UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Miguel Melendo Beck

CAMPO ADITIVO NO CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS:
um estudo a partir da Teoria dos Campos Conceituais

PORTO ALEGRE
2019

Miguel Melendo Beck

CAMPO ADITIVO NO CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS:
um estudo a partir da Teoria dos Campos Conceituais

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino da Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Luisa Rodriguez Doering

Porto Alegre
2019

CIP - Catalogação na Publicação

Beck, Miguel Melendo
CAMPO ADITIVO NO CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS: um estudo a partir da Teoria dos Campos Conceituais / Miguel Melendo Beck. -- 2019.
197 f.
Orientadora: Luisa Rodriguez Doering.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática e Estatística, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Porto Alegre, BR-RS, 2019.

1. Ensino de Matemática. 2. Números Inteiros. 3. Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud. 4. Teoria de Representação Semiótica. 5. Sequência Didática. I. Doering, Luisa Rodriguez, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Miguel Melendo Beck

CAMPO ADITIVO NO CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS: um estudo a partir da Teoria dos Campos Conceituais

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino da Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Aprovada em 08 de janeiro de 2019.

Prof.ª Dr.ª Luisa Rodriguez Doering – Orientadora

Prof.ª Dr.ª Cydara Cavedon Ripoll – Universidade Federal do Rio Grande do Sul

---

Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso – Universidade Federal do Rio Grande do Sul

---

Prof. Dr. Samuel Edmundo López Bello – Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Dedico este trabalho à minha filha Beatriz que, por muitas vezes, veio me pedir colo enquanto escrevia esta dissertação.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, quero agradecer aos meus pais e à minha família, que são meu suporte e minha primeira escola, pois me ensinaram o valor do conhecimento. À minha esposa, Juliane, a grande companheira deste trabalho, com fundamental apoio na realização do meu sonho, o de continuar meus estudos na pós-graduação.

Este trabalho marca uma trajetória que se iniciou há 15 anos, quando ingressei, muito jovem, ao curso de licenciatura em Matemática. Logo, sou profundamente grato à Universidade Federal do Rio Grande do Sul a educação gratuita e de nível excepcional oferecida, da qual tive a honra de fazer parte, tanto de forma discente como docente.

Ao Instituto de Matemática e Estatística da UFRGS e a todo o corpo de Professores que tive o privilégio de conhecer durante a minha graduação e mestrado. Tenho a certeza de que cada disciplina, curso ou atividade científica de que participei impactou profundamente no professor que sou, e a maior lição que aprendi nesta casa é que um professor nunca está completo, mas sempre em desenvolvimento.

À Prof.ª Dr.ª Luisa Rodriguez Doering, minha orientadora, a grande experiência que me proporcionou durante essa jornada. O incentivo à produção científica, a busca pelo aprimoramento e, principalmente, o amparo nesse tortuoso processo de repensar a prática em sala de aula. Também quero agradecer à Prof.ª Dr.ª Cydara Ripoll o grande auxílio no início do planejamento didático e no desenvolvimento da construção formal dos Números Inteiros.

Aos meus colegas, tanto das turmas do mestrado acadêmico como do mestrado profissional, todas as discussões, trocas de ideias e conversas que, com certeza absoluta, refletiram nesse trabalho.

À Prof.ª Angelita Conceição Rosa, diretora da E.M.E.F José Mariano Beck, a gentileza de abrir espaço para o meu estágio supervisionado. Também à Prof.ª Karina Graça que cedeu uma turma para a pesquisa. Por último, aos alunos da turma C13 pela grande recepção à minha proposta.

RESUMO

O presente trabalho tem como tema central o ensino de Números Inteiros, no intuito de agregar, no âmbito do Ensino Fundamental, algumas Situações, Invariantes Operatórias e Representações Simbólicas inseridas no campo aditivo. Como objetivo principal desta pesquisa, a partir da construção matemática do conjunto dos Números Inteiros, da análise de livros didáticos, das produções bibliográficas referentes ao assunto e das teorias de aprendizagem escolhidas, tem-se uma reflexão sobre o ensino das propriedades e operações (adição e subtração) neste conjunto.

Como resultado da investigação foi produzido uma sequência de aulas sobre números inteiros, incluindo uma breve revisão dos números naturais, na qual foi executada em uma turma regular de uma escola municipal de Porto Alegre (RS). A partir das contribuições da Teoria dos Campos Conceituais, de Gérard Vergnaud, e da Teoria das Representações Semióticas de Raymond Duval, agregaram-se as Situações, as Invariantes e as Representações Simbólicas dentro do campo aditivo.

Como resultado dessa prática em sala de aula, foi elaborado um produto técnico disponível no anexo A desta dissertação. Conclui-se, assim, que um planejamento multifacetado e agregador de diferentes representações auxilia de maneira significativa o desenvolvimento do ensino de Números Inteiros.

Palavras chave: Educação Matemática; Números Inteiros; Vergnaud; Teoria de Representação Semiótica; Sequência Didática

ABSTRACT

The present dissertation has as a central theme the teaching of Integer Numbers, in order to aggregate, within the scope of Primary School, the various Situations, Operative Invariants and Symbolic Representations inserted in the additive field. As a main objective of this research, from a mathematical construction of the set of Integer Numbers, the analysis of didactic books, bibliographic productions referring to the subject and the chosen learning theories, there is a reflection about the teaching of properties and operations (addition and subtraction) in this set.

After the bibliographic review, a research practice was implemented, in which a sequence of classes was planned and executed in a regular class of a municipal school in Porto Alegre (RS). From the contributions of Gérard Vergnaud's Theory of Conceptual Fields and the Raymond Duval’s Semiotic Representations Theory, the Situations, the Invariants, and Symbolic Representations within the additive field were assemble.

As a result of this classroom research practice, a technical product was prepared, and it is available in Annex A of this dissertation. It is concluded, therefore, that a multifaceted and aggregating planning of different representations helps in a significant way the development of the teaching of Integer Numbers.

Keywords: Mathematics Education; Integers Numbers; Vergnaud; Semiotic Representation Theory; Didactic Sequence

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

Introdução

A motivação para o estudo aprofundado no ensino de Números Inteiros no nível básico de ensino tem conexão com a minha trajetória pessoal. Desde o término da graduação, estive em regência de turmas de 7° ano do Ensino Fundamental, muitas vezes lecionando em paralelo no Ensino Médio, em Cursos Técnicos e em Ensino Superior. Em todos os níveis, percebi que a experiência discente era marcada por um entrave no estudo do conjunto dos Inteiros, muitas vezes desgastando a relação do sujeito com a Matemática.

Durante o curso de Mestrado, senti-me desafiado a observar os materiais didáticos após a palestra da Professora Cydara Ripoll, sobre o desenvolvimento do Pensamento Matemático e pela chamada de trabalhos, pela Professora Cydara e minha orientadora, para o ICMT 2 (*International Conference on Math Textbooks Research and Development*). Foi nesse momento que comecei a ter um olhar mais cuidadoso em relação ao estudo didático, auxiliado pela disciplina de MEM 28 - Análise e Produção de Material Didático - em conjunto com a Profa. Andréia Dalcin.

Na minha experiência docente até o presente momento, considerei o livro didático como mera ferramenta acessória, quase dispensável. Conjeturando hipóteses a partir das próprias vivências, essa atitude pode ter um possível motivo: os livros didáticos, na maioria das vezes, focam os desenvolvimentos do assunto em fórmulas, algoritmos operacionais e listagem de propriedades, em detrimento da construção (formal ou informal) desses resultados, o que pode acarretar uma precária compreensão sobre o conjunto dos Inteiros.

Acredita-se que o ensino do conjunto dos Números Inteiros é um momento especialmente relevante no ensino da Matemática. O ensino de números naturais é trabalhado sob diferentes olhares ao longo dos primeiros anos da formação escolar, estabelecendo os resultados das propriedades e operações até o final dos anos iniciais. Já no sétimo ano, no qual é introduzido formalmente o estudo dos Números Inteiros, mostra-se como um ponto crítico no desenvolvimento do pensamento matemático do aluno. Por mais que sejam usados exemplos e abordagens contextualizadas, algumas situações que necessitam operar com números negativos recaem num campo puramente matemático, em que as tentativas encontradas nos livros de exemplos do cotidiano são, de certo modo, forçadas. Desse modo, tem-se como exemplo a multiplicação ou a divisão entre dois números negativos.

Ainda inseridos no conjunto dos Números Inteiros, percebem-se alguns pontos delicados no processo de ensino: a ambiguidade que agora o sinal “-” passa a ter neste novo universo numérico (como operação e como sinal numérico); outro ponto seria o produto entre um número positivo e um negativo; e o fato de um produto entre dois números negativos gerar um positivo. Após passar por essas barreiras, cria-se outra: a percepção do estudante em diferenciar os momentos de utilizar um modo de operar ou outro (por exemplo, após ensinar a multiplicação, é comum os alunos escreverem erroneamente $(-7) + (-2) = (+9)$, misturando as regras de sinal da adição e da multiplicação. Isso sugere que, mesmo que os alunos tenham dominado a adição entre inteiros num momento anterior, aquilo não tem significado para eles, levando a sua compreensão em relação às operações ainda é de caráter muito frágil.

Frente a todas as problemáticas levantadas até o momento, acredita-se que a abordagem do conjunto dos Números Inteiros pode ser feita de múltiplas formas a partir das concepções teóricas do professor, mas é preciso um ponto de convergência: que ela deva ser abordada de forma que sua estrutura flua ao longo da construção das afirmações, minimizando os momentos nos quais o aluno somente precisa aceitar, sem uma justificativa plausível, as afirmações feitas pelo autor sobre as propriedades dos Inteiros.

A partir desse cenário que se desenhou durante a minha trajetória profissional, tomo como questão primária de pesquisa a seguinte: Como agregar, no âmbito do Ensino Fundamental, diversas invariantes operatórias e representações simbólicas frente algumas situações do campo aditivo, inseridas no conjunto dos Números Inteiros?

Para buscar o aprofundamento dessas questões, estabelecem-se os seguintes objetivos para o presente trabalho:

- Refletir, a partir da construção matemática do conjunto dos Números Inteiros, da análise de livros didáticos e do campo aditivo proposto por Vergnaud, o ensino das propriedades e operações básicas de adição e multiplicação, no âmbito do conjunto dos Números Inteiros, no nível de Ensino Fundamental.
- Executar uma sequência de atividades propostas sobre Números Inteiros, elaborada como produto técnico voltado para a sala de aula de 7º ano do Ensino Fundamental.
- Refletir sobre a prática realizada na sala de aula, com ênfase no entendimento sobre situações, invariantes e representações simbólicas presentes no campo aditivo, referentes ao conjunto dos Números Inteiros.

Como metodologia de pesquisa, realizar-se-á uma pesquisa de cunho qualitativo. Segundo Bogdan e Biklen (1994), esse tipo de pesquisa tem uma característica primordial para a área educacional: o foco e o interesse direcionados ao processo.

No capítulo *Pressupostos Teóricos*, serão estabelecidos pressupostos teóricos escolhidos para o aprofundamento das questões de pesquisa. Para a análise dos livros didáticos, utilizar-se-á a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Vergnaud, em especial suas contribuições em relação ao Campo Aditivo, além de autores que realizaram suas análises a partir dessa teoria. Dentro da TCC, na parte que tange às representações simbólicas, opta-se por adicionar a Teoria de Representação Semiótica (TRS) de Raymound Duval.

No capítulo *Um estudo sobre o Ensino de Números Inteiros: construção matemática, produções na área de ensino e revisão dos documentos oficiais*, é feita uma reflexão sobre o conjunto dos Números Inteiros em três frentes: construção matemática, revisão das produções referentes ao ensino de Números Inteiros e revisão do que consta nos documentos oficiais sobre o ensino de Números Inteiros. Na construção matemática, será abordada uma das possibilidades de construção do conjunto através das classes de equivalência. Após, será feita uma revisão bibliográfica sobre as produções já consolidadas, referentes ao ensino de Números Inteiros. Da mesma forma, serão revisadas teses, dissertações e trabalhos de conclusão de graduação. O objetivo é realizar um olhar sobre as produções acadêmicas em relação ao ensino de Números Inteiros, evidenciando as diferenças dos trabalhos anteriores para esta dissertação, ressaltando sua originalidade. Também será feita uma breve revisão do que consta, no âmbito dos documentos oficiais da Educação Brasileira, referente ao tema.

No capítulo *Análise Crítica dos Livros didáticos*, realizar-se-á uma análise crítica de um livro didático aprovado pelo Plano Nacional do Livro Didático atual (2017-2019), de competência do Ministério da Educação do Brasil. Essa análise será feita em quatro frentes: análise do conteúdo matemático, abordagem metodológica e, por fim, contemplação das situações, invariantes e representações simbólicas no campo aditivo.

No capítulo *Metodologia de Pesquisa*, são definidos os pressupostos da pesquisa qualitativa, o planejamento geral da nova proposta didática, os sujeitos e as condições envolvidas na pesquisa.

No capítulo *Proposta Didática, Implementação e Análise dos Resultados*, são descritos o planejamento detalhado da proposta didática realizada, o relato da implementação e a análise da prática realizada em uma turma de 7° ano do Ensino Fundamental.

No capítulo *Conclusões e Apontamentos*, é feito um fechamento do trabalho, apontando as reflexões em relação à prática de ensino e às questões de pesquisa abordadas. Como as questões não foram exauridas por completo, apontar-se-ão as possibilidades de continuidade da pesquisa e de possíveis caminhos para o ensino de Inteiros.

Como anexo A, é disponibilizado, como produto técnico, em sua versão final, um capítulo didático sobre os Números Inteiros, após as reflexões obtidas durante a prática de ensino descrita no capítulo *Conclusões e Apontamentos*. Esse produto técnico faz parte de um dos pré-requisitos para a conclusão do programa de Mestrado Profissional em Ensino da Matemática.

Como anexo B, é apresentado o modelo do Termo de Consentimento Informado, assinado pelos responsáveis dos sujeitos de pesquisa, todos menores de idade e não emancipados.

Como anexo C, é demonstrado o modelo do Termo de Assentimento, assinado pelos estudantes participantes da prática de pesquisa em sala de aula.

Pressupostos Teóricos

Para dar o devido suporte teórico a todas as etapas pretendidas, foram estabelecidos os pressupostos em relação às escolhas das teorias de aprendizagem, sendo a Teoria dos Campos Conceituais, de Gérard Vergnaud, e a Teoria de Representação Semiótica, de Raymond Duval, as escolhidas.

Teoria dos Campos conceituais

Psicólogo em sua formação inicial, Gérard Vergnaud realizou sua tese de doutoramento "La réponse instrumentale comme solution du problème: contribution[1]" orientado por Jean Piaget, aproximando-se das questões inerentes ao Ensino da Matemática. A partir desse trabalho, buscou produzir uma teoria que auxiliasse o entendimento de como as crianças constroem os conhecimentos matemáticos. Com base no resultado de seus esforços, apresentou a Teoria dos Campos Conceituais.

Essa teoria tem por finalidade "fornecer um quadro que permita compreender as filiações e as rupturas entre conhecimentos, nas crianças e nos adolescentes, entendendo por 'conhecimentos' tanto o saber fazer como os saberes expressos." (Vergnaud, 1996, p. 155).

O autor afirma que a necessidade de estudar os campos conceituais parte da premissa de que existe uma grande troca entre o conceito e a situação em que esses estão envolvidos, levando em consideração que um conceito remete a diversas situações, e uma situação leva a múltiplos conceitos. Assim, o desenvolvimento dos conhecimentos de um aluno se faz por meio de um grande conjunto de situações, entre as quais existe uma relação maior, como é o caso da adição/subtração e da multiplicação/divisão. (Vergnaud, 1985).

Nessa teoria, há peças fundamentais para a sua compreensão e análise: o conceito - que é articulado entre situação, invariante operatório e representação simbólica[2] - e o esquema. A partir dessas definições, serão estabelecidos pressupostos para o estudo da estrutura aditiva no conjunto dos Números Inteiros.

---

[1] A resposta instrumental como solução de um problema: contribuições. Universidade de Paris I, Panthéon-Sorbonne, 1968.

[2] Para os objetivos deste trabalho, alinhar-se-ão as ideias de representação simbólica de Duval, escritas na seção posterior.

Uma situação pode ser vista como um problema a ser resolvido ou uma tarefa a ser executada. Para Vergnaud, existem duas classes de situações: aquelas nas quais o indivíduo enfrenta uma situação em que já dispõe das competências necessárias para tratá-la e aquelas em que o indivíduo não possui, naquele momento, as competências necessárias para o enfrentamento parcial ou total da situação, vendo-se obrigado a passar por um processo de desacomodação, de tentativas, de erros e de acertos. (Vergnaud, 1996, p. 156)

Nesse aspecto, a definição de conceito não pode ser tomada de forma simples quando tratada nos estudos de aprendizagem. Entretanto, “é através das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido para a criança.” (Vergnaud, 1996, p. 156). A definição de conceito é relacional, isto é, não é possível enxergá-la isoladamente. É nas situações que se dá sentido ao conceito, ou seja, é o referencial do conceito. A partir disso, são as situações, e não os conceitos, que se constituem como ponto de entrada para um campo conceitual pretendido.

Nos campos conceituais, uma situação não pode ser aplicada no sentido de situação didática, mas no sentido de uma tarefa. Nesse sentido, toda situação pode ser analisada como uma combinação de tarefas para as quais é importante conhecer sua natureza e suas peculiaridades. Por exemplo, quando se trabalha o conceito de Número Inteiro, é possível disponibilizar como situações: expressões numéricas para serem calculadas, problemas contextualizados para encontrar uma resposta; pesquisa de determinado fenômeno que envolva esse conjunto numérico.

Durante o enfrentamento de uma situação, as Invariantes Operatórias são saberes que podem ser reconhecidos e usados pelo sujeito para analisar e dominar as situações. Em um aspecto geral também chamados como conhecimentos em ação (conhecimento em ato), onde podem ser divididos em conceitos em ação (conceito em ato) e teoremas em ação (teorema em ato).

Um conceito em ação é uma definição, mobilizada internamente pelo sujeito, que lhe dá o suporte para a análise de determinada situação. Por exemplo, um número negativo está associado a valores abaixo de zero. Já os teoremas em ação são resultados generalizados e conhecidos, que podem ser mobilizadas para a execução de uma tarefa. Por exemplo, a soma de um número com seu simétrico é igual a zero. Os conceitos em ação são parte integrante dos teoremas em ação, e esses são propriedades que dão aos conceitos seus predicados. Nada impede que, a partir do desenvolvimento e do refinamento dos conceitos-em-ação e dos teoremas-em-ação, sejam alcançados a formalização rigorosa e os teoremas científicos. (Vergnaud, 1996, pp. 163-165)

Dentro das Invariantes Operatórias, cita-se um exemplo para distinguir os conhecimentos em ação dos teoremas em ação, como inserido na situação: “Tenho sete objetos e irei doar três deles. Qual o número de objetos que terei após a doação?” O sujeito irá mobilizar o conceito em ação: *perda e doação estão associadas à subtração dos valores envolvidos;* o teorema em ação mobilizado será: *a diferença entre dois valores está no completamento da adição, ou seja,* $a - b = c$ *e só se* $b + c = a$. Nesse caso, percebemos que o teorema em ação se aproxima da definição rigorosa da operação de subtração. Uma questão interessante a ser trazida é de como a invariante opera e constrói conceitos diante das diferentes representações? Acredita-se que, a partir da análise de um conjunto de representações simbólicas diferentes utilizadas para uma determinada situação, o aluno consiga compreender a invariabilidade (aquilo que não depende estritamente da linguagem) no momento que articular entre uma representação e outra. Assim, uma representação única não permite a mobilização de uma invariante, a não ser que o sujeito já o tenha subjetivado.

O esquema, trazido das contribuições dos trabalhos feitos por Piaget, é tido como a organização da invariante (padrões que surgem em determinada variante) para um conjunto de situações. Para que haja um esquema, devem-se possuir metas e antecipações e também deve ser fornecido ao sujeito um caminho para descobrir a finalidade de sua atividade ou até mesmo a extrapolação desse fim, desdobrando-se em outros esquemas.

Além disso, a partir do esquema, devem-se prever certos resultados e deve haver regras de ação de acordo com a lógica matemática (sequência desencadeadora em único sentido ou do tipo “se/somente se”) que constitui o esquema. Assim, haverá o desenrolar das relações, dos conceitos, das invariantes e das representações da situação que o produz. São regras de sondagem e controle dos resultados de uma ação.

Também estão contidas em um esquema as invariantes operatórias que dirigem o reconhecimento, por parte do sujeito, dos elementos importantes à situação. São eles que constituem a base, implícita ou explícita, que permite obter a informação e dela predizer a meta a ser atingida e quais as regras adequadas; da mesma forma, possibilidades de inferência permitem quantificar, *in loco*, as regras e as antecipações a partir das informações e invariantes operatórios de que dispõe o sujeito, ou seja, toda a atividade implicada nos três outros ingredientes requer cálculos *in loco* em situação. (Moreira, 2002)

Ao final da seção, apresentar-se-á a possibilidade de um esquema para o campo aditivo inserido no conjunto dos Números Inteiros.

Inserido em um esquema, diversas situações podem ser tratadas de maneira automatizada quando as competências inerentes a ela já estão estabelecidas anteriormente por meio de um esquema único. No entanto, no caso em que o sujeito não dispõe do esquema necessário para o tratamento de certa situação, pode-se observar um "desencadeamento sucessivo de diversos esquemas, os quais podem entrar em competição e que, para desembocarem na solução procurada, devem ser acomodados, descombinados e recombinados; esse processo é necessariamente acompanhado por descobertas." (p.156).

Neste ínterim, vale ressaltar que um esquema pode ser eficaz, mas isso não quer dizer que tenha sido efetivo: quando um esquema não corresponde ao tratamento que o sujeito deseja (resolver o problema ou executar a tarefa), este mudará ou alterará o esquema até que alcance a efetividade. Como exemplo, tem-se o próprio objeto de estudo desta dissertação: ao longo da trajetória escolar, os alunos constroem esquemas voltados para o conjunto dos Números Naturais. No momento em que é apresentado um novo tipo de número, mesmo que esse tenha algumas semelhanças com o conjunto conhecido, há uma desestabilização do esquema atual, passando por um processo de revisões, ajustes e descobertas.

A partir da perspectiva apresentada nos parágrafos anteriores, é necessário reestabelecer o conceito de sentido e significado. Para Vergnaud "são as situações que dão sentido aos conceitos matemáticos, mas o sentido não está nas próprias situações. Também não está nas palavras nem nos símbolos matemáticos." (Vergnaud G. , 1996, p. 179). Assim, uma representação simbólica ou até mesmo uma propriedade matemática pode ter um, vários ou nenhum sentido para determinado sujeito, pois o sentido "é uma relação do sujeito com as situações e os significantes." (Idem, ibidem). Assim, percebe-se que as articulações entre representações semióticas, aproximam esta teoria das contribuições de Raymound Duval, como veremos adiante. A relação entre as situações as representações simbólicas podem ser expostas a partir dos esquemas que o sujeito mobiliza frente a uma situação (inédita ou não) para enfrentá-la. Ao enfrentar a situação com sucesso, o sujeito adota o esquema que considerou mais efetivo para tal situação, na qual o conjunto - Situação, Representação e Invariante - constituem o significado do conceito em questão.

A estabilização/desestabilização de esquemas conceituais é uma peça fundamental no processo de aprendizagem do sujeito. Assim como tal, a desestabilização nunca se dará a partir do vazio: todo o sujeito, quando se depara com uma situação inédita, já possui um campo conceitual inicial (C.C.I) que é mobilizado (sendo efetivo ou não). A partir dessas situações (S) e de outras, mobilizando uma ou diversas Invariantes Operacionais (I), abrese a possibilidade de gerar um novo campo conceitual (N.C.C), conforme a representação da imagem a seguir:

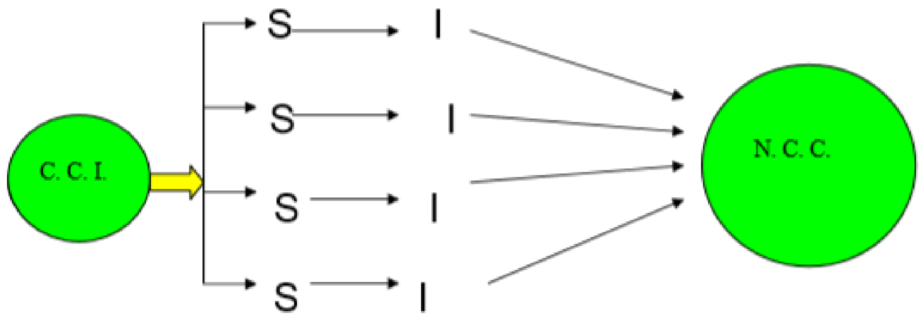


Figura 1- Representação do desenvolvimento de um novo campo conceitual. Fonte: (Bini, 2008, p. 28)

Um breve exemplo seria o esquema da divisão entre quantidade por agrupamento. Nos primeiros anos de formação escolar, ensina-se a distribuição de valores a partir da organização dos objetos em grupos iguais e em determinada quantidade (28 divididos por 14 seria interpretado como dividir 28 objetos em grupos de 14 objetos, resultando em dois grupos. Logo, 28 divididos por 14 é igual a 2).

No meio dos anos iniciais do Ensino Fundamental, após a apropriação de diversos conceitos e invariantes direcionando o ensino da aritmética em âmbito mais formalizado, é apresentado ao sujeito o algoritmo da divisão, que é um esquema muito mais eficaz e efetivo que a distribuição manual proposta anteriormente. Assim, para aqueles alunos que entenderem o significado do método da chave[3] e que esse resolve com igual esforço as pequenas e as grandes distribuições, eles adotarão tal esquema e o automatizarão.

Deste modo, acredita-se que o ensino de Números Inteiros é um momento didático da escola básica em que tal processo fica seriamente exposto, pois no ensino são rompidos diversos conhecimentos em ação, a citar alguns: o registro de representação -7, que estava associado antes do ensino de Números Inteiros à perda de sete unidades, pode representar também um saldo de sete unidades abaixo da referência (saldo de gols ou temperatura) ou possuir a distância de sete unidades em direção contrária ao referencial (como altitude em relação ao nível do mar).

O sinal (+, –), antes associado a uma operação entre números, agora se refere também a posição do número em relação ao zero, negativo para valores à esquerda de zero

[3] Método que consiste em desenhar uma espécie de chave (∟) onde a partir do dividendo e divisor explicitamos o quociente e o resto.

(menores que zero) e positivo à direita de zero (maiores que zero). Além disso, também poderia ser visto como o representante de uma quantidade, ganhando sentido e referência.

No âmbito das operações, é construído desde as séries iniciais o conhecimento em ação *a soma de dois números não nulos é sempre maior que qualquer uma das parcelas envolvidas*, por exemplo, $7 + 3 = 10$ e $10 > 7$ e $10 > 3$, mas entre números inteiros isso deixa de ser sempre uma verdade, como pode ser verificado em $(-2) + (+9) = (+7)$ e $(+7)$ não é maior que $(+9)$. Desse modo, ao introduzir, no âmbito formal, o conjunto dos Números Inteiros, desestabilizar-se-ão diversos esquemas conceituais construídos ao longo de todas as séries iniciais do Ensino Fundamental, o que leva a entender a dificuldade da aceitação forçada de propriedades e de memorização de regras operacionais.

Dentro desses pressupostos, podemos indagar sobre qual o papel do professor nessa teoria de aprendizagem. Acredita-se que é de oportunizar a diversidade, no máximo possível das possibilidades, das situações e representações simbólicas para que os alunos percebam quais as invariantes que podem ser mobilizadas dentro de determinado conceito. Para tanto, é preciso também assumir uma postura provocativa: fazê-los refletir sobre suas respostas, evitando manter somente no raciocínio mecânico, e principalmente trazer atividades que tenham como objetivo articulação entre múltiplas representações, para que fique mais claro (para os alunos) as invariabilidades inerentes à situação.

O Campo Aditivo

Segundo Vergnaud, o campo conceitual das estruturas aditivas é, simultaneamente, um conjunto de situações que implica adições ou subtrações, ou seja, é o conjunto dos conceitos e teoremas que permite analisar essas situações como tarefas matemáticas. Para fins desta seção, serão utilizadas seis relações geradoras de problemas de adição e de subtração:

- A **composição:** essa relação ocorre quando as tarefas matemáticas estão relacionadas com a união de uma parte ou todo de um conjunto ou objeto. Por exemplo: o indivíduo A possui cinco objetos e o indivíduo B possui outros três objetos. Qual o total de objetos dos indivíduos A e B? No caso, pode-se denotar graficamente essa situação

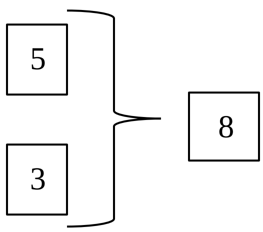


Figura 2- Exemplo de Composição – Fonte: do autor como na figura a seguir:

- A **transformação:** nessa relação, pode-se relacionar o estado inicial e, após uma ação, ao novo estado de quantidade que leva a um estado final. Por exemplo: tenho 98 reais na minha conta corrente e depositei nela 15 reais, qual seria o novo saldo? Nesse caso, pode-se denotar graficamente essa transformação como na figura a seguir:

- A **comparação:** nessa situação, é possível relacionar duas partes, comparando-as, as quais são denominadas de referente e referido. Por exemplo: numa competição em uma pizzaria, Fabrício comeu nove pedaços de pizza, já Eduardo comeu 15 pedaços. Quem venceu e por quantos pedaços a mais foi a vitória?

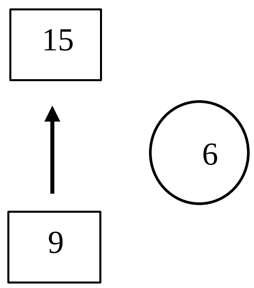


Figura 4- Exemplo de Transformação. Fonte: do autor

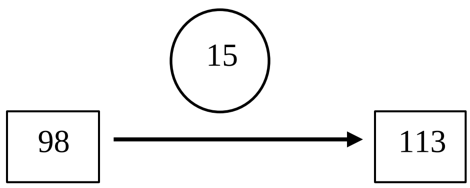


Figura 3 - Exemplo de Comparação. Fonte: do autor

Inseridos ainda nessas situações, vemos que a composição pode ser interpretada como juntar dois conjuntos disjuntos. Já a transformação pode ser vista de forma a realizar uma adição de determinado valor a uma quantidade pré-estabelecida. Por último, a comparação pode ser vista como a subtração de determinado subtraendo para uma diferença específica.

Além dessas três principais, podem-se realizar novas relações a partir da combinação das relações acima, também chamadas de relações mistas: a **composição de duas transformações, a transformação de uma relação de comparação** e a **composição de duas comparações.** Na figura a seguir, apresentam-se as situações inseridas no campo conceitual:

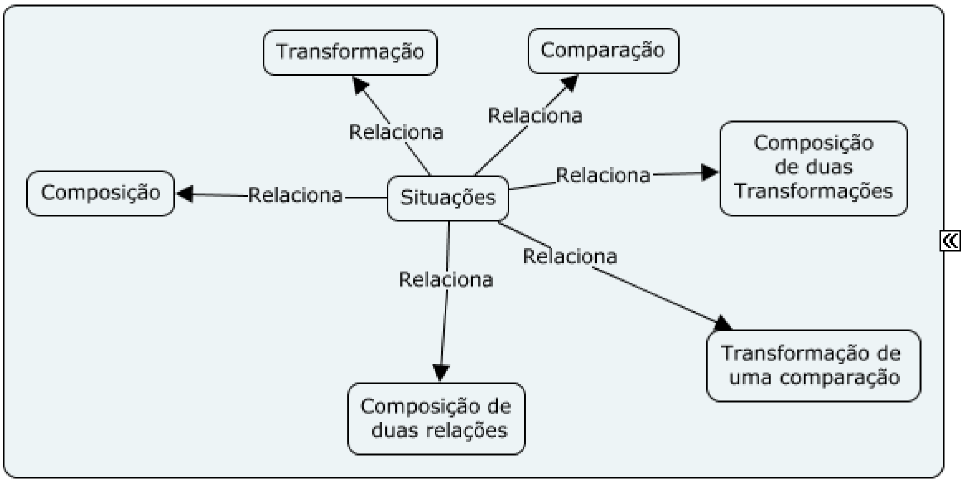


Figura 5- Esquema das situações do campo conceitual aditivo em ℕ - Fonte: do autor

As invariantes operatórias no campo aditivo, inseridas no conjunto dos números naturais (nos restringiremos momentaneamente aos naturais, pois adiante veremos que alguns invariantes serão desestabilizados em ℤ), podem ser divididas em duas frentes: conceitos em ação e teorema em ação. Listamos a seguir alguns deles, sem a intenção de limitar ou de defini-los na sua totalidade, pois as invariantes são aquelas que o sujeito mobiliza, isto é, nem sempre estarão claramente expostas ao observador.

No que diz respeito aos conceitos em ação, cita-se: a definição da operação de adição e suas respectivas partes (parcelas e soma), além do conceito da subtração a partir do complemento de uma parcela para determinada soma. Com relação aos teoremas em ação, definem-se os seguintes: o todo (a soma) é sempre maior ou igual que qualquer parte (parcelas); o sucessor é a adição de uma unidade, a ordem das parcelas não interfere na soma; em uma sequência de parcelas, a ordem de escolha para efetuar a adição não irá alterar o somatório final, que adicionar zero deixa a soma igual ao valor da parcela anterior, e (na semirreta numérica) o deslocamento provocado pela adição é sempre a favor ao sentido de construção dessa. Na figura abaixo, tem-se o esquema geral para os Invariantes Operatórios.

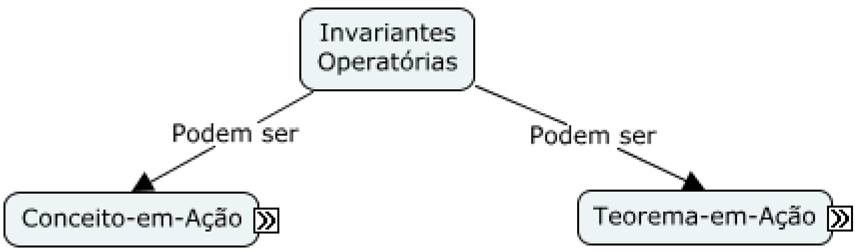


Figura 6- Esquema dos Invariantes Operatórios. Fonte: do autor

No campo aditivo, existem múltiplas representações simbólicas[4]. A Representação Simbólica Aritmética (RSA) é quando o indivíduo recorre, para registro, aos signos/símbolos numéricos entre números e operações, como $24 + 12 = 36$. Entretanto, a expressão numérica anterior refere-se a somente uma possibilidade da representação simbólica, pois entendemos que a conta "armada" seria uma outra representação, que chamaremos de Registro Simbólica Algorítmica (RAA).

$$\begin{array}{r} 24 \\ +\,12 \\ \hline 36 \end{array}$$

Figura 7- Exemplo de Representação Simbólica Algorítmica (RAA)

Essa representação está muito presente nos livros didáticos e nas aulas de ensino básico quando há com questões do tipo "Arme e Efetue". Os autores de livros didáticos priorizam esse tipo de representação como exercício introdutório de um algoritmo exposto, com o objetivo de verificar se o aluno compreendeu como os signos se relacionam.

Ainda inseridos na representação simbólica, há a Representação em Linguagem Materna. Ela é subdividida em subcategorias: a Representação em Linguagem Materna Extensiva (RLME) e a Representação em Linguagem Materna Problemática (RLMP). A primeira é a mais simples e direta, na qual se busca a simples equivalência entre a linguagem aritmética e a linguagem materna, por exemplo, $24 + 12 = 36$ como "a adição entre 24 e 12 tem como soma 36" ou "o resultado da adição entre 24 e 12 é igual a 36" ao invés de "24 mais 12 é 36". Apesar de simples, erros de definições básicas realizadas por docentes podem fazer com que a conversão entre a RSA e a RLME fique confusa. Por outro lado, entende-se como a RLMP aquela na qual se tem uma situação, de qualquer natureza, expressa por um texto no formato de situação problema, como "João tinha R$ 253,00 guardados em casa. Qual o valor que ele precisa poupar para chegar a mil reais?".

Seguindo um exemplo de RMLE, muitos professores diriam "a soma entre 24 e 12 é igual a 36", ocorrendo problemas básicos de definições entre as partes envolvidas na adição entre dois números quaisquer, sendo comum ouvir em sala de aula a palavra *soma* em lugar da expressão correta *adição*. Isso fica mais evidente nos números inteiros, em que há uma confusão verbal entre o sinal do número envolvido e a operação envolvida: a operação $(-3) - (-7) = 4$ que deveria ser descrita como "a subtração entre o três

---

[4] As nomenclaturas utilizadas nesse trabalho, que se refere aos tipos de representações simbólicas, são de autoria própria.

negativo e o sete negativo tem quatro positivo como diferença", mas costuma-se ouvir "menos três, menos o, menos sete é igual a mais quatro". Tanto verbalmente como por escrito fica difícil entender a diferença entre os papéis de cada sinal na expressão. Essas dificuldades podem aumentar consideravelmente quando entramos em uma RMLP.

Por último, há a Representação Pictórica, a qual se entende como a categoria mais diversa, devido a sua abrangência quanto à capacidade de representações de objetos possíveis, tanto do campo geométrico quanto do figurativo.

Para este trabalho, que tem como enfoque o conjunto dos Números Inteiros, limitando-se ao campo aditivo, seguir-se-á com duas representações. Uma delas é a Representação Pictórica da Reta Numérica, que é uma forma consensual qual a comunidade matemática tem utilizado para a representação de conjuntos numéricos devido às suas propriedades geométricas. Referente ao conceito da reta numérica, entende-se que essa não pode ser utilizada para fins formais para a construção de um conjunto discreto, dado que uma reta só poderia ter uma correspondência biunívoca com o conjunto dos reais. Entretanto, o apelo visual da disposição de alguns de seus pontos (esses, sim, com uma correspondência em tanto em $\mathbb{N}$ como em $\mathbb{Z}$) é de fundamental importância para a representação pictórica dentro do ensino de conjuntos numéricos.

A Representação Pictórica de barras, inspirada nos livros de séries iniciais das escolas de Xangai (Simpson, et al., 2017), na qual se tem uma barra maior equivalente à união de duas outras barras menores. Esse pictograma pode ser utilizado em diversas de situações, desde a adição entre números naturais até mesmo para a introdução de equações de primeiro grau. Na figura a seguir, trazemos um exemplo que pode ser visto como a adição entre 9 e 6 $(9 + 6 = 15)$ como uma subtração $(15 - 9 = 6$ ou $15 - 6 = 9)$.

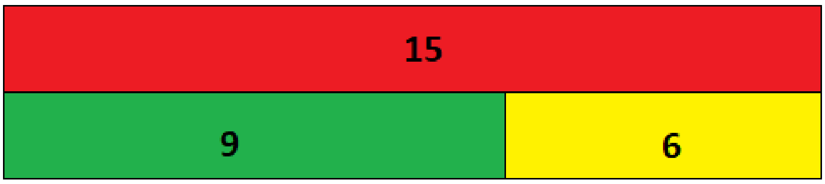


Figura 8 - Exemplo de Representação Pictórica por Barras

A partir do disposto acima, elaboramos um resumo do esquema das representações simbólicas possíveis, dentro do campo aditivo, conforme a figura a seguir. A estrutura apresentada não tem a pretensão de limitar ou definir por completo as possibilidades do campo aditivo, porém se estabeleceu como base para a produção da sequência didática e também a posterior análise da prática.

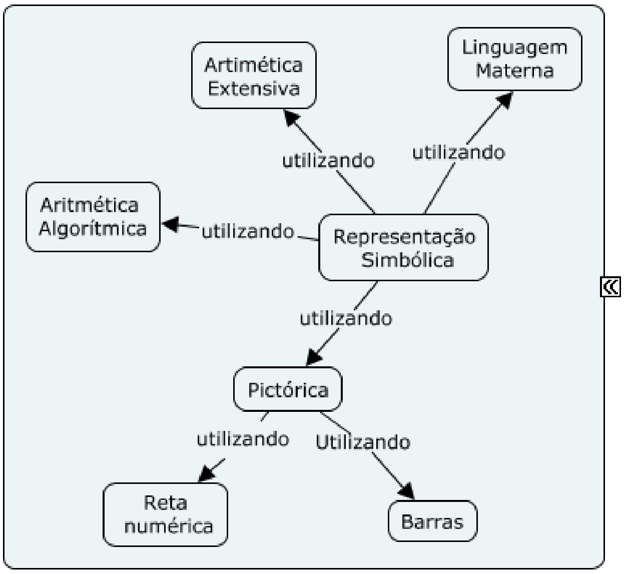


Figura 9- Esquema das Representações Simbólicas. Fonte: do Autor

Resumidamente, tem-se abaixo um mapa conceitual que organiza os conceitos explicitados em relação ao conceito da adição em ℕ, e que foi utilizado como guia para o planejamento didático da revisão dos números naturais, como suporte para a introdução dos números inteiros:

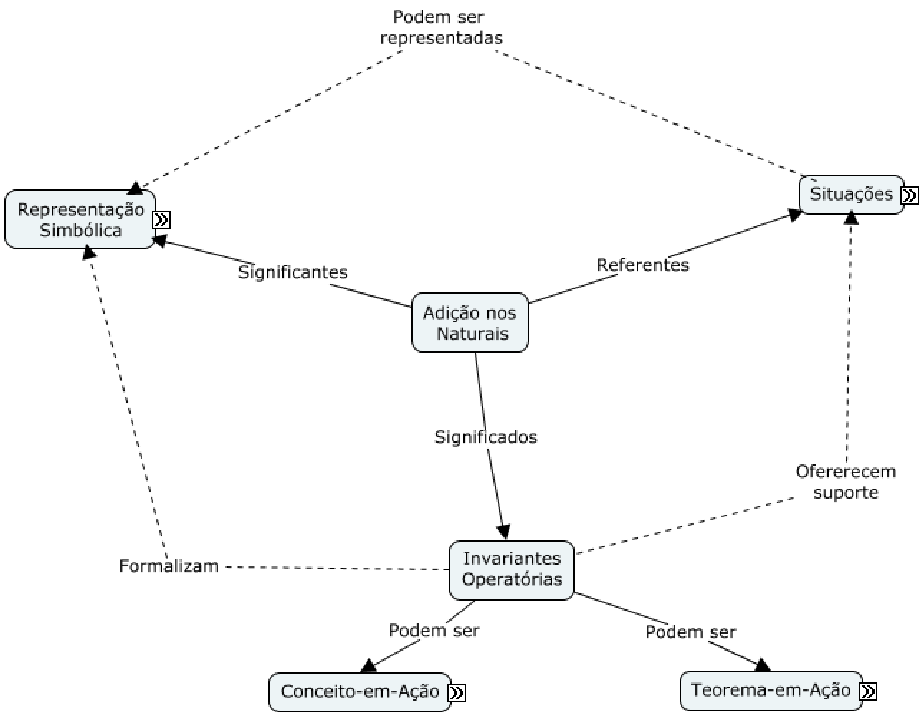


Figura 10- Mapa conceitual da adição entre números naturais. Fonte: do autor

Agora, será feito um exercício: haverá mudanças no campo conceituais apresentado quando se expande o conjunto numérico para os Números Inteiros?

Em relação às situações, a composição de duas medidas permanece em funcionamento, a única diferença é que não há garantia de que a nova medida será superior às duas anteriores, como na situação da união de duas dívidas distintas em que o resultado é uma dívida maior; logo, o número inteiro que representa a dívida total é menor que quaisquer outros valores das primeiras dívidas em separado. Da mesma forma, a transformação de estado inicial/final é reconhecida como verdadeira, pois o valor transformacional pode assumir valores negativamente superiores ao valor inicial, sem a preocupação da condição de valores menores que zero, como em uma situação de descidas e subidas de andares em um prédio onde o térreo é o andar zero e o subsolo são os andares negativos.

As relações comparativas entre duas medidas também se mantêm, pois o conjunto possui o princípio do ordenamento (como será visto mais adiante na seção "Uma possibilidade de Construção dos Números Inteiros por classe de equivalência"). Assim, pode-se afirmar que a combinação das três extensões é possível.

Com relação às representações simbólicas, é preciso rever a posição delas, já que o conjunto dos Números Inteiros envolve um referencial, depende de um sentido. Nesse caso, a reta representativa[5] dos Inteiros é possível, desde que construída a partir de uma reflexão da semirreta representativa do conjunto $\mathbb{N}$ em relação à origem.

Já as representações quantificadoras (barras e diagramas) precisam dos devidos ajustes, pois "elas apenas permitem simbolizar grandezas positivas e não transformações negativas" (Vergnaud, 1996, p. 182). Assim, convêm utilizá-las simultaneamente com a (semir)reta numérica para a atribuição da referência à origem e deixando explícito seu sentido.

Como a operação de subtração, apesar de sua riqueza de discussão acadêmica e na sala de aula, é a operação inversa da adição (Caraça, 1951, p. 21), o mapa conceitual da estrutura aditiva inclui o universo operativo da subtração.

Concluindo, pode-se afirmar que não há uma substituição do esquema do campo conceitual aditivo quando esse se insere no conjunto dos números inteiros, mas existem ajustes e ressignificações que devem ser tratadas com o devido cuidado ao refletir sobre o ensino do conjunto durante as séries finais do Ensino Fundamental. Na figura a seguir,

[5] Apesar do conjunto dos números inteiros ser discreto, utilizaremos uma reta, que chamaremos de reta representativa dos inteiros, como uma forma didática para a construção e visualização deste conjunto.

apresentamos o mapa do campo conceitual aditivo, que inclui as operações de adição a subtração dentro do conjunto dos Números Inteiros.

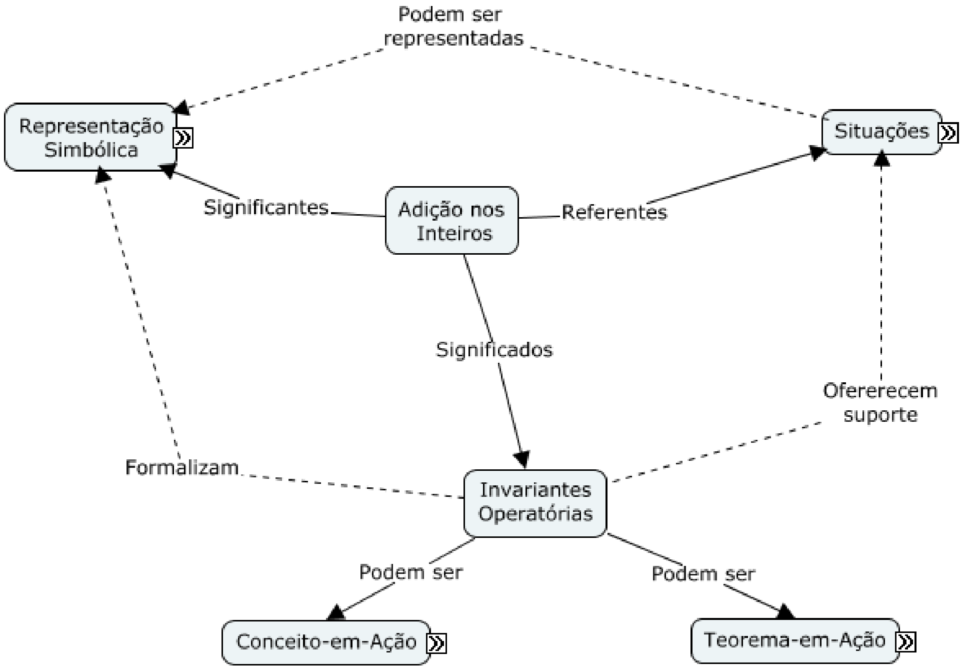


Figura 11- Campo aditivo inserido nos Números Inteiros

Contribuições da Semiótica para o Ensino de Matemática

Raymond Duval, em sua obra *Sémiosis et Pensée Humaine*, descreve a representação semiótica como uma produção feita com o uso de signos, por meio dos quais a pessoa exterioriza suas representações mentais (Duval R. , 2009, p. 2), e essa ação é nomeada como registro de uma representação. Já os signos podem ser representados através da linguagem natural, de fórmulas algébricas, gráficos, representações pictóricas e figuras geométricas.

Existem dois conceitos importantes para Duval: a **semiose**, tida como "apreensão ou produção de uma representação semiótica", e **noese** – o "ato cognitivo", a compreensão de uma representação (Duval R. , 2009). Por exemplo, em relação ao monumento do Laçador, localizado na zona norte de Porto Alegre, é possível que sejam produzidas diferentes semioses: representação na forma de um desenho, de uma fotografia ou até mesmo de um texto que o descreva.

Para a semiótica, haverá um grande conjunto de representações possíveis para um determinado signo a ser representado, mas nem todas poderão estabelecer uma relação cognitiva (noese) ao signo em questão para todos os sujeitos de maneira igual. Por exemplo, determinada função pode ser representada pela sua forma algébrica $f(x) = x^2$, ou pelo conjunto de pares ordenados (x, x^2) ou mesmo pelo gráfico no plano cartesiano, no qual todas essas são semioses. Para um sujeito que não aprendeu o conceito de função matemática, nenhuma das representações irá resultar em uma noese. À primeira vista, parece óbvio que as semioses e as noeses são independentes, mas uma não existe sem a outra. Assim, a semiose parece um ponto de partida para o surgimento de uma noese – "ou, pelo menos, a comanda." (Duval R. , 2009, p. 3).

Para Duval, a Matemática escolar se diferencia de outras disciplinas, pois ela é de cunho abstrato e requer o permanente uso de representações, já que os objetos matemáticos só existem no campo do abstrato. Durante sua pesquisa, analisando as dificuldades dos alunos franceses em diversos níveis de ensino, o autor percebeu que haveria o aprendizado quando "uma mudança de registro é necessária ou a mobilização simultânea de dois registros é requerida." (Duval R. , 2005, p. 21).

Duval estabelece o registro como uma semiose que mobiliza determinada noese para determinado signo. Na análise que fez dos obstáculos de aprendizagem em Matemática, mostrou uma hipótese que pode ter validade: "Não existe noese sem semiose, e é a semiose que determina as condições de possibilidade e prática da noese." (Duval R. , 2009). Partindo dos pressupostos apresentados acima, a compreensão dos alunos tem uma relação direta com a exigência de situações operacionais inseridas em mais do que um único registro. Assim, o autor afirma que

> A compreensão em Matemática implica a capacidade de mudar de registro. Isso porque não se deve jamais confundir um objeto e sua representação. Ora, na Matemática, (...) os objetos matemáticos não são jamais acessíveis perceptivelmente ou instrumentalmente (...). O acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por representações semióticas.(idem, ibidem)

Duval observou também que as atividades de conversão se tornam um desafio adicional, relacionadas à escolha das representações, pois algumas conversões se mostram "mais simples e mais imediatas" que outras. Estabelece-se como conversão a capacidade de realizar uma nova representação simbólica de um mesmo signo. Por exemplo, a conversão da frase "O conjunto dos pares ordenados cuja ordenada é menor que a abscissa" para o registro algébrico $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y < x\}$. Dada a ausência de ambiguidade e a simplicidade da frase em questão, considera-se que esse registro em linguagem matemática é uma possibilidade de como será o registro de saída (pós- conversão).

Então, conclui-se que o exemplo acima pode ser considerado uma congruência de representações. Por outro lado, a conversão da sentença "O produto de dois números que possuem mesmo sinal é um número positivo" para o registro algébrico $x.y > 0$ teria maior dificuldade para a compreensão do significado de "possuem o mesmo sinal", levando em conta que a multiplicação dos números envolvidos com sinais negativos resulta em um número positivo. Se o registro de saída não se mostra com facilidade, deduz-se que se está diante de uma situação de não congruência (Duval, 2003).

Não só a conversão em si, mas o sentido dessa interfere no índice de acertos. Cita-se o resultado de um dos experimentos de Duval, que consistia como tarefa aos alunos a conversão entre os registros "a soma do produto de um inteiro com outros dois inteiros" para "$ab + ac$". O índice de acerto na conversão de um para outro foi de 48%, enquanto que no sentido contrário (algébrico/ linguagem materna) alcançou 87% (DUVAL, 1995, p.53). A partir desses resultados, o autor constatou que a alternação dos registros de saída e de entrada resulta numa alteração do índice de acerto de um problema. "É a articulação de registros que constitui uma condição de acesso à compreensão em Matemática" (Duval, 2003, p.22).

Porém, para que essa articulação tenha a possibilidade de ser efetiva, é preciso alguns requisitos. Primeiramente, é necessário que essa oferta de conversões seja de duplo sentido. Assim como existem representações em linguagem materna com descrição de um problema a ser resolvido, também é preciso disponibilizar o sentido oposto: que seria, a partir de uma representação pictórica ou numérica, escrever um problema cuja solução seria a representação inicial. Em segundo, para existir a possibilidade de articulação entre diferentes registros em diferentes sentidos de conversão, é preciso que sejam disponibilizadas pelo menos três representações diferentes ou pelo menos duas obrigatoriamente em duplo sentido de conversão. Esse número consiste na mínima possibilidade de extrapolar ação de articulações isoladas, fazendo com que ocorra uma cadeira de conversões.

Um estudo sobre o Ensino de Números Inteiros: construção matemática, produções na área de ensino e revisão dos documentos oficiais

Para obter o devido aprofundamento em relação ao conjunto dos Números Inteiros e vislumbrar possibilidades de seu tratamento dentro do Ensino Fundamental, dá-se uma revisão do ponto de vista da Matemática, da estrutura e das propriedades inerentes ao conjunto. A seguir, apresenta-se uma revisão bibliográfica de algumas produções acadêmicas brasileiras referentes ao ensino de Números Inteiros. Para fins de produção desta dissertação, limitam-se, como objeto de estudo, o conjunto dos Números Inteiros, suas propriedades e as operações de Adição e de Subtração. Tanto a revisão matemática quanto a revisão bibliográfica são somente um possível olhar sobre o assunto, ambas feitas a partir das escolhas do autor, sem pretensão de legitimar um estado da arte sobre o assunto. Mesmo assim, esse olhar foi o suporte para a construção da análise do livro didático, do planejamento das aulas e da construção do produto técnico, descrito no Anexo A.

Uma possibilidade de construção para o conjunto dos Números Inteiros utilizando classes de equivalência

Para atingir o principal objetivo deste trabalho, que é refletir sobre uma sequência didática que tenha a possibilidade de agregar, dentro das possibilidades, os conceitos em ação e teoremas em ação, relacionados aos Números Inteiros no campo aditivo, houve a necessidade de revisar a construção desses números no ambiente da Matemática formal.

Há diversas maneiras de construir os Números Inteiros (Gonzalez, et al., 1990, pp. 50-54), porém foi escolhida a proposta feita primeiramente por Richard Dedekind e legitimada por Hermann Henkel (Sá & Anjos, 2011). Cita-se que atualmente é encontrada no livro "Fundamentos da Aritmética", de Hygino Domingues, autor reconhecido e muito utilizado nos cursos de formação de Professores de Matemática brasileiros. Nessa seção, estendendo a discussão em alguns pontos que foram deixados pelo autor como exercício e aprofundamentos que o mesmo considerou como pressupostos já conhecidos.

Primeiramente supomos já definida as operações de adição e multiplicação entre números naturais $(\mathbb{N},+,\times)$. A partir disso, o objetivo é dar um sentido matemático a todas as expressões do tipo $a-b$ para $a,b \in \mathbb{N}$, de maneira a poder tratar como entes do mesmo conjunto tanto aquelas como $(7-3), (5\ -\ 1)$ e $(4\ -0)$ facilmente demonstradas em $\mathbb{N}$, como também $(3-7), (1-3)$ e $(0-2)$, estas com resultado em $\mathbb{Z}$. Dessa forma, observa-se primeiro que, subjacente a cada "diferença" $a-b$, está o par ordenado $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Assim, se $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, $a \geq b\ e\ c \geq d$, demonstraremos que

$$a-b=c-d \leftrightarrow a+d=c+b$$

Dizer que $a \geq b$ é equivalente, por definição, existe $t \in \mathbb{N}$ com $a = b + t$ (I), como também $c \geq d$ é equivalente, por definição, existe $s \in \mathbb{N}$ com $c = d + s$ (II). Além disso, da definição de subtração temos que $a - b = t$ e $c - d = s$. Somando (I) e (II) em diagonal obtemos

$$a+d+s=c+b+t \text{ (III)}$$

Se t$= a - b = c - d = s$, podemos cancelá-los em (III) e obtemos $a + b = c + d$. Na volta, se $a + d = c + b$, podemos cancelá-los em (III) e obtemos $s = t$, ou seja, $a - b = c - d$.

A partir dela, sabemos que (em $\mathbb{N}$) $\mathbf{5-3=9-7}$ equivale a $\mathbf{5+7=9+3,}$ por exemplo. Ao assumir a segunda igualdade, há uma vantagem em não recair em casos nos quais a subtração nos naturais não é válida, quando o subtraendo excede o minuendo.

Essas considerações, aliadas ao fato de que o conjunto dos inteiros a ser construído deve ser uma "ampliação" de $\mathbb{N}$, ajudam a entender o caminho a ser tomado.

No conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ consideremos a relação ~ definida da seguinte maneira: para quaisquer $(a,b)\ e\ (c,d)$ em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(a,b) \sim (c,d) \leftrightarrow a + d = b + c$. Para a relação ~ valem as propriedades:

- Reflexiva: para todo $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, se verifica $a + b = b + a$ (comutatividade da adição em $\mathbb{N}$) então $(a,b) \sim (b,a)$
- Simétrica: se $(a,b) \sim (c,d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ então a + d = b + c, pela comutatividade temos, $c + b = d + a$, que significa $(c,d) \sim (a,b)$.
- Transitiva: se $(a,b) \sim (c,d)\ e\ (c,d) \sim (e,f)$, então $a + d = b + c\ \ e\ c + f = e + d$; somando as duas igualdades, tem-se $a + d + c + f = b + c + e + d$ cancelando b e c (lei do cancelamento da adição em $\mathbb{N}$), tem-se $a + f = e + b$, ou seja: $(a,b) \sim (e,f)$.

Logo, ~ é uma relação de equivalência em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e, portanto, determina uma partição nesse conjunto em classes de equivalência. Para cada $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, será indicado $\overline{(a,b)}$ a classe de equivalência determinada por $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Assim:

$$\overline{(a,b)} = \{(x,y)\mathbb{N} \times \mathbb{N}\ |(x,y) \sim (a,b)\} = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\ |\ x + b = y + a\}$$

O conjunto quociente de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ por ~, ou seja, o conjunto de todas as classes $\overline{(a,b)}$, para qualquer $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, será indicado por $\mathbb{Z}$. Então:

$$\mathbb{Z} = {}^{(\mathbb{N} \times \mathbb{N})}/_{\sim} = \{\overline{(a,b)} | (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$$

Por exemplo:

$$\overline{(4{,}2)} = \{(2{,}0); (3{,}1); (4{,}2); \dots\}$$

$$\overline{(2{,}4)} = \{(0{,}2); (1{,}3); (2{,}4); \dots\}$$

$$\overline{(1{,}5)} = \{(0{,}4); (1{,}5); (2{,}6); \dots\}$$

É claro que: $\overline{(a,b)} = \overline{(c,d)} \leftrightarrow (a,b) \sim (c,d) \leftrightarrow a + d = b + c$. Em particular vale o seguinte:

P1 - Se $a \geq b$, então $\overline{(a,b)} = \overline{(a-b,0)}$, pois $a + 0 = (a - b) + b$, igualdade que faz sentido em $\mathbb{N}$, pois neste caso $a - b \in \mathbb{N}$; logo, tomando $c = a - b$ tem-se $\overline{(a,b)} = \overline{(c,0)}$.

P2 - Se $a < b$, então $\overline{(a,b)} = \overline{(0,b-a)}$, uma vez que $a + (b - a) = b + 0$, igualdade que faz sentido em $\mathbb{N}$, pois neste caso $b - a \in \mathbb{N}$; logo, tomando $c = b - a$ tem-se $\overline{(a,b)} = \overline{(0,c)}$. Desse modo, para todo $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$, existe um $c \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{(a,b)} = \overline{(c,0)}$ ou $\overline{(a,b)} = \overline{(0,c)}$. Além disso, essa maneira de representar o elemento $\overline{(a,b)}$ é única por um par que envolva zero. De fato, se $\overline{(c,0)} = \overline{(d,0)}$, então $c + 0 = d + 0$, portanto isso só é possível se $c = d$. Por outro lado, se $\overline{(0,c)} = \overline{(0,d)}$, então $0 + c = 0 + d$, e isso também só é possível se $c = d$. Por último, se $\overline{(0,c)} = \overline{(d,0)}$, então $0 + 0 = c + d$, e que só acontece se $c = d = 0$

Adição em $\mathbb{Z}$

Considerando-se os números naturais 4 e 3 escritos sob a forma: $4 = 5 - 1$ e $3 = 7 - 4$. Usando as propriedades conhecidas de $\mathbb{Z}$, obtemos

$$4 + 3 = (5 - 1) + (7 - 4) = (5 + 7) - (1 + 4)$$

Essa observação ajuda a entender a definição a seguir:

<u>Def1</u>: Sejam $\overline{(a,b)}$ e $\overline{(c,d)}$ elementos quaisquer de $\mathbb{Z}$. Chama-se *soma* e se indica $\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)}$, o elemento de $\mathbb{Z}$ definido por:

$$\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(a+c,b+d)}$$

Inicia-se mostrando que a soma em $\mathbb{Z}$ *está bem definida*. Supondo $\overline{(a,b)} = \overline{(a_1,b_1)}$ e $\overline{(c,d)} = \overline{(c_1,d_1)}$; então $\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(a+c,b+d)}$ e $\overline{(a_1,b_1)} + \overline{(c_1,d_1)} = \overline{(a_1+c_1,b_1+d_1)}$. Como $(a,b) \sim (a_1,b_1)$ e $(c,d) \sim (c_1,d_1)$, então $a + b_1 = b + a_1$ e $c +$

$d_1 = d + c_1$, do que resulta (somando membro a membro essas igualdades): $(a + b_1) + (c + d_1) = (b + a_1) + (d + c_1)$ ou $(a + c) + (b_1 + d_1) = (b + d) + (a_1 + c_1)$.

Donde $\overline{(a + c, b + d)} = \overline{(a_1 + c_1, b_1 + d_1)}$. Logo, a adição de classes (Números Inteiros) está bem definida (isto é, a relação dada por $\left(\overline{(a,b)}, \overline{(c,d)}\right) \to \overline{(a,b)} + \overline{(c,d)}$ é uma aplicação de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$).

Para a adição em $\mathbb{Z}$, valem as seguintes propriedades:

a1. *Associativa:*

Prova: Se $\overline{(a,b)}$, $\overline{(c,d)}$ e $\overline{(e,f)}$ são elementos genéricos de $\mathbb{Z}$, então:

$[\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)}] + \overline{(e,f)} = \overline{(a + c, b + d)} + \overline{(e,f)} = \overline{\left((a + c) + e, (b + d) + f\right)}$

que, pela associatividade da adição em $\mathbb{N}$, é equivalente a

$\overline{\left(a + (c + e), b + (d + f)\right)}$ que, pela definição de soma em $\mathbb{Z}$, é equivalente a

$\overline{(a,b)} + \overline{(c + e, d + f)} = \overline{(a,b)} + [\overline{(c,d)} + \overline{(e,f)}]$

a2. *Comutativa*

Prova: $\overline{(a,b)}, \overline{(c,d)} \in \mathbb{Z}$, tem-se $\overline{(a + b)} + \overline{(c + d)} = \overline{(a + c, b + d)} = \overline{(a + c, b + d)} = \overline{(c + a, d + b)} = \overline{(c,d)} + \overline{(a,b)}$.

a3. *Existência de elemento neutro*: é a classe $\overline{(0,0)}$. De fato, para qualquer $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$

$$\overline{(a,b)} + \overline{(0,0)} = \overline{(a + 0, b + 0)} = \overline{(a,b)}$$

Cabe ressaltar que $\overline{(a,a)} = \overline{(0,0)}$, para todo $a \in \mathbb{N}$.

a4. A adição admite simétricos, ou seja, para todo $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$ existe um $\overline{(a',b')} \in \mathbb{Z}$, de modo que $\overline{(a,b)} + \overline{(a',b')} = 0$.

Prova: De fato, dado $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$, o par ordenado $\overline{(b,a)} \in \mathbb{Z}$ e $\overline{(a,b)} + \overline{(b,a)} = \overline{(a + b, b + a)} = 0$.

Tomando $m = (a,b)$, será utilizada a notação $-m = \overline{(b,a)}$para o simétrico de m, note que $\overline{(b,a)}$ pode ser obtido por $0 - \overline{(a,b)}$

a5. A lei do cancelamento da adição em $\mathbb{Z}$: se $\overline{(a,b)}$, $\overline{(c,d)}$, $\overline{(r_1,r_2)}$ são inteiros tais que $\overline{(a,b)} + \overline{(r_1,r_2)} = \overline{(c,d)} + \overline{(r_1,r_2)}$, então $\overline{(a,b)} = \overline{(c,d)}$.

Tomando $\overline{(a,b)} + \overline{(r_1,r_2)} = \overline{(c,d)} + \overline{(r_1,r_2)}$, utilizando a Def1, tem-se que $\overline{(a + r_1, b + r_2)} = \overline{(c + r_1, d + r_2)}$ .Com isso, utilizando a definição da classe de equivalência, tem-se $(a + r_1) + (d + r_2) = (b + r_2) + (c + r_1)$,

portanto $(a + d) = (b + c)$ equivale a $\overline{(a,b)} = \overline{(c,d)}$.

Subtração em $\mathbb{Z}$

Para cada par de elementos $m, n \in \mathbb{Z}$, chama-se diferença entre m e n e indica-se por $m - n$ o elemento $m + (-n) \in \mathbb{Z}$. Ou seja, subtrair é o mesmo que somar o simétrico: $m - n = m + (-n)$

Assim, posto que $m - n \in \mathbb{Z}$ e a adição está bem definida, quaisquer que sejam $m, n \in \mathbb{Z}$, a relação dada por $(m, n) \to m - n$ é uma aplicação de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$, ou seja, a subtração está também bem definida em $\mathbb{Z}$. Mais ainda, é uma operação em $\mathbb{Z}$, o que não acontecia em $\mathbb{N}$. Essa operação, contudo, não é associativa, nem comutativa e tampouco admite elemento neutro. Contraexemplos:

Comutatividade: $7 - 2 \neq 2 - 7$ pois $7 - 2 = 5$ e $2 - 7 = 2 + (-7) = -5$
Associatividade: $(3 - 4) - 5 \neq 3 - (4 - 5)$ pois $(3 - 4) - 5 = -6$ e $3 - (4 - 5) = 4$

Relação de Ordem em $\mathbb{Z}$

Se $m \in \mathbb{Z}$, então $m = \overline{(c, 0)}$ ou $m = \overline{(0, c)}$, para algum $c \in \mathbb{N}$. Assim, por exemplo

$\overline{(0,0)} = 0$	$\overline{(0,1)} = -1$
$\overline{(1,0)} = +1$	$\overline{(0,2)} = -2$
$\overline{(2,0)} = +2$	$\overline{(0,3)} = -3$
...	...

Pode-se escrever

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots\}$$

Denotando os conjuntos $\{0\} = \mathbb{Z}_*, \{+1, +2, +3, \dots\} = \mathbb{Z}_+$ e $\{\dots, -3, -2, -1\} = \mathbb{Z}_-$, os elementos de $\mathbb{Z}_+$ se dizem *inteiros positivos* e os de $\mathbb{Z}_-$ são *inteiros negativos*. Todo elemento $m \in \mathbb{Z}_+^* = \{+1, +2, +3, \dots\}$ é chamado de *estritamente positivo;* e todo elemento $m \in \mathbb{Z}_-^* = \{\dots, -3, -2, -1\}$ é chamado de *estritamente negativo*.

Nota-se que se $m \in \mathbb{Z}_+$ $(ou\ \mathbb{Z}_+^*)$, então $-m \in \mathbb{Z}_-(ou\ \mathbb{Z}_-^*)$ e vice-versa. De fato, se, por exemplo, $m = \overline{(a, 0)}$, então $-m = \overline{(0, a)}$.

<u>Def3</u>: Sejam $\overline{(a, b)}, \overline{(c, d)}, \overline{(r, s)}, \overline{(x, y)} \in \mathbb{Z}$. Diz-se que $\overline{(a, b)}$ *é menor ou igual a* $\overline{(c, d)}$ e anota-se $\overline{(a, b)} \leq \overline{(c, d)}$ se $\overline{(c, d)} = \overline{(a, b)} + \overline{(r, s)}$ para algum $\overline{(r, s)} \in \mathbb{Z}_+$ ou equivalentemente (já que já foi defendida a subtração) $\overline{(c, d)} - \overline{(a, b)} \in \mathbb{Z}_+$. Nesse caso, também se pode escrever $\overline{(c, d)} \geq \overline{(a, b)}$, o que se lê: "$\overline{(c, d)}$ *é maior do que ou igual a* $\overline{(a, b)}$".

Se $\overline{(c,d)} = \overline{(a,b)} + \overline{(r,s)}, onde\ \overline{(r,s)} \in \mathbb{Z}_+^*$, então $\overline{(a,b)}$ se diz *menor* que $\overline{(c,d)}$, e escreve-se $\overline{(a,b)} < \overline{(c,d)}$. Ao afirmar que $\overline{(a,b)} < \overline{(c,d)}$ é equivalente a dizer $\overline{(c,d)}$ é *maior que* $\overline{(a,b)}$ e anotar $\overline{(c,d)} > \overline{(a,b)}$. Em particular $\overline{(0,0)} \leq \overline{(r,s)}, \forall \overline{(r,s)} \in \mathbb{Z}_+$, pois $\overline{(r,s)} = \overline{(0,0)} + \overline{(r,s)}$; e $\overline{(x,y)} \leq 0, \forall s \in \mathbb{Z}_-$, já que $\overline{(0,0)} = \overline{(x,y)} + \overline{(y,x)}\ e\ \overline{(y,x)} \in \mathbb{Z}_+$. Também: $\overline{(0,0)} < \overline{(r,s)}$, para todo $\overline{(r,s)} \in \mathbb{Z}_+^*$ e $\overline{(r,s)} > \overline{(0,0)}$ para todo $\overline{(r,s)} \in \mathbb{Z}_-^*$.

Verificam-se abaixo as propriedades mais importantes da relação $\leq$ sobre $\mathbb{Z}$.

Reflexiva: De fato, $\overline{(a,b)} \leq \overline{(a,b)}, \forall\ \overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$, pois $\overline{(a,b)} = \overline{(a,b)} + \overline{(0,0)}$ e $0 \in \mathbb{Z}_+$.

Antissimétrica: Supõe-se que $\overline{(a,b)} \leq \overline{(c,d)}$ e $\overline{(c,d)} \leq \overline{(a,b)}$. Como $\overline{(a,b)} \leq \overline{(c,d)}, tem - se$ que $a + d \leq b + c$ e também $\overline{(c,d)} \leq \overline{(a,b)}$, tem-se que $c + b \leq d + a$. Utilizando a comutatividade, pode-se afirmar que $a + d = d + a$ e $b + c = c + b$. Com isso, pela tricotomia dos naturais, obtém-se que $a + d = b + c$, isto é, $\overline{(a,b)} = \overline{(c,d)}$.

Transitiva: $\overline{(a,b)} \leq \overline{(c,d)}$ e $\overline{(c,d)} \leq \overline{(e,f)}$ implicaria que $\overline{(a,b)} \leq \overline{(e,f)}$. Dessas desigualdades, obtém-se $a + d \leq b + c$ e $c + f \leq d + e$. Sendo assim, pode-se afirmar que existem $p, q \in \mathbb{N}$ tais que $a + d + p = b + c$ e $c + f + q = d + e$. Somando ambas as igualdades, na ordem dada, têm-se

$$a + d + p + c + f + q = b + c + d + e$$

$$a + f + p + q = b + e$$

Como $p + q \in \mathbb{N}$, conclui-se que $a + f \leq b + e$, ou seja, $\overline{(a,b)} \leq \overline{(e,f)}$. As propriedades acima garantem que "$\leq$ " é uma relação de ordem.

Tricotomia em $\mathbb{Z}$

Para quaisquer inteiros m e n, tem-se $m \leq n$ ou $n \leq m$. Provar para o caso $m = \overline{(a,0)}$ e $n = \overline{(b,0)}$, sendo a,b naturais.

Se $a \leq b$, então $b = a + c$, para algum $c \in \mathbb{N}$ e portanto $n = \overline{(b,0)} = \overline{(a + c, 0)} = \overline{(a,0)} + \overline{(c,0)} = m + \overline{(c,0)}$, o que garante a relação $m \leq n$, pois $\overline{(c,0)} \in \mathbb{Z}_+$. Se, ao contrário, ocorre $b \leq a$, então valeria $n \leq m$ com demonstração análoga.

A prova para o caso $m = \overline{(0,a)}$ e $n = \overline{(0,b)}$ pode ser encaminhada do mesmo modo. Prova para o caso $m = \overline{(a,0)}$ e $n = \overline{(0,b)}$. Então $m = \overline{(a,0)} = \overline{(a + b, b)} = \overline{(0,b)} + \overline{(a + b, 0)} = n + \overline{(a + b, 0)}$ de onde segue $n \leq m$, pois $\overline{(a + b, 0)} \in \mathbb{Z}_+$.

Uma consequência das considerações anteriores é que: $m \in \mathbb{Z}_-$ e $n \in \mathbb{Z}_+$, logo se pode afirmar que $m \leq n$.

Compatibilidade da ordem com a adição

Se $\overline{(a,b)} \leq \overline{(c,d)}$, então $\overline{(a,b)} + \overline{(p,q)} \leq \overline{(c,d)} + \overline{(p,q)}$ para todo $\overline{(p,q)} \in \mathbb{Z}$. De fato, da hipótese $\overline{(a,b)} \leq \overline{(c,d)}$ segue que $\overline{(a,b)} + \overline{(r,s)} = \overline{(c,d)}$, para algum $\overline{(r,s)} \in \mathbb{Z}_+$. Assim, para todo $\overline{(p,q)} \in \mathbb{Z}$: $\overline{(c,d)} + \overline{(p,q)} = (\overline{(a,b)} + \overline{(r,s)}) + \overline{(p,q)}$, valendo-se da comutatividade e da associatividade, tem-se $(\overline{(a,b)} + \overline{(p,q)}) + \overline{(r,s)}$, portanto $\overline{(a,b)} + \overline{(p,q)} \leq \overline{(c,d)} + \overline{(p,q)}$.

Finalizando, essa seção tem por objetivo estabelecer as propriedades matemáticas relacionadas à ordem e à adição de Números Inteiros e às operações relacionadas ao campo aditivo, ou seja, limitando a sequência no desenvolvimento sem definir o produto entre inteiros e suas respectivas propriedades.

Produções Acadêmicas relativas ao Ensino de Números Inteiros

Para a revisão bibliográfica inerente ao assunto deste trabalho, foram consultados, no mês de abril de 2018, o Catálogo de Teses e Dissertações[6], da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e a plataforma Google Scholar. No banco de Teses da CAPES, buscou-se o assunto "Número Inteiros" e houve incidência de 221 trabalhos relacionados com o termo.

Para personalizar a conexão com o presente estudo, refinou-se a pesquisa, utilizando-se como critério produções cuja área de concentração estivesse atrelada ao Ensino de Matemática (Educação e Ensino), excluindo trabalhos de Matemática Pura, Modelagem Profissional ou de Engenharia, por exemplo.

A partir desses parâmetros, encontrou-se um total de 40 produções, sendo dessas três teses de doutorado, oito dissertações de Mestrado Acadêmico e 29 Dissertações de Mestrado Profissional ou Profissionalizante. Na plataforma Google Scholar, foram estabelecidos os mesmos critérios, nos quais, além dos trabalhos indexados do banco de Teses da CAPES, incluíram-se trabalhos de conclusão de Graduação em Licenciatura em Matemática.

Assim, os trabalhos escolhidos para a revisão foram selecionados dentro desse corte amostral referido nas linhas anteriores. Foram selecionadas produções que apresentavam proximidade com a perspectiva teórica de aprendizagem escolhida para esta Dissertação. Como o tema é demasiadamente vasto e possui um número relevante de publicações, considera-se que essa revisão bibliográfica é uma possibilidade entre a infinidade de olhares possíveis sobre o tema, no qual não há pretensão de estabelecer um estado da arte sobre o assunto ou mesmo uma produção referencial sobre o ensino de Números Inteiros.

Em relação às teses encontradas, há somente um trabalho que possui, como tema central, o ensino de Números Inteiros a partir da perspectiva dos números relativos. Em seu estudo, (Deixa, 2014) busca elaborar uma proposta de ensino que articule as três dimensões de conhecimento dos números relativos (reta, contexto e abstrata), em um curso de formação de Professores de Matemática em Moçambique, a partir da perspectiva da multidimensionalidade do conhecimento, proposta por Alicia Bruno.

Tal trabalho foi dividido em três momentos: a revisão da literatura a respeito do tema, a aplicação de um curso de formação de professores em exercício e, por último e a partir das reflexões durante a formação, uma prática docente com quatro turmas de 8ª

[6] http://catalogodeteses.capes.gov.br (Acessado em 22/10/2014 às 14:33:02)

classe (equivalente ao 9º ano do currículo brasileiro) em uma Escola Secundária (de ensino básico), localizada na cidade de Quelimane (Moçambique). O autor traz, como resultados da pesquisa, que uma abordagem multidimensional pode contribuir para uma aprendizagem efetiva dos Números Inteiros relativos. Como sugestão de possibilidades do ensino de números relativos, o autor destaca situações que envolvam negócios financeiros, altitude topográfica, cronologia referencial (antes e depois de Cristo), temperatura, impossibilidade da subtração dentro do conjunto dos naturais quando o minuendo é menor que o subtraendo, uso da história da Matemática, reta numerada, método exploratório do Freudenthal (Freudenthal apud Deixa (2014, p. 36-39)) e uso da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud. Para o autor, as constatações da análise dos resultados serviram como indicadores para a elaboração de uma proposta de trabalho a ser utilizada na formação de professores de Matemática do sistema educacional de Moçambique.

Dentre as dissertações, destaca-se (Bini, 2008) que buscou, a partir dos campos conceituais, a análise da prática da construção significativa dos conhecimentos, referente ao conjunto dos Números Inteiros em uma escola do Estado de Santa Catarina. A partir dos resultados obtidos, construiu uma sequência didática com o objetivo de que as situações, principalmente expostas como jogos e desafios, contribuíssem para a evolução conceitual dos participantes. Como resultado da prática, a autora constata que as atividades interativas são eficazes, mais humanas e deslocam o docente da posição de centralizador do conhecimento para uma posição de intermediador, despertando o interesse por aprender.

Em seu trabalho de Conclusão de Curso, (Meister, 2009) aborda as dificuldades encontradas na compreensão de Números Inteiros, analisadas a partir de três frentes: a identificação, a ordenação e as operações entre Números Inteiros. Para sua análise, utilizou três jogos e realizou um questionário. Entre seus resultados, constatou que os alunos não apresentaram dificuldades referentes à ordenação dos Números Inteiros, mas apresentaram dificuldades na apropriação das regras das operações, principalmente quando é preciso o discernimento entre as regras da adição e da multiplicação.

No campo das tecnologias digitais, (Morais, 2010) desenvolveu e aplicou, em sua dissertação de Mestrado, uma série de objetos digitais de aprendizagem para a promoção da aprendizagem das operações entre Números Inteiros. Para a análise da prática, também recorreu à Teoria dos Campos Conceituais, de Vergnaud, tanto no campo aditivo como no campo multiplicativo. Porém, não se limitou a isso: buscou uma compreensão dos conceitos de número inteiros por diversas perspectivas diferentes (histórica, matemática, dentro da teoria de Piaget) onde realizou uma sequência didática (com atividades dentro e fora das mídias digitais) visando estabelecer uma dinâmica em cima da reta numérica para as operações no campo aditivo e multiplicativo do conjunto estudado. A partir dos resultados, modificou os objetivos desenvolvidos inicialmente e concluiu que os objetos digitais auxiliam na promoção da aprendizagem "na medida em que contribuam para a coordenação entre os Sistemas de Ação e Simbólico, no entanto esse fato isolado não é suficiente" (Morais, 2010, p. 219).

Das produções acima citadas, (Teixeira, 2013) é a que mais se aproxima desta dissertação. No seu trabalho de conclusão, o autor faz uma articulação entre o contexto histórico do desenvolvimento dos Números Inteiros e a revisão das propriedades formais desse conjunto, analisando como elas são expostas no ensino de Números Inteiros em uma turma de Ensino Fundamental. Seu objetivo era de aprofundar o estudo da regra dos sinais, tanto na adição como na multiplicação, visando a um melhor aprendizado.

Entre as dificuldades apresentadas, destacam-se: a associação de número, a ideia de grandeza, a confusão na utilização das regras de adição e multiplicação (equivalente a (Meister, 2009)) e o obstáculo epistemológico que pode ser visto como um teorema em ação de que *o oposto de um número é equivalente à multiplicação deste por (-1).*

Uma diferença entre os estudos referidos acima e a aproximação com esse trabalho, (Meister, 2009) centra seus esforços na elaboração e na execução da sua sequência didática, contrapondo com pesquisas que focalizam a contribuição dos jogos no ensino de Números Inteiros. Entretanto, o diferencial da presente dissertação é que se busca trabalhar um planejamento didático de maneira múltipla e integradora, desenvolvendo conceitos e propriedades de maneira multifacetada, isto é, além de questões operacionais e de representação aritmética.

Em outro trabalho de Mestrado Profissional, (Gajko, 2018) traz uma experiência sobre o uso de jogos para a aprendizagem de números relativos. Segundo Vergnaud, "as transformações no tempo e as relações de comparação não podem ser adequadamente representadas por uma composição de duas quantidades - lei binária interna." (Vergnaud Apud Gajko, 2018, p. 11). Assim, os números relativos são a possibilidade para quando se trate de número não só como quantidade, mas como ação transformadora também.

Após a aplicação das atividades desenvolvidas, o autor conclui que, além dos jogos contribuírem positivamente para a aprendizagem do assunto, auxiliam na atribuição de significado dos conceitos envolvidos no conjunto dos Números Inteiros, possibilitando situações que gerem argumentos e sustentações para os cálculos vistos em sala de aula.

Em relação às produções listadas acima, pode-se destacar que o diferencial do presente trabalho é utilizar uma construção com multiplicidade de situações, abrangendo diversas representações simbólicas e conhecimentos em ação, na tentativa de estabelecer uma estruturação narrativa[7] do conjunto dos Números Inteiros inserido no currículo de uma turma de 7º ano de Ensino Fundamental.

[7] Entende-se como estruturação narrativa, no âmbito do ensino e do livro didático, quando as propriedades e os conceitos de um referido assunto estão dispostos de tal maneira que apresentem fluidez e sentido.

O Ensino de Números Inteiros nos Documentos Oficiais

Sobre o conjunto dos Números Inteiros, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), referentes ao Ensino Fundamental 2, definem que o conjunto numérico dos Inteiros faz parte do bloco de conteúdos denominados “Números e Operações”. No decorrer do texto, os parâmetros fazem referência a esse conjunto como “Números Inteiros positivos e negativos” (S. d. Brasil 1998, 38). No terceiro ciclo, correspondente aos 6º e 7º ano do Ensino Fundamental, os números inteiros são propostos da seguinte maneira:

> Os números inteiros podem surgir como uma ampliação do campo aditivo, pela análise de diferentes situações em que esses números estejam presentes. Eles podem representar diferença, falta, orientação e posições relativas. As primeiras abordagens dos inteiros podem apoiar-se nas ideias intuitivas que os alunos já têm sobre esses números, por vivenciarem situações de perdas e ganhos num jogo, débitos e créditos bancários ou outras situações. (Brasil S. d., 1998, p. 66)

Assim, os Números Inteiros devem estar sempre relacionados com situações de tipo referencial, em que o valor envolvido possui magnitude e sentido. Apesar de ser uma construção mais abstrata, se comparada com o conjunto dos Números Naturais ou Racionais, o ensino de Números Inteiros não deve “restringir-se apenas a esses aspectos, mas incorporar situações que permitam a compreensão das regras do cálculo com os inteiros pela observação de regularidades e aplicação das propriedades das operações com os naturais” (Brasil S. d., 1998, p. 66).

Neste sentido, pode-se perceber que, mesmo que o ensino desses números envolva regras de cálculo para as operações nesse conjunto numérico, essas regras devem surgir a partir da observação das regularidades de resultados já consolidados, buscando uma sistematização dos algoritmos de cálculo, definições de propriedades e de resultados.

No que se refere à produção de livros didáticos, o guia do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) afirma que os Números Inteiros

> são apresentados nos livros do 7º ano. Em algumas coleções, estudam-se os Números Inteiros e, depois, amplia-se o conceito para números racionais negativos enquanto que, em outras, inicia-se pela retomada do campo pelos racionais positivos e, só então, os números negativos são abordados, já no contexto de números racionais. As situações-problema mais exploradas na apresentação dos números negativos são aquelas relacionadas à temperatura, dívidas e altitude, seguidas da apresentação formal das regras das operações fundamentais. (Brasil, 2016, p.26)

Além dos Parâmetros Curriculares Nacionais, em 2018 foi aprovada a Base Nacional Curricular Comum (BNCC) que “é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e das modalidades da Educação Básica” (Brasil, 2017, p. 7). O ensino de Números Inteiros está inserido na unidade temática Números, que tem como finalidade “desenvolver o pensamento numérico, o qual implica o conhecimento de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades” (p. 266).

Para que isso ocorra, faz-se necessária a construção dos conceitos de “aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem” (Idem). Dentre esses conceitos, é possível que este trabalho esteja mais associado aos conceitos de equivalência e de ordem, como pode ser observado na construção matemática realizada na seção anterior. Ainda na descrição da unidade temática, o documento deixa explícito que a apresentação dos campos numéricos deve ser feita a partir da ampliação desses campos, com direcionamento das sequências didáticas para a discussão sobre os registros, aplicações, significados e operações. (Brasil, 2017, p. 266)

Deste modo, na seção específica de Matemática do Ensino Fundamental, durante o estudo dos Números Inteiros, deve-se, pelo menos, estudar seus “usos, história, ordenação, associação com pontos da reta numérica e operações” (idem, p.304). Além disso, duas habilidades devem ser atendidas pelos estudantes de ensino básico em relação ao seu conhecimento sobre os Números Inteiros:

> (EF07MA03) Comparar e ordenar Números Inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico; associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração;
> (EF07MA04) Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com Números Inteiros. (Brasil, 2017, p. 305)

Pode-se observar, nos documentos oficiais apresentados, que há uma preocupação com dois pontos principais: a resolução de problemas inseridos no cotidiano e a conexão com a perspectiva histórica da Matemática na nova Base Curricular Comum.

Análise Crítica de alguns Livros Didáticos

Análise Preliminar: a escolha do livro

Neste trabalho foram revisados os capítulos referentes aos Números Inteiros dos seguintes livros didáticos: *Matemática: ideias e desafios*, da Editora Saraiva (L1); *Projeto Araribá: Matemática*, da Editora Moderna (L2); *Projeto Teláris – Matemática*: Ensino Fundamental, Editora Ática (L3); *Vontade de Saber Matemática*, Editora FTD (L4); *Coleção Convergências: Matemática*, da Editora SM (L5); *Praticando Matemática*, da Editora do Brasil (L6); e Matemática no Cotidiano, da Editora Scipione (L7).

Todas as produções foram aprovadas no PNLD triênio 2017-2019 e são destinadas ao sétimo ano do Ensino Fundamental, correspondendo a uma amostra de aproximadamente 63,63% do total de livros autorizados para o uso no ensino público brasileiro. A presente amostra foi determinada por conveniência, pois o autor do trabalho é professor efetivo na rede municipal de Porto Alegre e utilizou os livros que foram distribuídos para a sua escola e outras da mesma comunidade no terceiro trimestre de 2016.

Com relação à organização dos capítulos, todos os livros seguem lógica semelhante: aplicações contextualizadas dos números negativos, propriedades dos números pertencentes ao conjunto e, por último, operações básicas (soma, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação). Essa organização é unanimidade entre os autores, bem como no sequenciamento da estruturação dos conteúdos relacionados aos inteiros, com leves diferenças.

Nesse cenário, optou-se por dividir a análise em seis espaços que são comuns a todos os livros. Referente à definição do conjunto dos Números Inteiros, observou-se a problematização ou a motivação do estudo dos Inteiros, o módulo e os números opostos (simétricos), a reta numérica e a comparação entre inteiros. Com relação às operações, observaram-se soma e subtração, multiplicação e divisão, potenciação e radiciação. Neste âmbito, não se incluíram, nessa dissertação, a análise dos textos auxiliares, as seções de tratamento da informação, que são contextualizadas com o uso dos Números Inteiros, e os exercícios propostos entre as seções ou na conclusão dessas.

Inicia-se a análise pelo título da unidade de estudo. L6 intitula seção de estudo como “Números Negativos”, enquanto os outros autores mantêm a denominação de Números Inteiros. Colocar o título do estudo desse conjunto como Números Negativos pode dar uma falsa impressão de que não existe uma interseção entre os números naturais e os inteiros, como se fossem um novo campo numérico à parte. O próprios autores afirmam posteriormente que isso não é verdade na seção "Comparando Números", quando afirmam que "os números naturais são números inteiros" (Andrini & Vasconcellos, 2015, p. 60). Além disso os autores também deixam a falsa impressão de que no capítulo estariam contidos todos os números negativos possíveis, o que não ocorre pois o livro limita-se ao conjunto dos números racionais.

Na tabela abaixo, há uma síntese da relação das propriedades que são tratados em cada livro analisado:

Livro	**L1**	**L2**	**L3**	**L4**	**L5**	**L6**	**L7**
Módulo	X	X	X	X	X	X	X
Simétrico ou oposto	X		X	X	X	X	X
Antecessor e sucessor	X						
Comparação de dois inteiros	X		X	X	X		X
Reta numérica	X	X	X	X.		X	X
Soma	X	X	X	X	X	X	X
Propriedades da soma	X		X	X			X
Subtração	X	X	X	X	X	X	X
Ordem	X		X	X	X		X

Tabela 1- Estudo de propriedades de Números Inteiros nos Livros analisados. Fonte: do autor

Durante a disciplina de Análise e Produção de Material Didático Escolar, cursada no programa de Pós-Graduação em Ensino da Matemática (PPGEMAT/UFRGS), utilizando como referência a estruturação do desenvolvimento do estudo do conjunto dos Números Inteiros, optou-se por escolher para uma análise mais detalhada a obra L1, *Matemática: Ideias e Desafios,* por apresentar uma estrutura mais completa, utilizando como referência o estudo do conjunto proposto por (Domingues, 1991) e (Gonçalves, 1971) e que aprofundamos no capítulo anterior.

Análise da Obra Matemática: Matemática - Ideias e Desafios, de Iracema e Dulce

Nesta seção, analisar-se-á o livro escolhido nos seguintes aspectos: análise do conteúdo matemático envolvido, abordagem metodológica dos conteúdos e a análise dos campos conceituais encontrados na obra. A partir da proposta de pesquisa, delimitou-se a análise dentro das propriedades dos números Inteiros e as operações inseridas no campo aditivo (adição e subtração).

Considerações Iniciais: contexto de criação da obra

Ambas as autoras possuem a mesma formação, são licenciadas em Matemática pela USP. Segundo os dados divulgados pela editora, são professoras em exercício da rede privada em São Paulo, além de atuarem como assessoras pedagógicas na rede pública do Estado. A obra foi criada num contexto de alinhamento com os pré-requisitos do PNLD 2017-2019, trabalhando no que os documentos oficiais chamam de "resolução de problemas".

Análise do Conteúdo Matemático

Numa visão geral, o Capítulo 1 é destinado a apresentação dos números inteiros e sua organização inicia-se com a problematização que promove situações de subtração onde a diferença são valores menores que zero, rediscutindo a subtração em $\mathbb{N}$. Por exemplo, na página 12 há um problema envolvendo dois dados, de cores diferentes, no qual um faz com que o jogador ganhe pontos e o outro faz que o mesmo perca pontos. Após os exemplos, apresenta o conjunto dos Números Inteiros e traz a questão de sucessor/antecessor sob esse novo panorama.

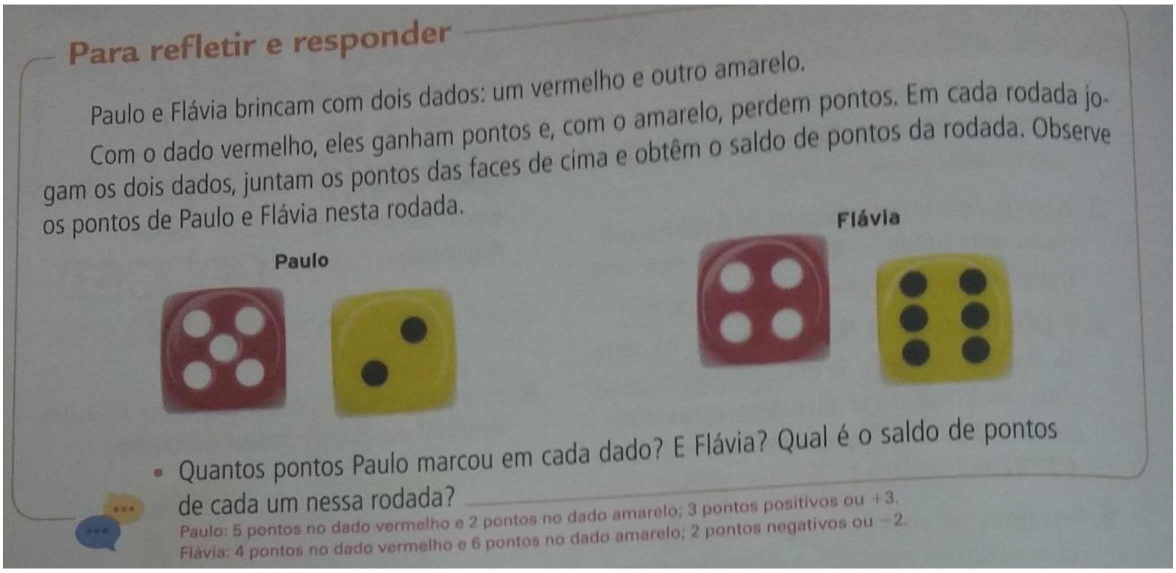


Figura 12- Exemplo de Problematização para a introdução dos Números Inteiros. Fonte: (Mori & Onaga, 2015, p. 12)

Na seção 2, constrói a reta numérica relativa ao conjunto dos Inteiros, usando essa construção para definir o que é o simétrico ou o oposto de um número e também o seu módulo. Ainda nessa seção, as autoras trazem uma discussão em relação à localização, valendo-se de duas retas numéricas ortogonais. A impressão que se tem é de que a inserção do plano cartesiano, nesse capítulo, passa a ser acessória, pois não é utilizada adiante ou relembrada em algum momento para continuar o raciocínio explorativo do conjunto. No fechamento do primeiro capítulo, exploram como realizar a comparação entre dois inteiros.

Na seção 3, trabalham-se gráficos estatísticos, pois as autoras fizeram uma escolha de organização permeando estatística e probabilidade em todos os capítulos dos livros, ao invés de um capítulo à parte.

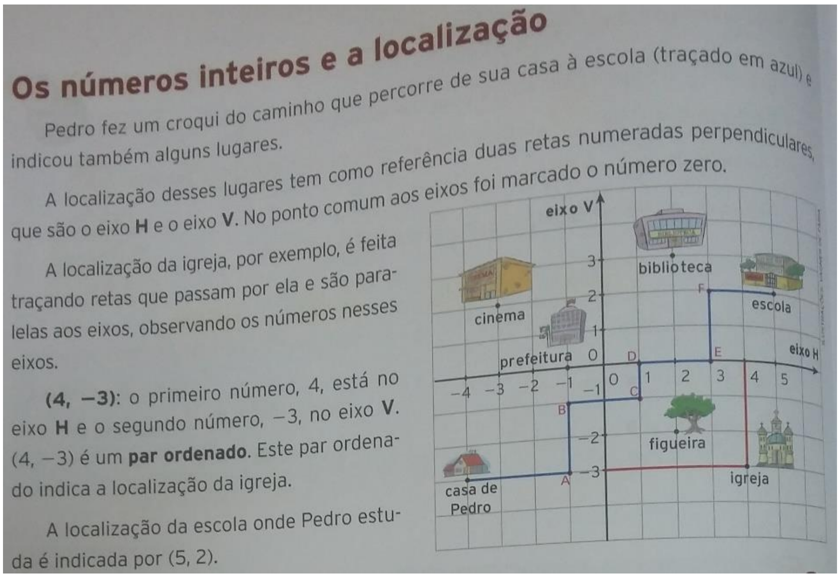


Figura 13- Discussão sobre localização utilizando o sistema ortogonal, incluindo os Números Inteiros Negativos
Fonte: (Mori & Onaga, 2015, p. 24)

O conteúdo matemático é apresentado em exemplos, mas nem sempre contextualizados, baseando-se em exemplo único (sem um processo generalizador) para organizar propriedades ou regras, como podemos verificar na figura a seguir. Acreditamos que exemplo únicos podem ser utilizados como provocativos para discutir propriedades, mas não podem legitimar uma propriedade sem que haja uma generalização ou uma sistematização da situação abordada.

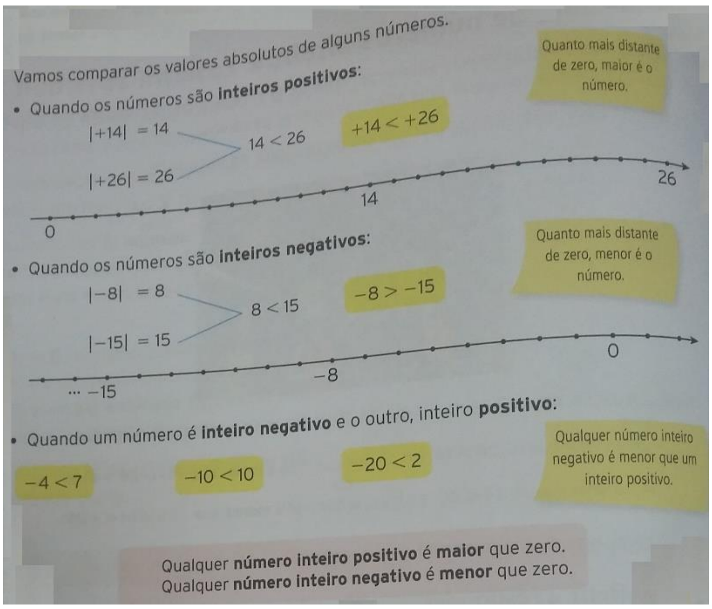


Figura 14- Exemplo de sistematização abordada no livro para a comparação entre inteiros.
Fonte: (Mori & Onaga, 2015, p. 26)

Assim, o conjunto dos Números Inteiros é apresentado sem uma evolução de ideias ou argumentos, além de apresentar alguns problemas de coerência conceitual: em uma página fala-se em números referenciais (p.10) e na outra o conjunto é apresentado como a união dos negativos, positivos e o zero (p.13). Na página posterior, o livro apresenta a existência de antecessor e sucessor no conjunto dos Inteiros.

Nesse ínterim, verifica-se um problema na frase: "Como no caso dos números naturais, um número inteiro tem antecessor e sucessor" (p.14), pois o zero não possui antecessor nos números naturais.

Com relação a representação geométrica do conjunto, ela é construída de maneira lógica e apropriada para os conhecimentos anteriores do aluno, usando um segmento unitário, este posicionado de forma a dar dois sentidos (positivo e negativo) para construir a reta numérica. Na obra, apresenta-se o ponto em cima da reta como abcissa (palavras das autoras) e destacam pontos que são simétricos em relação à origem, dando fluidez para o próximo tópico. Quando são apresentados, na obra, os números opostos ou simétricos (p.21), há exemplos a partir de um problema de duas pessoas caminhando em direções opostas, mas não aborda ou apresenta nenhuma sistematização ou formalização do conceito.

Da mesma forma, o módulo (p.22) é visto geometricamente em cima de uma reta numérica, construído sobre uma folha quadriculada, e o livro faz uma conexão entre a descrição do módulo e a simbologia operacional | |. Todavia, assim como no caso anterior, não há uma generalização dos resultados. Percebe-se, pois, que existe uma conceitualização em relação ao módulo, mas essa não chega a ser um desenvolvimento de ideias e argumentações, é somente uma afirmação isolada.

Na página 24, fazendo conexão com o plano cartesiano, há uma subseção sobre os Números Inteiros e a localização (p.24), na qual estabelece um par ordenado com dois eixos: vertical (V) e o horizontal (H). Colocam-se objetos com pontos representados em todos os quatro quadrantes, e é positiva a iniciativa da obra, pois proporciona ao aluno compreender que o plano cartesiano surgirá de maneira mais natural nos próximos volumes. Entretanto, não foi encontrada a utilização do estudo na sequência do capítulo, sugerindo que essa discussão é uma parte acessória do assunto.

A comparação de Números Inteiros (p.25) é feita a partir do que foi visto no ano anterior, em relação aos números naturais, mas não deixam claro como isso foi realizado antes dessa seção. Em seguida, amplia-se para ambos negativos, problematizando a partir da comparação entre duas temperaturas negativas (-5°C e -10°C). Após isso, o leitor é convidado a olhar algumas possibilidades de comparações utilizando a reta numérica e usando o conceito de módulo para justificar os resultados posteriormente obtidos, apesar das autoras não terem sistematizado ou generalizado os resultados obtidos.

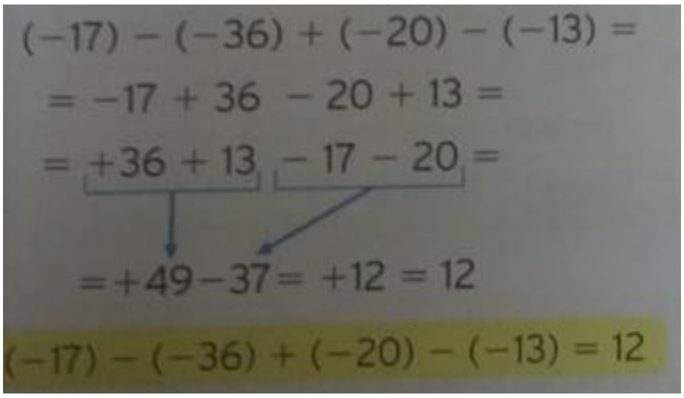
O Capítulo 2 é chamado de "Operações e Problemas". As autoras mantêm a estrutura consensual no desenvolvimento geral (adição e subtração, multiplicação e divisão).

A operação de adição (p.34-36) é introduzida com um exemplo entre dois positivos a partir de um deslocamento em cima da reta, abordando, portanto, de forma não usual, a adição de naturais. Nota-se, talvez prematuramente, que o livro abandona os parênteses que isolam as parcelas a serem operadas no final da página 35. Voltando à operação de adição, a obra trabalha cada caso possível (entre positivos, entre negativos e sinais distintos) entre a adição de dois inteiros, usando o deslocamento como justificativa (sinais contrários como um movimento de costura e sinais iguais como um deslocamento). Ao final, faz uma organização dos resultados obtidos, porém é perceptível que, apenas a partir de um único exemplo, tem-se a impressão de que é possível generalizar os resultados com quaisquer elementos do conjunto, sem construção lógica, somente afirmando que determinado resultado poderia acontecer com quaisquer outros sob as mesmas condições.

Nas propriedades da soma (p.37), os autores descrevem a comutatividade, elemento neutro, e a associatividade, trazendo um exemplo de cada. No caso do elemento neutro, poderiam ter observado que o **zero** é o mesmo dos números naturais. Também não há nenhuma generalização ou formalização das propriedades em linguagem simbológica.

O livro apresenta uma relação entre a adição e a subtração (p.38), escrevendo "minuendo – subtraendo = diferença ↔ diferença + subtraendo = minuendo", ilustrando-a com dois exemplos. Acredita-se que, nesse momento, caberia a oportunidade de se inserir a afirmação: subtrair, dentro do conjunto $\mathbb{Z}$, é equivalente a somar o oposto.

Na subseção "Expressões Numéricas" (p.41) trabalha-se a retirada dos parênteses para realizar uma **Soma Algébrica**, na qual o termo utilizado deveria ser trocado por **Soma Numérica ou Aritmética** para deixar claro o objetivo proposto. Reitera-se que a retirada dos parênteses não é oportuna, posto que não há nenhum ganho do ponto de vista matemático, além de dificultar a apropriação do conceito de quando o símbolo +/- é uma operação ou um sinal de um número ou, ainda, o oposto de um número, como pode-se verificar no tratamento dado, de cunho mecânico, sem situação de contexto, na figura a seguir:



$$(-17) - (-36) + (-20) - (-13) =$$
$$= -17 + 36 - 20 + 13 =$$
$$= \underbrace{+36 + 13}_{} \underbrace{- 17 - 20}_{} =$$
$$= +49 - 37 = +12 = 12$$
$$(-17) - (-36) + (-20) - (-13) = 12$$

Figura 15- Exemplo de Soma Algébrica. Fonte: (Mori & Onaga, 2015, p. 41)

Abordagem Metodológica dos Conteúdos

O livro é sistemático em todas as subseções do material analisado: até a parte da subtração, introduz a motivação com um problema contextualizado e, após o desenvolvimento das afirmações e propriedades, a partir de cálculos de exemplos e casos, é proposta uma subseção chamada “Fazer e Aprender”, que é onde ficam os exercícios propostos para serem resolvidos de modo individual.

Os exercícios são, em grande parte, contextualizados, usando situações de fácil compreensão por parte dos alunos, porém seu caráter é de cunho operacional mecânico, contribuindo pouco para o desenvolvimento do pensamento matemático ou da compreensão das propriedades afirmadas ao longo do texto.

Na subseção “Troquem ideias e resolvam”, propõe situações nas quais a discussão com os participantes da sala de aula se torna necessária. Também existe a seção “Investigue e Explique” em que são colocadas propostas que envolvam a operacionalização de uma calculadora ou propriedades complementares do assunto discutido. Por fim, há a subseção “Desafio” na qual é proposta uma atividade de maior complexidade para a reflexão de temas discutidos anteriormente. Essas seções são mais utilizadas para o encaixe de requisitos propostos pelo PNLD e documentos relacionados aos PCN’s, o que deixa a seção com um aspecto de acessório, subutilizando o seu potencial, como podemos visualizar na figura a seguir, que as autoras utilizam o exercício para realizar atividades que tenham como meio às tecnologias da informação (Brasil S. d., 1998, p. 34), mas esquecem que citar (tanto para o aluno bem como nas orientações para o professor), o uso da definição de sucessores durante o desenvolvimento do mesmo.

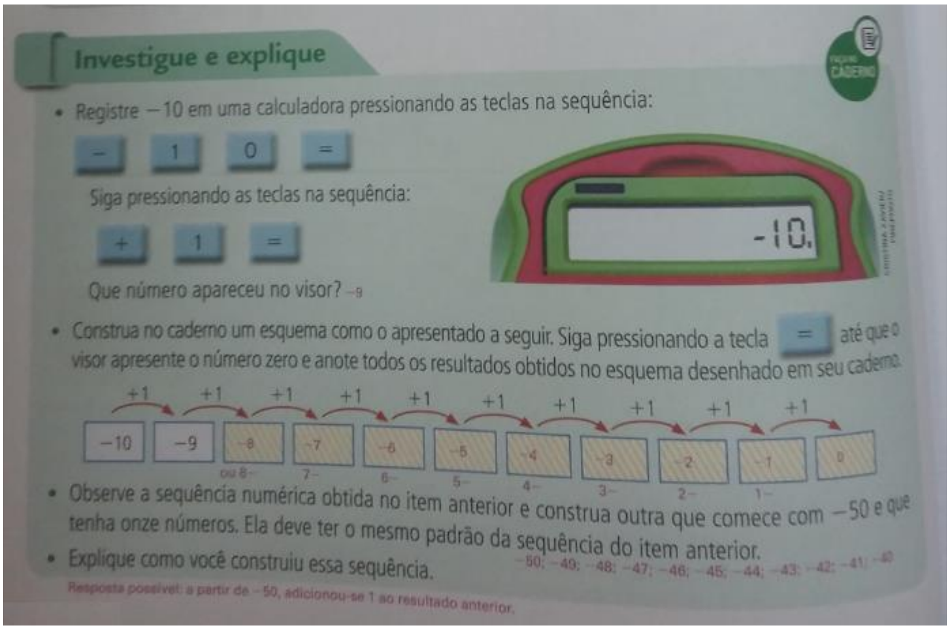


Figura 16- Exemplo da seção "Investigue e Explique". Fonte: (Mori & Onaga, 2015, p. 16)

Análise a partir do Campo Conceitual Aditivo

Para fins deste exercício de análise, dividir-se-á o estudo em duas partes: sobre o conceito de Números Inteiros que está presente na seção um e dois da Unidade I, e o Campo Conceitual Aditivo, apresentado na seção um da Unidade 2. Dentro de cada parte, serão analisadas as situações, as representações simbólicas e as invariantes encontradas no livro analisado.

Na seção 1 da primeira unidade, sobre os Números Inteiros, encontram-se duas representações simbólicas que tentam sempre ser associadas: a representação aritmética, na qual o valor é inserido com seu sinal referencial; e a representação em linguagem materna, como a expressão "Saldo Negativo de R$ 12,00" e "8100 metros abaixo do nível do mar" (p.10).

Nesse capítulo, sente-se a deficiência de alguma tentativa de inserção da representação pictórica ou até mesmo algébrica para a formalização do que seria um número negativo ($-a \ com \ a \in \mathbb{N}$), a fim de que o aluno tivesse a possibilidade de realizar a dupla conversão entre as representações colocadas.

Em relação às Situações, no escopo da obra, verifica-se o valor referencial em diversos contextos (temperatura, altitude e conta bancária). Em relação às invariantes operatórias, localizam-se os seguintes conceitos em ação: *um número abaixo de zero é negativo*, e a decorrência lógica dela, *um número acima de zero é positivo* e, implicitamente no exercício conforme figura abaixo, *zero não é nem positivo ou negativo.*

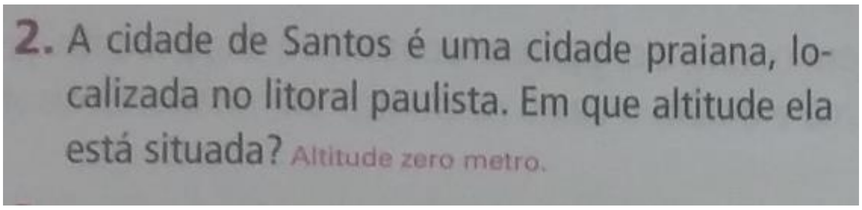
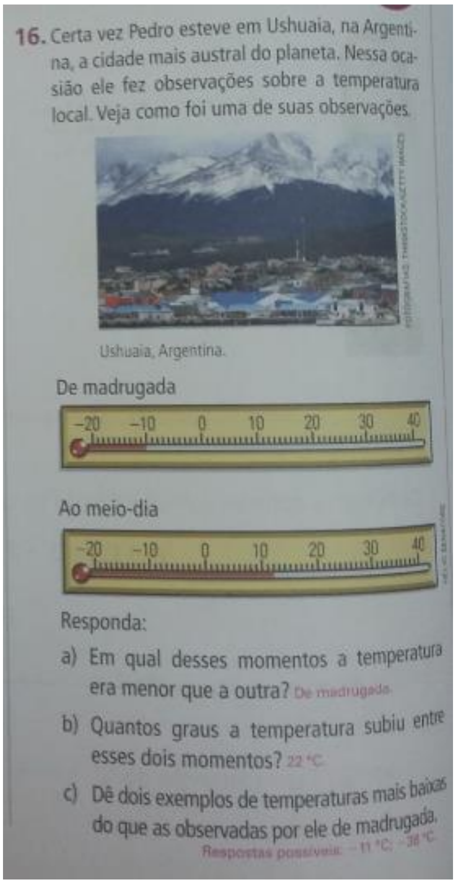

2. A cidade de Santos é uma cidade praiana, localizada no litoral paulista. Em que altitude ela está situada? Altitude zero metro.

Figura 17 - Exercício 2 do capítulo 1. Fonte: (Mori & Onaga, 2015, p. 11)

Ainda nesta seção, tem-se uma subseção que aborda a relação entre a subtração em $\mathbb{N}$ e os números negativos; os autores mobilizam o invariante operacional: *a subtração entre números naturais só é possível se o minuendo é maior que o subtraendo* para introduzir os Números Inteiros, afirmando que "Para cálculos como $4 - 6$ possam ser representados por números, foram criados os Números Inteiros negativos e os inteiros positivos" (Mori & Onaga, 2015, p. 13).

Acredita-se que a conexão entre a invariante e tal afirmação poderia ter sido dada a partir de uma nota histórica da construção dos Números Inteiros ou até mesmo de uma atividade de discussão para com os alunos. Sobre o sucessor e o antecessor, o conceito só é explicitado sem qualquer tratativa da transformação do Campo Conceito Inicial (sucessor e antecessor nos naturais) para o Novo Campo Conceitual. Na página dos exercícios, o exercício 16 mobiliza o conhecimento em ação *na comparação entre dois inteiros, o positivo é sempre maior que o negativo* e, no item b, uma noção intuitiva (a partir da representação pictórica) da subtração entre inteiros, conforme figura abaixo:


16. Certa vez Pedro esteve em Ushuaia, na Argentina, a cidade mais austral do planeta. Nessa ocasião ele fez observações sobre a temperatura local. Veja como foi uma de suas observações.

Ushuaia, Argentina.

De madrugada

−20 −10 0 10 20 30 40

Ao meio-dia

−20 −10 0 10 20 30 40

Responda:

a) Em qual desses momentos a temperatura era menor que a outra? De madrugada

b) Quantos graus a temperatura subiu entre esses dois momentos? 22 °C

c) Dê dois exemplos de temperaturas mais baixas do que as observadas por ele de madrugada. Respostas possíveis: −11 °C; −38 °C

Figura 18- Exercício 16, capítulo. Fonte: (Mori & Onaga, 2015, p. 14)

Somente na Seção 2, em que há o ordenamento dos Números Inteiros, são trabalhadas invariantes já utilizadas nas seções anteriores. Na construção da reta representativa do conjunto dos Números Inteiros, surge uma representação pictórica geral para utilização futura, porém estabelece os seguintes conhecimentos em ação: *o sentido positivo da reta é da esquerda para a direita*; *o número inteiro é definido por dois itens: se está à direita ou à esquerda da origem e a quantidade de unidades que está nele.*

No caso, quando se observam os exercícios, verifica-se que é colocada a questão do sentido da reta. No exercício 30, é proposta uma situação que envolve um elevador perpendicular ao sentido proposto pelas autoras e não há qualquer discussão teórica se isso é possível. Em relação ao conceito em ação sobre o Número Oposto, há um destaque para a representação pictórica, conforme figura abaixo:

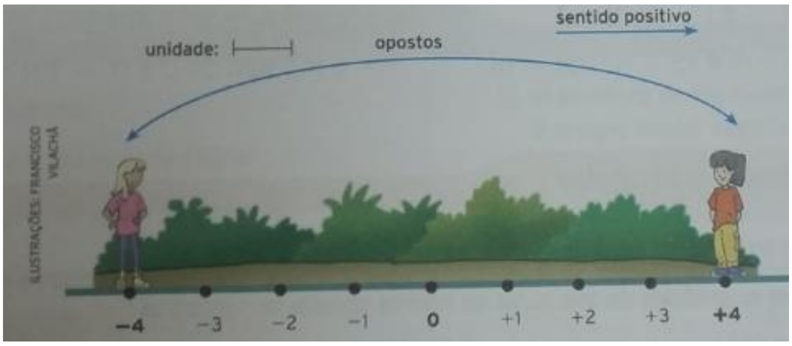


Figura 19 - Representação pictórica do conceito de número oposto. Fonte: (Mori & Onaga, 2015, p. 21)

Nesse contexto, a obra não relaciona diferentes representações simbólicas e não estabelece uma relação direta com a representação aritmética, dificultando a conversão entre as representações simbólicas do conceito de módulo e simétrico. Nos exercícios, encontram-se situações sobre o conceito de Número Oposto, mas são repetitivas e pouco contribuem para constituir um esquema conceitual.

Na página seguinte, para a definição do módulo, é proposto um novo raciocínio utilizando a reta em uma folha quadriculada, para então realizar a conversão entre representações diferentes, definindo somente em linguagem materna o conceito de módulo. No entanto, optam por não formalizar do ponto de vista algébrico, não oferecendo a possibilidade ao aluno de realizar a dupla conversão (aritmético/linguagem materna/algébrico ou pictórico/linguagem materna/algébrico), conforme a figura a seguir.

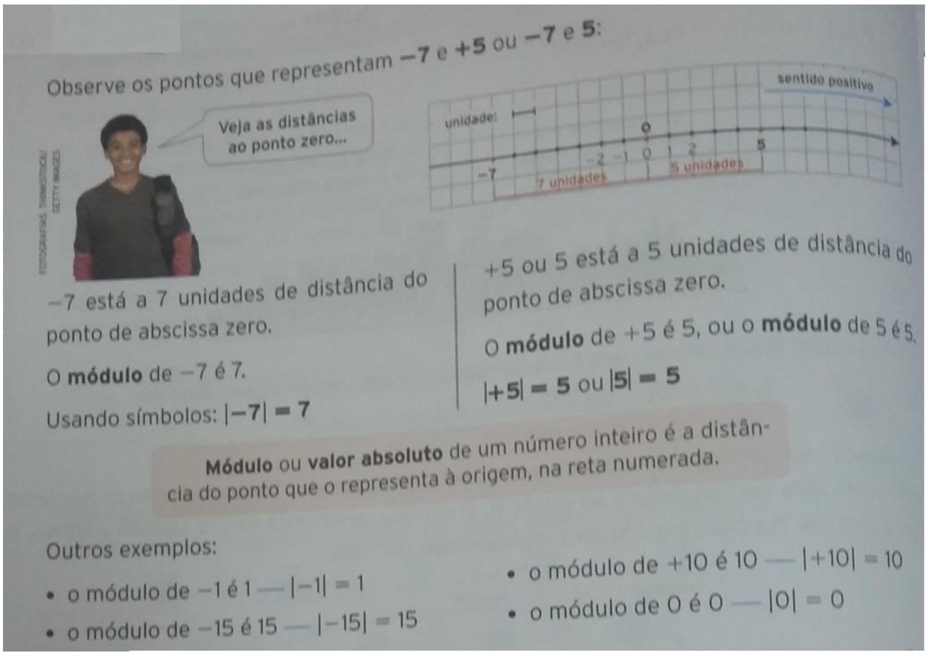


Figura 20 - Representações do conceito de módulo. Fonte: (Mori & Onaga, 2015, p. 22)

Essa possibilidade é levada aos exercícios, mas esses não contribuem efetivamente para a constituição do esquema referente ao conceito, pois não estabelecem relações, somente tratam isoladamente de cada invariante presente. Sobre as invariantes, os conhecimentos em ação presentes são*: os números opostos possuem a mesma distância em relação à origem do sistema; o módulo é a distância entre a origem e o ponto que representa o Número Inteiro*.

Sobre os Números Inteiros e a sua localização no plano cartesiano, o estudo estabelece que há uma conversão entre a representação com o par ordenado (Vertical, Horizontal) com a representação pictórica do plano cartesiano. Nota-se a falta da discussão sobre a relação dos sinais contidos no par ordenado em relação ao quadrante do plano cartesiano proposto. A única situação proposta na subseção é de localização, com o conhecimento em ação *o ponto fica univocamente determinada no encontro das posições do eixo horizontal e vertical.*

Seguindo para a comparação entre números inteiros, o livro restringe-se às situações de comparação, mas não utiliza as extensões possíveis. Acredita-se que essa escolha estratégica para a sequência didática tenha sido pensada desse modo, uma vez que o campo aditivo será apresentado em uma seção mais adiante, na qual haveria a possibilidade de retomá-lo dentro do Campo Conceitual Aditivo.

No que se refere às representações simbólicas, encontram-se o tratamento da representação aritmética e a linguagem materna e pictórica, estabelecendo a possibilidade da dupla conversão proposta por Duval. Na figura a seguir, é realizada uma comparação entre valores menores que zero que faz a devida conversão entre a representação pictórica e em linguagem materna.

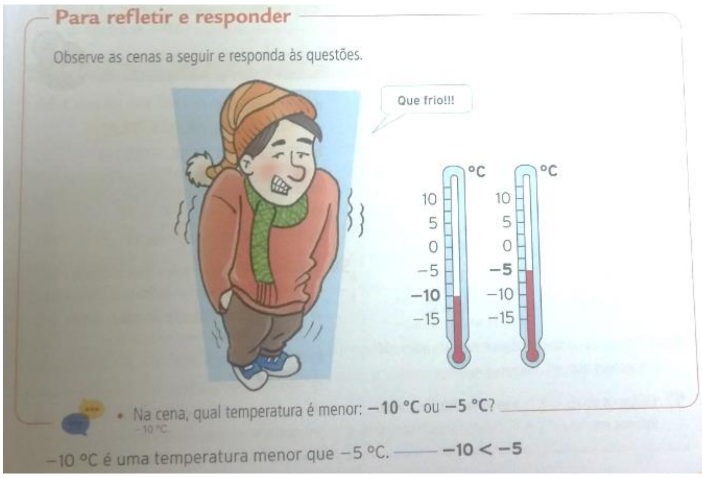


Figura 21- Situação de Comparação entre Inteiros. Fonte: (Mori & Onaga, 2015, p. 25)

Na página seguinte, encontram-se os conhecimentos em ação *no campo positivo, quanto mais distante do zero, maior é o número; no campo negativo, quanto mais distante* *de zero, menor é o número; e qualquer inteiro negativo é menor que qualquer inteiro positivo.*

Na Unidade 2 (Operações e Problemas), Seção 1 (Adição), as autoras iniciam o capítulo com uma situação de transformação (em $\mathbb{Z}$) contextualizada pela variação de temperatura observada em um centro de Meteorologia. Em todos os exemplos trabalhados em relação à representação simbólica, traz a representação aritmética e a representação pictórica a partir da reta numérica construída anteriormente. Nesse ponto, é possível observar que falta outra representação (algébrica ou pictórica, por exemplo) para que o aluno tenha a possibilidade de realizar a dupla conversão e apropriar-se do conceito. Um exemplo pode ser visto na figura seguir.

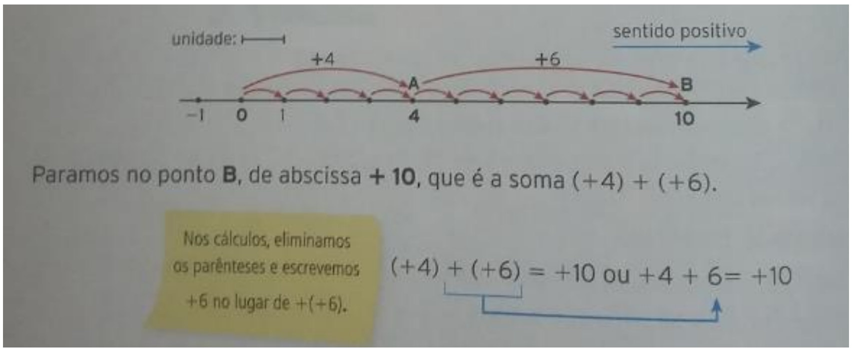
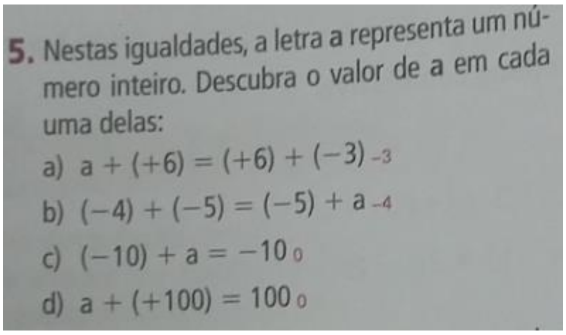


Figura 22- Exemplo de tratamento de Transformação. Fonte: (Mori & Onaga, 2015, p. 35)

No final da seção, as autoras buscam uma sistematização dos resultados com os casos possíveis $((+,+),(+,-),(-,-))$ porém essa discussão se mostrou superficial, pois não há um apontamento da generalização dos resultados, deixando a impressão de que basta um único exemplo de cada caso para o entendimento da operação para todos os casos possíveis.

No tocante às invariantes, destacam-se *o sinal da soma é determinado pelo número que possui maior valor absoluto; sinais iguais levam a uma adição entre módulos; sinais diferentes levam à subtração do maior valor absoluto pelo menor valor absoluto.* Nos exercícios propostos em “Fazer e Aprender” (p.36), as quatro atividades propostas pelas autoras são referentes a situação de transformação, isto é, do ponto de vista dos Campos conceituais de Vergnaud não representam uma pluralidade de situações. Com isso, acredita-se que o esquema fica fragilizado para o enfrentamento de novas situações. Na página 37, as autoras iniciam a apresentação das propriedades da adição entre inteiros (comutatividade, associatividade e elemento neutro), mas de maneira superficial: demonstram as representações em linguagem materna e aritmética, não possibilitando ao aluno realizar a dupla conversão.

Nos exercícios propostos, destaca-se o número 5 na figura abaixo. Há um esforço em trazer uma representação algébrica para realizar a conversão entre o que fora apresentado na página anterior.


5. Nestas igualdades, a letra a representa um número inteiro. Descubra o valor de a em cada uma delas:

a) $a + (+6) = (+6) + (-3)$ -3

b) $(-4) + (-5) = (-5) + a$ -4

c) $(-10) + a = -10$ 0

d) $a + (+100) = 100$ 0

Figura 23- Exercício sobre as propriedades da adição entre Inteiros. Fonte: (Mori & Onaga, 2015, p. 38)

Nesse exercício, pode-se observar a mobilização das seguintes invariantes: *a ordem das parcelas na adição não interfere na soma; ao adicionar zero como parcela, a soma é igual à outra parcela.*

Na subtração entre inteiros, as autoras não buscam uma sistematização da relação entre ela e a adição, somente apresentam que elas são operações inversas e que

$$minuendo - subtraendo = diferença \leftrightarrow diferença + subtraendo = minuendo$$

Apresentam que as operações são inversas e que, sem qualquer discussão, é uma propriedade extensivamente trabalhada e válida (sem argumentações) no conjunto dos inteiros. Nessa subseção, não há preocupação com as diferentes representações simbólicas, focadas excessivamente na representação aritmética com situações de transformações simples.

No entanto, um ponto positivo a destacar é o exercício 15, no qual as autoras propõem a conversão inversa entre a representação em linguagem materna e a aritmética: a atividade traz a diferença entre dois números inteiros iguais a -180 e pede para os alunos pensarem em que situações isso poderia ter ocorrido. Esse tipo de exercício é extremamente enriquecedor, já que mobiliza os alunos a agirem na construção de uma situação a partir da representação aritmética, pensando nas possibilidades das situações.

Concluindo a análise, percebe-se que o esquema conceitual dos Números Inteiros está fragilizado com as informações apresentadas até o encerramento da seção de Adição, já que as situações apresentadas focam excessivamente em transformações e, raras vezes, em comparações.

Percebe-se que o material analisado não abrange todas as situações e suas extensões, fazendo com que fique a cargo do Professor (ou até mesmo do aluno que irá aprender sozinho) enriquecer o trabalho. Com relação à representação simbólica, foram pontuais os casos em que era possível realizar uma dupla conversão. Majoritariamente, encontram-se uma ou duas representações simbólicas, às vezes duas, com uma distância muito grande entre a apresentação teórica e os exercícios, dificultando a compreensão do conteúdo por parte do aluno.

No que tange às invariantes, pode-se perceber que estão presentes em grande número nas situações apresentadas, inclusive são explicitadas algumas vezes.

Metodologia de Pesquisa

Como metodologia de pesquisa, realizar-se-á uma pesquisa de cunho qualitativo. Segundo (Bogdan & Biklen, 1994), esse tipo de pesquisa tem uma característica primordial para a área educacional: o foco e o interesse direcionados ao processo. Os autores também apontam características básicas da investigação qualitativa, porém não necessariamente todas estarão presentes e algumas estarão mais explícitas, dependendo dos sujeitos e objetos envolvidos na pesquisa.

Numa pesquisa qualitativa, "a fonte direta dos dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 47). Assim, os dados são coletados com naturalidade, e o investigador tem um papel crucial na coleta de dados, pois interage com os pesquisados para que tenha maior conhecimento de como os sujeitos desenvolvem seu raciocínio.

O caráter de uma pesquisa qualitativa é descrito, ou seja, serão utilizados como instrumentos de coleta vídeos de aulas, registros dos alunos e diário de campo do docente. (Bogdan e Biklen, 1994, p.48)

Dentro do ambiente de ensino, o objetivo da pesquisa não prioriza melhorar o ensino de um determinado conteúdo, mas sim entender o processo e como esse modifica todos os envolvidos, inclusive o próprio pesquisador. "Os investigadores interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos" (Bogdan e Biklen, 1994, p.48). Em particular, nessa pesquisa, há uma tentativa de novas possibilidades em relação ao material didático a partir do processo investigativo em múltiplas frentes.

Como forma de análise dos dados coletados, "os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva" (Bogdan e Biklen, 1994, p.50). Com isso, o investigador não se obriga a construir hipóteses a serem testadas ou a validar seus instrumentos. Sua forma de investigação é indutiva a partir do olhar construído como seu referencial teórico.

Numa pesquisa qualitativa dentro do tema de ensino, a reflexão e a significação dos conceitos envolvidos são pontos principais da pesquisa. "O significado é de importância vital na abordagem qualitativa" (Bogdan e Biklen, 1994, p.50). Assim, o questionamento por parte do pesquisador visa ao entendimento das experiências vivenciadas pelo pesquisado.

Após a pesquisa bibliográfica, a análise de algumas das produções didáticas referentes aos Números Inteiros do PNLD 2017-2019, foi organizada uma sequência didática, cujo material que tem como objetivo complementar algumas das lacunas percebidas nos livros didáticos, a fim de oferecer aos alunos uma visão sobre o conjunto dos Números Inteiros de maneira mais completa e estruturada.

Durante a fase de estudos, considera-se que uma revisão dos números naturais e suas propriedades se fazem imprescindíveis para a construção da semirreta representativa de $\mathbb{N}$ para uma posterior reflexão, possibilitando desenvolver essa representação para o conjunto dos Números Inteiros.

Planejamento Didático

Foram organizadas 12 aulas de 90 minutos (carga horária de 18 horas relógio) devido à distribuição de carga horária oferecida pela escola que acolheu a pesquisa. Na tabela abaixo, seguem o assunto e os objetivos tratados em cada encontro:

Aula	Objetivo
01	1. Verificar conhecimentos anteriores sobre os números naturais.
02	2. Revisar o conceito de um número natural, de alguns resultados e propriedades desse conjunto. 3. Revisar a adição nos naturais, tanto do ponto de vista aritmético como da linguagem materna.
03	4. Construir a semirreta numérica para representar o conjunto dos naturais. 5. Definir a adição e seus termos. 6. Definir a adição e seus termos sob uma representação pictórica.
04	7. Explorar as propriedades da adição (comutatividade, associatividade e elemento neutro) a partir das diversas representações semióticas (Linguagem materna, aritmética e pictórica).
05	8. Explorar as propriedades do elemento neutro. 9. Explorar as propriedades acima citadas, na tentativa de organizar uma linguagem aritmética mais abrangente.
06	10. Retomar e aprofundar a operação de subtração entre números naturais. 11. Estabelecer as representações semióticas da subtração e suas representações nos naturais. 12. Estabelecer relações entre as subcategorias acima e a representação pictórica.
07	13. Construir, a partir da semirreta representativa dos números naturais, uma reta numérica, explicitando nela os Números Inteiros.
08	14. Mostrar como estão presentes, a partir de alguns exemplos, os números positivos e negativos dentro do nosso cotidiano.
09	15. Formalizar o conceito de valor absoluto ou módulo. 16. Formalizar o conceito de número oposto ou simétrico.

10	17. Construir a adição entre quaisquer dois inteiros. 18. Construir a adição e seus termos sob uma representação da reta numérica.
11	19. Explorar as propriedades da adição entre inteiros (comutatividade, associatividade e elemento neutro) a partir da representação na reta numérica. 20. Definir o elemento neutro da adição. 21. Explorar as propriedades acima citadas, na tentativa de organizar uma linguagem aritmética mais abrangente.
12	22. Estabelecer a subtração entre dois inteiros quaisquer.

Tabela 2- Visão geral dos objetivos do planejamento didático

Na elaboração das aulas, o intuito foi de contemplar o máximo possível da estrutura aditiva no conjunto dos Números Inteiros, buscando relacionar a exposição de cada situação (composição, transformação, comparação e extensões) com as representações simbólicas (linguagem materna, aritmética e pictórica) inseridas no contexto dos alunos envolvidos na prática do estágio supervisionado. Além disso, todos os problemas foram originais e pensados a partir do conhecimento do professor sobre o cotidiano da comunidade escolar.

Essas aulas foram elaboradas, revisadas e aplicadas durante a disciplina de Estágio Supervisionado do Programa de Pós-Graduação em Ensino da Matemática. Como parte do estágio, foi elaborado um relatório de prática docente que será analisado a partir do próximo capítulo.

Para o alinhamento com as práticas estabelecidas pelo Comitê de Ética de Pesquisa envolvendo humanos, este trabalho de ação docente teve a Autorização institucional da Secretaria Municipal de Educação de Porto Alegre (SMED/POA), além da assinatura de um termo de consentimento, por parte dos responsáveis legais de cada aluno, com informações dos objetivos e dos parâmetros de aplicabilidade da pesquisa. Também, os alunos assinaram um termo de assentimento, no que foram explicitadas as etapas nas quais estariam envolvidos e as delimitações da ação de pesquisa, esclarecendo que eram livres e que não receberiam qualquer contrapartida em troca de sua participação.

A prática de pesquisa foi aplicada na turma C13 da Escola Municipal José Mariano Beck, localizada no município de Porto Alegre, entre os meses de maio a julho, totalizando 25,5 horas de prática em sala de aula.

A Rede Municipal de Educação de Porto Alegre e o Projeto Escola Cidadã

A Rede municipal de Porto Alegre é composta atualmente por 99 escolas de nível Infantil, Fundamental, Médio, Curso Normal e Técnico Profissional, tanto na modalidade regular como na de Educação de Jovens e Adultos (EJA). A partir dos anos 80, sob um determinado posicionamento sócio-político, houve uma transformação na proposta político-pedagógica da rede que ficou conhecida como Escola Cidadã, baseada nas propostas do educador, pedagogo e filósofo Paulo Freire.

O plano de trabalho da Escola Cidadã prevê uma instituição próxima à comunidade, pertencente à identidade desse grupo. Para atender à exigência da proposta, as escolas da Rede estão localizadas dentro da periferia, em sua maioria longe dos centros e das vias de acessos principais da cidade, e sempre são um centro de referência como espaço de convivência nas comunidades em que essas escolas estão inseridas. (Porto Alegre, 1998).

Nesse modelo, foi adotada a prática de ensino por Ciclos de Formação no Ensino Fundamental, esses trienais, utilizando parâmetros máximos de idade para a conclusão de conclusão de ciclo e um sistema de avalição mais longo que o anual. O primeiro Ciclo é chamado de A, que comporta o 1º (A10), 2º (A20) e 3º (A30) anos do Ensino Fundamental. O segundo Ciclo, chamado de B, é a transição entre o professor referência e a multidisciplinaridade. São partes do Ciclo B os anos referentes ao 4º (B10), 5º (B20) e 6º (B30). Por último, o terceiro Ciclo é composto pelo equivalente ao 7º (C10), 8º (C20) e 9º (C30) anos do Ensino Fundamental, onde o último dígito identifica a turma. Assim, a C13 terceira turma de 2018 que está no primeiro ano do segundo ciclo. Caso o aluno precise de mais tempo em um ciclo, existe a possibilidade de promoção nas turmas de progressão (AP, BP e CP), em que há novas práticas e vivências para auxiliar o aluno nas etapas posteriores. Atualmente, por determinação da gestão atual (2017-2020), as turmas de progressão foram extintas, e os alunos foram automaticamente promovidos ao próximo ciclo.

A Escola Municipal de Ensino Fundamental José Mariano Beck escola está localizada entre os bairros Bom Jesus e Jardim Carvalho, atendendo principalmente à comunidade da Vila Pinto. Durante a administração do Prefeito Alceu Collares, foi escolhido o terreno e foi feita a terraplanagem do local, onde se construiu os alicerces da escola e criou-se um Centro Integrado de Educação Pública (CIEP) em 1988. Somente quatro anos depois (1992), na gestão do Prefeito Olívio Dutra, a obra teve suas estruturas fixadas e houve a capacidade de atender alunos em dois turnos.

Atualmente, a escola possui em funcionamento os três ciclos durante os turnos da manhã e tarde e Educação de Jovens e Adultos nas totalidades 1 a 6 (todo o Ensino Fundamental) no período da noite.

Analisando os aspectos sociais[8], o índice de desenvolvimento humano (IDH) baixo[9], com taxa 5,06% de analfabetismo e renda média familiar de 2,71 salários mínimos. A escola José Mariano Beck obteve com o último escore (2,6) do índice de Educação Básica (IDEB), abaixo da meta proposta (3,6) pelos órgãos governamentais[10].

A turma C13, objeto desta pesquisa, é composta por 27 alunos, dezesseis deles com pelo menos 75% de frequência durante os meses de maio a julho. Dentre os participantes efetivos, 4 meninos e 12 meninas. A idade média dos alunos é de 13 anos, os quais 62,5% foram retidos pelo menos no último ano. A partir de conversas com a supervisão e a direção, percebeu-se que a turma C13 possui grandes diferenças em relação às outras turmas do mesmo ano: começou sua constituição a partir de reorganizações das turmas C11 e C12, além dos alunos que não tinham sido promovidos e das transferências que a escola recebeu durante o ano. Estabeleceu-se, pois, a descaracterização dos nomes dos alunos, associando-lhes letras gregas para cada um e mantendo somente o seu gênero.

Com relação à posição do professor que investiga uma prática em sala de aula, esse não conhecia a turma antes da prática, pois trabalha na mesma escola durante o turno da noite, na Educação de Jovens e Adultos. Assim, a escolha da turma foi feita por conveniência, devido ao fechamento entre os horários da turma e os horários disponíveis.

[8] Dados do Censo IBGE 2013.
[9] Abaixo de 0,555. Para fins de comparação, o município de Porto Alegre possui IDHM 0,805 (2013). Classificação dada pelo Programa Nações Unidas pelo Mundo. Fonte: https://bit.ly/2qxrhuN
[10] Fonte: INEP (2018)

Proposta Didática, Implementação e Análise dos Resultados

Neste capítulo, dissertar-se-á sobre a implementação da proposta didática inserida nas condições explicitadas na seção anterior, fazendo a análise das produções realizadas em sala de aula.

Plano de aula 01: verificação de conhecimentos anteriores

Tempo previsto: 90 minutos (2 períodos)

Materiais Necessários: Quadro expositivo e folha de atividades

Metodologia: Expositiva

Desenvolvimento:

Primeiramente, será distribuído um trabalho que será recolhido posteriormente, com quatro exercícios de sondagem, apresentados a seguir, sobre operações dos Números Inteiros. Serão destinados 40 minutos do período para essa atividade.

Exercício 1

Antes de começarem as aulas, sua mãe lhe deu R$ 40,00 para você comprar seu material escolar no mercadinho da esquina. Disseram que você deveria gastar esse dinheiro somente com os itens da lista abaixo e não poderia sobrar troco. O que você compraria?

Tabela de Preços

Mercadorias	Preço Unitário
Caderno capa dura capa sortida	R$ 8
Caderno com foto do Inter	R$ 6
Caderno com foto do Grêmio	R$ 6
Caderno com foto da Seleção Brasileira	R$ 7
Caneta esferográfica tinta azul e preta	R$ 3
Caneta grafite	R$ 6
Borracha comum	R$ 1
Borracha colorida	R$ 2
Estojo para lápis e caneta	R$ 10
Agenda	R$ 8
Lápis comum	R$ 2
Lápis com borrachinha na ponta	R$ 3
Conjunto de réguas	R$ 6

Tabela 3 - Lista de preços da atividade 1 da aula 1. Fonte: do autor

Utilizando a tabela, responda:

a) Qual é o maior número de itens diferentes que se pode comprar? E o menor número de itens distintos?

b) Se você fosse fazer um kit com caderno, caneta, lápis e borracha, quantos kits seria possível de comprar?

Exercício 2

Huguinho, Zezinho e Luisinho irão jogar bolinha de gude em equipe contra outros três amigos da rua de baixo. Huguinho possui oito bolinhas, Zezinho tem 10 e Luisinho, 12. Por outro lado, cada um do time adversário tem nove bolinhas. Qual o time que começa com maior número de bolinhas? Represente a solução do problema com um desenho.

Exercício 3

Seu Joaquim vende churrasquinho nos dias de jogo para fazer uma renda extra. Para trabalhar, ele gasta 200 reais por semana entre gasolina, carvão e materiais para servir churrasquinho e refrigerante. Na primeira semana do mês, há jogo na quarta e no domingo, onde ganha 260 reais em cada dia. Na segunda semana, há somente um grande jogo no domingo, e ele ganha 500 reais. Na terceira semana, há dois jogos, e ele fatura 400 reais no total. Na última semana, houve um problema no estádio e os jogos foram cancelados na última hora, gerando prejuízo para seu Joaquim. No final do mês, qual foi o valor que ele lucrou, vendendo churrasquinhos nos jogos?

Exercício 4

Escreva um problema matemático que tenha a seguinte expressão aritmética como resolução: $36 - 18 + 27$

Após um período de trabalho, será realizada a correção dos exercícios 2 e 3 e compartilhadas as soluções encontradas pelos alunos nos exercícios 1 e 4, pois são atividades de natureza aberta (não há uma única resposta).

Relato da Prática e Análise

O Exercício 1 é uma atividade de caráter aberto e que busca conversões entre a linguagem materna e a aritmética a partir da situação de composição. Para resolver esse exercício, os alunos necessitaram da intervenção do professor para entender que eles deveriam utilizar os R$ 40 para a escolha de itens a partir da tabela da atividade. Na situação do item “a”, cada aluno conseguiu pensar apenas em uma única lista, valendo o preço fixado. Observando esses primeiros resultados, foram escritos os resultados de cada aluno no quadro e indagados qual teria sido o critério de escolha dos itens da tabela. Kappa respondeu que seu critério de escolha foi a lógica dentro dos materiais, isto é, que não lhe faltasse nenhum material para seu cotidiano na escola. Em seguida, mostrou-se a resposta de Kappa, utilizando a tabela oferecida. Podemos perceber que a lógica do material superou a instrução do problema, pois ele gastou somente R$ 37,00 para comprar os seus itens.

Tabela de Preços

Mercadorias	Preço Unitário
Caderno capa dura capa sortida	R$ 8
Caderno com foto do Inter	R$ 6
Caderno com foto do Grêmio	R$ 6
Caderno com foto da Seleção Brasileira	R$ 7
Caneta esferográfica tinta azul e preta	R$ 3
Caneta grafite	R$ 6
Borracha comum	R$ 1
Borracha colorida	R$ 2
Estojo para lápis e caneta	R$ 10
Agenda	R$ 8
Lápis comum	R$ 2
Lápis com borrachinha na ponta	R$ 3
Conjunto de réguas	R$ 6

Figura 24 - Figura: resposta do aluno Kappa para a atividade 01 da folha 01. Fonte: do autor

Após, indagou-se à aluna Alfa (chegou a 9 itens) sobre seu critério de escolha. Ela respondeu que, como queria a maior lista possível, optou por usar os itens mais baratos possíveis, até que precisou utilizar itens de maior valor para fechar o valor final proposto. Os outros alunos utilizaram escolhas aleatórias (sem critério aparente), ficando entre 5 e 9 itens escolhidos. Na figura abaixo, há a resposta de Alfa para a situação proposta no mesmo item anterior.

Qual é o maior número de itens diferentes que se pode comprar? E o menor número de itens distintos?

24,00 { - CADERNO DO INTER
- CADERNO DO GRÊMIO
- CANETA GRAFITE
- CONJUNTO DE RÉGUAS }
- CADERNO SELEÇÃO BRASILEIRA
- CANETA AZUL E PRETA

- BORRACHA COMUM
- BORRACHA COLORIDA
- LAPÍS COM BORRACHA

Figura 25 - Resposta da aluna Alfa para a atividade 01 da folha 01. Fonte: do autor

Analisando a partir do campo aditivo (Vergnaud, 1996), pode-se perceber que os alunos tiveram sucesso ao realizarem a composição entre um conjunto de valores com o objetivo de atingir uma soma fixada pela situação. Por outro lado, nenhum aluno respondeu ao item subsequente, o que leva a pensar que o exercício com multiplicidade de possibilidades de resposta os deixou confusos em relação à execução da tarefa, pois aparentemente não estavam acostumados a atividades de cunho aberto na disciplina de

Matemática. Além disso, acredita-se que a expressão "somente com os itens da lista abaixo" deu a falsa impressão aos alunos que só poderiam escolher um item de cada. A partir desses resultados, pensou-se em reescrever o primeiro item como uma atividade coletiva de discussão (em grupos ou entre a turma, se possível) e remodelar o segundo item.

Em relação à representação simbólica, os alunos não tiveram a preocupação de expressar o algoritmo da adição, isto é, recorreram ao cálculo mental que lhes fora suficiente para essa situação. No máximo, tem-se a adição entre totais, como na figura abaixo produzida pela aluna Beta.

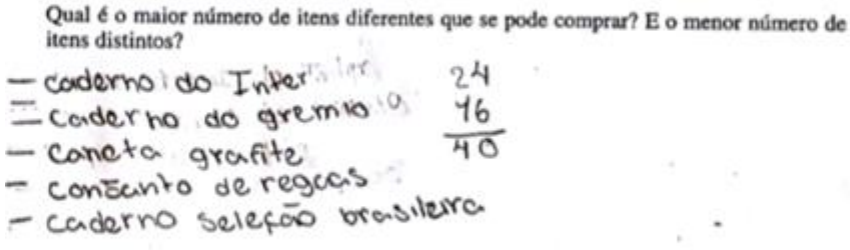


Figura 26 - Resposta de Beta à primeira questão do exercício 01 da folha 01. Fonte: do autor

Sobre os Invariantes Operatórios presentes, identificou-se que é utilizado um teorema-em-ação o qual *a soma das somas parciais de uma sequência de adições é igual ao somatório de todas as parcelas (propriedade associativa da adição),* esse de modo explícito na produção de Beta, quando reagrupa o total em dois montantes para então operacionalizar a soma final.

No Exercício 2, cujo intuito era de que realizassem a conversão entre a linguagem materna e a representação pictórica de uma situação da comparação de composição, os alunos não compreenderam a parte da questão relativa a desenhar a solução do problema, direcionando seus esforços em representar a situação envolvida no problema. Todas as soluções apresentadas focaram mais a representação pictórica na situação do jogo contra o adversário do que as quantidades envolvidas. Para fins de registro, quase a totalidade dos alunos entendeu que a situação proposta era uma composição de uma comparação das quantidades entre as bolinhas de cada equipe. A seguir, a resposta de Beta para a atividade dois.

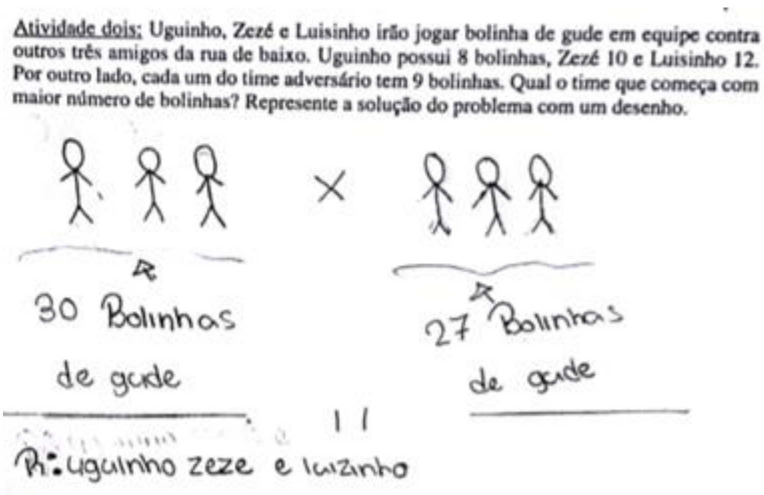


Figura 27 - Resposta de Beta à situação proposta na atividade 02. Fonte: do autor

Analisando a situação, pode-se perceber que os alunos interagiram positivamente com a comparação de composição, reunindo os totais e realizando a comparação para a tomada de decisão. No que tange à representação pictórica, houve uma preferência em representar a situação proposta no problema do que somente a resposta do mesmo, que ficou expressa pela linguagem materna de forma extensiva. Nessa questão, o invariante mobilizado pelos sujeitos foi o teorema em ação da *união das cardinalidades*, mesmo que não tenham expressado graficamente como chegaram aos valores 27 e 30.

No Exercício 3, que tinha como objetivo a conversão entre a linguagem materna e a aritmética em uma situação de transformações sequenciais, houve somente uma aluna que se manifestou frente à situação proposta. Alfa, após realizar a atividade, disse que entendeu o pedido da situação, mas questionou sobre a clareza do texto: ela estava tentando compreender se o custo de R$ 200,00 para fazer os churrasquinhos era por evento ou semanal, pois semanalmente para ela não fazia sentido algum.

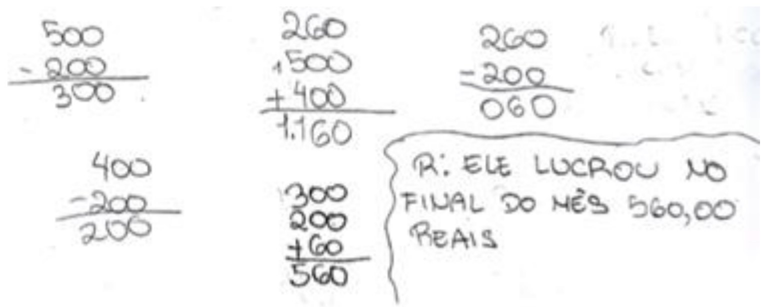


Figura 28 -Resposta de Alfa à situação proposta na atividade 03. Fonte: do Autor

Percebe-se que Alfa compreende (mesmo não concordando integralmente) que a situação necessitava de uma série de transformações de composição (com o ganho) e extração (com a perda) ao longo da linha temporal até obter o valor final. Com relação à representação simbólica, ela fez a conversão entre a linguagem materna e a algorítmica, optando por efetuar os resultados um por vez para reunir os valores e, após, convertendo novamente o resultado na representação em linguagem materna. A falta de clareza no texto fez com que Alfa não replicasse a situação da primeira semana, tratando como se houvesse somente um jogo naquele período. Com relação aos invariantes operatórios, pode-se dizer que ela se valeu do conceito-em-ação *ganho é adição de quantidade,* além de *gasto é subtração de quantidade.* Também pode-se observar que o teorema-em-ação *a ordem de escolha das parcelas da adição não altera o resultado* faz-se presente quando a aluna não monta o algoritmo utilizando a linha temporal, mas a ordem decrescente dos resultados semanais. Para fins do produto didático contido no Anexo, será feito readequações para deixar clara situação proposta e aproximá-la do cotidiano.

Observou-se que todos os alunos deixaram em branco o Exercício 4, a qual consistia em realizar uma conversão entre a representação aritmética e a representação em linguagem materna em uma situação de dupla transformação. Conforme comentado anteriormente, transformou-se o Exercício 4 em uma construção coletiva da turma. Começou-se inserindo a expressão "$36 - 18 + 27$" e trazendo a proposta de escrever um problema de Matemática cuja solução seria obtida a partir da expressão numérica colocada no quadro. Após um breve período sem manifestações por parte dos alunos, eles solicitaram sugestões de temas para o problema. No meio da discussão, um dos alunos propôs como tema: uma ida ao mercado, onde gastaria uma quantia de dinheiro que levaria. Então os alunos ditaram o problema para que escrevêssemos no quadro, o qual iniciava da seguinte forma: "Eu vou ao mercado com 36 reais e gasto 18". Após um breve momento, o professor indagou aos alunos onde entraria o número 27. Alfa respondeu da seguinte forma: "Como é mais, eu teria que ganhar esse dinheiro... então eu o achei na rua." Logo, a pergunta seria: "Quanto de dinheiro eu tenho?". Completando o problema: "Eu vou ao mercado com 36 reais e gasto 18, na saída acho 27 reais. Quanto dinheiro eu possuo?".

Nessa situação, o esquema (após uma primeira direção) foi único entre os alunos da turma: com o tema definido, escolheram o tipo de situação (transformação) e, após, estabeleceram-se quais invariantes operatórios estariam disponíveis (no caso ganho/perda-gasto associados à adição e à subtração), oferecendo suporte para que realizassem as transformações até o valor final. Para os sujeitos, foi uma situação completamente nova: estão acostumados a receber situações para estabelecer uma solução ou tomada de decisão.

Com isso, pode-se perceber que a conversão entre a linguagem aritmética (extensiva ou algorítmica) e a linguagem materna não é simplesmente inversiva na sala de aula, a não ser que o professor provoque esse tipo de situação com maior frequência. A seguir segue as transformações do exercício criado:

Em seguida, provocou-se a montagem de um novo problema. O aluno Gama diz

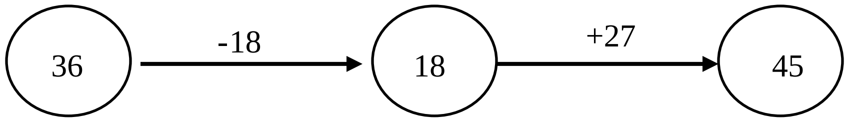


Figura 29- Dupla transformação a partir da situação criada pelos alunos. Fonte: do Autor

que gostaria de fazer com balas. Então eles começam a discutir entre si, ditando para o professor escrever no quadro: "Eu tenho 36 balas..." A seguir, a aluna Beta dá a sugestão de distribuir 18 balas para pessoas (não afirma quantas balas seriam para cada uma) e que depois foi num mercado e comprou mais 27 balas. Alguns alunos ficaram confusos com a ideia de distribuição, mas aceitaram a sugestão da colega. Assim, o problema elaborado foi o seguinte: "Eu tenho 36 balas e distribuo 18 balas entre pessoas. Depois disso, vou ao mercado e compro mais 27 balas". Após o professor lembrar a inserção da questão do problema, um aluno faz a sugestão: "Eu tenho 36 balas e distribuo 18 balas entre pessoas. Depois disso, vou ao mercado e compro mais 27 balas. Quantas balas eu possuo agora?".

Neste momento, pôde-se perceber que os alunos se apropriaram rapidamente do esquema inicial proposto pelo professor (buscar um tema, definir a situação, associar os invariantes às ações da narrativa), porém necessitaram de provocação para definir a questão chave do problema. Provavelmente, se os deixasse encerrar o problema sem a inserção da frase “Quantas balas eu possuo agora?”, enfrentariam a situação da mesma maneira. Com relação à representação simbólica, a confusão gerada pelo uso da expressão “distribuição” por Beta mostra a associação entre ela e a operação de divisão. Para o sujeito detentor das balas, no problema, distribuir (sem definir para onde) representa a perda ou a extração das balas de sua propriedade, que assim pode ser associada à subtração. Na figura a seguir, seguem os problemas criados coletivamente:

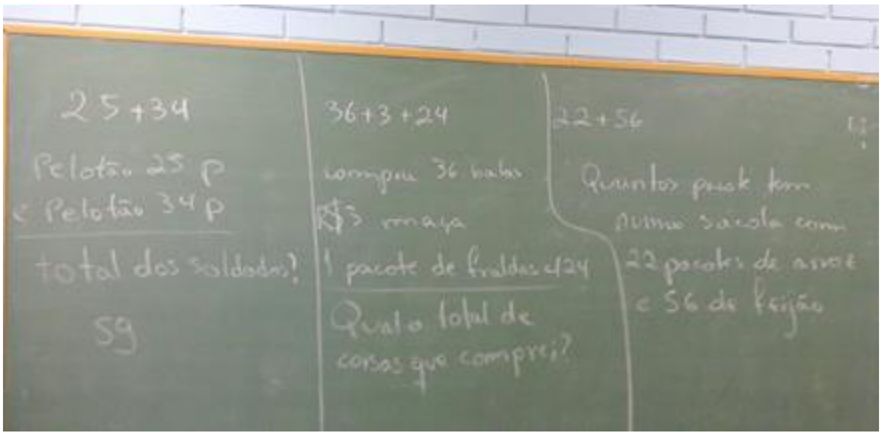


Figura 30 - Outros problemas construídos no quadro sobre a Atividade 04 – Folha 01. Fonte: do autor

Após, foram colocadas mais três expressões no quadro para gerar mais problemas. Ao inserir expressões somente com a operação de adição, a turma (sem provocação nenhuma) alterou a natureza da situação ao buscar problemas de composição. Com isso, acredita-se que os alunos associem a dinâmica entre adição e subtração com perdas e ganhos, e uma sequência de adições como uma composição de múltiplas coleções.

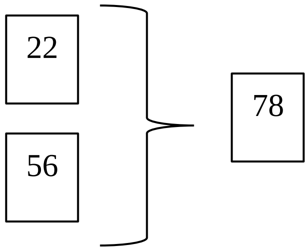


Figura 31 - Composição do terceiro problema criado no quadro anterior. Fonte: do Autor

Plano de aula 02: Revisão do conceito de um número natural, de alguns resultados e de propriedades desse conjunto.

Data: 22/05/2018

Tempo previsto: 45 minutos (1 período)

Materiais Necessários: Quadro expositivo e folha impressa com as atividades propostas.

Metodologia: Expositiva

Desenvolvimento

A aula foi iniciada com proposta de resolução de quatro problemas, entregues para os alunos em uma folha impressa, listados a seguir. Esses foram utilizados como motivação para revisar a adição entre números naturais a partir algumas situações possíveis.

1- Bento pega o ônibus para a escola na parada de número 18 e desce 24 paradas depois. Qual o número da parada da escola?

2- Marília e Juliane resolveram reunir suas coleções de cartas. Marília possui 16 cartas e Juliane, 27. Qual o total de cartas que a dupla possui? Desenhe sua solução para representar o total de cartas das duas amigas.

3- A Prefeitura iniciou uma obra de saneamento básico no bairro Bom Jesus. Na primeira semana de trabalho, eles instalaram 22 metros de tubulação de esgoto. Já na segunda semana, conseguiram instalar 28 metros da mesma tubulação. Após a conclusão da obra, qual é o total de tubulação instalada nessa obra?

4- Juninho irá sair no final de semana com sua namorada. Ele já escolheu a calça que irá vestir, mas está indeciso: se vai de camiseta ou de camisa. Ele tem sete camisetas de estampas diferentes e quatro camisas sociais. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir para sair?

5- Mariana está correndo em uma pista de atletismo durante seu treino. Ela começa caminhando cinco voltas e após realiza 8 tiros de uma volta em um ritmo bem forte e, para finalizar, realiza um desaquecimento, caminhando novamente três voltas. Para facilitar o andamento do treino, o técnico montou uma tabela com a ação de cada volta, mas a impressão saiu incompleta. Complete a tabela partir do proposto acima.

Volta	**Ação**
1	Aquecimento
	Aquecimento
	Aquecimento
	Aquecimento
	Aquecimento
6	Tiro Forte
	Tiro Forte
	Tiro Forte
	Tiro Forte
	Tiro Forte
	Tiro Forte
	Tiro Forte
	Tiro Forte
	Desaquecimento
	Desaquecimento
	Desaquecimento

Tabela 4- Tabela da atividade 5. Fonte: do autor

Qual foi o total de voltas dadas por Mariana durante este treino?

Após a resolução dos exercícios, comentou-se que a operação matemática por trás de todas as situações apresentadas é a adição e que está representada de diferentes formas: acréscimo de uma quantidade, união de conjuntos disjuntos, junção entre dois objetos geométricos, princípio aditivo da combinatória entre possibilidades do tipo OU, além da utilização da função geradora de sucessor de um número. Então, a partir disso, evidenciou-se a revisão da operação de Adição.

Para a discussão das soluções, primeiramente foi proposto que os alunos apresentassem as soluções e comparassem entre seus colegas, a fim de perceber quais as possibilidades de enfrentar cada situação. Concluindo a aula, fez-se uma definição mais formalizada da adição e de sua estrutura operacional, como escrito abaixo.

Adição
Termos ou parcelas – são os números envolvidos pela operação de adição (+)
Soma – é o resultado da adição:
(1° Parcela) + (2° Parcela) = Soma
Visualizando de uma forma mais genérica, sendo a, b os termos da adição e c a soma, temos:
$a + b = c$

Tabela 5 - Uma formalização da operação de adição. Fonte: do autor

Em seguida, voltando aos problemas, foi feita a representação aritmética e a pictórica simultaneamente:

Problema 1 – 24 paradas **depois** da 18 → $18 + 24 = 42$

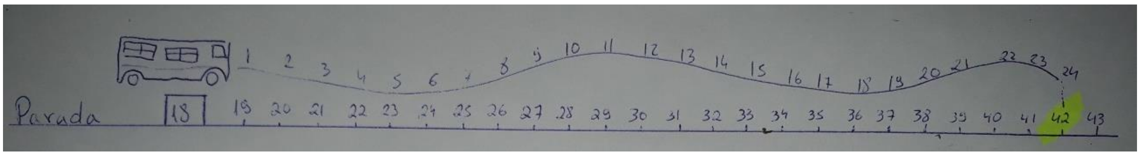


Figura 32 - Representação Pictórica do Problema 1. Fonte: do autor

Problema 2 – 16 cartas da Marília **juntando** com as 17 da Juliane → $16 + 17 = 33$

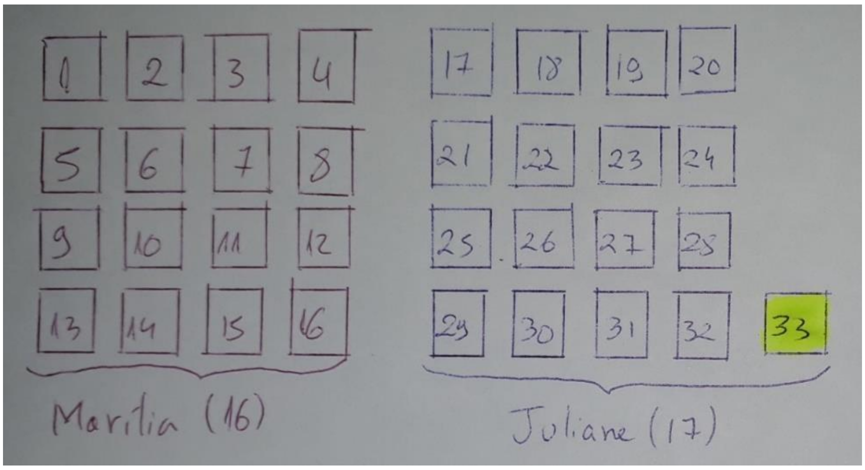


Figura 33 - Representação Pictórica do problema 2. Fonte: do autor

Problema 3 – Unindo os trabalhos feitos em cada semana, desconsiderando a junção entre eles, $22 + 28 = 50$ metros.

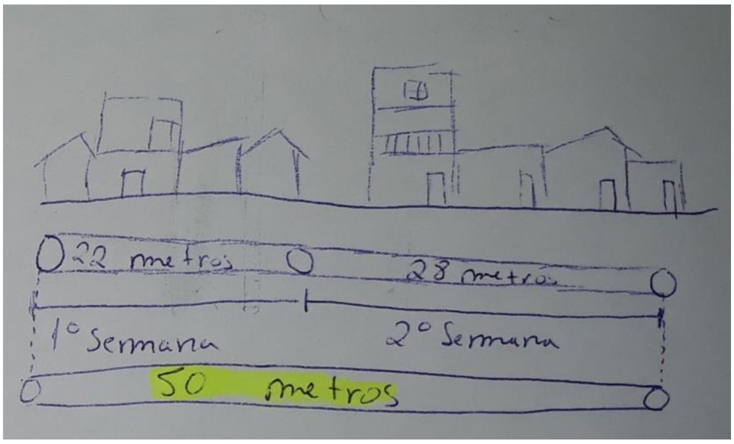


Figura 34 - Representação Pictórica do problema 3. Fonte: do autor

Problema 4 – 7 camisetas **ou** 4 camisas → $7 + 4 = 11$

Figura 35 - Representação Pictórica do Problema 4. Fonte: do autor

Problema 5 – **Sucessor** de 1→ 1+1=2, **Sucessor** de 2→2+1=3, e assim por diante, utilizando o mesmo raciocínio para alcançar os outros números. *Sucessor de um número é equivalente a adicionar uma unidade, ou seja, o próximo na sequência de 1 em 1.*

No final da atividade, explicaram-se quais outras palavras podem significar adição, na esperança de que aparecessem operações monetárias, medida de tempo (por exemplo, marcar algo para daqui a 15 dias, que dia será marcado), entre outras. Da mesma forma, levantaram-se palavras que são sinônimas de adicionar, como: unir, complementar, reforçar, inserir, incorporar, incluir, misturar, agregar, anexar, ajuntar, somar, juntar, aditar, aumentar, acrescentar.

Ao término, foram resgatados alguns conhecimentos dos alunos sobre o conjunto dos números naturais, revisando algumas de suas características. Para tanto, questionou-se anteriormente o que eles entendiam por "número natural", se esse conjunto possui maior ou menor elemento, o que existe entre dois números consecutivos e outras possibilidades que aparecessem a partir das afirmações feitas pelos alunos.

Em seguida, foi feita uma exposição mais formal do conjunto, utilizando a notação formal $\mathbb{N}$ e a listagem de alguns dos seus elementos. Foi utilizado o conjunto dos Naturais para a forma mais simples de contagem (quando não se tem nada é zero, em seguida 1 e assim por diante).

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,5,\dots\}$$

Da mesma forma, comentou-se com os alunos que este é um conjunto infinito, ou seja, por maior número que seja o número que se possa imaginar, existe outro maior que ele, bastando, por exemplo, adicionar um ao número imaginado. Também é possível de se observar que entre dois números consecutivos (por exemplo, 2 e 3) não existe nenhum outro número natural entre eles. Por último, os números naturais formam um conjunto "que possui começo, mas não possui um fim".

Em seguida, foi lembrado que o sucessor de um número é como o próximo número na contagem. Com relação ao sucessor, é possível perceber que cada número possui um único sucessor; independente de qual número seja, sempre terá um sucessor (o que garante que seja um conjunto infinito). Além disso, todo o número natural é sucessor de alguém e possui antecessor e essa última característica tem como exceção o zero.

Além do conjunto ser infinito, pode-se notar que muitos pedaços (subconjuntos) do conjunto dos naturais, por exemplo, o conjunto formado pelos números pares, também são um conjunto infinito, pois, dado um número par, sempre existe um sucessor par (que é maior que ele), e todos esses números pares pertencem ao conjunto dos números naturais. O mesmo raciocínio pode ser aplicado aos múltiplos de 3, por exemplo.

Relato da Prática e Análise

A aula foi iniciada com as atividades sugeridas que tinham como objetivo revisar a adição entre Números Naturais a partir de diferentes significados da operação. Inicialmente, diversos alunos optaram por não fazer essas atividades, pois diziam que eram muito difíceis e que não estavam entendendo as questões. Um breve tempo depois, a reação dos alunos que tentaram realizar as atividades, ao se depararem com as questões, foi de que "todas são de mais, né?" (Beta). A seguir, observa-se a produção de Alfa:

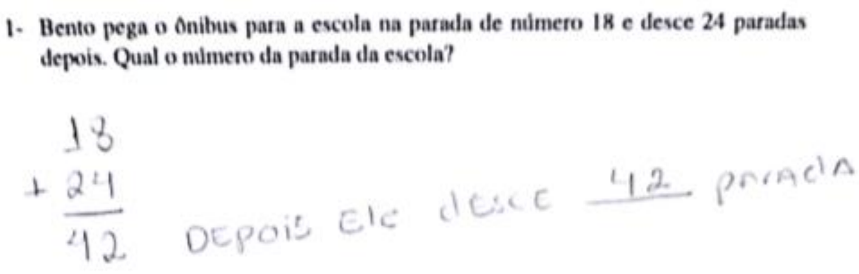


Figura 36 - Resposta de Alfa para a questão 01 – Folha 02. Fonte: do autor

O aluno Gama mostrou para o professor uma dúvida em relação à atividade 1 que era a seguinte: ele questionou se a parada 24 vinha depois da parada 18, entendendo que só havia seis paradas entre a subida e a descida do ônibus.

Na questão 1, alguns alunos confundiram a situação como uma composição, quando na verdade se trata de uma transformação, pois é aplicado o valor 24 à posição da parada 18, resultando na nova posição. O desafio nessa atividade, em relação à sua representação simbólica, é o tratamento da conversão entre a linguagem materna e a aritmética, na qual o valor 24 foi encarado como soma e não como a parcela. Como invariante operatório, há os seguintes conceitos em ação: *uma medida inicial se transforma, dando origem a uma nova medida; um número pode representar o estado inicial (ou final) da medida*.

Na questão 2, o intuito era de trabalhar a adição como a união de dois conjuntos disjuntos, isto é, sem elementos em comum. O número de alunos que se envolveu com essa atividade, que engloba o desenho da solução do problema, aumentou consideravelmente. Acredita-se que, possivelmente, esse tipo de questão não havia sido apresentado anteriormente, ou seja, o desenho como forma de representação de um problema. A seguir, apresenta-se a resolução do aluno Gama:

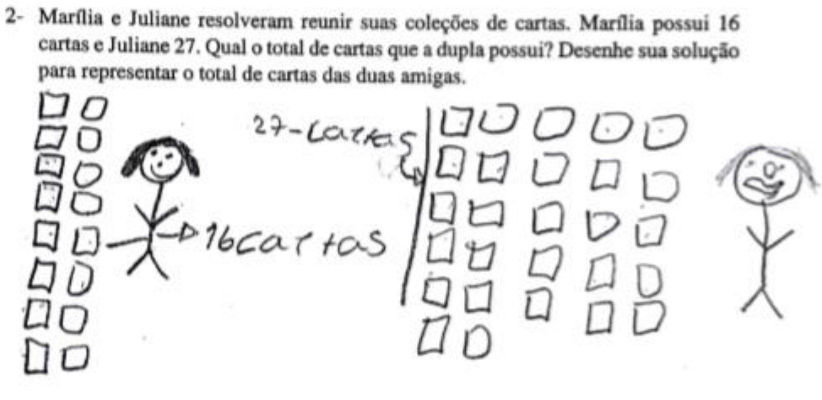


Figura 37- Resposta de Gama para a questão 02 – Folha 02. Fonte: do autor

É possível perceber que Gama faz a conversão entre a linguagem materna e a pictórica, porém seu desenho representa somente a situação e não a solução do problema dado. Com isso, não fica claro se Gama visualiza tal situação como uma composição ou como uma transformação.

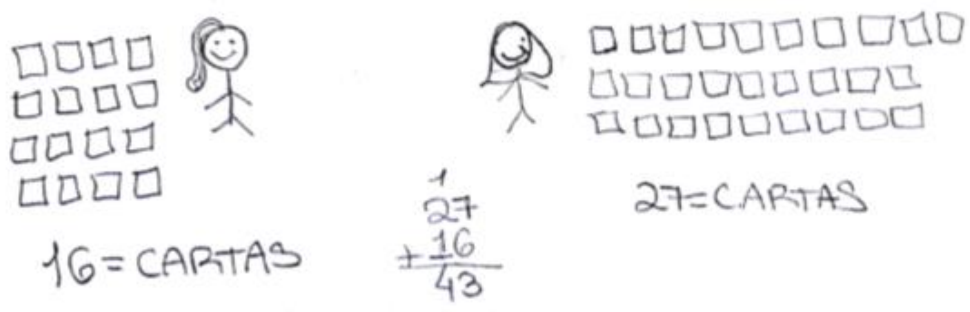


Figura 38- Resposta de Beta para a questão 02 - Folha 02. Fonte: do Autor

Tanto na resposta de Gama como de Beta, percebe-se que os sujeitos mobilizaram os seguintes conceitos em ação *um número natural pode representar o cardinal de um conjunto*; e *o teorema em ação a soma das quantidades gera um valor que corresponde à cardinalidade da união.*

O objetivo da questão 3 era de visualizar uma adição como a união de dois segmentos, representados pela tubulação do esgoto. A seguir, tem-se a resolução do aluno Gama:

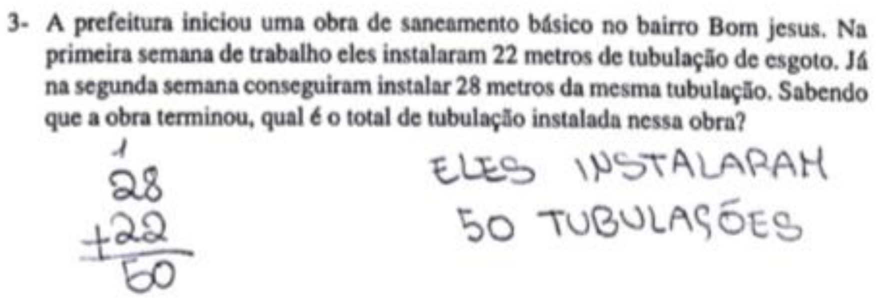
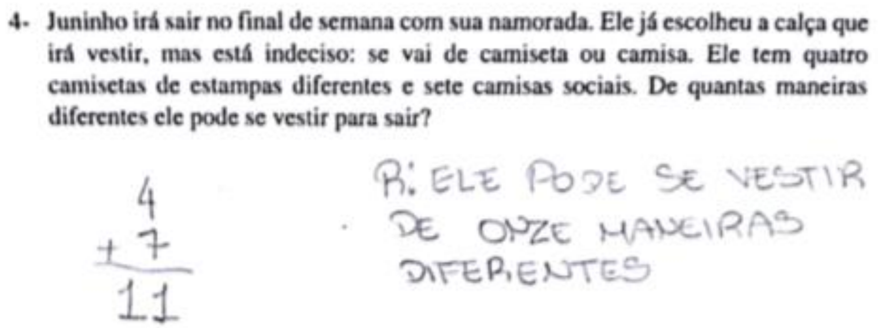

3- A prefeitura iniciou uma obra de saneamento básico no bairro Bom jesus. Na primeira semana de trabalho eles instalaram 22 metros de tubulação de esgoto. Já na segunda semana conseguiram instalar 28 metros da mesma tubulação. Sabendo que a obra terminou, qual é o total de tubulação instalada nessa obra?

Figura 39 - Resposta de Beta para a questão 03 - Folha 02. Fonte: do autor

Em relação à situação, os alunos compreenderam a conversão entre a linguagem materna e a algorítmica, associando a composição dos valores presentes na situação. Assim, surge como invariante os conceitos em ação: *uma medida inicial se transforma, dando origem a uma nova medida;* e *a soma das quantidades gera um valor que corresponde à cardinalidade do todo.*

Na próxima situação, a intenção era associar a adição ao princípio da alternância de possibilidades de uma dinâmica combinatória (princípio aditivo). Abaixo, apresenta-se a produção de Beta, frente à situação quatro:


4- Juninho irá sair no final de semana com sua namorada. Ele já escolheu a calça que irá vestir, mas está indeciso: se vai de camiseta ou camisa. Ele tem quatro camisetas de estampas diferentes e sete camisas sociais. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir para sair?

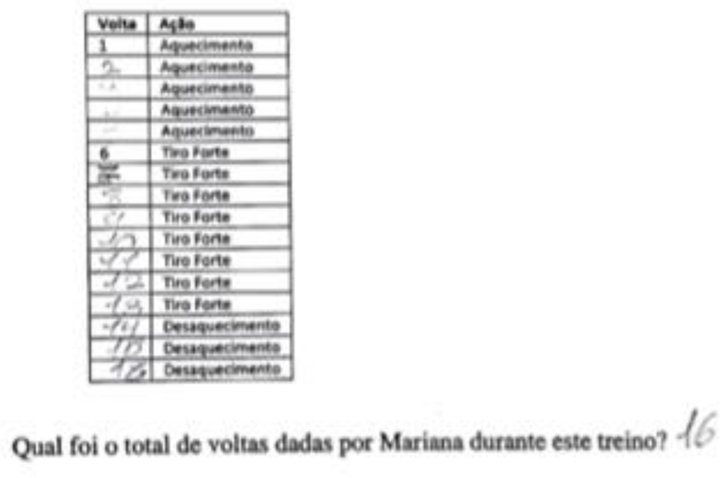
$$\begin{array}{r} 4 \\ +\ 7 \\ \hline 11 \end{array}$$

R: ELE PODE SE VESTIR DE ONZE MANEIRAS DIFERENTES

Figura 40- Resposta de Beta para a questão 04 – Folha 02. Fonte: do autor

Nesse caso, e isso foi uma tendência após a questão número 2, os alunos deixaram de lado a representação pictórica e partiram diretamente para a representação algorítmica, tratando diretamente a questão atual como uma composição de conjuntos, o que não era o esperado. Acredita-se que, nesses casos, o esquema utilizado para enfrentar a situação já está automatizado, não há um processo de enfrentamento de esquemas ou um processo de descobertas. Apesar de implícito, os invariantes que emergem nessa situação são *as partes formam o todo;* e *a soma das quantidades gera um valor que corresponde à cardinalidade do todo*.

Na última questão, o intuito era de trabalhar a sequência de transformações, utilizando o conceito de sucessor, o qual é importante para o desenvolvimento dos próximos encontros. Na figura a seguir, tem-se a produção de Tau, frente à situação cinco:



Volta	Ação
1	Aquecimento
2	Aquecimento
[illegible]	Aquecimento
[illegible]	Aquecimento
[illegible]	Aquecimento
6	Tiro Forte
[illegible]	Tiro Forte
[illegible]	Tiro Forte
[illegible]	Tiro Forte
10	Tiro Forte
11	Tiro Forte
12	Tiro Forte
13	Tiro Forte
14	Desaquecimento
15	Desaquecimento
16	Desaquecimento

Qual foi o total de voltas dadas por Mariana durante este treino? 16

Figura 41 - Resposta de Tau para a questão 05 – Folha 02. Fonte: do Autor

Na situação acima, observa-se a sequência de transformações com o uso do sucessor. O conceito em ação *um número pode representar o referente de uma medida, servindo de base para a obtenção da outra medida* e o conceito em ação do *sucessor como adição unitária*, gera o completamento das informações dispostas na situação.

Ao finalizar a produção, retomou-se a aula com a discussão dos resultados das atividades do período anterior. Foram lidas as questões em voz alta, mostrando possibilidades de representação pictórica e representação aritmética de cada questão, de acordo com o plano de aula. A proposta era de que os alunos observassem pelo menos três representações distintas de cada situação para passar ao tratamento das representações, a fim de conseguirem realizar a dupla conversão entre as representações (Duval, 2005).

Nas três primeiras questões, não houve comentários em relação às resoluções, mas a questão 4 gerou uma discussão em relação à expressão *OU*. Toda vez que o professor questionava o que eles consideravam como relação matemática para a conjunção *OU*, eles respondiam uma operação diferente, como pode ser observado na transcrição do diálogo abaixo:

P: O que significa, dentro da matemática, a expressão "OU"? *Ômega: Soma?* *P: Soma?* *Ômega: Subtração?* *P: É soma ou subtração?* *Ômega: Então é multiplicação, né?* *P: Como assim, qual delas você acha que significa a expressão OU?* *Ômega: Ah, sor.... só pode ser divisão então.*

Tabela 6 - Conversa entre o Professor e Ômega na aula 02. Fonte: do autor

Observando o diálogo, confuso à primeira vista, pode-se inferir que a ação de questionar uma afirmação de um aluno é, para eles, uma sentença de que tal afirmação é incorreta. O aluno, às vezes, nem reflete sobre a questão em si, opta por mudar sua resposta, demonstrando que o significado do questionamento, por parte do professor, está errado. Isso é mais preocupante quando se buscam situações nas quais não exista uma resposta certa, e o questionamento por parte do professor não é necessariamente uma sentença de erro, mas sim de entendimento à resposta obtida.

De uma reação imprevista em sala de aula, a saída adotada pelo professor acabou não sendo das melhores: quando foi lançada a pergunta, ela ficou completamente descontextualizada, levando com que a questão tivesse um cunho meramente abstrato, indo longe demais em relação à maturidade intelectual dos alunos presentes.

Na quinta questão, os alunos compreenderam que os números das voltas expressando contagem, de um em um, até o 16, que foi o total de voltas de Mariana. Indagando sobre o que esses números têm em comum (o número 2 em relação ao número 1), muitos alunos confundiram diversos termos matemáticos, entre números primos, amigos ou até mesmo parênteses. A aluna Alfa, depois de alguma discussão, afirmou que eles são sucessores, isto é, o 2 é o sucessor de 1. Acredita-se que a relação não é trivial, pois o 2 pode ser o dobro de 1, por exemplo. Nessa oportunidade, com esses números, novamente houve um questionamento obtuso, no qual caberia várias respostas. Com isso, acredita-se que todo questionamento que envolva padrões deve ser pensado com cautela, pois muitas delas podem não ter uma única sequência lógica.

Com todas as soluções no quadro, perguntou-se aos alunos o que todas as questões possuíam em comum. Eles prontamente responderam que todas envolviam a operação de "soma". Complementando, o professor afirma que o termo correto é adição, e que a adição pode representar formas diferentes, como (questão 1) juntar quantidades, unir tamanhos de objetos, juntar o total de possibilidades ou o resultado de utilização, de modo repetido, do conceito de sucessor. Eles ficaram surpresos com tais afirmações, ao dizerem que nunca tinham pensado que uma operação matemática poderia significar diversas coisas diferentes.

A partir desse momento, foram revisadas as operações aritméticas no conjunto dos números naturais e inteiros. Começou-se com a questão do que eles consideravam como Natural; a resposta obtida foi “diversos significados” (normal, comum, popular, esperado). A partir disso falamos que o significado de natural para a expressão “números naturais” estava ligada mais com o “ato natural” de contagem. Nesse âmbito, apresentou-se o conjunto dos números naturais e questionou-se se esse conjunto teria um fim. Eles argumentaram que tal conjunto aumentava, pois todo o número (por maior que seja) tem um sucessor, logo o conjunto é infinito. Foi-lhes questionado o que consideravam como infinito, e as respostas apontaram para "que não tem fim".

Plano de Aula 03: Construir a semirreta numérica para representar o conjunto dos naturais; definir a adição e seus termos inseridos na semirreta;

Tempo de aula: 90 minutos (2 períodos)

Materiais necessários: quadro expositivo, folha com atividades.

Metodologia: Expositiva

Desenvolvimento

A atividade foi iniciada com a entrega de uma régua (se possível sem marcação) e um compasso para cada um. O professor, ao se referir à ponta seca, significou dizer que era aquela a qual não possui grafite. Deixaram-se alguns minutos para os alunos explorarem o instrumento e entenderem que a ponta seca é o centro de uma circunferência de raio do tamanho da abertura do compasso.

Neste sentido, foi discutida a vantagem do uso do compasso para marcar distância e sua possível translação. A partir disso, foram seguidos os seguintes procedimentos:

1. Desenhe uma reta. Coloque um ponto no início da reta que chamaremos de origem ou zero;
2. Escolha uma distância qualquer, utilizando a abertura do compasso, cuidando para não realizar uma abertura muito grande, que deixará muito difícil a repetição dos próximos passos na folha de desenho. Coloque a ponta seca (que não desenha) em cima do zero. Marque um ponto de interseção da semirreta com o desenho do compasso em cima da semirreta;
3. Mantendo a abertura do compasso, coloque a ponta seca no ponto marcado no passo 2 e repita o passo anterior. Será marcado um novo ponto;
4. Repita o passo 3 para gerar um novo ponto quantas vezes quiser.

Espera-se, assim, o seguinte objeto:

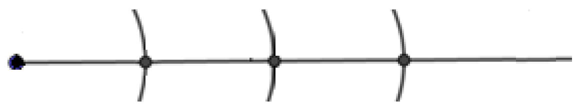


Figura 42 - Construção esperada após as instruções

Como é chamado o primeiro ponto ao lado (da reta) de zero, o segundo ponto está a uma abertura de distância do zero, representa o 1, e o próximo ponto está a duas aberturas, será o 2 e assim por diante.

Figura 43 - Pontos representativos dos números naturais. Fonte: do autor

Chamou-se a atenção a essa representação (Figura anterior), ao se utilizar uma semirreta, pois é equivalente aos naturais: tem começo (ponto 0, que se chama de origem), e não possui fim (pode-se continuar a semirreta, pois ela é infinita, marcando um novo ponto com a abertura, que seria o 7, e repetir o processo até onde quiser). E acompanhando, no sentido da esquerda para a direita, todo “ponto” à direita é o sucessor.

Após a construção da semirreta numérica, reapresentou-se a operação de adição para repensá-la nesse novo contexto.

Iniciou-se com o seguinte exemplo: Francisco vai caminhar na praia e sai de casa a pé, percorrendo três quilômetros; logo, para a fim de tomar um sorvete. Após o lanche, continua sua caminhada, indo cinco quilômetros adiante do estabelecimento. Qual foi a distância total percorrida por Francisco, a partir de sua casa? Pode-se visualizar o problema da seguinte forma:

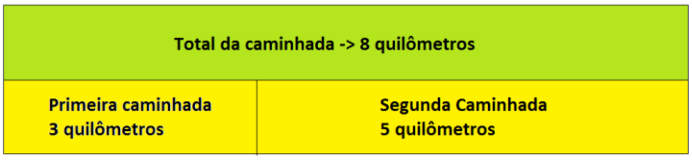


Figura 44 - Representação pictórica da adição com barras. Fonte: do autor

No desenho, cada bloco representa uma distância percorrida. Ao unir os blocos amarelos, há um total de 8. E se esse exemplo fosse transportado para a reta numérica? Primeiro ele estaria no início do trajeto (quilômetro 0), andaria 3 quilômetros e depois 5 quilômetros:

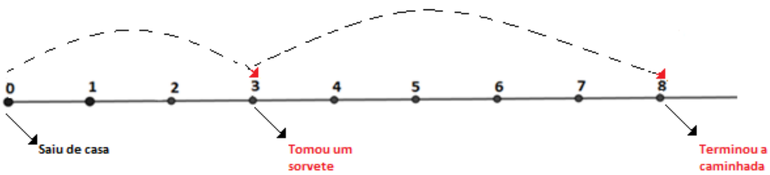


Figura 45 - Representação pictórica da adição com a semirreta. Fonte: do autor

Assim, pode-se perceber essa adição como 3+5 da seguinte forma: a partir da posição do quiosque de sorvete no quilômetro 3, Francisco caminhou um novo trecho no mesmo sentido que havia começado desde que saiu de casa. Assim, a sua distância em relação a sua casa seria a adição entre as duas distâncias caminhadas, isto é, 3+5.

Resumindo, uma adição entre dois números naturais em que

$$(1° \text{ Parcela}) + (2° \text{ Parcela}) = \text{Soma}$$

Pode-se perceber que:

1° Parcela – É a posição referente ao valor da 1° Parcela

2° Parcela – É o tamanho do novo deslocamento a partir da primeira parcela

Soma– É a posição final, que é considerada o resultado da operação

Em seguida, foi disponibilizada aos alunos uma folha com as atividades abaixo:

Exercícios

1- Uma equipe de construção está trabalhando em um grande prédio. Na primeira parte do projeto, eles construíram 13 andares. Após a conclusão dessa fase, foi contratada uma nova equipe para construir outros 18 andares. Represente o problema a partir de um dos tipos de desenho, usando a semirreta ou as barras. Qual o total de andares do prédio?

2- Escreva qual expressão aritmética descreve o desenho:

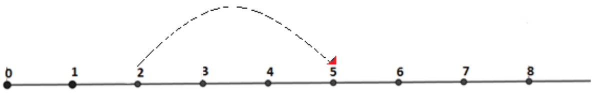
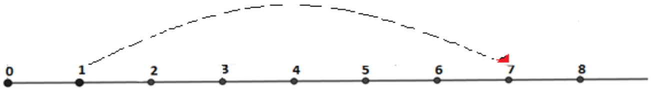
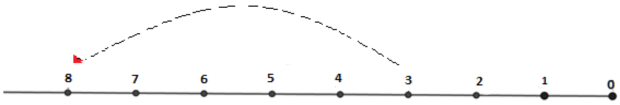
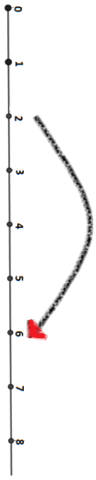
	
	
	
	

Tabela 7 - Representações pictóricas da atividade 2. Fonte: do autor

3- A partir da adição $9 + 17 = 26$, faça o seguinte:

a) Escreva um problema cuja solução pode ser representada pela expressão aritmética acima.
b) Represente a solução, utilizando um desenho.

Relato de Prática e Análise

Nesse encontro, pretendia-se chegar aos seguintes objetivos: construir uma nova representação para o conjunto dos números naturais, utilizando régua e compasso e repensar a adição a partir desse novo objeto pictórico. A partir disso, com a semirreta definida, essa seria utilizada para dinamizar as operações de adição e subtração.

Iniciou-se a aula mostrando como se utiliza o compasso, pois muitos dos alunos não tinham tido o contato com esse instrumento (dois deles tinham-no no estojo, mas não o utilizavam em sala de aula). Definiram-se os conceitos de ponta seca e de ponta escrita, além da importância da abertura. Para aqueles que já o tinham utilizado, indagou-se o uso desse instrumento, e as respostas que surgiram foram: para desenhar círculos, para riscar arcos, e uma aluna falou que podia ser utilizado para "transferir medida" (Alfa). A seguir, utilizou-se um compasso e marcou-se uma abertura a partir da largura do tijolo à vista que fazia parte da parede interna da sala de aula, mostrando que, a partir daquela abertura do compasso, poder-se-ia reproduzir tal medida para onde se quisesse. Então, a atividade do preenchimento da construção da semirreta numérica foi iniciada, a partir das instruções contidas no plano de aula da seção anterior.

A dúvida no primeiro passo era em relação a como fazer o desenho da semirreta, se ela precisava ser "reta" (significando estar em paralelo com a margem horizontal da folha). Foi explicado que poderiam desenhar a reta do jeito que achassem melhor. A maioria dos alunos desenhou uma linha horizontal próxima às instruções escritas na folha.

No passo 2, para desenhar o ponto inicial, alguns alunos entenderam que deveriam usar a ponta de escrita do compasso para escrever o ponto (assim como desenharam a reta). Sobre a posição da marcação do ponto de origem, nenhum aluno marcou o ponto na extremidade da semirreta desenhada, ou seja, marcavam em uma posição intermediária ou mesmo em uma central na linha desenhada.

Durante o passo 3, para escolher a abertura do compasso e marcar o ponto na linha, todos os alunos desenharam circunferências completas, porém alguns variaram a abertura e, curiosamente, desenharam o objeto sem passar uma circunferência em cima da outra, talvez por isso alguns deles variam a abertura do compasso durante a atividade. No momento em que os alunos puderam escolher para qual lado da semirreta seria desenhada a primeira circunferência, a maioria escolheu desenhar o pedido para o lado direito, mas alguns fizeram para o lado oposto. Vários deles perguntaram para qual lado deveriam desenhar, e respondeu-se que deveriam marcar para qual lado fosse melhor para eles. Abaixo, seguem as construções feitas por duas alunas:

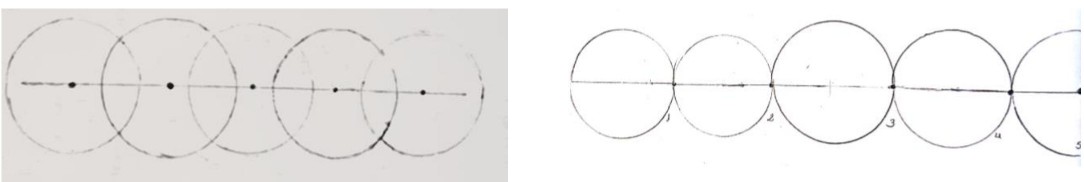


Figura 46 - Construção da semirreta numérica pela aluna Alfa e Delta, respectivamente. Fonte: do autor

Observando a figura, pode-se perceber que cada aluno entendeu de forma distinta a instrução número três, a qual seria a responsável por determinar a unidade da construção. Depois de terem confeccionado o desenho, o professor repetiu a construção no quadro, quando então houve um consenso da turma em relação à referida instrução.

Notou-se que a régua e o compasso são importantes para criar objetos geométricos com propriedades que não dependem de uma régua. Perguntou-se aos alunos qual era o primeiro número natural, eles responderam que era o zero, entretanto Sigma e Kappa estavam com dúvida se não seria o número um. Afirmou-se que o primeiro ponto marcado representaria o zero, que seria a origem do sistema. Ao perguntar sobre o próximo ponto que fora marcado, perguntou-se que número seria representado, eles responderam que seria o número um, pois ele vinha depois do zero. Repetiram o mesmo raciocínio para a representação dos números dois, três e quatro.

Observou-se também que o ponto representativo do número dois está exatamente a duas unidades da origem. Nesse momento, nomeou-se aquele objeto desenhado como "semirreta numérica". Alguns alunos questionaram o termo *semirreta*, pois não entendiam esse conceito. Houve uma pausa para explicar que a semirreta é um objeto em formato retilíneo0, que possui início, mas não tem fim. Alfa comentou que havia visto tal objeto em sua outra escola (Municipal, mas em outro município da região metropolitana). Ela lembrava-se de maneira vívida e o descreveu desta maneira:

1- Desenhar a reta na horizontal, marcar um ponto no extremo esquerdo e nomear como zero. 2- Com uma régua, marcar um ponto novo 3 cm à direita do primeiro ponto e nomear como 1; repetir a construção com espaços de 3 cm.

Tabela 8 - Construção que Alfa conheceu na sua escola anterior. Fonte: do autor

A construção acima, trazido pela aluna Alfa, fez refletir sobre diversos pontos: o fato de ter usado o termo reta quando se fixa um ponto inicial no extremo, dando a entender que o objeto geométrico se inicia naquele ponto, assim sendo uma semirreta; a decisão do docente de substituir o uso do compasso (talvez por questões de material disponível), estabeleceu uma distância fixa com uma unidade no sistema métrico; a associação do objeto à régua de uso escolar.

Prosseguiu-se a aula, reapresentando a operação de adição: a soma é o resultado entre a adição de duas ou mais parcelas. Os alunos oriundos desde a formação inicial na escola afirmaram que nunca haviam falado sobre esses conceitos anteriormente. Ficou, assim, um questionamento pendente: Será que os alunos que receberam essas instruções para a construção da reta numérica se questionaram sobre o motivo de a distância ser exatamente de 3 cm? Por que não outro valor?

Nesse momento, trouxe-se para a aula a seguinte situação: *Francisco sai para caminhar na praia. Ao sair de casa, caminhando por três quilômetros, parou para tomar um sorvete. Após o lanche, continuou sua caminhada, indo cinco quilômetros adiante do estabelecimento. Qual foi a distância total percorrida por Francisco a partir de sua casa?* Após apresentar, foi consenso da turma que a distância total percorrida era de oito quilômetros, baseado em uma situação de composição mobilizando o teorema em ação *as partes formam o todo* e *a soma das quantidades gera um valor que corresponde à cardinalidade do todo*.

Como representação simbólica pictórica, o professor desenhou o esquema de barras apresentado no plano de aula, no qual os alunos afirmaram que entendiam que as distâncias eram a composição dos trechos, colados um no outro, como peças. Com isso, decidiu-se desenhar uma nova representação simbólica a partir da semirreta construída:

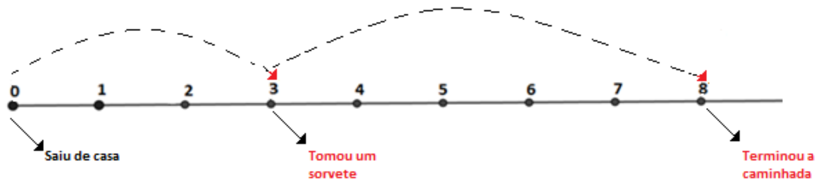


Figura 47 - Esboço desenhado no quadro sobre o problema da caminhada na praia. Fonte: do autor

Começou-se uma discussão sobre o que acontecia dentro da semirreta. Nisso, Alfa e Beta começaram a discutir entre si se podia ou não caminhar em cima da reta. Gama falou que "a casa dele era o zero, então ele foi até o 3 e depois até o 8 que é cinco quilômetros depois, igualzinho como no problema". Nessa situação, nota-se que os alunos associam a representação simbólica da expressão $3 + 5 = 8$ com a representação em linguagem materna explícita pela situação. Além disso, associaram ambas as representações pictóricas (de barra com a semirreta) e apresentaram uma dupla conversão frente à situação apresentada (as combinações de Aritmética, Linguagem Materna e Pictórica). Também se percebeu na fala de Gama que ele entende, mesmo sem explicitar, o teorema-em-ação e as invariantes operatórias citadas no parágrafo anterior.

Após a discussão, iniciaram-se as atividades da folha entregue nessa aula (conforme plano de aula). Na atividade 1, tem-se a seguinte situação: *Uma equipe de construção está trabalhando em um grande prédio. Na primeira parte do projeto, eles construíram 13 andares. Após a conclusão dessa fase, foi contratada uma nova equipe para construir* *outros 18 andares. Represente o problema a partir de um dos tipos de desenho, usando a semirreta ou as barras. Qual o total de andares do prédio?*

Nenhum aluno optou por utilizar a reta numérica e realizaram o desenho do prédio. Alguns colocaram a adição entre 13 e 18 como fizeram o uso direto do algoritmo usual da adição e o desenho ao lado.

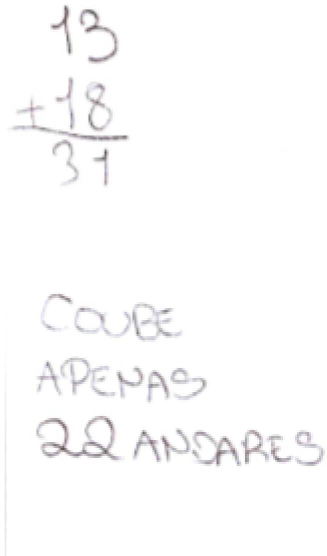


Figura 48- Resolução do problema pela aluna Alfa (parcial[11]). Fonte: do autor

Apesar de não ter utilizado a semirreta, pode-se verificar que Alfa faz a dupla conversão, mesmo não se preocupando muito com a precisão de sua representação pictórica, entre a expressão $13 + 18 = 31$ e a situação proposta, apoiando-se no mesmo teorema-em-ação da situação anterior. Um fato interessante na produção de Alfa é que ela alega que faltou espaço na folha para representar os 31 andares, não pensou em reduzir a escala. Acredita-se que ela deu prioridade para a representação aritmética, onde a representação pictórica fica com uma posição acessória dentro da resolução pedida.

A atividade 2 consistia em expressão, utilizando-se de uma representação simbólica aritmética com as dinâmicas propostas em cima da semirreta. Num primeiro momento, os alunos demonstraram falta de entendimento do que era pedido na atividade, provavelmente motivada pela diferença entre a representação pictórica apresentada na introdução (A caminhada de Francisco na praia, com dois movimentos para representar uma adição) e as representações do exercício (uma alça para uma adição). Nesse momento, o professor realizou algumas indagações a partir do primeiro exercício. Começou-se a discutir sobre qual operação matemática poderia ser representada por aquela figura. Também se

[11] Devido à aluna Alfa ter utilizado lápis, a digitalização ficou com qualidade precária. No âmbito de explicitar o registro, optou-se por digitalizar somente parte do desenho.

questionou sobre o que significaria o ponto 2 e o "pulo" até o ponto 5. Alguns alunos relataram dificuldade em avaliar se o pulo (2º parcela) seria 3 ou 4.

Após acordarem que no exemplo haveria uma adição, retornou-se à questão sobre o valor do pulo. Em relação a esse, foi perguntado sobre o que seria a adição de uma unidade, e eles afirmaram que era “mais 1”. A partir da resposta, infere-se que esse é o motivo pelo qual a contagem, utilizando os dedos para operar a adição, sempre começa no sucessor, pois senão a adição de uma unidade nunca sairia do mesmo número e não seria uma adição. Alguns alunos associaram o desenho, no qual foi invertido o sentido da reta, como uma operação de subtração.

Na figura, onde a reta numérica estava na vertical, muitos alunos questionaram se deveriam manter a lógica dos itens anteriores.

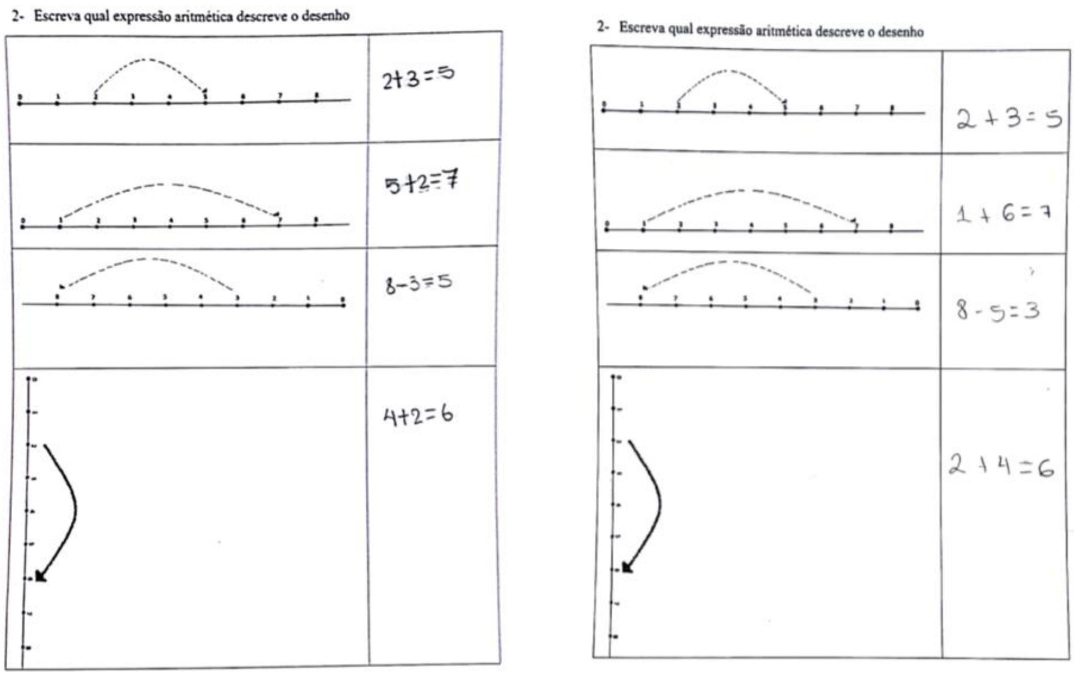


Figura 49 - Produção da situação pelas alunas Alfa e Delta, respectivamente. Fonte: do Autor

Apesar de todas as expressões estarem corretas do ponto de vista do cálculo, pode-se notar que nem sempre elas representam o que a representação pictórica indica. No segundo item, Alfa, sabendo que a resposta final era 7, expressou a figura como 5+2. Nesse caso, ela falhou em converter a representação, pois não percebeu que o ponto de partida era em relação ao ponto 1.

No terceiro item, ambas não levaram em consideração o sentido da construção da semirreta, associando o sentido contrário a uma representação da operação subtração. No último item, Delta acertou o cálculo a ser feito, mas não converteu a situação de maneira apropriada, uma vez que lhe faltou compreensão entre o que significava cada parcela.

Acredita-se que o papel da primeira parcela da adição está melhor representado na dinâmica da semirreta, entretanto a segunda parcela acaba por estar implícita na contagem das unidades deslocadas a partir da primeira parcela. Nesse caso, a invariante do teorema-em-ação (união das cardinalidades, como na situação anterior) fica de difícil entendimento. Para melhorar o entendimento, será remodelado o exercício proposto utilizando uma alça para a primeira parcela da adição.

Na atividade 3, foi solicitado que o aluno escrevesse um problema que tivesse como solução a expressão $9 + 6 = 15$ e, a seguir, que representasse a resolução, utilizando um desenho. O objetivo dessa atividade era realizar a conversão entre uma dupla conversão (Representação aritmética, pictórica e linguagem materna). Nesse caso, os alunos se mostraram mais dispostos que nas aulas anteriores para escrever um problema de Matemática a partir de uma expressão aritmética. Alguns alunos, por iniciativa própria, fizeram as três conversões (pictórica, linguagem escrita e aritmética) para a proposta da atividade.

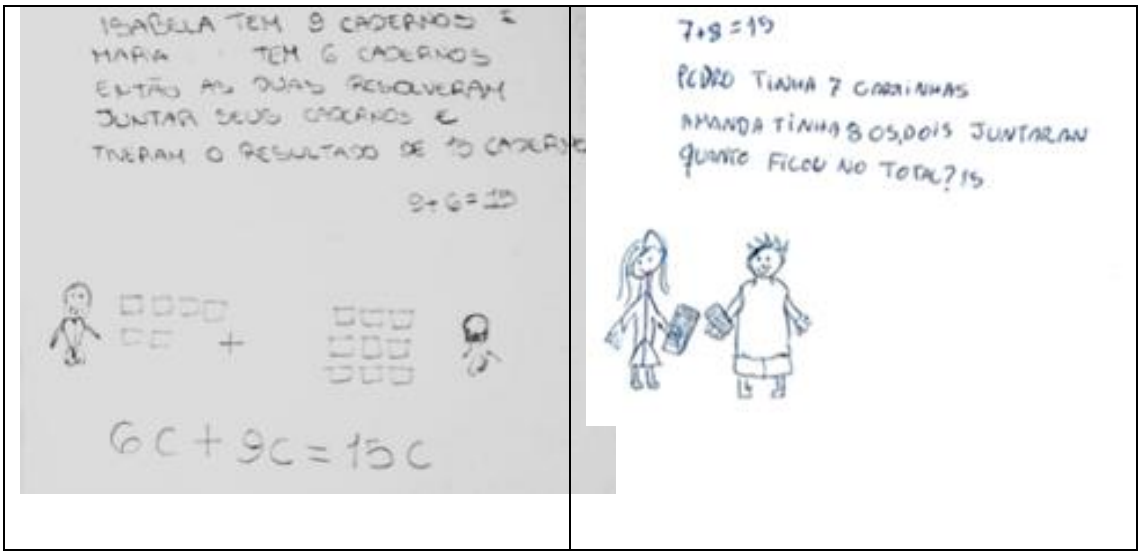


Figura 50 - Produção da situação pelos alunos Alfa e Sigma, respectivamente. Fonte: do autor

Houve um problema de impressão nesse dia, e as expressões matemáticas não apareciam. Quando o professor percebeu o problema, escreveu no canto superior da folha dos alunos, mas Sigma optou, por iniciativa própria, colocar $7 + 8$. Nessa situação, os alunos demonstraram a conversão nas representações trabalhadas em aula. Sigma, por sua vez, entendeu o desenho como uma representação alegórica que não necessariamente deveria ser usada ou associada à resolução do problema. Ambos os alunos utilizaram o mesmo teorema em ação, da união das cardinalidades, como ferramenta para o desenvolvimento da situação.

Plano de aula 04: Explorar as propriedades da adição (comutatividade e associatividade) a partir das diversas representações semióticas (Linguagem materna, aritmética e pictórica)

Tempo de aula: 90 minutos (2 períodos)

Material necessário: folha A4, material em EVA (mínimo de três cores).

Metodologia: Expositiva

Desenvolvimento:

Iniciou-se a aula provocando o uso da operação de adição no cotidiano das pessoas, tanto em aula, no tipo de trabalho ou na rotina doméstica. Para tanto, foram feitas as seguintes indagações:

- Em qual profissão você acha que saber fazer a operação de adição é fundamental?

- Nessas profissões, dê um exemplo de uma situação onde é preciso fazer a operação de adição. Nesse caso, é preciso usar uma calculadora sempre?

- Fora do trabalho, onde é importante saber fazer a adição entre números naturais?

A partir dos exemplos que surgiram na fala dos alunos, serão contextualizadas três adições: 25 +34; 36+3+24 e 22+56.

Após esse momento, foram revisadas as propriedades da adição entre números naturais.

<u>Comutatividade</u>

Tem-se o seguinte problema: um prestador de serviços vai recolher seus pagamentos em diversas casas de uma rua.

Casa1	R$ 36
Casa2	R$ 25
Casa3	R$ 72
Casa4	R$ 10
Casa5	R$ 90
Casa6	R$ 18
Casa7	R$ 75
Casa8	R$ 64

Tabela 9 - Tabela de pagamentos das casas. Fonte: do autor

Observando rapidamente a lista, o profissional sabe que tem R$ 400 para recolher. Como ele não tem papel para escrever ou uma calculadora a mão, que estratégia ele utilizou para realizar o cálculo mental de maneira mais fácil? Por exemplo, podem-se unir os valores da seguinte maneira:

Casa1	R$ 36
Casa2	R$ 25
Casa3	R$ 72
Casa4	R$ 10
Casa5	R$ 90
Casa6	R$ 18
Casa7	R$ 75
Casa8	R$ 64

Figura 51- Resolução proposta para a questão. Fonte: do autor

Escrevendo a adição na ordem das casas cobradas temos $36 + 25 + 72 + 10 + 90 + 18 + 75 + 64$. Porém, se percebidos com mais cuidado, veem-se que $36 + 64 = 100$, $25 + 75 = 100$, $72 + 18 = 100$ e $90 + 10 = 100$. Logo,

$$36 + 25 + 72 + 10 + 90 + 18 + 75 + 64 =$$
$$(36 + 64) + (25 + 75) + (72 + 18) + (90 + 10) =$$
$$100 + 100 + 100 + 100 = 400$$

Tal fato só é possível graças às propriedades da comutatividade e da associatividade, pois elas garantem que, independente da ordem das parcelas, a soma será sempre a mesma. Além da comutatividade, a associatividade se faz presente, pois é ela que garante que se pode escolher a sequência da adição da maneira que se quiser. Se for realizada a adição na ordem originalmente dada, o resultado também será 400.

Usando a simbologia matemática, pode-se afirmar que

$$\text{Dados } a,b \text{ números naturais , então } a + b = b + a$$

A proposta era de os alunos pensarem a partir do seu cotidiano, o que é comutativo: por exemplo, se alguém calçar o sapato e depois a meia, será a mesma coisa que colocar a meia e depois o sapato? Chegou-se à conclusão de que se vestir não é uma ação/operação comutativa. Em seguida, levantou-se a pergunta se eles conheciam outros exemplos do cotidiano que não eram comutativos.

A seguir, questionou-se se aquela propriedade era válida na adição para quaisquer números naturais. Após ouvir argumentos dos alunos, o professor valer-se-á da semirreta numérica para justificar: “Pense numa estrada que possui placas a cada 10 Km, indicando a distância percorrida e o quanto falta para acabar a extensão da estrada. Em uma estrada com a extensão exata de 100 Km, para cada placa de distância existe outra que indica o quanto falta para terminar naquele ponto. Por exemplo, quando se está no Km 30 (faltando

70 Km), existe uma placa do Km 70 (faltando 30 Km).”. Generalizando para um número a e b, tem-se a seguinte representação:

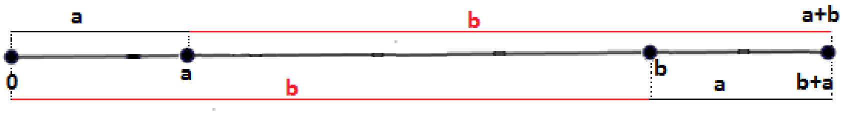


Figura 52 - Representação Pictórica da Comutatividade. Fonte: do autor

Nesse momento, foi utilizada a representação pictórica de barras para justificar a comutatividade. Primeiro, pegaram-se duas barras de tamanho e de cores distintas e afirmou-se que o comprimento delas representava um número natural. Em seguida, a primeira e a segunda barras foram unidas lado a lado para representar a adição. Tal distância foi exposta no quadro. Em seguida, trocou-se a ordem das barras (segunda e primeira, respectivamente) e mostrou-se que se encaixava perfeitamente na marcação feita anteriormente.

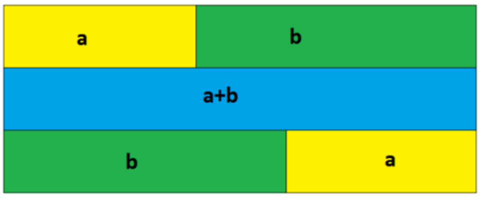


Figura 53 - Representação Pictórica por barras da Comutatividade. Fonte: do autor

<u>Associatividade (Como somar 3 parcelas?)</u>

Existe uma maneira de dar o valor final sem usar o papel? Imagina-se que alguém tenha de responder rapidamente qual é a soma de $387 + 115$. Pode-se, por exemplo, emprestar 13 unidades da segunda parcela para que a primeira fique mais fácil de manipular, já que $387 + 13 = 400$. Assim:

$$\begin{aligned} 387 + 115 &= 387 + (13 + 102) \\ &= (387 + 13) + 102 \\ &= 400 + 102 \\ &= 502 \end{aligned}$$

Se for usada diretamente a representação aritmética extensiva da conta, nota-se também que o resultado é 502. Então, conclui-se que a escolha de como particionar o 115 em 102 e 13, tal ação sendo realizada na adição não interferiu no resultado. No entanto, deve-se questionar se, independente dos números naturais que estiverem envolvidos, tal fato será sempre válido. A associatividade da adição nos números naturais é que garante isso. Com ela, podem-se eliminar os parênteses em uma sequência de adição e fazer todas as contas em qualquer ordem. Generalizando, sendo três números naturais (chamados a,b,c), tem-se que:

$$(a+b)+c = a+(b+c) \text{ para quaisquer } a, b, c \in \mathbb{N}$$

Nesse momento, retorna-se às barras para justificar a associatividade. Com três barras, o raciocínio é análogo, ao mostrar que $(Barra1 + Barra2) + Barra3$ têm o mesmo comprimento que $Barra1 + (Barra2 + Barra3)$.

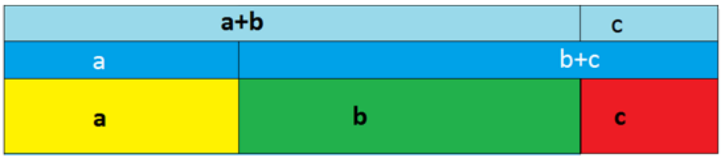


Figura 54 - Representação Pictórica por Barras da Associatividade. Fonte: do autor

Infere-se, pois, que a comutatividade e a associatividade juntas dão um poder de organizar a soma para que seja feita de maneira mais fácil. É preciso que se façam os exercícios para testar o uso dessas propriedades (que estão inseridos na próxima aula).

Relato da Prática e da Análise

Após a entrada dos alunos, o professor retomou que iria continuar falando sobre a adição. Perguntou aos alunos sobre quais as profissões que utilizavam a operação de adição. Kappa disse que se usava no quartel, a aluna Alfa começou a falar de profissões de nível superior (advogado, contador, médico). Nesse momento, perguntou-se se eram somente essas profissões que utilizavam a adição, e Sigma falou que o cobrador do ônibus e o caixa do mercado também precisavam utilizar tal operação. Quando sondados sobre outros exemplos de como essas ocupações utilizam a adição, eles não sabiam o que responder. Prosseguiu-se perguntando em quais situações se utilizava a adição fora do ambiente profissional, e Alfa respondeu que se usava quando eles iam ao mercado fazer compras, por exemplo.

Depois dessa dinâmica inicial, colocou-se no quadro a seguinte situação: um prestador de serviços vai recolher seus pagamentos em diversas casas de uma rua, conforme tabela 9 apresentada anteriormente. Após, explicou-se que o trabalhador olhou para a tabela e rapidamente percebeu que o total recolhido era de R$ 400,00. Os alunos começaram a realizar a adição casa por casa e alguns apresentaram dificuldades para chegar ao valor divulgado. Nesse contexto, o professor indagou aos alunos se havia uma maneira mais simples de realizar a adição e chamou a atenção de que 90+10 era igual a 100. Após isso, viu-se que outras duplas tinham a soma igual a 100. Assim, os alunos logo perceberam que na verdade havia 4 duplas de números em que cada um totalizava 100, então o resultado final era 400. Eles gostaram da maneira de fazer, pois era mais simples e não necessitava fazer os cálculos no papel. Nesse momento, o professor comentou que utilizava essa estratégia de cálculo mental no mercado, agrupando itens de diferentes valores para saber o valor total colocado no carrinho antes de passar no caixa. Depois de contar a história acima, o professor indagou se aquilo sempre funcionava, e os alunos disseram que sim, porém não sabiam o motivo.

Em seguida, apresentou-se o material das barras, confeccionado com EVA, onde constava a propriedade da comutatividade com as seguintes representações:

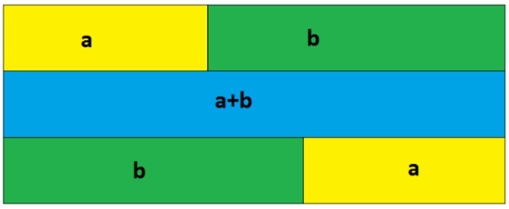


Figura 55 - Representação das barras de EVA para explicitar a comutatividade. Fonte: do autor

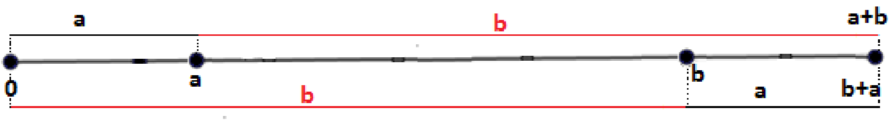


Figura 56 - Representação utilizando uma semirreta para explicitar a comutatividade. Fonte: do autor

Neste contexto, houve dificuldade para o entendimento e repulsa por parte de alguns alunos quando o professor inseriu as letras. Entretanto, após fazer alguns exemplos com expressões simples (3+7 é igual a 7+3, por exemplo), demonstraram naturalidade em relação ao conceito da comutatividade a partir da representação pictórica. Após isso, o professor foi ao quadro e escreveu que a barra amarela poderia ser chamada de "a" e a barra verde, de "b", assim foi colocada no quadro a definição formal da propriedade comutativa.

Comutatividade: Dados a, b números naturais, tem-se que $a + b = b + a$

Após escrever a frase acima no quadro, percebeu-se que a exposição desse teorema, de maneira mais formal, pode ser muito confusa dentro de uma sala de Ensino Fundamental. Porém, se essa for associada a diversas representações (pictórica, aritmética para exemplificação e algébrica para formalização), permite ao aluno repensar esse invariante no campo aditivo, pois ele utiliza com tanta naturalidade que nem o percebe.

Nesse ínterim, aproveitou-se para explorar o conceito de comutatividade fora do âmbito da Matemática, ao questionar sobre quais coisas na vida são comutativas. Apresentou-se o exemplo que, ao juntar um conjunto de roupas para vestir, a sequência com que se vestem as roupas muda o resultado final. Discutiu-se sobre o ato de se vestir, o qual não é uma operação comutativa. Também se falou sobre as receitas de cozinha, onde nem todas são comutativas.

Em seguida, foi posta no quadro a seguinte situação: uma pessoa irá viajar; após a saída, é feita uma parada no quilômetro 70 e depois dessa percorre ainda mais 30 quilômetros. Perguntou-se em qual quilômetro da estrada a pessoa estaria. Após eles verificarem que seria no quilômetro 100, repetiu-se a situação, colocando uma parada inicial no quilômetro 30. Após o viajante percorreu mais 70 Km. Os alunos concordaram que, em ambas as situações, o viajante percorreu o mesmo valor final.

Ficou constatado que os alunos da turma estavam num momento em que seu potencial de algebrização pôde ser considerado muito primário, ao demonstrar dificuldades em generalizar uma situação. Apesar de lidarem com o conceito de adição de maneira produtiva e compreendendo as diversas situações em que pode estar presente, assim como suas múltiplas representações, os alunos mostraram que usavam de forma implícita e automática os conhecimentos em ação que envolveram as situações desde o primeiro encontro.

Após o intervalo, perguntou-se qual era a soma da adição 387+115, e alguns foram tentar fazer em seu caderno. Após, falaram que o resultado era 502. O professor questionou se não havia uma maneira mais rápida de se fazer, sem precisar recorrer a representação aritmética extensiva. Eles disseram que só sabiam fazer diretamente, e que era muito complicado de fazer mentalmente. Então, foi mostrado no quadro que se podia "emprestar" 13 unidades para o 387 para que ele ficasse exatamente 400, então 387+115 era equivalente a 400+102. Eles acharam estranho e que dava tanto trabalho quanto a maneira usual de fazer a conta original. Nesse momento, foi colocado um exemplo de como as pessoas fazem para dar troco: elas vão completando até os valores "fechados" (múltiplos de 10, 100) para depois contar o restante. Assim, essa conta seria colocada na seguinte situação: É preciso dar 387 reais e 115 para comprar duas coisas. Para saber o valor final, tiram-se 13 reais do segundo valor para fechar 4 notas de 100 no primeiro valor, logo se terão 5 notas de 100 e uma de 2. O que garante essa troca de valores entre as parcelas é a propriedade chamada de associatividade.

Para tanto, a associatividade, em termos simples, seria o direito de escolher quais parcelas podem ser agrupadas em uma expressão com três ou mais parcelas. A seguir, tem-se o desenho:

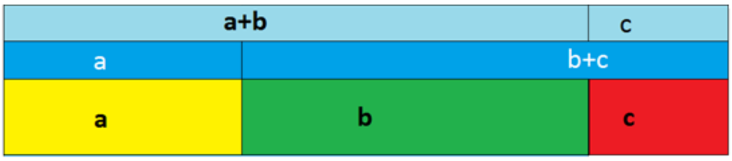


Figura 57 - Representação das barras, desenhada no quadro, para explicitar a associatividade. Fonte: do autor

Conforme os alunos iam tentando compreender a figura, foi feita a proposta de colocar números no lugar das incógnitas de modo momentâneo: pediu-se para que três alunos, individualmente, escolhessem um número aleatório entre 1 e 9. Colocou-se um valor escolhido por eles para que visualizassem e validassem a representação, retornando no final para a incógnita. Em seguida, foi disposta, no quadro, a associatividade representada de maneira algébrica:

Associatividade: Sejam a,b e c números naturais. Tem-se que $(a+b)+c = a+(b+c)$

A aluna Alfa comentou que não via diferença entre a parte da esquerda e a da direita e que ambas eram iguais. Comentou-se que aquilo fazia sentido, porque fazer a associatividade é um processo tão natural que não se pensa se funciona ou não.

Tanto na comutatividade como na associatividade, percebe-se a dificuldade do docente em explicitar os invariantes operatórios que dão suporte para a adição, apesar de serem extremamente utilizados desde os anos iniciais. Apesar de não serem considerados, de maneira imediata e efetiva como teoremas em ação, porque os alunos não tinham a experiência de utilizá-los dentro de situações de adição, esses são resultados formais dos conhecimentos em ação que, após um processo de estruturação e organização dos fundamentos da Matemática, tornam-se propriedades operatórias.

Plano de Aula 05: Apresentar o elemento neutro e explorar as propriedades da adição

Tempo de aula: 90 minutos (2 períodos)

Materiais necessários: quadro expositivo, folha de atividades

Metodologia: Expositiva

Desenvolvimento:

<u>Elemento neutro</u>

O que significa neutro? No dicionário, tem-se a seguinte definição:

Neutro (Adj) - que não se posiciona, que se abstém de tomar partido; neutral.

Voltando ainda ao exemplo da caminhada de Francisco na praia, qual a distância que, se adicionada aos três quilômetros iniciais, o resultado seria o próprio quilômetro três? Matematicamente, sendo n o número neutro em questão, tem-se que

$$3 + n = 3$$

Que número é esse? Seria o zero que, dentro do contexto, significa não caminhar. Na adição entre números naturais, o zero é o único número que, quando adicionado, não altera o resultado.

Ao se generalizar para um número natural m que

$$m + 0 = 0 + m = m$$

Pode-se perceber a importância do elemento neutro durante a adição entre duas parcelas, na qual pelo menos uma possui um algarismo 0 no valor absoluto.

8 ^{1}6 8 + 1 0 5 ---------- 9 7 3 1- Em 8+5=13, o número 3 da unidade é colocado na unidade da resposta e o 1 da dezena irá para a próxima casa. 2- Na dezena, fazem-se 1+6+0=7 que equivale a 10+60+00=70, gerando o número 7 na posição relativa à dezena. Por último, 1+8 =9, ou seja, têm-se 9 centenas.	$868 + 105 = (800 + 60 + 8) + (100 + 0 + 5)$ Utilizando a associatividade, podem-se inutilizar os parênteses, e com a comutatividade, trocar os termos de lugar, agrupando as dezenas e as unidades. $96 + 15 = 800 + 60 + 8 + 100 + 0 + 5$ Primeiro as unidades: $868 + 105 = 800 + 60 + 100 + 0 + (8 + 5)$ Transformam-se 8+5=13 reescritos como 10+3 $868 + 105 = 800 + 60 + 100 + 0 + (10 + 3)$ $= 800 + 100 + (60 + 0 + 10) + 3$ $= (800 + 100) + 70 + 3$ $= 900 + 70 + 3$ $= 973$

Tabela 10 - Representação das barras, desenhada no quadro, para explicitar a associatividade. Fonte: do autor

<u>Um exemplo do uso das propriedades da adição:</u>

Marcus quer comprar uma casa para chamar de sua. Ele gosta muito daquela casinha, pintada de verde, na esquina do mercado. No primeiro dia, ele chega e oferece ao morador um real, e obviamente o morador recusa. No segundo dia, ele junta o valor do dia anterior e acrescenta mais dois reais para fazer uma nova oferta, que é prontamente recusada. No terceiro dia, oferece o total da oferta anterior mais três reais. Ele segue tentando, sempre da mesma maneira, até que no 99º dia, o morador aceita a oferta. Qual o valor da oferta final? Tal situação pode ser representada por:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 95 + 96 + 97 + 98 + 99 = ???$$

Será que existe uma maneira fácil de realizar essa adição sem somar (explicitamente) cada parcela? Pausaremos um momento para ouvir comentários sobre essa questão.

Como $99 + 1$ e $98 + 2$ têm a mesma soma (100), pode-se verificar que existem muitas "duplas" de números que somam 100 nessa sequência. Como há 99 números na sequência, retira-se o termo mediano $((1 + 99) \div 2 = 50)$ para incluí-lo no somatório final. Assim, têm-se $(98 \div 2) = 49$ "duplas" de adição e o termo mediano, o 50. Assim, reorganiza-se a expressão da seguinte maneira, utilizando a propriedade comutativa:

$$1 + 99 + 2 + 98 + 3 + \cdots + 49 + 51 + 50$$

Usando o princípio da associatividade, colocam-se entre parênteses exatamente as duplas.

$$(1 + 99) + (2 + 98) + (3 + 97) + \cdots + (49 + 51) + 50$$

Todos os parênteses resultam em 100, logo

$$(1 + 99) + (2 + 98) + (3 + 97) + \cdots + (48 + 52) + (49 + 51) + 50 =$$

Como temos 49 duplas, será gerado 49 somas igual a 100 e, no final do somatório, teremos o 50.

$$100 \times 49 + 50 = 4950$$

Quando o somatório é organizado, utilizam-se a comutatividade e a associatividade para chegar ao resultado. Após esse momento, aplicam-se as seguintes atividades:

1- Calcule o valor dos somatórios:

a) $1 + 4 + 7 + \cdots + 55 =$

b) $4 + 9 + 13 + \cdots + 109 =$

2- Bernarda e Priscila estão tentando calcular o quanto precisam juntar de dinheiro para adquirir um *notebook* em conjunto. Bernarda tem R$ 1368 e Priscila juntou R$632. Priscila diz que juntas possuem R$ 1990, já Bernarda acha que ela está errada, pois possuem R$ 2000. Utilizando somente notas de 100, 10 e 1 e o número mínimo de cédulas para cada quantidade:

a) Represente o problema e sua respectiva solução, utilizando um desenho.
b) Priscila disse que fez tudo direitinho: armou a adição colocando o número 1368 em cima do 632, alinhando os números, usando como referência dezena, centena e unidade, como consta na figura abaixo

$$
\begin{array}{r}
1\ 3\ 6\ 8 \\
+\ \ 6\ 3\ 2 \\
\hline
1\ 9\ 9\ 0
\end{array}
$$

Após utilizarem uma calculadora, concluíram que Priscila não chegou ao resultado correto. Qual foi o erro da aluna?

c) Argumente, a partir dos conhecimentos trabalhados em aula, por que o resultado de uma delas está certo.

Serão dados alguns minutos para os alunos discutirem as questões. Em seguida, verificaremos quais foram as respostas a que eles chegaram e será realizado um fechamento da atividade. É esperado que os alunos utilizassem a organização dos números, utilizando as propriedades de comutatividade e associatividade, espelhando-se nos exemplos do somatório para a atividade 1 e comparando o desenvolvimento do exemplo da análise da adição.

Relato da Prática e da Análise

Continuando o processo de exploração das propriedades da adição, perguntou-se qual seria para eles o significado da palavra "neutro". Inesperadamente, eles associaram a preto e escuro. A partir de alguns exemplos, como o time de futebol para o qual se torce (gremista ou colorado) ou em relação aos partidos políticos, explicou-se que o significado de neutro estava associado a não ter uma posição ou tomar algum partido. A partir dessa conversa, introduziu-se que, do ponto de vista matemático, pode-se dizer que algo é neutro quando, ao ser inserido, não altera a situação presente. Nesse ponto, indagou-se o seguinte: qual número que, adicionado ao número 3, é igual a 3? Eles responderam prontamente que era o zero. Perguntou-se se $3 + 0$ tinha o mesmo valor que $0 + 3$, e todos concordaram. Em seguida, foi questionado se aquilo valeria para qualquer outro número natural, e os alunos ficaram divididos entre o número zero e o número um. Para diferenciar, foram apresentados exemplos ($7 + 0$ e $7 + 1$, qual deles alterou o valor inicial?). Quando entenderam que o zero era o neutro da adição, perguntaram sobre o número um. Respondeu-se, assim, que ele também é neutro, mas em relação à operação de multiplicação.

Seguiu-se a sequência com o exemplo da compra da casa a partir da soma dos 99 primeiros números naturais. Os alunos compreenderam que a situação poderia ser representada pela adição das parcelas, mas houve muita confusão quando o professor colocou o conjunto de símbolos “+...+” para comprimir a listagem do somatório. Dessa forma, foi mostrada a resolução proposta no plano de aula. Eles entenderam a reorganização das parcelas para efetuar a soma 100, porém demonstraram dificuldades em determinar que havia 49 pares de parcelas devido à supressão da série completa. Os alunos gostaram da solução, dizendo que se tivessem de fazer assim, fariam menos cálculos do que a adição parcela por parcela, mas também afirmaram que era muito complicado determinar o número de parcelas duplas.

Após, foi trabalhada a folha de exercícios. Na atividade 1, o intuito era de que os alunos utilizassem a propriedade da associatividade com a comutatividade para estabelecer um agrupamento de parcelas iguais, transformando o somatório em uma operação de multiplicação. Na figura abaixo, comparam-se as resoluções de Kappa e Alfa:

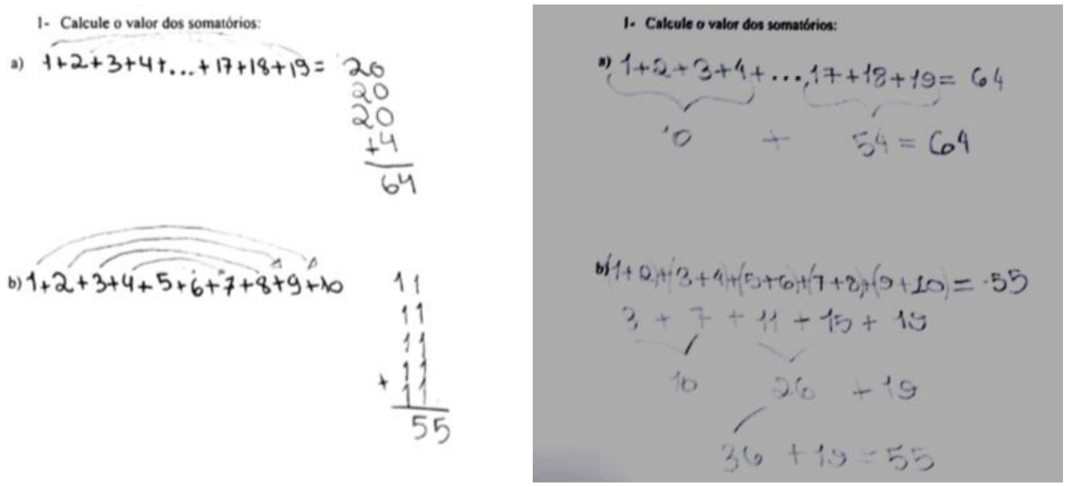


Figura 58 - Resolução pelos alunos Kappa e Alfa, respectivamente. Fonte: do autor

Observando os registros dos alunos da figura 33, notam-se as dificuldades em lidar com a representação simbólica das reticências. Tanto para Kappa quanto para Alfa, a situação foi feita, ignorando o símbolo que servia para compactar a escrita do somatório. Entretanto, ambos demonstraram habilidade em utilizar a associatividade, unindo estrategicamente os pares para transformar em uma adição mais simples. Nesse momento, percebe-se uma disputa entre os esquemas apresentados pelo professor e o esquema recém-elaborado pelo aluno Kappa a partir da situação apresentada.

Ao verificar o resultado da situação, houve uma convergência de alguns dos esquemas apresentados nas aulas, como no item “b” da aluna Alfa: mesmo apresentando o uso da associatividade para gerar valores iguais, ela utilizou-a para agrupar as somas e repetiu o processo até o somatório final.

No exercício 2, foi proposta a seguinte situação: Bernarda e Priscila estão juntando dinheiro para adquirir um *notebook* em conjunto. Bernarda tem R$ 1368, e Priscila juntou R$632. Priscila diz que juntas possuem R$ 1990, já Bernarda acha que ela está errada, pois possuem R$ 2000. Nesse ponto, houve uma restrição: só poderiam ser utilizadas notas de R$100, R$10 e R$1, e o número mínimo de cédulas para cada quantidade. Nas próximas duas figuras, podem ser observadas as respostas dos alunos Gama e Alfa:

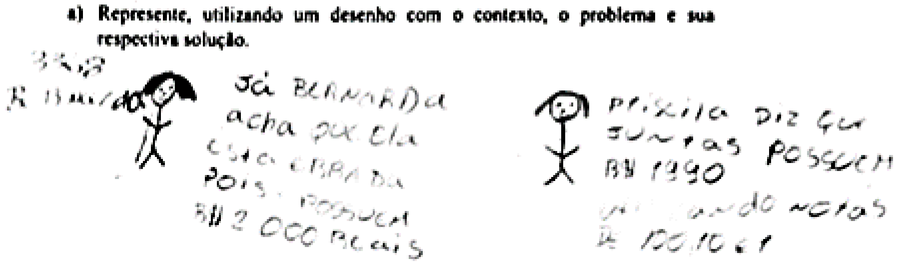


Figura 59 - Resolução do aluno Gama. Fonte: do autor

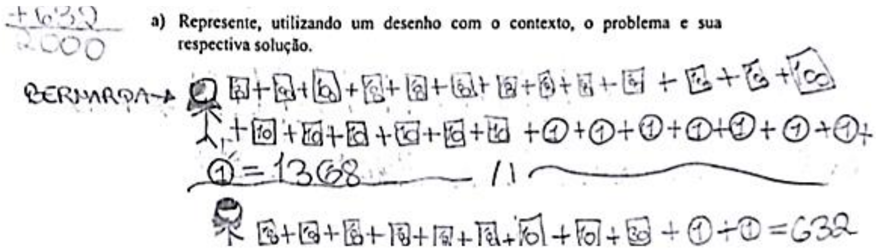
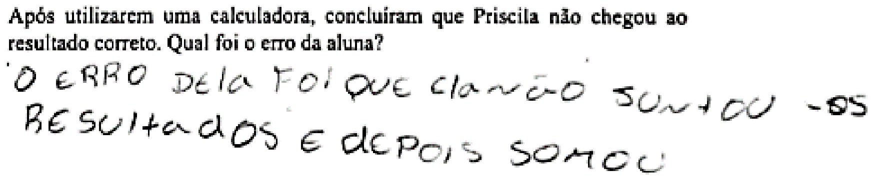


Figura 60 - Resolução da aluna Alfa. Fonte: do autor

Enquanto Gama utiliza a representação pictórica como alegoria e tenta compensar a argumentação em linguagem materna, Alfa confirma os cálculos por si e monta, utilizando uma representação para as cédulas de dinheiro, permitidas na restrição da situação. Também se nota que eles divergem em relação ao pedido na situação: Gama argumenta quem errou no cálculo, e Alfa demonstra a situação a partir da representação pictórica, mas não a sua solução. Nesse item, utilizaram os seguintes conhecimentos em ação: *as partes formam o todo; um número natural pode representar o cardinal de um conjunto; a soma das quantidades gera um valor que corresponde à cardinalidade do todo.*

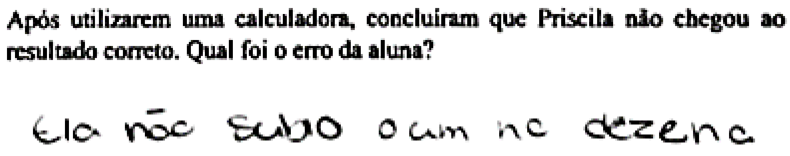
No item seguinte, foi solicitado que aos alunos tentassem inferir qual seria o erro de Priscila. Esperava-se a percepção de que, devido à falta de transporte no algoritmo da adição ou na associação das notas, Priscila tivesse errado na casa da unidade, fazendo com que ocorresse uma propagação de erros na casa da dezena, centena e milhar. Na figura abaixo, demonstram-se os registros de Gama, Beta e Eta:



Após utilizarem uma calculadora, concluíram que Priscila não chegou ao resultado correto. Qual foi o erro da aluna?

O ERRO DELA FOI QUE QUANDO SOMOU OS RESULTADOS E DEPOIS SOMOU

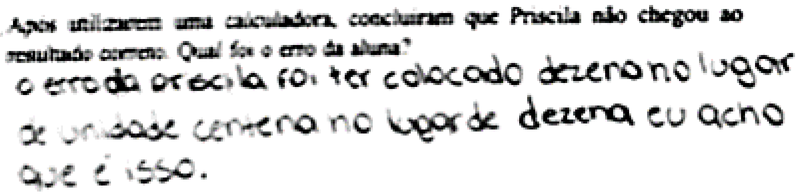
Figura 61 - Proposição do aluno Gama. Fonte: do autor



Após utilizarem uma calculadora, concluíram que Priscila não chegou ao resultado correto. Qual foi o erro da aluna?

Ela não subio o um na dezena

Figura 62 - Proposição da aluna Beta. Fonte: do autor



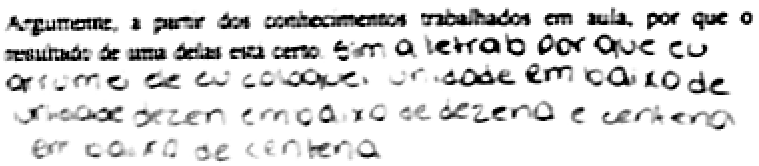
Após utilizarem uma calculadora, concluíram que Priscila não chegou ao resultado correto. Qual foi o erro da aluna?

o erro da priscila foi ter colocado dezena no lugar de unidade centena no lugar de dezena eu acho que é isso.

Figura 63 - Proposição da aluna Eta. Fonte: do autor

Analisando as argumentações, Beta é direta na afirmação com relação ao transporte, ao afirmar que Priscila não subiu com a dezena. Já Eta, demonstrando incerteza em relação a sua própria afirmação, percebeu que havia um problema em uma sequência de transportes entre ordens. Apesar de estarem corretas do ponto de vista da representação aritmética pelo algoritmo da adição, esperava-se que eles particionassem o número e utilizassem a associatividade para o transporte. Também foi possível perceber que o esquema apresentado pelo professor foi esquecido, talvez pela demasiada complexidade para a turma, ou por falta de percepção por parte dos alunos, ou por falta de familiaridade com o tipo de exercício.

No último item, foi pedido para os alunos argumentarem em relação à finalização da situação. O intuito era que eles utilizassem a associatividade como parte da argumentação, já que o efeito de transportar valores para a ordem mais alta no algoritmo da adição é possível graças à propriedade da associatividade. Nas figuras abaixo, encontram-se os registros em relação ao segundo item da atividade:



Argumente, a partir dos conhecimentos trabalhados em aula, por que o resultado de uma delas está certo. Sim a letra b por que eu arrumei de eu coloque unidade em baixo de unidade dezen em baixo de dezena e centena em baixo de centena

Figura 64 - Argumentação da aluna Eta. Fonte: do autor

Transcrição da figura: Sim, a letra “b” porque eu o arrumei; coloquei unidade embaixo de unidade, dezena embaixo de dezena e centena embaixo de centena.

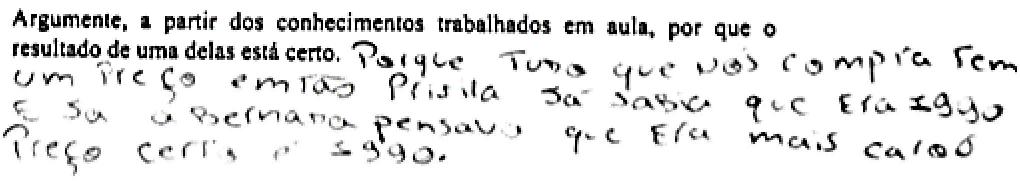


Figura 65 - Argumentação do aluno Ômega. Fonte: do autor

Transcrição da figura: Porque tudo que se compra, tem um preço; então, Priscila já sabia que era o valor de 1990, e Bernarda pensava que era mais caro. Preço certo: 1990.

A partir do exposto, observa-se que Eta e Ômega utilizam argumentações distintas. Eta remete a sua argumentação no item anterior, reiterando seu ponto de vista. Ômega, por sua vez, sai do campo da situação como um problema de Matemática e observa-o a partir do ponto de vista de uma situação do cotidiano: pois tudo que é comprado tem um preço, e Bernarda achava que era mais caro.

Plano de aula 06: Retomar e aprofundar a operação de subtração entre números naturais

Tempo de aula: 90 minutos (2 períodos)

Objetivos:

- Estabelecer as representações simbólicas da subtração e suas representações nos naturais.
- Estabelecer relações entre comutatividade, associatividade e elemento neutro com a representação pictórica.

Materiais necessários: quadro expositivo, régua e folha de atividades

Metodologia: Expositiva

Desenvolvimento:

Apesar de estar definida como a operação inversa da adição, subtrair possui diversos significados inseridos na perspectiva da resolução de problemas: retirar quantidades, extrair elementos de um conjunto.

A estrutura de uma operação de subtração consiste em três termos:

Minuendo – Primeira parcela da operação. É de onde se retirará certa quantidade ou a referência para a variação entre valores.

Subtraendo – Segunda parcela da operação. É a quantidade a ser retirada do minuendo ou o valor a ser comparado na diferença do subtraendo.

Diferença ou resto – É o resultado da subtração.

Generalizando, tem-se que $Minuendo - Subtraendo = (resto\ ou\ diferença)$

Antes do exemplo, foi explanado como funciona o sistema brasileiro que determina os números de um endereço em uma determinada rua: no Brasil, o sistema de numeração é padronizado. O número referencial do imóvel em uma rua representa a distância, em metros, entre o marco zero da rua até o referencial da matrícula do imóvel. Logo, a distância entre a casa 200 e a 300 de determinada rua será de 100 metros de distância. Algumas regiões com residências do século XIX podem não seguir essa prática. Dessa forma, será desconsiderada essa última, pois poucas ruas no Brasil utilizam o sistema português de numeração (contagem de casa com lado ímpar e par).

Exemplo: Rodrigo andava de bicicleta em uma extensa rua de sua cidade. Ele saiu de sua casa, que era de número 4923, e recebeu uma ligação de sua amiga Débora.

Débora: Oi, onde você está? *Rodrigo: Saindo de casa, indo em direção ao início da rua... só não sei exatamente qual o número, não estou vendo nenhuma casa com a numeração.* *Débora: Você sabe quanto você andou?* *Rodrigo: Na bicicleta estão marcando 1926 m, por quê?* *Débora: Beleza, me espera aí!* *Rodrigo; Tá bom!*

Tabela 11 – Diálogo fictício referente à situação de completamento. Fonte: do autor

Onde Rodrigo parou na rua? Qual o número da casa em que ele estava em frente? E por que a Débora não pediu mais informações para Rodrigo?

Deixaremos os alunos discutir a situação em duplas por alguns minutos. Ao longo desse tempo, o professor passou por entre as duplas para interagir e ouvir as argumentações deles.

Em seguida, foi proposto o seguinte raciocínio: Quando Rodrigo falou que estava indo em direção ao início da rua (endereço de número 0), a numeração estaria diminuindo, como na figura abaixo.

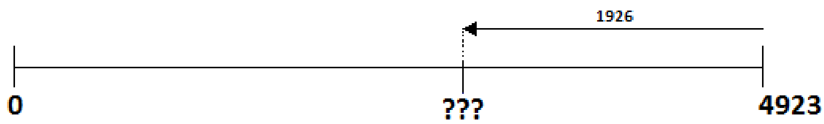


Figura 66- Representação Pictórica da situação da Aula 06. Fonte: do autor

A partir da figura acima, pode-se ver que o endereço ao qual Débora estava indo encontrar Rodrigo era a diferença entre 4923 e 1926. É possível perceber que a posição de Débora não é necessária, já que ela busca a posição de seu amigo na rua onde mora.

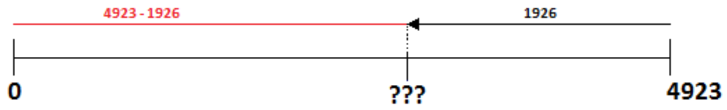


Figura 67 - Representação Pictórica da situação da Aula 06, explicitando a operação de subtração. Fonte: do autor

Figura 68 - Representação Pictórica por barras da situação da Aula 06, explicitando a operação de subtração. Fonte: do autor

Por conseguinte, pode-se entender a subtração entre números naturais como o deslocamento em cima da reta no sentido decrescente dela, a partir do primeiro número (minuendo). Assim:

Sendo *minuendo – subtraendo = diferença*:

Minuendo – O ponto inicial na reta

Subtraendo – O tamanho do deslocamento em direção à origem da reta (zero).

Diferença – Onde se finalizou o deslocamento. É o resultado da subtração.

No caso, $4923 - 1926 = 2997$. Então, ela foi ao encontro de seu amigo na casa número 2997.

Em seguida, será proposto o seguinte exercício:

1- Manoel resolveu fazer uma grande viagem de bicicleta: ir da praia de Imbé até o mercado público de Porto Alegre, percorrendo 123 km. Mesmo com todo o planejamento, o pneu de sua bicicleta furou após pedalar por 39 km. Nesse momento, estando no meio do nada, ele ligou para seu pai (que estava em POA), pedindo ajuda.

a) Como ele irá explicar para seu pai onde estava exatamente? Como você explicaria?

b) Desenhe uma possível solução para o problema de como o pai, utilizando o odômetro do automóvel (marcador de quilometragem), saberá a posição do filho na estrada.

c) Afinal, onde está Manuel?

Após alguns minutos, serão discutidas coletivamente as conclusões a que chegaram os alunos. Na sequência, houve a oportunidade para questionar o que acontece com subtrações cujo minuendo é menor ou igual que o subtraendo.

Condições para a operação de subtração

Através do exemplo $20 - 32$, questionou-se se eram subtrações possíveis de se fazer, utilizando os números naturais. Avaliaram-se as respostas fornecidas pelos alunos, mas eram esperadas duas situações: alguns alunos provavelmente inverteriam a subtração, gerando um resultado simétrico ao correto, e também alguns alunos responderiam com números negativos, pois não era um conjunto desconhecido por todos.

De acordo com a representação pictórica e usando a reta numérica, constatou-se que, no problema anterior, o deslocamento da operação foi realizado em direção à origem, sentido contrário ao da adição. Assim, tem-se uma condição fundamental para que a subtração seja possível no conjunto dos números naturais. Se o subtraendo (o que voltou) for maior que o minuendo (posição inicial), passaríamos do zero, então $23 - 28$, $43 - 58$, $68 - 69$ não são possíveis de calcular a partir do conjunto dos números naturais. Isso não quer dizer que não existe um resultado possível, mas sim que ele não é um número natural.

Comutatividade e Associatividade na Subtração

Observando a condição de existência de uma diferença em $\mathbb{N}$, pode-se concluir que a subtração não é comutativa, pois $7 - 3 = 4$, mas $3 - 7$ não é possível de se fazer nos naturais. Esbarra-se no mesmo problema da associatividade: um contraexemplo seria a situação apresentada abaixo:

$$7 - (3 - 2) \qquad\qquad (7 - 3) - 2$$

Apesar de terem resultado possível entre os naturais, pode-se observar que

$$7 - (3 - 2) \neq (7 - 3) - 2$$

Logo, tem-se um exemplo de operação não associativa nem comutativa dentro do conjunto dos números naturais.

Relato da Prática e Análise

Iniciou-se a aula, comento sobre o sistema brasileiro de numeração das residências. Questionou-se se os alunos sabiam o que significava o número do endereço de uma casa. Beta disse que não sabia, mas achava que a pessoa escolhia. A partir do que ela disse, apresentou-se aos alunos a uma situação hipotética, na qual as pessoas escolhiam os números de suas casas de forma aleatória. Mostrou-se, assim, que dessa forma os números provavelmente ficariam desordenados, perdendo o sentido do uso da numeração. Foi perguntado se eles já tinham visto números dessa forma nas ruas, e eles afirmaram que sim: citaram exemplos, inclusive das residências dos próprios alunos, em que os números de casas vizinhas estão desencontrados. A situação foi explicada, já que na região da Vila Bom Jesus existem casas com numerações diferentes: uma numeração da CEEE[12] e outra do DMAE[13], e falou-se que isso acontecia por um problema de processos de mensuração diferentes entre as instituições. Esclareceu-se que as casas possuem um marco referencial: então para o DMAE é o registro de água, e para a CEEE é o relógio de luz.

Seguiu-se falando sobre onde ficava a menor numeração na rua da escola: na esquina "de baixo" ou no topo da lomba. Eles afirmavam que era na parte de baixo. Explicou-se que o funcionamento era daquela forma porque na cidade se utilizava um sistema de numeração com algumas referências: nas ruas de sentido norte-sul, a numeração é no sentido sul-norte; nas ruas perpendiculares a essa direção, a referência é do Rio Guaíba em direção ao interior da cidade. Finalizou-se, então, dizendo que o número de uma casa é determinado pela distância em relação ao início da rua até o ponto referencial da residência, respeitando o lado par e ímpar.

A partir dessa introdução, foi levada a seguinte situação para os alunos: Rodrigo andava de bicicleta em uma extensa avenida de sua cidade. Ele saiu de sua casa, que era de número 4923, e recebeu uma ligação de sua amiga Débora.

Após a apresentação da situação, lançaram-se as seguintes questões: Onde Rodrigo parou na rua? Qual o número da casa que ele estava em frente? E por que Débora não pediu mais informações para Rodrigo? Após os alunos não se manifestarem sobre as respostas das questões ou sobre um caminho para encontrar a solução, foi demonstrado o problema a partir da representação pictórica de uma reta, na qual Rodrigo estava saindo da sua casa (4923) e retornando 1926 metros no sentido oposto à numeração crescente da rua.

Nesse âmbito, foi questionado qual seria o número do início da rua e, após algumas sugestões, o aluno Gama afirmou que seria no ponto zero, apesar de alguns comentários dos alunos que nunca viram uma casa com esse número. O professor sondou se eles sabiam qual a operação matemática que deveria ser utilizada para descobrir em frente a qual residência Rodrigo estava no momento da ligação. Os alunos falaram operações aleatoriamente (multiplicação, divisão) e, após algumas tentativas sem justificativas,

[12] Companhia Estadual de Energia Elétrica do Rio Grande do Sul – concessionária de fornecimento de energia elétrica na cidade de Porto Alegre.
[13] Departamento Municipal de Água e Esgoto – concessionária de fornecimento de água e saneamento básico na cidade de Porto Alegre.

falaram que seria a subtração. Por fim, armou-se a conta com a subtração entre 4923 e 1926. Com isso, constatou-se que ele estava em frente à casa número 2997.

Assim, foi retomado o conceito de adição, utilizado na aula três, que era uma composição de barras ou segmentos da reta numérica. Para tanto, demonstra-se a figura abaixo.

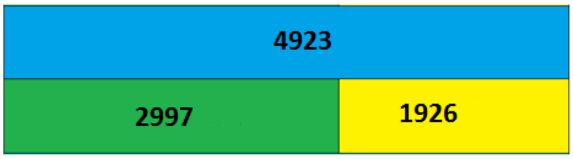


Figura 69 - Representação Pictórica de barras para a situação da Aula 06. Fonte: do autor

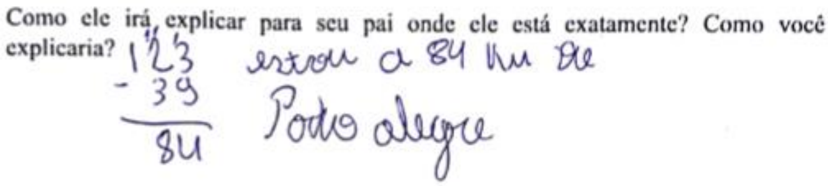
A partir disso, evidenciou-se que $1926 + 2997$ era igual a 4923. Então $4923 - 1926 = 2997$ porque $2997 + 1926 = 4923$. Nesse momento, o aluno Gama se lembrou da prova real que ele aprendeu em anos anteriores. Foi explicado que essa era mais do que a prova real, mas também a definição matemática para a operação de subtração. Aproveitaram-se o desenho e a generalização do resultado, substituindo 4923 por "a", 1926 por "b" e 2997 por "c". Assim, colocou-se no quadro que $a - b = c \; porque \; a = b + c$. Naquele momento, os alunos reclamaram que uma conta com letras era difícil e que estava difícil de compreender.

Desse modo, foi pedido para os alunos escolherem números para testar a definição. Eles escolheram 7,4 e 3 para a, b e c respectivamente. Mostrou-se, tanto por escrito como na barra pictórica, que $7 - 4 = 3$ porque $4 + 3 = 7$. Depois de mais algumas tentativas de outros números escolhidos por eles, perguntou-se se faria alguma diferença em quais números seriam colocados, ou seja, se independentes dos números escolhidos, aconteceria a mesma situação. Uma aluna disse que não faria diferença, pois com qualquer escolha iria "fechar as contas" (Alfa). A partir dessa conclusão, afirmou-se que a subtração pode ser entendida como valor necessário para completar uma parcela da adição com uma soma pré-estabelecida, desde que respeitada a condição de existência da operação (minuendo maior que subtraendo).

Em seguida, mostraram-se os componentes da subtração (Minuendo, Subtraendo e Diferença). Os alunos afirmaram que não se lembravam de terem ouvido falar naqueles termos durante suas aulas de matemática anteriores a essa intervenção didática. Assim, falou-se de quais situações seriam possíveis para se utilizar a subtração. Além do débito de valores e da extração de objetos de um conjunto, chamou-se a atenção para o exemplo

"Quantos anos a pessoa é mais velha que eu?" no qual se fala sobre a diferença de idade, que é o resultado de uma subtração entre a idade do mais velho pelo mais novo.

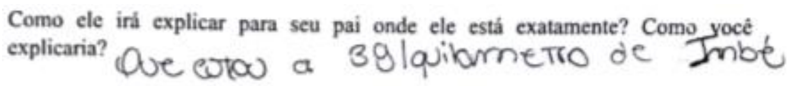
Nesse momento, foi proposta uma nova situação para os alunos pensarem. Manoel resolveu fazer uma grande viagem de bicicleta: ir da praia de Imbé até o mercado público de Porto Alegre, percorrendo 123 km. Mesmo com todo o planejamento, o pneu de sua bicicleta furou após pedalar por 39 km. Nesse momento, estando no meio do nada, ele ligou para seu pai (que estava em Porto Alegre), pedindo ajuda. Primeiramente, pediu-se para que os alunos se colocassem no lugar de Manoel para saber qual seria sua localização. Esperava-se que eles utilizassem como referencial a cidade de Porto Alegre e que a localização pudesse ser calculada a partir da diferença entre a localização de início da viagem e do que faltava para completá-la. Na figura abaixo, seguem os registros de Sigma e Psi manifestados em suas respostas:


Como ele irá explicar para seu pai onde ele está exatamente? Como você explicaria?

123
\- 39
84

estou a 84 km de Porto alegre

Figura 70 - Resposta do aluno Sigma. Fonte: do acervo do pesquisador


Como ele irá explicar para seu pai onde ele está exatamente? Como você explicaria?

Que estou a 39 quilometro de Imbé

Figura 71 - Resposta da aluna Psi. Fonte: do acervo do pesquisador

Observa-se que cada aluno entendeu a questão de maneira diferente. Sigma entendeu que precisaria explicar para o pai qual a distância que estava em relação ao pai, o qual se localizava em Porto Alegre. Psi, por sua vez, acreditou que dizer a sua distância em relação ao seu ponto de origem seria o suficiente. Acredita-se que a questão não deixou clara sua intenção, pois estava implícito que a situação requeria relacionar a distância entre Porto Alegre e Manoel. No entanto, Sigma entendeu o pedido implícito e realizou a conversão entre a linguagem materna e a aritmética, associando a subtração na situação de completamento de uma composição. Com relação aos invariantes, pode-se perceber que foram mobilizados os seguintes conhecimentos em ação: *o estado inicial em um problema de transformação pode ser obtido a partir da aplicação da transformação inversa ao estado final da medida; o valor de uma medida é especificado em relação ao valor de uma outra medida, em termos de acréscimos ou decréscimos; a relação existente entre as duas* *medidas é ser expressa por um número.* Nessa situação, o conceito da subtração esteve presente como ferramenta para a resolução da situação.

No segundo item, foi solicitado aos alunos que representassem de maneira pictórica a visão do pai, utilizando o odômetro, sobre a posição do filho na estrada. Depois de esclarecer que o odômetro é o instrumento que mede a distância percorrida pelo automóvel, demostraram o entendimento de que Manoel e seu pai tinham relações inversas entre o sentido de olharem a estrada, pois Manoel estava no sentido Imbé-Porto Alegre, e seu pai, Porto Alegre-Imbé. Eles mostraram que ambos os deslocamentos se complementavam na estrada, isto é, o problema poderia ser visto sob duas perspectivas: a de Manoel e a de seu pai. Para fins de análise, seguem abaixo as respostas de Psi e Beta:

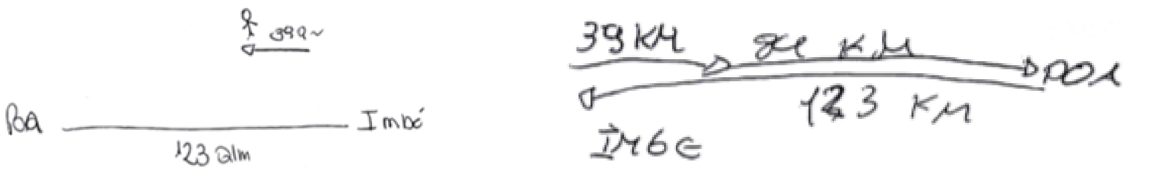


Figura 72- Resposta da aluna Psi e Beta respectivamente. Fonte: do acervo do pesquisador

Pode-se observar que ambas entendem que os sentidos de cada movimento da viagem são inversos e Beta utiliza uma seta para reforçar isso. Enquanto Beta faz questão de colocar os valores próximos do vetor, que simboliza o trajeto Imbé/Porto Alegre, Psi não se aproxima ou coloca seu vetor posicionado próximo ao alinhamento da posição da praia de Imbé. Pode-se notar que Beta explicita a invariante do teorema em ação *o valor de uma medida é especificado em relação ao valor de duas medidas, em termos de acréscimos ou decréscimos*, onde $123 - 39 = 84$, pois $39 + 84 = 123$.

Após a correção das atividades, retomou-se a ideia de o movimento estar associado à operação de subtração na semirreta numérica. Foi identificado qual o papel do subtraendo, do minuendo e da diferença dentro dessa dinâmica: o minuendo era o número de partida do deslocamento; o subtraendo, em quantas casas se deveriam ir em direção contrária à construção da reta (no caso, à esquerda) e a diferença era o valor após o deslocamento. Em seguida, foi feita uma comparação com a dinâmica da adição.

Aproveitou-se o momento para comentar como ficavam as propriedades (comutatividade, associatividade e elemento neutro) inseridos na operação de subtração. Deu-se início com o valor $7 - 3$ e perguntou-se qual seria o valor de $3 - 7$. O aluno Kappa disse que também seria 4. Mostrou-se, assim, na reta, como ficaria a representação do $7 - 3$, bem como $3 - 7$. No caso de $3 - 7$, perguntou-se o que aconteceria se "voltassem" sete unidades a partir do ponto que representava o número três; eles foram unânimes em perceber que não havia nada à esquerda do zero. A partir disso, entenderam que o resultado das duas operações não era o mesmo, além do que se pode observar no trecho abaixo:

P: Já deu para perceber que 7-3 é diferente de 3-7. Eu não sei qual o resultado desse, mas com certeza não é 4. *Gama: Então deve ser zero a resposta.* *P: Do ponto do 3, se andarmos 3 casinhas, voltamos até o zero, mas temos que voltar no total de sete casinhas. E as 4 casinhas restantes foram parar onde?* *Gama: Sumiu!* *P: Sumiu, né?*

Tabela 12 - Diálogo entre Gama e o professor referente à situação do problema da subtração entre naturais. Fonte: do acervo do pesquisador

Nesse momento, deu-se prosseguimento para entender como a propriedade da associatividade funciona. Como eles já tinham percebido que a comutatividade não funcionava, acreditavam que a associatividade não iria dar certo também. Pegou-se o exemplo de $(12 - 8) - 4$ e comparou-se com $12 - (8 - 4)$, onde a primeira tem como resultado zero e a segunda resultado 8. Como os dois resultados foram diferentes, perceberam que a subtração não poderia ser associativa.

Finalizando a discussão com o elemento neutro, utilizou-se na reta a dinâmica de $7 - 0$, que tinha como diferença o próprio sete. Os alunos começaram a falar que então funcionava, já que a diferença deu o próprio minuendo. Naquele momento, questionou-se sobre a operação $0 - 7$, que não tinha o mesmo resultado, inclusive nem havia como determinar qual a diferença entre 0 e 7, partindo da origem, indo sete unidades à esquerda da reta construída para a direita; não havia nada construído onde o deslocamento terminava.

Enquanto os alunos iam tentando descobrir a diferença entre 0 e 7, o professor provocava, mostrando que para qualquer número natural não fazia sentido, pois todos eles estavam à direita de zero e era necessário algo à esquerda desse número. Perguntou-se se estava faltando algo, se existia alguma maneira de preencher o lado oposto ao referencial na da reta numérica. Segue, abaixo, a fala de Gama:

Gama: Não tem nada lá, então tem que colocar areia para tapar aquele vazio.

Naquele momento da aula, a percepção dos alunos foi de que o esquema do campo aditivo inserido dentro do conjunto dos números Naturais apresentou uma fragilidade: subvertendo a condição operativa da subtração e observando-a dentro da semirreta numérica construída, os alunos perceberam que tal construção era insuficiente: nem sempre o resultado de uma subtração (ou um complemento de uma adição) irá resultar em um número natural. Quando o esquema se demonstra frágil, o sujeito busca aprimorar seu esquema ou até mesmo substituí-lo por outro mais eficaz, que satisfaça frente à nova situação apresentada. Os alunos poderiam ter escolhido a irredutibilidade da posição de manter a condição entre o minuendo e o subtraendo, mas optaram por sondar o que poderia haver no lado oposto à construção da semirreta. Assim, a aula foi encerrada, lembrando que, na seguinte, seria preenchido esse vazio.

Plano de aula 07: Motivação para os números negativos e a expansão para a reta numérica representando o conjunto dos Números Inteiros

Tempo de aula: 90 minutos

Objetivo:

- Construir, a partir da semirreta representativa dos números naturais, uma reta numérica, explicitando nela os Números Inteiros.

Material utilizado: Quadro expositivo

Metodologia: Expositiva

A aula foi iniciada com o retorno ao problema da subtração, quando o minuendo é menor que o subtraendo. Os alunos serão convidados a discutir os problemas a seguir e apresentar soluções, por escrito, se possível:

a) No final de um campeonato esportivo, seu time marcou 20 pontos e sofreu 32 pontos. Qual é o saldo final?

b) Um açougueiro trabalha num ambiente a 20°C. Quando ele entra no congelador de armazenamento, a temperatura cai 32 graus Celsius. Qual a temperatura interna do frigorífico?

Dando seguimento, retomou-se uma discussão sobre como os grupos resolveram os dois problemas propostos, bem como a análise dos argumentos dos grupos mediante as situações apresentadas. Era esperado que surgissem contribuições que apontassem para os números negativos.

Cabe ressaltar as duas perguntas remetem à mesma operação: $\mathbf{20-32}$. Quando se estabelecem as regras dos Números Naturais (20 e 32 são Naturais), define-se que, a fim de que a subtração seja possível, é preciso que o minuendo seja maior que o subtraendo, logo não seria possível dentro do conjunto estabelecido. Porém, as situações apresentadas são passíveis de resposta. Algumas vezes, os números conhecidos não são suficientes para expressar a natureza das informações que são envolvidas nos problemas do cotidiano;

então, é necessário que se busque uma expansão do conjunto de números que serão utilizados para representar, analisar e responder problemas.

No item “a”, como é possível representar o resultado de $20 - 32$? Uma possibilidade é olhar o problema a partir da compensação de unidades. Também se pode pensar no mesmo exemplo, em que cada ponto marcado (representado por M) é cancelado por um ponto sofrido (representado por S). Assim, basta fazer a contabilidade dos pontos que não foram pareados entre M/S, conforme a representação a seguir:

M/S	M/S	M/S	M/S	M/S	S	S	S
M/S	M/S	M/S	M/S	M/S	S	S	S
M/S	M/S	M/S	M/S	M/S	S	S	S
M/S	M/S	M/S	M/S	M/S	S	S	S

Tabela 13- Representação Pictórica do problema 1. Fonte: do acervo do pesquisador

A partir dos resultados dos grupos, provocou-se uma discussão, utilizando as seguintes questões: O que significa sobrar 12 itens S não cancelados? Qual a diferença, utilizando a representação de diferença entre marcar 12 gols e sofrer 12 gols?

Sobre o problema do item “b”, será observado como os alunos irão utilizar os desenhos para representar o problema; espera-se algo próximo da figura abaixo, na qual se pode observar a linha do termômetro que desce 20 graus para atingir o zero, e ainda para 12 unidades, a fim de que a descida de temperatura seja no total de 32 graus.

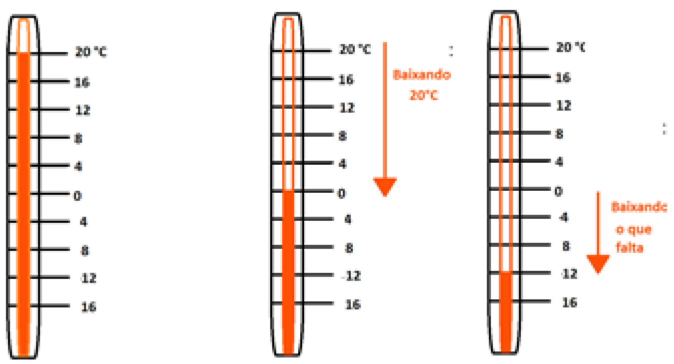


Figura 73- Representação Pictórica da situação 2. Fonte: do acervo do pesquisador

Em todos os exemplos, observa-se que aparece a quantidade 12, porém difere do número natural 12 porque “o saldo é 12 pontos contra” (exemplo a) e “a temperatura é 12 abaixo de zero” (exemplo b).

Nesse sentido, será lançada aos alunos a dúvida: utilizando a semirreta numérica que se construiu em aulas anteriores, como representar esse “novo 12”?

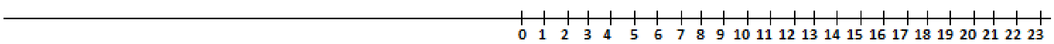


Figura 74- Início da expansão da semirreta numérica representativa dos números naturais. Fonte: do acervo do pesquisador

Nesse ponto, surge a necessidade de se expandir o conjunto de números, pois esse novo 12 não é um número natural, já que ele seria "outro 12'. Voltando à semirreta na qual está o conjunto dos números naturais, existe a opção de expandir esse objeto geométrico a fim de que se torne uma reta.

Por fim, será concluído que a subtração, dentro dos números naturais, nem sempre possui uma diferença que pertence aos naturais. Então, a que conjunto eles pertencem? Para isso, é necessário fazer uma expansão a partir do conjunto que se conhece.

Os Números Inteiros, construídos a partir da expansão do conjunto dos números naturais, é assunto novo para os alunos de Ensino Fundamental nessa etapa (7º ano). Porém, o uso de referenciais é muito comum em sua rotina.

Em todos os problemas abordados, nota-se que sempre existe um referencial e em situações valores que são maiores ou menores que esse. No caso da situação dos gols marcados e sofridos, o referencial é o saldo nulo, ou seja, o time marcou o mesmo número de gols que sofreu.

Então, será tomado o ponto que representa o número zero, que já era a origem da representação como referência para essa extensão dos naturais. Se for repetida a construção feita com régua e compasso para o outro lado em relação ao zero, resulta da seguinte forma:

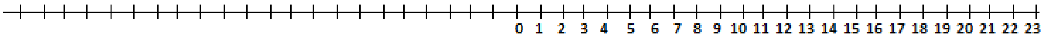


Figura 75- Construção da reta numérica representativa dos Números Inteiros (Parte 1). Fonte: do acervo do pesquisador

O primeiro ponto à esquerda do zero tem uma unidade de distância à origem, mas num sentido contrário em relação à construção anterior. Definir-se-á que o sentido o qual se adota para o conjunto dos números naturais será o **positivo,** e o sentido contrário, o **negativo**. Para diferenciar os sentidos, serão colocados os sinais + e – à esquerda do número. Por exemplo, +8 é o número que dista oito unidades em relação à origem para o sentido que os números naturais foram construídos (no caso, para à direita. Pode-se ver que ele é o próprio natural 8), e -6 é o número que dista seis unidades em relação à origem no sentido contrário do que os números naturais foram construídos (no caso, para à esquerda).

Assim, a reta numérica fica da seguinte forma:

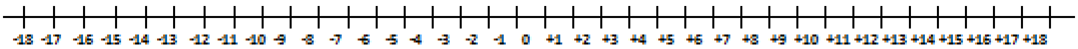


Figura 76- Construção da reta numérica representativa dos Números Inteiros (completa). Fonte: do acervo do pesquisador

Na figura acima, pode-se facilmente continuar a construção para ambos os lados: no caso do -23 se repete a criação de um novo ponto e marca-se o $+24$, pois esse ponto dista 24 unidades da origem no sentido que foi construído o conjunto dos naturais; já do lado oposto, no ponto -22, cria-se um ponto à esquerda e marca-se o -23, pois dista 23 unidades no sentido contrário à construção de $\mathbb{N}$. Assim, como sempre é possível construir um novo ponto para qualquer lado, pelo fato de se utilizar uma reta (não tem começo, nem fim), pode-se dizer que ambos os lados possuem infinitos números.

Usa-se a direita por costume da escrita, mas pode-se fazê-la indo para a esquerda, para cima ou até mesmo na diagonal. Mostrar-se-ão essas representações para que os alunos vejam que o importante é o referencial, não o sentido de uma única construção. A seguir, alguns referenciais possíveis:

- Se N está para a esquerda => $\mathbb{Z}_-$ - está para a direita
- Se N está para baixo => $\mathbb{Z}_-$ está para cima. Aqui se cita o exemplo do termômetro.

Voltando aos dois exemplos do início da aula, onde “o saldo é 12 pontos sofridos” (exemplo a) e “a temperatura é 12 abaixo de zero” (exemplo b), pode-se perceber que ambos vão ao sentido percebe-se que ambos vão ao sentido oposto a construção dos números Naturais, então é possível de se sugerir que $20 - 32 = -12$. Observa-se que talvez, nesse caso, haja um ponto crítico de entendimento: até hoje, o sinal positivo (+) e o sinal negativo (-) tinham uma única finalidade que era a operação de adição e subtração. A partir de agora, esses sinais ganham mais um significado, o novo significado é a sua referência em relação ao zero.

Relato da Prática e Análise

Devido à espontaneidade da curiosidade provocada no final da aula anterior, iniciou-se retomando o problema da comutatividade dentro da operação de subtração, com o exemplo $3 - 7$, que seria voltar sete unidades a partir do ponto que representa o número três.

O professor perguntou se alguém tinha alguma sugestão para construir. Como não houve nenhuma, retomou-se à construção da semirreta numérica que representava os números naturais. Chamou-se a atenção que naquela construção tinha sido usado somente um pedaço do objeto geométrico. Naquele momento, ratificou-se o conceito de reta como um objeto infinito.

Da mesma forma, lembrou-se que foi fixado um ponto inicial, chamado de origem, e uma distância fixa, que era a unidade. Após, escolheu-se um lado para ir marcando uma unidade de distância e um novo ponto, fazendo o sucessor da origem (1) e o seu sucessor (2) e assim por diante. Naquele momento, o aluno Ômega interrompeu e disse: “Ah, então dá para a gente fazer do outro lado também!”. Todos concordaram com ele, acrescentando que bastaria prolongar a semirreta para o outro lado (transformando em uma reta) e adotando o mesmo procedimento de marcação dos pontos. Após marcar alguns pontos à esquerda da origem, nos quais os naturais foram representados à direita, afirmou-se que aquelas novas marcações à esquerda também possuíam as mesmas propriedades que as da direita, ou seja, cada ponto X estava a X unidades da origem.

Diante do exposto, levantou-se o problema do procedimento: havia uma duplicidade de símbolos que, embora iguais, representavam pontos diferentes da reta. Questionou-se em como diferenciar, por exemplo, o três da direita com o três da esquerda. Após um momento de silêncio, os alunos disseram que poderiam usar, por exemplo, 3D e 3E para diferenciar as marcações equidistantes. Porém, se a reta fosse vertical, o uso da direita e da esquerda perderia o sentido. Eles questionaram dizendo que poderia ser acima e abaixo, mas deveria ser uma notação que pudesse ser utilizada independentemente da posição da reta construída.

Essa discussão sobre a representação simbólica se mostra como crucial em uma prática didática, pois os símbolos deixam de somente significar e passam a ser significados, ganhando um novo sentido frente ao atual esquema que os alunos mobilizam em relação aos conjuntos numéricos.

Enfim, apresentou-se a solução que foi estabelecida usualmente, a qual constava da associação ao símbolo + para os valores direita da origem, e o símbolo – para os valores esquerda da origem, isto é, -3 está a três unidades à esquerda da origem, diferente do +3, que está a 3 unidades de distância à direita da origem. Após essa convenção, perguntou-se por que o zero não tinha nenhum dos dois sinais. Como não houve contribuições, observou-se que, como ele é a referência do sistema numérico como a origem, nenhum dos dois sinais faria sentido, logo ele não possuiria sinal. A seguir, nomeou-se o novo conjunto de Números Inteiros.

Do mesmo modo, foi questionado se, a partir daquela construção, os alunos achavam que o conjunto era infinito ou finito: eles consideraram que, como o conjunto podia ser representado pelos pontos de uma reta, sempre era possível criar pontos (dos dois lados), ou seja, esse conjunto nunca iria parar de crescer para ambos os lados.

Ao se apresentar o símbolo do conjunto, contou-se o motivo do conjunto dos Números Inteiros serem chamados de Z, que vem do alemão *Zahlen* (números) a partir da obra de um matemático chamado Dedekind.

Depois de tudo, voltou-se à situação que motivou toda a discussão: $3 - 7$. A partir da nova reta que representou os Números Inteiros, mostrou-se que a dinâmica do movimento de sete casas à esquerda do ponto 3 terminava no ponto -4, e assim se escreveu 3 – 7 = – 4. Também, frisou-se a semelhança entre $7 - 3 = 4$ e $3 - 7 = -4$, pois ambas utilizam dois exemplos com operação monetária: "Você tem sete reais, gastou três e ficou com quatro" e a outra seria "Você tem três, gastou sete e está devendo quatro para alguém". Mostrou-se, assim, a mesma ideia utilizando a reta na direção vertical, fazendo relação com os elevadores modernos que já marcam o subsolo com números negativos, onde o térreo é a origem, geralmente chamada de P (piso).

Diante do exposto, acredita-se que a subversão da condição de subtração nos números naturais acabou gerando um processo de desestabilização de todo o esquema do campo aditivo, o qual foi reorganizado estabelecendo uma nova representação simbólica com novas sinergias entre as representações analisadas.

Em seguida, foi solicitado que os alunos pensassem sobre dois problemas. O primeiro era sobre o time que tinha 20 pontos e sofreu 32 pontos; já o segundo seria sobre a diferença de temperatura entre entrada e saída de um congelador comercial. Quando questionados sobre o primeiro problema (referente ao saldo final), a resposta que surgiu foi 52 pontos, que seria a composição de 32 com 20. Perguntou-se o que era saldo de pontos. Os meninos Ômega, Sigma e Kappa responderam que era o total de pontos feitos. Naquele momento, inseriu-se no quadro nova situação: o time A fez 10 pontos e sofreu 2, e o time B fez 8 e não sofreu nenhum, qual foi o melhor time? Os alunos dividiram-se entre o A e o B.

Depois de um pouco de argumentação por parte dos alunos, chegaram à conclusão de que os dois times tiveram o mesmo desempenho. Perguntou-se qual a argumentação daquela conclusão, e a aluna Alfa disse que a conta que ela utilizou para perceber foi a de subtração. Dessa forma, comentou-se que, nos campeonatos de diversos esportes, o saldo de pontos era uma maneira de desempatar atletas ou equipes com o mesmo número de vitórias, empates e derrotas.

Após parear todo o símbolo de pontos marcados com os círculos, ainda restavam 12 círculos não pareados. Cada um daqueles círculos representava um gol sofrido a mais que marcado, totalizando o saldo de 12 pontos sofridos. Aproveitou-se o momento para lembrar que era muito diferente possuir o saldo de 12 pontos marcados do que ter o saldo de 12 pontos sofridos.

Em um primeiro momento, os alunos buscaram a adição para enfrentar a situação por não terem pensado o significado da palavra saldo. Ao perceberem saldo como a diferença entre dois tipos de pontos, entenderam a situação como sendo a diferença (então a subtração) de duas quantidades. Para tanto, mobilizaram o teorema em ação *a relação existente entre as duas medidas é expressa por um número*. Porém, diferentemente das situações nas quais os valores são representados por números naturais, o valor de comparação teria uma referência em relação à natureza dos valores envolvidos: se no saldo tiver mais pontos marcados que sofridos, a referência será pontos marcados; se ocorrer o contrário, a referência será de pontos sofridos.

No segundo problema (sobre o açougueiro entrando no frigorífico), começou-se perguntando se eles já tinham observado um termômetro. Poucos alunos responderam positivamente. Daqueles que já o tinham visto, a maioria só conhecia o termômetro digital, no qual não aparece a escala de mercúrio. Então, explicou-se como um termômetro analógico funcionava. Colocou-se a questão de um colaborador de um supermercado que trabalhava na área de açougue. Esse estava no atendimento ao público em que o termômetro marcava 20°C. Para atender um pedido, precisava buscar uma carne dentro do frigorífico do estabelecimento, vivenciando uma queda de 32 graus ao entrar. Naquele momento, questionando como eles fariam para entender a situação, Alfa disse que primeiramente pensou no termômetro até o zero (0°C) que daria 20 graus a menos. Como ainda restavam mais 12 graus para descer, então a temperatura no congelador estava 12 graus abaixo do zero. Salientou-se que 12 graus abaixo de zero era equivalente a dizer 12 graus Celsius negativos. Questionou-se, assim, qual seria a referência de temperatura ao explicar que a referência do sistema Celsius era o ponto de congelamento da água. Também foi comentado brevemente sobre a escala Fahrenheit e Kelvin.

Nesse caso, os alunos enfrentaram uma situação de dupla transformação e conseguiram converter devidamente entre a representação pictórica (a dinâmica da temperatura no termômetro) e a linguagem materna (entendendo a expressão "caí" como um decréscimo da temperatura, isto é, menor que o valor inicial). Ainda no desenho, perceberam que os primeiros 20 graus de queda na temperatura anulavam os 20 graus que marcavam no início do termômetro, e ainda restavam 12 graus de queda. Assim, o esquema para o enfrentamento da situação seguiu do seguinte modo: diminuir 20 graus até zerar o termômetro, sobrando têm-se 12 graus de queda, ou seja, 12 graus abaixo de zero.

Nesse caso, apesar de utilizarem um esquema diferente da situação anterior, mobilizaram o mesmo teorema em ação. A seguir, apresenta-se a dupla transformação feita pelos alunos:

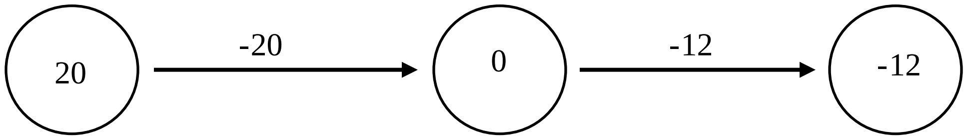


Figura 77 - Transformação do problema proposto. Fonte: do autor

Plano de aula 08: Os Números Inteiros no cotidiano

Tempo de aula: 90 minutos (2 períodos)

Objetivos:

- Estabelecer, a partir dos conhecimentos do dia a dia do aluno, que os números negativos e positivos são utilizados em situações referenciais.

- Mostrar como os números positivos e negativos estão presentes no cotidiano a partir de alguns exemplos.

Materiais necessários: Folha A4, cola, tesoura, revistas diversas, projetor multimídia e/ou quadro expositivo

Metodologia: Expositiva

Desenvolvimento:

Inicia-se com a seguinte atividade: a partir de recortes de jornais, será montado um mini cartaz, como ilustrado a seguir:

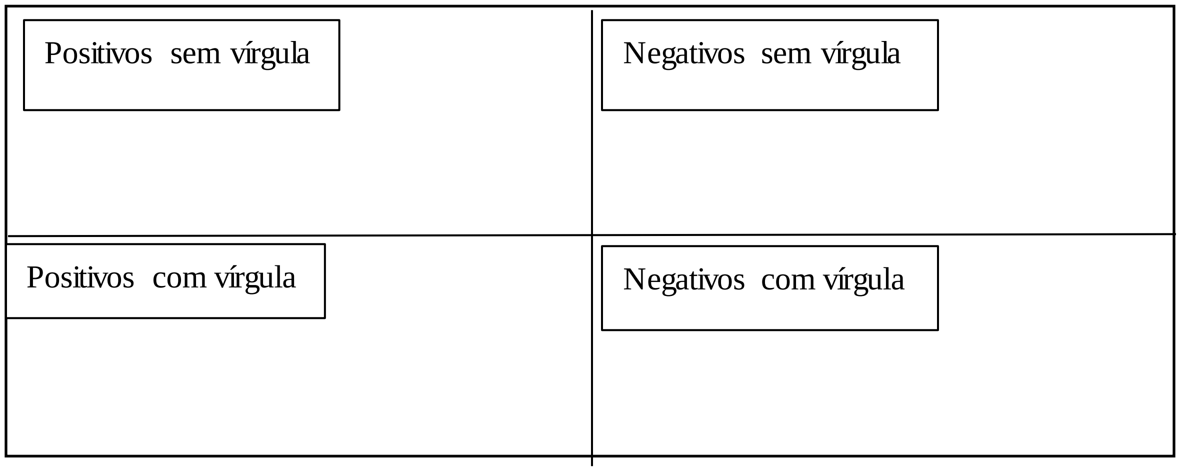


Figura 78- Modelo de minicartaz da atividade proposta na aula 08. Fonte: do autor

Após essa atividade, discutir-se-ão alguns casos de onde aparecem números negativos no cotidiano. Dessa forma, será dito para os alunos que, mesmo sendo um assunto novo do ponto de vista matemático, pode-se perceber que os Números Inteiros estão presentes na vida das pessoas. Para cumprir tal objetivo, serão mostrados alguns exemplos de como as medidas podem necessitar de números relativos ou referenciais.

Relato da Prática e Análise

Iniciou-se a aula fornecendo o material para a atividade do dia: cola, tesoura, papel A4 e revistas diversas. Foi introduzido um mini cartaz que seria feito individualmente, conforme modelo do plano de aula.

Durante a atividade, surgiram alguns questionamentos e argumentos dos alunos. Diversos alunos perguntaram onde se deveriam colocar os números com percentual (exemplo, 48%), se eram para ser colocados no campo dos números positivos sem vírgula. Também alguns alunos retiraram a expansão decimal de um número para encaixar-se em outra categoria. Outros sentiram dificuldade em achar números negativos nas revistas, apesar de haver uma proporção relevante de revistas de finanças na amostra que lhes foram fornecidas. Segue um registro escolhido (aluna Alfa):

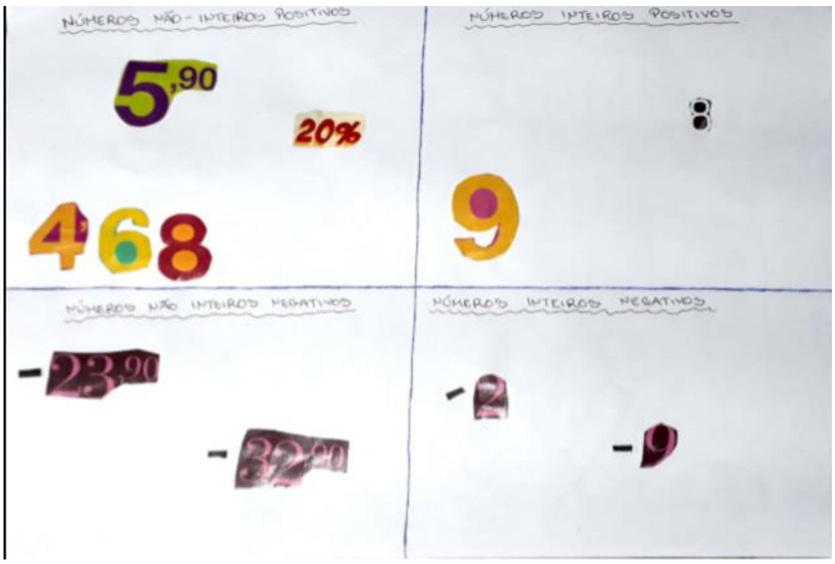


Figura 79 - Registro de Alfa. Fonte: do acervo do pesquisador

Pode-se perceber que Alfa realiza o correto tratamento entre as categorias acima descritas. Durante a atividade, não foi expresso o desejo de completar todos os campos com exemplos, porém percebe-se nessa e nas outras produções que os alunos tinham o completamento como meta, mesmo que fosse preciso forçar alguma representação, como no caso de adicionar o símbolo negativo.

Assim, acredita-se que, apesar de a atividade ter atingido seu objetivo, que era de organizar o significado da representação aritmética e em linguagem materna (classificando-os), a falta de contexto nos números tirou parte do potencial, pois o objetivo era onde esses números estão presentes na vida das pessoas.

Plano de aula 09: Módulo e Número Simétrico

Tempo de aula: 90 minutos (2 períodos)

Objetivos:

- Construir o conceito de valor absoluto ou módulo.

- Construir o conceito de número oposto ou simétrico.

Materiais necessários: quadro expositivo

Metodologia: Expositiva

Desenvolvimento:

A aula será iniciada com a retomada do exemplo do saldo de pontos, aula 07. Qual a semelhança entre ter saldo de 12 pontos a favor ou 12 pontos contrários? Apesar de terem ideias diferentes em relação a sua posição dentro de um contexto, ambos possuem uma distância de 12 unidades em relação à origem.

Definindo-se Módulo ou Valor Absoluto de um número inteiro, tem-se sua distância em relação à origem da reta numérica (Zero). Para tanto, $| \ a \ |$ significará dizer que se está fazendo o módulo do número a. Por exemplo, $+15$ está para 15 unidades da origem, então seu módulo será 15, isto é, $|+15| = 15$. Por outro lado, -18 está distante 18 unidades da origem, então $|-18| = 18$. Nesse momento, partir-se-á para uma generalização do conceito, a partir de três possibilidades:

- O número ser positivo, do tipo $+a$, com a um número natural. Como esse número irá estar distante a unidades da origem, então $|+a| = a$;
- O número ser o zero. Como ele é a própria origem, a distância até ele mesmo é zero, ou seja, $| \ 0 \ | = 0$;
- O número ser negativo, do tipo $-a$, sendo a número natural. Mesmo ele estando no sentido contrário dos números naturais, ele está distante a unidades da origem, então $|-a| = a$.

Nesse âmbito, segue amostra, de maneira informal e intuitiva, de que o módulo de um número inteiro é sempre um número natural.

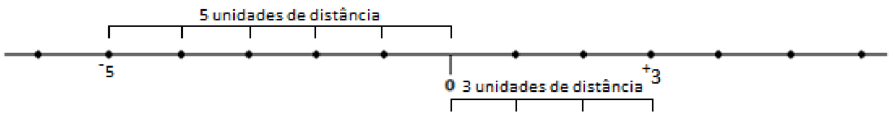


Figura 80- Exemplos de módulos e sua relação com a distância. Fonte: do acervo do pesquisador

Pelo exemplo, $|-5| = 5$ e $|+3| = 3$

Número Oposto

A partir da definição do módulo, tem-se um resultado interessante: $|+12| = 12$, mas $|-12| = 12$. Como os inteiros negativos nada mais são do que uma expansão em relação aos pontos que representam os números naturais, sempre haverá dois números com o mesmo módulo (um positivo e um negativo). Diz-se, portanto, que um é o oposto do outro, ou seja, o oposto de $+a$ é $-a$.

Após essa introdução, será disponibilizada uma folha de atividades com quatro exercícios:

Atividade 1: Se você fosse escrever o módulo com suas palavras, como seria?

Atividade 2: Quem tem o maior módulo: -7 ou $+5$? Utilizando a reta numérica, represente os dois módulos e argumente o que você escolheu como maior.

Atividade 3: Maurício estava estudando o módulo em um livro muito antigo de seu pai. Em certa questão, deparou-se com o seguinte:

$$|--3| = 8$$

Sem conseguir saber o que calcular, pensou: qual o número que está dentro do módulo?

Atividade 4: Qual é o oposto do oposto do número $+15$? E se fosse um número negativo, o que aconteceria?

Tais atividades serão discutidas em grupo nos últimos momentos da aula.

Relato da Prática e Análise

Devido ao alto número de faltas da maioria dos alunos nas últimas aulas, resolveu-se retomar as últimas descobertas e resultados das aulas anteriores, no sentido de auxiliar na organização do esquema conceitual por parte dos alunos. Começou-se relembrando a construção da semirreta com os números naturais e a insuficiência dessa para determinar a diferença quando o minuendo é menor que o subtraendo. Da mesma forma, a solução para preencher o vazio do lado oposto da origem que foi a expansão a semirreta que representava os números naturais e utilizar o sinal + e – para determinar valores maiores que zero e menores que ele, respectivamente.

A partir dessa revisão, introduziram-se alguns exemplos de números na reta, falando sobre a relação do seu valor (devido à distância da origem) e o seu sinal (posição em relação à origem). Com isso, definiu-se que o módulo de um número seria o valor da distância à origem, sem considerar a sua posição. Os alunos perceberam rapidamente que o módulo seria o valor do número sem considerar o sinal que indica de qual lado da reta ele está posicionado. Depois de alguns exemplos, perceberam que se houvesse um número negativo, bastaria trocar o sinal para positivo e que, se o número fosse positivo, bastaria estar como estava.

Na sequência, foi explorado o número -3 e o +3, pois cada um deles estava a três unidades da origem, isto é, eram equidistantes. Definiu-se, em conjunto, que os números que estivessem na mesma distância da origem seriam considerados opostos ou simétricos. O fato de ter duas denominações trouxe dificuldades, pois alguns alunos se manifestaram, dizendo que entenderam o conceito de número oposto, mas não o de número simétrico. Optamos por alterar essa parte no produto técnico final, visando uniformizar a nomenclatura. Acredita-se que o melhor momento para dizer que Número Oposto e Número Simétrico são denominações equivalentes é após a formalização do primeiro.

Finalizando a parte expositiva, trabalhou-se a representação do “oposto do oposto de -8”. Foi realizada uma associação com a utilização da uma roupa: em uma roupa que possui lado avesso, ou seja, há dois lados (correto e o avesso). Uma roupa que for virada ficará na posição oposta da inicial (correto/avesso ou avesso/correto). Assim, virar duas vezes a roupa faz com que ela volte ao estado inicial. A partir do exemplo de vestuário, os alunos entenderam que realizar o oposto do oposto de um número é o próprio número inicial.

Na atividade 1, como não havia sido definido formalmente o conceito de número oposto, o objetivo foi de ver como os alunos manifestariam esse novo conceito. A expectativa era de que utilizassem uma argumentação geométrica, contando as casas, como Rho, ou a distância até a origem, como Alfa. Rho percebeu que, independente do lado em que se encontrava a representação na reta numérica, bastava contar o número de casas até o zero. Apesar de essa descrição ser insuficiente para definir o módulo para qualquer número real, é um ponto de início: na continuação dos seus estudos, conhecendo e estruturando novos conjuntos numéricos, terão a oportunidade de seu esquema atual entrar em competição com outro esquema mais abrangente, culminando futuramente na definição formal de módulo. Por sua vez, Alfa mostrou um entendimento mais próximo ao conceito adequado, associando a distância em relação à origem. Nas figuras abaixo, apresentam-se as respostas das alunas.

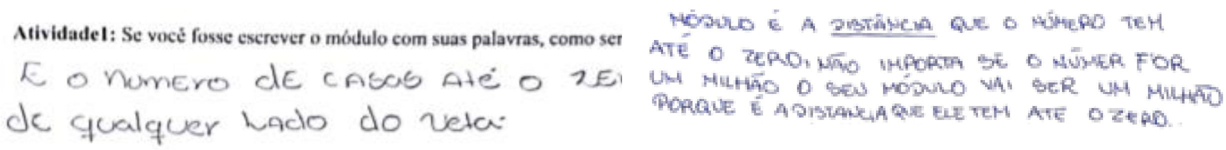


Figura 81- Resposta da aluna Rho e Alfa respectivamente. Fonte: do acervo do pesquisador

Na mesma atividade, Sigma optou por ilustrar com exemplos, apesar da expressão "com suas palavras" no enunciado. Acredita-se que ele tentou sistematizar os exemplos dentro das possibilidades de casos em um número inteiro (positivo ou negativo). Nesse caso, acredita-se que ele poderia ter mobilizado o teorema em ação de que *o módulo é sempre um número positivo*. Apesar desse teorema não ser verdadeiro (justificativa: o caso do nulo), e observando a resposta dele (figura a seguir), pode-se também pensar na possibilidade de ele ter mobilizado outro teorema em ação: *o módulo é sempre o número sem o sinal*. O conflito entre esses dois teoremas em ação pode levar a problemas conceituais quando se enfrentam situações nas quais é preciso mobilizar tais invariantes.

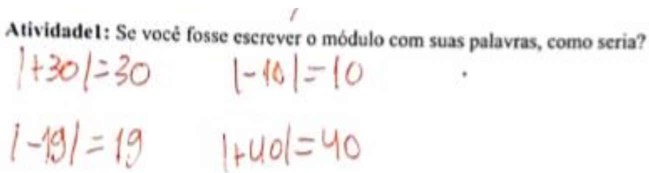
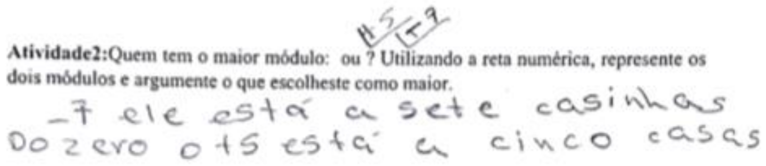


Figura 82- Resposta do aluno Sigma à atividade 1. Fonte: do acervo do pesquisador

Durante a execução da atividade 2, houve problema com a impressão do material que infelizmente suprimiu os caracteres matemáticos. Assim que foram percebidos, pediu-se aos alunos que os adicionassem por escrito. Naquela situação, o objetivo era diferenciar a comparação entre Números Inteiros da comparação entre módulos por meio de uma situação de extensão *da comparação de transformações*, utilizando como suporte de argumentação a reta numérica. Esperava-se que eles colocassem os números $+5$ e -7 na reta e percebessem que, apesar de -7 ser menor que $+5$, seu módulo é maior.

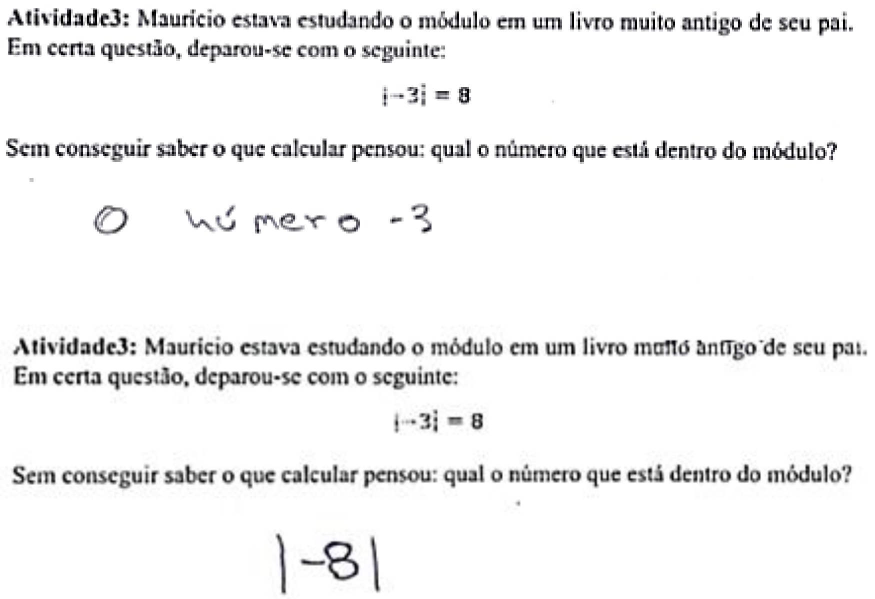
Na figura abaixo, pode-se observar que a aluna Phi utiliza somente a representação em linguagem materna, justificando que -7 está a mais unidades de distância em relação à origem, mobilizando o teorema em ação *o módulo é a distância em relação ao referencial*.


Atividade2:Quem tem o maior módulo: ou ? Utilizando a reta numérica, represente os dois módulos e argumente o que escolheste como maior.

-7 ele está a sete casinhas do zero o +5 está a cinco casas

Figura 83 - Resposta do aluno Sigma à atividade 2. Fonte: do acervo do pesquisador

Na atividade 3, inseriu-se uma situação de transformação cujo objetivo era que fizessem a transformação inversa do conceito de módulo: enquanto dois números opostos têm o mesmo módulo, um valor de módulo possui sempre duas possibilidades, isto é, construir o teorema em ação *para cada número natural não nulo, existem dois números inteiros que os seus módulos são iguais a este número natural* . Somente dois alunos responderam: Phi e Alfa. Nas figuras a seguir, pode-se observar que Phi (figura abaixo) não associou a distância em relação à origem previamente informada do lado direito da igualdade, só observando como 3. Com isso, acredita-se que ela não compreendeu o enunciado ou não entendeu o conceito de módulo. Em relação à Alfa (figura abaixo), demonstrou que soube utilizar o teorema em ação *o módulo é a distância em relação à origem* como ferramenta para lidar com a situação, mas não pensou na dualidade de possibilidades que poderia ser também +8.


Atividade3: Maurício estava estudando o módulo em um livro muito antigo de seu pai. Em certa questão, deparou-se com o seguinte:

$$|-3| = 8$$

Sem conseguir saber o que calcular pensou: qual o número que está dentro do módulo?

O número -3

Atividade3: Maurício estava estudando o módulo em um livro muito antigo de seu pai. Em certa questão, deparou-se com o seguinte:

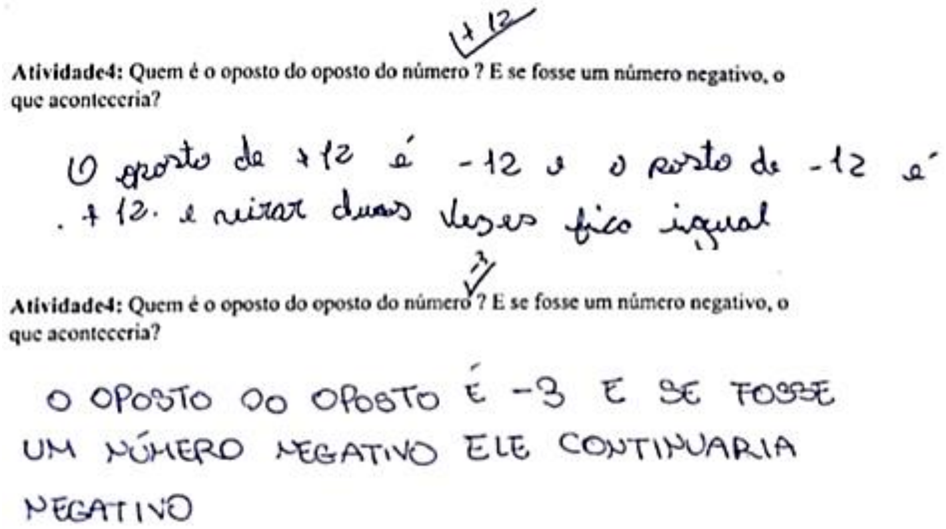
$$|-3| = 8$$

Sem conseguir saber o que calcular pensou: qual o número que está dentro do módulo?

$|-8|$

Figura 84- Resposta de Phi e Alfa à atividade 3 respectivamente. Fonte: do acervo do pesquisador

Na atividade 4, o intuito era de verificar se os alunos conseguiriam determinar a dupla transformação a partir da linguagem materna, concluindo que o oposto do oposto de um número é ele mesmo. Como se pode verificar nas figuras abaixo, Chi e Alfa conseguiram estabelecer esse esquema. Na segunda figura, com a resposta de Alfa, a aluna colocou -3 por vontade própria, antes de o professor oferecer qualquer instrução. Quando percebido, Alfa já tinha feito a atividade, por isso optou-se por não pedir para refazer, uma vez que o objetivo seguiria inalterado com o valor -3. Na figura abaixo, podem-se observar as produções de Chi e Alfa.



+12

Atividade4: Quem é o oposto do oposto do número ? E se fosse um número negativo, o que aconteceria?

O oposto de +12 é -12 e o posto de -12 é +12. e virar duas veses fico igual

-3

Atividade4: Quem é o oposto do oposto do número ? E se fosse um número negativo, o que aconteceria?

O OPOSTO DO OPOSTO É -3 E SE FOSSE UM NÚMERO NEGATIVO ELE CONTINUARIA NEGATIVO

Figura 85- Respostas de Chi e Alfa, respectivamente, à atividade 4. Fonte: do acervo do pesquisador

É possível de se observar que Chi optou por realizar uma dupla transformação, primeiro transformando +12 em -12 pelo oposto e, após, reaplicando o oposto de -12 para obter o estado final +12. Também Chi deixou claro que entendeu que a dupla aplicação do oposto acaba por anular o efeito. Já Alfa enfrentou problemas na segunda transformação, afirmando que o resultado permaneceria negativo, mostrando que não consegue mobilizar o teorema em ação *o oposto do oposto de um número é ele próprio.*

Plano de aula 10: Adição entre Números Inteiros

Tempo de aula: 90 minutos (2 períodos)

Objetivos:

- Construir a adição entre quaisquer dois inteiros.
- Construir a adição e seus termos sob uma representação - reta numérica.

Materiais necessários: Quadro expositivo

Metodologia: colaborativa a partir de problematização

Desenvolvimento:

Será retomado o que se construiu para os números naturais. Seja uma adição entre dois números onde (1° Parcela) + (2° Parcela) = soma, tem-se que:

1° Parcela – É a posição onde se fez o primeiro deslocamento a partir da origem.

2° Parcela – É o tamanho do novo deslocamento a partir da primeira parcela.

Soma – É a posição final, que é considerada o resultado da operação.

Será que esse procedimento é válido na reta numérica que representa os Números Inteiros? Primeiramente, testa-se com $+6$ e -9. O primeiro problema é em relação ao significado de “deslocar nove unidades negativas”. Como o sinal do número pode ser considerado como o sentido da marcação da distância ao referencial, pode-se afirmar que “deslocar menos nove unidades” significa nove unidades no sentido **contrário** à construção dos naturais, conforme figura a seguir:

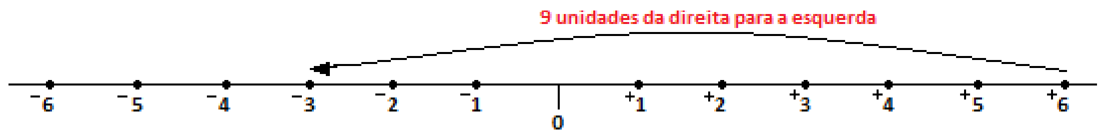


Figura 86- Representação Pictórica de $(+6)-(+9)=-3$. *Fonte: do acervo do pesquisador*

Conclui-se que $(+6)+(-9)=-3$. Então só foi preciso um ajuste para estabelecer um sentido para o deslocamento, definido pela segunda parcela da adição. Para generalizar e formalizar a operação, é preciso ver quais são as possibilidades de adição entre inteiros. Como existem os positivos e negativos, deve-se pensar em todas as possibilidades (entre positivos, entre negativos, positivo com negativo e negativo com positivo).

<u>Primeiro caso, entre positivos:</u>

No caso em que ambos os números são positivos, por exemplo, $(+7)+(+5)$ ou $(+6)+(+9)$, percebe-se que tal possibilidade sempre recai na soma entre naturais. Assim, sendo a, b números naturais, tem-se que $(+a)+(+b)=a+b$, onde, a partir do ponto a, deslocam-se b unidades para a direita, conforme figura a seguir.

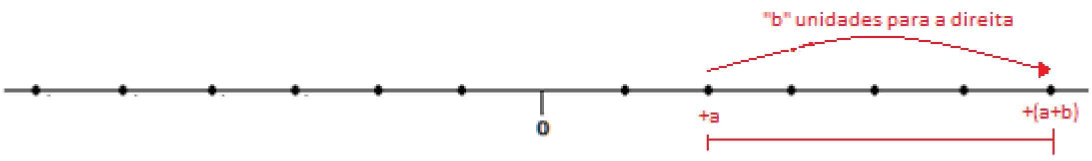


Figura 87- Representação pictórica de $(+a)+(+b)=+(a+b)$. *Fonte: do Acervo do pesquisador*

Segundo caso, entre negativos:

Observam-se $-3 + -2$ como exemplo:

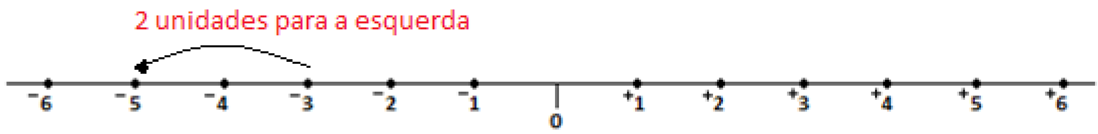


Figura 88- Representação Pictórica de $(-3)+(-2) = -5$. Fonte: do acervo do pesquisador

Deduz-se que o deslocamento é feito em tal sentido que afasta o valor da soma em relação à origem, ou seja, ele aumenta o valor absoluto da soma. Generalizando, sejam a, b Números Naturais, tem-se que na adição $(-a) + (-b) = -(a + b)$.

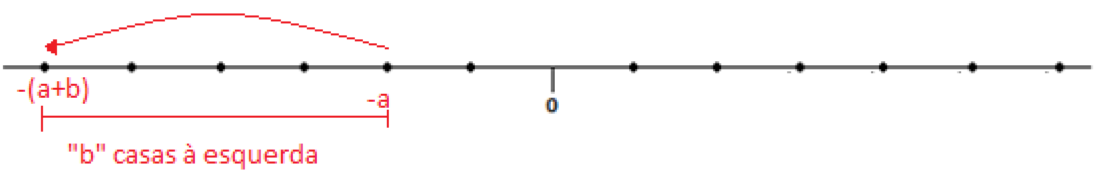


Figura 89- Representação pictórica de $(-a) + (-b) = -(a + b)$. Fonte: do acervo do pesquisador

Em uma situação contextualizada, é factível de se pensar o seguinte: uma pessoa possui uma dívida de R$ 30 no mercado A e R$ 50 em dívida no mercado B. Qual seria o total de dívidas que o sujeito tem em ambos os mercados? Assim, pode-se afirmar que a dívida total é de 80 reais, ou seja, $(-R\$\ 30) + (-R\$\ 50) = -R\$\ 80$.

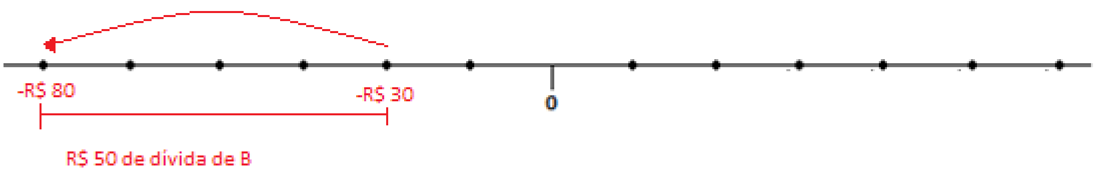
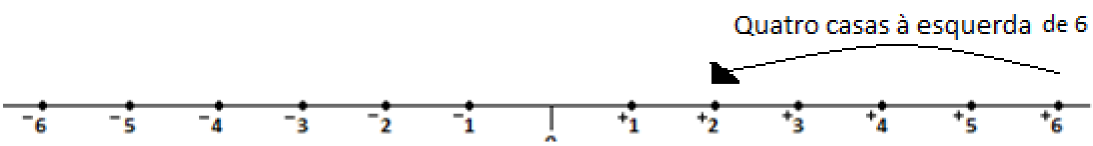


Figura 90- Representação pictórica do exemplo - Fonte: do Acervo do pesquisador

Terceiro caso, positivo com negativo:

Observam-se $(+6) + (-4)$ e $(+3) + (-5)$ na reta numérica:



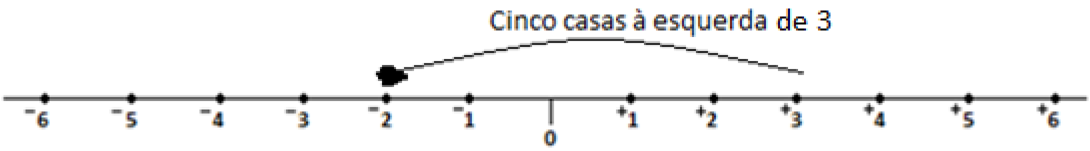


Figura 91- Exemplos de deslocamento referentes ao terceiro caso de adição entre Números Inteiros. Fonte: do acervo do pesquisador

Em $|+6| = 6, |-4| = 4, |+3| = 3 \ e \ |-5| = 5,$ há dois tipos de resultados diferentes, pois no primeiro o módulo maior está na primeira parcela, e, no segundo exemplo, o maior módulo está na segunda parcela. Generalizando esses casos, a, b são Números Naturais na adição entre $(+a) + (-b)$. Para tanto, é preciso dividir em $|+a| > |-b|$ e $|+a| < |-b|$ ou, em termos mais simples, a > b e a < b:

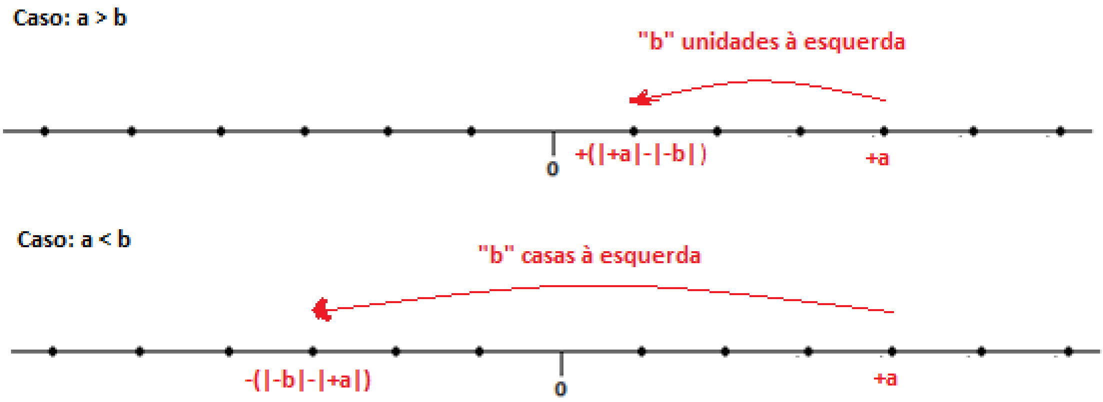


Figura 92- Generalização para adição do terceiro caso. Fonte: do acervo do pesquisador

Pode-se inferir que existe uma importância de saber, entre as duas parcelas, qual delas possui o maior valor absoluto, pois

Soma = *[sinal da origem do maior módulo]* $[|Maior\ V.abs| - |menor\ V.abs|]$

Quarto caso: negativo com positivo

Observam-se $(-4) + (+3)$ e $(-6) + (+8)$ na reta numérica:

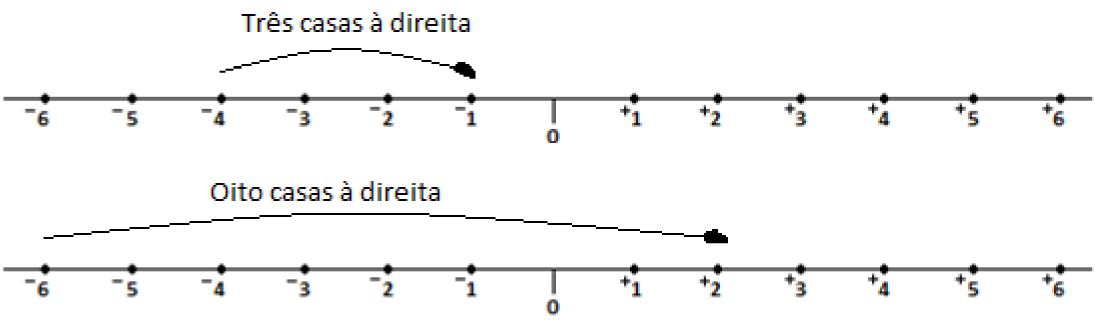


Figura 93 - Exemplos de deslocamento referentes ao quarto caso de adição entre Números Inteiros. Fonte: do acervo do pesquisador

Em $|-4| = 4, |+3| = 3, |-6| = 6 \; e \; |+8| = 8$, tem-se dois tipos de resultados diferentes, pois no primeiro o módulo maior está na primeira parcela, e no segundo exemplo o maior módulo está na segunda parcela. Generalizando esses casos, a, b são Números Naturais na adição $(+a) + (-b)$.

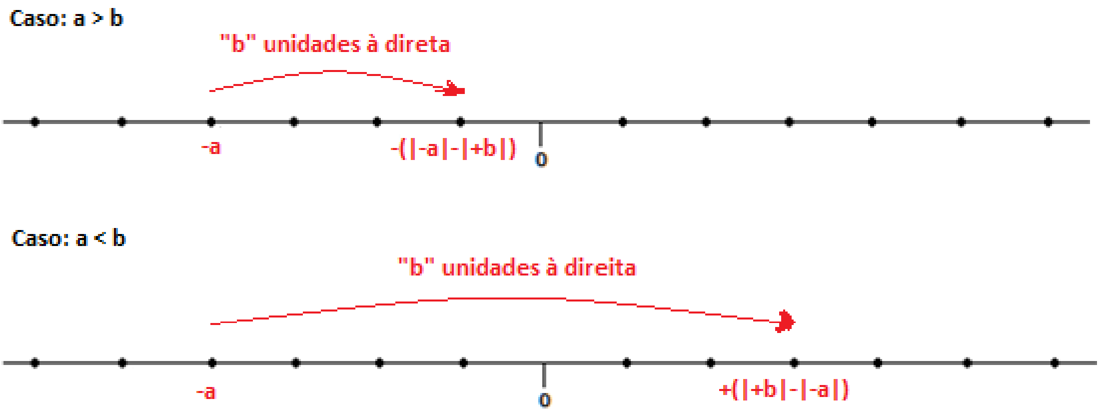


Figura 94- Generalizações para adição do quarto caso da adição. Fonte: do acervo do pesquisador

Portanto, existe uma importância de saber, entre as duas parcelas, qual tem o maior módulo, pois

Soma = *[sinal da origem do maior módulo]* $[|Maior\ V.abs| - |menor\ V.abs|]$

Como o terceiro e o quarto caso levaram à mesma conclusão, acredita-se que a adição entre Números Inteiros também é comutativa.

Relato da Prática e Análise

Iniciou-se a aula retomando a operação de adição nos números naturais, a qual foi definida a dinâmica de deslocamento na reta, no sentido crescente (em direção aos naturais), com o exemplo 2+5. Aproveitou-se o momento para definir que, apesar das possibilidades de construção, foi usada, como convenção, a reta numérica no sentido horizontal com a construção dos naturais da esquerda para a direita.

Após a retomada, perguntou-se a soma da adição entre $+6$ e -9. Provocando os alunos com a frase “tenho seis reais e gasto 9, como eu fico”, eles responderam que “devem 3” (Alfa) e alguns indiretamente “menos 3” (Beta, Kappa e Chi). Mostrou-se que o -3 estava a 9 unidades de distância do +6, mas no sentido inverso da construção, ou seja, em direção contrária a construção dos números naturais.

Durante aquele momento, percebeu-se a distância entre a situação do ponto de vista matemático e aquela associada ao cotidiano: por mais que a situação seja uma nova etapa dentro do ensino de Matemática, aqueles que não dominam os Números Inteiros seguem um esquema próprio de relação entre posse/positivo e dívida/negativo. Segue a comparação dos esquemas da adição entre $+6$ e -9:

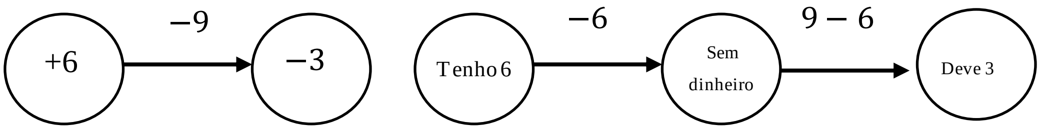


Figura 95 - Disputa entre esquemas da adição entre inteiros. Fonte: do autor

Ao realizar a adição com a segunda parcela negativa, os alunos perceberam que a dinâmica era a mesma usada na subtração, fazendo o deslocamento para a esquerda da reta. Assim, Alfa questionou: "Então somar com negativo é a mesma coisa que fazer menos?" Respondeu-se que sim, poderia ser visto como uma subtração. Beta, sentada ao lado de Alfa, perguntou para ela se aquele sinal de "menos" era para diminuir ou era o sinal para dizer que o número era negativo; Alfa só balançou a cabeça, sem saber o que responder. A desestabilização entre os significados da representação aritmética do sinal + e – fica relevantemente exposta no ensino de Números Inteiros, no qual ambas possuem mais um novo significado.

Em seguida, questionou-se se existiam outras possibilidades de operar dois Números Inteiros. Kappa afirmou que havia duas possibilidades: "sinais iguais" e "sinais diferentes". Completou-se, a partir daquela afirmação, com as possibilidades $(++,-+,+-,--)$.

Foram dados mais alguns exemplos, como $(-3)+(-5)$, $(+4)+(+6)$ e $(-2)+(+5)$. Cada deslocamento foi feito em cima da reta numérica, deslocando cinco casas à esquerda, seis casas à direita e cinco casas à direta respectivamente. Com todos os resultados no quadro, foram sondados com os alunos quais eram os padrões que apareciam naqueles exemplos. Ômega percebeu que existia um comportamento quando todo o movimento ocorria somente de um lado da reta: "Sor, lá tem dois que estão do mesmo lado do zero, e os outros, eu não entendi qual é a moral". A frase de Ômega é completamente compreensível, pois o caso com sinais iguais é de fácil visualização na representação da reta, mas o caso no qual os sinais são diferentes, o padrão da dinâmica fica atrelado à relação dos módulos. Desse modo, dividiu-se em dois casos: quando os sinais eram os mesmos e quando os sinais eram diferentes.

Iniciou-se pelos casos de sinais iguais, questionando os alunos sobre como a dinâmica se comportava, e o aluno Gama disse que "o 3 e o 5 somados dão 8", referindo-se ao exemplo $(-3)+(-5)=-8$. Seguiu-se com o questionamento sobre o motivo de ele ter utilizado 3 e não -3, como estava escrito. Gama disse que olhou o número sem o sinal, então trouxe um suporte ao argumento, ao dizer que era o módulo de cada número, mas tendo dificuldade para dizer o termo em si: “São três casinhas... aquele negócio que só usa a distância até o zero, esqueci o nome”. Então os alunos perceberam que o valor “do número” era a adição de cada um, desconsiderando o sinal.

Da mesma forma, indagou-se em como definir se o sinal da soma era positivo ou negativo, uma vez que eles disseram que era o sinal que estava envolvido. Naquele ponto, ressaltou-se que a adição entre 2 e 5 poderia ser vista como (+2) e (+5), pois funcionava na mesma maneira. Alfa complementou dizendo que “quando os dois são positivos, é igual como a gente fazia antes, né?”. Afirmou-se que sim, que a ideia era de que tudo o que se fazia com os números positivos continuasse valendo para os números negativos.

Em seguida, focou-se nos números que envolviam sinais diferentes. Os alunos perceberam que o sinal do resultado era o sinal do maior número, sem considerá-lo. Assim, escreveu-se que seria o sinal do número de maior módulo “ali, apontando para o $(-2) + (+5)$, o resultado deu positivo, e lá no outro $(+3) + (-9)$, deu negativo, que era o sinal do maior” (Ômega).

Nesse sentido, questionou-se sobre o que ele queria dizer com a expressão “maior”, pois entre +3 e -9, o +3 é maior, pois (apesar de não ter sido definida) $+3 > -9$. Afirmou-se então, para fins do raciocínio, qual era o maior número sem o sinal. Para determinar o valor absoluto do resultado, os alunos perceberam que era a diferença entre os números sem o sinal, ou seja, os módulos. Por conseguinte, as conclusões foram resumidas como:

Sinais iguais: (sinal) (adição dos módulos)
Sinais diferentes: (sinal do maior módulo) (diferença dos módulos)

Percebeu-se, dessa forma, que os alunos conseguiram fazer a dupla conversão entre a representação aritmética, a pictórica na reta numérica e a algébrica, ao construir (junto ao professor) as regras para a operação de adição. A apresentação da dinâmica na semirreta ainda com os números naturais se demonstrou fundamental para que fosse possível entender a adição como um deslocamento. Não foi possível fazer a retomada da regra criada no fim da aula, pois é uma turma que apresenta extrema dificuldade em Matemática. Somente a construção da regra, com uma generalização do esquema da operação de adição, pôde ser considerada como um grande avanço, apresentada de maneira acabada e sendo desenvolvida a partir de uma desestabilização do esquema da adição entre os naturais. A partir dos padrões observados, a complementação de um esquema antigo (adição entre números naturais) gerou um novo esquema.

Plano de aula 11: Propriedades da Adição entre Números Inteiros

Tempo de aula: 90 minutos (2 períodos)

Objetivos:

- Explorar as propriedades da adição entre inteiros (comutatividade, associatividade e elemento neutro) a partir da representação na reta numérica.
- Discutir sobre o elemento neutro da adição.
- Explorar as propriedades acima citadas, na tentativa de organizar uma linguagem aritmética mais abrangente.

Materiais necessários: Quadro expositivo

Metodologia: Expositiva

Desenvolvimento:

Os alunos serão questionados se as propriedades vistas para a adição entre números naturais continuarão valendo na adição entre números inteiros. Para tanto, serão perguntadas aos alunos quais são as possibilidades de adição entre dois inteiros. Acredita-se que chegarão à conclusão de que existem três possibilidades (dois positivos, dois negativos e dois com sinais diferentes). Tais questões serão investigadas e exploradas a partir do que se conceitua sobre adição entre inteiros.

<u>Caso um: entre dois números positivos.</u>

A aula terá início com a seguinte questão: todo o inteiro positivo é um número natural? Espera-se que os alunos concordem com a afirmação e que justifiquem suas respostas.

A partir dessa discussão, pode-se concluir que realizar a adição entre dois números positivos é equivalente a fazer a adição entre dois números naturais. Essa afirmativa será apresentada primeiramente de maneira mais generalizada para ver a reação dos alunos.

$$Para\ todo\ a, b\ números\ naturais, tem - se\ que\ (+a) + (+b) = a + b$$

<u>Caso dois: entre dois números negativos</u>

Sejam a e b números naturais, a ideia é assumir que $-a$ seja negativo e $-b$ seja negativo. Quando se adicionam $(-a) + (-b)$, tem-se uma expansão do que acontece em

$a + b$, pois $-a$ terá um deslocamento de "b" unidades à esquerda (ou seja, no mesmo sentido), e o resultado será $-(a + b)$. No caso de $(-b) + (-a)$, também há a mesma situação, gerando $-(b + a)$. Como é sabido que entre naturais $(a + b) = (b + a)$, tem-se que $-(a + b) = -(b + a)$ e portanto a comutatividade funciona nesse caso.

Caso três: entre um negativo e outro positivo

Mantendo uma ideia semelhante aos casos apresentados na aula passada, com a e b naturais temos:

$$(-a) + (+b) = (+b) + (-a) = +(b - a) \text{ se } |b| > |a|) \text{ ou } -(a - b) \text{ se } |a| > |b|.$$

A expressão $(-a) + (+b)$ é estar no ponto $(-a)$ e deslocar-se "b" unidades para a direita. Se o módulo de b for maior que o de a, tem-se que a soma será $+(b - a)$. Caso contrário, $-(a - b)$.

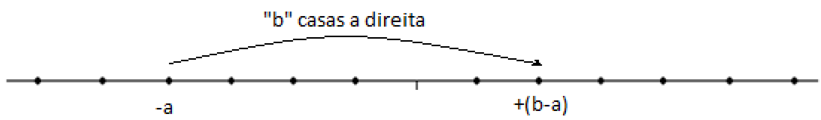


Figura 96- Análise das possibilidades para a comutatividade. Fonte: do acervo do pesquisador

A expressão $(+b) + (-a)$ é estar no ponto $(+b)$ e deslocar-se "a" unidades para a esquerda. Se o módulo de b for maior que o de a, temos que a soma será $+(b - a)$. Caso contrário, $-(a - b)$.

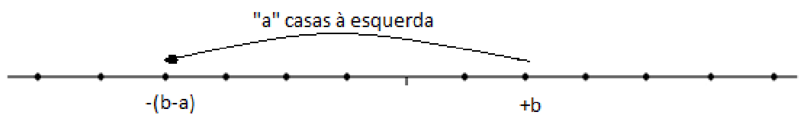


Figura 97- Análise das possibilidades para a comutatividade. Fonte: do acervo do pesquisador

Como ambas as possibilidades levam ao mesmo resultado, pode-se inferir que

$$(-a) + (+b) = (+b) + (-a)$$

Elemento Neutro

Como o 0 pode significar a origem do sistema ou o deslocamento de nenhuma casa, entende-se o seguinte: seja "a" um número inteiro se for $0 + a = a$, pois será o deslocamento de "a" casas (tanto para a direita como para a esquerda), posicionando em cima do próprio a; ou $a + 0 = a$, pois não haverá deslocamento. Assim, $0 + a = a + 0 = a$ para qualquer "a" inteiro.

Relato da Prática e Análise

Começou-se a aula perguntando quais são as propriedades que foram vistas na adição entre números naturais. Os alunos disseram que foi a comutatividade, mas sem utilizar tal termo: "Aquela que não importa a ordem, sempre dá o mesmo resultado" (Alfa) e "Aquele com o zero também" (Kappa), para referir-se ao elemento neutro. Iniciou-se pela propriedade da comutatividade. Ao se questionarem os alunos sobre as possibilidades da adição entre dois Números Inteiros, o aluno Gama disse que "Pode ser que os números sejam com sinais diferentes ou iguais".

A fala de Gama mostra que houve uma compreensão por parte da estrutura dos Números Inteiros: sempre se for pensar em algo em relação a esse conjunto, é preciso observar o binário: sinais iguais/diferentes. A falta do uso dos termos técnicos é uma barreira a ser transposta futuramente por parte dos alunos, mas o fato de reconhecerem a comutatividade como uma propriedade e não como um mecanismo implícito em que não há qualquer entendimento por parte dos alunos, acredita-se que se obtém um resultado positivo na sequência das aulas propostas.

Começou-se com o caso de utilizar dois números positivos e, ao apresentar a adição entre $(+4)+(+3)$ dentro da reta numérica, eles já percebiam que isso era equivalente a fazer $4+3$, pois era uma adição entre números naturais. Recomeçou-se o raciocínio com $(+3)+(+4)$, ambos resultando em +7. Eles concordaram, justificando que "Se é positivo, é a mesma coisa que os naturais, então vale" (Gama). Nesse aspecto, aproveitou-se para formalizar o conceito: troca-se para o número quatro pela letra a e o número três pela letra b. Assim, perceberam que o deslocamento faria com que se juntassem a quantidade de a e b para a soma, independente dos valores utilizados. Com isso, define-se que:

$$(+a)+(+b)=(+b)+(+a), \, com \; a \; e \; b \; números \; naturais$$

Ao mostrar o raciocínio análogo com os dois números negativos ($((-4)+(-3))$), os alunos perceberam que a dinâmica era a mesma "Deu igual ao da outra conta, só que do outro lado do zero" (Gama). Aproveitou-se o comentário de Gama para sustentar que o importante eram sinais iguais, que tanto fazia ser positivo ou negativo.

Ao se entrar no caso em que os números possuem sinais distintos, ratificou-se a conclusão a que se chegou, na aula anterior, em relação aos sinais opostos:

$$(-a)+(+b)=[sinal \; do \; maior \; em \; módulo](Módulo \; maior - Módulo \; menor).$$

Como havia a questão do maior e do menor, inferiu-se que a ordem não faria diferença na soma. Como a comutatividade funcionou para todos os casos, pôde-se refazer tal propriedade da seguinte forma:

$$Dados\ a, b\ inteiros, a + b\ =\ b + a$$

A questão de os alunos associarem o comportamento simétrico entre os dois casos (ambos positivos e ambos negativos) mostra a habilidade de conversão entre as representações aritméticas (tanto extensiva como algébrica) com a representação pictórica na reta. Também foi notório que os alunos mobilizaram as seguintes invariantes operatórias: adição como união de cardinalidades (sinais iguais), adição como diferença modular (sinais diferentes) e conceito em ação *o módulo como a quantidade representativa de um número sem considerar seu referencial.*

No tocante ao elemento neutro, explicou-se que se for feito 0 + a = a, pois parte-se da origem, tanto faz se o a é positivo ou negativo nesse caso. Mostrou-se com $0\ +\ (-2)$ e $0\ +\ (+5)$. Entretanto, quando o elemento neutro é a segunda parcela, os deslocamentos são inócuos, pois $(-2) + 0 = -2\ e\ (+5) + 0 = +5$.

Plano de aula 12: Subtração entre Inteiros

Tempo: 90 minutos

Objetivo:

- Estabelecer a subtração entre dois inteiros quaisquer.

Material necessário: quadro expositivo

Metodologia: Expositiva, utilizando texto de apoio

Desenvolvimento:

A aula será iniciada com um texto provocativo para o resultado de uma subtração entre Números Inteiros, em que o subtraendo é negativo.

Texto de apoio: Amplitude térmica[14]

O termo amplitude térmica é muito utilizado na geografia de clima, na qual se estuda a variação (ou diferença) de temperatura durante um período temporal. É possível calcular a variação diária, semanal, mensal, por estação, anual ou até mesmo histórica.

---

[14] Texto de autoria do próprio professor.

Todas essas variações são calculadas da mesma maneira: a variação de temperatura é a diferença entre a temperatura máxima e a temperatura mínima ocorrida no período determinado.

$$Amplitude\ térmica = (Temperatura\ máxima) - (Temperatura\ mínima)$$

Há diversos fatores que contribuem para o aumento ou para a diminuição da amplitude: latitude (menor latitude, maior variação), altitude em relação ao nível do mar (maior altitude, maior variação), composição do terreno (deserto tem maior variabilidade que uma floresta) e até mesmo proximidade com massas de água (litorais têm menor amplitude térmica que locais do interior). Atualmente, a urbanização é um fato que contribui para a variação (áreas mais urbanizadas possuem maior amplitude térmica do que áreas rurais nas mesmas condições).

No planeta Terra, existem duas cidades (áreas de população fixa) que possuem uma amplitude maior que 100ºC: Oymyakon e Verkhoyansk[15], todas na Rússia. Nelas, a mínima do ano já registrada foi de -69 ºC, e a máxima anual, no mesmo local, foi de 37 ºC.

A seguir, tais dados são comparados na reta numérica:

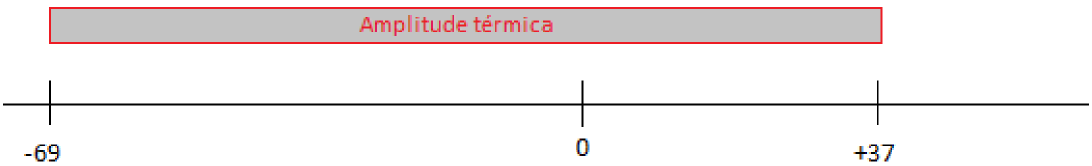


Figura 98- Representação Pictórica na reta, utilizando a situação de amplitude térmica. Fonte: do acervo do pesquisador

Afinal, qual a variação de temperatura entre -69°C e +37°C? Sabe-se que a distância da origem até o +37 é 37 unidades e a distância da mesma origem até o -69 é 69 unidades. Como se pode perceber na figura anterior, os números estão em lados opostos em relação à origem da reta numérica, logo é preciso somar os valores para determinar a amplitude térmica das duas cidades. Assim, infere-se que a amplitude térmica é de $69 + 37 = 106$ °C. Portanto:

$$Amplitude\ térmica = (Temperatura\ máxima) - (Temperatura\ mínima)$$

$$+106 = (+37) - (-69)$$

[15] Geoclima Software. Department of Geophysics (DGF), FCFM – Universidad de Chile. Fonte: www.dgf.uchile.cl

Como é possível de se subtrair um número negativo? O que garante, além do resultado visual, que esse cálculo está correto? Retorna-se, pois, ao conceito de subtração em $\mathbb{N}$:

Diz-se que um $a - b = c$ se existe um termo tal que $a = b + c$

Isso quer dizer que a operação de subtração não é nada mais que "adivinhar o complemento" da segunda parcela de uma soma conhecida. Também se nota a subtração como o procedimento "inverso" de uma adição. Ainda no exemplo acima, tem-se (+37) – (–69) sendo equivalente, segundo o que se estudou nas aulas anteriores. Inicia-se uma operação a partir do ponto que representa o -69, deslocando determinado número de unidades, em que o destino final é $+37$. Para isso, seriam necessárias 106 unidades para a direita, ou seja, o resultado seria $+106$, conforme se observa na figura a seguir:

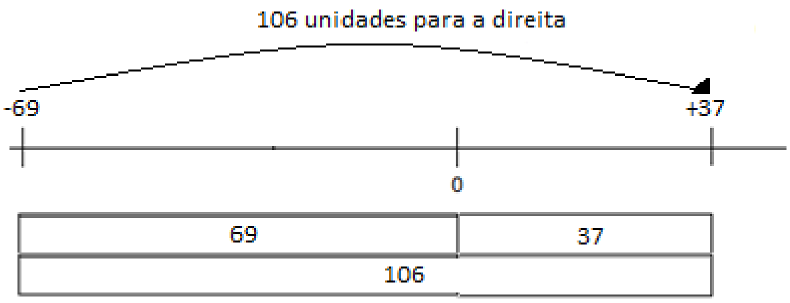


Figura 99 - Dupla Representação pictórica de $(+37) + (-69) = +106$. Fonte: do acervo do pesquisador

Não obstante, utilizando o processo de inverso deslocamento, pelo motivo de que -69 é o oposto de +69, pode-se repensar essa dinâmica como o deslocamento contrário de -69 (69 unidades à esquerda), que seriam 69 casas à direita a partir do +37, resultando também em +106.

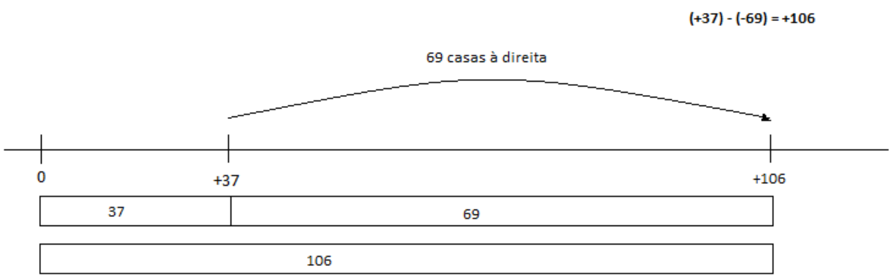


Figura 100 - Dupla Representação pictórica de $(+37) - (-69) = +106$. Fonte: do acervo do pesquisador

Como é o processo inverso, é possível associar a mudança nos cálculos ao simétrico do subtraendo.

$$(+37) - (-69) = (+37) + (69) = +(|+37| + |+69|) = +(37 + 69) = +106$$

Será que se pode ter certeza de que subtrair é o mesmo que adicionar o oposto?

Seja a um número natural diferente de zero. A pergunta é se subtrair a é equivalente a adicionar o simétrico de a, ou seja, -a. Seja x um número inteiro qualquer: $x - a$, seria o deslocamento de “a” unidades à esquerda de x. Logo, $x - (-a)$ seria o deslocamento invertido à esquerda, ou seja, à direita. Assim, $x - (-a) = x + a$, por exemplo, pode tomar $x = 3$ e $a = 7$, e tem-se $3 - (-7) = 3 + 7 = 10$.

Com esse novo resultado, fica muito mais fácil definir as operações de subtração nos Números Inteiros, já que todas recaem em uma operação de adição já conhecida, sejam a e b números naturais:

Entre positivos: $(+a) - (+b) = (+a) + (-b)$ seguem as mesmas regras da adição entre sinais diferentes (manutenção do sinal de maior valor absoluto e diferença dos módulos).

Positivo com negativo: $(+a) - (-b) = (+a) + (+b) = a + b$, ou seja, é equivalente à adição entre naturais.
Exemplo: $(+18) - (-12) = (+18) + (+12) = 18 + 12 = 30$, isto é, +30

Negativo com positivo: $(-a) - (+b) = (-a) + (-b) = -(|-a| + |-b|)$, ou seja, é equivalente à adição entre dois números negativos.
Exemplo:

$$(-18) - (+12) = (-18) + (-12) = -(|-18| + |-12|) = -(18 + 12) = -30$$

,

Entre negativos: $(-a) - (-b) = (-a) + (+b)$ é equivalente à adição com sinais diferentes (lembrando que a adição nos inteiros é comutativa).
Exemplo:

$$(-18) - (-12) = (-18) + (+12) = -(|-18| - |+12|) = -(18 - 12) = -6$$

Relato da Prática e Análise

Iniciou-se a aula apresentando o conceito de amplitude térmica. Aproveitaram-se as informações do próprio dia para mostrar que a amplitude térmica é a variação entre a maior e a menor temperatura de um período, que pode ser em um dia ou até mesmo na história de um lugar. Calculou-se a variação prevista no dia, segundo o App Climatempo: a mínima daquele dia fora 8°C, e a máxima (prevista) foi de 13°C. Logo, a amplitude térmica do dia seria 13 – 8 = 5°C. A partir disso, trouxeram-se as informações da cidade de Oymyakon:

no histórico de temperaturas da cidade, oscilaram entre -69 e $+37$ graus Celsius. Nesse momento, a aluna Iota perguntou qual a amplitude térmica da cidade de Porto Alegre. Respondeu-se que (historicamente) a temperatura de Porto Alegre oscilava entre -3°C até $+42$°C, o que é praticamente a metade dessa oscilação da cidade russa. Nesse ínterim, aproveitou-se para falar de alguns elementos geográficos que influenciam a amplitude (vegetação, relevo, latitude, proximidade com massa de água, altitude).

Foi colocada no quadro a situação de Oymyakon, desenhando a reta numérica com os pontos, representando –69 e +37. Desenhou-se uma barra sólida em acima da reta entre os dois números para mostrar que aquela era a amplitude térmica. Na parte de baixo, desenharam-se duas barras pictóricas, uma de tamanho 37 e outra, à esquerda, de tamanho 69 (conforme plano de aula, Figura 98). Perguntou-se, assim, qual a relação entre as barras e a amplitude. Depois de algumas respostas aleatórias, o aluno Gama disse que se fossem unidas as duas, dariam exatamente o tamanho da amplitude toda. Assim, escreveu-se no quadro que o resultado seria +106, isto é, uma amplitude de 106 graus.

O uso das barras pictóricas em conjunto com a reta numérica se mostrou positiva, visto que os alunos conseguiram perceber que, embora a barra não fizesse parte do deslocamento, auxiliava no entendimento de como os módulos se relacionavam para determinar o resultado da subtração de inteiros. Dessa forma, acredita-se que a conversão entre a representação aritmética da expressão $(+37)-(-69)=+106$ e a representação pictórica conjunta entre barras e reta numérica foram atingidas.

Nesse sentido, questionou-se: como a subtração entre um número positivo e um negativo poderia dar um resultado superior à primeira parcela, pois o resultado de $(+37)-(-69)$ foi calculado, utilizando uma adição entre o 37 e o 69. Alfa disse: "Eu entendi que, como cada temperatura está de um lado, a distância entre elas é juntar do 37 positivo até o zero e depois do zero até o 69 negativo". Pode-se perceber que, apesar de Alfa ter compreendido o esquema apresentado, utiliza o próprio para enfrentar a situação: realiza uma transformação em duas partes (antes e depois do zero).

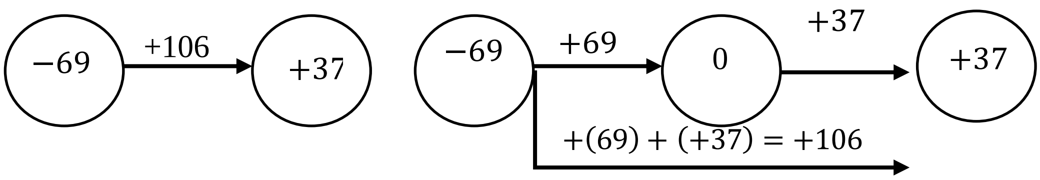


Figura 101- Comparação entre as transformações da situação sobre amplitude térmica (Proposto e de Alfa). Fonte: do autor

A seguir, foram revisados a utilização das barras pictóricas na operação de subtração. Os alunos entenderam que a subtração é a operação contrária (inversa) da adição, então se manteve a linha de pensamento da adição entre inteiros para definir a subtração.

Efetuou-se a adição entre $(+37) + (-69)$. Movimentando-se em cima da reta, eram 69 unidades para a esquerda na posição do número -22. Aproveitou-se esse momento para colocar as barras pictóricas abaixo, a fim de mostrar o motivo pelo qual foram diminuídos os módulos.

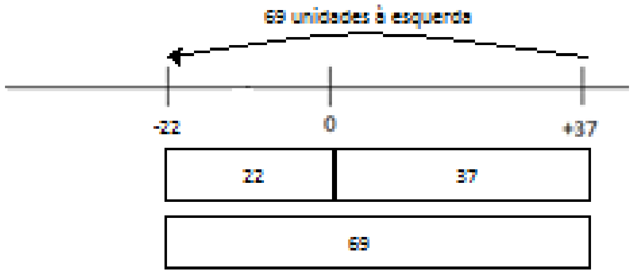


Figura 102- Dupla Representação de (+37) + (-69) = (-22)

Após, fez-se o movimento contrário: 69 unidades para a direita, e a aluna Zeta afirmou que se deveriam juntar as barras, fazendo a adição entre os números. Conforme Zeta disse, para-se no ponto que representa o +106.

Nesse sentido, Alfa comenta: "Entendi qual é das barras, é bem parecido com o que eu tinha pensado antes". A aluna está certa, pois, na dinâmica de seu esquema, realiza dois movimentos com módulos diferentes, e a relação entre esses módulos está presente no resultado a partir da união da composição de segmentos.

Com isso, levanta-se a seguinte questão: qual seria a relação entre a adição e a subtração entre os inteiros. Colocando-se $(+37) - (-69)$ e $(+37) + (+69)$ no quadro, a aluna Alfa observou que se trocavam os dois sinais. Aprofundando a questão, questionou-se qual a relação entre o –69 e o +69 e ouviu-se que era só a troca de sinal. Nesse ínterim, lembrou-se que tal fato também pode ser chamado de número oposto ou simétrico. Com isso, levantou-se a suspeita de que a subtração é equivalente ao adicionar o oposto.

A partir desses pontos, entrou-se com o processo de generalização. No quadro, foram colocadas as possíveis opções de subtração entre inteiros (+ +, - +, + -, - -) com a e b números naturais, afirmando que toda a possibilidade recai numa adição de número oposto.

A fim de elucidação, retornou-se ao caso em que há dois positivos (isto é, com a e b naturais, $(+a) - (+b) = (+a) + (-b) = a - b$). Foi disposta a seguinte situação: Em uma cidade, a temperatura máxima de um mês foi de 31°C, e a mínima foi de 13°C, qual foi a amplitude térmica? Os alunos, direcionando que seria a diferença entre 31 e 13, colocaram o seguinte desenho no quadro:

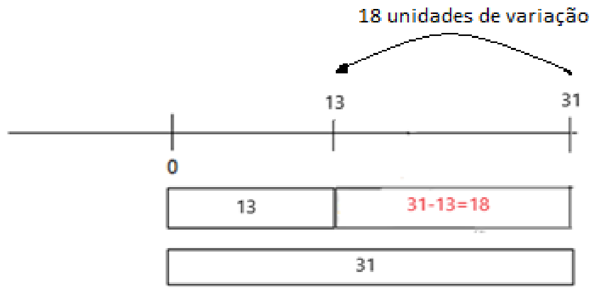


Figura 103- Representação de $(+31) - (+13) = +18$. *Fonte: do acervo do pesquisador*

Os alunos perceberam que a representação ficou igual à da subtração entre naturais, e Beta comentou que gostou do jeito com que as barras ficaram "assim deu para entender que, quando uma barra fica em cima da outra, é só diminuir". Pode-se verificar que a representação pictórica das barras auxiliou a aluna Beta a esquematizar seu procedimento próprio para enfrentar diversas situações cuja representação é válida.

A seguir, deu-se o segundo caso, que era de um positivo com um negativo (ou seja, $(+a) - (-b) = (+a) + (+b) = a + b$,) equivalente à adição entre naturais. Para contextualizar, foi criada a seguinte situação: Numa cidade da América do Norte, a temperatura máxima registrada no inverno foi de 18°C, e a mínima, de -12°C. Qual a amplitude térmica no período?

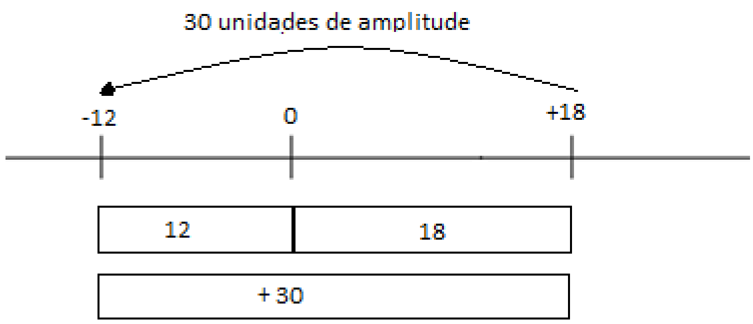


Figura 104- Representação pictórica de $(+18) - (-12) = +30$. *Fonte: do autor*

Após colocar as representações no quadro, Alfa comenta que "agora dá para ver direitinho que tem que somar os números sem o sinal". Percebe-se, portanto, que o uso das três representações simbólicas para essa situação de transformação está sendo de relevante auxílio na compreensão, já que o aluno possui à disposição uma dupla conversão (aritmética, pictórica na reta, pictórica da barra) e uma única imagem.

Apresenta-se, então, a terceira possibilidade, quando existe um negativo com um positivo (ou seja, $(-a)-(+b)=(-a)+(-b)$), equivalente à adição entre dois números negativos. Supondo que em uma cidade que teve como temperatura 9°C no início do dia e, no final, -2°C, como se poderia descrever a diferença de temperatura durante o dia? Discutindo com os alunos, esses rapidamente concluíram que a variação era negativa, pois "terminou mais frio do que havia começado, então variou para baixo... então certo que vai ser com menos!" (Gama). Na figura a seguir, ilustra-se a representação pictórica construída com os alunos:

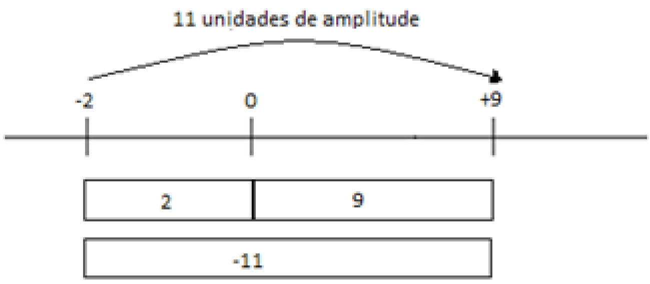


Figura 105- Representação Pictórica de $(-2)-(+9)=-11$. *Fonte: do acervo do pesquisador*

Para apresentar a última possibilidade, $(-a)-(-b)=(-a)+(+b)$, que é equivalente à adição com sinais diferentes (lembrando que a adição nos inteiros é comutativa), criou-se a seguinte situação: em lugares mais frios, a temperatura máxima de uma semana ou até mesmo de um mês frio pode ser abaixo de zero. Numa cidade no norte da Europa, a temperatura máxima de um mês no inverno foi de -5°C, e a temperatura mínima foi de -35°C. Qual a amplitude térmica do período?

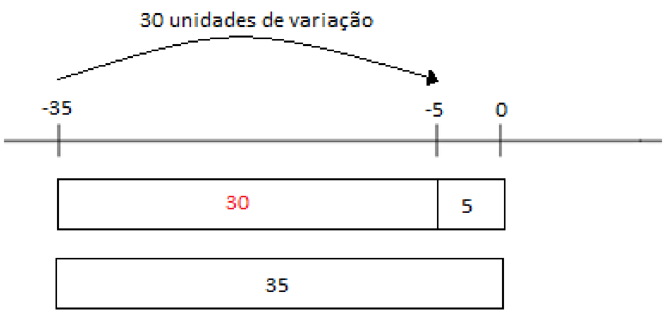


Figura 106- Representação Pictórica de $(-5)-(-35)=30$. *Fonte: do acervo do pesquisador*

Após apresentar as diferentes possibilidades da subtração, foram questionados quais padrões os alunos percebiam. Nesse momento, Alfa demonstrou dificuldade em entender a diferença entre o segundo e o terceiro caso (-/+ e +/-), pois ambos somavam os módulos. Perguntou-se, assim, qual seria a diferença entre os exemplos de cada caso. Beta afirmou que o segundo caso interrogava somente a diferença entre o maior e o menor, sem saber quem vinha primeiro. Desse modo, questionou-se o que eles entendiam por variação negativa. Gama disse que "quando a gente olha quanto de dinheiro tinha no início e no final do mês, é negativo, porque gastamos e sobra menos".

Durante a discussão das possibilidades da subtração, os alunos foram percebendo que cada caso recaía em um esquema conhecido, podendo ser feitas analogias com as dinâmicas já construídas na adição. Todas as situações apresentadas foram de comparação, a qual utiliza o esquema mental equivalente à amplitude. Assim como nos últimos exemplos dessa sequência de aulas, a dupla representação pictórica estabeleceu-se como via facilitadora para a dinâmica da subtração entre Números Inteiros.

Encerrando a aula, foi feita a análise da seguinte afirmação: a subtração entre dois inteiros é equivalente a fazer a adição com o oposto do subtraendo. Os alunos preferiram a expressão "segundo número" para o subtraendo. Ouvindo os comentários, "se o professor falou, deve ser" (Gama), "eu acho que é, mas não sei explicar" (Beta) e "sor, se fosse mentira tu não ia largar essa aí para gente, né?" (Ômega), percebe-se que havia certa confiança de que a afirmação era verdadeira, mas não sabiam por onde começar a justificá-la.

Nesse âmbito, analisou-se cada caso, destacando o que acontece com o subtraendo, com a e b números naturais:

$(+a) - (+\boldsymbol{b}) = (+a) + (-\boldsymbol{b})$

$(+a) - (-\boldsymbol{b}) = (+a) + (+\boldsymbol{b})$

$(-a) - (+\boldsymbol{b}) = (-a) + (-\boldsymbol{b})$

$(-a) - (-\boldsymbol{b}) = (-a) + (+\boldsymbol{b})$

Após contemplar o quadro por um tempo, Alfa diz que "ele sempre troca de sinal, dentro e fora". Ômega fica confuso em relação ao que representava a letra b "bah sor, sem números fica difícil...". O professor interveio e solicitou que o aluno escolhesse dois números e refizesse no seu caderno. Ele escolheu os números 20 e 8, substituindo respectivamente por a e b. Minutos depois, declarou que "agora sim, estou vendo as trocas..., mas vai ser sempre assim com qualquer número que eu coloque? Que louco isso!”. Finalizando, conclui-se que “fora fica mais, e dentro vai ser o sinal contrário” (Alfa).

Apesar de não se ter obtido uma formalização, os alunos conseguiram, dentro das suas capacidades, captar os padrões em linguagem formal e estabelecer uma relação de invariante operacional do teorema em ação *a subtração é equivalente à adição do oposto do subtraendo*.

Conclusões e Apontamentos

O presente trabalho consistiu em refletir, a partir da construção Matemática, da Análise dos Livros Didáticos Aprovados no PNLD 2016-2019, das reflexões de produções acadêmicas correlatas e do estudo das contribuições da Teoria dos Campos Conceituais e da Teoria de Representação Semiótica, o ensino das propriedades do conjunto dos Números Inteiros e das operações de adição e subtração.

Para isso, o ensino de números inteiros foi analisado em três frentes principais: a construção, do ponto de vista da Matemática formal a partir das classes de equivalência, do conjunto $\mathbb{Z}$; as contribuições das produções acadêmicas sobre o ensino de Números Inteiros; e a análise do material referente ao conjunto apresentado nos livros didáticos.

Após essa reflexão em torno do conjunto dos números inteiros, estabeleceu-se a produção de uma sequência didática. Para a elaboração, foi levado em consideração o material estudado no capítulo citado no parágrafo acima, e as teorias de aprendizagem: Teoria dos Campos Conceituais, de Gérard Vergnaud, e a Teoria de Representação Semiótica, de Raymond Duval.

Com o planejamento inicial, efetuou-se uma prática com uma turma de 7º ano do Ensino Fundamental, totalizando 18 horas em sala de aula. Ao longo da prática, foram relatadas as produções e as discussões dos alunos a partir das teorias de aprendizagem escolhidas. A partir das impressões dos alunos e dos acontecimentos ocorridos durante a prática, redesenhou-se o material feito na Proposta Didática, gerando o produto técnico que pode ser encontrado no Anexo A. Esse produto técnico estará disponível no banco de objetos educacionais da CAPES após a defesa desta dissertação.

O processo de planejamento, execução, análise e replanejamento é uma oportunidade única na qual o docente estabelece um espaço para repensar sua prática. Com a rotina inerente à prática escolar no ensino básico, muitas vezes perdem-se oportunidades de perceber as lacunas das sequências didáticas ou até mesmo de repensar os aspectos metodológicos. Assim, "uma prática reflexiva proporciona aos professores oportunidades para o seu desenvolvimento, tornando-os profissionais mais responsáveis, melhores e mais conscientes" (Oliveira & Serrazina, 2008, p. 9).

Da mesma forma, considera-se que, em relação à aprendizagem, nunca existe a certeza de que os alunos compreenderam integralmente os conceitos trabalhados, mas é fato que, a cada prática que se passa por um processo reflexivo e investigativo, torna-se um melhor professor. Mas percebeu-se que os alunos começaram a observar as representações de uma forma interessada, não pelo anseio de ser bem avaliado, mas sim da matemática pela matemática, pois reitero que a minha posição em sala de aula era de um professor que pesquisa. Até iniciar a prática *in loco*, não conhecia previamente os alunos, pois trabalhava nessa escola com Educação de Jovens no turno da noite. A percepção da relação deles com representações simbólicas deixou de estar como "preciso saber para ser avaliado" para "preciso saber pois isso me auxiliar a entender". Assim, a partir da apresentação de múltiplas representações de uma mesma situação, os alunos começaram a perceber as invariantes envolvidas, isto é, a variação como representaram os números no entendimento da invariabilidade, fazendo que com que mobilizassem as invariantes em situações equivalentes. A partir dessa experiência, repensei minhas considerações em relação o que é aprendizado e o que é domínio: é necessário possuir o domínio completo de determinado conceito a partir de uma sequência didática concentrada sobre o mesmo? Certamente não. Acredito que devemos oportunizar o aprendizado para que o aluno, a partir das situações atuais e futuras, possa construir, reformulando e repensando, seus conceitos matemáticos em direção a culminar essa caminhada dentro da ciência, onde as definições e afirmações são de reconhecido rigor e de caráter imutável.

Em relação à pergunta de pesquisa, *como agregar, no âmbito do ensino fundamental, as diversas invariantes operatórias e representações simbólicas frente algumas situações do campo aditivo, inseridos no conjunto dos Números Inteiros?* Acredita-se que um dos pontos de uma possível resposta para essa pergunta, dentro das escolhas teóricas realizadas pelo professor, está diretamente ligado à diversidade dos elementos contidos no Campo Conceitual Aditivo.

Tanto o material didático utilizado como a sequência didática escolhida pelo professor, sendo esses dois complementares ou não, deveriam contemplar integralmente a discussão de todas as situações (Composição, Transformação, Comparação e suas extensões). Essas devem sempre estar relacionadas, pelo menos, a três representações semióticas (Aritmética ou Algébrica, Pictórica e Linguagem Materna) e bidirecionais, citando como exemplo a atividade que faz o sentido inverso do encontrado, em sua maioria, nos materiais didáticos: a partir de uma expressão numérica, desenvolver um problema em que a expressão seja a solução.

Seguindo esse princípio, há a possibilidade de o esquema conceitual do aluno ganhar capilaridade, tornando-o muito mais robusto, fazendo com que tenham mais segurança no enfrentamento de novas situações, além de contribuir para uma futura autonomia no entendimento dos outros conceitos matemáticos durante sua trajetória escolar. O contrário dessa situação é a memorização de regras de operação: como o esquema conceitual do aluno está fragilizado, o ato de memorizar somente a regra se torna mais eficaz no curto prazo, pois resolve uma determinada situação muito específica. Acredita-se, na opinião a partir desse trabalho, que essa atitude pode não permitir o desenvolvimento dos campos conceituais de maneira que se possa aprofundar a compreensão da Matemática, deixando inclusive a percepção, para o aluno, de que a Matemática é algo estático, finalizada do ponto de vista de seu desenvolvimento, e que não passaria de um conjunto de regras para memorização.

Entende-se que esta pesquisa não esgota o tema proposto, nem responde integralmente à questão levantada. Ademais, a própria questão de pesquisa acabou gerando novos questionamentos que deverão ser tema de produções posteriores que visam a complementar os resultados obtidos com intuito de avançar nas reflexões sobre o ensino de Números Inteiros. Um dos apontamentos seria de que maneira os jogos que se observam nas produções científicas, analisadas na revisão bibliográfica, podem ser utilizados como integradores a partir da sequência didática criada.

Outro apontamento é aprofundar o uso das barras pictóricas, associado à adição e à subtração de conjuntos numéricos distintos, este muito bem aceito pelos estudantes, pois auxiliou numa compreensão mais ampla dos conceitos envolvidos entre as representações trabalhadas. A ideia do uso desse objeto de aprendizagem se deu durante a prática e foi sendo inserido durante o replanejamento e apresentado na versão final do produto técnico. Buscar-se-á, em futuras aplicações, relatar atividades desenvolvidas, baseadas nessa representação.

Bibliografia

Bini, M. B. (2008). *Atividades interativas como geradoras de situações no campo conceitual da matemática*. Porto Alegre: PUCRS.

Brasil. (2017). *Base Nacional Curricular Comum*. Brasília: Ministério da Educação. Acesso em 25 de novembro de 2018, disponível em https://bit.ly/2skbCls

____________. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: MEC/SEF.

Caraça, B. d. (1951). *Conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa: Tipografia Matemática.

Dalcin, A. (2002). *Um olhar sobre o paradidático de matemática*. Campinas: Unicamp.

Deixa, G. V. (2014). *Uma Abordagem dos Números Inteiros Relativos na 8ª classe: indicadores para uma proposta de formação de professores.* Londrina.

Domingues, H. (1991). *Fundamentos de Aritmética*. São Paulo: Atual.

Duval, R. (2005). Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão da Matemática. Em S. D. Machado, *Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica* (pp. 11-34). Campinas: Papirus.

______________. *Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais*. (Vol. Fascículo I). (L. F. Levy, & M. R. Silveira, Trads.) São Paulo: Livraria da Física.

Gajko, T. C. (2018). *Uma investigação sobre o uso de jogos no ensino de números relativos*. Porto Alegre.

Gonçalves, A. (1971). *Introdução à Algebra*. Rio de Janeiro: IMPA.

Gonzalez, J. L., Iriarte, M. D., Jimeno, M., Ortiz, A., Ortiz, A., Sanz, E., & Vagas-Machuca, I. (1990). *Números Enteros*. Síntesis.

Hanna, G. (1990). *Some Pedagogical aspects of proof* (1 ed., Vol. 21). Amsterdam, Nederlands: Springer.

Meister, J. C. (2009). *Estudando dificuldades na Compreensão de Números Inteiros*. Porto Alegre.

Morais, A. D. (2010). *Fórmula (-1): Desenvolvendo Objetos Digitais de Aprendizagem para as operações com números positivos e negativos*. Porto Alegre.

Moreira, M. A. (2002). A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. *Investigações em Ensino de Ciências, 7*, 7-29.

Mori, I., & Onaga, D. S. (2015). *Matemática: ideias e desafios. 7° ano*. São Paulo: Saraiva.

Oliveira, I., & Serrazina, L. (2008). A reflexão e o professor como investigador. Em GTI, *Reflectir e Investigar sobre a prática profissional.* Lisboa: Atas.

Porto Alegre, S. (1998). *Cadernos Pedagógicos Número 9* (3ª ed.). Porto Alegre: SMED/POA.

Ripoll, C., Rangel, L., & Giraldo, V. (2016). *Livro do Professor de Matemática na Educação Básica: números inteiros* (Vol. 2). Rio de Janeiro: SBM.

Simpson, A., Fan, L., Classold, C., Eaton, S., Glithro, L., Jones, J., . . . Wrangles, P. (2017). *The Shanghai Maths Project: For the English National Curriculum.* Londres: Harper Collins PUblishers Limited.

Teixeira, J. R. (2013). *Sobre as regras de sinais dos números negativos.* Porto Alegre.

Vergnaud, G. (1986). Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didáctica das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. *Análise Piscológica*, 75-90.

____________________. A Teoria dos campos conceituais. Em J. Brun, *Didáctica das matemáticas* (pp. 155-191). Lisboa: Instituto Piaget.

Anexo A – Produção técnico final

Aula 01: Verificação de conhecimentos anteriores

Tempo previsto: 90 minutos (2 períodos)

Objetivos:

- Verificar os conhecimentos anteriores sobre os números naturais

Materiais Necessários: Quadro expositivo e folha de atividades

Desenvolvimento:

Primeiramente será distribuído um trabalho com quatro exercícios de sondagem, apresentados a seguir, sobre números e operações nos Números Inteiros. Serão destinados 40 minutos do período para essa atividade.

Orientação para o Professor: O objetivo principal dessa atividade é ver a capacidade de realizar a conversão entre a linguagem materna e a linguagem aritmética a partir da situação de composição.

Exercício 1

Antes de começarem as aulas, sua mãe lhe deu R$ 40 para você comprar seu material escolar no mercadinho da esquina. Disseram que você deveria gastar esse dinheiro somente com os itens da lista abaixo e não poderia sobrar troco. O que você compraria?

Orientação para o Professor: O objetivo dessa atividade também é ver a capacidade do aluno de realizar uma adição com soma pré-determinada, onde precisará manipular as parcelas até o resultado final ser igual a 40.

Tabela de Preços

Mercadorias	**Preço Unitário**
Caderno capa dura capa sortida	R$ 8
Caderno com foto do Inter	R$ 6
Caderno com foto do Grêmio	R$ 6
Caderno com foto da Seleção Brasileira	R$ 7
Caneta esferográfica tinta azul e preta	R$ 3
Caneta grafite	R$ 6
Borracha comum	R$ 1
Borracha colorida	R$ 2
Estojo para lápis e caneta	R$ 10
Agenda	R$ 8
Lápis comum	R$ 2
Lápis com borrachinha na ponta	R$ 3
Conjunto de réguas	R$ 6

Tabela 14 - Lista de preços da atividade 1 da aula 1

Utilizando a tabela, responda:

a) É possível comprar todas as mercadorias da lista? Justifique.
b) Qual é o maior número de itens diferentes que se pode comprar? E o menor número de itens distintos?
b) Se você fosse fazer um kit com caderno, caneta, lápis e borracha, quantos kits diferentes você poderia comprar com o valor total?

<u>Orientação para o Professor:</u> Para enriquecer a atividade, recomendamos que o professor abra os resultados de cada aluno ou grupo para a discussão entre todos os participantes, assim eles poderão perceber que existem diversas possibilidades além das que produziram.

Exercício 2

Huguinho, Zezinho e Luisinho irão jogar bolinha de gude em equipe contra outros três amigos da rua de baixo. Huguinho possui oito bolinhas, Zezinho, 10 e Luisinho, 12. Por outro lado, cada menino do time adversário tem nove bolinhas. Qual o time que começa com maior número de bolinhas? Represente a solução do problema com um desenho.

<u>Orientação para o Professor:</u> O objetivo desse exercício é realizar a conversão entre a linguagem materna e a representação pictórica em uma situação de composição.

Exercício 3

Seu Joaquim vende churrasquinho nos dias de jogo para fazer uma renda extra. Para trabalhar, ele gasta duzentos reais por evento entre gasolina, carvão e materiais para servir churrasquinho e refrigerante. Na primeira semana do mês, há jogo na quarta e no domingo, quando ganha 260 reais em cada um dos dias trabalhados. Na segunda semana, há somente um grande jogo no domingo e ele ganha 500 reais. Na terceira semana, há dois jogos e ele fatura 400 reais no total. Na última semana, houve um problema no estádio, e os jogos foram cancelados na última hora, gerando prejuízo para seu Joaquim. No final do mês, qual foi seu resultado final vendendo churrasquinhos nos jogos, sobrou ou faltou dinheiro? Explique.

<u>Orientação para o Professor:</u> O objetivo desse exercício é a conversão entre a linguagem materna e a aritmética em uma situação de transformações sequenciais

Exercício 4

Junto com seus colegas, escreva um problema de Matemática que tenha a seguinte expressão aritmética como resolução: $36 - 18 + 27$.

<u>Orientação para o Professor:</u> Objetivo nesse exercício é realizar uma conversão entre a representação aritmética e a representação em linguagem materna em uma situação de dupla transformação. Essa é uma ótima atividade para compartilhar os resultados com todos os alunos da turma, pois incentiva-os a serem criativos e também enriquecerá a aluna com as possibilidades que eles apresentarão.

Finalizando, será realizada a correção dos exercícios 2 e 3 e será feita uma construção coletiva com o item 1 e 4, compartilhando as soluções encontradas, pois são atividades de natureza aberta (não há uma única resposta).

Aula 02: Revisão do conceito de um número natural e da adição.

Tempo previsto: 45 minutos (1 período)

Objetivo:

- Revisar o conceito e algumas propriedades de um número natural, tais como sucessor e subconjuntos de ℕ;

- Revisar a adição nos naturais, tanto do ponto de vista aritmético como de linguagem materna.

Materiais Necessários: Quadro expositivo e folha impressa com as atividades propostas.

Desenvolvimento

A aula será iniciada com proposta de resolução de quatro problemas, entregues para os alunos em uma folha impressa, listados a seguir. Tais exercícios serão usados como motivação para revisar a adição entre números naturais a partir algumas situações possíveis.

<u>Orientação para o Professor: Objetivos por cada questão</u>

1- Tratamento da conversão entre a linguagem materna e a aritmética
2- Trabalhar a adição como a união de dois conjuntos disjuntos, isto é, sem elementos em comum
3- Visualizar uma adição como a união de dois segmentos.
4- Associar a adição ao princípio da alternância de possibilidades de uma dinâmica combinatória (princípio aditivo).
5- Trabalhar a sequência de transformações, utilizando o conceito de sucessor

1- Bento pega o ônibus para a escola na parada de número 18 e desce 24 paradas depois. Qual o número da parada da escola?

2- Marília e Juliane resolveram reunir suas coleções de cartas. Marília possui 16 cartas e Juliane, 27. Qual o total de cartas que a dupla possui? Desenhe sua solução para representar o total de cartas das duas amigas.

3- A Prefeitura iniciou uma obra de saneamento básico no bairro Bom Jesus. Na primeira semana de trabalho, foram instalados 22 metros de tubulação de esgoto. Já na segunda semana, conseguiram instalar 28 metros da mesma tubulação. Após a conclusão da obra, qual é o total de tubulação instalada nessa obra?

4- Juninho irá sair no final de semana com sua namorada. Ele já escolheu a calça que irá vestir, mas está indeciso: se vai de camiseta ou camisa. Ele tem sete camisetas de estampas diferentes e quatro camisas sociais. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir para sair?

5- Mariana está correndo em uma pista de atletismo durante seu treino. Ela começa caminhando cinco voltas e, após, realiza 8 repetições de uma volta em um ritmo bem forte. Para finalizar, realiza um desaquecimento, caminhando novamente três voltas. Para facilitar o andamento do treino, o técnico montou uma tabela com a ação de cada volta, mas a impressão saiu incompleta. Complete a tabela a partir do proposto acima.

Volta	**Ação**
1	Aquecimento
	Aquecimento
	Aquecimento
	Aquecimento
	Aquecimento
6	Tiro Forte
	Tiro Forte
	Tiro Forte
	Tiro Forte
	Tiro Forte
	Tiro Forte
	Tiro Forte
	Tiro Forte
	Desaquecimento
	Desaquecimento
	Desaquecimento

Tabela 15- Tabela da atividade 5

Qual foi o total de voltas dadas por Mariana durante este treino?

Neste ponto, será ressaltado que a operação matemática, por trás de todas as respostas, é a adição e que ela pode ser representada de diferentes formas: acrescentando uma quantidade, unindo conjuntos disjuntos, juntando dois objetos geométricos, usando o princípio aditivo da combinatória entre possibilidades do tipo OU, além da utilização da função geradora de sucessor de um número. Então, a partir disso, reafirmar-se-á que é operação de adição.

Para a discussão das soluções, primeiramente se proporá que os alunos apresentem as soluções e comparem entre seus colegas, a fim de perceber quais as possibilidades de enfrentar cada situação. Em seguida, voltando-se aos problemas, haverá a representação aritmética e a pictórica simultaneamente:

Problema 1 – 24 paradas **depois** da 18 → $18 + 24 = 42$

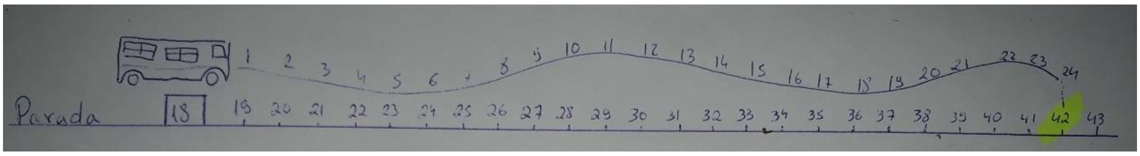


Figura 107 - Representação Pictórica do Problema 1

Problema 2 – 16 cartas da Marília, **juntando** com as 17 da Juliane → $16 + 17 = 33$

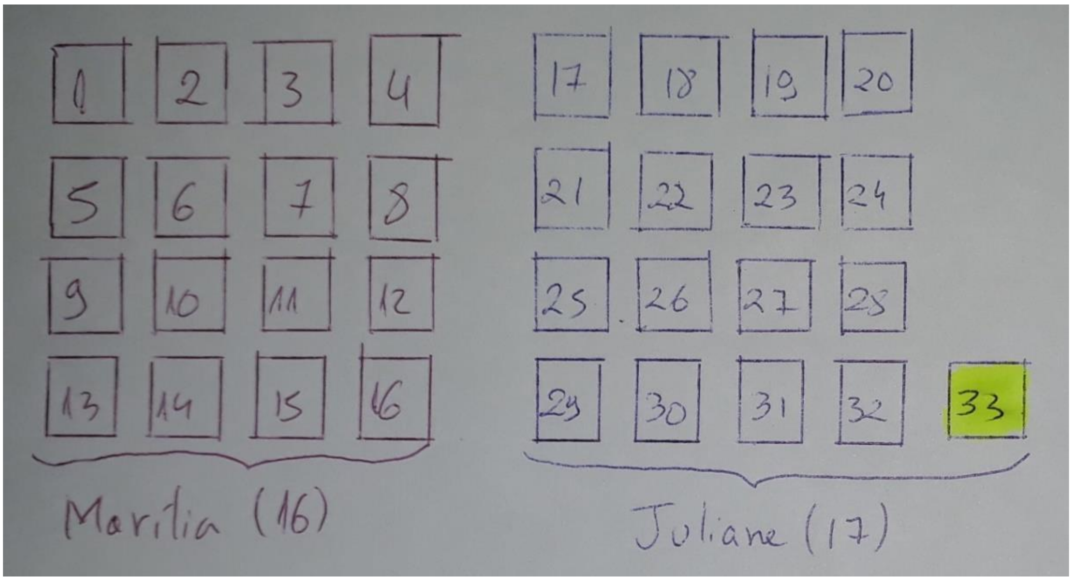


Figura 108 - Representação Pictórica do problema 2

Problema 3 – Unindo os trabalhos feitos em cada semana, desconsiderando a junção entre eles, $22 + 28 = 50$ metros.

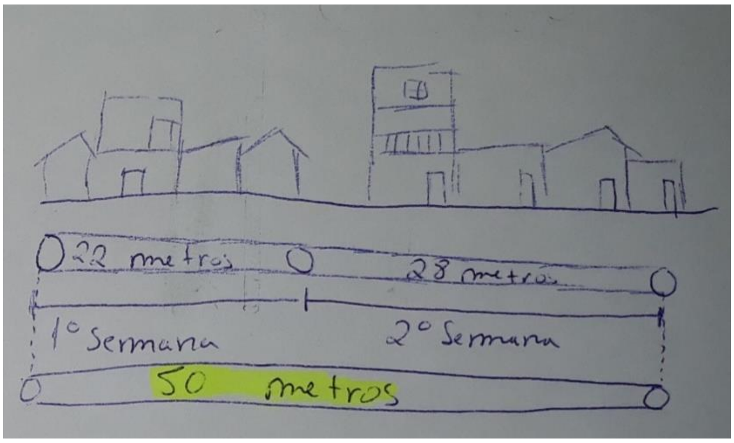


Figura 109 - Representação Pictórica do problema 3

Problema 4 – 7 camisetas **ou** 4 camisas → $7 + 4 = 11$

Figura 110 - Representação Pictórica do Problema 4

Problema 5 – **Sucessor** de 1→ 1+1=2, **Sucessor** de 2→2+1=3, e assim por diante, utilizando o mesmo raciocínio para alcançar os outros números. *Sucessor de um número é equivalente a adicionar uma unidade, ou seja, o próximo na sequência de 1 em 1.*

Finalizando, será revista partes integrantes da adição e de sua estrutura operacional, como escrito abaixo.

Adição

Termos ou parcelas – são os números envolvidos pela operação de adição (+)

Soma – é o resultado da adição:

(1° Parcela) + (2° Parcela) = Soma

Visualizando de forma mais genérica, sendo a, b os termos da adição e c a soma, tem-se:

$$a + b = c$$

Tabela 16 - Uma formalização da operação de adição

No final da atividade, serão indagadas quais outras situações estariam associadas à adição. Espera-se que apareçam operações monetárias, medida de tempo (por exemplo, marcar algo para daqui a 15 dias, que dia será marcado), entre outros. Também, palavras que são sinônimos de adicionar, como: unir, complementar, reforçar, inserir, incorporar, incluir, misturar, agregar, anexar, ajuntar, somar, juntar, aditar, aumentar, acrescentar.

Ao término, foram resgatados alguns conhecimentos dos alunos sobre o conjunto dos números naturais, revisando algumas de suas características. Para tanto, questionou-se anteriormente o que eles entendiam por "número natural", se esse conjunto possui maior ou menor elemento, o que existe entre dois números consecutivos e outras possibilidades que aparecessem a partir das afirmações feitas pelos alunos.

Em seguida, será feita uma exposição mais formal do conjunto, utilizando a notação formal ℕ e a listagem de alguns dos seus elementos. Será utilizado o conjunto dos Naturais para a forma mais simples de contagem (quando não existe nada, é zero, em seguida 1 e assim por diante).

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,5, \ldots\}$$

Da mesma forma, comentou-se com os alunos que este é um conjunto infinito, ou seja, por maior número que seja o número que se possa imaginar, existe outro maior que ele, bastando, por exemplo, adicionar um ao número imaginado. Também é possível de se observar que entre dois números consecutivos (por exemplo, 2 e 3) não existe nenhum outro número natural entre eles. Por último, os números naturais formam um conjunto "que possui começo, mas não possui um fim".

Em seguida, foi lembrado que o sucessor de um número é como o próximo número na contagem. Com relação ao sucessor, é possível perceber que cada número possui um único sucessor; independente de qual número seja, sempre terá um sucessor. Além disso, todo o número natural é sucessor de alguém e possui antecessor e essa última característica tem como exceção o zero.

Além do conjunto ser infinito, pode-se notar que muitos pedaços (subconjuntos) do conjunto dos naturais, por exemplo, o conjunto formado pelos números pares, também são um conjunto infinito, pois, dado um número par, sempre existe um sucessor par (que é maior que ele), e todos esses números pares pertencem ao conjunto dos números naturais. O mesmo raciocínio pode ser aplicado aos múltiplos de 3, por exemplo.

Aula 03: Construir a semirreta numérica para nela representar o conjunto dos naturais; definir a adição e seus termos na semirreta

Tempo de aula: 90 minutos (2 períodos)

Objetivo:

- Construir a semirreta numérica para representar o conjunto dos naturais;
- Definir a adição e seus termos;
- Definir a adição e seus termos sob uma representação pictórica;

Materiais necessários: quadro expositivo, folha com atividades

Desenvolvimento

A atividade será iniciada com a entrega de uma régua (se possível sem marcação) e de um compasso para cada aluno. Será explicado que, quando se fala em ponta seca, significa aquela que não possui grafite. Alguns minutos serão oferecidos para eles explorarem o instrumento e entenderem que a ponta seca é o centro de uma circunferência de raio do tamanho da abertura do compasso.

Da mesma forma, será levantada a vantagem do uso do compasso para marcar distância e possível translação. A partir disso, seguirão os seguintes procedimentos:

1. Desenhe uma reta. Coloque um ponto no início da semirreta a qual se chamará origem ou zero.

2. Escolha uma distância qualquer, utilizando a abertura do compasso, cuidando para não realizar uma abertura muito grande, o que tornará muito difícil a repetição dos próximos passos na folha de desenho. Coloque a ponta seca (que não desenha) em cima do ponto marcado como zero. Marque um ponto de interseção da semirreta com o desenho do compasso em cima da semirreta.

3. Mantendo a abertura do compasso, coloque a ponta seca no ponto marcado no passo 2 e repita o passo anterior; será marcado um novo ponto, se continuar a marcação no mesmo sentido.

4. Repita o passo 3 para gerar um novo ponto quantas vezes quiser.

Espera-se o seguinte objeto:

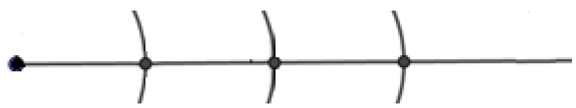


Figura 111 - Construção esperada após as instruções. Fonte: do autor

Como o primeiro ponto ao lado (da semirreta) é zero, o segundo ponto está a uma abertura de distância do zero, será denotado por 1, e o próximo ponto está a duas aberturas, sendo 2, e assim por diante, onde a partir do ponto denotado por $n \in \mathbb{N}$ marca-se, com o compasso, o seu sucessor.

Figura 112 - Pontos representativos dos números naturais. Fonte: do autor

Dada a representação (Figura anterior), será explanado que uma semirreta pode ser utilizada para representar o conjunto dos números aos naturais: tem começo (ponto 0, origem) e não possui fim (pode-se continuar a semirreta, pois ela é infinita, marcando um novo ponto com a abertura, que seria o 7, e repetir o processo até onde quiser). Acompanhando, no sentido da esquerda para a direita, todo "ponto" à direita é o sucessor, observando a mesma no sentido horizontal.

Após a construção da semirreta numérica, ela será utilizada para a representação de uma operação de adição, conforme a situação abaixo:

Francisco vai caminhar na praia e sai de casa a pé, percorrendo três quilômetros, para neste momento tomar um sorvete. Após o lanche, continua sua caminhada, indo cinco quilômetros adiante do quiosque onde tomou o sorvete. Qual foi a distância total percorrida por Francisco, a partir de sua casa?

Pode-se visualizar o problema da seguinte forma:

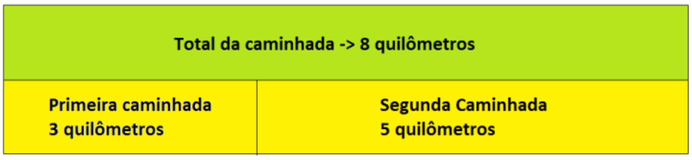


Figura 113 - Representação pictórica da adição com barras. Fonte: do autor

No referido desenho, cada bloco representa uma distância percorrida. Se forem unidos os blocos amarelos, tem-se um total de 8. E se esse exemplo for transportado para a reta numérica? Primeiro, ele estaria no início do trajeto (quilômetro 0), andaria 3 quilômetros e depois 5 quilômetros:

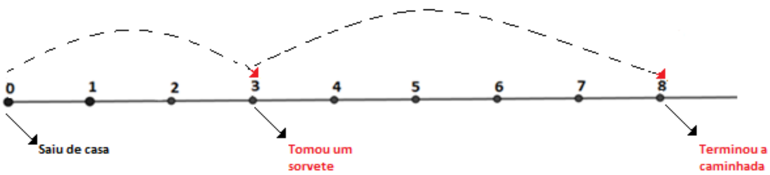


Figura 114 - Representação pictórica da adição com a semirreta. Fonte: do autor

Assim, observando a partir da semirreta numérica, e a partir da posição do quiosque de sorvete no quilômetro 3, Francisco caminhou um novo trecho no mesmo sentido que havia começado desde que saiu de casa. Por conseguinte, a sua distância em relação a sua casa seria a adição entre as duas distâncias caminhadas, isto é, 3+5.

Retomando quando revisamos o conceito de adição, uma adição entre dois números tem a seguinte estrutura:

$$(1° \text{ Parcela}) + (2° \text{ Parcela}) = \text{Soma}$$

Agora, na semirreta numérica, pode-se perceber que a:

1° Parcela – É a posição referente ao valor da 1° Parcela

2° Parcela – É o tamanho do novo deslocamento a partir da primeira parcela

Soma– É a posição final, que é considerada o resultado da operação.

Em seguida, será entregue aos alunos uma folha com as atividades abaixo:

Exercícios

1 - Uma equipe de construção está trabalhando em um grande prédio. Na primeira parte do projeto, foram construídos 13 andares. Após a conclusão dessa fase, foi contratada uma nova equipe para construir outros 18 andares. Represente o problema a partir de um dos tipos de desenho, usando a semirreta ou as barras. Qual o total de andares do prédio?

2 - Escreva a expressão aritmética que descreve os desenhos a seguir:

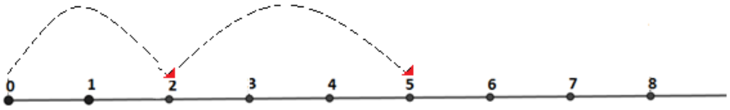
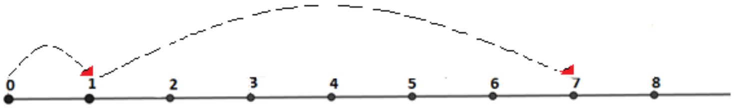
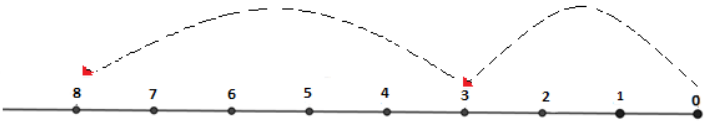
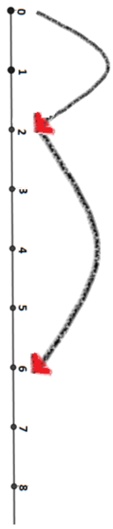
	
	
	
	

Tabela 17 - Representações pictóricas da atividade 2. Fonte: do autor

3 - A partir da adição $9 + 17 = 26$, faça o seguinte:

c) Escreva um problema cuja solução pode ser representada pela expressão aritmética acima.

d) Represente a solução, utilizando um desenho.

Aula 04: Explorar as propriedades da adição (comutatividade e associatividade) a partir das diversas representações semióticas (Linguagem materna, aritmética e pictórica)

Tempo de aula: 90 minutos (2 períodos)

Objetivo:

- Explorar as propriedades da adição (comutatividade, associatividade e elemento neutro) a partir das diversas representações semióticas (Linguagem Materna, aritmética e pictórica).

Material necessário: folha A4, material em EVA (mínimo de três cores)

Desenvolvimento:

A aula será iniciada, provocando o uso da operação de adição no cotidiano das pessoas, tanto em aula, no tipo de trabalho ou na rotina doméstica. Para tanto, serão feitas as seguintes indagações:

- Em qual profissão você acha que saber fazer a adição entre valores é fundamental?
- Nessas profissões, dê um exemplo de uma situação na qual é preciso fazer a operação de adição.
- Fora do trabalho, onde é importante saber fazer a adição entre números naturais?

A partir dos exemplos que surgirem na fala dos alunos, serão contextualizadas três adições: 25 +34; 36+3+24 e 22+56.

Após esse momento, as propriedades da adição serão revisadas entre números naturais.

<u>Comutatividade</u>

Dá-se o seguinte problema: um prestador de serviços vai recolher seus pagamentos em diversas casas de uma rua.

Casa1	R$ 36
Casa2	R$ 25
Casa3	R$ 72
Casa4	R$ 10
Casa5	R$ 90
Casa6	R$ 18
Casa7	R$ 75
Casa8	R$ 64

Tabela 18- Valores de cada casa. Fonte: do autor

Observando rapidamente a lista, o profissional sabe que tem R$ 400 para recolher. Como ele não tem papel para escrever ou uma calculadora a mão, que estratégia ele utilizou para realizar o cálculo mental de maneira mais fácil? Por exemplo, podem-se unir os valores da seguinte maneira:

Casa1	R$ 36
Casa2	R$ 25
Casa3	R$ 72
Casa4	R$ 10
Casa5	R$ 90
Casa6	R$ 18
Casa7	R$ 75
Casa8	R$ 64

Figura 115 - Representação pictórica da solução. Fonte: do Autor

Escrevendo a adição na ordem das casas cobradas temos $36 + 25 + 72 + 10 + 90 + 18 + 75 + 64$. Porém, se percebidos com mais cuidado, veem-se que 36+64=100, 25+75=100, 72+18=100 e 90+10=100. Logo,

$$36 + 25 + 72 + 10 + 90 + 18 + 75 + 64 =$$
$$(36 + 64) + (25 + 75) + (72 + 18) + (90 + 10) =$$
$$100 + 100 + 100 + 100 = 400$$

Tal fato só é possível graças às propriedades da comutatividade e da associatividade, pois essas garantem que, independente da ordem das parcelas, a soma será sempre a mesma. Além da comutatividade, a associatividade se faz presente, pois garante a escolha da sequência da adição como se quiser. Se for feita a adição na ordem originalmente dada, o resultado também será 400.

Usando a simbologia matemática, pode-se afirmar que

$$\textit{Dados a,b números naturais , então } a + b = b + a$$

Os alunos, nesse contexto, deverão pensar, a partir do seu cotidiano, sobre o que é comutativo: por exemplo, se primeiramente você colocar seu sapato e depois a meia é a mesma coisa que colocar a meia e depois o sapato? Chegar-se-á à conclusão de que se vestir não é uma ação/operação comutativa. Em seguida, será questionado se os educandos conhecem outros exemplos do seu cotidiano que não são comutativos.

Após, será revisado se essa propriedade é válida na adição para quaisquer números naturais. Para tanto, a semirreta numérica será usada para justificar:

Pense numa estrada que possui placas a cada 10 Km. Em cada placa há duas informações: uma indicando a distância percorrida e outra indicando quanto falta para acabar sua extensão. Por exemplo, se nessa estrada a extensão exata é de 100 Km, quando se está no quilômetro número trinta aparecerá uma placa assim “Km 30 (falta 70 Km para o fim)”.

Observando a estrada, teremos um fato curioso: existirá, mais adiante, uma placa com a informação simétrica: "Km 70 (falta 30 Km para o fim)". Questões para discussão:

- Todas as placas nessa estrada terão seu simétrico (como no exemplo)?

- Isso tem alguma relação com as placas serem múltiplos de 10, ou para qualquer número isso também aconteceria?

- Se a estrada tivesse um outro tamanho, esse fato curioso continuaria existindo?

Após a discussão, generalizando para um número a e b, tem-se a seguinte representação:

<u>Orientação para o Professor:</u> Nesse caso, podemos utilizar *a* como a placa e *b* como a placa simétrica.

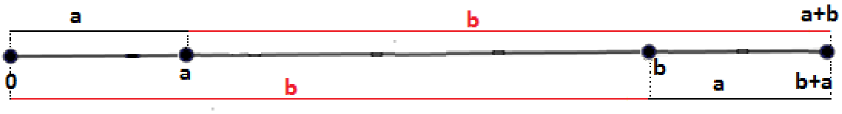


Figura 116 - Representação Pictórica da Comutatividade

Nesse momento, a representação pictórica de barras será utilizada para justificar a comutatividade. Primeiro, serão usadas duas barras de tamanho e de cores distintas com o comprimento representado por um número natural. Em seguida, a primeira e a segunda barras serão unidas lado a lado para representar a adição, com marcação da distância. A seguir, a ordem das barras será trocada (segunda e primeira, respectivamente) e se chegará à conclusão de que tal fato se encaixa perfeitamente na marcação feita anteriormente.

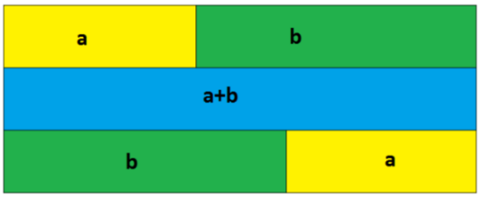


Figura 117 - Representação Pictórica por barras da Comutatividade

<u>Associatividade (Como somar 3 parcelas?)</u>

Existe uma maneira de dar o valor final sem usar o papel? Ao se responder rapidamente qual é a soma de 387+115, pode-se, por exemplo, emprestar 13 unidades da segunda parcela para que a primeira parcela fique mais fácil de manipular, já que 387+13=400. Assim:

$$387 + 115 = 387 + (13 + 102)$$
$$= (387 + 13) + 102$$
$$= 400 + 102$$

$$= 502$$

Se for feita diretamente, usando a representação aritmética extensiva da conta, o resultado também é 502. Então, conclui-se que a escolha de como se posicionam os elementos, no caso 115, não interferiu no resultado. Ainda, independente dos números naturais que estiverem envolvidos, isso será sempre válido? A associatividade da adição nos números naturais é quem garante o fato. Com ela, podem-se eliminar os parênteses em uma sequência de adição e fazer todas as contas em qualquer ordem. Generalizando, sendo três números naturais (que são chamados de a, b, c), tem-se que:

$$(a + b) + c = a + (b + c) \text{ para quaisquer } a, b, c \in \mathbb{N}$$

<u>Orientação para o Professor:</u> Saliente o significado de adição, que é a união ou junção de quantidades/elementos. A partir disso, pode-se afirmar que a ordem que agrupamos não afeta a soma.

Nesse momento, retorna-se às barras para justificar a associatividade. Com três barras, será usado um raciocínio análogo, mostrando que $(Barra1 + Barra2) + Barra3$ tem o mesmo comprimento que $Barra1 + (Barra2 + Barra3)$.

<u>Orientação para o Professor:</u> É um excelente momento para retomar a ideia de adição como de juntar quantidades/objetos.

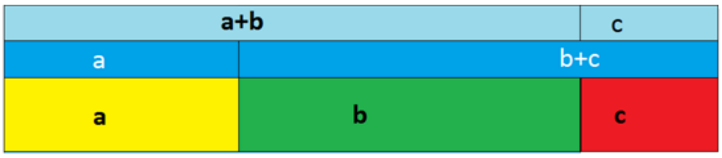


Figura 118 - Representação Pictórica por Barras da Associatividade

<u>Orientação para o Professor:</u> Professor, sabemos que em nosso país há uma infinidade de materiais disponíveis para construir esse objeto, mas pedimos alguns cuidados:

- Tenha disponível as cinco cores, pois elas fazem a diferença na visualização do objeto;
- Seja um material rígido, para que os pedaços se encaixem agora e sempre, assim evite tecido maleáveis ou emborrachados (exceto EVA, que é altamente recomendável);
- Que possa escrever em cima do mesmo, para colocar as incógnitas em cada pedaço.

Lembre-se de fazer os recortes de modo que a e b sejam comutativos (a+b=b+a).

Portanto, a comutatividade e a associatividade juntas dão o poder de organizar a soma para que se faça da maneira mais fácil. Faça os exercícios para testar o uso dessas propriedades (que estão inseridos na próxima aula).

Aula 05: Apresentar o elemento neutro e explorar as propriedades da adição

Tempo de aula: 90 minutos (2 períodos)

Objetivos:

- Explorar as propriedades do elemento neutro.
- Explorar as propriedades da adição citadas na aula anterior, na tentativa de organizar uma linguagem aritmética mais abrangente.

Materiais necessários: quadro expositivo, folha de atividades

Desenvolvimento:

<u>Elemento Neutro</u>

O que significa neutro? Perguntaremos aos alunos. Após discutir as possibilidades, apresentaremos a seguinte definição segundo o dicionário de língua portuguesa:

Neutro (Adj) - que não se posiciona, se abstém de tomar partido; neutral.

Após apresentar esse significado, relembraremos o exemplo da caminhada de Francisco na praia, com uma alteração: qual a distância que, adicionada aos 3 quilômetros iniciais, seria o próprio quilômetro três como resultado final? Matematicamente, sendo n o número neutro em questão, tem-se que

$$3 + n = 3$$

Que número é esse? Seria o zero que, dentro do contexto, significa não caminhar. Na adição entre números naturais, o zero é o único número que, quando adicionado, não altera a outra parcela.

Generalizando esse raciocínio para um número natural m, temos que

$$m + 0 = 0 + m = m$$

Pode-se perceber a importância do elemento neutro durante a adição entre duas parcelas nas quais pelo menos uma possui um algarismo 0 em uma ordem válida (exceto zero à esquerda).

8 ¹6 8 + 1 0 5 ---------- 9 7 3 1- Faz-se $8+5=13$; o número 3 da unidade é colocado na unidade da resposta e o 1 da dezena irá para a ordem das dezenas. 2- Na dezena, faz-se 1+6+0=7 que equivale a 10+60+00=70, gerando o número 7 na posição relativa à dezena. Por último, 1+8 = 9, ou seja, tem-se 9 centenas.	$868+105=(800+60+8)+(100+0+5)$ Utilizando a associatividade, podem-se inutilizar os parênteses e, com a comutatividade, trocar os termos de lugar, agrupando as dezenas e as unidades. $868+105=800+60+8+100+0+5$ Primeiro as unidades: $868+105=800+60+100+0+(8+5)$ Transformam-se 8+5=13 reescritos como 10+3 $868+105=800+60+100+0+(10+3)$ $=800+100+(60+0+10)+3$ $=(800+100)+70+3$ $=900+70+3$ $=973$

Tabela 19 - Representação das barras, desenhada no quadro, para explicitar a associatividade

Um exemplo do uso das propriedades da adição:

Marcus quer comprar uma casa para chamar de sua. Ele gosta muito daquela casinha, pintada de verde, na esquina do mercado. No primeiro dia, ele chega e oferece ao morador um real, e obviamente o morador recusa. No segundo dia, ele junta o valor do dia anterior e acrescenta mais dois reais para fazer uma nova oferta, que é prontamente recusada. No terceiro dia, oferece o total da oferta anterior mais três reais. Ele segue tentando, sempre da mesma maneira, até que no 100º dia, o morador aceita a oferta. Qual o valor da oferta final? Essa situação pode ser representada por:

$$1+2+3+4+\cdots+95+96+97+98+99+100=???$$

Será que existe uma maneira fácil de realizar essa adição sem somar (explicitamente) cada parcela? Pausaremos um momento para ouvir comentários sobre essa questão.

Como $100+1$ e $99+2$ têm a mesma soma (101), existem muitas “duplas” de números que somam 100 nessa sequência. Como há 100 números na sequência, temos o total de 50 duplas $(100\div 2)$. Para tanto, a expressão é organizada da seguinte maneira, utilizando a propriedade comutativa:

$$1+100+2+99+3+98+\cdots+49+52+50+51$$

<u>Orientação para o Professor:</u> o uso das reticências pode ser mal interpretado. Algumas ideias para driblar esse problema:

- Ao colocar no quadro, provoque os alunos em relação à "lógica" dessa organização. Pergunte se existem outras possibilidades de organizar essa sequência (Ex: par e ímpar).
- Utilizando um somatório um pouco menor, mostre a eles a vantagem de comprimir, por exemplo:

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+11+12+13+14+15$$

Como

$$1+2+3+\ldots+13+14+15$$

Ao se utilizar o princípio da associatividade, serão colocados parênteses exatamente nas duplas.

$$(1+100)+(2+99)+(3+98)+\cdots+(49+52)+(50+51)$$

Todos os parênteses resultam em 100, logo

$$(1+100)+(2+99)+(3+98)+\cdots+(49+52)+(50+51)=$$

$$101+101+101+\cdots+101+101=$$

$$50\times 101=5050$$

Quando se faz um somatório, utilizam-se a comutatividade e associatividade para chegar ao resultado. Após esse momento, seguirão as seguintes atividades:

1 - Calcule o valor dos somatórios:

a) $1+4+7+\cdots+55=$ (cada parecela é três unidades maior que a anterior)

b) $4+9+13+\cdots+109=$ (cada parcela é cinco unidades maior que a anterior)

2 - Bernarda e Priscila estão tentando calcular o quanto precisam juntar de dinheiro para adquirir um *notebook* em conjunto. Bernarda tem R$ 1368, e Priscila juntou R$632. Priscila diz que juntas possuem R$ 1990, já Bernarda acha que está errada, afirmando que possuem R$ 2000. Utilizando somente notas de 100, 10 e 1 e o número mínimo de cédulas para cada quantidade,

a) Represente esse contexto, utilizando um desenho para o problema e sua respectiva solução.

b) Priscila disse que fez tudo direitinho: efetuou a adição e colocou o número 1368 em cima do 632, alinhando os números de acordo com sua ordem no sistema posicional, como na figura abaixo:

```
  1 3 6 8
+   6 3 2
----------------
 1  9  9 0
```

Após utilizarem uma calculadora, uma delas não chegou ao resultado correto. Quem foi? E qual foi o erro da aluna?

c) Argumente, a partir dos conhecimentos trabalhados em aula, por que o resultado de uma delas está certo.

Serão dados alguns minutos para os alunos discutirem as questões. Em seguida, verificaremos quais foram as respostas a que eles chegaram e será realizado um fechamento da atividade. É esperado que os alunos utilizassem a organização dos números, utilizando as propriedades de comutatividade e associatividade, espelhando-se nos exemplos do somatório para a atividade 1 e comparando o desenvolvimento do exemplo da análise da adição.

Aula 06: Retomar e aprofundar a operação de subtração entre números naturais

Tempo de aula: 90 minutos (2 períodos)

Objetivos:

- Retomar e aprofundar a operação de subtração entre números naturais.
- Estabelecer algumas possibilidades de representações semióticas da subtração e suas representações nos naturais.
- Investigar as relações entre comutatividade, associatividade e elemento neutro na operação de subtração.

Materiais necessários: quadro expositivo, régua e folha de atividades.

Desenvolvimento:

Apesar poder-se interpretar como uma operação inversa da adição, a subtração possui diversos significados inseridos na perspectiva da resolução de problemas: retirar quantidades, estabelecer a diferença de medidas ou contabilizar o complementar de um conjunto.

A estrutura de uma operação de subtração consiste em três termos:

Minuendo – primeiro termo da operação. É de onde se retirará certa quantidade ou a referência para a variação entre valores.

Subtraendo – segunda termo da operação. É a quantidade a ser retirada do minuendo ou o valor a ser comparado na diferença de valores entre os termos.

Diferença ou resto – é o resultado da subtração.

Generalizando, tem-se que $Minuendo - Subtraendo = (Resto\ ou\ Diferença)$

Antes do exemplo, será explicado como funciona o sistema brasileiro que determina os números de um endereço em uma determinada rua: no Brasil, o sistema de numeração é padronizado. O número referencial do imóvel em uma rua representa a distância, em metros, entre o marco zero da rua até o referencial da matrícula do imóvel. Logo, a distância entre a casa 200 e a 300 de determinada rua será de 100 metros de distância. Algumas regiões com residências do século XIX podem não seguir essa prática. Será desconsiderada essa última, pois poucas ruas no Brasil utilizam o sistema português de numeração (contagem de casa com lado ímpar e par).

Exemplo: Rodrigo andava de bicicleta em uma extensa rua de sua cidade. Ele saiu de sua casa, que era de número 4923 e recebeu uma ligação de sua amiga Débora, que mora na mesma rua.

Débora: Oi, onde você está? *Rodrigo: Saindo de casa, indo em direção ao início da rua... só não sei exatamente qual o número, não estou vendo nenhuma casa com a numeração.* *Débora: Você sabe quanto você andou?* *Rodrigo: Na bicicleta está marcando 1926*[16]*, por quê?* *Débora: Beleza, me espera aí!* *Rodrigo; Tá bom!*

Tabela 20 - Diálogo fictício referente à situação de completamento

Onde Rodrigo parou na rua? Qual o número da casa à frente da qual eles se encontram? E por que Débora não pediu mais informações para Rodrigo?

Será proposto que os alunos discutam em duplas por alguns minutos. Ao longo desse tempo, o pesquisador circulará entre as duplas para interagir e ouvir as argumentações vindas por parte deles.

Em seguida, foi proposto o seguinte raciocínio: Quando Rodrigo falou que estava indo em direção ao início da rua (endereço de número 0), a numeração estaria diminuindo, como na figura abaixo.

[16] No sistema brasileiro de endereçamento, salvo em algumas regiões como casas datadas antes da chegada de D. João VI, o padrão é em metros, em relação ao marco inicial da rua.

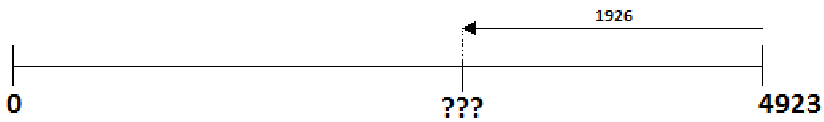


Figura 119- Representação Pictórica da situação da Aula 06

A partir da figura acima, o endereço ao qual Débora estava indo encontrar Rodrigo era a diferença entre 4923 e 1926.

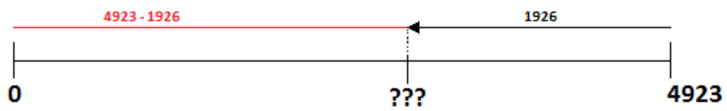


Figura 120 - Representação Pictórica da situação da Aula 06 explicitando a operação de subtração

Figura 121 - Representação Pictórica por barras da situação da Aula 06 explicitando a operação de subtração

Então, a subtração entre números naturais é como o deslocamento em cima da reta no sentido decrescente dessa, a partir do primeiro número (minuendo). Assim:

Sendo *Minuendo – Subtraendo = Diferença*
Minuendo – ponto inicial na reta
Subtraendo – tamanho do deslocamento em direção à origem da reta (zero).
Diferença – finalização do deslocamento. É o resultado da subtração.

No caso, $4923 - 1926 = 2997$. Então, ela foi ao encontro do amigo na casa número 2997. A partir desse resultado propomos a seguinte afirmação: *Dados a,b e c números naturais, se* $a - b = c$ *então* $a + c = b$. Levaremos às seguintes questões aos alunos:

Orientação para o Professor: Geralmente os alunos repudiam tal representação, pois ela não tão simples de compreender. Use as perguntas da sequência para auxiliar no processo generalizador da afirmação. Além disso, mostre os termos a,b e c na sua representação pictórica de barras ou inserida reta numérica.

- Se tomarmos $a = 4923$, $b = 1926$ e $c = 2007$, isso é verdade?

- Faça mais dois exemplos quaisquer (com a maior que b). A frase continua válida?

- Você acredita que, independente dos números envolvidos, isso é verdade?

Em seguida, será proposto o seguinte exercício:

1- Manoel resolveu fazer uma grande viagem de bicicleta: ir da praia de Imbé até o mercado público de Porto Alegre, percorrendo 123 km. Mesmo com todo o planejamento, o pneu de sua bicicleta furou após pedalar por 39 km. Nesse momento, estando no meio do nada, ele ligou para seu pai (que estava em POA), pedindo ajuda.

a) Como ele irá explicar para seu pai onde está exatamente: "Pai, você terá que dirigir _____ km até me encontrar"

b) Desenhe uma possível solução para o problema de como o pai, utilizando o odômetro do automóvel (marcador de quilometragem), saberá a posição do filho na estrada.

c) Afinal, onde está Manuel?

Após alguns minutos, serão levantadas coletivamente as conclusões dos alunos. Na sequência, será analisado o que acontece com subtrações cujo minuendo é menor que o subtraendo. Acredita-se que as possibilidades das respostas sejam em duas principais possibilidades: alguns alunos utilizarão como referência a distância a partir de Porto Alegre e outros provavelmente irão assumir que o pai de Manoel conhece tão bem a estrada que basta a localização a partir da cidade de Imbé.

Condições para a Operação de Subtração

Dado o exemplo $20 - 32$, há uma subtração possível de se fazer, utilizando os números naturais. Esperam-se duas situações: alguns alunos provavelmente inverterão a subtração, gerando resultados opostos aos corretos; também é possível que alguns respondam com números negativos, pois não é um conjunto desconhecido por todos os alunos.

De acordo com a representação pictórica da reta numérica, conforme o problema anterior, o deslocamento da operação é realizado em direção à origem, sentido contrário ao da adição. Assim, há uma condição fundamental para que a subtração seja possível no conjunto dos números naturais. Se o subtraendo (o que volta) for maior que o minuendo (posição inicial), passaria do zero, então $23 - 28,\ 43 - 58,\ 68 - 69$ não são possíveis de serem calcular dentro do conjunto dos números naturais, pois a quantidade a ser extraída é superior a quantidade disponível. Isso não quer dizer que não exista um resultado possível, mas sim que ele não é um número natural.

Comutatividade e Associatividade na Subtração

Observando a condição de existência de uma diferença ou resto em $\mathbb{N}$, pode-se inferir que a subtração não é comutativa, pois $7-3=4$, mas $3-7$ não é possível de se fazer nos naturais. Esbarra-se em situação semelhante quando abordamos a associatividade: um contraexemplo seria a situação apresentada abaixo:

$$7-(3-2) \qquad\qquad (7-3)-2$$

Apesar de terem resultado possível entre os naturais, pode-se observar que

$$7-(3-2) \neq (7-3)-2$$

Logo, tem-se um exemplo de operação não associativa nem comutativa dentro do conjunto dos números naturais.

Orientação para o Professor: Apesar da operação de subtração não se constituir uma operação binária em um conjunto, iremos manter o termo devido a familiaridade desse termo aos alunos. Leia mais sobre o que é operação binária: SCHEINERMAN, Edward R. Matemática Discreta - Uma Introdução. São Paulo: Thomson, 2003. Um breve resumo pode ser encontrado nesse link: https://bit.ly/2FLzF4P

Aula 07: Motivação para os números negativos e expansão para a reta numérica, representando o conjunto dos Números Inteiros

Tempo de aula: 90 minutos

Objetivo:

- Construir, a partir da semirreta representativa dos números naturais, uma reta numérica, explicitando os Números Inteiros.

Material utilizado: Quadro expositivo

A aula será iniciada com o retorno ao problema da subtração, quando o minuendo é menor que o subtraendo. Os alunos serão convidados a discutir os problemas a seguir e apresentar soluções, por escrito, se possível.

Respondam às seguintes perguntas abaixo:

a) No final de um campeonato esportivo, seu time marcou 20 pontos e sofreu 32 pontos. Qual é o saldo final?

b) Um açougueiro trabalha num ambiente a 20°C. Quando ele entra no congelador de armazenamento, a temperatura cai 32 graus Celsius. Qual a temperatura interna do frigorífico?

A partir de uma discussão sobre como os grupos resolverão os dois problemas propostos, serão ouvidos os argumentos dos alunos, mediante as situações apresentadas. Espera-se que surjam contribuições que apontem para os números negativos.

Nesse momento, será pertinente alertar que todas as perguntas remetem à mesma operação: $\mathbf{20 - 32}$.

Quando são estabelecidas as regras dos Números Naturais (20 e 32 são Naturais), define-se que, para que a subtração seja possível, é preciso que o minuendo seja maior que o subtraendo, logo não seria possível dentro do conjunto estabelecido. Porém, as situações apresentadas são possíveis de se obter resposta. Algumas vezes, os números que se conhecem não são suficientes para expressar a natureza das informações que são envolvidas nos problemas do cotidiano, então é necessário que se busque uma expansão do conjunto de números os quais serão utilizados para representar, analisar e responder problemas.

Neste aspecto, levantar-se-á a pergunta: Como é possível representar o resultado de $20 - 32$? Uma possibilidade é olhar o problema a partir da compensação de unidades (essa maneira será exposta, caso nenhum grupo apresente algo semelhante). Também é possível de se pensar no exemplo a, no qual cada ponto marcado (representado por M) é cancelado por um ponto sofrido (representado por S). Assim, basta fazer a contabilidade dos pontos que não foram pareados entre M/S.

M/S	M/S	M/S	M/S	M/S	S	S	S
M/S	M/S	M/S	M/S	M/S	S	S	S
M/S	M/S	M/S	M/S	M/S	S	S	S
M/S	M/S	M/S	M/S	M/S	S	S	S

Tabela 21- Representação Pictórica do problema 1

A partir dos resultados dos grupos, instigar-se-á uma discussão, utilizando as seguintes questões: O que significa sobrar 12 itens S não cancelados? Qual a diferença, utilizando a representação de diferença entre marcar 12 gols e sofrer 12 gols?

Sobre o problema do item "b", será observado como os alunos irão utilizar os desenhos para representar o problema; espera-se algo próximo da figura abaixo, na qual se pode observar a linha do termômetro que desce 20 graus para atingir o zero, e ainda para 12 unidades, a fim de que a descida de temperatura seja no total de 32 graus.

.

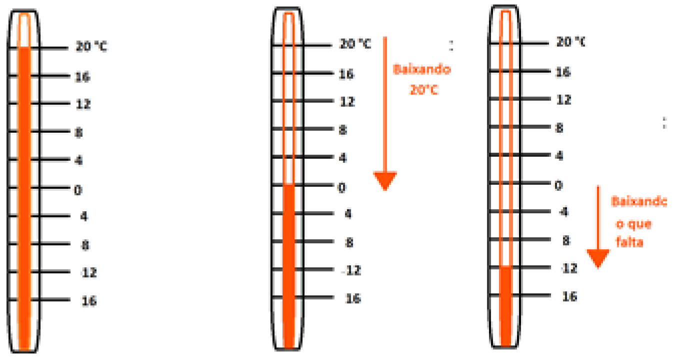


Figura 122- Representação Pictórica da situação 2

Em todos os exemplos, nota-se que aparece a quantidade 12, porém diferente do número natural 12, porque "o saldo é 12 pontos contra" (exemplo a) e "a temperatura é 12 abaixo de zero" (exemplo b).

Assim, será lançada a dúvida: utilizando a semirreta numérica que se construiu em aulas anteriores, como representar esse "novo 12"?

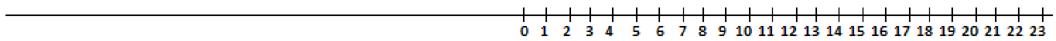


Figura 123- Início da expansão da semirreta numérica representativa dos números naturais

Neste aspecto, surge a necessidade de se expandir o conjunto de números, pois esse novo 12 não é um número natural, já que seria "outro 12". Voltando à semirreta na qual está o conjunto dos números naturais, tem-se a opção de expandir esse objeto geométrico a fim de que se torne uma reta.

Conclui-se, pois, que dentro dos Números Naturais, a operação de subtração nem sempre possui uma diferença que pertence aos naturais. Então, a que conjunto eles pertencem? Para isso, é necessário fazer uma expansão a partir do conjunto conhecido.

Os Números Inteiros, construídos a partir da expansão do conjunto dos números naturais, é matéria nova para os alunos de Ensino Fundamental nessa etapa (7º ano). Porém, o uso de referenciais é muito comum na rotina deles, por exemplo: crédito/débito bancário, posição relativa, temperatura, sistemas de pontuações e etc.

Em todos os problemas abordados, vê-se que sempre existe um referencial em valores que são maiores ou menores. No caso da situação dos gols marcados e sofridos, o referencial é o saldo nulo, ou seja, o time marcou o mesmo número de gols que sofreu.

Desta forma, tomar-se-á o ponto que representa o número zero, que já era a origem da representação, como referência para a extensão dos naturais. Se for repetida a construção feita com régua e compasso para o outro lado em relação ao zero, ela resulta na seguinte maneira:

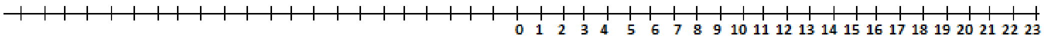


Figura 124- Construção da reta numérica representativa dos Números Inteiros (Parte 1)

O primeiro ponto à esquerda do zero tem uma unidade de distância à origem, mas em sentido contrário em relação aos pontos marcados nos números naturais. O sentido adotado para o conjunto dos números naturais será o **positivo,** e o sentido contrário, o **negativo**. Para diferenciar os sentidos, serão colocados os sinais + e – à esquerda do número. Por exemplo, +8 é o número que dista oito unidades em relação à origem para o sentido em que foram construídos os números naturais (no caso, para à direita). Pode-se ver que ele é o próprio natural 8), e -6 é o número que dista seis unidades em relação à origem no sentido contrário aos números naturais (no caso, para a esquerda). Assim, a reta numérica fica da seguinte forma:

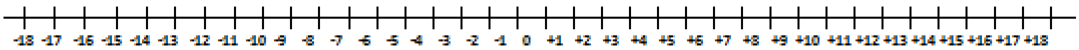


Figura 125- Construção da reta numérica representativa dos Números Inteiros (completa)

Na figura acima, pode-se facilmente continuar a construção para ambos os lados: no caso do -23, repete-se a criação de um novo ponto e marca-se o $+24$, pois esse ponto dista 24 unidades da origem no sentido que foi construído o conjunto dos naturais; já do lado oposto, no ponto marcado como -22, cria-se um ponto distando uma unidade à esquerda e marca-se o -23, pois dista 23 unidades no sentido contrário à construção de $\mathbb{N}$. Assim, como sempre é possível construir um novo ponto para qualquer lado, pelo fato de se ter utilizado uma reta (não tem começo, nem fim), pode-se inferir que ambos os lados possuem infinitos números.

Usa-se a direita por costume da escrita, mas pode-se fazê-la indo para a esquerda, para cima ou até mesmo na diagonal. Tais representações serão mostradas para que os alunos vejam que o importante é o referencial, não o sentido de uma única construção.

A seguir, têm-se alguns referenciais possíveis:

- Se os Números Naturais estão representados para a esquerda, os inteiros positivos estão representados para a direita
- Se os Números Naturais estão representados para a acima (vertical), os inteiros negativos estão representados para baixo.

Orientação para o Professor: é um bom momento para citar o termômetro analógico, pois atualmente o digital está muito acessível e muitos alunos nunca viram um modelo baseado na coluna de Mercúrio.

Voltando aos dois exemplos do início da aula, onde “o saldo é 12 pontos sofridos” (exemplo a) e “a temperatura é 12 abaixo de zero” (exemplo b), pode-se perceber que ambos vão ao sentido percebe-se que ambos vão ao sentido oposto a construção dos números Naturais, então é possível de se sugerir que $20 - 32 = -12$. Observa-se que talvez, nesse caso, haja um ponto crítico de entendimento: até hoje, o sinal positivo (+) e o sinal negativo (-) tinham uma única finalidade que era a operação de adição e subtração.

A partir de agora, esses sinais ganham mais um significado, o novo significado é a sua referência em relação ao zero.

Aula 08: Os Números Inteiros no Cotidiano

Tempo de aula: 90 minutos (2 períodos)

Objetivos:

- Estabelecer, a partir dos conhecimentos do cotidiano aluno, que os números negativos e positivos são utilizados em situações referenciais.
- Mostrar como estão presentes, a partir de alguns exemplos, os números positivos e negativos dentro do cotidiano.

Materiais necessários: Folha A4, cola, tesoura, revistas diversas, projetor multimídia e/ou quadro expositivo

A aula será iniciada com a seguinte atividade:

A partir de recortes de reportagens e anúncios (para garantir o contexto) de revistas, será

Números Positivos sem vírgula	Números Negativos sem vírgula
Números Positivos com vírgula	Números Negativos com vírgula

Figura 126- Modelo de minicartaz da atividade proposta na aula 08 exposto um mini cartaz, como ilustrado a seguir:

Após essa atividade, haverá discussão de alguns casos nos quais aparecem números negativos no cotidiano. Mesmo sendo um assunto novo do ponto de vista matemático, os Números Inteiros estão presentes na vida das pessoas. Para cumprir tal objetivo, serão explanados alguns exemplos de como as medidas podem necessitar de números relativos ou referenciais, por exemplo, a medida de uma temperatura.

Aula 09: Módulo e Número Simétrico

Tempo de aula: 90 minutos (2 períodos)

Objetivos:

- Formalizar o conceito de valor absoluto ou módulo.
- Formalizar o conceito de número oposto ou simétrico.

Materiais necessários: quadro expositivo

Desenvolvimento:

A aula será iniciada com o exemplo do saldo de pontos da aula 07. Qual a semelhança entre ter saldo de 12 pontos a favor ou 12 pontos contrários? Apesar de terem pontos diferentes em relação a sua posição dentro de um contexto, ambos possuem uma distância de 12 unidades em relação à origem.

Neste âmbito, Módulo ou Valor Absoluto de um número inteiro compreende sua distância em relação ao referencial da reta numérica (Zero). Será utilizado $| \ a \ |$ para dizer que se está fazendo o módulo do número a. Por exemplo, $+15$ está a 15 unidades da origem, então seu módulo será 15, isto é, $|+15| = 15.$ Por outro lado, -18 está distante 18 unidades da origem, então $|-18| = 18$. Questionaremos os alunos se um número for muito grande ou sem ter a reta construída a disposição, como poderia pensar o módulo desse número? A partir das respostas dos alunos, será feita uma generalização do conceito, a partir de três possibilidades:

- O número ser positivo, do tipo $+a$, com a um número natural. Como esse número irá estar distante a unidades da origem, então $|+a| = a$;
- O número ser o zero. Como ele é a própria origem, a distância até ele mesmo é zero, ou seja, $| \ 0 \ | = 0$;
- O número ser negativo, do tipo $-a$, com a número natural. Mesmo ele estando no sentido contrário aos números naturais, está distante a unidades da origem, então $|-a| = a$.

Assim, de maneira informal e intuitiva, o módulo de um número inteiro é sempre um número natural.

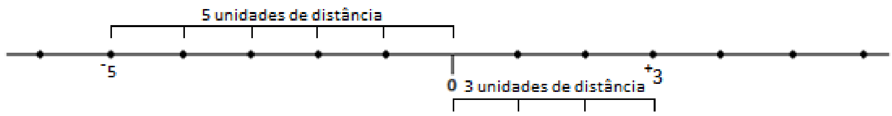


Figura 127- Exemplos de módulos e sua relação com a distância

Pelo exemplo $|-5| = 5$ e $|+3| = 3$

Número Oposto

> Orientação para o Professor: Sugestão é uniformizar o nome para Oposto. Após a formalização do conceito, fazer a relação que eles podem ser chamados de números simétricos.

A partir da definição de módulo, há um resultado interessante: $|+12| = 12$, mas $|-12| = 12$. Como os inteiros negativos são uma expansão em relação aos pontos que representam os números naturais, sempre haverá dois números com o mesmo módulo (um positivo e um negativo). Diz-se que um é o oposto do outro, ou seja, o oposto de $+a$ é $-a$.

Após essa introdução, será disponibilizada uma folha de atividades com quatro exercícios:

Atividade 1: Descreva o módulo de um número positivo ou negativo com suas palavras.

> Orientação para o Professor: Também podemos transformar essa atividade pode ser transformada em uma construção coletiva.

Atividade 2: Quem tem o maior módulo: -17 ou $+15$? Utilizando a reta numérica, represente os dois módulos e justifique sua escolha. Justifique.

Atividade 3: Maurício estava estudando o módulo em um livro muito antigo de seu pai. Em certa questão, deparou-se com uma rasura no livro deixando os caracteres inteligíveis, como na figura a seguir:

$$|{\cdot\cdot}-3| = 8$$

Sem conseguir ter certeza do que calcular, pensou: quais as são possibilidades para o número que está dentro do módulo? Justifique.

Atividade 4: Qual é o oposto do oposto do número $+15$? E se fosse um -15, o que aconteceria?

Essas atividades serão discutidas em grupo no final da aula.

Aula 10: Adição entre Números Inteiros

Tempo de aula: 90 minutos (2 períodos)

Objetivos:

- Definir a adição entre quaisquer dois inteiros.
- Discutir a adição e seus termos a partir da representação pictórica na reta numérica.

Materiais necessários: Quadro expositivo

Metodologia: Colaborativa a partir de problematização

Desenvolvimento:

A aula será iniciada com a retomada da construção para os números naturais. Seja uma adição entre dois números, em que (1° Parcela) + (2° Parcela) = soma, tem-se:

1° Parcela – posição onde se fez o primeiro deslocamento a partir do referencial na reta.

2° Parcela – tamanho do novo deslocamento, a partir da primeira parcela

Soma – posição final relativa ao movimento relativo à primeira parcela. É considerada como resultado da operação.

Vamos propor o seguinte problema: a temperatura nesse momento é de 6ºC. Durante as próximas, houve um decréscimo de nove graus, na mesma escala. Qual a temperatura atual? Para analisar tal situação, propor-se observar a reta numérica que construímos. O primeiro problema é em relação ao significado de "se deslocar nove unidades negativas". Como o sinal de um número determina a posição da marcação em relação ao referencial, pode-se afirmar que "deslocar menos nove unidades" significa nove unidades no sentido **contrário** à construção dos naturais. Segue a figura:

Figura 128- Representação Pictórica de $(+6)-(+9)=-3$. *Fonte: do autor*

Conclui-se, dessa forma, que $(+6)+(-9)=-3$, o que faz sentido frente a situação: no decréscimo dos três primeiros graus, a temperatura chega a zero, e ainda há mais seis unidades para diminuir.

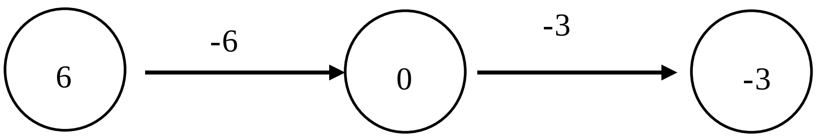


Figura 129- Dupla transformação da operação (+6)+(-9)=(-3)

Então, somente foi necessário um ajuste para estabelecer o sentido para esta dinâmica, definido pela segunda parcela da adição. Para generalizar e formalizar a operação, é preciso ver quais são as possibilidades de adição entre inteiros. Como existem os positivos e os negativos, deve-se pensar em todas as possibilidades (entre positivos, entre negativos, positivo com negativo e negativo com positivo).

Primeiro caso, entre positivos:

No caso em que ambos os números são positivos, por exemplo, $(+7) + (+5)$ ou $(+6) + (+9)$, nota-se que essa possibilidade sempre recai na soma entre naturais. Assim, sendo a, b números naturais, tem-se que $(+a) + (+b) = a + b$, onde, a partir do ponto a, deslocam-se b unidades para a direita, conforme figura a seguir:

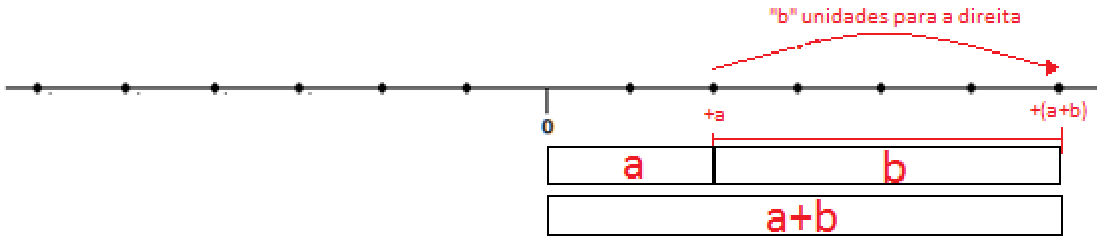


Figura 130- Dupla representação pictórica de $(+a) + (+b) = +(a + b)$. Fonte: do Autor

Segundo caso, entre negativos:

Em $(-3) + (-2)$, como exemplo:

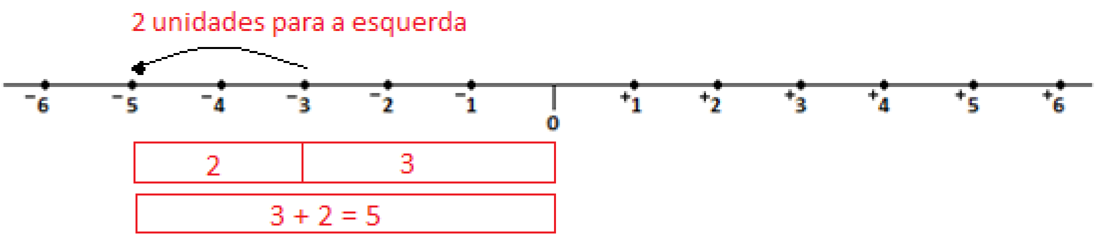


Figura 131- Dupla representação Pictórica de $(-3) + (-2) = -5$. Fonte: do autor

Observa-se que o deslocamento é feito em tal sentido que afasta o valor da soma em relação à origem, ou seja, ele aumenta o valor absoluto da soma. Generalizando, sejam a, b Números Naturais, tem-se que na adição $(-a) + (-b) = -(a + b)$.

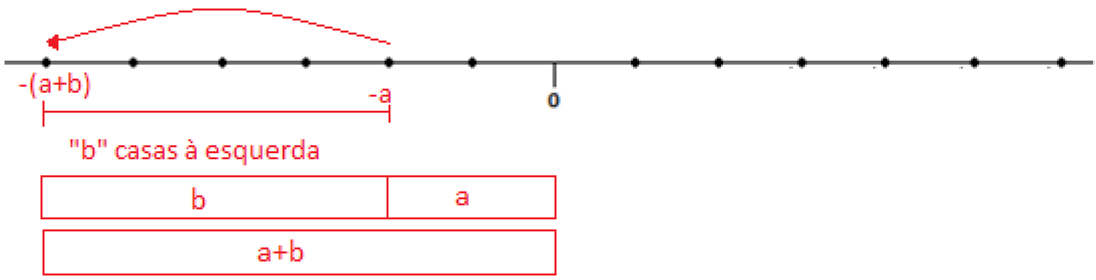


Figura 132- Dupla representação pictórica de $(-a) + (-b) = -(a + b)$. *Fonte: do autor*

Em uma situação contextualizada, há o seguinte: uma pessoa possui uma dívida de R$ 30 no mercado A e R$ 50 em dívida no mercado B. Qual seria o total de dívidas que o sujeito tem em ambos os mercados? É possível de se afirmar que a dívida total é de 80 reais, ou seja, $(-R\$\ 30) + (-R\$\ 50) = -R\$\ 80$.

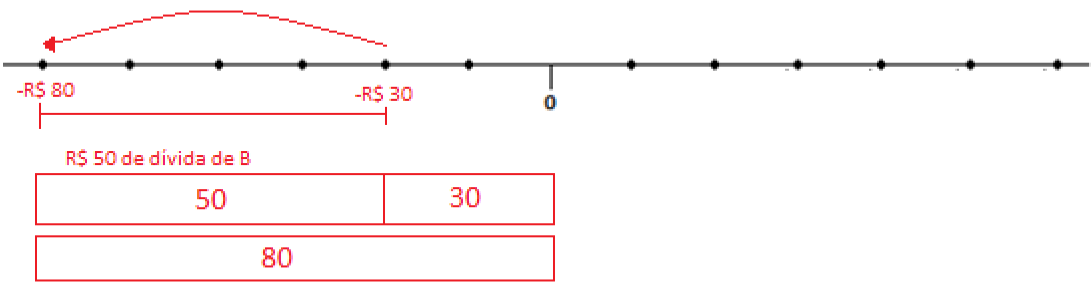


Figura 133- Dupla representação pictórica do exemplo - Fonte: do Autor

<u>Terceiro caso, positivo com negativo:</u>

Em $(+6) + (-4)$ e $(+3) + (-5)$ na reta numérica:

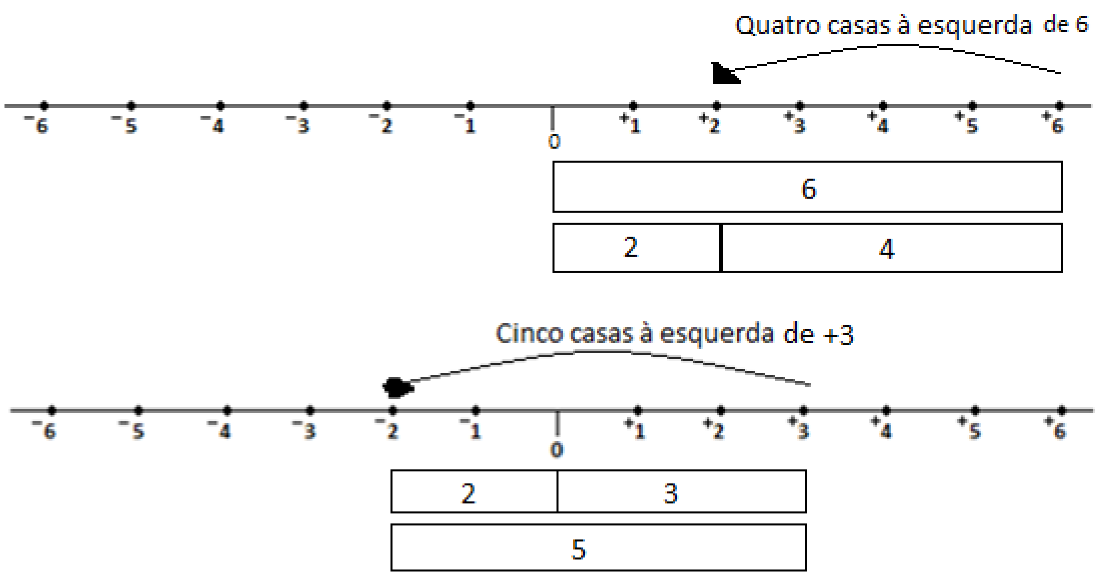


Figura 134- Exemplos de deslocamento referentes ao terceiro caso de adição entre Números Inteiros. Fonte: do autor

Como $|+6| = 6, |-4| = 4, |+3| = 3\ e\ |-5| = 5,$ há dois tipos de resultados diferentes, pois no primeiro o módulo maior está na primeira parcela, e, no segundo exemplo, o maior módulo está na segunda parcela.

Pode-se inferir que existe uma importância de saber, entre as duas parcelas, qual delas possui o maior valor absoluto, pois

Soma = *[sinal da origem do maior módulo]* $[|Maior\ V.abs| - |menor\ V.abs|]$

Generalizando esses casos, sejam a, b Números Naturais na adição entre $(+a) + (-b)$, é preciso dividir em a > b e a < b:

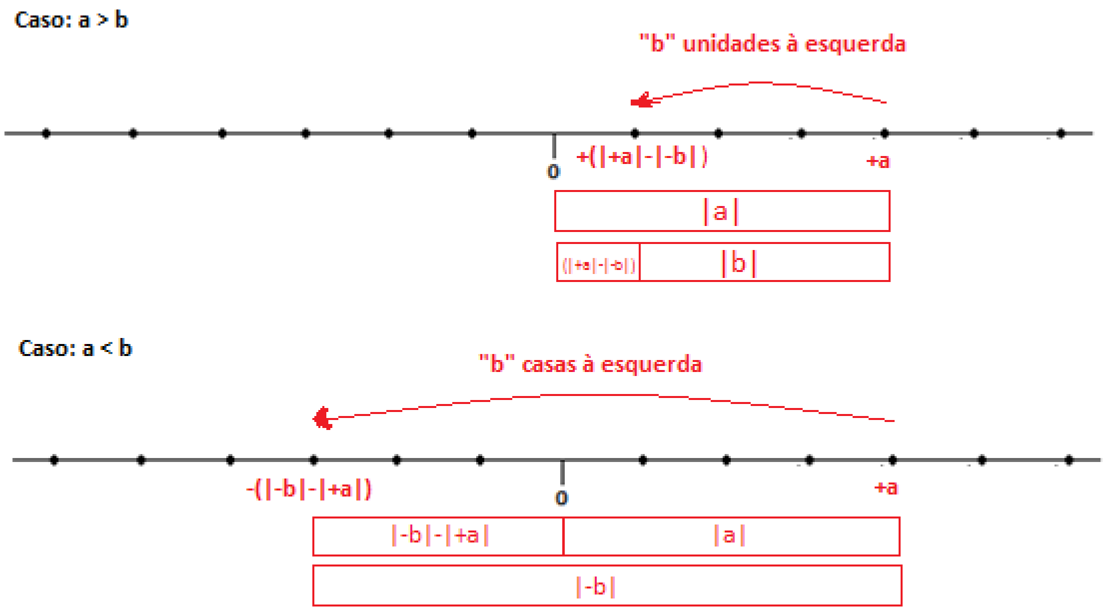


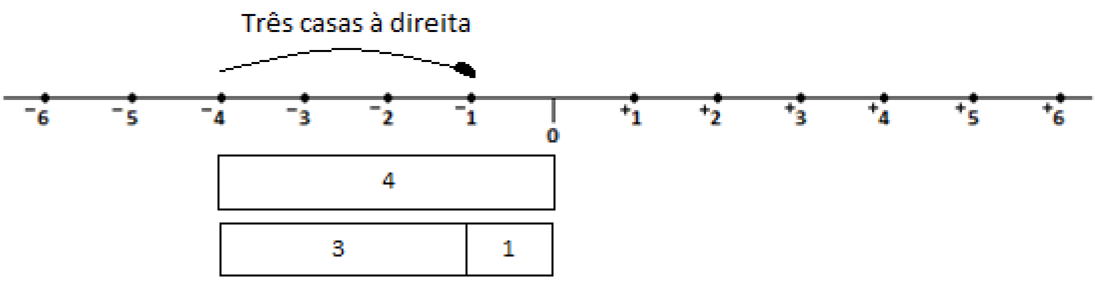
Figura 135- Generalizações para adição do terceiro caso. Fonte: do autor

Constata-se, pois, que existe a importância de saber, entre as duas parcelas, qual delas possui o maior Valor absoluto (V. abs), pois

Soma = *[sinal da origem do maior módulo]* $[|maior\ V.abs| - |menor\ V.abs|]$

<u>Quarto caso: negativo com positivo</u>

Em $(-4) + (+3)$ e $(-6) + (+8)$ na reta numérica:



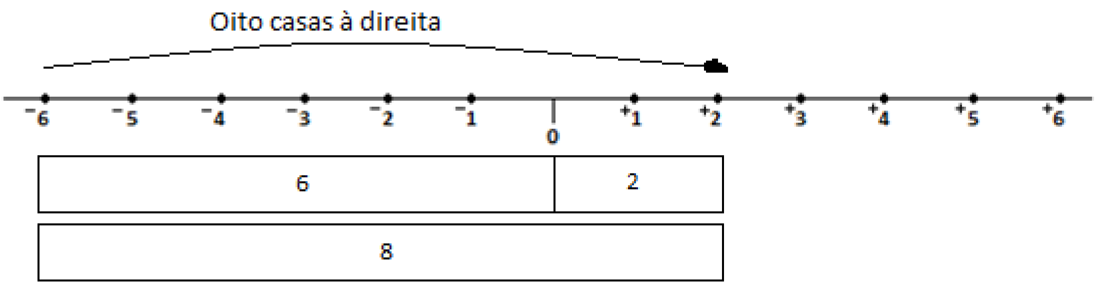


Figura 136 - Exemplos de deslocamento referentes ao quarto caso de adição entre Números Inteiros. Fonte: do autor

Como $|-4| = 4, |+3| = 3, |-6| = 6\ e\ |+8| = 8$, há dois tipos de resultados diferentes, pois no primeiro o módulo maior está na primeira parcela, e, no segundo exemplo, o maior módulo está na segunda parcela. Generalizando esses casos, sejam a, b Números Naturais na adição $(+a) + (-b)$

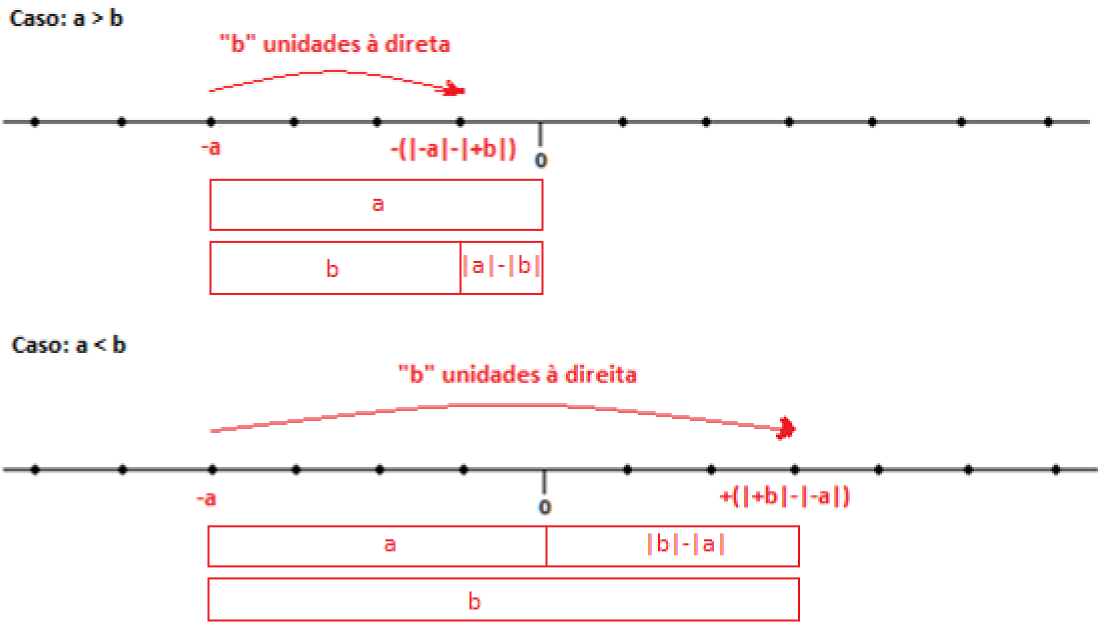


Figura 137- Generalizações para adição do quarto caso da adição. Fonte: do autor

Constata-se, pois, que existe a importância de saber, entre as duas parcelas, qual delas possui o maior valor absoluto, pois

Soma = *[sinal da origem do maior módulo]* $[|maior\ V.abs| - |menor\ V.abs|]$

Como o terceiro e quarto caso levaram à mesma conclusão, de que o valor absoluto dar-se-ia por uma diferença de módulos, podemos inferir que a adição entre Números Inteiros também é comutativa.

<u>Orientação para o Professor:</u> Aqui está o fascínio pela matemática: verifique junto com seus alunos se essas afirmações são válidas, e utilizem sempre, pelo menos: representação algébrica, representação aritmética e representação pictórica

Aula 11: Propriedades da Adição entre Números Inteiros

Tempo de aula: 90 minutos (2 períodos)

Objetivos:

- Explorar as propriedades da adição entre inteiros (comutatividade, associatividade e elemento neutro) a partir da representação na reta numérica.
- Discutir sobre o elemento neutro da adição.
- Explorar as propriedades acima citadas, na tentativa de organizar uma linguagem aritmética mais abrangente.

Materiais necessários: Quadro expositivo

Metodologia: Expositiva

Desenvolvimento:

A aula será iniciada com as propriedades para os números naturais, as quais continuarão valendo na adição entre números inteiros. Para tanto, os alunos serão questionados sobre quais são as possibilidades da adição entre dois inteiros. Espera-se que cheguem à conclusão de que existem três possibilidades (dois positivos, dois negativos e dois com sinais diferentes). Tais questões serão exploradas a partir do conceito sobre adição entre inteiros.

<u>Caso um: entre dois números positivos</u>

Todo o inteiro positivo é um número natural? Espera-se que os educandos concordem com a pergunta, à medida que serão provocados para justificarem suas respostas.

A partir dessa discussão, poder-se-á inferir que realizar a adição entre dois números positivos é equivalente a fazer a adição entre dois números naturais. Será apresentada essa afirmativa primeiramente de maneira mais generalizada para ver a reação dos alunos.

$$Para\ todo\ a, b\ números\ naturais\ tem - se\ que\ (+a) + (+b) = a + b$$

<u>Caso dois: entre dois números negativos</u>

Sejam a e b números naturais. A ideia, nesse momento, é assumir que $-a$ seja negativo e $-b$ seja negativo. Quando se adicionam $(-a) + (-b)$, tem-se uma expansão do que acontece em $a + b$, pois $-a$ terá um deslocamento de "b" unidades à esquerda (ou seja, no mesmo sentido), onde o resultado será $-(a + b)$. No caso de $(-b) + (-a)$, também há a mesma situação, gerando $-(b + a)$. Como é sabido que entre naturais $(a +$

$b) = (b + a)$, tem-se que $-(a + b) = -(b + a)$ e, portanto, a comutatividade funciona nesse caso.

Caso três: entre um negativo e outro positivo

Mantendo uma ideia semelhante aos casos apresentados na aula passada, com a e b naturais temos:

$(-a) + (+b) = (+b) + (-a) = +(b - a)$ se $|b| > |a|$) ou $-(a - b)$ se $|a| > |b|$.

Orientação para o Professor: Utilize as representações pictóricas da aula anterior para justificar cada passa desse raciocínio.

A expressão $(-a) + (+b)$ é estar no ponto $(-a)$ e deslocar-se "b" unidades para a direita. Se o módulo de b for maior que o de a, tem-se que a soma será $+(b - a)$. Caso contrário, $-(a - b)$.

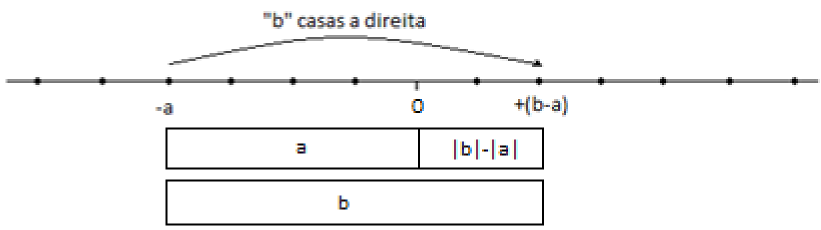


Figura 138- Análise das possibilidades para a comutatividade. Fonte: do autor

A expressão $(+b) + (-a)$ é estar no ponto $(+b)$ e deslocar-se "a" unidades para a esquerda. Se o módulo de b for maior que o de a, tem-se que a soma será $+(b - a)$. Caso contrário, $-(a - b)$.

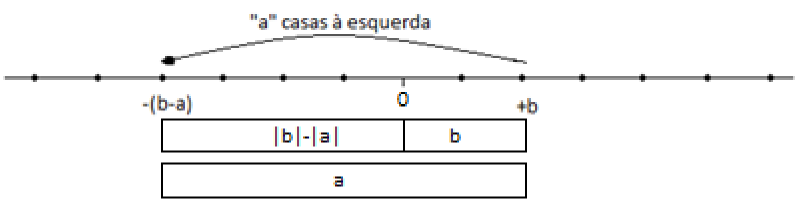


Figura 139- Análise das possibilidades para a comutatividade. Fonte: do autor

Como ambas as possibilidades levam ao mesmo resultado, tem-se:

$$(-a) + (+b) = (+b) + (-a)$$

O caso em que uma das parcelas é o Elemento Neutro

Como o 0 pode significar a origem do sistema ou o deslocamento de nenhuma casa, compreende-se o seguinte: seja a um número inteiro se houver $0 + a = a$, pois será o deslocamento de "a" casas (tanto para a direita como para a esquerda), posicionando em cima do próprio a; ou $a + 0 = a$, pois não haverá deslocamento. Assim, $0 + a = a + 0 = a$, para qualquer a inteiro.

Aula 12: Subtração entre Inteiros

Tempo: 90 minutos

Objetivo:

- Estabelecer a subtração entre dois inteiros quaisquer

Material necessário: quadro expositivo

Metodologia: Expositiva, utilizando texto de apoio

Desenvolvimento:

A aula será iniciada com um texto provocativo para o resultado de uma subtração entre Números Inteiros, em que o subtraendo é negativo.

Texto de apoio: Amplitude térmica (Fonte: do autor)

O termo amplitude térmica é muito utilizado na geografia de clima, na qual se estuda a variação (ou diferença) de temperatura durante um período temporal. É possível calcular a variação diária, semanal, mensal, por estação, anual ou até mesmo histórica.

Todas essas variações são calculadas da mesma maneira: a variação de temperatura é a diferença entre a temperatura máxima e a temperatura mínima ocorrida no período determinado.

$$Amplitude\ térmica = (Temperatura\ máxima) - (Temperatura\ mínima)$$

Há diversos fatores que contribuem para o aumento ou para a diminuição da amplitude: latitude (menor latitude, maior variação), altitude em relação ao nível do mar (maior altitude, maior variação), composição do terreno (deserto tem maior variabilidade que uma floresta) e até mesmo proximidade com massas de água (litorais têm menor amplitude térmica que locais do interior). Atualmente, a urbanização é um fato que contribui para a variação (áreas mais urbanizadas têm maior amplitude térmica do que áreas rurais nas mesmas condições).

No planeta Terra, existem duas cidades (áreas de população fixa) que possuem uma amplitude maior que 100ºC: Oymyakon e Verkhoyansk[17], todas na Rússia. Nelas, a mínima do ano já registrada foi de -69 ºC, e a máxima anual, no mesmo local, foi de 37 ºC.

Na reta numérica, tem-se um comparativo desses dados:

[17] Geoclima Software. Department of Geophysics (DGF), FCFM – Universidad de Chile. Fonte: www.dgf.uchile.cl

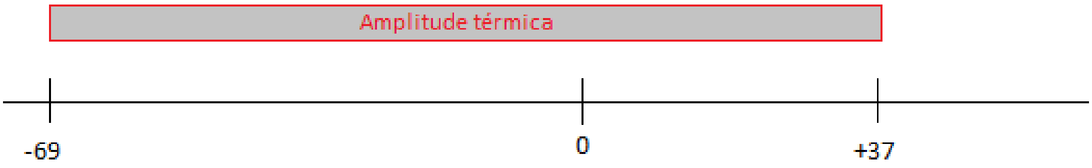


Figura 140- Representação Pictórica na reta utilizando a situação de amplitude térmica. Fonte: do autor

Afinal, qual a diferença de temperatura entre -69°C e +37°C? Sabe-se que a distância da origem até o +37 é 37 unidades e a distância da mesma origem até o -69 é 69 unidades. Como se percebe na figura anterior, os números estão em lados opostos em relação à referência da reta numérica, logo é preciso somar os valores para determinar a amplitude térmica das duas cidades. Por conseguinte, a amplitude térmica é de $69 + 37 = 106$ °C. Assim:

$$\textit{Amplitude térmica} = (\textit{Temperatura máxima}) - (\textit{Temperatura mínima})$$

$$+106 = (+37) - (-69)$$

Como é possível subtrair um número negativo? O que garante, além do resultado visual, que esse cálculo está correto? Retoma-se, pois, ao conceito de subtração em $\mathbb{N}$:

Diz-se que um $a - b = c$ se existe um termo tal que $a = b + c$

Isso quer dizer que a operação de subtração significa "adivinhar o complemento" da segunda parcela de uma soma conhecida. Assim também, a subtração é o procedimento "inverso" de uma adição. Ainda no exemplo acima, (+37) – (–69) é equivalente, segundo conteúdo visto nas aulas anteriores; iniciar uma operação a partir do ponto que representa o -69, deslocando determinado número de unidades, onde o destino final seria +37. Para isso, seriam necessárias 106 unidades para a direita, ou seja, o resultado seria 106 conforme se observa na figura a seguir.

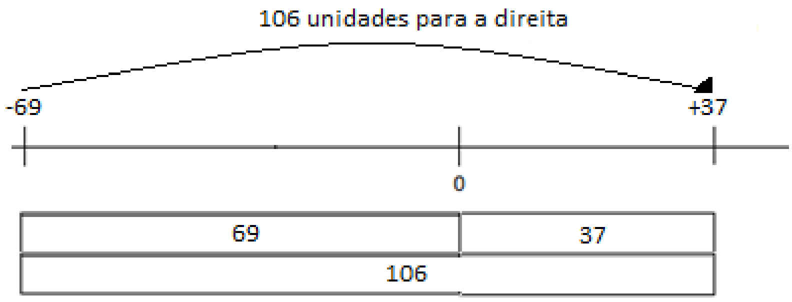


Figura 141 - Dupla Representação pictórica de $(+37) + (-69) = +106$. Fonte: do autor

Utilizando o processo de inverso deslocamento, pelo motivo de que -69 é o oposto de +69, deve-se repensar essa dinâmica em 69 unidades à esquerda, que seriam 69 casas à direita a partir do +37, resultando também em +106.

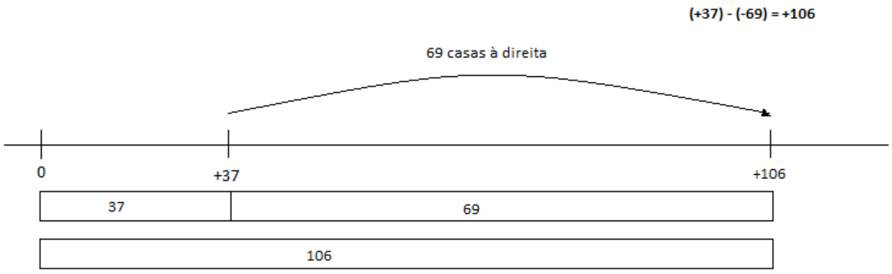


Figura 142 - Dupla Representação pictórica de $(+37)-(-69)=+106$. Fonte: do autor

Como é o processo inverso, associa-se a mudança nos cálculos ao simétrico do subtraendo.

$$(+37) - (-69) = (+37) + (69) = +(|+37| + |+69|) = +(37+69) = +106$$

Será que é possível de se afirmar que subtrair é o mesmo que adicionar o oposto?

Seja a um número natural diferente de zero. A pergunta reside no fato de, caso se subtraia, $\boldsymbol{a}$ é equivalente ao adicionar o simétrico de $\boldsymbol{a}$, ou seja $-\boldsymbol{a}$. Seja x um número inteiro qualquer: $x-a$ é o deslocamento de "a" unidade à esquerda de x. Logo, poderíamos dizer que $x-(-a)$ seria o deslocamento de invertido à esquerda, ou seja, à direita. Assim, $x-(-a)=x+a$, por exemplo, pode-se tomar $x=3$ e $a=7$, tem-se $3-(-7)=3+7=10$.

Como esse novo resultado, fica muito mais fácil definir as operações de subtração nos Números Inteiros, já que todas recaem em uma operação de adição já conhecida. Sejam a e b números naturais:

<u>Entre positivos</u>: $(+a)-(+b)=(+a)+(-b)$ seguem as mesmas regras da adição entre sinais diferentes (manutenção do sinal de maior valor absoluto e diferença dos módulos).

<u>Positivo com negativo:</u> $(+a)-(-b)=(+a)+(+b)=a+b$, ou seja, é equivalente à adição entre naturais.

Exemplo: $(+18)-(-12)=(+18)+(+12)=18+12=30$, isto é, +30

<u>Negativo com positivo:</u>$(-a)-(+b)=(-a)+(-b)$, ou seja, é equivalente à adição entre dois números negativos.

Exemplo:

$$(-18)-(+12)=(-18)+(-12)=-(|-18|+|-12|)=-(18+12)=-30$$

,

Entre negativos: $(-a) - (-b) = (-a) + (+b)$ é equivalente à adição com sinais diferentes (lembrando que a adição nos inteiros é comutativa).

Exemplo:

$$(-18) - (-12) = (-18) + (+12) = -(|-18| - |+12|) = -(18 - 12) = -6$$

Com isso, conclui-se que todos os casos recam em uma operação de adição, cuja segunda parcela é o oposto do minuendo da subtração original.

Anexo B – Modelo do Termo de Consentimento Informado

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, R.G. _________________, responsável pelo(a) aluno(a) ____, da turma ____________, declaro, por meio deste termo, que concordei que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada Argumentações em Z: uma proposta didática voltada para o Ensino Fundamental, desenvolvida pelo pesquisador Prof. Miguel Melendo Beck. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por Luisa Rodriguez Doering, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, por meio do telefone (51) 3308-6225 ou *e-mail* mat-ppgensimat@ufrgs.br.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo que, em linhas gerais, são:

- Revisar, de maneira estruturada e organizada, o conjunto dos números naturais e algumas de suas representações simbológicas;
- Construir, a partir das propriedades e resultados obtidos, o conjunto dos Números Inteiros.

Fui também esclarecido(a) de que o uso das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários, etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de entrevista/questionário escrito, bem como da participação em aula, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos ou filmagens, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários, entre outros, sem identificação. Esses dados ficarão armazenados por pelo menos 5 anos após o término da investigação.

Cabe ressaltar que a participação nesta pesquisa não infringe as normas legais e éticas. No entanto, poderá ocasionar algum constrangimento dos entrevistados ao precisarem responder a algumas perguntas sobre o desenvolvimento de seu trabalho na escola. A fim de amenizar esse desconforto, será mantido o anonimato das entrevistas. Além disso, asseguramos que o estudante poderá deixar de participar da investigação a qualquer momento, caso não se sinta confortável com alguma situação.

Como benefícios, esperamos que este estudo produza informações importantes sobre o ensino de Números Inteiros, a fim de que o conhecimento construído possa trazer contribuições relevantes para a área educacional.

A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega deste documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável no *e-mail* miguel.beck@ufrgs.br.

Qualquer dúvida quanto a procedimentos éticos também pode ser sanada com o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), situado na Av.Paulo Gama, 110 - Sala 317, Prédio Anexo 1 da Reitoria - Campus Centro, Porto Alegre/RS - CEP: 90040-060 e que tem como fone (55 51) 3308-3738 e *e-mail* etica@propesq.ufrgs.br

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar desta pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, _____ de _________________ de _______.

Assinatura do Responsável:
Assinatura do(a) pesquisador(a):
Assinatura do Orientador da pesquisa:

Anexo C – Modelo de Assentimento Informado

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

TERMO DE ASSENTIMENTO

Você está sendo convidado(a) como voluntário(a) a participar da pesquisa **"Argumentações em Z: uma proposta didática voltada para o Ensino Fundamental".** *Neste estudo, pretendemos desenvolver uma sequência de aulas voltadas ao ensino de Números Inteiros.*

O motivo que nos leva a estudar esse assunto é que acreditamos que é possível desenvolver novos métodos de ensinar com o objetivo de que o aluno consiga fazer muito mais do que as contas que lhe são passadas, mas pensar em como os números e suas operações funcionam. Tudo isso através da argumentação matemática.

Para este estudo, adotaremos o(s) seguinte(s) procedimento(s): faremos 12 (doze) aulas de um período onde você participará de atividades individuais e em grupo. Todas as atividades serão fotografadas e identificadas somente com a primeira letra de seu nome. Também gravaremos em áudio e vídeo nossos encontros. Esses vídeos não serão exibidos em nenhum momento, somente serão usados pelo pesquisador para descrever o que aconteceu na sala de aula com mais detalhes.

Para participar deste estudo, o responsável por você deverá autorizar e assinar um termo de consentimento. Você não terá nenhum custo, nem receberá qualquer vantagem financeira. Você será esclarecido(a) em qualquer aspecto que desejar e estará livre para participar ou recusar-se. O responsável por você poderá retirar o consentimento ou interromper a sua participação a qualquer momento. A sua participação é voluntária e a recusa em participar não acarretará qualquer penalidade ou modificação na forma em que é atendido(a) pelo pesquisador que irá tratar a sua identidade com padrões profissionais de sigilo. Você não será identificado em nenhuma publicação. Este estudo apresenta risco mínimo, isto é, o mesmo risco existente em atividades rotineiras como conversar, tomar banho, ler, etc. Apesar disso, você tem assegurado o direito a ressarcimento ou indenização no caso de quaisquer danos eventualmente produzidos pela pesquisa.

Os resultados estarão à sua disposição quando finalizados. Seu nome ou o material que indique sua participação não será liberado sem a permissão do responsável por você. Os dados e instrumentos utilizados na pesquisa ficarão arquivados com o pesquisador responsável por um período de 5 anos e, após esse tempo, serão destruídos. Este termo de consentimento se encontra impresso em duas vias, sendo que uma cópia será arquivada pelo pesquisador responsável, e a outra será fornecida a você.

Eu, ____, portador(a) do documento de Identidade ____________________, fui informado(a) dos objetivos do presente estudo de maneira clara e detalhada e esclareci minhas dúvidas. Sei que a qualquer momento poderei solicitar novas informações, e o meu responsável poderá modificar a decisão de participar se assim o desejar. Tendo o consentimento do meu responsável já assinado, declaro que concordo em participar deste estudo. Recebi uma cópia deste termo assentimento e me foi dada a oportunidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas.

Porto Alegre, ____ de abril de 2018.

____
Assinatura do(a) aluno

____
Assinatura do pesquisador