

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

SOLUÇÃO DA APROXIMAÇÃO S_N DA EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA
RADIATIVA-CONDUTIVA EM UMA PLACA HETEROGÊNEA PELA
COMBINAÇÃO DOS MÉTODOS LTS_N E DECOMPOSIÇÃO

por

Felipe Luy Valério

Tese para obtenção do Título de
Doutor em Engenharia

Porto Alegre, Março de 2019

SOLUÇÃO DA APROXIMAÇÃO S_N DA EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA
RADIATIVA-CONDUTIVA EM UMA PLACA HETEROGÊNEA PELA
COMBINAÇÃO DOS MÉTODOS LS_N E DECOMPOSIÇÃO

por

Felipe Luy Valério
Mestre em Matemática

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Profa. Dra. Cynthia Feijó Segatto

Aprovada por:

Prof. Dr. Roberto David Martinez Garcia DCTA/IEAv

Prof. Dr. Marco Tullio Menna Barreto de Vilhena PROMEC / UFRGS

Prof. Dr. Leandro Farina PPGMAp / UFRGS

Prof. Dr. Fernando Marcelo Pereira
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 01 Março de 2019

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer a Deus por ter me ajudado a superar as dificuldades e a tornar possível a realização deste importante passo para minha carreira.

A minha mãe que batalhou muito para me oferecer uma educação de qualidade.

A minha esposa por suportar tantas crises de estresse, ansiedade e minha ausência em diversos momentos.

Aos meus filhos que através de gestos simples, como um sorriso, me dão força e motivação para enfrentar meus problemas e me superar a cada dia.

A Tia Ana e aos colaboradores da Escola de Educação Infantil Parque do Sabiá. Por sempre cuidarem do meu filho com tanto carinho nas vezes que não pude estar presente.

Aos amigos que fiz no PROMEC: Alexandre, André e Marcos.

A banca do exame de qualificação pelas contribuições e a participação dos membros da banca examinadora da defesa.

Aos professores do Genuc e pelo suporte e auxílio em todos os momentos que precisei.

A minha orientadora Cynthia Feijó Segatto, uma profissional incrível, positiva, paciente e incentivadora. Muito obrigado por seus ensinamentos, conselhos e por sua inestimável confiança.

Por fim, agradeço ao IFRS (Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul) pelo suporte financeiro e por ter me concedido afastamento do meu trabalho para minha qualificação neste programa.

RESUMO

Uma grande variedade de soluções para o problema de transferência radiativa com simetria azimutal em uma placa plana são encontradas na literatura considerando o albedo constante e problemas específicos de albedo variável. Porém, soluções para o problema de transferência radiativa-condutiva não linear encontrados na literatura são restritos a albedo constante. Neste trabalho avançamos relatando uma representação analítica da solução para este problema de transferência radiação-condutiva considerando o albedo como função dependente da variável espacial. Para alcançarmos esse objetivo, utilizamos a ideia do método de decomposição, construímos um sistema recursivo de equações de transferência radiativa-condutiva com albedo constante, considerando a contribuição do coeficiente de albedo dependente da variável espacial e com fonte. O tamanho do sistema recursivo é escolhido de acordo com a precisão estabelecida para os resultados. Vale a pena mencionar que a primeira equação satisfaz as condições de contorno originais enquanto as equações restantes satisfazem as condições de contorno nulas. Devemos enfatizar que a solução de todas as equações do sistema recursivo são conhecidas. Sem perder a generalidade, aplicamos a solução acima mencionada às funções de albedo exponencial, senoidal, polinomial de grau dois e seccionalmente constante. Finalmente, apresentamos simulações numéricas e comparações com os resultados encontrados na literatura.

Palavras-chave: Equação de transferência radiativa-condutiva; Método da decomposição, Albedo dependente do espaço; Transformada de Laplace; Problema não linear.

ABSTRACT

A great variety of solutions is found in literature for the radiative transfer problem without azimuthal dependence in a plane parallel medium either for constant albedo and the specific problems but for nonlinear radiative-conductive transfer problem the literature is restricted to constant albedo. In this work we step forward reporting an analytical representation of the solution for this radiative-conductive transfer problem considering the albedo as a function. To reach this goal following the idea of the Decomposition method, we construct a recursive system of radiative-conductive transfer equations with constant albedo, considering the contribution of spatial dependence of the albedo as source. The size of the recursive system is selected in order to get a prescribed accuracy for the results. It is worthwhile to mention that the first equation satisfies the original boundary conditions meanwhile the remaining ones satisfy null boundary conditions. We must emphasize that the solution of all equations of the recursive system are known. Without losing the generality, we apply the above mentioned solution to exponential, sinusoidal, polynomial of second degree and sectionally constant albedo functions. Finally we report numerical simulations and comparisons against literature results.

Keywords: Radiative-conductive transfer equation; Decomposition method; Space-dependent albedo; Laplace transform; Non-linear problem.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	6
2.1	Solução analítica da equação de transporte radiativo S_N em uma placa plana para um coeficiente de albedo dependente da variável espacial	6
2.2	Uma solução para o problema radiativo-condutivo não-linear S_N em uma placa plana com coeficiente de albedo constante.	9
2.2.1	Polinômios de Adomian	13
3	SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA-CONDUTIVA EM UMA PLACA HETEROGÊNEA PELA COMBINAÇÃO DOS MÉTODOS $LT S_N$ E DECOMPOSIÇÃO	17
3.1	Solução Analítica	18
3.2	Análise de Convergência	21
4	RESULTADOS NUMÉRICOS	24
4.1	Análise e validação do método proposto	24
4.2	Escolha do tamanho do sistema recursivo, \mathcal{M}	30
4.3	Simulações numéricas	31
4.3.1	Problemas isotrópicos	31
4.3.2	Problemas anisotrópicos	46
4.4	Ilustração de algumas intensidades de radiação	63
5	UM APRIMORAMENTO DA SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA RADIATIVO-CONDUTIVO S_N EM UMA PLACA PLANA EM UM MEIO PARTICIPANTE CINZA	65
6	CONCLUSÕES	71
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	71

LISTA DE FIGURAS

Figura 4.1	Gráficos de temperatura e erro absoluto dividindo o intervalo em duas partes.	29
Figura 4.2	Gráficos de temperatura e erro absoluto dividindo o intervalo em quatro partes.	29
Figura 4.3	Gráficos de temperatura e erro absoluto dividindo o intervalo em oito partes.	30
Figura 4.4	Gráfico de temperatura para $\omega(\tau) = 0,9$ se $\tau \leq 0,5$ e $\omega(\tau) = 0,5$ se $\tau > 0,5$	33
Figura 4.5	Gráficos de fluxos radiativo, condutivo e total para $\omega(\tau) = 0,9$ se $\tau \leq 0,5$ e $\omega(\tau) = 0,5$ se $\tau > 0,5$	33
Figura 4.6	Gráfico de temperatura para $\omega(\tau) = \frac{7}{10} - \frac{1}{5} \tanh(40\tau - 20)$	35
Figura 4.7	Gráficos de fluxos radiativo, condutivo e total para $\omega(\tau) = \frac{7}{10} - \frac{1}{5} \tanh(40\tau - 20)$	35
Figura 4.8	Módulo do erro absoluto entre as temperaturas.	36
Figura 4.9	Módulo do erro absoluto entre os fluxos condutivos.	36
Figura 4.10	Módulo do erro absoluto entre os fluxos radiativos.	37
Figura 4.11	Módulo do erro absoluto entre os fluxos totais.	37
Figura 4.12	Resíduo para a intensidade de radiação.	38
Figura 4.13	Expoente de Lyapunov para a intensidade de radiação.	38
Figura 4.14	Gráfico de temperatura para $\omega(\tau) = 0,9 \exp(-\tau)$	39
Figura 4.15	Gráficos de fluxos radiativo, condutivo e total para $\omega(\tau) = 0,9 \exp(-\tau)$	40
Figura 4.16	Resíduo para a intensidade de radiação.	40
Figura 4.17	Expoente de Lyapunov para a intensidade de radiação.	41
Figura 4.18	Gráfico de temperatura para $\omega(\tau) = 0,45 + 0,4\tau + 0,12\tau^2$	42
Figura 4.19	Gráficos de fluxos radiativo, condutivo e total para $\omega(\tau) = 0,45 + 0,4\tau + 0,12\tau^2$	42
Figura 4.20	Resíduo para a intensidade de radiação.	43
Figura 4.21	Expoente de Lyapunov para a intensidade de radiação.	43
Figura 4.22	Gráfico de temperatura para $\omega(\tau) = 0,4 - 0,4 \sin(\pi\tau)$	44

Figura 4.23	Gráficos de fluxos radiativo, condutivo e total para $\omega(\tau) = 0,4 - 0,4 \text{ sen}(\pi\tau)$	45
Figura 4.24	Resíduo para a intensidade de radiação.	45
Figura 4.25	Expoente de Lyapunov para a intensidade de radiação.	46
Figura 4.26	Gráfico de temperatura para $\omega(\tau) = 0,9$ se $\tau \leq 0,5$ e $\omega(\tau) = 0,5$ se $\tau > 0,5$	47
Figura 4.27	Gráficos de fluxos radiativo, condutivo e total para $\omega(\tau) = 0,9$ se $\tau \leq 0,5$ e $\omega(\tau) = 0,5$ se $\tau > 0,5$	48
Figura 4.28	Gráfico de temperatura para $\omega(\tau) = \frac{7}{10} - \frac{1}{5} \tanh(40\tau - 20)$	49
Figura 4.29	Gráficos de fluxos radiativo, condutivo e total para $\omega(\tau) = \frac{7}{10} - \frac{1}{5} \tanh(40\tau - 20)$	50
Figura 4.30	Módulo do erro absoluto entre as temperaturas.	50
Figura 4.31	Módulo do erro absoluto entre os fluxos condutivos.	51
Figura 4.32	Módulo do erro absoluto entre os fluxos radiativos.	51
Figura 4.33	Módulo do erro absoluto entre os fluxos totais.	52
Figura 4.34	Resíduo para a intensidade de radiação.	53
Figura 4.35	Expoente de Lyapunov para a intensidade de radiação.	53
Figura 4.36	Gráfico de temperatura para $\omega(\tau) = 0,9 \exp(-\tau)$	54
Figura 4.37	Gráficos de fluxos radiativo, condutivo e total para $\omega(\tau) = 0,9 \exp(-\tau)$	55
Figura 4.38	Resíduo para a intensidade de radiação.	55
Figura 4.39	Expoente de Lyapunov para a intensidade de radiação.	56
Figura 4.40	Gráfico de temperatura para $\omega(\tau) = 0,45 + 0,4\tau + 0,12\tau^2$	57
Figura 4.41	Gráficos de fluxos radiativo, condutivo e total para $\omega(\tau) = 0,45 + 0,4\tau + 0,12\tau^2$	58
Figura 4.42	Resíduo para a intensidade de radiação.	58
Figura 4.43	Expoente de Lyapunov para a intensidade de radiação.	59
Figura 4.44	Gráfico de temperatura para $\omega(\tau) = 0,4 - 0,4 \text{ sen}(\pi\tau)$	60
Figura 4.45	Gráficos de fluxos radiativo, condutivo e total para $\omega(\tau) = 0,4 - 0,4 \text{ sen}(\pi\tau)$	61
Figura 4.46	Resíduo para a intensidade de radiação.	61
Figura 4.47	Expoente de Lyapunov para a intensidade de radiação.	62

Figura 4.48	Gráficos da intensidade de radiação em $\tau = 0$ do problema 6. . . .	63
Figura 4.49	Gráficos da intensidade de radiação em $\tau = 0,45$ do problema 6. .	63
Figura 4.50	Gráficos da intensidade de radiação em $\tau = 0,55$ do problema 6. .	64
Figura 4.51	Gráficos da intensidade de radiação em $\tau = 1$ do problema 6. . . .	64
Figura 5.1	Contribuição da fonte a cada recursão para o exemplo 1.	69
Figura 5.2	Contribuição da fonte a cada recursão para o exemplo 2.	69

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1	Solução do sistema recursivo para $\tau = 0,5$, $N_c = 0,5$ e funções de albedo polinomial de primeiro grau.	24
Tabela 4.2	Resultados numéricos com $\omega(\tau) = 0,7 \exp\left(\frac{-\tau}{100}\right)$	25
Tabela 4.3	Resultados numéricos com $\omega(\tau) = -0,007\tau + 0,7$	26
Tabela 4.4	Resultados numéricos com $\omega(\tau) = 0,9$ se $\tau \leq 0,5$ e $\omega(\tau) = 0,5$ se $\tau > 0,5$	26
Tabela 4.5	Resultados numéricos com $\omega(\tau) = \frac{7}{10} - \frac{1}{5} \tanh(40\tau - 20)$	27
Tabela 4.6	Resultados numéricos com $\omega(\tau) = \frac{7}{10} - \frac{1}{5} \tanh(640\tau - 320)$	27
Tabela 4.7	Resultados numéricos com $\omega(\tau) = \frac{7}{10} - \frac{1}{5} \tanh(2560\tau - 1280)$	27
Tabela 4.8	Solução do sistema recursivo para a intensidade de radiação em $\tau = 0,5$ considerando $\omega(\tau) = 1 - 1,4\tau - 0,6\tau^2$ e $N_C = 0,1$ com \mathcal{M} variando de 1 a 14.	31
Tabela 4.9	Temperatura e fluxos condutivo, radiativo e total para $D_9 LTS_{100}$ com $\omega(\tau) = 0,9$ se $\tau \leq 0,5$ e $\omega(\tau) = 0,5$ se $\tau > 0,5$	32
Tabela 4.10	Temperatura e fluxos condutivo, radiativo e total para $D_9 LTS_{100}$ com $\omega(\tau) = \frac{7}{10} - \frac{1}{5} \tanh(40\tau - 20)$	34
Tabela 4.11	Temperatura e fluxos condutivo, radiativo e total para $D_{20} LTS_{100}$ com $\omega(\tau) = 0,9 \exp(-\tau)$	39
Tabela 4.12	Temperatura e fluxos condutivo, radiativo e total para $D_{27} LTS_{100}$ com $\omega(\tau) = 0,45 + 0,4\tau + 0,12\tau^2$	41
Tabela 4.13	Temperatura e fluxos condutivo, radiativo e total para $D_8 LTS_{100}$ com $\omega(\tau) = 0,4 - 0,4 \sin(\pi\tau)$	44
Tabela 4.14	Temperatura e fluxos condutivo radiativo e total para $D_{22} LTS_{100}$ com $\omega(\tau) = 0,9$ se $\tau \leq 0,5$ e $\omega(\tau) = 0,5$ se $\tau > 0,5$	47
Tabela 4.15	Temperatura e fluxos condutivo, radiativo e total para $D_{22} LTS_{100}$ com $\omega(\tau) = \frac{7}{10} - \frac{1}{5} \tanh(40\tau - 20)$	49
Tabela 4.16	Temperatura e fluxos condutivo, radiativo e total para $D_{10} LTS_{100}$ com $\omega(\tau) = 0,9 \exp(-\tau)$	54
Tabela 4.17	Temperatura e fluxos condutivo, radiativo e total para $D_{12} LTS_{100}$ com $\omega(\tau) = 0,45 + 0,4\tau + 0,12\tau^2$	57

Tabela 4.18	Temperatura e fluxos condutivo, radiativo e total para $D_{84}LTS_{100}$ com $\omega(\tau) = 0,4 - 0,4 \text{ sen}(\pi\tau)$	60
Tabela 5.1	Resultados numéricos com $K = 3$ utilizando o método proposto.	67
Tabela 5.2	Resultados numéricos de Siewert [Siewert e Thomas, 1991].	67
Tabela 5.3	Resultados numéricos com $K = 3$ utilizando o método proposto.	68
Tabela 5.4	Resultados numéricos de Siewert [Siewert e Thomas, 1991].	68

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

PROMECC	Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
IEAv	Instituto de Estudos Avançados
DCTA	Departamento de Ciência e Tecnologia Aeroespacial
PPGMAp	Programa de Pós Graduação em Matemática Aplicada
IFRS	Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul
GENUC	Grupo de Estudos Nucleares
EDO	Equações diferenciais ordinárias
ETR	Equação de Transferência Radiativa

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Latinos

A	Matriz com a contribuição linear do vetor I
\hat{A}_m	Polinômio de Adomian
D	Matriz com os autovalores da matriz A
$E^{\mathbf{D}(\tau)}$	Matriz diagonal com componentes $e^{d_{ii}\tau}$ se $d_{ii} < 0$ e $e^{d_{ii}(\tau-\tau_0)}$ se $d_{ii} > 0$. Em que d_{ii} são as entradas da matriz \mathbf{D} .
$e^{\mathbf{D}\tau}$	Função matriz exponencial.
I	Vetor intensidade de radiação
I_1	Vetor intensidade de radiação para as direções positivas ($0 < \mu < 1$)
I_2	Vetor intensidade de radiação para as direções negativas ($-1 < \mu < 0$)
I_n	Intensidade de radiação na direção n
I^m	Termo de expansão da intensidade de radiação
k	Condutividade térmica
M	Vetor com entradas $\frac{1}{\mu_n}$
N_c	Parâmetro de radiação-condução
n	Índice de refração
P_l	Polinômio de Legendre
q_r^*	Fluxo radiativo adimensional
Q_c	Fluxo condutivo
Q_r	Fluxo radiativo
Q	Fluxo total
R_m	Matriz para o esquema iterativo de Adomian
S_m	Matriz para o esquema iterativo de Adomian
T_m	Termo de expansão da temperatura adimensional
T_r	Temperatura de referência
Tr	Termo residual
\mathbf{V}^m	Vetor condições de contorno homogêneas
w_k	Peso da quadratura gaussiana
X	Matriz dos autovetores da matriz A
S_N	Abordagem de ângulo sólido discreto para o problema de

	transferência radiativa
LTS_N	Transformada de Laplace no sistema de equações S_N
$D_M LTS_N$	Abordagem LTS_N com Decomposição

Símbolos Gregos

θ	Temperatura adimensional
τ	Profundidade óptica
τ_0	Profundidade óptica máxima
β_l	Coefficiente de expansão dos polinômios de Legendre
β_{ext}	Coefficiente de extinção
ϵ_i	Emissividade
μ_n	Ângulo cosseno discreto
ρ_i^d	Coefficiente de reflexão difusa
ρ_i^s	Coefficiente de reflexão especular
σ	Constante de Stefan-Boltzmann
λ	Expoente de Lyapunov
$\omega(\tau)$	Função espalhamento de albedo
ϖ	Média da função espalhamento de albedo
$\omega_0(\tau)$	Diferença entre $\omega(\tau)$ e ϖ

1 INTRODUÇÃO

A transferência radiativa é o fenômeno físico de transferência de energia sob a forma de radiação eletromagnética. A propagação da radiação através de um meio é atenuada por absorção e espalhamento e é melhorada por emissão e por espalhamento vindo de outras direções [Ozisik, 1973; Siegel e Howell, 2002; Incropera, 2011]. Portanto, os efeitos que governam a transferência radiativa são a absorção, emissão e espalhamento. A equação que descreve essas interações matematicamente é a equação de transferência radiativa (ETR). Esta equação tem aplicações em uma ampla variedade de assuntos, incluindo óptica, astrofísica, ciência atmosférica, e sensoriamento remoto.

O problema de transferência radiativa é modelado através de uma equação integro-diferencial e existe uma solução exata para este tipo de equação determinada por Case, 1960. Porém, devido a dificuldades referentes a este tipo de equação, esta solução foi obtida para casos específicos, com geometria plana e espalhamento isotrópico. No entanto, em virtude da grande quantidade de aplicações da teoria de transporte, se fez necessário o desenvolvimento de técnicas computacionais para a solução da equação de transporte. Existem vários métodos determinísticos para solução desta equação e o utilizado neste trabalho é o método das ordenadas discretas S_N .

O método das ordenadas discretas S_N foi proposto por Chandrasekhar, 1960, para o estudo de atmosferas estelares. Ele consiste na discretização da variável angular Ω , na equação de transferência radiativa criando um sistema de N equações diferenciais ordinárias lineares. Estas equações podem ser resolvidas através de vários métodos e neste trabalho utilizamos o método LTS_N .

O método LTS_N foi proposto por Vilhena e Barrichello, 1991, e desenvolvido por Segatto et al., 2010, 1999, e Gonçalves et al., 2002. O método recebeu esse nome porque originalmente se aplicava a transformada de Laplace no sistema de equações S_N . O método consiste basicamente em quatro etapas, a primeira etapa é a aplicação da transformada de Laplace no sistema de equações S_N , a segunda etapa consiste na inversão da matriz simbólica $(sI - A)$, a terceira etapa é a resolução do sistema linear obtido para a intensidade de radiação e a quarta a aplicação da transformada inversa. Desde sua criação, na década de 90 até hoje, o método LTS_N tem sido desenvolvido através de vários melhoramentos no que diz respeito à forma de inversão da matriz simbólica $(sI - A)$ associada

ao método [Barrichello, 1992; Oliveira, 1993; Brancher, 1998] e contornar problemas de overflow [Gonçalves et al., 2002] até chegar ao método que utilizamos hoje. É importante salientar também que foi demonstrada a convergência do método [Pazos e Vilhena, 1999] garantindo que para N tendendo ao infinito a solução LTS_N aproxima-se da solução exata de Case, 1960.

Combinado com o método LTS_N , foi utilizado o método da decomposição de Adomian, 1988, criado para resolver equações diferenciais ordinárias não lineares sem linearização. A ideia do método consiste em dividir o operador diferencial em uma parte linear e outra não linear. A parte linear é dividida em uma parte inversível e a outra é chamada de resto. A parte inversível possui a derivada de maior ordem. A parte linear e inversível do operador é isolada e a parte não linear é expandida em uma série de polinômios denominados por polinômios de Adomian. Os polinômios são calculados de forma recursiva e são substituídos na equação a ser resolvida. Ao final construímos um sistema linear recursivo que é resolvido analiticamente.

Neste trabalho apresentamos uma representação analítica para a solução da equação de transferência radiativa-condutiva considerando o coeficiente de albedo como função continua ou seccionalmente constante. Por analítica queremos dizer que não foram feitas aproximações ao longo do domínio exceto pelo truncamento do sistema recursivo. Assim, seguindo a ideia do método da decomposição construímos um sistema recursivo de equações de transferência radiativa condutiva considerando o coeficiente de albedo um valor constante médio, com o termo fonte carregando a contribuição da dependência espacial. O tamanho do sistema recursivo é escolhido a fim de obter uma precisão prescrita para os resultados. Vale a pena mencionar que a primeira equação satisfaz as condições de contorno originais do problema enquanto o restante satisfaz as condições de contorno nulas. Devemos enfatizar que a solução para todas as equações do sistema recursivo são conhecidas. De fato, elas foram resolvidas pelo método LTS_N [Segatto et al., 2010, 1999; Gonçalves et al., 2000; Pazos e Vilhena, 1999]. Por esse motivo, também denominamos nosso método de $D_{\mathcal{M}}LTS_N$ porque combina os métodos da decomposição com o LTS_N . Aqui o índice \mathcal{M} indica a quantidade de equações do sistema recursivo e o índice N o número de direções discretas consideradas e a ordem da quadratura gaussiana. Mostramos neste trabalho aplicações desta abordagem para problemas com as seguintes funções de albedo: polinomial, exponencial, senoidal, hiperbólica e seccionalmente constante. Além

disso, para completar a análise matemática, apresentamos uma análise de convergência baseada no maior valor absoluto do termo residual em todo domínio e também reforçamos o argumento da análise de convergência para este problema não linear pelos critérios de Lyapunov. De fato, mostramos que a convergência da solução é exponencial avaliando os expoentes de Lyapunov. Finalmente, é importante lembrar que as questões de existência e unicidade da solução para o problema considerado foram discutidas nos trabalhos de Azevedo et al., 2011a,b e Thompson et al., 2000. Até onde sabemos, este tipo de solução com análise de convergência não é encontrado na literatura. Simulações numéricas com análise de convergência também são relatadas.

Uma grande variedade de soluções são encontradas na literatura para o problema de transferência radiativa em uma placa plana tanto para albedo constante quanto para funções polinomiais e exponenciais. Isto pode ser visto nos trabalhos de Siewert e Thomas, 1991; Siewert, 1995; Segatto et al., 2010; Kovtanyuk et al., 2012; Garcia e Siewert, 1982; El Wakil et al., 1994; Vargas e Vilhena, 1999; Vargas et al., 2012; Cengel e Ozisik, 1984. Entretanto para o problema de transferência radiativa condutiva não linear a literatura é restrita apenas a albedo constante.

Para a equação de transferência radiativa-condutiva com coeficiente de albedo constante, fonte não linear, em uma placa plana, com uma região, em uma dimensão, e meio participante encontramos os seguintes trabalhos organizados em ordem cronológica: Siewert e Thomas, 1991, apresenta uma solução utilizando o método P_N e splines cúbicos hermitianos. Porém para índices de radiação-condução N_c muito pequenos e espessura de placa grandes o método pode divergir. Em seguida, Siewert, 1995, faz um melhoramento do método que resolve a equação de transferência radiativa-condutiva com N_C pequenos e grandes espessuras da placa. Segatto et al., 2010, resolve este problema utilizando a solução $D_{\mathcal{M}}LTS_N$. Kovtanyuk et al., 2012, mostrou dois tipos de solução para a equação de transferência radiativa-condutiva, um utilizando o método de Monte Carlo modificado, que afirma ser interessante para o caso de programação paralela, e o outro utilizando a aproximação por difusão da equação da transferência radiativa, também é feita uma comparação numérica entre os métodos. No caso do método de Monte Carlo é constatado que para $N_c = 0,00001$ o método apresenta certa instabilidade devido insuficiência de número de trajetórias.

Para a equação de transferência radiativa-condutiva com coeficiente de albedo va-

riável, dependente da profundidade ótica e sem fonte, em uma placa plana, com uma região, em uma dimensão, e meio participante, Garcia e Siewert, 1982, apresenta uma solução com o método F_N , foram analisados alguns casos em que a função de albedo $\omega(\tau)$ varia exponencialmente, a solução perde precisão em grandes espessuras. El Wakil et al., 1994, mostra uma solução utilizando o método variacional de Pomramming-Eddington porém, a função fase no caso de espalhamento anisotrópico é linearmente aproximada, outras aproximações também são feitas tornando o método pouco preciso. No trabalho de Vargas et al., 2012, é ilustrada uma solução LTS_N seguindo a ideia do método da decomposição, o problema inicial é transformado em um sistema recursivo, o coeficiente de albedo é dividido em uma parte constante e outra variável. A parte dependente da profundidade ótica é transferida para um termo fonte.

Assim como os trabalhos de Segatto et al., 2010, e Vargas et al., 2012, vale a pena ressaltarmos que, apresentamos uma solução analítica para a equação de transferência radiativa-condutiva com fonte não linear. Além disso consideramos o coeficiente de albedo como função dependente da variável espacial. Portanto, ilustramos neste trabalho, uma solução mais generalista do que foi apresentado até o momento.

Também revisamos alguns trabalhos que trazem outras características físicas para a equação de transferência radiativa-condutiva. Elghazaly, 2006, encontra uma solução para a equação de transferência radiativa-condutiva em uma placa plana com duas regiões para os casos em que o espalhamento é isotrópico e anisotrópico. O método utilizado foi o Galerkin-iterativo. A função fase é considerada linearmente anisotrópica para o caso em que o espalhamento é anisotrópico. Porém, para os resultados numéricos o autor introduz uma temperatura intermediária conhecida entre as duas placas e sendo desta forma considerada como temperatura final em uma região e inicial em outra para que seja possível o acoplamento. Em nosso trabalho fazemos isto supondo uma função de albedo seccionalmente constante sem a necessidade de tomar esta temperatura conhecida na interface. Ma et al., 2013, mostrou uma solução utilizando o método espectral de colocação para a equação de transferência radiativa, com albedo dependente da variável espacial, sem o acoplamento com a equação da energia e, portanto, sem acoplar a condução. Kovtanyuk et al., 2014, demonstra a existência e unicidade para a aproximação P_1 da equação de transferência radiativa-condutiva. Zhang et al., 2014, resolve a equação de transferência radiativa-condutiva de calor em um meio semitransparente para geometrias irregulares, a

equação é bidimensional e o método utilizado foi o de elementos naturais.

O trabalho que expõe uma solução para a mesma equação em estudo neste trabalho foi feito por Abulwafa, 1999. Ele mostra uma solução utilizando o método variacional, porém, faz as mesmas aproximações feitas no trabalho de El Wakil et al., 1994, perdendo precisão. São ilustrados resultados numéricos para o caso em que o espalhamento é isotrópico e anisotrópico, a maioria para o coeficiente de albedo constante. Para albedo variável foram exibidos apenas alguns gráficos para o caso em que o espalhamento é anisotrópico e a função de albedo utilizada foram polinômios de primeiro e de segundo grau.

Dividimos nosso trabalho em cinco capítulos. No Capítulo 2 fazemos a revisão bibliográfica de dois trabalhos que nos ajudaram no desenvolvimento do método aplicado na solução de transferência radiativa-condutiva ilustrada nesta tese. No Capítulo 3 apresentamos solução $D_{\mathcal{M}}LTS_N$ para a equação de transferência radiativa-condutiva com coeficiente de albedo ω dependente da profundidade óptica τ . No Capítulo 4 são exibidos alguns resultados numéricos para a intensidade de radiação, temperatura e fluxos condutivo, radiativo e total para um determinado conjunto de parâmetros físicos. Escolhemos funções de albedo seccionalmente constantes, exponenciais, polinomiais, senoidais e hiperbólicas. Além disso, para cada exemplo é apresentada uma análise de convergência baseada no termo residual e também no expoente de Lyapunov. O Capítulo 5, seguindo a ideia apresentada por Ladeia et al., 2016, 2018, apresentamos uma reformulação do método para que solucionar o problema de instabilidades numéricas quando o parâmetro N_c é pequeno ou o tamanho da placa é grande. O Capítulo 6 apresenta uma breve conclusão deste trabalho junto com algumas perspectivas e sugestões de continuidade para futuras pesquisas.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo fazemos a revisão bibliográfica de dois trabalhos anteriores. O primeiro, na seção 2.1, aborda a solução da equação de transferência radiativa-condutiva sem fonte e com albedo dependente da variável espacial τ desenvolvida por Vargas et al., 2012. O segundo, na seção 2.2, mostra a solução da equação de transferência radiativa-condutiva não linear, com coeficiente de albedo constante, feita por Segatto et al., 2010. Nosso trabalho apresenta a solução para a equação de transferência radiativa-condutiva não linear. Além da existência de um termo fonte não linear, também consideramos o coeficiente de albedo como função dependente da variável espacial.

2.1 Solução analítica da equação de transporte radiativo S_N em uma placa plana para um coeficiente de albedo dependente da variável espacial

Consideramos a equação S_N de transferência radiativa-condutiva em um meio participante cinza, em uma placa plana e coeficiente de albedo ω dependente da variável espacial τ . Conforme podemos ver no trabalho de Vargas et al., 2012.

$$\frac{\partial}{\partial \tau} I_n(\tau) + \frac{1}{\mu_n} I_n(\tau) = \frac{\omega(\tau)}{2\mu_n} \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu_n) \sum_{k=1}^N P_l(\mu_k) I_k(\tau) w_k \quad (2.1)$$

Para $n = 1, \dots, N$ e sujeita as condições de contorno:

$$I_n(0) = f_1(\mu) + \rho_1^s I_{N-n+1}(0) + 2\rho_1^d \sum_{k=1}^{N/2} w_k \mu_k I_{N-k+1}(0) \quad (2.2)$$

$$I_{N-n+1}(\tau_0) = f_2(\mu) + \rho_2^s I_n(\tau_0) + 2\rho_2^d \sum_{k=1}^{N/2} w_k \mu_k I_k(\tau_0). \quad (2.3)$$

Para $n = 1, \dots, N/2$. Em que μ_n são as direções discretas em ordem decrescente, $I_n(\tau) = I(\tau, \mu_n)$ é a intensidade de radiação, $\tau \in [0, \tau_0]$ é a profundidade óptica, $\omega(\tau)$ é a função de espalhamento de albedo, β_l são os coeficientes de expansão da função de fase e P_l são os polinômios de Legendre com L sendo a maior ordem polinomial. Nas condições de contorno ρ_i^s e ρ_i^d com $i = 1, 2$, são as reflexividades especular e difusa respectivamente que estão relacionadas com a emissividade por $1 = \epsilon_i + \rho_i^s + \rho_i^d$ e w_k são os pesos da quadratura gaussiana para a aproximação dos termos da integral usando as direções discretas μ_k , $k = 1, \dots, N$.

É importante observarmos na Equação 2.1 que ω depende da variável espacial τ porém, o termo fonte não é considerado. No Capítulo 3, encontramos a solução da equação de transferência radiativa-condutiva também considerando o coeficiente de albedo como função dependente da variável espacial, além disso, supomos a existência de uma fonte não linear.

Voltando a solução da Equação 2.1, com o objetivo de aplicar o método da decomposição na Equação 2.1, dividimos a função espalhamento de albedo em

$$\omega(\tau) = \varpi + \omega_0(\tau), \quad (2.4)$$

em que ϖ é a média da função de albedo $\omega(\tau)$ e $\omega_0(\tau) = \omega(\tau) - \varpi$. Assim, podemos construir um sistema de equações diferenciais de primeira ordem:

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{I}(\tau) - \mathbf{A} \mathbf{I}(\tau) = \mathbf{S}(\tau), \quad (2.5)$$

em que $\mathbf{I}(\tau) = \text{col}[\mathbf{I}_1(\tau) \ \mathbf{I}_2(\tau)]$ é o vetor intensidade de radiação, com os subvetores $\mathbf{I}_1(\tau)$ e $\mathbf{I}_2(\tau)$ sendo a intensidade de radiação para as direções positiva ($0 < \mu < 1$) e negativa ($-1 < \mu < 0$) respectivamente e de ordem $N/2$. Além disso, $\mathbf{S}(\tau)$ é um vetor de ordem N , em que as n -ésimas entradas são definidas por

$$s_n(\tau) = \frac{\omega_0(\tau)}{2\mu_n} \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu_n) \sum_{k=1}^N P_l(\mu_k) I_k(\tau) w_k. \quad (2.6)$$

As componentes da matriz \mathbf{A} tem a forma:

$$a_{ij} = -\frac{1}{\mu_i} \delta_{ij} + \frac{\varpi}{2\mu_i} \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu_i) P_l(\mu_j) w_j, \quad (2.7)$$

onde δ_{ij} é o símbolo de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e 0 caso contrário).

Finalmente, seguindo a ideia do método da decomposição [Adomian, 1988], escrevemos a intensidade de radiação como:

$$\mathbf{I}(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{I}^m(\tau), \quad (2.8)$$

substituindo esta decomposição na Equação 2.5 resulta em

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{d}{d\tau} \mathbf{I}^m(\tau) - \mathbf{A} \mathbf{I}^m(\tau) \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{S}^m(\tau). \quad (2.9)$$

A solução para a equação acima é indeterminada porque temos uma equação com muitos vetores incógnitas $\mathbf{I}^{m-1}(\tau)$. Portanto, poderíamos resolvê-la de diversas formas. Neste trabalho resolvemos este problema através do seguinte sistema recursivo de equações:

$$\frac{d}{d\tau}\mathbf{I}^0(\tau) - \mathbf{A}\mathbf{I}^0(\tau) = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{d}{d\tau}\mathbf{I}^m(\tau) - \mathbf{A}\mathbf{I}^m(\tau) = \mathbf{S}^{m-1}(\tau), \quad m = 1, 2, \dots, \mathcal{M},$$

que resolvemos pelo método LTS_N [Segatto et al., 1999; Gonçalves et al., 2000; Pazos e Vilhena, 1999] para qualquer arbitrário mas finito $m \leq \mathcal{M}$. Aqui \mathcal{M} é o número que escolhemos para interromper a série para alcançar uma precisão prescrita. A motivação para a escolha deste sistema recursivo de Equações 2.10 vem do fato de que todas as equações possuem representação analítica conhecida para a solução. Além disso, consideramos que a equação inicial ($m = 0$) satisfaz as condições de contorno dadas pelas Equações 2.2, 2.3 enquanto que o restante das equações satisfazem as condições de contorno homogêneas.

A solução LTS_N da equação homogênea do sistema recursivo, Equações 2.10, é dada por:

$$\mathbf{I}^0(\tau) = \mathbf{X}\mathbf{E}^{\mathbf{D}(\tau)}\mathbf{V}^0, \quad (2.11)$$

em que \mathbf{D} e \mathbf{X} são respectivamente as matrizes de autovalores e autovetores resultantes da decomposição espectral da matriz \mathbf{A} . A matriz $\mathbf{E}^{\mathbf{D}(\tau)}$ é definida por:

$$\mathbf{E}^{\mathbf{D}(\tau)} = \begin{cases} e^{d_{ii}\tau} & \text{se } d_{ii} < 0 \\ e^{d_{ii}(\tau-\tau_0)} & \text{se } d_{ii} > 0 \end{cases}, \quad (2.12)$$

em que d_{ii} são as entradas da matriz \mathbf{D} . Além disso, a solução geral dos problemas restantes do sistema recursivo é dada por:

$$\mathbf{I}^m(\tau) = \mathbf{X}\mathbf{E}^{\mathbf{D}(\tau)}\mathbf{V}^m + \mathbf{X}\mathbf{e}^{\mathbf{D}\tau}\mathbf{X}^{-1} * \mathbf{S}^{m-1}(\tau), \quad (2.13)$$

com $\mathbf{e}^{\mathbf{D}\tau}$ sendo a função matriz exponencial, o asterisco denota o operador convolução e os vetores \mathbf{V}^m são determinados através das condições de contorno de cada problema. Devemos notar que as condições de contorno do problema original são absorvidas pelo sistema recursivo na primeira recursão, enquanto os problemas restantes satisfazem as condições de contorno do problema homogêneo.

Apresentamos a solução da equação de transferência radiativa-condutiva considerando o coeficiente de albedo dependente da variável espacial. Notamos na Equação 2.1 a ausência do termo fonte. A solução da equação de transferência radiativa-condutiva não linear com coeficiente de albedo dependente da variável espacial é apresentado no Capítulo 3.

2.2 Uma solução para o problema radiativo-condutivo não-linear S_N em uma placa plana com coeficiente de albedo constante.

A equação de transferência radiativa-condutiva não linear adimensional S_N em uma placa plana e um meio participante cinza é definida por:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} I_n(\tau) + \frac{1}{\mu_n} I_n(\tau) = \frac{\omega}{2\mu_n} \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu_n) \sum_{k=1}^N P_l(\mu_k) I_k(\tau) w_k + \frac{(1-\omega)}{\mu_n} \theta^4(\tau) \quad (2.14)$$

Para $n = 1, \dots, N$ e sujeita as condições de contorno:

$$I_n(0) = \epsilon_1 \theta_1^4 + \rho_1^s I_{N-n+1}(0) + 2\rho_1^d \sum_{k=1}^{N/2} w_k \mu_k I_{N-k+1}(0) \quad (2.15)$$

$$I_{N-n+1}(\tau_0) = \epsilon_2 \theta_2^4 + \rho_2^s I_n(\tau_0) + 2\rho_2^d \sum_{k=1}^{N/2} w_k \mu_k I_k(\tau_0). \quad (2.16)$$

Para $n = 1, \dots, N/2$. Em que μ_n são as direções discretas em ordem decrescente, $I_n(\tau) = I(\tau, \mu_n)$ é a intensidade de radiação, $\tau \in [0, \tau_0]$ é a profundidade óptica, ω é o coeficiente de espalhamento de albedo, β_l são os coeficientes de expansão da função fase, P_l são os polinômios de Legendre com L sendo a maior ordem polinomial e θ é a temperatura adimensional. Nas condições de contorno ρ_i^s e ρ_i^d com $i = 1, 2$, são as reflexividades especular e difusa respectivamente que estão relacionadas com a emissividade por $1 = \epsilon_i + \rho_i^s + \rho_i^d$ e w_k são os pesos da quadratura gaussiana para a aproximação dos termos da integral usando as direções discretas μ_k , $k = 1, \dots, N$.

Vale a pena destacarmos, que a Equação 2.14 possui o coeficiente de albedo, ω , constante. No Capítulo 3, encontramos a solução da equação de transferência radiativa-condutiva, com fonte não linear e considerando o coeficiente de albedo como função dependente da variável espacial τ .

Esta Equação 2.14 é acoplada a equação de energia para a temperatura que é

definida por:

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\theta(\tau) = \frac{1}{4\pi N_c} \frac{d}{d\tau} q_r^*(\tau) \quad (2.17)$$

sujeito as temperaturas no contorno

$$\theta(0) = \theta_1 \quad e \quad \theta(\tau_0) = \theta_2. \quad (2.18)$$

Aqui N_c é chamado de parâmetro de condução-radiação [Ozisik, 1973], definido por:

$$N_c = \frac{k\beta_{ext}}{4\sigma n^2 T_r^3}, \quad (2.19)$$

com k , β_{ext} , σ , n e T_r sendo respectivamente a condutividade térmica, o coeficiente de extinção, a constante de Stefan-Boltzmann, o índice de refração e a temperatura de referência.

O fluxo radiativo adimensional q_r^* está relacionado com a intensidade de radiação através da Equação 2.20.

$$q_r^* = 2\pi \int_{-1}^1 \mathbf{I}(\tau, \mu) \mu d\mu \approx 2\pi \sum_{k=1}^N I_k \mu_k w_k. \quad (2.20)$$

A solução da Equação 2.17 é dada por:

$$\theta(\tau) = \theta_1 + (\theta_2 - \theta_1) \frac{\tau}{\tau_0} - \frac{1}{2N_c} \frac{\tau}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} q_r^*(\tau') d\tau' + \frac{1}{2N_c} \int_0^{\tau} q_r^*(\tau') d\tau'. \quad (2.21)$$

Assim, podemos perceber que a Equação 2.14 conecta a intensidade de radiação à temperatura, a Equação 2.17 liga a temperatura com o fluxo radiativo e a Equação 2.20 relaciona o fluxo radiativo adimensional com a intensidade de radiação. Portanto, podemos transformar nosso problema em uma forma que dependa apenas da intensidade de radiação $I_n(\tau)$.

Com o intuito de aplicar o método da decomposição na Equação 2.14, expandimos o termo não linear da fonte em séries de polinômios de Adomian [Adomian, 1988] da forma:

$$\theta^4(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{A}_m(\tau). \quad (2.22)$$

Explicamos na seção 2.2.1 como são construídos os polinômios de Adomian $\hat{A}_m(\tau)$. Assim, inserindo a série acima, Equação 2.22, na Equação 2.14 produzimos uma matriz de equações diferenciais de primeira ordem:

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{I}(\tau) - \mathbf{A} \mathbf{I}(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{A}_m(\tau) \mathbf{M}, \quad (2.23)$$

em que, $\mathbf{I}(\tau) = \text{col}[\mathbf{I}_1(\tau) \ \mathbf{I}_2(\tau)]$ é o vetor intensidade de radiação, com os subvetores $\mathbf{I}_1(\tau)$ e $\mathbf{I}_2(\tau)$ sendo a intensidade de radiação para as direções positiva ($0 < \mu < 1$) e negativa ($-1 < \mu < 0$) respectivamente e de ordem $N/2$. Além disso, \mathbf{M} é um vetor de ordem N , em que as n -ésimas entradas são definidas

$$\mathbf{M} = (1 - \omega) \text{col} \left[\frac{1}{\mu_1} \dots \frac{1}{\mu_N} \right]. \quad (2.24)$$

As componentes da matriz \mathbf{A} tem a forma:

$$a_{ij} = -\frac{1}{\mu_i} \delta_{ij} + \frac{\omega}{2\mu_i} \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu_i) P_l(\mu_j) w_k, \quad (2.25)$$

onde δ_{ij} é o símbolo de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e 0 caso contrário). A intensidade de radiação pode ser formalmente escrita em como:

$$\mathbf{I}(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{I}^m(\tau), \quad (2.26)$$

substituindo esta decomposição na Equação 2.23 resulta em

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{d}{d\tau} \mathbf{I}^m(\tau) - \mathbf{A} \mathbf{I}^m(\tau) \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{A}_m(\tau) \mathbf{M}. \quad (2.27)$$

A solução para a equação acima é indeterminada porque temos uma equação com muitos vetores incógnitas $\mathbf{I}^{m-1}(\tau)$. Portanto, existem várias possibilidades para resolvermos esta equação. Neste trabalho resolvemos este problema através do seguinte sistema recursivo de equações:

$$\frac{d}{d\tau}\mathbf{I}^0(\tau) - \mathbf{A}\mathbf{I}^0(\tau) = 0 \quad (2.28)$$

$$\frac{d}{d\tau}\mathbf{I}^m(\tau) - \mathbf{A}\mathbf{I}^m(\tau) = \hat{A}_{m-1}(\tau)\mathbf{M}, \quad m = 1, 2, \dots, \mathcal{M},$$

que resolvemos pelo método LTS_N [Segatto et al., 1999; Gonçalves et al., 2000; Pazos e Vilhena, 1999] para qualquer arbitrário mas finito $m \leq \mathcal{M}$. Aqui \mathcal{M} é o número que escolhemos para interromper a série para alcançar uma precisão prescrita. A motivação para a escolha deste sistema recursivo de Equações 2.28 vem do fato de que todas as equações possuem representação analítica conhecida para a solução. Além disso, consideramos que a equação inicial ($m = 0$) satisfaz as condições de contorno dadas pelas Equações 2.15, 2.16 enquanto que o restante das equações satisfazem as condições de contorno homogêneas.

A solução LTS_N da equação homogênea do sistema recursivo, Equações 2.28, é dada por:

$$\mathbf{I}^0(\tau) = \mathbf{X}\mathbf{E}^{\mathbf{D}(\tau)}\mathbf{V}^0, \quad (2.29)$$

em que \mathbf{D} e \mathbf{X} são respectivamente as matrizes de autovalores e autovetores resultantes da decomposição espectral da matriz \mathbf{A} . A matriz $\mathbf{E}^{\mathbf{D}(\tau)}$ é definida por:

$$\mathbf{E}^{\mathbf{D}(\tau)} = \begin{cases} e^{d_{ii}\tau} & \text{se } d_{ii} < 0 \\ e^{d_{ii}(\tau-\tau_0)} & \text{se } d_{ii} > 0 \end{cases}, \quad (2.30)$$

em que d_{ii} são as entradas da matriz \mathbf{D} . Além disso, a solução geral dos problemas restantes do sistema recursivo é dada por:

$$\mathbf{I}^m(\tau) = \mathbf{X}\mathbf{E}^{\mathbf{D}(\tau)}\mathbf{V}^m + \mathbf{X}\mathbf{e}^{\mathbf{D}\tau}\mathbf{X}^{-1} * \hat{A}_{m-1}(\tau)\mathbf{M}, \quad (2.31)$$

com $\mathbf{e}^{\mathbf{D}\tau}$ sendo a função matriz exponencial, o asterisco denota o operador convolução e os vetores \mathbf{V}^m são determinados através das condições de contorno de cada problema. Devemos notar que as condições de contorno do problema original são absorvidas pelo sistema recursivo na primeira recursão, enquanto os problemas restantes satisfazem as condições de contorno do problema homogêneo.

2.2.1 Polinômios de Adomian

Nesta seção, apresentamos parte do trabalho de Adomian, 1988 para resolver equações diferenciais ordinárias não lineares de funções escalares chamado de método da decomposição. A vantagem deste método é que ele fornece uma aproximação analítica para uma classe bastante ampla de equações sem fazer linearizações, aproximações ou métodos de discretização que podem resultar em cálculos numéricos massivos. Apesar do método ter sido desenvolvido para funções escalares, nosso interesse nesse estudo é apresentar a origem dos polinômios de Adomian. Estes polinômios são utilizados para simplificar o cálculo numérico do termo não linear θ^4 que aparece na Equação 2.14.

No método da decomposição, para uma equação diferencial ordinária (EDO) da forma $Fu = g$ em que F é um operador não linear de uma (EDO), o operador F é decomposto em uma parte linear e outra não linear, a fim de simplificar os cálculos, o operador linear é decomposto em $L + R$ em que L representa um operador facilmente inversível e R o restante do operador linear. Assim para um problema da forma

$$Fu = g \quad (2.32)$$

podemos decompor em

$$Lu + Ru + Nu = g, \quad (2.33)$$

em que Nu representa o termo não linear. Como L é inversível temos

$$u = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu. \quad (2.34)$$

O termo não linear Nu é equacionado em $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ em que A_n são denominados os polinômios de Adomian. Em seguida decompos $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ e assim

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 - L^{-1}R \sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n. \quad (2.35)$$

Desta forma, por comparação teremos

$$\begin{aligned} u_1 &= -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0, \\ u_2 &= -L^{-1}Ru_1 - L^{-1}A_1, \\ &\vdots \\ u_{n+1} &= -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Esses polinômios são gerados para cada não linearidade de tal forma que A_0 dependa apenas de u_0 , A_1 dependa apenas de u_0 e u_1 , A_2 dependa apenas de u_0 , u_1 , u_2 e assim consecutivamente. Todos os u 's são possíveis de serem calculados e, $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$. Se a série converge, o n -ésimo termo $\phi_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i$ será a solução aproximada desde que $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n = \sum_{i=0}^{\infty} u_i = u$ por definição.

Adomian apresenta no artigo [Adomian, 1988] duas formas de calcular os polinômios de Adomian e qualquer uma das formas pode ser utilizada. Neste trabalho utilizamos a formulação $f(u) = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{A}_m$.

$$\begin{aligned}
\hat{A}_0 &= f(u_0), \\
\hat{A}_1 &= u_1 f'(u_0) + \frac{u_1^2}{2!} f''(u_0) + \frac{u_1^3}{3!} f'''(u_0) + \dots \\
\hat{A}_2 &= u_2 f'(u_0) + \frac{u_2^2}{2!} f''(u_0) + \frac{u_2^3}{3!} f'''(u_0) + u_1 u_2 f''(u_0) + \frac{1}{2} (u_1^2 u_2 + u_2^2 u_1) f'''(u_0) + \dots \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Utilizamos os polinômios para decompor o termo não linear θ^4 que aparece na Equação 2.14, pois a EDO que aparece na Equação 2.17 é facilmente resolvida e sua solução é dada pela Equação 2.21. Para um fácil entendimento de como chegamos à fórmula que utilizamos neste trabalho primeiro faremos a decomposição de $\sum_{n=0}^N \hat{A}_n$ para $N = 2$ e em seguida generalizaremos. Assim para $f(\theta) = \theta^4$ e $\theta_i = T_i$ teremos:

$$\begin{aligned}
\hat{A}_0 &= T_0^4, \\
\hat{A}_1 &= T_1 4T_0^3 + \frac{T_1^2}{2!} 12T_0^2 + \frac{T_1^3}{3!} 24T_0 + 24 \frac{T_1^4}{4!}, \\
\hat{A}_2 &= T_2 4T_0^3 + \frac{T_2^2}{2!} 12T_0^2 + \frac{T_2^3}{3!} 24T_0 + T_1 T_2 12T_0^2 + \frac{1}{2} (T_1^2 T_2 + T_2^2 T_1) 24T_0 + \\
&\quad + 24 \frac{T_2^4}{4!} + \frac{1}{6} (T_1^3 T_2 + T_1 T_2^3) 24 + \frac{1}{4} T_1^2 T_2^2 24.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Então

$$\sum_{n=0}^2 \hat{A}_n = T_0^4 + 4T_0^3(T_1 + T_2) + \frac{12T_0^2}{2!}(T_1 + T_2)^2 + \frac{24T_0}{3!}(T_1 + T_2)^3 + \frac{24}{4!}(T_1 + T_2)^4. \tag{2.39}$$

Generalizando temos

$$\sum_{m=0}^{\mathcal{M}} \widehat{A}_m = T_0^4 + 4T_0^3 \sum_{m=1}^{\mathcal{M}} T_m + \frac{12T_0^2}{2!} \left(\sum_{m=1}^{\mathcal{M}} T_m \right)^2 + \frac{24T_0}{3!} \left(\sum_{m=1}^{\mathcal{M}} T_m \right)^3 + \frac{24}{4!} \left(\sum_{m=1}^{\mathcal{M}} T_m \right)^4, \quad (2.40)$$

em que

$$T_0(\tau) = \theta_1 + (\theta_2 - \theta_1) \frac{\tau}{\tau_0} - \frac{1}{2N_c} \frac{\tau}{\tau_0} \sum_{k=1}^N \left(\int_0^{\tau_0} I_k^0(\tau') d\tau' \right) \mu_k w_k + \frac{1}{2N_c} \sum_{k=1}^N \left(\int_0^{\tau} I_k^0(\tau') d\tau' \right) \mu_k w_k \quad (2.41)$$

$$T_i(\tau) = -\frac{1}{2N_c} \frac{\tau}{\tau_0} \sum_{k=1}^N \left(\int_0^{\tau_0} I_k^i(\tau') d\tau' \right) \mu_k w_k + \frac{1}{2N_c} \sum_{k=1}^N \left(\int_0^{\tau} I_k^i(\tau') d\tau' \right) \mu_k w_k \quad \text{se } i \neq 0. \quad (2.42)$$

2.2.1.1 Notação abreviada do esquema recursivo para os polinômios de Adomian

Embora a fórmula apresentada na Equação 2.40 pareça simples ainda precisamos de uma nova formulação desses polinômios para que seja possível a programação desse esquema recursivo. Se prestarmos atenção nas Equações 2.38 que é o desenvolvimento dos somatórios que aparecem na Equação 2.40 para $\mathcal{M} = 0$, $\mathcal{M} = 1$ e $\mathcal{M} = 2 \dots$ respectivamente percebemos que podemos fatorar $\widehat{A}_0, \widehat{A}_1, \widehat{A}_2, \dots$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \widehat{A}_0 &= T_0 T_0 T_0^2, \\ \widehat{A}_1 &= T_1 (2T_0 + T_1) (2T_0^2 + 2T_0 T_1 + T_1^2), \\ \widehat{A}_2 &= T_2 (2T_0 + 2T_1 + T_2) (2T_0^2 + 4T_0 T_1 + 2T_1^2 + 2T_0 T_2 + 2T_1 T_2 + T_2^2). \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.43)$$

Esta fatoração pode ser feita indefinidamente para $\widehat{A}_3, \widehat{A}_4, \dots, \widehat{A}_{\mathcal{M}}$ [Segatto et al., 2010]. Dessa forma, utilizamos a seguinte notação abreviada para os polinômios de Adomian:

$$\widehat{A}_m = T_m S_m R_m, \quad (2.44)$$

em que S_m e R_m são determinados pelas fórmulas

$$\begin{aligned}
S_m &= S_{m-1} + T_m + T_{m-1}, \\
R_m &= R_{m-1} + S_{m-1}T_{m-1} + S_mT_m.
\end{aligned}
\tag{2.45}$$

De acordo com o esquema recursivo apresentado nas Equações 2.44, temos que $S_0 = T_0$ e $R_0 = T_0^2$ em que as temperaturas são dadas pelas Equações 2.41 e 2.42.

Apresentamos a solução da equação de transferência radiativa-condutiva com fonte não linear e coeficiente de albedo constante. No próximo capítulo apresentamos a solução da equação de transferência radiativa-condutiva não linear com coeficiente de albedo dependente da variável espacial.

3 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA-CONDUTIVA EM UMA PLACA HETEROGÊNEA PELA COMBINAÇÃO DOS MÉTODOS LTS_N E DECOMPOSIÇÃO

No Capítulo 2 fizemos uma revisão bibliográfica de dois trabalhos anteriores que contribuíram para elaboração da solução que mostramos aqui. Nestes dois trabalhos foram resolvidos a equação de transferência radiativa-condutiva. No primeiro foi considerado ω dependente da variável espacial porém, sem fonte. No segundo foi tomado o problema com fonte não linear, no entanto, ω é constante. Neste capítulo apresentamos uma solução $D_{\mathcal{M}}LTS_N$ para o problema radiativo-condutivo em um meio participante, em uma placa cinza com coeficiente de albedo ω dependente da profundidade óptica τ e podemos observar na Equação 3.1 a existência de uma fonte não linear. Portanto, considere o seguinte problema S_N .

$$\frac{\partial}{\partial \tau} I_n(\tau) + \frac{1}{\mu_n} I_n(\tau) - \frac{\omega(\tau)}{2\mu_n} \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu_n) \sum_{k=1}^N P_l(\mu_k) I_k(\tau) w_k = \frac{(1 - \omega(\tau))}{\mu_n} \theta^4(\tau) \quad (3.1)$$

Para $n = 1, \dots, N$ e sujeito as condições de contorno:

$$I_n(0) = \epsilon_1 \theta_1^4 + \rho_1^s I_{N-n+1}(0) + 2\rho_1^d \sum_{k=1}^{N/2} w_k \mu_k I_{N-k+1}(0) \quad (3.2)$$

$$I_{N-n+1}(\tau_0) = \epsilon_2 \theta_2^4 + \rho_2^s I_n(\tau_0) + 2\rho_2^d \sum_{k=1}^{N/2} w_k \mu_k I_k(\tau_0). \quad (3.3)$$

Para $n = 1, \dots, N/2$. Em que μ_n , são as direções discretas em ordem decrescente, $I_n(\tau) = I(\tau, \mu_n)$ é a intensidade de radiação, $\tau \in [0, \tau_0]$ é a profundidade óptica, $\omega(\tau)$ é a função de espalhamento de albedo, β_l são os coeficientes de expansão da função fase, P_l são os polinômios de Legendre com L sendo a maior ordem polinomial e θ é a temperatura adimensional. Nas condições de contorno ρ_i^s e ρ_i^d com $i = 1, 2$, são as reflexividades especular e difusa respectivamente que estão relacionadas com a emissividade por $1 = \epsilon_i + \rho_i^s + \rho_i^d$ e w_k são os pesos da quadratura gaussiana para a aproximação dos termos da integral usando as direções discretas μ_k , $k = 1, \dots, N$.

3.1 Solução Analítica

Como vimos no Capítulo 2, a Equação 3.1 relaciona a intensidade de radiação à temperatura, a equação da energia para temperatura, Equação 2.17, conecta a temperatura com o fluxo radiativo e a Equação 2.20 relaciona o fluxo radiativo adimensional com a intensidade de radiação. Desta forma também transformamos este problema em uma forma que dependa apenas da intensidade de radiação $I_n(\tau)$.

Com o intuito de aplicar o método da decomposição para o problema, Equação 3.1, dividimos a função de espalhamento de albedo em $\omega(\tau) = \varpi + \omega_0(\tau)$, em que ϖ é a média da função de albedo [Vargas et al., 2012] e expandimos o termo não linear da fonte em séries de polinômios de Adomian [Adomian, 1988] da forma:

$$\theta^4(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{A}_m(\tau). \quad (3.4)$$

Explicamos na seção 2.2.1 como são construídos os polinômios de Adomian $\hat{A}_m(\tau)$. Assim, inserindo a série acima, Equação 3.4, na Equação 3.1 produzimos uma matriz de equações diferenciais de primeira ordem:

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{I}(\tau) - \mathbf{A} \mathbf{I}(\tau) = \mathbf{S}(\tau) + (1 - \omega(\tau)) \sum_{m=0}^{\infty} \hat{A}_m(\tau) \mathbf{M}. \quad (3.5)$$

Em que, $\mathbf{I}(\tau) = \text{col}[\mathbf{I}_1(\tau) \ \mathbf{I}_2(\tau)]$ é o vetor intensidade de radiação nas N direções discretas, com $\mathbf{I}_1(\tau)$ e $\mathbf{I}_2(\tau)$ sendo vetores de ordem $N/2$ representando a intensidade de radiação para as direções positiva ($0 < \mu < 1$) e negativa ($-1 < \mu < 0$) respectivamente. Além disso, \mathbf{M} e $\mathbf{S}(\tau)$ são vetores de ordem N , em que as n -ésimas entradas são definidas por $m_n = \frac{1}{\mu_n}$ e

$$s_n(\tau) = \frac{\omega_0(\tau)}{2\mu_n} \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu_n) \sum_{k=1}^N P_l(\mu_k) I_k(\tau) w_k. \quad (3.6)$$

Finalmente, as componentes da matriz \mathbf{A} tem a forma:

$$a_{ij} = -\frac{1}{\mu_i} \delta_{ij} + \frac{\varpi}{2\mu_i} \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu_i) P_l(\mu_j) w_j, \quad (3.7)$$

onde δ_{ij} é o símbolo de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e 0 caso contrário).

Fazemos um parênteses aqui para observarmos as diferenças entre as matrizes de equações diferenciais de primeira ordem, Equações 2.5 e 2.23, apresentados no Capítulo

2, e a matriz, Equação 3.5, ilustrada acima. Se compararmos as Equações 3.1 e 2.1 vimos que nosso problema possui termo fonte e o outro não. A existência do termo fonte acrescenta uma parcela a mais na matriz de equações lineares de primeira ordem, Equação 3.5. Também vemos diferenças entre as Equações 2.1 e 3.1 nas condições de contorno, Equações 3.2, 3.3 e Equações 2.2 e 2.3. É importante destacar esta diferença porque as condições de contorno do problema original são absorvidas na primeira recursão. Se compararmos nosso problema com a Equação 2.14, a consideração do coeficiente de albedo como função da variável espacial acrescenta mais termos no lado direito da igualdade na matriz de equações diferenciais de primeira ordem, Equação 3.5, uma vez que, assumimos um valor médio para a função de espalhamento de albedo e a influência da heterogeneidade é somada ao termo fonte.

Continuando o desenvolvimento da solução, temos que a intensidade de radiação pode ser formalmente escrita em como:

$$\mathbf{I}(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{I}^m(\tau), \quad (3.8)$$

substituindo esta decomposição na Equação 3.5 resulta em

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{d}{d\tau} \mathbf{I}^m(\tau) - \mathbf{A} \mathbf{I}^m(\tau) \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\mathbf{S}^m(\tau) + (1 - \omega(\tau)) \hat{A}_m(\tau) \mathbf{M} \right). \quad (3.9)$$

A solução para a equação acima é indeterminada porque temos uma equação com muitos vetores incógnitas $\mathbf{I}^{m-1}(\tau)$. Portanto a forma de resolve-la não é única. Neste trabalho resolvemos este problema através do sistema recursivo de Equações 3.10.

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{I}^0(\tau) - \mathbf{A} \mathbf{I}^0(\tau) = 0, \quad (3.10)$$

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{I}^m(\tau) - \mathbf{A} \mathbf{I}^m(\tau) = \mathbf{S}^{m-1}(\tau) + (1 - \omega(\tau)) \hat{A}_{m-1}(\tau) \mathbf{M}, \quad m = 1, 2, \dots, \mathcal{M}.$$

Quando confrontamos o sistema recursivo acima, Equações 3.10 com o sistema recursivo que aparece na seção 2.1, Equações 2.10, percebemos a presença do termo $(1 - \omega(\tau)) \hat{A}_{m-1}(\tau) \mathbf{M}$. Isto é consequência da consideração da fonte na Equação 3.1. Quando conferimos o sistema recursivo acima, Equações 3.10, com o ilustrado na seção 2.2, Equações 2.28, notamos a presença do termo $\mathbf{S}^{m-1}(\tau)$.

Resolvemos o sistema recursivo acima, Equações 3.10, pelo método LTS_N [Segatto

et al., 1999; Gonçalves et al., 2000; Pazos e Vilhena, 1999] para qualquer arbitrário mas finito $m \leq \mathcal{M}$. Aqui \mathcal{M} é o número que escolhemos para interromper a série após alcançarmos a precisão prescrita desejada. A motivação para a escolha deste sistema recursivo vem do fato de que todas as equações do sistema recursivo possuem representação analítica conhecida para a solução. Além disso, consideramos que a equação inicial ($m = 0$) satisfaz as condições de contorno dadas pelas Equações 3.2, 3.3 enquanto que o restante das equações satisfazem as condições de contorno homogêneas.

A solução LTS_N da equação homogênea que aparece no sistema recursivo de Equações 3.10, é dada por:

$$\mathbf{I}^0(\tau) = \mathbf{X}\mathbf{E}^{\mathbf{D}(\tau)}\mathbf{V}^0, \quad (3.11)$$

em que \mathbf{D} e \mathbf{X} são respectivamente as matrizes de autovalores e auto vetores resultantes da decomposição espectral da matriz \mathbf{A} . A matriz $\mathbf{E}^{\mathbf{D}(\tau)}$ é definida por:

$$\mathbf{E}^{\mathbf{D}(\tau)} = \begin{cases} e^{d_{ii}\tau} & \text{se } d_{ii} < 0 \\ e^{d_{ii}(\tau-\tau_0)} & \text{se } d_{ii} > 0 \end{cases}, \quad (3.12)$$

em que d_{ii} são as entradas da matriz \mathbf{D} . Além disso, a solução geral dos problemas restantes do sistema recursivo é dada por:

$$\mathbf{I}^m(\tau) = \mathbf{X}\mathbf{E}^{\mathbf{D}(\tau)}\mathbf{V}^m + \mathbf{X}\mathbf{e}^{\mathbf{D}\tau}\mathbf{X}^{-1} * \left(\mathbf{S}^{m-1}(\tau) + (1 - \omega(\tau))\hat{A}_{m-1}(\tau)\mathbf{M} \right), \quad (3.13)$$

com $\mathbf{e}^{\mathbf{D}\tau}$ sendo a função matriz exponencial, o asterisco denota o operador convolução e os vetores \mathbf{V}^m são determinados através das condições de contorno de cada problema. Devemos notar que as condições de contorno do problema original são absorvidas pelo sistema recursivo na primeira recursão, enquanto os problemas restantes satisfazem as condições de contorno do problema homogêneo.

Apresentamos a solução da equação de transferência radiativa-condutiva não linear considerando o coeficiente de albedo dependente da variável espacial. Nosso problema é uma generalização dos trabalhos apresentados no Capítulo 2. Por generalização queremos dizer que além de consideramos o termo fonte na Equação 3.1 também adotamos ω dependente da variável espacial τ . Assim, se tomamos $\omega(\tau)$ como função constante recuperamos os resultados numéricos do problema ilustrado na seção 2.2, Equações 2.14, 2.15 e 2.16. Por outro lado, se desconsideramos a temperatura reproduzimos os resultados numéricos

do problema apresentado na seção 2.1, Equações 2.1, 2.2 e 2.3. Destacamos também que essas modificações alteraram a matriz de equações diferenciais de primeira ordem, Equações 3.5. Conseqüentemente, ao modificarmos essa matriz, produzimos um novo sistema recursivo de equações. Portanto, as soluções apresentadas através das Equações 3.11 e 3.13 também são transformadas. Desta forma, por causa de todas estas transformações, alteramos a convergência. Assim, necessitamos fazer uma investigação da qualidade da solução obtida por nosso método em todo domínio. Os parâmetros que utilizamos para fazer este estudo são apresentados na próxima seção.

3.2 Análise de Convergência

O critério de parada do método proposto neste trabalho é definido pela escolha do tamanho sistema recursivo a fim de alcançar uma precisão prescrita desejada. Pelo fato de truncarmos o sistema recursivo em \mathcal{M} , a solução encontrada pelo método proposto não é exata. Assim, precisamos de critérios que assegurem a qualidade da solução obtida em todo domínio. Uma forma de verificar a qualidade da solução obtida é estimar a diferença entre ela e a solução exata. Neste trabalho estimamos esta diferença através do cálculo do termo residual ou resíduo. Este termo é encontrado através da substituição da solução alcançada na Equação 3.1.

Se expandirmos a Equação 3.1 nas n direções discretas produzimos o seguinte sistema de equações:

$$\frac{d}{d\tau}\mathbf{I}(\tau) - \mathbf{A}(\tau)\mathbf{I}(\tau) = (1 - \omega(\tau))\theta^4(\tau)\mathbf{M}, \quad (3.14)$$

em que $\mathbf{M} = \text{col}\left(\frac{1}{\mu_1}, \dots, \frac{1}{\mu_N}\right)$ e $\mathbf{A}(\tau)$ é dado por:

$$A_{ij} = -\frac{1}{\mu_i}\delta_{ij} + \frac{\omega(\tau)}{2\mu_i} \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu_i) P_l(\mu_j) w_j, \quad (3.15)$$

onde δ_{ij} é o símbolo de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e 0 caso contrário).

Assim, se $\mathbf{I}(\tau)$ é solução da Equação 3.1 então deve satisfazer a Equação 3.16:

$$\frac{d}{d\tau}\mathbf{I}(\tau) - \mathbf{A}(\tau)\mathbf{I}(\tau) - (1 - \omega(\tau))\theta^4(\tau)\mathbf{M} = 0. \quad (3.16)$$

Portanto, o termo residual, Tr , gerado pelo erro no truncamento com a escolha de \mathcal{M} para o presente esquema recursivo é dado por:

$$Tr = \left\| \frac{d}{d\tau} \mathbf{I}(\tau) - \mathbf{A}(\tau) \mathbf{I}(\tau) - (1 - \omega(\tau)) \theta^4(\tau) \mathbf{M} \right\|, \quad (3.17)$$

em que Tr representa o maior valor absoluto ou o pior resultado em todo o domínio. Assim, uma condição necessária para que a convergência da solução obtida seja garantida é que os valores dos termos residuais calculados em cada recursão formem uma sequência que tende a zero conforme aumentamos o sistema recursivo.

Para completarmos a questão da análise de convergência, apresentamos uma condição suficiente para a convergência da solução obtida baseada na teoria de Lyapunov para equações não lineares [Boichenko et al., 2005]. Para isto, avaliamos o coeficiente de Lyapunov por uma sequência de termos residuais que são definidos por:

$$\lambda = \frac{1}{\|\mathbf{I}(\tau)\|} \ln \left(\frac{|\delta Z_{\mathcal{M}}|}{|\delta Z_0|} \right), \quad (3.18)$$

em que

$$|\delta Z_{\mathcal{M}}| = \left\| \sum_{m=\mathcal{M}+1}^{\infty} \mathbf{I}^m(\tau) \right\|. \quad (3.19)$$

De acordo com esta teoria, se $\lambda > 0$ significa que essa diferença entre as intensidades de radiação da recursão anterior e a posterior irá aumentar indicando que o problema estará divergindo. Se $\lambda < 0$ então a diferença entre as intensidades de radiação das recursões m e $m + 1$ está diminuindo e portanto o problema está convergindo. De fato, quando a sequência de valores negativos é obtida por esse coeficiente, a convergência exponencial é garantida. Outro fator a ser observado é a magnitude do expoente de Lyapunov λ , quanto maior for o valor absoluto deste expoente mais estável é o sistema.

Conforme a fórmula que mostramos na Equação 3.18, para que seja possível o cálculo do expoente de Lyapunov é necessário conhecermos a solução exata do nosso problema, Equações 3.1, 3.2 e 3.3. Porque expandimos a intensidade de radiação numa série infinita mas, truncamos esta série em \mathcal{M} quando alcançamos a precisão desejada. No entanto, a Equação 3.18 necessita das parcelas da série a partir do truncamento, ou seja, de $\mathcal{M} + 1$ até o infinito.

Para resolver este problema, antes de calcular o expoente de Lyapunov, examinamos o resíduo, Equação 3.17. O termo residual nos mostra o pior resultado do vetor intensidade de radiação em todo o domínio, ou seja, a maior diferença entre a intensidade

de radiação determinada por nosso método e a solução exata, de todas as direções e em todo o domínio.

Portanto, para o cálculo do expoente de Lyapunov analisamos a equação escalar que originou o pior resultado.

$$Tr = \left| \frac{d}{d\tau}(I(\tau_j))_p - [A(\tau_j)I(\tau_j)]_p - (1 - \omega(\tau_j))\theta^4(\tau_j)M_p \right|, \quad (3.20)$$

em que os subíndices j e p indicam, respectivamente, qual τ e qual direção μ aparece o pior resultado alcançado pela intensidade de radiação determinada por nosso método. O termo $\frac{d}{d\tau}(I(\tau_j))_p$ é a linha p da derivada da intensidade de radiação no ponto τ_j , $[A(\tau_j)I(\tau_j)]_p$ é a linha p do produto da matriz $A(\tau_j)$ pelo vetor $I(\tau_j)$ no ponto τ_j e o termo $(1 - \omega(\tau_j))\theta^4(\tau_j)M_p$ é a linha p do produto de $(1 - \omega(\tau_j))\theta^4(\tau_j)$ no ponto τ_j pelo vetor M . Da equação (3.20) deriva a equação abaixo que estimamos $|\delta Z_{\mathcal{M}}|$.

$$\delta Tr = \left| y - \left([A(\tau_j)I(\tau_j)]_p - a_{jp}I(\tau_j)_p \right) - a_{jp}x - (1 - \omega(\tau_j))\theta^4(\tau_j)M_p \right|, \quad (3.21)$$

em que δTr é uma variação de Tr . A Equação 3.21 é resolvida de forma estocástica e desejamos encontrar o ponto (x, y) que zera esta equação ou a torna o mais próximo de zero possível. Portanto, podemos afirmar que $\delta Tr \leq Tr$. Assim, avaliamos uma quantidade considerável de pontos (x, y) ao redor do ponto $(I(\tau_j)_p, \frac{d}{d\tau}(I(\tau_j))_p)$ através do método de Monte Carlo [Landau e Binde, 2003; Leonardo e Afonso, 2014]. Quando encontramos o ponto (x, y) , que torna δTr zero ou o mais próximo de zero possível, calculamos a diferença $|x - I(\tau_j)_p|$ e obtemos uma estimativa para $|\delta Z_{\mathcal{M}}|$.

Como resultado da forma que calculamos o sistema recursivo, Equações 3.10, o denominador que aparece na Equação 3.18 é estimado como $|\delta Z_0| = \mathbf{S}(\tau_j) + (1 - \omega(\tau_j))\theta^4(\tau_j)M_p$ para intensidade de radiação $I^0(\tau_j)$.

Por estes procedimentos na próxima seção apresentamos as simulações numéricas, bem como análise de convergência.

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Com o objetivo de mostrar a eficiência do método proposto resolvemos alguns problemas de transferência radiativa-condutiva em uma placa com coeficiente de albedo dependente da variável espacial. Para isso apresentamos vários problemas considerando a funções de albedo: exponencial, polinomial, senoidal, hiperbólica e seccionalmente constante.

4.1 Análise e validação do método proposto

Devido à dificuldade de encontrar resultados na literatura para este tipo de problema, começamos focando nossa atenção na análise de validação de resultados discutindo a consistência deste método. Assim, resolvemos o problema de transferência radiativa-condutiva S_N em uma placa-plana com espessura $\tau_0 = 1$ para algumas funções de albedo. Em nosso primeiro exemplo, consideramos uma função de albedo polinomial de primeiro grau e mostramos que quando o coeficiente angular vai para zero a solução desse problema vai para a solução bem conhecida para um albedo constante. Portanto, resolvemos a equação de transferência de calor radiativa-condutiva acoplada em uma placa plana com espalhamento isotrópico e considerando as superfícies de contorno com $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$, $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = 0$, sem reflexões para um conjunto de valores para com o coeficiente angular da função afim tendendo a zero, ou seja, para $a = 0, 1, 0, 01, 0, 001, 0, 0001$. Os resultados da intensidade de radiação para albedo $\omega(\tau) = a\tau + 0.8$ estão ilustrados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Solução do sistema recursivo para $\tau = 0, 5$, $N_c = 0, 5$ e funções de albedo polinomial de primeiro grau.

μ	$\omega(\tau) = a\tau + 0.8$					albedo constante
	$0.1\tau + 0.8$	$0.01\tau + 0.8$	$0.001\tau + 0.8$	$0.0001\tau + 0.8$	0.8	$\omega = 0.8$
-1	0,113403	0,099560	0,098271	0,098143	0,098129	0,098129
-0,5	0,186860	0,164637	0,162567	0,162362	0,162339	0,162339
-0,001	0,375037	0,343976	0,341069	0,340780	0,340748	0,340748
0,001	0,375927	0,344967	0,342069	0,341781	0,341749	0,341749
0,5	0,688865	0,677227	0,676142	0,676034	0,676022	0,676022
1	0,812446	0,805665	0,805033	0,804970	0,804963	0,804963

Podemos notar na Tabela 4.1 acima, uma boa coincidência (de quatro casas após a vírgula) entre os resultados obtidos para a intensidade radiativa para o albedo polinomial e constante, quando o coeficiente angular da função de albedo polinomial de primeiro

grau fica próxima de zero. As duas últimas colunas comparam os resultados do método proposto para $\omega(\tau) = 0,8$ com os resultados obtidos utilizando o método LTS_N proposto por Segatto et al., 2010 e neste caso os resultados são iguais.

Ainda focando na validação dos resultados, comparamos os resultados do método proposto para funções $\omega(\tau)$ diferentes, porém com comportamentos semelhantes. No entanto, ao invés de compararmos a intensidade de radiação como no exemplo anterior comparamos os resultados de temperatura e fluxos condutivo, radiativo e total. A temperatura $\theta(\tau)$ é calculada através da Equação 2.21 e os fluxos através das equações

$$Q_r(\tau) = \frac{1}{4\pi N_c} q_r^* \quad Q_c(\tau) = -\frac{d}{d\tau}\theta(\tau) \quad Q(\tau) = Q_r(\tau) + Q_c(\tau). \quad (4.1)$$

Afim de fornecer os coeficientes da expansão da função de fase para o espalhamento anisotrópico, usamos a lei de espalhamento binomial que pode ser computada como [Segatto et al., 2010; Siewert e Thomas, 1991]:

$$\beta_0 = 1, \quad e \quad \beta_l = \left(\frac{2l+1}{2l-1}\right) \left(\frac{L+1-l}{L+1+l}\right) \beta_{l-1}. \quad (4.2)$$

Portanto, comparamos os resultados para temperatura e fluxos para o problema de transferência radiativa-condutiva S_N acoplado, em uma placa-plana, com espessura $\tau_0 = 1$, com espalhamento isotrópico, com as superfícies de contorno com $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$, $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = 0$, sem reflexões e $N_c = 0,5$ com as funções de albedo $\omega(\tau) = 0,7 \exp\left(\frac{-\tau}{100}\right)$ e $\omega(\tau) = -0,007\tau + 0,7$ e os resultados estão apresentados nas Tabelas 4.2 e 4.3.

Tabela 4.2 – Resultados numéricos com $\omega(\tau) = 0,7 \exp\left(\frac{-\tau}{100}\right)$.

τ	θ	Q_c	Q_r	Q
0	1,000000	0,956897	0,327526	1,284423
0,25	0,762453	0,955241	0,329182	1,284423
0,5	0,518990	0,995443	0,288980	1,284423
0,75	0,264445	1,039831	0,244592	1,284423
1	0,000000	1,073463	0,210961	1,284423

Tabela 4.3 – Resultados numéricos com $\omega(\tau) = -0,007\tau + 0,7$.

τ	θ	Q_c	Q_r	Q
0	1,000000	0,956897	0,327527	1,284424
0,25	0,762453	0,955240	0,329184	1,284424
0,5	0,518990	0,995442	0,288982	1,284424
0,75	0,264446	1,039832	0,244592	1,284424
1	0,000000	1,073466	0,210958	1,284424

Ainda comparando os resultados para temperatura e fluxos, confrontamos os resultados alcançados considerando, na Equação 3.1, $\omega(\tau) = 0,9$ se $\tau \geq 0,5$ e $\omega(\tau) = 0,5$ se $\tau < 0,5$ com as respostas atingidas utilizando $\omega(\tau) = \frac{7}{10} - \frac{1}{5} \tanh(a\tau - b)$. Esta última função é uma interpolação da função degrau. Poderíamos ter escolhido uma infinidade de outras funções para fazer isto. Porém, a Equação 3.1 apresenta uma derivada em sua composição. Assim, a função tangente hiperbólica possui propriedades favoráveis ao nosso problema porque é contínua e composta por exponenciais. Estas características são importantes porque, na seção 4.3, fazemos a análise numérica da derivada da intensidade de radiação, para os cálculos de resíduo e expoente de Lyapunov.

Para fazermos estas comparações escolhemos o problema de transferência radiativa-condutiva S_N acoplado, em uma placa-plana, com espessura $\tau_0 = 1$ e espalhamento anisotrópico. Os outros parâmetros físicos escolhidos são: $\epsilon_1 = 0,6$, $\epsilon_2 = 0,4$, $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = 0,5$, $\rho_1^s = 0,1$, $\rho_2^s = 0,2$, $\rho_1^d = 0,3$, e $\rho_2^d = 0,5$ e $N_c = 0,1$ e grau de anisotropia $L = 299$. Os resultados estão apresentados nas Tabelas 4.4, 4.5, 4.6 e 4.7.

Tabela 4.4 – Resultados numéricos com $\omega(\tau) = 0,9$ se $\tau \leq 0,5$ e $\omega(\tau) = 0,5$ se $\tau > 0,5$.

τ	θ	Q_c	Q_r	Q
0	1,000000	0,448387	0,966912	1,415299
0,25	0,897561	0,384498	1,030802	1,415299
0,5	0,802562	0,384444	1,030855	1,415299
0,75	0,685422	0,578594	0,836705	1,415299
1	0,500000	0,928831	0,486469	1,415299

Apresentamos nas três tabelas abaixo os resultados alcançados para temperatura e fluxos utilizando $\omega(\tau) = \frac{7}{10} - \frac{1}{5} \tanh(a\tau - b)$. Em cada Tabela, variamos os coeficientes a e b melhorando a aproximação da função tangente hiperbólica para a função de albedo

seccionalmente constante definida neste exemplo. Começamos considerando os parâmetros $a = 40$ e $b = 20$. Neste caso a transição de $\omega = 0,9$ para $\omega = 0,5$ no ponto $\tau = 0,5$ é mais suave. Os resultados podem ser vistos na Tabela 4.5.

Tabela 4.5 – Resultados numéricos com $\omega(\tau) = \frac{7}{10} - \frac{1}{5} \tanh(40\tau - 20)$.

τ	θ	Q_c	Q_r	Q
0	1,000000	0,448419	0,966676	1,415095
0,25	0,897579	0,384331	1,030763	1,415095
0,5	0,802500	0,387472	1,027623	1,415095
0,75	0,685266	0,578866	0,836229	1,415095
1	0,500000	0,928511	0,486584	1,415095

Agora, melhoramos a aproximação da função tangente hiperbólica, considerando $a = 640$ e $b = 320$ e ilustramos os resultados na Tabela 4.6.

Tabela 4.6 – Resultados numéricos com $\omega(\tau) = \frac{7}{10} - \frac{1}{5} \tanh(640\tau - 320)$.

τ	θ	Q_c	Q_r	Q
0	1,000000	0,448343	0,966865	1,415209
0,25	0,897593	0,384436	1,030773	1,415209
0,50	0,802571	0,384598	1,030611	1,415209
0,75	0,685432	0,578535	0,836674	1,415209
1	0,500000	0,928713	0,486496	1,415209

Por último, melhoramos a aproximação da função tangente hiperbólica para a função seccionalmente constante, consideramos $a = 2560$ e $b = 1280$ e os resultados são mostrados na Tabela 4.7.

Tabela 4.7 – Resultados numéricos com $\omega(\tau) = \frac{7}{10} - \frac{1}{5} \tanh(2560\tau - 1280)$.

τ	θ	Q_c	Q_r	Q
0	1,000000	0,448386	0,966908	1,415294
0,25	0,897572	0,384493	1,030802	1,415294
0,5	0,802554	0,384492	1,030802	1,415294
0,75	0,685426	0,578592	0,836702	1,415294
1	0,500000	0,928823	0,486471	1,415294

Verificamos através das Tabelas 4.4, 4.5, 4.6 e 4.7 que os resultados são muito

próximos. E conforme variamos os coeficientes a e b , tornando mais rápida a transição de $\omega = 0,9$ para $\omega = 0,5$ em $\tau = 0,5$ mais próximos ficam os resultados para temperatura e fluxos entre as funções tangentes hiperbólicas e a função seccionalmente constante.

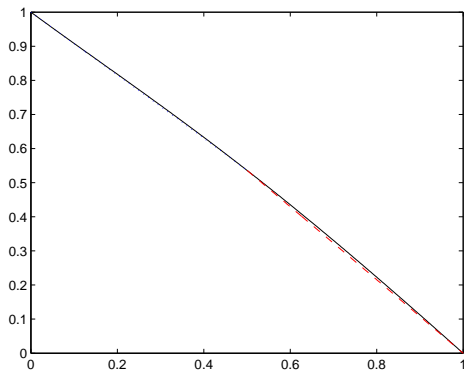
Assim, concluímos que funções semelhantes produzem resultados semelhantes. Podemos afirmar isto fundamentado pelos resultados ilustrados nas Tabelas 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6 e 4.7.

Por fim, comparamos os resultados para a temperatura alcançados por nosso método em todo o domínio com os resultados obtidos para a temperatura pelo método de Segatto et al., 2010 para seções deste domínio. Como este último método é para albedo constante, consideramos $\omega = \varpi$, em que ϖ é a média da função $\omega(\tau)$ em cada subintervalo. As condições de contorno adotadas são os resultados das temperaturas calculadas por nosso método nos extremos de cada subintervalo.

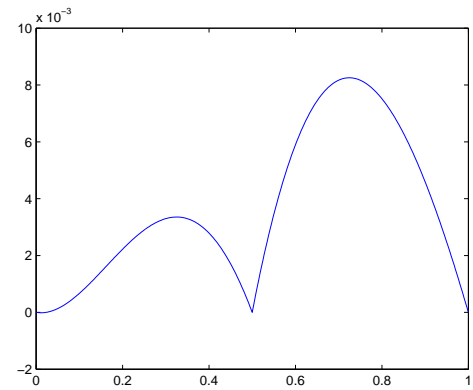
Para tal, escolhemos o problema de transferência radiativa-condutiva S_N acoplado, em uma placa-plana, espessura $\tau_0 = 1$, espalhamento isotrópico, sem reflexões, com $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$, $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = 0$ e $N_c = 0,5$. Utilizamos a função de albedo $\omega(\tau) = 0,4 - 0,4 \sin(\pi\tau)$.

Apresentamos os gráficos das soluções para temperatura pelos dois métodos nas Figuras 4.1a, 4.2a, 4.3a. Os gráficos das soluções para temperatura utilizando o método proposto por Segatto et al., 2010 estão representados pelas linhas pontilhadas e tracejadas. Os gráficos para a temperatura calculada com o método proposto neste trabalho estão representados pela linha sólida. As Figuras 4.1b, 4.2b, 4.3b ilustram o erro absoluto entre as temperaturas calculadas pelos dois métodos.

Para o gráfico apresentado na Figura 4.1 dividimos intervalo $[0, 1]$ em dois subintervalos $[0, 0,5]$ e $[0,5, 1]$. No intervalo $[0, 0,5]$ adotamos as condições de contorno $\theta_{1a} = \theta(0)$ e $\theta_{1b} = \theta(0,5)$. No intervalo $[0,5, 1]$ utilizamos a temperatura inicial $\theta_{2a} = \theta(0,5)$ e a temperatura final $\theta_{2b} = \theta(1)$. Os subíndices $1a$ e $2a$ indicam condições de contornos iniciais no primeiro e segundo intervalos respectivamente e os subíndices $1b$ e $2b$ indicam condições de contornos finais no primeiro e segundo intervalos respectivamente. Devemos lembrar que a temperatura $\theta(\tau)$ é calculada por nosso método.



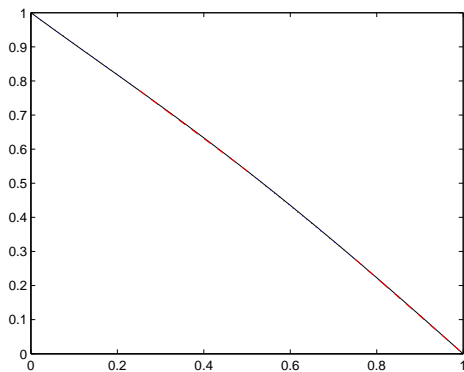
(a) Temperatura.



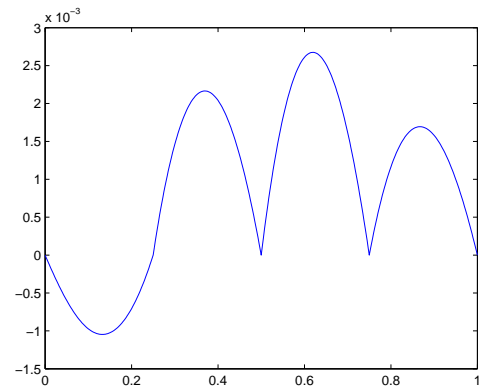
(b) Erro Absoluto.

Figura 4.1 – Gráficos de temperatura e erro absoluto dividindo o intervalo em duas partes.

Na Figura 4.2 dividimos o intervalo $[0, 1]$ em quatro partes $[0, 0, 25]$, $[0, 25, 0, 5]$, $[0, 5, 0, 75]$, $[0, 75, 1]$. Para o intervalo $[0, 0, 25]$ adotamos $\theta_{1a} = \theta(0)$ e $\theta_{1b} = \theta(0, 25)$. Em $[0, 25, 0, 5]$ utilizamos $\theta_{2a} = \theta(0, 25)$ e $\theta_{2b} = \theta(0, 5)$. No intervalo $[0, 5, 0, 75]$ adotamos $\theta_{3a} = \theta(0, 5)$ e $\theta_{3b} = \theta(0, 75)$. Por fim, no intervalo $[0, 75, 1]$ as condições de contorno utilizadas foram $\theta_{4a} = \theta(0, 75)$ e $\theta_{4b} = \theta(1)$. As Figuras 4.2a e 4.2b mostram a temperatura e o erro absoluto respectivamente.



(a) Temperatura.

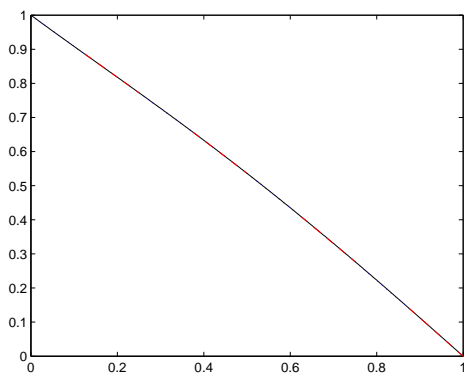


(b) Erro Absoluto.

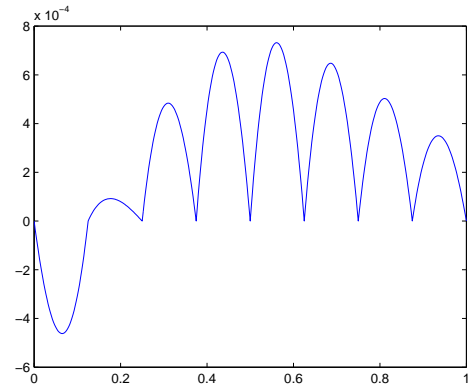
Figura 4.2 – Gráficos de temperatura e erro absoluto dividindo o intervalo em quatro partes.

Na Figura 4.3 dividimos o intervalo $[0, 1]$ em oito partes $[0, 0, 125]$, $[0, 125, 0, 25]$, $[0, 25, 0, 375]$, $[0, 375, 0, 5]$, $[0, 5, 0, 625]$, $[0, 625, 0, 75]$, $[0, 75, 0, 875]$, $[0, 875, 1]$. As condi-

ções de contorno adotadas foram: no primeiro intervalo $\theta_{1a} = \theta(0)$ e $\theta_{1b} = \theta(0,125)$, no segundo $\theta_{2a} = \theta(0,125)$ e $\theta_{2b} = \theta(0,25)$, no terceiro $\theta_{3a} = \theta(0,25)$ e $\theta_{3b} = \theta(0,375)$, no quarto $\theta_{4a} = \theta(0,375)$ e $\theta_{4b} = \theta(0,5)$, no quinto $\theta_{5a} = \theta(0,5)$ e $\theta_{5b} = \theta(0,625)$, no sexto $\theta_{6a} = \theta(0,625)$ e $\theta_{6b} = \theta(0,75)$, no sétimo $\theta_{7a} = \theta(0,75)$ e $\theta_{7b} = \theta(0,875)$ e no oitavo $\theta_{8a} = \theta(0,875)$ e $\theta_{8b} = \theta(1)$. As Figuras 4.3a e 4.3b mostram a temperatura e o erro absoluto respectivamente.



(a) Temperatura.



(b) Erro Absoluto.

Figura 4.3 – Gráficos de temperatura e erro absoluto dividindo o intervalo em oito partes.

Observamos que conforme aumentamos a quantidade de subintervalos, melhor fica a aproximação para temperatura entre os métodos e isto fica evidente através das Figuras 4.1, 4.2 e 4.3.

4.2 Escolha do tamanho do sistema recursivo, \mathcal{M}

Em seguida, resolvemos o problema de transferência de calor condutivo-radiativo acoplado em geometria planar com o objetivo de determinar o tamanho do sistema recursivo, queremos dizer o número de equações resolvidas (\mathcal{M}), a fim de obter uma precisão prescrita $\epsilon = 10^{-6}$. Para tanto, resolvemos o mesmo problema de transferência de calor radiativa-condutiva, mas agora para coeficiente de albedo polinomial de segunda ordem, $\omega(\tau) = 1 - 1,4\tau - 0,6\tau^2$, com, $Nc = 0,1$. Na Tabela 4.8, apresentamos os resultados obtidos.

Tabela 4.8 – Solução do sistema recursivo para a intensidade de radiação em $\tau = 0,5$ considerando $\omega(\tau) = 1 - 1,4\tau - 0,6\tau^2$ e $N_C = 0,1$ com \mathcal{M} variando de 1 a 14.

μ	D_1LTS_{100}	D_2LTS_{100}	D_3LTS_{100}	D_4LTS_{100}	D_5LTS_{100}	D_6LTS_{100}	D_7LTS_{100}
-1	0,048076	0,036649	0,040911	0,039506	0,039943	0,039809	0,039850
-0,5	0,083462	0,063950	0,071163	0,068798	0,069533	0,069307	0,069376
-0.001	0,275484	0,217999	0,236537	0,230849	0,232579	0,232053	0,232213
0.001	0,277566	0,219739	0,238334	0,232634	0,234367	0,233840	0,234000
0,5	0,663267	0,639634	0,647841	0,645664	0,646334	0,646134	0,646195
1	0,796315	0,783779	0,788512	0,787295	0,787673	0,787560	0,787594
μ	D_8LTS_{100}	D_9LTS_{100}	$D_{10}LTS_{100}$	$D_{11}LTS_{100}$	$D_{12}LTS_{100}$	$D_{13}LTS_{100}$	$D_{14}LTS_{100}$
-1	0,039837	0,039841	0,039840	0,039840	0,039840	0,039840	0,039840
-0,5	0,069355	0,069361	0,069359	0,069360	0,069360	0,069360	0,069360
-0.001	0,232164	0,232179	0,232175	0,232176	0,232176	0,232176	0,232176
0.001	0,233951	0,233966	0,233962	0,233963	0,233963	0,233963	0,233963
0,5	0,646176	0,646182	0,646180	0,646181	0,646180	0,646180	0,646180
1	0,787584	0,787587	0,787586	0,787587	0,787586	0,787586	0,787586

Percebemos na Tabela 4.8 acima que os resultados encontrados pelo método $D_{13}LTS_{100}$ possuem uma precisão de 10^{-6} . Essa afirmação é apoiada pela coincidência de seis dígitos significativos entre os resultados $D_{13}LTS_{100}$ e $D_{14}LTS_{100}$.

4.3 Simulações numéricas

Depois da validação do método e da demonstração de como fizemos a escolha de \mathcal{M} apresentamos algumas simulações numéricas nas Tabelas seguintes para temperatura calculados através da Equação 2.21 e fluxos condutivo, radiativo e total, Equações 4.1, a lei de espalhamento binomial, Equação 4.2. A precisão prescrita escolhida nos exemplos foi de 10^{-6} e a quantidade de direções discretas escolhida foi $N = 100$.

Sabemos que aumentando o número de direções discretas podemos melhorar os resultados do método proposto. Porém, com $N = 100$ já alcançamos resultados bastante satisfatórios. Outro ponto que consideramos foi que, com o aumento da quantidade de direções discretas, aumentamos o custo computacional. Fazendo uma comparação entre aumento de precisão e custo computacional concluímos não ser viável apresentarmos resultados com valores de N superiores a 100.

4.3.1 Problemas isotrópicos

Dividimos a apresentação dos exemplos em isotrópicos e anisotrópicos apenas para fim de organização.

4.3.1.1 Problema 1

Apresentamos os resultados numéricos para a função de albedo seccionalmente constante:

$$\omega(\tau) = \begin{cases} 0,9 & \text{se } \tau \leq 0,5 \\ 0,5 & \text{se } \tau > 0,5 \end{cases} \quad (4.3)$$

com os seguintes parâmetros físicos $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$, $\rho_1^s = \rho_2^s = \rho_1^d = \rho_2^d = 0$, $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = 0$, $N_c = 0,5$. Avaliamos a temperatura normalizada dada pela Equação 2.21 e os fluxos condutivo, radiativo e total pelas Equações 4.1. Na Tabela 4.9, exibimos os valores obtidos para temperatura e fluxos tendo o comprimento do sistema recursivo o valor $\mathcal{M} = 9$.

Tabela 4.9 – Temperatura e fluxos condutivo, radiativo e total para D_9LTS_{100} com

$$\omega(\tau) = 0,9 \text{ se } \tau \leq 0,5 \text{ e } \omega(\tau) = 0,5 \text{ se } \tau > 0,5.$$

τ	θ	Q_c	Q_r	Q
0	1,000000	0,960055	0,329828	1,289882
0,25	0,760561	0,959496	0,330387	1,289882
0,5	0,519049	0,973222	0,316661	1,289882
0,75	0,266898	1,041160	0,248722	1,289882
1	0,000000	1,090925	0,198957	1,289882

Apresentamos nas Figuras 4.4 e 4.5 as respectivas temperatura e fluxos:

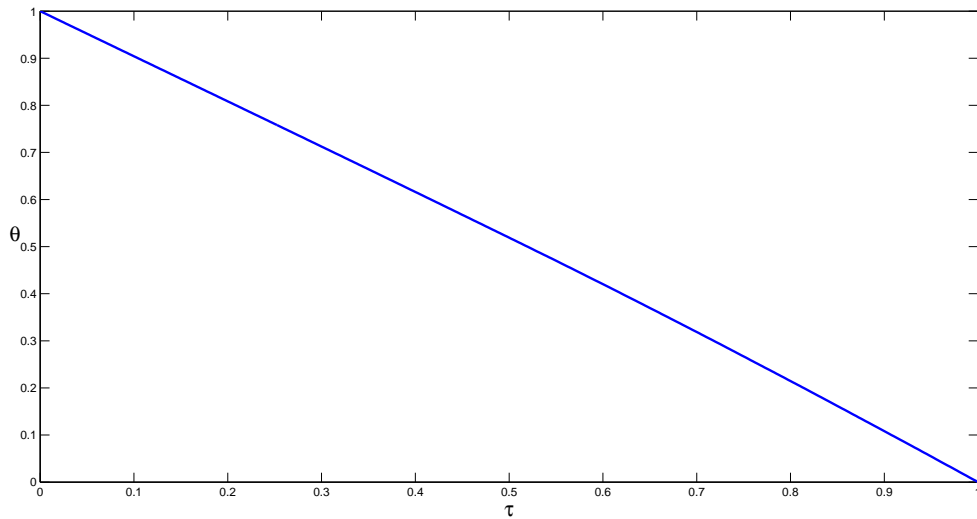


Figura 4.4 – Gráfico de temperatura para $\omega(\tau) = 0,9$ se $\tau \leq 0,5$ e $\omega(\tau) = 0,5$ se $\tau > 0,5$.

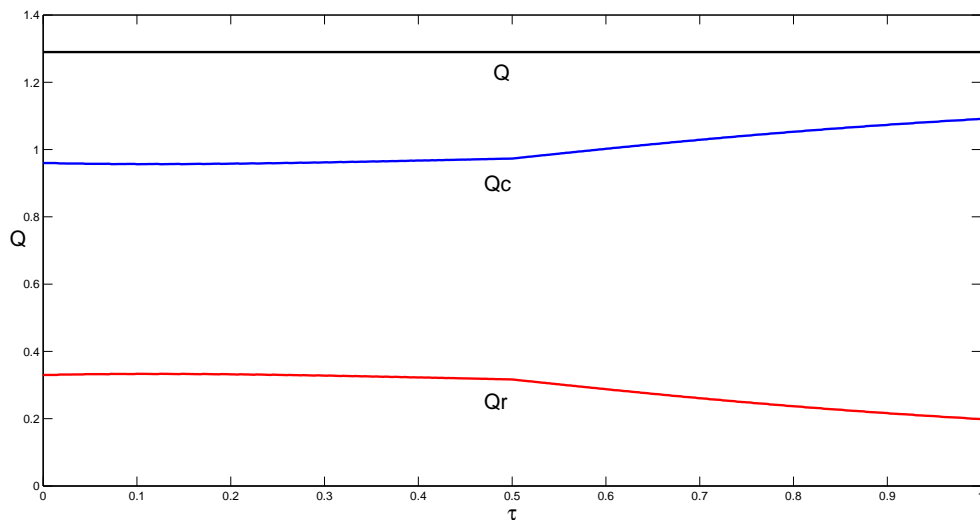


Figura 4.5 – Gráficos de fluxos radiativo, condutivo e total para $\omega(\tau) = 0,9$ se $\tau \leq 0,5$ e $\omega(\tau) = 0,5$ se $\tau > 0,5$.

O cálculo do resíduo e do expoente de Lyapunov por meio das Equações 3.17 e 3.18, respectivamente, envolve a avaliação numérica da derivada da intensidade de radiação. Esse fato levou a geração de resíduos que dificultaram a análise da convergência do método proposto. Para contornar esse problema, o coeficiente de albedo foi expresso em termos da função tangente hiperbólica. Esta função pode ser uma aproximação para função de

albedo seccionalmente constante. Esta abordagem produziu resultados muito semelhantes aos obtidos com a função degrau. Sustentamos esta afirmação baseado nas Tabelas 4.4, 4.5, 4.6 e 4.7 mostradas na seção 4.1. Assim, a avaliação do resíduo e do expoente de Lyapunov foram realizados com a função tangente hiperbólica do problema a seguir e são apresentados nas Figuras 4.12 e 4.13.

4.3.1.2 Problema 2

Neste problema mostramos os resultados para função de albedo tangente hiperbólica. Esta função foi escolhida porque apresenta resultados semelhantes aos do problema 1 possibilitando a análise de convergência. Portanto considere a seguinte função de albedo:

$$\omega(\tau) = \frac{7}{10} - \frac{1}{5} \tanh(40\tau - 20) \quad (4.4)$$

e os parâmetros físicos $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$, $\rho_1^s = \rho_2^s = \rho_1^d = \rho_2^d = 0$, $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = 0$, $N_c = 0, 5$. Avaliamos a temperatura normalizada dada pela Equação 2.21 e os fluxos condutivo, radiativo e total pelas Equações 4.1. Na Tabela 4.10, exibimos os valores obtidos para temperatura e fluxos tendo o comprimento do sistema recursivo o valor $\mathcal{M} = 9$.

Tabela 4.10 – Temperatura e fluxos condutivo, radiativo e total para D_9LTS_{100} com

$$\omega(\tau) = \frac{7}{10} - \frac{1}{5} \tanh(40\tau - 20).$$

τ	θ	Q_c	Q_r	Q
0	1,000000	0,959926	0,329884	1,289810
0,25	0,760578	0,959494	0,330317	1,289810
0,5	0,519081	0,975159	0,314652	1,289810
0,75	0,266953	1,041203	0,248608	1,289810
1	0,000000	1,090858	0,198952	1,289810

As Figuras 4.6 e 4.7 representam os gráficos de temperatura e fluxos para $\omega(\tau) = \frac{7}{10} - \frac{1}{5} \tanh(40\tau - 20)$.

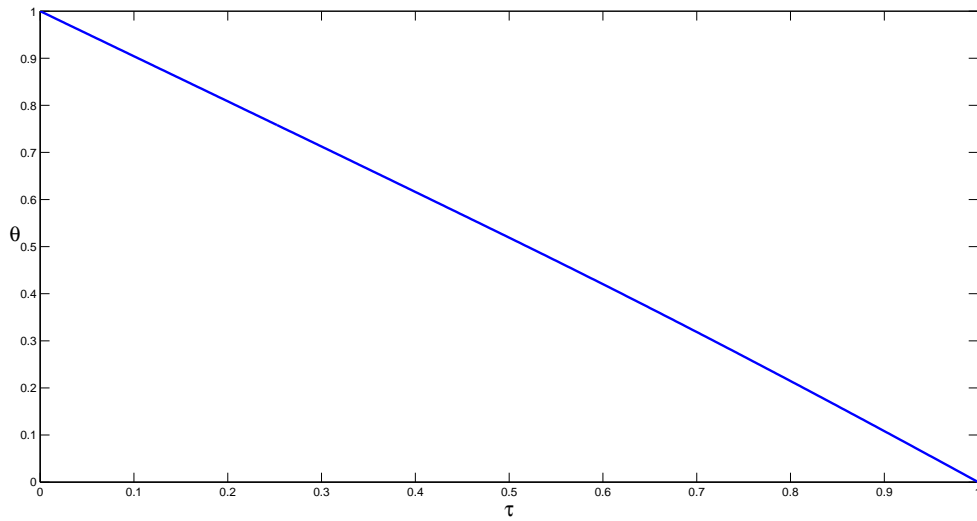


Figura 4.6 – Gráfico de temperatura para $\omega(\tau) = \frac{7}{10} - \frac{1}{5} \tanh(40\tau - 20)$.

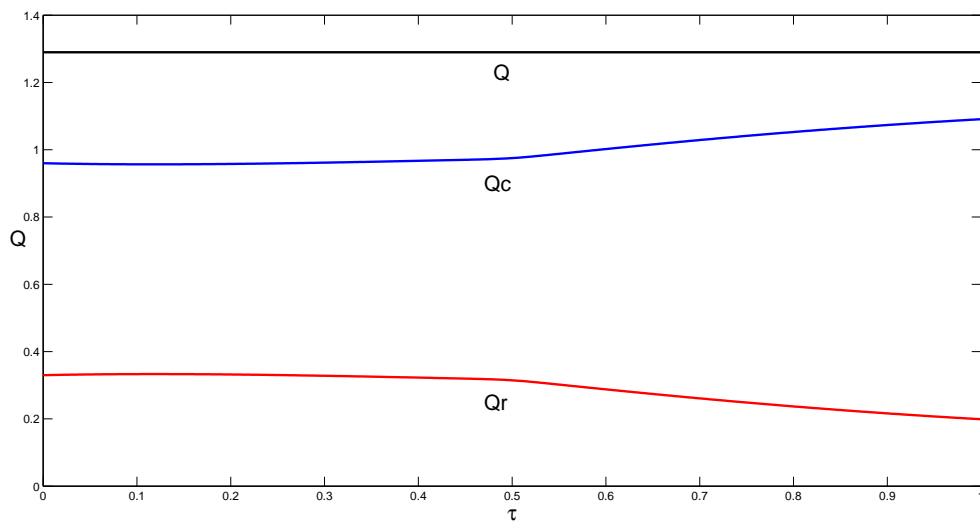


Figura 4.7 – Gráficos de fluxos radiativo, condutivo e total para

$$\omega(\tau) = \frac{7}{10} - \frac{1}{5} \tanh(40\tau - 20).$$

Nosso objetivo em utilizarmos o coeficiente de albedo expresso como função de uma tangente hiperbólica é contornar os problemas que aparecem com a avaliação numérica da derivada da intensidade de radiação utilizando a função degrau do exemplo anterior. De fato, supondo a função de albedo como uma função seccionalmente constante levou a geração de resíduos que dificultaram a análise da convergência do método proposto. Vimos

na validação dos resultados que esta abordagem produziu resultados muito semelhantes aos obtidos com a função degrau. Nas Figuras 4.8, 4.9, 4.10, 4.11 apresentamos o módulo do erro absoluto para temperatura e fluxos entre os exemplos 1 e 2.

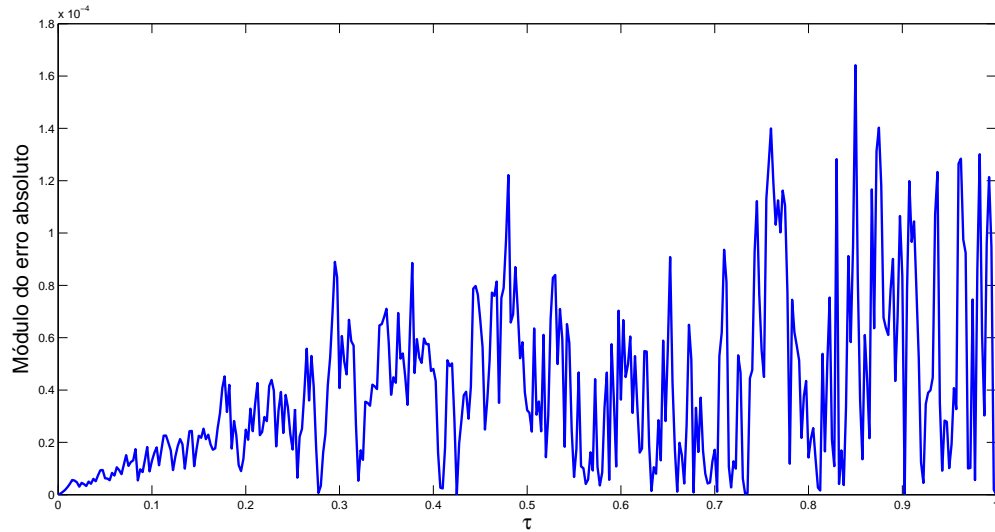


Figura 4.8 – Módulo do erro absoluto entre as temperaturas.

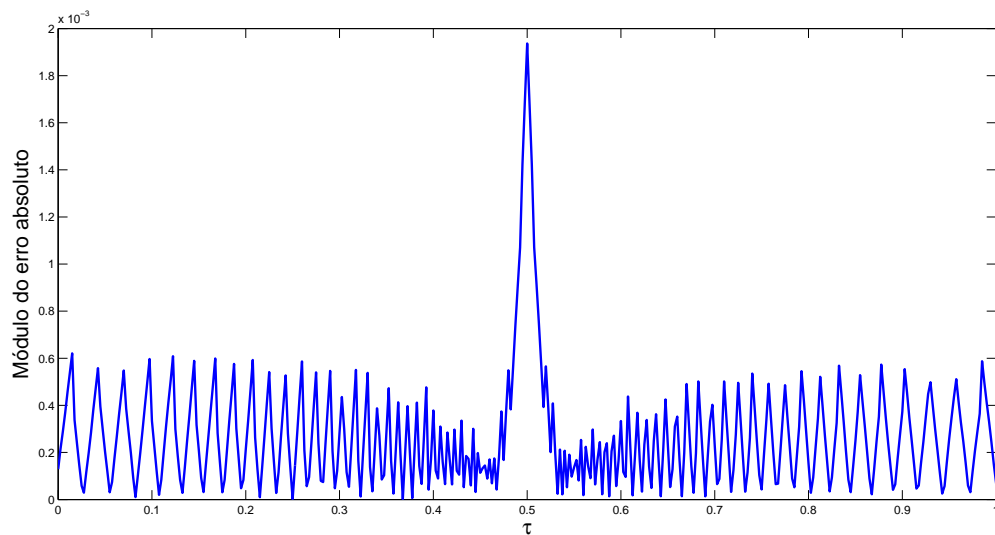


Figura 4.9 – Módulo do erro absoluto entre os fluxos condutivos.

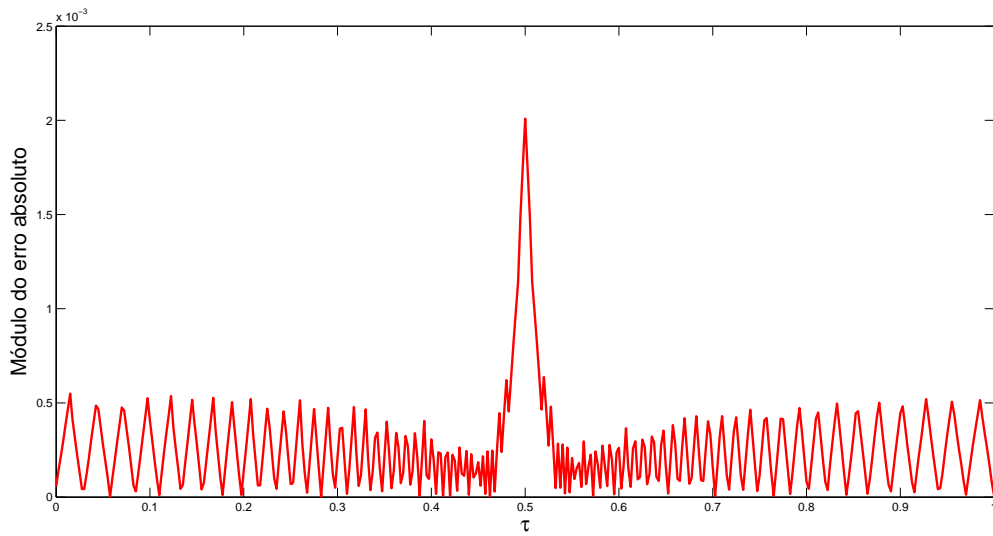


Figura 4.10 – Módulo do erro absoluto entre os fluxos radiativos.

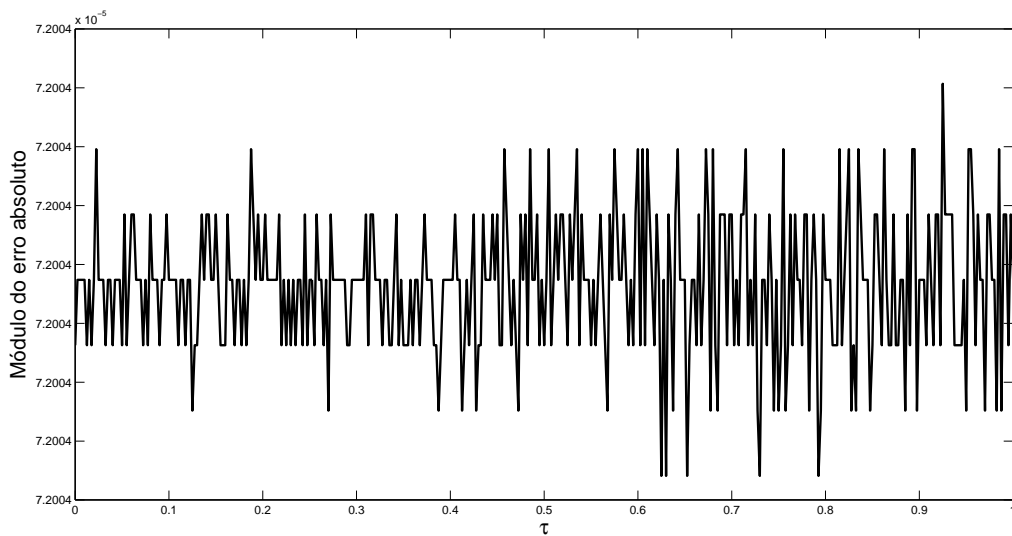


Figura 4.11 – Módulo do erro absoluto entre os fluxos totais.

Analisando o módulo do erro absoluto nas Figuras acima fica evidente que a função tangente hiperbólica é uma boa aproximação para a função de albedo seccionalmente constante. Essa afirmação é apoiada no fato de em todos os casos o módulo do erro absoluto fica próximo de zero, abaixo de 10^{-3} . Outro fato a ser observado nos gráficos das Figuras 4.8, 4.9, 4.10, 4.11 é que os maiores erros aparecem em $\tau = 0,5$. Exatamente na transição de $\omega = 0,9$ para $\omega = 0,5$.

Abaixo, nas Figuras 4.12 e 4.13 ilustramos o termo residual e o expoente de Lyapunov para a intensidade de radiação da solução do problema proposto.

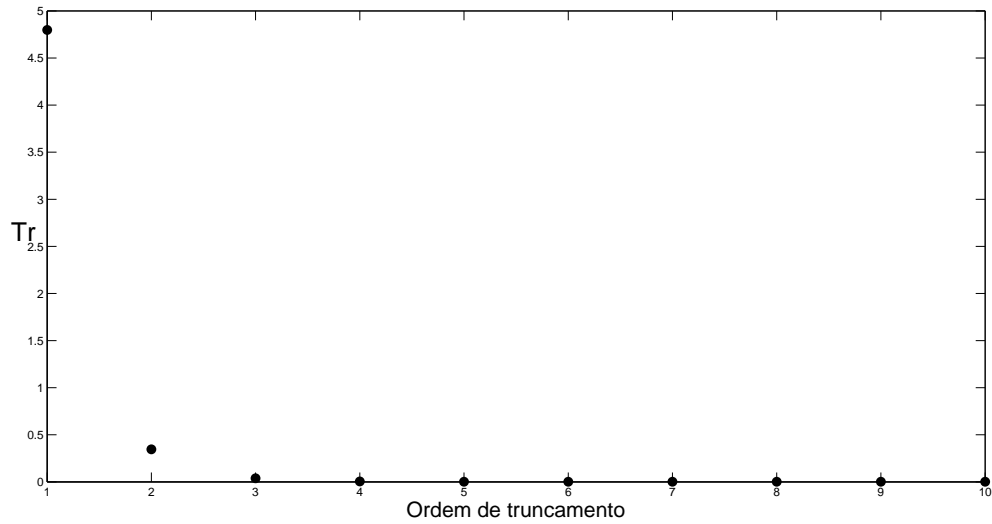


Figura 4.12 – Resíduo para a intensidade de radiação.

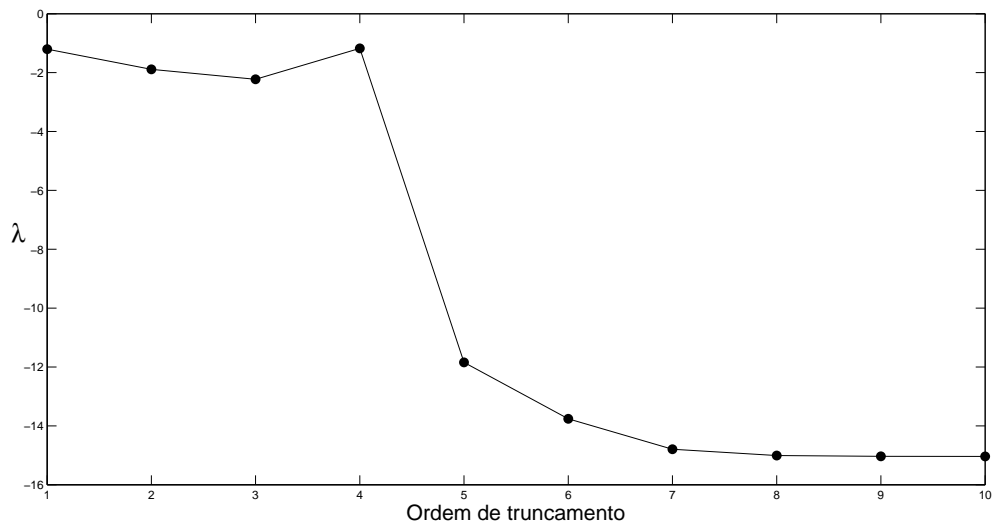


Figura 4.13 – Expoente de Lyapunov para a intensidade de radiação.

4.3.1.3 Problema 3

Neste problema mostramos os resultados para função de albedo exponencial descrita abaixo.

$$\omega(\tau) = 0,9 \exp(-\tau) \quad (4.5)$$

com os seguintes parâmetros físicos $\epsilon_1 = 0,6$, $\epsilon_2 = 0,4$, $\rho_1^s = 0,1$, $\rho_2^s = 0,2$, $\rho_1^d = 0,3$, $\rho_2^d = 0,4$, $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = 0,5$, $N_c = 0,1$. Avaliamos a temperatura normalizada dada pela Equação 2.21, bem como os fluxos condutivo, radiativo e total, Equações 4.1. Na Tabela 4.11, mostramos os valores obtidos para temperatura e fluxos tendo o comprimento do sistema recursivo o valor $\mathcal{M} = 20$.

Tabela 4.11 – Temperatura e fluxos condutivo, radiativo e total para $D_{20}LTS_{100}$ com

$$\omega(\tau) = 0,9 \exp(-\tau).$$

τ	θ	Q_c	Q_r	Q
0	1,000000	0,479720	0,799475	1,279194
0,25	0,891762	0,392941	0,886254	1,279194
0,5	0,795061	0,402514	0,876680	1,279194
0,75	0,678227	0,559626	0,719569	1,279194
1	0,500000	0,899345	0,379849	1,279194

Apresentamos nas Figuras 4.14 e 4.15 as respectivas temperatura e fluxos:

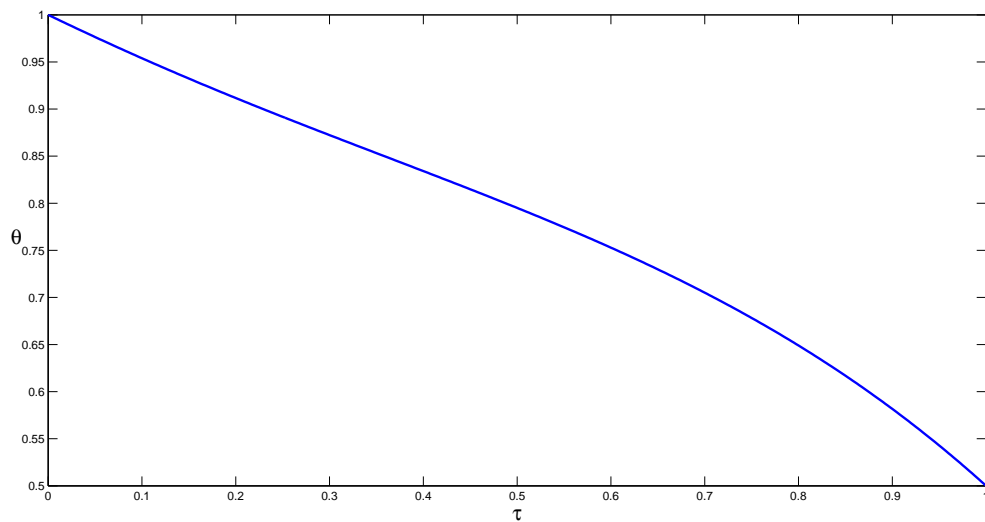


Figura 4.14 – Gráfico de temperatura para $\omega(\tau) = 0,9 \exp(-\tau)$.

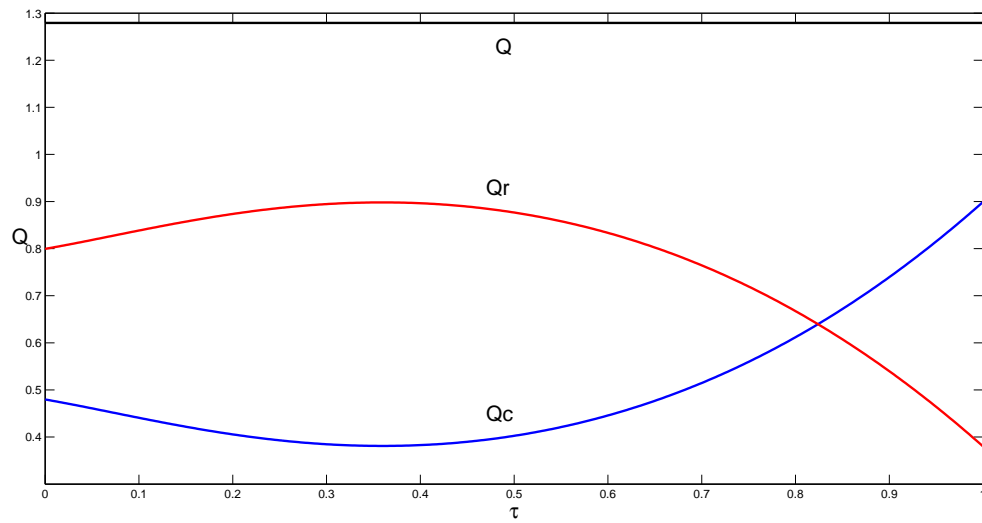


Figura 4.15 – Gráficos de fluxos radiativo, condutivo e total para $\omega(\tau) = 0,9 \exp(-\tau)$.

Abaixo, nas Figuras 4.16 e 4.17 ilustramos o termo residual e o expoente de Lyapunov para a intensidade de radiação da solução do problema proposto.

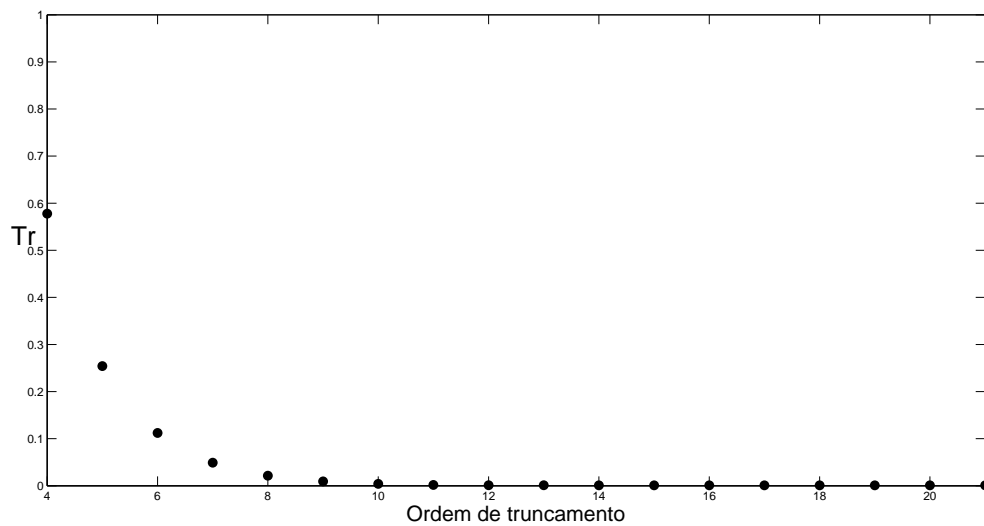


Figura 4.16 – Resíduo para a intensidade de radiação.

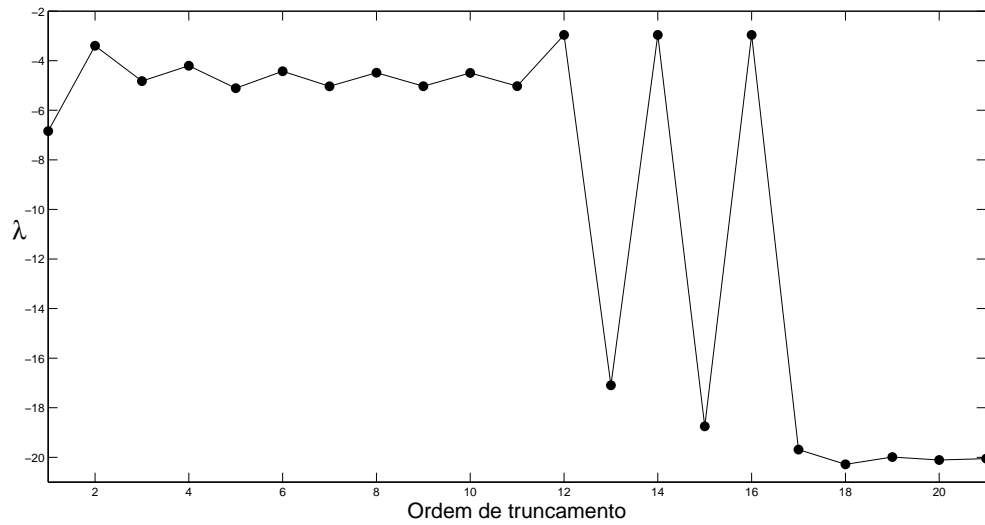


Figura 4.17 – Expoente de Lyapunov para a intensidade de radiação.

4.3.1.4 Problema 4

Agora ilustramos os resultados para função de albedo polinomial de segundo grau descrita abaixo.

$$\omega(\tau) = 0,45 + 0,4\tau + 0,12\tau^2 \quad (4.6)$$

com os seguintes parâmetros físicos $\epsilon_1 = 0,6$, $\epsilon_2 = 0,4$, $\rho_1^s = 0,1$, $\rho_2^s = 0,2$, $\rho_1^d = 0,3$, $\rho_2^d = 0,4$, $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = 0,5$, $N_c = 0,1$. Avaliamos a temperatura normalizada dada pela Equação 2.21, bem como os fluxos condutivo, radiativo e total pelas Equações 4.1. Na Tabela 4.11, mostramos os valores obtidos para temperatura e fluxos tendo o comprimento do sistema recursivo o valor $\mathcal{M} = 27$.

Tabela 4.12 – Temperatura e fluxos condutivo, radiativo e total para $D_{27}LTS_{100}$ com

$$\omega(\tau) = 0,45 + 0,4\tau + 0,12\tau^2.$$

τ	θ	Q_c	Q_r	Q
0	1,000000	0,533159	0,655044	1,188203
0,25	0,893364	0,380261	0,807942	1,188203
0,5	0,792070	0,451469	0,736735	1,188203
0,75	0,661788	0,592636	0,595568	1,188203
1	0,500000	0,683525	0,504679	1,188203

Apresentamos nas Figuras 4.18 e 4.19 as respectivas temperatura e fluxos:

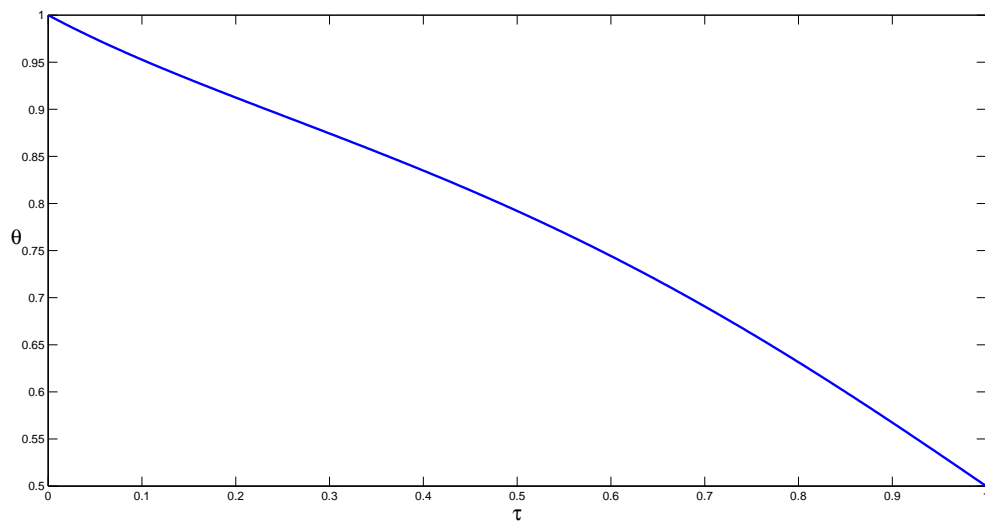


Figura 4.18 – Gráfico de temperatura para $\omega(\tau) = 0,45 + 0,4\tau + 0,12\tau^2$.

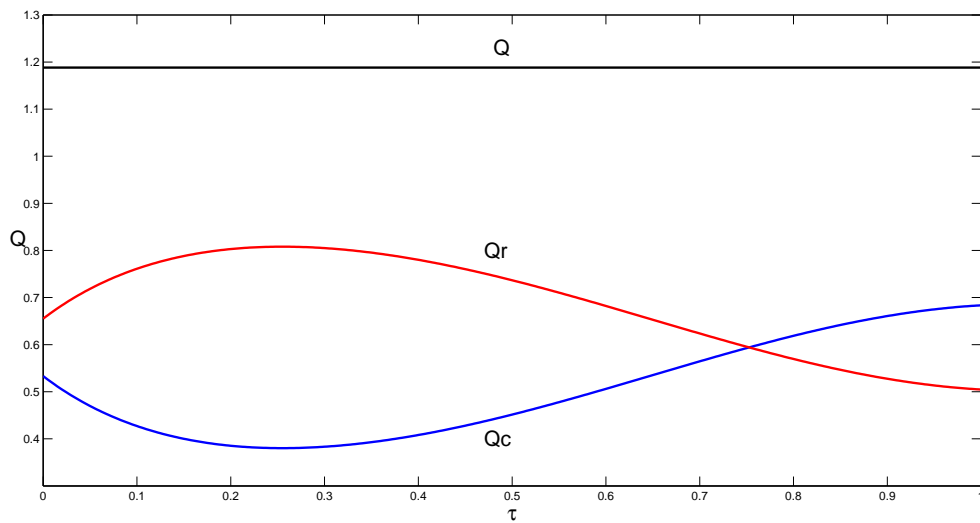


Figura 4.19 – Gráficos de fluxos radiativo, condutivo e total para

$$\omega(\tau) = 0,45 + 0,4\tau + 0,12\tau^2.$$

Abaixo, nas Figuras 4.20 e 4.21 ilustramos o termo residual e o expoente de Lyapunov para a intensidade de radiação da solução do problema proposto.

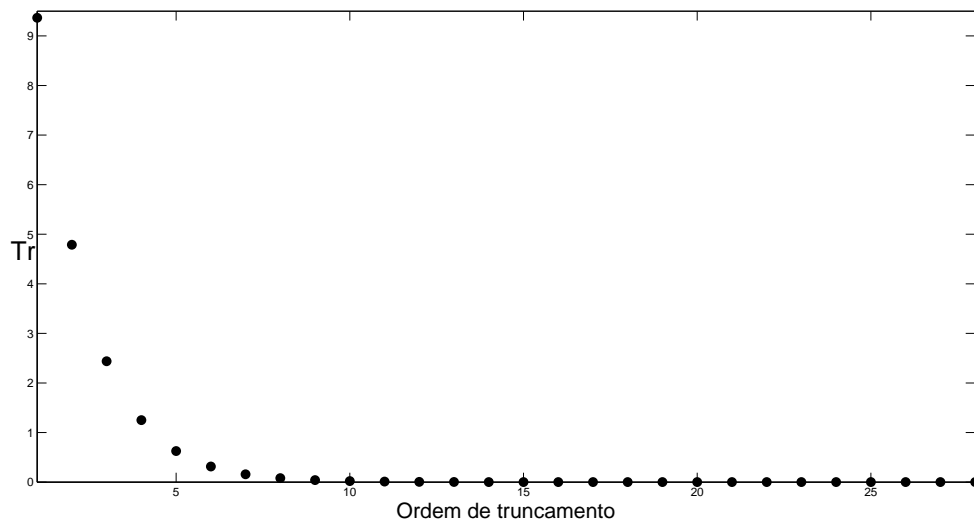


Figura 4.20 – Resíduo para a intensidade de radiação.

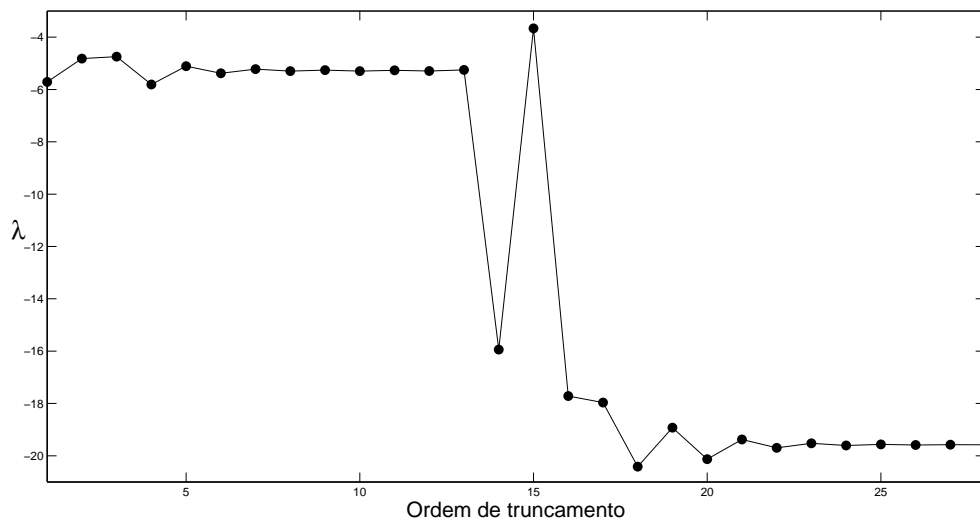


Figura 4.21 – Expoente de Lyapunov para a intensidade de radiação.

4.3.1.5 Problema 5

O último problema isotrópico mostramos os resultados para função de albedo seno.

$$\omega(\tau) = 0,4 - 0,4 \text{ sen}(\pi\tau) \quad (4.7)$$

com os seguintes parâmetros físicos $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$, $\rho_1^s = \rho_2^s = \rho_1^d = \rho_2^d = 0$, $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = 0$,

$N_c = 0,5$. Avaliamos a temperatura normalizada dada pela Equação 2.21, bem como os fluxos condutivo, radiativo e total através das Equações 4.1. Na Tabela 4.13, exibimos os valores obtidos para temperatura e fluxos tendo o comprimento do sistema recursivo o valor $\mathcal{M} = 8$.

Tabela 4.13 – Temperatura e fluxos condutivo, radiativo e total para D_8LTS_{100} com

$$\omega(\tau) = 0,4 - 0,4 \text{sen}(\pi\tau).$$

τ	θ	Q_c	Q_r	Q
0	1,000000	0,931208	0,361902	1,293111
0,25	0,772603	0,911174	0,381937	1,293111
0,5	0,536176	0,988980	0,304131	1,293111
0,75	0,277279	1,078432	0,214679	1,293111
1	0,000000	1,133190	0,159920	1,293111

Apresentamos nas Figuras 4.22 e 4.23 as respectivas temperatura e fluxos:

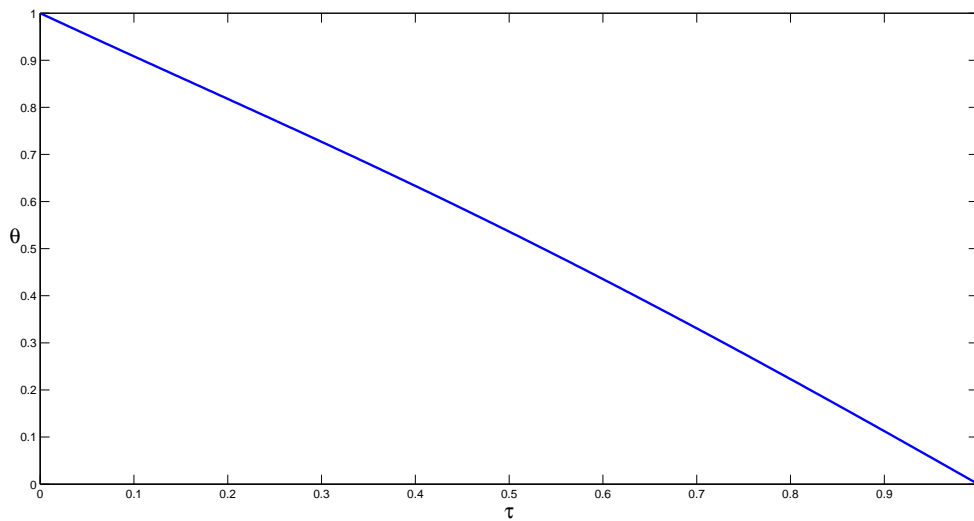


Figura 4.22 – Gráfico de temperatura para $\omega(\tau) = 0,4 - 0,4 \text{sen}(\pi\tau)$.

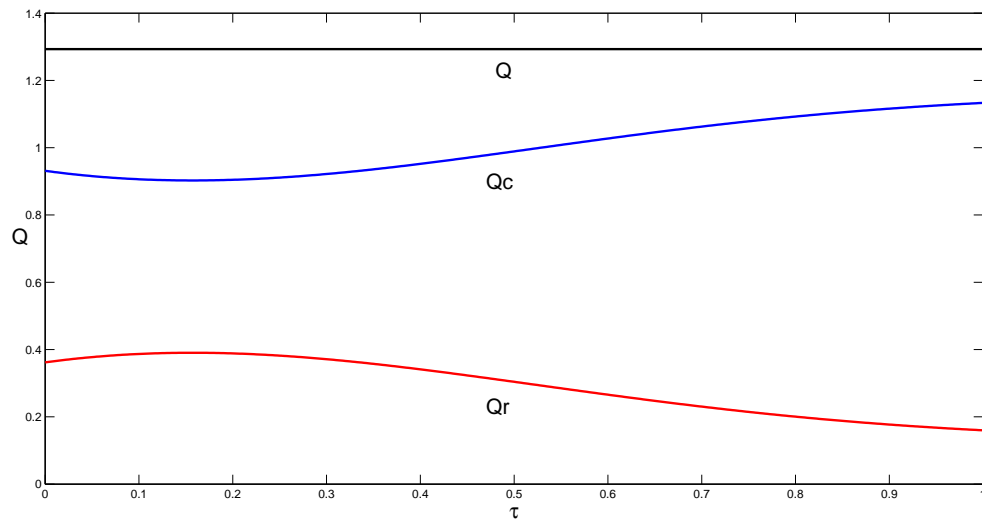


Figura 4.23 – Gráficos de fluxos radiativo, condutivo e total para $\omega(\tau) = 0,4 - 0,4 \text{ sen}(\pi\tau)$.

Abaixo, nas Figuras 4.24 e 4.25 ilustramos o termo residual e o expoente de Lyapunov para a intensidade de radiação da solução do problema proposto.

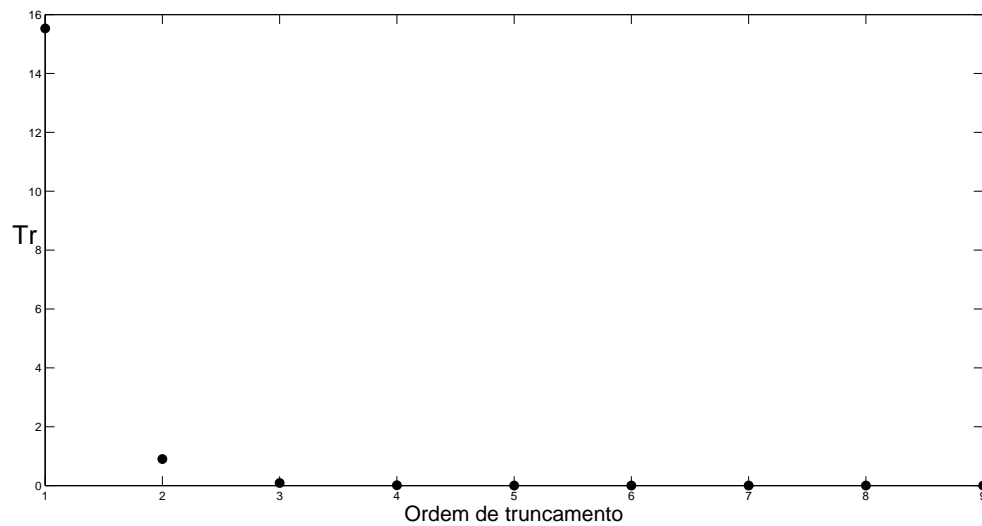


Figura 4.24 – Resíduo para a intensidade de radiação.

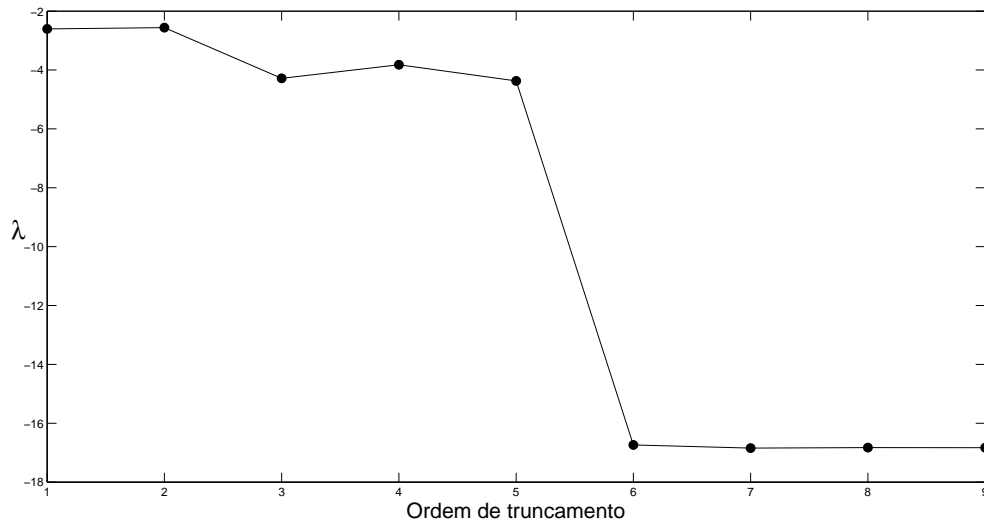


Figura 4.25 – Expoente de Lyapunov para a intensidade de radiação.

4.3.2 Problemas anisotrópicos

Apresentamos alguns problemas com espalhamento anisotrópico.

4.3.2.1 Problema 6

Apresentamos os resultados numéricos para a função de albedo seccionalmente constante:

$$\omega(\tau) = \begin{cases} 0,9 & \text{se } \tau \leq 0,5 \\ 0,5 & \text{se } \tau > 0,5 \end{cases} \quad (4.8)$$

com os seguintes parâmetros físicos: $\epsilon_1 = 0,6$, $\epsilon_2 = 0,4$, $\rho_1^s = 0,1$, $\rho_2^s = 0,2$, $\rho_1^d = 0,3$, $\rho_2^d = 0,4$, $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = 0,5$, $N_c = 0,1$ e com grau de anisotropia $L = 299$ onde os coeficientes das expansões da função de fase são determinados pela Equação 4.2. Avaliamos a temperatura normalizada dada pela Equação 2.21, bem como os fluxos condutivo, radiativo e total apresentados nas Equações 4.1. Na Tabela 4.14, exibimos os valores obtidos para temperatura e fluxos tendo o comprimento do sistema recursivo o valor $\mathcal{M} = 22$.

Tabela 4.14 – Temperatura e fluxos condutivo radiativo e total para $D_{22}LTS_{100}$ com

$$\omega(\tau) = 0,9 \text{ se } \tau \leq 0,5 \text{ e } \omega(\tau) = 0,5 \text{ se } \tau > 0,5.$$

τ	θ	Q_c	Q_r	Q
0	1,000000	0,448387	0,966912	1,415299
0,25	0,897561	0,384498	1,030802	1,415299
0,5	0,802562	0,384444	1,030855	1,415299
0,75	0,685422	0,578594	0,836705	1,415299
1	0,500000	0,928831	0,486469	1,415299

Apresentamos nas Figuras 4.26 e 4.27 as respectivas temperatura e fluxos:

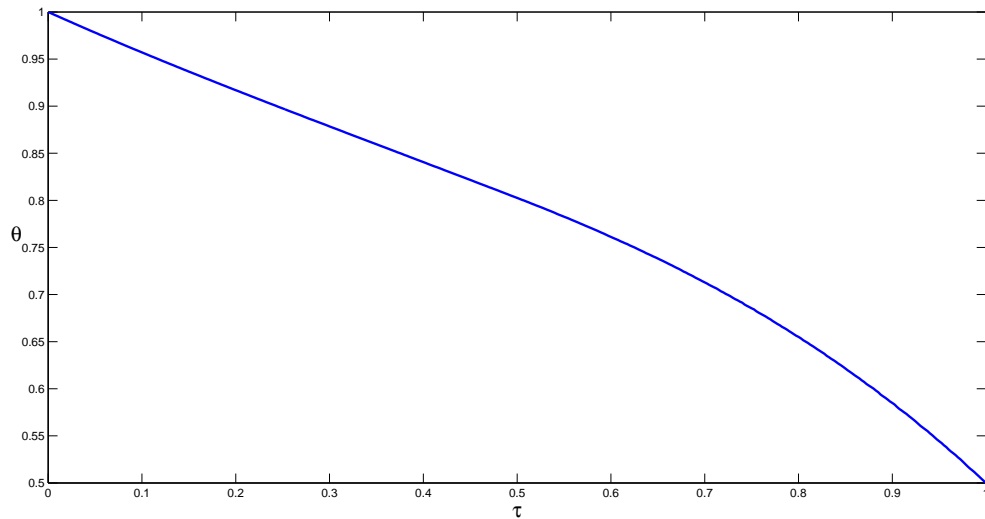


Figura 4.26 – Gráfico de temperatura para $\omega(\tau) = 0,9$ se $\tau \leq 0,5$ e $\omega(\tau) = 0,5$ se $\tau > 0,5$.

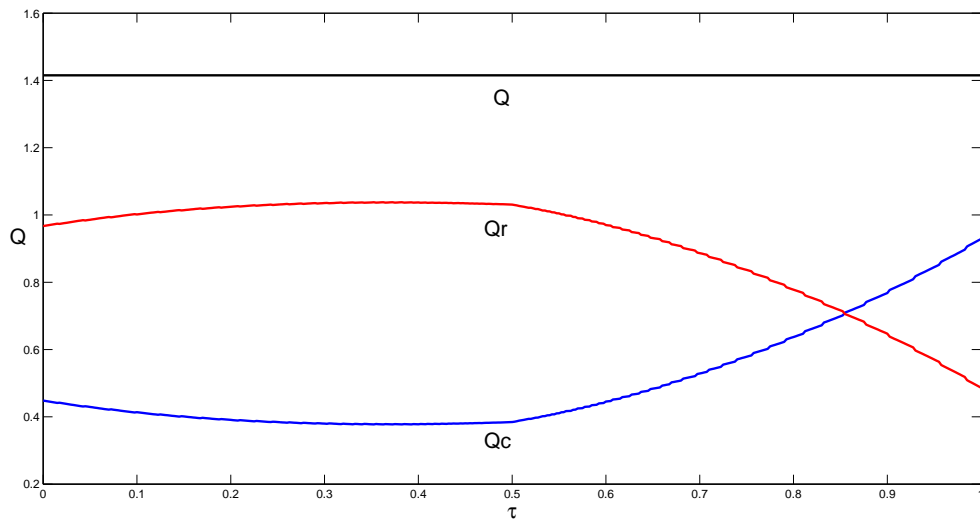


Figura 4.27 – Gráficos de fluxos radiativo, condutivo e total para $\omega(\tau) = 0,9$ se $\tau \leq 0,5$ e $\omega(\tau) = 0,5$ se $\tau > 0,5$.

Da mesma forma como fizemos no problema 1 expressamos o coeficiente de albedo em termos de uma função tangente hiperbólica, para que seja possível fazer a análise de convergência do problema 6. A abordagem com esta função também produziu resultados muito semelhantes aos obtidos com a função degrau, como pode ser visto nas Tabelas 4.14 e 4.15 e os gráficos, Figuras 4.26, 4.27, 4.28 e 4.29. Assim, a avaliação do resíduo e do expoente de Lyapunov foram realizados com a função tangente hiperbólica do problema a seguir e são apresentados nas Figuras 4.34 e 4.35.

4.3.2.2 Problema 7

Resultados para função de albedo tangente hiperbólica, esta função continua simula o comportamento da função degrau do problema 6.

$$\omega(\tau) = \frac{7}{10} - \frac{1}{5} \tanh(40\tau - 20) \quad (4.9)$$

com os seguintes parâmetros físicos: $\epsilon_1 = 0,6$, $\epsilon_2 = 0,4$, $\rho_1^s = 0,1$, $\rho_2^s = 0,2$, $\rho_1^d = 0,3$, $\rho_2^d = 0,4$, $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = 0,5$, $N_c = 0,1$ e com grau de anisotropia $L = 299$ onde os coeficientes das expansões da função de fase são determinados pela Equação 4.2. Avaliamos a temperatura normalizada dada pela Equação 2.21 e os fluxos condutivo, radiativo e total pelas equações apresentadas nas Equações 4.1. Na Tabela 4.15, exibimos os valo-

res obtidos para temperatura e fluxos tendo o comprimento do sistema recursivo o valor $\mathcal{M} = 22$.

Tabela 4.15 – Temperatura e fluxos condutivo, radiativo e total para $D_{22}LTS_{100}$ com

$$\omega(\tau) = \frac{7}{10} - \frac{1}{5} \tanh(40\tau - 20).$$

τ	θ	Q_c	Q_r	Q
0	1,000000	0,448419	0,966676	1,415095
0,25	0,897579	0,384331	1,030763	1,415095
0,5	0,802500	0,387472	1,027623	1,415095
0,75	0,685266	0,578866	0,836229	1,415095
1	0,500000	0,928511	0,486584	1,415095

Apresentamos nas Figuras 4.28 e 4.29 as respectivas temperatura e fluxos:

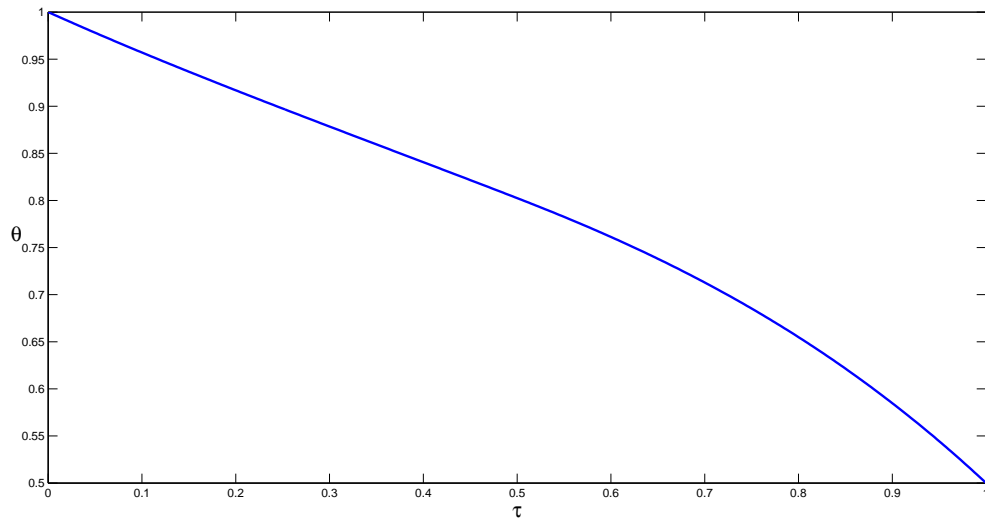


Figura 4.28 – Gráfico de temperatura para $\omega(\tau) = \frac{7}{10} - \frac{1}{5} \tanh(40\tau - 20)$.

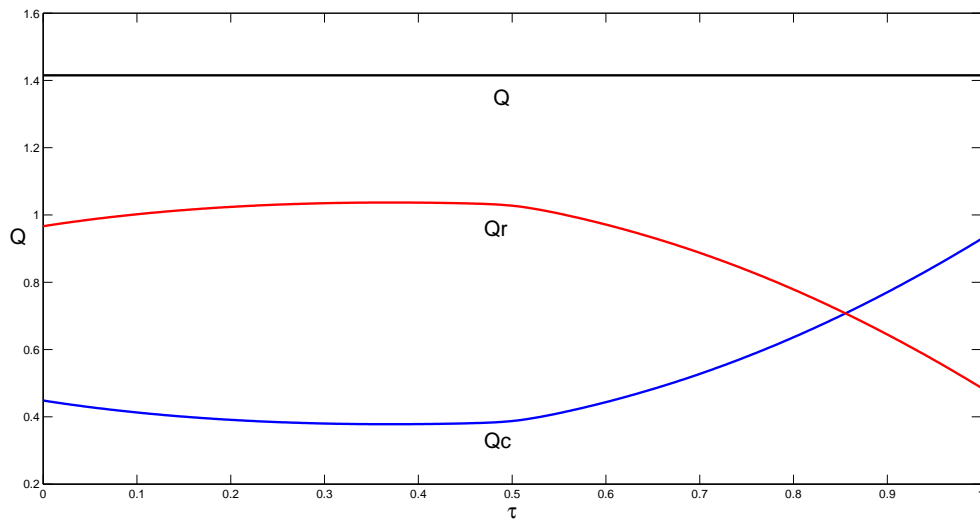


Figura 4.29 – Gráficos de fluxos radiativo, condutivo e total para

$$\omega(\tau) = \frac{7}{10} - \frac{1}{5} \tanh(40\tau - 20).$$

Da mesma forma que fizemos no exemplo 2, para mostrarmos que a função tangente hiperbólica aproxima bem a função degrau do exemplo 6. Nas Figuras 4.30, 4.31, 4.32, 4.33 apresentamos o módulo do erro absoluto para temperatura e fluxos entre os exemplos 6 e 7.

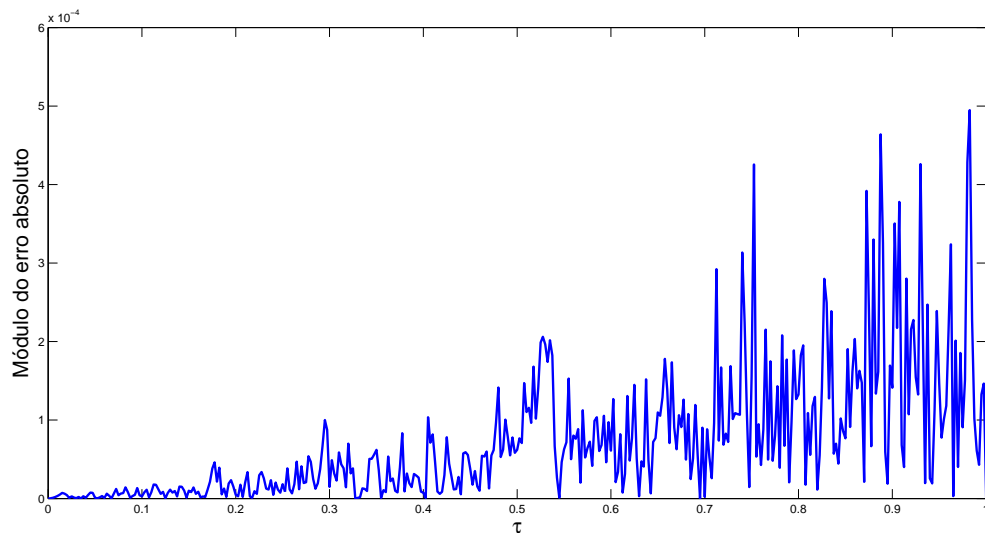


Figura 4.30 – Módulo do erro absoluto entre as temperaturas.

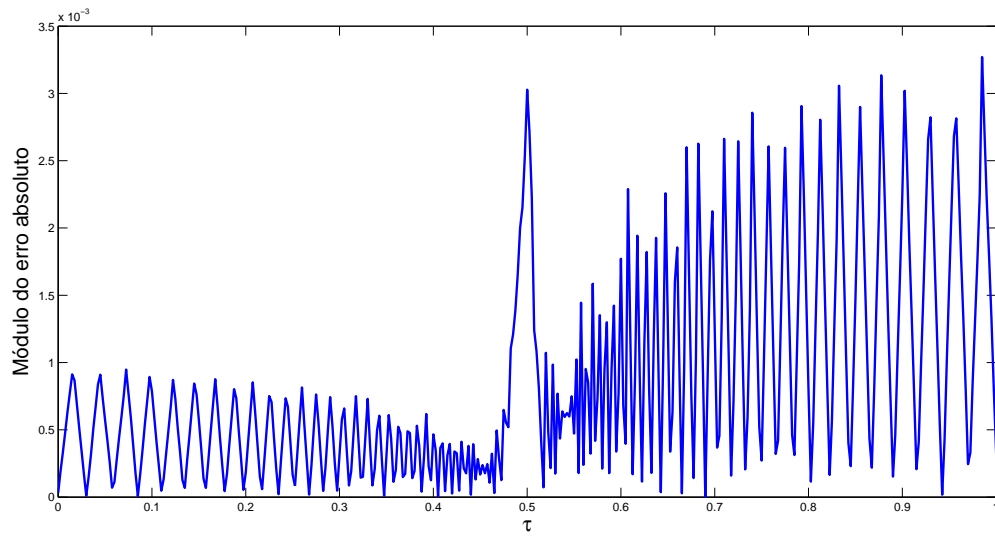


Figura 4.31 – Módulo do erro absoluto entre os fluxos condutivos.

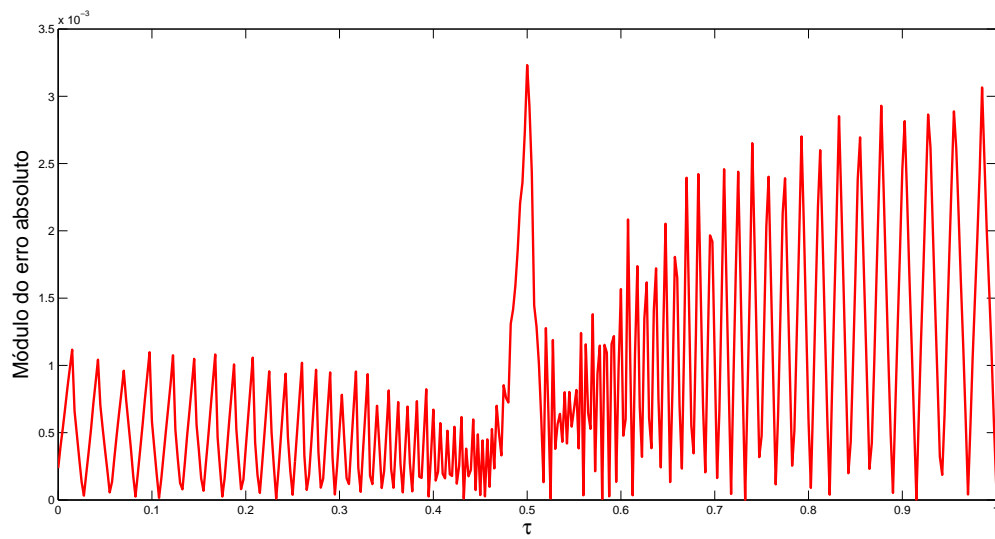


Figura 4.32 – Módulo do erro absoluto entre os fluxos radiativos.

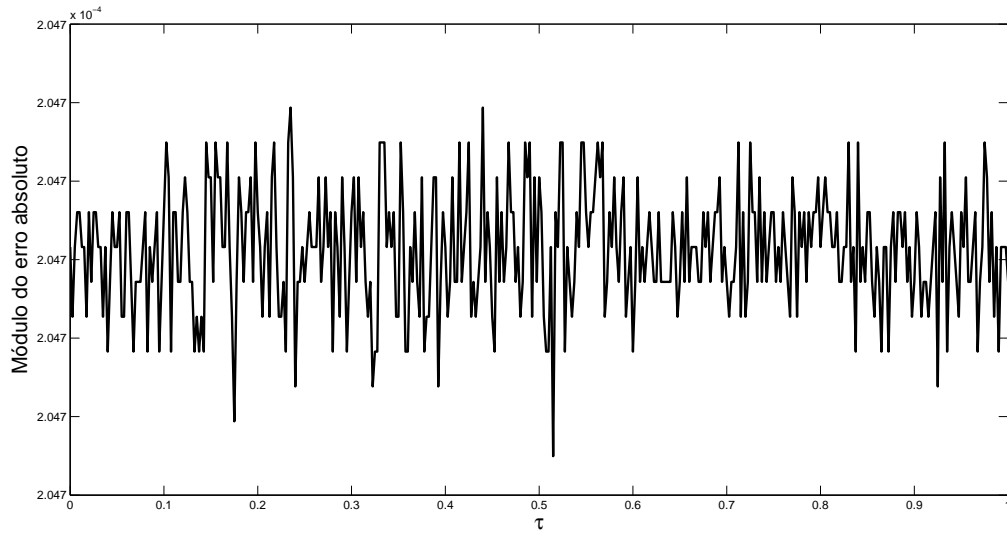


Figura 4.33 – Módulo do erro absoluto entre os fluxos totais.

Analisando o módulo do erro absoluto nas Figuras acima concluímos que a escolha da função tangente hiperbólica para aproximar a função de albedo seccionalmente constante é uma boa escolha. Verificamos que módulo do erro absoluto para temperatura e fluxos ficam próximos de zero, abaixo de 10^{-3} . Mais uma vez, observamos nos gráficos das Figuras 4.30, 4.31, 4.32, 4.33 que os maiores erros aparecem em $\tau = 0,5$. Ponto da transição de $\omega = 0,9$ para $\omega = 0,5$.

Abaixo, nas Figuras 4.34 e 4.35 ilustramos o termo residual e o expoente de Lyapunov para a intensidade de radiação da solução do problema proposto.

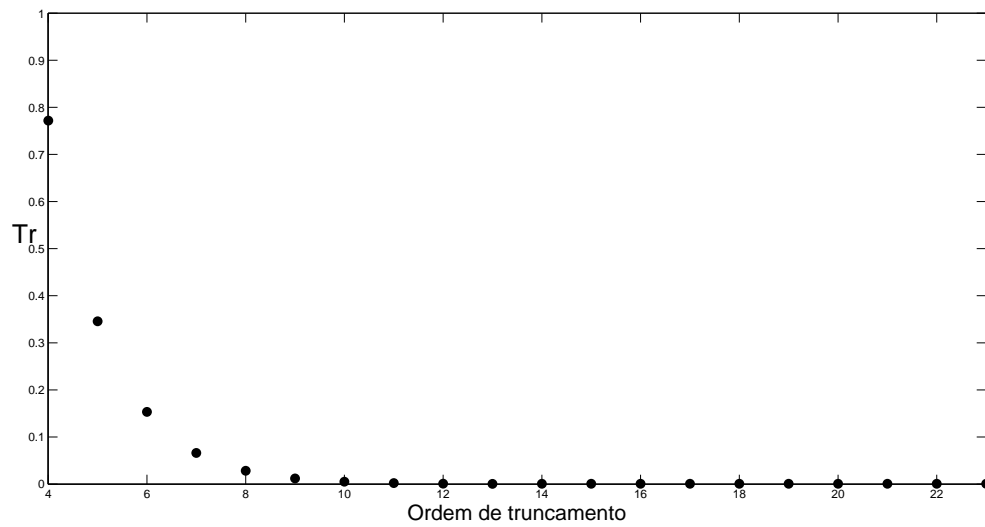


Figura 4.34 – Resíduo para a intensidade de radiação.

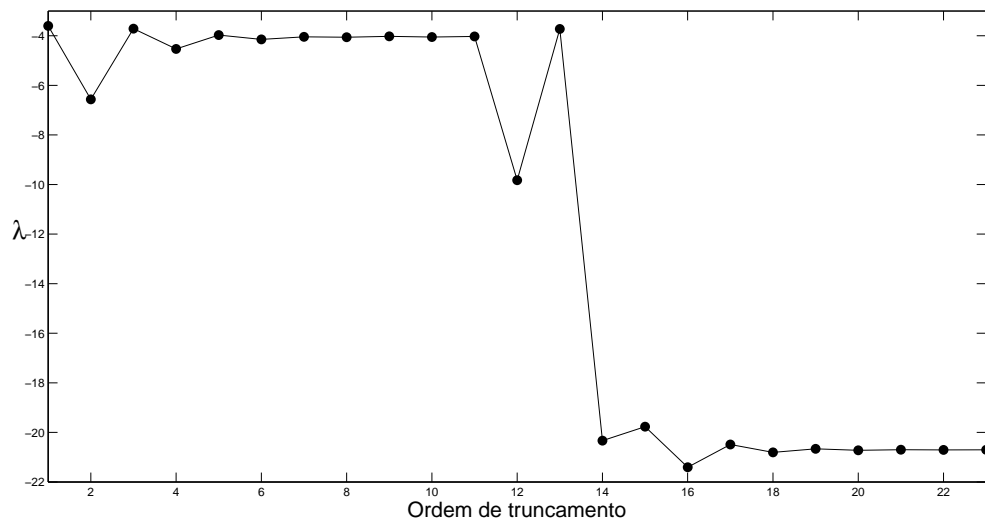


Figura 4.35 – Expoente de Lyapunov para a intensidade de radiação.

4.3.2.3 Problema 8

Neste problema mostramos os resultados para função de albedo exponencial descrita abaixo.

$$\omega(\tau) = 0,9 \exp(-\tau) \quad (4.10)$$

com os seguintes parâmetros: $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$, $\rho_1^s = \rho_2^s = \rho_1^d = \rho_2^d = 0$, $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = 0$, $N_c = 0,5$ e com grau de anisotropia $L = 299$ onde os coeficientes das expansões da função de fase são determinados pela Equação 4.2. Avaliamos a temperatura normalizada dada pela Equação 2.21, bem como os fluxos condutivo, radiativo e total pelas Equações 4.1. Na Tabela 4.16, exibimos os valores obtidos para temperatura e fluxos tendo o comprimento do sistema recursivo o valor $\mathcal{M} = 10$. É relevante notar que, após a experiência numérica de simulações, percebemos que para o valor de $N = 100$, resultados com a precisão prescrita são alcançados para o valor mencionado para $\mathcal{M} = 10$.

Tabela 4.16 – Temperatura e fluxos condutivo, radiativo e total para $D_{10}LTS_{100}$ com

$$\omega(\tau) = 0,9 \exp(-\tau).$$

τ	θ	Q_c	Q_r	Q
0	1,000000	0,939417	0,455723	1,395140
0,25	0,766672	0,934742	0,460398	1,395140
0,5	0,528089	0,981624	0,413517	1,395140
0,75	0,273522	1,056594	0,338546	1,395140
1	0,000000	1,129889	0,265251	1,395140

Apresentamos nas Figuras 4.36 e 4.37 as respectivas temperatura e fluxos:

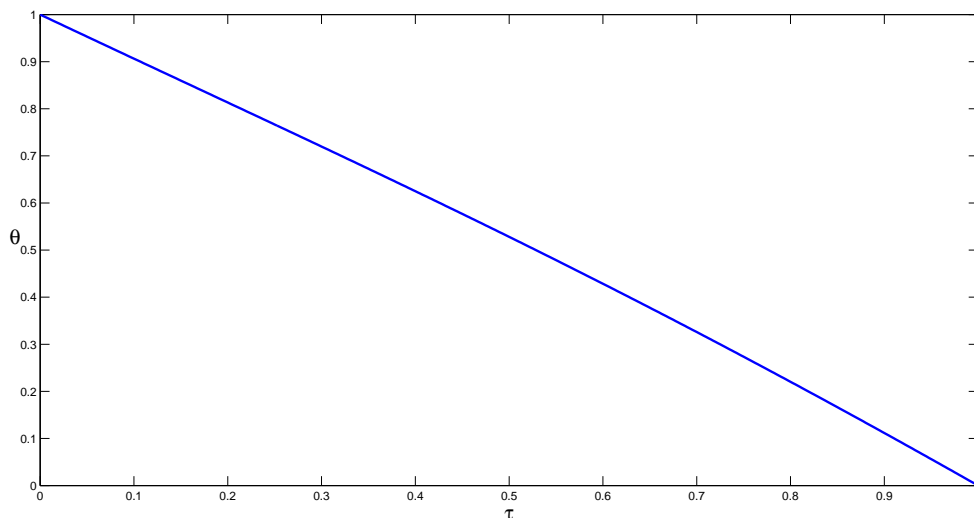


Figura 4.36 – Gráfico de temperatura para $\omega(\tau) = 0,9 \exp(-\tau)$.

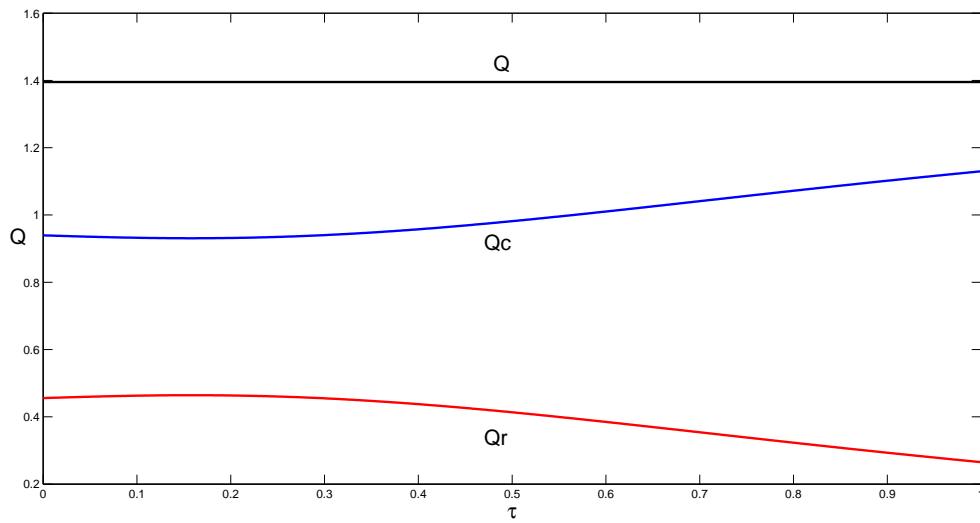


Figura 4.37 – Gráficos de fluxos radiativo, condutivo e total para $\omega(\tau) = 0,9 \exp(-\tau)$.

Abaixo, nas Figuras 4.38 e 4.39 ilustramos o termo residual e o expoente de Lyapunov para a intensidade de radiação da solução do problema proposto.

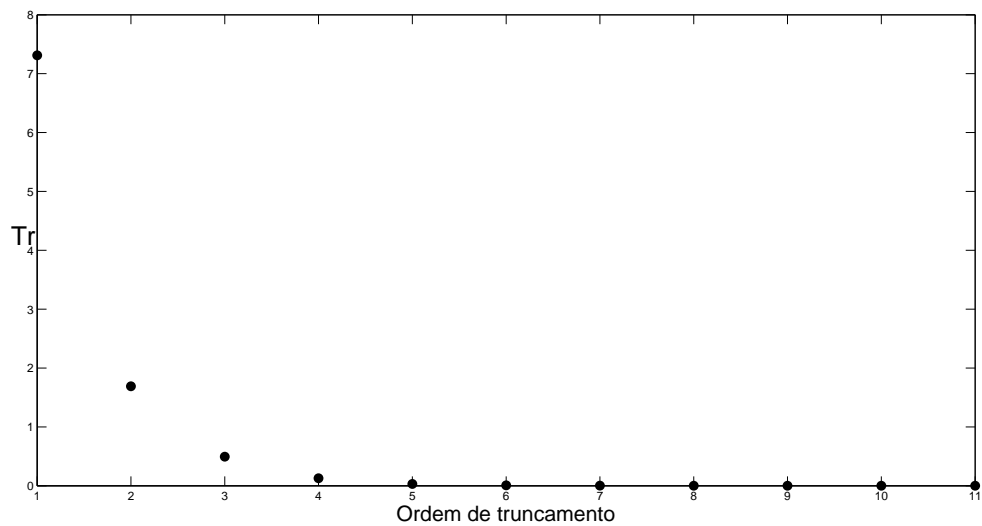


Figura 4.38 – Resíduo para a intensidade de radiação.

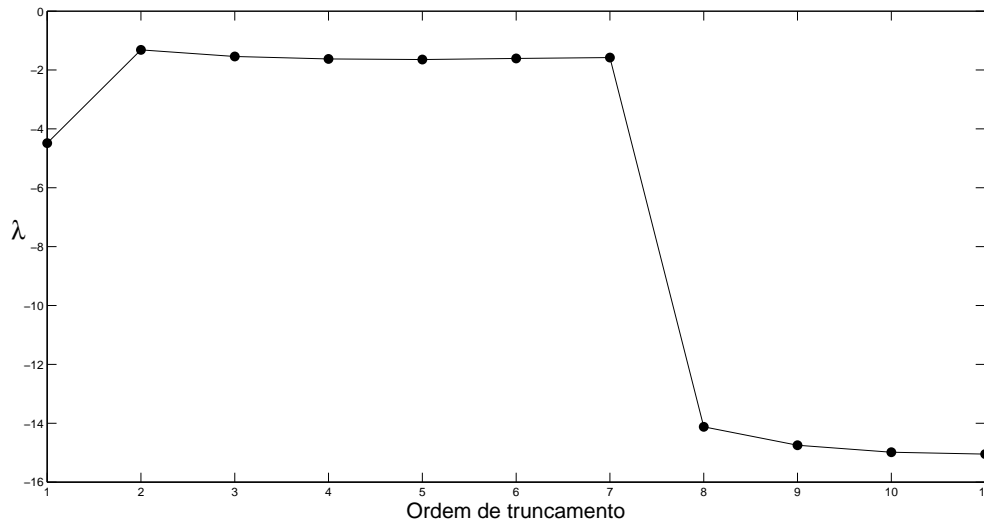


Figura 4.39 – Expoente de Lyapunov para a intensidade de radiação.

4.3.2.4 Problema 9

Agora ilustramos os resultados para função de albedo polinomial de segundo grau descrita abaixo.

$$\omega(\tau) = 0,45 + 0,4\tau + 0,12\tau^2 \quad (4.11)$$

com os seguintes parâmetros: $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$, $\rho_1^s = \rho_2^s = \rho_1^d = \rho_2^d = 0$, $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = 0$, $N_c = 0,5$ e com grau de anisotropia $L = 299$ onde os coeficientes das expansões da função de fase são determinados pela Equação 4.2. Avaliamos a temperatura normalizada dada pela Equação 2.21 e os fluxos condutivo, radiativo e total pelas Equações 4.1. Na Tabela 4.17, exibimos os valores obtidos para temperatura e fluxos tendo o comprimento do sistema recursivo o valor $\mathcal{M} = 12$. É relevante notar que, após a experiência numérica de simulações, percebemos que para o valor de $N = 100$, resultados com a precisão prescrita são alcançados para o valor mencionado para $\mathcal{M} = 12$.

Tabela 4.17 – Temperatura e fluxos condutivo, radiativo e total para $D_{12}LTS_{100}$ com

$$\omega(\tau) = 0,45 + 0,4\tau + 0,12\tau^2.$$

τ	θ	Q_c	Q_r	Q
0	1,000000	0,978492	0,420775	1,399267
0,25	0,760760	0,956657	0,442610	1,399267
0,5	0,516632	0,999081	0,400187	1,399267
0,75	0,261729	1,037010	0,362257	1,399267
1	0,000000	1,052933	0,346334	1,399267

Apresentamos nas Figuras 4.40 e 4.41 as respectivas temperatura e fluxos:

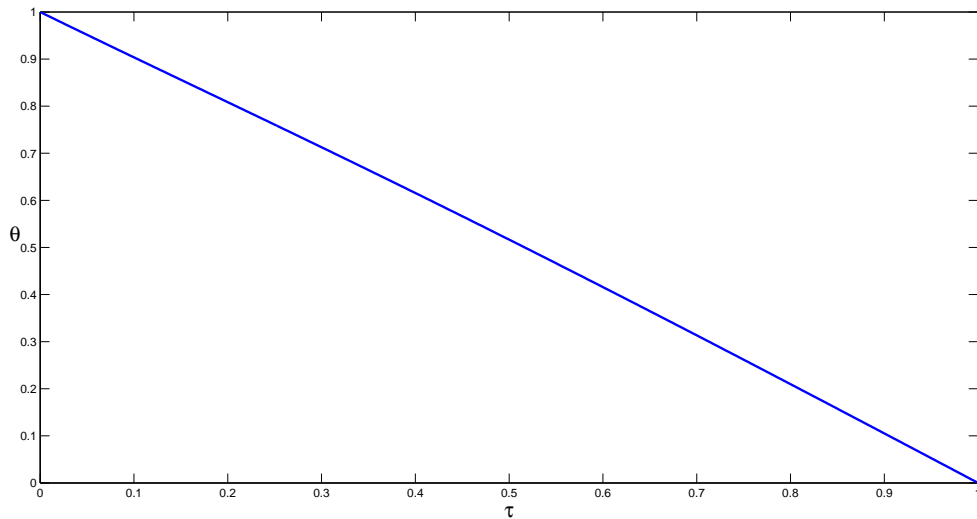


Figura 4.40 – Gráfico de temperatura para $\omega(\tau) = 0,45 + 0,4\tau + 0,12\tau^2$.

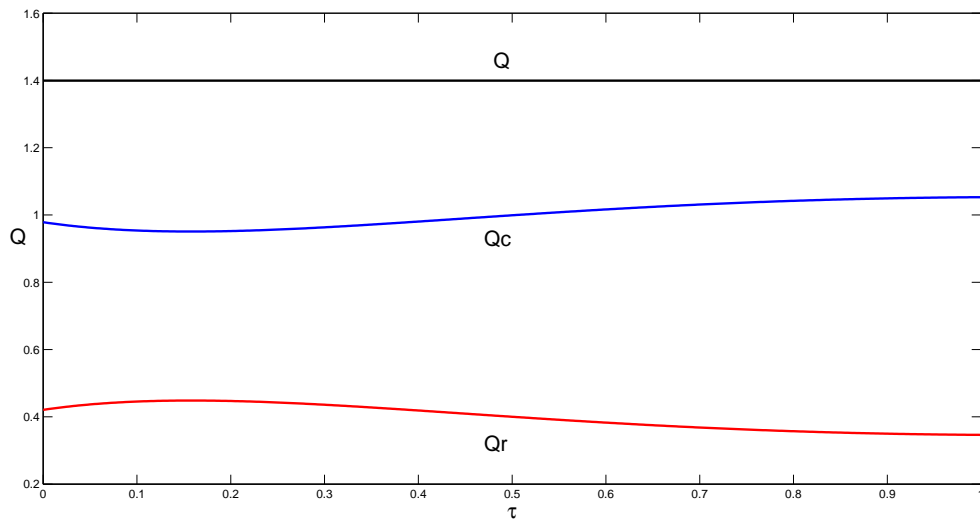


Figura 4.41 – Gráficos de fluxos radiativo, condutivo e total para $\omega(\tau) = 0,45 + 0,4\tau + 0,12\tau^2$.

Abaixo, nas Figuras 4.42 e 4.43 ilustramos o termo residual e o expoente de Lyapunov para a intensidade de radiação da solução do problema proposto.

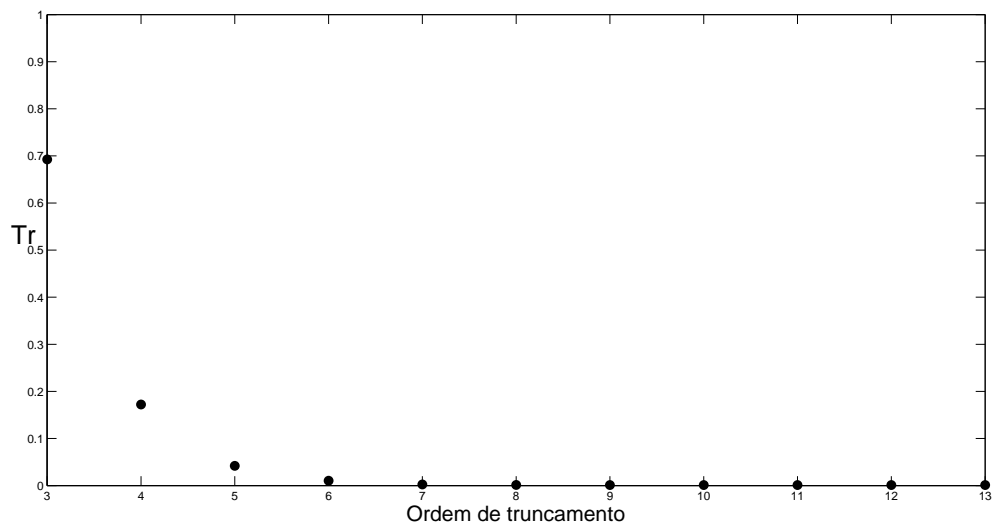


Figura 4.42 – Resíduo para a intensidade de radiação.

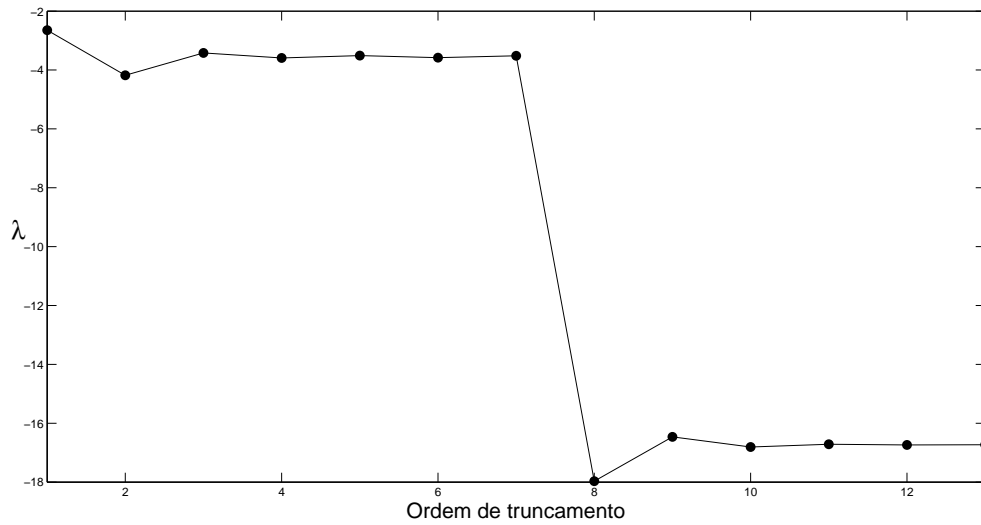


Figura 4.43 – Expoente de Lyapunov para a intensidade de radiação.

4.3.2.5 Problema 10

O último problema anisotrópico mostramos os resultados para função de albedo seno.

$$\omega(\tau) = 0,4 - 0,4 \sin(\pi\tau) \quad (4.12)$$

com os seguintes parâmetros físicos: $\epsilon_1 = 0,6$, $\epsilon_2 = 0,4$, $\rho_1^s = 0,1$, $\rho_2^s = 0,2$, $\rho_1^d = 0,3$, $\rho_2^d = 0,4$, $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = 0,5$, $N_c = 0,1$ e com grau de anisotropia $L = 299$ onde os coeficientes das expansões da função de fase são determinados pela Equação 4.2. Avaliamos a temperatura normalizada dada pela Equação 2.21. Os fluxos condutivo, radiativo e total foram avaliados através das Equações 4.1. Na Tabela 4.18, exibimos os valores obtidos para temperatura e fluxos tendo o comprimento do sistema recursivo o valor $\mathcal{M} = 84$.

Tabela 4.18 – Temperatura e fluxos condutivo, radiativo e total para $D_{84}LTS_{100}$ com

$$\omega(\tau) = 0,4 - 0,4 \text{ sen}(\pi\tau).$$

τ	θ	Q_c	Q_r	Q
0	1,000000	0,594441	0,770819	1,365260
0,25	0,891371	0,339026	1,026234	1,365260
0,5	0,807775	0,364510	1,000750	1,365260
0,75	0,692727	0,588499	0,776761	1,365260
1	0,500000	0,967770	0,397490	1,365260

Apresentamos nas Figuras 4.44 e 4.45 as respectivas temperatura e fluxos:

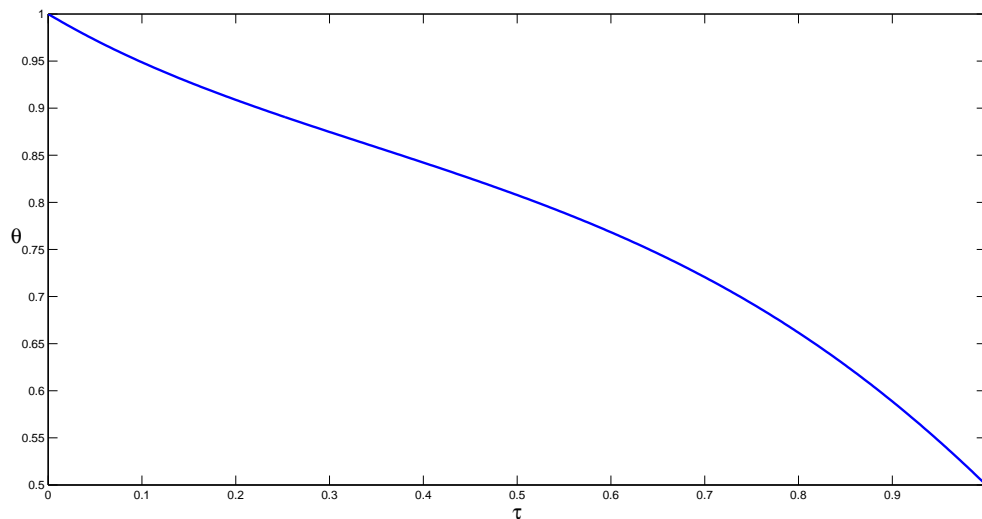


Figura 4.44 – Gráfico de temperatura para $\omega(\tau) = 0,4 - 0,4 \text{ sen}(\pi\tau)$.

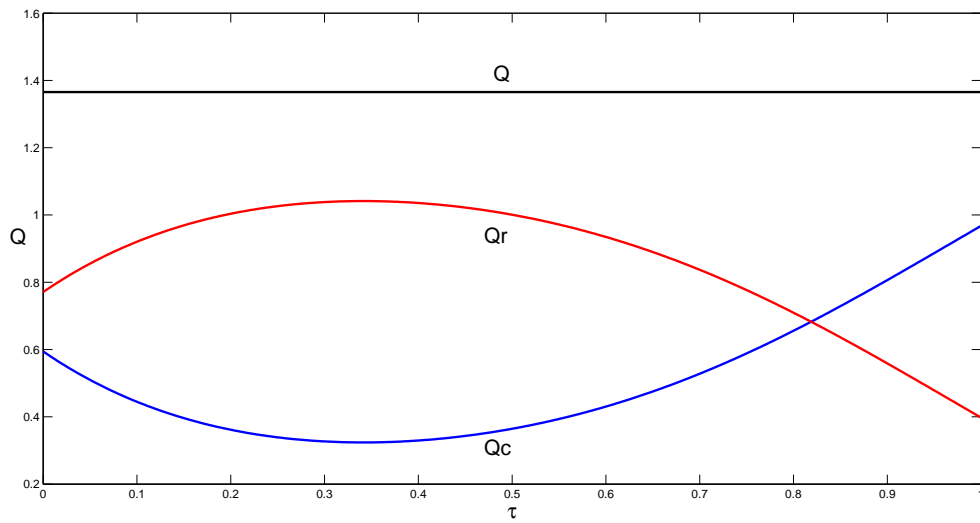


Figura 4.45 – Gráficos de fluxos radiativo, condutivo e total para $\omega(\tau) = 0,4 - 0,4 \text{ sen}(\pi\tau)$.

Abaixo, nas Figuras 4.46 e 4.47 ilustramos o termo residual e o expoente de Lyapunov para a intensidade de radiação da solução do problema proposto.

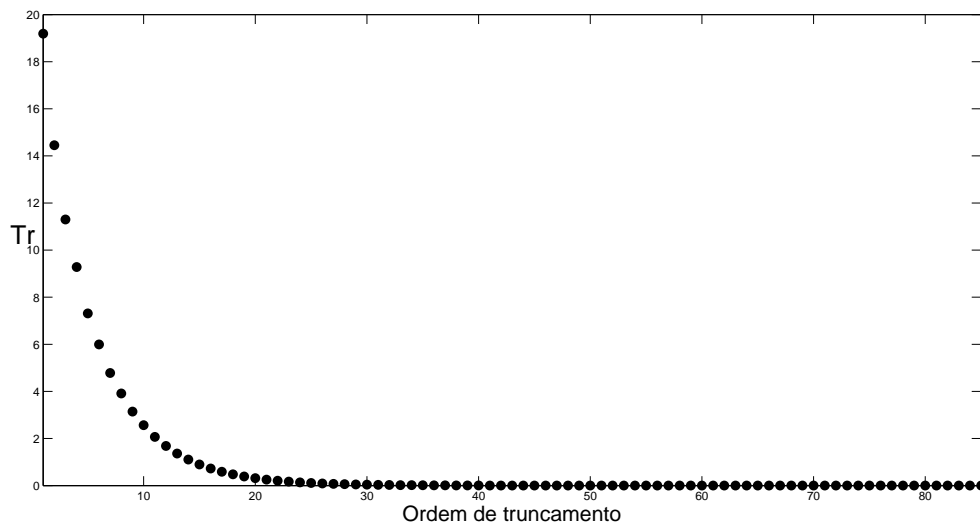


Figura 4.46 – Resíduo para a intensidade de radiação.

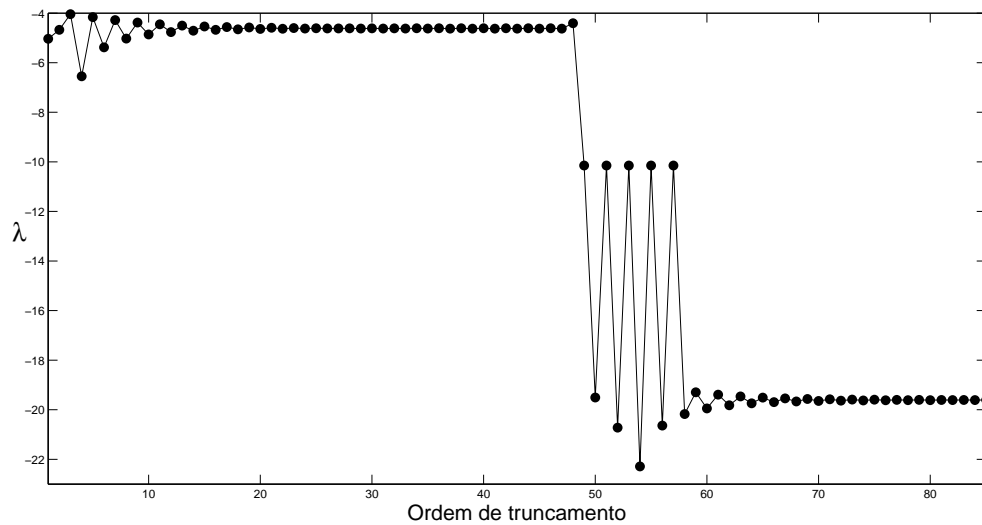


Figura 4.47 – Expoente de Lyapunov para a intensidade de radiação.

Observamos nas Figuras 4.12, 4.16, 4.20, 4.24, 4.34, 4.38, 4.42, 4.46, que os termos residuais de todos os problemas apresentados tendem a zero. De fato, os valores dos termos residuais ficam inferiores a 10^{-4} . Isto implica que o erro com o truncamento também tende a zero. Assim, podemos afirmar que o aumento do número de termos do esquema recursivo proposto gera uma boa aproximação para a solução do problema considerado e também mostra a estabilidade do esquema recursivo proposto para resolvermos a transferência de calor com condução e radiação simultaneamente em um meio que apresenta diferentes características. O decaimento negativo do expoente de Lyapunov apresentado nas Figuras 4.13, 4.17, 4.21, 4.25, 4.35, 4.39, 4.43, 4.47, nos confirma a estabilidade da solução proposta e reforça a afirmação de convergência exponencial da solução proposta. Neste ponto é importante mencionarmos que este tipo de análise de convergência é válida para cada conjunto de parâmetros considerado. Como resolvemos a Equação 3.1 para diferentes funções de albedo, e diferentes condições de contorno, consideramos a solução proposta útil e uma ferramenta poderosa para descrever um amplo espectro de situações físicas. O comportamento do resíduo calculado para todos os casos estudados nos permite dizer que não existe um grande erro em todo domínio, desde que o sistema recursivo seja truncado numa precisão desejada. Outro fato importante é que todos os expoentes de Lyapunov obtidos são negativos o que reforça a afirmação de convergência exponencial da solução proposta.

4.4 Ilustração de algumas intensidades de radiação

Nesta seção, apresentamos alguns gráficos de intensidade de radiação angular. Escolhemos o problema 6 para ilustrar as intensidades. Este problema é anisotrópico e simula o caso de duas placas, ou seja, descontínuo. Portanto, escolhemos pontos no contorno $\tau = 0$ e $\tau = 1$ e os pontos $\tau = 0,45$ e $\tau = 0,55$ em torno do ponto de descontinuidade $\tau = 0,5$.

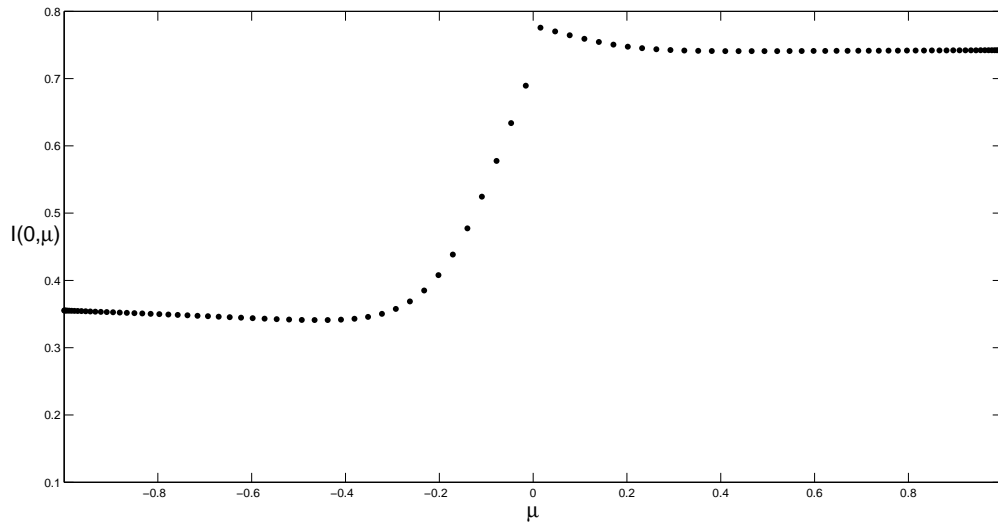


Figura 4.48 – Gráficos da intensidade de radiação em $\tau = 0$ do problema 6.

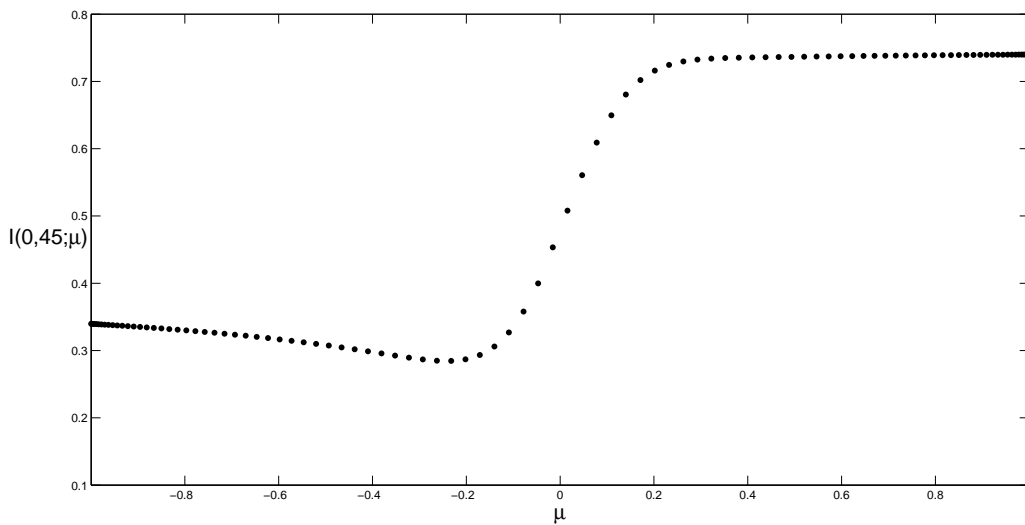


Figura 4.49 – Gráficos da intensidade de radiação em $\tau = 0,45$ do problema 6.

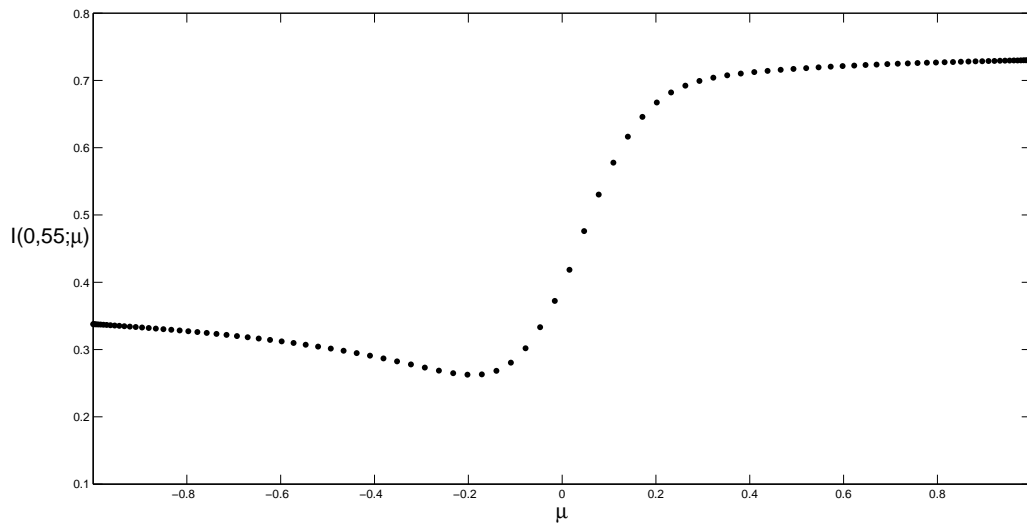


Figura 4.50 – Gráficos da intensidade de radiação em $\tau = 0,55$ do problema 6.

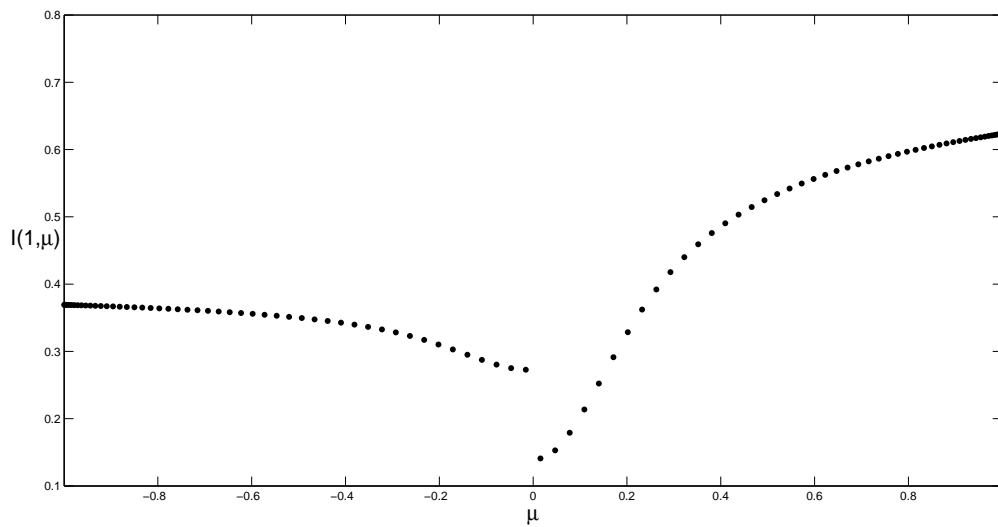


Figura 4.51 – Gráficos da intensidade de radiação em $\tau = 1$ do problema 6.

As Figuras 4.48, 4.49, 4.50 e 4.51 apresentam o gráfico das intensidades de radiação, em $\tau = 0$ e $\tau = 1$ e próximos da interface em $\tau = 0,45$ e $\tau = 0,55$.

5 UM APRIMORAMENTO DA SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA RADIATIVO-CONDUTIVO S_N EM UMA PLACA PLANA EM UM MEIO PARTICIPANTE CINZA

Neste capítulo apresentamos um aprimoramento da solução para o problema radiativo-condutivo S_N em uma placa plana em um meio participante cinza. O método aqui descrito apresenta instabilidade nos resultados quando utilizamos valores muito pequenos para o parâmetro N_c ou quando temos placas planas com comprimento grandes. Para contornarmos este problema, baseado na ideia desenvolvida por Ladeia et al., 2016, 2018, dividimos cada parcela da soma de Adomian (\widehat{A}_n) em somas de componentes ainda menores que serão introduzidas posteriormente, conforme descrevemos abaixo. Este procedimento nos ajuda a estabilizar a soma contornando erros de over flow.

Sabemos da seção 2.2.1 que a série de polinômios de Adomian é escrita por:

$$\theta^4(\tau) = \widehat{A}_0(\tau) + \widehat{A}_1(\tau) + \widehat{A}_3(\tau) + \widehat{A}_4(\tau) + \widehat{A}_5(\tau) \dots \quad (5.1)$$

Então reescrevemos este somatório dividindo por uma constante adequada K . Assim a nova soma fica:

$$\theta^4(\tau) = K \left(\frac{\widehat{A}_0(\tau)}{K} + \frac{\widehat{A}_1(\tau)}{K} + \frac{\widehat{A}_3(\tau)}{K} + \frac{\widehat{A}_4(\tau)}{K} + \frac{\widehat{A}_5(\tau)}{K} \dots \right). \quad (5.2)$$

Portanto, para que não obtivéssemos mais o problema de overflow fizemos:

$$\theta^4(\tau) = \widehat{B}_0(\tau) + \widehat{B}_1(\tau) + \widehat{B}_3(\tau) + \widehat{B}_4(\tau) + \widehat{B}_5(\tau) \dots \quad (5.3)$$

em que

$$\begin{aligned}
\widehat{B}_0(\tau) &= \frac{\widehat{A}_0(\tau)}{K}, \\
\widehat{B}_1(\tau) &= \frac{\widehat{A}_1(\tau)}{K} + \frac{\widehat{A}_0(\tau)}{K}, \\
\widehat{B}_2(\tau) &= \frac{\widehat{A}_2(\tau)}{K} + \frac{\widehat{A}_0(\tau)}{K}, \\
&\vdots \\
\widehat{B}_{K-1}(\tau) &= \frac{\widehat{A}_{K-1}(\tau)}{K} + \frac{\widehat{A}_0(\tau)}{K}, \\
\widehat{B}_K(\tau) &= \frac{\widehat{A}_K(\tau)}{K} + \frac{\widehat{A}_1(\tau)}{K}, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{5.4}$$

desta forma a solução do sistema recursivo fica da forma:

$$\mathbf{I}^m(\tau) = \mathbf{X}\mathbf{E}^{\mathbf{D}(\tau)}\mathbf{V}^m + \mathbf{X}\mathbf{e}^{\mathbf{D}\tau}\mathbf{X}^{-1} * \left(\widehat{\mathbf{S}}^{m-1}(\tau) + (1 - \omega(\tau))\widehat{B}_{m-1}(\tau)\mathbf{M} \right). \tag{5.5}$$

Nos exemplos abaixo comparamos os resultados obtidos para temperatura e fluxos condutivo, radiativo e total pelo nosso método com os resultados encontrados por Siewert e Thomas, 1991.

Problema 1: Mostramos os resultados numéricos para temperatura e fluxos condutivo, radiativo e total para uma placa plana de comprimento $\tau_0 = 3$ e com os seguintes parâmetros físicos : $\omega = 0,9$, $\epsilon_1 = 0,7$, $\epsilon_2 = 0,6$, $\rho_1^s = 0,1$, $\rho_2^s = 0,3$, $\rho_1^d = 0,2$, $\rho_2^d = 0,1$, $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = 0,5$, $N_c = 0,05$ e isotrópico. O valor escolhido para K foi três. Avaliamos a temperatura normalizada dada pela Equação 2.21, bem como os fluxos condutivo, radiativo e total através das Equações 4.1. Na Tabela 5.1, exibimos os valores obtidos para temperatura e fluxos tendo o comprimento do sistema recursivo o valor $\mathcal{M} = 300$. Na Tabela 5.2 apresentamos os resultados numéricos encontrados no artigo de Siewert e Thomas, 1991.

Tabela 5.1 – Resultados numéricos com $K = 3$ utilizando o método proposto.

τ/τ_0	θ	Q_c	Q_r	Q
0	1	0,266277853	1,043418849	1,309696701
0,1	0,932463854	0,192752769	1,116943932	1,309696701
0,2	0,88148675	0,149422609	1,160274092	1,309696701
0,3	0,841963953	0,115155416	1,194541286	1,309696701
0,4	0,811590727	0,089151832	1,220544869	1,309696701
0,5	0,786964771	0,078279327	1,231417375	1,309696701
0,6	0,762260315	0,09091126	1,218785441	1,309696701
0,7	0,729538042	0,132165566	1,177531135	1,309696701
0,8	0,680067574	0,202226258	1,107470444	1,309696701
0,9	0,605690835	0,297277386	1,012419316	1,309696701
1	0,5	0,40889998	0,900796721	1,309696701

Tabela 5.2 – Resultados numéricos de Siewert [Siewert e Thomas, 1991].

τ/τ_0	θ	Q_c	Q_r	Q
0	1	0,200827	1,09931	1,30014
0,1	0,952498	0,12682	1,17332	1,30014
0,2	0,919507	0,0979176	1,20222	1,30014
0,3	0,891715	0,0897962	1,21034	1,30014
0,4	0,864462	0,093559	1,20658	1,30014
0,5	0,834612	0,107116	1,19302	1,30014
0,6	0,799059	0,132088	1,16805	1,30014
0,7	0,753816	0,172532	1,12761	1,30014
0,8	0,69347	0,233627	1,06651	1,30014
0,9	0,6112	0,318904	0,981236	1,30014
1	0,5	0,424849	0,875291	1,30014

Problema 2: Apresentamos os resultados numéricos para temperatura e fluxos condutivo, radiativo e total para uma placa plana de comprimento $\tau_0 = 3$ com os seguintes parâmetros físicos: $\omega = 0,99$, $\epsilon_1 = 0,8$, $\epsilon_2 = 0,8$, $\rho_1^s = 0,1$, $\rho_2^s = 0,1$, $\rho_1^d = 0,1$, $\rho_2^d = 0,1$, $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = 0,5$, $N_c = 0,05$ e com grau de anisotropia $L = 299$ onde os coeficientes das expansões da função de fase são determinados pela Equação 4.2. O valor escolhido para K foi três. Avaliamos a temperatura normalizada dada pela Equação 2.21 e os fluxos condutivo, radiativo e total pelas Equações 4.1. Na Tabela 5.3, exibimos os valores obtidos para temperatura e fluxos tendo o comprimento do sistema recursivo o valor $\mathcal{M} = 300$. Na Tabela 5.4 apresentamos os resultados numéricos encontrados no artigo de Siewert e Thomas, 1991.

Tabela 5.3 – Resultados numéricos com $K = 3$ utilizando o método proposto.

τ/τ_0	θ	Q_c	Q_r	Q
0	1	0,174200007	3,017704493	3,1919045
0,1	0,950990098	0,154173334	3,037731166	3,1919045
0,2	0,906615412	0,142963167	3,048941332	3,1919045
0,3	0,864506428	0,138830343	3,053074157	3,1919045
0,4	0,8227285	0,140596749	3,051307751	3,1919045
0,5	0,779639701	0,147456626	3,044447874	3,1919045
0,6	0,733805423	0,158810245	3,033094255	3,1919045
0,7	0,683955591	0,174143271	3,017761229	3,1919045
0,8	0,628973104	0,192937425	2,998967074	3,1919045
0,9	0,567905665	0,214601572	2,977302928	3,1919045
1	0,5	0,238360364	2,953544136	3,1919045

Tabela 5.4 – Resultados numéricos de Siewert [Siewert e Thomas, 1991].

τ/τ_0	θ	Q_c	Q_r	Q
0	1	0,174205	3,01765	3,19186
0,1	0,950989	0,154176	3,03768	3,19186
0,2	0,906614	0,142965	3,04889	3,19186
0,3	0,864505	0,138831	3,05303	3,19186
0,4	0,822726	0,140597	3,05126	3,19186
0,5	0,779637	0,147456	3,0444	3,19186
0,6	0,733803	0,158809	3,03305	3,19186
0,7	0,683954	0,174142	3,01772	3,19186
0,8	0,628972	0,192936	2,99892	3,19186
0,9	0,567905	0,2146	2,97726	3,19186
1	0,5	0,23836	2,9535	3,19186

Observamos através dos problemas 1 e 2 que a estratégia adotada para contornamos o problema de overflow já produz bons resultados. Porém, ainda estamos em fase de desenvolvimento deste artifício. Por este motivo, não faz sentido aqui analisarmos a qualidade da nossa solução através do resíduo e do expoente de Lyapunov.

Se analisarmos o termo fonte no problema 1, Figura 5.1, vimos que, mesmo com trezentas recursões, o termo fonte continua variando muito indicando que a fonte ainda traz contribuições para as próximas recursões. Porém, se deixamos mais recursões as respostas se distanciam muito das apresentadas por Siewert na Tabela 5.2. De fato, com mais recursões chegamos a resultados que não fazem sentido fisicamente.

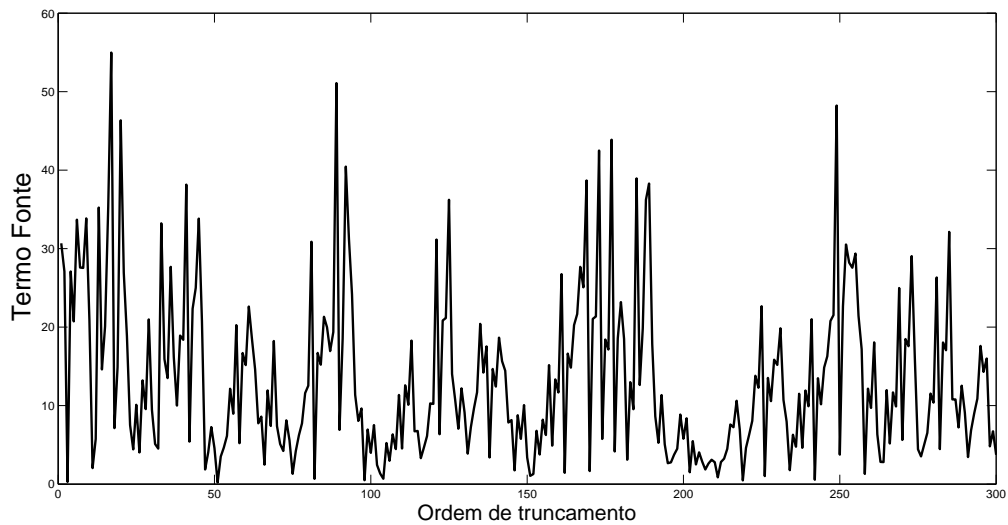


Figura 5.1 – Contribuição da fonte a cada recursão para o exemplo 1.

Por outro lado se analisamos o termo fonte do exemplo 2, Figura 5.2, vimos que ele tende a zero. E isto já acontece partir da vigésima recursão. Portanto, o termo fonte já não contribui mais para as recursões seguintes. Este fato acabou refletindo nos resultados finais. Basta compararmos os resultados das Tabelas 5.3 e 5.4.

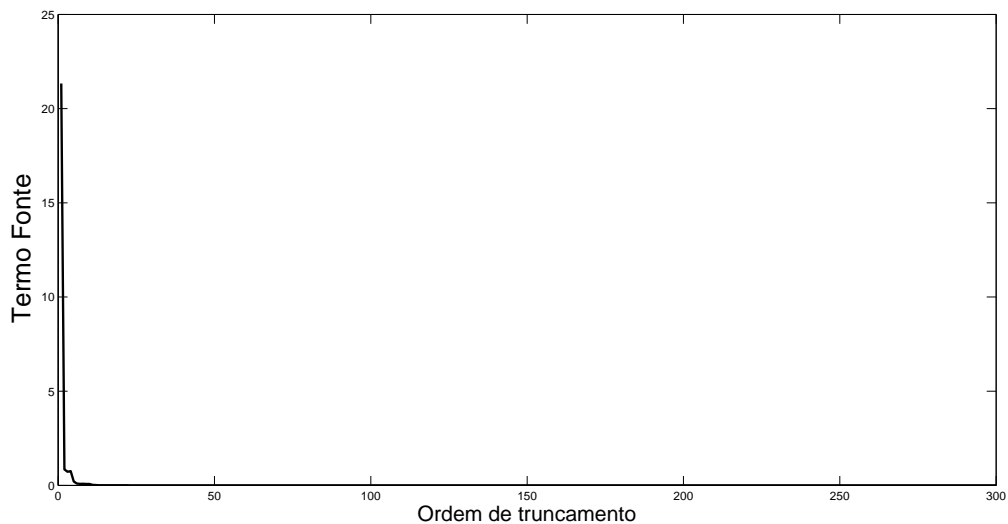


Figura 5.2 – Contribuição da fonte a cada recursão para o exemplo 2.

O fato da mesma estratégia servir bem para uns casos e para outros não, nos leva a crer que estamos diante de erro aritmético produzido pelo esquema de Adomian.

Desta forma, continuaremos nosso estudo melhorando a forma de contornar o problema de overflow até chegarmos numa estratégia definitiva. Quando dizemos que ainda temos que melhorar a nossa estratégia, estamos dizendo que continuaremos modificando a forma de somarmos os polinômios de Adomian.

Ao lembrarmos a seção 2.2.1 observamos que Adomian mostra como expandir um termo não linear em uma soma infinita de polinômios. No artigo [Adomian, 1988] Adomian apresenta duas formas. Assim, essa soma não é única. Aliás, existe uma infinidade de possibilidades de fazer este somatório.

Vimos que um caminho é dividirmos cada parcela da soma de Adomian (\widehat{A}_n) em somas de componentes ainda menores. Portanto, nosso foco futuramente é descobrir uma nova forma de decompor o termo θ^4 . E assim, resolvendo definitivamente os problemas de overflow sem produzir erros aritméticos.

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho apresentamos uma representação analítica da solução do problema de transferência radiativa-condutiva não linear S_N com o coeficiente de albedo representado através de funções que dependem da variável espacial em uma placa plana. A ideia principal consiste na construção de um sistema recursivo de equações S_N com coeficiente de albedo médio e seguindo a ideia do Método de Decomposição. Por este procedimento, resolvemos a equação de transferência radiativa-condutiva em todo domínio, assumindo um valor médio para o coeficiente de albedo. A influência da heterogeneidade é somada ao termo fonte que carrega a informação do termo não linear. Quando dizemos representação analítica da solução significa que a única aproximação feita ao longo do desenvolvimento da solução é o truncamento do sistema recursivo. Desta forma, vale a pena destacar, que a escolha do sistema recursivo é feita com o objetivo de alcançar a precisão escolhida para os resultados. Para completar, a análise matemática dos resultados também mostramos uma análise de convergência da solução apresentando uma estimativa de erro máximo em módulo para os termos residuais que nos permite controlar o erro máximo e escolher corretamente o comprimento do sistema recursivo. Além disso, reforçamos nossa análise mostrando que a convergência dos resultados da solução encontrados é exponencial avaliando do coeficiente de Lyapunov para sucessivas soluções das equações do sistema recursivo. Os valores negativos obtidos para estes coeficientes confirmam a afirmação da convergência da solução. Para conhecimento, este tipo de solução com análise de convergência não é encontrado na literatura. Estamos cientes da instabilidade numérica manifestada nos resultados para este tipo de problema com pequeno valor do parâmetro N_c . Assim, contornamos este problema dividindo cada parcela da soma de Adomian (\hat{A}_n) em somas de componentes ainda menores que foram introduzidas posteriormente. Os resultados apresentados são compatíveis com os da literatura. Porém, ainda encontramos erros referentes à convergência da solução que observamos estarem associados a problemas aritméticos. Desta forma, julgamos pertinente descobrir novas formas de decompor o termo θ^4 . Assim, por uma questão de completude matemática, para contornar essa instabilidade, concentraremos nossa atenção futura na questão de encontrar uma solução estável para esse tipo de problema, para um pequeno valor do parâmetro N_c , também seguindo a ideia do Método de Decomposição.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abulwafa, E. Conductive-radiative heat transfer in an inhomogeneous slab with directional reflecting boundaries, **Journal of Physics D: Applied Physics**, vol. 32, p. 1626–1632, 1999.

Adomian, G. A Review of the Decomposition Method in Applied Mathematics, **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, vol. 135, p. 501–544, 1988.

Azevedo, F., Sauter, E., Thompson, M., e Vilhena, M. Existence theory and simulations for one-dimensional radiative flows, **Annals of Nuclear Energy**, vol. 38, p. 1115–1124, 2011a.

Azevedo, F., Sauter, E., Thompson, M., e Vilhena, M. Existence theory for a one-dimensional problem arising from the boundary layer analysis of radiative flows, **Progress in Nuclear Energy**, vol. 53, p. 1105–1113, 2011b.

Barrichello, L. **Formulação analítica da solução do problema de ordenadas discretas unidimensional**. Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1992.

Boichenko, V., Leonov, G., e Reitmann, V. **Dimension Theory for Ordinary Differential Equations**. Teubner, Stuttgart, 2005.

Brancher, J. **Formulação Analítica para a Solução de ordenadas discretas para o Método LTS_N , para valores de N grandes**. Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1998.

Case, K. Elementary Solution of Transport Equations and their Application, **Annals of physics**, vol. 9, p. 1–23, 1960.

Cengel, Y. e Ozisik, M. Radiative Transfer in Plane Parallel Medium with Space-Dependent Albedo $\omega(x)$, **International Journal Of Heat and Mass Transfer**, vol. 27(10), p. 1919–1922, 1984.

Chandrasekhar, S. **Radiative Transfer**. Dover Publications Inc., New York, 1960.

El Wakil, S., Abulwafa, E., Degheidy, A., e El Shahat, A. The variational Pomraning-Eddington Method for a Plane Medium with Specular Boundaries, **Physica Scripta**, vol. 50, p. 135–139, 1994.

Elghazaly, A. Coupled conductive-radiative heat transfer problem for two-layer slab, **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, vol. 102, p. 482–491, 2006.

Garcia, R. e Siewert, C. Radiative Transfer in Finite Inhomogeneous Plane-Parallel atmospheres, **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, vol. 27(2), p. 141–148, 1982.

Gonçalves, G., Orengo, G., Vilhena, M., e Graça, C. LTS_N solution of the adjoint neutron transport equation with arbitrary source for high order of quadrature in a homogeneous slab, **Annals of Nuclear Energy**, vol. 29, p. 561–569, 2002.

Gonçalves, G., Segatto, C., e Vilhena, M. The LTS_N particular solution in a slab for an arbitrary source and large order of quadrature, **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, vol. 66, p. 271–276, 2000.

Incropera, F. **Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa**. LTC, Brasil, 2011.

Kovtanyuk, A., Botkin, N., e Hoffmann, K. Numerical simulations of a coupled radiative-conductive heat transfer model using a modified Monte Carlo method, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, vol. 55, p. 649–654, 2012.

Kovtanyuk, A., Chebotarev, A., Botkin, N., e Hoffmann, K. Solvability of P_1 approximation of a conductive-radiative heat transfer problem, **Applied Mathematics and Computation**, vol. 249, p. 247–252, 2014.

Ladeia, C., Bodmann, B., e Vilhena, M. The Radiative-Conductive Transfer Equation in Cylindrical Geometry, **Journal of Computational and Theoretical Transport**, vol. 45(5), p. 3–5, 2016.

Ladeia, C., Bodmann, B., e Vilhena, M. The radiative conductive transfer equation in cylinder geometry: Semi-analytical solution and a point analysis of convergence, **Journal of Quantitative Spectroscopy and radiative transfer**, vol. 217, p. 338–352, 2018.

Landau, D. e Binde, K. **A Guide to Monte Carlo Simulations in Statistical Physics**. Cambridge University Press, New York, 1th edition, 2003.

Leonardo, C. e Afonso, M. **Modelagem e Simulação de Eventos Discretos Teoria e Aplicações**. Elsevier - Campus, 4th edition, 2014.

Ma, J., Sun, Y., e Li, B. Analysis of radiative transfer in a one-dimensional nonlinear anisotropic scattering medium with space-dependent scattering coefficient using spectral collocation method, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, vol. 67, p. 569–574, 2013.

Oliveira, J. **Formulação LTS_N para o Problema de Ordenada Discreta com Anisotropia**. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1993.

Ozisik, M. **Radiative Transfer and Interactions with Conduction and Convection**. JOHN WILEY & SONS, New York, 1th edition, 1973.

Pazos, R. e Vilhena, M. Convergence of the LTS_N Method: Approach of semi-groups, **Progress in Nuclear Energy**, vol. 30, p. 77–86, 1999.

Segatto, C., Vargas, R., Vilhena, M., e Bodmann, B. A solution for the non-linear S_N radiative-conductive problem in a grey plane-parallel participant medium, **International Journal of Thermal Sciences**, vol. 49, p. 1493–1499, 2010.

Segatto, C., Vilhena, M., e Gomes, M. The one-dimensional LTS_N solution in a slab with high degree of quadrature, **Annals Nuclear Energy**, vol. 26, p. 925–934, 1999.

Siegel, R. e Howell, J. **Thermal Radiation Heat Transfer**. TAYLOR& FRANCIS, New York, 4th edition, 2002.

Siewert, C. A improved iterative method for solving a class of coupled conductive-radiative heat-transfer problems, **Journal Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 54, p. 599–605, 1995.

Siewert, C. e Thomas, J. A computational method for solving a class of coupled conductive-radiative heat transfer problems, **Journal Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 45, p. 273–281, 1991.

Thompson, M., Vilhena, M., e Bodmann, B. Existence theory for radiative flows, **Transport Theory and Statistical Physics**, vol. 37, p. 307–326, 2000.

Vargas, R., Segatto, C., e Vilhena, M. On the Analytical Solution of the S_N Radiative Transport Equation in a Slab for a Space-dependent Albedo Coefficient, **Journal of Physics: Conference Series**, vol. 369, 2012.

Vargas, R. e Vilhena, M. A closed-form solution for the one-dimensional radiative conductive problem by the decomposition and LTS_N method, **Journal Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 61, p. 303–308, 1999.

Vilhena, M. e Barrichello, L. A new analytical Approach to solve the Neutron transport equation, **Kerntechnik**, vol. 56, p. 334–336, 1991.

Zhang, Y., Yi, H., e Tan, H. Natural element method analysis for coupled radiative and conductive heat transfer in semitransparent medium with irregular geometries, **International Journal of Thermal Sciences**, vol. 76, p. 30–42, 2014.