grande variedade de métodos de controle presentes na literatura, os quais variam de acordo com as características do sistema a ser controlado e com o(s) objetivo(s) e/ou critério(s) de desempenho. Os sistemas podem ser desde lineares e invariantes no tempo, que é o caso tratado nesse trabalho, como não-lineares e com parâmetros/características que dependem do tempo. Podem ainda ser descritos no tempo discreto (como neste trabalho) ou no tempo contínuo, algumas vezes sendo híbridos. Já os objetivos de controle dizem respeito, por exemplo, ao seguimento de referências e/ou rejeição de ruído e perturbações. Muitas vezes se deseja também que o sistema de controle seja robusto a variações paramétricas da planta, que podem ter sua origem em incertezas do modelo da mesma, por exemplo. Será considerado neste trabalho o problema de seguimento de referências, com enfoque dado para referências do tipo salto, embora a metodologia se aplique também para outras classes de sinais.

Controle baseado em modelo diz respeito a técnicas que se baseiam em um modelo do sistema para projetar o controlador. Tal modelo pode ser obtido a partir de princípios físicos e/ou através de métodos de identificação. Embora seja usual realizar uma etapa prévia de identificação do sistema (GEVERS, 2005), é interessante evitá-la, até porque essa tarefa não é trivial. Nesse contexto, para os casos em que a planta a ser controlada não é conhecida (ou apenas parcialmente) foi desenvolvida no século passado a teoria de controle adaptativo (IOANNOU; SUN, 2012; ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1995), e, na década de 90, houve o advento da teoria de *controle baseado em dados* (BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD, 2012).

Controle baseado em dados corresponde a projetar um controlador cuja estrutura é fixada *a priori* através de uma ou mais bateladas de dados de entrada e de saída coletados do processo, sem o uso de um modelo para esse último. Isso é feito, em geral, através da minimização de uma função objetivo que varia de método para método. Essa função normalmente depende do *modelo de referência*, uma função de transferência que traduz o desempenho desejado em malha fechada com o controlador projetado (BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD, 2012).

Alguns métodos de controle baseado em dados, como o *Iterative Feedback Tuning* (IFT) (HJALMARSSON, 2002) e o *Correlation-based Tuning* (CbT) (KARIMI; MIŠKOVIĆ; BONVIN, 2004), são inerentemente *iterativos*: o controlador ótimo é obtido a partir de uma sequência de controladores que operam em malha fechada no sistema, sendo que bateladas de dados são coletadas desse último *online*. Tais métodos podem permanecer operando por grandes períodos de tempo, adaptando o controlador frente a possíveis variações no sistema real ao longo dos anos. Outros métodos são *diretos*, isto é, encontram o controlador com base em apenas uma ou algumas bateladas de dados, podendo em alguns casos servir de inicialização para os métodos iterativos. O *Virtual Reference Feedback*

Tuning (VRFT) (CAMPI; LECCHINI; SAVARESI, 2002), uma versão não-iterativa do CbT (KARIMI; VAN HEUSDEN; BONVIN, 2007) e o *Optimal Controller Identification* (OCI) (CAMPESTRINI et al., 2017) são representativos dessa classe.

Os métodos acima foram desenvolvidos inicialmente para sistemas *single-input single-output* (SISO). Contudo, não é possível tratar sistemas multivariáveis como dois ou mais sistemas SISO em paralelo quando a interação entre as diferentes variáveis é significativa, sendo, pois, necessário realizar a extensão de tais métodos para o caso *multiple-input multiple-output* (MIMO). Como no caso SISO, algumas formulações são iterativas (JANSSON; HJALMARSSON, 2004; MIŠKOVIĆ et al., 2005) enquanto outras são diretas (FORMENTIN; SAVARESI; RE, 2012; CAMPESTRINI et al., 2016). Embora alguns métodos sejam estendidos de uma maneira natural para o caso MIMO, geralmente é necessário realizar um maior número de experimentos na planta. Em (YUBAI; USAMI; HIRAI, 2009), por exemplo, o método proposto, mesmo sendo considerado direto, requer n_u bateladas de dados, onde n_u é o número de entradas do sistema. Outro exemplo é encontrado em (HJALMARSSON, 1999), onde $n_y n_u + 1$ experimentos por iteração são necessários, com n_y sendo o número de saídas.

Nesse contexto, o objetivo geral deste trabalho é realizar a extensão do método OCI para sistemas multivariáveis. A principal motivação em trabalhar com o OCI consiste no fato de que o mesmo é capaz de encontrar um controlador com base em uma *única* batelada de dados coletados do processo em malha aberta ou fechada. Além disso, mesmo se esses dados forem bastante contaminados por ruído, o método tende a fornecer bons resultados (CAMPESTRINI et al., 2017).

O método OCI foi introduzido para sistemas SISO em (CAMPESTRINI et al., 2012, 2017). A ideia básica do mesmo é identificar um modelo para o sistema através do método do erro de predição (LJUNG, 1999; SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989). Contudo, tal modelo possui uma estrutura atípica, sendo descrito em termos do modelo de referência escolhido e da inversa do controlador a ser projetado. Dessa forma, as ferramentas computacionais existentes não são capazes de encontrar os parâmetros ótimos do controlador, sendo necessário desenvolver um algoritmo de otimização específico para isso. Como será detalhado no texto, tal algoritmo foi realizado com base em dois métodos de otimização não-linear aplicados em conjunto.

Como o método OCI está intrinsecamente relacionado ao método do erro de predição, as propriedades estatísticas desse último são herdadas pelo primeiro. Em particular, é possível obter uma estimativa consistente dos parâmetros do controlador na presença de ruído sem o uso de variáveis instrumentais. Ou seja, ao contrário de métodos como o VRFT que costumam construir a variável instrumental com base em um segundo experimento (CAMPESTRINI et al., 2016), o OCI emprega uma única batelada de dados do processo. Outra vantagem do OCI frente ao VRFT está relacionada ao fato de que o método do erro de predição é, sob condições ideais, assintoticamente estatisticamente eficiente (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989). Ou seja, o controlador obtido a partir do OCI tende a ser “mais preciso” do que o do VRFT quando o ruído presente nos dados é significativo. Isso será mostrado por meio de simulações e de um experimento.

Quando os dados da planta são coletados em malha fechada, é necessário identificar em paralelo com o controlador um modelo para o ruído do processo para que a estimativa do primeiro seja de fato consistente. Esse é um dos objetivos específicos deste trabalho.

Outro objetivo específico consiste em explorar estruturas para o controlador que não são necessariamente lineares nos parâmetros, ao contrário do que é feito, por exemplo, em (CAMPESTRINI et al., 2016; YUBAI; USAMI; HIRAI, 2009). Em particular, o

polo derivativo de um controlador PID (Proporcional-Integral-Derivativo) (ASTRÖM; HÄGGLUND, 1995) não precisa necessariamente ser fixo em algum valor determinado *a priori*. Estruturas de controlador mais flexíveis permitem diminuir a diferença entre a resposta final obtida em malha fechada e o modelo de referência, como é mostrado em (HUFF; SILVA; CAMPESTRINI, 2018), onde a formulação multivariável do método OCI é aplicada a um sistema de refrigeração.

Ademais, é comum que métodos de controle baseado em dados precisem ser adaptados para lidar com sistemas de fase não-mínima. Esse é o caso do VRFT, por exemplo, e também do OCI. Em (CAMPESTRINI; GEVERS; BAZANELLA, 2009; BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD, 2012) (caso SISO) e (SILVA; CAMPESTRINI; BAZANELLA, 2018) (caso MIMO) é desenvolvida a chamada versão flexível do VRFT, em que, além do controlador, o modelo de referência também é parametrizado, de forma que os zeros de transmissão de fase não-mínima do processo sejam identificados em paralelo com os parâmetros do controlador. Essa ideia serviu de inspiração para este trabalho, onde foi desenvolvida uma formulação flexível para o método OCI. Ao contrário da formulação flexível do VRFT, em que o modelo de referência deve ser diagonal (e com todos elementos da diagonal idênticos), no caso do OCI o mesmo pode assumir formas mais genéricas. Explorou-se duas situações distintas: estruturas diagonal e bloco-triangular.

A estrutura do trabalho é organizada como segue: o Capítulo 2 introduz uma série de conceitos essenciais para o entendimento do trabalho realizado. O Capítulo 3, por sua vez, faz uma revisão bibliográfica sobre o método de identificação pelo erro de predição, a qual será útil no Capítulo 4. O Capítulo 4 apresenta o desenvolvimento teórico básico do método OCI, o qual é realizado diretamente para o caso MIMO, já que o caso SISO pode ser visto como um caso particular. Na sequência, o Capítulo 5 apresenta a formulação flexível do método OCI. Já o Capítulo 6 mostra uma série de resultados de simulação que validam a teoria apresentada nos Capítulos 4 e 5. Também é realizado um experimento em uma planta de nível, a qual já foi objeto de estudo de outros trabalhos (CAMPESTRINI et al., 2016; SCHEID, 2015; SILVA; BAZANELLA; CAMPESTRINI, 2018). Por fim, o Capítulo 7 apresenta as conclusões finais assim como sugestões de trabalhos futuros.

2 DEFINIÇÕES PRELIMINARES

Este capítulo apresenta definições básicas para o entendimento do trabalho, além de contextualizar melhor o mesmo. Na Seção 2.1, alguns conceitos relativos a sistemas e sinais são revistos, onde também é introduzida a noção de sinal *quasi-estacionário*, a qual é mais abrangente do que o conceito clássico de sinal estacionário. Já na Seção 2.2, é apresentada a descrição básica do processo com o qual se trabalha. Na Seção 2.3 é introduzido o conceito de polos e zeros multivariáveis de funções de transferência, o qual será particularmente útil ao longo do texto. Na sequência, na Seção 2.4, o conceito de controle por modelo de referência é explicado. Por fim, na Seção 2.5 é feita uma revisão bibliográfica sobre controle baseado em dados, onde é dado destaque para alguns métodos bastante difundidos na literatura.

2.1 Sistemas e sinais

Este trabalho foca em sistemas lineares e invariantes no tempo de tempo discreto. Ou seja, os sinais serão indexados por uma variável $t \in \mathbb{Z}$ que se refere ao instante de tempo. O símbolo q denota o operador de avanço no tempo, ou seja

$$qx(t) = x(t + 1). \quad (1)$$

Dependendo do contexto, será considerado, com abuso de notação, que q é uma variável complexa (como a variável z da Transformada Z (OPPENHEIM; WILLISKY; NAWAB, 1996)).

A função de transferência (multivariável) de um sistema causal pode ser representada da seguinte maneira:

$$G(q) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)q^{-k} \quad (2)$$

onde $g(k)$ é a matriz (real) de resposta ao impulso. $G(q)$ é dita estável se

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|g(k)\| < \infty \quad (3)$$

onde $\|\cdot\|$ denota a norma de Frobenius.

Frequentemente lidaremos com sinais que possuem componentes determinísticas e estocásticas. Dessa forma, é conveniente introduzir a definição de sinal *quasi-estacionário*.

Definição 2.1. (LJUNG, 1999) Um sinal $s(t) \in \mathbb{R}^n$ é dito *quasi-estacionário* se o mesmo está sujeito a:

- (i) $E[s(t)] = m_s(t), \quad \|m_s(t)\| \leq C, \quad \forall t$
(ii) $E[s(t)s^T(r)] = R_s(t, r), \quad \|R_s(t, r)\| \leq C, \quad \forall t, r$
(iii) $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N R_s(t, t - \tau) = R_s(\tau), \quad \forall \tau$

onde C é uma constante finita, $E[\cdot]$ denota esperança e $R_s(\tau)$ é chamada de função/matriz de correlação de $s(t)$.

Se $s(t)$ é uma sequência determinística, o operador $E[\cdot]$ não tem efeito e o sinal será quasi-estacionário se o mesmo for limitado e o limite dado na condição (iii) existir.

Se $s(t)$ for um processo estocástico estacionário, também será quasi-estacionário já que $E[s(t)s^T(t - \tau)] \triangleq R_s(\tau)$ não depende de t .

Para facilitar a notação, define-se o operador $\bar{E}[\cdot]$:

$$\bar{E}[f(t)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N E[f(t)], \quad (4)$$

Assim, tem-se que

$$R_s(\tau) = \bar{E}[s(t)s^T(t - \tau)]. \quad (5)$$

Dois sinais $s(t)$ e $w(t)$ são ditos *conjuntamente quasi-estacionários* se ambos são quasi-estacionários e, além disso, a *correlação cruzada*

$$R_{sw}(\tau) = \bar{E}[s(t)w^T(t - \tau)], \quad \forall \tau \quad (6)$$

existir. Se $R_{sw}(\tau)$ é identicamente nula, os sinais são ditos *descorrelacionados*.

Quando os limites acima existem, define-se o *espectro* (de potência) do sinal $s(t)$ como

$$\Phi_s(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_s(\tau) e^{-j\omega\tau} \quad (7)$$

e o *espectro cruzado* entre $s(t)$ e $w(t)$ como

$$\Phi_{sw}(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_{sw}(\tau) e^{-j\omega\tau} \quad (8)$$

desde que as séries converjam. Note que, pela definição da transformada de Fourier inversa, tem-se

$$\bar{E}[\|s(t)\|_2^2] = \bar{E}\{\text{tr}[s(t)s^T(t)]\} = \text{tr}[R_s(0)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{tr}[\Phi_s(\omega)] d\omega \quad (9)$$

onde $\text{tr}(\cdot)$ denota o traço.

Sinais determinísticos periódicos são quasi-estacionários, mas seu espectro não existe em um sentido formal. O que se faz nesse caso é trabalhar com a função delta de Dirac (LJUNG, 1999).

O exemplo a seguir ilustra o que acontece quando um sinal possui uma componente determinística e outra estocástica.

Exemplo 2.1. (LJUNG, 1999) Considere um sinal

$$s(t) = u(t) + v(t) \quad (10)$$

onde $u(t)$ é determinístico (e quasi-estacionário) com espectro $\Phi_u(\omega)$ e $v(t)$ é um processo estocástico estacionário com média nula e espectro $\Phi_v(\omega)$. Nesse caso se obtém

$$\begin{aligned} \bar{E}[s(t)s^T(t-\tau)] &= \bar{E}[u(t)u^T(t-\tau)] + \bar{E}[u(t)v^T(t-\tau)] \\ &+ \bar{E}[v(t)u^T(t-\tau)] + \bar{E}[v(t)v^T(t-\tau)] \end{aligned} \quad (11)$$

$$= R_u(\tau) + R_v(\tau) \quad (12)$$

já que $\bar{E}[v(t)u^T(t-\tau)] = 0$. Logo

$$\Phi_s(\omega) = \Phi_u(\omega) + \Phi_v(\omega) \quad (13)$$

Quando sinais são filtrados por sistemas lineares, suas propriedades mudam, como enunciado a seguir.

Lema 2.1. (LJUNG, 1999) Considere o sinal quasi-estacionário $w(t) \in \mathbb{R}^n$ com espectro $\Phi_w(\omega)$ e que $G(q)$ é uma função de transferência estável. O sinal definido por

$$s(t) = G(q)w(t) \quad (14)$$

também é quasi-estacionário e

$$\Phi_s(\omega) = G(e^{j\omega})\Phi_w(\omega)G(e^{j\omega})^H \quad (15)$$

$$\Phi_{sw}(\omega) = G(e^{j\omega})\Phi_w \quad (16)$$

onde $G(e^{j\omega})$ é a resposta em frequência associada ao filtro $G(q)$ e o sobrescrito H representa a matriz conjugada transposta.

2.2 O processo

A descrição básica do processo MIMO linear e invariante no tempo a ser controlado é:

$$y(t) = G_0(q)u(t) + v(t) = G_0(q)u(t) + H_0(q)w(t) \quad (17)$$

onde $G_0(q)$ e $H_0(q)$ são funções de transferência racionais e causais de dimensão $n \times n$ e $u(t)$ e $y(t)$ representam, respectivamente, as entradas de controle (ou variáveis manipuladas) e as saídas de interesse (ou variáveis controladas). O sinal $w(t)$ consiste em uma sequência de vetores aleatórios independentes com média nula, matriz de covariância $E[w(t)w^T(t)] = \Lambda > 0$ e momentos de quarta ordem limitados. Ou seja, a perturbação $v(t)$ observada na saída do processo é modelada como ruído branco filtrado por filtro linear.

Será assumido por simplicidade que o sistema é estável em malha aberta. Isso possibilita, por exemplo, identificar modelos para o processo com a estrutura *output error* (OE) (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989), a qual será apresentada mais adiante. Além disso, a hipótese de que $G_0(q)$ é quadrada é importante. Não existe uma extensão trivial do método OCI para sistemas com um número diferente de entradas e saídas. Também se assume por simplicidade que $G_0(q)$ é estritamente causal.

Ademais, considera-se que o filtro $H_0(q)$ é mônico (isto é, $H_0(\infty) = I$) e inversamente estável. Essa representação para o processo estocástico $v(t) = H_0(q)w(t)$ se inspira no teorema da decomposição espectral:

Lema 2.2. (ANDERSON; MOORE, 1979) *Suponha que o espectro $\Phi_v(\omega)$ do sinal $v(t)$ seja uma matriz positiva definida para todo ω cujos elementos são funções racionais de $\cos(\omega)$ (ou $e^{j\omega}$). Nesse caso existe uma matriz $\Lambda > 0$ e um filtro racional e mônico $H_0(q)$ estável tal que $H_0^{-1}(q)$ também é estável e*

$$\Phi_v(\omega) = H_0(e^{j\omega})\Lambda H_0(e^{j\omega})^H. \quad (18)$$

Combinando o resultado acima com o Lema 2.1 e lembrando que o espectro do ruído branco é $\Phi_w(\omega) = \Lambda$, percebe-se que, em relação às propriedades de segunda ordem do sinal $v(t)$, a representação adotada para o mesmo é bastante genérica.

Vale salientar ainda que os momentos de quarta ordem de $w(t)$ são assumidos limitados para que os resultados de ergodicidade nos quais a teoria de identificação se baseia sejam válidos (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989). A ergodicidade dos sinais é usada para derivar as propriedades assintóticas das estimativas.

O processo descrito acima é controlado por um controlador $n \times n$ causal, linear e invariante no tempo, o qual deve ser projetado de forma a pertencer a uma dada classe \mathcal{C} de matrizes de funções de transferência racionais definida pelo usuário. O controlador é parametrizado por um vetor de parâmetros $P \in \mathbb{R}^{nP}$, de forma que

$$\mathcal{C} = \{C(q, P) : P \in \mathcal{D}_P \subseteq \mathbb{R}^{nP}\}, \quad (19)$$

onde \mathcal{D}_P é o conjunto, considerado compacto, dos valores admissíveis de P . Assume-se que $C(q, P)$ é inversível para todo $P \in \mathcal{D}_P$. A lei de controle é dada por

$$u(t) = C(q, P)e(t) = C(q, P)(r(t) - y(t)), \quad (20)$$

onde $r(t) \in \mathbb{R}^n$ é o sinal de referência, o qual é considerado quasi-estacionário e decorrelacionado do ruído $w(t)$. O vetor $e(t)$, por sua vez, é o erro de seguimento da referência.

A estrutura do controlador é definida como segue:

$$C(q, P) = \begin{bmatrix} C_{11}(q, \rho_{11}) & C_{12}(q, \rho_{12}) & \cdots & C_{1n}(q, \rho_{1n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1}(q, \rho_{n1}) & C_{n2}(q, \rho_{n2}) & \cdots & C_{nn}(q, \rho_{nn}) \end{bmatrix}, \quad (21)$$

onde $P = [\rho_{11}^T \ \rho_{12}^T \ \cdots \ \rho_{1n}^T \ \cdots \ \rho_{n1}^T \ \cdots \ \rho_{nn}^T]^T$. Os subcontroladores podem ser diferentes entre si. Alguns elementos da matriz podem inclusive ser considerados nulos. Se $C(q, P)$ for diagonal, diz-se que o controlador é *descentralizado*. Se todos elementos forem não-nulos, o controlador é *centralizado*.

Uma classe particularmente relevante de controladores, a qual será usada nos exemplos desse trabalho, é a PID (Proporcional-Integral-Derivativo). Nesse caso, cada elemento não-nulo da matriz $C(q, P)$ em (21) possui a seguinte estrutura quando o polo derivativo é livre:

$$C_{ij}(q, \rho_{ij}) = \frac{a_{ij}q^2 + b_{ij}q + c_{ij}}{(q-1)(q-d_{ij})}, \quad (22)$$

onde $\rho_{ij} = [a_{ij} \ b_{ij} \ c_{ij} \ d_{ij}]^T$. Muitas vezes o polo é fixado em zero, situação em que $d_{ij} = 0$. Outro caso particular é o controlador PI (Proporcional-Integral), em que $c_{ij} = d_{ij} = 0$.

O sistema definido por (17) e (20) em malha fechada está ilustrado na Figura 1 e é descrito pelas equações abaixo:

$$y(t, P) = T(q, P)r(t) + S(q, P)H_0(q)w(t) \quad (23)$$

$$u(t, P) = S_I(q, P)C(q, P)r(t) - S_I(q, P)C(q, P)H_0(q)w(t) \quad (24)$$

$$S(q, P) = (G_0(q)C(q, P) + I)^{-1} \quad (25)$$

$$S_I(q, P) = (C(q, P)G_0(q) + I)^{-1} \quad (26)$$

$$T(q, P) = S(q, P)G_0(q)C(q, P) = G_0(q)C(q, P)S(q, P) \quad (27)$$

$$I = T(q, P) + S(q, P), \quad (28)$$

onde agora está explícita a dependência dos sinais e das funções de transferência no vetor de parâmetros P do controlador. A função $S(q, P)$ é denominada de *função de sensibilidade* (da saída) e $T(q, P)$ é a *função de sensibilidade complementar* (da saída) ou simplesmente função de malha fechada. O filtro $S_I(q, P)$ é a *função de sensibilidade da entrada*. A *função de sensibilidade complementar da entrada* é

$$T_I(q, P) = S_I(q, P)C(q, P)G_0(q) = C(q, P)G_0(q)S_I(q, P). \quad (29)$$

O sistema em malha fechada é internamente estável se e somente se nenhuma componente do mesmo possui modos instáveis não-controláveis e/ou não-observáveis e (além de $H_0(q)$) o seguinte filtro é estável (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005):

$$\begin{bmatrix} S_I(q, P) & C(q, P)S(q, P) \\ G_0(q)S_I(q, P) & S(q, P) \end{bmatrix}$$

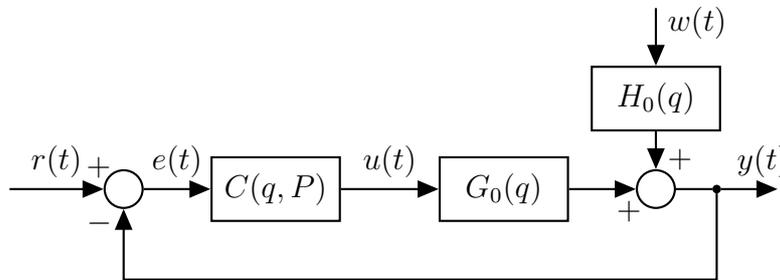


Figura 1: Diagrama do sistema em malha fechada.

2.3 Polos e zeros de matrizes de transferência

A seguir são apresentadas as definições de polos e zeros de funções de transferência racionais, as quais serão particularmente úteis na extensão do método OCI para sistemas de fase não-mínima.

Lema 2.3. (MACFARLANE; KARCANIAS, 1976) *O polinômio de polos $\phi(q)$ de uma função de transferência matricial e racional $G(q)$ corresponde ao mínimo denominador comum de todos menores não-identicamente nulos de todas as ordens de $G(q)$.*

O polinômio $\phi(q)$ será considerado mônico. O exemplo a seguir ilustra uma aplicação do lema acima. Note que no cálculo de cada menor os fatores comuns do numerador e do denominador devem ser cancelados.

Exemplo 2.2. Considere a função de transferência abaixo

$$G(q) = \begin{bmatrix} \frac{1}{q} & 0 & \frac{-(q-0,9)}{q(q-0,5)} \\ \frac{1}{q-0,9} & \frac{1}{q-0,5} & \frac{1}{q-0,5} \end{bmatrix} \quad (30)$$

Os menores de ordem 1 diferentes de zero são:

$$\frac{1}{q}, \frac{-(q-0,9)}{q(q-0,5)}, \frac{1}{q-0,9}, \frac{1}{q-0,5}, \frac{1}{q-0,5} \quad (31)$$

O menor de ordem 2 referente à eliminação da primeira coluna é:

$$M_1 = \frac{q-0,9}{q(q-0,5)^2} \quad (32)$$

Os outros dois menores de ordem 2 são:

$$M_2 = \frac{2}{q(q-0,5)}, M_3 = \frac{1}{q(q-0,5)} \quad (33)$$

O denominador comum de todos menores é

$$\phi(q) = q(q-0,5)^2(q-0,9) \quad (34)$$

Existem portanto 4 polos: um em $q = 0$, dois em $q = 0,5$ e um em $q = 0,9$.

Note a partir do exemplo acima que os polos da função de transferência correspondem aos polos dos elementos da matriz, isto é, aos polos dos menores de ordem 1. Contudo, para encontrar suas multiplicidades, é necessário analisar também os menores de ordem mais elevada.

Ao contrário dos polos, os zeros das funções de transferência (mais especificamente, os chamados *zeros multivariáveis* ou *zeros de transmissão*) em geral não correspondem aos zeros dos elementos da matriz, como mostrado abaixo. Ficará claro a partir do contexto de qual tipo de zero se está falando. No caso SISO as definições são equivalentes.

Lema 2.4. (MACFARLANE; KARCANIAS, 1976) O polinômio de zeros de transmissão $\psi(q)$ de uma função de transferência matricial e racional $G(q)$ corresponde ao maior divisor comum dos numeradores de todos menores de ordem r de $G(q)$, onde r é o posto normal de $G(q)$, desde que esses menores tenham sido ajustados de maneira a ter o polinômio $\phi(q)$ como seu denominador.

O posto normal de $G(q)$ corresponde ao posto da matriz para todo q , exceto um número finito de valores para os quais $G(q)$ diminui o posto ou nem mesmo está definida (se o valor corresponder a um polo). Zeros de transmissão de módulo maior do que 1 são chamados de *zeros de fase não-mínima (FNM)*. O polinômio de zeros $\psi(q)$ também será considerado mônico.

Exemplo 2.3. Considere a função de transferência abaixo

$$G(q) = \frac{1}{(q-0,8)^2} \begin{bmatrix} q-0,2 & q-0,6 \\ 1 & 2(q-0,9) \end{bmatrix} \quad (35)$$

O posto normal nesse caso é 2, tendo em vista que o determinante não é identicamente nulo:

$$\det(G(q)) = \frac{2(q-0,4)(q-1,2)}{(q-0,8)^4} \quad (36)$$

Observa-se que o polinômio de polos é $\phi(q) = (q-0,8)^4$. Analisando o determinante, que é o único menor de mais alta ordem (2), vê-se que o polinômio de zeros é $\psi(q) = (q-0,4)(q-1,2)$. Ou seja, os zeros de transmissão estão localizados em $q = 0,4$ e $q = 1,2$ e isso não pode ser inferido através de uma simples inspeção dos elementos da matriz.

No caso particular em que $G(q)$ é uma matriz quadrada não-singular tem-se

$$\det(G(q)) = \alpha \frac{\psi(q)}{\phi(q)} \quad (37)$$

onde α é um escalar independente de q (MACFARLANE; KARCANIAS, 1976). Isso pode ser observado no Exemplo 2.3. Mas é importante notar que $\psi(q)$ e $\phi(q)$ não são necessariamente polinômios coprimos. Isto é, no cálculo do determinante pode ocorrer algum cancelamento de tal modo que a expressão (37) não é válida para encontrar $\psi(q)$ e $\phi(q)$, como ilustrado no próximo exemplo.

Exemplo 2.4. Considere

$$G(q) = \begin{bmatrix} \frac{q-0,5}{q-0,9} & 0 \\ 0 & \frac{q-0,9}{q-0,5} \end{bmatrix} \quad (38)$$

Nesse caso, $\phi(q) = \psi(q) = (q-0,9)(q-0,5)$, enquanto que $\det(G(q)) = 1$.

O exemplo acima também ilustra o fato de que funções de transferência multivariáveis, ao contrário do caso SISO, podem possuir polos e zeros na mesma posição. Por simplicidade, será assumido que isso não ocorre de agora em diante. Nesse caso, os zeros são os valores de q para os quais o posto de $G(q)$ é menor do que seu posto normal.

Outra propriedade interessante é que, quando uma matriz $G(q)$ quadrada e não-singular é invertida, o polinômio de polos passa a ser o polinômio de zeros e vice-versa. Isso é fácil de enxergar se considerarmos a forma de Smith-McMillan de $G(q)$ (MACFARLANE; KARCANIAS, 1976). As funções de transferência consideradas nesse trabalho são todas desse tipo.

Ademais, sistemas MIMO possuem direções de entrada e saída associadas a polos e zeros. O conceito de direções de saída dos zeros será usado diretamente na adaptação do OCI para sistemas de fase não-mínima e é detalhado a seguir.

Lema 2.5. (HAVRE; SKOGESTAD, 1996) Se $G(q)$ possui um zero em $q = z_i \in \mathbb{C}$, então existe um vetor complexo não-nulo y_{z_i} de dimensão apropriada satisfazendo $y_{z_i}^H y_{z_i} = 1$ tal que

$$y_{z_i}^H G(z_i) = 0 \quad (39)$$

Tal vetor é chamado de direção de saída do zero z_i .

Note que, dependendo da multiplicidade do zero, pode ou não ser possível obter mais de um vetor y_{z_i} (linearmente independentes entre si) satisfazendo (39).

Exemplo 2.5. Considere novamente a função de transferência do Exemplo 2.3. Avaliando $G(q)$ em $z_1 = 1,2$ obtém-se

$$G(1,2) = \frac{1}{0,16} \begin{bmatrix} 1 & 0,6 \\ 1 & 0,6 \end{bmatrix} \quad (40)$$

de onde se observa por inspeção que $y_{z_1} = [1/\sqrt{2} \quad -1/\sqrt{2}]^T$. Similarmente, para $z_2 = 0,4$ tem-se $y_{z_2} = [5/\sqrt{26} \quad -1/\sqrt{26}]^T$.

Alternativamente, é possível obter as direções do zero através da decomposição em valores singulares da matriz $G(z_i)$ ou através da solução de um problema de autovalores generalizado (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005). Nesse último caso, que é mais robusto numericamente, considera-se a representação em espaço de estados de $G(q)$.

2.4 Controle por modelo de referência

Em geral, os métodos de controle baseado em dados se baseiam na minimização de um critério de desempenho, o qual costuma ser traduzido em termos da norma H_2 de algum sinal do sistema em malha fechada. Esse critério pode visar o seguimento de referências ou a rejeição de ruído na saída do processo ou de perturbações que atuam na entrada do mesmo. Opcionalmente, pode-se combinar dois ou mais dos objetivos anteriores e penalizar também o esforço de controle (BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD, 2012).

O método OCI, assim como o VRFT, por exemplo, almeja a minimização de um critério de seguimento de referência da forma

$$J(P) \triangleq \bar{E} [\|r(t) - T(q, P)r(t)\|_2^2], \quad (41)$$

onde $r(t)$ é a referência de interesse, $T(q, P)$ está definido em (27) e $C(q, P) \in \mathcal{C}$, de acordo com (19). Contudo, esse critério costuma ser flexibilizado usando o conceito do *modelo de referência*. O modelo de referência, denotado por $T_d(q)$, é um artifício usado por diversos métodos de controle baseado em dados, estando também presente na literatura de controle adaptativo, por exemplo. O mesmo consiste em uma função de transferência que traduz os requisitos de desempenho em malha fechada. No caso tratado aqui, a resposta desejada na saída do sistema é dada em função da referência por

$$y_d(t) = T_d(q)r(t). \quad (42)$$

Dessa forma, através de uma escolha adequada do modelo de referência é possível especificar, por exemplo, o tempo de resposta do sistema, o sobrepasso e o comportamento em regime permanente. Além disso, escolhendo um modelo de referência não muito exigente se evita que o esforço de controle seja muito elevado em malha fechada, de forma que isso não precisa ser levado em conta diretamente no critério a ser minimizado.

De agora em diante será assumido que o controlador $C(q, P)$ possui ação integral, que o ganho estático da planta $G_0(1)$ é não-singular (ou seja, $G_0(q)$ não possui zero de transmissão em $q = 1$, conforme explicado na Seção 2.3) e que as referências constantes devem ser seguidas com erro nulo em regime permanente, ou seja, especifica-se $T_d(1) = I$, a matriz identidade. Contudo, o método OCI pode ser aplicado diretamente em outros casos. Se a referência a ser seguida em regime permanente for uma senoide de determinada frequência, por exemplo, basta escolher um modelo de referência adequado e

incluir polos complexos conjugados no controlador de acordo com o princípio do modelo interno.

Com base em (42), o critério (41) se transforma no seguinte:

$$J^{MR}(P) \triangleq \bar{E} [\|y_d(t) - T(q, P)r(t)\|_2^2] = \bar{E} [\|(T_d(q) - T(q, P))r(t)\|_2^2] \quad (43)$$

e o vetor de parâmetros ótimo do controlador é

$$P^{MR} = \arg \min_{P \in D_P} J^{MR}(P). \quad (44)$$

Analisando as equações (25), (27) e (43), é possível concluir que o controlador ideal para que o sistema se comporte exatamente como o desejado em malha fechada é dado por:

$$C_d(q) \triangleq G_0(q)^{-1}T_d(q) (I - T_d(q))^{-1} \quad (45)$$

Entretanto, o cálculo acima depende do modelo do processo $G_0(q)$, o qual, supostamente, é desconhecido. Pelo mesmo motivo, a própria função custo (43) não pode ser calculada diretamente. Dessa forma, o que se propõe tanto no método OCI como no VRFT é a minimização de funções alternativas, como será detalhado adiante para o caso do OCI, foco desse trabalho. Tais funções apresentam, sob condições ideais, o mesmo mínimo que $J^{MR}(P)$.

Vale salientar que $C_d(q)$ pode não corresponder a nenhum controlador pertencente à classe empregada \mathcal{C} . De fato, em geral ele não pertence devido às restrições da mesma. Portanto, é válido introduzir a hipótese abaixo para dar prosseguimento ao texto.

Hipótese 2.1. *O controlador ideal pertence à classe empregada no projeto, ou seja:*

$$\exists P_0 \in \mathcal{D}_P \text{ tal que } C(q, P_0) = C_d(q)$$

A igualdade de funções de transferência, como $C(q, P_0) = C_d(q)$, significa que $C(e^{j\omega}, P_0) = C_d(e^{j\omega})$ para *quase* todo ω em $[-\pi \pi]$.

A hipótese acima, mesmo que falsa em geral, pode ser aproximadamente verdade dependendo do modelo de referência escolhido e da estrutura do controlador. Aliás, uma das ideias-chave por trás da escolha do modelo de referência é justamente fazer com que o controlador ideal pertença à classe de projeto. Caso contrário, se essa hipótese for fortemente violada, ou seja, se um desempenho muito diferente do melhor que pode ser atingido for especificado, a resposta final do sistema pode não ter qualquer semelhança com o que foi imaginado inicialmente, podendo inclusive ser instável. Um controlador PI, por exemplo, não será capaz de proporcionar um tempo de acomodação muito mais rápido do que a resposta em malha aberta, com exceção das plantas mais simples (SILVA; CAMPESTRINI; BAZANELLA, 2014).

A escolha de um modelo de referência coerente com a realidade nem sempre é uma tarefa simples. Todo conhecimento disponível sobre a planta controlada é de grande valia. Para o caso SISO, é proposto em (SILVA; CAMPESTRINI; BAZANELLA, 2014) basear a escolha do modelo em um passo intermediário de identificação do sistema, usando os mesmos dados coletados para projeto do controlador e alguns critérios de desempenho em malha fechada. Esse modelo identificado para o processo não precisa ser acurado, devendo apenas fornecer uma ideia das características básicas do mesmo, de forma que é

possível argumentar que o método de controle continua sendo “baseado em dados” e não em “modelo”.

No caso multivariável os elementos da diagonal da matriz $T_d(q)$ devem ser escolhidos de acordo com o desempenho desejado para cada malha de controle, enquanto que os níveis de acoplamento entre as malhas são especificados pelos elementos fora da diagonal. Um modelo de referência diagonal propõe um sistema em malha fechada perfeitamente desacoplado, mas, se o controlador a ser empregado for descentralizado, por exemplo, essa escolha tende a ser arriscada.

As restrições básicas que devem ser respeitadas na escolha do modelo de referência dizem respeito ao grau relativo da planta $G_0(q)$ e ao fato de a mesma possuir ou não polos e/ou zeros de transmissão fora do círculo unitário (veja a Seção 2.3) (SILVA; BAZANELLA; CAMPESTRINI, 2018). As limitações impostas pelos zeros de transmissão, em particular, são explicadas no Capítulo 5, onde também é desenvolvida a formulação flexível do método OCI.

Em relação ao grau relativo do sistema, é altamente recomendável que o modelo $T_d(q)$ seja especificado de forma que o controlador ideal seja causal. Para isso, no caso SISO, o grau relativo do modelo de referência não pode ser menor do que o grau relativo do processo (BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD, 2012). Assim, é necessário conhecer pelo menos um limite superior do grau relativo de $G_0(q)$. Já no caso MIMO, a situação é mais complexa. O lema a seguir fornece condições suficientes sobre o modelo de referência que garantem que o controlador ideal seja causal.

Lema 2.6. (SILVA; BAZANELLA; CAMPESTRINI, 2018) *Seja γ_i o menor grau relativo dos elementos da i -ésima coluna de $G_0^{-1}(q)$. Se as três condições abaixo forem satisfeitas, o controlador ideal será causal.*

- (i) *Para todo $i = 1, \dots, n$, $T_{d_{ii}}(q) \neq 0$ e $\deg(T_{d_{ii}}(q)) = \mu_i$ (todos os elementos da diagonal do modelo de referência são não-nulos e possuem grau relativo μ_i)*
- (ii) *Para um dado i e para $j = 1, \dots, n$, $j \neq i$, ou $T_{d_{ij}}(q) = 0$ ou $\deg(T_{d_{ij}}(q)) \geq \mu_i$ (todos elementos não-nulos fora da diagonal principal de uma dada linha de $T_d(q)$ tem grau relativo maior ou igual a μ_i)*
- (iii) $\mu_i \geq -\gamma_i, \forall i = 1, \dots, n$

Esse resultado é demonstrado usando ferramentas de álgebra tropical. Note que o mesmo se baseia nos graus relativos dos elementos da inversa de $G_0(q)$. Em (SILVA; BAZANELLA; CAMPESTRINI, 2018) é apresentada uma equação que (em geral) permite calcular os graus relativos das componentes de $G_0^{-1}(q)$ com base nos graus relativos dos elementos de $G_0(q)$. De toda forma, na prática o que se costuma fazer é utilizar limites superiores para os graus relativos da planta, já que os valores exatos não costumam ser conhecidos.

2.4.1 Critérios de desempenho alternativos

Como mencionado anteriormente, o projeto do controlador pode ser realizado com base em outros critérios de desempenho além de (43). O critério abaixo, por exemplo, visa a rejeição de ruído:

$$J^E(P) \triangleq \bar{E} [\|S(q, P)v(t)\|_2^2] \quad (46)$$

Note que é impossível que essa expressão se anule, mas, ao contrário do caso de seguimento de referência, não é tão intuitivo escolher um modelo de referência (uma função de sensibilidade desejada) a fim de flexibilizar o critério (46).

Também é possível combinar os critérios (43) e (46):

$$J^T(P) \triangleq \bar{E} [\|y_d(t) - y(t, P)\|_2^2] \quad (47)$$

$$= \bar{E} [\|(T_d(q) - T(q, P))r(t)\|_2^2] + \bar{E} [\|S(q, P)v(t)\|_2^2] \quad (48)$$

$$= J^{MR}(P) + J^E(P) \quad (49)$$

onde se usou (23) e o fato de que os sinais $r(t)$ e $v(t)$ são decorrelacionados.

Por fim, o esforço de controle pode ser penalizado através de um termo da forma

$$J^U(P) \triangleq \bar{E} [\|u(t, P)\|_2^2], \quad (50)$$

onde $u(t, P)$ é dado por (24).

2.5 Controle baseado em dados

Como comentado na introdução, controle baseado em dados se refere ao conjunto de metodologias que têm por objetivo projetar um controlador cuja estrutura é fixada *a priori* com base em batelada(s) de dados de entrada e de saída do processo. Ou seja, o projeto não se baseia diretamente em um modelo do sistema, evitando-se, assim, a etapa prévia de obtenção ou identificação de tal modelo. Controle baseado em dados se difere de controle adaptativo essencialmente pelo fato de que o primeiro emprega grandes bateladas de dados para ajustar os parâmetros do controlador, enquanto que o segundo geralmente usa apenas uma ou algumas amostras temporais de cada vez. Esses dados podem ser obtidos a partir de ensaios específicos ou, em algumas situações, apenas com o processo operando em malha fechada com algum controlador, caso em que se interfere menos (ou nada) na operação da planta (BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD, 2012). Como explicado na Seção 2.4, os métodos de controle baseado em dados, em geral, encontram o controlador ótimo através de algum critério de desempenho.

Alguns métodos, como o IFT (HJALMARSSON, 2002) e o CbT (KARIMI; MIŠKOVIĆ; BONVIN, 2004), são iterativos: o controlador ótimo é obtido a partir de uma sequência de controladores que operam em malha fechada no sistema. Outros métodos, em contrapartida, são diretos, como o VRFT (CAMPI; LECCHINI; SAVARESI, 2002) e o OCI (CAMPESTRINI et al., 2017).

O IFT foi proposto inicialmente em (HJALMARSSON; GUNNARSSON; GEVERS, 1994) e pode provavelmente ser considerado o marco inicial na literatura de controle baseado em dados. Em (HJALMARSSON, 2002) é realizada uma revisão geral do método. Exemplos de aplicações podem ser encontrados em (HJALMARSSON; GUNNARSSON; GEVERS, 1995; TESCH; ECKHARD; GUARIENTI, 2016). A extensão para sistemas MIMO é encontrada em (HJALMARSSON; BIRKELAND, 1998; JANSSON; HJALMARSSON, 2004) e uma análise da aplicação do método em sistemas não-lineares é dada em (HJALMARSSON, 1998). Foco especial é dado para sistemas de fase não-mínima em (LECCHINI; GEVERS, 2002). O IFT minimiza o critério composto (49), penalizando também o esforço de controle. Devido ao fato de que o modelo do sistema é desconhecido e à presença de ruído, o método utiliza uma série de técnicas para obter uma estimativa não-polarizada do gradiente da função custo. Isso demanda a realização de diversos experimentos por iteração no caso multivariável.

O método CbT, por sua vez, projeta o controlador através de uma abordagem por variáveis instrumentais. É voltado para o problema de seguimento de referência, e a ideia principal do método é minimizar a correlação cruzada entre o sinal de referência e o erro entre a saída desejada e a saída real do sistema. O CbT foi apresentado originalmente em (KARIMI; MIŠKOVIĆ; BONVIN, 2003). Suas propriedades são detalhadas em (KARIMI; MIŠKOVIĆ; BONVIN, 2004) e a extensão para o caso multivariável é dada em (MIŠKOVIĆ et al., 2005). Versões não-iterativas do método são apresentadas em (KARIMI; VAN HEUSDEN; BONVIN, 2007) para o caso SISO e (YUBAI; USAMI; HIRAI, 2009) para o caso multivariável.

O VRFT é um dos métodos de controle baseado em dados mais difundidos na literatura e de fácil aplicação. Foi apresentado inicialmente em (CAMPI; LECCHINI; SAVARESI, 2002) e aplicado, por exemplo, em (CAMPI; LECCHINI; SAVARESI, 2003). Em (CAMPESTRINI et al., 2011) o método é estendido para lidar com sistemas de fase não-mínima e em (FILHO et al., 2016) é possível ver uma aplicação disso. Extensões para o caso MIMO são dadas em (NAKAMOTO, 2005; FORMENTIN; SAVARESI; RE, 2012), sendo que uma abordagem menos restritiva é apresentada em (CAMPESTRINI et al., 2016). A formulação multivariável do método também foi estendida para sistemas de fase não-mínima (SILVA; CAMPESTRINI; BAZANELLA, 2016, 2018). O VRFT, assim como o CbT e o OCI, também busca resolver o problema de seguimento de referência. Isso é feito minimizando uma função custo que, se o controlador for linearmente parametrizado (se $d_{ij} = 0$ em (22), por exemplo), é quadrática nos parâmetros. Essa é a principal vantagem do método: o mesmo se reduz à solução de um problema de mínimos quadrados.

Vale lembrar que a função custo minimizada pelo VRFT é diferente de (43), mas apresenta o mesmo mínimo que essa última sob condições ideais. Esse artifício também é usado pelo OCI, como comentado na Seção 2.4.

Na presença de ruído, o método VRFT emprega variáveis instrumentais para que a estimativa do controlador seja consistente. Contudo, a variância dessa estimativa é tipicamente elevada. Assim, desenvolveu-se recentemente em (RALLO et al., 2016) (caso SISO) e (BOEIRA; ECKHARD, 2018) (caso MIMO) uma adaptação do método em que é empregada a técnica de regularização bayesiana a fim de diminuir a variância da estimativa. Como efeito colateral, a mesma passa a ser levemente polarizada.

O VRFT será comparado com o OCI em alguns exemplos de simulação e em um caso experimental, de forma a verificar o desempenho de ambos métodos quando a batelada de dados da planta usada no projeto do controlador é contaminada por ruído. Como será mostrado, o OCI tende a fornecer melhores resultados.

O método OCI, como comentado na introdução, foi introduzido em (CAMPESTRINI et al., 2012) e o trabalho (CAMPESTRINI et al., 2017) realiza uma análise mais aprofundada do mesmo. Em (HUFF; SILVA; CAMPESTRINI, 2018) o método foi aplicado com sucesso em um problema de *benchmark*, onde o objetivo era controlar um sistema de refrigeração multivariável baseado na compressão de vapor. O desenvolvimento multivariável do OCI é realizado nos Capítulos 4 e 5.

2.6 Considerações finais

Os conceitos e definições apresentados acima são usados direta ou indiretamente no trabalho. Em especial, os capítulos seguintes consideram todos o processo descrito na Seção 2.2.

A Seção 2.4 apresentou o conceito de modelo de referência. No Capítulo 5 será visto que o mesmo pode na verdade ser (parcialmente) parametrizado por um vetor η . Ou seja, o método encontrará automaticamente a melhor combinação $T_d(q, \eta) - C(q, P)$ de forma a diminuir a diferença entre o modelo de referência “identificado” e a resposta obtida com o controlador projetado.

A revisão bibliográfica apresentada na Seção 2.5 sobre controle baseado em dados não engloba todos métodos existentes na literatura, mas fornece exemplos bastante ilustrativos. O leitor é particularmente encorajado a consultar as referências apresentadas sobre o VRFT, já que esse método será diretamente comparado com o OCI no Capítulo 6, embora isso não seja um pré-requisito para o entendimento do trabalho.

3 O MÉTODO DO ERRO DE PREDIÇÃO

A tarefa de *identificação* de um modelo para o sistema se diferencia da *modelagem matemática* do mesmo. No primeiro caso, obtém-se o modelo através de dados de entrada e saída coletados do processo, escolhendo aquele (dentro de uma classe pré-definida) que melhor descreve o processo segundo algum critério. A modelagem matemática do sistema, por sua vez, se baseia no conhecimento dos princípios físicos e relações matemáticas que governam o processo. Entretanto, a modelagem e a identificação podem ser combinados, dando origem aos chamados modelos *caixa-cinza* (LJUNG, 1999).

Neste capítulo, é introduzido o método de identificação por meio do erro de predição, cujo objetivo é encontrar um modelo para o sistema com base na minimização de uma função custo escolhida de maneira apropriada. O modelo é obtido como aquele que melhor prediz a saída do sistema com base em valores passados de entrada e saída, ou seja, como aquele que minimiza o *erro de predição*. Será visto no capítulo seguinte que o OCI se baseia nesse método para encontrar o valor ótimo do vetor de parâmetros do controlador.

O método de identificação pelo erro de predição é dito *paramétrico*. Isso significa que a classe de modelos candidatos é parametrizada em termos de um número finito de parâmetros. Mais especificamente, será dado enfoque aqui para sistemas lineares e invariantes no tempo descritos por meio de funções de transferência racionais em q (ou q^{-1}) e causais. Um modelo para o sistema (17) possui então a seguinte estrutura:

$$y(t) = G(q, \Theta)u(t) + H(q, \Theta)w(t) \quad (51)$$

onde $\Theta \in \mathcal{D}_\Theta \in \mathbb{R}^{n_\Theta}$ é o vetor de parâmetros a ser escolhido e \mathcal{D}_Θ é o conjunto compacto dos valores admissíveis para o mesmo. Assume-se aqui que, para todo $\Theta \in \mathcal{D}_\Theta$, $G(q, \Theta)$ é estritamente causal e $H(q, \Theta)$ é mônico. Por motivos que ficarão claros na sequência, também se considera que o filtro

$$W(q, \Theta) \triangleq [H^{-1}(q, \Theta)G(q, \Theta) \quad I - H^{-1}(q, \Theta)], \quad (52)$$

assim como suas derivadas de primeira e segunda ordem em relação a Θ , é estável para todo $\Theta \in \mathcal{D}_\Theta$. Note que existe uma relação um a um entre $W(q, \Theta)$ e

$$X(q, \Theta) \triangleq [G(q, \Theta) \quad H(q, \Theta)] \quad (53)$$

Ao contrário do que foi definido no Capítulo 2, *nesse capítulo* a função de transferência $G(q, \Theta)$ não é considerada quadrada necessariamente, mas de dimensões $n \times m$, enquanto que $H(q, \Theta)$ é $n \times n$.

3.1 Estruturas de modelo

Vamos rever alguns modelos típicos para as funções de transferência em (51), começando pelo caso SISO. Uma estrutura bastante genérica é dada por (LJUNG, 1999):

$$A(q, \Theta)y(t) = \frac{B(q, \Theta)}{F(q, \Theta)}u(t) + \frac{C(q, \Theta)}{D(q, \Theta)}w(t), \quad (54)$$

onde

$$\begin{aligned} A(q, \Theta) &= 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_{n_a}q^{-n_a} \\ B(q, \Theta) &= b_1q^{-1} + \dots + b_{n_b}q^{-n_b} \\ C(q, \Theta) &= 1 + c_1q^{-1} + \dots + c_{n_c}q^{-n_c} \\ D(q, \Theta) &= 1 + d_1q^{-1} + \dots + d_{n_d}q^{-n_d} \\ F(q, \Theta) &= 1 + f_1q^{-1} + \dots + f_{n_f}q^{-n_f} \end{aligned}$$

e as ordens n_a , n_b , n_c , n_d e n_f dos polinômios devem ser especificadas.

A partir de (54), observa-se que nesse caso:

$$G(q, \Theta) = \frac{B(q, \Theta)}{A(q, \Theta)F(q, \Theta)} \quad (55)$$

$$H(q, \Theta) = \frac{C(q, \Theta)}{A(q, \Theta)D(q, \Theta)}, \quad (56)$$

onde o vetor Θ concatena os coeficientes de todos os polinômios em alguma ordem. O conjunto \mathcal{D}_Θ , por sua vez, deve ser escolhido de tal modo que $F(q, \Theta)C(q, \Theta)$ não se anule para q sobre ou fora do círculo unitário (de acordo com (52)).

Em geral, não se trabalha diretamente com (54), mas sim com casos particulares dessa estrutura. Alguns exemplos podem ser vistos na Tabela 1.

Tabela 1: Exemplos de modelos comuns para sistemas SISO.

Polinômios em (54)	Nome da estrutura
B	FIR (<i>finite impulse response</i>)
AB	ARX (<i>auto regressive with external inputs</i>)
ABC	ARMAX (<i>auto regressive moving average with external inputs</i>)
ABD	ARARX
ABCD	ARARMAX
BF	OE (<i>output error</i>)
BFCD	BJ (<i>Box-Jenkins</i>)

Dependendo do caso, é mais adequado usar um ou outro dos modelos da tabela. Por exemplo, se a origem do ruído/distúrbio $w(t)$ é próxima à entrada do processo, pode ser conveniente que $G(q, \Theta)$ e $H(q, \Theta)$ compartilhem pelo menos alguns dos polos, como nas estruturas ARX e ARMAX. Isso possibilita que esses polos sejam identificados com mais precisão, embora o modelo BJ, por exemplo, também possa ser usado nessa situação. Caso contrário, se $w(t)$ está relacionado ao ruído de medição de algum sensor, faz mais sentido que $G(q, \Theta)$ e $H(q, \Theta)$ sejam parametrizados independentemente, como nas estruturas BJ e OE. Essa última costuma ser mais adequada quando os dados são coletados em malha aberta (ou quando $v(t)$ é branco, naturalmente), como será explicado mais adiante.

Alguns modelos possuem a vantagem de dar origem a algoritmos de identificação simples. O ARARX, por exemplo, apesar de descrever $H(q, \Theta)$ de uma maneira um tanto restritiva, é adequado para aplicação do método dos mínimos quadrados generalizado (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989). Já os modelos ARX e FIR, quando o método do erro de predição é usado (e dependendo do critério adotado), dão origem a funções custo quadráticas em Θ , ou seja, de fácil minimização.

Existem maneiras naturais de generalizar as estruturas acima para sistemas multivariáveis. No caso do modelo ARX, por exemplo, uma das formas de fazer isso é:

$$A(q, \Theta)y(t) = B(q, \Theta)u(t) + w(t), \quad (57)$$

onde agora $A(q, \Theta)$ e $B(q, \Theta)$ são matrizes polinomiais de dimensões $n \times n$ e $n \times m$, respectivamente:

$$\begin{aligned} A(q, \Theta) &= I + A_1q^{-1} + \dots + A_{n_a}q^{-n_a} \\ B(q, \Theta) &= B_1q^{-1} + \dots + B_{n_b}q^{-n_b}. \end{aligned}$$

Tem-se também

$$G(q, \Theta) = A^{-1}(q, \Theta)B(q, \Theta) \quad (58)$$

$$H(q, \Theta) = A^{-1}(q, \Theta). \quad (59)$$

Pode-se considerar que todos elementos das matrizes $A_1, \dots, A_{n_a}, B_1, \dots, B_{n_b}$ são desconhecidos. Esse caso é denominado *full polynomial form* em (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989). Outra possibilidade é usar uma matriz $A(q, \Theta)$ diagonal, o que chamaremos de *forma diagonal* de agora em diante. Ademais, os polinômios em q^{-1} que aparecem nos elementos de $A(q, \Theta)$ não precisariam ser todos da mesma ordem (n_a , no caso). O mesmo vale para $B(q, \Theta)$.

A estrutura ARMAX, por sua vez, pode ser generalizada da seguinte forma:

$$G(q, \Theta) = A^{-1}(q, \Theta)B(q, \Theta), \quad H(q, \Theta) = A^{-1}(q, \Theta)C(q, \Theta). \quad (60)$$

Já no caso do modelo OE obtemos

$$G(q, \Theta) = F^{-1}(q, \Theta)B(q, \Theta), \quad H(q, \Theta) = I, \quad (61)$$

e assim por diante.

No texto, o termo *output error* designará qualquer estrutura em que $H(q, \Theta) = I$, independente do fato de $G(q, \Theta)$ ser descrito em termos de uma *fração matricial* como em (61).

Uma das questões que surgem na definição de uma estrutura de modelo é se o mesmo é capaz de representar o sistema real para algum valor de Θ . Assim, vamos introduzir o conjunto e hipótese seguintes:

$$\mathcal{D}_T \triangleq \{\Theta \in \mathcal{D}_\Theta | G(q, \Theta) = G_0(q); H(q, \Theta) = H_0(q)\} \quad (62)$$

Hipótese 3.1. O conjunto \mathcal{D}_T definido em (62) é não-vazio.

A hipótese acima não é muito realista, mas pode ser aproximadamente satisfeita na prática. Se \mathcal{D}_T é não-vazio, existe ainda a possibilidade de o mesmo conter um ou mais elementos. Nesse último caso, diz-se às vezes que o modelo é *sobre-parametrizado*,

e os diferentes elementos de \mathcal{D}_T podem ser isolados entre si ou não. Se os mesmos formarem um subconjunto conexo, é possível que surjam problemas numéricos quando o valor ótimo de Θ é buscado (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989).

O fato de \mathcal{D}_T possuir ou não vários elementos está relacionado ao conceito de *identificabilidade* da estrutura de modelo.

Definição 3.1. *Uma estrutura de modelo é globalmente identificável em $\Theta^1 \in \mathcal{D}_\Theta$ se*

$$W(q, \Theta) = W(q, \Theta^1), \quad \Theta \in \mathcal{D}_\Theta \Rightarrow \Theta = \Theta^1 \quad (63)$$

De acordo com a definição acima, se a estrutura de modelo for globalmente identificável em $\Theta_0 \in \mathcal{D}_T$, então $\mathcal{D}_T = \{\Theta_0\}$.

Definição 3.2. *Uma estrutura de modelo é globalmente identificável se é globalmente identificável em quase todo $\Theta \in \mathcal{D}_\Theta$.*

A Definição 3.2 não exige que a estrutura de modelo seja identificável em *todo* $\Theta \in \mathcal{D}_\Theta$, pois isso é muito restritivo. No caso de sistemas lineares, por exemplo, a identificabilidade pode ser “perdida” em pontos de hiper-superfícies correspondendo a sistemas de menor ordem (LJUNG, 1999).

Em (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989) é realizada uma análise de identificabilidade de estruturas de modelo SISO como as apresentadas anteriormente. O caso multivariável é mais complexo, existindo uma vasta literatura sobre o assunto. Em (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989) e (LJUNG, 1999) são analisados alguns casos particulares.

Como será visto no Capítulo 5, existe o risco em alguns casos de a estrutura de modelo adotada pela versão flexível do método OCI não ser globalmente identificável. Cuidados especiais devem então ser tomados.

3.2 O preditor ótimo

Considere que um sistema obedeça a relação (51) para um determinado valor $\Theta \in \mathcal{D}_\Theta$. Lembre também das hipóteses do Capítulo 2. Em particular, tem-se que $u(r)$ e $w(s)$ são independentes para $r < s$, pois ou o sistema opera em malha aberta (com $\{u(t)\}$ independente de $\{w(t)\}$) ou o sistema opera em malha fechada com um controlador causal.

Define-se o conjunto de dados

$$\mathcal{Z}_{-\infty}^{t-1} = \{\dots, u(1), y(1), \dots, u(t-1), y(t-1)\}. \quad (64)$$

Deseja-se prever de maneira ótima o valor de $y(t)$ com base em $\mathcal{Z}_{-\infty}^{t-1}$, o que corresponde no nosso caso a minimizar a matriz de covariância do erro entre a estimativa e o valor real. Reescrevendo (51), obtém-se (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989)

$$y(t) = G(q, \Theta)u(t) + [H(q, \Theta) - I]w(t) + w(t) \quad (65)$$

$$= G(q, \Theta)u(t) + [H(q, \Theta) - I]H^{-1}(q, \Theta)[y(t) - G(q, \Theta)u(t)] + w(t) \quad (66)$$

$$= H^{-1}(q, \Theta)G(q, \Theta)u(t) + [I - H^{-1}(q, \Theta)]y(t) + w(t) \quad (67)$$

$$\triangleq z(t) + w(t) \quad (68)$$

Note que $z(t)$ depende apenas dos valores passados de $u(t)$, pois $G(q, \Theta)$ é estritamente causal. Também depende apenas dos valores passados de $y(t)$, pois $H^{-1}(q, \Theta)$ (assim como $H(q, \Theta)$) é mônico, fazendo com que o filtro $I - H^{-1}(q, \Theta)$ seja estritamente causal.

Considere agora um preditor arbitrário $y^*(t)$ da saída $y(t)$ baseado em $Z_{-\infty}^{t-1}$. Calculando a matriz de covariância do erro de predição, chega-se na seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} & E \{ [y(t) - y^*(t)][y(t) - y^*(t)]^T \} \\ &= E \{ [z(t) + w(t) - y^*(t)][z(t) + w(t) - y^*(t)]^T \} \\ &= E \{ [z(t) - y^*(t)][z(t) - y^*(t)]^T \} + \Lambda \geq \Lambda, \end{aligned}$$

onde se usou o fato de que $E \{ [z(t) - y^*(t)]w^T(t) \} = 0$ e $E \{ w(t)w^T(t) \} = \Lambda$ na segunda igualdade. Ou seja, para $y^*(t) = z(t)$ o limite inferior Λ da matriz de covariância é atingido. Diz-se então que

$$\begin{aligned} \hat{y}(t|t-1, \Theta) &= H^{-1}(q, \Theta)G(q, \Theta)u(t) + [I - H^{-1}(q, \Theta)]y(t) \\ &= W(q, \Theta) \begin{bmatrix} u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (69)$$

é o *preditor ótimo a um passo a frente* associado ao modelo (51). O mesmo é chamado assim por utilizar dados de entrada e saída até o instante de tempo $t-1$ para predizer a saída no instante seguinte. A partir de (69) fica claro o motivo pelo qual o filtro $W(q, \Theta)$ em (52) é assumido estável. No caso de uma estrutura OE o preditor (69) se reduz a

$$\hat{y}(t|t-1, \Theta) = G(q, \Theta)u(t) \quad (70)$$

onde agora $G(q, \Theta)$ é (necessariamente) estável.

O erro de predição associado a (69) é

$$\epsilon(t, \Theta) \triangleq y(t) - \hat{y}(t|t-1, \Theta) = H^{-1}(q, \Theta)[y(t) - G(q, \Theta)u(t)], \quad (71)$$

o qual é igual a $e(t)$ se o valor de Θ for de fato o que representa o sistema corretamente.

Note que na dedução acima foi assumido que os elementos da sequência $\{w(t)\}$ são independentes. Se os mesmos fossem considerados apenas descorrelacionados (mas não necessariamente independentes), a relação $E[y^*(t)w^T(t)] = 0$ não seria mais válida em geral. Nesse caso, (69) seria o preditor ótimo apenas entre as funções que dependem linearmente de $Z_{-\infty}^{t-1}$ (ANDERSON; MOORE, 1979).

Observe ainda que na prática apenas o conjunto de dados

$$\mathcal{Z}_1^{t-1} \triangleq \{u(1), y(1), \dots, u(t-1), y(t-1)\} \quad (72)$$

está disponível. A expressão (69) (considerando que $u(t)$ e $y(t)$ são nulos para $t < 1$) consiste então apenas em uma aproximação do preditor ótimo de $y(t)$ dado \mathcal{Z}_1^{t-1} . Essa aproximação é, contudo, razoável, tendo em vista que os coeficientes dos filtros em (52) tipicamente decaem exponencialmente a zero (ANDERSON; MOORE, 1979).

3.3 Identificação dos parâmetros

O objetivo do método de identificação pelo erro de predição é obter um modelo da forma (51) para o sistema (17). Agora que o preditor ótimo a um passo a frente associado a (51) foi definido, existe uma maneira natural de selecionar o melhor valor para o vetor de parâmetros $\Theta \in \mathcal{D}_\Theta$. O mesmo corresponde ao filtro $W(q, \Theta)$ utilizado em (69) que proporciona o “menor” erro de predição $\epsilon(t, \Theta)$ em (71) considerando os sinais $u(t)$ e $y(t)$ do sistema real. É possível formular diversas funções escalares que definem o “tamanho”

de $\epsilon(t, \Theta)$ com base num conjunto finito de dados \mathcal{Z}_1^N correspondente a uma realização do “experimento probabilístico” (lembre que o sistema é modelado estocasticamente). Essas funções são uma alternativa ao operador de esperança $E[\cdot]$, que é uma abstração matemática e não pode ser empregado na prática. Contudo, graças a uma série de resultados de ergodicidade, as aproximações usadas fazem sentido para uma quantidade de dados N relativamente grande (LJUNG, 1999).

Esse raciocínio de minimização do erro de predição pode ser usado mesmo se o sistema real não for perfeitamente descrito pela classe de modelos adotada, e o grau de sucesso da abordagem vai, naturalmente, depender da situação. Da mesma forma, existem outras alternativas de filtro que podem ser usadas em (69) ao invés de $W(q, \Theta)$, algumas das quais nem dependem de considerações probabilísticas, mas a escolha $W(q, \Theta)$ é a mais usual (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989).

Os critérios minimizados para encontrar uma estimativa do valor ótimo de Θ podem se basear na matriz

$$R_N(\Theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \epsilon(t, \Theta) \epsilon^T(t, \Theta), \quad (73)$$

possuindo a forma

$$V_N(\Theta) = h(R_N(\Theta)) \quad (74)$$

onde $h(\cdot)$ é uma função escalar definida no conjunto de matrizes positivas definidas e que satisfaz certas condições de regularidade. Em particular, tem-se para Q positiva definida e ΔQ não-negativa definida que

$$h(Q + \Delta Q) \geq h(Q) \quad (75)$$

onde a igualdade é válida somente para $\Delta Q = 0$. Duas escolhas comuns para $h(\cdot)$ são (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989):

$$h_1(Q) = \text{tr}(SQ) \quad (76)$$

onde S é uma matriz positiva definida de pesos e

$$h_2(Q) = \det(Q) \quad (77)$$

onde $\det(\cdot)$ denota o determinante.

Após escolhida a função $V_N(\Theta)$, a estimativa $\hat{\Theta}_N$ é encontrada através de

$$\hat{\Theta}_N = \arg \min_{\Theta \in \mathcal{D}_\Theta} V_N(\Theta) \quad (78)$$

Nesse trabalho, será considerada a opção (76) com $S = I$, caso em que (74) se reduz à

$$V_N(\Theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \|\epsilon(t, \Theta)\|_2^2 \quad (79)$$

Contudo, pode ser útil empregar outras matrizes S , e isso não aumenta a dificuldade de minimização de (74). Se as saídas do sistema tiverem ordens de grandeza diferentes, por exemplo, é altamente recomendável usar pesos diferentes para cada componente de $\epsilon(t, \Theta)$. Isso pode ser feito definindo S diagonal e com elementos inversamente proporcionais às ordens de grandeza de cada saída. Outro fator que deve ser levado em conta é o

ruído. Sob condições ideais, a escolha de S que minimiza a covariância de $\hat{\Theta}_N$ é $S = \Lambda^{-1}$ (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989).

É possível enunciar agora um dos resultados básicos nos quais se baseia a teoria de identificação por meio do erro de predição. Assume-se para o que segue que o conjunto de dados \mathcal{Z}_1^∞ está disponível.

Lema 3.1. (LJUNG, 1999) *Sob as hipóteses feitas a respeito do sistema e da estrutura de modelo, a matriz $R_N(\Theta)$ em (73) converge uniformemente em $\Theta \in \mathcal{D}_\Theta$ e com probabilidade 1 (c.p. 1) para:*

$$R_N(\Theta) \rightarrow \bar{E}[\epsilon(t, \Theta)\epsilon^T(t, \Theta)], \quad \text{quando } N \rightarrow \infty \quad (80)$$

Usando esse lema e considerando (79), chega-se também a

$$V_N(\Theta) \rightarrow \bar{V}(\Theta) = \bar{E} [\|\epsilon(t, \Theta)\|_2^2] \quad (81)$$

com probabilidade 1 e uniformemente em $\Theta \in \mathcal{D}_\Theta$ quando $N \rightarrow \infty$. $\bar{V}(\Theta)$ é então a função custo assintótica associada a $V_N(\Theta)$. Usando (9), pode-se obter uma expressão alternativa para a mesma:

$$\bar{V}(\Theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{tr}[\Phi_{\epsilon, \Theta}(\omega)] d\omega \quad (82)$$

onde $\Phi_{\epsilon, \Theta}(\omega)$ denota o espectro (de potência) de $\epsilon(t, \Theta)$. Note que $\bar{V}(\Theta)$ depende *nesse nosso caso* apenas das propriedades de segunda ordem dos sinais.

Define-se agora o conjunto de valores que minimizam $\bar{V}(\Theta)$:

$$\mathcal{D}_c \triangleq \arg \min_{\Theta \in \mathcal{D}_\Theta} \bar{V}(\Theta) \quad (83)$$

É comum que tal conjunto possua apenas um elemento, isto é, $\mathcal{D}_c = \{\Theta^*\}$. Como a convergência em (81) é uniforme em Θ e \mathcal{D}_Θ é compacto, é possível mostrar que (LJUNG, 1999):

$$\inf_{\Theta^* \in \mathcal{D}_c} \|\hat{\Theta}_N - \Theta^*\| \rightarrow 0 \quad \text{c.p. 1 quando } N \rightarrow \infty \quad (84)$$

Ou seja, o argumento que minimiza $V_N(\Theta)$ converge para o(s) mínimo(s) da função custo assintótica.

Reunindo as propriedades acima e com mais algum desenvolvimento analítico, é possível obter dois resultados relativos à consistência do método do erro de predição.

Lema 3.2. (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989) *Suponha que a Hipótese 3.1 é satisfeita e que o conjunto de dados \mathcal{Z}_1^∞ é suficientemente informativo com respeito ao conjunto de modelos candidatos. Então*

$$G(q, \hat{\Theta}_N) \rightarrow G_0(q), \quad H(q, \hat{\Theta}_N) \rightarrow H_0(q) \quad (85)$$

com probabilidade 1 quando $N \rightarrow \infty$.

Esse resultado diz respeito tanto a dados coletados em malha aberta como em malha fechada. Em geral não é óbvio se o conjunto de dados é suficientemente informativo ou não com respeito à estrutura de modelo. Mas quando o ensaio na planta é em malha aberta, é intuitivo que a entrada $u(t)$ não pode ser nula. Já para ensaios em malha fechada, é possível em alguns casos que apenas o ruído $w(t)$ seja suficiente para extrair toda informação necessária do sistema, mesmo se a referência $r(t)$ for nula (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989). Aliás, note que o sinal de referência, apesar de ser conhecido a princípio, não é usado diretamente no cálculo de (79).

Quando a estrutura de modelo não é flexível o suficiente para representar $H_0(q)$, é útil trabalhar com a hipótese abaixo, a qual é uma versão enfraquecida da Hipótese 3.1.

Hipótese 3.2. *O conjunto*

$$\mathcal{D}_G \triangleq \{\Theta \in \mathcal{D}_\Theta | G(q, \Theta) = G_0(q)\} \quad (86)$$

é não-vazio.

Assim, o segundo resultado de consistência é:

Lema 3.3. (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989) *Suponha que a Hipótese 3.2 é satisfeita e que o conjunto de dados \mathcal{Z}_1^∞ é suficientemente informativo com respeito ao conjunto de modelos candidatos. Considere ainda que os dados são coletados em malha aberta e que $G(q, \Theta)$ e $H(q, \Theta)$ são parametrizados independentemente:*

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{bmatrix}, \quad G(q, \Theta) = G(q, \Theta_1), \quad H(q, \Theta) = H(q, \Theta_2) \quad (87)$$

Nesse caso,

$$G(q, \hat{\Theta}_N) \rightarrow G_0(q) \quad (88)$$

com probabilidade 1 quando $N \rightarrow \infty$.

As estruturas OE e BJ, por exemplo, parametrizam $G(q, \Theta)$ e $H(q, \Theta)$ de maneira independente. Outro exemplo é a variante da estrutura OE em que o modelo do ruído é mantido fixo em alguma função de transferência:

$$y(t) = G(q, \Theta)u(t) + H_*(q)e(t) \quad (89)$$

Nesse caso particular em que os dados são coletados em malha aberta, obtém-se usando o Lema 2.1 e (17) que o espectro de $[y^T(t) \ u^T(t)]^T$ é

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Phi_y(\omega) & \Phi_{yu}(\omega) \\ \Phi_{uy}(\omega) & \Phi_u(\omega) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} G_0(e^{j\omega}) & H_0(e^{j\omega}) \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_u(\omega) & 0 \\ 0 & \Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_0(e^{j\omega})^H & I \\ H_0(e^{j\omega})^H & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} G_0(e^{j\omega})\Phi_u(\omega)G_0(e^{j\omega})^H + H_0(e^{j\omega})\Lambda H_0(e^{j\omega})^H & G_0(e^{j\omega})\Phi_u(\omega) \\ \Phi_u(\omega)G_0(e^{j\omega})^H & \Phi_u(\omega) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (90)$$

onde se assume que $u(t)$ é quasi-estacionário e independente do ruído branco $w(t)$. Usou-se ainda $\Phi_w(\omega) = \Lambda$.

Considerando ainda que a estrutura de modelo é do tipo OE, é possível mostrar com base em (90) que o espectro de $\epsilon(t, \Theta)$ é (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989):

$$\Phi_{\epsilon, \Theta}(\omega) = [G_0(e^{j\omega}) - G(e^{j\omega}, \Theta)] \Phi_u(\omega) [G_0(e^{j\omega}) - G(e^{j\omega}, \Theta)]^H + H_0(e^{j\omega})\Lambda H_0(e^{j\omega})^H \quad (91)$$

Como $\bar{V}(\Theta)$ depende diretamente da integral do traço desse espectro, fica claro que se o espectro da entrada for rico o suficiente a estimativa de $G_0(q)$ será de fato consistente.

3.4 Ferramentas computacionais

Existem pacotes computacionais prontos que aplicam o método de identificação pelo erro de predição. O mais conhecido provavelmente consiste na *toolbox* `ident` (LJUNG, 1991) do *software* Matlab[®]. Essa *toolbox* pode ser usada para identificar estruturas de modelo como as apresentadas na Seção 3.1, as quais costumam ser chamadas de *caixa-preta*. Contudo, no caso multivariável, apenas o caso em que $A(q)$ é diagonal é tratado. Além disso, a *toolbox* interpreta as frações matriciais $\frac{B(q)}{F(q)}$ e $\frac{C(q)}{D(q)}$ em (54) elemento a elemento. Por exemplo, no caso de um sistema 2×2 , tem-se que

$$\frac{B(q)}{F(q)} \equiv \begin{bmatrix} \frac{B_{11}(q)}{F_{11}(q)} & \frac{B_{12}(q)}{F_{12}(q)} \\ \frac{B_{21}(q)}{F_{21}(q)} & \frac{B_{22}(q)}{F_{22}(q)} \end{bmatrix} \quad (92)$$

onde $B_{ij}(q)$ denota o elemento da linha i e coluna j de $B(q)$ e similarmente para $F(q)$.

A minimização de (79) pode ser realizada através de diferentes métodos de otimização não-lineares, mas alguns são mais adequados do que outros. Os métodos usados pela função `fminunc` do Matlab[®], por exemplo, não são os mesmos empregados pelo `ident`. O que essa *toolbox* faz é se aproveitar da estrutura da função $V_N(\Theta)$, empregando métodos concebidos especialmente para problemas de *mínimos quadrados não-lineares*, como o Gauss-Newton ou o Levenberg-Marquardt (FLETCHER, 1987).

3.5 Identificação caixa-cinza

Ao contrário das estruturas de modelo caixa-preta apresentadas na Seção 3.1, é possível personalizar as funções de transferência $G(q, \Theta)$ e $H(q, \Theta)$ de acordo com o conhecimento *a priori* que se tem do processo. Isso dá origem aos chamados modelos caixa-cinza. Como será mostrado no Capítulo 4, o método OCI emprega uma estrutura bastante específica para $G(q, \Theta)$, a qual depende do modelo de referência $T_d(q)$ e da estrutura do controlador $C(q, P)$. Assim, é possível dizer que o OCI identifica um modelo caixa-cinza para o processo, embora tal modelo *não* leve em conta nenhum conhecimento *a priori* da planta.

A *toolbox* `ident` possui funcionalidades para identificar modelos caixa-cinza no espaço de estados. Contudo, como o método OCI trabalha com funções de transferência, foi necessário desenvolver um algoritmo dedicado para a solução do problema de identificação. O mesmo será detalhado no Capítulo 4.

3.6 Considerações finais

O capítulo apresentou o método de identificação pelo erro de predição. Na Seção 3.1 alguns modelos para o sistema comumente usados foram introduzidos, enquanto que na Seção 3.2 foi explicado como calcular o preditor ótimo da saída da planta no sentido *mean square* para tais modelos. A Seção 3.3 mostrou como realizar a identificação do sistema por meio da minimização de uma função objetivo que depende desse preditor. Os Lemas 3.2 e 3.3 serão particularmente úteis no Capítulo 4. Por fim, as Seções 3.4 e 3.5 falaram sobre alguns aspectos práticos relacionados à identificação do sistema.

4 O MÉTODO OCI - *OPTIMAL CONTROLLER IDENTIFICATION*

Nesse capítulo, a formulação multivariável do método de controle baseado em dados empregado nesse trabalho, o OCI, é desenvolvida. A versão SISO foi introduzida em (CAMPESTRINI et al., 2012, 2017) e está englobada na versão MIMO. Por isso não será explicada separadamente.

Será visto que o método OCI corresponde, na verdade, à identificação de um modelo para o sistema através do método do erro de predição. Esse modelo, contudo, possui uma estrutura bastante específica, já que é definido em termos do modelo de referência $T_d(q)$ e da estrutura do controlador $C(q, P)$ a ser projetado. Tendo em vista isso, foi elaborado um algoritmo dedicado para a solução do problema de otimização relacionado à estimação dos parâmetros do controlador.

Primeiramente, na Seção 4.1, será visto como transformar a tarefa de projeto do controlador em um problema de identificação do sistema. O critério de desempenho (43) não será minimizado diretamente. O que se faz é minimizar uma função custo alternativa que possui o mesmo mínimo que a original sob condições ideais. A vantagem é que essa nova função depende apenas de grandezas conhecidas: o modelo de referência $T_d(q)$ e a estrutura do controlador $C(q, P)$, que são definidos *a priori*, e uma batelada de dados de entrada e saída coletados do processo.

Na sequência, na Seção 4.2, será explicado quais as diferenças básicas entre os casos SISO e MIMO. Embora a natureza teórica do problema não mude, de um ponto de vista prático o caso MIMO demanda cuidados especiais. É por isso que, na Seção 4.3, será detalhado como foi realizada a minimização da função custo do OCI, já que as ferramentas computacionais existentes não servem nesse caso.

4.1 Fundamentos

Usando o conceito do controlador ideal $C_d(q)$ apresentado na Seção 2.4, é possível transformar o projeto de controle por modelo de referência em um problema de identificação padrão baseado na minimização do erro de predição. Essa é a ideia fundamental do OCI. Ao invés de minimizar diretamente a expressão (43), trabalha-se com uma função objetivo alternativa que possui idealmente o mesmo mínimo que a original. Esse artifício é usado também por outros métodos de controle baseado em dados, como o VRFT.

Considere a expressão para $G_0(q)$ em função de $C_d(q)$,

$$G_0(q) = T_d(q) (I - T_d(q))^{-1} C_d(q)^{-1}, \quad (93)$$

obtida a partir da reorganização dos termos em (45), transcrita abaixo:

$$C_d(q) \triangleq G_0(q)^{-1} T_d(q) (I - T_d(q))^{-1}.$$

Com base nessa relação, é intuitivo definir um modelo para a planta em termos dos parâmetros do controlador a ser projetado como segue:

$$G(q, P) \triangleq T_d(q) (I - T_d(q))^{-1} C(q, P)^{-1} \quad (94)$$

onde

$$G(q, P) = G_0(q) \Leftrightarrow C(q, P) = C_d(q) \quad (95)$$

A tarefa será então obter uma estimativa $C(q, \hat{P}_N)$ que pertença à classe de controladores \mathcal{C} discutida no Capítulo 2 e seja o mais próxima possível do controlador ideal $C_d(q)$ (lembre ainda que a Hipótese 2.1 pode ou não ser satisfeita). Isso corresponde, em outras palavras, a identificar um modelo $G(q, P)$ para a planta com uma parte fixa, função do modelo de referência $T_d(q)$, e uma parte parametrizada, função da inversa do controlador.

Considerando também o modelo do ruído, a estrutura de modelo como um todo se torna (em paralelo com (51)):

$$\begin{aligned} y(t) &= G(q, \Theta)u(t) + H(q, \Theta)w(t) \\ &= G(q, P)u(t) + H(q, \Theta)w(t) \\ &= T_d(q) (I - T_d(q))^{-1} C(q, P)^{-1}u(t) + H(q, \Theta)w(t) \\ &\triangleq L_d(q)C(q, P)^{-1}u(t) + H(q, \Theta)w(t), \end{aligned} \quad (96)$$

onde $\theta \in \mathcal{D}_\theta \subseteq \mathbb{R}^{n_\theta}$ é um vetor de parâmetros adicional que aparece no modelo do ruído e $\Theta = [P^T \ \theta^T]^T \in \mathcal{D}_\Theta = \mathcal{D}_P \times \mathcal{D}_\theta$, com \mathcal{D}_Θ compacto. Assume-se que $C(q, P)$ é diferenciável em relação a $P \in \mathcal{D}_P$ um número suficiente de vezes e que \mathcal{D}_P é escolhido de tal forma que a inversa de $C(q, P)$ de fato exista. Assumindo também que $T_d(q)$ é estritamente causal, o filtro $(I - T_d(q))$ será mônico e, logo, inversível.

Note ainda que o filtro $W(q, \Theta)$ em (52) associado a (96) deve ser estável. No caso particular de uma estrutura OE ($H(q, \Theta) = I$), isso significa que $G(q, P)$ é estável. Contudo, pode acontecer que essa restrição seja violada em alguns casos. O problema pode então ser contornado por meio do uso de um filtro passa-tudo, como será visto mais adiante.

Para obtenção da estimativa $\hat{\Theta}_N = [\hat{P}_N^T \ \hat{\theta}_N^T]^T$ a partir de \mathcal{Z}_1^N , procede-se como na Seção 3.3 (veja em particular (69), (71), (78) e (79)). O erro de predição (71) pode ser reescrito explicitamente em termos do controlador usando (94):

$$\epsilon(t, \Theta) = H^{-1}(q, \Theta)y(t) - H^{-1}(q, \Theta)L_d(q)C^{-1}(q, P)u(t) \quad (97)$$

Ou seja, o problema de projeto do controlador foi transformado em um problema de identificação pelo método do erro de predição. Ao invés de minimizar $J^{MR}(P)$ (definida em (43)), que depende do modelo desconhecido da planta $G_0(q)$, o que se faz então é obter o mínimo de $V_N(\Theta)$, função que depende puramente de dados coletados do sistema e de funções de transferência conhecidas. Como será mostrado abaixo, isso faz sentido, pois o vetor de parâmetros do controlador associado ao mínimo da função assintótica $\bar{V}(\Theta)$ corresponde, sob condições ideais, ao valor que minimiza $J^{MR}(P)$. Uma estratégia parecida é usada também por outros métodos de controle baseado em dados.

Todas propriedades assintóticas apresentadas no Capítulo 3 são válidas. Em particular, tendo em mente a relação (95), obtém-se o seguinte corolário do Lema 3.2.

Corolário 4.1. *Suponha que $\exists \Theta_0 = [P_0^T \ \theta_0^T]^T \in \mathcal{D}_\Theta$ tal que*

$$C(q, P_0) = C_d(q) \text{ e } H(q, \Theta_0) = H_0(q).$$

Suponha ainda que o conjunto de dados \mathcal{Z}_1^∞ é suficientemente informativo com respeito ao conjunto de modelos candidatos. Então

$$C(q, \hat{P}_N) \rightarrow C_d(q), \quad H(q, \hat{\Theta}_N) \rightarrow H_0(q) \quad (98)$$

com probabilidade 1 quando $N \rightarrow \infty$.

Esse resultado significa que, quando $C_d(q) \in \mathcal{C}$, o controlador ideal (que faz com que $J^{MR}(P) = 0$) pode ser identificado com um grau de precisão arbitrário desde que o conjunto de dados \mathcal{Z}_1^N seja suficientemente grande. Para isso, é necessário que o modelo do ruído seja flexível o suficiente para representar $H_0(q)$ adequadamente. Note que esse último também é identificado consistentemente, o que corresponde a um bônus do método OCI, já que originalmente se desejava encontrar apenas o controlador que minimiza $J^{MR}(P)$.

Quando a estrutura de $H(q, \Theta)$ não é genérica o suficiente, ainda é possível identificar $C_d(q)$ com consistência, desde que o ensaio seja em malha aberta. Isso corresponde a um corolário do Lema 3.3:

Corolário 4.2. *Suponha que a Hipótese 2.1 é satisfeita e que o conjunto de dados \mathcal{Z}_1^∞ é suficientemente informativo com respeito ao conjunto de modelos candidatos. Considere ainda que os dados são coletados em malha aberta e que $G(q, P)$ e $H(q, \Theta)$ são parametrizados independentemente (isso é, $\frac{\partial H(q, \Theta)}{\partial P} = 0$). Então*

$$C(q, \hat{P}_N) \rightarrow C_d(q) \quad (99)$$

com probabilidade 1 quando $N \rightarrow \infty$.

Quando nenhum dos dois conjuntos de condições acima é satisfeito (relativos aos Corolários 4.1 e 4.2), os vetores de parâmetros P relativos aos mínimos de $\bar{V}(\Theta)$ e $J^{MR}(P)$ são distintos.

Vamos definir o *erro de bias* e o *erro de variância* da estimativa do controlador como segue:

$$C_d(q) - C(q, \hat{P}_N) = \underbrace{C_d(q) - C(q, P^*)}_{\text{BIAS}} + \underbrace{C(q, P^*) - C(q, \hat{P}_N)}_{\text{VARIÂNCIA}}, \quad (100)$$

onde P^* se refere ao mínimo de $\bar{V}(\Theta)$. Como explicado acima, o erro de *bias* é nulo sob condições ideais. O erro de variância, por sua vez, se deve à natureza estocástica da função $V_N(\Theta)$ e não pode ser completamente anulado em uma aplicação real. Quando o erro de *bias* for nulo, isto é, quando $C(q, \hat{P}_N) \rightarrow C_d(q)$ com probabilidade 1 quando $N \rightarrow \infty$ diremos que a estimativa do controlador é *consistente*. De maneira similar, as estimativas de $G_0(q)$ e $H_0(q)$ podem ou não ser consistentes dependendo do caso.

Note que o método OCI não precisa de variáveis instrumentais para obter uma estimativa sem *bias* do controlador ideal, ao contrário de outros métodos, como o VRFT (CAMPESTRINI et al., 2016) e o CbT (MIŠKOVIĆ et al., 2005). Além disso, observe que (97), do qual a função custo depende, é em geral não-linear em Θ mesmo se o controlador é linear em P . Ou seja, de um ponto de vista de otimização o controlador não precisa ser necessariamente linear nos parâmetros, sendo possível ao invés disso trabalhar com estruturas bastante genéricas. Em (HUFF; SILVA; CAMPESTRINI, 2018), por exemplo, o polo derivativo de um controlador PID é considerado livre. Estruturas mais flexíveis para $C(q, P)$ permitem diminuir o erro de *bias* em (100).

4.2 Aspectos práticos do método

Nesta seção serão discutidos alguns aspectos práticos relacionados à aplicação do método OCI. Entre outras coisas, serão explicadas as diferenças entre os casos SISO e MIMO.

Geralmente, assume-se que o controlador possui alguma parte fixa. O exemplo mais comum disso provavelmente é a imposição de um polo em $q = 1$ para garantir erro nulo em regime permanente para referências e perturbações constantes. Como discutido na Seção 2.4, esse é o caso considerado nesse trabalho. Essa parte fixa, denotada por $C_F(q)$, não precisa ser identificada. Assim, reescreve-se a função de transferência do controlador como o produto de duas matrizes:

$$C(q, P) = C_I(q, P)C_F(q). \quad (101)$$

Por exemplo, considere um controlador PI de dimensões 2×2 . Nesse caso, uma possível decomposição seria:

$$C_F(q) = \frac{1}{q-1}I \quad (102)$$

$$C_I(q, P) = \begin{bmatrix} a_{11}q + b_{11} & a_{12}q + b_{12} \\ a_{21}q + b_{21} & a_{22}q + b_{22} \end{bmatrix} \quad (103)$$

onde $P = [a_{11} \ b_{11} \ a_{12} \ b_{12} \ a_{21} \ b_{21} \ a_{22} \ b_{22}]^T$. Nesse exemplo, $C_F(q)$ é simplesmente o produto entre um escalar e a matriz identidade, mas não precisaria ser assim.

Usando (101) e (94), (96) pode ser reescrita como

$$y(t) = \underbrace{L_d(q)C_F^{-1}(q)}_{\tilde{L}_d(q)} \underbrace{C_I^{-1}(q, P)}_{\tilde{C}(q, P)} u(t) + H(q, \Theta)w(t) \quad (104)$$

onde $\tilde{L}_d(q)$ é uma função de transferência que corresponde à parte fixa de $G(q, P)$. Assume-se que os filtros $\tilde{L}_d(q)$ e $\tilde{L}_d(q)\tilde{C}(q, P)$ são ambos causais. Note que, como $T_d(1) = I$, o filtro $L_d(q)$ possui um polo em $q = 1$, mas o mesmo será cancelado no produto $L_d(q)C_F^{-1}(q)$ se o controlador possuir ação integral, como assumido aqui.

Observe que no caso SISO (e também no caso MIMO quando ambos $T_d(q)$ e $C_F(q)$ correspondem a produtos entre escalares e a matriz identidade) $\tilde{L}_d(q)$ comuta com $\tilde{C}(q, P)$ e (104) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} y(t) &= \tilde{C}(q, P) \times \underbrace{\tilde{L}_d(q)u(t)}_{\tilde{u}(t)} + H(q, \Theta)w(t) \\ &= \tilde{C}(q, P)\tilde{u}(t) + H(q, \Theta)w(t). \end{aligned} \quad (105)$$

Nesse caso, a solução do problema de identificação pode ser obtida facilmente através de *toolboxes* como Matlab[®] *ident* (LJUNG, 1991) graças ao formato assumido por (105). Vamos ilustrar isso através de um exemplo.

Exemplo 4.1. *Suponha que sejam definidos o modelo de referência e controlador seguintes, onde $C(q, P)$ já está expresso em termos de $C_F(q)$ e $C_I(q, P)$:*

$$\begin{aligned} T_d(q) &= \frac{0,16q}{(q-0,6)^2}, \\ C_F(q) &= \frac{1}{q-1}, \quad C_I(q, P) = \frac{q^3 + aq^2 + bq + c}{dq^2 + eq + f}. \end{aligned}$$

A função de transferência a ser identificada é a inversa de $C_I(q, P)$, dada por

$$\tilde{C}(q, P) = \frac{dq^2 + eq + f}{q^3 + aq^2 + bq + c}$$

considerando

$$\tilde{u}(t) = \underbrace{\frac{0,16q}{q - 0,36}}_{\tilde{L}_d(q)} u(t)$$

como entrada. Observe que um modelo $H(q, \Theta)$ também pode ser identificado opcionalmente.

Entretanto, os filtros $\tilde{L}_d(q)$ e $\tilde{C}(q, P)$ em (104) em geral não comutam no caso MIMO. Logo não é possível reescrever (104) como em (105). E mesmo se fosse possível, a matriz $\tilde{C}(q, P)$ possui uma estrutura atípica, como mostrado no exemplo seguinte.

Exemplo 4.2. Considere um sistema livre de ruído descrito por

$$G_0(q) = \begin{bmatrix} \frac{0,095q}{(q-0,92)(q-0,8)} & \frac{0,04q}{(q-0,9)(q-0,85)} \\ \frac{-0,03q}{(q-0,92)(q-0,8)} & \frac{0,05q}{(q-0,9)(q-0,85)} \end{bmatrix} \quad (106)$$

onde $C(q, P)$ é dado por (101)-(103) e o modelo de referência escolhido é

$$T_d(q) = \frac{0,2}{q - 0,8} I \quad (107)$$

Ou seja, está sendo especificado um sistema desacoplado em malha fechada com o mesmo desempenho para ambas as saídas.

Nesse caso,

$$\tilde{C}(q, P) = \frac{1}{\det(C_I(q, P))} \text{cof}^T(C_I(q, P)) \quad (108)$$

onde $\det(\cdot)$ é o determinante e $\text{cof}(\cdot)$ é a matriz cofatora. Obtém-se

$$\text{cof}^T(C_I(q, P)) = \begin{bmatrix} a_{22}q + b_{22} & -(a_{12}q + b_{12}) \\ -(a_{21}q + b_{21}) & a_{11}q + b_{11} \end{bmatrix} \quad (109)$$

e

$$\det(C_I(q, P)) = (a_{11}q + b_{11})(a_{22}q + b_{22}) - (a_{12}q + b_{12})(a_{21}q + b_{21}) \quad (110)$$

Note que, mesmo quando o controlador é linearmente parametrizado, sua inversa não o é.

Nesse exemplo, os filtros $\tilde{L}_d(q) = 0,2I$ e $\tilde{C}(q, P)$ em (104) comutam. Contudo, ainda não é possível usar, por exemplo, a toolbox `ident`, por causa do formato especial assumido por $\tilde{C}(q, P)$. Vamos ver, então, o que acontece se tentarmos reparametrizar $\tilde{C}(q, P)$ como mostrado abaixo:

$$\begin{aligned} \tilde{C}(q, \bar{P}) &= \begin{bmatrix} q^2 + d_1q + d_2 & 0 \\ 0 & q^2 + d_3q + d_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} c_1q + c_2 & c_3q + c_4 \\ c_5q + c_6 & c_7q + c_8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{c_1q + c_2}{q^2 + d_1q + d_2} & \frac{c_3q + c_4}{q^2 + d_1q + d_2} \\ \frac{c_5q + c_6}{q^2 + d_3q + d_4} & \frac{c_7q + c_8}{q^2 + d_3q + d_4} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (111)$$

onde $\bar{P} = [c_1 \dots c_8 \ d_1 \dots d_4]^T$. Essa estrutura de modelo é padrão, correspondendo à forma diagonal em (57) com $n_a = n_b = 2$, e é coberta por `ident`. Contudo, a estrutura também é mais flexível do que (108)-(110) por dois motivos. Em primeiro lugar, os coeficientes que aparecem nos denominadores dos elementos de (111) deveriam na verdade ser relacionados aos coeficientes dos numeradores. Além disso, todos elementos de (111) deveriam possuir o mesmo denominador (independente da linha correspondente).

Se aplicarmos entradas do tipo salto no sistema em malha aberta e identificarmos $\tilde{C}(q, \bar{P})$ usando `ident`, obtemos

$$\tilde{C}(q, \hat{P}_N) = \begin{bmatrix} \frac{0,461(q+0,008)}{(q-0,810)(q-0,917)} & \frac{0,262(q-0,198)}{(q-0,810)(q-0,917)} \\ \frac{-0,118(q+0,208)}{(q-0,837)(q-0,907)} & \frac{0,262(q-0,031)}{(q-0,837)(q-0,907)} \end{bmatrix} \quad (112)$$

resultando no controlador

$$C(q, \hat{P}_N) = \begin{bmatrix} \frac{1,727(q-0,917)(q-0,810)(q-0,031)}{(q+0,085)(q-0,101)(q-1)} & \frac{-1,729(q-0,907)(q-0,837)(q-0,198)}{(q+0,085)(q-0,101)(q-1)} \\ \frac{0,778(q-0,917)(q-0,810)(q+0,208)}{(q+0,085)(q-0,101)(q-1)} & \frac{3,045(q-0,907)(q-0,837)(q+0,008)}{(q+0,085)(q-0,101)(q-1)} \end{bmatrix} \quad (113)$$

o qual não é do tipo PI como gostaríamos que fosse, justamente porque resolvemos o problema de projeto usando mais graus de liberdade do que realmente temos, como foi explicado acima.

Agora, considerando (108)-(110), obtém-se (usando o mesmo sinal de entrada e não usando `ident`)

$$\tilde{C}(q, \hat{P}_N) = \begin{bmatrix} \frac{1,751(q-0,939)}{(q-0,939)(q-0,941)} & \frac{0,801(q-0,941)}{(q-0,939)(q-0,941)} \\ \frac{-0,543(q-0,939)}{(q-0,939)(q-0,941)} & \frac{1,037(q-0,941)}{(q-0,939)(q-0,941)} \end{bmatrix} \quad (114)$$

resultando em

$$C(q, \hat{P}_N) = \begin{bmatrix} \frac{0,461(q-0,942)}{q-1} & \frac{-0,356(q-0,941)}{q-1} \\ \frac{0,241(q-0,938)}{q-1} & \frac{0,778(q-0,939)}{q-1} \end{bmatrix} \quad (115)$$

o qual é, de fato, um controlador PI.

Vale ressaltar que os custos (43) e (79) relacionados a (113) são na verdade menores do que os valores correspondentes a (115). O preço para isso é usar uma estrutura de controlador mais complexa, o que nem sempre é possível/adequado em aplicações reais.

Com base no exemplo acima, fica claro que, devido à parametrização atípica do modelo (104), não é em geral possível empregar as *toolboxes* existentes de identificação de sistemas no caso MIMO e um algoritmo dedicado deve ser usado para minimizar (79). Na Seção 4.3, a solução do problema de otimização é detalhada.

Antes de prosseguir à próxima seção, vamos examinar alguns aspectos relacionados ao método e que dizem respeito tanto a sistemas SISO como MIMO. Isso será feito por meio de exemplos.

Exemplo 4.3. Considere que

$$G_0(q) = \frac{1,25(q-0,8)}{(q-0,9)^2} \quad (116)$$

$$T_d(q) = \frac{1,25(q-0,8)}{(q-0,5)^2} \quad (117)$$

$$C(q, P) = \frac{aq^2 + bq + c}{(q-1)(q-d)} \quad (118)$$

$$H(q, \Theta) = 1 \quad (119)$$

$$\Theta \equiv P = [a \ b \ c \ d]^T \quad (120)$$

Nesse caso, tem-se que

$$\begin{aligned} G(q, P) &= \underbrace{\frac{1,25(q-0,8)}{(q-1)(q-1,25)}}_{L_d(q)} \underbrace{\frac{(q-1)(q-d)}{aq^2+bq+c}}_{C^{-1}(q,P)} \\ &= \frac{1,25(q-0,8)(q-d)}{(q-1,25)(aq^2+bq+c)} \end{aligned} \quad (121)$$

A Hipótese 2.1 é satisfeita para $P_0 = [1 \ -1,8 \ 0,81 \ 1,25]^T$ (assumindo que \mathcal{D}_P é escolhido tal que de fato $P_0 \in \mathcal{D}_P$). Contudo, apesar de $G_0(q) = G(q, P_0)$ ser estável, $G(q, P)$ (e consequentemente $W(q, \Theta)$) é instável para $d \neq 1,25$, não sendo possível encontrar uma vizinhança de P_0 (um conjunto aberto e conexo contendo P_0) tal que isso não ocorra. Em outras palavras, uma aplicação direta do método OCI tende a falhar nesse caso, a não ser que o parâmetro d seja fixado a priori no valor 1,25. O problema é que o valor ótimo de d poderia não ser exatamente 1,25 (embora nesse exemplo seja). Ou ainda o valor de d poderia não ser uma variável livre de projeto, estando fixo de antemão em algum outro número. Como então encontrar o controlador ótimo através do OCI para esse modelo de referência?

A origem do problema é o filtro $L_d(q)$, o qual continua sendo instável mesmo após o cancelamento do polo em $q = 1$. Será visto que esse problema também pode surgir quando $C^{-1}(q, P)$ é instável. No Capítulo 5, será explicado como isso pode ser resolvido através do uso de um filtro passa-tudo na função custo.

O próximo exemplo apresenta um problema parecido com o acima, mas de origem distinta.

Exemplo 4.4. Considere que

$$G_0(q) = \frac{1}{q} \quad (122)$$

$$T_d(q) = \frac{0,25}{(q-0,5)^2} \quad (123)$$

$$C(q, P) = \frac{aq+b}{(q-1)} \quad (124)$$

$$H(q, \Theta) = 1 \quad (125)$$

$$\Theta \equiv P = [a \ b]^T, \quad (126)$$

onde se assume que o sistema é livre de ruído.

Obtém-se nesse caso

$$\begin{aligned} G(q, P) &= \underbrace{\frac{0,25}{q(q-1)}}_{L_d(q)} \underbrace{\frac{q-1}{aq+b}}_{C^{-1}(q,P)} \\ &= \frac{0,25}{q(aq+b)}. \end{aligned} \quad (127)$$

Note que $G(q, P)$ é estável para $P \in \mathcal{D}_S$, onde

$$\mathcal{D}_S \triangleq \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid a = 0, b \neq 0 \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid |a| > |b| \right\} \quad (128)$$

$$\triangleq \mathcal{D}_{S,1} \cup \mathcal{D}_{S,2} \quad (129)$$

Note ainda que a Hipótese 2.1 é satisfeita para $P_0 = [0 \ 0,25]^T \in \mathcal{D}_{S,1}$, mas o conjunto $\mathcal{D}_{S,1}$ não possui interior. Ou seja, uma aplicação descuidada do método não resultará no melhor valor possível para o vetor de parâmetros.

Suponha, por exemplo, que seja aplicado um salto ao sistema em malha aberta para coleta de dados e que a estimativa \hat{P}_N seja obtida com base nos algoritmos iterativos que serão descritos na próxima seção. Usando, a título de ilustração, a condição inicial para o vetor de parâmetros $P_i = [2 \ 1]^T \in \mathcal{D}_{S,2}$, obtém-se o controlador

$$C(q, \hat{P}_N) = \frac{0,25q}{q-1} \quad (130)$$

que resulta na função de transferência de malha fechada

$$T(q, \hat{P}_N) = \frac{0,25}{q-0,75} \quad (131)$$

A resposta do sistema em malha fechada a uma referência do tipo salto é mostrada na Figura 2, onde também aparece a saída correspondente ao modelo de referência (MR). Note que o tempo de acomodação é um pouco maior do que o especificado, mas a questão não é nem essa. O fato é que, apesar de o controlador ideal pertencer à classe PI, o mesmo não é identificado adequadamente. Esse problema não ocorrerá se adicionarmos, por exemplo, um atraso no controlador:

$$C(q, P) = \frac{aq+b}{q(q-1)} \quad (132)$$

O que esse exemplo mostra é que, mesmo se $C_d(q) \in \mathcal{C}$, pode ser necessário testar mais de uma estrutura de modelo a fim de obter a melhor solução possível, mudando, por exemplo, o grau relativo da função de transferência. Essa tarefa de “tentativa e erro” não é uma particularidade do OCI. Em qualquer método de identificação paramétrico é comum testar várias estruturas de modelo diferentes a fim de verificar qual a mais efetiva na prática (SöDERSTRÖM; STOICA, 1989).

4.3 Solução do problema de otimização

Como comentado na Seção 4.2, é necessário desenvolver um algoritmo dedicado para solução do problema de otimização (78) no caso MIMO. Assim, serão descritos na sequência os métodos numéricos empregados para minimização da função custo. Após isso, serão dados alguns detalhes a respeito dos cálculos analíticos do gradiente e da Hessiana (aproximada) de $V_N(\Theta)$, os quais são exigidos por tais métodos. Para uma visão geral sobre otimização linear e não-linear com ou sem restrições veja, por exemplo, (LUENBERGER; YE, 2015).

Primeiramente, vale salientar que a restrição $\Theta \in \mathcal{D}_\Theta$ não é levada em conta diretamente na minimização da função objetivo. A própria tarefa de descrever o conjunto \mathcal{D}_Θ através de expressões matemáticas que dependam explicitamente das componentes de Θ não é trivial dependendo do que se almeja. Mas existe um motivo mais forte para não se preocupar com a referida restrição. Normalmente, os valores de Θ admissíveis são justamente aqueles que fazem com que o filtro $W(q, \Theta)$ seja estável. Nesse caso, $V_N(\Theta)$ cresce rapidamente quando Θ se aproxima da fronteira $\partial\mathcal{D}_\Theta$ de \mathcal{D}_Θ , onde $W(q, \Theta)$ está “à beira da instabilidade”. Ou seja, desde que se use algum algoritmo iterativo com uma escolha adequada do passo de iteração, o vetor Θ vai naturalmente permanecer em \mathcal{D}_Θ .

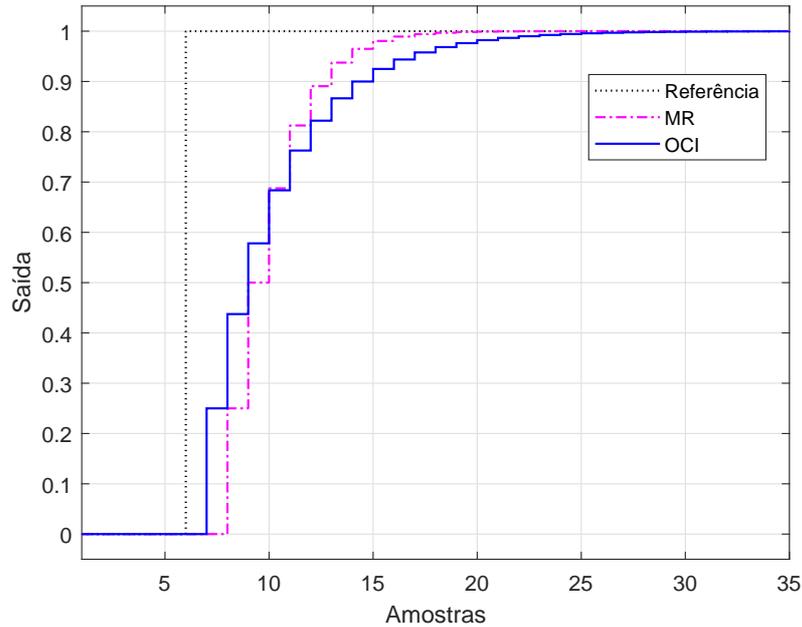


Figura 2: Resposta do sistema (122) em malha fechada com o controlador (130).

Nesse trabalho, é proposta a aplicação de dois métodos de otimização. Primeiramente, usa-se o método da máxima descida (ou *steepest descent*). O vetor de parâmetros Θ encontrado pelo mesmo serve então para inicializar o método de Levenberg-Marquardt (FLETCHER, 1987). Como o método da máxima descida também requer uma condição inicial, propõe-se o uso do VRFT (CAMPESTRINI et al., 2016) para encontrar o valor inicial dos parâmetros do controlador¹. Quando o modelo do ruído $H(q, \Theta)$ também é identificado, considera-se que $\frac{\partial H(q, \Theta)}{\partial P} = 0$ e se usa como condição inicial $H(q, \theta_0) = I$.

Mais especificamente, aplica-se primeiro o método da máxima descida devido à sua relativamente grande região de atração para um mínimo local. Nesse caso, a fórmula de recursão usada para se aproximar do mínimo é (BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD, 2012)

$$\Theta_{j+1} = \Theta_j - \gamma_j \nabla V_N(\Theta_j), \quad (133)$$

onde, para cada iteração j , γ_j é um escalar positivo e $\nabla V_N(\Theta_j)$ é o gradiente da função custo $V_N(\cdot)$ avaliado no vetor de parâmetros Θ_j . Assim como é feito em (CAMPESTRINI et al., 2014), o valor de γ_j é aumentado em 1% se $V_N(\Theta_{j+1}) < V_N(\Theta_j)$. Caso contrário, o mesmo é diminuído em 1% e $\Theta_{j+1} = \Theta_j$ (ou seja, se retorna ao ponto anterior). Como critério de parada, verifica-se a cada iteração se o decrescimento relativo da norma do gradiente é menor do que 1%.

Na segunda etapa, emprega-se o método de Levenberg-Marquardt (FLETCHER, 1987), cuja convergência é mais rápida (embora a região de atração para o mínimo seja menor). A direção de busca do mesmo corresponde a um meio-termo entre as direções do método de Gauss-Newton e do *steepest descent*, como segue:

$$\Theta_{j+1} = \Theta_j - (\nabla^2 V_N(\Theta_j) + \lambda_j I)^{-1} \nabla V_N(\Theta_j), \quad (134)$$

¹Lembre que o VRFT consiste na solução de um problema de mínimos quadrados (dependendo da estrutura do controlador).

onde $\nabla^2 V_N(\Theta_j)$ é uma *aproximação* da matriz hessiana de $V_N(\Theta)$ no ponto Θ_j . Note que quando λ_j é zero a direção de busca corresponde à do método de Gauss-Newton. Conforme $\lambda_j \rightarrow \infty$, a direção se aproxima da de máxima descida, e a magnitude do passo tende a zero. Isso significa que, para λ_j suficientemente grande, $V_N(\Theta_{j+1}) < V_N(\Theta_j)$, ou seja, a função custo de fato diminui. O termo λ_j pode e deve então ser ajustado ao longo das iterações. Nesse trabalho, faz-se $\lambda_{j+1} = \lambda_j/10$ quando a iteração é bem sucedida (valor menor da função encontrado). Caso contrário, o algoritmo seta $\lambda_{j+1} = 10\lambda_j$ e $\Theta_{j+1} = \Theta_j$. O critério de parada é igual ao do método da máxima descida mas com tolerância 0,01%.

4.3.1 Cálculo das derivadas

Nessa seção, o cálculo das derivadas da função custo é detalhado considerando, a título de ilustração, $H(q, \Theta) = I$. Quando o modelo do ruído também é identificado, realiza-se um procedimento análogo.

O erro de predição (97) se reduz, no caso referido, a

$$\begin{aligned} \epsilon(t, P) &= y(t) - L_d(q)C^{-1}(q, P)u(t) \\ &= y(t) - L_d(q)C_F^{-1}(q)C_I^{-1}(q, P)u(t) \end{aligned} \quad (135)$$

onde agora as relações de dependência serão escritas diretamente em termos do vetor P (já que $\Theta \equiv P$).

A função $V_N(P)$, conforme (79), é transcrita a seguir

$$V_N(P) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \|\epsilon(t, P)\|_2^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \epsilon^T(t, P)\epsilon(t, P) \quad (136)$$

Sua derivada parcial em relação ao k -ésimo elemento de P é

$$\frac{\partial V_N(P)}{\partial P_k} = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N \epsilon^T(t, P) \frac{\partial \epsilon(t, P)}{\partial P_k} \quad (137)$$

onde, usando (135), tem-se

$$\frac{\partial \epsilon(t, P)}{\partial P_k} = -L_d(q)C_F^{-1}(q) \frac{\partial [C_I^{-1}(q, P)]}{\partial P_k} u(t) \quad (138)$$

A derivada parcial de $C_I^{-1}(q, P)$ é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial [C_I^{-1}(q, P)]}{\partial P_k} &= \frac{1}{\det(C_I(q, P))} \frac{\partial [\text{cof}^T(C_I(q, P))]}{\partial P_k} \\ &\quad - \frac{1}{\det^2(C_I(q, P))} \text{cof}^T(C_I(q, P)) \frac{\partial [\det(C_I(q, P))]}{\partial P_k} \end{aligned} \quad (139)$$

O gradiente da função custo é calculado então usando (135) e (137)-(139) para $k = 1, 2, \dots, n_P$.

A aproximação da hessiana de $V_N(P)$ é obtida através das derivadas parciais de (137) com relação ao l -ésimo componente de P para $k, l = 1, 2, \dots, n_P$, como mostrado abaixo:

$$\frac{\partial^2 V_N(P)}{\partial P_k \partial P_l} = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N \left(\frac{\partial \epsilon(t, P)}{\partial P_l} \right)^T \frac{\partial \epsilon(t, P)}{\partial P_k} + \epsilon^T(t, P) \frac{\partial^2 \epsilon(t, P)}{\partial P_k \partial P_l} \quad (140)$$

Ignorando o segundo termo do lado direito de (140), o qual envolve derivadas de segunda ordem, obtém-se

$$\frac{\partial^2 V_N(P)}{\partial P_k \partial P_l} \cong \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N \left(\frac{\partial \epsilon(t, P)}{\partial P_l} \right)^T \frac{\partial \epsilon(t, P)}{\partial P_k} \quad (141)$$

4.3.1.1 Exemplo: controlador PID

A metodologia apresentada é válida para classes bastante genéricas de controladores, mas vamos considerar, por exemplo, um controlador PID com polo derivativo fixo em zero e de dimensões 2×2 , dado por

$$C(q, P) = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11}q^2 + b_{11}q + c_{11} & a_{12}q^2 + b_{12}q + c_{12} \\ a_{21}q^2 + b_{21}q + c_{21} & a_{22}q^2 + b_{22}q + c_{22} \end{bmatrix}}_{C_I(q, P)} \times \underbrace{\frac{1}{q(q-1)}}_{C_F(q)} I \quad (142)$$

onde $P = [a_{11} \ b_{11} \ c_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{21} \ \dots \ a_{22} \ \dots \ c_{22}]^T$.

Nesse caso

$$\text{cof}^T (C_I(q, P)) = \begin{bmatrix} a_{22}q^2 + b_{22}q + c_{22} & -(a_{12}q^2 + b_{12}q + c_{12}) \\ -(a_{21}q^2 + b_{21}q + c_{21}) & a_{11}q^2 + b_{11}q + c_{11} \end{bmatrix} \quad (143)$$

e

$$\det (C_I(q, P)) = (a_{11}q^2 + b_{11}q + c_{11}) (a_{22}q^2 + b_{22}q + c_{22}) - (a_{12}q^2 + b_{12}q + c_{12}) (a_{21}q^2 + b_{21}q + c_{21}) \quad (144)$$

A título de ilustração, as derivadas parciais de (143) e de (144) em relação ao parâmetro a_{11} estão relacionadas abaixo:

$$\frac{\partial [\text{cof}^T (C_I(q, P))]}{\partial a_{11}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q^2 \end{bmatrix} \quad (145)$$

$$\frac{\partial [\det (C_I(q, P))]}{\partial a_{11}} = a_{22}q^4 + b_{22}q^3 + c_{22}q^2 \quad (146)$$

Equações similares são obtidas para cada elemento de P de forma a poder calcular (139), (138) e então (137). As mesmas relações são usadas em (141).

4.4 Considerações finais

A Seção 4.1 apresentou a formulação básica do método OCI MIMO, a qual será estendida no Capítulo 5 para lidar com modelos de referência flexíveis. A Seção 4.2, por sua vez, explicou quais as diferenças entre os casos SISO e MIMO e por que a formulação SISO não pode ser usada diretamente no caso multivariável. Já a Seção 4.3 explicou brevemente como realizar a minimização de $V_N(\Theta)$, a qual é não-convexa em geral. Note que o OCI herda não somente as vantagens mas também as desvantagens do método do erro de predição. Ou seja, há o risco de o mínimo global da função custo não ser obtido, mas apenas um mínimo local. Uma das sugestões de trabalhos futuros corresponde justamente a estudar estratégias de como evitar (ou diminuir as chances) que isso aconteça, à luz do que é feito, por exemplo, em (BAZANELLA et al., 2008; ECKHARD et al., 2017).

5 FORMULAÇÃO FLEXÍVEL DO MÉTODO OCI

Sistemas que apresentam zeros de transmissão de fase não-mínima demandam cuidados especiais na aplicação do método OCI, o qual não pode ser empregado em seu formato original. Assim, desenvolveu-se a chamada formulação flexível do método, em que, além do controlador, o modelo de referência $T_d(q)$ também é parametrizado.

Primeiramente, na Seção 5.1, será explicado qual o problema relacionado a zeros de fase não-mínima, sendo também sugeridas algumas estruturas de modelo de referência projetadas especialmente para que tal problema não surja na prática. Na sequência, na Seção 5.2, o critério flexível do método será introduzido. Por fim, será mostrado na Seção 5.3 que mesmo usando a formulação flexível do OCI é possível que surja um outro problema, relacionado à instabilidade de $W(q, \Theta)$, o filtro do preditor (veja (52) e (69)). Esse problema será contornado por meio do uso de um filtro passa-tudo.

5.1 Tratamento dos zeros de fase não-mínima

Se o controlador ideal $C_d(q)$ fosse colocado em malha fechada, a função objetivo $J^{MR}(P)$ seria nula, ou seja, o desempenho desejado de um ponto de vista entrada-saída seria alcançado. Contudo, analisando (45) chega-se à conclusão que os zeros de transmissão da planta se transformam em polos do controlador ideal (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005), o que resulta em instabilidade interna se a planta possuir zeros de fase não-mínima – a não ser que os zeros de FNM aparecendo no denominador de (45) sejam cancelados através de uma escolha adequada do modelo de referência. Esse raciocínio é formalizado no lema a seguir.

Lema 5.1. (HAVRE; SKOGESTAD, 1996) *Se $G_0(q)$ possui um zero de transmissão de fase não-mínima em z_{nm} com direção de saída $y_{z_{nm}}$, então, para estabilidade interna do sistema em malha fechada com o controlador ideal, a seguinte restrição deve ser satisfeita:*

$$y_{z_{nm}}^H T_d(z_{nm}) = 0. \quad (147)$$

O Lema 5.1 diz que, para obter estabilidade interna, o modelo de referência $T_d(q)$ deve conter pelo menos os mesmos zeros de fase não-mínima que $G_0(q)$ nas mesmas direções de saída. Isso significa que, se o sistema possuir zeros de FNM, o projetista deve conhecer pelo menos seus valores – assim como no caso SISO (BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD, 2012) – de forma a escolher um modelo de referência satisfazendo (147).

Note, contudo, que a condição acima não é suficiente para obter estabilidade interna, como exemplificado a seguir.

Exemplo 5.1. *Considere o sistema*

$$G_0(q) = \frac{(q + 1,2)^2}{q(q - 0,9)^2} \quad (148)$$

e o modelo de referência

$$T_d(q) = \frac{0,15(q + 1,2)}{(q - 0,45)(q - 0,4)} \quad (149)$$

o qual satisfaz (147) para $z_{nm} = -1,2$ e $y_{z_{nm}} = [1]$. O controlador ideal é dado nesse caso por

$$C_d(q) = \frac{0,15(q - 0,9)^2}{(q - 1)(q + 1,2)} \quad (150)$$

Contudo, o sistema realimentado não é internamente estável, devido ao cancelamento de polo-zero instável que ocorre entre a planta e o controlador. Note que o problema está relacionado à multiplicidade do zero de fase não-mínima. Escolhendo o modelo de referência

$$T_d(q) = \frac{0,0446(q + 1,2)^2}{(q - 0,5749)^2(q + 0,1943)} \quad (151)$$

o controlador ideal é um PID:

$$C_d(q) = \frac{0,0446(q - 0,9)^2}{q(q - 1)} \quad (152)$$

e o sistema é internamente estável em malha fechada.

De agora em diante será considerado, por simplicidade, que esse tipo de problema relacionado à multiplicidade do zero de FNM não ocorre. Entretanto, caso contrário, a escolha de um modelo de referência mais complexo é capaz de resolver o problema, como mostrado no Exemplo 5.1.

Outra observação importante é que o Lema 5.1 se refere à estabilidade do sistema realimentado com o controlador ideal, mas em geral o mesmo não pertence à classe de controladores definida pelo projetista. O exemplo a seguir ilustra o que pode acontecer quando se projeta um controlador no caso em que a restrição (147) não é satisfeita e $C_d(q) \notin \mathcal{C}$.

Exemplo 5.2. *Adaptado de (BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD, 2012). Considere que a planta a ser controlada é dada por*

$$G_0(q) = \frac{(1,1 - q)(q - 0,8)}{(q - 0,9)^3} \quad (153)$$

onde a saída não é contaminada por ruído. O modelo de referência escolhido é

$$T_d(q) = \frac{0,125q^2}{(q - 0,5)^3} \quad (154)$$

o qual não satisfaz (147). Nesse caso, o controlador ideal seria

$$C_d(q) = \frac{-0,125(q - 0,9)^3q^2}{(q^2 - 0,625q + 0,125)(q - 0,8)(q - 1)(q - 1,1)} \quad (155)$$

cuj aplicação provoca a instabilidade interna do sistema.

Será projetado um controlador PID com polo derivativo fixo em zero. Ou seja, os polos do controlador identificado não cancelarão o zero de FNM da planta, havendo então esperança de que o sistema em malha fechada seja internamente estável.

Será usado primeiramente o método VRFT. Para tanto, realiza-se um experimento em malha aberta aplicando a entrada

$$u(t) = 0,5 + 0,5 \text{sq} \left(\frac{2\pi}{200} t \right) \quad (156)$$

onde $\text{sq}(\frac{2\pi}{T}t)$ denota uma onda quadrada de período T . Após a coleta de 600 amostras de dados, o controlador obtido é dado por

$$C(q, \hat{P}_{LS}) = \frac{0,276(q - 1,176)(q - 0,957)}{q(q - 1)} \quad (157)$$

e a função de transferência de malha fechada correspondente é

$$T(q, \hat{P}_{LS}) = \frac{-0,276(q - 1,176)(q - 1,1)(q - 0,957)(q - 0,8)}{(q - 0,467)(q^2 - 1,532q + 0,5999)(q - 0,952)(q - 1,024)} \quad (158)$$

Ou seja, o sistema realimentado é instável devido à presença do polo em $q = 1,024$,

Usando a mesma batelada de dados, projeta-se também um controlador com o método OCI. Vale salientar que, como $C_d(q) \notin \mathcal{C}$, os mínimos das funções custo do VRFT e do OCI são diferentes, mesmo não havendo ruído nesse exemplo. O controlador resultante é

$$C(q, \hat{P}_{OCI}) = \frac{5,657(q^2 - 1,933q + 0,935)}{q(q - 1)} \quad (159)$$

e o comportamento entrada-saída em malha fechada é dado por

$$T(q, \hat{P}_{OCI}) = \frac{-5,657(q - 1,1)(q^2 - 1,933q + 0,935)(q - 0,8)}{(q - 0,797)(q^2 - 1,935q + 0,9374)(q - 1,136)(q - 5,489)} \quad (160)$$

Novamente, o sistema é instável em malha fechada.

O exemplo acima mostra que, mesmo se o controlador ideal não pertencer à classe escolhida pelo projetista, os métodos de controle tendem a falhar quando o modelo de referência não satisfaz a restrição apresentada pelo Lema 5.1. Para escolher $T_d(q)$ adequadamente, é necessário, como já foi comentado, ter o mínimo de conhecimento sobre o processo, o qual pode ser obtido em uma etapa prévia de identificação. Existe, contudo, uma alternativa mais elegante, que consiste em identificar os zeros de FNM da planta em paralelo com os parâmetros do controlador. Isso será explicado mais adiante no texto. Mas antes, a seção seguinte fornece algumas opções de escolha do modelo de referência supondo que os valores e direções de saída dos zeros são conhecidos.

5.1.1 Estrutura do modelo de referência

Abaixo são dadas opções de escolha de modelos de referência de forma a satisfazer a restrição (147). Assume-se, a título de ilustração, que o processo possui apenas um zero de transmissão de FNM z_{nm} com direção de saída $y_{z_{nm}}$, mas as ideias podem ser adaptadas facilmente para casos em que isso não é verdade. A formulação desta subseção segue a que foi apresentada em (SILVA; CAMPESTRINI; BAZANELLA, 2016).

Considere primeiro um modelo de referência diagonal:

$$T_d(q) = \begin{bmatrix} T_{d_{11}}(q) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & T_{d_{nn}}(q) \end{bmatrix}. \quad (161)$$

Propõe-se para cada elemento $T_{d_{jj}}(q)$, $j = 1, \dots, n$, a estrutura

$$T_{d_{jj}}(q) = \frac{(1-p_{1,jj})(1-p_{2,jj})(q-z_{nm})}{(q-p_{1,jj})(q-p_{2,jj})}, \quad (162)$$

onde os polos devem ser escolhidos de acordo com critérios de desempenho (tempo de acomodação, sobrepasso, etc.). Note que o ganho é tal que $T_{d_{jj}}(1) = 1$. Observe ainda que a restrição (147) é satisfeita pois $T_d(z_{nm}) = 0$. Nesse caso, o efeito do zero z_{nm} aparece em todas saídas em malha fechada. A vantagem é que não é necessário conhecer a direção de saída do zero do processo, mas apenas seu valor.

Considere agora o caso em que o modelo de referência não é diagonal mas satisfaz (147). O zero de transmissão de FNM *do modelo de referência* deve possuir uma direção de saída igual àquela do processo, embora a direção de entrada do zero possa ser diferente. Um caso especial consiste em empregar uma estrutura bloco-triangular. Essa escolha permite fazer um projeto em que o efeito do zero de transmissão de FNM é movido para uma saída específica k do sistema em malha fechada. O modelo de referência pode ser definido como segue:

$$T_d(q) = \begin{bmatrix} T_{d_{11}}(q) & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T_{d_{22}}(q) & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ T_{d_{k1}}(q) & T_{d_{k2}}(q) & \dots & T_{d_{kk}}(q) & \dots & T_{d_{kn}}(q) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & T_{d_{nn}}(q) \end{bmatrix} \quad (163)$$

Os elementos $T_{d_{jj}}(q)$, $j \neq k$, podem ser escolhidos de acordo com o desempenho desejado usando modelos de primeira ou segunda ordem. Considera-se modelos de primeira ordem:

$$T_{d_{jj}}(q) = \frac{1-p_j}{q-p_j}. \quad (164)$$

O elemento $T_{d_{kk}}(q)$ deve conter o zero de transmissão de FNM e seus polos também são escolhidos de acordo com critérios de desempenho. Pode-se, por exemplo, utilizar a estrutura (162) (com j substituído por k). Essa será a escolha considerada de agora em diante a título de ilustração.

Os outros elementos da linha k podem ser escolhidos como segue:

$$\begin{aligned} T_{d_{kj}}(q) &= \frac{K_j(q-1)(q-z_{kj})}{(q-p_j)(q-p_{1,kk})(q-p_{2,kk})} \\ &\triangleq K_j(q-z_{kj})\bar{T}_{d_{kj}}(q), \end{aligned} \quad (165)$$

onde $T_{d_{kj}}(q)$ possui os polos de ambos $T_{d_{jj}}(q)$ e $T_{d_{kk}}(q)$ e as variáveis K_j e z_{kj} são graus de liberdade (dependentes entre si) que podem ser usados de forma a satisfazer

$y_{z_{nm}}^H T_d(z_{nm}) = 0$. Isso pode ser feito como segue: escolha um valor para K_j . Recomenda-se um valor próximo da razão $|y_j/y_k|$, onde y_j denota a j -ésima componente de $y_{z_{nm}}^H$ e se assume que $y_k \neq 0$ (SILVA; CAMPESTRINI; BAZANELLA, 2016). Na sequência, calcule z_{kj} de acordo com a expressão abaixo:

$$z_{kj} = z_{nm} + \frac{y_j T_{d_{jj}}(z_{nm})}{y_k K_j \bar{T}_{d_{kj}}(z_{nm})}. \quad (166)$$

Existe um compromisso entre as escolhas de K_j e z_{kj} e o máximo valor esperado na saída k devido ao termo de acoplamento $T_{d_{kj}}(q)$ entre tal saída e a entrada j . Além disso, é “mais fácil” mover o efeito do zero de transmissão de FNM para a saída onde a direcionalidade do zero é maior (isso é, a que corresponde ao elemento de $y_{z_{nm}}$ de maior módulo), sendo possível nesse caso diminuir o acoplamento referido acima. Espera-se ainda que com o valor recomendado para K_j a expressão (166) resultará em um zero z_{kj} dentro do círculo unitário, de forma que o desempenho seja menos prejudicado (SILVA; CAMPESTRINI; BAZANELLA, 2016). Ademais, já que $T_{d_{kj}}(q)$ possui os polos de ambos $T_{d_{jj}}(q)$ e $T_{d_{kk}}(q)$, se cada *loop* j for pelo menos tão “rápido” quanto o *loop* k , o desempenho relacionado à k -ésima saída também será menos afetado pelo acoplamento.

5.2 O critério de desempenho flexível

As escolhas de modelo de referência apresentadas na Seção 5.1 para lidar com plantas que possuem zeros de transmissão de fase não-mínima se baseiam no conhecimento do valor e eventualmente da direção de saída de cada zero. Na prática, contudo, esse tipo de informação não costuma estar disponível. Para evitar uma etapa prévia de identificação dessas características do sistema, é útil empregar o conceito do modelo de referência flexível, o qual já foi utilizado no método VRFT em (CAMPESTRINI; GEVERS; BAZANELLA, 2009) (caso SISO) e (SILVA; CAMPESTRINI; BAZANELLA, 2018) (caso MIMO). A ideia básica é parametrizar o modelo de referência $T_d(q)$ através de um vetor $\eta \in \mathcal{D}_\eta \subset \mathbb{R}^{n_\eta}$ de forma que os zeros de transmissão de FNM do processo sejam identificados em paralelo com os parâmetros do controlador. Mais especificamente, o modelo da planta (94) a ser identificado se transformará em

$$\begin{aligned} G(q, \Theta) &\triangleq T_d(q, \eta) (I - T_d(q, \eta))^{-1} C^{-1}(q, P) \\ &\triangleq L_d(q, \eta) C^{-1}(q, P), \end{aligned} \quad (167)$$

onde agora o vetor de parâmetros Θ engloba também o vetor η , ou seja, $\Theta = [P^T \ \theta^T \ \eta^T]^T \in \mathcal{D}_\Theta = \mathcal{D}_P \times \mathcal{D}_\theta \times \mathcal{D}_\eta \subset \mathbb{R}^{n_P + n_\theta + n_\eta}$, com \mathcal{D}_Θ compacto. Note que o modelo do ruído $H(q, \Theta)$ continua podendo ser identificado se desejado, e a estrutura de modelo como um todo continua sendo dada por (96) (fazendo os devidos ajustes na notação das funções de transferência em função dos parâmetros dos quais as mesmas dependem). Ademais, o critério a ser minimizado continua sendo dado por (79).

Toda a formulação do método OCI apresentada no Capítulo 4 continua válida, desde que corretamente interpretada. Por exemplo, o cálculo das derivadas apresentado na Seção 4.3.1 deve levar em conta também o vetor η no critério flexível. Além disso, agora o controlador ideal depende do valor particular assumido por η : $C_d(q) \equiv C_d(q, \eta)$. Nesse contexto, a extensão natural da Hipótese 2.1 seria a seguinte:

Hipótese 5.1. *Existe $P_0 \in \mathcal{D}_P$ e $\eta_0 \in \mathcal{D}_\eta$ tal que*

$$C(q, P_0) = C_d(q, \eta_0) = G_0^{-1}(q) L_d(q, \eta_0) \quad (168)$$

ou equivalentemente

$$G_0(q) = L_d(q, \eta_0)C^{-1}(q, P_0)$$

Note que pode existir mais de um par $C(q, P_0) - T_d(q, \eta_0)$ satisfazendo a hipótese acima, como será exemplificado na Seção 5.2.2. Se $H(q, \Theta)$ for independentemente parametrizado de $G(q, \Theta)$, isso significa que a estrutura de modelo $W(q, \Theta)$ não é globalmente identificável em $\Theta_0 = [P_0^T \theta^T \eta_0^T]^T$ (onde $\theta \in \mathcal{D}_\theta$ é arbitrário) (embora possa ser localmente identificável em Θ_0).

Em relação aos Corolários 4.1 e 4.2, os mesmos devem ser interpretados levando em conta a Hipótese 5.1 e não mais a 2.1, e a convergência

$$C(q, \hat{P}_N) \rightarrow C_d(q), \text{ para } N \rightarrow \infty$$

deve ser interpretada lembrando que pode existir mais de um controlador $C_d(q, \eta_0)$ satisfazendo (168) para algum valor P_0 correspondente.

5.2.1 Parametrização do modelo de referência

Existem diversas (infinitas) formas de escolher a estrutura de $T_d(q, \eta)$. O desafio é fazer com que a função de transferência seja flexível o suficiente para satisfazer (147) sem, entretanto, ser genérica demais. Afinal de contas, o modelo de referência deve refletir o desempenho desejado em malha fechada, não sendo, pois, uma variável de projeto totalmente livre. Assim, o que se costuma fazer é fixar os denominadores/polos dos elementos de $T_d(q, \eta)$ de acordo com critérios de desempenho, deixando os coeficientes dos numeradores livres. Mas mesmo os numeradores não podem ser completamente arbitrários. A restrição de ganho estático $T_d(1, \eta) = I$, por exemplo, deve ser satisfeita para todo $\eta \in \mathcal{D}_\eta$.

A título de ilustração, serão consideradas as estruturas apresentadas na Seção 5.1.1. No caso em que $T_d(q, \eta)$ é diagonal, (162) torna-se

$$T_{d_{jj}}(q, \eta) = \frac{\eta_{1,jj}q + \eta_{2,jj}}{(q - p_{1,jj})(q - p_{2,jj})} \quad (169)$$

$$= \frac{\eta_{1,jj}q + (1 - p_{1,jj})(1 - p_{2,jj}) - \eta_{1,jj}}{(q - p_{1,jj})(q - p_{2,jj})}, \quad (170)$$

onde, na segunda igualdade, se usou o fato de que $\eta_{1,jj}$ e $\eta_{2,jj}$ estão relacionados pela restrição $T_{d_{jj}}(1, \eta) = 1$. Essa substituição direta permite minimizar a função $V_N(\Theta)$ através do uso de métodos de otimização sem restrições, conforme apresentado na Seção 4.3.

Vale ressaltar ainda que é possível especificar desempenhos diferentes para cada malha de controle, ao contrário da extensão do VRFT para sistemas de fase não-mínima, em que todos elementos da diagonal de $T_d(q, \eta)$ devem ser iguais, ou seja, $T_d(q, \eta) = \alpha(q, \eta)I$, onde $\alpha(q, \eta)$ é um escalar (SILVA; CAMPESTRINI; BAZANELLA, 2018).

A escolha de um modelo de referência diagonal, embora nem sempre muito realística, é a mais intuitiva possível, já que o usuário pode especificar um desempenho para cada malha de controle individualmente. Além disso, lembre que nesse caso apenas o valor do zero de FNM do processo será identificado. A direção de saída do zero não é usada e permanece desconhecida após a aplicação do método.

Quando a estrutura do modelo de referência é dada por (163) (considerando ainda que os elementos da matriz são escolhidos conforme explicado anteriormente), somente

os elementos da k -ésima linha são parametrizados. O elemento $T_{d_{kk}}(q, \eta)$ será análogo a (170) (com j substituído por k). A equação (165), por sua vez, torna-se

$$T_{d_{kj}}(q, \eta) = \frac{(\eta_{1,kj}q + \eta_{2,kj})(q-1)}{(q-p_j)(q-p_{1,kk})(q-p_{2,kk})}. \quad (171)$$

Nesse caso, além do valor do zero de FNM, sua direção de saída também é (aproximadamente) identificada através do vetor η .

5.2.2 Identificabilidade

Esta seção discute brevemente por meio de exemplos alguns aspectos relacionados à identificabilidade da estrutura de modelo da formulação flexível do OCI. O exemplo seguinte ilustra o fato de que pode existir mais de um par $C(q, P_0) - T_d(q, \eta_0)$ satisfazendo a Hipótese 5.1.

Exemplo 5.3. *Considere a planta a seguir*

$$G_0(q) = \begin{bmatrix} \frac{q-1,2}{(q-0,8)(q-0,9)} & 0 \\ \frac{2}{q-0,8} & \frac{0,5}{q-0,9} \end{bmatrix} \quad (172)$$

que possui um zero de transmissão de fase não-mínima em $z_{nm} = 1,2$ com direção de saída $y_{z_{nm}} = [1 \ 0]^T$. Considere ainda que os elementos de $C(q, P)$ são do tipo PID com polo derivativo fixo em $q = 0$ e que $T_d(q, \eta)$ é diagonal com elementos dados por (170):

$$T_d(q, \eta) = \begin{bmatrix} \frac{\eta_{1,11}q+0,08-\eta_{1,11}}{(q-0,6)(q-0,8)} & 0 \\ 0 & \frac{\eta_{1,22}q+0,08-\eta_{1,22}}{(q-0,6)(q-0,8)} \end{bmatrix} \quad (173)$$

A Hipótese 5.1 é satisfeita para o seguinte par de funções de transferência:

$$T_d(q, \eta_0) = \begin{bmatrix} \frac{-0,4(q-1,2)}{(q-0,6)(q-0,8)} & 0 \\ 0 & \frac{-0,4(q-1,2)}{(q-0,6)(q-0,8)} \end{bmatrix}, \quad C(q, P_0) = \begin{bmatrix} \frac{-0,4(q-0,9)(q-0,8)}{q(q-1)} & 0 \\ \frac{1,6(q-0,9)^2}{q(q-1)} & \frac{-0,8(q-1,2)(q-0,9)}{q(q-1)} \end{bmatrix} \quad (174)$$

Contudo, existem outros valores dos vetores de parâmetros P e η que satisfazem (168), os quais correspondem aos seguintes pares de matrizes de transferência:

$$T_d(q, \eta_0) = \begin{bmatrix} \frac{-0,4(q-1,2)}{(q-0,6)(q-0,8)} & 0 \\ 0 & \frac{0,5(q-0,84)}{(q-0,6)(q-0,8)} \end{bmatrix}, \quad C(q, P_0) = \begin{bmatrix} \frac{-0,4(q-0,9)(q-0,8)}{q(q-1)} & 0 \\ \frac{1,6(q-0,9)^2}{q(q-1)} & \frac{q-0,84}{q-1} \end{bmatrix} \quad (175)$$

$$T_d(q, \eta_0) = \begin{bmatrix} \frac{-0,4(q-1,2)}{(q-0,6)(q-0,8)} & 0 \\ 0 & \frac{0,4}{q-0,6} \end{bmatrix}, \quad C(q, P_0) = \begin{bmatrix} \frac{-0,4(q-0,9)(q-0,8)}{q(q-1)} & 0 \\ \frac{1,6(q-0,9)^2}{q(q-1)} & \frac{0,8(q-0,9)}{q-1} \end{bmatrix} \quad (176)$$

$$T_d(q, \eta_0) = \begin{bmatrix} \frac{-0,4(q-1,2)}{(q-0,6)(q-0,8)} & 0 \\ 0 & \frac{0,2}{q-0,8} \end{bmatrix}, \quad C(q, P_0) = \begin{bmatrix} \frac{-0,4(q-0,9)(q-0,8)}{q(q-1)} & 0 \\ \frac{1,6(q-0,9)^2}{q(q-1)} & \frac{0,4(q-0,9)}{q-1} \end{bmatrix} \quad (177)$$

Em todos esses casos, o sistema em malha fechada é internamente estável. Note que a restrição imposta pelo Lema 5.1 é de fato respeitada. Pode-se argumentar que todas

essas soluções são parecidas de um ponto de vista prático, tendo em vista que o modelo de referência é sempre diagonal e com os mesmos polos. O único caso realmente distinto é o apresentado em (174), onde o efeito do zero de transmissão de FNM em malha fechada aparece não só na primeira saída (o que é esperado devido à direção do zero de $G_0(q)$) mas também na segunda.

Fica claro a partir do exemplo acima que a função custo minimizada pelo OCI é, em geral, não-convexa, podendo apresentar vários mínimos locais e mesmo globais. Nesse caso, a solução do problema dependerá, naturalmente, da condição inicial do vetor de parâmetros. De um ponto de vista de otimização, é interessante que os mínimos sejam isolados (ao invés de formar um conjunto conexo) a fim de evitar problemas numéricos (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989). É o que acontece no Exemplo 5.3. Entretanto, se nesse mesmo exemplo o polo derivativo do controlador fosse livre, os mínimos já não seriam mais todos isolados entre si.

Note ainda que o que foi exposto acima pode ocorrer também no caso SISO. Basta considerar, por exemplo, o subsistema do Exemplo 5.3 relativo à segunda malha de controle, isto é

$$G_{022}(q) = \frac{0,5}{q - 0,9}. \quad (178)$$

O próximo exemplo diz respeito à estrutura de modelo de referência bloco-triangular e apresenta um caso em que os mínimos de $V_N(\Theta)$ formam um subconjunto conexo.

Exemplo 5.4. *Considere que o modelo de referência $T_d(q, \eta)$ é bloco-triangular e parametrizado de acordo com o que foi descrito na Seção 5.2.1. Considere ainda que $C(q, P)$ é um controlador PID com polo derivativo fixo em zero. Se $H(q, \Theta)$ for parametrizado independentemente de $G(q, \Theta)$, a estrutura de modelo não será globalmente identificável. Isso será mostrado para o caso de um sistema 2×2 com $k = 1$ (efeito do zero de FNM movido para a primeira saída) em (163), mas o mesmo raciocínio se aplica para dimensões maiores.*

Considere um determinado valor $\Theta^ \in \mathcal{D}_\Theta$ do vetor de parâmetros e o modelo da planta correspondente*

$$G(q, \Theta^*) = L_d(q, \eta^*)C(q, P^*)^{-1} \quad (179)$$

onde se obtém por cálculo direto a partir de

$$T_d(q, \eta^*) = \begin{bmatrix} \frac{\eta_{1,11}^* q + (1 - p_{1,11})(1 - p_{2,11}) - \eta_{1,11}^*}{(q - p_{1,11})(q - p_{2,11})} & \frac{(\eta_{1,12}^* q + \eta_{2,12}^*)(q - 1)}{(q - p_{1,11})(q - p_{2,11})(q - p_2)} \\ 0 & \frac{1 - p_2}{q - p_2} \end{bmatrix} \quad (180)$$

que

$$L_d(q, \eta^*) = \begin{bmatrix} \frac{\eta_{1,11}^* q + (1 - p_{1,11})(1 - p_{2,11}) - \eta_{1,11}^*}{(q - 1)(q + 1 - p_{1,11} - p_{2,11} - \eta_{1,11}^*)} & \frac{(\eta_{1,12}^* q + \eta_{2,12}^*)}{(q - 1)(q + 1 - p_{1,11} - p_{2,11} - \eta_{1,11}^*)} \\ 0 & \frac{1 - p_2}{q - 1} \end{bmatrix} \quad (181)$$

Assume-se para o que segue que $\eta_{1,11}^* \neq 0$ (o que a princípio é válido para quase todo $\Theta^* \in \mathcal{D}_\Theta$).

O objetivo aqui é encontrar um outro vetor de parâmetros $\hat{\Theta} \in \mathcal{D}_\Theta$ com $\hat{\theta} = \theta^*$ tal que

$$G(q, \hat{\Theta}) = L_d(q, \hat{\eta})C(q, \hat{P})^{-1} = G(q, \Theta^*) \quad (182)$$

Isso significará (lembrando que $G(q, \Theta)$ e $H(q, \Theta)$ são parametrizados independentemente) que a estrutura de modelo não é globalmente identificável em Θ^* . Mas como Θ^* foi escolhido de maneira (quase) arbitrária, isso também significará que a própria estrutura de modelo não é globalmente identificável, de acordo com as definições da Seção 3.1.

O vetor $\hat{\Theta} \in \mathcal{D}_\Theta$ será obtido de maneira construtiva. Considere primeiramente que $\hat{\eta}$ é escolhido de modo que as diagonais principais de $T_d(q, \hat{\eta})$ e $T_d(q, \eta^*)$ sejam iguais. Nesse caso em particular, isso implica que $\hat{\eta}_{1,11} = \eta_{1,11}^*$. Obtém-se assim

$$L_d(q, \hat{\eta}) = \begin{bmatrix} \frac{\eta_{1,11}^* q + (1 - p_{1,11})(1 - p_{2,11}) - \eta_{1,11}^*}{(q-1)(q+1 - p_{1,11} - p_{2,11} - \eta_{1,11}^*)} \frac{(\hat{\eta}_{1,12} q + \hat{\eta}_{2,12})}{(q-1)(q+1 - p_{1,11} - p_{2,11} - \eta_{1,11}^*)} & \\ 0 & \frac{1 - p_2}{q-1} \end{bmatrix} \quad (183)$$

Assuma que $\hat{\eta}_{1,12}$ é um valor arbitrário. O valor de $\hat{\eta}_{2,12}$ será calculado mais tarde. Defina agora

$$C(q, \hat{P}) = C(q, P^*)L_d(q, \eta^*)^{-1}L_d(q, \hat{\eta}) \quad (184)$$

Por definição, a equação (182) é satisfeita, como desejado. Resta mostrar que $C(q, \hat{P})$ de fato pertence à classe de controladores PID. Isso será verdade se escolhermos

$$\hat{\eta}_{2,12} = \eta_{2,12}^* + \frac{(1 - p_{1,11})(1 - p_{2,11}) - \eta_{1,11}^*}{\eta_{1,11}^*} (\hat{\eta}_{1,12} - \eta_{1,12}^*) \quad (185)$$

porque nesse caso o termo $L_d(q, \eta^*)^{-1}L_d(q, \hat{\eta})$, que aparece em (184), será simplesmente uma matriz (não-singular) de números, com a diagonal principal composta pelo número 1 e com a mesma estrutura de (163) (ou (181) nesse caso particular), como pode ser verificado por cálculo direto.

Ou seja, foi encontrado não apenas um vetor $\hat{\Theta}$ que satisfaz (182), mas um continuum de vetores, onde \hat{P} e $\hat{\eta}_{2,12}$ são obtidos em função de $\hat{\eta}_{1,12}$, que é arbitrário.

Portanto, assumindo que $\eta_{1,kk} \neq 0$, os valores $\eta_{1,kj}$, $j = 1, \dots, n$ e $j \neq k$ ($\eta_{1,12}$ no exemplo acima), podem ser fixados sem perda de generalidade na minimização de $V_N(\Theta)$. Note, contudo, que esses valores devem ser escolhidos prudentemente, pois influenciam o modelo de referência diretamente, mudando também o mínimo de $J^{\text{MR}}(P)$, a função custo que realmente se quer minimizar.

Para concluir o raciocínio, vejamos um exemplo numérico do que foi exposto acima considerando $p_{1,11} = 0,8$, $p_{2,11} = 0,6$, $p_2 = 0,75$ e $\eta_{1,11}^* = -0,4$. O seguinte par de funções de transferência

$$T_d(q, r) = \begin{bmatrix} \frac{-0,4(q-1,2)}{(q-0,8)(q-0,6)} & \frac{[rq+0,4(1-3r)](q-1)}{(q-0,8)(q-0,6)(q-0,75)} \\ 0 & \frac{0,25}{q-0,75} \end{bmatrix}$$

$$C(q, r) = \begin{bmatrix} \frac{0,6(q-0,9)(q-0,8)}{q(q-1)} & \frac{0,5(1-3r)(q-0,9)(q-0,8)}{q(q-1)} \\ \frac{-0,5(q-0,9)(q-0,8)}{q(q-1)} & \frac{[1,25(r-0,2)q+0,375(1-3r)](q-0,8)}{q(q-1)} \end{bmatrix}$$

satisfaz a relação

$$G(q, r) = L_d(q, r)C^{-1}(q, r) = \begin{bmatrix} \frac{q-0,7}{(q-0,9)(q-0,8)} & \frac{2}{q-0,8} \\ \frac{1,25}{q-0,8} & \frac{1,5}{q-0,8} \end{bmatrix}$$

para $r \in \mathbb{R}$ arbitrário, onde $r \equiv \eta_{1,12}$.

Note que a análise de identificabilidade deve, naturalmente, ser realizada caso a caso, pois depende diretamente da escolha do modelo de referência e do controlador, os quais podem ser personalizados de acordo com as intenções do usuário. Os exemplos acima apenas expõem alguns problemas que podem aparecer na aplicação do método. Note, contudo, que a existência de mais de uma solução ótima não é necessariamente “ruim”, tendo em vista que todas essas soluções são, a princípio, condizentes com o que se espera na prática.

5.3 Uso de filtro passa-tudo

Quando o método OCI (flexível ou não) é aplicado a sistemas que possuem zeros de transmissão de fase não-mínima, é altamente aconselhável, como explicado anteriormente, que o modelo de referência contenha tais zeros. Entretanto, se o mesmo possuir *mais* zeros de FNM do que o processo, a tendência é que esses zeros adicionais venham do próprio controlador. Nesse caso, a inversa de $C(q, P)$ se tornará instável. Como a expressão (167) de $G(q, \Theta)$ depende dessa inversa, o filtro do preditor $W(q, \Theta)$ também será a princípio instável, fazendo com que o procedimento de identificação falhe.

Esse problema é mais comum quando se usa modelos de referência diagonais (embora também possa acontecer em outras circunstâncias), pois nesse caso cada elemento da diagonal contém em geral o zero de transmissão de FNM da planta. Modelos de referência diagonais, como explicado anteriormente, permitem realizar o projeto do controlador sem haver preocupação com a direção de saída do zero de FNM. Vamos ver um exemplo do problema referido acima.

Exemplo 5.5. (SILVA; CAMPESTRINI; BAZANELLA, 2018) Considere que o sistema é descrito por

$$G_0(q) = \begin{bmatrix} \frac{q-0,7}{(q-0,9)(q-0,8)} & \frac{2}{(q-0,8)} \\ \frac{1,25}{(q-0,8)} & \frac{1,5}{(q-0,8)} \end{bmatrix}, \quad (186)$$

o qual possui um zero de transmissão de FNM em $z_{nm} = 1,2$ com direção de saída $y_{z_{nm}} = [-0,6 \ 0 \ 8]^T$. Defina-se o seguinte modelo de referência, o qual satisfaz a Hipótese 2.1 para a classe de controladores PID:

$$T_d(q) = \begin{bmatrix} \frac{-0,4(q-1,2)}{(q-0,6)(q-0,8)} & 0 \\ 0 & \frac{-0,4(q-1,2)}{(q-0,6)(q-0,8)} \end{bmatrix} \quad (187)$$

O controlador ideal é dado por

$$C_d(q) = \begin{bmatrix} \frac{0,6(q-0,9)(q-0,8)}{q(q-1)} & \frac{-0,8(q-0,9)(q-0,8)}{q(q-1)} \\ \frac{-0,5(q-0,9)(q-0,8)}{q(q-1)} & \frac{0,4(q-0,8)(q-0,7)}{q(q-1)} \end{bmatrix} \quad (188)$$

cujas inversa é

$$C_d^{-1}(q) = \begin{bmatrix} \frac{-2,5(q-0,7)(q-1)q}{(q-0,8)(q-0,9)(q-1,2)} & \frac{-5,0(q-1)q}{(q-0,8)(q-1,2)} \\ \frac{-3,1(q-1)q}{(q-0,8)(q-1,2)} & \frac{-3,8(q-1)q}{(q-0,8)(q-1,2)} \end{bmatrix} \quad (189)$$

Ou seja, considerando que o controlador é parametrizado como em (142), $G(q, \Theta)$ será instável em uma vizinhança da solução Θ_0 (apesar de $G(q, \Theta_0) = G_0(q)$ ser estável). Isso impossibilita, por exemplo, a identificação de uma estrutura do tipo OE “padrão”.

A fim de contornar o problema apresentado acima, será usado um filtro passa-tudo na função custo $V_N(\Theta)$ do OCI. A abordagem se inspira no que é apresentado em (FORSELL; LJUNG, 2000), onde uma estrutura do tipo OE é adaptada para identificação de um sistema instável. Note, contudo, que o problema aqui não é o sistema em si, o qual é assumido estável em malha aberta, mas o modo como se parametriza $G(q, \Theta)$ como função da inversa do controlador.

Assume-se de agora em diante, por simplicidade, que $H(q, \Theta) = I$ e que o filtro $L_d(q, \eta)$ é estável¹ para todo $\eta \in \mathcal{D}_\eta$, embora ambas hipóteses possam ser relaxadas.

Reescreve-se primeiramente (167) como

$$G(q, \Theta) = L_d(q, \eta) \frac{N(q, P)}{D(q, P)} \quad (190)$$

onde $D(q, P)$ é o mínimo denominador comum de todos elementos de $C^{-1}(q, P)$ e $N(q, P)$ é a matriz dos numeradores correspondentes. O polinômio $D(q, P)$ não é mônico em geral. Assume-se que seu coeficiente de mais alta ordem não se anula para todo $P \in \mathcal{D}_P$. Se, por exemplo, o controlador for um PI, dado por (101)-(103) (veja também (109) e (110)), tem-se

$$D(q, P) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})q^2 + (a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12})q + b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} \quad (191)$$

$$N(q, P) = (q - 1) \begin{bmatrix} a_{22}q + b_{22} & -(a_{12}q + b_{12}) \\ -(a_{21}q + b_{21}) & a_{11}q + b_{11} \end{bmatrix} \quad (192)$$

Note que na verdade é possível definir $D(q, P)$ e $N(q, P)$ de mais de uma forma. Pode-se, por exemplo, normalizar ambos pelo coeficiente $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$, que não se anula por hipótese. Observe ainda que para alguns valores específicos do vetor P é possível que exista um fator em comum entre $D(q, P)$ e todos elementos de $N(q, P)$, situação em que seria um abuso de linguagem se referir a $D(q, P)$ como o “mínimo denominador comum” da inversa de $C(q, P)$.

Define-se agora o polinômio

$$D(q, \delta(P)) \triangleq d^0 q^{n_D} + d^1 q^{n_D-1} + \dots + d^{n_D} \triangleq D(q, P) \quad (193)$$

onde foi introduzido o vetor $\delta(P) \triangleq [d^0 \ d^1 \ \dots \ d^{n_D}]^T$. No exemplo (191)-(192), $n_D = 2$ e

$$\delta(P) = \begin{bmatrix} d^0 \\ d^1 \\ d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12} \\ b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} \end{bmatrix} \quad (194)$$

Define-se ainda os polinômios $D_s(q, \delta_s(P))$ e $D_a(q, \delta_a(P))$, que são, respectivamente, os fatores estável e instável de $D(q, \delta(P))$, ou seja:

$$D(q, \delta(P)) \triangleq D_s(q, \delta_s(P))D_a(q, \delta_a(P)) \quad (195)$$

$$D_s(q, \delta_s(P)) \triangleq d_s^0 q^{n_{D_s}} + d_s^1 q^{n_{D_s}-1} + \dots + d_s^{n_{D_s}} \quad (196)$$

$$D_a(q, \delta_a(P)) \triangleq q^{n_{D_a}} + d_a^1 q^{n_{D_a}-1} + \dots + d_a^{n_{D_a}} \quad (197)$$

¹Quando dizemos “estável” estamos ignorando o polo que tipicamente aparece em $q = 1$, pois o mesmo será cancelado no produto $L_d(q, \eta)C^{-1}(q, P)$ se $C(q, P)$ possuir ação integral.

onde os vetores $\delta_s(P)$ e $\delta_a(P)$ são definidos de maneira similar a $\delta(P)$ e onde $D_a(q, \delta_a(P))$ é mônico. Note que $n_{D_s} + n_{D_a} = n_D$, mas o grau de cada polinômio dependerá do número de raízes instáveis de $D(q, \delta(P)) \equiv D(q, P)$. Observe que, enquanto $\delta(P)$ é uma função *explícita* de P (veja (194), por exemplo), $\delta_s(P)$ e $\delta_a(P)$ são funções *implícitas* de P .

Vale ressaltar que a decomposição (195)-(197) não está bem-definida se $D(q, P)$ possuir uma ou mais raízes sobre o círculo unitário (com módulo 1). Assim, assume-se de agora em diante que o conjunto \mathcal{D}_P é escolhido de tal forma que esse problema não apareça. Assumindo ainda que \mathcal{D}_P é conexo, isso significa que os valores de n_{D_a} e n_{D_s} permanecem constantes para todo $P \in \mathcal{D}_P$.

As raízes do polinômio abaixo correspondem às de $D_a(q, \delta_a(P))$ refletidas para dentro do círculo unitário:

$$D_a^*(q, \delta_a(P)) \triangleq d_a^{n_{D_a}} q^{n_{D_a}} + d_a^{n_{D_a}-1} q^{n_{D_a}-1} + \dots + 1 \quad (198)$$

Com base nas definições apresentadas acima, o que se propõe para resolver o problema de instabilidade apresentado anteriormente é pré-multiplicar o erro de predição $\epsilon(t, \Theta)$ em (79) pelo filtro passa-tudo

$$F(q, P) \triangleq \frac{D_a(q, \delta_a(P))}{D_a^*(q, \delta_a(P))} I \quad (199)$$

Usando o erro de predição (71), (190), $H(q, \Theta) = I$, (195) e (199), obtém-se (compare ainda com (97) e lembre que $L_d(q)$ depende de η na versão flexível do método)

$$\epsilon_F(t, \Theta) \triangleq F(q, P)\epsilon(t, \Theta) = \frac{D_a(q, \delta_a)}{D_a^*(q, \delta_a)} y(t) - \underbrace{L_d(q, \eta) \frac{N(q, P)}{D_s(q, \delta_s) D_a^*(q, \delta_a)}}_{F(q, P)G(q, \Theta)} u(t) \quad (200)$$

$$= [F(q, P) \quad -F(q, P)G(q, \Theta)] \begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \triangleq Q(q, \Theta)q(t) \quad (201)$$

onde $Q(q, \Theta)$ é estável. A dependência de δ_s e δ_a em P foi omitida na notação.

Com o uso do filtro passa-tudo, a função $V_N(\Theta)$ em (79) pode ser reescrita como

$$V_N(\Theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \|\epsilon_F(t, \Theta)\|_2^2 \quad (202)$$

Observação. Ao contrário do que é feito em (FORSSSELL; LJUNG, 2000), o filtro passa-tudo utilizado aqui não é mônico.

Observação. Como foi comentado, a hipótese de que $(q-1)L_d(q, \eta)$ é estável pode ser relaxada. No Exemplo 4.3, o filtro $(q-1)L_d(q)$ é instável. O problema pode ser resolvido usando o filtro passa-tudo

$$F(q) = \frac{q-1,25}{1-1,25q} \quad (203)$$

Note que nesse caso $F(q)$ não depende nem de P nem de η .

5.3.1 Consistência

Com base em (202), a função custo assintótica é

$$\bar{V}(\Theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{tr}[\Phi_{\epsilon_F, \Theta}(\omega)] d\omega \quad (204)$$

onde o espectro de $\epsilon_F(t, \Theta)$ é obtido usando o Lema 2.1 e (201):

$$\begin{aligned} \Phi_{\epsilon_F, \Theta}(\omega) &= Q(e^{j\omega}, \Theta) \Phi_q(\omega) Q(e^{j\omega}, \Theta)^H \\ &= [I \quad -G(e^{j\omega}, \Theta)] \begin{bmatrix} \Phi_y(\omega) & \Phi_{yu}(\omega) \\ \Phi_{uy}(\omega) & \Phi_u(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ -G(e^{j\omega}, \Theta)^H \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (205)$$

Foi usado na segunda igualdade o fato de que $F(e^{j\omega}, P)$ comuta com as outras matrizes e $F(e^{j\omega}, P)F(e^{j\omega}, P)^H = I$.

5.3.1.1 Dados coletados em malha aberta

Considere que os dados são coletados em malha aberta. Usando (90), (205) se reduz a

$$\Phi_{\epsilon_F, \Theta}(\omega) = [G_0(e^{j\omega}) - G(e^{j\omega}, \Theta)] \Phi_u(\omega) [G_0(e^{j\omega}) - G(e^{j\omega}, \Theta)]^H + H_0(e^{j\omega}) \Lambda H_0(e^{j\omega})^H \quad (206)$$

Note que $\Phi_{\epsilon_F, \Theta}(\omega)$ corresponde justamente a (91), o espectro do erro de predição quando uma estrutura OE “padrão” (com $G(q, \Theta)$ estável) é usada na identificação do sistema. Ou seja, a estimativa de $G_0(q)$ (e conseqüentemente do controlador) é consistente nesse caso, conforme o Lema 3.3 e seu corolário. Para isso, o espectro da entrada $\Phi_u(\omega)$ deve ser rico o suficiente e a Hipótese 2.1 (para o caso em que $T_d(q)$ é fixo) ou a Hipótese 5.1 (para o caso do critério flexível) deve ser satisfeita.

5.3.1.2 Dados coletados em malha fechada

Quando os dados são coletados em malha fechada com um controlador estabilizante $C_0(q)$, obtém-se com base no Lema 2.1 e nas equações (23)-(27) (substituindo $C(q, P)$ por $C_0(q)$) que

$$\begin{bmatrix} \Phi_y(\omega) & \Phi_{yu}(\omega) \\ \Phi_{uy}(\omega) & \Phi_u(\omega) \end{bmatrix} = M(e^{j\omega}) \begin{bmatrix} \Phi_r(\omega) & 0 \\ 0 & \Lambda \end{bmatrix} M(e^{j\omega})^H, \quad (207)$$

onde

$$M(q) \triangleq \begin{bmatrix} [I + G_0(q)C_0(q)]^{-1}G_0(q)C_0(q) & [I + G_0(q)C_0(q)]^{-1}H_0(q) \\ [I + C_0(q)G_0(q)]^{-1}C_0(q) & -[I + C_0(q)G_0(q)]^{-1}C_0(q)H_0(q) \end{bmatrix} \quad (208)$$

Nesse caso, ao contrário do que acontece usando uma estrutura OE padrão, a abordagem adotada aqui com o filtro passa-tudo não fornece uma estimativa consistente de $G_0(q)$ (e do controlador) *mesmo quando* $H_0(q) = I$. Isso é ilustrado no contra-exemplo a seguir.

Exemplo 5.6. Considere o sistema

$$G_0(q) = \frac{q - 0,5}{q(q - 0,9)}, \quad H_0(q) = 1, \quad \Lambda = 1 \quad (209)$$

que opera em malha fechada com o controlador proporcional (estabilizante) $C_0(q) = 0,9$, onde a referência $r(t)$ é ruído branco de variância unitária, tal que $\Phi_r(\omega) = 1$.

O modelo de referência é

$$T_d(q) = \frac{0,15(q+1,2)}{(q-0,4)(q-0,45)} \quad (210)$$

e a Hipótese 2.1 é satisfeita para o controlador PID

$$C_d(q) = \frac{0,15(q-0,9)(q+1,2)}{(q-1)(q-0,5)} \quad (211)$$

Considere que

$$C(q, P) = \frac{0,15(q-0,9)(q+a)}{(q-1)(q-0,5)} \quad (212)$$

onde $P = a$ e $\mathcal{D}_P = [1,1 \ 1,3] \subset \mathbb{R}$. Note que $C_d(q) \in \mathcal{C}$ e que o valor ideal de P é $P_0 = 1,2$, Obtém-se com base no acima que

$$G(q, P) = \underbrace{\frac{0,15(q+1,2)}{q(q-1)}}_{L_d(q)} \underbrace{\frac{(q-1)(q-0,5)}{0,15(q-0,9)(q+a)}}_{C^{-1}(q,P)} \quad (213)$$

$$= \frac{(q+1,2)(q-0,5)}{(q+a)q(q-0,9)}. \quad (214)$$

Note que de fato não é possível usar a formulação original do método OCI (supondo $H(q, \Theta) = 1$), sendo necessário empregar o filtro $F(q, P)$, que nesse caso é dado por

$$F(q, P) = \frac{q+a}{aq+1}. \quad (215)$$

A função custo assintótica $\bar{V}(\Theta) = \bar{V}(P)$ é calculada através de (204), (205), (207) e (208), onde

$$M(q) = \begin{bmatrix} \frac{0,9(q-0,5)}{(q+0,671)(q-0,671)} & \frac{(q-0,9)q}{(q+0,671)(q-0,671)} \\ \frac{0,9(q-0,9)q}{(q+0,671)(q-0,671)} & \frac{-0,9(q-0,9)q}{(q+0,671)(q-0,671)} \end{bmatrix} \quad (216)$$

A Figura 3 ilustra o gráfico de $\bar{V}(P)$, onde é possível ver que o mínimo é obtido para $P^* \cong 1,15 \neq 1,2 = P_0$. Ou seja, as funções de transferência $G_0(q)$ e $C_d(q)$ não são identificadas com consistência quando os dados são coletados em malha fechada. Isso não significa que o método OCI com filtro passa-tudo não possa ser usado nesse caso, significa apenas que a estimativa $C(q, \hat{P}_N)$ do controlador ideal não pode ser melhorada arbitrariamente para $N \rightarrow \infty$.

5.3.2 Cálculo das derivadas

Minimiza-se a função (202) empregando os mesmos métodos da Seção 4.3. Para tanto, é necessário calcular as derivadas parciais de primeira ordem de $\epsilon_F(t, \Theta)$ com relação a $\Theta = [P^T \ \eta^T]^T$, o que pode ser feito através de um procedimento análogo ao da Seção 4.3.1. O problema é que a expressão (200) de $\epsilon_F(t, \Theta)$ depende de Θ não só através dos vetores P e η mas também indiretamente através dos vetores $\delta_s(P)$ e $\delta_a(P)$, que são funções de P . Mas, como já foi comentado, não existem expressões explícitas para

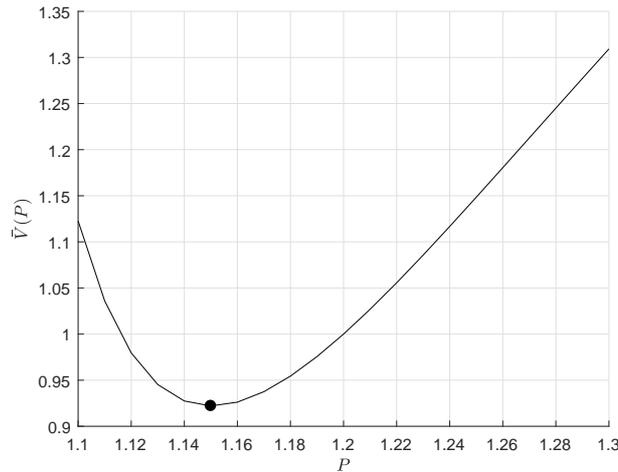


Figura 3: Gráfico da função custo assintótica $\bar{V}(P)$ do Exemplo 5.6.

$\delta_s(P)$ e $\delta_a(P)$ em termos de P . Em outras palavras, a função $f(\cdot)$ abaixo não é conhecida explicitamente, embora esteja bem definida *implicitamente*:

$$\delta_{s,a} \triangleq \begin{bmatrix} \delta_s \\ \delta_a \end{bmatrix} \triangleq f(P) \quad (217)$$

Será visto mais adiante como contornar esse problema. Por enquanto, será assumido que a expressão de $f(\cdot)$ é conhecida. O objetivo é calcular a jacobiana de $\epsilon_F(t, \Theta)$ com relação a Θ , ou seja, a matriz de dimensões $n \times (n_P + n_\eta)$ seguinte:

$$\frac{\partial \epsilon_F(t, \Theta)}{\partial \Theta} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial \epsilon_F(t, \Theta)}{\partial P} & \frac{\partial \epsilon_F(t, \Theta)}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (218)$$

$$\triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial \epsilon_F(t, \Theta)}{\partial P_1} & \dots & \frac{\partial \epsilon_F(t, \Theta)}{\partial P_{n_P}} & \frac{\partial \epsilon_F(t, \Theta)}{\partial \eta_1} & \dots & \frac{\partial \epsilon_F(t, \Theta)}{\partial \eta_{n_\eta}} \end{bmatrix} \quad (219)$$

onde $\frac{\partial \epsilon_F(t, \Theta)}{\partial P_k}$ denota a derivada parcial de $\epsilon_F(t, \Theta)$ com relação ao k -ésimo elemento de P e similarmente para η .

Define-se agora a jacobiana de $f(P)$ em relação a P , isto é, a matriz de dimensões $(n_{D_s} + 1 + n_{D_a}) \times n_P$ seguinte:

$$\frac{\partial f(P)}{\partial P} = \frac{\partial \delta_{s,a}}{\partial P} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \delta_s}{\partial P} \\ \frac{\partial \delta_a}{\partial P} \end{bmatrix}. \quad (220)$$

Define-se ainda o vetor

$$\Psi \triangleq \begin{bmatrix} \Theta \\ \delta_{s,a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ \eta \\ \delta_{s,a} \end{bmatrix}. \quad (221)$$

Além disso, *imaginando que $\delta_{s,a}$ é independente de P* , define-se a jacobiana de $\epsilon_F(t, \Psi) \equiv \epsilon_F(t, \Theta)$ com relação a Ψ :

$$\frac{\partial \epsilon_F(t, \Psi)}{\partial \Psi} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial \epsilon_F(t, \Psi)}{\partial P} & \frac{\partial \epsilon_F(t, \Psi)}{\partial \eta} & \frac{\partial \epsilon_F(t, \Psi)}{\partial \delta_{s,a}} \end{bmatrix}. \quad (222)$$

A matriz (219) pode ser obtida agora através da regra da cadeia:

$$\frac{\partial \epsilon_F(t, \Theta)}{\partial \Theta} = \frac{\partial \epsilon_F(t, \Psi)}{\partial \Psi} \begin{bmatrix} I_{n_P} & 0 \\ 0 & I_{n_\eta} \\ \frac{\partial \delta_{s,a}}{\partial P} & 0 \end{bmatrix}, \quad (223)$$

onde I_k denota a matriz identidade de dimensão $k \times k$.

Resta ainda mostrar como obter $\frac{\partial \delta_{s,a}}{\partial P}$. A partir de (193) e (195)-(197), sabe-se que P e $\delta_{s,a}$ satisfazem a relação de igualdade

$$\delta(P) = h(\delta_{s,a}), \quad (224)$$

onde a expressão da função $h(\cdot)$ é conhecida e depende da convolução de δ_s e δ_a . Por exemplo, considerando (194) (onde $n_D = 2$) e supondo que $n_{D_s} = n_{D_a} = 1$, obtém-se

$$\delta(P) = \begin{bmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12} \\ b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_s^0 \\ d_s^0 d_a^1 + d_s^1 \\ d_s^1 d_a^1 \end{bmatrix} = h(\delta_{s,a}) \quad (225)$$

Usando o teorema da função implícita, chega-se então a

$$\frac{\partial \delta_{s,a}}{\partial P} = \left[\frac{\partial h(\delta_{s,a})}{\partial \delta_{s,a}} \right]^{-1} \frac{\partial \delta(P)}{\partial P} \quad (226)$$

onde $\frac{\partial h(\delta_{s,a})}{\partial \delta_{s,a}}$ é a jacobiana de $h(\delta_{s,a})$ em relação a $\delta_{s,a}$ e similarmente para $\frac{\partial \delta(P)}{\partial P}$. Tanto $\frac{\partial h(\delta_{s,a})}{\partial \delta_{s,a}}$ como $\frac{\partial \delta(P)}{\partial P}$ são obtidas por cálculo direto.

Observação. A matriz $\frac{\partial h(\delta_{s,a})}{\partial \delta_{s,a}}$ possui a estrutura seguinte (considerando, por exemplo, $n_{D_s} = 3$ e $n_{D_a} = 2$):

$$\frac{\partial h(\delta_{s,a})}{\partial \delta_{s,a}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_a^1 & 1 & 0 & 0 & d_s^0 & 0 \\ d_a^2 & d_a^1 & 1 & 0 & d_s^1 & d_s^0 \\ 0 & d_a^2 & d_a^1 & 1 & d_s^2 & d_s^1 \\ 0 & 0 & d_a^2 & d_a^1 & d_s^3 & d_s^2 \\ 0 & 0 & 0 & d_a^2 & 0 & d_s^3 \end{bmatrix}$$

onde o canto inferior direito corresponde à matriz de Sylvester relacionada aos polinômios $D_a(q, \delta_a)$ e $D_s(q, \delta_s)$, a qual é não-singular se e somente se esses polinômios não possuem nenhuma raiz em comum (o que é o caso). Fica claro então que $\frac{\partial h(\delta_{s,a})}{\partial \delta_{s,a}}$ também é não-singular. Ademais, é possível mostrar que $\delta_{s,a}(P) = f(P) = h^{-1} \circ \delta(P)$ é de fato uma função suficientemente diferenciável no domínio de interesse \mathcal{D}_P (desde que $C(q, P)$ também o seja), de modo que faz sentido de fato usar na minimização da função custo os métodos de busca steepest descent e Levenberg-Marquardt.

Observação. Uma maneira alternativa de minimizar (202) seria considerar $\delta_{s,a}$ independente de P e lidar com a restrição de igualdade (224) através de um método de otimização com restrições (LUENBERGER; YE, 2015). Note, contudo, que as restrições não são lineares nas variáveis de decisão, o que dificulta o emprego dessa abordagem.

5.4 Considerações finais

Esse capítulo apresentou a formulação flexível do método OCI, onde, além do controlador, o modelo de referência é parametrizado. Note que o desenvolvimento do critério flexível se inspira no fato de que a versão original do método tende a falhar quando aplicada a sistemas de fase não-mínima. Contudo, isso não significa que o que foi apresentado aqui não possa ser usado também para sistemas de fase mínima com o intuito de diminuir a diferença entre o modelo de referência (identificado, no caso) e o desempenho obtido em malha fechada com o controlador. Em outras palavras, é mais fácil satisfazer a Hipótese 5.1 com um modelo de referência parametrizado do que a Hipótese 2.1 com um modelo de referência fixo.

Vale lembrar que as estruturas propostas para o modelo de referência – diagonal e bloco-triangular – são apenas exemplos de possíveis escolhas. O usuário do método pode personalizar a estrutura de $T_d(q, \eta)$, tendo em mente as diretrizes apresentadas no capítulo e a questão da identificabilidade da estrutura de modelo como um todo, como exposto nas Seções 5.2.1 e 5.2.2, respectivamente. Em relação à identificabilidade, um dos trabalhos futuros corresponde a fazer uma análise mais aprofundada e sistemática da mesma.

Ademais, a Seção 5.3 explicou como contornar o problema de instabilidade da estrutura de modelo por meio do uso de um filtro passa-tudo. Esse problema, como comentado, é mais comum quando $T_d(q, \eta)$ é diagonal, mas pode surgir também em outras ocasiões. Vale lembrar que a metodologia apresentada pode ser adaptada facilmente para o caso em que $H(q, \Theta)$ também é identificado. Lembre ainda que a estimativa do controlador é consistente para dados coletados em malha aberta, mas não em malha fechada.

6 RESULTADOS

Este capítulo busca expor as diversas vantagens e funcionalidades do método OCI através de exemplos, fazendo um paralelo com o que foi apresentado nos Capítulos 4 e 5. A Seção 6.1 apresenta um exemplo de simulação onde se mostra que estruturas de controlador mais flexíveis podem aproximar a resposta do sistema em malha fechada do modelo de referência. Uma das vantagens do OCI é que essa personalização da estrutura do controlador pode ser realizada sem aumento do grau de complexidade do método. A Seção 6.2, por sua vez, compara os métodos OCI e VRFT quando a batelada de dados da planta é contaminada por ruído. Fica claro através das simulações que o OCI é de fato mais adequado nos casos em que o ruído do sistema é elevado. Essa é, aliás, a principal motivação do uso desse método. Na sequência, na Seção 6.3, realiza-se um exemplo numérico em que o modelo do ruído $H(q, \Theta)$ é identificado em paralelo com o controlador, explorando-se o caso em que os dados da planta são coletados em malha fechada. Já na Seção 6.4 o critério flexível do método OCI é aplicado. Leva-se em conta as duas estruturas de modelo apresentadas no Capítulo 5 – diagonal e bloco-triangular. Por fim, na Seção 6.5 o método OCI é aplicado a uma planta de nível real e comparado também com o VRFT. Mais uma vez, tem-se a confirmação de que o OCI é mais eficiente nas situações em que o ruído dos dados é elevado.

Nos exemplos desse capítulo, a função objetivo $J^{MR}(P)$, dada por (43), será estimada através dos dados como segue:

$$\hat{J}^{MR}(\hat{P}) \triangleq \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \|T_d(q)r(t) - y(t, \hat{P})\|_2^2, \quad (227)$$

onde $y(t, P)$ é dado por (23). Um índice que também é interessante analisar, principalmente no caso do critério flexível, é

$$\hat{J}^R \triangleq \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \|T_d(q)r(t) - r(t)\|_2^2. \quad (228)$$

Além disso, em alguns casos será computada a medida abaixo, a qual reflete a diferença entre o controlador projetado e o ideal:

$$E_c(\hat{P}) \triangleq \left\| \frac{q-1}{q} [C(q, \hat{P}) - C_d(q)] \right\|_2 \quad (229)$$

onde foi removido o polo integrador dos controladores.

Em alguns exemplos serão realizadas simulações de Monte Carlo, e os gráficos de *box plot* resultantes de \hat{J}^{MR} e de E_c serão apresentados. Em tais gráficos, em cada “caixa”, a

linha central é a mediana, e as faces azuis são os percentis de 25% e 75%. As linhas pretas da extremidade indicam o intervalo de dados considerados válidos, e os dados espúrios são mostrados individualmente.

6.1 Identificação do polo derivativo de um controlador PID

Como é intuitivo, estruturas de controlador mais flexíveis permitem diminuir a diferença entre o desempenho desejado, dado por $T_d(q)$, e o desempenho obtido. Isso é exemplificado para o caso de um controlador PID.

Considere a planta livre de ruído dada por

$$G_0(q) = \begin{bmatrix} \frac{1,5(q-0,95)}{q^2-1,9570q+0,9631} & \frac{0,9(q-0,8)}{q^2-1,9570q+0,9631} \\ -\frac{1,1(q-0,97)}{q^2-1,9570q+0,9631} & \frac{q-0,96}{q^2-1,9570q+0,9631} \end{bmatrix} \quad (230)$$

e o modelo de referência

$$T_d(q) = \frac{0,2}{q-0,8}I \quad (231)$$

que propõe o desacoplamento do sistema em malha fechada, especificando o mesmo comportamento para ambas saídas. Note que o ganho estático é tal que o erro é nulo em regime permanente para referências do tipo salto.

O controlador ideal nesse caso é

$$C_d(q) = \begin{bmatrix} \frac{0,0803(q^2-1,9570q+0,9631)(q-0,96)}{(q-0,8858)(q-0,9686)(q-1)} & \frac{-0,0723(q^2-1,9570q+0,9631)(q-0,8)}{(q-0,8858)(q-0,9686)(q-1)} \\ \frac{0,0884(q^2-1,9570q+0,9631)(q-0,97)}{(q-0,8858)(q-0,9686)(q-1)} & \frac{0,1205(q^2-1,9570q+0,9631)(q-0,95)}{(q-0,8858)(q-0,9686)(q-1)} \end{bmatrix} \quad (232)$$

o qual não pertence à classe PID.

Realiza-se um ensaio em malha aberta para coleta de dados da planta, onde as entradas aplicadas são do tipo salto. Com base nisso, projeta-se primeiramente um controlador PID com polo derivativo fixo em zero através do método dos mínimos quadrados (LS – *least squares*) ou, mais especificamente, através do método VRFT (CAMPESTRINI et al., 2016). O controlador obtido é:

$$C(q, \hat{P}_{LS}) = \begin{bmatrix} \frac{0,1096(q-0,9399)(q-0,7742)}{q(q-1)} & \frac{-0,0870(q^2-1,5149q+0,5810)}{q(q-1)} \\ \frac{0,1960(q^2-1,8404q+0,8554)}{q(q-1)} & \frac{0,1802(q-0,9258)(q-0,7693)}{q(q-1)} \end{bmatrix} \quad (233)$$

Usando esse controlador para inicializar o algoritmo do OCI, obtém-se o controlador PID com polo derivativo livre seguinte:

$$C(q, \hat{P}_{OCI}) = \begin{bmatrix} \frac{0,0749(q^2-1,9601q+0,9659)}{(q-0,9184)(q-1)} & \frac{-0,0987(q^2-1,9532q+0,96)}{(q-0,9723)(q-1)} \\ \frac{0,0836(q^2-1,9558q+0,9618)}{(q-0,8889)(q-1)} & \frac{0,1047(q^2-1,9599q+0,9657)}{(q-0,9376)(q-1)} \end{bmatrix} \quad (234)$$

A Figura 4 ilustra as respostas do sistema em malha fechada com os controladores acima para referências do tipo salto. Os valores obtidos para (227) são $\hat{J}^{MR}(\hat{P}_{LS}) = 0,00814$ e $\hat{J}^{MR}(\hat{P}_{OCI}) = 0,000196$. Note que usar uma estrutura de controlador mais flexível pode, de fato, melhorar bastante o desempenho em malha fechada, mesmo quando $C_d(q) \notin \mathcal{C}$. A resposta com o controlador (234) é consideravelmente mais próxima do modelo de referência (MR), apresentando apenas um pouco de acoplamento entre a segunda referência e a primeira saída.

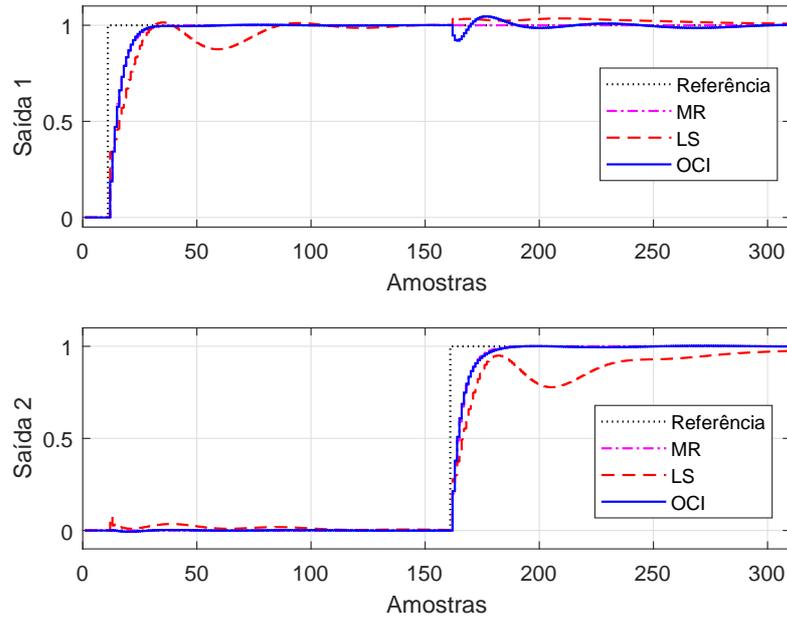


Figura 4: Respostas em malha fechada do sistema (230) com os controladores (233) e (234).

6.2 Comparação entre os métodos do erro de predição e da variável instrumental

A seguir será realizada uma comparação entre os controladores projetados através do método OCI e do método VRFT, sendo que o VRFT emprega variáveis instrumentais a fim de obter uma estimativa não-polarizada do controlador.

Considere um sistema descrito por

$$G_0(q) = \begin{bmatrix} \frac{0,095q}{(q-0,8)(q-0,92)} & \frac{0,04q}{(q-0,85)(q-0,9)} \\ -0,03q & 0,05q \\ \frac{(q-0,8)(q-0,92)}{(q-0,8)(q-0,92)} & \frac{(q-0,85)(q-0,9)}{(q-0,85)(q-0,9)} \end{bmatrix} \quad (235)$$

$$H_0(q) = \begin{bmatrix} \frac{(q-0,4)q}{(q-0,8)(q-0,9)} & \frac{0,5(q-0,2)}{(q-0,8)(q-0,9)} \\ 0,5(q-0,5) & \frac{(q-0,6)q}{(q-0,8)(q-0,9)} \end{bmatrix} \quad (236)$$

onde o ruído $w(t)$ em (17) possui matriz de covariância $\Lambda = 0,002I$.

O modelo de referência escolhido é

$$T_d(q) = \begin{bmatrix} \frac{0,2}{q-0,8} & 0 \\ 0 & \frac{0,4}{q-0,6} \end{bmatrix}, \quad (237)$$

o qual especifica um sistema em malha fechada desacoplado e com a malha 2 mais rápida do que a malha 1.

Nesse caso, o controlador ideal é dado por

$$C_d(q) = \begin{bmatrix} \frac{1,6807(q-0,8)(q-0,92)}{q(q-1)} & \frac{-2,6891(q-0,8)(q-0,92)}{q(q-1)} \\ \frac{1,0084(q-0,85)(q-0,9)}{q(q-1)} & \frac{6,3866(q-0,85)(q-0,9)}{q(q-1)} \end{bmatrix}, \quad (238)$$

o qual será usado para fins de comparação com os controladores obtidos. Note que o desempenho desejado em malha fechada é alcançado por meio do uso de um controlador PID centralizado. Na sequência, serão analisados os casos em que o controlador ideal pertence ou não à classe de projeto, ou seja, os casos em que a Hipótese 2.1 é ou não é satisfeita.

Aplica-se nas entradas do sistema (235)-(236) em malha aberta uma onda quadrada, conforme ilustrado na Figura 5. A relação sinal-ruído (*Signal-to-Noise Ratio* – SNR) é de aproximadamente 15 dB em ambos canais. O projeto dos controladores pode ser descrito como segue:

- uso do método VRFT (sem variáveis instrumentais) para obtenção de um controlador inicial;
- uso do método OCI para projeto de um segundo controlador, onde o controlador do VRFT é usado como condição inicial do algoritmo de otimização;
- realização de um segundo experimento. Com essa nova batelada de dados e a anterior, projeta-se um controlador por meio do VRFT com variáveis instrumentais. Esse controlador será comparado com o do OCI.

Cem execuções de Monte Carlo do procedimento acima são realizadas considerando diferentes realizações do ruído, de forma a projetar cem controladores diferentes com cada método. Para cada controlador, o custo (227) é calculado considerando como referência uma sequência de saltos de amplitude 10, caso em que as saídas de malha fechada possuem uma SNR de aproximadamente 25 dB. O índice (229) também é calculado para cada controlador.

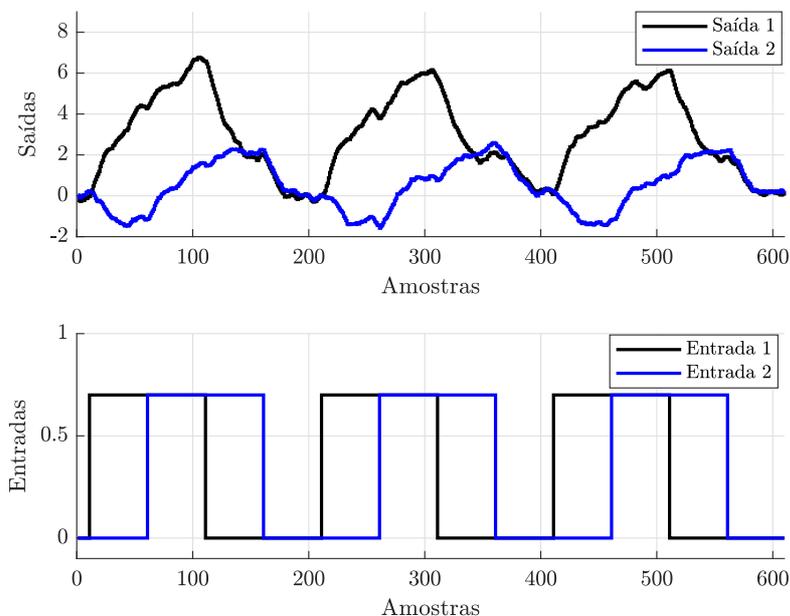


Figura 5: Resposta em malha aberta do sistema (235)-(236) para uma entrada do tipo onda quadrada.

Lembre que, quando os dados são coletados em malha aberta, a estimativa do controlador ideal obtida através do OCI é consistente mesmo se o modelo do ruído $H(q, \Theta)$ não

é identificado (desde que $C_d(q) \in \mathcal{C}$). Logo, será considerado que $H(q, \Theta) = I$ para o que segue.

6.2.1 O caso ideal: $C_d(q) \in \mathcal{C}$

Para que a Hipótese 2.1 seja satisfeita, projeta-se um controlador PID centralizado com polo derivativo fixo em zero. As medianas de \hat{J}^{MR} assim como de E_c obtidas a partir das execuções de Monte Carlo são mostradas na Tabela 2. Observe que os valores relacionados ao método da variável instrumental (IV) são consideravelmente maiores do que os valores correspondentes do OCI. Aliás, cerca de 35% dos controladores obtidos com o VRFT-IV nem mesmo estabilizam o sistema em malha fechada. Isto é, apesar de ambos métodos proporcionarem estimativas sem *bias* do controlador ideal, o erro de variância do OCI é menor (veja (100)). De um ponto de vista qualitativo, essa constatação faz sentido, pois a estimativa $\hat{\Theta}_N$ do método do erro de previsão é, sob algumas condições ideais, assintoticamente estatisticamente eficiente (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989).

Tabela 2: Medianas de \hat{J}^{MR} e E_c obtidas considerando que $C_d(q) \in \mathcal{C}$ e a batelada de dados da Figura 5.

Controlador	\hat{J}^{MR}	E_c
$C(q, \hat{P}_{IV})$	2,0025	15,9981
$C(q, \hat{P}_{OCI})$	0,07971	4,1200

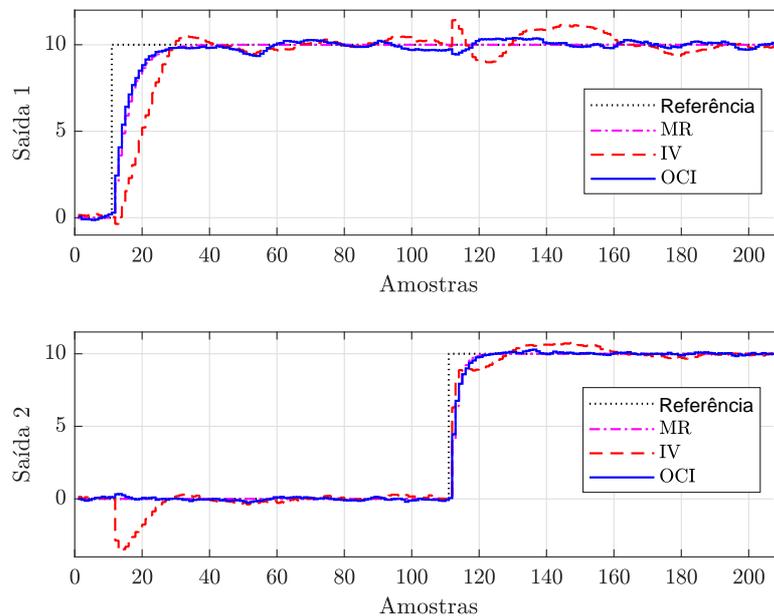


Figura 6: Respostas em malha fechada do sistema (235)-(236) com os controladores (240) e (241).

Considere na sequência uma execução específica das simulações de Monte Carlo. O controlador inicial usado pelo método OCI é

$$C(q, \hat{P}_{LS}) = \begin{bmatrix} \frac{0,441(q-0,942)(q-0,210)}{q(q-1)} & \frac{-0,281(q-0,955)(q+1,374)}{q(q-1)} \\ \frac{0,039(q^2-1,123q+0,385)}{q(q-1)} & \frac{0,271(q-0,892)(q+0,201)}{q(q-1)} \end{bmatrix} \quad (239)$$

e o controlador resultante do OCI é

$$C(q, \hat{P}_{OCI}) = \begin{bmatrix} \frac{1,722(q-0,917)(q-0,812)}{q(q-1)} & \frac{-3,252(q-0,917)(q-0,841)}{q(q-1)} \\ \frac{1,348(q-0,923)(q-0,854)}{q(q-1)} & \frac{6,837(q^2-1,798q+0,813)}{q(q-1)} \end{bmatrix}. \quad (240)$$

Por fim, o controlador obtido usando o VRFT com variáveis instrumentais é

$$C(q, \hat{P}_{IV}) = \begin{bmatrix} \frac{1,612(q-0,914)(q-0,796)}{q(q-1)} & \frac{-3,074(q-0,928)(q-0,807)}{q(q-1)} \\ \frac{-4,829(q^2-1,946q+0,954)}{q(q-1)} & \frac{11,087(q^2-1,888q+0,901)}{q(q-1)} \end{bmatrix}. \quad (241)$$

A Figura 6 ilustra as respostas em malha fechada com os controladores (240) e (241), onde a referência é a mesma usada para computar \hat{J}^{MR} . Observe que o controlador (241) apresenta problemas relacionados tanto ao seguimento da referência como ao acoplamento entre as malhas de controle. Já o controlador do OCI fornece uma resposta quase idêntica ao modelo de referência (desconsiderando o efeito do ruído nas saídas).

6.2.2 O caso não-ideal: $C_d(q) \notin \mathcal{C}$

Considere agora que a estrutura do controlador é tal que $C_d(q) \notin \mathcal{C}$. Isso acontece se o controlador for do tipo PI. Novamente, serão consideradas com execuções de Monte Carlo e os dados da Figura 5.

A Tabela 3 é análoga à 2. Note que as medianas relacionadas aos dois métodos são quase iguais entre elas, mas bastante diferentes dos valores da tabela anterior. Em particular, os controladores de ambos métodos apresentam *bias* agora, explicando por que as medianas do OCI aumentaram. Já as medianas do método VRFT-IV, apesar do erro de *bias*, diminuiram.

Tabela 3: Medianas de \hat{J}^{MR} e E_c obtidas considerando que $C_d(q) \notin \mathcal{C}$ e a batelada de dados da Figura 5.

Controlador	\hat{J}^{MR}	E_c
$C(q, \hat{P}_{IV})$	0,7381	13,333
$C(q, \hat{P}_{OCI})$	0,7375	13,391

Para uma execução de Monte Carlo específica, o controlador inicial do VRFT é nesse caso

$$C(q, \hat{P}_{LS}) = \begin{bmatrix} \frac{0,342(q-0,945)}{q-1} & \frac{-0,659(q-0,944)}{q-1} \\ \frac{0,040(q-0,781)}{q-1} & \frac{0,294(q-0,872)}{q-1} \end{bmatrix} \quad (242)$$

enquanto que o método OCI fornece

$$C(q, \hat{P}_{OCI}) = \begin{bmatrix} \frac{0,542(q-0,953)}{q-1} & \frac{-0,743(q-0,960)}{q-1} \\ \frac{0,238(q-0,941)}{q-1} & \frac{1,404(q-0,926)}{q-1} \end{bmatrix}. \quad (243)$$

O método VRFT-IV resulta em

$$C(q, \hat{P}_{IV}) = \begin{bmatrix} \frac{0,474(q-0,957)}{q-1} & \frac{-0,799(q-0,972)}{q-1} \\ \frac{0,263(q-1,012)}{q-1} & \frac{2,708(q-0,983)}{q-1} \end{bmatrix}, \quad (244)$$

As respostas de malha fechada com os controladores (243) e (244) são mostradas na Figura 7. Nesse caso, como a Hipótese 2.1 não é satisfeita, ambas respostas são (consideravelmente) diferentes do modelo de referência, apresentando problemas de *overshoot*

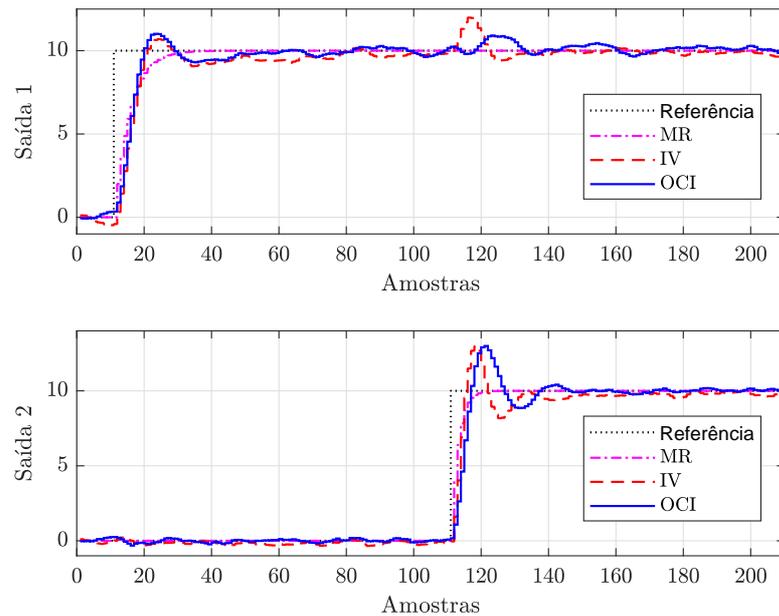


Figura 7: Respostas em malha fechada do sistema (235)-(236) com os controladores (243) e (244).

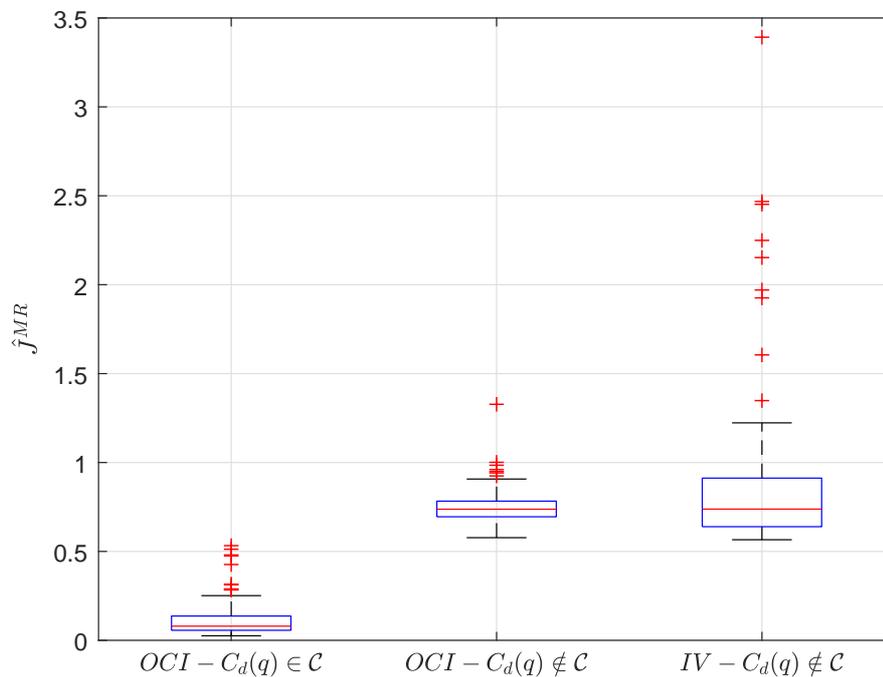


Figura 8: Distribuição do custo \hat{J}^{MR} considerando 100 execuções de Monte Carlo para os métodos OCI e VRFT-IV considerando os dados de projeto da Figura 5.

e também de acoplamento quando a segunda referência muda seu valor. Isso indica que o modelo de referência escolhido é muito exigente para controladores do tipo PI.

Por fim, a Figura 8 ilustra os *box plots* do custo \hat{J}^{MR} considerando o caso $C_d(q) \notin \mathcal{C}$

mas também $C_d(q) \in \mathcal{C}$ (o custo relacionado ao método VRFT-IV foi omitido quando $C_d(q) \in \mathcal{C}$ pois o gráfico resultante é muito grande). Note que, quando $C_d(q) \notin \mathcal{C}$, a variância do custo do OCI é menor do que a associada ao método VRFT-IV, como também aconteceu quando $C_d(q) \in \mathcal{C}$.

6.3 Identificação do modelo do ruído

De acordo com o Corolário 4.1, quando os dados são coletados em malha fechada é necessário identificar um modelo (flexível o suficiente) $H(q, \Theta)$ para o ruído para que a estimativa do controlador seja consistente. Considere novamente o sistema (235)-(236) da Seção 6.2, o qual opera agora em malha fechada com o controlador PI estabilizante abaixo:

$$C_0(q) = \begin{bmatrix} \frac{0,2(q-0,9)}{q-1} & \frac{-0,1(q-0,9)}{q-1} \\ \frac{-0,1(q-0,9)}{q-1} & \frac{0,2(q-0,9)}{q-1} \end{bmatrix}. \quad (245)$$

O conjunto de dados \mathcal{Z}_1^N é coletado usando como referência um sinal PRBS (*pseudo random binary sequence*) com período fundamental de $T = 30$ amostras e duração de 2000 amostras. Serão consideradas duas amplitudes diferentes para o PRBS, 5 e 1, que correspondem, respectivamente, a SNRs de aproximadamente 20 dB e 5 dB nas saídas do sistema. Assim, será possível analisar o que acontece quando a SNR é “pequena”. A Figura 9 mostra parte da batelada de dados coletada quando o PRBS possui amplitude unitária.

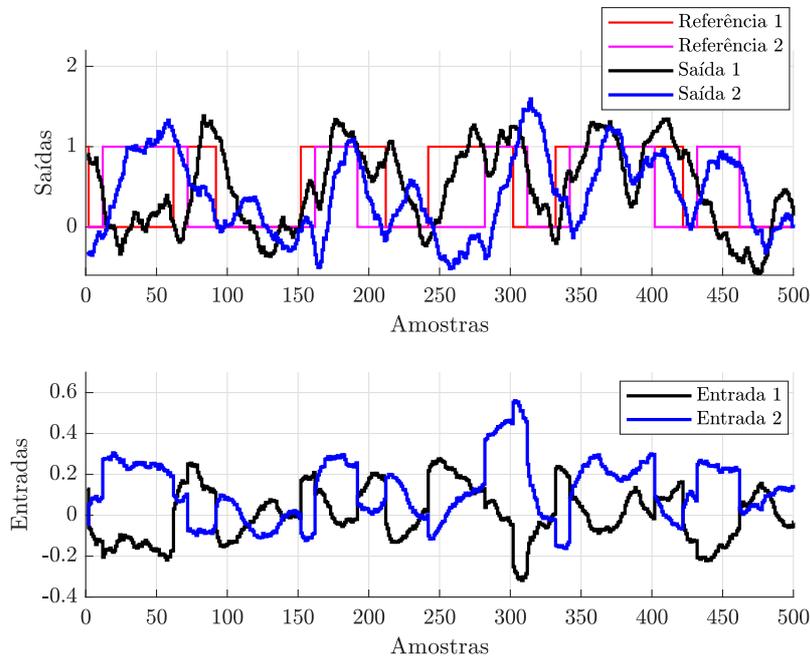


Figura 9: Resposta em malha fechada do sistema (235)-(236) com o controlador (245) para uma referência do tipo PRBS de amplitude unitária (SNR $\cong 5$ dB).

Diferentes projetos de controladores PID com polo derivativo fixo em zero são realizados considerando o modelo de referência (237) (Hipótese 2.1 é satisfeita) e as seguintes parametrizações para $H(q, \Theta) = H(q, \theta)$:

$$H_1(q, \theta) = I \quad (246)$$

$$H_2(q, \theta) = \begin{bmatrix} \frac{q^2 + \theta_1 q + \theta_2}{q^2 + \theta_3 q + \theta_4} & 0 \\ 0 & \frac{q^2 + \theta_5 q + \theta_6}{q^2 + \theta_7 q + \theta_8} \end{bmatrix} \quad (247)$$

$$H_3(q, \theta) = \begin{bmatrix} \frac{q + \theta_1}{q + \theta_5} & \frac{\theta_2}{q + \theta_5} \\ \frac{\theta_3}{q + \theta_6} & \frac{q + \theta_4}{q + \theta_6} \end{bmatrix} \quad (248)$$

$$H_4(q, \theta) = \begin{bmatrix} \frac{q^2 + \theta_1 q + \theta_2}{q^2 + \theta_9 q + \theta_{10}} & \frac{\theta_3 q + \theta_4}{q^2 + \theta_9 q + \theta_{10}} \\ \frac{\theta_5 q + \theta_6}{q^2 + \theta_{11} q + \theta_{12}} & \frac{q^2 + \theta_7 q + \theta_8}{q^2 + \theta_{11} q + \theta_{12}} \end{bmatrix} \quad (249)$$

Note que somente $H_4(q, \theta)$ é capaz de representar adequadamente (236). Isto é, somente no quarto caso a estimativa do controlador é consistente, como explicado no Capítulo 4.

Cem execuções de Monte Carlo são realizadas. Contudo, quando a SNR é baixa, o controlador obtido por meio do VRFT (com ou sem variáveis instrumentais) nem mesmo estabiliza o sistema (em todas 100 simulações). Logo, usou-se para inicializar o método do OCI o controlador (245).

O custo \hat{J}^{MR} é calculado considerando referências do tipo salto de amplitude 10, como na Seção 6.2. Os gráficos de *box plot* resultantes são mostrados nas Figuras 10 e 11 para, respectivamente, as SNRs alta e baixa (compare ainda com a Figura 8).

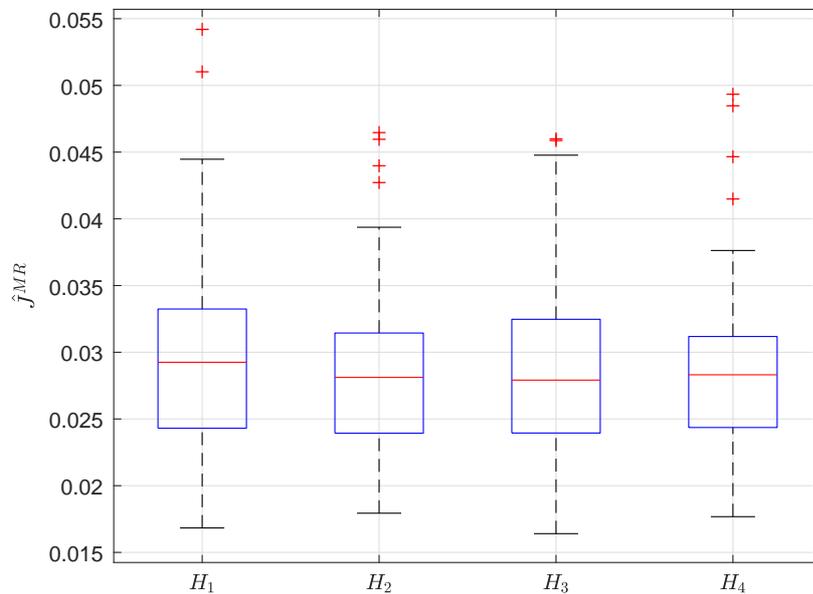


Figura 10: Distribuição do custo \hat{J}^{MR} para 100 execuções de Monte Carlo considerando os modelos (246), (247), (248) e (249) para o ruído e $\text{SNR} \cong 20$ dB.

Note que quando a SNR é alta a estrutura adotada para o modelo do ruído não influencia muito o resultado final, sendo possível simplesmente fixar $H(q, \theta) = I$. Entretanto, quando a SNR é baixa, isso não é verdade. Em particular, não é vantajoso usar um modelo

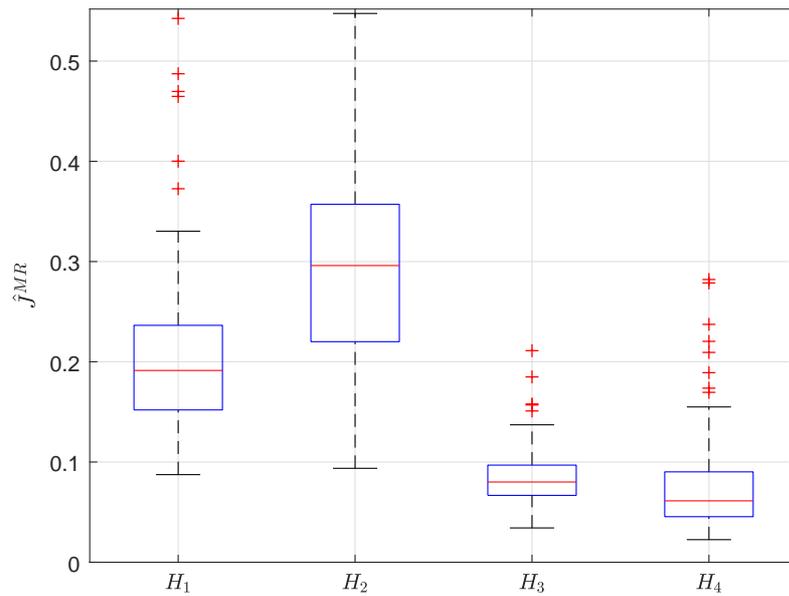


Figura 11: Distribuição do custo \hat{J}^{MR} para 100 execuções de Monte Carlo considerando os modelos (246), (247), (248) e (249) para o ruído e $\text{SNR} \cong 5$ dB.

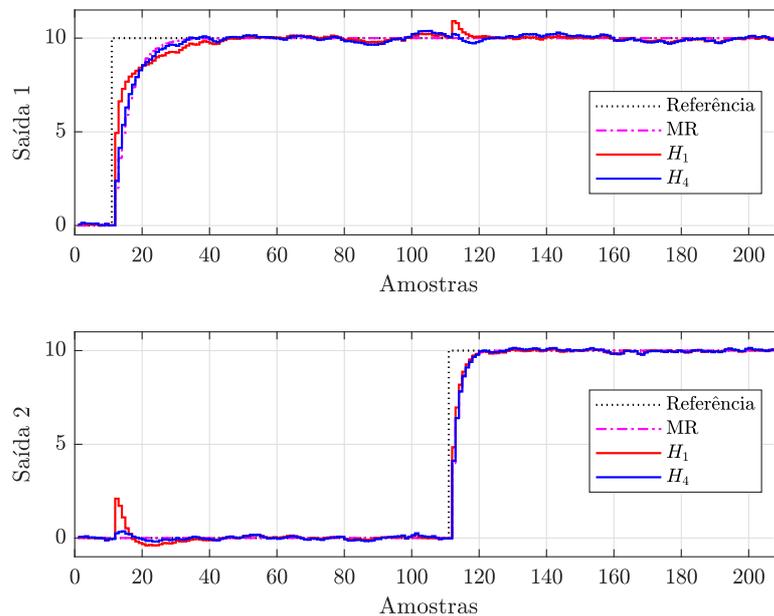


Figura 12: Respostas em malha fechada do sistema (235)-(236) com os controladores projetados considerando os modelos (246) e (249) para o ruído quando $\text{SNR} \cong 5$ dB.

diagonal para o ruído, já que $H_0(q)$ não o é. Mas o desempenho em malha fechada com o controlador projetado é melhorado se usarmos as estruturas $H_3(q, \theta)$ ou $H_4(q, \theta)$ ao invés de $H_1(q, \theta)$ simplesmente. Aliás, nesse exemplo, os resultados considerando a estrutura $H_3(q, \theta)$ são quase tão “bons” quanto os obtidos com $H_4(q, \theta)$, embora $H_3(q, \theta)$ não seja flexível o suficiente.

A Figura 12 mostra as respostas em malha fechada considerando as estruturas $H_1(q, \theta)$ e $H_4(q, \theta)$ para uma única execução de Monte Carlo quando a SNR é baixa. Os controladores projetados são, respectivamente:

$$C_1(q, \hat{P}_N) = \begin{bmatrix} \frac{2,757(q^2-1,811q+0,821)}{q(q-1)} & \frac{-2,514(q-0,918)(q-0,785)}{q(q-1)} \\ \frac{5,944(q^2-1,932q+0,936)}{q(q-1)} & \frac{8,200(q-0,921)(q-0,853)}{q(q-1)} \end{bmatrix} \quad (250)$$

$$C_4(q, \hat{P}_N) = \begin{bmatrix} \frac{1,855(q-0,905)(q-0,845)}{q(q-1)} & \frac{-2,621(q-0,926)(q-0,775)}{q(q-1)} \\ \frac{1,736(q^2-1,846q+0,857)}{q(q-1)} & \frac{6,759(q^2-1,767q+0,781)}{q(q-1)} \end{bmatrix}. \quad (251)$$

Note que a resposta relacionada à escolha $H_4(q, \theta)$ (e ao controlador (251)) é de fato mais próxima do modelo de referência do que a outra, obtida com (250), especialmente quando o valor da referência do *loop* 1 muda seu valor.

As medianas de \hat{J}^{MR} das Figuras 10 e 11 e também as medianas de E_c são mostradas na Tabela 4. Note que o padrão de E_c não é o mesmo de \hat{J}^{MR} , mas a conclusão final é a mesma: conforme a SNR diminui, se torna vantajoso identificar um modelo para o ruído.

Tabela 4: Medianas de \hat{J}^{MR} e E_c obtidas considerando os modelos (246), (247), (248) e (249) para o ruído.

SNR	20 dB	20 dB	5 dB	5 dB
Modelo	\hat{J}^{MR}	E_c	\hat{J}^{MR}	E_c
$H_1(q, \theta)$	0,02925	0,99725	0,19135	9,4594
$H_2(q, \theta)$	0,028116	0,72686	0,29601	7,4962
$H_3(q, \theta)$	0,027914	0,78107	0,080046	3,6975
$H_4(q, \theta)$	0,028312	0,60645	0,061248	2,8712

Por fim, note que o modelo do ruído identificado

$$H_4(q, \bar{\theta}_N) = \begin{bmatrix} \frac{(q-0,391)(q-0,009)}{(q-0,793)(q-0,899)} & \frac{0,502(q-0,196)}{(q-0,793)(q-0,899)} \\ \frac{0,502(q-0,494)}{(q-0,792)(q-0,897)} & \frac{(q-0,590)(q-0,003)}{(q-0,792)(q-0,897)} \end{bmatrix} \quad (252)$$

onde $\bar{\theta}_N$ é o valor médio de $\hat{\theta}_N$ obtido das 100 execuções de Monte Carlo (quando SNR $\cong 5$ dB) é de fato parecido com (236).

6.4 Sistema de fase não-mínima

Nesta seção será considerada a formulação flexível do método OCI, apresentada no Capítulo 5. A mesma será empregada no projeto de controladores para o sistema

$$G_0(q) = \begin{bmatrix} \frac{q-0,7}{(q-0,9)(q-0,8)} & \frac{2}{(q-0,8)} \\ \frac{1,25}{(q-0,8)} & \frac{1,5}{(q-0,8)} \end{bmatrix}, \quad (253)$$

o qual possui um zero de transmissão de FNM em $z_{nm} = 1,2$ com direção de saída $y_{z_{nm}} = [-0,6 \ 0,8]^T$. Considera-se que $H(q, \Theta) = I$.

Nas simulações a seguir, a batelada de dados usada pelo OCI é coletada em malha fechada com o controlador proporcional $C_0(q) = 0,5I$. A referência usada corresponde a um sinal PRBS de amplitude unitária, período fundamental de 20 amostras e duração de 1260 amostras.

6.4.1 Modelo de referência diagonal

Considere primeiramente que o sistema é livre de ruído e que a estrutura do modelo de referência é diagonal:

$$T_d(q, \eta) = \begin{bmatrix} \frac{\eta_{1,11}q+0,08-\eta_{1,11}}{(q-0,6)(q-0,8)} & 0 \\ 0 & \frac{\eta_{1,22}q+0,12-\eta_{1,22}}{(q-0,6)(q-0,7)} \end{bmatrix} \quad (254)$$

onde se especifica uma resposta mais rápida para a segunda saída.

Foi projetado um controlador PID com polo derivativo fixo em zero. Obtém-se

$$C(q, \hat{P}_N) = \begin{bmatrix} \frac{0,60(q-0,897)(q-0,813)}{q(q-1)} & \frac{-1,08(q-0,896)(q-0,831)}{q(q-1)} \\ \frac{-0,50(q-0,903)(q-0,808)}{q(q-1)} & \frac{0,56(q-0,810)(q-0,730)}{q(q-1)} \end{bmatrix}, \quad (255)$$

que corresponde ao seguinte modelo de referência *identificado*:

$$T_d(q, \hat{\eta}_N) = \begin{bmatrix} \frac{-0,393(q-1,204)}{(q-0,6)(q-0,8)} & 0 \\ 0 & \frac{-0,492(q-1,244)}{(q-0,6)(q-0,7)} \end{bmatrix} \quad (256)$$

Como nesse caso a Hipótese 5.1 não é satisfeita, as funções de transferência obtidas acima dependem na verdade do espectro da referência e de $C_0(q)$.

A resposta em malha fechada para referências do tipo salto é mostrada na Figura 13, onde também aparece a saída relacionada ao modelo (256). O custo (227) é, nesse caso, $\hat{J}^{MR}(\hat{P}_N) = 0,002$.

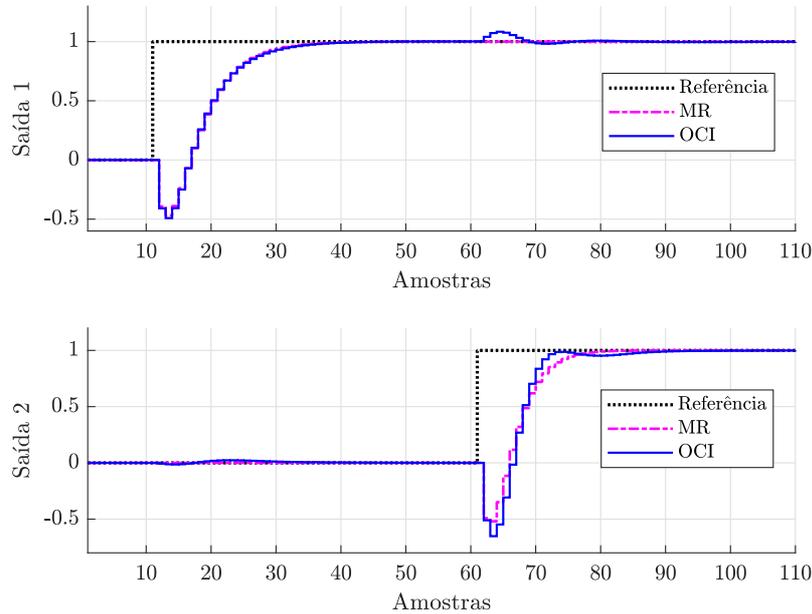


Figura 13: Resposta em malha fechada do sistema (253) com o controlador (255).

Note que a resposta obtida com o controlador projetado é bastante similar com o modelo de referência identificado quando há mudança no valor da primeira referência. Mas quando o segundo salto é aplicado é possível distinguir bem as duas curvas. Além disso, o valor identificado para o zero de FNM da planta no primeiro elemento de (256), $\hat{z}_{nm} = 1,204$, é mais próximo do valor “real” $z_{nm} = 1,2$. Essas observações fazem sentido se compararmos os polos de (256) com os de (187), que satisfaz a Hipótese 5.1 para controladores da classe PID.

6.4.2 Modelo de referência bloco-triangular

Considere agora um modelo de referência bloco-triangular, onde se deseja mover o efeito do zero de FNM da planta para a saída 1 ($k = 1$ em (163)). Essa escolha é adequada se, por exemplo, o interesse no desempenho da saída 2 for maior. Define-se

$$T_d(q, \eta) = \begin{bmatrix} \frac{\eta_{1,11}q+0,08-\eta_{1,11}}{(q-0,8)(q-0,6)} & \frac{(q+\eta_{2,12})(q-1)}{(q-0,8)(q-0,6)(q-0,75)} \\ 0 & \frac{0,25}{(q-0,75)} \end{bmatrix} \quad (257)$$

onde se fixou $\eta_{1,12} = K_2 = 1$, já que a razão entre as componentes da direção do zero de FNM $|y_2/y_1| = 4/3$ (como sugerido na Seção 5.1.1) é desconhecida. $T_d(q, \eta)$ satisfaz a Hipótese 5.1 para controladores PID, onde o par $C(q, P_0) - T_d(q, \eta_0)$ é dado por

$$C(q, P_0) = \begin{bmatrix} \frac{0,6(q-0,9)(q-0,8)}{q(q-1)} & \frac{-(q-0,9)(q-0,8)}{q(q-1)} \\ -0,5(q-0,9)(q-0,8) & \frac{q(q-1)}{(q-0,8)(q-0,75)} \end{bmatrix} \quad (258)$$

$$T_d(q, \eta_0) = \begin{bmatrix} \frac{-0,4(q-1,2)}{(q-0,8)(q-0,6)} & \frac{q-1}{(q-0,6)(q-0,75)} \\ 0 & \frac{0,25}{(q-0,75)} \end{bmatrix} \quad (259)$$

A título de ilustração, vamos considerar também os valores $K_2 = 2,5$ e $K_2 = 0,2$. Nesses casos, $T_d(q, \eta)$ continua satisfazendo a Hipótese 5.1 para controladores PID e seu valor “ótimo” é, respectivamente:

$$T_d(q, \eta_0) = \begin{bmatrix} \frac{-0,4(q-1,2)}{(q-0,8)(q-0,6)} & \frac{2,5(q-1)(q-1,04)}{(q-0,8)(q-0,6)(q-0,75)} \\ 0 & \frac{0,25}{(q-0,75)} \end{bmatrix} \quad (260)$$

$$T_d(q, \eta_0) = \begin{bmatrix} \frac{-0,4(q-1,2)}{(q-0,8)(q-0,6)} & \frac{0,2(q-1)(q+0,8)}{(q-0,8)(q-0,6)(q-0,75)} \\ 0 & \frac{0,25}{(q-0,75)} \end{bmatrix} \quad (261)$$

Os controladores ideais correspondentes são, respectivamente:

$$C(q, P_0) = \begin{bmatrix} \frac{0,6(q-0,9)(q-0,8)}{q(q-1)} & \frac{-3,25(q-0,9)(q-0,8)}{q(q-1)} \\ -0,5(q-0,9)(q-0,8) & \frac{2,875(q-0,848)(q-0,8)}{q(q-1)} \end{bmatrix} \quad (262)$$

$$C(q, P_0) = \begin{bmatrix} \frac{0,6(q-0,9)(q-0,8)}{q(q-1)} & \frac{0,2(q-0,9)(q-0,8)}{q(q-1)} \\ -0,5(q-0,9)(q-0,8) & \frac{4,127 \times 10^{-15}q^2 + 0,15q - 0,12}{q(q-1)} \end{bmatrix} \quad (263)$$

Note que o único termo que muda entre as funções de transferência (259), (260) e (261) é o de acoplamento entre a segunda referência e a primeira saída. A fins de comparação, as respostas ao salto de (259)-(261) são ilustradas na Figura 14 e o custo (228) é mostrado na Tabela 5 para cada caso.

Tabela 5: Custo (228) associado aos modelos de referência (259)-(261) considerando referências do tipo salto.

K_2	\hat{j}^R
2,5	0,42466
1	0,21867
0,2	0,29787

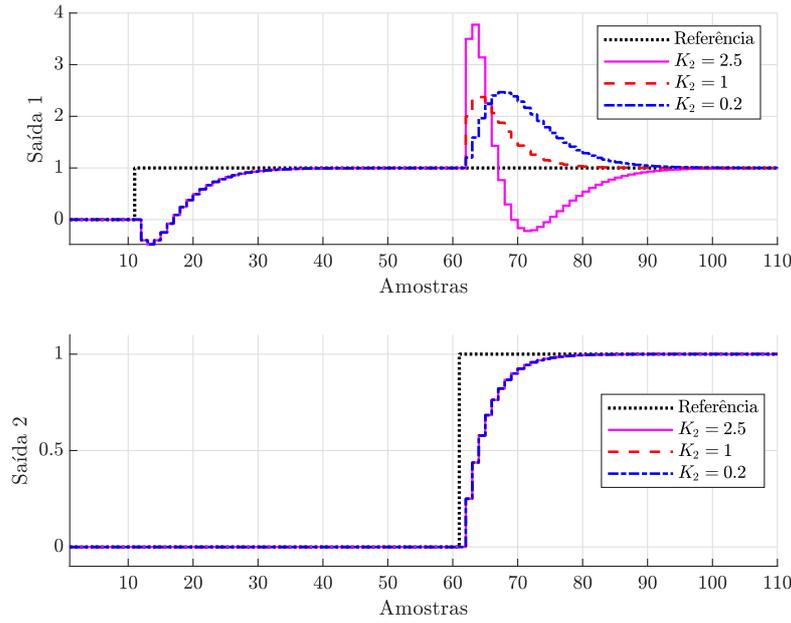


Figura 14: Respostas ao salto de (259)-(261).

Note que, apesar de o custo (227) ser nulo nos três casos (considerando o controlador ideal $C(q, P_0)$ para cada um deles), o acoplamento entre a segunda referência e a primeira saída pode variar bastante com a escolha de K_2 , mudando o valor de \hat{J}^R .

Para o que segue, será considerada a título de ilustração a escolha $K_2 = 1$. Supõe-se agora que os dados coletados em malha fechada com $C_0(q)$ são corrompidos por ruído, correspondendo a $H_0(q) = I$ e

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0,04 & 0 \\ 0 & 0,02 \end{bmatrix}$$

em (17). A SNR é de aproximadamente 5 dB em ambas saídas.

O controlador PID projetado (com polo derivativo fixo em zero) é

$$C(q, \hat{P}_N) = \begin{bmatrix} \frac{0,62(q-0,889)(q-0,822)}{q(q-1)} & \frac{-1,09(q-0,909)(q-0,794)}{q(q-1)} \\ \frac{-0,52(q-0,877)(q-0,838)}{q(q-1)} & \frac{1,08(q-0,797)(q-0,770)}{q(q-1)} \end{bmatrix}, \quad (264)$$

o qual corresponde ao seguinte modelo de referência identificado:

$$T_d(q, \hat{\eta}_N) = \begin{bmatrix} \frac{-0,379(q-1,211)}{(q-0,6)(q-0,8)} & \frac{(q-1)(q-0,813)}{(q-0,6)(q-0,75)(q-0,8)} \\ 0 & \frac{0,25}{q-0,75} \end{bmatrix} \quad (265)$$

A resposta em malha fechada do sistema para referências do tipo salto é mostrada na Figura 15 (o ruído foi omitido para facilitar a comparação das curvas), onde também aparece o modelo de referência identificado.

Note que, apesar da baixa SNR, (265) é bastante similar com (259) e o zero identificado no elemento $T_{d_{11}}(q, \hat{\eta}_N)$, $\hat{z}_{nm} = 1,211$, é próximo do valor “real” $z_{nm} = 1,2$. Ademais, a resposta obtida com (264) é quase igual à proporcionada por (265). O custo (227) é $\hat{J}^{MR}(\hat{P}_N) = 0,0002$.

Cem execuções de Monte Carlo da simulação acima foram realizadas modificando as realizações do ruído $v(t)$ e também do PRBS usado como referência. A Figura 16 mostra

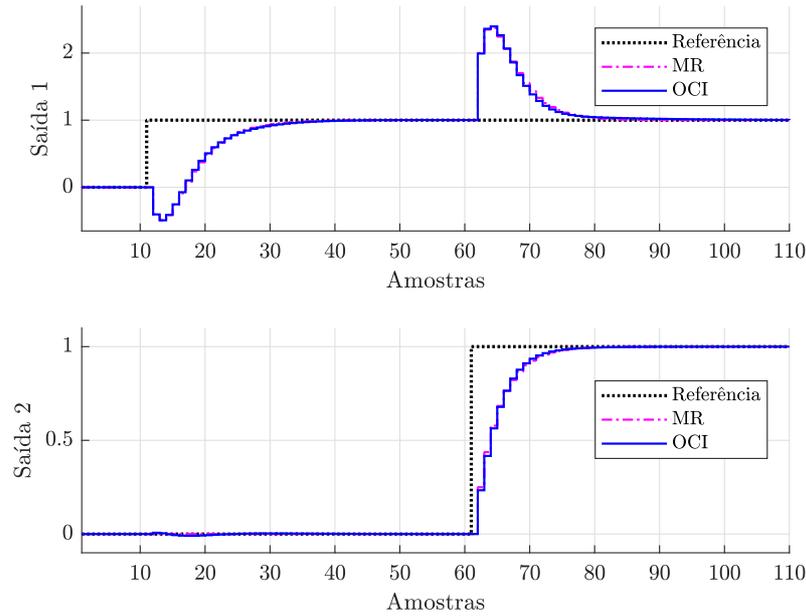


Figura 15: Resposta em malha fechada do sistema (253) com o controlador (264).

os *box plots* resultantes de $\hat{J}^{MR}(\hat{P}_N)$ e \hat{z}_{nm} , os quais confirmam a eficiência do método OCI. Em particular, a mediana de \hat{z}_{nm} é idêntica a z_{nm} . Lembre que a estimativa fornecida pelo OCI é consistente nesse caso, pois, apesar de os dados serem coletados em malha fechada, $H(q, \Theta) = H_0(q) = I$.

Para realizar uma comparação, considere agora a situação mais realística em que a Hipótese 5.1 não é satisfeita. Escolhe-se um modelo de referência mais “rápido” do que (257):

$$T_d(q, \eta) = \begin{bmatrix} \frac{\eta_{1,11}q+0,16-\eta_{1,11}}{(q-0,6)^2} & \frac{(q+\eta_{2,12})(q-1)}{(q-0,6)^3} \\ 0 & \frac{0,4}{(q-0,6)} \end{bmatrix} \quad (266)$$

Considere também que $v(t)$ é ruído colorido com $H_0(q) = \frac{q}{q-0,3}I$ em (17), onde Λ é o mesmo de antes.

A Figura 17 mostra os *box plots* resultantes de $\hat{J}^{MR}(\hat{P}_N)$ e \hat{z}_{nm} , enquanto a Figura 18 mostra a resposta em malha fechada para uma única execução das 100 de Monte Carlo, onde $C(q, \hat{P}_N)$ é dado por

$$C(q, \hat{P}_N) = \begin{bmatrix} \frac{0,83(q^2-1,734q+0,752)}{q(q-1)} & \frac{-0,45(q-0,918)(q-0,699)}{q(q-1)} \\ \frac{-0,69(q^2-1,737q+0,755)}{q(q-1)} & \frac{0,65(q-0,823)(q-0,457)}{q(q-1)} \end{bmatrix} \quad (267)$$

e o modelo de referência identificado é

$$T_d(q, \hat{\eta}_N) = \begin{bmatrix} \frac{-0,835(q-1,192)}{(q-0,6)^2} & \frac{(q-1)(q-0,243)}{(q-0,6)^3} \\ 0 & \frac{0,4}{q-0,6} \end{bmatrix} \quad (268)$$

O custo (227) é, nesse caso, $\hat{J}^{MR}(\hat{P}_N) = 0,005$.

Note que a mediana de \hat{z}_{nm} é agora (consideravelmente) diferente do valor “real” e que a mediana de $\hat{J}^{MR}(\hat{P}_N)$ é mais de 10 vezes maior do que a antiga. Além disso, a resposta em malha fechada apresenta mais *overshoot* na saída 1 comparando com a Figura 15

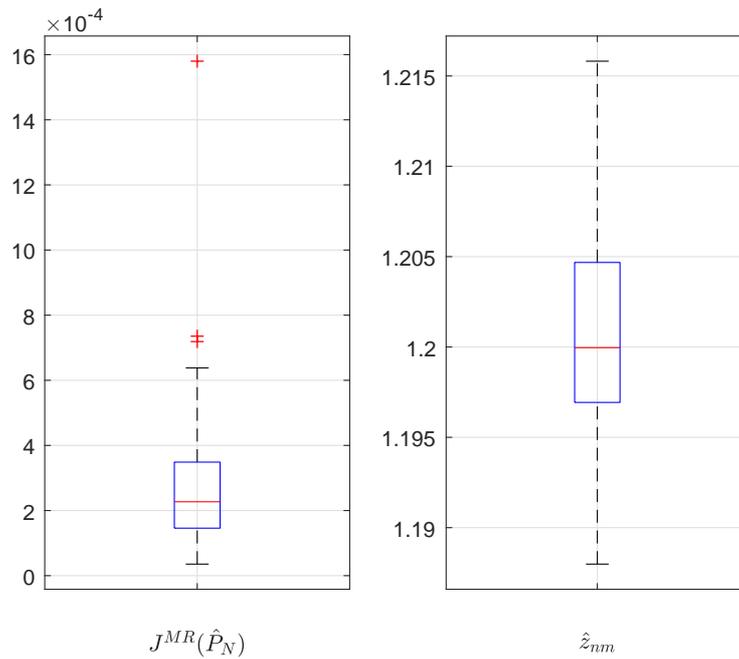


Figura 16: *Box plots* de $\hat{J}^{MR}(\hat{P}_N)$ e \hat{z}_{nm} para 100 execuções de Monte Carlo usando o modelo de referência dado por (257).

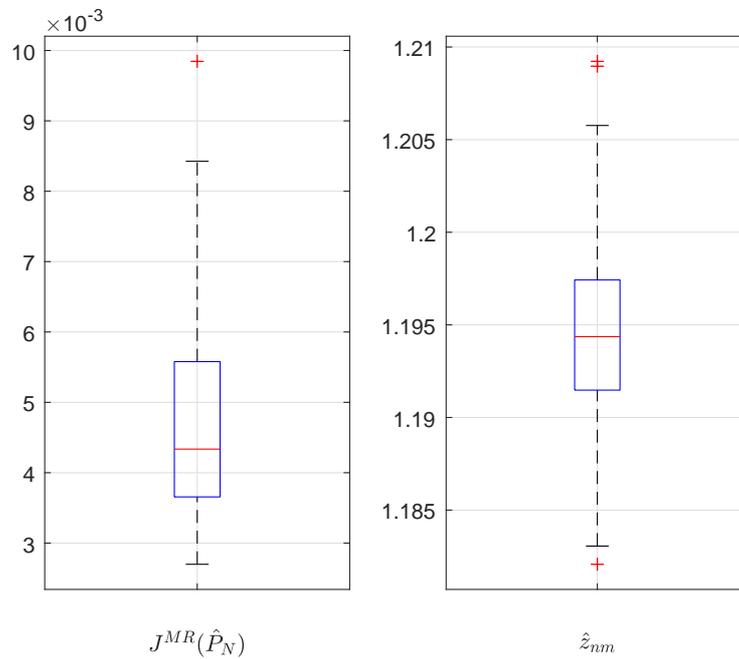


Figura 17: *Box plots* de $\hat{J}^{MR}(\hat{P}_N)$ e \hat{z}_{nm} para 100 execuções de Monte Carlo usando o modelo de referência dado por (266).

(tanto considerando a resposta em si como o modelo de referência identificado). Ainda assim, o desempenho do sistema é a princípio adequado de um ponto de vista prático, principalmente se o interesse na segunda saída for maior, levando em conta que essa última é quase indistinguível do modelo de referência.

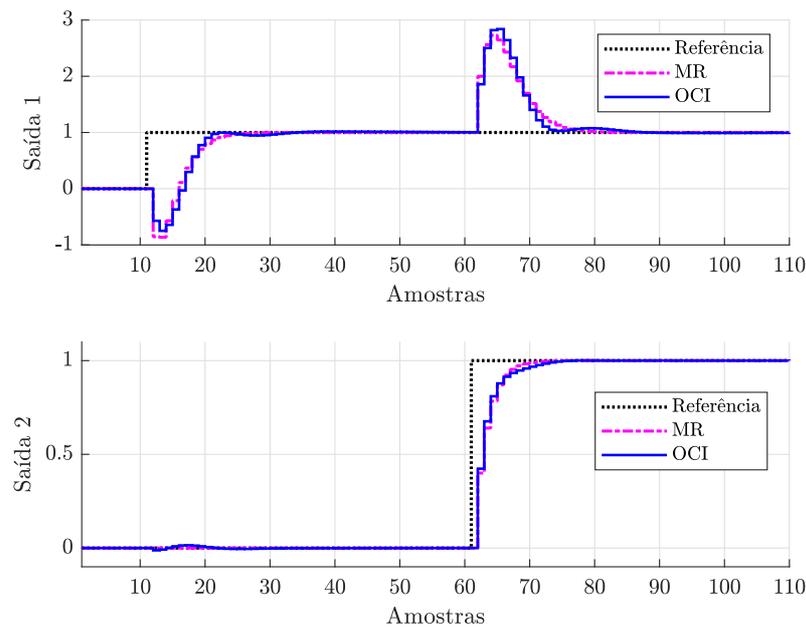


Figura 18: Resposta em malha fechada do sistema (253) com o controlador (267).

6.5 Resultados Experimentais

Serão apresentados na sequência resultados experimentais em uma planta de nível, a qual se encontra no Laboratório de Sistemas de Controle, Automação e Robótica (LAS-CAR), pertencente ao Departamento de Sistemas Elétricos de Automação e Energia (DE-LAE) da UFRGS. A Figura 19 exibe um diagrama esquemático do processo, destacando seus principais componentes, os quais são típicos de ambientes industriais.

A planta possui duas bombas acopladas a motores de indução trifásicos, os quais são acionados por meio de inversores de frequência. A rotação das bombas é mantida fixa nos ensaios, e o controle de vazão é realizado por meio das duas válvulas pneumáticas. Essas últimas possuem uma malha de controle interna para garantir sua correta abertura de acordo com os sinais enviados pelos controladores do processo.

Quanto aos tanques, ambos possuem geometria cilíndrica e volume de 70 litros, enquanto que o reservatório de água possui 250 litros. A medição de nível, por sua vez, é realizada por meio de sensores de pressão localizados no fundo dos tanques. O gerenciamento da configuração da planta e historização de dados é feita em um *software* supervisor Elipse SCADA através de um servidor OPC, o qual permite a visualização das medições de nível em tempo real.

As saídas de interesse são os níveis dos tanques 1 e 2 em centímetros, simbolizados por $y_1(t)$ e $y_2(t)$, respectivamente. As entradas de controle, por sua vez, são as aberturas percentuais das válvulas 1 e 2, denotadas por $u_1(t)$ e $u_2(t)$, respectivamente. Em relação ao controlador, o mesmo é dado por (21), onde $n = 2$ e cada função de transferência $C_{ij}(q, \rho_{ij})$ é diretamente relacionada ao elemento LIC0*ij* da Figura 19.

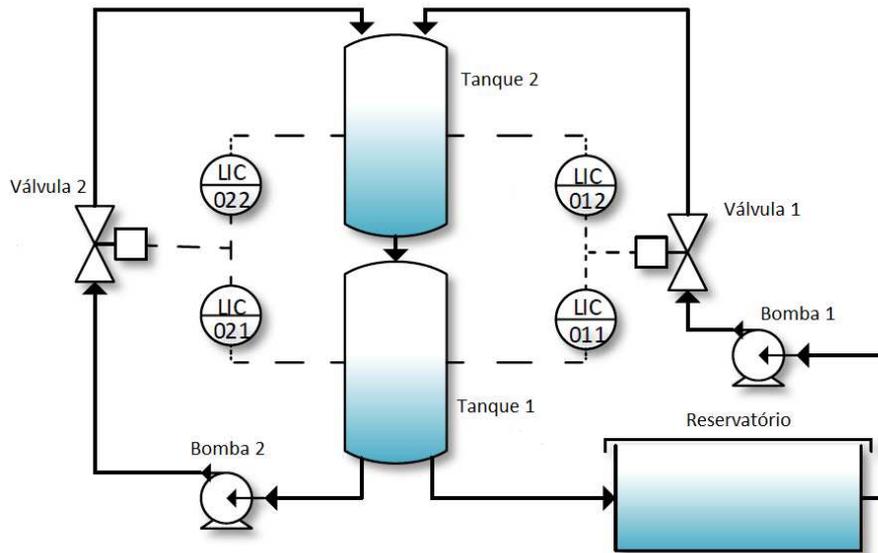


Figura 19: Diagrama esquemático da planta de nível.

O modelo simplificado da planta $G_0(q)$ possui a estrutura seguinte (SCHEID, 2015):

$$G_0(q) = \begin{bmatrix} G_{011}(q) & G_{012}(q) \\ G_{021}(q) & G_{022}(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_{11}}{(q-p_1)(q-p_2)} & \frac{-k_{12}(q-1)}{(q-p_1)(q-p_2)} \\ \frac{k_{21}}{q-p_1} & \frac{k_{22}}{q-p_1} \end{bmatrix} \quad (269)$$

onde é possível observar a consequência da disposição dos tanques em série nas funções de transferência $G_{011}(q)$ e $G_{012}(q)$. Tendo em vista que a água que sai do tanque 2 entra diretamente no tanque 1, esse último incorpora a dinâmica do outro à sua característica natural de primeira ordem através do polo p_1 .

Vale lembrar que o modelo da planta não é empregado no projeto do controlador, tendo sido apresentado apenas a título de curiosidade. E vale ainda salientar que tal modelo está de acordo com a hipótese de que o sistema a ser controlado é linear e invariante no tempo, o que é aproximadamente verdade desde que a faixa de operação dos níveis dos tanques não varie muito. Todavia, uma modelagem mais rigorosa deveria levar em conta algumas não-linearidades cuja existência é conhecida, como o escoamento turbulento do fluido e o atrito seco presente nas válvulas pneumáticas (SCHMITT, 2015).

A seguir, será descrito de forma detalhada como foi realizado o projeto de controladores para a planta através dos métodos VRFT e OCI. O tempo de amostragem utilizado em todos experimentos é $T_s = 1$ s.

6.5.1 Coleta de dados

Para coleta de dados da planta, foi realizado um experimento em malha aberta. Mas antes da condução do ensaio foram aplicadas aberturas de 72,4% e de 28,4% nas válvulas 1 e 2, respectivamente, de modo a estabilizar os níveis dos tanques 1 e 2 em 20 cm e 35 cm, respectivamente. Na sequência, aplicou-se ondas quadradas nas entradas do sistema, conforme mostra a Figura 20. A Figura 21, por sua vez, ilustra as saídas correspondentes, que são afetadas por ruído. Note que a amplitude da entrada é propositalmente

pequena justamente para que a SNR dos dados também o seja, o que costuma ser verdade em várias aplicações reais.

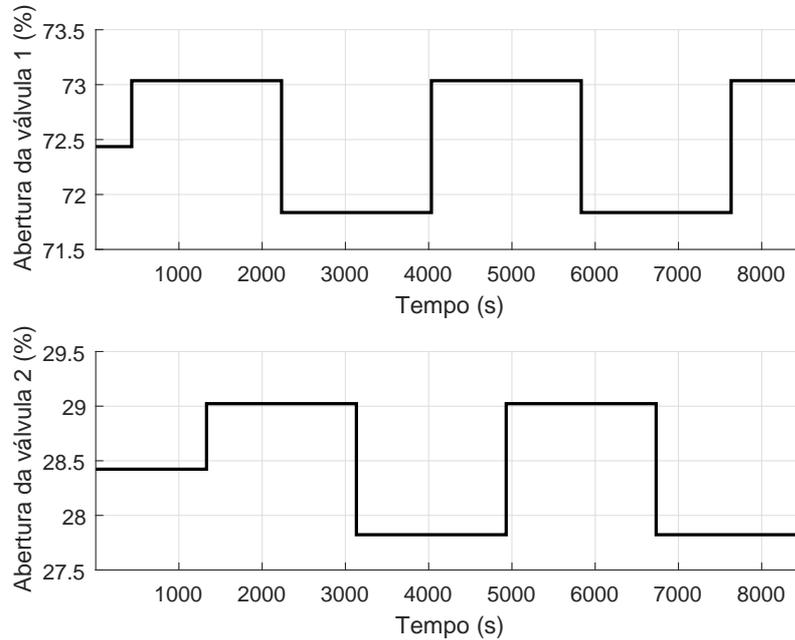


Figura 20: Entradas da planta de nível no experimento em malha aberta.

6.5.2 Projeto dos controladores

Além da batelada de dados, o projeto dos controladores requer a definição de uma estrutura para os mesmos, assim como a escolha de um modelo de referência.

Embora nem sempre possível, é útil e recomendável utilizar na escolha do modelo de referência todo conhecimento disponível sobre o processo, como explicado na Seção 2.4. No caso tratado aqui, sabe-se de (CAMPESTRINI et al., 2016) que os tempos de acomodação dos tanques 1 e 2 em malha aberta são aproximadamente 900 s e 700 s, respectivamente. Define-se então:

$$T_d(q) = \begin{bmatrix} \frac{0,03}{q^{-0,97}} & 0 \\ 0 & \frac{0,02}{q^{-0,98}} \end{bmatrix} \quad (270)$$

onde os tempos de acomodação especificados para os tanques 1 e 2 são, respectivamente, 128 s e 193 s. Além disso, propõe-se o desacoplamento do sistema em malha fechada. A classe de controladores escolhida para o projeto, por sua vez, é a PI.

Obtém-se primeiramente um controlador através do método dos mínimos quadrados (ou VRFT, mais precisamente), dado por

$$C(q, \hat{P}_{LS}) = \begin{bmatrix} \frac{0,1247(q-1,024)}{q-1} & \frac{0,2323(q-0,9677)}{q-1} \\ \frac{-0,7519(q-0,9602)}{q-1} & \frac{0,2369(q-0,9205)}{q-1} \end{bmatrix}. \quad (271)$$

Usando esse controlador como condição inicial e $H(q, \Theta) = I$, o algoritmo do OCI resulta em

$$C(q, \hat{P}_{OCI}) = \begin{bmatrix} \frac{7,2651(q-0,9949)}{q-1} & \frac{5,7126(q-1,001)}{q-1} \\ \frac{-9,0917(q-0,9939)}{q-1} & \frac{-0,2961(q-1,121)}{q-1} \end{bmatrix}. \quad (272)$$

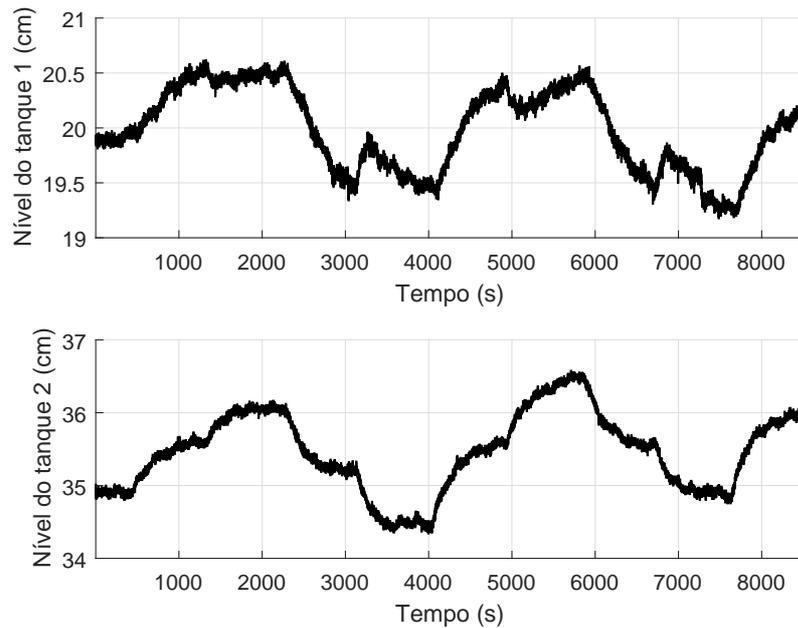


Figura 21: Saídas da planta de nível no experimento em malha aberta.

Um segundo experimento foi realizado em malha aberta com exatamente as mesmas entradas do primeiro, de modo a obter uma variável instrumental para o VRFT. O controlador obtido é:

$$C(q, \hat{P}_{IV}) = \begin{bmatrix} \frac{13,629(q-0,9946)}{q-1} & \frac{9,1391(q-1,003)}{q-1} \\ \frac{-7,1033(q-0,9939)}{q-1} & \frac{-0,1432(q-1,214)}{q-1} \end{bmatrix}. \quad (273)$$

6.5.3 Validação dos controladores

Os controladores (271)-(273) foram aplicados ao sistema em malha fechada, dando origem aos resultados das Figuras 22 e 23. Obteve-se os custos $\hat{J}^{MR}(\hat{P}_{LS}) = 3,384 \text{ cm}^2$, $\hat{J}^{MR}(\hat{P}_{IV}) = 0,26827 \text{ cm}^2$ e $\hat{J}^{MR}(\hat{P}_{OCI}) = 0,04401 \text{ cm}^2$. O valor de $\hat{J}^{MR}(\hat{P}_{OCI})$ é o menor de todos, o que está de acordo com o fato de que o método da variável instrumental é menos eficiente do que o do erro de predição (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989).

Note na Figura 22 que a resposta do sistema associada a (272) é quase igual ao modelo de referência (MR), indicando que a Hipótese 2.1 não é muito violada. Os níveis dos tanques estão quase desacoplados. Além disso, não há sobrepasso e, desconsiderando o ruído, o erro de seguimento é nulo em regime permanente para referências constantes. Em contrapartida, o desempenho obtido com (273) é claramente pior, apresentando problemas de seguimento e desacoplamento. O controlador (271), por sua vez, não é adequado para uso.

Observe por fim que não houve saturação na abertura de nenhuma das válvulas, de forma que a análise dos resultados não foi “comprometida” por esse efeito não-linear. Ademais, as referências utilizadas no ensaio correspondem aproximadamente à mesma faixa de valores dos níveis no experimento em malha aberta, diminuindo assim a influência de possíveis não-linearidades da planta relacionadas à quantia de água nos tanques.

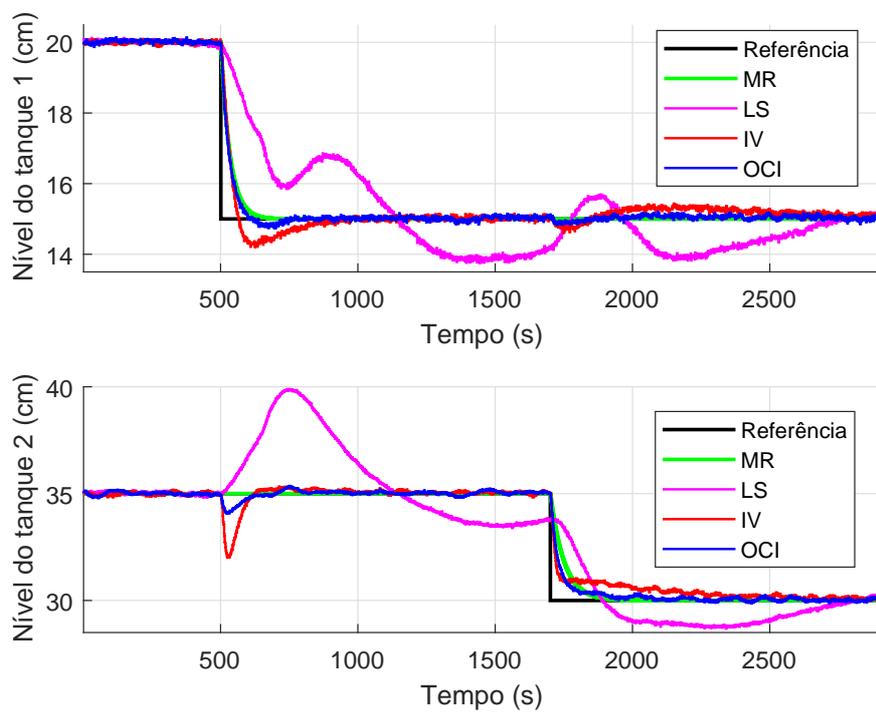


Figura 22: Saídas da planta de nível no experimento em malha fechada.

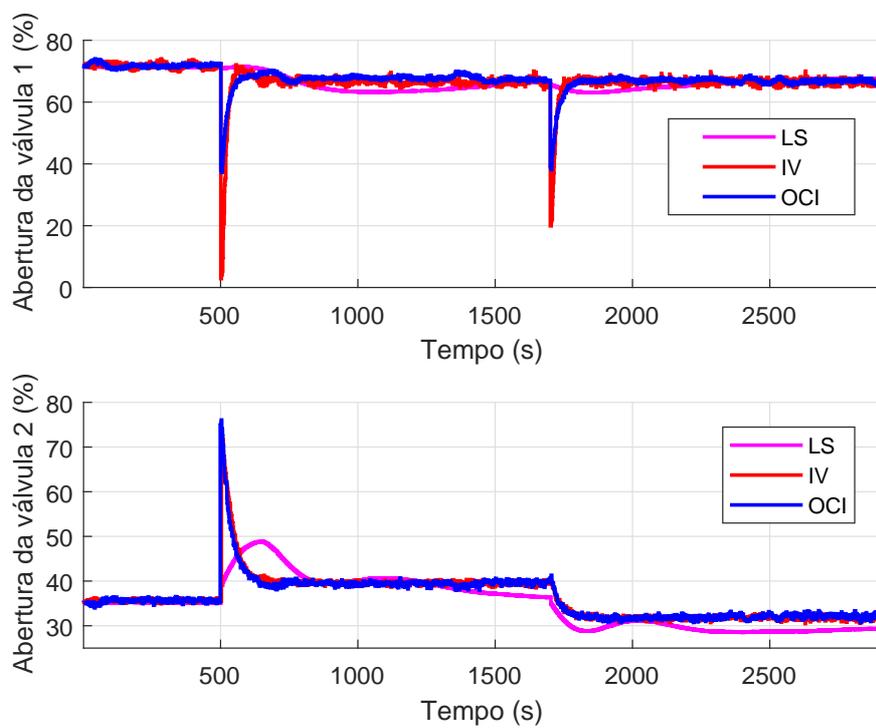


Figura 23: Entradas da planta de nível no experimento em malha fechada.

7 CONCLUSÕES

Nesse trabalho, o método OCI, introduzido para sistemas SISO em (CAMPESTRINI et al., 2012, 2017), foi estendido para sistemas multivariáveis. O Capítulo 6 apresentou uma série de simulações e um resultado experimental que validam a teoria apresentada nos Capítulos 4 e 5. De uma forma geral, tendo em vista os resultados das Seções 6.2 e 6.5, aconselha-se (fortemente) o uso do método OCI em situações em que o ruído do processo é significativo. O método não só é eficiente frente a ruído como é de fácil aplicação: após a escolha do modelo de referência e da estrutura do controlador, esse último é projetado com base em uma única batelada de dados do sistema, ao contrário da maior parte dos outros métodos de controle baseado em dados.

Além da extensão do método para o caso MIMO, explorou-se a identificação de um modelo para o ruído do sistema a fim de melhorar a estimativa do controlador quando a batelada de dados é coletada em malha fechada (veja o Corolário 4.1). Resultados de simulação na Seção 6.3 validam a teoria apresentada.

Outra vantagem do uso do método OCI é que a estrutura do controlador pode ser personalizada, não precisando, por exemplo, ser linear nos parâmetros. Estruturas mais flexíveis ajudam a diminuir a diferença entre o modelo de referência e a resposta obtida com o controlador projetado, como mostrado na Seção 6.1.

Outra contribuição desse trabalho consistiu no desenvolvimento da formulação flexível do método OCI, em que o modelo de referência também é parametrizado. Isso é particularmente útil para lidar com sistemas de fase não-mínima. Ao contrário da versão flexível do método VRFT (SILVA; CAMPESTRINI; BAZANELLA, 2018), em que o modelo de referência deve ser diagonal (e com todos elementos da diagonal iguais), no caso do OCI $T_d(q, \eta)$ pode assumir formas mais genéricas. Os exemplos da Seção 6.4 exploram dois casos distintos: estruturas diagonal e bloco-triangular.

Uma das sugestões de trabalhos futuros corresponde a estudar estratégias de como garantir (ou aumentar as chances) que o algoritmo de otimização descrito na Seção 4.3 resulte de fato no mínimo global da função objetivo $V_N(\Theta)$, e não apenas em um mínimo local. Exemplos de trabalhos sobre esse tópico são encontrados em (BAZANELLA et al., 2008; ECKHARD et al., 2017), podendo servir de inspiração para o caso do OCI.

Outro trabalho futuro diz respeito à análise de identificabilidade da estrutura de modelo usada pelo OCI, em especial quando o modelo de referência também é parametrizado. Alguns exemplos (muito) específicos foram dados na Seção 5.2.2.

Ademais, seria útil adaptar a metodologia apresentada na Seção 5.3 para que a estimativa do controlador com o uso do filtro passa-tudo na função objetivo seja consistente não somente para dados coletados em malha aberta, mas também para dados de malha fechada. Contudo, isso não significa que o método, tal como foi apresentado aqui, não possa ser usado nesse caso. Significa apenas que a estimativa do controlador não pode ser

melhorada arbitrariamente com o aumento da batelada de dados do processo.

REFERÊNCIAS

- ANDERSON, B. D. O.; MOORE, J. B. **Optimal Filtering**. New Jersey: Prentice-Hall Englewood Cliffs, N.J, 1979.
- ASTRÖM, K. J.; HÄGGLUND, T. **PID Controllers: theory, design and tuning**. 2.ed. North Carolina, USA: Instrument Society of America, 1995.
- ÅSTRÖM, K.; WITTENMARK, B. **Adaptive Control**. 2nd.ed. Boston: Addison-Wesley, 1995.
- BAZANELLA, A. S.; CAMPESTRINI, L.; ECKHARD, D. **Data-driven Controller Design: the H_2 approach**. Netherlands: Springer, 2012.
- BAZANELLA, A. S. et al. Iterative minimization of H_2 control performance criteria. **Automatica**, Tarrytown, v.44, n.10, p.2549 – 2559, 2008.
- BOEIRA, E. C.; ECKHARD, D. Multivariable Virtual Reference Feedback Tuning with bayesian regularization. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA 22, 2018, João Pessoa. **Anais...** SBA, 2018.
- CAMPESTRINI, L. et al. Virtual Reference Feedback Tuning for non-minimum phase plants. **Automatica**, Tarrytown, v.47, n.8, p.1778–1784, 2011.
- CAMPESTRINI, L. et al. Model Reference Control Design by Prediction Error Identification. In: IFAC SYMPOSIUM ON SYSTEM IDENTIFICATION, 16., 2012, Brussels. **Anais...** IFAC, 2012. p.1478–1483.
- CAMPESTRINI, L. et al. Identifiability Analysis and Prediction Error Identification of Anaerobic Batch Bioreactors. **Journal of Control, Automation and Electrical Systems**, Berlin, v.25, n.4, p.438–447, 2014.
- CAMPESTRINI, L. et al. Unbiased MIMO VRFT with application to process control. **Journal of Process Control**, Tarrytown, v.39, p.35–49, 2016.
- CAMPESTRINI, L. et al. Data-driven model reference control design by prediction error identification. **Journal of the Franklin Institute**, Tarrytown, v.354, n.6, p.2628–2647, Apr. 2017.
- CAMPESTRINI, L.; GEVERS, M.; BAZANELLA, A. S. Virtual Reference Feedback Tuning for Non Minimum Phase Plants. In: EUROPEAN CONTROL CONFERENCE 10, 2009, Budapest. **Anais...** EUCA, 2009. p.1955–1960.

- CAMPI, M. C.; LECCHINI, A.; SAVARESI, S. An application of the virtual reference feedback tuning method to a benchmark problem. **European Journal of Control**, London, UK, v.9, p.66–76, 2003.
- CAMPI, M.; LECCHINI, A.; SAVARESI, S. Virtual reference feedback tuning: a direct method for the design of feedback controllers. **Automatica**, Tarrytown, v.38, p.1337–1346, 2002.
- ECKHARD, D. et al. Cost function shaping of the output error criterion. **Automatica**, Tarrytown, v.76, p.53 – 60, 2017.
- FILHO, R. S. et al. Application of Virtual Reference Feedback Tuning to a non-minimum phase pilot plant. In: IEEE CONFERENCE ON CONTROL APPLICATIONS (CCA) 20, 2016, Buenos Aires. **Anais... IEEE**, 2016. p.1318–1323.
- FLETCHER, R. **Practical Methods of Optimization**. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 1987.
- FORMENTIN, S.; SAVARESI, S.; DEL RE, L. Non-iterative direct data-driven controller tuning for multivariable systems: theory and application. **Control Theory Applications, IET**, London, v.6, n.9, p.1250–1257, June 2012.
- FORSSELL, U.; LJUNG, L. Identification of Unstable Systems Using Output Error and Box-Jenkins Model Structures. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.45, n.1, p.137–141, Jan. 2000.
- GEVERS, M. Identification for Control: from the early achievements to the revival of experiment design. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL AND EUROPEAN CONTROL CONFERENCE 2005. CDC-ECC 05., 44., 2005, Seville, Spain. **Proceedings...** New York: IEEE, 2005. p.12–12.
- HAVRE, K.; SKOGESTAD, S. Effect of RHP zeros and poles on performance in multivariable systems. In: IEEE CONFERENCE PUBLICATIONS, 1996, London, England. **Anais... IEEE**, 1996. v.2, p.930–935.
- HJALMARSSON, H. Control of nonlinear systems using iterative feedback tuning. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE. ACC (IEEE CAT. NO.98CH36207) 15, 1998, Philadelphia. **Anais... IEEE**, 1998. v.4, p.2083–2087 vol.4.
- HJALMARSSON, H. Efficient tuning of linear multivariable controllers using iterative feedback tuning. **International Journal of Adaptive Control and Signal Processing**, New Jersey, v.13, n.7, p.553–572, 1999.
- HJALMARSSON, H. Iterative Feedback Tuning - an Overview. **International Journal of Adaptive Control and Signal Processing**, New Jersey, v.16, n.5, p.373–395, 2002.
- HJALMARSSON, H.; BIRKELAND, T. Iterative feedback tuning of linear time-invariant MIMO systems. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (CAT. NO.98CH36171), 1998, Tampa, USA. **Anais... IEEE**, 1998. v.4, p.3893–3898 vol.4.

HJALMARSSON, H.; GUNNARSSON, S.; GEVERS, M. A convergent iterative restricted complexity control design scheme. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 33., 1994, Lake Buena Vista - USA. **Anais...** New York: IEEE, 1994.

HJALMARSSON, H.; GUNNARSSON, S.; GEVERS, M. Model-free tuning of a robust regulator for a flexible transmission system. **European Journal of Control**, London, v.1, n.2, p.148–156, 1995.

HUFF, D. D.; GONÇALVES DA SILVA, G. R.; CAMPESTRINI, L. Data-Driven control design by prediction error identification for a refrigeration system based on vapor compression. In: IFAC CONFERENCE ON ADVANCES IN PROPORTIONAL-INTEGRAL-DERIVATIVE CONTROL, 3., 2018, Gent. **Anais...** IFAC, 2018. v.51, n.4, p.704–709.

IOANNOU, P. A.; SUN, J. **Robust adaptive control**. North Chelmsford, USA: Courier Corporation, 2012.

JANSSON, H.; HJALMARSSON, H. Gradient approximations in iterative feedback tuning for multivariable processes. **International Journal of Adaptive Control and Signal Processing**, New Jersey, v.18, n.8, p.665–681, 2004.

KARIMI, A.; MIŠKOVIĆ, L.; BONVIN, D. Iterative correlation-based controller tuning: application to a magnetic suspension system. **Control Engineering Practice**, Tarrytown, v.11, p.1069–1078, 2003.

KARIMI, A.; MIŠKOVIĆ, L.; BONVIN, D. Iterative Correlation-Based Controller Tuning. **International Journal of Adaptive Control and Signal Processing**, New Jersey, v.18, p.645–664, 2004.

KARIMI, A.; VAN HEUSDEN, K.; BONVIN, D. Noniterative Data-driven Controller Tuning Using the Correlation Approach. In: EUROPEAN CONTROL CONFERENCE 8, 2007, Kos, Greece. **Anais...** EUCA, 2007. p.5189–5195.

LECCHINI, A.; GEVERS, M. On Iterative Feedback Tuning for non-minimum phase plants. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 41., 2002, Las Vegas. **Anais...** New York: IEEE, 2002. p.4658–4663.

LJUNG, L. **System identification toolbox**: for use with matlab: user's guide. Natick, USA: Math Works, 1991.

LJUNG, L. **System Identification - Theory for the User**. 2.ed. New Jersey: Prentice-Hall, 1999.

LUENBERGER, D. G.; YE, Y. **Linear and Nonlinear Programming**. Berlin: Springer, 2015.

MACFARLANE, A. G. J.; KARCANIAS, N. Poles and zeros of linear multivariable systems: a survey of the algebraic, geometric and complex-variable theory. **International Journal of Control**, London, v.24, n.1, p.33–74, 1976.

MIŠKOVIĆ, L. et al. Correlation-Based Tuning of Linear Multivariable Decoupling Controllers. In: DECISION AND CONTROL, 2005 AND 2005 EUROPEAN CONTROL CONFERENCE. CDC-ECC '05. 44TH IEEE CONFERENCE ON, 2005, Seville. **Anais...** New York: IEEE, 2005. p.7144–7149.

NAKAMOTO, M. An application of the virtual reference feedback tuning for an MIMO process. In: SICE ANNUAL CONFERENCE, 2005, Sapporo, Japan. **Proceedings...** New York; USA: IEEE, 2005. v.3, p.2208 – 2213.

OPPENHEIM, A. V.; WILLISKY, A. S.; NAWAB, S. H. **Signals & Systems**. 2.ed. New Jersey: Prentice-Hall, 1996.

RALLO, G. et al. Virtual reference feedback tuning with Bayesian regularization. In: EUROPEAN CONTROL CONFERENCE (ECC) 17, 2016, Ålborg. **Anais...** EUCA, 2016. p.507–512.

SCHEID, R. **Projeto e análise de controle baseado em dados voltado a sistemas de fase não mínima**. 2015. Trabalho de Conclusão de Curso (Engenharia de Controle e Automação) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

SCHMITT, R. **Modelagem da dinâmica interna de uma válvula pneumática de controle de processo**. 2015. Trabalho de Conclusão de Curso (Engenharia de Controle e Automação) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

SILVA, G. R. G.; BAZANELLA, A. S.; CAMPESTRINI, L. On the Choice of an Appropriate Reference Model for Control of Multivariable Plants. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, New York, p.1–13, 2018.

SILVA, G. R. G.; CAMPESTRINI, L.; BAZANELLA, A. S. Automating the choice of the Reference Model for data-based control methods applied to PID controllers. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA 20, 2014, Belo Horizonte. **Anais...** SBA, 2014. p.1088–1095.

SILVA, G. R. G.; CAMPESTRINI, L.; BAZANELLA, A. S. Multivariable VRFT: an approach for systems with non-minimum phase transmission zeros. In: IEEE CONFERENCE ON CONTROL APPLICATIONS 20, 2016, Buenos Aires. **Anais...** IEEE, 2016.

SILVA, G. R. G.; CAMPESTRINI, L.; BAZANELLA, A. S. Multivariable Virtual Reference Feedback Tuning for Non-Minimum Phase Plants. **IEEE Control Systems Letters**, New York, v.2, n.1, p.121–126, Jan 2018.

SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. **Multivariable Feedback Control: analysis and design**. New Jersey: John Wiley & Sons, 2005.

SÖDERSTRÖM, T.; STOICA, P. **System Identification**. New Jersey: Prentice-Hall, 1989.

TESCH, D. A.; ECKHARD, D.; GUARIENTI, W. C. Pitch and Roll control of a Quadcopter using Cascade Iterative Feedback Tuning. **IFAC-PapersOnLine**, Porto Alegre, v.49, n.30, p.30 – 35, 2016. 4th IFAC Symposium on Telematics Applications TA 2016.

YUBAI, K.; USAMI, H.; HIRAI, J. Correlation-based direct tuning of MIMO controllers by least-squares and its application to tension-and-speed control apparatus. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON CONTROL, AUTOMATION AND SYSTEMS - SICE 10, 2009, Fukuoka. **Anais...** New York: IEEE, 2009. p.931–936.