Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

ESTIMAÇÃO EM PROCESSOS COM LONGA DEPENDÊNCIA, SAZONALIDADE E INOVAÇÕES NORMAIS OU α-ESTÁVEIS

Dissertação de Mestrado

JOSIANE STEIN

Porto Alegre, 04 de abril de 2012.

Dissertação submetida por Josiane Stein*, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciência Probabilidade e Estatística, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Prof. Dr. Cleber Bisognin

Banca examinadora:
Prof. Dr. Cleber Bisognin (PPGMAT - UFRGS)
Prof. Dr. Marcio Valk (UFRGS)
Prof. Dr. Rafael Rigão de Souza (PPGMAT - UFRGS)
Prof. Dr. Sílvia Regina Costa Lopes (PPGMAT - UFRGS)

*Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior (CAPES).

Agradecimentos

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul, pelo ensino de qualidade e excelentes professores.

A todos professores que tive, se estou aqui hoje, devo a eles, me ensinaram tudo que sei. Em especial, quero agradecer ao professor Cleber Bisognin, pela orientação, compreensão, paciência e dedicação ao trabalho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior (CAPES), pelo apoio financeiro.

Aos colegas do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFRGS, pelas inúmeras horas de estudo junto, companheirismo e atenção.

Aos amigos, que compreenderam minha ausência em muitos momentos, me apoiaram e deram força sempre.

À minha família, que sempre me apoiou em todas as decisões, pelo incentivo, compreensão, carinho, confiança, dedicação, enfim, por tudo.

Resumo

Neste trabalho analisamos processos com a propriedade de longa dependência e sazonalidade, com inovações normais ou α-estáveis. Os processos com inovações α-estáveis apresentam a característica de ter variância infinita, além da propriedade de longa dependência. Apresentamos um estudo teórico de estimação paramétrica e semiparamétrica, demonstrando propriedades de novos estimadores paramétricos, baseados no estimador proposto por Fox e Taqqu (1986). Além disso, realizamos um estudo baseado em simulações de Monte Carlo, comparando os diversos estimadores definidos. Para a estimação semiparamétrica, utilizamos a metodologia de Geweke e Porter-Hudak (1983) e Reisen (1994), com suas versões robustas. Para a estimação paramétrica, empregamos as propostas de Fox e Taqqu (1986) e os novos estimadores sugeridos.

Abstract

In this work we analyze processes with the property of long dependence and seasonality, with normal or α-stable innovations. The processes with α-stable innovations present infinite variance characteristic, besides the property of long dependence. We also consider a theoretical study of parametric and semi-parametric estimates, we prove properties of new parametric estimators, they're based on the estimator proposed by Fox and Taqqu (1986). Moreover, we accomplish a study based on Monte Carlo simulations comparing the several defined estimators. For the semi-parametric estimate, we use the methodology of Geweke and Porter-Hudak (1983) and Reisen (1994), with their robust versions. For the parametric estimate, we use the proposals of Fox and Taqqu (1986) and the new suggested estimators.

Índice

Introdução

Neste trabalho, apresentamos um estudo sobre séries temporais. Uma série temporal é um conjunto de observações ordenadas no tempo. Uma característica essencial em séries temporais é que observações próximas são dependentes e, em alguns casos, mesmo observações bastante espaçadas no tempo possuem dependência, e esse fenômeno é o que chamamos de longa dependência. O objetivo de analisar o comportamento das séries temporais é encontrar modelos que expliquem o seu comportamento, sendo possível assim, fazer previsões dos futuros valores. Encontrar modelos que expliquem a série temporal possibilita descrever efetivamente o seu comportamento. Ser capaz de prever observações futuras da série possibilita fazer planos a respeito do fenômeno estudado e tomar decisões apropriadas.

Séries temporais são aplicadas nas mais diversas áreas do conhecimento. Podem ser aplicadas em economia, por exemplo, em séries que descrevem os preços diários de ações ou taxas mensais de desemprego ou taxas de exportações mensais. Também podem ser aplicadas em epidemiologia, descrevendo o número de casos contabilizados de AIDS por mês, ou de outras doenças. Outra aplicação bastante útil é em meteorologia, no registro de temperaturas ou de marés.

Existem diversos processos já propostos pela literatura para modelar séries temporais. Neste trabalho, iremos abordar dois grandes grupos de processos: processos com distribuição normal e processos com distribuição α-estável.

Dentre os processos que serão apresentados neste trabalho, encontram-se os processos ARFIMA e SARFIMA com processo de inovação tendo distribuição normal. Estes processos possuem a propriedade da longa dependência. Tal propriedade é caracterizada por função de autocovariância não absolutamente somável, no domínio do tempo, e função densidade espectral ilimitada em zero, no domínio das frequências.

No outro grupo de processos que será estudado, encontram-se os processos ARFIMA e SARFIMA com processo de inovação tendo distribuição α-estável. Estes, além de apresentarem longa dependência, tem a característica de apresentar variância infinita.

Processos ARFIMA com variância finita foram introduzidos por Granger e Joyeux (1980) e Hosking (1981), e têm sido alvo de muitos estudos. No entanto, muitas séries temporais reais possuem alta variabilidade, sendo necessária a utilização de novos processos, que apresentem variância infinita. Neste sentido, tem aumentado muito o interesse em estudar processos com distribuição α-estável, introduzidos inicialmente por Samorodnitsky e Taqqu (1994) e Kokoszka e Taqqu (1995).

O objetivo deste trabalho é utilizar diversos estimadores semiparamétricos e paramétricos para a estimação dos parâmetros nos modelos considerados. Dentre as metodologias semiparamétricas que serão abordadas, para processos com inovações normais, estão a metodologia proposta por Geweke e Porter-Hudak (1983) utilizando regressão clássica e robusta, além de uma modificação do estimador anterior utilizando o periodograma suavizado de covariâncias, proposta por Reisen (1994). Para a estimação semiparamétrica de processos com inovações α-estáveis iremos propor modificações aos estimadores descritos anteriormente, utilizando o periodograma normalizado e um novo periodograma normalizado suavizado de correlações. As metodologias paramétricas aplicadas a processos com inovações normais que serão estudadas são: o método de máxima verossimilhança exata e aproximada, esta última proposta por Fox e Taqqu (1986). Consideraremos, também, duas modificações ao estimador proposto por Fox e Taqqu (1986). Estas duas modificações ainda não são conhecidas na literatura e estão sendo sugeridas neste trabalho. Para estes novos estimadores sugeridos, provamos a consistência e a distribuição assintótica. As metodologias paramétricas que serão aplicadas a processos com inovações α-estáveis são: a proposta de Klüppelberg e Mikosch (1996) e três modificações novas deste estimador, utilizando um novo periodograma, que será definido no trabalho. Além disso, iremos sugerir dois métodos de previsão para séries temporais, um para processos com distribuição normal e outro para processos com distribuição α-estável.

Este trabalho encontra-se organizado da seguinte forma. No Capítulo 1 iremos apresentar conceitos iniciais sobre séries temporais, que serão utilizados nos capítulos posteriores. No Capítulo 2 apresentamos os modelos ARMA, ARIMA, ARFIMA, SARFIMA com distribuições normais e α-estáveis. Além disso, apresentamos dois modelos de previsão. No Capítulo 3 apresentamos diversos métodos de estimação, paramétricos e semiparamétricos. Dentre os estimadores apresentados, vários já são conhecidos na literatura, mas propomos alguns novos estimadores, visando a melhora na estimação. No Capítulo 4 descrevemos o processo de simulação utilizado, bem como os resultados encontrados. No Capítulo 5 apresentamos as conclusões e propostas para trabalhos futuros.

Capítulo 1

Conceitos e Propriedades Básicas

Vamos apresentar neste capítulo algumas definições, teoremas e proposições fundamentais à compreensão do restante deste trabalho. Na Seção 1.1 iremos abordar definições gerais de processos estocásticos, séries temporais, estacionariedade, funções média, autocovariância e autocorrelação e propriedades das mesmas. Na Seção 1.2 apresentamos os estimadores das funções média, autocovariância e autocorrelação. Finalmente, na Seção 1.3, abordamos a análise espectral de processos estocásticos, definindo a função densidade espectral, o periodograma, o periodograma suavizado de covariâncias e suas propriedades.

1.1 Análise de Séries Temporais

Começaremos com algumas definições e propriedades básicas sobre análise de séries temporais.

Definição 1.1. Sejam $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade, $(\mathcal{S}, \sigma)$ um espaço mensurável e $\mathcal{T}$ um conjunto de índices. Definimos um *Processo Estocástico* como uma coleção de funções mensuráveis de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ em $(\mathcal{S}, \sigma)$ indexadas por $\mathcal{T}$.

Lembre que um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ é composto por Ω o espaço amostral, $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra e $\mathbb{P}$ uma medida de probabilidade. Um espaço mensurável $(\mathcal{S}, \sigma)$ é um conjunto $\mathcal{S}$ dotado de uma σ-álgebra. Em geral, temos $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ e $\sigma = \beta(\mathbb{R})$ (borelianos de $\mathbb{R}$), dessa forma, um processo estocástico será uma coleção de variáveis aleatórias, indexada por $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$, em um espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Série temporal é uma realização do processo, ou seja, é uma das possíveis trajetórias da família de variáveis aleatórias $\{X_t\}_{t\in\mathcal{T}}$.

Se $\mathcal{T}$ for finito ou enumerável, como $\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_n\}$, $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$ ou $\mathcal{T} = \mathbb{N}$, diz-se que o processo tem parâmetro discreto. Se $\mathcal{T}$ for um intervalo de $\mathbb{R}$, ou mesmo o próprio $\mathbb{R}$, obtemos um processo com parâmetro contínuo.

A seguir apresentamos a definição de *distribuições finito dimensionais* de um processo estocástico.

Definição 1.2. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $t_1, t_2, \dots, t_n$ elementos quaisquer de $\mathcal{T}$. As *distribuições finito dimensionais* do processo estocástico $\{X_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ são dadas por

$$\mathcal{F}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \mathbb{P}(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n) \tag{1.1}$$

Temos que, um processo estocástico estará especificado, se conhecermos todas as suas distribuições finito dimensionais. Uma família de distribuições finito dimensionais definida a partir de um processo estocástico, satisfaz duas condições de compatibilidade:

CC1) Se $\phi : \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$ é uma permutação, então

$$\mathcal{F}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \mathcal{F}(x_{\phi(1)}, x_{\phi(2)}, \dots, x_{\phi(n)}; t_{\phi(1)}, t_{\phi(2)}, \dots, t_{\phi(n)}).$$

CC2) Se $t_{n+1} \in \mathcal{T}$, então

$$\mathcal{F}(x_1, x_2, \dots, x_n, \infty; t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}) = \mathcal{F}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n).$$

Também pode-se demonstrar, a partir do teorema de existência de Kolmogorov (ver Billingsley, 1995), que se tivermos um conjunto de distribuições finito dimensionais satisfazendo as condições CC1 e CC2, existe um processo estocástico com tais distribuições finito dimensionais associadas.

Como, na maioria dos casos, não conhecemos as distribuições finito dimensionais, precisamos de outras maneiras para obter informações sobre o processo a ser estudado. Duas dessas maneiras são as funções média e autocovariância de um processo, que estão definidas a seguir.

Definição 1.3. A *função média* de um processo $\{X_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ é definida por

$$\mu(t) = \mathbb{E}(X_t) \tag{1.2}$$

em que $t \in \mathcal{T}$.

Definição 1.4. A *função de autocovariância* de um processo $\{X_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ é

$$\gamma_X(t_1, t_2) = Cov(X_{t_1}, X_{t_2}) = \mathbb{E}(X_{t_1}X_{t_2}) - \mathbb{E}(X_{t_1})\mathbb{E}(X_{t_2}) \tag{1.3}$$

em que $t_1, t_2 \in \mathcal{T}$.

Definição 1.5. A *função de autocorrelação* de um processo $\{X_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ é

$$\rho_X(t_1, t_2) = \frac{\gamma_X(t_1, t_2)}{\sqrt{Var(X_{t_1})}\sqrt{Var(X_{t_2})}} \tag{1.4}$$

em que $t_1, t_2 \in \mathcal{T}$.

Em particular, na Definição 1.4, se tivermos $t_1 = t_2 = t$, a função de autocovariância nos dá a variância do processo:

$$\gamma_X(t, t) = Var(X_t) = \mathbb{E}(X_t^2) - \mathbb{E}^2(X_t), \quad \text{para todo} \quad t \in \mathcal{T}. \tag{1.5}$$

A seguir veremos a definição de processos fortemente estacionários.

Definição 1.6. Um processo estocástico é dito ser *fortemente estacionário* se todas as distribuições finito dimensionais permanecem as mesmas sob translações no tempo, ou seja,

$$\mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n; t_1 + \tau, \ldots, t_n + \tau) = \mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n), \tag{1.6}$$

para todo $t_1, \ldots, t_n, t_1 + \tau, \ldots, t_n + \tau$ pertencentes à $\mathcal{T}$ e $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

A Definição 1.6 é um tanto exigente e muito difícil de ser verificada na prática. Assim, apresentamos a definição de processos estocásticos fracamente estacionários.

Definição 1.7. Um processo estocástico é *fracamente estacionário* se e somente se:

a) $\mathbb{E}(X_t) = \mu(t) = \mu$, constante $\forall t \in \mathcal{T}$;

b) $\mathbb{E}(|X_t|^2) < \infty$, $\forall t \in \mathcal{T}$;

c) $\gamma_X(t_1, t_2) = \gamma_X(t_1 + t, t_2 + t)$, para $t_1, t_2, t_1 + t, t_2 + t \in \mathcal{T}$.

Neste trabalho, estaremos interessados apenas nos processos que satisfazem a Definição 1.7. Para simplificar a denominação, chamamos estes processos simplesmente de estacionários. Também iremos considerar o conjunto $\mathcal{T} = \mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Observação 1.1. Se $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ é um processo estacionário, então $\gamma_X(t_1, t_2) = \gamma_X(t_1 - t_2, 0)$, $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$. Assim, é conveniente definirmos a *função de autocovariância* em uma única variável,

$$\gamma_X(h) = \gamma_X(h, 0) = Cov(X_{t+h}, X_t), \tag{1.7}$$

para todo $t, h \in \mathbb{Z}$.

A *função de autocorrelação* é definida analogamente,

$$\rho_X(h) = \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)}, \tag{1.8}$$

para todo $t, h \in \mathbb{Z}$.

A seguir iremos apresentar algumas propriedades das funções de autocovariância e autocorrelação.

Proposição 1.1. *Seja $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ um processo estacionário real discreto, de média zero, então as funções $\gamma_X(h)$ e $\rho_X(h)$ satisfazem as seguintes propriedades:*

a) $Var(X_t) = \gamma_X(0) > 0$, *para todo $t \in \mathbb{Z}$;*

b) $\gamma_X(-h) = \gamma_X(h)$, *para todo $h \in \mathbb{N}$;*

c) $|\gamma_X(h)| \leq \gamma_X(0)$, *para todo $h \in \mathbb{Z}$;*

d) $\rho_X(0) = 1$*;*

e) $\rho_X(-h) = \rho_X(h)$, *para todo $h \in \mathbb{N}$;*

f) $|\rho_X(h)| \leq 1$, *para todo $h \in \mathbb{Z}$.*

Observação 1.2. Podemos supor, sem perda de generalidade, que o processo tem média zero, pois, caso contrário, basta considerarmos o processo $\{X_t - \mu\}_{t\in\mathbb{Z}}$, em que $\mu = \mathbb{E}(X_t)$, para todo $t \in \mathbb{Z}$.

1.2 Média, Autocovariância e Autocorrelação Amostrais

Podemos caracterizar um processo estacionário Gaussiano por sua média μ, funções de autocovariância $\gamma_X(\cdot)$ e de autocorrelação $\rho_X(\cdot)$. Como, na prática, não conhecemos previamente estas funções, precisamos de estimadores para estes valores. A seguir definimos estimadores para μ, $\gamma_X(\cdot)$ e $\rho_X(\cdot)$, obtidos pelo método dos momentos, para um processo estacionário $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ com

a) $\mathbb{E}(X_t) = \mu$, para todo $t \in \mathbb{Z}$;

b) $Var(X_t) = \sigma_X^2$, para todo $t \in \mathbb{Z}$;

c) $Cov(X_{t+h}X_t) = \gamma_X(h)$, para todo $t \in \mathbb{Z}$.

Consideramos uma série temporal com N observações, $\{X_t\}_{t=1}^N$, obtida a partir do processo $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$.

Definição 1.8. Um estimador não viciado para a média μ é a *média amostral*, definida por

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i, \tag{1.9}$$

que é a *média* das N observações obtidas da série temporal $\{X_t\}_{t=1}^N$.

Definição 1.9. Um estimador da função de autocovariância de ordem h é a *função de autocovariância amostral*, dada por

$$\hat{\gamma}_X(h) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-h}(X_i - \overline{X})(X_{i+h} - \overline{X}), \tag{1.10}$$

ou

$$\hat{\gamma}_X(h) = \frac{1}{N-h}\sum_{i=1}^{N-h}(X_i - \overline{X})(X_{i+h} - \overline{X}), \qquad \text{em que} \quad h = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1.11}$$

Observação 1.3. Neste trabalho, iremos apenas utilizar o estimador com denominador N, visto que este apresenta menor variância (para maiores detalhes ver Wei, 1990).

Definição 1.10. O estimador da função de autocorrelação de ordem h é a *função de autocorrelação amostral*, dada por

$$\hat{\rho}_X(h) = \frac{\hat{\gamma}_X(h)}{\hat{\gamma}_X(0)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N-h}(X_i - \overline{X})(X_{i+h} - \overline{X})}{\sum\limits_{i=1}^{N}(X_i - \overline{X})^2}, \qquad \text{para} \quad h \in \mathbb{N}. \tag{1.12}$$

Para obter uma análise com maiores detalhes sobre as Definições 1.8, 1.9 e 1.10, ver Wei (1990) e Brockwell e Davis (1991). Na próxima seção iremos apresentar conceitos sobre representação espectral de processos.

1.3 Representação Espectral de Processos

A análise espectral é uma área interessada em entender melhor o comportamento das séries temporais, tais como periodicidades e longa dependência. Diversos campos do conhecimento aplicam a análise espectral, como nas Engenharias, Física, Economia, Meteorologia, entre outros. A seguir veremos o conceito de função densidade espectral, que é utilizada para a análise espectral de séries temporais estacionárias. A função densidade espectral também é conhecida, simplesmente, como espectro, e, nada mais é, do que o estudo das séries temporais no domínio da frequência. De fato, a função densidade espectral é a transformada de Fourier da função de autocovariância do processo.

Definição 1.11. Seja $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ um processo estocástico estacionário real, com função de autocovariância absolutamente somável, ou seja, $\sum\limits_{h\in\mathbb{Z}} |\gamma_X(h)| < \infty$. Então, a *função densidade espectral* ou *espectro* é definida como a transformada discreta de Fourier de $\gamma_X(h)$, isto é,

$$f_X(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_X(h) e^{-i\lambda h}, \quad \lambda \in [-\pi, \pi]. \tag{1.13}$$

Proposição 1.2. *A função densidade espectral de um processo estacionário real* $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$*, pode ser escrita da seguinte forma*

$$f_X(\lambda) = \frac{1}{2\pi}[\gamma_X(0) + 2\sum_{h=1}^{\infty} \gamma_X(h)\cos(\lambda h)], \quad \lambda \in [-\pi, \pi]. \tag{1.14}$$

Demonstração: Pela Definição 1.11, temos que

$$\begin{aligned}
f_X(\lambda) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{h=-\infty}^{\infty}\gamma_X(h)e^{-i\lambda h}\\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{h=-\infty}^{\infty}\gamma_X(h)[\cos(\lambda h) - i\,\mathrm{sen}(\lambda h)]\\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{h=-\infty}^{\infty}\gamma_X(h)\cos(\lambda h) - \frac{i}{2\pi}\sum_{h=-\infty}^{\infty}\gamma_X(h)\,\mathrm{sen}(\lambda h)\\
&= \frac{1}{2\pi}\gamma_X(0) + \frac{2}{2\pi}\sum_{h=1}^{\infty}\gamma_X(h)\cos(\lambda h) - \frac{i}{2\pi}\sum_{h=-\infty}^{-1}\gamma_X(h)\,\mathrm{sen}(\lambda h)\\
&\quad -\frac{i}{2\pi}\sum_{h=1}^{\infty}\gamma_X(h)\,\mathrm{sen}(\lambda h)\\
&= \frac{1}{2\pi}\gamma_X(0) + \frac{1}{\pi}\sum_{h=1}^{\infty}\gamma_X(h)\cos(\lambda h) + \frac{i}{2\pi}\sum_{h=1}^{\infty}\gamma_X(h)\,\mathrm{sen}(\lambda h)\\
&\quad -\frac{i}{2\pi}\sum_{h=1}^{\infty}\gamma_X(h)\,\mathrm{sen}(\lambda h)\\
&= \frac{1}{2\pi}[\gamma_X(0) + 2\sum_{h=1}^{\infty}\gamma_X(h)\cos(\lambda h)].
\end{aligned}$$

■

Observação 1.4. A *função de autocovariância* de um processo estacionário $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ pode ser obtida através da transformada discreta inversa de Fourier de $f_X(\cdot)$, ou seja

$$\gamma_X(h) = \int_{-\pi}^{\pi} f_X(\lambda)e^{i\lambda h}d\lambda. \tag{1.15}$$

Portanto, $f_X(\cdot)$ e $\gamma_X(\cdot)$ formam um par de Fourier.

O teorema a seguir apresenta algumas propriedades básicas da função densidade espectral de processos estocásticos estacionários reais.

Teorema 1.1. *Considere um processo estacionário real $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ com função de autocovariância absolutamente somável, então a função densidade espectral $f_X(\lambda)$ é limitada, não negativa e uniformemente contínua. Além disso, $f_X(\lambda)$ é par e periódica com período 2π.*

Para maiores detalhes e demonstração, ver Morettin e Toloi (2004).

A definição a seguir apresenta um estimador para a função densidade espectral.

Definição 1.12. Considere uma série temporal com N observações, $\{X_t\}_{t=1}^{N}$, obtida a partir do processo estacionário $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$. A *função periodograma*, denotada por $I_N(\cdot)$, é definida por

$$I_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi N}\left|\sum_{t=1}^{N} X_t e^{-i\lambda t}\right|^2, \qquad \forall \in [0, \pi]. \tag{1.16}$$

Proposição 1.3. *A função periodograma de uma série temporal estacionária é dada por*

$$I_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sum_{|h|<N} \hat{\gamma}_X(h) e^{-i\lambda h} \qquad \forall \in [-\pi, \pi]. \tag{1.17}$$

A demonstração da Proposição 1.3 pode ser encontrada em Morettin (2004).

Lembre que um estimador é assintoticamente não viesado, quando a esperança do estimador converge ao parâmetro a ser estimado. Além disso, dizemos que um estimador é consistente, quando ele converge em probabilidade ao parâmetro a ser estimado. Assim, a função periodograma definida na equação (1.16) é um estimador assintoticamente não viesado do espectro, entretanto, é não consistente. Assim, mesmo aumentando o número de observações, a variância de $I_N(\lambda)$ não decresce. Em virtude disso, foram propostos na literatura estimadores alternativos com a propriedade de consistência. Iremos definir, a seguir, um novo periodograma, que é não viesado e consistente para a função densidade espectral.

Definição 1.13. A *função periodograma suavizado de covariâncias*, denotada por $I_S(\lambda)$, é definida como

$$I_S(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sum_{h=-(N-1)}^{N+1} \omega_M(h)\hat{\gamma}_X(h) e^{-i\lambda h}, \tag{1.18}$$

em que, $\hat{\gamma}_X(\cdot)$ é a função de covariâncias do processo e $\omega_M(\cdot)$ é uma sequência de pesos ou janela, satisfazendo para um natural $M < N$,

a) $0 \leq \omega_M(h) \leq \omega_M(0) = 1$;

b) $\omega_M(h) = \omega_M(-h)$, para todo h;

c) $\omega_M(h) = 0, |h| \geq M$.

Observação 1.5. Para o estimador $I_S(\cdot)$ ser um estimador da função densidade espectral consistente, precisamos impor algumas condições sobre a escolha de M:

a) M é uma função de N tal que $M \to \infty$;

b) $\frac{M}{N} \to 0$ quando $N \to \infty$.

Geralmente considera-se $M = N^{\beta}$, $\beta < 1$. Neste trabalho, consideraremos $\beta = 0.9$ fixo.

Várias janelas já foram sugeridas na literatura, como a janela retangular, a janela de Bartlett, a janela de Daniell, e janela de Blackman-Tukey, a janela de Parzen entre outras (para maiores detalhes ver Brockwell e Davis, 1991). Neste trabalho utilizaremos a janela de Bartlett, que será definida na Subseção 3.1.3.

Capítulo 2

Modelos para Séries Temporais

Neste capítulo iremos apresentar alguns modelos para séries temporais que serão estudados ao longo da dissertação. Inicialmente definiremos um modelo proposto por Box e Jenkins (1976), este é denominado processo auto regressivo integrado de médias móveis, denotado por ARIMA(p, d, q), que é obtido de termos de equações de diferenças lineares com coeficientes constantes. Em seguida, iremos definir uma generalização dos modelos ARIMA, chamados de modelos ARFIMA(p, d, q), denominados processos auto regressivos fracionariamente integrados de médias móveis, que foram propostos por Granger e Joyeux (1980) e Hosking (1981). Sua função densidade espectral é ilimitada apenas na frequência zero. Os processos ARFIMA(p, d, q) são utilizados para modelar séries que apresentam a propriedade de longa dependência. A definição técnica de longa dependência será apresentada mais adiante, neste capítulo, mas, intuitivamente, longa dependência quer dizer que mesmo observações distantes no tempo possuem dependência entre si.

Muitos fenômenos reais, além de apresentarem a característica de longa dependência, apresentam sazonalidade. Sazonalidade quer dizer que o processo se repete durante um certo período de tempo fixo, sua duração é definida como período sazonal e representada por s. Este tipo de processo recebe o nome de SARFIMA, e é uma generalização do processo ARFIMA. Além disso, sua função densidade espectral é ilimitada em um número finito de frequências em $[0, \pi]$, chamadas frequências sazonais.

Os processos ARFIMA e SARFIMA serão apresentados em duas seções. Na Seção 2.1, conforme a definição tradicional, com inovações Gaussianas e, na Seção

2.2, com inovações tendo distribuição α-estável simétrica.

Antes de definirmos os processos ARFIMA e SARFIMA, é conveniente introduzirmos as seguintes notações $\mathbb{Z}_{\geq} = \{k \in \mathbb{Z}; k \geq 0\}$ e $\mathbb{Z}_{\leq} = \{k \in \mathbb{Z}; k \leq 0\}$.

2.1 Processos com Inovações Gaussianas

Iniciamos esta seção apresentando a definição de ruído branco.

Definição 2.1. Uma sequência de variáveis aleatórias $\{\varepsilon_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ é dita ser um ruído branco se

$$\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0, \qquad Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 \qquad \text{e} \qquad \gamma_\varepsilon(h) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2, & \text{se} \quad h = 0, \\ 0, & \text{se} \quad h \neq 0. \end{cases}$$

Se as variáveis aleatórias possuem distribuição normal, dizemos que o processo $\{\varepsilon_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ é um ruído branco Gaussiano.

Antes de definirmos os processos ARFIMA e SARFIMA, é necessário definirmos alguns operadores, que serão utilizados ao longo do texto.

Definição 2.2. Seja $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ um processo estocástico qualquer.

a) Operador translação para o passado, denotado por $\mathcal{B}$, é definido por

$$\mathcal{B}(X_t) = X_{t-1}, \cdots, \mathcal{B}^m(X_t) = X_{t-m}; \tag{2.1}$$

b) Operador diferença, denotado por ∇, é definido por

$$\nabla(X_t) = X_t - X_{t-1} = (1 - \mathcal{B})(X_t). \tag{2.2}$$

Logo temos que $\nabla = 1 - \mathcal{B}$.

c) Para qualquer $D > -1$, definimos o operador diferença fracionária sazonal por

$$\begin{aligned} \nabla_s^D &= (1 - \mathcal{B}^s)^D = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{D}{k} (-\mathcal{B}^s)^k \\ &= 1 - D\mathcal{B}^s + \frac{D(D-1)}{2!}\mathcal{B}^{2s} - \frac{D(D-1)(D-2)}{3!}\mathcal{B}^{3s} + \cdots \end{aligned} \tag{2.3}$$

em que

$$\binom{d}{k} = \frac{\Gamma(d+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(d-k+1)},$$

na qual $\Gamma(\cdot)$ é a função Gama, definida por

$$\Gamma(x) \equiv \begin{cases} \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt, & \text{se} \quad x > 0, \\ \infty, \quad \text{se} \quad x = 0, \\ x^{-1}\Gamma(1+x), & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

Se tivermos $D = d$ e $s = 1$, então ∇^d é o operador diferença fracionária.

A seguir, definimos o processo auto regressivo de médias móveis, denotado por ARMA (p, q).

Definição 2.3. Se um processo estocástico $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ satisfaz a seguinte equação

$$\phi(\mathcal{B})(X_t - \mu) = \theta(\mathcal{B})\varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{2.4}$$

em que μ é a média do processo, $\{\varepsilon_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco, $\phi(\cdot)$ e $\theta(\cdot)$ são polinômios, com coeficientes constantes reais, de ordem p e q (inteiros não negativos), respectivamente, dados por

$$\phi(\mathcal{B}) = 1 - \phi_1\mathcal{B} - \phi_2\mathcal{B}^2 - \cdots - \phi_p\mathcal{B}^p; \tag{2.5}$$

$$\theta(\mathcal{B}) = 1 - \theta_1\mathcal{B} - \theta_2\mathcal{B} - \cdots - \theta_q\mathcal{B}^q. \tag{2.6}$$

Então dizemos que $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ é um processo auto regressivo de médias móveis de ordem p e q, denotado por ARMA(p, q).

As duas definições a seguir podem ser aplicadas aos processos ARMA(p, q), mas também a outros processos que ainda serão definidos.

Definição 2.4. Um processo $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ é dito ser *causal* se existe uma sequência de constantes $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{Z}_\geq}$ tal que $\displaystyle\sum_{j\in\mathbb{Z}_\geq} |\psi_j| < \infty$ e

$$X_t = \sum_{j\in\mathbb{Z}_\geq} \psi_j\varepsilon_{t-j}, \qquad t \in \mathbb{Z}. \tag{2.7}$$

Definição 2.5. Um processo $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ é dito ser *inversível* se existe uma sequência de constantes $\{\pi_j\}_{j\in\mathbb{Z}_\geq}$ tal que $\sum_{j\in\mathbb{Z}_\geq} |\pi_j| < \infty$ e

$$\varepsilon_t = \sum_{j\in\mathbb{Z}_\geq} \pi_j X_{t-j}, \qquad t \in \mathbb{Z}. \tag{2.8}$$

Os dois teoremas seguintes apresentam condições para que um processo ARMA (p, q) seja causal e inversível. As demonstrações podem ser encontradas em Brockwell e Davis (1991).

Teorema 2.1. *Seja $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ um processo ARMA(p, q) em que os polinômios $\phi(\cdot)$ e $\theta(\cdot)$ não possuem raízes em comum. Então $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ é causal se e somente se $\phi(z) \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \leq 1$. Os coeficientes $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{Z}_\geq}$ que satisfazem a equação (2.7) são determinados pela relação*

$$\psi(z) = \sum_{j\in\mathbb{Z}_\geq} \psi_j z^j = \frac{\theta(z)}{\phi(z)}, \qquad \text{em que} \quad |z| \leq 1. \tag{2.9}$$

Teorema 2.2. *Seja $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ um processo ARMA(p, q) em que os polinômios $\phi(\cdot)$ e $\theta(\cdot)$ não possuem raízes em comum. Então $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ é inversível se e somente se $\theta(z) \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \leq 1$. Os coeficientes $\{\pi_j\}_{j\in\mathbb{Z}_\geq}$ que satisfazem a equação (2.8) são determinados pela relação*

$$\pi(z) = \sum_{j\in\mathbb{Z}_\geq} \pi_j z^j = \frac{\phi(z)}{\theta(z)}, \qquad \text{em que} \quad |z| \leq 1. \tag{2.10}$$

O teorema seguinte apresenta a função densidade espectral de um processo ARMA(p, q) e sua demonstração pode ser encontrada em Brockwell e Davis (1991).

Teorema 2.3. *Seja $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ um processo ARMA(p, q) satisfazendo a Definição 2.3 onde os polinômios $\phi(\cdot)$ e $\theta(\cdot)$ não possuem raízes em comum no círculo unitário. Então $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ possui função densidade espectral dada por*

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \frac{|\theta(e^{-i\lambda})|^2}{|\phi(e^{-i\lambda})|}, \qquad \text{em que} \quad \lambda \in [0, \pi]. \tag{2.11}$$

Os modelos ARMA(p, q) são utilizados para descrever séries estacionárias, mas muitas séries não possuem essa característica. Algumas séries tornam-se estacionárias se as diferenciarmos. Assim, definimos os modelos ARIMA(p, d, q) que são uma generalização dos modelos ARMA(p, q), propostos por Box e Jenkins (1976).

Definição 2.6. Um processo $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ é dito ser um processo auto regressivo integrado de médias móveis de ordem (p, d, q), com média μ, denotado por ARIMA(p, d, q), se satisfaz a equação

$$\phi(\mathcal{B})(1-\mathcal{B})^d(X_t-\mu) = \theta(\mathcal{B})\varepsilon_t, \qquad \text{em que} \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{2.12}$$

em que $(1-\mathcal{B})^d(X_t-\mu)$ é um processo ARMA(p, q), com $d \in \mathbb{N}$. Os polinômios $\phi(\cdot)$ e $\theta(\cdot)$ são dados pelas equações (2.5) e (2.6), respectivamente, e $\{\varepsilon_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ é um ruído branco.

Observação 2.1. a) O modelo dado na Definição 2.6 supõe que a d-ésima diferença do processo $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ pode ser representada por um modelo ARMA(p, q);

b) Na maioria dos casos práticos, temos $d = 1$ ou $d = 2$;

c) Para que o modelo dado na Definição 2.6 seja causal e inversível exige-se as mesmas suposições do modelo dado pela Definição 2.3, que são dados pelos Teoremas 2.1 e 2.2.

Uma generalização do processo ARIMA(p, d, q) é o processo ARFIMA(p, d, q), que é definido de maneira totalmente análoga ao ARIMA, no entanto, considerando $d \in \mathbb{R}$. O processo ARFIMA(p, d, q) é chamado processo auto regressivo fracionário integrado de médias móveis e possui a propriedade de memória longa. Assim, iremos definir, primeiramente, a propriedade de longa dependência.

Definição 2.7. Considere $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ um processo estacionário. No domínio do tempo, dizemos que $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ é um processo com a propriedade de longa dependência se existe um número real $d \in (0, 0.5)$ tal que

$$\rho_X(h) \sim K_1 h^{2d-1}, \quad \text{quando} \quad h \to \infty,$$

em que $K_1 \neq 0$ e $\rho_X(\cdot)$ é a função de autocorrelação do processo. Isto é, a função de autocorrelação decresce de forma hiperbólica (suavemente) para zero. De forma equivalente, no domínio da frequência, se

$$f_X(\lambda) \sim K_2|\lambda|^{-2d}, \quad \text{quando} \quad \lambda \to 0,$$

em que $K_2 > 0$ e $f_X(\cdot)$ é a função densidade espectral do processo.

Observação 2.2. a) A notação $f(x) \sim g(x)$, quando $x \to 0$, significa que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$;

b) No domínio do tempo, quando $d \in (0, 0.5)$, $\rho_X(\cdot)$ decai tão lentamente que $\sum_{h \in \mathbb{Z}_{\geq}} |\rho_X(h)|$ diverge;

c) O caso em que $d = 0$ é chamado de curta dependência.

d) Uma definição alternativa de longa dependência diz que a função densidade espectral pode ser infinita em outra frequência, que não seja a $\lambda = 0$, ou em mais frequências no intervalo $[0, \pi]$.

A definição abaixo apresenta o processo ARFIMA(p, d, q).

Definição 2.8. Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo com média μ satisfazendo a seguinte equação

$$\phi(\mathcal{B})\nabla^d(X_t - \mu) = \theta(\mathcal{B})\varepsilon_t, \qquad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{2.13}$$

em que $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um ruído branco, os polinômios $\phi(\cdot)$ e $\theta(\cdot)$ são definidos nas equações (2.5) e (2.6), $d \in (-0.5, 0.5)$ e $\nabla^d = (1 - \mathcal{B})^d$. Então, dizemos que $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo auto regressivo fracionário integrado de média móveis, denotado por ARFIMA(p, d, q).

Os teoremas a seguir apresentam algumas propriedades dos processos ARFIMA (p, d, q), e suas demonstrações podem ser encontradas em Hosking (1981) e Brockwell e Davis (1991).

Teorema 2.4. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo ARFIMA(p, d, q), dado pela Definição 2.8. Suponha que os polinômios $\phi(\cdot)$ e $\theta(\cdot)$ não tenham raízes em comum e que as raízes das equações $\phi(z) = 0$ e $\theta(z) = 0$ estejam fora do círculo unitário. Então*

a) *se $d < 0.5$, o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é causal com representação média móvel infinita dada por*

$$X_t = \sum_{k \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_k \varepsilon_{t-k}, \tag{2.14}$$

em que $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{Z}_{\geq}}$ satisfazem a relação

$$\psi(z) = \frac{\theta(z)}{\phi(z)}(1 - z)^{-d};$$

b) *se $d > -1$, o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é inversível com representação auto regressiva infinita*

$$\varepsilon_t = \sum_{k \in \mathbb{Z}_{\geq}} \pi_k X_{t-k} \tag{2.15}$$

em que $\{\pi_k\}_{k\in\mathbb{Z}_{\geq}}$ *são os coeficientes que satisfazem a relação*

$$\pi(z) = \frac{\phi(z)}{\theta(z)}(1-z)^d;$$

c) *a função de autocorrelação* $\rho_X(\cdot)$ *e a função densidade espectral* $f_X(\cdot)$ *satisfazem, para* $d \in (-0.5, 0.5)$ *e* $d \neq 0$*,*

$$\rho_X(h) \sim Ch^{2d-1}, \quad \textit{quando} \quad h \to \infty, \tag{2.16}$$

em que $C \neq 0$*, e*

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}\frac{|\theta(e^{-i\lambda})|^2}{|\phi(e^{-i\lambda})|^2}|1-e^{-i\lambda}|^{-2d} \sim \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}\left[\frac{\theta(1)}{\phi(1)}\right]^2 \lambda^{-2d}, \tag{2.17}$$

quando $\lambda \to 0$*.*

Assim, a partir do Teorema 2.4 (item c), conclui-se que o processo ARFIMA(p, d, q) possui a propriedade da longa dependência se $d \in (0, 0.5)$.

O próximo processo que iremos definir é uma extensão dos processos ARFIMA (p, d, q). Denominado processo SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$, esse processo tem como característica se repetir durante um período de tempo fixo.

Definição 2.9. Seja $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ um processo satisfazendo a seguinte equação

$$\phi(\mathcal{B})\Phi(\mathcal{B}^s)\nabla^d\nabla_s^D(X_t - \mu) = \theta(\mathcal{B})\Theta(\mathcal{B}^s)\varepsilon_t, \tag{2.18}$$

em que μ é a média do processo, $\{\varepsilon_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ é um ruído branco, $s \in \mathbb{N}$ é a sazonalidade, $\phi(\cdot)$, $\theta(\cdot)$ são os polinômios de ordem p e q dados pelas equações (2.5) e (2.6), respectivamente, $\Phi(\cdot)$ e $\Theta(\cdot)$ são os polinômios de ordem P e Q dados por

$$\Phi(\mathcal{B}) = 1 - \Phi_1\mathcal{B} - \Phi_2\mathcal{B}^2 - \cdots - \Phi_P\mathcal{B}^P; \tag{2.19}$$

$$\Theta(\mathcal{B}) = 1 - \Theta_1\mathcal{B} - \Theta_2\mathcal{B} - \cdots - \Theta_Q\mathcal{B}^Q. \tag{2.20}$$

Então, $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ é um processo sazonal auto regressivo fracionariamente integrado de média móvel de ordem $(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$, denotado por SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$, em que o grau de diferenciação e o grau de diferenciação sazonal são d e D, respectivamente.

A seguir, apresentamos um teorema com diversas propriedades dos processos

SARFIMA $(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$; sua demonstração e maiores detalhes podem ser encontrados em Bisognin (2007) e Bisognin e Lopes (2009).

Teorema 2.5. *Seja* $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ *um processo SARFIMA*$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ *dado pela Definição 2.9. Suponha que as equações* $\phi(z)\Phi(z^s) = 0$ *e* $\theta(z)\Theta(z^s) = 0$ *não tenham raízes em comum. Então valem as seguintes propriedades.*

a) *Se* $|d + D| < 0.5$*,* $|D| < 0.5$*, o processo tem função densidade espectral dada por*

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}\frac{|\theta(e^{-i\lambda})|^2}{|\phi(e^{-i\lambda})|^2}\frac{|\Theta(e^{-is\lambda})|^2}{|\Phi(e^{-is\lambda})|^2}\left|2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right|^{-2d}\left|2\,\mathrm{sen}\left(\frac{s\lambda}{2}\right)\right|^{-2D}, \quad (2.21)$$

em que $0 < \lambda \leq \pi$.

b) *O processo é estacionário se* $d+D < 0.5$*,* $D < 0.5$ *e todas as raízes da equação* $\phi(z)\Phi(z^s) = 0$ *estão fora do círculo unitário.*

c) *O processo é causal se* $d < 0.5$*,* $D < 0.5$ *e todas as raízes da equação* $\phi(z)\Phi(z^s) = 0$ *estão fora do círculo unitário.*

d) *O processo é inversível se* $d > -0.5$*,* $D > -0.5$ *e todas as raízes da equação* $\theta(z)\Theta(z^s) = 0$ *estão fora do círculo unitário.*

e) *O processo estacionário possui longa dependência se* $0 < d+D < 0.5$*,* $0 < D < 0.5$ *e todas raízes da equação* $\phi(z)\Phi(z^s) = 0$ *estão fora do círculo unitário.*

A seção seguinte trata dos mesmo modelos apresentados nesta seção, no entanto, considerando processos com inovações α-estáveis.

2.2 Processos com Inovações α-estáveis

Na seção anterior, foram definidos diversos processos, todos com inovação na forma de um ruído branco Gaussiano. Tais processos apresentam variância finita, e acabam não explicando bem muitas séries temporais que apresentam variabilidade alta. Neste sentido, veremos nesta seção novos processos que apresentam a característica de ter variância infinita. Iremos considerar os mesmos processos da seção anterior, entretanto, com inovações α-estáveis. Inicialmente veremos o que quer dizer uma variável aleatória ter distribuição α-estável e algumas propriedades desta distribuição, em seguida, definiremos os modelos com inovações α-estáveis.

Definição 2.10. Uma variável aleatória X é dita ter uma distribuição estável se e somente se para quaisquer constantes positivas c_1 e c_2, existem constantes $c > 0$ e $\delta \in \mathbb{R}$ tais que

$$c_1X_1 + c_2X_2 \stackrel{d}{=} cX + \delta \tag{2.22}$$

em que X_1 e X_2 são amostras independentes de X e $\stackrel{d}{=}$ denota a igualdade em distribuição.

Definição 2.11. Uma variável aleatória X é dita ter uma distribuição estritamente estável se $\delta = 0$ para qualquer escolha de c_1 e c_2.

Definição 2.12. Uma variável aleatória X é dita ter uma distribuição estável simétrica se é estável e simetricamente distribuída em torno do zero, isto é, $X \stackrel{d}{=} -X$.

A próxima definição é equivalente a Definição 2.10, como pode ser visto em Feller (1971).

Definição 2.13. Uma variável aleatória X é dita ter uma distribuição estável se para cada $n \geq 2$, existem constantes $c_n > 0$ e δ_n tais que

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} c_nX + \delta_n \tag{2.23}$$

em que a variável aleatória X não é concentrada em um ponto (caso degenerado) e $X, X_1, \ldots, X_n$ são independentes e com a mesma distribuição.

As Definições 2.10 e 2.13 são equivalentes, como é demonstrado em Feller (1971). O próximo teorema caracteriza as constantes normalizadoras c_n e sua demonstração pode ser encontrada em Feller (1971).

Teorema 2.6. *As constantes normalizadoras são da forma $c_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$, para $n \geq 2$ e com $0 < \alpha \leq 2$. O índice α é chamado expoente característico ou índice de estabilidade.*

Exemplo 2.1. Considere uma variável aleatória X tendo distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, então X tem distribuição estável com $\alpha = 2$. De fato,

$$c_1X_1 + c_2X_2 \sim N((c_1 + c_2)\mu, (c_1^2 + c_2^2)\sigma^2),$$

então, pela Definição 2.10 temos $c = (c_1^2 + c_2^2)^{\frac{1}{2}}$ e $\delta = (c_1 + c_2 - c)\mu$.

Outra definição equivalente às Definições 2.10 e 2.13, será dada a seguir.

Definição 2.14. Uma variável aleatória é dita ter distribuição estável se tem um domínio de atração, isto é, se existe uma sequência de variáveis independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) $Y_1, Y_2, \ldots$, uma sequência de números positivos $\{d_n\}_{n\geq 1}$ e números reais $\{a_n\}_{n\geq 1}$, tais que

$$\frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n}{d_n} + a_n \xrightarrow{d} X,$$

em que $\xrightarrow{d}$ é a notação usada para convergência em distribuição.

A próxima definição também é equivalente às Definições 2.10, 2.13 e 2.14.

Definição 2.15. Uma variável aleatória é dita ter distribuição α-estável se existem parâmetros $0 < \alpha \leq 2, \sigma \geq 0, -1 \leq \beta \leq 1$ e μ real, tais que a sua função característica é da seguinte forma

$$\mathbb{E}(e^{itX}) = \begin{cases} \exp\left\{-\sigma^\alpha |t|^\alpha \left(1 - i\beta(\operatorname{sign} t)\tan\frac{\pi\alpha}{2}\right) + i\mu t\right\}, & \text{se} \quad \alpha \neq 1, \\ \exp\left\{-\sigma|t|\left(1 + \frac{2i\beta}{\pi}(\operatorname{sign} t)\ln|t|\right) + i\mu t\right\} & \text{se} \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

A função $\operatorname{sign} t$ é definida como

$$\operatorname{sign} t = \begin{cases} -1, & \text{se} \quad t < 0, \\ 0, & \text{se} \quad t = 0, \\ 1, & \text{se} \quad t > 0. \end{cases}$$

Se uma variável aleatória X tem distribuição α-estável, denotamos por $X \stackrel{d}{=} S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$.

Se X for α-estável com $\beta = \mu = 0$, então dizemos que X é α-estável simétrica, e denotamos por $S\alpha S$. Sua função característica é da seguinte forma,

$$\mathbb{E}(e^{itX}) = e^{-\sigma^\alpha |t|^\alpha}, \quad \text{com} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad 0 < \alpha \leq 2.$$

O parâmetro σ é chamado parâmetro de escala, β parâmetro de assimetria e μ parâmetro de *shift*.

Observação 2.3. Se $0 < \alpha < 2$, então $\mathbb{E}|X|^p = \infty$, para $p \geq \alpha$, e para $0 < p < \alpha$, $\mathbb{E}|X|^p = c(p, \alpha)\sigma^p$, em que $c(p, \alpha)$ não depende do parâmetro de escala σ. Portanto, se $1 < \alpha < 2$, a variância da variável X será infinita.

A seguir iremos definir os processos com característica de longa dependência e inovações α-estáveis.

Definição 2.16. Um processo ARFIMA(p, d, q) α-estável satisfaz a equação (2.13), tendo processo de inovação $\{\varepsilon_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ formado por variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição α-estável simétrica, $1 < \alpha < 2$.

Definição 2.17. Um processo SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ α-estável satisfaz a equação (2.18), tendo processo de inovação $\{\varepsilon_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ formado por variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição α-estável simétrica, $1 < \alpha < 2$.

Os processos com inovações da forma ruído branco são caracterizados basicamente pela função de autocovariâncias e função densidade espectral. No entanto, nos processos com inovações α-estáveis não existe função densidade espectral, pois as variáveis aleatórias α-estáveis tem variância infinita. Em virtude disso, define-se uma nova função no domínio das frequências, denominada função poder de transferência. Esta função foi inicialmente definida para os processos ARFIMA, mas podemos generalizar para os demais processos citados neste trabalho, a qual será apresentada no Teorema 2.7 a seguir.

O próximo teorema apresenta algumas propriedades dos processos SARFIMA $(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ α-estáveis.

Teorema 2.7. *Seja $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ um processo SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ α-estável, dado pela Definição 2.17. Suponha que as equações $\phi(z)\Phi(z^s) = 0$ e $\theta(z)\Theta(z^s) = 0$ não tenham raízes em comum e que $|D + d| < 1 - \frac{1}{\alpha}$ e $|D| < 1 - \frac{1}{\alpha}$ com $1 < \alpha < 2$. Então valem as seguintes propriedades.*

a) *Se a solução da equação $\phi(z)\Phi(z^s) = 0$ estiver fora do círculo unitário, então $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ é causal. Os coeficientes $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{Z}_\geq}$ da representação média móvel infinita são dados por*

$$\psi(z) = \sum_{j\in\mathbb{Z}_\geq} \psi_j z^j = \frac{\theta(z)\Theta(z^s)}{\phi(z)\Phi(z^s)}(1 - z)^{-d}(1 - z^s)^{-D}. \tag{2.24}$$

b) *Se a solução da equação $\theta(z)\Theta(z^s) = 0$ estiver fora do círculo unitário, então $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ é inversível. Os coeficientes $\{\pi_j\}_{j\in\mathbb{Z}_\geq}$ da representação auto regressiva* *infinita são dados por*

$$\pi(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \pi_j z^j = \frac{\phi(z)\Phi(z^s)}{\theta(z)\Theta(z^s)}(1-z)^d(1-z^s)^D. \tag{2.25}$$

c) *Se o processo for causal, a função poder de transferência do processo* $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ *é dada por*

$$\begin{aligned} g_X(\lambda) &= \frac{|\theta(e^{-i\lambda})|^2}{|\phi(e^{-i\lambda})|^2}\frac{|\Theta(e^{-is\lambda})|^2}{|\Phi(e^{-is\lambda})|^2}\left|2\,\text{sen}\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right|^{-2d}\left|2\,\text{sen}\left(\frac{s\lambda}{2}\right)\right|^{-2D} \\ &= \left|\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j e^{-ij\lambda}\right|^2. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Demonstração:

a) Seja $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ um processo SARFIMA$(p,d,q)\times(P,D,Q)_s$ α-estável, com média zero, dado pela expressão

$$\phi(\mathcal{B})\Phi(\mathcal{B}^s)(1-\mathcal{B})^d(1-\mathcal{B}^s)^D X_t = \theta(\mathcal{B})\Theta(\mathcal{B}^s)\varepsilon_t.$$

Pelo artigo de Diongue et. al. (2007), temos que, se o processo SARFIMA $(p,d,q)\times(P,D,Q)_s$, com $P=Q=0$, satisfaz as condições $|D+d| < 1-\frac{1}{\alpha}$, $|D| < 1-\frac{1}{\alpha}$, com $1<\alpha<2$ e a equação $\phi(z)=0$ não tem raízes no círculo unitário, então o processo é causal. Logo, podemos escrever

$$\begin{aligned} \Phi(\mathcal{B}^s)X_t &= \Theta(\mathcal{B}^s)\frac{\theta(\mathcal{B})}{\phi(\mathcal{B})(1-\mathcal{B})^d(1-\mathcal{B}^s)^D}\varepsilon_t \\ \Phi(\mathcal{B}^s)X_t &= \Theta(\mathcal{B}^s)Z_t, \end{aligned} \tag{2.27}$$

onde $Z_t = \frac{\theta(\mathcal{B})}{\phi(\mathcal{B})(1-\mathcal{B})^d(1-\mathcal{B}^s)^D}\varepsilon_t$ é um processo SARFIMA$(p,d,q)\times(P,D,Q)_s$ com $P=Q=0$ e processo de inovação $\{\varepsilon_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$.

Assim, basta mostrarmos que o processo dado em (2.27) é causal.

Temos, por hipótese, que $\Phi(z^s)\neq 0$, para todo $|z|\leq 1$. Logo, $\frac{1}{\Phi(z^s)}$ é uma função analítica e pode ser expressa em série de potências. Assim, existe $\epsilon>0$, tal que

$$\frac{1}{\Phi(z^s)} = \sum_{j\in\mathbb{Z}_{\geq}}\xi_j z^j = \xi(z), \qquad \text{para todo} \quad |z|<1+\epsilon.$$

Como a série converge para $|z| < 1 + \epsilon$ e converge para $|z| < 1 + \frac{\epsilon}{2}$. Então, temos que,

$$\lim_{j \to \infty} \xi_j \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right)^j = 0.$$

Ou seja, a sequência $\left\{\xi_j \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right)^j\right\}_{j \geq 0}$ converge, logo é limitada. Portanto, existe uma constante $K > 0$ finita tal que, para todo $j \geq 0$,

$$\left|\xi_j \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right)^j\right| < K, \quad \text{isto é,} \quad |\xi_j| < K \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right)^{-j}.$$

Então,

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} |\xi_j| < K \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right)^{-j} < \infty.$$

Além disso, $\xi(z)\Phi(z^s) \equiv 1$, para $|z| \leq 1$.

Logo, pela Proposição 3.1.2 de Brockwell e Davis (1991), o operador $\xi(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \xi_j z^j$, com $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} |\xi_j| < \infty$, quando aplicado a processos estacionários, herda as propriedades algébricas das séries de potências. Assim, aplicando o operador $\xi(z)$ a ambos os lados da expressão (2.27), obtemos $X_t = \xi(\mathcal{B})\Theta(\mathcal{B}^s)Z_t$.

Portanto, temos a representação

$$X_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_j \varepsilon_t, \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{Z},$$

em que os coeficientes $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}}$ são dados pela expressão (2.24). Desta forma, o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é causal.

b) Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ α-estável, com média zero, dado pela expressão

$$\phi(\mathcal{B})\Phi(\mathcal{B}^s)(1 - \mathcal{B})^d(1 - \mathcal{B}^s)^D X_t = \theta(\mathcal{B})\Theta(\mathcal{B}^s)\varepsilon_t.$$

Pelo artigo de Diongue et. al. (2007), temos que, se o processo SARFIMA $(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ α-estável, com $P = Q = 0$, satisfaz as condições $|D + d| < 1 - \frac{1}{\alpha}$, $|D| < 1 - \frac{1}{\alpha}$, com $1 < \alpha < 2$ e a equação $\theta(z) = 0$ não tem raízes no círculo unitário, então o processo é inversível. Logo, podemos escrever

$$\begin{aligned} \Phi(\mathcal{B}^s)\frac{\phi(\mathcal{B})}{\theta(\mathcal{B})}(1-\mathcal{B})^d(1-\mathcal{B}^s)^D X_t &= \Theta(\mathcal{B}^s)\varepsilon_t \\ \Phi(\mathcal{B}^s)Z_t &= \Theta(\mathcal{B}^s)\varepsilon_t. \end{aligned} \tag{2.28}$$

onde $Z_t = \frac{\phi(\mathcal{B})}{\theta(\mathcal{B})}(1-\mathcal{B})^d(1-\mathcal{B}^s)^D X_t$ e $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ é um processo SARFIMA$(p,d,q)\times(P,D,Q)_s$ com $P = Q = 0$ e processo de inovação $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$.

Assim, basta mostrarmos que o processo dado em (2.28) é inversível.

Temos, por hipótese, que $\Theta(z^s) \neq 0$, para todo $|z| \leq 1$. Logo, $\frac{1}{\Theta(z^s)}$ pode ser expressa em série de potências. Assim, existe $\epsilon > 0$, tal que

$$\frac{1}{\Theta(z^s)} = \sum_{j\in\mathbb{Z}_\geq} \eta_j z^j = \eta(z), \qquad \forall |z| < 1+\epsilon.$$

Seguindo os argumentos do item a) teremos que $\sum_{j\in\mathbb{Z}_\geq} |\eta_j| < \infty$, além disso,

$$\eta(z)\Theta(z^s) \equiv 1, \quad \text{para todo} \quad |z| \leq 1.$$

E, novamente pela Proposição 3.1.2 de Brockwell e Davis (1991), podemos aplicar o operador $\eta(z) = \sum_{j\in\mathbb{Z}_\geq} \eta_j z^j$ a ambos os lados da expressão (2.28), obtendo

$$\eta(\mathcal{B})\Phi(\mathcal{B}^s)Z_t = \eta(\mathcal{B})\Theta(\mathcal{B}^s)\varepsilon_t = \varepsilon_t \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, temos a representação

$$\varepsilon_t = \sum_{j\in\mathbb{Z}_\geq} \pi_j X_t, \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{Z},$$

em que os coeficientes $\{\pi_j\}_{j\in\mathbb{Z}_\geq}$ são dados pela expressão (2.25). Desta forma, o processo é inversível.

c) É a definição de função poder de transferência de um processo causal.

■

Observação 2.4. Neste trabalho, iremos considerar $1 < \alpha < 2$, pois, caso $\alpha = 2$, teremos a distribuição normal.

Observação 2.5. Pelo artigo de Kokoszka e Taqqu (1999), consideramos que uma série temporal com variância infinita tem longa memória, quando a correspondente série com variância finita (inovações na forma de ruído branco) tem longa memória. Logo, em um processo SARFIMA$(p,d,q)\times(P,D,Q)_s$ α-estável, dado pela Definição 2.17, teremos longa memória quando $0 < d + D < \frac{1}{2}$ e $0 < D < \frac{1}{2}$ (ver Teorema 2.5, item e)).

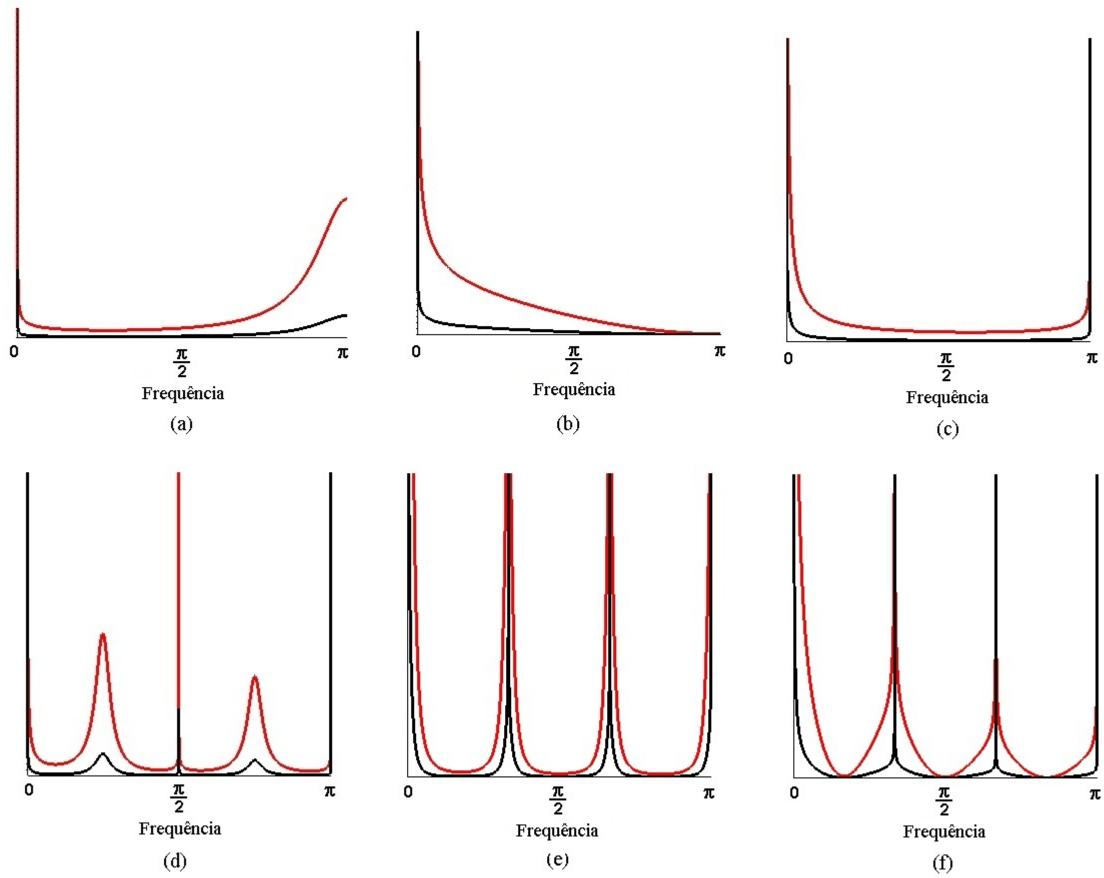


Figura 2.1: Gráficos das funções densidade espectral (em preto) e poder de transferência (em vermelho) dos seguintes processos: (a) ARFIMA(p,d,q), com $p = 1$, $d = 0.2$, $q = 0$ e $\phi_1 = 0.7$; (b) ARFIMA(p,d,q), com $p = 0$, $d = 0.2$, $q = 1$ e $\theta_1 = 0.7$; (c) SARFIMA$(p,d,q)\times(P,D,Q)_s$ com $p = q = 0 = P = Q$, $d = D = 0.2$ e $s = 2$; (d) SARFIMA$(p,d,q)\times(P,D,Q)_s$, com $P = 1$, $p = q = 0 = Q$, $d = D = 0.2$, $s = 4$ e $\Phi_1 = 0.7$; (e) SARFIMA$(p,d,q)\times(P,D,Q)_s$, com $P = 1$, $p = q = 0 = Q$, $d = D = 0.2$, $s = 6$ e $\Phi_1 = -0.7$ e (f) SARFIMA$(p,d,q)\times(P,D,Q)_s$, com $q = 1 = Q$, $p = 0 = P$, $d = D = 0.2$, $s = 6$, $\theta_1 = 0.2$ e $\Theta_1 = 0.7$.

A Figura 2.1 apresenta alguns gráficos da função densidade espectral de processos com inovações ruído branco (em preto), comparando com gráficos da função poder de transferência (em vermelho) dos mesmos processos com inovações α-estáveis. Note que a função poder de transferência é a densidade espectral multiplicada por uma constante.

Como nos processos com inovações α-estáveis não existe a função densidade espectral, mas existe a função poder de transferência, é natural a necessidade de um novo estimador para essa função. Klüppelberg e Mikosch (1996) definem a função periodograma normalizado conforme a seguir.

Definição 2.18. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_N$ um série temporal obtida a partir do processo $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$. A função *periodograma normalizado*, denotada por $\widetilde{I}_N(\cdot)$, é dada por

$$\widetilde{I}_N(\lambda) = \left(\sum_{t=1}^{N} X_t^2\right)^{-1} \left|\sum_{t=1}^{N} X_t e^{-i\lambda t}\right|^2, \qquad \text{em que} \quad \lambda \in [-\pi, \pi]. \tag{2.29}$$

Proposição 2.1. *A função periodograma normalizado pode ser escrita da seguinte forma*

$$\widetilde{I}_N(\lambda) = \sum_{|h|<N} \hat{\rho}_X(h) e^{-i\lambda h}, \qquad \textit{em que} \quad \lambda \in [-\pi, \pi], \tag{2.30}$$

em que $\hat{\rho}_X(\cdot)$ *é a função de autocorrelação amostral do processo (ver Definição 1.10).*

Demonstração: Iremos supor, sem perda de generalidade, que o processo tem média zero. Assim, pela Definição 1.9, temos que

$$\hat{\gamma}_X(0) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_k^2.$$

Então

$$\begin{aligned}
\widetilde{I}_N(\lambda) &= \frac{\frac{1}{N}\left|\sum\limits_{t=1}^{N} X_t e^{-i\lambda t}\right|^2}{\frac{1}{N}\sum\limits_{t=1}^{N} X_t^2} = \frac{\frac{1}{N}\left|\sum\limits_{t=1}^{N} X_t e^{-i\lambda t}\right|^2}{\hat{\gamma}_X(0)} \\
&= \frac{1}{N\hat{\gamma}_X(0)}\left(\sum_{t=1}^{N} X_t e^{-i\lambda t}\right)\left(\sum_{s=1}^{N} X_t e^{i\lambda s}\right) \\
&= \frac{1}{N\hat{\gamma}_X(0)}\sum_{t=1}^{N}\sum_{s=1}^{N} X_t X_s e^{-i\lambda(t-s)}.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis $h = t - s$, teremos

$$
\begin{aligned}
\widetilde{I}_N(\lambda) &= \frac{1}{\hat{\gamma}_X(0)} \sum_{|h|<N} \underbrace{\left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-|h|} X_t X_{t+h} \right)}_{\hat{\gamma}_X(h)} e^{-i\lambda h} \\
&= \frac{1}{\hat{\gamma}_X(0)} \sum_{|h|<N} \hat{\gamma}_X(h) e^{-i\lambda h}
\end{aligned}
$$

Ou seja,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{I}_N(\lambda) &= \sum_{|h|<N} \underbrace{\frac{\hat{\gamma}_X(h)}{\hat{\gamma}_X(0)}}_{\hat{\rho}_X(h)} e^{-i\lambda h} \\
&= \sum_{|h|<N} \hat{\rho}_X(h) e^{-i\lambda h}.
\end{aligned}
$$

■

Observação 2.6. O periodograma normalizado é um estimador não consistente da função $\frac{g_X(\lambda)}{\psi^2}$, em que $g_X(\lambda)$ é a função poder de transferência e

$$\psi^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_j^2,$$

com $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}}$ sendo os coeficientes da representação média móvel infinita do processo, dados pela equação (2.24). Klüppelberg e Mikosch (1994) definem um estimador suavizado consistente para $\frac{g_X(\lambda)}{\psi^2}$, aplicando um filtro linear em $\widetilde{I}_N(\cdot)$.

Neste trabalho iremos definir um novo estimador consistente de $\frac{g_X(\cdot)}{\psi^2}$, que chamaremos de *periodograma normalizado suavizado de correlações*.

Definição 2.19. O *periodograma normalizado suavizado de correlações* é dado por

$$\widetilde{I}_{SN}(\lambda) = \sum_{h=-(N-1)}^{N+1} \omega_M(h) \hat{\rho}_X(h) e^{-i\lambda h} \tag{2.31}$$

em que, $\hat{\rho}_X(\cdot)$ é a função de autocorrelações do processo e $\omega_M(h)$ é uma sequência de pesos satisfazendo, para um natural $M < N$,

a) $0 \leq \omega_M(h) \leq \omega_M(0) = 1$;

b) $\omega_M(h) = \omega_M(-h)$, para todo h;

c) $\omega_M(h) = 0, |h| \geq M$.

Teorema 2.8. *A função periodograma normalizado suavizado de correlações, dada na Definição 2.19, é um estimador consistente para a função* $\frac{g_X(\lambda)}{\psi^2}$*, em que* $g_X(\lambda)$ *é a função poder de transferência e* $\psi^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_j^2$*, onde* $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}}$ *são os coeficientes da representação média móvel infinita do processo, dados pela equação* (2.24).

Demonstração: Para verificarmos que este novo estimador é consistente, veja que, da equação (2.30), temos

$$\widetilde{I}_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|h|<N} 2\pi \hat{\rho}_X(h) e^{-i\lambda h}, \qquad \lambda \in [-\pi, \pi]. \tag{2.32}$$

Logo, a transformada de Fourier discreta inversa de $\widetilde{I}_N(\lambda)$ torna-se

$$2\pi \hat{\rho}_X(h) = \int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{I}_N(\lambda) e^{i\lambda h} d\lambda,$$

ou seja,

$$\hat{\rho}_X(h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{I}_N(\lambda) e^{i\lambda h} d\lambda. \tag{2.33}$$

Pelo artigo de Klüppelberg e Mikosch (1994), temos o periodograma suavizado normalizado, dado por

$$\widetilde{T}_{N,X}(\lambda) = \sum_{|h| \leq M} W_N(h) \widetilde{I}_N(\lambda_h),$$

em que $\lambda_h = \lambda + \frac{h}{N}$. Além disso,

$$W_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-(N-1)}^{N+1} \omega_M(h) e^{-i\lambda h}.$$

Klüppelberg e Mikosch (1994) mostram que

$$\widetilde{T}_{N,X}(\lambda) \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{g_X(\lambda)}{\psi^2}, \quad \text{quando} \quad N \to \infty, \quad \text{em que} \quad \lambda \in (0, \pi),$$

se valerem as seguintes condições:

a) $X_t = \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}_{\geq}} \psi_j \varepsilon_{t-j}$, com $\{\varepsilon_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ uma sequência i.i.d. simétrica $S\alpha S$, $\alpha \in (1,2)$, os coeficientes $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{Z}_{\geq}}$, satisfazem $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}_{\geq}} |\psi_j||j| < \infty$;

b) $\{W_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de pesos satisfazendo: $W_N(k) = W_N(-k), W_N(k) \geq 0, \quad$ para todo $\quad k \in \mathbb{N} e \sum\limits_{|k|\leq M} W_N(k) = 1$;

c) $M = M_N$ é uma sequência em $\mathbb{N}$ tal que: $M_N \to \infty$ e $\frac{M_N}{N} \to 0$, quando $N \to \infty$.

Assim, usando (2.33), temos que

$$
\begin{aligned}
\widetilde{I}_{SN}(\lambda) &= \sum_{h=-(N-1)}^{N+1} \omega_M(h)\hat{\rho}_X(h)e^{-i\lambda h} \\
&= \sum_{h=-(N-1)}^{N+1} \omega_M(h)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{I}_N(\omega)e^{-i(\lambda-\omega)h}d\omega \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{1}{2\pi}\sum_{h=-(N-1)}^{N+1} \omega_M(h)e^{-i(\lambda-\omega)h}}_{W_N(\lambda-\omega)} \widetilde{I}_N(\omega)d\omega.
\end{aligned}
$$

Ou seja,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{I}_{SN}(\lambda) &= \int_{-\pi}^{\pi} W_N(\lambda-\omega)\widetilde{I}_N(\omega)d\omega \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} W_N(\lambda)\widetilde{I}_N(\omega-\lambda)d\lambda.
\end{aligned}
$$

Como podemos escrever o periodograma normalizado suavizado de correlações em função da janela espectral do periodograma normalizado suavizado, teremos que o periodograma normalizado suavizado de correlações, também é consistente para a função $\frac{g_X(\lambda)}{\psi^2}$, sob as condições a-c.

■

Observação 2.7. Geralmente considera-se $M = N^{\beta}$, $\beta < 1$. Neste trabalho, utilizamos $\beta = 0.9$.

No próximo capítulo estudaremos a estimação dos parâmetros dos processos apresentados neste capítulo, mas, antes disso, iremos estudar métodos e propriedades de previsão nos processos descritos neste capítulo.

2.3 Previsão

Nesta seção iremos tratar de um dos principais objetivos no estudo de séries temporais, que é o de fazer previsões, a partir de uma série temporal dada e do modelo escolhido. Iniciaremos apresentando previsão para processos SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ com inovações na forma de ruído branco, depois iremos apresentar previsão para processos com inovações α-estáveis simétricas.

Suponha que tenhamos uma série temporal $\{X_t\}_{t=1}^N$, proveniente de um processo SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ com inovações na forma de ruído branco Gaussiano, e gostaríamos de prever o valor de X_{N+h}, para h passos à frente. A previsão de erro quadrático médio mínimo é dado por

$$\hat{X}_N(h) \equiv \mathbb{E}(X_{N+h}|X_1, \cdots, X_N). \tag{2.34}$$

Este valor minimiza o erro quadrático médio de previsão, dado por $\mathbb{E}(X_{N+h} - \hat{X}_N(h))^2$. O erro de previsão é dado por

$$e_N(h) = X_{N+h} - \hat{X}_N(h).$$

Para calcularmos as previsões usamos os seguintes fatos

a) $\mathbb{E}(X_{N+h}|X_1, \cdots, X_N) = \begin{cases} X_{N+h}, & \text{se} \quad h \leq 0, \\ \hat{X}_N(h), & \text{se} \quad h \geq 0. \end{cases}$

b) $\mathbb{E}(\varepsilon_{N+h}|X_1, \cdots, X_N) = \begin{cases} \varepsilon_{N+h}, & \text{se} \quad h \leq 0, \\ 0, & \text{se} \quad h \geq 0. \end{cases}$

O teorema a seguir apresenta alguns resultados para previsão em processos SARFIMA $(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ com inovações na forma de ruído branco e a sua demonstração pode ser encontrada em Bisognin (2007).

Teorema 2.9. *Seja $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ um processo SARFIMA$(p,d,q)\times(P,D,Q)_s$, com média zero, causal e inversível. Então, para todo $h \geq 1$, valem as seguintes afirmações:*

a) *A previsão de erro quadrático médio mínimo é dada por*

$$\hat{X}_N(h) = -\sum_{k\geq 1} \pi_k \hat{X}_N(h-k),$$

em que $\{\pi_k\}_{k\in\mathbb{Z}_{\geq}}$ são os coeficientes da representação auto regressiva infinita.

b) *O erro de previsão é dado por*

$$e_N(h) = -\sum_{k=0}^{h-1} \psi_k \varepsilon_{N+h-k},$$

em que $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{Z}_{\geq}}$ são os coeficientes da representação média móvel infinita.

c) *A variância teórica do erro de previsão é dada por*

$$Var(e_N(h)) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{k=0}^{h-1} \psi_k^2,$$

em que $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{Z}_{\geq}}$ são os coeficientes da representação média móvel infinita.

d) *Se o processo $\{\varepsilon_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ é tal que $\varepsilon_t \sim N(0,\sigma_\varepsilon^2)$, para cada $t \in \mathbb{Z}$, então o intervalo de confiança a $100(1-\gamma)\%$ de confiança para X_{N+h} é dado por*

$$\hat{X}_N(h) - z_{\gamma/2}\hat{\sigma}_\varepsilon \left[\sum_{k=0}^{h-1} \hat{\psi}_k^2\right]^{1/2} \leq X_{N+h} \leq \hat{X}_N(h) + z_{\gamma/2}\hat{\sigma}_\varepsilon \left[\sum_{k=0}^{h-1} \hat{\psi}_k^2\right]^{1/2},$$

em que $z_{\gamma/2}$ é o valor tal que $\mathbb{P}(Z \geq z_{\gamma/2}) = \gamma/2$, $\hat{\sigma}_\varepsilon$ e $\{\hat{\psi}_k\}_{k\in\mathbb{Z}_{\geq}}$ são os parâmetros estimados para σ_ε e $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{Z}_{\geq}}$ (abordaremos a estimação dos parâmetros no capítulo seguinte).

Se considerarmos processos com inovações α-estáveis simétricas ($S\alpha S$), com $1 < \alpha < 2$, o preditor definido em (2.34) não é apropriado, pois, como a variância do processo de inovação é infinita, pelo Teorema 2.9 item c), a variância do erro de previsão será infinita também, o que não é adequado. Assim, vamos definir um novo preditor para os processos com inovações α-estáveis simétricas.

Cline e Brockwell (1985) apresentam um preditor linear para processos ARMA com variância infinita, mas afirmam que este preditor pode ser usado em outros processos, desde que estes sejam causais. Iremos assumir que $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ é um processo causal e inversível, portanto existem sequências $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{Z}_{\geq}}$ e $\{\pi_j\}_{j\in\mathbb{Z}_{\geq}}$, tais que

$$X_t = \sum_{j\in\mathbb{Z}_{\geq}} \psi_j \varepsilon_{t-j} \tag{2.35}$$

e

$$\varepsilon_t = \sum_{j\in\mathbb{Z}_{\geq}} \pi_j X_{t-j}. \tag{2.36}$$

Além disso, iremos assumir que o processo de inovação $\{\varepsilon_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ tenha distribuição independente e identicamente distribuída $S\alpha S$, tal que

$$\lim_{h\to\infty} \frac{\mathbb{P}(|\varepsilon_t| > xh)}{\mathbb{P}(|\varepsilon_t| > h)} = x^{-\alpha}, \quad \text{para todo} \quad x > 0.$$

Para definirmos o novo preditor, considere uma variável aleatória $Y = \sum_{j\in\mathbb{Z}} r_j \varepsilon_j$, se $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |r_j|^\alpha < \infty$, definimos a dispersão de Y, denotada por $\operatorname{disp} Y$, da seguinte forma

$$\operatorname{disp} Y = \sum_{j\in\mathbb{Z}} |r_j|^\alpha.$$

Veja que, podemos reescrever a equação (2.35), fazendo a seguinte mudança de variáveis $j = t - i$, ou seja, $i = t - j$,

$$X_t = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_{t-i}\varepsilon_i, \quad \text{com} \quad \psi_{t-i} = 0, \quad t - i < 0.$$

Então,

$$\operatorname{disp}(X_t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\psi_j|^\alpha = \sum_{j\in\mathbb{Z}_{\geq}} |\psi_j|^\alpha.$$

Se $Y = \sum_{j\in\mathbb{Z}} r_j \varepsilon_j$, então, dada uma série $\{X_t\}_{t=1}^N$, definimos o preditor de dispersão linear com erro mínimo de Y, pela combinação linear

$$\hat{Y} = a_1 X_N + a_2 X_{N-1} + \cdots + a_N X_1,$$

em que os coeficiente $a_1, \cdots, a_N$ minimizam

$$
\begin{aligned}
\text{disp}(\hat{Y} - Y) &= \text{disp}\left(a_1 X_N + \cdots + a_N X_1 - \sum_{j \in \mathbb{Z}} r_j \varepsilon_j\right) \\
&= \text{disp}\left(a_1 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_{N-j}\varepsilon_j + \cdots + a_N \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_{1-j}\varepsilon_j - \sum_{j \in \mathbb{Z}} r_j \varepsilon_j\right) \\
&= \text{disp}\left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} (a_1 \psi_{N-j} + \cdots + a_N \psi_{1-j} - r_j)\varepsilon_j\right) \\
&= \sum_{j \in \mathbb{Z}} |r_j - (a_1 \psi_{N-j} + \cdots + a_N \psi_{1-j})|^\alpha.
\end{aligned}
$$

No caso em que $Y = X_{N+k}$, minimizamos, com relação à $a_1, \cdots, a_N$,

$$
\text{disp}(\hat{X}_N(k) - X_{N+k}) = \sum_{j=0}^{k-1} |\psi_j|^\alpha + \sum_{j=k}^{\infty} |\psi_j - (a_1 \psi_{j-k} + \cdots + a_N \psi_{j+1-N-k})|^\alpha,
$$

pois, veja que

$$
\begin{aligned}
\hat{X}_N(k) - X_{N+k} &= a_1 X_N + \cdots + a_N X_1 - \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_{N+k-j}\varepsilon_j \\
&= a_1 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_{N-j}\varepsilon_j + \cdots + a_N \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_{1-j}\varepsilon_j - \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_{N+k-j}\varepsilon_j \\
&= \sum_{j \in \mathbb{Z}} (a_1 \psi_{N-j} + \cdots + a_N \psi_{1-j} - \psi_{N+k-j})\varepsilon_j.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\text{disp}(\hat{X}_N(k) - X_{N+k}) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} |\psi_{N+k-i} - (a_1 \psi_{N-i} + \cdots + a_N \psi_{1-i})|^\alpha \qquad (2.37) \\
&= \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\psi_{N+k-(k+N-j)} - (a_1 \psi_{N-(k+N-j)} + \cdots \\
&\quad + a_N \psi_{1-(k+N-j)})|^\alpha \qquad (2.38) \\
&= \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\psi_j - (a_1 \psi_{-k+j} + \cdots + a_N \psi_{1-k-N+j}))|^\alpha. \qquad (2.39)
\end{aligned}
$$

Obtemos a equação (2.38), fazendo a mudança de variável $j = k + N - i$, ou seja, $i = k + N - j$, na equação (2.37).

Como temos $\psi_{j-k} \neq 0$, apenas quando $j - k \geq 0$, ou seja, quando $j \geq k$, e

$\psi_{1-k-N+j} \neq 0$, apenas quando $1-k-N+j \geq 0$, ou seja, quando $j \geq k+N-1 \geq k$, podemos escrever a equação (2.39) como

$$\text{disp}(\hat{X}_N(k) - X_{N+k}) = \sum_{j=0}^{k-1} |\psi_j|^\alpha + \sum_{j=k}^{\infty} |\psi_j - (a_1\psi_{j-k} + \cdots + a_N\psi_{j+1-N-k})|^\alpha.$$

No próximo capítulo iremos abordar diversos métodos de estimação dos parâmetros dos processos definidos até o momento.

Capítulo 3

Estimação dos Parâmetros

Existem, na literatura de séries temporais, diversos estimadores para os parâmetros dos modelos. Por exemplo, precisamos de estimadores para o valor de $\sigma_\varepsilon^2, d, D$ e para os coeficientes dos polinômios $\phi(\cdot), \Phi(\cdot), \theta(\cdot)$ e $\Theta(\cdot)$ do processo SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$. Assim, neste capítulo iremos abordar vários estimadores paramétricos (estimam todos os parâmetros) e semiparamétricos (estimam uma parte dos parâmetros). Iremos dividir este capítulo em duas seções: uma de estimadores semiparamétricos e outra de estimadores paramétricos.

A Seção 3.1 está dividida em 3 subseções. A Subseção 3.1.1 apresenta um estimador baseado na metodologia dos mínimos quadrados e duas metodologias robustas de regressão. Na Subseção 3.1.2 apresentamos um método de estimação dos parâmetros d e D baseado em análise de regressão, utilizando a função periodograma, proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983). Na Subseção 3.1.3 apresentamos um método de estimação dos parâmetros d e D baseado em análise de regressão, utilizando a função periodograma suavizado de covariâncias, proposto por Reisen(1994). A Seção 3.2 está dividida em 8 subseções. Na Subseção 3.2.1 analisamos o estimador de máxima verossimilhança, que estima todos os parâmetros do modelo. Na Subseção 3.2.2 abordamos uma aproximação ao estimador de máxima verossimilhança, proposta por Fox e Taqqu (1986). Na Subseção 3.2.3 apresentamos uma modificação ao estimador de Fox e Taqqu (1986). Na Subseção 3.2.4 propomos outra modificação ao estimador de Fox e Taqqu (1986), utilizando a função periodograma suavizado de covariâncias. Na Subseção 3.2.5, apresentamos um estimador para os processos α-estáveis, proposto por Klüppelberg e Mikosch (1996) para processos lineares gerais com processo de inovação α-estável. Por fim, nas Subseções 3.2.6, 3.2.7 e 3.2.8 apresentamos três modificações ao estimador proposto por Klüppelberg e Mikosch (1996).

3.1 Estimadores Semiparamétricos

Nesta seção iremos apresentar dois estimadores semiparamétricos, que se baseiam em metodologia clássica e robusta de regressão. Estes estimadores estimam o parâmetro d, nos processos ARFIMA, e os parâmetros d e D, nos processos SARFIMA. Assim, esta é uma classe de estimadores que necessita de dois passos para estimar todos os parâmetros do processo. Primeiramente iremos trabalhar com processos com inovações na forma de ruído branco, posteriormente faremos uma observação para os processos com inovações α-estáveis. Na primeira subseção iremos apresentar algumas propriedades de regressão clássica e robusta, visto que estas serão utilizadas nos estimadores semiparamétricos apresentados posteriormente.

3.1.1 Regressão Clássica e Robusta

Inicialmente, definimos o modelo de regressão linear geral com l variáveis independentes X_{tk}, $1 \leq k \leq l$, t fixo, e uma variável aleatória Y_t dependente, que possui a forma a seguir

$$Y_t = \eta_0 + \eta_1 X_{t1} + \cdots + \eta_l X_{tl} + \epsilon_t. \tag{3.1}$$

Assumindo $g(N)$ independentes observações de Y_t associadas aos valores X_{tk}, para $k \in \{1, \cdots, l\}$, o modelo (3.1) apresenta-se como

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= \eta_0 + \eta_1 X_{11} + \cdots + \eta_l X_{1l} + \epsilon_1 \\
Y_2 &= \eta_0 + \eta_1 X_{21} + \cdots + \eta_l X_{2l} + \epsilon_2 \\
\vdots & \qquad\qquad\qquad \vdots \\
Y_{g(N)} &= \eta_0 + \eta_1 X_{g(N)1} + \cdots + \eta_l X_{g(N)l} + \epsilon_{g(N)},
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

em que os erros $\{\epsilon_j\}$, satisfazem as seguintes suposições, para todo $j \in \{1, \cdots, g(N)\}$,

a) $\mathbb{E}(\epsilon_j) = 0$,

b) $Var(\epsilon_j) = \sigma_\epsilon^2$,

c) $Cov(\epsilon_j, \epsilon_k) = 0$, se $j \neq k$.

O estimador de $\boldsymbol{\eta} = (\eta_0, \eta_1, \cdots, \eta_l)$ pelo método dos mínimos quadrados, denotado neste trabalho por MQ, é o valor $\widehat{\boldsymbol{\eta}}_{MQ} = (\widehat{\eta}_0, \widehat{\eta}_1, \cdots, \widehat{\eta}_l) \in \mathbb{R}^{l+1}$ que minimiza a função perda

$$
\ell_1(g(N)) = \sum_{j=1}^{g(N)} r_j^2, \tag{3.3}
$$

em que os resíduos r_j são dados por

$$
r_j = y_j - \widehat{\eta}_0 - \widehat{\eta}_1 x_{j1} - \cdots - \widehat{\eta}_l x_{jl}. \tag{3.4}
$$

Os estimadores obtidos através do procedimento MQ, sob a hipótese de normalidade dos erros, são consistentes e tem mínima variância entre todos os estimadores não viciados. A presença de *outliers* e pontos de alavanca, que são observações muito distantes das demais, ou mesmo a perda da hipótese de normalidade dos erros são responsáveis por um considerável vício e ineficiência dos estimadores MQ, para maiores detalhes sobre o assunto, ver Bisognin (2007).

Considerando a presença de *outliers* e pontos de alavanca, surge uma nova proposta, que são os estimadores robustos. Estes não são afetados tão significativamente por *outliers*. Um procedimento de estimação robusta é o dos mínimos quadrados podados (denotados aqui por MQP). Os estimadores baseados na regressão (3.2) e obtidos através do procedimento MQP são os valores $\widehat{\boldsymbol{\eta}}_{MQP} = (\widehat{\eta}_0, \widehat{\eta}_1, \cdots, \widehat{\eta}_l) \in \mathbb{R}^{l+1}$ que minimiza a função perda

$$\ell_2(g(N)) = \sum_{j=1}^{m^*} (r^2)_{j:\tilde{m}}, \tag{3.5}$$

em que $(r^2)_{1:\tilde{m}} \leq \cdots \leq (r^2)_{m^*:\tilde{m}}$ são os resíduos ao quadrado ordenados e m^* é o número de pontos usados no procedimento de otimização. O estimador MQP foi utilizado por Lopes e Mendes (2006) para a estimação do parâmetro de longa dependência dos processos ARFIMA(p, d, q) e por Bisognin (2007) para os processos SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ com inovações normais.

Outra classe de estimadores robustos utilizados em Lopes e Mendes (2006), denotados por MM, são definidos como a solução $\widehat{\boldsymbol{\eta}}_{MM} = (\widehat{\eta}_0, \widehat{\eta}_1, \cdots, \widehat{\eta}_l) \in \mathbb{R}^{l+1}$ que minimiza a função perda

$$\ell_3(g(N)) = \sum_{j=1}^{g(N)} \rho_2 \left(\frac{r_j}{s} \right)^2, \tag{3.6}$$

sujeita a restrição

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{g(N)} \rho_1 \left(\frac{r_j}{s} \right) \leqslant b, \tag{3.7}$$

em que $\rho_1(\cdot)$ e $\rho_2(\cdot)$ são funções simétricas, limitadas e não decrescentes em $[0, \infty)$, com $\rho_i(0) = 0$, $\lim_{u \to \infty} \rho_i(u) = 1$, para $i = 1, 2$, s é um parâmetro de escala, b é definido por $\mathbb{E}_{\phi}(\rho_1(u)) = b$, onde ϕ denota a função de distribuição acumulada da normal padrão e r_j são os resíduos dados pela equação (3.4), para todo $j = 1, \cdots, g(N)$.

3.1.2 Estimador GPH

Procedimento proposto inicialmente por Geweke e Porter-Hudak (1983) para estimar o parâmetro d em um processo ARFIMA(p, d, q). Neste trabalho, apresentaremos uma adaptação baseada na proposta de Geweke e Porter-Hudak (1983) para estimar, além de o parâmetro d, o parâmetro D, em um processo SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$, proposto por Bisognin (2007).

Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$, com $d, D \in (-0.5; 0.5)$, conforme a Definição 2.9. A função densidade espectral deste processo é dada pela expressão (2.21). Podemos reescrever a expressão (2.21) da seguinte forma

$$f_X(\lambda) = f_U(\lambda)\left|2\,\text{sen}\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right|^{-2d}\left|2\,\text{sen}\left(\frac{s\lambda}{2}\right)\right|^{-2D}, \tag{3.8}$$

em que

$$f_U(\lambda) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}\frac{|\theta(e^{-i\lambda})|^2}{|\phi(e^{-i\lambda})|^2}\frac{|\Theta(e^{-is\lambda})|^2}{|\Phi(e^{-is\lambda})|^2}, \tag{3.9}$$

para todo $0 < \lambda \leq \pi$.

Aplicando-se a função logarítmica a ambos os lados da equação (3.8), tem-se

$$\ln[f_X(\lambda)] = \ln[f_U(\lambda)] - d\ln\left[2\,\text{sen}\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right]^2 - D\ln\left[2\,\text{sen}\left(\frac{s\lambda}{2}\right)\right]^2. \tag{3.10}$$

Então somando-se a ambos os lados da equação (3.10) os termos $\ln[f_U(0)]$ e $\ln[I_N(\lambda)]$, em que $I_N(\lambda)$ é a função periodograma dada pela expressão (1.16), obtemos

$$\begin{aligned}\ln[f_X(\lambda)] + \ln[I_N(\lambda)] &= \ln[f_U(\lambda)] - d\ln\left[2\,\text{sen}\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right]^2 - D\ln\left[2\,\text{sen}\left(\frac{s\lambda}{2}\right)\right]^2 \\ &\quad + \ln[I_N(\lambda)] + \ln[f_U(0)] - \ln[f_U(0)],\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\ln[I_N(\lambda)] &= \ln[f_U(0)] - d\ln\left[2\,\text{sen}\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right]^2 - D\ln\left[2\,\text{sen}\left(\frac{s\lambda}{2}\right)\right]^2 \\ &\quad + \ln[f_U(\lambda)] - \ln[f_U(0)] + \ln[I_N(\lambda)] - \ln[f_X(\lambda)].\end{aligned}$$

Logo, utilizando algumas propriedades da função logarítmica, temos

$$\begin{aligned}\ln[I_N(\lambda)] &= \ln[f_U(0)] - d\ln\left[2\,\text{sen}\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right]^2 - D\ln\left[2\,\text{sen}\left(\frac{s\lambda}{2}\right)\right]^2 \\ &\quad + \ln\left[\frac{f_U(\lambda)}{f_U(0)}\right] + \ln\left[\frac{I_N(\lambda)}{f_X(\lambda)}\right].\end{aligned} \tag{3.11}$$

Substituindo λ pelas frequências de Fourier, $\omega_j = \frac{2\pi j}{N}$, na equação anterior, temos

$$\begin{aligned} \ln[I_N(\omega_j)] &= \ln[f_U(0)] - d\ln\left[2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\omega_j}{2}\right)\right]^2 - D\ln\left[2\,\mathrm{sen}\left(\frac{s\omega_j}{2}\right)\right]^2 \\ &\quad + \ln\left[\frac{f_U(\omega_j)}{f_U(0)}\right] + \ln\left[\frac{I_N(\omega_j)}{f_X(\omega_j)}\right]. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Considerando o limite máximo de j igual a $g(N)$, tal que $g(N) \to \infty$, $\frac{g(N)}{N} \to 0$, quando $N \to \infty$, e $\omega_j \leq \omega_{g(N)}$, em que $\omega_{g(N)}$ é pequeno. Então o termo $\ln\left[\frac{f_U(\omega_j)}{f_U(0)}\right]$ é desprezível perante os demais termos da equação (3.12). Assim, temos uma aproximação para a equação (3.12), dada por

$$\begin{aligned} \ln[I_N(\omega_j)] &\simeq \ln[f_U(0)] - d\ln\left[2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\omega_j}{2}\right)\right]^2 - D\ln\left[2\,\mathrm{sen}\left(\frac{s\omega_j}{2}\right)\right]^2 \\ &\quad + \ln\left[\frac{I_N(\omega_j)}{f_X(\omega_j)}\right] \end{aligned} \tag{3.13}$$

A equação (3.13) é uma forma aproximada da equação de regressão linear múltipla, dada por

$$y_i \simeq \eta_0 + \eta_1 x_{j1} + \eta_2 x_{j2} + \epsilon_j, \quad \text{para todo} \quad j = 1, 2, \ldots, g(N), \tag{3.14}$$

em que

$$y_j = \ln[I_N(\omega_j)]; \quad x_{j1} = \ln\left[2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\omega_j}{2}\right)\right]^2; \quad x_{j2} = \ln\left[2\,\mathrm{sen}\left(\frac{s\omega_j}{2}\right)\right]^2, \tag{3.15}$$

$$\epsilon_j = \ln\left[\frac{I_N(\omega_j)}{f_X(\omega_j)}\right] + k; \quad \eta_0 = \ln[f_U(0)] - k; \quad k = \mathbb{E}\left(-\ln\left[\frac{I_N(\omega_j)}{f_X(\omega_j)}\right]\right) \tag{3.16}$$

$$\eta_1 = -d \quad \text{e} \quad \eta_2 = -D. \tag{3.17}$$

Temos que, ϵ_j são variáveis aleatórias não correlacionadas com média zero e variância constante, satisfazendo as exigências de um modelo de regressão linear. Os estimadores semiparamétricos pelo método de regressão linear são os valores $\hat{\boldsymbol{\eta}} = (\hat{\eta}_0, \hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2)$ que minimizam a função perda, dada pela equação (3.3). Assim, os estimadores para os parâmetros d e D, pelo método de Geweke e Porter Hudak (1983), são denotados por $\hat{d}_{GPHMQ}$ e $\hat{D}_{GPHMQ}$. Quando utilizamos as metodologias robustas de regressão, os estimadores para os parâmetros d e D são denotados por $\hat{d}_{GPHMM}$ e $\hat{D}_{GPHMM}$ ou $\hat{d}_{GPHMQP}$ e $\hat{D}_{GPHMQP}$.

Observação 3.1. Neste trabalho iremos considerar $g(N) = N^{\kappa}$, com

$$\kappa \in \{0.5; 0.55; 0.60; \cdots; \zeta\},$$

em que o último valor ζ, depende do tamanho amostral N. Queremos um valor ζ que compreenda o máximo de frequências de Fourier, no intervalo $(0, \pi)$. Assim, as frequências de Fourier $\frac{2\pi j}{N}$ podem atingir no máximo π; logo, o valor máximo de j que podemos considerar é

$$\frac{2\pi j}{N} = \pi \Longrightarrow j = \frac{N}{2}.$$

Portanto,

$$g(N) = N^{\zeta} = \frac{N}{2} \Longrightarrow \zeta = \frac{\ln(N/2)}{\ln(N)}.$$

Observação 3.2. Considerando $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo ARFIMA(p, d, q), então o estimador proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983) tem a forma

$$\hat{d}_{GPH} = \frac{-\sum_{j=1}^{g(N)} (x_{j1} - \bar{x}) y_j}{\sum_{j=1}^{g(N)} (x_{j1} - \bar{x})^2}. \tag{3.18}$$

Geweke e Porter-Hudak (1983) mostram que se $d \in (-0.5; 0)$, então

$$\lim_{N \to \infty} \hat{d}_{GPH} = d.$$

Além disso, se $\lim\limits_{N \to \infty} \frac{[\ln(N)]^2}{g(N)} = 0$, então

$$\frac{\hat{d}_{GPH} - d}{\sqrt{Var(\hat{d}_{GPH})}} \xrightarrow{d} Z,$$

em que $Z \sim N(0, 1)$ e $Var(\hat{d}_{GPH}) = \frac{\pi^2}{6 \sum_{j=1}^{g(N)} (x_{j1} - \bar{x})^2}$. Robinson (1995) estende este resultado para $d \in (-0.5, 0.5)$.

Observação 3.3. Para processos SARFIMA α-estáveis, propomos um ajuste na metodologia apresentada nesta seção. Utilizamos, no lugar do periodograma, o periodograma normalizado, dado pela Definição 2.18, e no lugar da função densidade espectral, a função poder de transferência, dada pelo Teorema 2.7 item c), ou seja,

$$\begin{aligned} g_X(\lambda) &= \frac{|\theta(e^{-i\lambda})|^2}{|\phi(e^{-i\lambda})|^2}\frac{|\Theta(e^{-is\lambda})|^2}{|\Phi(e^{-is\lambda})|^2}\left|2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right|^{-2d}\left|2\,\mathrm{sen}\left(\frac{s\lambda}{2}\right)\right|^{-2D} \\ &= g_U(\lambda)\left|2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right|^{-2d}\left|2\,\mathrm{sen}\left(\frac{s\lambda}{2}\right)\right|^{-2D}, \end{aligned}$$

em que

$$g_U(\lambda) = \frac{|\theta(e^{-i\lambda})|^2}{|\phi(e^{-i\lambda})|^2}\frac{|\Theta(e^{-is\lambda})|^2}{|\Phi(e^{-is\lambda})|^2}.$$

3.1.3 Estimador BA

Como visto na Seção 1.3, o periodograma (ver equação (1.16)) é um estimador não consistente da função densidade espectral de um processo. Como alternativa, definimos o periodograma suavizado de covariâncias (ver equação (1.18)), que sob certas condições, é um estimador consistente da função densidade espectral. Em virtude disso, Reisen (1994) sugere substituir o periodograma pelo periodograma suavizado de covariâncias, no estimador proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983). Reisen (1994) sugere em seu estudo a utilização da janela de Parzen, mas afirma que outras janelas podem ser utilizadas. Neste trabalho utilizaremos a janela de Bartlett.

O processo de estimação é similar ao do estimador proposto por Geweke e Porter Hudak (1983), descrito na Seção 3.1.2, apenas substituindo a função periodograma pela função periodograma suavizado de covariâncias, com a janela de Bartlett, obtendo a seguinte equação

$$\begin{aligned} \ln[I_S(\omega_j)] &\simeq \ln[f_U(0)] - d\ln\left[2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\omega_j}{2}\right)\right]^2 - D\ln\left[2\,\mathrm{sen}\left(\frac{s\omega_j}{2}\right)\right]^2 \\ &\quad + \ln\left[\frac{I_S(\omega_j)}{f_X(\omega_j)}\right], \end{aligned} \tag{3.19}$$

em que $\omega_j = \frac{2\pi j}{N}$ são as frequências de Fourier, $j \in \{0, 1, 2, \ldots, g(N)\}$. A janela de Bartlett é dada pela seguinte expressão

$$\omega_M(h) = \begin{cases} 1 - \frac{|h|}{M}, & \text{se} \quad |h| \leq M, \\ 0, & \text{se} \quad |h| > M, \end{cases} \tag{3.20}$$

em que M é o ponto de truncamento da janela e $M = N^{\beta}$ com $0 < \beta < 1$. Neste trabalho utilizamos $\beta = 0.9$.

Ao compararmos a equação (3.13) com a equação (3.19), vemos que a equação (3.19) também é uma forma aproximada da equação de regressão linear múltipla, dada por

$$y_i \simeq \eta_0 + \eta_1 x_{j1} + \eta_2 x_{j2} + \epsilon_j, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, g(N), \tag{3.21}$$

em que

$$y_j = \ln[I_S(\omega_j)]; \quad x_{j1} = \ln\left[2\,\text{sen}\left(\frac{\omega_j}{2}\right)\right]^2; \quad x_{j2} = \ln\left[2\,\text{sen}\left(\frac{s\omega_j}{2}\right)\right]^2, \tag{3.22}$$

$$\epsilon_j = \ln\left[\frac{I_S(\omega_j)}{f_X(\omega_j)}\right] + k; \quad \eta_0 = \ln[f_U(0)] - k; \quad k = \mathbb{E}\left(-\ln\left[\frac{I_S(\omega_j)}{f_X(\omega_j)}\right]\right); \tag{3.23}$$

$$\eta_1 = -d \quad \text{e} \quad \eta_2 = -D. \tag{3.24}$$

Assim, os estimadores semiparamétricos pelo método de regressão linear múltipla são os valores $\hat{\boldsymbol{\eta}} = (\hat{\eta}_0, \hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2)$ que minimizam a função perda, dada pela equação (3.3). Os estimadores para os parâmetros d e D, pelo método proposto por Reisen (1994), são denotados por $\hat{d}_{BAMQ}$ e $\hat{D}_{BAMQ}$. Quando utilizamos as metodologias robustas de regressão, os estimadores para os parâmetros d e D são denotados por $\hat{d}_{BAMM}$ e $\hat{D}_{BAMM}$ ou $\hat{d}_{BAMQP}$ e $\hat{D}_{BAMQP}$.

Observação 3.4. Para processos SARFIMA α-estáveis, propomos um ajuste na metodologia apresentada nesta seção. Utilizamos, no lugar do periodograma, o periodograma normalizado suavizado de correlações, dado pela Definição 2.19, e no lugar da função densidade espectral, a função poder de transferência, dada pelo Teorema 2.7 item c).

3.2 Estimadores Paramétricos

Nesta seção iremos apresentar diversos estimadores paramétricos, ou seja, estimadores que estimam todos os parâmetros do processo. Os estimadores apresentados nas Seções 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3 e 3.2.4 são utilizados em processos com inovações na forma de ruído branco, enquanto os estimadores apresentados nas Seções 3.2.5, 3.2.6, 3.2.7 e 3.2.8 são utilizados em processos com inovações α-estáveis.

3.2.1 Estimador EMV

O estimador de máxima verossimilhança é um estimador da classe paramétrica, isto é, tem a capacidade de estimar todos os parâmetros necessários de uma só vez. Para apresentar esse estimador, iremos considerar $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ um processo SARFIMA $(p,d,q)\times(P,D,Q)_s$ causal e inversível, de média zero, com inovações na forma de ruído branco com distribuição normal. Vamos denotar por $\boldsymbol{\eta}$ o vetor com todos parâmetros desconhecidos, a saber

$$\boldsymbol{\eta} = (\sigma_\varepsilon^2, d, D, \phi_1, \ldots, \phi_p, \Phi_1, \ldots, \Phi_P, \theta_1, \ldots, \theta_q, \Theta_1, \ldots, \Theta_Q).$$

Assim, temos que $\boldsymbol{\eta} \in \vartheta \subseteq \mathbb{R}^k, k = p + q + P + Q + 3$.

Seja $X_1, \ldots, X_N$ uma série temporal obtida do processo $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$. Então, como estamos considerando um processo causal, podemos escrever

$$X_t = \sum_{j\in\mathbb{Z}_\geq} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \qquad t \in \{1, \ldots, N\},$$

além disso, estamos considerando que $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, para $t \in \mathbb{Z}$. Assim, a função de distribuição conjunta de $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_N)'$ é normal multivariada, dada por

$$f(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{\eta}) = (2\pi)^{-N/2}(\det \Sigma_N(\boldsymbol{\eta}))^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{X}[\Sigma_N(\boldsymbol{\eta})]^{-1}\boldsymbol{X}'}, \tag{3.25}$$

em que $\boldsymbol{X}' = (X_1, \ldots, X_N)'$ e $\Sigma_N(\boldsymbol{\eta})$ é a matriz quadrada $N \times N$, cujos elementos são dados por

$$[\Sigma_N(\boldsymbol{\eta})]_{ij} = \gamma_X(i-j), \quad i, j \in \{1, 2, \ldots, N\}.$$

Logo, a função de verossimilhança é dada por

$$L(\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{X}) = (2\pi)^{-N/2}(\det \Sigma_N(\boldsymbol{\eta}))^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{X}[\Sigma_N(\boldsymbol{\eta})]^{-1}\boldsymbol{X}'}, \tag{3.26}$$

e o logaritmo da função de verossimilhança é

$$\ell(\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{X}) = -\frac{N}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln(\det \Sigma_N(\boldsymbol{\eta})) - \frac{1}{2} \boldsymbol{X} [\Sigma_N(\boldsymbol{\eta})]^{-1} \boldsymbol{X}'. \tag{3.27}$$

O estimador de máxima verossimilhança é o ponto de máximo da função de log-verossimilhança, dada por (3.27), com relação ao vetor de parâmetros $\boldsymbol{\eta}$, será denotado por $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{EMV}$. Dahlhaus (1989) mostra que, sob determinadas condições, o estimador de máxima verossimilhança exato é consistente e assintoticamente converge para uma distribuição normal.

O estimador de máxima verossimilhança possui uma deficiência, que é seu baixo desempenho computacional. Para calcular o máximo da função de log-verossimilhança, faz-se necessário inverter matrizes, o que costuma ser muito demorado quando as matrizes são de ordem muito grande, por isso, especialmente para amostras muito grandes (valores grandes de N), o estimador de máxima verossimilhança pode ser uma péssima escolha para estimar os parâmetros do processo.

Em virtude disso, Whittle (1951) sugeriu uma aproximação para a matriz de covariâncias $\Sigma_N(\boldsymbol{\eta})$, tal aproximação foi utilizada por Hannan (1973) e Fox e Taqqu (1986) para definir um novo estimador, que será abordado na próxima seção.

3.2.2 Estimador FT

O estimador proposto por Fox e Taqqu (1986) baseia-se em uma aproximação proposta por Whittle (1951). Inicialmente faremos a dedução para chegar ao estimador aproximado, partindo do estimador de máxima verossimilhança exato.

Veja que, na equação (3.27), o primeiro termo é constante com relação a $\boldsymbol{\eta}$, logo pode ser desconsiderado. Assim, precisamos de aproximações para os termos $\frac{1}{2} \ln(\det \Sigma_N(\boldsymbol{\eta}))$ e $\frac{1}{2} \boldsymbol{X} [\Sigma_N(\boldsymbol{\eta})]^{-1} \boldsymbol{X}'$.

Para o termo $\ln(\det \Sigma_N(\boldsymbol{\eta}))$ considere a seguinte aproximação,

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \ln(\det \Sigma_N(\boldsymbol{\eta})) = \ln(2\pi) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln f_X(x; \boldsymbol{\eta}) dx, \tag{3.28}$$

em que $f_X(x; \boldsymbol{\eta})$ é a função densidade espectral, que depende do vetor de parâmetros do processo. Nesta seção não iremos considerar o parâmetro σ_ε^2 presente no vetor

$\boldsymbol{\eta}$, assim $\boldsymbol{\eta} \in \vartheta \subseteq \mathbb{R}^v$, $v = p + q + P + Q + 2$, com

$$\boldsymbol{\eta} = (d, D, \phi_1, \ldots, \phi_p, \Phi_1, \ldots, \Phi_P, \theta_1, \ldots, \theta_q, \Theta_1, \ldots, \Theta_Q).$$

Além disso, a igualdade (3.28) procede da teoria das matrizes Toeplitz, em Grenander e Szegö (1958, p.65). Temos que $\Sigma_N(\boldsymbol{\eta})$ é uma forma de Toeplitz, visto que sua diagonal principal é constante. Segundo Grenander e Szegö (1958, p.17), uma forma de Toeplitz tem associada uma função $f(\cdot)$, que tem série de Fourier

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx},$$

em que

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx. \tag{3.29}$$

Denotando por $D_n(f)$ o determinante da forma Toeplitz relacionada a função $f(\cdot)$, Grenander e Szegö (1958, p.65) mostram que

$$\lim_{n \to \infty} [D_n(f)]^{1/n} = \exp\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln f(x) dx\right]. \tag{3.30}$$

Veja que a função relacionada com a forma Toeplitz $\Sigma_N(\boldsymbol{\eta})$, é a função $2\pi f_X(\lambda; \boldsymbol{\eta})$, em que $f_X(\lambda; \boldsymbol{\eta})$ é a função densidade espectral do processo. Isso ocorre devido ao fato que, a matriz $\Sigma_N(\boldsymbol{\eta})$ é obtida a partir da função de autocovariâncias. Precisamos escrever a função de autocovariâncias de modo que ela fique na forma da equação (3.29). Pela Observação 1.4, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\gamma_X(n) &= \int_{-\pi}^{\pi} f_X(\lambda; \boldsymbol{\eta}) e^{i\lambda n} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi f_X(\lambda; \boldsymbol{\eta}) e^{i\lambda n} d\lambda && (3.31) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{-\pi} 2\pi f_X(-x; \boldsymbol{\eta}) e^{-ixn} (-dx) && (3.32) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi f_X(x; \boldsymbol{\eta}) e^{-ixn} dx. && (3.33)
\end{aligned}$$

Onde, fazendo $\lambda = -x$, ou seja, $d\lambda = -dx$, na equação (3.31), obtemos a equação

(3.32).

Portanto, aplicando o resultado da equação (3.30), temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty}[\det \Sigma_N(\boldsymbol{\eta})]^{1/N} &= \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln(2\pi f_X(x;\boldsymbol{\eta})dx\right] \\
&= \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\ln(2\pi)+\ln f_X(x;\boldsymbol{\eta})\right)dx\right] \\
&= \exp\left[\ln(2\pi)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln f_X(x;\boldsymbol{\eta})dx\right]. \qquad (3.34)
\end{aligned}$$

Consequentemente, aplicando a função logarítmica, obtemos

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\ln(\det \Sigma_N(\boldsymbol{\eta})) = \ln(2\pi)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln f_X(x;\boldsymbol{\eta})dx. \qquad (3.35)$$

Observe que, para os processos que estão sendo abordados neste trabalho, podemos escrever sua função densidade espectral como

$$f_X(\lambda;\boldsymbol{\eta}) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{2\pi}k(\lambda;\boldsymbol{\eta}), \qquad (3.36)$$

em que a função $k(\lambda;\boldsymbol{\eta})$ varia dependendo do processo que é considerado. Uma das condições impostas por Hannan (1973) e Fox e Taqqu (1986) para que valham os teoremas sobre a consistência e distribuição assintótica do estimador proposto por eles, é que esta função $k(\lambda;\boldsymbol{\eta})$ seja normalizada, ou seja,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\ln(k(\lambda;\boldsymbol{\eta}))d\lambda \equiv 0. \qquad (3.37)$$

Na verdade, é possível demonstrar que a igualdade em (3.37) vale para processos SARFIMA causais e inversíveis (ver Bisognin, 2007). Assim, se utilizarmos essa condição, podemos reescrever a equação (3.28), obtendo

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \ln(\det \Sigma_N(\boldsymbol{\eta})) &= \ln(2\pi) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left[\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} k(x;\boldsymbol{\eta})\right] dx \\
&= \ln(2\pi) + \ln\left[\frac{\sigma_\varepsilon}{2\pi}\right] + \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln[k(x;\boldsymbol{\eta})] dx}_{0} \\
&= \ln(\sigma_\varepsilon^2). \qquad (3.38)
\end{aligned}$$

Assim, encontramos uma aproximação que depende apenas de σ_ε^2, que não estamos considerando presente no vetor de parâmetros desconhecidos. Logo, é um termo constante com relação à $\boldsymbol{\eta}$. Portanto, nesta aproximação podemos desconsiderar o termo $\frac{1}{2}\ln(\det \Sigma_N(\boldsymbol{\eta}))$ da equação (3.27).

Agora falta encontrarmos uma aproximação para o termo $\frac{1}{2}\boldsymbol{X}[\Sigma_N(\boldsymbol{\eta})]^{-1}\boldsymbol{X}'$ da equação (3.27). Whittle (1951) propôs aproximar a matriz $[\Sigma_N(\boldsymbol{\eta})]^{-1}$ pela matriz $A_N(\boldsymbol{\eta})$, de ordem $N \times N$, com entradas $[A_N(\boldsymbol{\eta})]_{ij} = a_{i-j}(\boldsymbol{\eta})$, em que

$$a_j(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ijx} [k(x;\boldsymbol{\eta})]^{-1} dx. \qquad (3.39)$$

Então, podemos reescrever a equação (3.27) como

$$\ell(\boldsymbol{\eta};\boldsymbol{X}) = -\frac{N}{2}\ln(2\pi) - \frac{N}{2}\sigma_\varepsilon^2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{X} A_N(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{X}'. \qquad (3.40)$$

Se multiplicarmos por $-\frac{2}{N}$ a expressão acima, temos

$$-\frac{2}{N}\ell(\boldsymbol{\eta};\boldsymbol{X}) = \ln(2\pi) + \sigma_\varepsilon^2 + \frac{\boldsymbol{X} A_N(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{X}'}{N}. \qquad (3.41)$$

Note que maximizar a expressão (3.40), é o mesmo que minimizar a expressão (3.41). Também observe que somente o último termo da expressão acima depende de $\boldsymbol{\eta}$. Logo, o estimador de máxima verossimilhança aproximado é o valor $\boldsymbol{\eta}$, no qual a função $\mathcal{L}(\boldsymbol{\eta};\boldsymbol{X})$ abaixo é mínima.

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\eta};\boldsymbol{X}) = \frac{\boldsymbol{X} A_N(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{X}'}{N}. \qquad (3.42)$$

Denotamos o estimador de máxima verossimilhança aproximado por $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{FT}$.

Fox e Taqqu (1986) utilizam o fato de

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{X}) = \frac{\boldsymbol{X} A_N(\boldsymbol{\eta}) \boldsymbol{X}'}{N} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{I_N(x)}{k(x; \boldsymbol{\eta})} dx \tag{3.43}$$

para propor um novo estimador para o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\eta}$. Além disso, para estimar a variância do processo de inovação, fazem $\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 = 2\pi \mathcal{L}(\hat{\boldsymbol{\eta}}; \boldsymbol{X})$.

Fox e Taqqu (1986) demonstram que, sob certas condições, os estimadores de $\boldsymbol{\eta}$ e σ_{ε}^2 são consistentes e que $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{FT}$ tem distribuição assintótica normal.

Na prática, para utilizarmos o estimador proposto por Fox e Taqqu (1986), considera-se a soma nas frequências de Fourier, ao invés da integral, assim minimizamos a seguinte função com relação a $\boldsymbol{\eta}$

$$\mathcal{L}^*(\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{X}) = \frac{1}{N} \sum_t \frac{I_N(\omega_t)}{k(\omega_t; \boldsymbol{\eta})}, \tag{3.44}$$

em que $\omega_t = \frac{2\pi t}{N}$ são as frequências de Fourier, $t \in \mathbb{Z}, -\frac{N}{2} < t \leq \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ ($\lfloor x \rfloor$ é a parte inteira de x). Hannan (1973) mostra que os resultados sobre consistência e distribuição assintótica também valem considerando esta aproximação.

Na próxima seção vamos definir um novo estimador, baseado na proposta de Fox e Taqqu (1986). Provaremos que este novo estimador apresenta as mesmas propriedades do estimador proposto por Fox e Taqqu (1986).

3.2.3 Estimador FTmod

Como visto na seção anterior, na prática, para utilizarmos o estimador proposto por Fox e Taqqu (1986), considera-se a soma nos coeficientes de Fourier, no lugar da integral. Assim, vamos modificar o estimador original, calculando a função $\mathcal{L}^*(\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{X})$, dada pela expressão (3.44), não apenas nas frequências de Fourier, passando a calcular em mais frequências.

Considere a seguinte função

$$S_N^2(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{cN} \sum_t \frac{I_N(\omega_{ct})}{k(\omega_{ct}; \boldsymbol{\eta})}, \tag{3.45}$$

em que $\omega_{ct} = \frac{2\pi t}{cN}$, com $c \in \mathbb{N} - \{1\}$ fixo e finito, $t \in \mathbb{Z}, -\frac{cN}{2} < t \leq \left\lfloor \frac{cN}{2} \right\rfloor$. O estimador modificado que estamos propondo, denotado por $\hat{\boldsymbol{\eta}}_N$, é o valor de $\boldsymbol{\eta}$, no qual a função dada pela equação (3.45) é mínima. Além disso, o estimador da variância do processo de inovação é dado por $\hat{\sigma}^2_\varepsilon = 2\pi S^2_N(\hat{\boldsymbol{\eta}}_N)$.

Na aproximação original, calcula-se a soma em N frequências, com essa nova proposta estaremos somando em cN frequências. Pretende-se, assim, aprimorar os resultados obtidos com o estimador original.

Para demonstrar os teoremas sobre a consistência desse estimador e de sua distribuição assintótica normal, precisamos supor que valem algumas condições. Vamos considerar $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ um processo estacionário, causal e inversível, com média zero e função densidade espectral $f_X(\lambda;\boldsymbol{\eta}) = \frac{\sigma^2_\varepsilon}{2\pi}k(\lambda;\boldsymbol{\eta})$, em que σ^2_ε é a variância do processo de inovação ruído branco, $\boldsymbol{\eta}$ é o vetor de parâmetros a ser estimado, $\boldsymbol{\eta} \in \vartheta \subseteq \mathbb{R}^v$compacto$, v = p + q + P + Q + 2$, com

$$\boldsymbol{\eta} = (d, D, \phi_1, \ldots, \phi_p, \Phi_1, \ldots, \Phi_P, \theta_1, \ldots, \theta_q, \Theta_1, \ldots, \Theta_Q).$$

Também supomos que a função $k(\lambda;\boldsymbol{\eta})$ é normalizada, isto é,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(k(\lambda;\boldsymbol{\eta})\right) d\lambda = 0.$$

Considere $\boldsymbol{\eta}_0$ e σ^2_0 o real valor dos parâmetros e suponha que $\boldsymbol{\eta}_0$ pertence ao interior de ϑ. Ainda considere $\vartheta_0 = \{\boldsymbol{\eta} \in \vartheta; k(\lambda;\boldsymbol{\eta}) > 0, \lambda \in [-\pi,\pi]\}$, tal que

$$\inf_{\boldsymbol{\eta}\in\vartheta_0} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{k(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)}{k(\lambda;\boldsymbol{\eta})} d\lambda = 1.$$

Além destas condições, supomos que a função $k(\lambda;\boldsymbol{\eta})$ satisfaz uma série de condições que chamaremos de condições A.

Condições A: Existe $0 < \alpha(\boldsymbol{\eta}) < 1$ tal que para cada $\delta > 0$:

A1) $g(\boldsymbol{\eta}) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(k(x;\boldsymbol{\eta})\right) dx$ pode ser diferenciada duas vezes sob o sinal da integral;

A2) $k(x;\boldsymbol{\eta})$ é contínua para todo $(x;\boldsymbol{\eta}), x \neq 0, [k(x;\boldsymbol{\eta})]^{-1} = k^{-1}(x;\boldsymbol{\eta})$ é contínua para todo $(x;\boldsymbol{\eta})$ e

$$k(x;\boldsymbol{\eta}) = O(|x|^{-\alpha(\boldsymbol{\eta})-\delta}), \quad \text{quando} \quad x \to 0;$$

A3) $\frac{\partial}{\partial \eta_j} k^{-1}(x;\boldsymbol{\eta})$ e $\frac{\partial^2}{\partial \eta_j \partial \eta_k} k^{-1}(x;\boldsymbol{\eta})$ são contínuas para todo $(x;\boldsymbol{\eta})$,

$$\frac{\partial}{\partial \eta_j} k^{-1}(x;\boldsymbol{\eta}) = O(|x|^{\alpha(\boldsymbol{\eta})-\delta}), \quad \text{quando} \quad x \to 0, \qquad 1 \le j \le v$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta_j \partial \eta_k} k^{-1}(x;\boldsymbol{\eta}) = O(|x|^{\alpha(\boldsymbol{\eta})-\delta}), \quad \text{quando} \quad x \to 0, \qquad 1 \le j,k \le v;$$

A4) $\frac{\partial}{\partial x} k(x;\boldsymbol{\eta})$ é contínua para todo $(x;\boldsymbol{\eta}), x \neq 0$, e

$$\frac{\partial}{\partial x} k(x;\boldsymbol{\eta}) = O(|x|^{-\alpha(\boldsymbol{\eta})-1-\delta}), \quad \text{quando} \quad x \to 0;$$

A5) $\frac{\partial^2}{\partial x \partial \eta_j} k^{-1}(x;\boldsymbol{\eta})$ é contínua para todo $(x;\boldsymbol{\eta}), x \neq 0$, e

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial \eta_j} k^{-1}(x;\boldsymbol{\eta}) = O(|x|^{\alpha(\boldsymbol{\eta})-1-\delta}), \quad \text{quando} \quad x \to 0, \quad 1 \le j \le v;$$

A6) $\frac{\partial^3}{\partial^2 x \partial \eta_j} k^{-1}(x;\boldsymbol{\eta})$ é contínua para todo $(x;\boldsymbol{\eta}), x \neq 0$, e

$$\frac{\partial^3}{\partial^2 x \partial \eta_j} k^{-1}(x;\boldsymbol{\eta}) = O(|x|^{\alpha(\boldsymbol{\eta})-2-\delta}), \quad \text{quando} \quad x \to 0 \quad 1 \le j \le v;$$

A notação $f(x) = O(g(x))$, quando $x \to a$, quer dizer que, existem $M, \delta > 0$ tais que $|f(x)| \le M|g(x)|$, para $|x-a| < \delta$.

Além das condições acima apresentadas, iremos supor que as funções $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}} k^{-1}(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)$ e $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}} \ln(k(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0))$ são de classe Lipschitz Λ_α, $\alpha > \frac{1}{2}$, ou seja,

$$\sup \left| \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}} k^{-1}(\lambda_1;\boldsymbol{\eta}_0) - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}} k^{-1}(\lambda_2;\boldsymbol{\eta}_0) \right| = O(\delta^\alpha), \quad \text{para} \quad |\lambda_1 - \lambda_2| \le \delta$$

e

$$\sup \left| \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}} \ln k(\lambda_1;\boldsymbol{\eta}_0) - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}} \ln k(\lambda_2;\boldsymbol{\eta}_0) \right| = O(\delta^\alpha), \quad \text{para} \quad |\lambda_1 - \lambda_2| \le \delta.$$

Para maiores detalhes sobre função Lipschitz, ver Zygmund (1959, p.42).

Em todos os lemas, proposições e teoremas desta seção serão consideradas todas estas condições apresentadas.

Os dois teoremas a seguir apresentam as propriedades de consistência e distribuição assintótica do estimador $\hat{\boldsymbol{\eta}}_N$, obtido minimizando-se a equação (3.45).

Teorema 3.1. *Sob as condições A, com probabilidade 1,*

$$\lim_{N\to\infty} \hat{\boldsymbol{\eta}}_N = \boldsymbol{\eta}_0,$$

e

$$\lim_{N\to\infty} S_N^2(\hat{\boldsymbol{\eta}}_N) = \frac{\sigma_0^2}{2\pi}.$$

Teorema 3.2. *Sob as condições A, o vetor aleatório* $\sqrt{N}(\hat{\boldsymbol{\eta}}_N - \boldsymbol{\eta}_0)$ *converge em distribuição a um vetor normal com média zero e matriz de covariâncias* $\Omega^{-1}(\boldsymbol{\eta}_0)$, *em que a* $(j,k)-$*ésima entrada da matriz* $\Omega(\boldsymbol{\eta})$ *é dada por*

$$\Omega_{jk}(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial \eta_j}\ln\left(k(\lambda;\boldsymbol{\eta})\right)\frac{\partial}{\partial \eta_k}\ln\left(k(\lambda;\boldsymbol{\eta})\right)d\lambda. \tag{3.46}$$

Para demonstrar esses teoremas, iremos utilizar alguns lemas, que serão apresentados a seguir.

Lema 3.1. *Quando* $\boldsymbol{\eta} \in \vartheta_0$, *temos que*

$$\lim_{N\to\infty} S_N^2(\boldsymbol{\eta}) = \frac{\sigma_0^2}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{k(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)}{k(\lambda;\boldsymbol{\eta})}d\lambda.$$

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$. Seja $q_T(\lambda;\boldsymbol{\eta}) > 0$, com $\lambda \in [-\pi,\pi]$, a soma de Cesaro, com T termos, da série de Fourier de $\frac{1}{k(\lambda;\boldsymbol{\eta})}$. Esta é dada pela convolução entre a função $\frac{1}{k(\lambda;\boldsymbol{\eta})}$ e o núcleo de Féjer de ordem T (ver Iório, 2007, p.134). Definimos o núcleo de Féjer de ordem T como a função $K_T : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, dada por

$$K_T(x) = \sum_{n=-T}^{T}\left(1 - \frac{|n|}{T}\right)e^{inx}, \quad \text{em que} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Logo, temos que

$$
\begin{aligned}
q_T(\lambda;\boldsymbol{\eta}) &= k^{-1} * K_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{k(x;\boldsymbol{\eta})} \sum_{n=-T}^{T} \left(1-\frac{|n|}{T}\right) e^{in(\lambda-x)}dx \\
&= \sum_{n=-T}^{T} \left(1-\frac{|n|}{T}\right) \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{k(x;\boldsymbol{\eta})} e^{in(\lambda-x)}dx \\
&= \sum_{n=-T}^{T} \left(1-\frac{|n|}{T}\right) e^{in\lambda} \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{k(x;\boldsymbol{\eta})} e^{-inx}dx}_{c_n} \\
&= \sum_{n=-T}^{T} c_n \left(1-\frac{|n|}{T}\right) e^{in\lambda},
\end{aligned}
$$

em que c_n é o n-ésimo coeficiente de Fourier de $\frac{1}{k(x;\boldsymbol{\eta})}$.

Podemos escolher T suficientemente grande de forma que

$$\left|\frac{1}{k(\lambda;\boldsymbol{\eta})} - q_T(\lambda;\boldsymbol{\eta})\right| < \frac{\epsilon}{H},$$

em que $H = \frac{1}{cN}\sum_t I_N(\omega_{ct}) < \infty$, pois temos uma soma finita de elementos finitos, em que $\omega_{ct} = \frac{2\pi t}{cN}$, com $c \in \mathbb{N} - \{1\}$ fixo e finito, $t \in \mathbb{Z}, -\frac{cN}{2} < t \leq \left\lfloor \frac{cN}{2} \right\rfloor$. A convergência é uniforme, pois a soma de Cesaro converge uniformemente em $(\lambda;\boldsymbol{\eta})$, para $\boldsymbol{\eta} \in \vartheta_0$, pois $\frac{1}{k(\lambda;\boldsymbol{\eta})}$ é uma função contínua e periódica, de período 2π (para maiores detalhes ver Iório, 2007, p.135).

Então, temos que

$$
\begin{aligned}
\left|S_N^2(\boldsymbol{\eta}) - \frac{1}{cN}\sum_t I_N(\omega_{ct}) q_T(\omega_{ct};\boldsymbol{\eta})\right| &= \left|\frac{1}{cN}\sum_t I_N(\omega_{ct}) \left(\frac{1}{k(\omega_{ct};\boldsymbol{\eta})} - q_T(\omega_{ct};\boldsymbol{\eta})\right)\right| \\
&\leq \frac{1}{cN}\sum_t I_N(\omega_{ct}) \underbrace{\left|\frac{1}{k(\omega_{ct};\boldsymbol{\eta})} - q_T(\omega_{ct};\boldsymbol{\eta})\right|}_{<\epsilon/H} \\
&< \frac{1}{cN}\sum_t I_N(\omega_{ct}) \frac{\epsilon}{H} = \epsilon.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, veja que

$$\begin{aligned}\frac{1}{cN}\sum_t I_N(\omega_{ct})q_T(\omega_{ct};\boldsymbol{\eta}) &= \frac{1}{cN}\sum_t I_N(\omega_{ct})\sum_{n=-T}^{T} c_n\left(1-\frac{|n|}{T}\right)e^{in\omega_{ct}}\\ &= \sum_{n=-T}^{T} c_n\left(1-\frac{|n|}{T}\right)\frac{1}{cN}\sum_t I_N(\omega_{ct})e^{in\omega_{ct}}.\end{aligned}$$

Utilizando a equação (1.17) obtemos a seguinte expressão,

$$\begin{aligned}\frac{1}{cN}\sum_t I_N(\omega_{ct})q_T(\omega_{ct};\boldsymbol{\eta}) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-T}^{T} c_n\left(1-\frac{|n|}{T}\right)\sum_t\frac{1}{cN}\sum_{|h|<N}\hat{\gamma}_X(h)e^{-i\omega_{ct}(h-n)}\\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-T}^{T} c_n\left(1-\frac{|n|}{T}\right)\frac{1}{cN}\sum_{|h|<N}\hat{\gamma}_X(h)\sum_t e^{-i\omega_{ct}(h-n)}.\end{aligned}$$

Assim, precisamos calcular o somatório $\sum\limits_t e^{-i\omega_{ct}(h-n)}$. Para isso, veja que

$$\begin{aligned}\sum_{t=-\lfloor\frac{cN+1}{2}\rfloor}^{\lfloor\frac{cN}{2}\rfloor} e^{-i\frac{2\pi t}{cN}(h-n)} &= \frac{e^{-i\frac{2\pi}{cN}\left(-\lfloor\frac{cN+1}{2}\rfloor\right)(h-n)}[1-\overbrace{(e^{-i\frac{2\pi}{cN}(h-n)})^{cN}}^{=1}]}{1-e^{-i\frac{2\pi}{cN}(h-n)}}\\ &= \begin{cases}0, & \text{se}\quad e^{-i\frac{2\pi}{cN}(h-n)}\neq 1,\\ cN, & \text{se}\quad e^{-i\frac{2\pi}{cN}(h-n)}=1.\end{cases}\end{aligned}\tag{3.47}$$

Temos que

$$e^{-i\frac{2\pi}{cN}(h-n)}=1\quad\text{se e somente se}\quad h-n=L(cN),\quad\text{em que}\quad L\in\mathbb{Z}.$$

Então, vamos supor que $N>T$, sem perda de generalidade, pois estamos buscando propriedades assintóticas do estimador, isto é, quando o tamanho da amostra tende ao infinito. Podemos dividir em 3 casos:

1º) Se $h-n=0$, então $h=n$, logo

$$\sum_{t=-\lfloor\frac{cN+1}{2}\rfloor}^{\lfloor\frac{cN}{2}\rfloor} e^{-i\frac{2\pi t}{cN}0}=\sum_{t=-\lfloor\frac{cN+1}{2}\rfloor}^{\lfloor\frac{cN}{2}\rfloor}1=cN.$$

2º) Se $n < 0$, então $-T \leq n < 0$, ou seja, $0 < -n \leq T$. Além disso, $-N+1 \leq h \leq N-1$.

Então,

$$-N+1 \leq h < h-n \leq h+T \leq N-1+T,$$

como $N > T$, temos que $-N+1 < h-n < 2N-1$. Veja que o expoente $h-n$ não passa pelos múltiplos de cN, com exceção do zero. Logo, a soma dada na equação (3.47) só será diferente de zero no caso $h-n=0$, que já foi tratado anteriormente.

3º) Se $n > 0$, então $0 < n \leq T$, ou seja, $-T \leq -n < 0$. Além disso, $-N+1 \leq h \leq N-1$.

Então,

$$-N+1-T \leq h-T < h-n < h \leq N-1,$$

como $-N < -T$, temos que $-2N+1 < h-n < N-1$. Veja que o expoente $h-n$ não passa pelos múltiplos de cN, exceto o zero. Logo, a soma dada na equação (3.47) só será diferente de zero no caso $h-n=0$, que já foi tratado anteriormente.

Portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{1}{cN}\sum_t I_N(\omega_{ct})q_T(\omega_{ct};\boldsymbol{\eta}) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-T}^{T} c_n\left(1-\frac{|n|}{T}\right)\frac{1}{cN}\hat{\gamma}_X(n)cN \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-T}^{T} c_n\left(1-\frac{|n|}{T}\right)\hat{\gamma}_X(n). \end{aligned}$$

Como temos que $\hat{\gamma}_X(n)$ converge quase certamente para $\gamma_X(n)$ (para maiores detalhes, ver Brockwell e Davis, 1991, p.376), então

$$\frac{1}{cN}\sum_t I_N(\omega_{ct})q_T(\omega_{ct};\boldsymbol{\eta}) \longrightarrow \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-T}^{T} c_n\left(1-\frac{|n|}{T}\right)\gamma_X(n), \quad \text{com probabilidade 1.}$$

Podemos escrever a função de autocovariância em termos da função densidade espectral do processo, da seguinte forma $\gamma_X(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} f_X(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)d\lambda$.

Também, temos que $f_X(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0) = \frac{\sigma_0^2}{2\pi}k(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)$.

Logo, segue que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{cN}\sum_t I_N(\omega_{ct})q_T(\omega_{ct};\boldsymbol{\eta}) \quad &\longrightarrow \quad \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-T}^{T} c_n\left(1-\frac{|n|}{T}\right)\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda}\frac{\sigma_0^2}{2\pi}k(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)d\lambda \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\frac{\sigma_0^2}{2\pi}\underbrace{\sum_{n=-T}^{T} c_n\left(1-\frac{|n|}{T}\right)e^{in\lambda}}_{q_T(\lambda;\boldsymbol{\eta})}k(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)d\lambda \\
&= \frac{\sigma_0^2}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} q_T(\lambda;\boldsymbol{\eta})k(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)d\lambda.
\end{aligned}
$$

Assim, temos

$$
\left|S_N^2(\boldsymbol{\eta}) - \frac{\sigma_0^2}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} q_T(\lambda;\boldsymbol{\eta})k(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)d\lambda\right| < \epsilon.
$$

Como a soma de Cesaro $q_T(\lambda;\boldsymbol{\eta})$ converge uniformemente para a função $k^{-1}(\lambda;\boldsymbol{\eta})$, segue o resultado do lema. ■

O lema a seguir não será demonstrado, mas sua demonstração pode ser encontrada em Hannan (1973) e Brockwell e Davis (1991, p.377).

Lema 3.2.

$$
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{k(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)}{k(\lambda;\boldsymbol{\eta})}d\lambda > 1, \quad \textit{para} \quad \boldsymbol{\eta} \neq \boldsymbol{\eta}_0.
$$

Com estes dois lemas, já podemos demonstrar o Teorema 3.1.

Demonstração do Teorema 3.1:

Suponha, por absurdo, que $\hat{\boldsymbol{\eta}}_N$ não converge para $\boldsymbol{\eta}_0$, então existe uma subsequência convergindo para $\boldsymbol{\eta}' \in \vartheta$, com $\boldsymbol{\eta}_0 \neq \boldsymbol{\eta}'$.

Vamos chamar esta subsequência de $\hat{\boldsymbol{\eta}}_m$, em que m é uma subsequência de $\mathbb{N}$. Pelos Lemas 3.1 e 3.2, temos que

$$
\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} S_m^2(\hat{\boldsymbol{\eta}}_m) &= \lim_{m\to\infty}\frac{1}{cN}\sum_t\frac{I_N(\omega_{ct})}{k(\omega_{ct};\hat{\boldsymbol{\eta}}_m)} \\
&= \frac{\sigma_0^2}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{k(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)}{k(\lambda;\boldsymbol{\eta}')}d\lambda > \frac{\sigma_0^2}{2\pi}.
\end{aligned}
$$

Entretanto, como $\hat{\boldsymbol{\eta}}_m$ é o ponto de mínimo de $S_N^2(\boldsymbol{\eta})$, por definição, existe algum $\boldsymbol{\eta} \in \vartheta$, tal que

$$\lim_{m\to\infty} S_m^2(\hat{\boldsymbol{\eta}}_m) \leq \lim_{m\to\infty} S_m^2(\boldsymbol{\eta}). \tag{3.48}$$

Pelo Lema 3.1, novamente, temos que

$$\lim_{m\to\infty} S_m^2(\boldsymbol{\eta}) = \frac{\sigma_0^2}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{k(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)}{k(\lambda;\boldsymbol{\eta})} d\lambda.$$

Assim, como $S_m^2(\hat{\boldsymbol{\eta}}_m)$ não depende de $\boldsymbol{\eta}$, aplicando o ínfimo nos dois lados da equação (3.48), temos

$$\lim_{m\to\infty} S_m^2(\hat{\boldsymbol{\eta}}_m) = \inf_{\boldsymbol{\eta}\in\vartheta} \left[\lim_{m\to\infty} S_m^2(\hat{\boldsymbol{\eta}}_m)\right] \leq \inf_{\boldsymbol{\eta}\in\vartheta} \left[\frac{\sigma_0^2}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{k(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)}{k(\lambda;\boldsymbol{\eta})} d\lambda\right] = \frac{\sigma_0^2}{2\pi},$$

onde a última igualdade acima segue do Lema 3.2.

Portanto, chegamos à conclusão que

$$\frac{\sigma_0^2}{2\pi} < \lim_{m\to\infty} S_m^2(\hat{\boldsymbol{\eta}}_m) \leq \frac{\sigma_0^2}{2\pi}.$$

O que é uma contradição, logo, devemos ter $\boldsymbol{\eta}' = \boldsymbol{\eta}_0$. Portanto,

$$\lim_{N\to\infty} \hat{\boldsymbol{\eta}}_N = \boldsymbol{\eta}_0.$$

Também temos que

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} S_N^2(\hat{\boldsymbol{\eta}}_N) &= \lim_{N\to\infty} \frac{\sigma_0^2}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{k(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)}{k(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)} d\lambda \\ &= \frac{\sigma_0^2}{2\pi}. \end{aligned}$$

■

Para a demonstração do Teorema 3.2, utilizaremos mais alguns lemas, que estão enunciados e demonstrados a seguir.

Lema 3.3. *Considere $\{b_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ uma sequência tal que $b_N \to \infty$, quando $N \to \infty$. Seja $b_N \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\eta}} S_N^2(\boldsymbol{\eta}_0) \xrightarrow{d} Y$, em que Y é um vetor aleatório. Então $b_N(\hat{\boldsymbol{\eta}}_N - \boldsymbol{\eta}_0) \xrightarrow{d}$*

$-\frac{\pi}{\sigma_0^2}W^{-1}(\boldsymbol{\eta}_0)Y$, em que $W_{jk}(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} k(\lambda;\boldsymbol{\eta})\frac{\partial^2}{\partial\eta_j\partial\eta_k}k^{-1}(\lambda;\boldsymbol{\eta})d\lambda$ é o (j,k)-ésimo elemento da matriz $W(\boldsymbol{\eta})$.

Demonstração: Pelo teorema do valor médio, temos que

$$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\eta}}S_N^2(\hat{\boldsymbol{\eta}}_N) - \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\eta}}S_N^2(\boldsymbol{\eta}_0) = \frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{\eta}^2}S_N^2(\boldsymbol{\eta}_N^*)(\hat{\boldsymbol{\eta}}_N - \boldsymbol{\eta}_0), \tag{3.49}$$

em que $\hat{\boldsymbol{\eta}}_N < \boldsymbol{\eta}_N^* < \boldsymbol{\eta}_0$.

Como, $\hat{\boldsymbol{\eta}}_N$ é o mínimo de $S_N^2(\boldsymbol{\eta})$, temos que $\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\eta}}S_N^2(\hat{\boldsymbol{\eta}}_N) = 0$, para N grande. Então, da equação (3.49),

$$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\eta}}S_N^2(\boldsymbol{\eta}_0) = -\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{\eta}^2}S_N^2(\boldsymbol{\eta}_N^*)(\hat{\boldsymbol{\eta}}_N - \boldsymbol{\eta}_0).$$

Como temos, $\hat{\boldsymbol{\eta}}_N < \boldsymbol{\eta}_N^* < \boldsymbol{\eta}_0$ e $\hat{\boldsymbol{\eta}}_N \to \boldsymbol{\eta}_0$, com probabilidade 1, do Teorema 3.1, segue que $\boldsymbol{\eta}_N^* \to \boldsymbol{\eta}_0$, com probabilidade 1. Consequentemente, $\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{\eta}^2}S_N^2(\boldsymbol{\eta}_N^*) \to \frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{\eta}^2}S_N^2(\boldsymbol{\eta}_0)$, pela continuidade.

Pode-se demonstrar, de forma totalmente análoga ao Lema 3.1, que

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{\eta}^2}S_N^2(\boldsymbol{\eta}_0) = \frac{\sigma_0^2}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} k(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{\eta}^2}k^{-1}(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)d\lambda = \frac{\sigma_0^2}{\pi}W(\boldsymbol{\eta}_0).$$

Assim, temos que

$$-b_N\frac{\sigma_0^2}{\pi}W(\boldsymbol{\eta}_0)(\hat{\boldsymbol{\eta}}_N - \boldsymbol{\eta}_0) \xrightarrow{d} Y.$$

Logo,

$$b_N(\hat{\boldsymbol{\eta}}_N - \boldsymbol{\eta}_0) \xrightarrow{d} -\frac{\pi}{\sigma_0^2}W^{-1}(\boldsymbol{\eta}_0)Y.$$

■

Lema 3.4. *Para quaisquer j, k, $1 \leq j \leq v$, $1 \leq k \leq v$ e para todo $\boldsymbol{\eta} \in \vartheta \subseteq \mathbb{R}^v, v = p+q+P+Q+2$, temos que*

$$W_{jk}(\boldsymbol{\eta}) = \Omega_{jk}(\boldsymbol{\eta}),$$

em que Ω_{jk} é dada pela equação (3.46).

Demonstração: Temos que

$$
\begin{aligned}
W_{jk}(\boldsymbol{\eta}) &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k(\lambda;\boldsymbol{\eta})\frac{\partial^2}{\partial\eta_j\partial\eta_k}k^{-1}(\lambda;\boldsymbol{\eta})d\lambda \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k(\lambda;\boldsymbol{\eta})\frac{\partial}{\partial\eta_j}\left[-\frac{1}{k^2(\lambda;\boldsymbol{\eta})}\frac{\partial}{\partial\eta_k}k(\lambda;\boldsymbol{\eta})\right]d\lambda \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k(\lambda;\boldsymbol{\eta})\frac{\partial}{\partial\eta_j}\left[-\frac{1}{k(\lambda;\boldsymbol{\eta})}\frac{\partial}{\partial\eta_k}\ln\left(k(\lambda;\boldsymbol{\eta})\right)\right]d\lambda \\
&= -\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k(\lambda;\boldsymbol{\eta})\left[\frac{\partial}{\partial\eta_j}k^{-1}(\lambda;\boldsymbol{\eta})\frac{\partial}{\partial\eta_k}\ln\left(k(\lambda;\boldsymbol{\eta})\right)\right]d\lambda \\
&\qquad -\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k(\lambda;\boldsymbol{\eta})\left[\frac{1}{k(\lambda;\boldsymbol{\eta})}\frac{\partial^2}{\partial\eta_j\partial\eta_k}\ln\left(k(\lambda;\boldsymbol{\eta})\right)\right]d\lambda \\
&= -\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k(\lambda;\boldsymbol{\eta})\left[-\frac{1}{k^2(\lambda;\boldsymbol{\eta})}\frac{\partial}{\partial\eta_j}k(\lambda;\boldsymbol{\eta})\frac{\partial}{\partial\eta_k}\ln\left(k(\lambda;\boldsymbol{\eta})\right)\right]d\lambda \\
&\qquad -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial\eta_j\partial\eta_k}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left(k(\lambda;\boldsymbol{\eta})\right)d\lambda}_{=0} \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{k(\lambda;\boldsymbol{\eta})}\frac{\partial}{\partial\eta_j}k(\lambda;\boldsymbol{\eta})\frac{\partial}{\partial\eta_k}\ln\left(k(\lambda;\boldsymbol{\eta})\right)d\lambda \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial}{\partial\eta_j}\ln\left(k(\lambda;\boldsymbol{\eta})\right)\frac{\partial}{\partial\eta_k}\ln\left(k(\lambda;\boldsymbol{\eta})\right)d\lambda \\
&= \Omega_{jk}(\boldsymbol{\eta}).
\end{aligned}
$$

■

Lema 3.5. *Seja $I_N(\lambda;\varepsilon)$ o periodograma do processo de inovação $\{\varepsilon_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$, ou seja, $I_N(\lambda;\varepsilon) = \frac{1}{2\pi N}\left|\sum_{n=1}^{N}\varepsilon_n e^{in\lambda}\right|^2$, então*

a) $$P\lim_{N\to\infty} N^{1/2}\left[\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\eta}}\mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}_0;\boldsymbol{X}) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} I_N(\lambda;\varepsilon)\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\eta}}\ln k(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)d\lambda\right] = 0,$$

b) $\displaystyle P\lim_{N\to\infty} N^{1/2}\left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}} S_N^2(\boldsymbol{\eta}_0) + \frac{1}{cN}\sum_t I_N(\omega_{ct};\varepsilon)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}}\ln k(\omega_{ct};\boldsymbol{\eta}_0)\right] = 0,$

em que a notação $P\lim_{N\to\infty}$, quer dizer convergência em probabilidade, $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}} S_N^2(\boldsymbol{\eta}_0)$, quer dizer a derivada da função $S_N^2(\boldsymbol{\eta})$ com relação à $\boldsymbol{\eta}$, aplicada em $\boldsymbol{\eta}_0$, e $\mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}_0;\boldsymbol{X})$ é dada pela equação (3.43).

Demonstração:

a) Temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}}\mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}_0;\boldsymbol{X}) &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{I_N(\lambda)}{k(\lambda;\boldsymbol{\eta})}d\lambda\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} I_N(\lambda)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}}\left[\frac{1}{k(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)}\right]d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} I_N(\lambda)\left[-\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}}k(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)\right]\frac{1}{k^2(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)}d\lambda, \qquad (3.50)
\end{aligned}$$

em que podemos trocar o sinal da derivada com o da integral, na segunda igualdade, pois a função $\frac{1}{k(\lambda;\boldsymbol{\eta})}$ é contínua, por hipótese.

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} I_N(\lambda;\varepsilon)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}}\ln k(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} I_N(\lambda;\varepsilon)\frac{1}{k(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}}k(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)d\lambda. \qquad (3.51)
\end{aligned}$$

Assim, somando as equações (3.50) e 3.51, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}}\mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}_0;\boldsymbol{X}) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} I_N(\lambda;\varepsilon)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}}\ln k(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{k(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}}k(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)\left[I_N(\lambda;\varepsilon) - \frac{I_N(\lambda)}{k(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)}\right]d\lambda. \qquad (3.52)
\end{aligned}$$

Note que

$$
\begin{aligned}
I_N(\lambda;\varepsilon) &= \frac{1}{2\pi N}\left|\sum_{n=1}^{N}\varepsilon_n e^{in\lambda}\right|^2 \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{|h|<N}\hat{\gamma}_\varepsilon(h)e^{-i\lambda h} \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{1}{2\pi}\sum_{h=-\infty}^{\infty}\gamma_\varepsilon(h)e^{-i\lambda h} = \frac{\sigma_0^2}{2\pi},
\end{aligned}
$$

em que a convergência é válida, pois sabemos que $\hat{\gamma}_\varepsilon(h) \xrightarrow{\mathbb{P}} \gamma_\varepsilon(h)$ (na verdade temos a convergência quase certa, mas esta implica em convergência em probabilidade, ver Brockwell e Davis, 1991, p.376). Além disso, temos que

$$
\gamma_\varepsilon(h) = \begin{cases} \sigma_0^2, & \text{se} \quad h = 0, \\ 0, & \text{se} \quad h \neq 0. \end{cases}
$$

Por outro lado, veja que, por (3.36)

$$
\frac{I_N(\lambda)}{k(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)} = \frac{\frac{1}{2\pi}\sum_{|h|<N}\hat{\gamma}_X(h)e^{-i\lambda h}}{\frac{2\pi}{\sigma_0^2}\frac{1}{2\pi}\sum_{h\in\mathbb{Z}}\gamma_X(h)e^{-i\lambda h}} \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{\frac{1}{2\pi}\sum_{h\in\mathbb{Z}}\gamma_X(h)e^{-i\lambda h}}{\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{h\in\mathbb{Z}}\gamma_X(h)e^{-i\lambda h}} = \frac{\sigma_0^2}{2\pi},
$$

em que vale a convergência, pois temos $\hat{\gamma}_X(h) \xrightarrow{\mathbb{P}} \gamma_X(h)$.

Portanto, podemos concluir que

$$
I_N(\lambda;\varepsilon) - \frac{I_N(\lambda)}{k(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0. \tag{3.53}
$$

Assim, das equações (3.52) e (3.53), segue o resultado.

b) Sabemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\eta}}S_N^2(\boldsymbol{\eta}_0) &= \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\eta}}\left[\frac{1}{cN}\sum_t\frac{I_N(\omega_{ct})}{k(\omega_{ct};\boldsymbol{\eta}_0)}\right] \\
&= \frac{1}{cN}\sum_t I_N(\omega_{ct})\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\eta}}\frac{1}{k(\omega_{ct};\boldsymbol{\eta}_0)} \\
&= \frac{1}{cN}\sum_t I_N(\omega_{ct})\left[-\frac{1}{k^2(\omega_{ct};\boldsymbol{\eta}_0)}\right]\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\eta}}k(\omega_{ct};\boldsymbol{\eta}_0). \qquad (3.54)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, temos

$$\frac{1}{cN}\sum_t I_N(\omega_{ct};\varepsilon)\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\eta}}\ln k(\omega_{ct};\boldsymbol{\eta}_0)$$
$$= \frac{1}{cN}\sum_t I_N(\omega_{ct};\varepsilon)\frac{1}{k(\omega_{ct};\boldsymbol{\eta}_0)}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\eta}}k(\omega_{ct};\boldsymbol{\eta}_0). \tag{3.55}$$

Se somarmos as equações (3.54) e (3.55), chegaremos na seguinte expressão

$$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\eta}}S_N^2(\boldsymbol{\eta}_0) + \frac{1}{cN}\sum_t I_N(\omega_{ct};\varepsilon)\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\eta}}\ln k(\omega_{ct};\boldsymbol{\eta}_0)$$
$$= \frac{1}{cN}\sum_t \frac{1}{k(\omega_{ct};\boldsymbol{\eta}_0)}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\eta}}k(\omega_{ct};\boldsymbol{\eta}_0)\left[I_N(\omega_{ct};\varepsilon) - \frac{I_N(\omega_{ct})}{k(\omega_{ct};\boldsymbol{\eta}_0)}\right]. \tag{3.56}$$

Sabemos, pelo item a), que

$$I_N(\omega_{ct};\varepsilon) - \frac{I_N(\omega_{ct})}{k(\omega_{ct};\boldsymbol{\eta}_0)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

Então, pela equação (3.56), segue o resultado.

■

Com os lemas acima, já conseguimos demonstrar o Teorema 3.2.

Demonstração do Teorema 3.2:

Pelo Lema 3.3, temos que

$$\sqrt{N}(\hat{\boldsymbol{\eta}}_N - \boldsymbol{\eta}_0) \xrightarrow{d} -\frac{\pi}{\sigma_0^2}W^{-1}(\boldsymbol{\eta}_0)Y.$$

Se aplicarmos o Lema 3.4, podemos escrever

$$\sqrt{N}(\hat{\boldsymbol{\eta}}_N - \boldsymbol{\eta}_0) \xrightarrow{d} -\frac{\pi}{\sigma_0^2}\Omega^{-1}(\boldsymbol{\eta}_0)Y.$$

Então, pelo Lema 3.3, veja que basta mostrarmos a distribuição assintótica de $\sqrt{N}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\eta}}S_N^2(\boldsymbol{\eta}_0)$. Para isso, chame de $\mathcal{F}(\lambda) = \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\eta}}k^{-1}(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)$ e seja $\mathcal{F}_N(\lambda)$ a N-ésima soma de Cesaro da série de Fourier de $\mathcal{F}(\lambda)$. Como $\mathcal{F}(\lambda)$ é uma função de classe Lipschitz de ordem $1/2 < \alpha < 1$, pelo Teorema 3.15, encontrado em Zygmund (1959, p.91), temos que $\mathcal{F}(\lambda) - \mathcal{F}_N(\lambda) = O(N^{-\alpha})$ uniformemente em λ, ou seja, existe κ_1

tal que $\mathcal{F}(\lambda) - \mathcal{F}_N(\lambda) \leq \kappa_1 N^{-\alpha}$. Então,

$$\begin{aligned} &\sqrt{N}\frac{1}{cN}\sum_t I_N(\omega_{ct})\mathcal{F}(\omega_{ct}) - \sqrt{N}\frac{1}{cN}\sum_t I_N(\omega_{ct})\mathcal{F}_N(\omega_{ct}) \\ \leq\ &\sqrt{N}\frac{1}{cN}\sum_t I_N(\omega_{ct})\kappa_1 N^{-\alpha} = \kappa_1\frac{N^{-1/2-\alpha}}{c}\sum_t I_N(\omega_{ct}) \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned} \tag{3.57}$$

Também sabemos que

$$\sqrt{N}\frac{1}{cN}\sum_t I_N(\omega_{ct})\mathcal{F}_N(\omega_{ct}) \simeq \frac{\sqrt{N}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} I_N(\lambda)\mathcal{F}_N(\lambda)d\lambda. \tag{3.58}$$

Além disso, temos que

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{N}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} I_N(\lambda)\mathcal{F}(\lambda)d\lambda - \frac{\sqrt{N}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} I_N(\lambda)\mathcal{F}_N(\lambda)d\lambda \\ &= \frac{\sqrt{N}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} I_N(\lambda)\left[\mathcal{F}(\lambda) - \mathcal{F}_N(\lambda)\right]d\lambda \\ \leq\ &\frac{\sqrt{N}}{2\pi}\kappa_1 N^{-\alpha}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} I_N(\lambda)d\lambda}_{\kappa_2} = \frac{\kappa_1\kappa_2}{2\pi}N^{1/2-\alpha} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \text{pois } 1/2 < \alpha < 1. \end{aligned} \tag{3.59}$$

Logo, pelas equações (3.57), (3.58) e (3.59), temos que

$$\sqrt{N}\frac{1}{cN}\sum_t I_N(\omega_{ct})\mathcal{F}(\omega_{ct}) - \frac{\sqrt{N}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} I_N(\lambda)\mathcal{F}(\lambda)d\lambda \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Se fizermos o mesmo processo para a função $\mathcal{G}(\lambda) = \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\eta}}\ln k(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)$, concluiremos que

$$\sqrt{N}\frac{1}{cN}\sum_t I_N(\omega_{ct};\varepsilon)\mathcal{G}(\omega_{ct}) - \frac{\sqrt{N}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} I_N(\lambda;\varepsilon)\mathcal{G}(\lambda)d\lambda \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Veja que, aplicando o resultado do Lema 3.5, basta considerarmos a demonstração para $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}}\mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}_0;\boldsymbol{X})$. Em Fox e Taqqu (1986), podemos encontrar a demonstração de que

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}}\mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}_0;\boldsymbol{X}) \xrightarrow{d} N\left(0;\frac{\sigma_0^4}{\pi^2}\Omega(\boldsymbol{\eta}_0)\right).$$

Seja Y uma variável aleatória tendo distribuição $N\left(0;\frac{\sigma_0^4}{\pi^2}\Omega(\boldsymbol{\eta}_0)\right)$. Portanto, pelo Lema 3.4, podemos escrever

$$\sqrt{N}(\hat{\boldsymbol{\eta}}_N-\boldsymbol{\eta}_0) \xrightarrow{d} -\frac{\pi}{\sigma_0^2}\Omega^{-1}(\boldsymbol{\eta}_0)Y.$$

Seja X a variável aleatória $X=-\frac{\pi}{\sigma_0^2}\Omega^{-1}(\boldsymbol{\eta}_0)Y$, então,

$$\mathbb{E}(X)=0;$$

$$Var(X)=Var\left(-\frac{\pi}{\sigma_0^2}\Omega^{-1}(\boldsymbol{\eta}_0)Y\right)=\frac{\pi^2}{\sigma_0^4}\Omega^{-2}(\boldsymbol{\eta}_0)\frac{\sigma_0^4}{\pi^2}\Omega(\boldsymbol{\eta}_0)=\Omega^{-1}(\boldsymbol{\eta}_0).$$

O que completa a demonstração. ■

3.2.4 Estimador FTS

Outra proposta que temos para este trabalho, é substituir o periodograma, no estimador proposto por Fox e Taqqu (1986), pelo periodograma suavizado de covariâncias (ver equação (1.18)). Assim, vamos definir a seguir este novo estimador.

Considere as seguintes funções

$$\bar{S}_N^2(\boldsymbol{\eta})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{I_s(\lambda)}{k(\lambda;\boldsymbol{\eta})}d\lambda, \tag{3.60}$$

$$\widetilde{S}_N^2(\boldsymbol{\eta})=\frac{1}{N}\sum_t\frac{I_s(\omega_t)}{k(\omega_t;\boldsymbol{\eta})}, \tag{3.61}$$

em que $\boldsymbol{\eta}$ é o vetor de parâmetros a ser estimado e $\omega_t=\frac{2\pi t}{N}$ são as frequências de Fourier, $t\in\mathbb{Z}, -\frac{N}{2}<t\leq\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor$. Os estimadores modificados que estamos propondo, denotados por $\bar{\boldsymbol{\eta}}_N$ e $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_N$, são, respectivamente, os pontos mínimos das equações (3.60) e (3.61). Além disso, os estimadores da variância do processo de inovação são dados por $\bar{\sigma}_\varepsilon^2=2\pi\bar{S}_N^2(\bar{\boldsymbol{\eta}}_N)$ e $\widetilde{\sigma}_\varepsilon^2=2\pi\widetilde{S}_N^2(\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_N)$.

Demonstraremos que estes novos estimadores são consistentes e possuem a mesma distribuição assintótica do estimador proposto na seção anterior, para isso iremos, primeiramente, demonstrar alguns lemas. Iremos supor que as condições A, descritas na seção anterior, são válidas.

Lema 3.6. *Quando* $\boldsymbol{\eta} \in \vartheta_0$*, temos que*

$$\lim_{N\to\infty} \bar{S}_N^2(\boldsymbol{\eta}) = \lim_{N\to\infty} \widetilde{S}_N^2(\boldsymbol{\eta}) = \frac{\sigma_0^2}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{k(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)}{k(\lambda;\boldsymbol{\eta})}d\lambda.$$

Demonstração: Iremos provar apenas para $\widetilde{S}_N^2$, o outro caso é inteiramente análogo. Dado $\epsilon > 0$, seja $q_M(\lambda;\boldsymbol{\eta}) > 0, \lambda \in [-\pi,\pi]$, a soma de Cesaro, com M termos, da série de Fourier de $\frac{1}{k(\lambda;\boldsymbol{\eta})}$.

Podemos escolher M suficientemente grande, de forma que

$$\left|\frac{1}{k(\lambda;\boldsymbol{\eta})} - q_M(\lambda;\boldsymbol{\eta})\right| < \frac{\epsilon}{H},$$

em que $H = \frac{1}{N}\sum_t I_s(\omega_t) < \infty$, pois temos uma soma finita de elementos finitos. A convergência é uniforme, pois a soma de Cesaro converge uniformemente em $(\lambda;\boldsymbol{\eta})$, para $\boldsymbol{\eta} \in \vartheta_0$, pois $\frac{1}{k(\lambda;\boldsymbol{\eta})}$ é uma função contínua e periódica, de período 2π (para detalhes ver Iório, 2007, p.135).

Então, temos que

$$\begin{aligned}
\left|\widetilde{S}_N^2(\boldsymbol{\eta}) - \frac{1}{N}\sum_t I_s(\omega_t)q_M(\omega_t;\boldsymbol{\eta})\right| &= \left|\frac{1}{N}\sum_t I_s(\omega_t)\left(\frac{1}{k(\omega_t;\boldsymbol{\eta})} - q_M(\omega_t;\boldsymbol{\eta})\right)\right| \\
&\leq \frac{1}{N}\sum_t I_s(\omega_t)\underbrace{\left|\frac{1}{k(\omega_t;\boldsymbol{\eta})} - q_M(\omega_t;\boldsymbol{\eta})\right|}_{<\epsilon/H} \\
&< \frac{1}{N}\sum_t I_s(\omega_t)\frac{\epsilon}{H} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Por outro lado, como sabemos que o periodograma suavizado de covariâncias é consistente, temos que $I_s(\omega_t) \xrightarrow{\mathbb{P}} f_X(\omega_t; \boldsymbol{\eta}_0)$, então

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N}\sum_t I_s(\omega_t) q_M(\omega_t; \boldsymbol{\eta}) \quad &\longrightarrow \quad \frac{1}{N}\sum_t f_X(\omega_t; \boldsymbol{\eta}_0) q_M(\omega_t; \boldsymbol{\eta}) \\
&\xrightarrow{N\to\infty} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_X(\lambda; \boldsymbol{\eta}_0) q_M(\lambda; \boldsymbol{\eta}) d\lambda \\
&= \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sigma_0^2}{2\pi} k(\lambda; \boldsymbol{\eta}_0) q_M(\lambda; \boldsymbol{\eta}) d\lambda \\
&= \quad \frac{\sigma_0^2}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} k(\lambda; \boldsymbol{\eta}_0) q_M(\lambda; \boldsymbol{\eta}) d\lambda
\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\left| S_N^2(\boldsymbol{\eta}) - \frac{\sigma_0^2}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} q_M(\lambda; \boldsymbol{\eta}) k(\lambda; \boldsymbol{\eta}_0) d\lambda \right| < \epsilon.$$

Como a soma de Cesaro $q_M(\lambda; \boldsymbol{\eta})$ converge uniformemente para a função $k^{-1}(\lambda; \boldsymbol{\eta})$, segue o resultado do lema. ∎

O teorema a seguir apresenta a consistência dos estimadores definidos nesta seção.

Teorema 3.3. *Sob as condições A, com probabilidade 1,*

$$\lim_{N\to\infty} \bar{\boldsymbol{\eta}}_N = \lim_{N\to\infty} \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_N = \boldsymbol{\eta}_0,$$

e

$$\lim_{N\to\infty} \bar{S}_N^2(\bar{\boldsymbol{\eta}}_N) = \lim_{N\to\infty} \widetilde{S}_N^2(\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_N) = \frac{\sigma_0^2}{2\pi}.$$

Demonstração: Proceder exatamente como na demonstração do Teorema 3.1, utilizando Lema 3.6 no lugar do Lema 3.1.

∎

Para demonstrarmos a distribuição assintótica destes estimadores, precisamos de alguns lemas, que estão a seguir.

Lema 3.7. *Considere $\{b_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ uma sequência tal que $b_N \to \infty$, quando $N \to \infty$.*

Seja $b_N \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}} \widetilde{S}_N^2(\boldsymbol{\eta}_0) \xrightarrow{d} Y$, *em que* Y *é um vetor aleatório. Então*

$$b_N(\hat{\boldsymbol{\eta}}_N - \boldsymbol{\eta}_0) \xrightarrow{d} -\frac{\pi}{\sigma_0^2} W^{-1}(\boldsymbol{\eta}_0)Y,$$

em que $W_{jk}(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k(\lambda; \boldsymbol{\eta}) \frac{\partial^2}{\partial \eta_j \partial \eta_k} k^{-1}(\lambda; \boldsymbol{\eta}) d\lambda$.

Demonstração: Segue análoga ao Lema 3.3.

■

Observação 3.5. O Lema 3.7 também é válido se considerarmos $\bar{S}_N^2(\boldsymbol{\eta})$.

Lema 3.8. *Seja* $I_S(\lambda; \varepsilon)$ *o periodograma suavizado de covariâncias do processo de inovação* $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, *ou seja,* $I_S(\lambda; \varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-(N-1)}^{(N+1)} \omega_M(h) \hat{\gamma}_\varepsilon(h) e^{-i\lambda h}$, *então*

$$a) \quad P \lim_{N \to \infty} N^{1/2} \left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}} \mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}_0; \boldsymbol{X}) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I_S(\lambda; \varepsilon) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}} \ln k(\lambda; \boldsymbol{\eta}_0) d\lambda \right] = 0,$$

$$b) \quad P \lim_{N \to \infty} N^{1/2} \left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}} \widetilde{S}_N^2(\boldsymbol{\eta}_0) + \frac{1}{N} \sum_t I_S(\omega_t; \varepsilon) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}} \ln k(\omega_t; \boldsymbol{\eta}_0) \right] = 0,$$

em que a notação $P \lim_{N \to \infty}$, *quer dizer convergência em probabilidade,* $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}} \widetilde{S}_N^2(\boldsymbol{\eta}_0)$, *quer dizer a derivada da função* $S_N^2(\boldsymbol{\eta})$ *com relação à* $\boldsymbol{\eta}$, *aplicada em* $\boldsymbol{\eta}_0$, *e* $\mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}_0; \boldsymbol{X})$ *é a equação* (3.43).

Demonstração:
a) Pelo Lema 5, de Hannan (1973), temos que

$$N^{1/2} \left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}} \mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}_0; \boldsymbol{X}) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I_N(\lambda; \varepsilon) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}} \ln k(\lambda; \boldsymbol{\eta}_0) d\lambda \right] \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

Assim, note que

$$
\begin{aligned}
& N^{1/2}\left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}}\mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}_0;\boldsymbol{X})+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} I_N(\lambda;\varepsilon)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}}\ln k(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)d\lambda\right] \\
= \;& N^{1/2}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} I_N(\lambda)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}}k^{-1}(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)d\lambda+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} I_N(\lambda;\varepsilon)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}}\ln k(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)d\lambda\right] \\
= \;& N^{1/2}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} I_N(\lambda)\left(-\frac{1}{k^2(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)}\right)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}}k(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)d\lambda\right] \\
& +N^{1/2}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} I_N(\lambda;\varepsilon)\frac{1}{k(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}}k(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)d\lambda\right] \\
= \;& N^{1/2}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{k(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}}k(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)\left(I_N(\lambda;\varepsilon)-\frac{I_N(\lambda)}{k(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)}\right)d\lambda\right]\xrightarrow{\mathbb{P}} 0.
\end{aligned}
$$

Logo, devemos ter $I_N(\lambda;\varepsilon)$ e $\frac{I_N(\lambda)}{k(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)}$ convergindo para a mesma expressão. Veja que

$$
I_N(\lambda;\varepsilon)=\frac{1}{2\pi}\sum_{|h|<N}\hat{\gamma}_\varepsilon(h)e^{-ih\lambda}\xrightarrow{\mathbb{P}}\frac{1}{2\pi}\sum_{|h|<N}\gamma_\varepsilon(h)e^{-ih\lambda}=\frac{\sigma_0^2}{2\pi},
$$

pois sabemos que $\hat{\gamma}_\varepsilon(h)\xrightarrow{\mathbb{P}}\gamma_\varepsilon(h)$ e, além disso, $\gamma_\varepsilon(h)=\begin{cases}\sigma_0^2, & \text{se}\quad h=0,\\ 0, & \text{se}\quad h\neq 0.\end{cases}$

Portanto,

$$
I_N(\lambda;\varepsilon)\xrightarrow{\mathbb{P}}\frac{\sigma_0^2}{2\pi}.
$$

Consequentemente,

$$
\frac{I_N(\lambda)}{k(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)}\xrightarrow{\mathbb{P}}\frac{\sigma_0^2}{2\pi}. \tag{3.62}
$$

Também temos que,

$$
I_S(\lambda;\varepsilon)=\frac{1}{2\pi}\sum_{h=-(N-1)}^{(N+1)}\omega_M(h)\hat{\gamma}_\varepsilon(h)e^{-i\lambda h}\xrightarrow{\mathbb{P}}\frac{1}{2\pi}\sum_{h=-(N-1)}^{(N+1)}\omega_M(h)\gamma_\varepsilon(h)e^{-i\lambda h},
$$

e, como $\omega_M(0) = 1$, temos

$$I_S(\lambda;\varepsilon) \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{\sigma_0^2}{2\pi}. \tag{3.63}$$

Portanto, temos

$$N^{1/2}\left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}}\mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}_0;\boldsymbol{X}) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} I_S(\lambda;\varepsilon)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}}\ln k(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)d\lambda\right]$$

$$= N^{1/2}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{k(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}}k(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)\left(I_S(\lambda;\varepsilon) - \frac{I_N(\lambda)}{k(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)}\right)d\lambda\right] \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,$$

pelas equações (3.62) e (3.63).

b) Temos que

$$I_S(\omega_t;\varepsilon) \xrightarrow{\mathbb{P}} f_\varepsilon(\omega_t) = \frac{\sigma_0^2}{2\pi}. \tag{3.64}$$

Além disso,

$$I_S(\omega_t) \xrightarrow{\mathbb{P}} f_X(\omega_t;\boldsymbol{\eta}_0) = \frac{\sigma_0^2}{2\pi}k(\omega_t;\boldsymbol{\eta}_0).$$

O que implica em

$$\frac{I_S(\omega_t)}{k(\omega_t;\boldsymbol{\eta}_0)} \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{\frac{\sigma_0^2}{2\pi}k(\omega_t;\boldsymbol{\eta}_0)}{k(\omega_t;\boldsymbol{\eta}_0)} = \frac{\sigma_0^2}{2\pi}. \tag{3.65}$$

Portanto, pelas equações (3.64) e (3.65), temos que

$$N^{1/2}\left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}}\widetilde{S}_N^2(\boldsymbol{\eta}_0) + \frac{1}{N}\sum_t I_S(\omega_t;\varepsilon)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}}\ln k(\omega_t;\boldsymbol{\eta}_0)\right]$$

$$= N^{1/2}\left[\frac{1}{N}\sum_t \frac{1}{k(\omega_t;\boldsymbol{\eta}_0)}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}}k(\omega_t;\boldsymbol{\eta}_0)\left(I_S(\omega_t;\varepsilon) - \frac{I_S(\omega_t)}{k(\omega_t;\boldsymbol{\eta}_0)}\right)\right] \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

■

Com os resultados mostrados até agora, estamos em condições de demonstrar a distribuição assintótica dos estimadores.

Teorema 3.4. *Sob as condições A, os vetores aleatórios* $\sqrt{N}(\bar{\boldsymbol{\eta}}_N - \boldsymbol{\eta}_0)$ *e* $\sqrt{N}(\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_N - \boldsymbol{\eta}_0)$ *convergem em distribuição a um vetor normal com média zero e matriz de* *covariâncias* $\Omega^{-1}(\boldsymbol{\eta}_0)$, *em que a* $(j,k)-$*ésima entrada da matriz* $\Omega(\boldsymbol{\eta})$ *é dada por*

$$\Omega_{jk}(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial \eta_j} \ln\left(k(\lambda;\boldsymbol{\eta})\right) \frac{\partial}{\partial \eta_k} \ln k(\lambda;\boldsymbol{\eta}) d\lambda.$$

Demonstração: Iremos fazer a demonstração para $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_N$. Pelo Lema 3.7, precisamos mostrar um teorema para $\sqrt{N}\widetilde{S}^2_N(\boldsymbol{\eta}_0)$. Pelos mesmos argumentos da demonstração do Teorema 3.2, temos que

$$\sqrt{N}\left[\frac{1}{N}\sum_t I_S(\omega_t)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}}k^{-1}(\omega_t;\boldsymbol{\eta}_0) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} I_S(\lambda)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}}k^{-1}(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)d\lambda\right] \xrightarrow{N\to\infty} 0. \quad (3.66)$$

Logo, é indiferente considerarmos $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}}\bar{S}^2_N(\boldsymbol{\eta}_0)$ ou $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}}\widetilde{S}^2_N(\boldsymbol{\eta}_0)$, para a distribuição assintótica.

Analogamente, também temos que

$$\sqrt{N}\left[\frac{1}{N}\sum_t I_S(\omega_t;\varepsilon)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}}\ln k(\omega_t;\boldsymbol{\eta}_0) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} I_S(\lambda;\varepsilon)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}}\ln k(\lambda;\boldsymbol{\eta}_0)d\lambda\right] \xrightarrow{N\to\infty} 0. \quad (3.67)$$

Assim, pelo Lema 3.8 basta considerarmos a prova para $\sqrt{N}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}}\mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}_0;\boldsymbol{X})$, que é dada no artigo de Fox e Taqqu (1986),

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}}\mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}_0;\boldsymbol{X}) \xrightarrow{d} \underbrace{N\left(0;\frac{\sigma_0^4}{\pi^2}\Omega(\boldsymbol{\eta}_0)\right)}_{Y}.$$

Portanto, pelo Lema 3.7, podemos escrever

$$\sqrt{N}(\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_N - \boldsymbol{\eta}_0) \xrightarrow{d} \underbrace{-\frac{\pi}{\sigma_0^2}\Omega^{-1}(\boldsymbol{\eta}_0)Y.}_{X}$$

Portanto,

$$\mathbb{E}(X) = 0;$$

$$Var(X) = Var\left(-\frac{\pi}{\sigma_0^2}\Omega^{-1}(\boldsymbol{\eta}_0)Y\right) = \frac{\pi^2}{\sigma_0^4}\Omega^{-2}(\boldsymbol{\eta}_0)\frac{\sigma_0^4}{\pi^2}\Omega(\boldsymbol{\eta}_0) = \Omega^{-1}(\boldsymbol{\eta}_0),$$

completando a demonstração. ■

3.2.5 Estimador KM

Nesta seção iremos estudar um estimador paramétrico para os processos α-estáveis. Para isso considere $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ um processo linear geral,

$$X_t = \sum_{j\in\mathbb{Z}_{\geq}} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{3.68}$$

em que as inovações $\{\varepsilon_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ são variáveis independentes e identicamente distribuídas α-estáveis simétricas ($S\alpha S$), descritas na Seção 2.2. Considere a seguinte função

$$\sigma_N^2(\boldsymbol{\eta}) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\widetilde{I}_N(\lambda)}{g_X(\lambda;\boldsymbol{\eta})} d\lambda, \tag{3.69}$$

em que $\widetilde{I}_N(\lambda)$ é o periodograma normalizado, dado na Definição 2.18, e $g_X(\lambda;\boldsymbol{\eta})$ é a função poder de transferência, dada em (2.26), para o processo SARFIMA α-estável.

Um estimador para o vetor de parâmetros desconhecidos, proposto por Klüppelberg e Mikosch (1996), é o ponto de mínimo da função (3.69), denotado por $\boldsymbol{\eta}_N^*$. Inicialmente, Mikosch et al (1995) provam a consistência e distribuição assintótica, se considerássemos um processo ARMA(p,q) α-estável. Posteriormente, Klüppelberg e Mikosch (1996), provam que o estimador, considerando processos lineares gerais, também é consistente, sob certas condições, e que

$$\left(\frac{N}{\ln N}\right)^{1/\alpha} (\boldsymbol{\eta}_N^* - \boldsymbol{\eta}_0) \xrightarrow{d} 4\pi Q^{-1}(\boldsymbol{\eta}_0)\frac{1}{Y_0}\sum_{k=1}^{\infty} Y_k b_k,$$

em que $Y_0, Y_1, \ldots$ são variáveis aleatórias independentes, $Y_0 \overset{d}{=} S_{\alpha/2}(C_{\alpha/2}^{-2/\alpha}, 1, 0)$ é $\alpha/2$-estável, $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ são independentes e identicamente distribuídas $S\alpha S$ com parâmetro de escala $\sigma = C_\alpha^{1/\alpha}$, C_α é a constante

$$C_\alpha = \begin{cases} \frac{1-\alpha}{\Gamma(2-\alpha)\cos(\pi\alpha/2)}, & \text{se} \quad \alpha \neq 1, \\ \frac{2}{\pi}, & \text{se} \quad \alpha = 1, \end{cases}$$

$\Gamma(\cdot)$ é a função Gama, definida em (2.2), $Q^{-1}(\boldsymbol{\eta}_0)$ é a inversa da matriz

$$Q(\boldsymbol{\eta}_0) = \int_{-\pi}^{\pi} g_X(\lambda; \boldsymbol{\eta}_0) \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\eta}^2} g_X^{-1}(\lambda; \boldsymbol{\eta}_0) d\lambda,$$

e, para $k \in \mathbb{N}$, b_k é o vetor

$$b_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} g(\lambda; \boldsymbol{\eta}_0) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}} g^{-1}(\lambda; \boldsymbol{\eta}_0) d\lambda.$$

Na prática, aproximamos a integral da equação (3.69) pela soma nos coeficientes de Fourier.

Ndongo et. al. (2010) apresenta um estudo com simulações utilizando este estimador para processos SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ α-estáveis, com $p = q = 0 = P = Q$ e $s = 4$. O estudo apresenta resultados promissores.

Iremos apresentar nas seções seguintes, três modificações para este estimador proposto por Klüppelberg e Mikosch (1996). Com relação aos estimadores propostos nas Seções 3.2.6 à 3.2.8 não provamos as propriedades de consistência e distribuição assintótica. Deixamos esta tarefa para futuros trabalhos.

3.2.6 Estimador KMmod

Como visto na seção anterior, na prática, para utilizarmos o estimador proposto por Klüppelberg e Mikosch (1996), considera-se a soma nos coeficiente de Fourier, no lugar da integral. Assim, vamos modificar o estimador original, calculando a função $\sigma_N^2(\boldsymbol{\eta})$, dada pela equação (3.69), não apenas nas frequências de Fourier, mas em mais frequências.

Considere a seguinte função

$$\widetilde{\sigma}_N^2(\boldsymbol{\eta}) = \frac{2\pi}{cN} \sum_t \frac{\widetilde{I}_N(\omega_{ct})}{g_X(\omega_{ct}; \boldsymbol{\eta})}, \tag{3.70}$$

em que $\omega_{ct} = \frac{2\pi t}{cN}$, $c \in \mathbb{N} - \{1\}$ fixo e finito, $t \in \mathbb{Z}, -\frac{cN}{2} < t \leq \lfloor \frac{cN}{2} \rfloor$, $\widetilde{I}_N(\lambda)$ é o periodograma normalizado, dado na Definição 2.18, e $g_X(\lambda; \boldsymbol{\eta})$ é a função poder de transferência, dada em (2.26), para o processo SARFIMA α-estável. O estimador modificado que estamos propondo, denotado por $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_N^*$, é o ponto de mínimo da equação (3.70), com relação à $\boldsymbol{\eta}$.

3.2.7 Estimador KMS

Outra modificação que queremos propor ao estimador proposto por Klüppelberg e Mikosch (1996), é a utilização do periodograma normalizado suavizado de correlações, dado pela Definição 2.19, no lugar do periodograma normalizado. Assim, vamos definir a seguir este novo estimador.

Considere a seguinte função

$$\bar{\sigma}_N^2(\boldsymbol{\eta}) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\widetilde{I}_{SN}(\lambda)}{g_X(\lambda;\boldsymbol{\eta})} d\lambda, \tag{3.71}$$

em que $\widetilde{I}_{SN}(\lambda)$ é o periodograma normalizado suavizado de correlações, dado pela Definição 2.19 e $g_X(\lambda;\boldsymbol{\eta})$ é a função poder de transferência, dada em (2.26), para o processo SARFIMA α-estável. O estimador modificado que estamos propondo, denotado por $\bar{\boldsymbol{\eta}}_N^*$, é o ponto de mínimo da equação (3.71). Na prática, aproximamos a integral pela soma nos coeficientes de Fourier.

3.2.8 Estimador KMSmod

Como, na prática, para utilizarmos o estimador KMS definido na Subseção 3.2.7, consideramos a soma nos coeficiente de Fourier, no lugar da integral, vamos modificar o estimador original, aproximando a função $\bar{\sigma}_N^2(\boldsymbol{\eta})$, dada pela equação (3.71), não apenas pela soma nas frequências de Fourier, passando a calcular a soma em mais frequências.

Considere a seguinte função

$$\hat{\sigma}_N^2(\boldsymbol{\eta}) = \frac{2\pi}{cN} \sum_t \frac{\widetilde{I}_{SN}(\omega_{ct})}{g_X(\omega_{ct};\boldsymbol{\eta})}, \tag{3.72}$$

em que $\omega_{ct} = \frac{2\pi t}{cN}$, $c \in \mathbb{N} - \{1\}$ fixo e finito, $t \in \mathbb{Z}, -\frac{cN}{2} < t \leq \left\lfloor \frac{cN}{2} \right\rfloor$, $\widetilde{I}_{SN}(\lambda)$ é o periodograma normalizado suavizado de correlações, dado pela Definição 2.19 e $g_X(\lambda;\boldsymbol{\eta})$ é a função poder de transferência, dada em (2.26), para o processo SARFIMA α-estável. O estimador modificado que estamos propondo, denotado por $\hat{\boldsymbol{\eta}}_N^*$, é o ponto de mínimo da equação (3.72), com relação à $\boldsymbol{\eta}$.

Capítulo 4

Simulações

Neste capítulo iremos apresentar o método de simulação dos processos apresentados no Capítulo 2. Além disso, iremos fazer a estimação dos parâmetros para os dados simulados através das diversas metodologias apresentadas no Capítulo 3.

Para gerarmos realizações dos processos iremos utilizar a representação média móvel infinita (ver expressão (2.7)) com apropriado ponto de truncamento. Por ser um processo complexo, este ponto de truncamento da expressão em (2.7) deve ser um valor grande. Neste trabalho, o ponto de truncamento será $\mathfrak{M} = 10000 + N$, em que N é o tamanho da amostra, ou seja

$$X_t = \sum_{j=0}^{\mathfrak{M}} \psi_j \varepsilon_{t-j}. \tag{4.1}$$

A seguir iremos descrever os passos para as simulações das séries de tamanho N:

1º Passo: Calcular o filtro linear $\{\psi_j\}_{j=0}^{\mathfrak{M}}$, supondo os valores dos parâmetros conhecidos.

2º Passo: Gerar as $\mathfrak{M}$ inovações (ruídos brancos Gaussianos para processos normais e variáveis α-estáveis simétricas para processos α-estáveis).

3º Passo: Aplicar o filtro nas inovações, a partir da representação média móvel infinita truncada, dada pela equação (4.1).

4º Passo: Aplicado o filtro, é gerada uma série temporal de tamanho $10000 + N$. Desconsideramos as 10000 primeiras observações. Gerando, assim, uma série temporal de tamanho N.

Iremos dividir este capítulo em duas seções, uma apresentando as simulações para processos com inovações ruído branco normais e outra para processos α-estáveis. Iremos considerar para as simulações apenas os processos SARFIMA$(p,d,q)\times(P,D,Q)_s$ normais e α-estáveis, pois são os processos mais gerais que definimos neste trabalho. A seguir iremos apresentar as simulações de Monte Carlo para os processos SARFIMA$(p,d,q)\times(P,D,Q)_s$ com média $\mu = 0$ e diferentes valores de d, D, p, q, P, Q e s. Consideraremos tamanhos amostrais $N \in \{500, 1000, 2000\}$, além disso, o processo de inovação ruído branco tem distribuição normal padrão, isto é, $\sigma_\varepsilon^2 = 1$ em todas simulações de processos normais; nos processos de inovação α-estáveis, o parâmetro $\sigma = 1$ e o parâmetro $\alpha \in \{1.25; 1.50; 1.75\}$.

Os resultados apresentados são baseados em 1000 replicações, com séries sazonais geradas a partir do método descrito nos passos $1-4$ acima. Para todos os estimadores e casos considerados, foram calculados os valores empíricos da média (mean), do vício (bias), do erro quadrático médio (mse) e da variância (var) em relação às 1000 replicações.

4.1 Resultados para Processos com Inovações Gaussianas

Nesta seção, iremos apresentar tabelas com diversos resultados para a estimação semiparamétrica e paramétrica dos processos SARFIMA$(p,d,q)\times(P,D,Q)$ com inovações na forma de ruído branco Gaussiano, estacionários e com a propriedade de longa dependência, isto é, quando $0 < d+D < 0.5$, $0 < D < 0.5$ e todas as raízes da equação $\phi(z)\Phi(z^s) = 0$ estão fora do círculo unitário.

Resultados da Estimação Semiparamétrica

Apresentamos simulações para os estimadores semiparamétricos definidos nas Seções 3.1.2 e 3.1.3 para processos normais. Além da metodologia dos mínimos quadrados, denotada por MQ, utilizamos as metodologias robustas MM e MQP, abordadas na Seção 3.1.1. Diversos casos foram considerados nas simulações, mas, por questão de espaço, apresentaremos apenas casos selecionados.

As Tabelas 4.1 à 4.6 referem-se aos processos SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$, nos casos $p = q = 0 = P = Q$, $d = D = 0.2$, $s \in \{4, 6, 12\}$, $N \in \{500, 1000, 2000\}$ e $\kappa \in \{0.70; 0.85\}$. No Apêndice A apresentamos os resultados da estimação nos processos SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$, nos casos $p = q = 0 = P = Q$, $d = D = 0.2$, $s \in \{4, 6, 12\}$, $N \in \{500, 1000, 2000\}$, com o κ máximo relativo a cada diferente valor de N. Não apresentamos no corpo do texto este caso, pois, como para cada N temos um κ diferente, não teríamos como compará-los entre si, então optamos por apresentar os resultados utilizando o maior κ presente nos diversos valores de N, além de um valor menor de κ para verificarmos a melhora na estimação quando κ aumenta.

Analisando as Tabelas 4.1 e 4.2 e Figuras 4.1 à 4.3, quando $N = 500$, podemos notar que, ao aumentarmos o valor de κ, em geral, o vício dos estimadores diminui. O mesmo ocorre quando $N = 1000$, notamos ao observar as Tabelas 4.3 e 4.4. Apenas quando $N = 2000$ (Tabelas 4.5 e 4.6), que não notamos essa melhora com o aumento de κ. Outro aspecto que notamos ao analisar estas tabelas, é que ao aumentarmos o valor de N, o valor do erro quadrático médio diminui. Note também que, pelas Figuras 4.1 à 4.3 e Tabelas 4.1 à 4.6, os estimadores que utilizam o periodograma suavizado de covariâncias (denotados por BA), possuem menor vício, nos casos analisados. Dentre as metodologias utilizadas para o estimador BA (MQ, MM e MQP), nenhum se sobressai, sendo variados os resultados encontrados. Também observe que, entre os estimadores que utilizam o periodograma comum (denotados por GPH), em quase todos os casos (com exceção de $N = 500$, $s \in \{6, 12\}$ e $\kappa = 0.70$), o estimador utilizando a metodologia robusta MM, foi o que apresentou menor vício.

As Tabelas 4.3 e 4.4 referentes ao caso $N = 1000$ mostram que os estimadores de $d = 0.2$ que se sobressaem são os que utilizam o periodograma normalizado suavizado de correlações (BA), que possuem menor vício. Para estimar $D = 0.2$ destacam-se os estimadores BA MQ e BA MM.

As Tabelas 4.5 e 4.6 referentes ao caso $N = 2000$ mostram que os estimadores de $d = 0.2$ que se sobressaem, possuindo menor vício, são os BA MQ e BA MQP. Para estimar $D = 0.2$ destaca-se o estimador BA MQ.

A Tabela 4.7 refere-se ao processo SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$, no caso $p = 1$, $q = 0 = P = Q$, $d = D = 0.2$, $\phi_1 = 0.5$, $s \in \{4, 6, 12\}$, $N = 1000$ e $\kappa = 0.85$. Note que, a estimação dos parâmetros ficou péssima, indiferente do tipo de estimador considerado. No Apêndice A apresentamos resultados semelhantes para o processo

SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$, no caso $q = 1$, $p = 0 = P = Q$, $d = D = 0.2$, $\theta_1 = 0.5$, $s \in \{4,6,12\}$, $N \in \{500,1000,2000\}$ e $\kappa = 0.85$. Tal fato, nos leva a descartar a utilização dos estimadores semiparamétricos descritos neste trabalho, quando temos processos SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$, com $p \neq 0$ ou $q \neq 0$ ou $P \neq 0$ ou $Q \neq 0$.

Note que, em todos os casos considerados, o estimador GPH, independente da metodologia utilizada, superestima o verdadeiro valor de d.

Tabela 4.1: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$, quando $p = q = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s \in \{4, 6, 12\}$, $\kappa = 0.70$ e $N = 500$.

	$\kappa = 0.70$											
	$s = 4$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2473	0.2311	0.2408	0.2213	0.2422	0.2225	0.1939	0.1958	0.1992	0.2026	0.1976	0.2038
bias	0.0473	0.0311	0.0408	0.0213	0.0422	0.0225	-0.0061	-0.0042	-0.0008	0.0026	-0.0024	0.0038
mse	0.0067	0.0116	0.0063	0.0145	0.0062	0.0137	0.0023	0.0046	0.0049	0.0073	0.0029	0.0074
var	0.0044	0.0107	0.0047	0.0141	0.0044	0.0132	0.0022	0.0046	0.0049	0.0073	0.0029	0.0074
	$s = 6$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2499	0.2372	0.2469	0.2326	0.2452	0.2284	0.1928	0.1921	0.1960	0.2017	0.1978	0.2031
bias	0.0499	0.0372	0.0469	0.0326	0.0452	0.0284	-0.0072	-0.0079	-0.0040	0.0017	-0.0022	0.0031
mse	0.0080	0.0125	0.0080	0.0159	0.0081	0.0141	0.0026	0.0049	0.0060	0.0072	0.0035	0.0082
var	0.0055	0.0112	0.0058	0.0149	0.0060	0.0133	0.0026	0.0048	0.0060	0.0072	0.0035	0.0082
	$s = 12$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2502	0.2381	0.2447	0.2378	0.2431	0.2345	0.1867	0.1853	0.1915	0.1967	0.1923	0.1996
bias	0.0502	0.0381	0.0447	0.0378	0.0431	0.0345	-0.0133	-0.0147	-0.0085	-0.0033	-0.0077	-0.0004
mse	0.0093	0.0148	0.0120	0.0173	0.0106	0.0179	0.0030	0.0045	0.0063	0.0069	0.0045	0.0083
var	0.0068	0.0133	0.0100	0.0159	0.0088	0.0167	0.0029	0.0043	0.0062	0.0068	0.0044	0.0084

Tabela 4.2: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q)\times(P,D,Q)_s$, quando $p=q=0=P=Q$, $d=0.2$, $D=0.2$, $s\in\{4,6,12\}$, $\kappa=0.85$ e $N=500$.

	$\kappa=0.85$											
	$s=4$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$
mean	0.2370	0.2141	0.2275	0.2046	0.2332	0.2086	0.1972	0.1996	0.1994	0.2047	0.2000	0.2030
bias	0.0370	0.0141	0.0275	0.0046	0.0332	0.0086	-0.0028	-0.0004	-0.0006	0.0047	0.0000	0.0030
mse	0.0045	0.0039	0.0062	0.0072	0.0043	0.0044	0.0017	0.0020	0.0025	0.0033	0.0022	0.0028
var	0.0031	0.0037	0.0055	0.0072	0.0032	0.0044	0.0017	0.0020	0.0025	0.0033	0.0022	0.0028
	$s=6$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$
mean	0.2362	0.2214	0.2277	0.2086	0.2317	0.2164	0.1966	0.1987	0.2008	0.2032	0.2008	0.2025
bias	0.0362	0.0214	0.0277	0.0086	0.0317	0.0164	-0.0034	-0.0013	0.0008	0.0032	0.0008	0.0025
mse	0.0043	0.0040	0.0064	0.0071	0.0044	0.0045	0.0016	0.0020	0.0025	0.0037	0.0022	0.0031
var	0.0030	0.0036	0.0056	0.0071	0.0034	0.0043	0.0016	0.0020	0.0025	0.0037	0.0022	0.0031
	$s=12$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$
mean	0.2336	0.2271	0.2235	0.2160	0.2292	0.2223	0.1943	0.1967	0.1970	0.2038	0.1982	0.2047
bias	0.0336	0.0271	0.0235	0.0160	0.0292	0.0223	-0.0057	-0.0033	-0.0030	0.0038	-0.0018	0.0047
mse	0.0042	0.0047	0.0065	0.0085	0.0045	0.0056	0.0016	0.0019	0.0025	0.0034	0.0022	0.0031
var	0.0030	0.0040	0.0059	0.0082	0.0037	0.0051	0.0016	0.0019	0.0025	0.0034	0.0022	0.0031

Tabela 4.3: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q)\times(P,D,Q)_s$, quando $p=q=0=P=Q$, $d=0.2$, $D=0.2$, $s\in\{4,6,12\}$, $\kappa=0.70$ e $N=1000$.

	$\kappa = 0.70$											
	$s = 4$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$
mean	0.2307	0.2178	0.2272	0.2060	0.2279	0.2111	0.1986	0.1986	0.2009	0.2020	0.2014	0.2028
bias	0.0307	0.0178	0.0272	0.0060	0.0279	0.0111	-0.0014	-0.0014	0.0009	0.0020	0.0014	0.0028
mse	0.0030	0.0057	0.0037	0.0088	0.0032	0.0064	0.0011	0.0028	0.0016	0.0047	0.0016	0.0042
var	0.0020	0.0054	0.0030	0.0088	0.0025	0.0063	0.0011	0.0028	0.0016	0.0047	0.0016	0.0042
	$s = 6$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$
mean	0.2365	0.2279	0.2288	0.2179	0.2345	0.2207	0.1991	0.1953	0.2022	0.2031	0.2025	0.2037
bias	0.0365	0.0279	0.0288	0.0179	0.0345	0.0207	-0.0009	-0.0047	0.0022	0.0031	0.0025	0.0037
mse	0.0038	0.0064	0.0043	0.0084	0.0038	0.0068	0.0013	0.0027	0.0024	0.0050	0.0018	0.0045
var	0.0025	0.0056	0.0035	0.0081	0.0026	0.0064	0.0013	0.0027	0.0024	0.0050	0.0018	0.0045
	$s = 12$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$
mean	0.2356	0.2362	0.2247	0.2306	0.2311	0.2349	0.1920	0.1959	0.1960	0.2050	0.1969	0.2051
bias	0.0356	0.0362	0.0247	0.0306	0.0311	0.0349	-0.0080	-0.0041	-0.0040	0.0050	-0.0031	0.0051
mse	0.0044	0.0074	0.0056	0.0097	0.0047	0.0086	0.0017	0.0025	0.0025	0.0047	0.0021	0.0040
var	0.0031	0.0061	0.0050	0.0088	0.0037	0.0074	0.0016	0.0024	0.0025	0.0047	0.0021	0.0040

Tabela 4.4: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q)\times(P,D,Q)_s$, quando $p=q=0=P=Q$, $d=0.2$, $D=0.2$, $s\in\{4,6,12\}$, $\kappa=0.85$ e $N=1000$.

	$\kappa=0.85$											
	$s=4$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$
mean	0.2235	0.2093	0.2189	0.1981	0.2228	0.2056	0.2006	0.2011	0.2020	0.2016	0.2020	0.2022
bias	0.0235	0.0093	0.0189	-0.0019	0.0228	0.0056	0.0006	0.0011	0.0020	0.0016	0.0020	0.0022
mse	0.0019	0.0017	0.0034	0.0039	0.0022	0.0021	0.0008	0.0010	0.0012	0.0016	0.0011	0.0013
var	0.0014	0.0016	0.0030	0.0039	0.0017	0.0020	0.0008	0.0010	0.0012	0.0016	0.0011	0.0013
	$s=6$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$
mean	0.2246	0.2140	0.2151	0.2048	0.2209	0.2104	0.2005	0.2002	0.2019	0.2031	0.2026	0.2033
bias	0.0246	0.0140	0.0151	0.0048	0.0209	0.0104	0.0005	0.0002	0.0019	0.0031	0.0026	0.0033
mse	0.0020	0.0018	0.0031	0.0038	0.0020	0.0021	0.0008	0.0009	0.0013	0.0018	0.0012	0.0015
var	0.0014	0.0017	0.0029	0.0038	0.0015	0.0020	0.0008	0.0009	0.0013	0.0018	0.0012	0.0015
	$s=12$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$
mean	0.2199	0.2206	0.2122	0.2144	0.2169	0.2199	0.1958	0.2019	0.1983	0.2075	0.1990	0.2073
bias	0.0199	0.0206	0.0122	0.0144	0.0169	0.0199	-0.0042	0.0019	-0.0017	0.0075	-0.0010	0.0073
mse	0.0019	0.0021	0.0037	0.0041	0.0021	0.0026	0.0009	0.0009	0.0013	0.0019	0.0012	0.0015
var	0.0015	0.0017	0.0035	0.0039	0.0019	0.0022	0.0009	0.0009	0.0013	0.0019	0.0012	0.0015

Tabela 4.5: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$, quando $p = q = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s \in \{4, 6, 12\}$, $\kappa = 0.70$ e $N = 2000$.

	$\kappa = 0.70$											
	$s = 4$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2205	0.2169	0.2158	0.2097	0.2182	0.2151	0.1999	0.2020	0.2016	0.2051	0.2017	0.2077
bias	0.0205	0.0169	0.0158	0.0097	0.0182	0.0151	-0.0001	0.0020	0.0016	0.0051	0.0017	0.0077
mse	0.0015	0.0031	0.0021	0.0059	0.0015	0.0034	0.0006	0.0016	0.0010	0.0030	0.0008	0.0025
var	0.0010	0.0028	0.0019	0.0059	0.0012	0.0032	0.0006	0.0016	0.0010	0.0029	0.0008	0.0024
	$s = 6$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2220	0.2189	0.2124	0.2077	0.2200	0.2174	0.1995	0.1996	0.2007	0.2041	0.2012	0.2056
bias	0.0220	0.0189	0.0124	0.0077	0.0200	0.0174	-0.0005	-0.0004	0.0007	0.0041	0.0012	0.0056
mse	0.0018	0.0031	0.0026	0.0061	0.0019	0.0036	0.0008	0.0015	0.0010	0.0026	0.0009	0.0023
var	0.0013	0.0028	0.0024	0.0060	0.0015	0.0033	0.0008	0.0015	0.0010	0.0026	0.0009	0.0023
	$s = 12$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2255	0.2243	0.2150	0.2146	0.2209	0.2205	0.1962	0.1976	0.1973	0.2060	0.1978	0.2055
bias	0.0255	0.0243	0.0150	0.0146	0.0209	0.0205	-0.0038	-0.0024	-0.0027	0.0060	-0.0022	0.0055
mse	0.0024	0.0039	0.0037	0.0063	0.0025	0.0046	0.0010	0.0015	0.0015	0.0027	0.0013	0.0026
var	0.0017	0.0033	0.0035	0.0061	0.0021	0.0042	0.0010	0.0015	0.0015	0.0027	0.0013	0.0025

Tabela 4.6: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$, quando $p = q = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s \in \{4, 6, 12\}$, $\kappa = 0.85$ e $N = 2000$.

	$\kappa = 0.85$											
	$s = 4$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2140	0.2068	0.2085	0.2032	0.2118	0.2053	0.2003	0.2024	0.2007	0.2029	0.2008	0.2040
bias	0.0140	0.0068	0.0085	0.0032	0.0118	0.0053	0.0003	0.0024	0.0007	0.0029	0.0008	0.0040
mse	0.0009	0.0009	0.0015	0.0019	0.0009	0.0011	0.0004	0.0005	0.0006	0.0009	0.0006	0.0008
var	0.0007	0.0008	0.0015	0.0019	0.0008	0.0011	0.0004	0.0005	0.0006	0.0009	0.0006	0.0008
	$s = 6$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2138	0.2082	0.2095	0.2042	0.2124	0.2078	0.2003	0.2016	0.2004	0.2020	0.2013	0.2033
bias	0.0138	0.0082	0.0095	0.0042	0.0124	0.0078	0.0003	0.0016	0.0004	0.0020	0.0013	0.0033
mse	0.0009	0.0008	0.0018	0.0019	0.0011	0.0011	0.0004	0.0005	0.0007	0.0008	0.0006	0.0007
var	0.0007	0.0008	0.0017	0.0019	0.0009	0.0010	0.0004	0.0005	0.0007	0.0008	0.0006	0.0006
	$s = 12$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2140	0.2136	0.2089	0.2047	0.2110	0.2111	0.1988	0.2029	0.1995	0.2060	0.2000	0.2063
bias	0.0140	0.0136	0.0089	0.0047	0.0110	0.0111	-0.0012	0.0029	-0.0005	0.0060	0.0000	0.0063
mse	0.0010	0.0011	0.0019	0.0024	0.0012	0.0014	0.0005	0.0005	0.0008	0.0009	0.0007	0.0008
var	0.0008	0.0009	0.0018	0.0024	0.0010	0.0012	0.0005	0.0005	0.0008	0.0009	0.0007	0.0008

Tabela 4.7: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$, quando $p = 1$, $q = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.5$, $s \in \{4, 6, 12\}$, $\kappa = 0.85$ e $N = 1000$.

	$\kappa = 0.85$											
	$s = 4$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.5832	0.1291	0.5960	0.1280	0.5922	0.1301	0.5571	0.1203	0.6405	0.1651	0.6277	0.1616
bias	0.3832	-0.0709	0.3960	-0.0720	0.3922	-0.0699	0.3571	-0.0797	0.4405	-0.0349	0.4277	-0.0384
mse	0.1482	0.0067	0.1605	0.0104	0.1555	0.0073	0.1283	0.0074	0.2003	0.0050	0.1866	0.0041
var	0.0013	0.0017	0.0037	0.0053	0.0017	0.0025	0.0008	0.0010	0.0062	0.0038	0.0037	0.0026
	$s = 6$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.5666	0.1585	0.5866	0.1572	0.5796	0.1618	0.5406	0.1468	0.6519	0.1884	0.6276	0.1875
bias	0.3666	-0.0415	0.3866	-0.0428	0.3796	-0.0382	0.3406	-0.0532	0.4519	-0.0116	0.4276	-0.0125
mse	0.1359	0.0035	0.1532	0.0072	0.1460	0.0038	0.1169	0.0038	0.2157	0.0032	0.1874	0.0023
var	0.0015	0.0018	0.0038	0.0054	0.0019	0.0024	0.0009	0.0010	0.0114	0.0031	0.0045	0.0021
	$s = 12$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.5624	0.1916	0.5940	0.1935	0.5809	0.1983	0.5352	0.1737	0.7281	0.2114	0.6905	0.2137
bias	0.3624	-0.0084	0.3940	-0.0065	0.3809	-0.0017	0.3352	-0.0263	0.5281	0.0114	0.4905	0.0137
mse	0.1327	0.0018	0.1616	0.0048	0.1472	0.0028	0.1132	0.0016	0.2943	0.0025	0.2510	0.0018
var	0.0014	0.0017	0.0064	0.0047	0.0022	0.0028	0.0009	0.0009	0.0155	0.0023	0.0104	0.0017

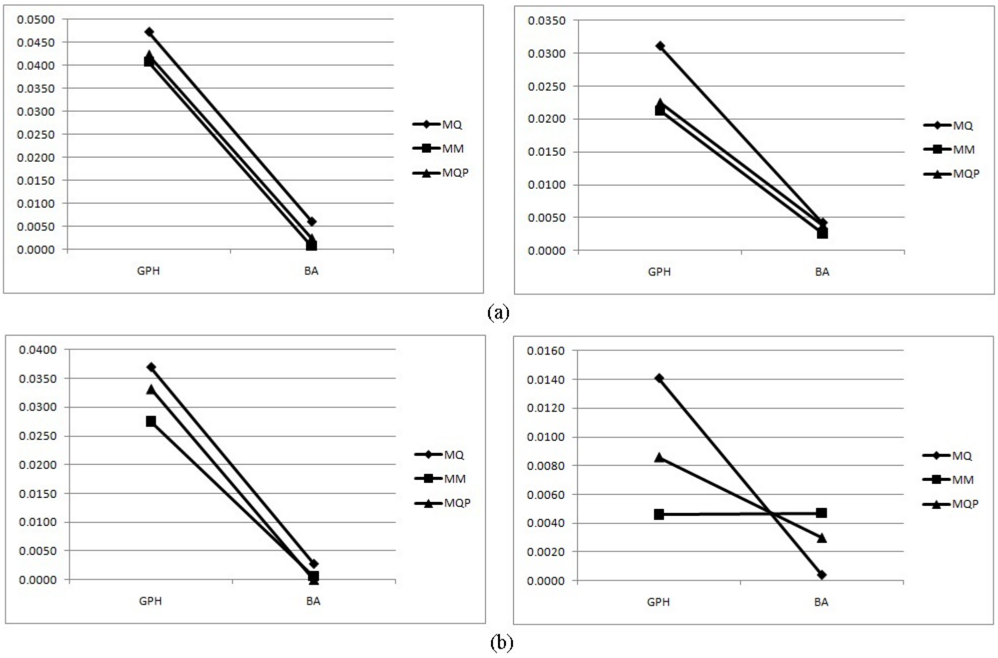
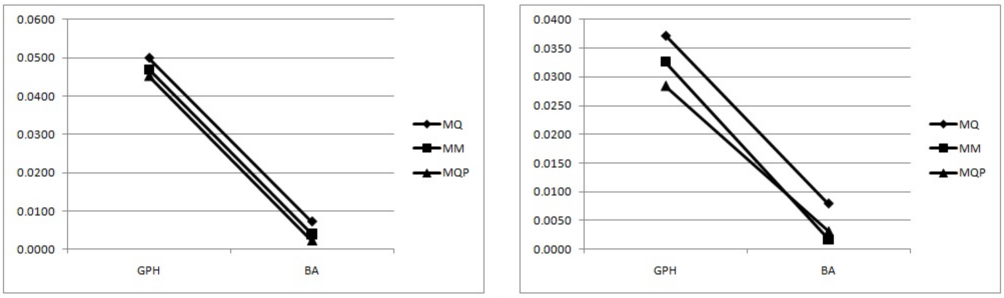
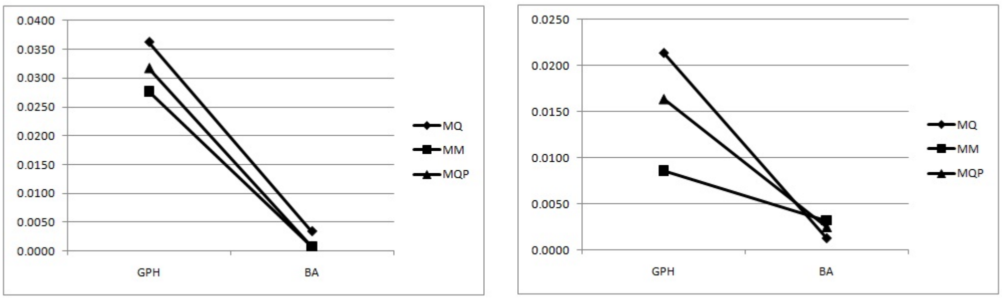


Figura 4.1: Módulo do vício dos estimadores semiparamétricos para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$, com $p = q = 0 = P = Q$, $N = 500$ e $s = 4$, considerando os métodos clássico (MQ) e robustos (MM e MQP). Os gráficos à esquerda são para $d = 0.2$ e os da direita para $D = 0.2$: (a) $\kappa = 0.70$ e (b) $\kappa = 0.85$.



(a)



(b)

Figura 4.2: Módulo do vício dos estimadores semiparamétricos para o processo SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$, com $p = q = 0 = P = Q$, $N = 500$ e $s = 6$, considerando os métodos clássico (MQ) e robustos (MM e MQP). Os gráficos à esquerda são para $d = 0.2$ e os da direita para $D = 0.2$: (a) $\kappa = 0.70$ e (b) $\kappa = 0.85$.

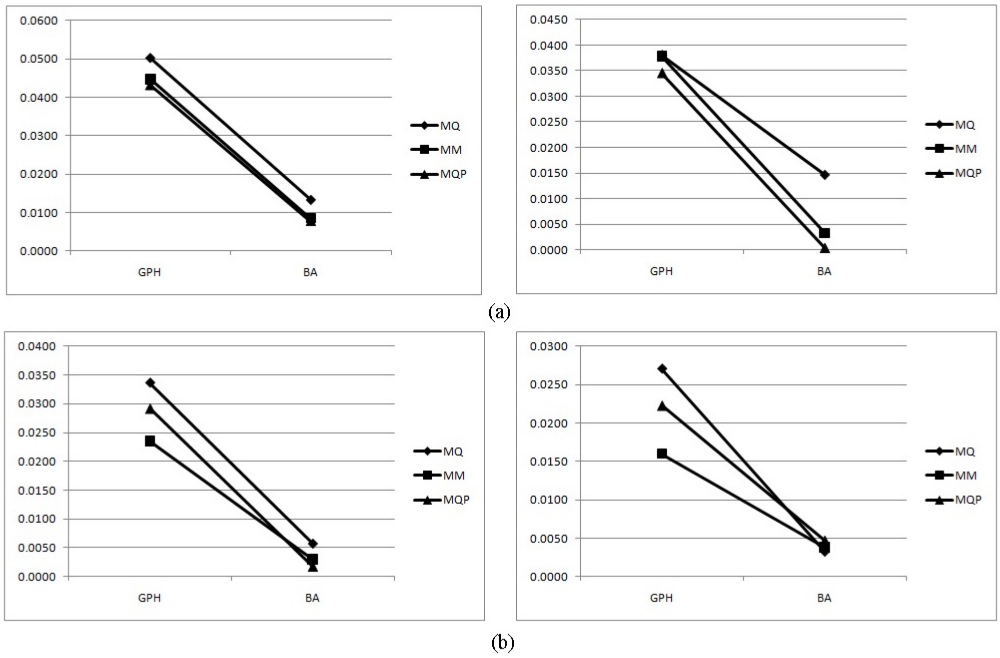


Figura 4.3: Módulo do vício dos estimadores semiparamétricos para o processo SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$, com $p = q = 0 = P = Q$, $N = 500$ e $s = 12$, considerando os métodos clássico (MQ) e robustos (MM e MQP). Os gráficos à esquerda são para $d = 0.2$ e os da direita para $D = 0.2$: (a) $\kappa = 0.70$ e (b) $\kappa = 0.85$.

Resultados da Estimação Paramétrica

Iremos considerar, nas simulações, os estimadores paramétricos definidos nas Seções 3.2.2, 3.2.3 e 3.2.4, denotados por FT, FTmod e FTS, respectivamente. Para o estimador FTmod, no qual aproximamos a integral dada em (3.43) por uma soma em mais coeficientes, além dos de Fourier, precisamos definir o valor de c, na equação (3.45), consideraremos nas simulações apresentadas $c = 5$. Além disso, no estimador FTS, iremos utilizar a janela de Bartlett na suavização do periodograma, dada pela equação (3.20).

As Tabelas 4.8 à 4.10 e a Figura 4.4 apresentam resultados para a estimação paramétrica, considerando $N = 500$, $N = 1000$ e $N = 2000$, respectivamente, em um processo SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$, com $p = q = 0 = P = Q$, $d = D = 0.2$ e $s \in \{4, 6, 12\}$. Note que, para o estimador original FT, proposto por Fox e Taqqu (1986), à medida que o N aumenta, a estimação de $d = 0.2$ melhora, no entanto, os estimadores propostos neste trabalho FTmod e FTS melhoram a estimação de $d = 0.2$, em todos os casos de N, diminuindo o vício. O estimador para $d = 0.2$ com menor vício, para todos N e s considerados, é o FTS. Na estimação de $D = 0.2$, o estimador FT melhora à medida que N aumenta, chegando a zerar o vício, quando $N = 2000$ e $s = 6$, no entanto, os estimadores propostos melhoram a estimação em alguns casos, como quando $N = 500$ e $s \in \{6, 12\}$, nesta situação o estimador FTmod é melhor que os demais, diminuindo o vício, o erro quadrático médio e a variância.

Tabela 4.8: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$, quando $p = q = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s \in \{4, 6, 12\}$ e $N = 500$.

	$s=4$					
	FT		**FTmod**		**FTS**	
	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$
mean	0.2459	0.1939	0.2115	0.1893	0.1932	0.1743
bias	0.0459	-0.0061	0.0115	-0.0107	-0.0068	-0.0257
mse	0.0045	0.0019	0.0016	0.0015	0.0016	0.0021
var	0.0024	0.0019	0.0015	0.0014	0.0015	0.0015
	$s=6$					
	FT		**FTmod**		**FTS**	
	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$
mean	0.2429	0.1893	0.2089	0.1914	0.1941	0.1613
bias	0.0429	-0.0107	0.0089	-0.0086	-0.0059	-0.0387
mse	0.0042	0.0024	0.0015	0.0015	0.0015	0.0030
var	0.0023	0.0023	0.0014	0.0015	0.0015	0.0015
	$s=12$					
	FT		**FTmod**		**FTS**	
	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$
mean	0.2455	0.1691	0.2086	0.1921	0.1920	0.1289
bias	0.0455	-0.0309	0.0086	-0.0079	-0.0080	-0.0711
mse	0.0048	0.0032	0.0015	0.0014	0.0014	0.0066
var	0.0027	0.0023	0.0014	0.0013	0.0013	0.0016

Analisando as Tabelas 4.11 à 4.13, que apresentam resultados para a estimação paramétrica, considerando $N = 500$, $N = 1000$ e $N = 2000$, respectivamente, em um processo SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$, com $p = 1$, $q = 0 = P = Q$, $d = D = 0.2$, $\phi_1 = 0.5$ e $s \in \{4, 6, 12\}$, observamos que, em geral, nos métodos propostos, a estimação dos parâmetros é melhorada quando o tamanho amostral N aumenta. Veja que, para a estimação de $d = 0.2$, os estimadores FTmod e FTS são melhores que o FT, no sentido de que o vício é menor. Em alguns casos, FTmod é melhor que o FTS e o contrário também ocorre, dependendo do tamanho de N e s. No entanto, ambos os estimadores apresentam vício, erro quadrático médio e variância pequenos. Na estimação de $D = 0.2$, o estimador FTS tem menor vício apenas no caso em que $N = 2000$ e $s = 4$, nos demais, o estimador FTmod apresenta menor vício. Para a estimação de $\phi_1 = 0.5$, no caso em que $N = 500$ e $N = 1000$ (com exceção do caso $s = 12$), o estimador FTS tem menor vício que os demais.

Tabela 4.9: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$, quando $p = q = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s \in \{4, 6, 12\}$ e $N = 1000$.

	$s = 4$					
	FT		**FTmod**		**FTS**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2296	0.1989	0.2064	0.1954	0.1987	0.1881
bias	0.0296	-0.0011	0.0064	-0.0046	-0.0013	-0.0119
mse	0.0018	0.0010	0.0007	0.0007	0.0007	0.0009
var	0.0009	0.0010	0.0007	0.0006	0.0007	0.0008
	$s = 6$					
	FT		**FTmod**		**FTS**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2281	0.1994	0.2058	0.1969	0.1974	0.1824
bias	0.0281	-0.0006	0.0058	-0.0031	-0.0026	-0.0176
mse	0.0019	0.0009	0.0007	0.0007	0.0007	0.0010
var	0.0011	0.0009	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007
	$s = 12$					
	FT		**FTmod**		**FTS**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2268	0.1915	0.2063	0.1970	0.1959	0.1669
bias	0.0268	-0.0085	0.0063	-0.0030	-0.0041	-0.0331
mse	0.0017	0.0011	0.0007	0.0006	0.0007	0.0019
var	0.0010	0.0010	0.0007	0.0006	0.0007	0.0008

Tabela 4.10: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$, quando $p = q = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s \in \{4, 6, 12\}$ e $N = 2000$.

	$s = 4$					
	FT		**FTmod**		**FTS**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2191	0.2019	0.2039	0.1987	0.2008	0.1930
bias	0.0191	0.0019	0.0039	-0.0013	0.0008	-0.0070
mse	0.0008	0.0004	0.0003	0.0004	0.0004	0.0004
var	0.0005	0.0004	0.0003	0.0004	0.0004	0.0004
	$s = 6$					
	FT		**FTmod**		**FTS**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2189	0.2000	0.2044	0.1983	0.1994	0.1902
bias	0.0189	0.0000	0.0044	-0.0017	-0.0006	-0.0098
mse	0.0008	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003	0.0004
var	0.0004	0.0004	0.0003	0.0004	0.0003	0.0003
	$s = 12$					
	FT		**FTmod**		**FTS**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2177	0.1974	0.2029	0.1992	0.1993	0.1840
bias	0.0177	-0.0026	0.0029	-0.0008	-0.0007	-0.0160
mse	0.0008	0.0004	0.0003	0.0003	0.0003	0.0006
var	0.0005	0.0004	0.0003	0.0003	0.0003	0.0004

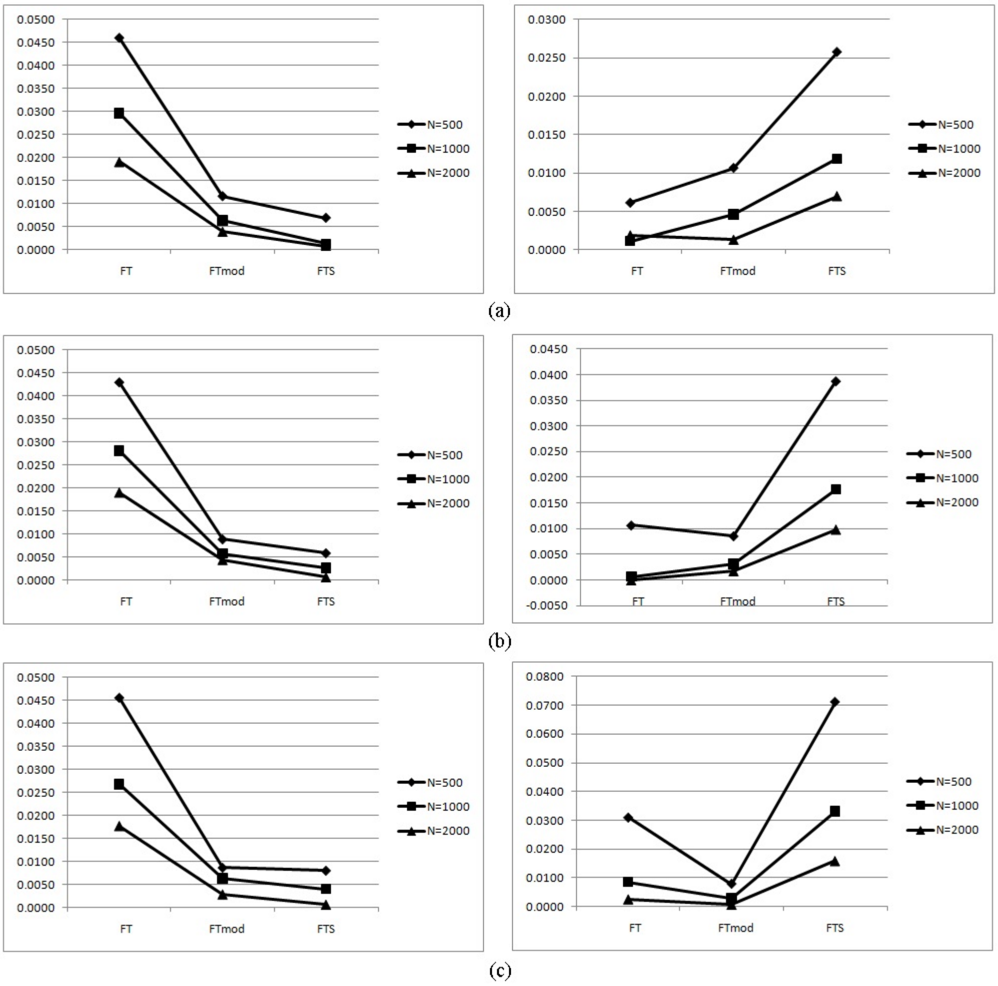


Figura 4.4: Módulo do vício dos estimadores paramétricos para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$, com $p = q = 0 = P = Q$, $N \in \{500, 1000, 2000\}$. Os gráficos à esquerda são para $d = 0.2$ e os da direita para $D = 0.2$: (a) $s = 4$, (b) $s = 6$ e (c) $s = 12$.

Quando $N = 2000$, o estimador FTmod é o de menor vício, erro quadrático médio e variância. De um modo geral, no caso abordado neste parágrafo, nenhuma das estimativas do estimador FT teve menor vício.

As Tabelas 4.14 à 4.16 referem-se a processos SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$, $N = 500$, $N = 1000$ e $N = 2000$, respectivamente, com $p = 1$, $q = 0 = P = Q$, $d = D = 0.2$, $\phi_1 = -0.5$ e $s \in \{4, 6, 12\}$. Observamos que, em geral, nos estimadores considerados, a estimação dos parâmetros é melhorada quando o tamanho amostral N aumenta. Veja que, para a estimação de $d = 0.2$, os estimadores FTmod e FTS são melhores que o FT, no sentido de que o vício é menor. Em alguns casos, FTmod é melhor que o FTS e o contrário também ocorre, dependendo do tamanho de N e

Tabela 4.11: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$, quando $p = 1$, $q = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s \in \{4, 6, 12\}$, $\phi_1 = 0.5$ e $N = 500$.

	$s = 4$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$
mean	0.3125	0.1728	0.4101	0.2402	0.1784	0.4607	0.1936	0.1660	0.4967
bias	0.1125	-0.0272	-0.0899	0.0402	-0.0216	-0.0393	-0.0064	-0.0340	-0.0033
mse	0.0267	0.0028	0.0227	0.0127	0.0021	0.0143	0.0122	0.0029	0.0138
var	0.0141	0.0021	0.0147	0.0111	0.0016	0.0128	0.0122	0.0017	0.0138
	$s = 6$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$
mean	0.3094	0.1740	0.4057	0.2356	0.1843	0.4605	0.1926	0.1588	0.4952
bias	0.1094	-0.0260	-0.0943	0.0356	-0.0157	-0.0395	-0.0074	-0.0412	-0.0048
mse	0.0249	0.0029	0.0226	0.0108	0.0020	0.0128	0.0115	0.0033	0.0131
var	0.0130	0.0022	0.0137	0.0096	0.0018	0.0113	0.0115	0.0016	0.0131
	$s = 12$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$
mean	0.3068	0.1580	0.4096	0.2277	0.1860	0.4696	0.1785	0.1294	0.5074
bias	0.1068	-0.0420	-0.0904	0.0277	-0.0140	-0.0304	-0.0215	-0.0706	0.0074
mse	0.0248	0.0041	0.0221	0.0095	0.0016	0.0115	0.0108	0.0064	0.0121
var	0.0134	0.0023	0.0139	0.0088	0.0014	0.0106	0.0103	0.0014	0.0121

Tabela 4.12: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$, quando $p = 1$, $q = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s \in \{4, 6, 12\}$, $\phi_1 = 0.5$ e $N = 1000$.

	$s = 4$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$
mean	0.2704	0.1843	0.4398	0.2173	0.1910	0.4815	0.1819	0.1865	0.5144
bias	0.0704	-0.0157	-0.0602	0.0173	-0.0090	-0.0185	-0.0181	-0.0135	0.0144
mse	0.0207	0.0012	0.0191	0.0067	0.0009	0.0076	0.0079	0.0011	0.0086
var	0.0157	0.0010	0.0155	0.0065	0.0009	0.0072	0.0076	0.0009	0.0084
	$s = 6$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$
mean	0.2790	0.1865	0.4318	0.2201	0.1915	0.4787	0.1813	0.1820	0.5131
bias	0.0790	-0.0135	-0.0682	0.0201	-0.0085	-0.0213	-0.0187	-0.0180	0.0131
mse	0.0161	0.0011	0.0148	0.0070	0.0009	0.0080	0.0079	0.0011	0.0085
var	0.0099	0.0010	0.0102	0.0066	0.0008	0.0075	0.0075	0.0008	0.0083
	$s = 12$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$
mean	0.2804	0.1826	0.4292	0.2106	0.1953	0.4875	0.1802	0.1657	0.5147
bias	0.0804	-0.0174	-0.0708	0.0106	-0.0047	-0.0125	-0.0198	-0.0343	0.0147
mse	0.0144	0.0013	0.0135	0.0058	0.0007	0.0067	0.0065	0.0019	0.0071
var	0.0079	0.0010	0.0085	0.0057	0.0007	0.0065	0.0061	0.0008	0.0069

Tabela 4.13: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$, quando $p=1$, $q=0=P=Q$, $d=0.2$, $D=0.2$, $s \in \{4,6,12\}$, $\phi_1 = 0.5$ e $N=2000$.

	$s=4$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=0.5$
mean	0.2586	0.1897	0.4479	0.2087	0.1943	0.4905	0.1822	0.1945	0.5158
bias	0.0586	-0.0103	-0.0521	0.0087	-0.0057	-0.0095	-0.0178	-0.0055	0.0158
mse	0.0093	0.0006	0.0088	0.0038	0.0004	0.0043	0.0046	0.0005	0.0049
var	0.0058	0.0005	0.0061	0.0038	0.0004	0.0042	0.0043	0.0004	0.0047
	$s=6$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=0.5$
mean	0.2563	0.1922	0.4498	0.2082	0.1967	0.4897	0.1865	0.1913	0.5109
bias	0.0563	-0.0078	-0.0502	0.0082	-0.0033	-0.0103	-0.0135	-0.0087	0.0109
mse	0.0080	0.0005	0.0078	0.0037	0.0004	0.0042	0.0043	0.0005	0.0048
var	0.0048	0.0005	0.0053	0.0036	0.0004	0.0041	0.0041	0.0004	0.0047
	$s=12$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=0.5$
mean	0.2525	0.1922	0.4530	0.2094	0.1968	0.4898	0.1864	0.1846	0.5102
bias	0.0525	-0.0078	-0.0470	0.0094	-0.0032	-0.0102	-0.0136	-0.0154	0.0102
mse	0.0073	0.0005	0.0070	0.0030	0.0003	0.0035	0.0037	0.0006	0.0042
var	0.0046	0.0004	0.0048	0.0029	0.0003	0.0034	0.0035	0.0004	0.0041

s. Mas, veja que, ambos os estimadores apresentam vício, erro quadrático médio e variância pequenos. Na estimação de $D=0.2$, os resultados foram muito variados, em alguns casos, o estimador FT tem menor vício (por exemplo, no caso $s=4$ e $N \in \{500, 1000, 2000\}$), em outros, o estimador FTmod tem menor vício (quando $s=12$ e $N \in \{500, 1000, 2000\}$). Veja que, o estimador FTS não teve menor vício, na estimação de $D=0.2$, em nenhum dos casos analisados. Para a estimação de $\phi_1 = 0.5$, os resultados encontrados são variados, entretanto, todos estimadores analisados apresentaram vício, erro quadrático médio e variância pequenos.

As Tabelas 4.17 à 4.19 apresentam resultados para a estimação paramétrica, considerando $N=500$, $N=1000$ e $N=2000$, respectivamente, em um processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)$, com $q=1$, $p=0=P=Q$, $d=D=0.2$, $\theta_1 = 0.5$ e $s \in \{4,6,12\}$. Em todos os casos considerados nestas tabelas, os estimadores FTmod e FTS tiveram menor vício que o estimador FT, além de erro quadrático médio e variância pequenos. Para a estimação de $d=0.2$, o estimador FTmod tem maior vício que o FTS, apenas quando $s=4$ e $N \in \{500, 1000, 2000\}$. Nos demais casos, o estimador de $d=0.2$, com menor vício, é o FTS. Na estimação de $D=0.2$, o estimador FTmod tem menor vício. Apenas quando $N=2000$ e $s=4$, que o estimador FTS tem menor vício. Para a estimação de $\theta_1 = 0.5$, no caso em que

Tabela 4.14: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q)\times(P,D,Q)_s$, quando $p=1$, $q=0=P=Q$, $d=0.2$, $D=0.2$, $s\in\{4,6,12\}$, $\phi_1=-0.5$ e $N=500$.

	$s=4$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=-0.5$
mean	0.2544	0.1879	-0.5051	0.2131	0.1853	-0.4960	0.1930	0.1666	-0.4937
bias	0.0544	-0.0121	-0.0051	0.0131	-0.0147	0.0040	-0.0070	-0.0334	0.0063
mse	0.0064	0.0023	0.0025	0.0025	0.0018	0.0023	0.0026	0.0029	0.0028
var	0.0035	0.0021	0.0024	0.0023	0.0016	0.0023	0.0026	0.0018	0.0028
	$s=6$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=-0.5$
mean	0.2472	0.1853	-0.5016	0.2066	0.1888	-0.4914	0.1946	0.1612	-0.4933
bias	0.0472	-0.0147	-0.0016	0.0066	-0.0112	0.0086	-0.0054	-0.0388	0.0067
mse	0.0059	0.0024	0.0025	0.0024	0.0016	0.0024	0.0020	0.0032	0.0022
var	0.0037	0.0022	0.0025	0.0023	0.0015	0.0023	0.0020	0.0017	0.0022
	$s=12$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=-0.5$
mean	0.2472	0.1676	-0.5056	0.2036	0.1909	-0.4919	0.1845	0.1295	-0.4868
bias	0.0472	-0.0324	-0.0056	0.0036	-0.0091	0.0081	-0.0155	-0.0705	0.0132
mse	0.0061	0.0034	0.0026	0.0022	0.0015	0.0023	0.0024	0.0066	0.0025
var	0.0039	0.0023	0.0025	0.0022	0.0014	0.0023	0.0022	0.0016	0.0023

Tabela 4.15: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q)\times(P,D,Q)_s$, quando $p=1$, $q=0=P=Q$, $d=0.2$, $D=0.2$, $s\in\{4,6,12\}$, $\phi_1=-0.5$ e $N=1000$.

	$s=4$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=-0.5$
mean	0.2319	0.1980	-0.5066	0.2060	0.1957	-0.4987	0.1978	0.1863	-0.4992
bias	0.0319	-0.0020	-0.0066	0.0060	-0.0043	0.0013	-0.0022	-0.0137	0.0008
mse	0.0025	0.0010	0.0013	0.0011	0.0008	0.0011	0.0012	0.0009	0.0011
var	0.0015	0.0010	0.0012	0.0010	0.0008	0.0011	0.0012	0.0007	0.0012
	$s=6$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=-0.5$
mean	0.2321	0.1972	-0.5035	0.2033	0.1967	-0.4961	0.1975	0.1828	-0.4954
bias	0.0321	-0.0028	-0.0035	0.0033	-0.0033	0.0039	-0.0025	-0.0172	0.0046
mse	0.0026	0.0010	0.0012	0.0011	0.0007	0.0012	0.0010	0.0011	0.0011
var	0.0016	0.0010	0.0012	0.0011	0.0007	0.0011	0.0010	0.0008	0.0011
	$s=12$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=-0.5$
mean	0.2309	0.1880	-0.5030	0.2039	0.1960	-0.4965	0.1953	0.1664	-0.4925
bias	0.0309	-0.0120	-0.0030	0.0039	-0.0040	0.0035	-0.0047	-0.0336	0.0075
mse	0.0026	0.0012	0.0012	0.0011	0.0007	0.0011	0.0010	0.0019	0.0012
var	0.0017	0.0011	0.0012	0.0011	0.0007	0.0011	0.0010	0.0008	0.0012

Tabela 4.16: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$, quando $p = 1$, $q = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s \in \{4, 6, 12\}$, $\phi_1 = -0.5$ e $N = 2000$.

	$s = 4$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$
mean	0.2217	0.1998	-0.5044	0.2045	0.1977	-0.5005	0.1993	0.1931	-0.4985
bias	0.0217	-0.0002	-0.0044	0.0045	-0.0023	-0.0005	-0.0007	-0.0069	0.0015
mse	0.0013	0.0004	0.0006	0.0006	0.0004	0.0006	0.0005	0.0004	0.0006
var	0.0008	0.0004	0.0006	0.0005	0.0004	0.0006	0.0005	0.0004	0.0006
	$s = 6$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$
mean	0.2201	0.1997	-0.5037	0.2030	0.1982	-0.4989	0.1985	0.1916	-0.4986
bias	0.0201	-0.0003	-0.0037	0.0030	-0.0018	0.0011	-0.0015	-0.0084	0.0014
mse	0.0011	0.0005	0.0006	0.0005	0.0004	0.0006	0.0005	0.0004	0.0006
var	0.0007	0.0005	0.0006	0.0005	0.0003	0.0006	0.0005	0.0003	0.0006
	$s = 12$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$
mean	0.2208	0.1964	-0.5048	0.2024	0.1982	-0.4986	0.1983	0.1825	-0.4974
bias	0.0208	-0.0036	-0.0048	0.0024	-0.0018	0.0014	-0.0017	-0.0175	0.0026
mse	0.0012	0.0005	0.0006	0.0005	0.0003	0.0006	0.0005	0.0007	0.0005
var	0.0008	0.0005	0.0006	0.0005	0.0003	0.0006	0.0005	0.0004	0.0005

$N = 500$, o estimador FTmod tem menor vício que os demais.

Diversos outros casos foram considerados nas simulações, mas, por questões de espaço, as tabelas apresentando os resultados encontram-se no Apêndice A. Analisando todas as tabelas de uma forma geral, vemos que quando N assume valores maiores, os estimadores se equiparam, no entanto, quando N é menor ($N = 500$, por exemplo), os estimadores novos propostos (FTmod e FTS), geralmente, apresentam menor vício, nos casos analisados.

4.2 Resultados para Processos com Inovações α-estáveis

Nesta seção, iremos apresentar resultados para a estimação semiparamétrica e paramétrica nos processos SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ α-estáveis.

Tabela 4.17: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$, quando $q = 1$, $p = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s \in \{4, 6, 12\}$, $\theta_1 = 0.5$ e $N = 500$.

	$s = 4$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\theta_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\theta_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\theta_1 = 0.5$
mean	0.2918	0.1847	0.5563	0.2345	0.1863	0.5194	0.1647	0.1798	0.4589
bias	0.0918	-0.0153	0.0563	0.0345	-0.0137	0.0194	-0.0353	-0.0202	-0.0411
mse	0.0244	0.0023	0.0171	0.0140	0.0020	0.0142	0.0112	0.0022	0.0122
var	0.0160	0.0021	0.0139	0.0129	0.0018	0.0138	0.0100	0.0018	0.0105
	$s = 6$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\theta_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\theta_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\theta_1 = 0.5$
mean	0.2947	0.1776	0.5625	0.2351	0.1874	0.5206	0.1684	0.1645	0.4617
bias	0.0947	-0.0224	0.0625	0.0351	-0.0126	0.0206	-0.0316	-0.0355	-0.0383
mse	0.0247	0.0025	0.0186	0.0146	0.0019	0.0164	0.0113	0.0029	0.0127
var	0.0158	0.0020	0.0147	0.0134	0.0017	0.0160	0.0103	0.0016	0.0112
	$s = 12$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\theta_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\theta_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\theta_1 = 0.5$
mean	0.3030	0.1567	0.5774	0.2292	0.1868	0.5204	0.1740	0.1298	0.4699
bias	0.1030	-0.0433	0.0774	0.0292	-0.0132	0.0204	-0.0260	-0.0702	-0.0301
mse	0.0272	0.0043	0.0213	0.0127	0.0018	0.0141	0.0109	0.0065	0.0128
var	0.0166	0.0025	0.0153	0.0119	0.0016	0.0137	0.0102	0.0016	0.0119

Tabela 4.18: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$, quando $q = 1$, $p = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s \in \{4, 6, 12\}$, $\theta_1 = 0.5$ e $N = 1000$.

	$s = 4$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\theta_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\theta_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\theta_1 = 0.5$
mean	0.2904	0.1908	0.5697	0.2266	0.1926	0.5185	0.1721	0.1913	0.4678
bias	0.0904	-0.0092	0.0697	0.0266	-0.0074	0.0185	-0.0279	-0.0087	-0.0322
mse	0.0194	0.0010	0.0152	0.0084	0.0009	0.0091	0.0070	0.0009	0.0079
var	0.0113	0.0009	0.0103	0.0077	0.0009	0.0088	0.0062	0.0008	0.0069
	$s = 6$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\theta_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\theta_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\theta_1 = 0.5$
mean	0.2898	0.1886	0.5698	0.2299	0.1931	0.5239	0.1832	0.1844	0.4804
bias	0.0898	-0.0114	0.0698	0.0299	-0.0069	0.0239	-0.0168	-0.0156	-0.0196
mse	0.0200	0.0011	0.0161	0.0095	0.0008	0.0099	0.0072	0.0010	0.0078
var	0.0120	0.0009	0.0113	0.0086	0.0008	0.0093	0.0069	0.0008	0.0075
	$s = 12$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\theta_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\theta_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\theta_1 = 0.5$
mean	0.2842	0.1808	0.5673	0.2190	0.1926	0.5133	0.1852	0.1656	0.4829
bias	0.0842	-0.0192	0.0673	0.0190	-0.0074	0.0133	-0.0148	-0.0344	-0.0171
mse	0.0182	0.0013	0.0148	0.0077	0.0008	0.0091	0.0068	0.0020	0.0076
var	0.0111	0.0009	0.0102	0.0073	0.0008	0.0090	0.0066	0.0008	0.0073

Tabela 4.19: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$, quando $q=1$, $p=0=P=Q$, $d=0.2$, $D=0.2$, $s \in \{4,6,12\}$, $\theta_1 = 0.5$ e $N = 2000$.

	$s=4$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\theta_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\theta_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\theta_1=0.5$
mean	0.2738	0.1950	0.5617	0.2152	0.1966	0.5131	0.1830	0.1979	0.4794
bias	0.0738	-0.0050	0.0617	0.0152	-0.0034	0.0131	-0.0170	-0.0021	-0.0206
mse	0.0125	0.0004	0.0106	0.0043	0.0005	0.0047	0.0041	0.0004	0.0047
var	0.0071	0.0004	0.0068	0.0041	0.0005	0.0045	0.0039	0.0004	0.0042
	$s=6$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\theta_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\theta_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\theta_1=0.5$
mean	0.2763	0.1915	0.5661	0.2170	0.1953	0.5146	0.1886	0.1931	0.4851
bias	0.0763	-0.0085	0.0661	0.0170	-0.0047	0.0146	-0.0114	-0.0069	-0.0149
mse	0.0129	0.0005	0.0111	0.0042	0.0004	0.0047	0.0039	0.0004	0.0043
var	0.0071	0.0004	0.0068	0.0039	0.0004	0.0044	0.0037	0.0004	0.0040
	$s=12$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\theta_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\theta_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\theta_1=0.5$
mean	0.2711	0.1922	0.5603	0.2143	0.1958	0.5126	0.1922	0.1839	0.4909
bias	0.0711	-0.0078	0.0603	0.0143	-0.0042	0.0126	-0.0078	-0.0161	-0.0091
mse	0.0114	0.0005	0.0099	0.0038	0.0004	0.0046	0.0032	0.0006	0.0037
var	0.0064	0.0004	0.0062	0.0036	0.0004	0.0044	0.0031	0.0004	0.0037

Resultados da Estimação Semiparamétrica

Apresentamos resultados obtidos de simulações para os estimadores semiparamétricos definidos nas Seções 3.1.2 e 3.1.3 para processos com inovações α-estáveis. Além da metodologia dos mínimos quadrados, denotada por MQ, utilizamos as metodologias robustas MM e MQP, abordadas na Seção 3.1.1. Diversos casos foram considerados nas simulações, mas, por questão de espaço, apresentaremos apenas casos selecionados.

As Tabelas 4.20 à 4.25 referem-se aos processos SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ α-estáveis, nos casos $p=q=0=P=Q$, $d=D=0.2$, $\alpha=1.25$, $s \in \{4,6,12\}$, $N \in \{500, 1000, 2000\}$ e $\kappa \in \{0.70; 0.85\}$. No Apêndice B apresentamos os resultados da estimação nos processos SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$, nos casos $p=q=0=P=Q$, $d=D=0.2$, $s \in \{4,6,12\}$, $N \in \{500, 1000, 2000\}$, com o κ máximo relativo a cada diferente valor de N. Não apresentamos no corpo do texto este caso, pois não teríamos como compará-los entre si. Note que, os métodos de estimação apresentados, melhoram as estimativas quando κ aumenta.

Analisando as Tabelas 4.20 e 4.21 e Figuras 4.5 à 4.7, quando $N=500$, podemos notar que, ao aumentarmos o valor de κ, em geral, o vício dos estimadores diminui.

Ao observar as Tabelas 4.22 e 4.23, notamos que o mesmo ocorre quando $N = 1000$. Apenas quando $N = 2000$ (Tabelas 4.24 e 4.25), que não notamos essa melhora com o aumento de κ. Outro aspecto que notamos ao analisar estas tabelas, é que ao aumentarmos o valor de N, o valor do erro quadrático médio diminui. Note também que, pelas figuras e tabelas, os estimadores de $d = 0.2$, que utilizam o periodograma suavizado de covariâncias (denotados por BA), possuem menor vício. Entretanto, dentre as metodologias utilizadas para o estimador BA (MQ, MM e MQP), nenhuma se sobressai, sendo variados os resultados encontrados. Para estimar $D = 0.2$, o estimador GPH, com a metodologia robusta MM, apresentou menor vício no caso $\kappa = 0.85$, $s \in \{4, 6, 12\}$.

As Tabelas 4.22 e 4.23 referentes ao caso $N = 1000$ mostram que os estimadores de $d = 0.2$, que se sobressaem, são BA MQP e BA MM, possuindo menor vício. Para estimar $D = 0.2$, destacam-se os estimadores GPH MM e BA MQ.

As Tabelas 4.24 e 4.25 referentes ao caso $N = 2000$ evidenciam que os estimadores de $d = 0.2$, que se sobressaem, possuindo menor vício, são os que utilizam o periodograma normalizado suavizado de correlações (BA), independente da metodologia. Para estimar $D = 0.2$, destaca-se o estimador GPH MM.

A Tabela 4.26 refere-se ao processo SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$, no caso $p = 1$, $q = 0 = P = Q$, $d = D = 0.2$, $\phi_1 = 0.5$, $\alpha = 1.25$, $s \in \{4, 6, 12\}$, $N = 1000$ e $\kappa = 0.85$. Note que, a estimação do parâmetro $d = 0.2$ ficou péssima, indiferente do tipo de estimador considerado. Entretanto, a estimação $D = 0.2$ não ficou tão ruim, mas buscamos um estimador que estime bem todos os parâmetros. No Apêndice B apresentamos resultados semelhantes para o processo SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$, no caso $p = 1$, $p = 0 = P = Q$, $d = D = 0.2$, $\phi_1 = 0.5$, $s \in \{4, 6, 12\}$, $N \in \{500, 2000\}$ e $\kappa = 0.85$. Tal fato, nos leva a descartar a utilização dos estimadores semi-paramétricos descritos neste trabalho, quando temos processos SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$, com $p \neq 0$ ou $q \neq 0$ ou $P \neq 0$ ou $Q \neq 0$.

Note que, em todos os casos considerados, o estimador GPH, independente da metodologia utilizada, superestima o verdadeiro valor de d.

Tabela 4.20: Resultado da estimação semi-paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p = q = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s \in \{4,6,12\}$, $\alpha = 1.25$, $\kappa = 0.70$ e $N = 500$.

	$\kappa = 0.70$											
	$s = 4$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2695	0.2783	0.2469	0.2250	0.2471	0.2276	0.1888	0.2418	0.1977	0.2453	0.1980	0.2456
bias	0.0695	0.0783	0.0469	0.0250	0.0471	0.0276	-0.0112	0.0418	-0.0023	0.0453	-0.0020	0.0456
mse	0.0097	0.0193	0.0071	0.0131	0.0067	0.0120	0.0029	0.0131	0.0084	0.0143	0.0033	0.0143
var	0.0049	0.0132	0.0049	0.0125	0.0045	0.0113	0.0028	0.0114	0.0084	0.0122	0.0033	0.0122
	$s = 6$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2741	0.2981	0.2451	0.2698	0.2452	0.2628	0.1856	0.2452	0.1969	0.2506	0.1929	0.2537
bias	0.0741	0.0981	0.0451	0.0698	0.0452	0.0628	-0.0144	0.0452	-0.0031	0.0506	-0.0071	0.0537
mse	0.0106	0.0356	0.0085	0.0275	0.0075	0.0252	0.0035	0.0195	0.0062	0.0250	0.0035	0.0239
var	0.0052	0.0260	0.0065	0.0227	0.0055	0.0213	0.0033	0.0175	0.0062	0.0225	0.0035	0.0210
	$s = 12$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2804	0.3255	0.2451	0.3028	0.2437	0.2951	0.1760	0.2609	0.1915	0.2748	0.1891	0.2742
bias	0.0804	0.1255	0.0451	0.1028	0.0437	0.0951	-0.0240	0.0609	-0.0085	0.0748	-0.0109	0.0742
mse	0.0137	0.0573	0.0102	0.0517	0.0090	0.0460	0.0043	0.0271	0.0050	0.0343	0.0038	0.0343
var	0.0073	0.0416	0.0082	0.0412	0.0071	0.0370	0.0037	0.0234	0.0049	0.0287	0.0037	0.0289

Tabela 4.21: Resultado da estimação semi-paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p=q=0=P=Q$, $d=0.2$, $D=0.2$, $s \in \{4,6,12\}$, $\alpha=1.25$, $\kappa=0.85$ e $N=500$.

	$\kappa = 0.85$											
	$s=4$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$
mean	0.2536	0.2378	0.2277	0.2015	0.2348	0.2119	0.1929	0.2282	0.1992	0.2218	0.1995	0.2243
bias	0.0536	0.0378	0.0277	0.0015	0.0348	0.0119	-0.0071	0.0282	-0.0008	0.0218	-0.0005	0.0243
mse	0.0063	0.0057	0.0058	0.0050	0.0043	0.0035	0.0020	0.0060	0.0024	0.0063	0.0022	0.0058
var	0.0034	0.0043	0.0050	0.0050	0.0031	0.0033	0.0020	0.0052	0.0024	0.0059	0.0022	0.0053
	$s=6$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$
mean	0.2518	0.2622	0.2246	0.2290	0.2324	0.2399	0.1919	0.2388	0.1971	0.2383	0.1977	0.2385
bias	0.0518	0.0622	0.0246	0.0290	0.0324	0.0399	-0.0081	0.0388	-0.0029	0.0383	-0.0023	0.0385
mse	0.0060	0.0158	0.0055	0.0129	0.0045	0.0111	0.0024	0.0124	0.0030	0.0142	0.0025	0.0129
var	0.0033	0.0120	0.0049	0.0121	0.0035	0.0096	0.0023	0.0109	0.0030	0.0127	0.0025	0.0114
	$s=12$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$
mean	0.2493	0.2856	0.2207	0.2444	0.2278	0.2600	0.1870	0.2544	0.1954	0.2578	0.1961	0.2597
bias	0.0493	0.0856	0.0207	0.0444	0.0278	0.0600	-0.0130	0.0544	-0.0046	0.0578	-0.0039	0.0597
mse	0.0057	0.0264	0.0054	0.0180	0.0037	0.0177	0.0022	0.0185	0.0021	0.0205	0.0018	0.0204
var	0.0033	0.0191	0.0050	0.0160	0.0030	0.0141	0.0020	0.0156	0.0021	0.0172	0.0018	0.0168

Tabela 4.22: Resultado da estimação semi-paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p = q = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s \in \{4, 6, 12\}$, $\alpha = 1.25$, $\kappa = 0.70$ e $N = 1000$.

	$\kappa = 0.70$											
	$s = 4$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2442	0.2496	0.2255	0.2134	0.2287	0.2200	0.1955	0.2283	0.1974	0.2300	0.1996	0.2304
bias	0.0442	0.0496	0.0255	0.0134	0.0287	0.0200	-0.0045	0.0283	-0.0026	0.0300	-0.0004	0.0304
mse	0.0045	0.0098	0.0037	0.0073	0.0031	0.0062	0.0013	0.0085	0.0072	0.0091	0.0016	0.0087
var	0.0025	0.0073	0.0030	0.0071	0.0023	0.0059	0.0013	0.0077	0.0072	0.0082	0.0016	0.0078
	$s = 6$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2480	0.2695	0.2291	0.2396	0.2323	0.2461	0.1941	0.2360	0.2027	0.2395	0.1991	0.2404
bias	0.0480	0.0695	0.0291	0.0396	0.0323	0.0461	-0.0059	0.0360	0.0027	0.0395	-0.0009	0.0404
mse	0.0056	0.0212	0.0055	0.0171	0.0044	0.0149	0.0022	0.0140	0.0113	0.0159	0.0025	0.0155
var	0.0033	0.0163	0.0046	0.0155	0.0034	0.0127	0.0021	0.0127	0.0113	0.0144	0.0025	0.0139
	$s = 12$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2538	0.2891	0.2294	0.2600	0.2360	0.2687	0.1910	0.2462	0.1956	0.2567	0.1975	0.2573
bias	0.0538	0.0891	0.0294	0.0600	0.0360	0.0687	-0.0090	0.0462	-0.0044	0.0567	-0.0025	0.0573
mse	0.0065	0.0280	0.0052	0.0240	0.0045	0.0224	0.0018	0.0157	0.0024	0.0202	0.0019	0.0192
var	0.0037	0.0201	0.0043	0.0204	0.0033	0.0177	0.0017	0.0136	0.0023	0.0170	0.0019	0.0159

Tabela 4.23: Resultado da estimação semi-paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p = q = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s \in \{4, 6, 12\}$, $\alpha = 1.25$, $\kappa = 0.85$ e $N = 1000$.

	$\kappa = 0.85$											
	$s = 4$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2330	0.2235	0.2182	0.2030	0.2214	0.2117	0.1979	0.2193	0.2004	0.2152	0.2012	0.2177
bias	0.0330	0.0235	0.0182	0.0030	0.0214	0.0117	-0.0021	0.0193	0.0004	0.0152	0.0012	0.0177
mse	0.0028	0.0030	0.0027	0.0034	0.0023	0.0021	0.0009	0.0040	0.0014	0.0042	0.0011	0.0037
var	0.0017	0.0025	0.0023	0.0034	0.0018	0.0020	0.0009	0.0036	0.0014	0.0040	0.0011	0.0034
	$s = 6$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2335	0.2372	0.2176	0.2147	0.2226	0.2237	0.1981	0.2263	0.2014	0.2228	0.2012	0.2244
bias	0.0335	0.0372	0.0176	0.0147	0.0226	0.0237	-0.0019	0.0263	0.0014	0.0228	0.0012	0.0244
mse	0.0034	0.0076	0.0038	0.0063	0.0029	0.0054	0.0016	0.0070	0.0032	0.0065	0.0021	0.0064
var	0.0023	0.0062	0.0035	0.0061	0.0024	0.0048	0.0016	0.0064	0.0032	0.0060	0.0021	0.0058
	$s = 12$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2326	0.2527	0.2182	0.2239	0.2222	0.2369	0.1972	0.2357	0.2005	0.2360	0.2010	0.2358
bias	0.0326	0.0527	0.0182	0.0239	0.0222	0.0369	-0.0028	0.0357	0.0005	0.0360	0.0010	0.0358
mse	0.0029	0.0110	0.0028	0.0076	0.0021	0.0076	0.0009	0.0088	0.0011	0.0093	0.0010	0.0085
var	0.0018	0.0082	0.0025	0.0070	0.0016	0.0062	0.0009	0.0076	0.0011	0.0080	0.0010	0.0072

Tabela 4.24: Resultado da estimação semi-paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p=q=0=P=Q$, $d=0.2$, $D=0.2$, $s \in \{4,6,12\}$, $\alpha=1.25$, $\kappa=0.70$ e $N=2000$.

	$\kappa = 0.70$											
	$s = 4$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$
mean	0.2269	0.2327	0.2153	0.2126	0.2206	0.2183	0.2001	0.2230	0.2025	0.2215	0.2024	0.2238
bias	0.0269	0.0327	0.0153	0.0126	0.0206	0.0183	0.0001	0.0230	0.0025	0.0215	0.0024	0.0238
mse	0.0020	0.0055	0.0020	0.0056	0.0016	0.0037	0.0006	0.0054	0.0009	0.0061	0.0007	0.0055
var	0.0013	0.0045	0.0018	0.0055	0.0012	0.0034	0.0006	0.0048	0.0009	0.0057	0.0007	0.0049
	$s = 6$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$
mean	0.2286	0.2397	0.2158	0.2125	0.2222	0.2248	0.1989	0.2202	0.2005	0.2213	0.2022	0.2217
bias	0.0286	0.0397	0.0158	0.0125	0.0222	0.0248	-0.0011	0.0202	0.0005	0.0213	0.0022	0.0217
mse	0.0024	0.0093	0.0058	0.0080	0.0021	0.0065	0.0008	0.0073	0.0064	0.0077	0.0010	0.0073
var	0.0016	0.0078	0.0056	0.0079	0.0016	0.0059	0.0008	0.0069	0.0064	0.0073	0.0010	0.0068
	$s = 12$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$
mean	0.2370	0.2689	0.2192	0.2385	0.2269	0.2524	0.1967	0.2416	0.1998	0.2445	0.2000	0.2463
bias	0.0370	0.0689	0.0192	0.0385	0.0269	0.0524	-0.0033	0.0416	-0.0002	0.0445	0.0000	0.0463
mse	0.0035	0.0197	0.0035	0.0134	0.0028	0.0138	0.0012	0.0144	0.0022	0.0167	0.0013	0.0156
var	0.0022	0.0150	0.0032	0.0120	0.0021	0.0111	0.0011	0.0127	0.0022	0.0147	0.0013	0.0135

Tabela 4.25: Resultado da estimação semi-paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p = q = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s \in \{4, 6, 12\}$, $\alpha = 1.25$, $\kappa = 0.85$ e $N = 2000$.

	$\kappa = 0.85$											
	$s = 4$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2190	0.2150	0.2106	0.2054	0.2148	0.2083	0.2008	0.2142	0.2014	0.2124	0.2018	0.2129
bias	0.0190	0.0150	0.0106	0.0054	0.0148	0.0083	0.0008	0.0142	0.0014	0.0124	0.0018	0.0129
mse	0.0012	0.0015	0.0014	0.0017	0.0011	0.0012	0.0004	0.0021	0.0006	0.0017	0.0005	0.0017
var	0.0009	0.0013	0.0013	0.0017	0.0008	0.0012	0.0004	0.0019	0.0006	0.0016	0.0005	0.0015
	$s = 6$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2195	0.2199	0.2139	0.2074	0.2155	0.2142	0.2012	0.2143	0.2027	0.2129	0.2031	0.2140
bias	0.0195	0.0199	0.0139	0.0074	0.0155	0.0142	0.0012	0.0143	0.0027	0.0129	0.0031	0.0140
mse	0.0015	0.0036	0.0017	0.0029	0.0014	0.0027	0.0006	0.0035	0.0009	0.0036	0.0008	0.0031
var	0.0011	0.0032	0.0015	0.0029	0.0012	0.0025	0.0006	0.0033	0.0009	0.0034	0.0008	0.0029
	$s = 12$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2214	0.2375	0.2127	0.2186	0.2156	0.2269	0.1997	0.2299	0.2017	0.2265	0.2016	0.2291
bias	0.0214	0.0375	0.0127	0.0186	0.0156	0.0269	-0.0003	0.0299	0.0017	0.0265	0.0016	0.0291
mse	0.0015	0.0074	0.0017	0.0052	0.0014	0.0055	0.0007	0.0079	0.0009	0.0070	0.0008	0.0070
var	0.0011	0.0060	0.0016	0.0048	0.0011	0.0047	0.0007	0.0070	0.0009	0.0063	0.0008	0.0062

Tabela 4.26: Resultado da estimação semi-paramétrica para o processo SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ α-estável, quando $p = 1$, $q = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.5$, $s \in \{4, 6, 12\}$, $\alpha = 1.25$, $\kappa = 0.85$ e $N = 1000$.

	$\kappa = 0.85$											
	$s = 4$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.5924	0.1410	0.6309	0.1397	0.6168	0.1407	0.5549	0.1396	0.6945	0.1884	0.6599	0.1839
bias	0.3924	-0.0590	0.4309	-0.0603	0.4168	-0.0593	0.3549	-0.0604	0.4945	-0.0116	0.4599	-0.0161
mse	0.1563	0.0058	0.1939	0.0082	0.1771	0.0060	0.1273	0.0082	0.2620	0.0050	0.2170	0.0043
var	0.0023	0.0023	0.0082	0.0046	0.0033	0.0024	0.0013	0.0046	0.0175	0.0048	0.0054	0.0041
	$s = 6$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.5744	0.1824	0.6293	0.1749	0.6036	0.1822	0.5389	0.1711	0.7187	0.2151	0.6688	0.2160
bias	0.3744	-0.0176	0.4293	-0.0251	0.4036	-0.0178	0.3389	-0.0289	0.5187	0.0151	0.4688	0.0160
mse	0.1419	0.0058	0.1969	0.0067	0.1669	0.0046	0.1160	0.0065	0.2914	0.0075	0.2264	0.0065
var	0.0017	0.0055	0.0126	0.0061	0.0040	0.0043	0.0011	0.0057	0.0224	0.0073	0.0067	0.0063
	$s = 12$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.5704	0.2244	0.6544	0.2163	0.6246	0.2213	0.5332	0.2062	0.7871	0.2416	0.7526	0.2445
bias	0.3704	0.0244	0.4544	0.0163	0.4246	0.0213	0.3332	0.0062	0.5871	0.0416	0.5526	0.0445
mse	0.1391	0.0092	0.2225	0.0087	0.1887	0.0073	0.1124	0.0087	0.3594	0.0110	0.3155	0.0110
var	0.0019	0.0087	0.0160	0.0085	0.0085	0.0068	0.0013	0.0086	0.0147	0.0093	0.0102	0.0090

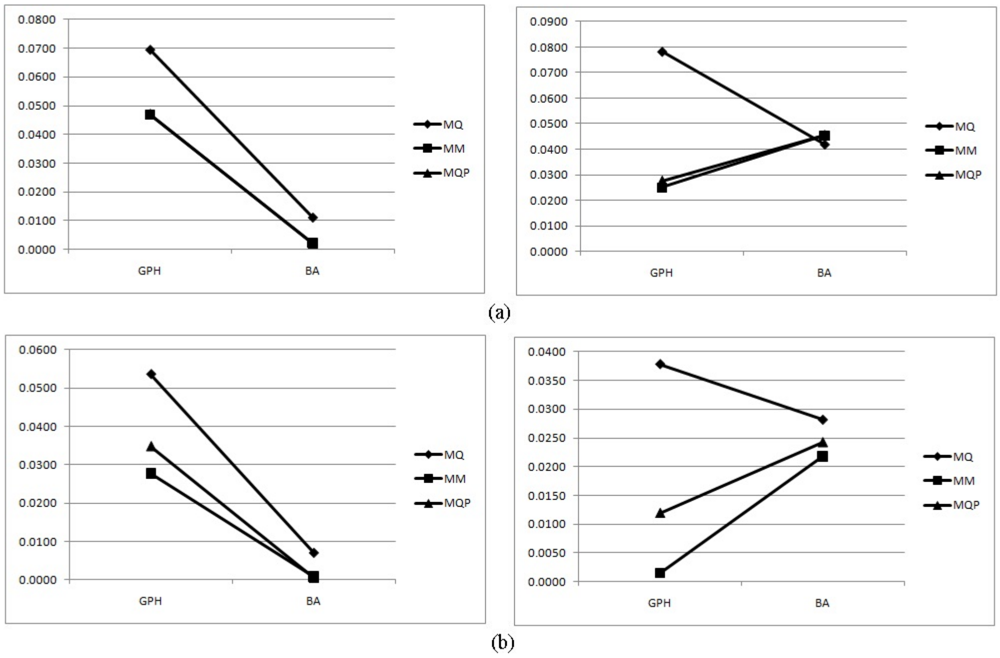


Figura 4.5: Módulo do vício dos estimadores semiparamétricos para o processo SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ α-estável, com $p = q = 0 = P = Q$, $\alpha = 1.25$ $N = 500$ e $s = 4$, considerando os métodos clássico (MQ) e robustos (MM e MQP). Os gráficos à esquerda são para $d = 0.2$ e os da direita para $D = 0.2$: (a) $\kappa = 0.70$ e (b) $\kappa = 0.85$.

Resultados da Estimação Paramétrica

Apresentamos os resultados da estimação paramétrica, utilizando alguns dos estimadores definidos na Seção 3.2, para processos SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ α-estáveis, com diversos valores de parâmetros. Escolhemos alguns casos para apresentar neste momento, muitos outros foram considerados e as tabelas apresentando os resultados encontram-se no Apêndice B. Iremos considerar, nas simulações, os estimadores paramétricos definidos nas Seções 3.2.5, 3.2.6, 3.2.7 e 3.2.8, denotados por KM, KMmod, KMS e KMSmod, respectivamente. Para o estimador KMmod, no qual aproximamos a integral dada em (3.69) por uma soma em mais coeficientes, além dos de Fourier, precisamos definir o valor de c, na equação (3.70), consideraremos o mesmo que utilizamos no estimador análogo para processos normais, $c = 5$. Além disso, no estimador KMS, iremos utilizar a janela de Bartlett na suavização do periodograma, dada na equação (3.20).

As Tabelas 4.27 à 4.29 e a Figura 4.8 referem-se a processos SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ α-estáveis, com $p = q = 0 = P = Q$, $d = 0.1$, $D = 0.2$, $\alpha = 1.50$,

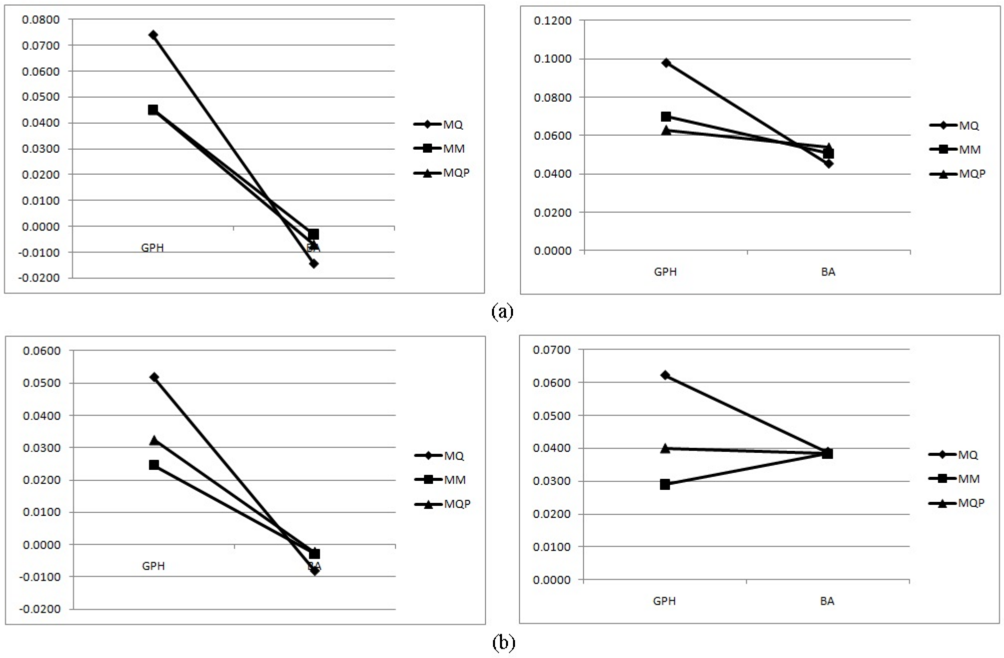


Figura 4.6: Módulo do vício dos estimadores semiparamétricos para o processo SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ α-estável, com $p = q = 0 = P = Q$, $\alpha = 1.25$, $N = 500$ e $s = 6$, considerando os métodos clássico (MQ) e robustos (MM e MQP). Os gráficos à esquerda são para $d = 0.2$ e os da direita para $D = 0.2$: (a) $\kappa = 0.70$ e (b) $\kappa = 0.85$.

$s \in \{4, 6, 12\}$ e $N \in \{500, 1000, 2000\}$. Note que, com estes valores de parâmetros, pelo Teorema 2.7, temos um processo com longa dependência, causal e inversível. Analisando as tabelas, notamos que, para estimar $d = 0.1$, o estimador que apresentou uma sensível melhora foi o KMS, tendo menos vício quando $s = 4$ e $N \in \{500, 1000, 2000\}$, $s = 6$ e $N = 500$, $s = 12$ e $N \in \{1000, 2000\}$, além de apresentar erro quadrático médio e variância mínimos na maioria dos casos. Outro aspecto que observamos, ao estimar $d = 0.1$, é que ao aumentarmos o tamanho amostral N, aprimoramos a estimação, diminuindo o vício. Ao estimar $D = 0.2$, vemos que o estimador KMS não é tão eficiente, não apresentou menor vício em nenhum dos casos, mas nenhum outro estimador se sobressaiu.

As Tabelas 4.30 à 4.32 e a Figura 4.9 referem-se a processos SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ α-estáveis, com $p = q = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\alpha = 1.25$, $s \in \{4, 6, 12\}$ e $N \in \{500, 1000, 2000\}$. Note que, com estes valores de parâmetros, pelo Teorema 2.7, não temos longa dependência, causalidade ou inversibilidade, mesmo assim, observamos que os novos estimadores propostos neste trabalho (KMmod, KMS, KMSmos) foram bastante eficientes, no sentindo de terem menor vício em

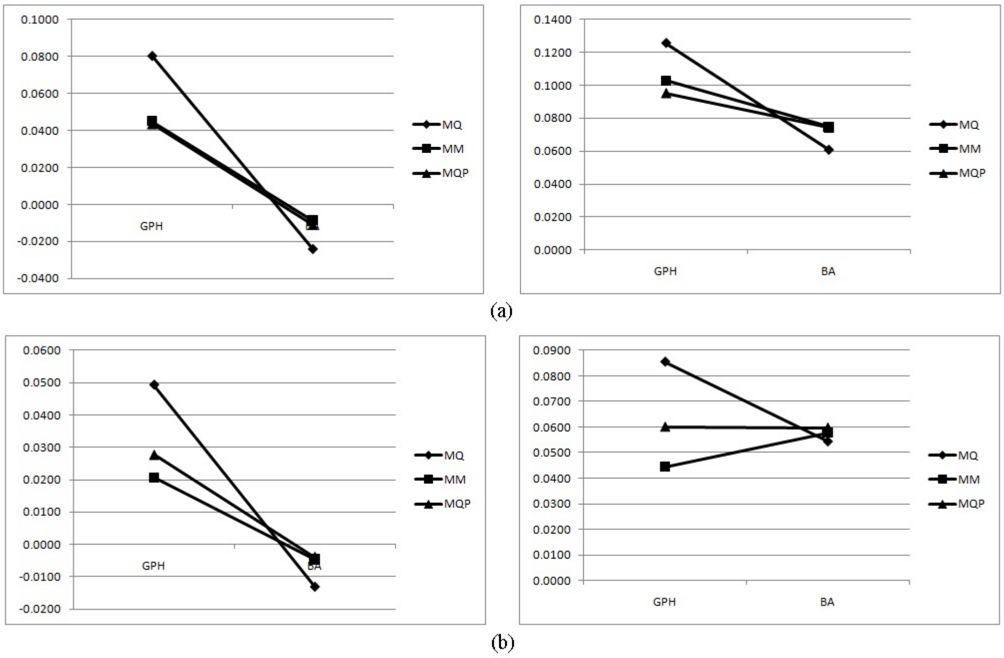


Figura 4.7: Módulo do vício dos estimadores semiparamétricos para o processo SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ α-estável, com $p = q = 0 = P = Q$, $\alpha = 1.25$, $N = 500$ e $s = 12$, considerando os métodos clássico (MQ) e robustos (MM e MQP). Os gráficos à esquerda são para $d = 0.2$ e os da direita para $D = 0.2$: (a) $\kappa = 0.70$ e (b) $\kappa = 0.85$.

todos os casos analisados. Ao analisar as tabelas, vemos que, para estimar $d = 0.2$, o estimador que apresentou uma sensível melhora foi o KMS, tendo menor vício, erro quadrático médio e variância quando $N \in \{500, 2000\}$ em todos valores de s considerados. Ao estimar $D = 0.2$, vemos que os estimadores que apresentaram melhor eficiência foram o KMS e KMSmod. O estimador KMS apresentou menor vício, erro quadrático médio e variância quando $N = 1000$ e $s \in \{4, 6\}$, também quando $N = 2000$ e $s \in \{4, 6\}$, nos demais casos, o estimador KMSmod apresentou menor vício.

As Tabelas 4.33 à 4.35 apresentam resultados referentes a processos SARFIMA $(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ α-estáveis, com $p = 1$, $q = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.5$, $\alpha = 1.25$, $s \in \{4, 6, 12\}$ e $N \in \{500, 1000, 2000\}$. Note que, com estes valores de parâmetros, pelo Teorema 2.7, não temos longa dependência, causalidade ou inversibilidade, mesmo assim, observamos que os novos estimadores propostos neste trabalho (KMmod, KMS, KMSmos) foram bastante eficientes, no sentindo de terem menor vício na maior parte dos casos analisados. Observando as tabelas, vemos que, para estimar $d = 0.2$ e $\phi_1 = 0.5$, o estimador que apresentou uma sensível

Tabela 4.27: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p = q = 0 = P = Q$, $d = 0.1$, $D = 0.2$, $\alpha = 1.50$, $s \in \{4, 6, 12\}$ e $N = 500$.

	$\alpha = 1.50$							
	$s = 4$							
	KM		**KMmod**		**KMS**		**KMSmod**	
	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$d = 0.1$	$D = 0.2$
mean	0.1356	0.1994	0.1102	0.1972	0.0913	0.1805	0.0902	0.1831
bias	0.0356	-0.0006	0.0102	-0.0028	-0.0087	-0.0195	-0.0098	-0.0169
mse	0.0033	0.0025	0.0013	0.0020	0.0010	0.0022	0.0011	0.0020
var	0.0020	0.0025	0.0012	0.0019	0.0010	0.0018	0.0010	0.0017
	$\alpha = 1.50$							
	$s = 6$							
	KM		**KMmod**		**KMS**		**KMSmod**	
	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$d = 0.1$	$D = 0.2$
mean	0.1355	0.1985	0.1097	0.2016	0.0915	0.1743	0.0885	0.1807
bias	0.0355	-0.0015	0.0097	0.0016	-0.0085	-0.0257	-0.0115	-0.0193
mse	0.0033	0.0030	0.0013	0.0022	0.0011	0.0029	0.0012	0.0026
var	0.0021	0.0030	0.0012	0.0022	0.0011	0.0023	0.0011	0.0022
	$\alpha = 1.50$							
	$s = 12$							
	KM		**KMmod**		**KMS**		**KMSmod**	
	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$d = 0.1$	$D = 0.2$
mean	0.1345	0.1846	0.1081	0.2068	0.0896	0.1465	0.0860	0.1629
bias	0.0345	-0.0154	0.0081	0.0068	-0.0104	-0.0535	-0.0140	-0.0371
mse	0.0034	0.0043	0.0013	0.0029	0.0012	0.0061	0.0013	0.0038
var	0.0022	0.0041	0.0012	0.0028	0.0011	0.0032	0.0011	0.0024

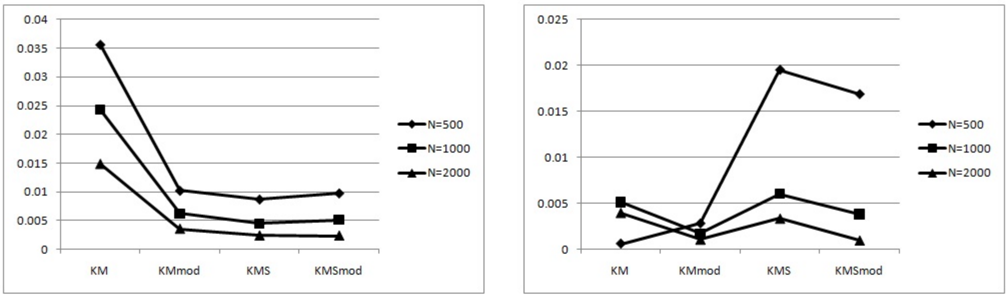
melhora foi o KMS, tendo menor vício em todos os casos de N e s apresentados pelas tabelas. Ao estimar $D = 0.2$, todos os estimadores considerados apresentaram menor vício em pelo menos um caso analisado.

Tabela 4.28: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q)\times(P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p=q=0=P=Q$, $d=0.1$, $D=0.2$, $\alpha=1.50$, $s\in\{4,6,12\}$ e $N=1000$.

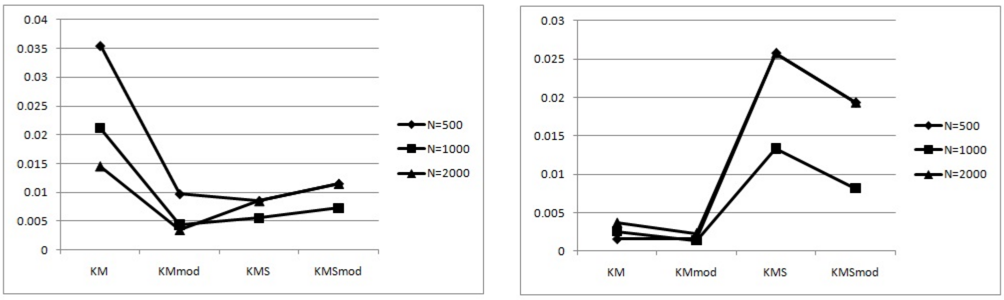
	$\alpha = 1.50$							
	$s = 4$							
	KM		**KMmod**		**KMS**		**KMSmod**	
	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$d = 0.1$	$D = 0.2$
mean	0.1243	0.2051	0.1063	0.2017	0.0955	0.1940	0.0949	0.1962
bias	0.0243	0.0051	0.0063	0.0017	-0.0045	-0.0060	-0.0051	-0.0038
mse	0.0015	0.0014	0.0006	0.0010	0.0006	0.0010	0.0006	0.0012
var	0.0009	0.0014	0.0005	0.0010	0.0005	0.0010	0.0006	0.0012
	$\alpha = 1.50$							
	$s = 6$							
	KM		**KMmod**		**KMS**		**KMSmod**	
	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$d = 0.1$	$D = 0.2$
mean	0.1211	0.2026	0.1044	0.2014	0.0945	0.1867	0.0927	0.1918
bias	0.0211	0.0026	0.0044	0.0014	-0.0055	-0.0133	-0.0073	-0.0082
mse	0.0013	0.0017	0.0005	0.0012	0.0005	0.0013	0.0006	0.0015
var	0.0009	0.0017	0.0005	0.0012	0.0005	0.0011	0.0005	0.0015
	$\alpha = 1.50$							
	$s = 12$							
	KM		**KMmod**		**KMS**		**KMSmod**	
	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$d = 0.1$	$D = 0.2$
mean	0.1243	0.2016	0.1064	0.2073	0.0958	0.1775	0.0933	0.1859
bias	0.0243	0.0016	0.0064	0.0073	-0.0042	-0.0225	-0.0067	-0.0141
mse	0.0015	0.0026	0.0006	0.0016	0.0005	0.0022	0.0006	0.0022
var	0.0009	0.0026	0.0005	0.0016	0.0005	0.0017	0.0005	0.0020

Tabela 4.29: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p = q = 0 = P = Q$, $d = 0.1$, $D = 0.2$, $\alpha = 1.50$, $s \in \{4, 6, 12\}$ e $N = 2000$.

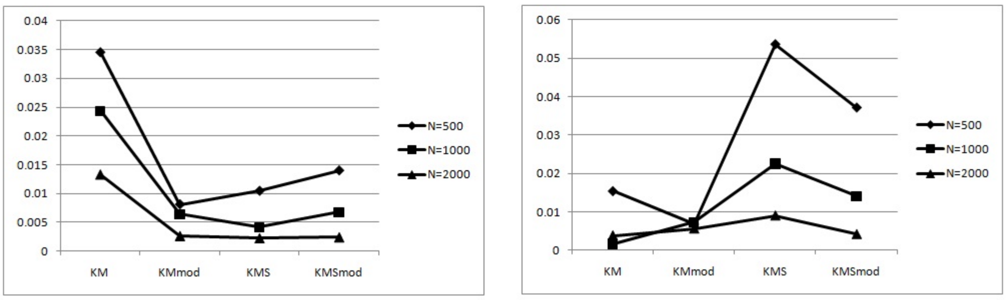
	$\alpha = 1.50$							
	$s = 4$							
	KM		**KMmod**		**KMS**		**KMSmod**	
	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$d = 0.1$	$D = 0.2$
mean	0.1149	0.2040	0.1036	0.2011	0.0976	0.1966	0.0976	0.1990
bias	0.0149	0.0040	0.0036	0.0011	-0.0024	-0.0034	-0.0024	-0.0010
mse	0.0007	0.0010	0.0003	0.0007	0.0002	0.0004	0.0003	0.0005
var	0.0005	0.0009	0.0003	0.0007	0.0002	0.0004	0.0002	0.0005
	$\alpha = 1.50$							
	$s = 6$							
	KM		**KMmod**		**KMS**		**KMSmod**	
	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$d = 0.1$	$D = 0.2$
mean	0.1145	0.2037	0.1035	0.2023	0.0915	0.1743	0.0885	0.1807
bias	0.0145	0.0037	0.0035	0.0023	-0.0085	-0.0257	-0.0115	-0.0193
mse	0.0007	0.0007	0.0004	0.0006	0.0011	0.0029	0.0012	0.0026
var	0.0005	0.0007	0.0004	0.0006	0.0011	0.0023	0.0011	0.0022
	$\alpha = 1.50$							
	$s = 12$							
	KM		**KMmod**		**KMS**		**KMSmod**	
	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$d = 0.1$	$D = 0.2$
mean	0.1133	0.2038	0.1027	0.2056	0.0977	0.1910	0.0975	0.1959
bias	0.0133	0.0038	0.0027	0.0056	-0.0023	-0.0090	-0.0025	-0.0041
mse	0.0006	0.0012	0.0003	0.0009	0.0002	0.0011	0.0002	0.0011
var	0.0004	0.0012	0.0002	0.0009	0.0002	0.0010	0.0002	0.0011



(a)



(b)



(c)

Figura 4.8: Módulo do vício dos estimadores paramétricos para o processo SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ α-estáveis, com $p = q = 0 = P = Q$, $\alpha = 1.50$, $N \in \{500, 1000, 2000\}$. Os gráficos à esquerda são para $d = 0.1$ e os da direita para $D = 0.2$: (a) $s = 4$, (b) $s = 6$ e (c) $s = 12$.

Tabela 4.30: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p = q = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\alpha = 1.25$, $s \in \{4, 6, 12\}$ e $N = 500$.

	$\alpha = 1.25$							
	$s = 4$							
	KM		**KMmod**		**KMS**		**KMSmod**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2829	0.2326	0.2421	0.2175	0.1959	0.1965	0.1955	0.2002
bias	0.0829	0.0326	0.0421	0.0175	-0.0041	-0.0035	-0.0045	0.0002
mse	0.0115	0.0061	0.0053	0.0033	0.0013	0.0033	0.0015	0.0039
var	0.0046	0.0050	0.0036	0.0030	0.0012	0.0033	0.0015	0.0039
	$\alpha = 1.25$							
	$s = 6$							
	KM		**KMmod**		**KMS**		**KMSmod**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2298	0.2166	0.2387	0.2236	0.1911	0.1927	0.1893	0.1971
bias	0.0298	0.0166	0.0387	0.0236	-0.0089	-0.0073	-0.0107	-0.0029
mse	0.0020	0.0018	0.0052	0.0045	0.0014	0.0047	0.0016	0.0044
var	0.0011	0.0016	0.0037	0.0040	0.0013	0.0047	0.0015	0.0044
	$\alpha = 1.25$							
	$s = 12$							
	KM		**KMmod**		**KMS**		**KMSmod**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2798	0.2233	0.2369	0.2327	0.1914	0.1717	0.1874	0.1871
bias	0.0798	0.0233	0.0369	0.0327	-0.0086	-0.0283	-0.0126	-0.0129
mse	0.0110	0.0081	0.0046	0.0061	0.0014	0.0066	0.0017	0.0059
var	0.0047	0.0076	0.0033	0.0050	0.0013	0.0058	0.0016	0.0057

Tabela 4.31: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p = q = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\alpha = 1.25$, $s \in \{4, 6, 12\}$ e $N = 1000$.

	$\alpha = 1.25$							
	$s = 4$							
	KM		**KMmod**		**KMS**		**KMSmod**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2523	0.2240	0.2237	0.2117	0.1989	0.1999	0.2007	0.2043
bias	0.0523	0.0240	0.0237	0.0117	-0.0011	-0.0001	0.0007	0.0043
mse	0.0052	0.0031	0.0022	0.0017	0.0006	0.0014	0.0007	0.0019
var	0.0025	0.0025	0.0017	0.0016	0.0006	0.0014	0.0007	0.0019
	$\alpha = 1.25$							
	$s = 6$							
	KM		**KMmod**		**KMS**		**KMSmod**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2521	0.2303	0.2257	0.2207	0.1974	0.2025	0.1978	0.2078
bias	0.0521	0.0303	0.0257	0.0207	-0.0026	0.0025	-0.0022	0.0078
mse	0.0053	0.0047	0.0028	0.0032	0.0007	0.0025	0.0007	0.0030
var	0.0026	0.0037	0.0022	0.0027	0.0007	0.0025	0.0007	0.0030
	$\alpha = 1.25$							
	$s = 12$							
	KM		**KMmod**		**KMS**		**KMSmod**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2471	0.2218	0.2196	0.2224	0.1968	0.1895	0.1963	0.1966
bias	0.0471	0.0218	0.0196	0.0224	-0.0032	-0.0105	-0.0037	-0.0034
mse	0.0043	0.0042	0.0019	0.0034	0.0005	0.0029	0.0006	0.0029
var	0.0021	0.0037	0.0015	0.0029	0.0005	0.0028	0.0006	0.0029

Tabela 4.32: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ α-estável, quando $p = q = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\alpha = 1.25$, $s \in \{4, 6, 12\}$ e $N = 2000$.

	$\alpha = 1.25$							
	$s = 4$							
	KM		**KMmod**		**KMS**		**KMSmod**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2344	0.2207	0.2156	0.2114	0.2006	0.2058	0.2035	0.2096
bias	0.0344	0.0207	0.0156	0.0114	0.0006	0.0058	0.0035	0.0096
mse	0.0026	0.0023	0.0014	0.0014	0.0004	0.0014	0.0005	0.0017
var	0.0015	0.0019	0.0011	0.0012	0.0004	0.0013	0.0005	0.0016
	$\alpha = 1.25$							
	$s = 6$							
	KM		**KMmod**		**KMS**		**KMSmod**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2298	0.2166	0.2124	0.2103	0.2004	0.2016	0.2031	0.2061
bias	0.0298	0.0166	0.0124	0.0103	0.0004	0.0016	0.0031	0.0061
mse	0.0020	0.0018	0.0009	0.0012	0.0003	0.0011	0.0004	0.0013
var	0.0011	0.0016	0.0008	0.0011	0.0003	0.0011	0.0004	0.0013
	$\alpha = 1.25$							
	$s = 12$							
	KM		**KMmod**		**KMS**		**KMSmod**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2280	0.2148	0.2117	0.2135	0.2005	0.1964	0.2025	0.2016
bias	0.0280	0.0148	0.0117	0.0135	0.0005	-0.0036	0.0025	0.0016
mse	0.0017	0.0021	0.0008	0.0018	0.0002	0.0014	0.0003	0.0016
var	0.0009	0.0019	0.0007	0.0016	0.0002	0.0014	0.0003	0.0016

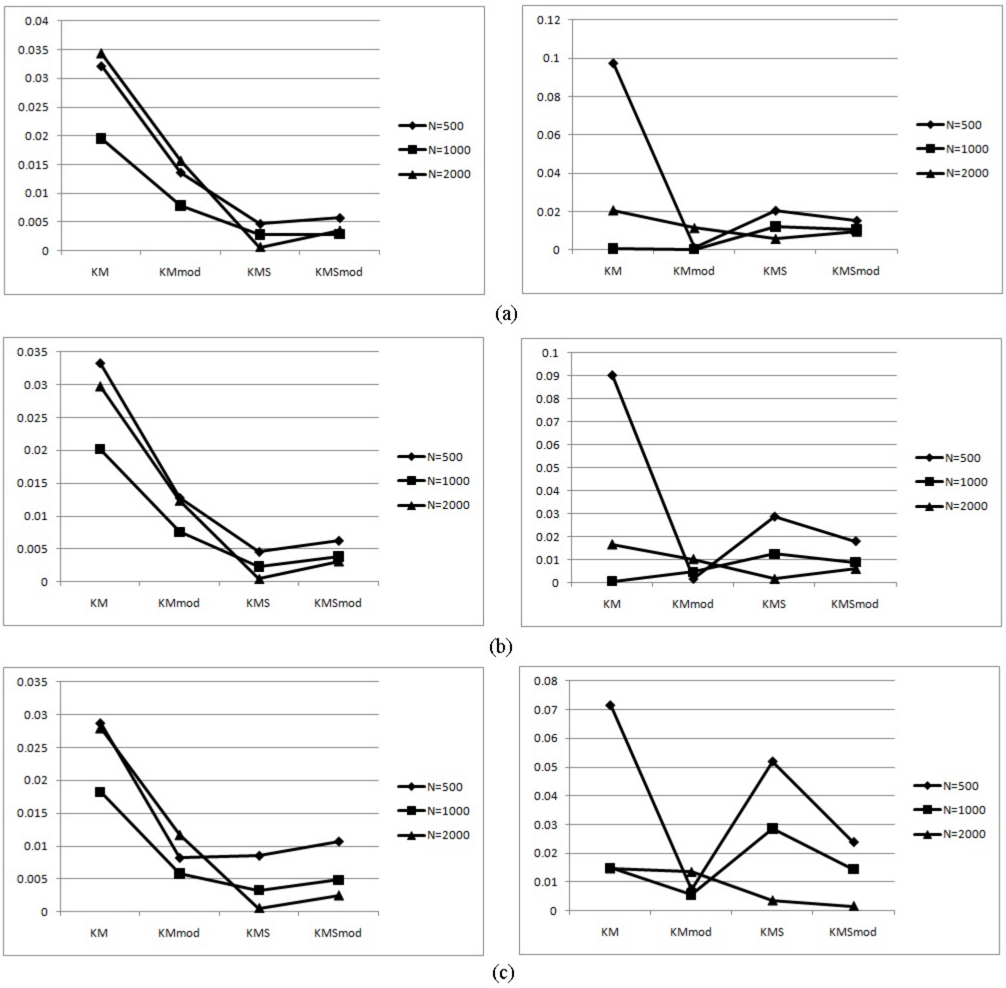


Figura 4.9: Módulo do vício dos estimadores paramétricos para o processo SARFIMA$(p,d,q)\times(P,D,Q)_s$ α-estáveis, com $p=q=0=P=Q$, $\alpha=1.25$, $N\in\{500,1000,2000\}$. Os gráficos à esquerda são para $d=0.2$ e os da direita para $D=0.2$: (a) $s=4$, (b) $s=6$ e (c) $s=12$.

Tabela 4.33: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p=1$, $q=0=P=Q$, $d=0.2$, $D=0.2$, $\phi_1=0.5$, $\alpha=1.25$, $s\in\{4,6,12\}$ e $N=500$.

	$\alpha = 1.25$											
	$s=4$											
	KM			**KMmod**			**KMS**			**KMSmod**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=0.5$
mean	0.3336	0.1890	0.3955	0.2819	0.1958	0.4320	0.1645	0.1926	0.5290	0.1480	0.1932	0.5425
bias	0.1336	-0.0110	-0.1045	0.0819	-0.0042	-0.0680	-0.0355	-0.0074	0.0290	-0.0520	-0.0068	0.0425
mse	0.0307	0.0026	0.0231	0.0183	0.0023	0.0153	0.0110	0.0029	0.0109	0.0129	0.0033	0.0117
var	0.0129	0.0025	0.0122	0.0116	0.0023	0.0107	0.0098	0.0029	0.0101	0.0103	0.0033	0.0099
	$\alpha = 1.25$											
	$s=6$											
	KM			**KMmod**			**KMS**			**KMSmod**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=0.5$
mean	0.3316	0.1970	0.3945	0.2761	0.2046	0.4370	0.1670	0.1877	0.5245	0.1500	0.1893	0.5364
bias	0.1316	-0.0030	-0.1055	0.0761	0.0046	-0.0630	-0.0330	-0.0123	0.0245	-0.0500	-0.0107	0.0364
mse	0.0290	0.0029	0.0224	0.0168	0.0026	0.0140	0.0102	0.0036	0.0102	0.0114	0.0035	0.0102
var	0.0116	0.0029	0.0112	0.0110	0.0026	0.0100	0.0091	0.0035	0.0096	0.0089	0.0033	0.0089
	$\alpha = 1.25$											
	$s=12$											
	KM			**KMmod**			**KMS**			**KMSmod**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=0.5$
mean	0.3140	0.1879	0.4049	0.2593	0.2183	0.4486	0.1693	0.1610	0.5175	0.1464	0.1730	0.5345
bias	0.1140	-0.0121	-0.0951	0.0593	0.0183	-0.0514	-0.0307	-0.0390	0.0175	-0.0536	-0.0270	0.0345
mse	0.0260	0.0048	0.0219	0.0157	0.0041	0.0141	0.0087	0.0061	0.0093	0.0106	0.0046	0.0097
var	0.0130	0.0046	0.0129	0.0122	0.0038	0.0114	0.0078	0.0045	0.0090	0.0077	0.0038	0.0085

Tabela 4.34: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p = 1$, $q = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.5$, $\alpha = 1.25$, $s \in \{4, 6, 12\}$ e $N = 1000$.

	$\alpha = 1.25$											
	$s = 4$											
	KM			**KMmod**			**KMS**			**KMSmod**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$
mean	0.3098	0.1916	0.4072	0.2488	0.1979	0.4580	0.1707	0.2004	0.5268	0.1650	0.2008	0.5324
bias	0.1098	-0.0084	-0.0928	0.0488	-0.0021	-0.0420	-0.0293	0.0004	0.0268	-0.0350	0.0008	0.0324
mse	0.0216	0.0011	0.0174	0.0099	0.0010	0.0083	0.0062	0.0016	0.0059	0.0074	0.0016	0.0067
var	0.0096	0.0010	0.0088	0.0075	0.0010	0.0066	0.0053	0.0016	0.0052	0.0062	0.0016	0.0057
	$\alpha = 1.25$											
	$s = 6$											
	KM			**KMmod**			**KMS**			**KMSmod**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$
mean	0.3076	0.1979	0.4080	0.2483	0.2052	0.4593	0.1798	0.1978	0.5172	0.1730	0.2015	0.5227
bias	0.1076	-0.0021	-0.0920	0.0483	0.0052	-0.0407	-0.0202	-0.0022	0.0172	-0.0270	0.0015	0.0227
mse	0.0212	0.0014	0.0173	0.0102	0.0015	0.0086	0.0057	0.0018	0.0060	0.0067	0.0022	0.0064
var	0.0096	0.0014	0.0089	0.0079	0.0014	0.0070	0.0053	0.0018	0.0058	0.0060	0.0022	0.0059
	$\alpha = 1.25$											
	$s = 12$											
	KM			**KMmod**			**KMS**			**KMSmod**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$
mean	0.3065	0.2032	0.4079	0.2418	0.2138	0.4642	0.1812	0.1862	0.5147	0.1718	0.1927	0.5216
bias	0.1065	0.0032	-0.0921	0.0418	0.0138	-0.0358	-0.0188	-0.0138	0.0147	-0.0282	-0.0073	0.0216
mse	0.0209	0.0026	0.0173	0.0092	0.0023	0.0079	0.0049	0.0027	0.0053	0.0061	0.0028	0.0058
var	0.0096	0.0026	0.0089	0.0075	0.0021	0.0066	0.0046	0.0025	0.0050	0.0053	0.0028	0.0054

Tabela 4.35: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p = 1$, $q = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.5$, $\alpha = 1.25$, $s \in \{4, 6, 12\}$ e $N = 2000$.

	$\alpha = 1.25$											
	$s = 4$											
	KM			**KMmod**			**KMS**			**KMSmod**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$
mean	0.2902	0.1964	0.4196	0.2395	0.2007	0.4645	0.1860	0.2031	0.5129	0.1859	0.2049	0.5140
bias	0.0902	-0.0036	-0.0804	0.0395	0.0007	-0.0355	-0.0140	0.0031	0.0129	-0.0141	0.0049	0.0140
mse	0.0146	0.0007	0.0127	0.0066	0.0006	0.0059	0.0036	0.0009	0.0036	0.0044	0.0012	0.0041
var	0.0065	0.0007	0.0062	0.0051	0.0006	0.0046	0.0034	0.0009	0.0035	0.0042	0.0012	0.0039
	$\alpha = 1.25$											
	$s = 6$											
	KM			**KMmod**			**KMS**			**KMSmod**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$
mean	0.2895	0.2030	0.4192	0.2383	0.2059	0.4658	0.1880	0.2022	0.5102	0.1875	0.2058	0.5111
bias	0.0895	0.0030	-0.0808	0.0383	0.0059	-0.0342	-0.0120	0.0022	0.0102	-0.0125	0.0058	0.0111
mse	0.0142	0.0012	0.0126	0.0064	0.0012	0.0058	0.0033	0.0013	0.0039	0.0039	0.0016	0.0041
var	0.0062	0.0012	0.0061	0.0049	0.0012	0.0046	0.0032	0.0013	0.0038	0.0038	0.0016	0.0040
	$\alpha = 1.25$											
	$s = 12$											
	KM			**KMmod**			**KMS**			**KMSmod**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$
mean	0.2813	0.2088	0.4279	0.2303	0.2106	0.4739	0.1890	0.1973	0.5103	0.1858	0.2005	0.5127
bias	0.0813	0.0088	-0.0721	0.0303	0.0106	-0.0261	-0.0110	-0.0027	0.0103	-0.0142	0.0005	0.0127
mse	0.0127	0.0020	0.0112	0.0055	0.0015	0.0051	0.0032	0.0016	0.0036	0.0040	0.0017	0.0041
var	0.0061	0.0019	0.0060	0.0045	0.0014	0.0044	0.0031	0.0016	0.0035	0.0038	0.0017	0.0040

Veja que as Tabelas 4.36 à 4.38 apresentam resultados para o processo SARFIMA $(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ α-estável, quando $p = q = 1 = P = Q$, $d = 0.1$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.5$, $\Phi_1 = -0.5$, $\theta_1 = -0.5$, $\Theta_1 = 0.5$, $\alpha = 1.50$, $s = 6$ e $N \in \{500, 1000, 2000\}$, com estes parâmetros, estamos na situação de processo com as propriedades de longa dependência, causalidade e invertibilidade. Analisando as tabelas observamos que, mesmo com o processo completo, isto é, apresentando todos parâmetros, a estimação ainda apresenta vício relativamente pequeno, se comparado com os resultados da estimação semiparamétrica de processo apresentando alguns dos polinômios diferentes de 1. Não há um estimador que se sobressaia nesta situação, apenas quando $N = 2000$, que o estimador KMmod apresenta estimativas com menor vício para todos os parâmetros, além de valores pequenos para o erro quadrático médio e variância.

Tabela 4.36: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p = q = 1 = P = Q$, $d = 0.1$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.5$, $\Phi_1 = -0.5$, $\theta_1 = -0.5$, $\Theta_1 = 0.5$, $\alpha = 1.50$, $s = 6$ e $N = 500$.

	$\alpha = 1.50$											
	$s = 6$											
	KM						**KMmod**					
	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$
mean	0.2160	0.1145	0.3754	-0.4998	-0.5042	0.3819	0.1442	0.1615	0.4438	-0.4977	-0.4909	0.4399
bias	0.1160	-0.0855	-0.1246	0.0002	-0.0042	-0.1181	0.0442	-0.0385	-0.0562	0.0023	0.0091	-0.0601
mse	0.0247	0.0164	0.0288	0.0034	0.0021	0.0223	0.0085	0.0099	0.0134	0.0143	0.0088	0.0182
var	0.0112	0.0091	0.0132	0.0034	0.0021	0.0083	0.0066	0.0084	0.0102	0.0143	0.0087	0.0146
	KM						**KMmod**					
	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$
mean	0.0758	0.0592	0.5011	-0.4682	-0.4902	0.2928	0.0476	0.0392	0.5089	-0.4237	-0.4438	0.2000
bias	-0.0242	-0.1408	0.0011	0.0318	0.0098	-0.2072	-0.0524	-0.1608	0.0089	0.0763	0.0562	-0.3000
mse	0.0041	0.0237	0.0063	0.0029	0.0023	0.0477	0.0054	0.0281	0.0102	0.0271	0.0207	0.0987
var	0.0035	0.0039	0.0063	0.0019	0.0022	0.0048	0.0027	0.0022	0.0101	0.0213	0.0176	0.0087

Tabela 4.37: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p = q = 1 = P = Q$, $d = 0.1$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.5$, $\Phi_1 = -0.5$, $\theta_1 = -0.5$, $\Theta_1 = 0.5$, $\alpha = 1.50$, $s = 6$ e $N = 1000$.

	$\alpha = 1.50$											
	$s = 6$											
	KM						**KMmod**					
	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$
mean	0.1658	0.1475	0.4271	-0.5009	-0.5037	0.4318	0.1205	0.1774	0.4694	-0.4954	-0.4947	0.4596
bias	0.0658	-0.0525	-0.0729	-0.0009	-0.0037	-0.0682	0.0205	-0.0226	-0.0306	0.0046	0.0053	-0.0404
mse	0.0106	0.0114	0.0131	0.0016	0.0010	0.0140	0.0042	0.0067	0.0091	0.0106	0.0074	0.0134
var	0.0063	0.0087	0.0078	0.0016	0.0010	0.0094	0.0037	0.0062	0.0082	0.0106	0.0074	0.0118
	KM						**KMmod**					
	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$
mean	0.0707	0.0864	0.5182	-0.4814	-0.4943	0.3497	0.0465	0.0696	0.5264	-0.4491	-0.4706	0.2702
bias	-0.0293	-0.1136	0.0182	0.0186	0.0057	-0.1503	-0.0535	-0.1304	0.0264	0.0509	0.0294	-0.2298
mse	0.0031	0.0163	0.0036	0.0012	0.0010	0.0266	0.0046	0.0187	0.0047	0.0075	0.0045	0.0565
var	0.0022	0.0034	0.0032	0.0009	0.0009	0.0040	0.0017	0.0017	0.0040	0.0049	0.0036	0.0037

Tabela 4.38: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p = q = 1 = P = Q$, $d = 0.1$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.5$, $\Phi_1 = -0.5$, $\theta_1 = -0.5$, $\Theta_1 = 0.5$, $\alpha = 1.50$, $s = 6$ e $N = 2000$.

	$\alpha = 1.50$											
	$s = 6$											
	KM						**KMmod**					
	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$
mean	0.1410	0.1735	0.4566	-0.4991	-0.5009	0.4670	0.1089	0.1894	0.4886	-0.4997	-0.4991	0.4829
bias	0.0410	-0.0265	-0.0434	0.0009	-0.0009	-0.0330	0.0089	-0.0106	-0.0114	0.0003	0.0009	-0.0171
mse	0.0049	0.0056	0.0058	0.0010	0.0006	0.0070	0.0023	0.0040	0.0033	0.0010	0.0006	0.0053
var	0.0032	0.0050	0.0039	0.0010	0.0006	0.0060	0.0023	0.0039	0.0032	0.0010	0.0006	0.0050
	KM						**KMmod**					
	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$
mean	0.0802	0.1361	0.5143	-0.4882	-0.4949	0.4140	0.0557	0.1095	0.5288	-0.4635	-0.4809	0.3428
bias	-0.0198	-0.0639	0.0143	0.0118	0.0051	-0.0860	-0.0443	-0.0905	0.0288	0.0365	0.0191	-0.1572
mse	0.0022	0.0068	0.0036	0.0007	0.0024	0.0105	0.0032	0.0099	0.0034	0.0017	0.0028	0.0266
var	0.0018	0.0027	0.0034	0.0006	0.0024	0.0031	0.0012	0.0017	0.0026	0.0004	0.0024	0.0019

Capítulo 5

Conclusões e Trabalhos Futuros

5.1 Conclusões

Neste trabalho, além de apresentarmos diversas definições e propriedades conhecidas na literatura de séries temporais, abordamos duas classes de processos estocásticos, uma de processos com inovações na forma de ruído branco Gaussiano e outra de processos com inovações α-estáveis. Para os processos SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ α-estáveis, destacamos o Teorema 2.7, que apresenta condições de causalidade, inversibilidade e a função poder de transferência. Além disso, destacamos a nova definição de periodograma suavizado de correlações, sobre a qual mostramos a convergência em probabilidade. Para a estimação em processos com inovações na forma de ruído branco, destacamos a definição e demonstração de consistência e distribuição normal assintótica dos estimadores paramétricos dados nas Seções 3.2.3 e 3.2.4. Além disso, definimos diversos estimadores semiparamétricos e paramétricos conhecidos na literatura. Para a estimação em processos α-estáveis definimos outros novos estimadores, além de estimadores conhecidos na literatura, que foram aplicados em simulações.

Realizamos diversas simulações de Monte Carlo, variando os parâmetros do processo SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$, normal e α-estável, conforme a seguir: p, q, P, $Q \in \{0, 1\}$, d, $D \in \{0.2, 0.1\}$, $s \in \{4, 6, 12\}$, tamanho amostral $N \in \{500, 1000, 2000\}$ e número de regressores, na estimação semiparamétrica, $g(N) = N^{\kappa}$, com $\kappa \in \{0.5; 0.55; 0.60; \cdots; \zeta\}$, em que o último valor ζ, depende do tamanho amostral N.

Nos resultados obtidos na estimação semiparamétrica, para os processos SARFIMA $(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ com inovações na forma de ruído branco Gaussiano, notamos que em todos estimadores considerados, ao aumentarmos o valor de κ, isto é, ao aumentarmos o número de regressores, diminuímos o vício. Ao aumentarmos o tamanho amostral N, diminuímos o erro quadrático médio. O estimador BA é o que apresentou menor vício nos casos analisados, mas nenhuma das metodologias se destacou. Dentre as metodologias utilizadas com o estimador GPH, se destaca a metodologia robusta MM, apresentando menor vício em grande parte dos casos. Também constatamos que, se considerarmos processos mais elaborados, apresentando mais parâmetros, como $p = 1$, a estimação é fortemente afetada de forma negativa, sugerindo que não seja utilizada a estimação semiparamétrica nesses casos. Outro fato observado é que, em todos os casos considerados, o estimador GPH, independente da metodologia utilizada, superestima o verdadeiro valor de d.

Os resultados encontrados para a estimação paramétrica dos processos SARFIMA $(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ com inovações na forma de ruído branco Gaussiano, mostraram que, em todos os casos abordados no trabalho, a estimação de d foi melhorada, no sentido de diminuir o vício, nos novos estimadores propostos FTmod e FTS, se comparados com o estimador original FT. Já, na estimação de D, os estimadores FTmod e FTS não foram tão eficientes, apresentando maior vício que o estimador FT, em diversos casos. Outro fato observado é que, mesmo que consideremos mais parâmetros no processo, como, por exemplo, $p \neq 0$ ou $q \neq 0$, a estimação, de forma geral, permanece eficiente, o que não acontece com os estimadores semiparamétricos, sugerindo, assim, a utilização dos estimadores paramétricos nos casos de processos mais completos. Também concluímos que, na estimação de d, em geral, os estimadores paramétricos apresentaram menor vício do que os semiparamétricos. Entretanto, na estimação de D, os estimadores semiparamétricos apresentaram menor vício que os paramétricos.

Os resultados encontrados para a estimação semiparamétrica dos processos SARFIMA $(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ com inovações α-estáveis, notamos que em todos estimadores considerados, ao aumentarmos o valor de κ, isto é, ao aumentarmos o número de regressores, diminuímos o vício. Ao aumentarmos o tamanho amostral N, além de diminuirmos o vício, também diminuímos o erro quadrático médio. Os resultados apontam que, para uma grande parte dos casos analisados, as versões utilizando o periodograma normalizado suavizado de correlações, isto é, os estimadores

BA MQ, BA MM e BA MPQ, apresentaram melhor desempenho na estimação de d. A versão utilizando o periodograma normalizado com a metodologia robusta MM, isto é, o estimador GPH MM, apresentou maior eficiência na estimação de D, em diversos casos analisados. Também constatamos que, se considerarmos processos apresentando mais parâmetros, como $p = 1$, a estimação é afetada de forma negativa, especialmente na estimação de d, sugerindo que não seja utilizada a estimação semiparamétrica nesses casos. Outro fato observado é que, assim como nos processos com inovações ruído branco normal, o estimador GPH, independente da metodologia utilizada, superestima o verdadeiro valor de d.

Os resultados encontrados para a estimação paramétrica dos processos SARFIMA $(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ com inovações α-estáveis mostram que, para a maior parte dos casos analisados, as versões modificadas do estimador KM, isto é, os estimadores KMmod, KMS e KMSmod, apresentaram melhor desempenho. Nos casos que consideramos o processo SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ α-estável, com $p = q = 0 = P = Q$, para a estimação de d, o estimador KMS se destacou, apresentando menor vício na maior parte dos casos. Já na estimação de D, os estimadores modificados não foram tão bons, sendo que o estimador original KMS apresentou menor vício que os demais em alguns casos. Se consideramos $p = 1$, então, o estimador que apresentou menor vício para estimar ϕ_1 foi o KMS. Para o processo completo, isto é, apresentando todos os parâmetros, perdemos um pouco da qualidade de estimação, mas temos vício relativamente pequeno, se compararmos com os resultados da estimação semiparamétrica de processos com alguns dos polinômios diferentes de um.

5.2 Trabalhos Futuros

Como sugestões para trabalhos futuros, destacamos:

a) Demonstrar propriedades dos estimadores para processos α-estáveis, definidos nas Seções 3.2.6, 3.2.7 e 3.2.8, denotados por KMmod, KMS e KMSmod;

b) Estimar o parâmetro α nos processos α-estáveis;

c) Fazer um estudo prático de previsão, com os preditores lineares definidos na Seção 2.3;

d) Realizar uma aplicação à série real.

Bibliografia

[1] Billingsley, P. *Probability and Measure*. New York: Wiley-Interscience, 1995.

[2] Bisognin, C. *Estimação e Previsão em Processos SARFIMA*$(p,d,q)\times(P,D,Q)_s$ *na Presença de Outliers*. Tese de Doutorado - UFRGS. Porto Alegre, 2007.

[3] Bisognin, C.; Lopes, S.R.C. Estimation and Forecasting the Long-Memory Parameter in the Presence of Periodicity. *Journal of Forecasting*, Vol. **26** (6), p. 405-427, 2007.

[4] Bisognin, C.; Lopes, S.R.C. Properties of Seasonal Long Memory Processes. *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. **49** (9-10), p. 1837-1851, 2009.

[5] Box, G.E.P.; Jenkins, G.M. *Time Series Analysis Forecasting and Control*. San Francisco: Holden-Day, 1976.

[6] Brockwell, P.J.; Davis, R.A. *Time Series: Theory and Methods*. New York: Springer-Verlag, 1991.

[7] Cline, D.B.H. Linear Prediction of ARMA Processes with Infinite Variance. *Stochastic Processes and their Applications*, Vol. **19** (2), p. 281-296, 1985.

[8] Dahlhaus, R. Efficient Parameter Estimation for Self-Similar Processes. *Annals of Statistics*, Vol. **17** (4), p. 1749-1766, 1989.

[9] Diongue, A.K.; Diop, A.; Ndongo, M. Seasonal Fractional ARIMA with Stable Innovations. *Statistics & Probability Letters*, Vol. **78** (12), p.1404-1411, 2008.

[10] Feller, W. *An Introduction to Probability Theory and its Applications*. New York: John Wiley e Sons, Vol.2, 1971.

[11] Fox, R.; Taqqu, M.S. Large-Sample Properties of Estimates for Strongly Stationary Gaussian Time Series. *Annals of Statistics*, Vol. **14** (2), p.517-532, 1986.

[12] Geweke, J.; Porter-Hudak, S. The Estimation and Application of Long Memory Time Series Model. *Journal of Time Series Analysis*, Vol. **4** (4), p. 221-238, 1983.

[13] Granger, C.W.J.; Joyeux, R. An Introduction to Long Memory Time Series Models and Fractional Differencing. *Journal of Time Series Analysis*, Vol. **1** (1), p.15-29, 1980.

[14] Grenander, U.; Szegö, G. *Toeplitz Forms and their Application.* Berkeley e Los Angeles: University of California Press, 1958.

[15] Hannan, E.J. The Asymptotic Theory of Linear Time-Series Models. *Journal of Applied Probability*, Vol. **10** (1), p.130-145, 1973.

[16] Hosking, J.R.M. Fractional Differencing. *Biometrika*, Vol. **68** (1), p.165-176, 1981.

[17] Iório, V. *EDP, um curso de graduação.* Rio de Janeiro: Impa, 2007.

[18] Mikosch, T.; Gadrich, T.; Klüppelberg, C.; Adler, R.J. Parameter Estimation for ARMA Models with Infinite Variance Innovations. *The Annals of Statistics*, Vol. **23** (1), p. 305-326, 1995.

[19] Klüppelberg, C.; Mikosch, T. Parameter Estimation for a Misspecified ARMA Model with Infinite Variance Innovations. *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. **78** (1), p. 60-65, 1996.

[20] Klüppelberg, C.; Mikosch, T. The Integrated Periodograma for Stable Processes. *The Annals os Statistics*, Vol. **24** (5), p. 1855-1879, 1996.

[21] Klüppelberg, C.; Mikosch, T. Some Limit Theory for the Self-Normalised Periodogram of Stable Processes. *Scandinavian Journal of Statistics*, Vol. **21** (4), p. 485-491, 1994.

[22] Kokoszka, P.S.; Taqqu, M.S. Discrete Time Parametric Models with Long Memory and Infinite Variance. *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. **29**, p.203-215, 1999.

[23] Kokoszka, P.S.; Taqqu, M.S. Fractional ARIMA with Stable Innovations. *Stochastic Processes and their Applications*, Vol. **60** (1), p.19-47, 1995.

[24] Lopes, S.R.C.; Mendes, B.V.M. Bandwidth Selection in Classical and Robust Estimation of Long Memory. *International Journal of Statistics and Systems*, Vol. **1**(2), p. 177-200, 2006.

[25] Morettin, P.A.; Toloi, C.M.C. *Análise de Séries Temporais.* São Paulo: Edgard Blücher, 2004.

[26] Ndongo, M.; Diongue, A.K.; Diop, A.; Dossou-Gbété, S. Estimation of Long-Memory Parameters for Seasonal Fractional ARIMA with Stable Innovations. *Statistical Methodology*, Vol. **7** (2), p. 141-151, 2010.

[27] Reisen, V.A. Estimation of the Fractional Difference Parameter in the ARIMA(p, d, q) Model Using the Smooothed Periodogram. *Journal of Time Series Analysis*, Vol. **15** (3), p. 335-350, 1994.

[28] Robinson, P.M. Log-Periodogram Regression of Time Series with Long Range Dependence. *Annals of Statistics.*, Vol. **23** (3), p. 1048-1072, 1995.

[29] Samorodnitsky, G.; Taqqu, M.S. *Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance.* New York: Chapman & Hall, 1994.

[30] Wei, W.W.S. *Time Series Analysis : Univariate and Multivariate Methods.* Redwood City: Addison-Wesley, 1990.

[31] Whittle, P. *Hypothesis Testing in Time Series Analysis.* New York: Hafner, 1951.

[32] Zygmund, A. *Trigonometric Series.* Cambridge: Cambridge University Press, Vol I, 1959.

Apêndice A

Resultados para Processos com Inovações Gaussianas

Neste apêndice apresentamos os resultados da estimação semiparamétrica e paramétrica dos parâmetros para processos SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ que possuem inovações na forma de ruído branco com distribuição normal padrão.

Estimação Semiparamétrica

Tabela A.1: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q)\times(P,D,Q)_s$, quando $p=q=0=P=Q$, $d=0.2$, $D=0.2$, $s\in\{4,6,12\}$, $\kappa=0.888$ (κ máximo) e $N=500$.

	$\kappa = 0.70$											
	$s = 4$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$
mean	0.2347	0.2127	0.2232	0.2011	0.2303	0.2077	0.1973	0.2006	0.2010	0.2030	0.1993	0.2035
bias	0.0347	0.0127	0.0232	0.0011	0.0303	0.0077	-0.0027	0.0006	0.0010	0.0030	-0.0007	0.0035
mse	0.0041	0.0031	0.0060	0.0063	0.0039	0.0037	0.0016	0.0017	0.0024	0.0030	0.0020	0.0025
var	0.0029	0.0029	0.0054	0.0063	0.0030	0.0037	0.0016	0.0017	0.0024	0.0030	0.0020	0.0025
	$s = 6$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$
mean	0.2328	0.2180	0.2243	0.2039	0.2286	0.2136	0.1972	0.1986	0.1997	0.2018	0.2012	0.2019
bias	0.0328	0.0180	0.0243	0.0039	0.0286	0.0136	-0.0028	-0.0014	-0.0003	0.0018	0.0012	0.0019
mse	0.0038	0.0033	0.0063	0.0063	0.0038	0.0039	0.0015	0.0017	0.0023	0.0029	0.0020	0.0026
var	0.0027	0.0029	0.0057	0.0063	0.0030	0.0037	0.0015	0.0017	0.0023	0.0029	0.0020	0.0026
	$s = 12$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$
mean	0.2309	0.2256	0.2226	0.2122	0.2268	0.2215	0.1957	0.1980	0.1984	0.2055	0.2004	0.2055
bias	0.0309	0.0256	0.0226	0.0122	0.0268	0.0215	-0.0043	-0.0020	-0.0016	0.0055	0.0004	0.0055
mse	0.0036	0.0040	0.0057	0.0077	0.0039	0.0047	0.0014	0.0017	0.0022	0.0030	0.0019	0.0027
var	0.0026	0.0033	0.0052	0.0075	0.0032	0.0042	0.0014	0.0017	0.0022	0.0030	0.0019	0.0027

Tabela A.2: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q)\times(P,D,Q)_s$, quando $p=q=0=P=Q$, $d=0.2$, $D=0.2$, $s\in\{4,6,12\}$, $\kappa=0.899$ (κ máximo) e $N=1000$.

	$\kappa=0.70$											
	$s=4$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$
mean	0.2217	0.2070	0.2185	0.1976	0.2203	0.2035	0.2003	0.2006	0.2012	0.2008	0.2022	0.2008
bias	0.0217	0.0070	0.0185	-0.0024	0.0203	0.0035	0.0003	0.0006	0.0012	0.0008	0.0022	0.0008
mse	0.0017	0.0013	0.0031	0.0031	0.0019	0.0016	0.0008	0.0008	0.0011	0.0013	0.0010	0.0011
var	0.0012	0.0012	0.0028	0.0031	0.0015	0.0016	0.0008	0.0008	0.0011	0.0013	0.0010	0.0011
	$s=6$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$
mean	0.2214	0.2125	0.2135	0.2048	0.2166	0.2094	0.2003	0.2014	0.2005	0.2035	0.2009	0.2040
bias	0.0214	0.0125	0.0135	0.0048	0.0166	0.0094	0.0003	0.0014	0.0005	0.0035	0.0009	0.0040
mse	0.0017	0.0015	0.0027	0.0030	0.0017	0.0018	0.0007	0.0008	0.0011	0.0014	0.0010	0.0012
var	0.0012	0.0013	0.0025	0.0030	0.0014	0.0017	0.0007	0.0008	0.0011	0.0014	0.0010	0.0012
	$s=12$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$
mean	0.2155	0.2187	0.2102	0.2120	0.2135	0.2176	0.1957	0.2030	0.1983	0.2070	0.1985	0.2080
bias	0.0155	0.0187	0.0102	0.0120	0.0135	0.0176	-0.0043	0.0030	-0.0017	0.0070	-0.0015	0.0080
mse	0.0014	0.0016	0.0030	0.0034	0.0017	0.0020	0.0007	0.0008	0.0010	0.0014	0.0010	0.0012
var	0.0012	0.0013	0.0029	0.0033	0.0015	0.0017	0.0007	0.0008	0.0010	0.0014	0.0010	0.0012

Tabela A.3: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q)\times(P,D,Q)_s$, quando $p=q=0=P=Q$, $d=0.2$, $D=0.2$, $s\in\{4,6,12\}$, $\kappa=0.908$ (κ máximo) e $N=2000$.

	$\kappa = 0.70$											
	$s=4$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$
mean	0.2122	0.2049	0.2073	0.2019	0.2102	0.2054	0.2000	0.2022	0.2000	0.2027	0.2006	0.2033
bias	0.0122	0.0049	0.0073	0.0019	0.0102	0.0054	0.0000	0.0022	0.0000	0.0027	0.0006	0.0033
mse	0.0007	0.0006	0.0014	0.0014	0.0009	0.0009	0.0004	0.0004	0.0006	0.0006	0.0005	0.0006
var	0.0006	0.0006	0.0014	0.0014	0.0008	0.0009	0.0004	0.0004	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005
	$s=6$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$
mean	0.2124	0.2070	0.2090	0.2045	0.2107	0.2060	0.2008	0.2019	0.2009	0.2022	0.2014	0.2025
bias	0.0124	0.0070	0.0090	0.0045	0.0107	0.0060	0.0008	0.0019	0.0009	0.0022	0.0014	0.0025
mse	0.0007	0.0006	0.0015	0.0014	0.0009	0.0009	0.0004	0.0004	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005
var	0.0006	0.0006	0.0014	0.0014	0.0008	0.0008	0.0004	0.0004	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005
	$s=12$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$
mean	0.2112	0.2115	0.2080	0.2039	0.2089	0.2102	0.1991	0.2029	0.1993	0.2051	0.2002	0.2050
bias	0.0112	0.0115	0.0080	0.0039	0.0089	0.0102	-0.0009	0.0029	-0.0007	0.0051	0.0002	0.0050
mse	0.0007	0.0008	0.0014	0.0016	0.0009	0.0010	0.0004	0.0004	0.0006	0.0007	0.0005	0.0006
var	0.0006	0.0007	0.0013	0.0016	0.0008	0.0009	0.0004	0.0004	0.0006	0.0007	0.0005	0.0005

Tabela A.4: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$, quando $q = 1$, $p = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\theta_1 = 0.5$, $s \in \{4, 6, 12\}$, $\kappa = 0.85$ e $N = 500$.

	$\kappa = 0.85$											
	$s = 4$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	-0.1443	0.3019	-0.2084	0.2614	-0.1884	0.2705	-0.1788	0.2857	-0.2510	0.2599	-0.2383	0.2585
bias	-0.3443	0.1019	-0.4084	0.0614	-0.3884	0.0705	-0.3788	0.0857	-0.4510	0.0599	-0.4383	0.0585
mse	0.1214	0.0141	0.1791	0.0112	0.1565	0.0100	0.1452	0.0094	0.2142	0.0100	0.1994	0.0082
var	0.0029	0.0037	0.0123	0.0075	0.0057	0.0050	0.0017	0.0021	0.0108	0.0064	0.0073	0.0048
	$s = 6$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	-0.1266	0.2759	-0.2060	0.2292	-0.1750	0.2427	-0.1628	0.2541	-0.2534	0.2253	-0.2364	0.2279
bias	-0.3266	0.0759	-0.4060	0.0292	-0.3750	0.0427	-0.3628	0.0541	-0.4534	0.0253	-0.4364	0.0279
mse	0.1098	0.0094	0.1785	0.0094	0.1469	0.0068	0.1333	0.0047	0.2213	0.0057	0.1981	0.0048
var	0.0032	0.0037	0.0137	0.0085	0.0062	0.0050	0.0017	0.0018	0.0157	0.0051	0.0077	0.0040
	$s = 12$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	-0.1248	0.2528	-0.2304	0.2147	-0.1914	0.2223	-0.1621	0.2221	-0.3163	0.1998	-0.2884	0.1975
bias	-0.3248	0.0528	-0.4304	0.0147	-0.3914	0.0223	-0.3621	0.0221	-0.5163	-0.0002	-0.4884	-0.0025
mse	0.1090	0.0070	0.2052	0.0091	0.1612	0.0061	0.1328	0.0024	0.2881	0.0045	0.2523	0.0035
var	0.0035	0.0042	0.0199	0.0089	0.0080	0.0056	0.0017	0.0019	0.0215	0.0045	0.0138	0.0035

Tabela A.5: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$, quando $q=1$, $p=0=P=Q$, $d=0.2$, $D=0.2$, $\theta_1=0.5$, $s \in \{4,6,12\}$, $\kappa=0.85$ e $N=1000$.

	$\kappa = 0.85$											
	$s = 4$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$
mean	-0.1392	0.2934	-0.2015	0.2579	-0.1750	0.2711	-0.1619	0.2850	-0.2402	0.2489	-0.2227	0.2528
bias	-0.3392	0.0934	-0.4015	0.0579	-0.3750	0.0711	-0.3619	0.0850	-0.4402	0.0489	-0.4227	0.0528
mse	0.1163	0.0104	0.1686	0.0081	0.1434	0.0077	0.1317	0.0082	0.2010	0.0063	0.1826	0.0051
var	0.0013	0.0016	0.0074	0.0047	0.0028	0.0027	0.0008	0.0010	0.0072	0.0039	0.0039	0.0023
	$s = 6$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$
mean	-0.1217	0.2677	-0.1979	0.2283	-0.1609	0.2430	-0.1449	0.2545	-0.2468	0.2206	-0.2258	0.2233
bias	-0.3217	0.0677	-0.3979	0.0283	-0.3609	0.0430	-0.3449	0.0545	-0.4468	0.0206	-0.4258	0.0233
mse	0.1050	0.0063	0.1680	0.0056	0.1332	0.0044	0.1198	0.0040	0.2113	0.0037	0.1867	0.0030
var	0.0015	0.0017	0.0097	0.0048	0.0029	0.0026	0.0008	0.0010	0.0117	0.0033	0.0054	0.0024
	$s = 12$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$	$d=0.2$	$D=0.2$
mean	-0.1198	0.2458	-0.2356	0.2101	-0.1760	0.2225	-0.1424	0.2279	-0.3374	0.2023	-0.2950	0.2009
bias	-0.3198	0.0458	-0.4356	0.0101	-0.3760	0.0225	-0.3424	0.0279	-0.5374	0.0023	-0.4950	0.0009
mse	0.1040	0.0040	0.2042	0.0047	0.1454	0.0032	0.1182	0.0017	0.3067	0.0025	0.2569	0.0017
var	0.0017	0.0019	0.0145	0.0046	0.0041	0.0027	0.0009	0.0009	0.0178	0.0025	0.0119	0.0017

Tabela A.6: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$, quando $q = 1$, $p = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\theta_1 = 0.5$, $s \in \{4, 6, 12\}$, $\kappa = 0.85$ e $N = 2000$.

	$\kappa = 0.85$											
	$s = 4$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	-0.1315	0.2886	-0.1841	0.2556	-0.1596	0.2676	-0.1454	0.2829	-0.2257	0.2415	-0.2096	0.2460
bias	-0.3315	0.0886	-0.3841	0.0556	-0.3596	0.0676	-0.3454	0.0829	-0.4257	0.0415	-0.4096	0.0460
mse	0.1106	0.0087	0.1516	0.0058	0.1308	0.0060	0.1197	0.0074	0.1858	0.0037	0.1701	0.0034
var	0.0007	0.0009	0.0040	0.0027	0.0015	0.0014	0.0004	0.0005	0.0045	0.0020	0.0023	0.0013
	$s = 6$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	-0.1142	0.2596	-0.1802	0.2269	-0.1495	0.2402	-0.1279	0.2530	-0.2362	0.2115	-0.2063	0.2180
bias	-0.3142	0.0596	-0.3802	0.0269	-0.3495	0.0402	-0.3279	0.0530	-0.4362	0.0115	-0.4063	0.0180
mse	0.0994	0.0044	0.1495	0.0031	0.1240	0.0029	0.1080	0.0033	0.1987	0.0017	0.1679	0.0014
var	0.0007	0.0009	0.0050	0.0024	0.0018	0.0013	0.0005	0.0005	0.0084	0.0016	0.0028	0.0011
	$s = 12$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	-0.1096	0.2406	-0.2215	0.2093	-0.1585	0.2203	-0.1248	0.2303	-0.3668	0.2031	-0.3075	0.1989
bias	-0.3096	0.0406	-0.4215	0.0093	-0.3585	0.0203	-0.3248	0.0303	-0.5668	0.0031	-0.5075	-0.0011
mse	0.0966	0.0026	0.1875	0.0026	0.1313	0.0018	0.1060	0.0014	0.3346	0.0012	0.2668	0.0008
var	0.0008	0.0009	0.0098	0.0025	0.0028	0.0014	0.0005	0.0005	0.0134	0.0012	0.0092	0.0008

Estimação Paramétrica

Tabela A.7: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$, quando $q = 1$, $p = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s \in \{4, 6, 12\}$, $\theta_1 = -0.5$ e $N = 500$.

	$s = 4$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\theta_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\theta_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\theta_1 = -0.5$
mean	0.2509	0.1907	-0.4837	0.2126	0.1888	-0.4952	0.1972	0.1733	-0.4944
bias	0.0509	-0.0093	0.0163	0.0126	-0.0112	0.0048	-0.0028	-0.0267	0.0056
mse	0.0065	0.0022	0.0035	0.0026	0.0017	0.0025	0.0022	0.0022	0.0024
var	0.0039	0.0021	0.0032	0.0024	0.0016	0.0025	0.0022	0.0015	0.0023
	$s = 6$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\theta_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\theta_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\theta_1 = -0.5$
mean	0.2468	0.1890	-0.4865	0.2083	0.1912	-0.4996	0.1949	0.1599	-0.4935
bias	0.0468	-0.0110	0.0135	0.0083	-0.0088	0.0004	-0.0051	-0.0401	0.0065
mse	0.0059	0.0022	0.0034	0.0021	0.0016	0.0025	0.0023	0.0031	0.0022
var	0.0037	0.0021	0.0032	0.0021	0.0015	0.0025	0.0023	0.0015	0.0022
	$s = 12$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\theta_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\theta_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\theta_1 = -0.5$
mean	0.2468	0.1642	-0.4860	0.2064	0.1883	-0.5026	0.1898	0.1253	-0.4989
bias	0.0468	-0.0358	0.0140	0.0064	-0.0117	-0.0026	-0.0102	-0.0747	0.0011
mse	0.0062	0.0038	0.0034	0.0021	0.0016	0.0024	0.0022	0.0071	0.0024
var	0.0040	0.0025	0.0032	0.0021	0.0014	0.0024	0.0021	0.0015	0.0024

Tabela A.8: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$, quando $q = 1$, $p = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s \in \{4, 6, 12\}$, $\theta_1 = -0.5$ e $N = 1000$.

	FT			**FTmod**			**FTS**		
$s = 4$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\theta_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\theta_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\theta_1 = -0.5$
mean	0.2319	0.1966	-0.4903	0.2074	0.1937	-0.4981	0.1998	0.1862	-0.4968
bias	0.0319	-0.0034	0.0097	0.0074	-0.0063	0.0019	-0.0002	-0.0138	0.0032
mse	0.0026	0.0010	0.0015	0.0012	0.0008	0.0012	0.0012	0.0009	0.0012
var	0.0016	0.0010	0.0014	0.0012	0.0008	0.0012	0.0012	0.0007	0.0012
$s = 6$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\theta_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\theta_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\theta_1 = -0.5$
mean	0.2319	0.1969	-0.4907	0.2066	0.1951	-0.4983	0.1969	0.1804	-0.4989
bias	0.0319	-0.0031	0.0093	0.0066	-0.0049	0.0017	-0.0031	-0.0196	0.0011
mse	0.0026	0.0009	0.0014	0.0011	0.0007	0.0011	0.0010	0.0011	0.0010
var	0.0016	0.0009	0.0013	0.0010	0.0007	0.0011	0.0010	0.0007	0.0010
$s = 12$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\theta_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\theta_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\theta_1 = -0.5$
mean	0.2318	0.1870	-0.4903	0.2049	0.1970	-0.5007	0.1974	0.1655	-0.4965
bias	0.0318	-0.0130	0.0097	0.0049	-0.0030	-0.0007	-0.0026	-0.0345	0.0035
mse	0.0027	0.0011	0.0016	0.0011	0.0007	0.0011	0.0010	0.0020	0.0011
var	0.0017	0.0010	0.0015	0.0010	0.0007	0.0011	0.0010	0.0008	0.0011

Tabela A.9: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$, quando $q = 1$, $p = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s \in \{4, 6, 12\}$, $\theta_1 = -0.5$ e $N = 2000$.

	FT			**FTmod**			**FTS**		
$s = 4$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\theta_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\theta_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\theta_1 = -0.5$
mean	0.2200	0.2006	-0.4926	0.2038	0.1975	-0.4993	0.2015	0.1930	-0.4984
bias	0.0200	0.0006	0.0074	0.0038	-0.0025	0.0007	0.0015	-0.0070	0.0016
mse	0.0011	0.0004	0.0007	0.0006	0.0004	0.0006	0.0006	0.0004	0.0006
var	0.0007	0.0004	0.0006	0.0006	0.0004	0.0006	0.0006	0.0004	0.0006
$s = 6$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\theta_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\theta_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\theta_1 = -0.5$
mean	0.2209	0.2007	-0.4934	0.2036	0.1977	-0.4997	0.1992	0.1918	-0.4980
bias	0.0209	0.0007	0.0066	0.0036	-0.0023	0.0003	-0.0008	-0.0082	0.0020
mse	0.0011	0.0004	0.0007	0.0005	0.0003	0.0006	0.0005	0.0004	0.0005
var	0.0007	0.0004	0.0006	0.0005	0.0003	0.0006	0.0005	0.0003	0.0005
$s = 12$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\theta_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\theta_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\theta_1 = -0.5$
mean	0.2191	0.1962	-0.4933	0.2039	0.1991	-0.4991	0.1982	0.1824	-0.4992
bias	0.0191	-0.0038	0.0067	0.0039	-0.0009	0.0009	-0.0018	-0.0176	0.0008
mse	0.0010	0.0005	0.0007	0.0005	0.0003	0.0006	0.0005	0.0007	0.0005
var	0.0007	0.0005	0.0007	0.0005	0.0003	0.0006	0.0005	0.0004	0.0005

Tabela A.10: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$, quando $P=1$, $p=q=0=Q$, $d=0.2$, $D=0.2$, $s \in \{4,6,12\}$, $\Phi_1=0.5$ e $N=500$.

	$s=4$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=0.5$
mean	0.2638	0.2181	0.4737	0.2162	0.1557	0.5254	0.1959	0.0861	0.5818
bias	0.0638	0.0181	-0.0263	0.0162	-0.0443	0.0254	-0.0041	-0.1139	0.0818
mse	0.0064	0.0170	0.0185	0.0018	0.0110	0.0108	0.0016	0.0204	0.0168
var	0.0023	0.0167	0.0178	0.0016	0.0090	0.0102	0.0016	0.0075	0.0101
	$s=6$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=0.5$
mean	0.2614	0.1693	0.5112	0.2150	0.1662	0.5108	0.1920	0.0633	0.5952
bias	0.0614	-0.0307	0.0112	0.0150	-0.0338	0.0108	-0.0080	-0.1367	0.0952
mse	0.0065	0.0186	0.0194	0.0019	0.0098	0.0104	0.0018	0.0225	0.0146
var	0.0027	0.0177	0.0193	0.0017	0.0087	0.0103	0.0017	0.0038	0.0056
	$s=12$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=0.5$
mean	0.2433	0.0412	0.6481	0.2160	0.1422	0.5320	0.1920	0.0231	0.6205
bias	0.0433	-0.1588	0.1481	0.0160	-0.0578	0.0320	-0.0080	-0.1769	0.1205
mse	0.0042	0.0297	0.0285	0.0020	0.0114	0.0108	0.0016	0.0322	0.0169
var	0.0024	0.0044	0.0066	0.0018	0.0081	0.0098	0.0016	0.0010	0.0024

Tabela A.11: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$, quando $P=1$, $p=q=0=Q$, $d=0.2$, $D=0.2$, $s \in \{4,6,12\}$, $\Phi_1=0.5$ e $N=1000$.

	$s=4$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=0.5$
mean	0.2367	0.1942	0.4973	0.2103	0.1670	0.5238	0.2003	0.1113	0.5708
bias	0.0367	-0.0058	-0.0027	0.0103	-0.0330	0.0238	0.0003	-0.0887	0.0708
mse	0.0022	0.0104	0.0107	0.0009	0.0068	0.0072	0.0008	0.0132	0.0111
var	0.0009	0.0103	0.0107	0.0008	0.0057	0.0066	0.0008	0.0053	0.0061
	$s=6$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=0.5$
mean	0.2385	0.1800	0.5132	0.2086	0.1722	0.5188	0.2009	0.0896	0.5868
bias	0.0385	-0.0200	0.0132	0.0086	-0.0278	0.0188	0.0009	-0.1104	0.0868
mse	0.0025	0.0108	0.0110	0.0008	0.0066	0.0069	0.0008	0.0166	0.0123
var	0.0011	0.0104	0.0108	0.0008	0.0059	0.0065	0.0008	0.0044	0.0048
	$s=12$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=0.5$
mean	0.2390	0.1149	0.5747	0.2094	0.1623	0.5260	0.1981	0.0373	0.6223
bias	0.0390	-0.0851	0.0747	0.0094	-0.0377	0.0260	-0.0019	-0.1627	0.1223
mse	0.0028	0.0175	0.0161	0.0008	0.0073	0.0077	0.0007	0.0280	0.0171
var	0.0012	0.0102	0.0106	0.0007	0.0059	0.0070	0.0007	0.0015	0.0022

Tabela A.12: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q)\times(P,D,Q)_s$, quando $P=1$, $p=q=0=Q$, $d=0.2$, $D=0.2$, $s\in\{4,6,12\}$, $\Phi_1=0.5$ e $N=2000$.

	$s=4$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=0.5$
mean	0.2193	0.1926	0.5031	0.2054	0.1782	0.5168	0.2020	0.1389	0.5529
bias	0.0193	-0.0074	0.0031	0.0054	-0.0218	0.0168	0.0020	-0.0611	0.0529
mse	0.0008	0.0059	0.0061	0.0004	0.0042	0.0045	0.0004	0.0077	0.0071
var	0.0004	0.0059	0.0061	0.0004	0.0038	0.0042	0.0004	0.0039	0.0043

	$s=6$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=0.5$
mean	0.2207	0.1807	0.5155	0.2049	0.1790	0.5166	0.2021	0.1191	0.5700
bias	0.0207	-0.0193	0.0155	0.0049	-0.0210	0.0166	0.0021	-0.0809	0.0700
mse	0.0009	0.0067	0.0068	0.0004	0.0035	0.0039	0.0003	0.0103	0.0090
var	0.0005	0.0064	0.0066	0.0003	0.0031	0.0036	0.0003	0.0038	0.0041

	$s=12$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=0.5$
mean	0.2244	0.1372	0.5591	0.2057	0.1788	0.5164	0.2019	0.0699	0.6080
bias	0.0244	-0.0628	0.0591	0.0057	-0.0212	0.0164	0.0019	-0.1301	0.1080
mse	0.0011	0.0103	0.0098	0.0004	0.0037	0.0040	0.0004	0.0196	0.0143
var	0.0005	0.0064	0.0063	0.0004	0.0032	0.0038	0.0003	0.0027	0.0027

Tabela A.13: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q)\times(P,D,Q)_s$, quando $P=1$, $p=q=0=Q$, $d=0.2$, $D=0.2$, $s\in\{4,6,12\}$, $\Phi_1=-0.5$ e $N=500$.

	$s=4$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=-0.5$
mean	0.2389	0.1895	-0.4875	0.2103	0.1851	-0.4879	0.1932	0.1555	-0.4625
bias	0.0389	-0.0105	0.0125	0.0103	-0.0149	0.0121	-0.0068	-0.0445	0.0375
mse	0.0039	0.0034	0.0030	0.0017	0.0024	0.0027	0.0015	0.0043	0.0037
var	0.0024	0.0033	0.0029	0.0016	0.0021	0.0025	0.0014	0.0023	0.0023

	$s=6$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=-0.5$
mean	0.2377	0.1768	-0.4741	0.2088	0.1830	-0.4822	0.1923	0.1409	-0.4499
bias	0.0377	-0.0232	0.0259	0.0088	-0.0170	0.0178	-0.0077	-0.0591	0.0501
mse	0.0039	0.0041	0.0034	0.0016	0.0025	0.0026	0.0015	0.0058	0.0050
var	0.0025	0.0035	0.0028	0.0015	0.0022	0.0023	0.0015	0.0023	0.0025

	$s=12$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=-0.5$
mean	0.2363	0.1359	-0.4390	0.2065	0.1828	-0.4759	0.1886	0.0910	-0.4105
bias	0.0363	-0.0641	0.0610	0.0065	-0.0172	0.0241	-0.0114	-0.1090	0.0895
mse	0.0041	0.0076	0.0067	0.0014	0.0022	0.0028	0.0016	0.0138	0.0106
var	0.0028	0.0035	0.0030	0.0014	0.0019	0.0022	0.0015	0.0020	0.0026

Tabela A.14: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q)\times(P,D,Q)_s$, quando $P=1$, $p=q=0=Q$, $d=0.2$, $D=0.2$, $s\in\{4,6,12\}$, $\Phi_1=-0.5$ e $N=1000$.

	$s=4$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=-0.5$
mean	0.2245	0.1982	-0.4949	0.2063	0.1925	-0.4941	0.1980	0.1796	-0.4811
bias	0.0245	-0.0018	0.0051	0.0063	-0.0075	0.0059	-0.0020	-0.0204	0.0189
mse	0.0017	0.0014	0.0013	0.0008	0.0011	0.0011	0.0007	0.0015	0.0015
var	0.0011	0.0014	0.0013	0.0007	0.0011	0.0011	0.0007	0.0011	0.0011
	$s=6$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=-0.5$
mean	0.2251	0.1792	-0.4785	0.2066	0.1934	-0.4938	0.1954	0.1711	-0.4731
bias	0.0251	-0.0208	0.0215	0.0066	-0.0066	0.0062	-0.0046	-0.0289	0.0269
mse	0.0018	0.0023	0.0018	0.0008	0.0010	0.0011	0.0007	0.0020	0.0019
var	0.0012	0.0018	0.0014	0.0007	0.0010	0.0010	0.0007	0.0011	0.0012
	$s=12$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=-0.5$
mean	0.2263	0.1765	-0.4747	0.2049	0.1927	-0.4908	0.1963	0.1453	-0.4532
bias	0.0263	-0.0235	0.0253	0.0049	-0.0073	0.0092	-0.0037	-0.0547	0.0468
mse	0.0018	0.0023	0.0019	0.0007	0.0010	0.0011	0.0007	0.0041	0.0035
var	0.0011	0.0017	0.0012	0.0007	0.0009	0.0011	0.0007	0.0011	0.0013

Tabela A.15: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q)\times(P,D,Q)_s$, quando $P=1$, $p=q=0=Q$, $d=0.2$, $D=0.2$, $s\in\{4,6,12\}$, $\Phi_1=-0.5$ e $N=2000$.

	$s=4$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=-0.5$
mean	0.2176	0.2012	-0.4998	0.2028	0.1958	-0.4959	0.1997	0.1902	-0.4903
bias	0.0176	0.0012	0.0002	0.0028	-0.0042	0.0041	-0.0003	-0.0098	0.0097
mse	0.0008	0.0006	0.0006	0.0003	0.0005	0.0005	0.0003	0.0006	0.0007
var	0.0005	0.0006	0.0006	0.0003	0.0005	0.0005	0.0003	0.0005	0.0006
	$s=6$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=-0.5$
mean	0.2150	0.1996	-0.4968	0.2024	0.1968	-0.4962	0.1982	0.1860	-0.4870
bias	0.0150	-0.0004	0.0032	0.0024	-0.0032	0.0038	-0.0018	-0.0140	0.0130
mse	0.0007	0.0007	0.0006	0.0003	0.0005	0.0006	0.0003	0.0007	0.0007
var	0.0004	0.0007	0.0006	0.0003	0.0004	0.0005	0.0003	0.0005	0.0005
	$s=12$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Phi_1=-0.5$
mean	0.2158	0.1935	-0.4912	0.2030	0.1972	-0.4941	0.1977	0.1738	-0.4766
bias	0.0158	-0.0065	0.0088	0.0030	-0.0028	0.0059	-0.0023	-0.0262	0.0234
mse	0.0008	0.0007	0.0007	0.0003	0.0005	0.0006	0.0003	0.0012	0.0011
var	0.0005	0.0007	0.0006	0.0003	0.0005	0.0006	0.0003	0.0005	0.0006

Tabela A.16: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$, quando $Q = 1$, $p = q = 0 = P$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s \in \{4, 6, 12\}$, $\Theta_1 = 0.5$ e $N = 500$.

	$s=4$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Theta_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Theta_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Theta_1=0.5$
mean	0.2398	0.1682	0.4483	0.2098	0.1564	0.4485	0.1893	0.0725	0.3640
bias	0.0398	-0.0318	-0.0517	0.0098	-0.0436	-0.0515	-0.0107	-0.1275	-0.1360
mse	0.0039	0.0124	0.0138	0.0020	0.0106	0.0146	0.0015	0.0192	0.0226
var	0.0023	0.0114	0.0111	0.0019	0.0087	0.0120	0.0014	0.0029	0.0041
	$s=6$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Theta_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Theta_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Theta_1=0.5$
mean	0.2374	0.1184	0.3970	0.2045	0.1573	0.4465	0.1845	0.0597	0.3501
bias	0.0374	-0.0816	-0.1030	0.0045	-0.0427	-0.0535	-0.0155	-0.1403	-0.1499
mse	0.0041	0.0136	0.0179	0.0020	0.0100	0.0143	0.0016	0.0219	0.0259
var	0.0027	0.0070	0.0073	0.0020	0.0082	0.0115	0.0014	0.0022	0.0034
	$s=12$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Theta_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Theta_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Theta_1=0.5$
mean	0.2376	0.0508	0.3162	0.2043	0.1451	0.4304	0.1858	0.0258	0.3093
bias	0.0376	-0.1492	-0.1838	0.0043	-0.0549	-0.0696	-0.0142	-0.1742	-0.1907
mse	0.0042	0.0239	0.0366	0.0016	0.0096	0.0134	0.0016	0.0309	0.0379
var	0.0027	0.0017	0.0029	0.0016	0.0066	0.0086	0.0014	0.0005	0.0016

Tabela A.17: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$, quando $Q = 1$, $p = q = 0 = P$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s \in \{4, 6, 12\}$, $\Theta_1 = 0.5$ e $N = 1000$.

	$s=4$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Theta_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Theta_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Theta_1=0.5$
mean	0.2214	0.1872	0.4785	0.2056	0.1750	0.4731	0.1951	0.1123	0.4061
bias	0.0214	-0.0128	-0.0215	0.0056	-0.0250	-0.0269	-0.0049	-0.0877	-0.0939
mse	0.0014	0.0105	0.0106	0.0009	0.0067	0.0079	0.0007	0.0113	0.0129
var	0.0010	0.0104	0.0101	0.0008	0.0060	0.0072	0.0007	0.0037	0.0041
	$s=6$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Theta_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Theta_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Theta_1=0.5$
mean	0.2232	0.1567	0.4450	0.2040	0.1733	0.4670	0.1942	0.0909	0.3841
bias	0.0232	-0.0433	-0.0550	0.0040	-0.0267	-0.0330	-0.0058	-0.1091	-0.1159
mse	0.0016	0.0093	0.0106	0.0009	0.0062	0.0088	0.0007	0.0146	0.0169
var	0.0010	0.0075	0.0076	0.0009	0.0055	0.0078	0.0007	0.0027	0.0035
	$s=12$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Theta_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Theta_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\Theta_1=0.5$
mean	0.2252	0.0898	0.3726	0.2025	0.1644	0.4568	0.1922	0.0418	0.3325
bias	0.0252	-0.1102	-0.1274	0.0025	-0.0356	-0.0432	-0.0078	-0.1582	-0.1675
mse	0.0019	0.0158	0.0199	0.0008	0.0063	0.0079	0.0007	0.0260	0.0296
var	0.0013	0.0037	0.0037	0.0008	0.0051	0.0061	0.0006	0.0009	0.0015

Tabela A.18: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$, quando $Q = 1$, $p = q = 0 = P$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s \in \{4, 6, 12\}$, $\Theta_1 = 0.5$ e $N = 2000$.

	$s = 4$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\Theta_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\Theta_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\Theta_1 = 0.5$
mean	0.2128	0.2070	0.5018	0.2022	0.1853	0.4840	0.1990	0.1513	0.4459
bias	0.0128	0.0070	0.0018	0.0022	-0.0147	-0.0160	-0.0010	-0.0487	-0.0541
mse	0.0006	0.0064	0.0063	0.0004	0.0031	0.0039	0.0004	0.0050	0.0061
var	0.0005	0.0063	0.0063	0.0004	0.0028	0.0037	0.0004	0.0026	0.0031
	$s = 6$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\Theta_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\Theta_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\Theta_1 = 0.5$
mean	0.2135	0.1864	0.4814	0.2025	0.1841	0.4802	0.1987	0.1369	0.4313
bias	0.0135	-0.0136	-0.0186	0.0025	-0.0159	-0.0198	-0.0013	-0.0631	-0.0687
mse	0.0007	0.0055	0.0057	0.0004	0.0031	0.0045	0.0003	0.0064	0.0075
var	0.0005	0.0053	0.0053	0.0004	0.0029	0.0041	0.0003	0.0024	0.0027
	$s = 12$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\Theta_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\Theta_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\Theta_1 = 0.5$
mean	0.2135	0.1411	0.4313	0.2021	0.1812	0.4759	0.1971	0.0855	0.3770
bias	0.0135	-0.0589	-0.0687	0.0021	-0.0188	-0.0241	-0.0029	-0.1145	-0.1230
mse	0.0007	0.0071	0.0084	0.0004	0.0029	0.0041	0.0003	0.0147	0.0171
var	0.0005	0.0037	0.0037	0.0004	0.0025	0.0035	0.0003	0.0016	0.0020

Tabela A.19: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$, quando $Q = 1$, $p = q = 0 = P$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s \in \{4, 6, 12\}$, $\Theta_1 = -0.5$ e $N = 500$.

	$s = 4$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\Theta_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\Theta_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\Theta_1 = -0.5$
mean	0.2483	0.1891	-0.4959	0.2105	0.1855	-0.4978	0.1980	0.1578	-0.4925
bias	0.0483	-0.0109	0.0041	0.0105	-0.0145	0.0022	-0.0020	-0.0422	0.0075
mse	0.0046	0.0033	0.0025	0.0017	0.0023	0.0022	0.0016	0.0042	0.0019
var	0.0023	0.0032	0.0025	0.0016	0.0020	0.0022	0.0016	0.0024	0.0019
	$s = 6$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\Theta_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\Theta_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\Theta_1 = -0.5$
mean	0.2500	0.1831	-0.4953	0.2112	0.1888	-0.4908	0.1967	0.1459	-0.4862
bias	0.0500	-0.0169	0.0047	0.0112	-0.0112	0.0092	-0.0033	-0.0541	0.0138
mse	0.0048	0.0032	0.0025	0.0016	0.0020	0.0022	0.0017	0.0050	0.0019
var	0.0023	0.0030	0.0025	0.0015	0.0019	0.0022	0.0016	0.0021	0.0017
	$s = 12$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\Theta_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\Theta_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\Theta_1 = -0.5$
mean	0.2497	0.1446	-0.5004	0.2105	0.1836	-0.4825	0.1948	0.1002	-0.4791
bias	0.0497	-0.0554	-0.0004	0.0105	-0.0164	0.0175	-0.0052	-0.0998	0.0209
mse	0.0052	0.0066	0.0024	0.0017	0.0023	0.0025	0.0016	0.0119	0.0017
var	0.0027	0.0035	0.0024	0.0016	0.0020	0.0022	0.0016	0.0020	0.0013

Tabela A.20: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$, quando $Q = 1$, $p = q = 0 = P$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s \in \{4, 6, 12\}$, $\Theta_1 = -0.5$ e $N = 1000$.

	$s = 4$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\Theta_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\Theta_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\Theta_1 = -0.5$
mean	0.2314	0.1994	-0.4913	0.2065	0.1932	-0.4981	0.2008	0.1801	-0.4944
bias	0.0314	-0.0006	0.0087	0.0065	-0.0068	0.0019	0.0008	-0.0199	0.0056
mse	0.0020	0.0014	0.0013	0.0007	0.0011	0.0011	0.0007	0.0014	0.0011
var	0.0010	0.0014	0.0013	0.0007	0.0010	0.0011	0.0007	0.0010	0.0011
	$s = 6$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\Theta_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\Theta_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\Theta_1 = -0.5$
mean	0.2330	0.1956	-0.4962	0.2083	0.1939	-0.4938	0.1993	0.1738	-0.4924
bias	0.0330	-0.0044	0.0038	0.0083	-0.0061	0.0062	-0.0007	-0.0262	0.0076
mse	0.0021	0.0014	0.0013	0.0008	0.0010	0.0011	0.0007	0.0017	0.0010
var	0.0010	0.0014	0.0012	0.0007	0.0009	0.0010	0.0007	0.0010	0.0010
	$s = 12$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\Theta_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\Theta_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\Theta_1 = -0.5$
mean	0.2292	0.1810	-0.4988	0.2049	0.1970	-0.5007	0.1995	0.1503	-0.4857
bias	0.0292	-0.0190	0.0012	0.0049	-0.0030	-0.0007	-0.0005	-0.0497	0.0143
mse	0.0020	0.0021	0.0012	0.0011	0.0007	0.0011	0.0008	0.0036	0.0010
var	0.0011	0.0017	0.0012	0.0010	0.0007	0.0011	0.0008	0.0011	0.0008

Tabela A.21: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$, quando $Q = 1$, $p = q = 0 = P$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s \in \{4, 6, 12\}$, $\Theta_1 = -0.5$ e $N = 2000$.

	$s = 4$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\Theta_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\Theta_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\Theta_1 = -0.5$
mean	0.2198	0.2013	-0.4959	0.2051	0.1963	-0.4990	0.2013	0.1920	-0.4954
bias	0.0198	0.0013	0.0041	0.0051	-0.0037	0.0010	0.0013	-0.0080	0.0046
mse	0.0009	0.0006	0.0006	0.0004	0.0004	0.0005	0.0004	0.0006	0.0005
var	0.0005	0.0006	0.0006	0.0004	0.0004	0.0005	0.0004	0.0005	0.0005
	$s = 6$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\Theta_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\Theta_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\Theta_1 = -0.5$
mean	0.2207	0.2020	-0.4945	0.2042	0.1972	-0.4971	0.2013	0.1866	-0.4960
bias	0.0207	0.0020	0.0055	0.0042	-0.0028	0.0029	0.0013	-0.0134	0.0040
mse	0.0009	0.0006	0.0007	0.0004	0.0005	0.0005	0.0004	0.0007	0.0005
var	0.0005	0.0006	0.0007	0.0004	0.0005	0.0005	0.0004	0.0005	0.0005
	$s = 12$								
	FT			**FTmod**			**FTS**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\Theta_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\Theta_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\Theta_1 = -0.5$
mean	0.2198	0.1942	-0.4974	0.2026	0.1988	-0.4938	0.2003	0.1769	-0.4911
bias	0.0198	-0.0058	0.0026	0.0026	-0.0012	0.0062	0.0003	-0.0231	0.0089
mse	0.0008	0.0007	0.0006	0.0003	0.0005	0.0006	0.0003	0.0011	0.0006
var	0.0005	0.0007	0.0006	0.0003	0.0005	0.0005	0.0003	0.0005	0.0005

Apêndice B

Resultados para Processos com Inovações α-estáveis

Neste apêndice apresentamos os resultados da estimação semiparamétrica e paramétrica dos parâmetros para processos SARFIMA$(p,d,q)\times(P,D,Q)_s$ que possuem inovações *alpha*-estáveis com $\alpha \in \{1.25; 1.50; 1.75\}$.

Estimação Semiparamétrica

Tabela B.1: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p = q = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s \in \{4, 6, 12\}$, $\alpha = 1.25$, $\kappa = 0.888$ (κ máximo) e $N = 500$.

	$\kappa = 0.70$											
	$s = 4$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2508	0.2318	0.2285	0.1987	0.2333	0.2088	0.1935	0.2259	0.1987	0.2210	0.1994	0.2223
bias	0.0508	0.0318	0.0285	-0.0013	0.0333	0.0088	-0.0065	0.0259	-0.0013	0.0210	-0.0006	0.0223
mse	0.0058	0.0045	0.0055	0.0048	0.0041	0.0030	0.0019	0.0052	0.0024	0.0056	0.0020	0.0051
var	0.0032	0.0034	0.0047	0.0048	0.0030	0.0030	0.0019	0.0046	0.0024	0.0052	0.0020	0.0046
	$s = 6$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2468	0.2565	0.2214	0.2265	0.2284	0.2379	0.1927	0.2366	0.1977	0.2343	0.1979	0.2360
bias	0.0468	0.0565	0.0214	0.0265	0.0284	0.0379	-0.0073	0.0366	-0.0023	0.0343	-0.0021	0.0360
mse	0.0053	0.0135	0.0054	0.0106	0.0040	0.0096	0.0022	0.0111	0.0025	0.0121	0.0022	0.0113
var	0.0031	0.0103	0.0050	0.0099	0.0031	0.0082	0.0021	0.0098	0.0025	0.0109	0.0022	0.0101
	$s = 12$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2446	0.2798	0.2189	0.2365	0.2247	0.2552	0.1893	0.2525	0.1974	0.2560	0.1980	0.2575
bias	0.0446	0.0798	0.0189	0.0365	0.0247	0.0552	-0.0107	0.0525	-0.0026	0.0560	-0.0020	0.0575
mse	0.0048	0.0228	0.0047	0.0166	0.0032	0.0150	0.0019	0.0169	0.0022	0.0189	0.0016	0.0183
var	0.0028	0.0164	0.0043	0.0153	0.0026	0.0119	0.0018	0.0142	0.0022	0.0158	0.0016	0.0150

Tabela B.2: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p = q = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s \in \{4, 6, 12\}$, $\alpha = 1.25$, $\kappa = 0.899$ (κ máximo) e $N = 1000$.

	$\kappa = 0.70$											
	$s = 4$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2305	0.2194	0.2163	0.2014	0.2204	0.2090	0.1982	0.2173	0.2008	0.2128	0.2015	0.2154
bias	0.0305	0.0194	0.0163	0.0014	0.0204	0.0090	-0.0018	0.0173	0.0008	0.0128	0.0015	0.0154
mse	0.0026	0.0023	0.0027	0.0029	0.0022	0.0020	0.0008	0.0034	0.0013	0.0033	0.0010	0.0031
var	0.0016	0.0019	0.0025	0.0029	0.0018	0.0019	0.0008	0.0031	0.0013	0.0031	0.0010	0.0029
	$s = 6$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2304	0.2322	0.2174	0.2126	0.2202	0.2203	0.1991	0.2240	0.2029	0.2200	0.2020	0.2219
bias	0.0304	0.0322	0.0174	0.0126	0.0202	0.0203	-0.0009	0.0240	0.0029	0.0200	0.0020	0.0219
mse	0.0030	0.0060	0.0034	0.0051	0.0026	0.0045	0.0015	0.0060	0.0025	0.0055	0.0020	0.0051
var	0.0021	0.0050	0.0031	0.0050	0.0022	0.0041	0.0015	0.0054	0.0025	0.0051	0.0020	0.0047
	$s = 12$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2267	0.2466	0.2146	0.2190	0.2186	0.2328	0.1982	0.2328	0.2006	0.2314	0.2014	0.2322
bias	0.0267	0.0466	0.0146	0.0190	0.0186	0.0328	-0.0018	0.0328	0.0006	0.0314	0.0014	0.0322
mse	0.0022	0.0088	0.0023	0.0059	0.0016	0.0060	0.0008	0.0076	0.0010	0.0074	0.0008	0.0071
var	0.0015	0.0066	0.0021	0.0055	0.0013	0.0050	0.0008	0.0066	0.0010	0.0065	0.0008	0.0060

Tabela B.3: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p = q = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s \in \{4,6,12\}$, $\alpha = 1.25$, $\kappa = 0.908$ (κ máximo) e $N = 2000$.

	$\kappa = 0.70$											
	$s = 4$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2171	0.2120	0.2102	0.2045	0.2135	0.2075	0.2009	0.2124	0.2018	0.2105	0.2021	0.2105
bias	0.0171	0.0120	0.0102	0.0045	0.0135	0.0075	0.0009	0.0124	0.0018	0.0105	0.0021	0.0105
mse	0.0010	0.0011	0.0012	0.0012	0.0010	0.0010	0.0003	0.0016	0.0005	0.0014	0.0004	0.0012
var	0.0008	0.0009	0.0011	0.0011	0.0009	0.0010	0.0003	0.0014	0.0005	0.0013	0.0004	0.0011
	$s = 6$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2171	0.2166	0.2123	0.2064	0.2145	0.2104	0.2015	0.2127	0.2033	0.2102	0.2032	0.2122
bias	0.0171	0.0166	0.0123	0.0064	0.0145	0.0104	0.0015	0.0127	0.0033	0.0102	0.0032	0.0122
mse	0.0013	0.0027	0.0015	0.0021	0.0013	0.0019	0.0006	0.0027	0.0008	0.0026	0.0007	0.0022
var	0.0010	0.0024	0.0013	0.0020	0.0011	0.0018	0.0006	0.0026	0.0008	0.0025	0.0007	0.0021
	$s = 12$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2166	0.2311	0.2101	0.2169	0.2124	0.2233	0.1997	0.2265	0.2009	0.2233	0.2012	0.2250
bias	0.0166	0.0311	0.0101	0.0169	0.0124	0.0233	-0.0003	0.0265	0.0009	0.0233	0.0012	0.0250
mse	0.0011	0.0056	0.0013	0.0042	0.0011	0.0042	0.0005	0.0064	0.0008	0.0055	0.0007	0.0055
var	0.0008	0.0047	0.0012	0.0039	0.0010	0.0037	0.0005	0.0057	0.0008	0.0049	0.0007	0.0049

Tabela B.4: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p = q = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s \in \{4, 6, 12\}$, $\alpha = 1.50$, $\kappa = 0.85$ e $N = 500$.

	$\kappa = 0.70$											
	$s = 4$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2441	0.2256	0.2260	0.2027	0.2299	0.2116	0.1954	0.2103	0.1994	0.2096	0.2002	0.2109
bias	0.0441	0.0256	0.0260	0.0027	0.0299	0.0116	-0.0046	0.0103	-0.0006	0.0096	0.0002	0.0109
mse	0.0046	0.0039	0.0056	0.0059	0.0038	0.0035	0.0015	0.0022	0.0020	0.0033	0.0019	0.0027
var	0.0026	0.0032	0.0050	0.0059	0.0029	0.0034	0.0015	0.0021	0.0020	0.0032	0.0019	0.0026
	$s = 6$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2456	0.2382	0.2235	0.2164	0.2330	0.2237	0.1952	0.2140	0.1986	0.2158	0.1990	0.2165
bias	0.0456	0.0382	0.0235	0.0164	0.0330	0.0237	-0.0048	0.0140	-0.0014	0.0158	-0.0010	0.0165
mse	0.0049	0.0067	0.0056	0.0083	0.0041	0.0057	0.0016	0.0041	0.0023	0.0053	0.0020	0.0050
var	0.0028	0.0052	0.0050	0.0080	0.0030	0.0052	0.0015	0.0039	0.0023	0.0051	0.0020	0.0048
	$s = 12$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2414	0.2499	0.2219	0.2235	0.2264	0.2365	0.1917	0.2200	0.1962	0.2241	0.1978	0.2271
bias	0.0414	0.0499	0.0219	0.0235	0.0264	0.0365	-0.0083	0.0200	-0.0038	0.0241	-0.0022	0.0271
mse	0.0049	0.0114	0.0060	0.0114	0.0039	0.0084	0.0016	0.0067	0.0022	0.0084	0.0019	0.0083
var	0.0032	0.0089	0.0055	0.0108	0.0032	0.0070	0.0015	0.0063	0.0022	0.0078	0.0019	0.0076

Tabela B.5: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p = q = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s \in \{4, 6, 12\}$, $\alpha = 1.50$, $\kappa = 0.85$ e $N = 1000$.

	$\kappa = 0.70$											
	$s = 4$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2271	0.2179	0.2170	0.1982	0.2205	0.2073	0.1980	0.2097	0.2010	0.2074	0.2003	0.2096
bias	0.0271	0.0179	0.0170	-0.0018	0.0205	0.0073	-0.0020	0.0097	0.0010	0.0074	0.0003	0.0096
mse	0.0024	0.0024	0.0032	0.0034	0.0022	0.0020	0.0010	0.0019	0.0018	0.0024	0.0013	0.0019
var	0.0017	0.0020	0.0029	0.0034	0.0018	0.0019	0.0010	0.0018	0.0018	0.0024	0.0013	0.0018
	$s = 6$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2257	0.2234	0.2157	0.2101	0.2195	0.2159	0.1985	0.2101	0.2009	0.2114	0.2009	0.2135
bias	0.0257	0.0234	0.0157	0.0101	0.0195	0.0159	-0.0015	0.0101	0.0009	0.0114	0.0009	0.0135
mse	0.0021	0.0030	0.0027	0.0034	0.0017	0.0025	0.0007	0.0019	0.0011	0.0024	0.0009	0.0022
var	0.0014	0.0024	0.0024	0.0033	0.0013	0.0022	0.0007	0.0018	0.0011	0.0022	0.0009	0.0020
	$s = 12$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2269	0.2349	0.2162	0.2165	0.2204	0.2276	0.1970	0.2162	0.1992	0.2194	0.1993	0.2204
bias	0.0269	0.0349	0.0162	0.0165	0.0204	0.0276	-0.0030	0.0162	-0.0008	0.0194	-0.0007	0.0204
mse	0.0023	0.0049	0.0030	0.0051	0.0021	0.0039	0.0008	0.0031	0.0012	0.0038	0.0010	0.0034
var	0.0015	0.0037	0.0027	0.0048	0.0017	0.0032	0.0008	0.0029	0.0012	0.0035	0.0010	0.0030

Tabela B.6: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q)\times(P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p = q = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s \in \{4, 6, 12\}$, $\alpha = 1.50$, $\kappa = 0.85$ e $N = 2000$.

	$\kappa = 0.70$											
	$s = 4$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2149	0.2109	0.2095	0.2026	0.2133	0.2062	0.1998	0.2069	0.2014	0.2059	0.2012	0.2063
bias	0.0149	0.0109	0.0095	0.0026	0.0133	0.0062	-0.0002	0.0069	0.0014	0.0059	0.0012	0.0063
mse	0.0011	0.0014	0.0016	0.0018	0.0011	0.0013	0.0005	0.0012	0.0007	0.0013	0.0006	0.0012
var	0.0009	0.0013	0.0015	0.0018	0.0009	0.0013	0.0005	0.0011	0.0007	0.0013	0.0006	0.0012
	$s = 6$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2167	0.2149	0.2103	0.2049	0.2125	0.2100	0.1999	0.2089	0.2001	0.2085	0.2008	0.2096
bias	0.0167	0.0149	0.0103	0.0049	0.0125	0.0100	-0.0001	0.0089	0.0001	0.0085	0.0008	0.0096
mse	0.0009	0.0016	0.0014	0.0020	0.0009	0.0013	0.0004	0.0013	0.0006	0.0013	0.0005	0.0011
var	0.0007	0.0014	0.0013	0.0020	0.0007	0.0012	0.0004	0.0012	0.0006	0.0012	0.0005	0.0010
	$s = 12$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2176	0.2225	0.2103	0.2089	0.2135	0.2172	0.1996	0.2121	0.2015	0.2125	0.2014	0.2132
bias	0.0176	0.0225	0.0103	0.0089	0.0135	0.0172	-0.0004	0.0121	0.0015	0.0125	0.0014	0.0132
mse	0.0011	0.0028	0.0016	0.0026	0.0010	0.0022	0.0004	0.0024	0.0007	0.0023	0.0006	0.0022
var	0.0008	0.0023	0.0015	0.0025	0.0008	0.0019	0.0004	0.0022	0.0007	0.0022	0.0006	0.0020

Tabela B.7: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ α-estável, quando $p = q = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s \in \{4, 6, 12\}$, $\alpha = 1.75$, $\kappa = 0.85$ e $N = 500$.

	$\kappa = 0.70$											
	$s = 4$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2362	0.2173	0.2267	0.2004	0.2316	0.2116	0.1953	0.2032	0.1990	0.2055	0.1999	0.2054
bias	0.0362	0.0173	0.0267	0.0004	0.0316	0.0116	-0.0047	0.0032	-0.0010	0.0055	-0.0001	0.0054
mse	0.0041	0.0037	0.0063	0.0063	0.0041	0.0039	0.0016	0.0018	0.0023	0.0032	0.0022	0.0026
var	0.0028	0.0034	0.0056	0.0063	0.0031	0.0037	0.0016	0.0018	0.0023	0.0032	0.0022	0.0025
	$s = 6$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2375	0.2258	0.2240	0.2120	0.2309	0.2192	0.1957	0.2036	0.2004	0.2068	0.1990	0.2088
bias	0.0375	0.0258	0.0240	0.0120	0.0309	0.0192	-0.0043	0.0036	0.0004	0.0068	-0.0010	0.0088
mse	0.0044	0.0042	0.0055	0.0073	0.0040	0.0044	0.0016	0.0021	0.0023	0.0034	0.0021	0.0030
var	0.0030	0.0036	0.0049	0.0071	0.0031	0.0040	0.0016	0.0020	0.0023	0.0033	0.0021	0.0029
	$s = 12$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2375	0.2332	0.2192	0.2158	0.2288	0.2280	0.1933	0.2039	0.1980	0.2118	0.1978	0.2115
bias	0.0375	0.0332	0.0192	0.0158	0.0288	0.0280	-0.0067	0.0039	-0.0020	0.0118	-0.0022	0.0115
mse	0.0046	0.0066	0.0059	0.0088	0.0041	0.0070	0.0015	0.0032	0.0025	0.0051	0.0021	0.0045
var	0.0032	0.0055	0.0055	0.0086	0.0033	0.0062	0.0015	0.0032	0.0025	0.0050	0.0021	0.0044

Tabela B.8: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p = q = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s \in \{4,6,12\}$, $\alpha = 1.75$, $\kappa = 0.85$ e $N = 1000$.

	$\kappa = 0.70$											
	$s = 4$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2249	0.2118	0.2141	0.2005	0.2183	0.2078	0.1987	0.2046	0.2006	0.2047	0.2009	0.2055
bias	0.0249	0.0118	0.0141	0.0005	0.0183	0.0078	-0.0013	0.0046	0.0006	0.0047	0.0009	0.0055
mse	0.0019	0.0018	0.0029	0.0036	0.0019	0.0020	0.0008	0.0010	0.0012	0.0016	0.0010	0.0014
var	0.0013	0.0016	0.0027	0.0036	0.0016	0.0019	0.0008	0.0010	0.0012	0.0016	0.0010	0.0013
	$s = 6$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2231	0.2170	0.2137	0.2043	0.2177	0.2112	0.1969	0.2030	0.2001	0.2041	0.1998	0.2053
bias	0.0231	0.0170	0.0137	0.0043	0.0177	0.0112	-0.0031	0.0030	0.0001	0.0041	-0.0002	0.0053
mse	0.0021	0.0022	0.0035	0.0042	0.0021	0.0023	0.0009	0.0013	0.0013	0.0021	0.0011	0.0018
var	0.0016	0.0020	0.0033	0.0042	0.0018	0.0022	0.0009	0.0012	0.0014	0.0021	0.0011	0.0017
	$s = 12$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2243	0.2246	0.2131	0.2120	0.2194	0.2199	0.1974	0.2055	0.2004	0.2092	0.2009	0.2102
bias	0.0243	0.0246	0.0131	0.0120	0.0194	0.0199	-0.0026	0.0055	0.0004	0.0092	0.0009	0.0102
mse	0.0021	0.0029	0.0034	0.0044	0.0020	0.0028	0.0008	0.0014	0.0013	0.0022	0.0010	0.0019
var	0.0015	0.0023	0.0032	0.0043	0.0017	0.0024	0.0008	0.0014	0.0013	0.0022	0.0010	0.0018

Tabela B.9: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ α-estável, quando $p = q = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s \in \{4, 6, 12\}$, $\alpha = 1.75$, $\kappa = 0.85$ e $N = 2000$.

	$\kappa = 0.70$											
	$s = 4$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2133	0.2080	0.2104	0.2011	0.2127	0.2057	0.2001	0.2041	0.2009	0.2045	0.2011	0.2049
bias	0.0133	0.0080	0.0104	0.0011	0.0127	0.0057	0.0001	0.0041	0.0009	0.0045	0.0011	0.0049
mse	0.0008	0.0009	0.0016	0.0017	0.0010	0.0010	0.0004	0.0005	0.0006	0.0009	0.0005	0.0007
var	0.0006	0.0008	0.0015	0.0017	0.0008	0.0010	0.0004	0.0005	0.0006	0.0008	0.0005	0.0007
	$s = 6$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2152	0.2089	0.2125	0.2026	0.2136	0.2073	0.2006	0.2023	0.2021	0.2027	0.2017	0.2043
bias	0.0152	0.0089	0.0125	0.0026	0.0136	0.0073	0.0006	0.0023	0.0021	0.0027	0.0017	0.0043
mse	0.0010	0.0010	0.0016	0.0020	0.0010	0.0011	0.0004	0.0007	0.0006	0.0010	0.0005	0.0008
var	0.0007	0.0010	0.0014	0.0020	0.0008	0.0011	0.0004	0.0007	0.0006	0.0010	0.0005	0.0008
	$s = 12$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2162	0.2177	0.2102	0.2081	0.2130	0.2129	0.2002	0.2061	0.2016	0.2079	0.2015	0.2080
bias	0.0162	0.0177	0.0102	0.0081	0.0130	0.0129	0.0002	0.0061	0.0016	0.0079	0.0015	0.0080
mse	0.0010	0.0014	0.0017	0.0020	0.0011	0.0013	0.0004	0.0008	0.0007	0.0011	0.0006	0.0009
var	0.0008	0.0011	0.0016	0.0019	0.0009	0.0012	0.0004	0.0007	0.0007	0.0011	0.0006	0.0009

Tabela B.10: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ α-estável, quando $p = 1$, $q = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.5$, $s \in \{4, 6, 12\}$, $\alpha = 1.25$, $\kappa = 0.85$ e $N = 500$.

	$\kappa = 0.85$											
	$s = 4$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.6340	0.1509	0.6640	0.1318	0.6508	0.1411	0.5657	0.1449	0.7167	0.1955	0.6814	0.1930
bias	0.4340	-0.0491	0.4640	-0.0682	0.4508	-0.0589	0.3657	-0.0551	0.5167	-0.0045	0.4814	-0.0070
mse	0.1916	0.0071	0.2225	0.0125	0.2072	0.0075	0.1366	0.0113	0.2878	0.0121	0.2398	0.0101
var	0.0033	0.0047	0.0072	0.0079	0.0040	0.0040	0.0029	0.0083	0.0208	0.0121	0.0081	0.0101
	$s = 6$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.6116	0.2007	0.6584	0.1845	0.6391	0.1927	0.5470	0.1770	0.7304	0.2261	0.6882	0.2273
bias	0.4116	0.0007	0.4584	-0.0155	0.4391	-0.0073	0.3470	-0.0230	0.5304	0.0261	0.4882	0.0273
mse	0.1728	0.0124	0.2227	0.0131	0.1987	0.0109	0.1230	0.0115	0.3045	0.0157	0.2477	0.0149
var	0.0034	0.0124	0.0126	0.0128	0.0058	0.0109	0.0026	0.0110	0.0232	0.0151	0.0093	0.0142
	$s = 12$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.6109	0.2612	0.6682	0.2408	0.6469	0.2538	0.5450	0.2252	0.7633	0.2652	0.7388	0.2690
bias	0.4109	0.0612	0.4682	0.0408	0.4469	0.0538	0.3450	0.0252	0.5633	0.0652	0.5388	0.0690
mse	0.1721	0.0211	0.2316	0.0192	0.2062	0.0177	0.1209	0.0144	0.3330	0.0202	0.3003	0.0203
var	0.0032	0.0173	0.0124	0.0175	0.0065	0.0148	0.0018	0.0138	0.0157	0.0160	0.0101	0.0156

Tabela B.11: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ α-estável, quando $p = 1$, $q = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.5$, $s \in \{4, 6, 12\}$, $\alpha = 1.25$, $\kappa = 0.85$ e $N = 2000$.

	$\kappa = 0.85$											
	$s = 4$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.5649	0.1332	0.6164	0.1434	0.5934	0.1419	0.5460	0.1323	0.6969	0.1852	0.6456	0.1790
bias	0.3649	-0.0668	0.4164	-0.0566	0.3934	-0.0581	0.3460	-0.0677	0.4969	-0.0148	0.4456	-0.0210
mse	0.1341	0.0056	0.1836	0.0061	0.1574	0.0049	0.1202	0.0062	0.2640	0.0022	0.2019	0.0019
var	0.0010	0.0011	0.0102	0.0029	0.0026	0.0015	0.0005	0.0016	0.0171	0.0020	0.0034	0.0014
	$s = 6$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.5484	0.1701	0.6087	0.1761	0.5799	0.1762	0.5283	0.1640	0.7195	0.2065	0.6498	0.2075
bias	0.3484	-0.0299	0.4087	-0.0239	0.3799	-0.0238	0.3283	-0.0360	0.5195	0.0065	0.4498	0.0075
mse	0.1224	0.0035	0.1805	0.0034	0.1477	0.0025	0.1084	0.0041	0.2946	0.0024	0.2071	0.0024
var	0.0010	0.0026	0.0135	0.0029	0.0034	0.0020	0.0006	0.0028	0.0248	0.0024	0.0048	0.0024
	$s = 12$											
	GPH MQ		**GPH MM**		**GPH MQP**		**BA MQ**		**BA MM**		**BA MQP**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.5462	0.2055	0.6475	0.2069	0.6076	0.2090	0.5248	0.1978	0.8055	0.2254	0.7669	0.2288
bias	0.3462	0.0055	0.4475	0.0069	0.4076	0.0090	0.3248	-0.0022	0.6055	0.0254	0.5669	0.0288
mse	0.1207	0.0051	0.2162	0.0044	0.1748	0.0040	0.1060	0.0057	0.3774	0.0067	0.3300	0.0066
var	0.0008	0.0051	0.0159	0.0043	0.0087	0.0039	0.0005	0.0057	0.0107	0.0061	0.0086	0.0057

Estimação Paramétrica

Tabela B.12: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ α-estável, quando $p = q = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\alpha = 1.75$, $s \in \{4, 6, 12\}$ e $N = 500$.

	$\alpha = 1.75$							
	$s = 4$							
	KM		**KMmod**		**KMS**		**KMSmod**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2520	0.2016	0.2163	0.1953	0.1966	0.1782	0.1974	0.1795
bias	0.0520	0.0016	0.0163	-0.0047	-0.0034	-0.0218	-0.0026	-0.0205
mse	0.0052	0.0026	0.0019	0.0018	0.0013	0.0022	0.0014	0.0023
var	0.0025	0.0026	0.0016	0.0017	0.0013	0.0018	0.0014	0.0019
	$\alpha = 1.75$							
	$s = 6$							
	KM		**KMmod**		**KMS**		**KMSmod**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2541	0.1976	0.2165	0.1960	0.1963	0.1672	0.1953	0.1726
bias	0.0541	-0.0024	0.0165	-0.0040	-0.0037	-0.0328	-0.0047	-0.0274
mse	0.0054	0.0025	0.0018	0.0015	0.0014	0.0027	0.0015	0.0024
var	0.0025	0.0025	0.0015	0.0015	0.0014	0.0016	0.0015	0.0017
	$\alpha = 1.75$							
	$s = 12$							
	KM		**KMmod**		**KMS**		**KMSmod**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2509	0.1766	0.2136	0.1973	0.1934	0.1359	0.1910	0.1527
bias	0.0509	-0.0234	0.0136	-0.0027	-0.0066	-0.0641	-0.0090	-0.0473
mse	0.0054	0.0038	0.0016	0.0018	0.0012	0.0062	0.0014	0.0040
var	0.0028	0.0032	0.0015	0.0018	0.0012	0.0020	0.0013	0.0017

Tabela B.13: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p = q = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\alpha = 1.75$, $s \in \{4,6,12\}$ e $N = 1000$.

	$\alpha = 1.75$							
	$s = 4$							
	KM		**KMmod**		**KMS**		**KMSmod**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2335	0.2047	0.2099	0.1986	0.1993	0.1903	0.2018	0.1914
bias	0.0335	0.0047	0.0099	-0.0014	-0.0007	-0.0097	0.0018	-0.0086
mse	0.0024	0.0012	0.0010	0.0009	0.0007	0.0011	0.0008	0.0011
var	0.0012	0.0012	0.0009	0.0009	0.0007	0.0010	0.0008	0.0010
	$\alpha = 1.75$							
	$s = 6$							
	KM		**KMmod**		**KMS**		**KMSmod**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2309	0.2051	0.2072	0.2012	0.1971	0.1870	0.1987	0.1901
bias	0.0309	0.0051	0.0072	0.0012	-0.0029	-0.0130	-0.0013	-0.0099
mse	0.0022	0.0013	0.0008	0.0009	0.0007	0.0011	0.0007	0.0011
var	0.0012	0.0013	0.0008	0.0009	0.0006	0.0009	0.0007	0.0010
	$\alpha = 1.75$							
	$s = 12$							
	KM		**KMmod**		**KMS**		**KMSmod**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2314	0.1942	0.2071	0.1991	0.1974	0.1680	0.1975	0.1747
bias	0.0314	-0.0058	0.0071	-0.0009	-0.0026	-0.0320	-0.0025	-0.0253
mse	0.0021	0.0013	0.0007	0.0008	0.0006	0.0019	0.0007	0.0015
var	0.0011	0.0013	0.0006	0.0008	0.0006	0.0008	0.0006	0.0009

Tabela B.14: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p = q = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\alpha = 1.75$, $s \in \{4,6,12\}$ e $N = 2000$.

	$\alpha = 1.75$							
	$s = 4$							
	KM		**KMmod**		**KMS**		**KMSmod**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2201	0.2041	0.2050	0.1994	0.1998	0.1953	0.2030	0.1970
bias	0.0201	0.0041	0.0050	-0.0006	-0.0002	-0.0047	0.0030	-0.0030
mse	0.0009	0.0006	0.0004	0.0004	0.0003	0.0004	0.0004	0.0004
var	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0003	0.0004	0.0004	0.0004
	$\alpha = 1.75$							
	$s = 6$							
	KM		**KMmod**		**KMS**		**KMSmod**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2205	0.2036	0.2053	0.1999	0.2003	0.1926	0.2029	0.1953
bias	0.0205	0.0036	0.0053	-0.0001	0.0003	-0.0074	0.0029	-0.0047
mse	0.0009	0.0005	0.0004	0.0003	0.0003	0.0004	0.0003	0.0004
var	0.0005	0.0005	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0004
	$\alpha = 1.75$							
	$s = 12$							
	KM		**KMmod**		**KMS**		**KMSmod**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2188	0.2006	0.2041	0.2016	0.1993	0.1866	0.2013	0.1896
bias	0.0188	0.0006	0.0041	0.0016	-0.0007	-0.0134	0.0013	-0.0104
mse	0.0008	0.0005	0.0004	0.0005	0.0003	0.0007	0.0003	0.0005
var	0.0005	0.0005	0.0003	0.0005	0.0003	0.0005	0.0003	0.0004

Tabela B.15: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ α-estável, quando $p = q = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\alpha = 1.50$, $s \in \{4, 6, 12\}$ e $N = 500$.

	$\alpha = 1.50$							
	$s = 4$							
	KM		**KMmod**		**KMS**		**KMSmod**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2662	0.2130	0.2262	0.2016	0.1955	0.1812	0.1959	0.1836
bias	0.0662	0.0130	0.0262	0.0016	-0.0045	-0.0188	-0.0041	-0.0164
mse	0.0078	0.0031	0.0029	0.0019	0.0013	0.0021	0.0015	0.0022
var	0.0034	0.0030	0.0022	0.0019	0.0013	0.0017	0.0015	0.0019
	$\alpha = 1.50$							
	$s = 6$							
	KM		**KMmod**		**KMS**		**KMSmod**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2632	0.2118	0.2246	0.2080	0.1942	0.1773	0.1926	0.1822
bias	0.0632	0.0118	0.0246	0.0080	-0.0058	-0.0227	-0.0074	-0.0178
mse	0.0075	0.0038	0.0029	0.0029	0.0012	0.0035	0.0014	0.0031
var	0.0035	0.0037	0.0023	0.0028	0.0012	0.0030	0.0013	0.0028
	$\alpha = 1.50$							
	$s = 12$							
	KM		**KMmod**		**KMS**		**KMSmod**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2643	0.1970	0.2225	0.2109	0.1922	0.1493	0.1893	0.1650
bias	0.0643	-0.0030	0.0225	0.0109	-0.0078	-0.0507	-0.0107	-0.0350
mse	0.0076	0.0046	0.0024	0.0028	0.0013	0.0055	0.0015	0.0038
var	0.0035	0.0046	0.0019	0.0026	0.0012	0.0029	0.0014	0.0026

Tabela B.16: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p = q = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\alpha = 1.50$, $s \in \{4, 6, 12\}$ e $N = 1000$.

	$\alpha = 1.50$							
	$s = 4$							
	KM		**KMmod**		**KMS**		**KMSmod**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2404	0.2122	0.2143	0.2035	0.1981	0.1939	0.2005	0.1959
bias	0.0404	0.0122	0.0143	0.0035	-0.0019	-0.0061	0.0005	-0.0041
mse	0.0033	0.0018	0.0013	0.0011	0.0006	0.0011	0.0007	0.0013
var	0.0017	0.0017	0.0011	0.0011	0.0006	0.0011	0.0007	0.0013
	$\alpha = 1.50$							
	$s = 6$							
	KM		**KMmod**		**KMS**		**KMSmod**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2393	0.2139	0.2130	0.2070	0.1975	0.1916	0.1988	0.1958
bias	0.0393	0.0139	0.0130	0.0070	-0.0025	-0.0084	-0.0012	-0.0042
mse	0.0032	0.0021	0.0012	0.0013	0.0006	0.0013	0.0007	0.0015
var	0.0016	0.0019	0.0011	0.0013	0.0006	0.0012	0.0007	0.0015
	$\alpha = 1.50$							
	$s = 12$							
	KM		**KMmod**		**KMS**		**KMSmod**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2386	0.2083	0.2121	0.2103	0.1969	0.1785	0.1970	0.1851
bias	0.0386	0.0083	0.0121	0.0103	-0.0031	-0.0215	-0.0030	-0.0149
mse	0.0031	0.0022	0.0011	0.0016	0.0006	0.0019	0.0007	0.0016
var	0.0016	0.0021	0.0010	0.0015	0.0006	0.0014	0.0007	0.0013

Tabela B.17: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p = q = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\alpha = 1.50$, $s \in \{4, 6, 12\}$ e $N = 2000$.

	$\alpha = 1.50$							
	$s = 4$							
	KM		**KMmod**		**KMS**		**KMSmod**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2242	0.2089	0.2079	0.2024	0.2000	0.1977	0.2033	0.2000
bias	0.0242	0.0089	0.0079	0.0024	0.0000	-0.0023	0.0033	0.0000
mse	0.0014	0.0009	0.0006	0.0007	0.0003	0.0006	0.0004	0.0008
var	0.0008	0.0008	0.0006	0.0006	0.0003	0.0005	0.0004	0.0008

	$\alpha = 1.50$							
	$s = 6$							
	KM		**KMmod**		**KMS**		**KMSmod**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2243	0.2084	0.2077	0.2031	0.1999	0.1950	0.2027	0.1984
bias	0.0243	0.0084	0.0077	0.0031	-0.0001	-0.0050	0.0027	-0.0016
mse	0.0014	0.0011	0.0006	0.0007	0.0003	0.0006	0.0004	0.0008
var	0.0008	0.0010	0.0006	0.0007	0.0003	0.0006	0.0004	0.0008

	$\alpha = 1.50$							
	$s = 12$							
	KM		**KMmod**		**KMS**		**KMSmod**	
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$d = 0.2$	$D = 0.2$
mean	0.2229	0.2089	0.2060	0.2068	0.1989	0.1911	0.2005	0.1961
bias	0.0229	0.0089	0.0060	0.0068	-0.0011	-0.0089	0.0005	-0.0039
mse	0.0012	0.0015	0.0005	0.0010	0.0003	0.0010	0.0004	0.0013
var	0.0006	0.0014	0.0004	0.0009	0.0003	0.0009	0.0004	0.0013

Tabela B.18: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q)\times(P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p=q=0=P=Q$, $d=0.1$, $D=0.1$, $\alpha=1.25$, $s\in\{4,6,12\}$ e $N=500$.

	$\alpha=1.25$							
	$s=4$							
	KM		**KMmod**		**KMS**		**KMSmod**	
	$d=0.1$	$D=0.1$	$d=0.1$	$D=0.1$	$d=0.1$	$D=0.1$	$d=0.1$	$D=0.1$
mean	0.1322	0.0972	0.1136	0.1012	0.0953	0.0794	0.0943	0.0847
bias	0.0322	0.0972	0.0136	0.0012	-0.0047	-0.0206	-0.0057	-0.0153
mse	0.0036	0.0129	0.0016	0.0025	0.0008	0.0024	0.0009	0.0021
var	0.0025	0.0035	0.0014	0.0025	0.0008	0.0019	0.0008	0.0018
	$\alpha=1.25$							
	$s=6$							
	KM		**KMmod**		**KMS**		**KMSmod**	
	$d=0.1$	$D=0.1$	$d=0.1$	$D=0.1$	$d=0.1$	$D=0.1$	$d=0.1$	$D=0.1$
mean	0.1332	0.0901	0.1127	0.1017	0.0955	0.0713	0.0938	0.0819
bias	0.0332	0.0901	0.0127	0.0017	-0.0045	-0.0287	-0.0062	-0.0181
mse	0.0035	0.0117	0.0014	0.0023	0.0009	0.0028	0.0009	0.0021
var	0.0024	0.0036	0.0012	0.0023	0.0009	0.0020	0.0009	0.0018
	$\alpha=1.25$							
	$s=12$							
	KM		**KMmod**		**KMS**		**KMSmod**	
	$d=0.1$	$D=0.1$	$d=0.1$	$D=0.1$	$d=0.1$	$D=0.1$	$d=0.1$	$D=0.1$
mean	0.1287	0.0717	0.1083	0.1075	0.0914	0.0479	0.0892	0.0761
bias	0.0287	0.0717	0.0083	0.0075	-0.0086	-0.0521	-0.0108	-0.0239
mse	0.0029	0.0093	0.0011	0.0033	0.0009	0.0057	0.0009	0.0032
var	0.0020	0.0042	0.0010	0.0032	0.0008	0.0030	0.0007	0.0026

Tabela B.19: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p = q = 0 = P = Q$, $d = 0.1$, $D = 0.1$, $\alpha = 1.25$, $s \in \{4, 6, 12\}$ e $N = 1000$.

	$\alpha = 1.25$							
	$s = 4$							
	KM		**KMmod**		**KMS**		**KMSmod**	
	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$d = 0.1$	$D = 0.1$
mean	0.1195	0.0994	0.1079	0.1004	0.0972	0.0878	0.0971	0.0895
bias	0.0195	-0.0006	0.0079	0.0004	-0.0028	-0.0122	-0.0029	-0.0105
mse	0.0014	0.0017	0.0007	0.0011	0.0003	0.0009	0.0004	0.0009
var	0.0010	0.0017	0.0006	0.0011	0.0003	0.0007	0.0004	0.0007
	$\alpha = 1.25$							
	$s = 6$							
	KM		**KMmod**		**KMS**		**KMSmod**	
	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$d = 0.1$	$D = 0.1$
mean	0.1202	0.0993	0.1076	0.1048	0.0977	0.0874	0.0961	0.0910
bias	0.0202	-0.0007	0.0076	0.0048	-0.0023	-0.0126	-0.0039	-0.0090
mse	0.0014	0.0020	0.0007	0.0020	0.0005	0.0018	0.0004	0.0015
var	0.0010	0.0020	0.0007	0.0019	0.0005	0.0016	0.0004	0.0015
	$\alpha = 1.25$							
	$s = 12$							
	KM		**KMmod**		**KMS**		**KMSmod**	
	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$d = 0.1$	$D = 0.1$
mean	0.1182	0.0850	0.1058	0.1056	0.0967	0.0714	0.0951	0.0855
bias	0.0182	-0.0150	0.0058	0.0056	-0.0033	-0.0286	-0.0049	-0.0145
mse	0.0012	0.0022	0.0005	0.0018	0.0003	0.0026	0.0004	0.0018
var	0.0009	0.0020	0.0005	0.0018	0.0003	0.0018	0.0003	0.0016

Tabela B.20: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p = q = 0 = P = Q$, $d = 0.1$, $D = 0.1$, $\alpha = 1.25$, $s \in \{4, 6, 12\}$ e $N = 2000$.

	$\alpha = 1.25$							
	$s = 4$							
	KM		**KMmod**		**KMS**		**KMSmod**	
	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$d = 0.1$	$D = 0.1$
mean	0.1114	0.0997	0.1051	0.1012	0.0992	0.0957	0.0993	0.0964
bias	0.0114	-0.0003	0.0051	0.0012	-0.0008	-0.0043	-0.0007	-0.0036
mse	0.0006	0.0008	0.0003	0.0007	0.0002	0.0008	0.0002	0.0009
var	0.0005	0.0008	0.0003	0.0007	0.0002	0.0007	0.0002	0.0009
	$\alpha = 1.25$							
	$s = 6$							
	KM		**KMmod**		**KMS**		**KMSmod**	
	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$d = 0.1$	$D = 0.1$
mean	0.1118	0.0981	0.1036	0.1017	0.0986	0.0925	0.0982	0.0948
bias	0.0118	-0.0019	0.0036	0.0017	-0.0014	-0.0075	-0.0018	-0.0052
mse	0.0006	0.0007	0.0003	0.0007	0.0002	0.0007	0.0002	0.0008
var	0.0004	0.0007	0.0003	0.0007	0.0002	0.0007	0.0002	0.0007
	$\alpha = 1.25$							
	$s = 12$							
	KM		**KMmod**		**KMS**		**KMSmod**	
	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$d = 0.1$	$D = 0.1$
mean	0.1103	0.0936	0.1025	0.1032	0.0977	0.0848	0.0970	0.0911
bias	0.0103	-0.0064	0.0025	0.0032	-0.0023	-0.0152	-0.0030	-0.0089
mse	0.0005	0.0011	0.0003	0.0009	0.0002	0.0011	0.0002	0.0009
var	0.0004	0.0011	0.0003	0.0009	0.0002	0.0009	0.0002	0.0008

Tabela B.21: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p = 1$, $q = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.5$, $\alpha = 1.50$, $s \in \{4, 6, 12\}$ e $N = 500$.

	$\alpha = 1.50$											
	$s = 4$											
	KM			**KMmod**			**KMS**			**KMSmod**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$
mean	0.3311	0.1804	0.3965	0.2627	0.1870	0.4447	0.1760	0.1795	0.5159	0.1609	0.1783	0.5291
bias	0.1311	-0.0196	-0.1035	0.0627	-0.0130	-0.0553	-0.0240	-0.0205	0.0159	-0.0391	-0.0217	0.0291
mse	0.0310	0.0024	0.0240	0.0163	0.0019	0.0158	0.0113	0.0025	0.0118	0.0124	0.0025	0.0119
var	0.0138	0.0020	0.0133	0.0124	0.0018	0.0128	0.0107	0.0021	0.0116	0.0109	0.0020	0.0110
	$\alpha = 1.50$											
	$s = 6$											
	KM			**KMmod**			**KMS**			**KMSmod**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$
mean	0.3321	0.1823	0.3929	0.2609	0.1946	0.4470	0.1819	0.1718	0.5109	0.1634	0.1762	0.5263
bias	0.1321	-0.0177	-0.1071	0.0609	-0.0054	-0.0530	-0.0181	-0.0282	0.0109	-0.0366	-0.0238	0.0263
mse	0.0291	0.0023	0.0234	0.0142	0.0020	0.0135	0.0097	0.0031	0.0106	0.0109	0.0029	0.0105
var	0.0116	0.0020	0.0119	0.0105	0.0020	0.0107	0.0094	0.0023	0.0105	0.0096	0.0023	0.0098
	$\alpha = 1.50$											
	$s = 12$											
	KM			**KMmod**			**KMS**			**KMSmod**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$
mean	0.3201	0.1759	0.4009	0.2484	0.2046	0.4553	0.1728	0.1455	0.5151	0.1498	0.1601	0.5324
bias	0.1201	-0.0241	-0.0991	0.0484	0.0046	-0.0447	-0.0272	-0.0545	0.0151	-0.0502	-0.0399	0.0324
mse	0.0266	0.0037	0.0217	0.0121	0.0023	0.0122	0.0081	0.0055	0.0087	0.0099	0.0040	0.0092
var	0.0122	0.0031	0.0119	0.0097	0.0023	0.0102	0.0074	0.0026	0.0085	0.0074	0.0024	0.0081

Tabela B.22: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q)\times(P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p=1$, $q=0=P=Q$, $d=0.2$, $D=0.2$, $\phi_1=0.5$, $\alpha=1.50$, $s\in\{4,6,12\}$ e $N=1000$.

	$\alpha=1.50$											
	$s=4$											
	KM			**KMmod**			**KMS**			**KMSmod**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=0.5$
mean	0.3088	0.1897	0.4060	0.2439	0.1945	0.4588	0.1776	0.1944	0.5184	0.1717	0.1946	0.5244
bias	0.1088	-0.0103	-0.0940	0.0439	-0.0055	-0.0412	-0.0224	-0.0056	0.0184	-0.0283	-0.0054	0.0244
mse	0.0212	0.0011	0.0183	0.0090	0.0009	0.0091	0.0073	0.0010	0.0077	0.0083	0.0011	0.0082
var	0.0093	0.0010	0.0095	0.0071	0.0008	0.0074	0.0068	0.0010	0.0074	0.0075	0.0011	0.0076
	$\alpha=1.50$											
	$s=6$											
	KM			**KMmod**			**KMS**			**KMSmod**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=0.5$
mean	0.3036	0.1929	0.4107	0.2391	0.1985	0.4646	0.1837	0.1896	0.5125	0.1777	0.1919	0.5177
bias	0.1036	-0.0071	-0.0893	0.0391	-0.0015	-0.0354	-0.0163	-0.0104	0.0125	-0.0223	-0.0081	0.0177
mse	0.0200	0.0013	0.0168	0.0082	0.0010	0.0077	0.0058	0.0013	0.0063	0.0066	0.0013	0.0066
var	0.0093	0.0012	0.0089	0.0067	0.0010	0.0064	0.0055	0.0012	0.0062	0.0061	0.0012	0.0063
	$\alpha=1.50$											
	$s=12$											
	KM			**KMmod**			**KMS**			**KMSmod**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=0.5$
mean	0.2904	0.1925	0.4212	0.2242	0.2027	0.4775	0.1785	0.1751	0.5164	0.1675	0.1804	0.5249
bias	0.0904	-0.0075	-0.0788	0.0242	0.0027	-0.0225	-0.0215	-0.0249	0.0164	-0.0325	-0.0196	0.0249
mse	0.0171	0.0017	0.0151	0.0070	0.0011	0.0071	0.0056	0.0020	0.0061	0.0067	0.0018	0.0066
var	0.0090	0.0016	0.0089	0.0064	0.0011	0.0066	0.0052	0.0014	0.0059	0.0057	0.0015	0.0060

Tabela B.23: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ α-estável, quando $p = 1$, $q = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.5$, $\alpha = 1.50$, $s \in \{4, 6, 12\}$ e $N = 2000$.

	$\alpha = 1.50$											
	$s = 4$											
	KM			**KMmod**			**KMS**			**KMSmod**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$
mean	0.2788	0.1931	0.4296	0.2270	0.1967	0.4746	0.1894	0.1981	0.5095	0.1902	0.1991	0.5099
bias	0.0788	-0.0069	-0.0704	0.0270	-0.0033	-0.0254	-0.0106	-0.0019	0.0095	-0.0098	-0.0009	0.0099
mse	0.0118	0.0005	0.0106	0.0045	0.0004	0.0047	0.0037	0.0006	0.0040	0.0044	0.0007	0.0045
var	0.0056	0.0005	0.0057	0.0038	0.0004	0.0040	0.0036	0.0006	0.0039	0.0044	0.0007	0.0044
	$\alpha = 1.50$											
	$s = 6$											
	KM			**KMmod**			**KMS**			**KMSmod**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$
mean	0.2689	0.1981	0.4399	0.2183	0.2009	0.4844	0.1836	0.1978	0.5162	0.1829	0.1993	0.5169
bias	0.0689	-0.0019	-0.0601	0.0183	0.0009	-0.0156	-0.0164	-0.0022	0.0162	-0.0171	-0.0007	0.0169
mse	0.0103	0.0008	0.0089	0.0040	0.0006	0.0038	0.0035	0.0008	0.0037	0.0041	0.0008	0.0041
var	0.0056	0.0008	0.0053	0.0037	0.0006	0.0036	0.0032	0.0008	0.0034	0.0038	0.0008	0.0038
	$\alpha = 1.50$											
	$s = 12$											
	KM			**KMmod**			**KMS**			**KMSmod**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$
mean	0.2664	0.1994	0.4409	0.2163	0.2034	0.4853	0.1877	0.1898	0.5110	0.1864	0.1929	0.5119
bias	0.0664	-0.0006	-0.0591	0.0163	0.0034	-0.0147	-0.0123	-0.0102	0.0110	-0.0136	-0.0071	0.0119
mse	0.0093	0.0009	0.0082	0.0035	0.0006	0.0034	0.0033	0.0009	0.0033	0.0038	0.0009	0.0037
var	0.0049	0.0009	0.0047	0.0032	0.0006	0.0031	0.0031	0.0008	0.0032	0.0036	0.0009	0.0035

Tabela B.24: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q)\times(P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p=1$, $q=0=P=Q$, $d=0.2$, $D=0.2$, $\phi_1=-0.5$, $\alpha=1.25$, $s\in\{4,6,12\}$ e $N=500$.

	$\alpha=1.25$											
	$s=4$											
	KM			**KMmod**			**KMS**			**KMSmod**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=-0.5$
mean	0.2894	0.2243	-0.5143	0.2416	0.2124	-0.5027	0.1916	0.1921	-0.4929	0.1878	0.1943	-0.4823
bias	0.0894	0.0243	-0.0143	0.0416	0.0124	-0.0027	-0.0084	-0.0079	0.0071	-0.0122	-0.0057	0.0177
mse	0.0136	0.0051	0.0024	0.0060	0.0030	0.0021	0.0022	0.0031	0.0023	0.0025	0.0031	0.0028
var	0.0056	0.0045	0.0022	0.0042	0.0028	0.0021	0.0021	0.0031	0.0023	0.0023	0.0031	0.0025
	$\alpha=1.25$											
	$s=6$											
	KM			**KMmod**			**KMS**			**KMSmod**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=-0.5$
mean	0.2932	0.2317	-0.5194	0.2449	0.2240	-0.5058	0.1890	0.1936	-0.4927	0.1812	0.2009	-0.4791
bias	0.0932	0.0317	-0.0194	0.0449	0.0240	-0.0058	-0.0110	-0.0064	0.0073	-0.0188	0.0009	0.0209
mse	0.0149	0.0063	0.0022	0.0070	0.0040	0.0016	0.0019	0.0040	0.0016	0.0024	0.0045	0.0023
var	0.0063	0.0053	0.0018	0.0050	0.0034	0.0016	0.0017	0.0039	0.0016	0.0020	0.0045	0.0018
	$\alpha=1.25$											
	$s=12$											
	KM			**KMmod**			**KMS**			**KMSmod**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=-0.5$
mean	0.2802	0.2136	-0.5182	0.2309	0.2270	-0.5024	0.1874	0.1672	-0.4899	0.1768	0.1831	-0.4741
bias	0.0802	0.0136	-0.0182	0.0309	0.0270	-0.0024	-0.0126	-0.0328	0.0101	-0.0232	-0.0169	0.0259
mse	0.0118	0.0066	0.0022	0.0043	0.0050	0.0016	0.0017	0.0061	0.0018	0.0024	0.0052	0.0026
var	0.0054	0.0064	0.0019	0.0034	0.0043	0.0016	0.0015	0.0051	0.0017	0.0019	0.0049	0.0019

Tabela B.25: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ α-estável, quando $p = 1$, $q = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = -0.5$, $\alpha = 1.25$, $s \in \{4, 6, 12\}$ e $N = 1000$.

	$\alpha = 1.25$											
	$s = 4$											
	KM			**KMmod**			**KMS**			**KMSmod**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$
mean	0.2604	0.2208	-0.5137	0.2273	0.2112	-0.5048	0.1974	0.2006	-0.4975	0.1966	0.2042	-0.4923
bias	0.0604	0.0208	-0.0137	0.0273	0.0112	-0.0048	-0.0026	0.0006	0.0025	-0.0034	0.0042	0.0077
mse	0.0071	0.0033	0.0012	0.0033	0.0021	0.0009	0.0009	0.0019	0.0008	0.0012	0.0023	0.0010
var	0.0035	0.0029	0.0010	0.0025	0.0019	0.0009	0.0009	0.0019	0.0008	0.0012	0.0023	0.0010
	$\alpha = 1.25$											
	$s = 6$											
	KM			**KMmod**			**KMS**			**KMSmod**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$
mean	0.2599	0.2250	-0.5139	0.2260	0.2160	-0.5035	0.1959	0.1990	-0.4953	0.1942	0.2055	-0.4883
bias	0.0599	0.0250	-0.0139	0.0260	0.0160	-0.0035	-0.0041	-0.0010	0.0047	-0.0058	0.0055	0.0117
mse	0.0072	0.0041	0.0014	0.0032	0.0023	0.0011	0.0010	0.0020	0.0010	0.0013	0.0028	0.0012
var	0.0036	0.0035	0.0013	0.0026	0.0020	0.0010	0.0009	0.0020	0.0010	0.0013	0.0027	0.0011
	$\alpha = 1.25$											
	$s = 12$											
	KM			**KMmod**			**KMS**			**KMSmod**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$
mean	0.2546	0.2200	-0.5149	0.2213	0.2206	-0.5034	0.1950	0.1892	-0.4948	0.1919	0.1965	-0.4876
bias	0.0546	0.0200	-0.0149	0.0213	0.0206	-0.0034	-0.0050	-0.0108	0.0052	-0.0081	-0.0035	0.0124
mse	0.0057	0.0045	0.0011	0.0023	0.0033	0.0007	0.0007	0.0032	0.0007	0.0010	0.0035	0.0009
var	0.0027	0.0041	0.0009	0.0018	0.0029	0.0007	0.0007	0.0031	0.0006	0.0009	0.0035	0.0008

Tabela B.26: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p = 1$, $q = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = -0.5$, $\alpha = 1.25$, $s \in \{4, 6, 12\}$ e $N = 2000$.

	$\alpha = 1.25$											
	$s = 4$											
	KM			**KMmod**			**KMS**			**KMSmod**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$
mean	0.2354	0.2132	-0.5093	0.2151	0.2074	-0.5032	0.2001	0.2027	-0.4991	0.2027	0.2057	-0.4971
bias	0.0354	0.0132	-0.0093	0.0151	0.0074	-0.0032	0.0001	0.0027	0.0009	0.0027	0.0057	0.0029
mse	0.0029	0.0016	0.0006	0.0015	0.0011	0.0004	0.0005	0.0011	0.0004	0.0006	0.0013	0.0005
var	0.0016	0.0014	0.0005	0.0013	0.0011	0.0004	0.0005	0.0011	0.0004	0.0006	0.0013	0.0005
	$\alpha = 1.25$											
	$s = 6$											
	KM			**KMmod**			**KMS**			**KMSmod**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$
mean	0.2346	0.2155	-0.5095	0.2135	0.2095	-0.5026	0.2005	0.2017	-0.4985	0.2021	0.2060	-0.4956
bias	0.0346	0.0155	-0.0095	0.0135	0.0095	-0.0026	0.0005	0.0017	0.0015	0.0021	0.0060	0.0044
mse	0.0028	0.0018	0.0006	0.0012	0.0011	0.0004	0.0005	0.0011	0.0004	0.0006	0.0014	0.0005
var	0.0016	0.0015	0.0005	0.0011	0.0010	0.0004	0.0005	0.0011	0.0004	0.0006	0.0013	0.0004
	$\alpha = 1.25$											
	$s = 12$											
	KM			**KMmod**			**KMS**			**KMSmod**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$
mean	0.2349	0.2198	-0.5109	0.2136	0.2174	-0.5029	0.1987	0.2016	-0.4979	0.1992	0.2063	-0.4943
bias	0.0349	0.0198	-0.0109	0.0136	0.0174	-0.0029	-0.0013	0.0016	0.0021	-0.0008	0.0063	0.0057
mse	0.0026	0.0031	0.0006	0.0012	0.0023	0.0004	0.0004	0.0022	0.0004	0.0005	0.0024	0.0004
var	0.0014	0.0027	0.0005	0.0010	0.0020	0.0004	0.0004	0.0022	0.0004	0.0005	0.0023	0.0004

Tabela B.27: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p = 1$, $q = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = -0.5$, $\alpha = 1.50$, $s \in \{4, 6, 12\}$ e $N = 500$.

	$\alpha = 1.50$											
	$s = 4$											
	KM			**KMmod**			**KMS**			**KMSmod**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$
mean	0.2707	0.2067	-0.5099	0.2244	0.1993	-0.5003	0.1930	0.1807	-0.4947	0.1889	0.1841	-0.4842
bias	0.0707	0.0067	-0.0099	0.0244	-0.0007	-0.0003	-0.0070	-0.0193	0.0053	-0.0111	-0.0159	0.0158
mse	0.0094	0.0030	0.0026	0.0034	0.0018	0.0017	0.0019	0.0024	0.0019	0.0023	0.0026	0.0023
var	0.0044	0.0029	0.0025	0.0028	0.0018	0.0017	0.0018	0.0020	0.0019	0.0021	0.0024	0.0021
	$\alpha = 1.50$											
	$s = 6$											
	KM			**KMmod**			**KMS**			**KMSmod**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$
mean	0.2690	0.2096	-0.5107	0.2254	0.2074	-0.4986	0.1921	0.1771	-0.4910	0.1858	0.1820	-0.4782
bias	0.0690	0.0096	-0.0107	0.0254	0.0074	0.0014	-0.0079	-0.0229	0.0090	-0.0142	-0.0180	0.0218
mse	0.0093	0.0040	0.0023	0.0039	0.0023	0.0019	0.0019	0.0028	0.0021	0.0023	0.0025	0.0026
var	0.0046	0.0039	0.0022	0.0033	0.0022	0.0019	0.0019	0.0023	0.0020	0.0021	0.0022	0.0022
	$\alpha = 1.50$											
	$s = 12$											
	KM			**KMmod**			**KMS**			**KMSmod**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$
mean	0.2707	0.1969	-0.5125	0.2212	0.2134	-0.4965	0.1864	0.1516	-0.4872	0.1919	0.1788	-0.4849
bias	0.0707	-0.0031	-0.0125	0.0212	0.0134	0.0035	-0.0136	-0.0484	0.0128	-0.0081	-0.0212	0.0151
mse	0.0096	0.0052	0.0023	0.0032	0.0034	0.0018	0.0019	0.0059	0.0022	0.0027	0.0023	0.0025
var	0.0046	0.0052	0.0021	0.0028	0.0032	0.0018	0.0018	0.0036	0.0020	0.0026	0.0019	0.0023

Tabela B.28: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q)\times(P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p=1$, $q=0=P=Q$, $d=0.2$, $D=0.2$, $\phi_1=-0.5$, $\alpha=1.50$, $s\in\{4,6,12\}$ e $N=1000$.

	$\alpha = 1.50$											
	$s = 4$											
	KM			**KMmod**			**KMS**			**KMSmod**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=-0.5$
mean	0.2446	0.2103	-0.5080	0.2140	0.2033	-0.5004	0.1968	0.1942	-0.4963	0.1979	0.1960	-0.4917
bias	0.0446	0.0103	-0.0080	0.0140	0.0033	-0.0004	-0.0032	-0.0058	0.0037	-0.0021	-0.0040	0.0083
mse	0.0044	0.0016	0.0011	0.0017	0.0010	0.0009	0.0009	0.0011	0.0010	0.0011	0.0013	0.0011
var	0.0024	0.0015	0.0010	0.0015	0.0010	0.0009	0.0009	0.0011	0.0009	0.0011	0.0013	0.0010
	$\alpha = 1.50$											
	$s = 6$											
	KM			**KMmod**			**KMS**			**KMSmod**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=-0.5$
mean	0.2454	0.2115	-0.5104	0.2143	0.2059	-0.5013	0.1964	0.1908	-0.4967	0.1951	0.1953	-0.4902
bias	0.0454	0.0115	-0.0104	0.0143	0.0059	-0.0013	-0.0036	-0.0092	0.0033	-0.0049	-0.0047	0.0098
mse	0.0043	0.0020	0.0010	0.0016	0.0012	0.0007	0.0008	0.0013	0.0008	0.0010	0.0016	0.0009
var	0.0022	0.0019	0.0009	0.0014	0.0012	0.0007	0.0008	0.0012	0.0007	0.0009	0.0015	0.0008
	$\alpha = 1.50$											
	$s = 12$											
	KM			**KMmod**			**KMS**			**KMSmod**		
	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=-0.5$	$d=0.2$	$D=0.2$	$\phi_1=-0.5$
mean	0.2475	0.2084	-0.5119	0.2142	0.2099	-0.5007	0.1971	0.1787	-0.4955	0.1947	0.1859	-0.4885
bias	0.0475	0.0084	-0.0119	0.0142	0.0099	-0.0007	-0.0029	-0.0213	0.0045	-0.0053	-0.0141	0.0115
mse	0.0048	0.0028	0.0013	0.0016	0.0017	0.0009	0.0009	0.0021	0.0009	0.0011	0.0020	0.0011
var	0.0025	0.0027	0.0011	0.0014	0.0016	0.0009	0.0009	0.0017	0.0009	0.0011	0.0018	0.0010

Tabela B.29: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ α-estável, quando $p = 1$, $q = 0 = P = Q$, $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = -0.5$, $\alpha = 1.50$, $s \in \{4, 6, 12\}$ e $N = 2000$.

	$\alpha = 1.50$											
	$s = 4$											
	KM			**KMmod**			**KMS**			**KMSmod**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$
mean	0.2292	0.2063	-0.5073	0.2094	0.2016	-0.5016	0.2001	0.1969	-0.4990	0.2029	0.1996	-0.4970
bias	0.0292	0.0063	-0.0073	0.0094	0.0016	-0.0016	0.0001	-0.0031	0.0010	0.0029	-0.0004	0.0030
mse	0.0019	0.0009	0.0005	0.0008	0.0006	0.0004	0.0004	0.0006	0.0005	0.0005	0.0008	0.0005
var	0.0011	0.0008	0.0005	0.0007	0.0006	0.0004	0.0004	0.0006	0.0005	0.0005	0.0008	0.0005
	$\alpha = 1.50$											
	$s = 6$											
	KM			**KMmod**			**KMS**			**KMSmod**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$
mean	0.2284	0.2066	-0.5072	0.2087	0.2026	-0.5009	0.2003	0.1951	-0.4984	0.2022	0.1981	-0.4957
bias	0.0284	0.0066	-0.0072	0.0087	0.0026	-0.0009	0.0003	-0.0049	0.0016	0.0022	-0.0019	0.0043
mse	0.0018	0.0009	0.0006	0.0008	0.0006	0.0005	0.0004	0.0007	0.0005	0.0005	0.0007	0.0005
var	0.0010	0.0009	0.0005	0.0007	0.0006	0.0005	0.0004	0.0007	0.0004	0.0005	0.0007	0.0005
	$\alpha = 1.50$											
	$s = 12$											
	KM			**KMmod**			**KMS**			**KMSmod**		
	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$	$d = 0.2$	$D = 0.2$	$\phi_1 = -0.5$
mean	0.2274	0.2087	-0.5075	0.2082	0.2080	-0.5006	0.1993	0.1925	-0.4979	0.2002	0.1974	-0.4947
bias	0.0274	0.0087	-0.0075	0.0082	0.0080	-0.0006	-0.0007	-0.0075	0.0021	0.0002	-0.0026	0.0053
mse	0.0017	0.0018	0.0005	0.0007	0.0012	0.0004	0.0004	0.0012	0.0004	0.0005	0.0015	0.0004
var	0.0010	0.0017	0.0004	0.0007	0.0011	0.0004	0.0004	0.0012	0.0004	0.0005	0.0015	0.0004

Tabela B.30: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p = q = 1 = P = Q$, $d = 0.1$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.5$, $\Phi_1 = -0.5$, $\theta_1 = -0.5$, $\Theta_1 = 0.5$, $\alpha = 1.50$, $s = 4$ e $N = 500$.

	$\alpha = 1.50$											
	$s = 4$											
	KM						**KMmod**					
	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$
mean	0.2278	0.1366	0.3623	-0.4977	-0.5035	0.4228	0.1515	0.1537	0.4363	-0.4978	-0.4932	0.4420
bias	0.1278	-0.0634	-0.1377	0.0023	-0.0035	-0.0772	0.0515	-0.0463	-0.0637	0.0022	0.0068	-0.0580
mse	0.0272	0.0154	0.0313	0.0034	0.0019	0.0179	0.0090	0.0109	0.0149	0.0102	0.0073	0.0163
var	0.0108	0.0114	0.0124	0.0034	0.0019	0.0119	0.0063	0.0088	0.0109	0.0102	0.0073	0.0129
	KM						**KMmod**					
	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$
mean	0.0723	0.0568	0.5075	-0.4614	-0.4962	0.3039	0.0561	0.0465	0.5007	-0.4150	-0.4669	0.2282
bias	-0.0277	-0.1432	0.0075	0.0386	0.0038	-0.1961	-0.0439	-0.1535	0.0007	0.0850	0.0331	-0.2718
mse	0.0036	0.0236	0.0045	0.0031	0.0018	0.0427	0.0045	0.0257	0.0048	0.0205	0.0108	0.0802
var	0.0028	0.0031	0.0045	0.0016	0.0017	0.0043	0.0025	0.0021	0.0048	0.0132	0.0097	0.0063

Tabela B.31: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p = q = 1 = P = Q$, $d = 0.1$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.5$, $\Phi_1 = -0.5$, $\theta_1 = -0.5$, $\Theta_1 = 0.5$, $\alpha = 1.50$, $s = 4$ e $N = 1000$.

	$\alpha = 1.50$											
	$s = 4$											
	KM						**KMmod**					
	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$
mean	0.1818	0.1584	0.4126	-0.5008	-0.5002	0.4577	0.1313	0.1749	0.4648	-0.5006	-0.4971	0.4703
bias	0.0818	-0.0416	-0.0874	-0.0008	-0.0002	-0.0423	0.0313	-0.0251	-0.0352	-0.0006	0.0029	-0.0297
mse	0.0133	0.0107	0.0154	0.0015	0.0010	0.0111	0.0052	0.0074	0.0069	0.0036	0.0032	0.0090
var	0.0066	0.0090	0.0077	0.0015	0.0010	0.0093	0.0042	0.0068	0.0057	0.0036	0.0032	0.0082
	KM						**KMmod**					
	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$
mean	0.0837	0.1040	0.5074	-0.4773	-0.4964	0.3751	0.0613	0.0843	0.5125	-0.4408	-0.4811	0.3041
bias	-0.0163	-0.0960	0.0074	0.0227	0.0036	-0.1249	-0.0387	-0.1157	0.0125	0.0592	0.0189	-0.1959
mse	0.0029	0.0128	0.0036	0.0016	0.0009	0.0199	0.0033	0.0156	0.0026	0.0051	0.0034	0.0419
var	0.0026	0.0036	0.0035	0.0011	0.0009	0.0043	0.0018	0.0022	0.0024	0.0016	0.0030	0.0036

Tabela B.32: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ α-estável, quando $p = q = 1 = P = Q$, $d = 0.1$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.5$, $\Phi_1 = -0.5$, $\theta_1 = -0.5$, $\Theta_1 = 0.5$, $\alpha = 1.50$, $s = 4$ e $N = 2000$.

	$\alpha = 1.50$											
	$s = 4$											
	KM						**KMmod**					
	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$
mean	0.1520	0.1822	0.4446	-0.4992	-0.5005	0.4809	0.1154	0.1848	0.4800	-0.4974	-0.4971	0.4802
bias	0.0520	-0.0178	-0.0554	0.0008	-0.0005	-0.0191	0.0154	-0.0152	-0.0200	0.0026	0.0029	-0.0198
mse	0.0061	0.0049	0.0069	0.0009	0.0004	0.0059	0.0026	0.0034	0.0053	0.0051	0.0040	0.0049
var	0.0034	0.0046	0.0038	0.0009	0.0004	0.0056	0.0024	0.0031	0.0049	0.0051	0.0040	0.0045
	KM						**KMmod**					
	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$
mean	0.0836	0.1502	0.5102	-0.4871	-0.4975	0.4314	0.0680	0.1263	0.5160	-0.4549	-0.4857	0.3686
bias	-0.0164	-0.0498	0.0102	0.0129	0.0025	-0.0686	-0.0320	-0.0737	0.0160	0.0451	0.0143	-0.1314
mse	0.0020	0.0049	0.0022	0.0007	0.0005	0.0077	0.0025	0.0073	0.0029	0.0067	0.0028	0.0213
var	0.0017	0.0024	0.0021	0.0006	0.0005	0.0030	0.0015	0.0018	0.0026	0.0047	0.0026	0.0040

Tabela B.33: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p = q = 1 = P = Q$, $d = 0.1$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.5$, $\Phi_1 = -0.5$, $\theta_1 = -0.5$, $\Theta_1 = 0.5$, $\alpha = 1.50$, $s = 12$ e $N = 500$.

	$\alpha = 1.50$											
	$s = 12$											
	KM						**KMmod**					
	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$
mean	0.2376	0.1074	0.3592	-0.5041	-0.5051	0.2945	0.1278	0.1663	0.4583	-0.5020	-0.4885	0.4284
bias	0.1376	-0.0926	-0.1408	-0.0041	-0.0051	-0.2055	0.0278	-0.0337	-0.0417	-0.0020	0.0115	-0.0716
mse	0.0317	0.0215	0.0360	0.0039	0.0049	0.0511	0.0061	0.0105	0.0122	0.0080	0.0063	0.0214
var	0.0128	0.0129	0.0162	0.0039	0.0049	0.0089	0.0054	0.0094	0.0105	0.0080	0.0062	0.0163
	KM						**KMmod**					
	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$
mean	0.0735	0.0750	0.4823	-0.4854	-0.4814	0.2251	0.0485	0.0156	0.5030	-0.4481	-0.3945	0.1622
bias	-0.0265	-0.1250	-0.0177	0.0146	0.0186	-0.2749	-0.0515	-0.1844	0.0030	0.0519	0.1055	-0.3378
mse	0.0048	0.0226	0.0144	0.0060	0.0079	0.0842	0.0053	0.0348	0.0089	0.0200	0.0204	0.1193
var	0.0041	0.0069	0.0141	0.0058	0.0076	0.0086	0.0026	0.0008	0.0089	0.0173	0.0093	0.0052

Tabela B.34: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p = q = 1 = P = Q$, $d = 0.1$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.5$, $\Phi_1 = -0.5$, $\theta_1 = -0.5$, $\Theta_1 = 0.5$, $\alpha = 1.50$, $s = 12$ e $N = 1000$.

	$\alpha = 1.50$											
	$s = 12$											
	KM						**KMmod**					
	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$
mean	0.1557	0.0985	0.4413	-0.4996	-0.5031	0.3666	0.1094	0.1804	0.4843	-0.5010	-0.4942	0.4620
bias	0.0557	-0.1015	-0.0587	0.0004	-0.0031	-0.1334	0.0094	-0.0196	-0.0157	-0.0010	0.0058	-0.0380
mse	0.0097	0.0176	0.0112	0.0014	0.0010	0.0238	0.0031	0.0071	0.0047	0.0013	0.0018	0.0100
var	0.0066	0.0073	0.0078	0.0014	0.0010	0.0061	0.0030	0.0068	0.0045	0.0013	0.0018	0.0085
	KM						**KMmod**					
	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$
mean	0.0704	0.0539	0.5167	-0.4856	-0.4893	0.3000	0.0461	0.0338	0.5274	-0.4587	-0.4453	0.2125
bias	-0.0296	-0.1461	0.0167	0.0144	0.0107	-0.2000	-0.0539	-0.1662	0.0274	0.0413	0.0547	-0.2875
mse	0.0029	0.0257	0.0034	0.0010	0.0012	0.0431	0.0045	0.0284	0.0042	0.0068	0.0043	0.0853
var	0.0021	0.0043	0.0031	0.0008	0.0011	0.0031	0.0016	0.0008	0.0035	0.0051	0.0013	0.0027

Tabela B.35: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p = q = 1 = P = Q$, $d = 0.1$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.5$, $\Phi_1 = -0.5$, $\theta_1 = -0.5$, $\Theta_1 = 0.5$, $\alpha = 1.50$, $s = 12$ e $N = 2000$.

	$\alpha = 1.50$											
	$s = 12$											
	KM						**KMmod**					
	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$
mean	0.1317	0.1438	0.4655	-0.5008	-0.5016	0.4274	0.1094	0.1804	0.4843	-0.5010	-0.4942	0.4620
bias	0.0317	-0.0562	-0.0345	-0.0008	-0.0016	-0.0726	0.0094	-0.0196	-0.0157	-0.0010	0.0058	-0.0380
mse	0.0041	0.0085	0.0054	0.0007	0.0006	0.0107	0.0031	0.0071	0.0047	0.0013	0.0018	0.0100
var	0.0031	0.0053	0.0042	0.0007	0.0005	0.0055	0.0030	0.0068	0.0045	0.0013	0.0018	0.0085
	KM						**KMmod**					
	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$	$d = 0.1$	$D = 0.2$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$
mean	0.0763	0.0880	0.5173	-0.4901	-0.4939	0.3586	0.0537	0.0715	0.5315	-0.4651	-0.4629	0.2833
bias	-0.0237	-0.1120	0.0173	0.0099	0.0061	-0.1414	-0.0463	-0.1285	0.0315	0.0349	0.0371	-0.2167
mse	0.0021	0.0152	0.0024	0.0006	0.0005	0.0226	0.0036	0.0175	0.0040	0.0082	0.0069	0.0497
var	0.0016	0.0027	0.0021	0.0005	0.0004	0.0026	0.0015	0.0010	0.0030	0.0070	0.0055	0.0027

Tabela B.36: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p = q = 1 = P = Q$, $d = 0.1$, $D = 0.1$, $\phi_1 = 0.5$, $\Phi_1 = -0.5$, $\theta_1 = -0.5$, $\Theta_1 = 0.5$, $\alpha = 1.25$, $s = 4$ e $N = 500$.

	$\alpha = 1.25$											
	$s = 4$											
	KM						**KMmod**					
	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$
mean	0.2398	0.1054	0.3515	-0.4906	-0.5047	0.4735	0.1427	0.0868	0.4493	-0.4959	-0.4911	0.4738
bias	0.1398	0.1054	-0.1485	0.0094	-0.0047	-0.0265	0.0427	-0.0132	-0.0507	0.0041	0.0089	-0.0262
mse	0.0324	0.0227	0.0353	0.0046	0.0025	0.0126	0.0083	0.0081	0.0127	0.0101	0.0084	0.0122
var	0.0129	0.0116	0.0132	0.0045	0.0025	0.0119	0.0065	0.0080	0.0101	0.0101	0.0083	0.0115
	KM						**KMmod**					
	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$
mean	0.0713	0.0729	0.5070	-0.4544	-0.4973	0.3770	0.0397	0.0312	0.5062	-0.4003	-0.4573	0.2665
bias	-0.0287	-0.0271	0.0070	0.0456	0.0027	-0.1230	-0.0603	-0.0688	0.0062	0.0997	0.0427	-0.2335
mse	0.0040	0.0099	0.0053	0.0047	0.0050	0.0223	0.0060	0.0089	0.0104	0.0361	0.0214	0.0640
var	0.0032	0.0092	0.0053	0.0026	0.0050	0.0072	0.0023	0.0041	0.0104	0.0262	0.0196	0.0095

Tabela B.37: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p = q = 1 = P = Q$, $d = 0.1$, $D = 0.1$, $\phi_1 = 0.5$, $\Phi_1 = -0.5$, $\theta_1 = -0.5$, $\Theta_1 = 0.5$, $\alpha = 1.25$, $s = 4$ e $N = 1000$.

	$\alpha = 1.25$											
	$s = 4$											
	KM						**KMmod**					
	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$
mean	0.1743	0.0842	0.4199	-0.4972	-0.5029	0.4782	0.1251	0.0877	0.4703	-0.4966	-0.4969	0.4796
bias	0.0743	-0.0158	-0.0801	0.0028	-0.0029	-0.0218	0.0251	-0.0123	-0.0297	0.0034	0.0031	-0.0204
mse	0.0118	0.0084	0.0133	0.0015	0.0011	0.0083	0.0041	0.0054	0.0055	0.0057	0.0043	0.0079
var	0.0063	0.0082	0.0069	0.0015	0.0011	0.0079	0.0035	0.0052	0.0046	0.0057	0.0043	0.0075
	KM						**KMmod**					
	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$
mean	0.0636	0.0412	0.5263	-0.4732	-0.5004	0.3982	0.0381	0.0332	0.5300	-0.4302	-0.4836	0.3213
bias	-0.0364	-0.0588	0.0263	0.0268	-0.0004	-0.1018	-0.0619	-0.0668	0.0300	0.0698	0.0164	-0.1787
mse	0.0029	0.0064	0.0027	0.0014	0.0010	0.0134	0.0051	0.0061	0.0031	0.0114	0.0041	0.0364
var	0.0015	0.0030	0.0020	0.0007	0.0010	0.0031	0.0013	0.0016	0.0022	0.0065	0.0039	0.0045

Tabela B.38: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p = q = 1 = P = Q$, $d = 0.1$, $D = 0.1$, $\phi_1 = 0.5$, $\Phi_1 = -0.5$, $\theta_1 = -0.5$, $\Theta_1 = 0.5$, $\alpha = 1.25$, $s = 4$ e $N = 2000$.

	$\alpha = 1.25$											
	$s = 4$											
	KM						**KMmod**					
	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$
mean	0.1405	0.0812	0.4565	-0.4978	-0.4992	0.4804	0.1120	0.0898	0.4847	-0.4999	-0.4996	0.4868
bias	0.0405	-0.0188	-0.0435	0.0022	0.0008	-0.0196	0.0120	-0.0102	-0.0153	0.0001	0.0004	-0.0132
mse	0.0049	0.0048	0.0056	0.0010	0.0005	0.0052	0.0023	0.0033	0.0029	0.0007	0.0004	0.0037
var	0.0033	0.0045	0.0038	0.0010	0.0005	0.0048	0.0021	0.0032	0.0027	0.0007	0.0004	0.0035
	KM						**KMmod**					
	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$
mean	0.0769	0.0539	0.5162	-0.4857	-0.4991	0.4308	0.0492	0.0489	0.5301	-0.4502	-0.4893	0.3740
bias	-0.0231	-0.0461	0.0162	0.0143	0.0009	-0.0692	-0.0508	-0.0511	0.0301	0.0498	0.0107	-0.1260
mse	0.0018	0.0038	0.0019	0.0007	0.0003	0.0069	0.0035	0.0039	0.0022	0.0049	0.0017	0.0180
var	0.0013	0.0017	0.0017	0.0005	0.0003	0.0021	0.0009	0.0013	0.0013	0.0025	0.0016	0.0021

Tabela B.39: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p = q = 1 = P = Q$, $d = 0.1$, $D = 0.1$, $\phi_1 = 0.5$, $\Phi_1 = -0.5$, $\theta_1 = -0.5$, $\Theta_1 = 0.5$, $\alpha = 1.25$, $s = 6$ e $N = 500$.

	$\alpha = 1.25$											
	$s = 6$											
	KM						**KMmod**					
	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$
mean	0.2390	0.1050	0.3587	-0.4903	-0.5024	0.4557	0.1388	0.0998	0.4526	-0.5000	-0.4932	0.4792
bias	0.1390	0.1050	-0.1413	0.0097	-0.0024	-0.0443	0.0388	-0.0002	-0.0474	0.0000	0.0068	-0.0208
mse	0.0333	0.0221	0.0366	0.0060	0.0055	0.0122	0.0070	0.0085	0.0109	0.0096	0.0071	0.0132
var	0.0140	0.0111	0.0167	0.0059	0.0055	0.0103	0.0055	0.0085	0.0086	0.0096	0.0071	0.0128
	KM						**KMmod**					
	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$
mean	0.0743	0.0911	0.4949	-0.4612	-0.4826	0.3602	0.0601	0.0538	0.4971	-0.3441	-0.3728	0.2214
bias	-0.0257	-0.0089	-0.0051	0.0388	0.0174	-0.1398	-0.0399	-0.0462	-0.0029	0.1559	0.1272	-0.2786
mse	0.0054	0.0123	0.0138	0.0133	0.0127	0.0288	0.0106	0.0114	0.0307	0.1453	0.1026	0.1079
var	0.0048	0.0123	0.0138	0.0118	0.0124	0.0092	0.0090	0.0093	0.0307	0.1211	0.0865	0.0303

Tabela B.40: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p = q = 1 = P = Q$, $d = 0.1$, $D = 0.1$, $\phi_1 = 0.5$, $\Phi_1 = -0.5$, $\theta_1 = -0.5$, $\Theta_1 = 0.5$, $\alpha = 1.25$, $s = 6$ e $N = 1000$.

	$\alpha = 1.25$											
	$s = 6$											
	KM						**KMmod**					
	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$
mean	0.1687	0.0778	0.4277	-0.4960	-0.5038	0.4646	0.1171	0.0934	0.4776	-0.4985	-0.4952	0.4839
bias	0.0687	-0.0222	-0.0723	0.0040	-0.0038	-0.0354	0.0171	-0.0066	-0.0224	0.0015	0.0048	-0.0161
mse	0.0114	0.0082	0.0125	0.0016	0.0010	0.0080	0.0036	0.0052	0.0048	0.0055	0.0049	0.0071
var	0.0067	0.0077	0.0073	0.0015	0.0010	0.0068	0.0034	0.0051	0.0043	0.0055	0.0049	0.0069
	KM						**KMmod**					
	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$
mean	0.0630	0.0478	0.5243	-0.4761	-0.4955	0.3948	0.0339	0.0271	0.5349	-0.4361	-0.4623	0.2978
bias	-0.0370	-0.0522	0.0243	0.0239	0.0045	-0.1052	-0.0661	-0.0729	0.0349	0.0639	0.0377	-0.2022
mse	0.0035	0.0075	0.0064	0.0018	0.0010	0.0149	0.0061	0.0075	0.0077	0.0175	0.0160	0.0463
var	0.0021	0.0048	0.0059	0.0012	0.0010	0.0039	0.0018	0.0022	0.0065	0.0134	0.0146	0.0055

Tabela B.41: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p = q = 1 = P = Q$, $d = 0.1$, $D = 0.1$, $\phi_1 = 0.5$, $\Phi_1 = -0.5$, $\theta_1 = -0.5$, $\Theta_1 = 0.5$, $\alpha = 1.25$, $s = 6$ e $N = 2000$.

	$\alpha = 1.25$											
	$s = 6$											
	KM						**KMmod**					
	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$
mean	0.1312	0.0711	0.4651	-0.4983	-0.5007	0.4665	0.1087	0.0966	0.4880	-0.4964	-0.4963	0.4878
bias	0.0312	-0.0289	-0.0349	0.0017	-0.0007	-0.0335	0.0087	-0.0034	-0.0120	0.0036	0.0037	-0.0122
mse	0.0042	0.0051	0.0050	0.0008	0.0026	0.0057	0.0022	0.0041	0.0049	0.0073	0.0066	0.0058
var	0.0032	0.0043	0.0038	0.0008	0.0026	0.0046	0.0022	0.0041	0.0048	0.0073	0.0066	0.0057
	KM						**KMmod**					
	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$
mean	0.0709	0.0424	0.5241	-0.4865	-0.4980	0.4147	0.0364	0.0401	0.5466	-0.4579	-0.4829	0.3507
bias	-0.0291	-0.0576	0.0241	0.0135	0.0020	-0.0853	-0.0636	-0.0599	0.0466	0.0421	0.0171	-0.1493
mse	0.0020	0.0051	0.0021	0.0005	0.0003	0.0093	0.0050	0.0046	0.0034	0.0042	0.0015	0.0242
var	0.0012	0.0018	0.0015	0.0003	0.0003	0.0020	0.0010	0.0011	0.0012	0.0024	0.0013	0.0019

Tabela B.42: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p = q = 1 = P = Q$, $d = 0.1$, $D = 0.1$, $\phi_1 = 0.5$, $\Phi_1 = -0.5$, $\theta_1 = -0.5$, $\Theta_1 = 0.5$, $\alpha = 1.25$, $s = 12$ e $N = 500$.

	$\alpha = 1.25$											
	$s = 12$											
	KM						**KMmod**					
	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$
mean	0.3222	0.1535	0.2780	-0.5129	-0.5065	0.3651	0.1294	0.0974	0.4595	-0.5020	-0.4872	0.4632
bias	0.2222	0.1535	-0.2220	-0.0129	-0.0065	-0.1349	0.0294	-0.0026	-0.0405	-0.0020	0.0128	-0.0368
mse	0.0635	0.0429	0.0684	0.0044	0.0142	0.0413	0.0063	0.0077	0.0099	0.0071	0.0052	0.0137
var	0.0142	0.0193	0.0192	0.0042	0.0142	0.0231	0.0055	0.0077	0.0083	0.0071	0.0051	0.0124
	KM						**KMmod**					
	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$
mean	0.0778	0.1492	0.4832	-0.4808	-0.4943	0.2496	0.0480	0.0227	0.4956	-0.4138	-0.3565	0.1920
bias	-0.0222	0.0492	-0.0168	0.0192	0.0057	-0.2504	-0.0520	-0.0773	-0.0044	0.0862	0.1435	-0.3080
mse	0.0055	0.0196	0.0155	0.0075	0.0096	0.0817	0.0074	0.0094	0.0214	0.0658	0.0606	0.1184
var	0.0050	0.0172	0.0152	0.0071	0.0096	0.0190	0.0047	0.0035	0.0214	0.0584	0.0400	0.0236

Tabela B.43: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p = q = 1 = P = Q$, $d = 0.1$, $D = 0.1$, $\phi_1 = 0.5$, $\Phi_1 = -0.5$, $\theta_1 = -0.5$, $\Theta_1 = 0.5$, $\alpha = 1.25$, $s = 12$ e $N = 1000$.

	$\alpha = 1.25$											
	$s = 12$											
	KM						**KMmod**					
	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$
mean	0.1969	0.0999	0.4021	-0.4980	-0.5065	0.4451	0.1126	0.0971	0.4828	-0.4986	-0.4919	0.4799
bias	0.0969	-0.0001	-0.0979	0.0020	-0.0065	-0.0549	0.0126	-0.0029	-0.0172	0.0014	0.0081	-0.0201
mse	0.0186	0.0127	0.0200	0.0028	0.0043	0.0105	0.0030	0.0057	0.0043	0.0055	0.0055	0.0094
var	0.0093	0.0127	0.0104	0.0028	0.0042	0.0075	0.0028	0.0057	0.0040	0.0055	0.0055	0.0090
	KM						**KMmod**					
	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$	$d = 0.1$	$D = 0.1$	$\phi_1 = 0.5$	$\Phi_1 = -0.5$	$\theta_1 = -0.5$	$\Theta_1 = 0.5$
mean	0.0702	0.0984	0.5151	-0.4785	-0.4839	0.3835	0.0335	0.0139	0.5391	-0.4511	-0.4409	0.2546
bias	-0.0298	-0.0016	0.0151	0.0215	0.0161	-0.1165	-0.0665	-0.0861	0.0391	0.0489	0.0591	-0.2454
mse	0.0041	0.0132	0.0063	0.0055	0.0097	0.0211	0.0063	0.0086	0.0054	0.0116	0.0089	0.0648
var	0.0032	0.0132	0.0060	0.0051	0.0095	0.0076	0.0018	0.0012	0.0039	0.0092	0.0054	0.0046

Tabela B.44: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA$(p,d,q)\times(P,D,Q)_s$ α-estável, quando $p=q=1=P=Q$, $d=0.1$, $D=0.1$, $\phi_1=0.5$, $\Phi_1=-0.5$, $\theta_1=-0.5$, $\Theta_1=0.5$, $\alpha=1.25$, $s=12$ e $N=2000$.

	$\alpha=1.25$											
	$s=12$											
	KM						**KMmod**					
	$d=0.1$	$D=0.1$	$\phi_1=0.5$	$\Phi_1=-0.5$	$\theta_1=-0.5$	$\Theta_1=0.5$	$d=0.1$	$D=0.1$	$\phi_1=0.5$	$\Phi_1=-0.5$	$\theta_1=-0.5$	$\Theta_1=0.5$
mean	0.1332	0.0567	0.4653	-0.4984	-0.5008	0.4444	0.1057	0.0963	0.4912	-0.4980	-0.4955	0.4853
bias	0.0332	-0.0433	-0.0347	0.0016	-0.0008	-0.0556	0.0057	-0.0037	-0.0088	0.0020	0.0045	-0.0147
mse	0.0047	0.0075	0.0061	0.0005	0.0004	0.0076	0.0017	0.0038	0.0035	0.0053	0.0039	0.0068
var	0.0036	0.0056	0.0049	0.0005	0.0004	0.0045	0.0017	0.0038	0.0034	0.0053	0.0039	0.0066
	KM						**KMmod**					
	$d=0.1$	$D=0.1$	$\phi_1=0.5$	$\Phi_1=-0.5$	$\theta_1=-0.5$	$\Theta_1=0.5$	$d=0.1$	$D=0.1$	$\phi_1=0.5$	$\Phi_1=-0.5$	$\theta_1=-0.5$	$\Theta_1=0.5$
mean	0.0707	0.0462	0.5235	-0.4875	-0.4907	0.4029	0.0407	0.0217	0.5428	-0.4661	-0.4649	0.3100
bias	-0.0293	-0.0538	0.0235	0.0125	0.0093	-0.0971	-0.0593	-0.0783	0.0428	0.0339	0.0351	-0.1900
mse	0.0025	0.0076	0.0028	0.0022	0.0024	0.0132	0.0044	0.0069	0.0034	0.0014	0.0016	0.0373
var	0.0016	0.0047	0.0023	0.0020	0.0023	0.0038	0.0009	0.0008	0.0016	0.0003	0.0004	0.0012