

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

GUILHERME MÜLLER PECCINI

**A fenomenologia de dipolos de cor e a física de saturação em  
processos *soft* no regime de altas energias\***  
**(Color dipole phenomenology and the saturation physics applied  
to soft processes in the high energy regime)**

Porto Alegre

2019

\*Trabalho financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

GUILHERME MÜLLER PECCINI

**A fenomenologia de dipolos de cor e a física de saturação em  
processos *soft* no regime de altas energias\***  
(Color dipole phenomenology and the saturation physics applied  
to soft processes in the high energy regime)

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul para obtenção do título de Mestre em Física pelo Programa de Pós-graduação em Física.

Área de concentração: Fenomenologia de Partículas de Altas Energias.

Orientador: Prof. Dr. Magno Valério Trindade Machado

Porto Alegre

2019

*Dedico este trabalho à minha falecida mãe Nádia. Sua lembrança sempre estará comigo...*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao meu orientador, professor Dr. Magno Valério Trindade Machado, por sempre ter estado presente na realização deste trabalho, disponibilizando-se a ajudar todas as vezes em que foi solicitado. Seu grande conhecimento na área e sua boa vontade em auxiliar-me foram imprescindíveis para a realização deste trabalho.

Em segundo lugar, gostaria de agradecer aos doutorandos Lucas Soster Moriggi e Fabio Köpp pela grande ajuda nestes dois anos que se passaram. Em todos os momentos se mostraram disponíveis para auxiliar no que fosse necessário. A ajuda de ambos foi muito importante para a realização deste mestrado.

Por último, tenho que agradecer ao meu pai por sempre ter apoiado minhas escolhas, nunca se opondo aos caminhos que escolhi para a minha vida, mesmo considerando todas as dificuldades que já enfrentei e que enfrentarei.

A todos os que citei acima e aos que, de alguma forma ou de outra, também me ajudaram neste mestrado, um muito obrigado!

*“The fundamental cause of the trouble is that in the modern world the stupid are cocksure  
while the intelligent are full of doubt”  
(Bertrand Russel, in The Triumph of Stupidity)*

# Resumo

Neste trabalho investigamos as interações hadrônicas *soft* usando o formalismo de saturação partônica relativo à evolução não-linear da QCD (Cromodinâmica Quântica), em conjunto com a teoria de Regge, a qual é o formalismo padrão para o cálculo de fenômenos difrativos. O principal objetivo é descrever as seções de choque total e elástica, bem como o *slope* elástico, para espalhamentos méson-próton e bárion-próton no regime de altas energias. Para isso, usamos os seguintes modelos de saturação: Glauber-Mueller, Golec-Biernat e Wüsthoff (GBW) e b-CGC. Todos eles são baseados no modelo de dipolos de cor, sendo este um formalismo adequado para descrever interações entre partículas no limite de altas energias. Resultados numéricos são comparados aos dados experimentais disponíveis no Large Hadron Collider (LHC), e também a medidas de raios cósmicos. Estudamos a dependência das amplitudes de dipolo no parâmetro de impacto, analisando o comportamento de cada modelo em relação a esta quantidade. Além disso, comparamos os modelos de saturação, de forma que seja possível determinar qual deles apresenta a melhor resposta em altas energias.

**Palavras-chave:** interações *soft*, fenômenos difrativos, fenomenologia de Regge, cromodinâmica quântica, regime de saturação, modelo de dipolos de cor.

# Abstract

In this work we investigate soft hadronic interactions using the parton saturation formalism in accordance with non-linear QCD (Quantum Chromodynamics) evolution, along with Regge phenomenology, which is the standard approach to calculate diffractive phenomena. The main goal is to describe the total and elastic cross sections as well as the elastic slope for meson-proton and baryon-proton scattering at high energy regime. For this purpose, we used the following saturation models: Glauber-Mueller, Golec-Biernat and Wüsthoff (GBW) and b-CGC. All of them are based on the color dipole model, which is a good formalism to describe particle interactions in the high energy limit. Numerical results are compared to available experimental data from the Large Hadron Collider (LHC), and cosmic rays data as well. We study the impact parameter dependence of the dipole amplitudes, investigating how each model behaves in terms of this variable. In addition, we compare the saturation models and analyze which one has the best response in the high energy regime.

**Keywords:** soft interactions, diffractive phenomena, Regge phenomenology, quantum chromodynamics, saturation regime, color dipole model.

# Lista de figuras

Figura 1.1 – Diagrama das regiões cinemáticas e modelos teóricos associados. . . . .	15
Figura 2.1 – Compilação dos dados de seção de choque elástica próton-próton em função de $t$ (em que $P$ é o momento do próton incidente) em um experimento de alvo fixo. . . . .	17
Figura 2.2 – <b>(a)</b> - Espalhamento elástico; <b>(b)</b> - Dissociação difrativa simples; <b>(c)</b> - Dissociação difrativa dupla. . . . .	19
Figura 2.3 – (a) Canal $s$ , (b) canal $t$ e (c) canal $u$ . . . . .	24
Figura 2.4 – Singularidades da amplitude de espalhamento no canal $s$ : polo simples e pontos de ramificação. . . . .	25
Figura 2.5 – Troca de um Meson no canal $t$ . . . . .	32
Figura 2.6 – Eclipse de Lehmann. . . . .	36
Figura 2.7 – Contorno de integração para a representação de Watson-Sommerfeld da amplitude de espalhamento. . . . .	37
Figura 2.8 – O contorno de integração deformado para a representação de Watson-Sommerfeld da amplitude de espalhamento. . . . .	39
Figura 2.9 – Trajetórias mesônicas dominantes: $\rho$ , $f_2$ , $a_2$ , $\omega$ , etc. . . . .	44
Figura 2.10 – A trajetória do Pomeron. A reta corresponde a $\alpha_{IP}(0) = 1,08 + 0,25t/GeV^2$ . . . . .	48
Figura 2.11 – Tabela com os parâmetros dos ajustes aos dados de seção de choque total e parâmetro $\rho$ do PDG 2012 (considendo reggeons e Pomeron), realizado pelo grupo COMPAS. . . . .	51
Figura 2.12 – Gráficos dos ajustes realizados pelo grupo COMPAS aos dados do PDG 2012. . . . .	52
Figura 3.1 – <b>(a)</b> - Constante de acoplamento da QED; <b>(b)</b> - Constante de acoplamento da QCD. . . . .	53
Figura 3.2 – A constante de acoplamento $\alpha_s(Q^2)$ calculada em diferentes ordens $\beta_i$ , utilizando os valores de $\Lambda = 0,34 GeV$ e $\Lambda = 0,48 GeV$ . . . . .	56
Figura 3.3 – Coordenadas do cone de luz. . . . .	57
Figura 3.4 – Diagrama de Feynman do DIS para elétron-próton. . . . .	60
Figura 3.5 – Fóton virtual interagindo com um quark puntual. . . . .	64

Figura 3.6 – Dados experimentais de HERA da função de estrutura $F_2$ em função de $Q^2$ para DIS em um próton, considerando diferentes valores de $x$ . . . .	66
Figura 3.7 – Correções QCD de mais baixa ordem para a função de distribuição de quarks. . . . .	68
Figura 3.8 – Funções de distribuição partônicas em função de $x$ para $Q^2 = 10 \text{ GeV}^2$ . . . . .	72
Figura 3.9 – (a) - Estrutura do espaço-tempo no DIS; (b) - Evolução DGLAP; (c) - Evolução BFKL. . . . .	75
Figura 3.10 – (a) - Diagrama Fan; (b) - Formalismo GLR. . . . .	76
Figura 3.11 – Gráfico ilustrativo da distribuição de pártons quando das evoluções em $Q^2$ e $x$ . Em pequeno $Q^2$ e pequeno $x$ , o sistema encontra-se saturado, possuindo uma grande densidade de glúons. . . . .	77
Figura 4.1 – Espalhamento frontal do DIS em um alvo nuclear ou próton, no sistema de repouso do alvo. . . . .	78
Figura 4.2 – Representação esquemática de uma colisão, com parâmetro de impacto $\vec{b}$ , entre duas esferas rígidas de diâmetro $a$ . . . . .	82
Figura 4.3 – Diagramas de emissão de glúon do processo $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g$ . . . . .	86
Figura 5.1 – Seção de choque de dipolo calculada com os modelos b-CGC, GBW, GM-G e GM-D, considerando diferentes valores de $x$ . . . . .	99
Figura 5.2 – Seção de choque de dipolo calculada com os modelos b-CGC, GBW, GM-G e GM-D, considerando diferentes valores de $r_\perp$ . . . . .	100
Figura 5.3 – Seção de choque total para o processo $\pi^+p$ calculada com os modelos GM-D, GM-G, GBW e b-CGC, e dados experimentais. . . . .	102
Figura 5.4 – Seção de choque elástica para o processo $\pi^+p$ calculada com os modelos GM-D, GM-G e b-CGC, e dados experimentais. . . . .	102
Figura 5.5 – Seção de choque total para o processo $K^+p$ calculada com os modelos GM-D, GM-G, GBW e b-CGC, e dados experimentais. . . . .	103
Figura 5.6 – Seção de choque elástica para o processo $K^+p$ calculada com os modelos GM-D, GM-G e b-CGC, e dados experimentais. . . . .	104
Figura 5.7 – Seção de choque total para o processo $pp$ calculada com os modelos GM-D, GM-G, GBW e b-CGC, e dados experimentais. . . . .	105
Figura 5.8 – Seção de choque elástica para o processo $pp$ calculada com os modelos GM-D, GM-G e b-CGC, e dados experimentais. . . . .	106

Figura 5.9 – Os valores de $B$ calculados para o processo $pp$ com os modelos GM-D, GM-G e b-CGC, e dados experimentais. . . . .	106
Figura 5.10–Seção de choque total para o processo $\bar{p}p$ calculada com os modelos GM-D, GM-G, GBW e b-CGC, e dados experimentais. . . . .	107
Figura 5.11–Seção de choque elástica para o processo $\bar{p}p$ calculada com os modelos GM-D, GM-G e b-CGC, e dados experimentais. . . . .	108
Figura 5.12–Os valores de $B$ calculados para o processo $\bar{p}p$ com os modelos GM-D, GM-G e b-CGC, e dados experimentais. . . . .	108

# Lista de abreviaturas e siglas

ATLAS	A Toroidal LHC Aparatus
BFKL	Balitsky-Fadin-Kuraev-Lipatov
BFKL	Balitsky-Fadin-Kuraev-Lipatov
BK	Balitsky-Kovchegov
CM	Centro de Massa
DIS	Deep Inelastic Scattering
DGLAP	Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi
GBW	Golec-Biernat e Wüstoff
GLR-MQ	Gribov-Levin-Ryskin e Mueller-Qiu
HERA	Hadron Electron Ring Accelerator
LHC	Large Hadron Collider
PDG	Particle Data Group
QCD	Quantum Chromodynamics
QED	Quantum Electrodynamics
SPS	Super Proton Synchroton
TOTEM	Total Elastic and Diffractive Cross Section Measurement

# Sumário

1	Introdução . . . . .	13
2	Processos difrativos e a teoria de Regge . . . . .	16
2.1	Cinemática de processos de espalhamento . . . . .	20
2.1.1	Amplitude de espalhamento . . . . .	20
2.1.2	Analiticidade da matriz S e cruzamento de canais . . . . .	22
2.1.3	Seções de choque e teorema óptico . . . . .	26
2.2	Polos de Regge . . . . .	29
2.3	A expansão em ondas parciais e o momento angular complexo	34
2.4	Polos de Regge no espalhamento relativístico . . . . .	39
2.5	Trajетórias de Regge . . . . .	43
2.6	Fenomenologia de Regge . . . . .	45
2.6.1	O Pomeron . . . . .	47
2.6.2	Trajетórias de Regge e espalhamentos hadrônicos . . . . .	48
2.7	Ajuste fenomenológico de $\sigma_{tot}$ e parâmetro $\rho$ considerando reggeons e Pomeron . . . . .	49
3	A Cromodinâmica Quântica e colisões de hádrons em altas energias . . . . .	53
3.1	A Cromodinâmica Quântica . . . . .	53
3.2	Espalhamento inelástico profundo (DIS) e as equações de evolução da QCD . . . . .	57
3.2.1	Coordenadas do cone de luz . . . . .	57
3.2.2	Espalhamento inelástico profundo (DIS) . . . . .	59
3.2.3	Modelo de pártons . . . . .	63
3.2.4	As equações DGLAP . . . . .	66
3.2.5	A equação BFKL . . . . .	72
3.2.6	Saturação partônica . . . . .	74
4	Formalismo de dipolos de cor . . . . .	78
4.1	O formalismo de Glauber-Mueller . . . . .	81

4.2	O modelo fenomenológico GBW . . . . .	84
4.3	A equação BK . . . . .	86
5	O modelo de dipolos aplicado a processos hadrônicos <i>soft</i> em altas energias . . . . .	92
5.1	Seção de choque de dipolo . . . . .	98
5.2	Processo $\pi^+p$ . . . . .	101
5.3	Processo $K^+p$ . . . . .	103
5.4	Processos $pp$ e $\bar{p}p$ . . . . .	104
6	Conclusões . . . . .	110
	Referências . . . . .	113

# 1 Introdução

As colisões no Large Hadron Collider (LHC) têm fornecido informações sobre as interações próton-próton, próton-núcleo e núcleo-núcleo, abrindo a cobertura do espaço de fase de forma sem precedente para a produção de partículas. Muitos processos de interesse, principalmente os mediados por trocas de objetos sem cor, são caracterizados por baixo ângulo de espalhamento em relação ao feixe incidente. Exemplos destes processos são aqueles mediados por fótons, Pomerons, dois fótons e por troca de dois glúons num estado singleto de cor (equivalente ao Pomeron perturbativo em primeira ordem, no contexto da teoria de Regge). Eventos desse tipo são medidos em todos os experimentos do LHC: ALICE, ATLAS, CMS, LHCb, LHCf e TOTEM [1].

Uma das grandes dificuldades da física de partículas de altas energias é que a maioria das aplicações da Cromodinâmica Quântica (em inglês, *Quantum Chromodynamics* - QCD) são baseadas em teoria de perturbação, cuja aplicação se faz possível somente em processos *hard*, os quais são, por definição, processos onde há grande momento transferido entre as partículas e que, portanto, a constante de acoplamento da QCD é pequena. Por outro lado, para valores de  $Q^2 \gtrsim 2 \text{ GeV}^2$ , a QCD perturbativa tem apresentado bons resultados [2].

Uma classe de processos muito importante é a dos fenômenos difrativos. Dentro desta classe, há os processos difrativos *soft* (onde o momento transferido entre as partículas que estão colidindo é muito pequeno) e os difrativos *hard*, sendo que o primeiro representa a maior parte dos fenômenos difrativos.

Em particular, as medidas da seção de choque total, elástica, dissociação difrativa simples e dissociação difrativa dupla, no LHC, permitem que se efetuem testes de relações fundamentais como o limite de Froissart-Martin [3], o teorema óptico e as relações de dispersão [4]. Uma fração importante das seções de choque é composta por processos difrativos, os quais são, em grande parte, não-perturbativos, já que se tratam de espalhamentos onde o momento transferido entre as partículas é muito pequeno (difração *soft*). Portanto, já que as seções de choque mencionadas são observáveis essencialmente não-perturbativos, são necessárias outras abordagens que não somente a QCD perturbativa para calculá-los.

Um dos formalismos utilizados para o cálculo desses observáveis é a fenomenologia de Regge, teoria desenvolvida na década de 1960 e que é anterior à teoria das interações

fortes (QCD). O desenvolvimento desse formalismo baseia-se na extensão do número quântico momento angular  $l$  para o plano complexo e considera que a troca de partículas no canal  $t$  é somada coerentemente de forma a resultar na troca das chamadas *trajetórias de Regge*, ou *reggeons*. No limite de altas energias, a difração é caracterizada pela troca de uma trajetória específica, chamada de *Pomeron*, o qual possui os números quânticos do vácuo [5].

No contexto da QCD, o fenômeno de saturação partônica passa a ser importante no limite de  $x$  e  $Q^2$  pequenos, dando origem a uma escala de saturação  $Q_s^2(x)$ , a qual determina a quantidade de glúons saturados. Nesse sentido, pode-se construir uma conexão entre a fenomenologia de Regge e o regime perturbativo da QCD através do regime de saturação partônica. Desta forma, o regime de saturação atua como uma interface entre processos *soft* e *hard*.

Na Figura 1.1 é mostrado o gráfico de  $\ln(1/x)$  em função de  $\ln(Q^2)$ . Na região onde  $Q^2$  é muito pequeno, a qual é chamada de escala *soft*, a fenomenologia de Regge apresenta boa descrição dos dados. No limite de grande  $Q^2$  (através da QCD perturbativa), obtém-se as equações de evolução de Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi (DGLAP) [6–8]. Já para  $Q^2$  fixo, a evolução em  $x$  dá origem à equação de evolução de Balitsky-Fadin-Kuraev-Lipatov (BFKL) [9–12]. Entretanto, no limite de  $x$  muito pequeno, efeitos de saturação passam a ser importantes, o que leva às equações de evolução não-lineares, tais como a de Balitsky-Kovchegov (BK) [13, 14] e de Gribov-Levin-Ryskin e Mueller-Qiu (GLR-MQ) [15, 16].

No Capítulo 2, discutimos de forma breve a teoria de Regge e suas aplicações para processos difrativos, e de que forma a fenomenologia de Regge pode ser usada para o cálculo das seções de choque. Por fim, definimos o Pomeron, trajetória de Regge que se faz presente no limite de altas energias. No Capítulo 3, discute-se de forma resumida sobre a QCD e sobre o que são os regimes perturbativo e não-perturbativo. Tratamos também a respeito do Espalhamento Inelástico Profundo (em inglês, *Deep Inelastic Scattering* - DIS) e fazemos as derivações (de forma sucinta) das equações de evolução da QCD. Finalizamos o capítulo tratando do limite de pequeno  $x$  e pequeno  $Q^2$ , onde ocorre o fenômeno de saturação partônica, sobre o qual são baseados os modelos utilizados neste trabalho. No Capítulo 4, abordamos o formalismo de dipolos de cor, cuja aplicação no contexto de física da saturação partônica possibilita o cálculo de diversos observáveis, tais como as seções de choque. São discutidos de forma breve o modelo de Glauber-Mueller [17, 18] e o modelo

fenomenológico de Golec-Biernat e Wüsthoff (GBW) [19]. Após isso, fazemos a derivação da equação de evolução não-linear BK, cuja proposta é uma correção à amplitude de espalhamento no modelo de dipolos.

No Capítulo 5, aplicamos o formalismo de dipolos de cor e a física de saturação partônica para descrever as seções de choque hadrônicas de processos méson-próton e bárion-próton no limite de altas energias, considerando juntamente a contribuição da fenomenologia de Regge no limite de momento transferido muito pequeno. Para tanto, partimos do trabalho de [2], cuja publicação foi feita no ano de 2003, data anterior ao início de operação do LHC. Neste sentido, propomos estender os modelos utilizados em [2] (Glauber-Mueller e GBW) para o limite de altas energias, comparando os resultados obtidos com os dados disponíveis nos experimentos do LHC e estimativas de raios cósmicos.

Além disso, adicionamos o modelo de saturação b-CGC [20–22], de maneira que, portanto, foram usados três modelos para o cálculo das seções de choque: o formalismo de Glauber-Mueller, o modelo GBW e o modelo b-CGC. Nosso principal objetivo é tratar do regime de saturação da QCD, investigando o comportamento dos modelos de saturação partônica no limite de altas energias, bem como compará-los, de forma a estudar quais são os parâmetros mais importantes que determinam suas respostas em função da variação da energia.

Por fim, finalizamos o trabalho realizando uma discussão acerca dos resultados obtidos, constatando que o modelo b-CGC foi o que apresentou melhor resposta em função do aumento da energia do centro de massa (CM). A forma com que a amplitude de dipolo depende do parâmetro de impacto no b-CGC (esta quantidade está inserida dentro da escala de saturação) determinou, de maneira significativa, o maior crescimento da seção de choque total neste modelo quando comparado com os demais.

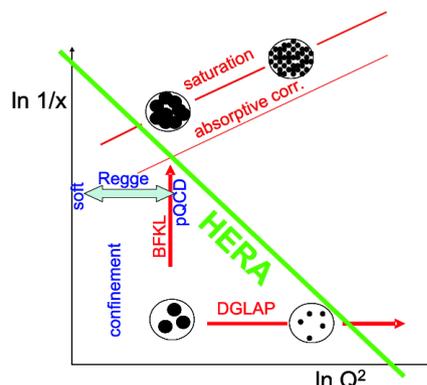


Figura 1.1 – Diagrama das regiões cinemáticas e modelos teóricos associados. [23]

## 2 Processos difrativos e a teoria de Regge

Neste capítulo realizaremos a discussão e o desenvolvimento dos cálculos associados à teoria de Regge tendo como base a Referência [24].

Tradicionalmente, os processos hadrônicos são classificados em dois tipos: processos *soft* e processos *hard*. Os processos *soft* são caracterizados por uma escala de energia da ordem do tamanho  $R$  do hádron ( $\sim 1 \text{ fm}$ ), sendo essa a única escala típica do processo. O quadrado do quadri-momento transferido, o qual é simbolizado por<sup>1</sup>  $|t|$ , na grande maioria das vezes, é pequeno (da ordem de  $1/R^2$ , o que representa algumas centenas de  $\text{MeV}^2$ ). Outra questão importante é que a dependência em  $t$  da seção de choque diferencial é exponencial, de maneira que  $d\sigma_{el}/dt \sim e^{-R^2|t|}$ . Sendo assim, eventos com grande  $|t|$  não contribuem para a seção de choque.

Devido ao fato da escala  $R$  ser relativamente grande, a teoria de perturbação não é aplicável para descrever estes procesos. Sendo assim, o formalismo utilizado para tratar processos *soft* é a teoria de Regge, em que os espalhamentos hadrônicos *soft* são descritos através da troca de trajetórias de Regge, cujo conceito será tratado neste capítulo. Em altas energias, a trajetória dominante é denominada Pomeron.

Já no caso de processos *hard*, além da escala de energia da ordem de  $R$ , há também a escala do quadri-momento transferido,  $|t|$ , ao quadrado, cujo valor ( $\gtrsim 1 \text{ GeV}^2$ ) é muito maior do que no caso *soft*. A dependência da seção de choque diferencial em relação ao momento transferido é, geralmente, uma função do tipo potência ou do tipo logaritmo. Em razão do grande momento transferido no espalhamento, é possível o emprego da QCD perturbativa, embora parte do processo ainda tenha uma origem não-perturbativa.

Um tipo de processo de espalhamento muito comum são os processos difrativos *soft*, os quais são caracterizados por um ângulo de desvio muito pequeno entre o feixe incidente e espalhado e, desta maneira, são processos essencialmente não-perturbativos, já que o quadri-momento transferido,  $|t|$ , ao quadrado, é também muito pequeno.

Na óptica ondulatória, o padrão de difração de luz incidente sobre um anteparo/objeto é formado por um máximo central, correspondente a um ângulo, em relação

<sup>1</sup> A variável  $t$  é uma das variáveis de Mandelstam, cujo conceito será tratado neste capítulo.

ao feixe incidente,  $\theta = 0^\circ$ . A intensidade  $I$  da onda espalhada como função do ângulo de espalhamento é dada por [25]

$$\frac{I(\theta)}{I(\theta = 0)} = \frac{[2J_1(x)]^2}{x^2} \simeq 1 - \frac{R_0^2}{4}(k\theta)^2, \quad (2.1)$$

onde  $J_1(x)$  é a função de Bessel de primeira ordem<sup>2</sup> e  $x = kR_0 \text{sen}(\theta) \simeq kR_0\theta$ , com  $k = 2\pi/\lambda$ . Na Figura 2.1 é mostrado um gráfico da seção de choque diferencial  $d\sigma/dt$  para o espalhamento elástico próton-próton ( $p + p \rightarrow p + p$ ) em diversos valores de  $|t|$  e  $\sqrt{s}$ . A figura é muito semelhante ao padrão de difração encontrado na óptica. Os picos dos valores de seção de choque diferencial elástica ocorrem em  $|t|$  pequeno e, conseqüentemente,  $\theta$  pequeno<sup>3</sup>. Para valores de  $|t|$  próximos de zero, temos que

$$\frac{\frac{d\sigma}{dt}(t)}{\frac{d\sigma}{dt}(t=0)} \simeq e^{-B|t|} \simeq 1 - B(P\theta)^2 \quad (2.2)$$

em que  $|t| \simeq (P\theta)^2$  é o valor absoluto do momento transferido ao quadrado,  $\theta$  é o ângulo de espalhamento e  $P$  é o quadri-momento do próton incidente. O *slope* (inclinação da seção de choque diferencial elástica)  $B$  pode ser escrito como  $B = R^2/4$ , sendo que  $R$  está relacionado ao tamanho do alvo, tal como na óptica. Devido a essas semelhanças entre o fenômeno de difração óptico e estes processos na física de partículas, passou-se a utilizar a mesma terminologia utilizada na óptica ondulatória: difração.

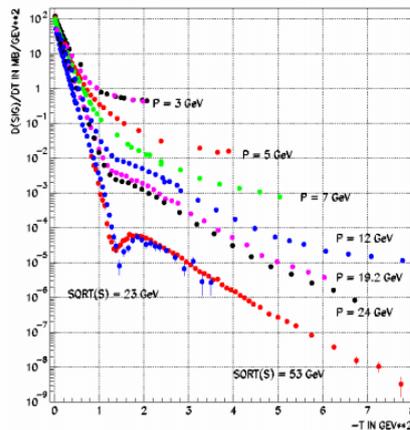


Figura 2.1 – Compilação dos dados de seção de choque elástica próton-próton em função de  $t$  (em que  $P$  é o momento do próton incidente) em um experimento de alvo fixo. [25]

<sup>2</sup> A expressão de  $J_1(x)$  é dada por  $J_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos\theta \text{sen}(x \cos\theta) d\theta$ .

<sup>3</sup> A relação entre  $|t|$  e  $\theta$  é expressa por  $|t| = 2k^2(1 - \cos\theta) \approx (k\theta)^2$ ,  $\theta \ll 1$ .

Processos difrativos na física de partículas são formulados a partir de duas definições:

1) **Definição teórica:** Uma reação onde não há troca de números quânticos (no vértice) entre as partículas que estão interagindo.

Isso leva à possibilidade de três casos para os processos difrativos, conforme pode ser visto na Figura 2.2. São eles:

I) Espalhamento elástico, em que as partículas incidentes e espalhadas são idênticas:

$$1 + 2 \rightarrow 1' + 2' \quad (2.3)$$

II) Dissociação difrativa simples, em que uma das partículas do estado final sofre dissociação, enquanto que a outra permanece idêntica ao estado inicial:

$$1 + 2 \rightarrow 1' + X \quad (2.4)$$

III) Dissociação difrativa dupla, onde ambas as partículas do estado inicial são dissociadas:

$$1 + 2 \rightarrow X_1 + X_2 \quad (2.5)$$

2) **Definição operacional/experimental:** Uma reação de difração é caracterizada por um grande *gap* de rapidez<sup>4</sup> entre as partículas do estado final, sendo que este *gap* não pode decrescer exponencialmente.

Seja  $N$  o número de eventos em uma reação e  $\Delta\eta$  o *gap* de pseudo-rapidez<sup>5</sup> do estado final. No caso de um processo difrativo,

$$\frac{dN}{d\Delta\eta} \sim C, \quad (2.6)$$

em que  $C$  é uma constante. Para o caso de processos não difrativos,

$$\frac{dN}{d\Delta y} \sim e^{-\Delta\eta}. \quad (2.7)$$

Desta forma, pode-se perceber que processos difrativos podem ser distinguidos dos não difrativos assintoticamente ( $\Delta\eta \rightarrow \infty$ ), visto que a contribuição dos primeiros aumenta com a energia, enquanto que a dos últimos diminui.

<sup>4</sup> A variável *rapidez* é definida como  $y = \ln\left(\frac{E+p_z}{E-p_z}\right)$ , onde  $E$  é a energia total relativística e  $p_z$  é a componente do momento linear ao longo do eixo  $z$ .

<sup>5</sup> A quantidade medida nos aceleradores é a pseudo-rapidez, cuja definição é dada por  $\eta = -\ln \tan\frac{\theta}{2}$ . No caso de espalhamentos ultrarelativísticos (altas energias),  $\eta \approx y$ .

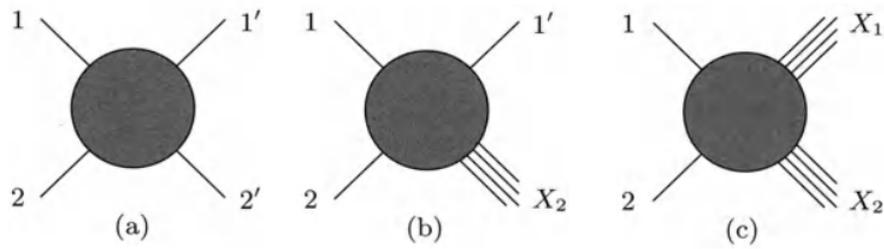


Figura 2.2 – (a) - Espalhamento elástico; (b) - Dissociação difrativa simples; (c) - Dissociação difrativa dupla. [24]

Como mencionado anteriormente, o formalismo utilizado para tratar processos difrativos é a teoria de Regge, cujo desenvolvimento foi feito na década de 1960 pelo italiano Tullio Regge [26,27]. É uma teoria que pertence a uma classe de modelos chamados de modelos de canal  $t$ , pois considera que há trocas de objetos chamados *reggeons* (cujo conceito será tratado de forma detalhada posteriormente) neste mesmo canal <sup>6</sup>. No regime de altas energias, o reggeon dominante é o Pomeron, objeto este que carrega os números quânticos do vácuo.

No contexto da Mecânica Quântica, quando considerado um potencial esfericamente simétrico  $V(r)$ , pode-se determinar que as soluções da função de onda são os chamados harmônicos esféricos, os quais dependem explicitamente do número quântico momento angular  $l$  e aparecem como polos da função de onda parcial  $a_l(k)$ . Tradicionalmente, consideram-se os valores de  $l$  inteiros e positivos. A ideia de Tullio Regge foi estender os valores de tal número quântico para o plano complexo, obtendo-se uma função de interpolação  $a(l, k)$ , a qual se reduz para  $a_l(k)$  quando  $l = 0, 1, 2, \dots$ . Mesmo tendo sido feito para processos não relativísticos, o trabalho de Regge pode ser estendido para processos relativísticos, adquirindo grande importância na física de partículas de altas energias, como será visto ao longo deste trabalho.

Feita a definição e discussão do conceito de um processo difrativo, bem como a introdução da teoria de Regge, trataremos, nas próximas seções, de alguns teoremas importantes no limite assintótico, bem como de alguns conceitos-chave em processos de espalhamento. Em seguida, entraremos na teoria de Regge, principal tema deste capítulo.

<sup>6</sup> Em uma reação de canal  $t$ , a variável  $t$  é uma quantidade positiva definida ( $t \geq 0$ ). O conceito de *canais* será discutido na Subseção 2.1.2.

## 2.1 Cinemática de processos de espalhamento

### 2.1.1 Amplitude de espalhamento

Em processos de espalhamento na Mecânica Quântica, a quantidade mais importante envolvida é a amplitude de espalhamento, já que esta se faz necessária no cálculo de observáveis, tais como as seções de choque.

Para o cálculo da amplitude de espalhamento, se forem desprezados os efeitos de coerência na função de onda espalhada, podemos considerar apenas a interação entre duas partículas, visto que o fluxo espalhado de  $N$  partículas é igual a  $N$  vezes o fluxo espalhado por uma partícula. Deste modo, o hamiltoniano que descreve o sistema é dado por [28]

$$H = H_0 + V(\vec{r}) , \quad (2.8)$$

onde  $V(\vec{r})$  é o potencial e  $H_0$  é o hamiltoniano da partícula livre, expresso por

$$H_0 = \frac{P^2}{2M} , \quad (2.9)$$

em que  $M = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  é a massa reduzida do sistema,  $P = P_1 + P_2$  é o operador momento linear e  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  é a distância relativa entre as partículas. Para o hamiltoniano da partícula livre, temos a equação de autovalores:

$$H_0|\psi\rangle = E_0|\psi\rangle . \quad (2.10)$$

A presença de  $V(\vec{r})$  faz apenas com que haja um outro conjunto de autoestados. Para o caso de processos elásticos (onde as partículas do estado final são idênticas às partículas do estado inicial), podemos determinar as soluções estacionárias através da equação de Schrödinger<sup>7</sup>:

$$(H_0 + \hat{V})|\phi\rangle = E|\phi\rangle , \quad (2.11)$$

onde  $E = (\hbar^2 k^2)/2M$ .

Vamos assumir que no limite  $r \rightarrow -\infty$  o estado inicial é uma onda plana e que o potencial espalhador atua em uma região  $r \leq r_0$ , sendo  $r_0$  um valor de raio finito. Quando

<sup>7</sup> Nas Subseções 2.1.1 e 2.1.3 está se considerando  $\hbar$  e  $c$  no S.I. (Sistema Internacional) por uma questão essencialmente didática, enquanto que em todo o restante do texto,  $\hbar = c = 1$  (Unidades Naturais).

$r \rightarrow \infty$ , o sistema é uma superposição das componentes espalhadas e não-espalhadas. Uma possível solução do estado  $|\phi\rangle$  é dada por

$$|\phi\rangle = |\psi\rangle + \frac{1}{E - H_0} V |\phi\rangle . \quad (2.12)$$

Como pode ser visto, há uma singularidade no denominador da Eq. (2.12). Para contornar tal problema, soma-se uma pequena quantidade complexa  $i\epsilon$  ao denominador, de forma que

$$|\phi^\pm\rangle = |\psi\rangle + \frac{1}{E \pm i\epsilon - H_0} V |\phi^\pm\rangle . \quad (2.13)$$

A expressão acima é conhecida como equação de Lippmann-Schwinger.

Usando a Eq. (2.13), podemos escrever o estado  $|\phi^\pm\rangle$  na representação de posição:

$$\langle \vec{r} | \phi^\pm \rangle = \frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} + \frac{2M}{\hbar^2} \int d^3\vec{r}' F_\pm(\vec{r}, \vec{r}') \langle \vec{r}' | V | \phi^\pm \rangle , \quad (2.14)$$

onde  $F_\pm(\vec{r}, \vec{r}')$  vale

$$F_\pm(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{\hbar^2}{2M} \left\langle \vec{r} \left| \frac{1}{E \pm i\epsilon - H_0} \right| \vec{r}' \right\rangle . \quad (2.15)$$

A função  $F_\pm(\vec{r}, \vec{r}')$  pode ser projetada na base de momento e, assim, inserindo a relação de completudeza  $\int d^3\vec{q} |\vec{q}\rangle \langle \vec{q}| = I$  (onde  $I$  simboliza a matriz identidade),

$$F_\pm(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{2\pi^3} \int d^3\vec{q} \frac{e^{i\vec{q}\cdot|\vec{r}-\vec{r}'|}}{q^2 - (k \mp i\epsilon)^2} , \quad (2.16)$$

onde  $\vec{k} = \vec{p}/\hbar$  e  $(k \mp i\epsilon)^2 \simeq k^2 \mp i\epsilon$ . Usando o teorema dos resíduos, a singularidade da equação acima pode ser contornada e, após isso, toma-se o limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , de maneira que

$$F_\pm(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} . \quad (2.17)$$

A função  $F_\pm(\vec{r}, \vec{r}')$  é a função de Green para a equação de Helmholtz. Levando em consideração o fato de que, para o operador  $V(\vec{r})$ ,  $\langle \vec{r}' | V | \phi^\pm \rangle = V(\vec{r}') \langle \vec{r}' | \phi^\pm \rangle$ ,

$$\langle \vec{r} | \phi^\pm \rangle = \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} - \frac{2M}{\hbar^2} \int d^3\vec{r}' \frac{e^{\pm ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} V(\vec{r}') \langle \vec{r}' | \phi^\pm \rangle . \quad (2.18)$$

O primeiro termo da expressão acima representa a onda incidente e o segundo representa o efeito do espalhamento. Para o caso em que  $\vec{r} \gg \vec{r}'$  (o detector está muito longe do

potencial espalhador),  $|\vec{r} - \vec{r}'| \simeq r - r' \cdot \hat{r}$ . Esta aproximação será utilizada no expoente da Eq. (2.18). Contudo, para o denominador desta mesma equação,  $|\vec{r} - \vec{r}'| \simeq r$ . Portanto, a auto função do Hamiltoniano completo, assintoticamente distante, fica dada por

$$\begin{aligned} \langle \vec{r} | \phi^+ \rangle_{r \rightarrow \infty} &\sim \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} - \frac{1}{4\pi} \frac{2M}{\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3r' e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{r}'} V(\vec{r}') \langle \vec{r}' | \phi^+ \rangle = \\ &\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \left[ e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + \frac{e^{ikr}}{r} f(\vec{k}, \vec{k}') \right]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Na equação acima,  $\langle \vec{r} | \phi^+ \rangle$  é a soma da onda plana original com a onda esférica que se afasta (sinal +), cuja dependência espacial é  $e^{ikr}/r$  e cuja amplitude é  $f(\vec{k}, \vec{k}')$ . O último termo é chamado de amplitude de espalhamento, cuja expressão é dada por

$$f(\vec{k}, \vec{k}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{2M}{\hbar^2} (2\pi)^3 \int d^3r' e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{r}'} V(\vec{r}') \langle \vec{r}' | \phi^+ \rangle, \quad (2.20)$$

e, portanto,

$$f(\vec{k}, \vec{k}') = -\frac{4\pi^2 M}{\hbar^2} \langle \vec{k}' | V | \phi^+ \rangle. \quad (2.21)$$

Na próxima subseção trataremos da matriz  $S$  (a qual conecta os estados inicial e final e um processo de espalhamento), juntamente com o conceito de *canal*.

### 2.1.2 Analiticidade da matriz $S$ e cruzamento de canais

Em um processo  $1+2 \rightarrow 3+4$ , podemos definir as chamadas variáveis de Mandelstam [29]:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2, \quad (2.22)$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2, \quad (2.23)$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2. \quad (2.24)$$

Somando-se as três expressões acima, chega-se à conhecida relação  $s + t + u = 4m^2$  (levando em conta que todas as partículas possuem a mesma massa). Os quadri-momentos das partículas são  $p_i$ .

Uma das questões importantes em relação à matriz  $S$  é sua analiticidade<sup>8</sup>. Isso significa que as amplitudes de espalhamento são funções analíticas das variáveis cinemáticas quando estas são continuadas para valores complexos, sendo que as amplitudes físicas são a parte real dessas funções analíticas. Por exemplo, no caso de um processo  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ , a amplitude de espalhamento  $A(s, t)$  é função analítica de  $s$  e  $t$  mesmo que essas variáveis sejam complexas. Fazendo  $s$  e  $t$  serem números reais, chega-se à amplitude física.

Pelas regras de Feynman, o propagador de uma partícula virtual vale:

$$\frac{1}{s - m^2 + i\epsilon} . \quad (2.25)$$

onde  $m$  é a massa da partícula. Como pode ser visto, temos um polo simples em  $s = m^2$ . É importante mencionar que há também as singularidades em pontos de ramificação, que ocorrem quando da troca de duas ou mais partículas. Desta forma,  $A(s, t)$  tem pontos de ramificação nos limiares  $s = (2m)^2$ ,  $s = (3m)^2$ , etc. Portanto, se  $s < 4m^2$ , não haverá produção de duas partículas e, nesse caso,  $A(s, t)$  só terá componente real. Pelo teorema óptico, se a parte imaginária for nula, a seção de choque total também é nula.

Para o caso de um processo no canal  $t$ , existe polo simples em  $t = m^2$  e pontos de ramificação nos limiares  $t = (2m)^2$ ,  $t = (3m)^2$ , etc. De forma análoga, para o canal  $u$ , há um polo simples em  $u = m^2$  e pontos de ramificação nos limiares dados por  $u = (2m)^2$ ,  $u = (3m)^2$ , etc.

Um conceito importante a ser discutido é o de canal. Se um processo ocorre no canal  $s$ , por exemplo, a variável  $s$  na Eq. (2.22) representa o quadrado da energia total do CM da reação. Já, se um processo ocorre no canal  $t$ , é a variável  $t$  definida na Eq. (2.23) que representa o quadrado da energia total do CM. E caso ocorra no canal  $u$ , a Eq. (2.24) representará o quadrado da energia total do CM. Um processo de dois corpos feito nos três canais é mostrado na Figura 2.3.

<sup>8</sup> A matriz  $S$  (ou *matriz de espalhamento*) relaciona os estados inicial e final em um sistema físico submetido a um processo de espalhamento. A definição matemática da matriz  $S$  será abordada na Subseção 2.1.3.

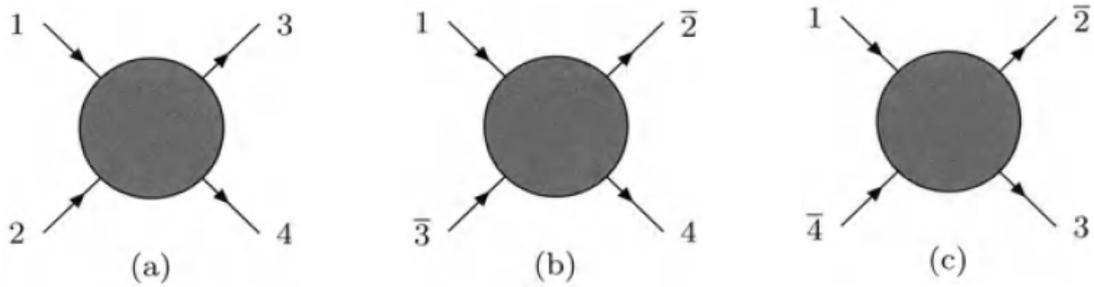


Figura 2.3 – (a) Canal  $s$ , (b) canal  $t$  e (c) canal  $u$ . [24]

$$\text{Canal } s: 1 + 2 \rightarrow 3 + 4 ,$$

$$\text{Canal } t: 1 + \bar{3} \rightarrow \bar{2} + 4 ,$$

$$\text{Canal } u: 1 + \bar{4} \rightarrow \bar{2} + 3 . \quad (2.26)$$

A transformação CPT (conjugação de carga, paridade e tempo reverso) deste processo é:

$$\text{Canal } s: \bar{3} + \bar{4} \rightarrow \bar{1} + \bar{2} ,$$

$$\text{Canal } t: 2 + \bar{4} \rightarrow \bar{1} + 3 ,$$

$$\text{Canal } u: 2 + \bar{3} \rightarrow \bar{1} + 4 . \quad (2.27)$$

Para cada canal, devemos considerar os domínios das variáveis de Mandelstam:

$$\text{Canal } s: s \geq 4m^2, t \leq 0, u \leq 0 ,$$

$$\text{Canal } t: t \geq 4m^2, s \leq 0, u \leq 0 ,$$

$$\text{Canal } u: u \geq 4m^2, s \leq 0, t \leq 0 . \quad (2.28)$$

Das três variáveis de Mandelstam,  $s$ ,  $t$  e  $u$ , somente duas delas são independentes, sendo a terceira dependente das outras duas (isso se deve à existência do vínculo  $s + t + u = 4m^2$ ). Considerando  $s$  e  $t$  independentes,  $A(s, t)$  é a amplitude de espalhamento de todos os seis processos das Eqs. (2.26) e (2.27), visto que o postulado de simetria de cruzamento determina que a amplitude deve ser a mesma para quaisquer canais. Usando a relação  $s + t + u = 4m^2$ , se tomarmos  $t$  como sendo fixo, as singularidades do canal  $u$  aparecem no plano  $s$  como singularidades de  $A(s, t)$  em  $s = 3m^2 - t$  (polo),  $s = -t$ ,  $s = -t - 5m^2$ , etc (pontos de ramificação). As singularidades de  $A(s, t)$  no plano  $s$  podem ser vistas na Figura 2.4.



Figura 2.4 – Singularidades da amplitude de espalhamento no canal  $s$ : polo simples e pontos de ramificação. [24]

Como há polos na estrutura de  $s$ , é preciso continuar  $A(s, t)$  analiticamente para o plano complexo, a fim de tratar essas singularidades. Denotando a amplitude física de espalhamento no canal  $s$  por  $A_s(s, t)$ , pode-se dizer, aproximando-se do eixo real pela parte superior do eixo imaginário, que

$$A_s(s, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} A(s + i\epsilon, t) . \quad (2.29)$$

Usando o princípio de reflexão de Schwarz, a parte real de  $A(s, t)$  para  $-t < s < 4m^2$  leva ao fato de que  $A(s^*, t) = A^*(s, t)$ . Desta forma, a descontinuidade de  $A(s, t)$ , a qual denotaremos por  $D_s(s, t)$ , associada aos limiares, vale

$$D_s(s, t) \equiv Disc_s A(s, t, u) = \frac{1}{2i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [A(s + i\epsilon, t) - A(s - i\epsilon, t)] . \quad (2.30)$$

O valor de  $D_s(s, t)$  coincide com a parte imaginária de  $A(s, t)$ . Por conseguinte,

$$D_s(s, t) \equiv Im[A(s, t)] . \quad (2.31)$$

De forma análoga, como foi feito no caso do canal  $s$ , a amplitude física do canal  $u$  é obtida da seguinte forma (aproximando-se do eixo real pela parte inferior do eixo imaginário):

$$A_u(s, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} A[s(u+i\epsilon, t), t] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} A(4m^2 - u - t - i\epsilon, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} A[s(u, t) - i\epsilon, t] . \quad (2.32)$$

Desta maneira, a descontinuidade no canal  $u$  é calculada por

$$\begin{aligned} D_u(s, t) \equiv Disc_u A(s(u, t), t) &= \frac{1}{2i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [A(s(u + i\epsilon, t), t) - A(s(u - i\epsilon, t), t)] = \\ &= \frac{1}{2i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [A(4m^2 - u - t - i\epsilon, t) - A(4m^2 - u - t + i\epsilon, t)] . \end{aligned} \quad (2.33)$$

Com a amplitude de espalhamento, calculam-se as seções de choque diferencial, total e elástica, observáveis medidos nos aceleradores e que, de forma resumida, estão relacionados à probabilidade de um espalhamento ocorrer. Trataremos destas quantidades na próxima subseção.

### 2.1.3 Seções de choque e teorema óptico

Primeiramente, iremos definir seção de choque diferencial, cujo valor representa a razão entre o número de partículas espalhadas em um elemento de ângulo sólido  $d\Omega$  por unidade de tempo, e o número de partículas incidentes que cruzam uma unidade de área por unidade de tempo, de maneira que [28]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r^2 |\vec{j}_{\text{espalhado}}|}{|\vec{j}_{\text{incidente}}|} , \quad (2.34)$$

sendo  $|\vec{j}_{\text{incidente}}|$  a densidade de corrente incidente e  $|\vec{j}_{\text{espalhado}}|$  a densidade de corrente espalhada. Ambas expressões advêm do cálculo da corrente de probabilidade obtida através da equação de Schrödinger:

$$\vec{j} = -\frac{i\hbar}{2M} (\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*) . \quad (2.35)$$

Através das Eqs. (2.19) e (2.35),

$$\vec{j}_{\text{incidente}} = \frac{\hbar k}{M} \hat{z} , \quad (2.36)$$

$$\vec{j}_{\text{espalhado}} = \frac{\hbar k}{r^2 M} |f(\vec{k}, \vec{k}')|^2 \hat{r} . \quad (2.37)$$

E, portanto,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\vec{k}, \vec{k}')|^2 . \quad (2.38)$$

Na expressão acima, pode-se integrar  $d\sigma$  e obter a seção de choque elástica.

Em um processo de espalhamento, podemos ter processos elásticos e inelásticos. No contexto da física de partículas, processos elásticos ocorrem quando as partículas do estado final são idênticas ao estado final ( $A + B \rightarrow A' + B'$ ), tal como discutido na seção anterior. Já um processo inelástico ocorre quando o estado final não é idêntico ao estado inicial, ocorrendo dissociação de partículas (nos casos de grande *gap* de rapidez, ou pseudo-rapidez). Podemos ter um canal elástico e vários canais inelásticos em um espalhamento. Assim, calcula-se a seção de choque elástica e a seção de choque inelástica, de forma que a soma das duas resulta na seção de choque total  $\sigma_{tot} = \sigma_{el} + \sigma_{inel}$ , cujo valor mede a área efetiva da interação, a qual está relacionada à probabilidade do espalhamento ocorrer, tal como discutido anteriormente.

Passaremos agora para o cálculo da seção de choque total, cujo valor é determinado a partir do chamado teorema óptico. [30]

Para estados ortonormais  $|f\rangle$  e  $|i\rangle$  que satisfazem  $\langle f|f\rangle = \langle i|i\rangle$  e  $\langle f|f'\rangle = \delta_{ff'}$ , o elemento  $\langle f|S|i\rangle$  da matriz  $S$  é definido de tal forma que

$$P_{fi} = |\langle f|S|i\rangle|^2 , \quad (2.39)$$

é a probabilidade do estado  $|f\rangle$  ser o estado final, dado um estado inicial  $|i\rangle$ . Levando em conta que o conjunto de estados  $|f\rangle$  é completo, temos que:

$$\sum_f |f\rangle\langle f| = I , \quad (2.40)$$

onde  $I$  é a matriz identidade e a dimensão do espaço vetorial é infinita. A probabilidade total de um estado inicial chegar a um determinado estado final deve ser igual a unidade, de modo que

$$1 = \sum_f |\langle f|S|i\rangle|^2 = \sum_f \langle i|S^\dagger|f\rangle\langle f|S|i\rangle = \langle i|S^\dagger S|i\rangle , \quad (2.41)$$

o que leva ao fato de que  $S^\dagger S = I$ , desde que os estados formem um conjunto completo ortonormal. Portanto, a matriz  $S$  é unitária.

Consideremos agora um processo com dois corpos no estado inicial. A matriz  $S$  está relacionada à matriz de transição  $T$  através da expressão:

$$\langle f|S|i\rangle = \langle P'_1 P'_2 \dots P'_n | S | P_1 P_2 \rangle = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^4(P^f - P^i) \langle f|T|i\rangle, \quad (2.42)$$

onde  $P^f$  é a soma sobre os quadri-momentos finais e  $P^i$  é a soma sobre os quadri-momentos iniciais. A taxa de transição por unidade de tempo por unidade de volume de um estado inicial  $|i\rangle = |P_1 P_2\rangle$  para um estado final  $|f\rangle = |P'_1 P'_2 \dots P'_n\rangle$  é dada por

$$R_{fi} = (2\pi)^4 \delta^4(P^f - P^i) |\langle f|T|i\rangle|^2, \quad (2.43)$$

de maneira que a seção de choque total no processo  $1 + 2 \rightarrow n$  é expressa por

$$\sigma_{12 \rightarrow n} = \frac{1}{4|\vec{p}_1| \sqrt{s}} \sum_n (2\pi)^4 \delta^4(P^f - P^i) |\langle f_n|T|i\rangle|^2, \quad (2.44)$$

em que a soma está sendo feita sobre os momentos das partículas nos estados  $\langle f_n|$ .

A unitariedade da matriz  $S$  é resultado de uma importante relação entre a seção de choque total e a amplitude de espalhamento frontal: o ângulo de espalhamento,  $\theta$ , medido em relação ao eixo  $z$ , é nulo. Devido ao fato de que  $SS^\dagger = I$ , para quaisquer estados ortonormais,

$$\delta_{ij} = \langle j|SS^\dagger|i\rangle = \sum_f \langle j|S|f\rangle \langle f|S^\dagger|i\rangle, \quad (2.45)$$

Através da definição da matriz  $T$  da Eq. (2.42), podemos escrever:

$$\langle j|T|i\rangle - \langle j|T^\dagger|i\rangle = (2\pi)^4 i \sum_f \delta^4(P^f - P^i) \langle j|T^\dagger|f\rangle \langle f|T|i\rangle, \quad (2.46)$$

Para o caso em que  $j = i$ ,

$$2Im\langle i|T|i\rangle = \sum_f (2\pi)^4 \delta^4(P^f - P^i) |\langle f|T|i\rangle|^2, \quad (2.47)$$

Na equação acima, o lado direito é a taxa de transição total [veja Eq. (2.43)]. Daí obtém-se a seção de choque total [através da Eq. (2.44)], realizando-se a soma em  $n$  (número de partículas no estado final):

$$\sigma_{12}^{tot} = \frac{1}{2|\vec{p}_1|\sqrt{s}} \text{Im} \langle i|T|i \rangle , \quad (2.48)$$

em que  $|\vec{p}_1|$  é o módulo do tri-momento inicial no referencial do CM, e tem como expressão:

$$|\vec{p}_1|^2 s = (P_1 \cdot P_2)^2 - m_1^2 m_2^2 = \frac{1}{4} [s - (m_1 + m_2)^2] [s - (m_1 - m_2)^2] . \quad (2.49)$$

O termo  $\langle i|T|i \rangle$  é a amplitude de espalhamento para a reação  $1 + 2 \rightarrow 1 + 2$ , de forma que o ângulo de espalhamento é nulo e, sendo assim,  $t = 0$ . Portanto,

$$\sigma_{12}^{tot} = \frac{1}{2|\vec{p}_1|\sqrt{s}} \text{Im} [A(s, t = 0)] , \quad (2.50)$$

em que  $A(s, t)$  é a amplitude elástica de espalhamento. A equação acima é chamada de teorema óptico, o qual será usado para o cálculo das seções de choque ao longo deste trabalho.

Finalizada a Seção 2.1, iniciaremos agora a discussão acerca da teoria de Regge, tratando primeiramente do conceito de *polos de Regge* na Seção 2.2.

## 2.2 Polos de Regge

Muitos processos de espalhamento exibem um pico bem acentuado na amplitude na direção longitudinal, ou seja,  $t$  pequeno e menor que zero (onde  $t$  refere-se a uma das variáveis de Mandelstam, cujo valor é igual ao quadrado do quadri-momento transferido no processo), os quais podem ser chamados de processos *soft*. O estudo da presença ou ausência deste pico revelou que existe uma correlação entre a existência destes picos nos processos de canal  $s$  e trocas de partículas ou ressonâncias no canal  $t$ , o que faz com que estas trocas sejam parte importante dos espalhamentos em altas energias.

Consideremos, por exemplo, a amplitude de espalhamento para um processo  $1+2 \rightarrow 3+4$  em ondas parciais <sup>9</sup> para partículas sem spin no canal  $s$ : [24]

$$A(s, t) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) A_l(t) P_l(z), \quad (2.51)$$

onde

$$z \equiv \cos(\theta) = 1 + \frac{2s}{t - 4m^2}, \quad (2.52)$$

e  $t > 4m^2$ ,  $s < 0$ ,  $|z| \leq 1$  e  $P_l(z)$  são os polinômios de Legendre. A expressão acima é válida para o caso em que as massas das partículas são idênticas. O que deve ser observado é que, embora a amplitude de espalhamento na Eq. (2.51) represente um processo de espalhamento no canal  $t$ , esta expressão não pode ser estendida para processos no canal  $s$ . Isto se deve ao fato de que, se  $s \rightarrow \infty$ ,  $z$  fica proporcional a  $s$  e, para grandes valores de  $z$ ,  $P_l \sim z^l$ , o que faz com que a série da Eq. (2.51) divirja. Portanto, para que possamos usá-la, devemos determinar qual sua região de convergência e depois estendê-la analiticamente para as regiões que precisamos. De forma resumida, deve-se transformar esta série numa integral em  $l$ . Além disso, como será visto posteriormente, é necessário que os valores de  $l$  sejam estendidos para o plano complexo, questão essa que é central na teoria de Regge.

Passemos agora para uma breve introdução da ideia por trás da teoria de Regge. Para potenciais bem comportados (como o de Yukawa<sup>10</sup>, por exemplo), as singularidades de  $a(l, k)$  (função de onda parcial que foi interpolada) aparecem como polos (chamados de polos de Regge), localizados em valores de  $l$  definidos como [24]

$$l = \alpha(k), \quad (2.53)$$

onde  $\alpha(k)$  é chamada de trajetória de Regge.

<sup>9</sup> No contexto da Mecânica Quântica, o formalismo de ondas parciais é uma técnica de resolução de processos de espalhamento (com presença de um potencial central esfericamente simétrico) em que se decompõe a amplitude de espalhamento em suas componentes em termos do momento angular  $l$ , aplicando-se condições de fronteira apropriadas para a solução do problema. A expressão para a função de onda num processo de espalhamento (considerando grande distância do potencial espalhador) é expressa por  $\Psi(r, \theta) \approx \left( e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \right)$ , onde  $f(\theta)$  é a amplitude de espalhamento dada por  $f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) A_l P_l(\cos\theta)$ , sendo  $P_l(\cos\theta)$  os polinômios de Legendre e  $A_l$  os coeficientes a serem determinados em função da forma do potencial espalhador.

<sup>10</sup> O potencial de Yukawa é expresso por  $V(r) = \frac{g^2}{4\pi r} e^{-\frac{mcr}{\hbar}}$ , onde  $g$  é uma constante e  $m$  é a massa da partícula afetada pelo potencial.

O uso da teoria de Regge na física de partículas de altas energias se deve a Chew e Frautschi [31, 32] e Gribov [33–35]. De forma antecipada, pode-se dizer que a função de onda parcial relativística,  $A_l(t)$ , pode ser continuada para valores complexos de  $l$  de forma única, tendo polos simples em  $l = \alpha(t)$ . Adiantando um resultado chave deste formalismo, cada polo contribui para a amplitude de espalhamento da seguinte forma: [24]

$$A(s, t)_{s \rightarrow \infty} \sim s^{\alpha(t)} , \quad (2.54)$$

onde  $s$  é também uma das variáveis de Mandelstam, cujo valor é igual ao quadrado da energia do CM do processo.

Como já dito anteriormente, a teoria de Regge considera processos de espalhamento devido a um potencial central  $V(r)$ , devendo o mesmo ser analítico e bem comportado, como o potencial de Yukawa, por exemplo. Considera também que há troca de “algum objeto” no canal  $t$ , por isso diz-se que pertence a uma classe de modelos chamados de modelos de canal  $t$ .

Forças nucleares geralmente são atribuídas à troca de alguma partícula virtual, analogamente ao caso da Eletrodinâmica Quântica (em inglês, *Quantum Electrodynamics* - QED), onde essa partícula virtual é o fóton. Pode-se considerar que essas partículas de troca sejam mésons, por exemplo, como  $\pi$ ,  $K$ , etc. Todavia, no regime de altas energias, esta teoria falha, pois há violação do limite de Froissart-Martin [3], o qual determina que a seção de choque total não pode crescer mais rápido do que [36]

$$\sigma_{tot}(s)_{s \rightarrow \infty} \sim \frac{4\pi}{t_0} \ln^2 \left( \frac{s}{s_0} \right) , \quad (2.55)$$

sendo  $t_0$  o valor mínimo da massa ao quadrado na singularidade presente no canal  $t$  e  $s_0$  um fator de normalização arbitrário, o qual indica onde inicia o regime assintótico. Este limite é consequência da unitariedade da matriz  $S$ .

No contexto da teoria de Regge, considera-se que há troca de objetos chamados reggeons no canal  $t$ , e isto resolve o problema levantado acima.

Mostremos, então, porque a ideia de reggeon é necessária para que não haja violação do limite de Froissart-Martin. Admitindo a troca de um méson de massa  $M$  e spin  $J$  no canal  $t$  (Figura 2.5), temos:

$$A_{mes}(s, t) \sim A_J(t) P_J(\cos\theta) , \quad (2.56)$$

onde

$$\cos(\theta) = 1 + \frac{2s}{t - 4m^2}, \quad (2.57)$$

sendo  $m$  a massa das partículas interagentes.

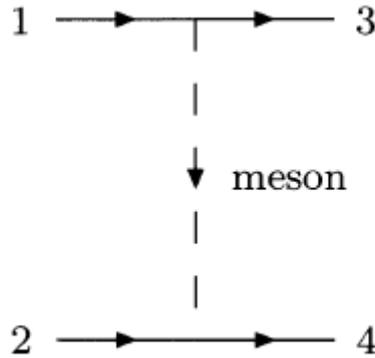


Figura 2.5 – Troca de um Meson no canal  $t$ . [24]

Como citado antes,  $A_{mes}(s, t)$  representa a amplitude de espalhamento em ondas parciais, onde  $P_J(\cos\theta)$  representam os polinômios de Legendre. Como  $A_J(t)$  contém um polo de singularidade, através do uso dos diagramas de Feynman, verifica-se que o propagador do objeto virtual vale  $(t - M^2)^{-1}$  e, portanto,

$$A_{mes}(s, t) \sim \frac{P_J(\cos\theta)}{t - M^2}. \quad (2.58)$$

Mantendo  $t$  fixo,  $s \rightarrow \infty$  e levando em consideração a Eq. (2.56), de tal forma que  $P_l \sim z^l$ , temos

$$A_{mes}(s, t) \sim s^J. \quad (2.59)$$

Como pode-se perceber, a amplitude de espalhamento para a troca de um méson tem apenas componente real. Portanto, pelo teorema óptico, o qual determina que

$$\sigma_{tot} = \frac{1}{s} \text{Im}[A(s, t = 0)], \quad (2.60)$$

esta amplitude não contribui para a seção de choque total.

Para que determinemos a parte imaginária da amplitude de espalhamento, devemos levar em consideração a relação de unitariedade da matriz  $S$ , ou seja,  $S^\dagger S = SS^\dagger = I$ ,

em que  $I$  representa a matriz identidade. De modo equivalente, a relação de unitariedade pode ser definida através da matriz  $T$ . Como  $S = I + iT$ ,

$$(I - iT^\dagger)(I + iT) = I . \quad (2.61)$$

Assim,

$$i(T^\dagger - T) = T^\dagger T . \quad (2.62)$$

Considerando agora os elementos das matrizes acima entre os estados inicial e final do espalhamento e levando em conta  $n$  estados intermediários,

$$i\langle f | T^\dagger - T | i \rangle = \sum_{\{n\}} \langle f | T^\dagger | n \rangle \langle n | T | i \rangle . \quad (2.63)$$

Desta forma,

$$2 \operatorname{Im}(T_{if}) = \sum_{\{n\}} T_{fn}^* T_{in} , \quad (2.64)$$

onde  $\sum_{\{n\}}$  contém a soma discreta sobre todos os números quânticos e a integração sobre todos os momenta das partículas sem spin:

$$\sum_{\{n\}} = \sum_n \int \prod_{k=1}^n \frac{d^3 q_k}{(2\pi)^3 2E_k} . \quad (2.65)$$

Levando em conta a conservação do quadri-momento,

$$T_{if} = (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) A(i \rightarrow f) , \quad (2.66)$$

e fazendo uso da Eq. (2.64), chega-se a

$$2 \operatorname{Im}[A(i \rightarrow f)] = \sum_n \int d\Pi_n A^*(f \rightarrow n) A(i \rightarrow n) , \quad (2.67)$$

onde  $d\Pi_n$  é o tamanho do espaço de fase da  $n$ -ésima partícula. Utilizando essas relações de unitariedade, pode-se concluir que

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}[A_{el}(s, t)] &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3 2\epsilon_1} \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3 2\epsilon_2} \\ &\times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) A_{el}(s, t_1) A_{el}^*(s, t_2) . \end{aligned} \quad (2.68)$$

onde  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$  são as componentes temporal dos quadri-momentos  $k_1$  e  $k_2$ , respectivamente. No sistema de referência do CM,  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \sqrt{k_1^2 + m^2}$ . Deste modo, através das Eqs. (2.59) e (2.68), obtemos

$$\text{Im}[A(s, t = 0)]_{s \rightarrow \infty} \sim s^{2J-1} . \quad (2.69)$$

Pelo teorema óptico,

$$\sigma_{tot} = \frac{1}{s} \text{Im}[A(s, t = 0)]_{s \rightarrow \infty} \sim s^{2J-2} . \quad (2.70)$$

Como pode ser visto, se  $J > 1$  (spin da partícula é maior que 1), há violação do limite de Froissart-Martin no limite assintótico.

Como já foi mencionado, no caso da teoria de Regge, este problema pode ser resolvido levando-se em consideração que há troca de reggeons no canal  $t$ , e não ressonâncias (mésons)<sup>11</sup>. Desta maneira, as amplitudes de espalhamento irão se comportar como na Eq. (2.54), não violando o limite de Froissart-Martin. Esta ideia será tratada em detalhes ao longo deste capítulo.

## 2.3 A expansão em ondas parciais e o momento angular complexo

Nesta seção será discutida a razão pela qual se faz necessária a continuação do momento angular  $l$  para valores complexos.

A técnica de estender  $l$  para valores complexos é anterior aos trabalhos de Regge. Foi inicialmente estudada por Poincaré e, posteriormente, por Sommerfeld, no estudo da propagação de ondas eletromagnéticas. Regge introduziu esse conceito na Mecânica Quântica, onde investigou as propriedades da amplitude de espalhamento em função de um potencial de espalhamento  $V(r)$ .

<sup>11</sup> Reggeons representam famílias de ressonâncias. Além da ressonância no estado fundamental, consideram-se também seus estados excitados, levando a um conjunto de ressonâncias que se encontram sobre uma mesma trajetória linear, chamada de trajetória de Regge, cujo conceito e definição será tratado em detalhes nas próximas seções. Para discussões mais detalhadas sobre reggeons, veja Referência [37].

Comecemos considerando a expansão em ondas parciais para amplitude de espalhamento no canal  $s$ : [24]

$$A(s, z) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) A_l(s) P_l(z) , \quad (2.71)$$

onde

$$A_l(s) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dz P_l(z) A(s, t(z, s)) , \quad (2.72)$$

em que  $s > 4m^2$  é o limiar, a variável  $z$  foi definida na Eq. (2.52) e está no domínio  $-1 \leq z \leq 1$  e  $P_l(z) = P_l[\cos(\theta)]$  são os Polinômios de Legendre, os quais podem ser expressos pela fórmula de Rodrigues:

$$P_l(z) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dz^l} (z^2 - 1)^l . \quad (2.73)$$

Como veremos, o problema de encontrar uma amplitude  $A(s, t)$  conectando os vários canais pode ser resolvido através da introdução do conceito de momento angular complexo. Quando  $l$  tende a infinito, temos o comportamento assintótico dos polinômios de Legendre:

$$[P_l(z)]_{l \rightarrow \infty} = [P_l(\cos\theta)]_{l \rightarrow \infty} = \mathcal{O}(e^{l|Im(\theta)|}) . \quad (2.74)$$

A série acima converge se, e somente se, quando  $l$  tende a infinito,

$$A_l(s) \sim e^{-\eta(s)l} , \quad (2.75)$$

e, além disso,

$$|Im(\theta)| \leq \eta(s) , \quad (2.76)$$

onde  $\eta(s)$  é o intervalo de convergência da série na Eq. (2.71) no eixo real. Definindo  $\xi \equiv \cosh[\eta(s)]$ , o intervalo de convergência da expansão da amplitude em ondas parciais no plano complexo  $z = x + iy$  é dado por

$$\frac{x^2}{\xi^2} + \frac{y^2}{\xi^2 - 1} = 1 . \quad (2.77)$$

Esta é a equação de uma elipse, chamada de elipse de Lehmann, a qual pode ser vista na Figura 2.6. Pelo fato de ser uma elipse, o valor de  $z$  nunca pode ser estendido para valores

arbitrariamente altos, o que significa que, para um valor fixo de  $s$ ,  $A(s, t)$  não pode ser continuada para valores grandes de  $t$  e  $u$ .

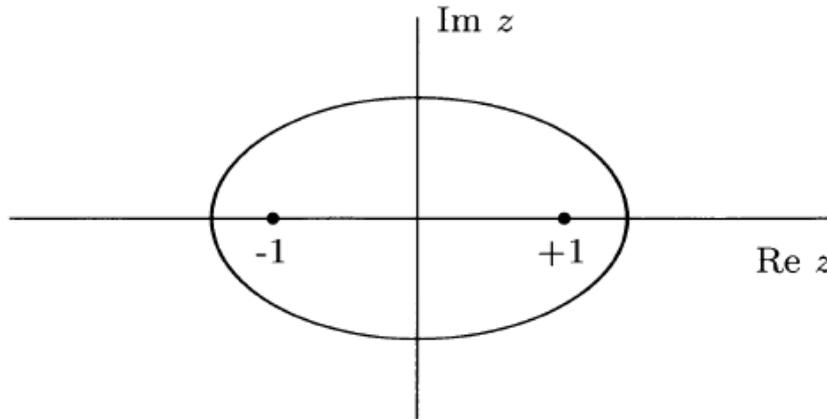


Figura 2.6 – Elipse de Lehmann. [24]

Dado este problema, pode-se resolver tal questão estendendo o valor de  $l$  para valores complexos, e esta é a principal ideia da teoria de Regge. Para fins de simplificação, se considerarmos apenas valores imaginários de  $l$ , [24]

$$A_{|l|}(s)_{l \rightarrow i\infty} \sim e^{-|l|\delta(s)}, \quad (2.78)$$

onde a região de convergência é dada por

$$|Re(\theta)| \leq \delta(s). \quad (2.79)$$

Definindo  $\xi \equiv \cos(\delta)$ , o intervalo de convergência na variável complexa  $z$  é expresso por

$$\frac{x^2}{\xi^2} - \frac{y^2}{1 - \xi^2} = 1. \quad (2.80)$$

A expressão acima é a equação de uma hipérbole, o que é um domínio aberto, ao contrário do domínio anterior que era fechado (elipse). Sendo assim, para um valor de  $s$  fixo,  $t$  e  $u$  podem assumir valores arbitrariamente grandes, diferentemente do caso da elipse.

Para que  $A(s, t)$  possa ser válida para todos os canais, esta deve possuir algumas propriedades. Levando em consideração que  $A_l(s)$  pode ser estendida para valores complexos de  $l$ , para que se construa uma função  $A(l, s)$ , deve-se supor também que:

- I.  $A(l, s)$  tem somente singularidades isoladas no plano  $l$  complexo;

- II.  $A(l, s)$  é holomórfica para  $Re(l) > L$  (valor máximo assumido por  $l$ );  
 III.  $A(l, s) = 0$  quando  $|l| = 0$  para  $Re(l) > 0$ .

Tal amplitude de espalhamento, com estas propriedades, existe apenas em dois casos: na Mecânica Quântica, para certas classes de potenciais, e no caso relativístico, caso a amplitude de espalhamento obedeça condições de dispersão apropriadas.

Fazendo uso das propriedades I e II, pode-se escrever a expansão em ondas parciais como [24]

$$A(s, z) = \sum_{l=0}^{N-1} (2l+1) A_l(s) P_l(z) - \frac{1}{2i} \int_C (2l+1) A(l, s) \frac{P_l(-z)}{\text{sen}(\pi l)} dl, \quad (2.81)$$

onde  $N$  é o primeiro inteiro maior que  $L$  e  $C$  é o contorno mostrado na Figura 2.7, o qual desconsidera todas as singularidades de  $A(l, s)$ . Pelo teorema dos resíduos, a Eq. (2.81) é equivalente a Eq. (2.71). O integrando da Eq. (2.81) tem polos simples em  $l = n$  (onde  $n$  é qualquer inteiro maior ou igual a  $N$ ) e resíduos:

$$\text{Res} f(l)|_{l=n} = 2i(2n+1) A_n(s) P_n(z), \quad (2.82)$$

em que  $f(l)$  é o integrando da Eq. (2.81), e  $P_n(-z) = (-1)^n P_n(z)$ .

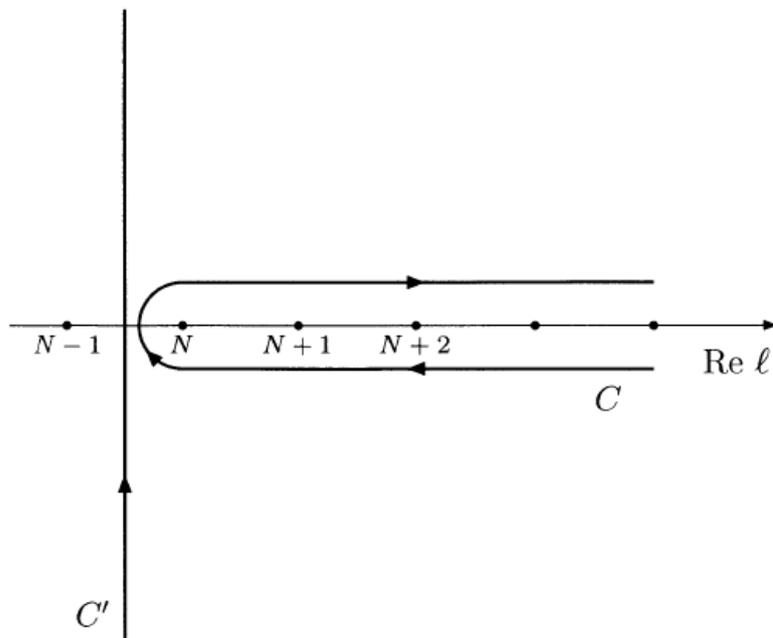


Figura 2.7 – Contorno de integração para a representação de Watson-Sommerfeld da amplitude de espalhamento. [24]

Deformando o contorno  $C$  em  $C' = (a - i\infty, a + i\infty)$ , onde  $a$  é o ponto onde os eixos vertical e horizontal se cruzam na Figura 2.7, usando a propriedade (III) e fazendo  $l$  tender a infinito nos polinômios de Legendre,

$$\left| \frac{P_l(-z)}{\text{sen}\pi l} \right| < l^{-\frac{1}{2}} \exp[|Im(\theta)Re(l) + [\pi - Re(\theta)]Im(l) - \pi|Im(l)|]f(z). \quad (2.83)$$

Isso garante que a integral do semiciclo  $C$ , agora deformado em  $C'$ , se anule no infinito. Portanto,

$$A(s, z) = \sum_{l=0}^{N-1} (2l+1)A_l(s)P_l(z) - \frac{1}{2i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} (2l+1)A(l, s) \frac{P_l(-z)}{\text{sen}\pi l} dl, \quad (2.84)$$

para  $Re(a \geq L)$ .

Em seguida, o contorno  $C'$  deve ser movido para a esquerda, ou seja, para valores reais de  $l$  cada vez menores. Sendo assim, haverá contribuição dos resíduos dos polos de  $A(l, s)$  juntamente com os polos de  $\frac{1}{\text{sen}\pi l}$ . Fazendo  $-\frac{1}{2} \leq Re(l) \leq 0$ ,

$$A(s, z) = - \sum_i \pi(2\alpha_i(s) + 1)\beta_i(s) \frac{P_{\alpha_i}(-z)}{\text{sen}\pi\alpha_i} - \frac{1}{2i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (2l+1)A(l, s) \frac{P_l(-z)}{\text{sen}\pi l} dl, \quad (2.85)$$

onde  $\beta_i(s)$  é o resíduo do  $i$ -ésimo polo e  $\alpha_i(s)$  é a localização deste polo no plano  $l$  complexo (Figura 2.8). A equação anterior é chamada de representação de Watson-Sommerfeld [18, 24, 38]. Consideremos o comportamento da Eq. (2.85) para valores grandes de  $|z|$  e valores fixos de  $s$ . Tomando  $Re(l) \geq -1/2$ ,

$$P_l(z)|_{|z| \rightarrow \infty} \sim z^l. \quad (2.86)$$

Isso resulta que a integral da Eq. (2.85) tem uma contribuição muito pequena quando  $|z|$  tende a infinito. Logo,

$$A(s, z)|_{|z| \rightarrow \infty} \simeq - \sum_i \beta_i(s) \frac{(-z)^{\alpha_i(s)}}{\text{sen}[\pi\alpha_i(s)]}. \quad (2.87)$$

O termo dominante desta série é o polo mais à direita do eixo real, ou seja, que tem o maior valor de  $Re(\alpha_i)$ . Podemos chamar  $\alpha_i(s)$  de trajetória de Regge e denotá-la apenas por  $\alpha(s)$ . Portanto, para  $s$  fixo e valores grandes de  $t$ ,  $A(s, t)$  tem o comportamento assintótico

$$A(s, t)_{t \rightarrow \infty} \sim -\beta(s) \frac{t^{\alpha(s)}}{\text{sen}\pi\alpha(s)}, \quad (2.88)$$

onde  $\beta(s)$  é uma função de resíduo a ser determinada. Escrevendo a expressão acima no canal  $t$ ,

$$A(s, t)_{s \rightarrow \infty} \sim -\beta(t) \frac{s^{\alpha(t)}}{\text{sen} \pi \alpha(t)} . \quad (2.89)$$

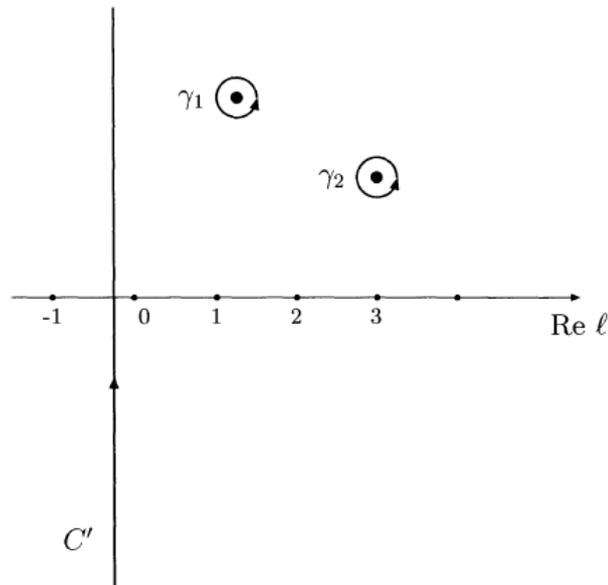


Figura 2.8 – O contorno de integração deformado para a representação de Watson-Sommerfeld da amplitude de espalhamento. [24]

Na próxima seção mostraremos como a amplitude  $A(l, s)$  pode ser construída considerando espalhamentos relativísticos.

## 2.4 Polos de Regge no espalhamento relativístico

Definidas as quantidades  $D_s(s, t)$  e  $D_u(s, t)$  na Subseção 2.1.2, podemos partir para o tratamento da amplitude de espalhamento  $A_l(t)$  em uma representação integral, chamada de projeção de Froissart-Gribov [3, 33], válida para valores  $l \geq N$ :

$$A_l(t) = \frac{1}{\pi} \int_{z_0}^{\infty} D_s(s(z_t, t), t) Q_l(z_t) dz_t + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-z_0} D_u(u(z_t, t), t) Q_l(z_t) dz_t , \quad (2.90)$$

onde  $Q_l(z_t)$  são os polinômios de Legendre do segundo tipo e

$$z_t \equiv \cos \theta = 1 + \frac{2s}{t - 4m^2} . \quad (2.91)$$

Fazendo a mudança de variável na segunda integral  $z_t \rightarrow -z_t$ , usando  $u(-z_t, t) = s(z_t, t)$  e

$$Q_l(-z_t) = -e^{-i\pi l} Q_l(z_t) , \quad (2.92)$$

temos o resultado:

$$A_l(t) = \frac{1}{\pi} \int_{z_0}^{\infty} [D_s(s(z_t, t), t) + e^{-i\pi l} D_u(s(z_t, t), t)] Q_l(z_t) dz_t , \quad (2.93)$$

onde o termo  $e^{-i\pi l} = (-1)^l$  é um fator que precisa ser analisado. Quando  $l$  tende ao infinito, o segundo termo da equação acima gera uma divergência. Para contornar tal problema, pode-se definir duas amplitudes,  $A_l^+$  e  $A_l^-$ , de tal modo que [24]

$$A_l^\pm(t) = \frac{1}{\pi} \int_{z_0}^{\infty} [D_s(s, t) \pm D_u(s, t)] Q_l(z_t) dz_t , \quad (2.94)$$

onde, para  $l$  par,

$$A_l^+(t) = A_l(t) , \quad (2.95)$$

e, para  $l$  ímpar,

$$A_l^-(t) = A_l(t) . \quad (2.96)$$

O sinal de “+” ou “-” na Eq. (2.94) está relacionado a um novo número quântico que será introduzido a partir de agora: assinatura, cujo símbolo será  $\xi$ . Se  $\xi = +1$ , diz-se que a amplitude tem assinatura positiva. Se  $\xi = -1$ , diz-se que a assinatura é negativa. Reescrevendo a Eq. (2.94), temos:

$$A_l^\xi(t) = \frac{1}{\pi} \int_{z_0}^{\infty} D_s^\xi(s, t) Q_l(z_t) dz_t , \quad (2.97)$$

onde a descontinuidade na assinatura é dada por

$$D_s^\xi(s, t) = D_s(s, t) + \xi D_u(s, t) . \quad (2.98)$$

A amplitude  $A_l(t)$  é obtida de  $A_l^\xi(t)$  através de

$$A_l(t) = \frac{1}{2} \sum_{\xi=\pm} (1 + \xi e^{-i\pi l}) A_l^\xi(t) . \quad (2.99)$$

A amplitude de espalhamento com assinatura definida é escrita em termos de  $A_l^\xi(t)$ :

$$A^\xi(z_t, l) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) A_l^\xi(t) P_l(z_t) . \quad (2.100)$$

Usando o fato de que  $P_l(-z_t) = (-1)^l P_l(z_t)$ , a amplitude de espalhamento completa é determinada a partir da seguinte expressão: [24]

$$A(z_t, t) = \frac{1}{2}[A^+(z_t, t) + A^+(-z_t, t) + A^-(z_t, t) - A^-(-z_t, t)] . \quad (2.101)$$

No limite de  $l \rightarrow \infty$ , continuando  $l$  para o plano complexo, tem-se  $A^\xi(l, t)$ . Usando a transformação de Watson-Sommerfeld [18, 24, 38], podemos construir  $A^\xi(z_t, t)$ , de modo que

$$A^\xi(z_t, t) = -\frac{1}{2i} \int_C (2l+1) A^\xi(l, t) \frac{P_l(-z_t)}{\text{sen} \pi l} dl . \quad (2.102)$$

Utilizando as mesmas manipulações anteriores que foram usadas para se chegar em  $A(s, z)$ , temos agora esta função com a assinatura  $\xi$ , ou seja,  $A^\xi(z_t, t)$ . Assim,

$$A^\xi(z_t, t) = - \sum_{i\xi} \pi(2\alpha_{i\xi}(s) + 1) \beta_{i\xi}(s) \frac{P_{\alpha_{i\xi}}(-z)}{\text{sen}(\pi\alpha_{i\xi})} - \frac{1}{2i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (2l+1) A(l, s) \frac{P_l(-z)}{\text{sen}(\pi l)} dl . \quad (2.103)$$

A amplitude total, realizando a soma sobre assinaturas  $\xi$  é, então,

$$A(z_t, t) = - \sum_{\xi=\pm 1} \sum_{i\xi} \frac{1 + \xi e^{-i\pi\alpha_{i\xi}(t)}}{2} \pi[2\alpha_{i\xi}(t) + 1] \beta_{i\xi}(t) \frac{P_{\alpha_{i\xi}}(-z_t)}{\text{sen}[\pi\alpha_{i\xi}(t)]} - \frac{1}{2i} \sum_{\xi=\pm 1} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1 + \xi e^{-i\pi l}}{2} (2l+1) A(l, t) \frac{P_l(-z_t)}{\text{sen}(\pi l)} dl . \quad (2.104)$$

Devido ao comportamento assintótico dos polinômios de Legendre e também levando em consideração o fato de que a contribuição da série é dominante em relação à integral,

$$A(z_t, t)_{|z_t| \rightarrow \infty} \simeq - \sum_{\xi=\pm 1} \sum_{i\xi} \beta_{i\xi}(t) \frac{1 + \xi e^{-i\pi\alpha_{i\xi}}}{\text{sen}[\pi\alpha_{i\xi}(t)]} (-z_t)^{\alpha_{i\xi}(t)} . \quad (2.105)$$

Comparando a equação anterior com a Eq. (2.89), pode-se perceber que a única diferença entre as duas é o fator  $1 + \xi e^{-i\pi\alpha_{i\xi}}$ . Se considerarmos somente o polo dominante, ou seja, com o maior valor  $Re(\alpha_{i\xi})$ ,

$$A(s, t)_{s \rightarrow \infty} \sim -\beta(t) \frac{1 + \xi e^{-i\pi\alpha(t)}}{\text{sen}[\pi\alpha(t)]} s^{\alpha(t)} , \quad (2.106)$$

onde  $\alpha(t)$  é a trajetória de Regge e  $\beta(t)$  é seu resíduo. De forma análoga, para o canal  $s$ , fazendo  $t$  tender a infinito,

$$A(s, t)_{t \rightarrow \infty} \sim -\beta(s) \frac{1 + \xi e^{-i\pi\alpha(s)}}{\text{sen}[\pi\alpha(s)]} t^{\alpha(s)}. \quad (2.107)$$

Como já foi mencionado, estas expressões mostram que a singularidade dominante do momento angular complexo (singularidade com a maior parte real), determina o comportamento assintótico da amplitude.

Para o regime de altas energias, foi aplicado o limite de Regge na derivação da Eq. (2.106) ( $s \rightarrow \infty$  e  $t$  fixo). Isso poderia ser feito desde o início, analisando-se o limite assintótico dos polinômios de Legendre do segundo tipo:

$$Q_l(z)_{|z| \rightarrow \infty} \sim \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l+3/2)} (2z)^{-l-1}. \quad (2.108)$$

Com isso, podemos introduzir a projeção de Froissart-Gribov [3, 33] das amplitudes em ondas parciais com assinatura definida no limite de Regge (com  $z_t \simeq -2s/|t|$ ): [24]

$$a^\xi(l, t) = \int_0^\infty D_s^\xi(s, t) \left(\frac{s}{|t|}\right)^{(-l-1)} d\left(\frac{s}{|t|}\right). \quad (2.109)$$

O termo  $a^\xi$  é chamado de transformada de Mellin da descontinuidade  $D_s^\xi(s, t)$ . A transformada inversa de Mellin da Eq. (2.109) é dada por

$$D_s^\xi(s, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} a^\xi(l, t) \left(\frac{s}{|t|}\right)^l dl, \quad (2.110)$$

onde o contorno de integração é o mesmo utilizado na Eq. (2.84). Tomando o comportamento assintótico dos polinômios de Legendre,

$$P_l(z)_{|z| \rightarrow \infty} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(l+1/2)}{\Gamma(l+1)} (2l)^l. \quad (2.111)$$

Da Eq. (2.104), podemos determinar a expressão de Watson-Sommerfeld para o comportamento assintótico da amplitude de espalhamento em termos de  $a^\xi(l, t)$ . Então,

$$A(s, t) = -\frac{1}{4\pi i} \sum_{\xi=\pm 1} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{-i\pi l} + \xi}{\text{sen}(\pi l)} \left(\frac{s}{|t|}\right)^l a^\xi(l, t) dl. \quad (2.112)$$

Do tratamento feito até agora, pode-se perceber que, se  $D_s^\xi(s, t) \sim s^\alpha$ , temos:

$$a(l, t) \sim \frac{1}{l - \alpha}. \quad (2.113)$$

Sendo assim, a amplitude tem um polo simples no plano  $l$ .

## 2.5 Trajetórias de Regge

Como vimos anteriormente, na presença de um polo de Regge, quando  $l \rightarrow \alpha(t)$ , no canal  $s$ ,

$$A(l, t) \sim \frac{\beta(t)}{l - \alpha(t)} . \quad (2.114)$$

Geralmente as singularidades de  $l$  na amplitude em ondas parciais são complexas. A trajetória  $\alpha(t)$  toma valores inteiros de  $l$  para valores de  $t > 0$ , ou seja, valores não físicos. Esses polos de Regge são estados ligados, ou ressonâncias, como já foi dito previamente. Suponhamos que, para um valor real  $t_0$ ,

$$\alpha(t_0) = l + i\epsilon , \quad (2.115)$$

onde  $\epsilon$  é uma constante muito pequena e  $l$  é um número inteiro. Expandindo  $\alpha(t)$  em torno de  $t_0$ ,

$$\alpha(t) = l + i\epsilon + \alpha'(t_0)(t - t_0) + \dots + . \quad (2.116)$$

Na Eq. (2.114),

$$\frac{1}{l - \alpha(t)} \propto \frac{1}{t - t_0 + i\Gamma} , \quad (2.117)$$

em que

$$\Gamma = \frac{Im[\alpha(t_0)]}{\alpha(t_0)} = \frac{\epsilon}{\alpha(t_0)} . \quad (2.118)$$

Esta é a estrutura típica de um termo de Breit-Wigner [39] para uma ressonância de massa  $M = \sqrt{t_0}$ . Para que  $\Gamma$  seja real,

$$\left. \frac{d(Im[\alpha(t)])}{dt} \right|_{t_0} \ll \left. \frac{d(Re[\alpha(t)])}{dt} \right|_{t_0} . \quad (2.119)$$

Abaixo do limiar, que para o caso de partículas idênticas é  $4m^2$ ,  $Im[\alpha(t)] = 0$ , e os polos de Regge são estados ligados.

Para valores reais e positivos de  $t$ , os polos de Regge são ressonâncias e estados ligados com valores crescentes de momento angular  $l$ . Diz-se então que  $\alpha(t)$  é uma trajetória de Regge (reggeon) interpolando tais ressonâncias (ou estados ligados).

Analisando a Eq. (2.106), sempre que  $\alpha(t)$  passa por um inteiro, o denominador se anula. Já o numerador se torna nulo em outro valor inteiro de  $l$ . O que ocorre é que uma trajetória com assinatura negativa interpola entre valores inteiros ímpares de  $l$ , enquanto a positiva interpola entre valores inteiros pares de  $l$ . Na Eq. (2.106), por exemplo, o comportamento assintótico da amplitude ocorre devido à troca de uma família de ressonâncias no canal cruzado.

De uma forma simples, para que se visualize uma trajetória de Regge, façamos a expansão de  $\alpha(t)$  em torno de  $t = 0$ , considerando  $t$  pequeno:

$$\alpha(t) \simeq \alpha(0) + \alpha' t, \quad (2.120)$$

em que  $\alpha'$  é chamado de declividade e  $\alpha(0)$  é o valor onde  $\alpha(t)$  intercepta o eixo imaginário.

Mesmo a expressão acima sendo válida para pequenos valores de  $t$ , se forem interpoladas ressonâncias com números quânticos semelhantes (além do spin), é verificado que esta funciona também para valores mais altos de  $t$ , tanto para trajetórias mesônicas quanto bariônicas. Na Figura 2.9 podemos verificar as trajetórias dominantes [que possuem maior valor de  $\alpha(0)$ ] de alguns mésons ( $\rho$ ,  $f_2$ ,  $a_2$ ,  $\omega$ , etc), cujas expressões estão nas Eqs. (2.121). Cada trajetória tem os números quânticos conjugação de carga, paridade, paridade-G, isospin, estranheza, etc.

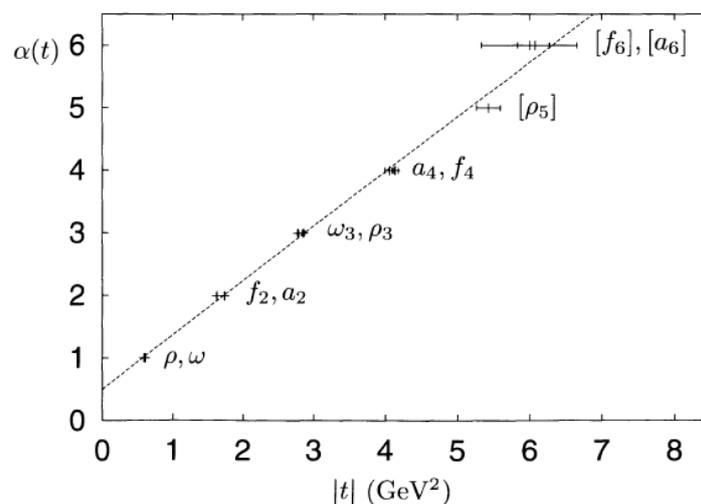


Figura 2.9 – Trajetórias mesônicas dominantes:  $\rho$ ,  $f_2$ ,  $a_2$ ,  $\omega$ , etc. [24]

$$\begin{aligned}
f_2 &: P = +1, C = +1, G = +1, I = 0, \xi = +1, \\
\rho &: P = -1, C = -1, G = +1, I = 1, \xi = -1, \\
\omega &: P = -1, C = -1, G = -1, I = 0, \xi = -1, \\
a_2 &: P = +1, C = +1, G = -1, I = 1, \xi = +1.
\end{aligned}
\tag{2.121}$$

É importante notar que, das trajetórias acima,  $f_2$  tem os números quânticos do vácuo. Tal como pode ser percebido, todas as trajetórias têm  $\alpha(0) \simeq 0,5$ , e  $\alpha'$  é da ordem de  $1 \text{ GeV}^{-2}$ . Também é importante ressaltar que, mesmo considerando grandes intervalos de massa, as trajetórias são basicamente lineares, e  $\alpha'$  é praticamente o mesmo para todas elas. Em relação a  $\alpha(0)$ , este possui um maior espectro de variação. No caso de trajetórias bariônicas, seu valor pode ser até mesmo negativo. Por último, deve-se atentar para o fato de que as trajetórias são degeneradas e, portanto, mesmo que tenham assinaturas  $\xi$  diferentes, são indistinguíveis.

## 2.6 Fenomenologia de Regge

Entramos aqui na parte que mais nos interessa na teoria de Regge, a qual será útil para o cálculo das seções de choque posteriormente.

Como já mostrado anteriormente, a teoria de Regge descreve o espalhamento de dois corpos no caso de  $s \rightarrow \infty$  em termos de troca de trajetórias de Regge. A amplitude de espalhamento, no caso da troca de apenas um reggeon, como já visto antes, é calculada por

$$A(s, t) = \beta(t)\eta(t)s^{\alpha(t)}, \tag{2.122}$$

onde  $\beta(t)$  é o resíduo e  $\eta(t)$  é o fator de assinatura, dado por

$$\eta(t) = -\frac{1 + \xi e^{-i\pi\alpha(t)}}{\text{sen}\pi\alpha(t)}, \tag{2.123}$$

A relação acima pode ser expressa da seguinte forma:

$$\eta(t) = -\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha(t)}}{\text{sen}(\frac{\pi}{2})\alpha(t)} (\xi = +1), \tag{2.124}$$

$$\eta(t) = -i \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha(t)}}{\cos(\frac{\pi}{2})\alpha(t)} \quad (\xi = -1) . \quad (2.125)$$

Como já foi visto, para trajetórias lineares, podemos fazer a aproximação

$$\alpha \simeq \alpha(0) + \alpha' t . \quad (2.126)$$

Desta forma,  $\eta(t)$  fica escrito como:

$$\eta(t) \simeq \eta(0)e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha(t)} . \quad (2.127)$$

Assumindo um comportamento exponencial para o resíduo,

$$\beta(t) = \beta(0)e^{B_0 t/2} , \quad (2.128)$$

para  $|t|$  pequeno e grande  $s$ , obtemos finalmente a amplitude de espalhamento:

$$A(s, t) = \beta(0)\eta(0)s^{\alpha(0)}e^{\frac{B_0}{2} + \alpha(\ln s - i\frac{\pi}{2})} . \quad (2.129)$$

Abaixo do limiar, as trajetórias de Regge e as funções de resíduo são totalmente reais, então o que determina a fase da amplitude é a função  $\eta(t)$ . A razão entre a parte real e imaginária da amplitude vale:

$$\frac{ReA(s, t)}{ImA(s, t)} = - \frac{\xi + \cos\pi\alpha(t)}{\sen\pi\alpha(t)} . \quad (2.130)$$

Na direção longitudinal, ou seja, em que  $t = 0$ , a razão acima é chamada de parâmetro  $\rho$ .

Utilizando o teorema óptico, podemos usar a Eq. (2.122) para calcular a seção de choque total: [24]

$$\sigma_{tot} \simeq \frac{1}{s} Im[A(s, t = 0)] \sim s^{\alpha(0)-1} . \quad (2.131)$$

Quando  $s$  não é tão grande, temos que considerar a contribuição de mais de um polo e, assim,

$$\sigma_{tot} \sim \sum_i A_i s^{\alpha_i - 1} . \quad (2.132)$$

### 2.6.1 O Pomeron

As trajetórias da Figura 2.9 tem valores de  $\alpha(0)$  que não passam de 0,5. Considerando a Eq. (2.131), a seção de choque total irá diminuir com o aumento da energia. Todavia, não é isso que mostram os experimentos, os quais evidenciam que há crescimento da seção de choque total para maiores energias.

No início da década de 1960, previa-se que, assintoticamente, a seção de choque total deveria tender a uma constante. Para cumprir tal requisito,  $\alpha(0) = 1$  [veja a Eq. (2.131)]. Este novo valor para  $\alpha(0)$  foi proposto por Chew, Frautschi e Gribov. Tal trajetória com  $\alpha(0) = 1$  foi chamada de Pomeron, em homenagem a I. Ya. Pomeranchuk.

O Pomeron (Figura 2.10)<sup>12</sup> não é nenhuma partícula conhecida. Seu resultado é uma troca complexa de ao menos dois glúons no contexto da Cromodinâmica Quântica. É também o reggeon dominante nos processos elásticos e difrativos. Ocorre quando da troca dos números quânticos do vácuo no canal  $t$ . Adotando  $IP$  como símbolo do Pomeron, este tem os seguintes números quânticos [41]:

$$P = +1, C = +1, G = +1, I = 0, \xi = +1, \quad (2.133)$$

que são os números quânticos do vácuo.

Da Eq. (2.106), obtemos:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + e^{-i\pi x}}{\text{sen}\pi x} = -i \quad (2.134)$$

Portanto, o Pomeron dominante na amplitude de espalhamento tem  $\eta(0) = i$  e, assim,

$$A_{IP}(s, t = 0)_{s \rightarrow \infty} \simeq i\beta_{IP}(0)s^{\alpha_{IP}(0)} \quad (2.135)$$

Devido ao limite de Froissart-Martin, para que não haja violação da relação de unitariedade,  $\alpha_{IP}(0)$  só pode atingir o valor máximo de 1. Todavia, as seções de choque total aumentam com a energia, o que faz com que  $\alpha_{IP}(0)$  seja maior que 1. Tal problema pode ser explicado de algumas formas: com as atuais energias disponíveis nos colisores, ainda não se verificou qual o limite assintótico das seções de choque total, e talvez algum mecanismo ainda não identificado poderia garantir a unitariedade.

<sup>12</sup> Como pode ser visto no gráfico, há um ponto em que  $\alpha(t) = 2$ , correspondente a  $J = 2$ . Um dos candidatos à ressonância neste ponto é um *glueball*, partícula hipotética composta apenas de glúons e que não possui quarks de valência. Para maiores detalhes sobre *glueballs*, veja Referência [40].

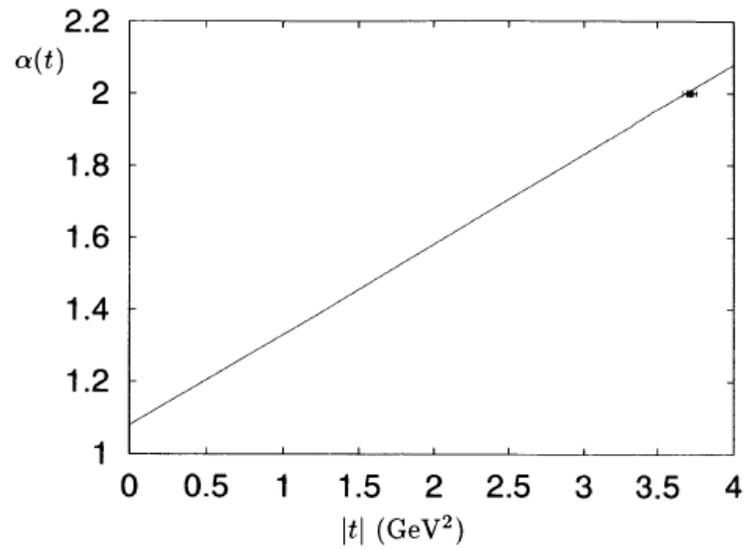


Figura 2.10 – A trajetória do Pomeron [42]. A reta corresponde a  $\alpha_{IP}(0) = 1,08 + 0,25t/GeV^2$ . [24]

## 2.6.2 Trajetórias de Regge e espalhamentos hadrônicos

Consideremos alguns processos elásticos importantes. A cada processo está relacionada uma troca de reggeons:

$$\begin{aligned}
 \pi^+ p &\sim IP + f_2 - \rho , \\
 \pi^- p &\sim IP + f_2 + \rho , \\
 K^+ p &\sim IP + f_2 - \rho + a_2 - \omega , \\
 K^- p &\sim IP + f_2 + \rho + a_2 + \omega , \\
 pp &\sim IP + f_2 - \rho + a_2 - \omega , \\
 p\bar{p} &\sim IP + f_2 + \rho + a_2 + \omega , \\
 pn &\sim IP + f_2 + \rho - a_2 - \omega .
 \end{aligned}
 \tag{2.136}$$

Se calcularmos a diferença entre a seção de choque elástica nos processos partícula-antipartícula, os Pomerons se cancelam. Desta maneira,

$$\begin{aligned}
\sigma(K^-p) - \sigma(K^+p) &\sim 2(\omega + \rho) , \\
\sigma(p\bar{p}) - \sigma(pp) &\sim 2(\omega + \rho) , \\
\sigma(pn) - \sigma(pp) &\sim 2(\rho - a_2) , \\
\sigma(\pi^-p) - \sigma(\pi^+p) &\sim 2(\omega + \rho) .
\end{aligned}
\tag{2.137}$$

Devido ao fato de que essas diferenças são determinadas por trajetórias subdominantes, no limite de altas energias elas tendem a zero.

## 2.7 Ajuste fenomenológico de $\sigma_{tot}$ e parâmetro $\rho$ considerando reggeons e Pomeron

Como uma aplicação da teoria de Regge, a colaboração COMPAS apresentou um ajuste fenomenológico das seções de choque total e do parâmetro  $\rho$  (razão entre as partes real e imaginária da amplitude frontal de espalhamento elástico), considerando os dados do PDG (Particle Data Group) 2012 [43], levando em conta a contribuição de reggeons e Pomeron [44]. Foram utilizados quatro termos no ajuste destas quantidades:

$$\sigma_{tot}(a^{\pm}b) = H \ln^2\left(\frac{s}{s_M^{ab}}\right) + P^{ab} + R_1^{ab}\left(\frac{s}{s_M^{ab}}\right)^{-\eta_1} \pm R_2^{ab}\left(\frac{s}{s_M^{ab}}\right)^{-\eta_2} ,
\tag{2.138}$$

$$\rho^{a\mp b} = \frac{1}{\sigma^{a\mp b}} \left[ \pi H \ln\left(\frac{s}{s_M^{ab}}\right) - R_1^{ab}\left(\frac{s}{s_M^{ab}}\right)^{-\eta_1} \tan\left(\frac{\eta_1\pi}{2}\right) \pm R_2^{ab}\left(\frac{s}{s_M^{ab}}\right)^{-\eta_2} \cot\left(\frac{\eta_2\pi}{2}\right) \right] ,
\tag{2.139}$$

sendo que o sinal “+” denota *partícula* e o sinal “-”, *antipartícula*. Os parâmetros da equação acima são definidos como:

- $H = \pi \frac{(hc)^2}{M}$ ;
- $P^{ab}$  (em  $mb$ ) são termos da constante de Pomeranchuk;
- $R^{ab}$  (em  $mb$ ) são as intensidades efetivas das contribuições do polo secundário de Regge;
- $s, s_M^{ab} = (m_a + m_b + M)^2$  (em  $GeV^2$ );

- $m_a$ ,  $m_b$ , ( $m_{\gamma^*} = m_{\rho(770)}$ ) são as massas das partículas no estado inicial e  $M$  é um parâmetro de massa que define a taxa de crescimento universal das seções de choque. Todas estas quantidades mencionadas estão em  $GeV$ .

Os parâmetros  $M$ ,  $\eta_1$  e  $\eta_2$  são os mesmos para todas as colisões consideradas (veja a tabela na Figura 2.11). O parâmetro  $\rho$  é incluído no ajuste considerando simetria de cruzamento entre os canais  $s$  e  $u$ , bem como relações de dispersão diferenciais.

A hipótese de fatorização exata foi utilizada tanto para  $H \ln^2\left(\frac{s}{s_M}\right)$  quanto para  $P^{ab}$  para ampliar o crescimento universal das seções de choque total para  $\gamma(pd) \rightarrow$  hádrons e  $\gamma\gamma \rightarrow$  colisões de hádrons, o que leva a um parâmetro adicional de ajuste  $\delta$  com as seguintes modificações:

$$\pi H \ln^2\left(\frac{s}{s_M^{\gamma(p,d)}}\right) + P^{\gamma(p,d)} \Rightarrow \delta \left[ \pi(1, \lambda) H \ln^2\left(\frac{s}{s_M^{\gamma(p,d)}}\right) + P^{\gamma(p,d)} \right] \quad (2.140)$$

Os ajustes foram feitos para energias do CM a partir de 5, 6 e 7  $GeV$  para todas as colisões que estão na coluna *Beam/Target* da Figura 2.11, que mostra a tabela com os resultados para  $\sqrt{s} \geq 7 GeV$ . A última coluna mostra a qualidade do ajuste (*Fit quality* - *FQ*). O número total de parâmetros ajustados é 35. Na Figura 2.12 são mostrados os gráficos dos ajustes feitos para cada colisão considerada, levando em conta os dados do PDG 2012 [43]. Podemos ver que os dados em baixa energia são bem descritos pela troca de reggeons.

Finalizado o capítulo sobre processos difrativos e teoria de Regge, no Capítulo 3 faremos um estudo introdutório da Cromodinâmica Quântica (teoria das interações fortes), para que tratemos do regime de saturação mencionado na Introdução deste trabalho.

<b>HPR<sub>1</sub>R<sub>2</sub></b> at $\sqrt{s} \geq 7$ GeV	$M = 2.076 \pm 0.016$ [GeV] $\eta_1 = 0.412 \pm 0.017$ $\delta = (3.112 \pm 0.027) \times 10^{-3}$		$H = 0.2838 \pm 0.0045$ [mb] $\eta_2 = 0.5626 \pm 0.0092$ $\lambda = 1.456 \pm 0.058$		$FQ_{\text{Int}} = 0.86$ $FQ_{\text{Ext}} = 0.87$
$P$ [mb]	$R_1$ [mb]	$R_2$ [mb]	Beam/Target	Npt=836 npt	$\chi^2/\text{npt}$ by groups
$33.73 \pm 0.33$	$13.67 \pm 0.33$	$7.77 \pm 0.18$	$(\bar{p})p / p$	219	1.09
$33.77 \pm 0.38$	$14.05 \pm 0.63$	$6.93 \pm 0.29$	$(\bar{p})p / n$	48	0.39
$33.20 \pm 3.90$	$-14. \pm 47.$	$-15. \pm 52.$	$\Sigma^- / n$	8	0.41
$18.08 \pm 0.29$	$10.44 \pm 0.32$	$1.977 \pm 0.078$	$\pi^\mp / p$	137	0.91
$15.84 \pm 0.20$	$5.12 \pm 0.28$	$3.538 \pm 0.095$	$K^\mp / p$	85	0.76
$15.73 \pm 0.22$	$4.81 \pm 0.40$	$1.86 \pm 0.13$	$K^\mp / n$	48	0.56
	$0.0132 \pm 0.0023$		$\gamma / p$	34	0.56
	$(-6.0 \pm 3.3) \times 10^{-5}$		$\gamma / \gamma$	31	0.68
	$0.0256 \pm 0.0044$		$\gamma / d$	3	0.31
$64.79 \pm 0.75$	$27.06 \pm 0.85$	$15.46 \pm 0.37$	$(\bar{p})p / d$	75	0.97
$36.66 \pm 0.62$	$17.89 \pm 0.82$	$0.38 \pm 0.14$	$\pi^\mp / d$	81	0.71
$32.28 \pm 0.46$	$7.02 \pm 0.71$	$5.74 \pm 0.16$	$K^\mp / d$	67	0.67

Figura 2.11 – Tabela com os parâmetros dos ajustes aos dados de seção de choque total e parâmetro  $\rho$  do PDG 2012 (considendo reggeons e Pomeron), realizado pelo grupo COMPAS. [44]

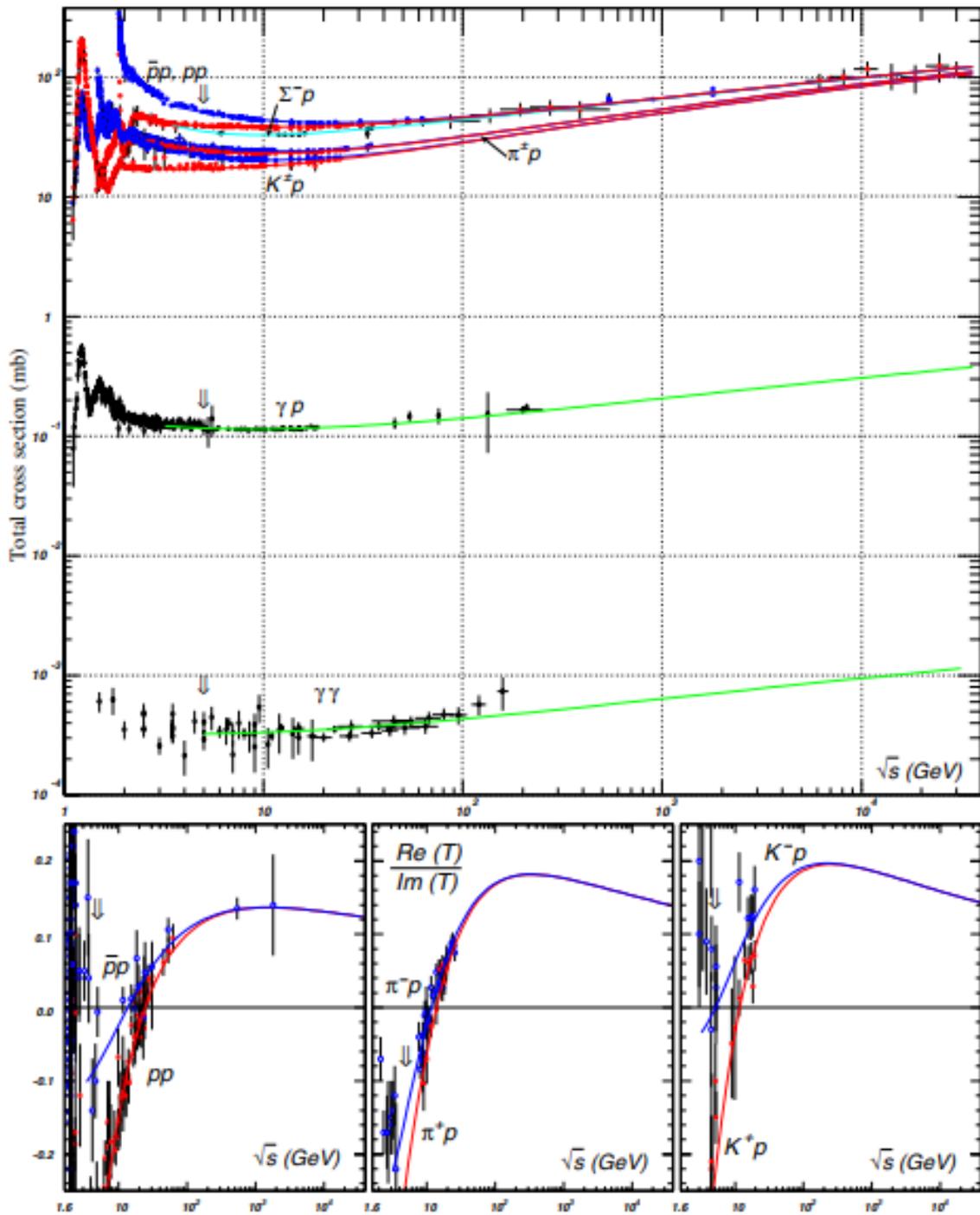


Figura 2.12 – Gráficos dos ajustes realizados pelo grupo COMPAS aos dados do PDG 2012. [44]

## 3 A Cromodinâmica Quântica e colisões de hádrons em altas energias

### 3.1 A Cromodinâmica Quântica

A Cromodinâmica Quântica (em inglês, *Quantum Chromodynamics* - QCD) é a teoria que estuda a interação forte, sendo esta uma das quatro forças fundamentais presentes na natureza. É uma teoria não-abeliana de calibre<sup>1</sup> que possuiu como simetria as transformações que formam o grupo SU(3) e descreve a dinâmica de quarks e glúons. Objetos que interagem via interação forte são chamados de hádrons, sendo estes constituídos de quarks e glúons (pártons). Diferentemente da Eletrodinâmica Quântica (em inglês, *Quantum Electrodynamics* - QED), a QCD possui uma característica chamada de fenômeno de liberdade assintótica, o qual significa que a intensidade da interação diminui com o aumento da energia entre as partículas. Tal fenômeno se deve ao comportamento da constante de acoplamento da QCD, que diminui com o aumento da energia e cresce muito se o momento transferido é pequeno (como pode ser visto na Figura 3.1b). Isso faz com que os pártons estejam sempre confinados [23, 46]. A Figura 3.1 compara as constantes de acoplamento da QED e da QCD.

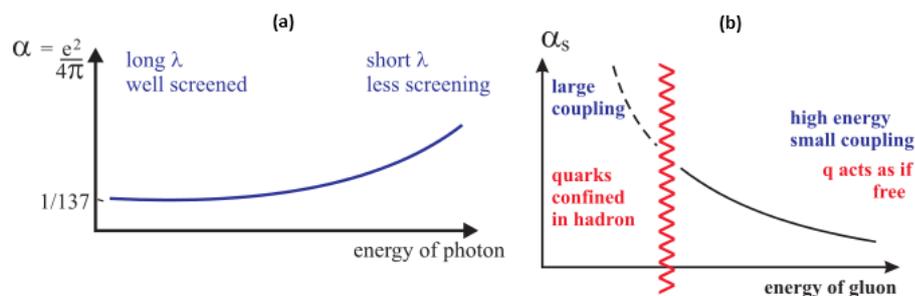


Figura 3.1 – (a) - Constante de acoplamento da QED; (b) - Constante de acoplamento da QCD. [23]

A QCD possui um grau de liberdade inexistente na QED, o qual é chamado de cor. Nenhum objeto livre na natureza possui cor. Portanto, quarks e glúons estão sempre confinados e, desta maneira, formam os hádrons. Na Cromodinâmica Quântica, os glúons são os mediadores da interação forte, tal como o fóton é o mediador da interação eletromagnética na QED. Todavia, diferentemente da QED, em que os fótons não possuem

<sup>1</sup> Para discussão sobre teorias de calibre (ou teorias de *gauge*), veja Referência [45].

carga, na QCD os glúons possuem cor, e isso aumenta sua complexidade em relação à Eletrodinâmica Quântica, visto que eles podem interagir com quarks e com eles próprios.

A QCD possui uma densidade lagrangeana dada por [47]

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

onde  $\psi$  é o espinor do quark,  $\gamma$  são as matrizes de Dirac,  $D_\mu$  é a derivada covariante dada por  $D_\mu = (\partial_\mu - ig_s A_\mu^a t^a)$  e  $G_{\mu\nu}^a$  representa o tensor de glúons dado por  $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu^a A_\nu^a - \partial_\nu^a A_\mu^a + g_s f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$ . Nas expressões anteriores,  $A_\mu^a$  é o campo de glúons,  $f^{abc}$  são as constantes de estrutura do SU(3) e  $g_s$  é uma constante que está relacionada à constante de acoplamento da QCD ( $\alpha_s$ ) através de  $g_s^2 = 4\pi\alpha_s$ .

Para o cálculo de observáveis nos processos da QCD, um dos métodos utilizados é a teoria de perturbação, a qual utiliza o Hamiltoniano de interação. Embora, *a priori*, o valor de  $\alpha_s$  seja constante, durante o processo de renormalização se faz necessário que  $\alpha_s$  dependa da escala de massa do processo, a qual é denotada por  $\mu$ . Esta variável pode ser chamada de ponto de subtração ou escala de renormalização. O fato de  $\alpha_s$  passar a depender da escala de massa do processo faz com que não seja possível que se utilize teoria de perturbação em todo o espectro de momento transferido nos processos de espalhamento, visto que, para isso,  $\alpha_s$  deve ser pequeno. Em regiões onde  $\alpha_s$  é grande, a teoria de perturbação não se faz mais possível. Tais conceitos serão discutidos em detalhes posteriormente.

Um observável adimensional  $R(Q^2, x_f)$ , sendo  $Q^2$  a escala de momento transferido e  $x_f$  qualquer variável cinemática adimensional, deve ser independente da escala de massa  $\mu$ . Portanto, a ideia de tornar  $\alpha_s$  dependente da escala é colocar nesta variável todas as dependências que a série perturbativa de  $R(Q^2, x_f)$  possui em  $\mu$ .

No domínio perturbativo, os observáveis são expressos em expansões perturbativas de  $\alpha_s$  [47]:

$$R(Q^2, \mu^2, \alpha_s, x_f) = \sum_{n=0}^{n_{max} \sim \frac{\pi}{\alpha_s}} r_n(Q^2, \mu^2, x_f) \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^n. \quad (3.2)$$

Desde que  $R$  seja adimensional e desde que não haja escala de massa no Lagrangeano da QCD, a dependência de  $\alpha_s$  em  $Q^2$  é apenas uma função da razão  $Q^2/\mu^2$ . Os coeficientes  $r_n$  são polinômios de  $\ln(Q^2/\mu^2)$  (exceto  $r_0$  e  $r_1$ , os quais são independentes de  $Q^2/\mu^2$ ), sendo a maior potência dada por  $n - 1$ . A independência de  $R$  em relação a  $\mu$  é dada pela relação de Callan-Szymanzik: [48]

$$\begin{aligned} \frac{d}{d \ln \mu^2} R(Q^2/\mu^2, \alpha_s, x_f) &= \mu^2 \frac{d}{d \mu^2} R(Q^2/\mu^2, \alpha_s, x_f) = \\ &\left( \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \mu^2 \frac{\partial \alpha_s}{\partial \mu^2} \frac{\partial}{\partial \alpha_s} \right) R(Q^2/\mu^2, \alpha_s, x_f) = 0 . \end{aligned} \quad (3.3)$$

Podemos definir a função  $\beta(\alpha_s)$  como sendo  $\beta(\alpha_s) \equiv \mu^2 \frac{\partial \alpha_s}{\partial \mu^2}$ . Fazendo  $u \equiv \ln(Q^2/\mu^2)$ , temos

$$\left( -\frac{\partial}{\partial u} + \beta \frac{\partial}{\partial \alpha_s} \right) R(e^u, \alpha_s, x_f) = 0 . \quad (3.4)$$

Assim, definindo  $\alpha_s(\mu^2) \equiv \alpha_s$  e  $u = \int_{\alpha_s}^{\alpha_s(Q^2)} \frac{1}{\beta(y)} dy$ , o observável  $R(e^t, \alpha_s, x_f)$ , em termos da série perturbativa em  $\alpha_s(\mu^2)$ , fica dado por

$$R(e^u, \alpha_s, x_f) = \sum_n r_n(1, \alpha_s, x_f) \left( \frac{\alpha_s(\mu^2)}{\pi} \right)^n . \quad (3.5)$$

Esta expressão é solução da Eq. (3.4). Se fizermos  $e^u = 1$  (tomando  $\mu = Q$  na expressão de  $u$ ), estamos fazendo a escala física ser igual à escala de renormalização, e a dependência em  $\mu$  fica toda em  $\alpha(\mu^2)$ , ficando os coeficientes  $r_n$  independentes de  $Q^2/\mu^2$ .

A dependência em escala da constante de acoplamento da QCD, expressa no ultravioleta (grande  $Q^2$ ), é controlada pela função  $\beta$ , a qual pode ser calculada através da série perturbativa

$$Q^2 \frac{\partial \alpha_s}{\partial Q^2} = \beta(\alpha_s) = - \left( \frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 \sum_n \left( \frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^n \beta_n , \quad (3.6)$$

onde os primeiros termos das séries  $\beta$  são [49–51]:

$$\beta_0 = 11 - \frac{2}{3} n_f , \quad (3.7)$$

$$\beta_1 = 102 - \frac{38}{3} n_f , \quad (3.8)$$

em que  $n_f$  representa o número de sabores dos quarks. A solução da Eq. (3.6) para  $\beta_0$  é expressa por

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln(Q^2/\Lambda^2)} . \quad (3.9)$$

onde  $\Lambda$  é o chamado parâmetro de escala, e é dado por  $\Lambda \equiv \mu^2 e^{-\frac{4\pi}{\beta_0 \alpha_s \mu^2}}$ . Define-se  $\Lambda \sim 200 \text{ MeV}$  como a separação entre os regimes perturbativo e não-perturbativo. A Figura 3.2 mostra a curva de  $\alpha_s$  em função de  $Q^2$  até as ordens de  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  e  $\beta_3$ , considerando valores de  $\Lambda = 0,34 \text{ GeV}$  e  $\Lambda = 0,48 \text{ GeV}$ .

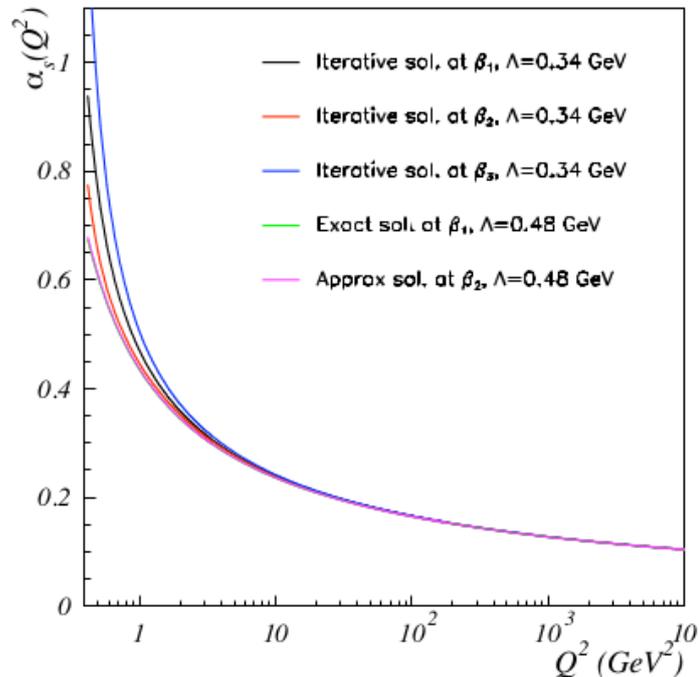


Figura 3.2 – A constante de acoplamento  $\alpha_s(Q^2)$  calculada em diferentes ordens  $\beta_i$ , utilizando os valores de  $\Lambda = 0,34 \text{ GeV}$  e  $\Lambda = 0,48 \text{ GeV}$ . [47]

Na região onde  $\alpha_s$  é grande, não podemos utilizar teoria de perturbação, visto que o termo  $(\alpha_s/\pi)^n$  se torna cada vez maior com o aumento de  $n$  e a série perturbativa na Eq. (3.5) diverge.

No Capítulo 4, discorreremos sobre o Espalhamento Inelástico Profundo (DIS), sendo este um dos processos de espalhamento mais simples em pequenas distâncias (grande  $Q^2$ ). Através do DIS, iremos derivar (de forma sucinta) as equações de evolução da QCD, utilizando o método da QCD perturbativa.

## 3.2 Espalhamento inelástico profundo (DIS) e as equações de evolução da QCD

### 3.2.1 Coordenadas do cone de luz

Visto que todos os cálculos e deduções das expressões deste capítulo e do próximo serão feitos no referencial do cone de luz, se faz importante uma seção que trate deste tópico.

O referencial do cone de luz é um sistema adequado para tratar variáveis cinemáticas em altas energias [52]. Neste sistema de referência, cuja representação pode ser vista na Figura 3.3, se considera que a colisão ocorre no eixo  $z$  (direção longitudinal). A partir das definições do quadri-vetor velocidade  $v^\mu = (v^0, v^1, v^2, v^3)$  e quadri-vetor posição  $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ , definimos estas duas quantidades no referencial do cone de luz:

$$v^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(v^0 + v^3); \quad v^- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(v^0 - v^3); \quad v_\perp \equiv (v^1, v^2), \quad (3.10)$$

Desta forma, podemos definir também o *tempo* neste referencial:

$$x^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(t + z), \quad (3.11)$$

e a coordenada *longitudinal*:

$$x^- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(t - z), \quad (3.12)$$

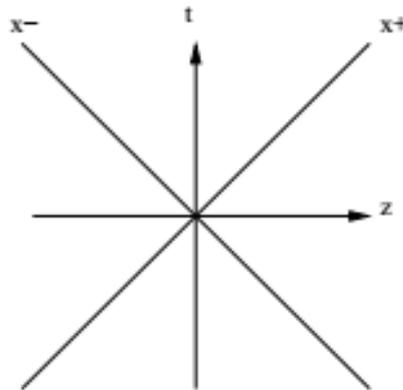


Figura 3.3 – Coordenadas do cone de luz. [47]

Assim, o produto escalar entre os quadri-vetores posição e momento vale

$$p \cdot x = p^- x^+ + p^+ x^- - p_\perp x_\perp . \quad (3.13)$$

O que resulta em

$$p^- x^+ + p^+ x^- = p^0 x^0 - p^3 x^3 . \quad (3.14)$$

A variável  $p^-$  é conjugada ao tempo  $x^+$  no cone de luz e, desta forma, é chamada de *energia* no referencial do cone de luz, enquanto que  $p^+$  é conjugada a  $x^-$  (coordenada longitudinal), sendo chamada de *momento longitudinal* no referencial do cone de luz. Para partículas que estão na camada de massa,

$$p^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(E \pm p_z) , \quad (3.15)$$

em que  $E$  é a energia total relativística, dada por  $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ . Com isso, pode-se escrever:

$$p^+ p^- = \frac{1}{2}(E^2 - p_z^2) = \frac{1}{2}(m^2 + \vec{p}^2 - p_z^2) . \quad (3.16)$$

Por conseguinte,

$$p^+ p^- = \frac{1}{2}(m^2 + p_\perp^2) = \frac{1}{2}m_\perp^2 . \quad (3.17)$$

A variável  $m_\perp$  é chamada de *massa transversa*. A *rapidez*<sup>2</sup>, nas coordenadas do cone de luz, fica expressa como:

$$y = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{E + p_z}{E - p_z} \right) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{p^+}{p^-} \right) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{2p^{+2}}{m_\perp^2} \right) . \quad (3.18)$$

Trabalhar nas coordenadas do cone de luz torna-se conveniente devido ao fato de que, em colisões em altas energias, os hádrons estão próximos da velocidade da luz e, assim,  $x^- \approx 0$  e  $x^+ \approx 0$ . Além disso, no caso de haver um *boost*,  $p^+ \rightarrow \alpha p^+$  e  $p^- \rightarrow (1/\alpha)p^-$ , sendo  $\alpha$  uma constante. Somado a isso, a rapidez se transforma de uma forma bem simples:  $y \rightarrow y + \alpha$ .

<sup>2</sup> A definição matemática de *rapidez* foi apresentada no Capítulo 2. Seu significado físico está associado à direção da partícula após o processo de colisão. Se a partícula é espalhada essencialmente na direção transversa,  $y \approx 0$ . Já se a partícula é espalhada predominantemente nas direções  $+z$  ou  $-z$ ,  $y \rightarrow \pm\infty$ . Esta quantidade está relacionada ao ângulo entre o plano  $XY$  e a direção do produto da colisão (levando em consideração que o feixe está direcionado ao longo do eixo  $Z$ ), de maneira que  $y = \tanh^{-1}(\frac{p_z}{E})$ .

Realizada uma breve discussão e definição das coordenadas do cone de luz, passaremos para o tratamento de um processo muito comum na física de partículas: o Espalhamento Inelástico Profundo (DIS).

### 3.2.2 Espalhamento inelástico profundo (DIS)

Para este capítulo, teremos como base os desenvolvimentos realizados na Referência [17].

O Espalhamento Inelástico Profundo (em inglês, *Deep Inelastic Scattering* - DIS) é um dos processos de espalhamento mais simples que ocorrem em pequenas distâncias, sendo expresso por

$$e + p \rightarrow e' + X , \quad (3.19)$$

onde  $e$  denota o elétron incidente,  $e'$  denota o elétron espalhado,  $p$  é o próton incidente e  $X$  simboliza outras partículas produzidas, daí o fato de o espalhamento ser inelástico. A representação do processo pode ser vista na Figura 3.4. Ocorre a emissão de um fóton virtual por parte do elétron  $e$ , então, o próton absorve esse fóton e dá origem a outras partículas. Trabalhando no sistema de repouso do próton (em unidades naturais  $\hbar = c = 1$ ), temos que:

$$P^\mu = (m_p, \vec{0}) , \quad (3.20)$$

onde  $P^\mu$  é o quadri-momento do próton e  $m_p$  é sua massa. Os quadri-momentos dos elétrons incidente e espalhado são, respectivamente,

$$p^\mu = (E, \vec{p}) , \quad (3.21)$$

$$p'^\mu = (E', \vec{p}') . \quad (3.22)$$

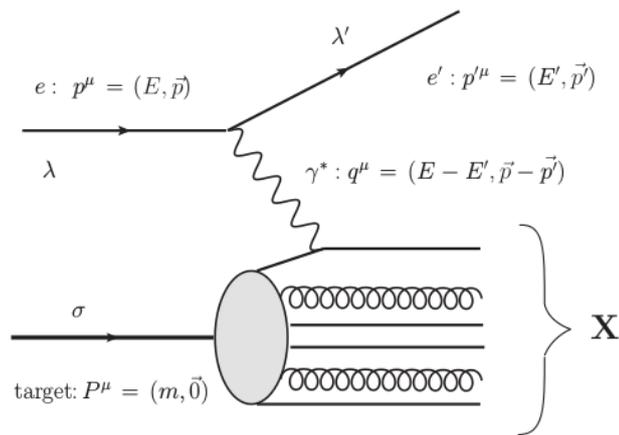


Figura 3.4 – Diagrama de Feynman do DIS para elétron-próton. [17]

Em geral, são usadas três invariantes de Lorentz para descrever o processo:

$$Q^2 = -q^2, \quad (3.23)$$

$$x = \frac{Q^2}{2P \cdot q}, \quad (3.24)$$

$$y = \frac{P \cdot q}{P \cdot p}. \quad (3.25)$$

onde foi usado o fato de que  $P^2 = m_p^2$ ,  $p^2 = p'^2 = m_e^2$ , em que  $m_e$  representa a massa do elétron. Nas equações acima,  $Q^2$  é chamado de virtualidade do fóton e tem sinal positivo (visto que o momento quadrado carregado pelo fóton virtual tem sinal negativo), e  $x$  é a variável de Bjorken. Fazendo uso das três relações acima, pode-se concluir que

$$Q^2 = 4EE' \sin^2(\theta/2), \quad (3.26)$$

em que  $\theta$  é o ângulo formado entre  $\vec{p}$  e  $\vec{p}'$ . Desta forma,

$$y = \frac{E - E'}{E}. \quad (3.27)$$

No sistema de repouso do elétron,  $y$  tem o significado de ser a fração de energia do elétron transferida para o próton.

Também podemos definir outras quantidades invariantes de Lorentz:

$$\nu = \frac{P \cdot q}{m} = E - E', \quad (3.28)$$

$$s^* = (P + q)^2 = q^2 + m_p^2 + 2P \cdot q , \quad (3.29)$$

$$s = (P + p)^2 . \quad (3.30)$$

Nas equações acima,  $s$  é o quadrado da energia do CM no processo de espalhamento elétron-próton,  $s^*$  é o quadrado da energia do CM no processo fóton virtual-próton e  $\nu$  é a diferença de energia entre o elétron incidente e o espalhado. As invariantes das Eqs. (3.23) a (3.25) estão relacionadas às invariantes das Eqs. (3.28) a (3.30) através das seguintes relações:

$$x = \frac{Q^2}{Q^2 + s^* - m_p^2} = \frac{Q^2}{2m_p\nu} , \quad (3.31)$$

$$Q^2 = xy(s - m_p^2 - m_e^2) \simeq xys , \quad (3.32)$$

onde foi levado em consideração que os experimentos de DIS ocorrem no regime de altas energias e que, portanto,  $s \gg m_p^2 \gg m_e^2$ .

Utilizando calibre covariante<sup>3</sup> para o propagador do fóton, podemos escrever, através dos diagramas de Feynman, a amplitude de espalhamento para o processo da Figura 3.4 da seguinte forma [17]:

$$iM_{\epsilon,s,s'}(X) = \frac{ie^2}{q^2} \bar{u}_{s'}(p') \gamma_\mu u_s(p) \langle X | J^\mu(0) | P, \epsilon \rangle , \quad (3.33)$$

onde  $u(p)$  refere-se ao espinor do elétron,  $s$  denota a polarização do elétron,  $\epsilon$  é a polarização do próton,  $|P, \epsilon\rangle$  representa o estado inicial do próton,  $|X\rangle$  representa o estado final de muitas partículas e  $J^\mu$  é a corrente eletromagnética de quarks dada por

$$J^\mu(x) = \sum_f Z_f \bar{q}^f(x) \gamma^\mu q^f(x) , \quad (3.34)$$

em que  $q^f(x)$  é a função de distribuição de quarks,  $Z_f$  é a carga elétrica do quark e a soma está sendo feita sobre todos os sabores de quarks.

Para que calculemos a seção de choque total do DIS, toma-se o quadrado da amplitude da Eq. (3.33), realiza-se a média sobre os números quânticos iniciais e a soma

<sup>3</sup> Para maiores informações sobre calibre (*gauge*) covariante, veja Referência [53].

sobre os números quânticos finais do elétron e próton, divide-se pelo fluxo e impõe-se conservação de energia-momento, de modo que [17, 54]

$$\sigma_{tot}^{ep} = \int \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3 4EE'} \frac{1}{4} \sum_X \sum_{\epsilon, s, s'} |M_{\epsilon, s, s'}(X)|^2 (2\pi)^4 \delta^4(P + q - p_X), \quad (3.35)$$

em que  $p_X$  representa o momento linear líquido de todas as partículas produzidas. Substituindo a amplitude da Eq. (3.33) na Eq. (3.35), chega-se a

$$\frac{d\sigma}{dp'} = \frac{\alpha_{EM}^2}{E'E Q^4} L_{\mu\nu} W^{\mu\nu}, \quad (3.36)$$

onde  $\alpha_{EM}$  é a constante de acoplamento eletromagnético,  $L_{\mu\nu}$  é o chamado tensor leptônico e  $W^{\mu\nu}$  é o tensor hadrônico. Através das duas equações anteriores, pode-se ver que  $L_{\mu\nu}$  vale

$$L_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{s=\pm 1} \sum_{s'=\pm 1} \bar{u}_{s'}(p') \gamma_\mu u_s(p) [(\bar{u}_{s'}(p') \gamma_\nu u_s(p))]^*. \quad (3.37)$$

Utilizando as regras de Casimir e as relações de completeza para os espinores [55],

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} Tr[(\not{p}' + m_e) \gamma_\mu (\not{p} + m_e) \gamma_\nu] = \\ &= 2(p'_\mu p'_\nu + p_\nu p'_\mu - p \cdot p' g_{\mu\nu} + m_e^2 g_{\mu\nu}), \end{aligned} \quad (3.38)$$

onde  $g_{\mu\nu}$ <sup>4</sup> é o tensor de métrica do espaço-tempo e  $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$  é o *slash* de Feynman.

Partindo para o tensor hadrônico da Eq. (3.36), este tem como expressão: [17, 54]

$$W^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi m} \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_X \langle P, \epsilon | J^\mu(0) | X \rangle \langle X | J^\nu(0) | P, \epsilon \rangle (2\pi)^4 \delta^4(P + q - p_X) \quad (3.39)$$

Após alguns passos intermediários (os quais podem ser verificados em [17]), o tensor hadrônico fica na forma:

$$W^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi m} \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle P | J^\mu(x) J^\nu(0) | P \rangle. \quad (3.40)$$

A conservação da corrente eletromagnética resulta em:

$$q_\nu W^{\mu\nu} = 0, \quad q_\mu W^{\mu\nu} = 0. \quad (3.41)$$

<sup>4</sup> Estamos considerando a métrica  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ .

Levando em consideração que o tensor  $W^{\mu\nu}$  é simétrico e impondo a condição da Eq. (3.41),

$$W^{\mu\nu} = -W_1(x, Q^2) \left( g_{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) + \frac{W_2(x, Q^2)}{m^2} \left( P^\mu - \frac{P \cdot q}{q^2} q^\mu \right) \left( P^\nu - \frac{P \cdot q}{q^2} q^\nu \right). \quad (3.42)$$

Na equação acima,  $W_1$  e  $W_2$  são funções escalares desconhecidas, têm dependência em  $x$  e  $Q^2$  e levam o nome de funções de estrutura. Inserindo a Eq. (3.42) na Eq. (3.36), após alguma álgebra e usando a aproximação (desprezando a massa do elétron)  $d^3\vec{p}' = p'^2 dp' d\Omega \simeq E' dE' d\Omega$ , a seção de choque diferencial da reação  $e + p \rightarrow e' + X$  fica dada por

$$\frac{d\sigma^{ep}}{d\Omega} = \frac{\alpha_{EM}^2 dE'}{4E^2 \text{sen}^4(\theta/2)} [2W_1(x, Q^2) \text{sen}^2(\theta/2) + W_2(x, Q^2) \text{cos}^2(\theta/2)], \quad (3.43)$$

de onde se percebe que as funções de estrutura têm unidade de inverso de massa. Como é mais interessante que sejam usadas funções adimensionais, definimos  $F_1$  e  $F_2$ :

$$F_1(x, Q^2) \equiv mW_1(x, Q^2), \quad (3.44)$$

$$F_2(x, Q^2) \equiv \nu W_2(x, Q^2) = \frac{Q^2}{2mx} W_2(x, Q^2). \quad (3.45)$$

As funções  $F_1$  e  $F_2$  contêm todas as informações da interação forte no espalhamento DIS.

A seguir passaremos para o cálculo dessas funções de estrutura, considerando primeiramente o modelo de pártons, cujo desenvolvimento foi proposto por Feynman. [56]

### 3.2.3 Modelo de pártons

Partiremos agora para o tratamento de um modelo muito importante na história da física de partículas: o modelo de pártons. Fazendo uso do mesmo, poderemos calcular as funções  $F_1$  e  $F_2$ . Neste modelo considera-se que o próton é composto de objetos livres chamados de pártons (quarks e glúons). Trabalhando no sistema de referência de Bjorken, no qual o próton é tratado como ultrarelativístico (assumindo  $P^2 \gg m_p^2$ ),

$$P^\mu \simeq \left( P + \frac{m_p^2}{2P}, 0, 0, P \right), \quad (3.46)$$

e também

$$q^\mu = (q^0, q^1, q^2, 0) , \quad (3.47)$$

onde  $P^\mu$  é o quadri-momento do próton e  $q^\mu$  é o quadri-momento do fóton.

Consideremos primeiramente o próton constituído apenas de um quark livre que interage com um fóton. Tal processo pode ser visto na Figura 3.5. As funções de estrutura do DIS para este processo são expressas por (veja detalhes completos dos cálculos na Referência: [17])

$$F_1^q(x, Q^2) = m_q W_1^q(x, Q^2) = \frac{Z_f^2}{2} \delta(1-x) , \quad (3.48)$$

$$F_2^q(x, Q^2) = \frac{Q^2}{2m_q x} W_2^q(x, Q^2) = Z_f^2 \delta(1-x) , \quad (3.49)$$

onde o índice  $q$  refere-se ao quark presente no próton.

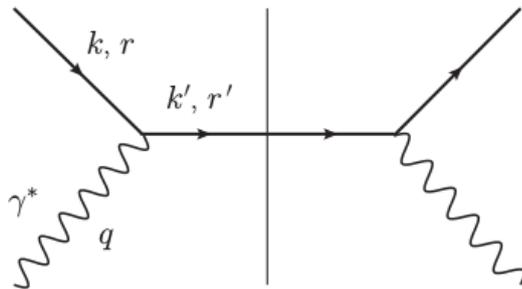


Figura 3.5 – Fóton virtual interagindo com um quark puntual. [17]

Tratemos agora o próton como sendo composto de vários quarks. Neste caso, as funções  $W_1$  e  $W_2$  são dadas por [17, 54]

$$W_1(x) = \frac{1}{2m} \sum_f Z_f^2 q^f(x) , \quad (3.50)$$

$$W_2(x) = \frac{2mx}{\nu} W_1(x) , \quad (3.51)$$

em que, como já foi mencionado,  $q^f(x)$  refere-se a função de distribuição de quarks, cuja expressão é escrita como

$$q^f(x) = \frac{1}{2x} \sum_n \int d\eta \, d^2k_\perp \frac{1}{S_n} \sum_r \prod_{j=1}^n \frac{dx_j}{x_j} \frac{d^2k_{j\perp}}{2(2\pi)^3}$$

$$\begin{aligned} & \times \left| \Psi_n^f \left( (x_j, k_j), \frac{k^+}{P^+}, k_\perp, r \right) \right|^2 \delta \left( 1 - \eta - \sum_{l=1}^n x_l \right) \\ & \times \delta^2 \left( \vec{k}_\perp + \sum_{m=1}^n \vec{k}_{m\perp} \right) \delta(x - \eta) , \end{aligned} \quad (3.52)$$

onde  $\eta = \frac{k^+}{P^+}$  e  $r$  refere-se à helicidade dos quarks. Desta forma, as expressões das funções de estrutura adimensionais é a seguinte:

$$F_1(x) = \frac{1}{2} \sum_f Z_f^2 q^f(x) , \quad (3.53)$$

$$F_2(x) = \sum_f Z_f^2 x q^f(x) , \quad (3.54)$$

A função de distribuição de quarks  $q^f(x)$  conta o número de quarks com fração de momento longitudinal  $x$ . Tal como no caso anterior, onde foi considerado o próton como constituído apenas de um único quark, as últimas expressões mostram que as funções de estrutura dependem apenas da variável  $x$  de Bjorken. Esta dependência somente na variável  $x$  é chamada de escalamento de Bjorken. A Figura 3.6 mostra um gráfico da função de estrutura  $F_2$  em função de  $Q^2$  para diferentes valores de  $x$ . Percebe-se que  $F_2$  é independente de  $Q^2$  (exceto para valores pequenos de  $x$ ).

Vejamos os significados físicos de  $F_1$  e  $F_2$ . Enquanto  $F_1$  informa o número de pártons com fração de momento longitudinal  $x$  no hádron,  $F_2$  informa a média da fração de momento longitudinal dos pártons multiplicada pelo número de pártons.

No modelo de pártons, assumimos que a interação entre o fóton e o próton é muito mais rápida do que a interação entre os pártons. Portanto, considerar que os últimos são livres não é uma má aproximação,

A função de estrutura  $F_2$  pode ser expressa em termos da seção de choque fóton-proton  $\sigma_{tot}^{\gamma^*p}$  através da seguinte relação:

$$F_2(x, Q^2) = \frac{Q^2}{4\pi^2 \alpha_{EM}} \sigma_{tot}^{\gamma^*p} . \quad (3.55)$$

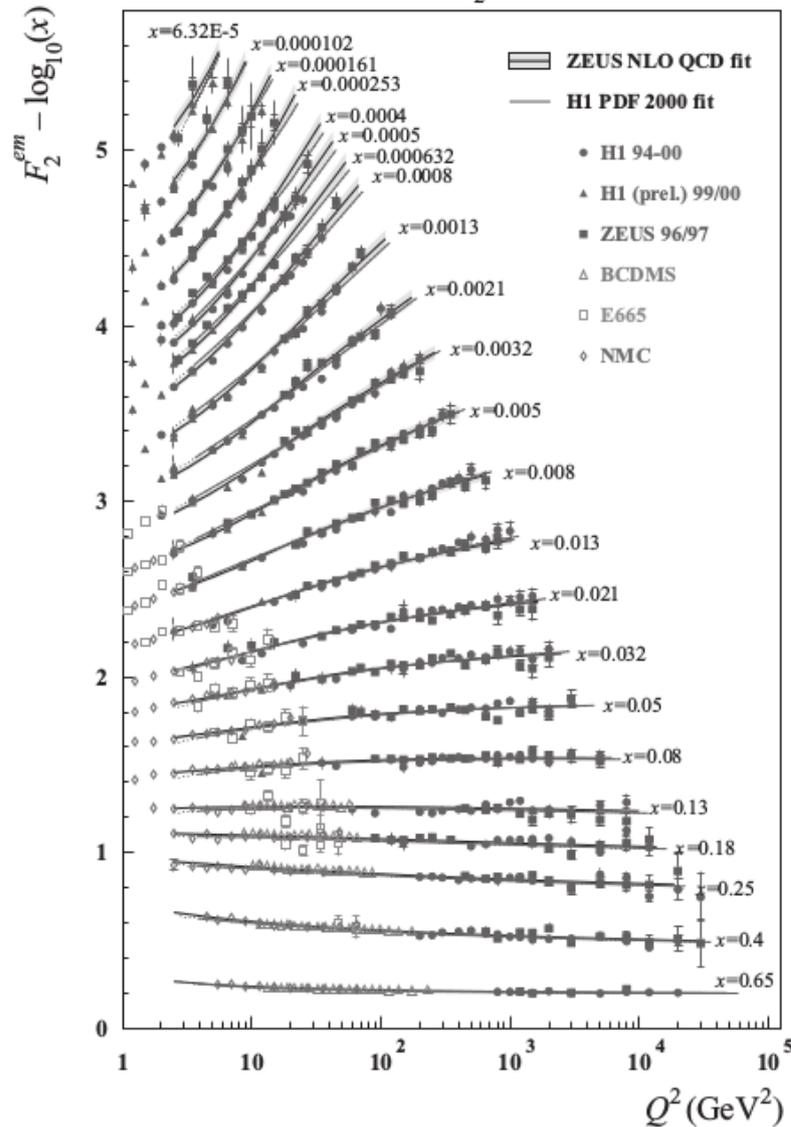


Figura 3.6 – Dados experimentais de HERA da função de estrutura  $F_2$  em função de  $Q^2$  para DIS em um próton, considerando diferentes valores de  $x$ . [17]

Em todo o desenvolvimento feito até aqui, os pártons foram tratados como objetos livres. No momento em que se passa a considerar interação entre os mesmos, é necessário que se efetuem correções em mais alta ordem na QCD, o que leva às chamadas equações de evolução, cuja abordagem será feita nas próximas seções.

### 3.2.4 As equações DGLAP

Até agora levou-se em conta que os quarks não interagem entre si, i.e., o modelo de pártons. Adotando uma situação mais realística, deve-se levar em conta a interação entre

os quarks e, neste caso, temos que considerar a distribuição de glúons também. Desta forma, estamos fazendo a correção do modelo de pártons, considerando agora interação entre os quarks [23, 46]. Deste modo, haverá agora uma função de distribuição de quarks  $q^f(x, Q^2)$  em que, diferentemente de  $q^f(x)$  no modelo de pártons, esta função dependerá da escala de momento  $Q^2$  (que será agora uma escala de renormalização), tal como o caso de  $\alpha_s(Q^2)$  discutido na Seção 3.1. Portanto, reescrevemos a Eq. (3.52) como [17]

$$\begin{aligned}
q^f(x, Q^2) &= \sum_n \frac{1}{x} \int \frac{d^2 k_\perp}{2(2\pi)^3} \frac{1}{S_n} \sum_{\sigma=\pm 1} \prod_{i=1}^n \frac{dx_i}{x_i} \frac{d^2 k_{i\perp}}{2(2\pi)^3} \\
&\quad \times |\Psi_n^f(\{x_i, k_{i\perp}\}; x, k_\perp; \sigma)|^2 (2\pi)^3 \\
&\quad \times \delta^2\left(\vec{k}_\perp + \sum_{j=1}^n \vec{k}_{j\perp}\right) \delta\left(1 - x - \sum_{l=1}^n x_l\right). \tag{3.56}
\end{aligned}$$

Na equação acima, o quark carrega uma fração  $x$  do momento longitudinal do próton. Diferentemente da Eq. (3.52), na Eq. (3.56) a helicidade do quark está sendo representada por  $\sigma$ . O limite superior das integrais em  $k_\perp$  é dado por  $Q$ . No modelo de pártons, assumiu-se que as integrais em  $k_\perp$  eram suficientemente convergentes, de forma que era possível substituir o limite superior por infinito. Isso só pode ser feito no caso de teorias super renormalizáveis, o que não é o caso da QCD.

A função de onda  $\Psi_n^f(\{x_i, k_{i\perp}\}; x, k_\perp; \sigma)$  descreve um espaço de Fock no próton. Este espaço contém o quark medido e  $n$  pártons *espectadores* com momento transversal  $k_{i\perp}$  e fração de momento longitudinal  $x$ .

Teremos também a função de distribuição dos glúons  $G(x, Q^2)$ , cuja expressão, em analogia com a equação anterior, é dada por [17]

$$\begin{aligned}
G(x, Q^2) &= \sum_n \frac{1}{x} \int \frac{d^2 k_\perp}{2(2\pi)^3} \frac{1}{S_n} \sum_{\lambda=\pm 1} \prod_{i=1}^n \frac{dx_i}{x_i} \frac{d^2 k_{i\perp}}{2(2\pi)^3} \\
&\quad \times |\Psi_n(\{x_i, k_{i\perp}\}; x, k_\perp; \lambda)|^2 (2\pi)^3 \\
&\quad \times \delta^2\left(\vec{k}_\perp + \sum_{j=1}^n \vec{k}_{j\perp}\right) \delta\left(1 - x - \sum_{l=1}^n x_l\right) \tag{3.57}
\end{aligned}$$

Na Eq. (3.57),  $\Psi_n(\{x_i, k_{i\perp}\}; x, k_\perp; \lambda)$  é a função de onda do próton no cone de luz e contém o glúon medido e  $n$  *espectadores* com momento transversal  $k_\perp$ , fração de momento longitudinal

$x$  e polarização  $\lambda$ . Tanto na Eq. (3.56) quanto na Eq. (3.57), está se considerando o calibre do cone de luz.<sup>5</sup>

Definidas as expressões de  $q^f(x, Q^2)$  e  $G(x, Q^2)$ , deve-se tratar agora das correções de mais baixa ordem na QCD para a função de distribuição de quarks, as quais podem ser vistas na Figura 3.7. A integral em  $k_\perp$  na Eq. (3.56) dará origem a termos proporcionais a

$$\ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda_{QCD}^2}\right), \quad (3.58)$$

ou seja, cada diagrama da Figura 3.7 dará uma contribuição proporcional a

$$\alpha_s \ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda_{QCD}^2}\right). \quad (3.59)$$

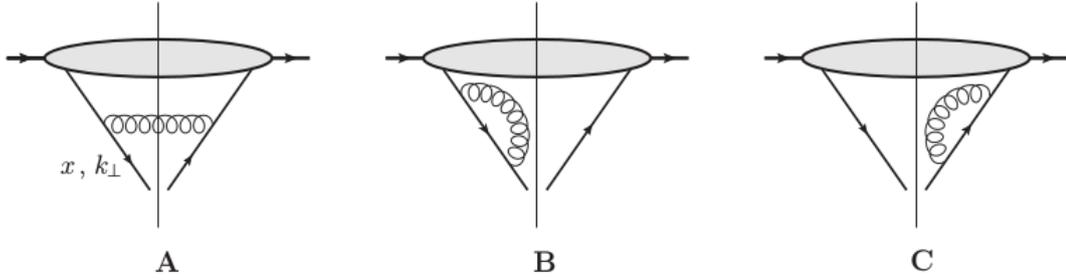


Figura 3.7 – Correções QCD de mais baixa ordem para a função de distribuição de quarks.

[17]

No limite  $Q^2 \gg 1\text{GeV}^2$ ,  $\alpha_s \ll 1$  e  $\ln(Q^2/\Lambda_{QCD}^2) \gg 1$ ,  $\alpha_s \ln(Q^2/\Lambda_{QCD}^2) \sim 1$ . A soma sucessiva da expressão anterior é chamada de *aproximação de logaritmo dominante*. Após sucessivos cálculos, chega-se à seguinte contribuição do diagrama A para  $q^f(x, Q^2)$ : [17]

$$q_A^f(x, Q^2) = \frac{\alpha_s C_F}{2\pi} \int_{\Lambda_{QCD}^2}^{Q^2} \frac{dk_\perp^2}{k_\perp^2} \int_x^1 \frac{dz}{z} \frac{1+z^2}{1-z} q^f\left(\frac{x}{z}, k_\perp^2\right), \quad (3.60)$$

em que  $z = (x/x') = (k^+/k'^+)$  e  $C_F$  é o operador de Casimir, dado por

$$C_F = \frac{N_c^2 - 1}{2N_c}, \quad (3.61)$$

onde  $N_c = 3$  é o número de cores da QCD. A primeira integral da Eq. (3.60) dá origem a um termo logarítmico do tipo  $\ln(Q^2/\Lambda_{QCD}^2)$ .

<sup>5</sup> O calibre do cone de luz é definido como  $A^+ = 0$ .

Para que calculemos a mudança na função  $q_A^f(x, Q^2)$  em função de uma pequena variação em  $Q^2$ , podemos derivar a Eq. (3.60) em ambos os lados em relação a  $Q^2$ , obtendo

$$Q^2 \frac{\partial q_A^f(x, Q^2)}{\partial Q^2} = \frac{\alpha_s C_F}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \frac{1+z^2}{1-z} q^f\left(\frac{x}{z}, Q^2\right). \quad (3.62)$$

Fazendo o mesmo desenvolvimento para os diagramas B e C, chega-se à seguinte expressão para a função de distribuição de quarks  $q_{B+C}^f$ :

$$q_{B+C}^f(x, Q^2) = -\frac{\alpha_s C_F}{2\pi} \int_{\Lambda_{QCD}}^{Q^2} \frac{dk'_\perp{}^2}{k'_\perp{}^2} \int_x^1 dz \frac{1+z^2}{1-z} q^f\left(\frac{x}{z}, k'_\perp{}^2\right). \quad (3.63)$$

Derivando ambos os lados em relação a  $Q^2$ ,

$$Q^2 \frac{\partial q_{B+C}^f(x, Q^2)}{\partial Q^2} = -\frac{\alpha_s C_F}{2\pi} \int_x^1 \frac{1+z^2}{1-z} q^f\left(\frac{x}{z}\right), \quad (3.64)$$

A modificação total na função de distribuição de quarks,  $\delta q^f(x, Q^2) = q_A^f(x, Q^2) + q_{B+C}^f(x, Q^2)$ , é obtida somando-se as Eqs. (3.62) e (3.64):

$$Q^2 \frac{\partial q^f(x, Q^2)}{\partial Q^2} = \frac{\alpha_s C_F}{2\pi} \left[ \int_x^1 \frac{dz}{z} \frac{1+z^2}{1-z} q^f\left(\frac{x}{z}, Q^2\right) - \int_0^1 dz \frac{1+z^2}{1-z} q^f(x, Q^2) \right]. \quad (3.65)$$

Após isso, define-se a função de desdobramento quark-quark [17, 54]

$$P_{qq}(z) = C_F \left[ \frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-z) \right], \quad (3.66)$$

onde o sinal  $+$  é definido como:

$$\int_x^1 dz \frac{1}{(1-z)_+} f(z) = \int_x^1 \frac{dz}{1-z} [f(z) - f(1)] + f(1) \ln(1-x), \quad (3.67)$$

e  $0 \leq f(z) \leq 1$ . Por conseguinte, a Eq. (3.65) é escrita como

$$Q^2 \frac{\partial q^f(x, Q^2)}{\partial Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 dz z P_{qq}(z) q^f\left(\frac{x}{z}, Q^2\right). \quad (3.68)$$

A equação diferencial acima descreve a evolução em  $Q^2$  da função de distribuição de quarks  $q^f(x, Q^2)$  a partir de uma condição inicial  $Q_0^2$ , levando em consideração que estamos fazendo correções de logaritmo dominante apenas. A função de desdobramento  $P_{qq}$  fornece a probabilidade de se achar um quark na função de onda de outro quark.

Além dos quarks, deve-se considerar também os glúons, visto que temos uma função de distribuição de glúons  $G(x, Q^2)$ . Para tanto, define-se uma função chamada de distribuição singlete de sabor:

$$\Sigma(x, Q^2) = \sum_f [q^f(x, Q^2) + q^{\bar{f}}(x, Q^2)] , \quad (3.69)$$

em que  $q^{\bar{f}}$  refere-se ao antiquark. Define-se também a função de distribuição não-singlete de sabor:

$$\Delta^{f\bar{f}}(x, Q^2) = q^f(x, Q^2) - q^{\bar{f}}(x, Q^2) . \quad (3.70)$$

Como no caso da divisão de um glúon há criação em mesma quantidade de quarks e antiquarks, não haverá contribuição desta divisão para a função de distribuição não-singlete de sabor, como pode ser verificado na Eq. (3.70). Desta forma,  $\Delta^{f\bar{f}}$  depende apenas de  $q^f(x, Q^2)$  e, por isso,  $q^f(x, Q^2)$  pode ser simplesmente substituída por  $\Delta^{f\bar{f}}(x, Q^2)$  na Eq. (3.68), originando a equação

$$Q^2 \frac{\partial \Delta^{f\bar{f}}(x, Q^2)}{\partial Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} P_{qq}(z) \Delta^{f\bar{f}}\left(\frac{x}{z}, Q^2\right) . \quad (3.71)$$

Para  $\Sigma(x, Q^2)$  e  $G(x, Q^2)$ , obtém-se

$$Q^2 \frac{\partial}{\partial Q^2} \begin{pmatrix} \Sigma(x, Q^2) \\ G(x, Q^2) \end{pmatrix} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \begin{pmatrix} P_{qq}(z) & P_{qG}(z) \\ P_{Gq}(z) & P_{GG}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma(x/z, Q^2) \\ G(x/z, Q^2) \end{pmatrix} . \quad (3.72)$$

As equações de evolução (3.71) e (3.72) são chamadas de Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi (DGLAP) [6–8], onde  $P_{qG}(z)$ ,  $P_{Gq}(z)$  e  $P_{GG}(z)$  são as outras funções de desdobramento, cujas expressões são dadas por: [17, 54]

$$P_{Gq}(z) = C_F \frac{1 + (1-z)^2}{z} , \quad (3.73)$$

$$P_{qG}(z) = N_f [z^2 + (1-z)^2] , \quad (3.74)$$

$$P_{GG}(z) = 2N_c \left[ \frac{z}{(1-z)_+} + \frac{1-z}{z} + z(1-z) \right] + \frac{11N_c - 2N_f}{6} \delta(1-z) , \quad (3.75)$$

onde  $N_f$  refere-se ao número de sabores de quarks.

Uma questão importante a ser discutida é o comportamento das Eqs. (3.71) e (3.72) em pequenos valores do  $x$  de Bjorken, já que estamos interessados em espalhamentos em altas energias. Para pequenos valores de  $x$  e, conseqüentemente, para  $z \ll 1$ , apenas as funções  $P_{Gq}$  e  $P_{GG}$  crescem, sendo que as outras duas se tornam muito pequenas. Como pode ser visto,  $P_{Gq} \sim (1/z)$  e, da mesma forma,  $P_{GG} \sim (1/z)$ . Por conseguinte, apenas a última linha da Eq. (3.72) se torna relevante. Assim,

$$Q^2 \frac{\partial G(x, Q^2)}{\partial Q^2} \approx \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} [P_{Gq}(z)\Sigma(x/z, Q^2) + P_{GG}(z)G(x, Q^2)] . \quad (3.76)$$

Na equação acima, a função  $G(x, Q^2)$  é dominante frente a  $\Sigma(x, Q^2)$  e, portanto, o termo que contém esta última função pode ser negligenciado, restando apenas a função de distribuição de glúons. Na Eq. (3.76), podemos usar a aproximação para pequeno  $x$  para  $P_{GG}$ , de forma que

$$Q^2 \frac{\partial G(x, Q^2)}{\partial Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \frac{2N_c}{z} G(x/z, Q^2) , \quad (3.77)$$

onde a aproximação usada é

$$[P_{GG}(z)]_{z \ll 1} \approx \frac{2N_c}{z} . \quad (3.78)$$

Pela definição de  $z$ ,

$$Q^2 \frac{\partial xG(x, Q^2)}{\partial Q^2} = \frac{\alpha_s N_c}{\pi} \int_x^1 \frac{dx'}{x'} x' G(x', Q^2) . \quad (3.79)$$

Resolvendo a integral e definindo  $Q_0$  como a virtualidade inicial do fóton,

$$\frac{\partial^2 xG(x, Q^2)}{\partial \ln(1/x) \partial \ln(Q^2/Q_0^2)} = \frac{\alpha_s N_c}{\pi} xG(x, Q^2) , \quad (3.80)$$

onde  $xG(x, Q^2)$  é tratada como a densidade de momento dos glúons. Após o processo de renormalização, como já discutido brevemente na Seção 3.1,  $\alpha_s$  passa a depender de  $Q^2$ , i.e.,  $\alpha_s = \alpha_s(Q^2)$ . Entretanto, para efeitos de simplificação, consideraremos  $\alpha_s$  como uma constante. Pela equação acima, pode-se calcular que o termo que deverá ser somado após as correções vale

$$\alpha_s \ln(1/x) \ln(Q^2/Q_0^2) . \quad (3.81)$$

Em comparação com a Eq. (3.59), temos um termo a mais na expressão acima, o  $(1/x)$ . A soma sucessiva de termos como o da Eq. (3.81) em uma série de potências chama-se *aproximação de duplo logaritmo*. Resolvendo a Eq. (3.80), chega-se a

$$x G(x, Q^2) = \exp \left[ 2 \sqrt{\frac{N_c}{\pi\beta_2} \ln \frac{\ln(Q^2/\Lambda_{QCD}^2)}{\ln(Q_0^2/\Lambda_{QCD}^2)} \ln(1/x)} \right]. \quad (3.82)$$

Portanto, a densidade dos glúons é dominante no regime de pequeno  $x$ , como pode ser visto na equação acima. Esse resultado é muito importante, visto que estaremos trabalhando no regime de altas energias ( $x$  pequeno) e, por isso, será considerada somente a contribuição dos glúons, já que esta é dominante frente à contribuição dos quarks nestas circunstâncias. Na Figura 3.8 vê-se que na região de pequeno  $x$  há um domínio da densidade de glúons. Como será visto mais adiante, é nesta região que ocorre o fenômeno de saturação partônica, dando origem ao chamado regime de saturação.

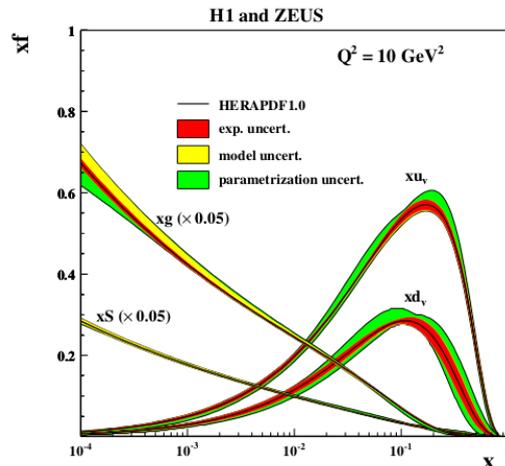


Figura 3.8 – Funções de distribuição partônicas em função de  $x$  para  $Q^2 = 10 \text{ GeV}^2$ . [57]

Nesta seção, estudamos a evolução em  $Q^2$  e o conseqüente desenvolvimento das equações de evolução DGLAP. Na próxima seção trataremos da BFKL, equação de evolução que ocorre em  $x$ .

### 3.2.5 A equação BFKL

Outra equação de evolução muito importante é a de Balitsky-Fadin-Kuraev-Lipatov (BFKL) [9–12], cuja evolução ocorre em  $x$ . Portanto, visto que estamos interessados em

estudar o limite de Regge-Gribov (pequeno  $x$ ), fixaremos  $Q^2$  de forma que da expressão (3.81) resta apenas o termo

$$\alpha_s \ln(1/x) . \quad (3.83)$$

Ressomas em série de potências do termo acima são chamadas de *aproximação de logaritmo dominante*, como no caso da seção anterior para as equações DGLAP, com a diferença de que agora o termo que multiplica  $\alpha_s$  é  $\ln(1/x)$  e não  $\ln(Q^2/\Lambda_{QCD}^2)$ . Sendo assim, haverá ressonâncias de termos da seguinte forma:

$$[\alpha_s \ln(1/x)]^n . \quad (3.84)$$

A BFKL tem seu limite de aplicabilidade dado por [57]

$$\alpha_s \ln\left(\frac{Q^2}{Q_0^2}\right) \ll \alpha_s(Q^2) \ln\left(\frac{1}{x}\right) \ll 1 , \quad (3.85)$$

o que é satisfeito para pequeno  $x$ , uma vez que  $s \approx (Q^2/x)$ . A densidade de glúons pode ser escrita em termos da função de distribuição de glúons não-integrada,  $G(x, k_\perp^2)$ ,

$$xG(x, Q^2) = \int^{Q^2} dk_\perp^2 \frac{G(x, k_\perp^2)}{k_\perp^2} . \quad (3.86)$$

Em ordem dominante, a equação BFKL é escrita como [57]

$$\frac{\partial G(x, k_\perp^2)}{\partial \ln(1/x)} = \frac{N_c \alpha_s}{\pi} k_\perp^2 \int_0^\infty \frac{dk'_\perp^2}{k'_\perp^2} \left[ \frac{G(x, k'_\perp^2) - G(x, k_\perp^2)}{|k'_\perp^2 - k_\perp^2|} + \frac{G(x, k_\perp^2)}{\sqrt{4k'_\perp^2 + k_\perp^2}} \right] . \quad (3.87)$$

Para  $\alpha_s$  fixo, a solução da equação acima é expressa por [57]

$$G(x, k_T^2) \sim \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\lambda} , \quad (3.88)$$

onde

$$\lambda = \frac{\alpha_s N_c}{\pi} (4 \ln 2) \sim 0,5 . \quad (3.89)$$

Tanto a equação DGLAP quanto a BFKL levam ao regime de saturação em pequeno  $Q^2$  e pequeno  $x$ . Portanto, na próxima seção, abordaremos o regime de saturação partônica da QCD, o qual dá origem às equações de evolução não-lineares.

### 3.2.6 Saturação partônica

Tratemos agora da interpretação física do DIS e como as evoluções DGLAP e BFKL alteram sua estrutura de espaço-tempo. A Figura 3.9 mostra três esboços. O primeiro refere-se ao DIS sem evoluções em  $Q^2$  e  $x$ . Se considerarmos o DIS no sistema de referência de Bjorken (onde o próton é ultrarelativístico), o momento do próton e do fóton virtual são dados, respectivamente, pelas Eqs. (3.46) e (3.47), o que leva ao fato de que  $2P \cdot q \approx 2Pq^0 = Q^2/x$ . Portanto,

$$q^0 \approx \frac{Q^2}{2xP} . \quad (3.90)$$

Pela equação acima, percebe-se que  $Q \gg q^0$  e, assim,  $Q^2 = q_{\perp}^2 - (q^0)^2 \approx q_{\perp}^2$ . Por conseguinte,  $Q^2$  tem basicamente componentes transversais, o que implica que  $x_{\perp} \approx (1/q_{\perp}) \approx (1/Q)$  (seria verificado o mesmo resultado se estivéssemos trabalhando no sistema de repouso do próton), sendo que  $x_{\perp}$  pode ser visto como a resolução do fóton virtual. Quanto maior o valor de  $Q^2$ , menor serão as distâncias que o fóton poderá provar dentro do próton (tal como funciona um microscópio). Na evolução DGLAP, a distância provada é cada vez menor, visto que  $Q^2$  aumenta. Isso pode ser interpretado como uma diminuição no tamanho transversal aparente dos pártons. Já no caso da BFKL, o tamanho transversal dos pártons não muda, pois não há aumento em  $Q^2$ .

No limite de pequeno  $x$ , a densidade de glúons cresce, o que aumenta o valor de  $F_2(x, Q^2)$  e, conseqüentemente,  $\sigma^{\gamma^*p}$  cresce indefinidamente. Desta forma, a BFKL prevê  $\sigma \sim s^{\lambda}$ , o que viola o limite de Froissart-Martin [3] discutido no Capítulo 2. Na verdade, pode ser verificado que tanto a BFKL como a DGLAP levam à violação deste limite à medida que  $x$  decresce. Portanto, deve haver algum mecanismo que impeça tal violação, e isso dá origem a um fenômeno chamado de saturação partônica, que acontece devido ao grande crescimento da densidade de glúons no espaço transversal, o que leva a efeitos não-lineares no regime de saturação.

Como a densidade de glúons cresce se  $x$  diminui, aumenta o número de glúons com tamanho transversal  $x_{\perp} = 1/k_{\perp}$ . A questão é que este número não pode crescer indefinidamente, visto que existe um limite físico para isso, que é a área transversal do próton. Desta maneira, as funções de onda dos glúons começam a se sobrepor (Figura

3.9c) e, assim, passam a ocorrer efeitos de recombinação  $gg \rightarrow g$ , sendo que este efeito não é considerado nas equações BFKL e DGLAP.

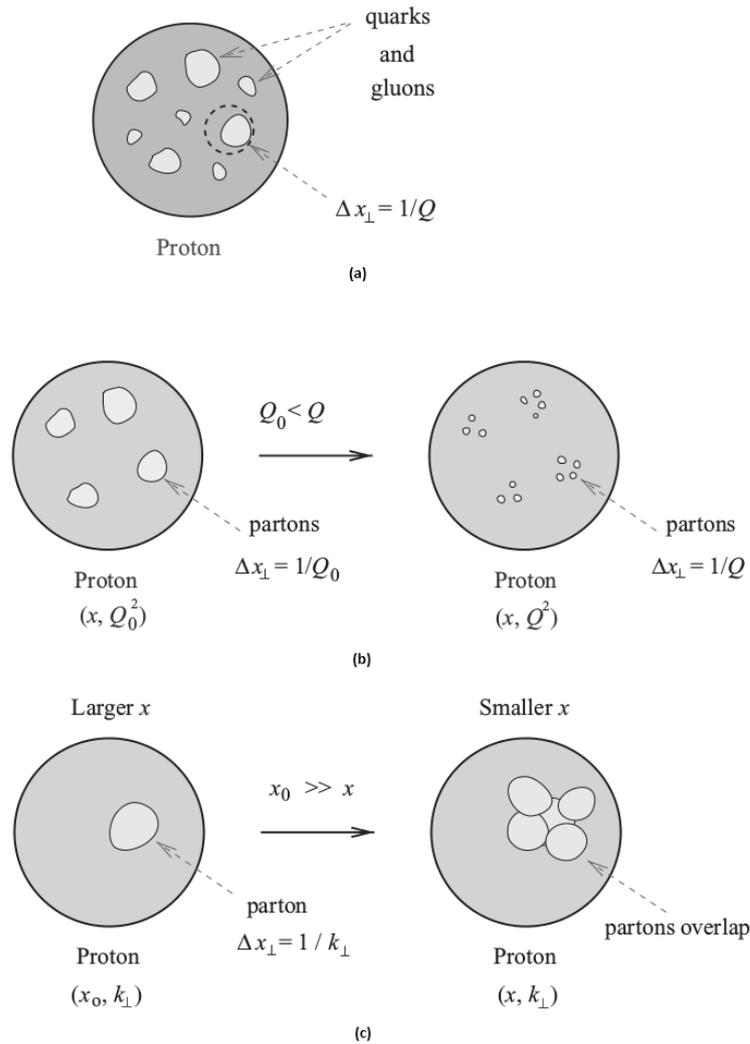


Figura 3.9 – (a) - Estrutura do espaço-tempo no DIS; (b) - Evolução DGLAP; (c) - Evolução BFKL. [17]

Posteriormente, Gribov, Levin e Ryskin (GLR), e depois Mueller e Qiu (MQ), consideraram que no regime de alta densidade partônica pode-se fazer uma estimativa do regime de saturação de pártons. Tal estimativa é feita através do diagrama Fan (Figura 3.10a), um formalismo que considera a evolução QCD em múltiplas escadas. No caso do DIS, o fóton interage com o último párton da ramificação com virtualidade  $Q^2$  e fração de

momento  $x$ . Para que sejam considerados os efeitos não-lineares [formalismo GLR (Figura 3.10b)], foi inserido um termo quadrático na equação BFKL, da forma:

$$\frac{\partial G(x, k_{\perp}^2)}{\partial \ln(1/x)} = \frac{N_c \alpha_s}{\pi} k_{\perp}^2 \int_0^{\infty} \frac{dk'_{\perp}{}^2}{k'_{\perp}{}^2} \left( \frac{F(x, k'_{\perp}{}^2) - F(x, k_{\perp}^2)}{|k'_{\perp}{}^2 - k_{\perp}^2|} + \frac{G(x, k_{\perp}^2)}{\sqrt{4k'_{\perp}{}^2 + k_{\perp}^2}} \right) - \frac{\alpha_s^2}{R_p^2} [G(x, k_{\perp}^2)]^2 . \quad (3.91)$$

Isso faz com que o limite de Froissart-Martin [3] não seja violado em altas energias.

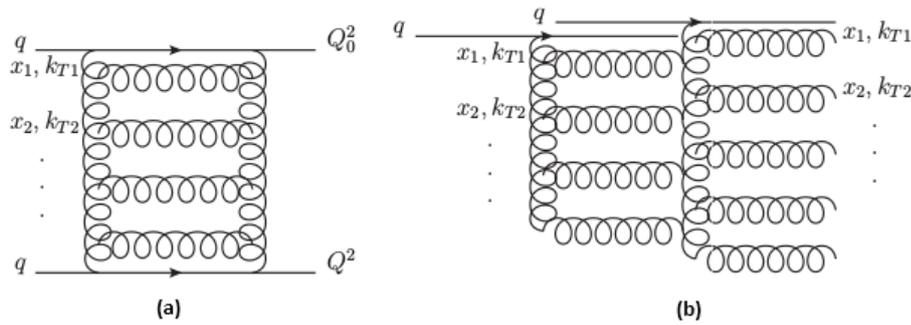


Figura 3.10 – (a) - Diagrama Fan; (b) - Formalismo GLR. [57]

Mais tarde, foi mostrado por Mueller e Qiu que o termo quadrático da densidade de glúons  $xG(x, Q^2)$  pode ser inserido diretamente na equação de *aproximação de duplo logaritmo* [Eq. (3.80)], obtendo-se a equação chamada de GLR-MQ [15, 16]:

$$\frac{\partial^2 xG(x, Q^2)}{\partial \ln(1/x) \partial \ln(Q_0^2/Q^2)} = \frac{N_c \alpha_s}{\pi} xG(x, Q^2) - \frac{N_c \alpha_s^2}{Q^2 R_p^2} [xG(x, Q^2)]^2 , \quad (3.92)$$

onde define-se uma escala de saturação,  $Q_s^2(x, Q^2)$ , como

$$Q_s^2 \equiv \frac{\alpha_s N_c}{R_p^2} xG(x, Q_s^2) , \quad (3.93)$$

a qual é definida quando os termos não-linear e linear se tornam iguais e, portanto, o lado direito da Eq. (3.92) é nulo.

A Figura 3.11 resume de forma ilustrativa o que foi tratado nesta seção, mostrando o regime de saturação na QCD.

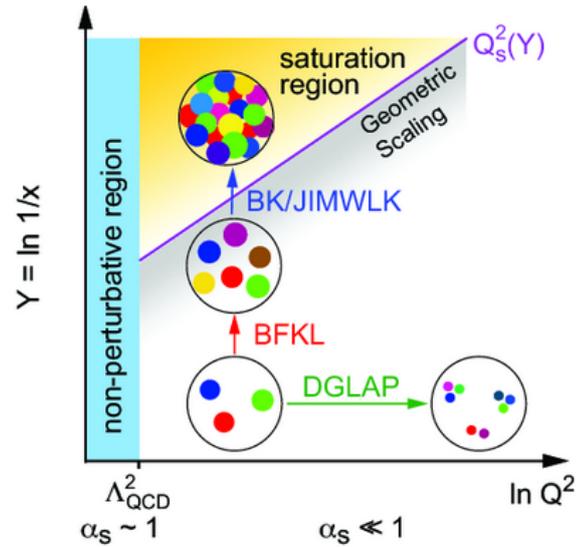


Figura 3.11 – Gráfico ilustrativo da distribuição de partons quando das evoluções em  $Q^2$  e  $x$ . Em pequeno  $Q^2$  e pequeno  $x$ , o sistema encontra-se saturado, possuindo uma grande densidade de glúons. [23]

Neste capítulo, tratamos brevemente da teoria das interações fortes (QCD), introduzimos os conceitos e expressões das equações de evolução e, por fim, discutimos o regime de saturação na QCD, cujo entendimento é de fundamental importância para processos em altas energias. No próximo capítulo introduziremos um formalismo muito utilizado no regime de saturação: o modelo de dipolos de cor.

## 4 Formalismo de dipolos de cor

Tal como no Capítulo 3, a discussão desde capítulo será baseada na Referência [17].

No modelo de dipolos de cor, consideramos os fótons e hádrons como superposições de pares de quark-antiquark. Desta maneira, pode-se estender os cálculos do DIS para outros processos, os quais podem ser totalmente hadrônicos [30].

Ao aplicar-se o formalismo de dipolos para o DIS da seção anterior, considera-se que o fóton flutua em um estado singleto de cor de um quark e um antiquark, o qual interage com o próton [2, 58–60]. O quadri-momento do fóton virtual na notação do cone de luz é  $q^\mu = (q^+, -\frac{Q^2}{q^+}, \vec{0}_\perp)$ . O processo pode ser visto no diagrama a seguir (Figura 4.1), o qual representa o modelo de dipolos aplicado ao DIS, onde  $x_\perp$  simboliza a distância entre o quark e o antiquark.

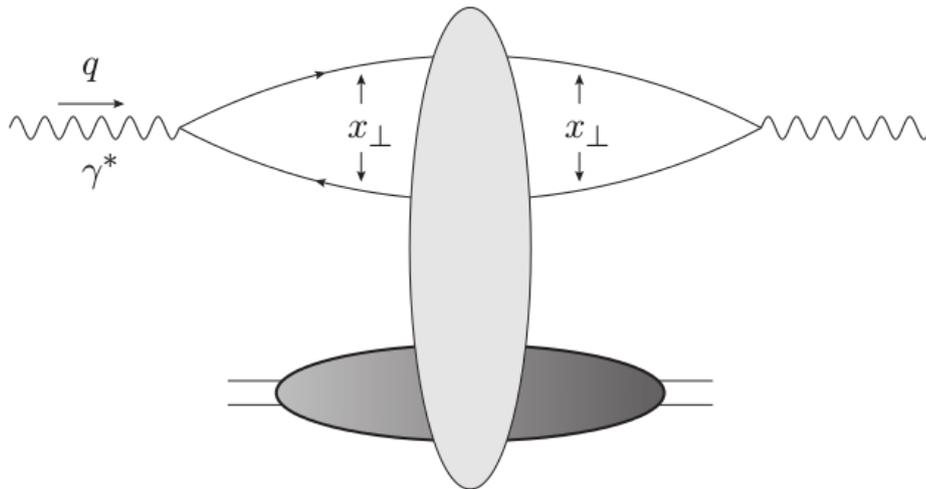


Figura 4.1 – Espalhamento frontal do DIS em um alvo nuclear ou próton, no sistema de repouso do alvo. [17]

Devido ao fato de que o tempo de flutuação do fóton no par quark-antiquark é muito maior do que o tempo de interação deste par com o próton, o diagrama da Figura 4.1 pode ser analisado separadamente em dois processos, sendo que um deles é um processo QED (flutuação do fóton em um dipolo de quarks) e o outro é QCD (interação do dipolo com o próton). Outra vantagem do formalismo de dipolos é que, em altas energias, a distância transversal  $x_\perp$  entre o quark e o antiquark não varia durante a interação, fazendo

com que a matriz  $S$  seja diagonal em relação ao tamanho transversal do dipolo [61]. A distância  $x_{\perp}$  da Figura 4.1 pode variar apenas de

$$\Delta x_{\perp} \approx \frac{Rk_{\perp}}{E}, \quad (4.1)$$

em que  $E = q^0$  representa a energia do dipolo no sistema de laboratório,  $k_{\perp}$  é o momento transversal relativo obtido pelo par quark-antiquark durante a interação e  $R$  é o tamanho longitudinal do alvo. Considerando-se o  $x$  de Bjorken,

$$x = \frac{Q^2}{2P \cdot Q} \approx \frac{Q^2}{2mE}. \quad (4.2)$$

Em altas energias,  $x$  é pequeno, fazendo com que  $E$  seja grande (para  $Q^2$  fixo). Na Eq. (4.1), vê-se então que  $\Delta x_{\perp}$  é pequeno. Para que se possa enxergar o quão pequeno é  $\Delta x_{\perp}$ , deve-se calcular  $\Delta x_{\perp}/x_{\perp}$ . Assim, usando o princípio da incerteza,  $Q \approx k_{\perp} \approx (1/x_{\perp})$ , temos que

$$\frac{\Delta x_{\perp}}{x_{\perp}} \approx 2mxR = \frac{4R}{l_c} \ll 1, \quad (4.3)$$

onde  $l_c = \frac{2}{mx}$  é o comprimento de coerência da flutuação do dipolo. Desta maneira, em altas energias (pequeno  $x$ ), a variação da distância transversal entre os dipolos é muito pequena frente à distância transversal entre os mesmos, e isso torna conveniente que trabalhemos no espaço de coordenadas transversas.

Como discutido anteriormente, pode-se separar o diagrama da Figura 4.1 em dois processos, o que se traduz no fato de que é possível fatorizar tal diagrama em um processo QED, representado pela função de onda da Eq. (4.4) (cujo módulo quadrado dá a probabilidade do fóton flutuar em um dipolo de quarks), e em um processo QCD, representado pela seção de choque total do dipolo com o próton. Assim, utilizando a notação do cone de luz, a seção de choque total fóton-próton é dada por [17]

$$\sigma_{tot}^{\gamma^* p}(x, Q^2) = \int \frac{d^2 \vec{x}_{\perp}}{4\pi} \int_0^1 \frac{dz}{z(1-z)} |\Psi^{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}(\vec{x}_{\perp}, z)|^2 \sigma_{tot}^{q\bar{q} p}(x_{\perp}, Y), \quad (4.4)$$

onde  $z = (k^+/q^+)$ , sendo  $k^+$  o momento do cone de luz do quark no par quark-antiquark<sup>1</sup>, e  $Y$  o intervalo de rapidez do espalhamento dipolo-próton, dado por  $Y = \ln(s^* x_{\perp}^2) \approx \ln(1/x)$ ,

<sup>1</sup> A variável  $z$  representa a fração de momento longitudinal carregada pelo quark, enquanto que  $(1-z)$  é o valor da fração de momento longitudinal carregada pelo antiquark.

em que  $x_\perp \sim 1/Q$  e  $s^*$  foi definido na Eq. (3.29). As componentes longitudinal e transversal do vetor de polarização do fóton são dadas, respectivamente, por

$$\epsilon_L^\lambda = (0, 0, \vec{\epsilon}_\perp^\lambda), \quad (4.5)$$

$$\epsilon_T^\lambda = \left( \frac{q^+}{Q}, \frac{Q}{q^+}, \vec{0}_\perp \right), \quad (4.6)$$

onde  $\vec{\epsilon}_\perp^\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda, i)$  para  $\lambda = \pm 1$ , visto que estamos trabalhando no calibre  $A^+ = 0$ . Usando a relação (no calibre de Landau)<sup>2</sup> [17]

$$g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} = - \sum_{\lambda=\pm 1} \epsilon_{T\mu}^\lambda \epsilon_{T\nu}^{\lambda*} + \epsilon_{L\mu} \epsilon_{L\nu}^*, \quad (4.7)$$

juntamente com as Eqs. (4.5) e (4.6), obtém-se:

$$\sigma_T^{\gamma^*p} = \frac{4\pi^2 \alpha_{EM}}{q^0} W^{\mu\nu} \frac{1}{2} \sum_{\lambda=\pm 1} \epsilon_{T\mu}^\lambda \epsilon_{T\nu}^{\lambda*} = \frac{4\pi^2 \alpha_{EM}}{q^0} W_1, \quad (4.8)$$

$$\sigma_L^{\gamma^*p} = \frac{4\pi^2 \alpha_{EM}}{q^0} W^{\mu\nu} \epsilon_{L\mu} \epsilon_{L\nu}^* = \frac{4\pi^2 \alpha_{EM}}{q^0} \left[ -W_1 + \left( 1 + \frac{\nu^2}{Q^2} \right) W_2 \right], \quad (4.9)$$

onde  $\nu$  foi definido na Eq. (3.28). Através das Eqs. (3.47) e (3.48), no limite de altas energias ( $\nu \gg Q$ ),

$$F_2(x, Q^2) = \frac{Q^2}{4\pi \alpha_{EM}} \sigma_{tot}^{\gamma^*p} = \frac{Q^2}{4\pi \alpha_{EM}} (\sigma_T^{\gamma^*p} + \sigma_L^{\gamma^*p}), \quad (4.10)$$

$$2xF_1(x, Q^2) = \frac{Q^2}{4\pi^2 \alpha_{EM}} \sigma_T^{\gamma^*p}. \quad (4.11)$$

Utilizando as Eqs. (4.10) e (4.11), pode-se definir a função de estrutura longitudinal  $F_L$ , cujo valor mede a violação da relação de Callan-Gross: [62]

$$F_L(x, Q^2) \equiv F_2(x, Q^2) - 2xF_1(x, Q^2) = \frac{Q^2}{4\pi^2 \alpha_{EM}} \sigma_L^{\gamma^*p}. \quad (4.12)$$

Pelas Eqs. (4.8) e (4.9),

$$\sigma_{T,L}^{\gamma^*p} = \int \frac{d^2 x_\perp}{4\pi} \int_0^1 \frac{dz}{z(1-z)} |\Psi_{T,L}^{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}(\vec{x}_\perp, z)|^2 \sigma_{tot}^{q\bar{q}p}(\vec{x}_\perp, Y). \quad (4.13)$$

<sup>2</sup> O calibre de Landau é definido como  $\partial_\mu A^\mu = 0$ .

Partiremos agora para o cálculo das funções de onda no cone de luz. Apenas o vetor de polarização do fóton difere as componentes transversal e longitudinal da função de onda total. Pelo diagrama da Figura 4.1 e utilizando as regras de Feynman da QCD para o cone de luz<sup>3</sup>, pode-se escrever as funções de onda no espaço de momento como

$$\Psi_{T,L}^{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}(\vec{k}_\perp, z) = Z_f e \frac{z(1-z)\delta_{ij}}{m_f^2 + k_\perp^2 + Q^2 z(1-z)} \bar{u}_\sigma(k) \gamma \cdot \epsilon_{T,L}^\lambda \nu_{\sigma'}(q-k), \quad (4.14)$$

onde  $Z_f$  é a carga do quark de sabor  $f$  em termos da carga elementar  $e$ ,  $m_f$  é a massa do quark,  $\sigma$  e  $\sigma'$  são as helicidades do quark e do antiquark, respectivamente, e  $i, j$  são suas cores. Inserindo os vetores de polarização definidos nas Eqs. (4.5) e (4.6) e aplicando a transformada de Fourier na Eq. (4.14), obtém-se as funções de onda transversal e longitudinal no espaço de coordenadas:

$$\begin{aligned} \Psi_T^{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}(\vec{x}_\perp, z) = \frac{eZ_f}{2\pi} \delta_{ij} \sqrt{z(1-z)} \left[ (1 - \delta_{\sigma\sigma'}) (1 - \sigma\lambda - 2z) i a_f \frac{\epsilon_\perp^\lambda \cdot \vec{x}_\perp}{x_\perp} K_1(x_\perp a_f) \right. \\ \left. + \delta_{\sigma\sigma'} \frac{m_f}{\sqrt{2}} (\sigma\lambda + 1) K_0(x_\perp a_f) \right], \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\Psi_L^{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}(\vec{x}_\perp, z) = \frac{eZ_f}{2\pi} [(1-z)z]^{3/2} \delta_{ij} 2Q (1 - \delta_{\sigma\sigma'}) K_0(x_\perp a_f). \quad (4.16)$$

em que  $a_f^2 = Q^2 z(1-z) + m_f^2$ , sendo  $m_f$  a massa correspondente a cada sabor de quark.

Após a realização do tratamento QED no formalismo de dipolos, onde foram calculadas as componentes transversal e longitudinal da função de onda do processo  $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}$ , deve-se agora partir para o tratamento QCD, a fim de que se determine  $\sigma_{tot}^{q\bar{q}p}$ .

## 4.1 O formalismo de Glauber-Mueller

O formalismo de Glauber trata principalmente da interação entre núcleos, de forma que se possa calcular correções nucleares à seção de choque nuclear [63]. Todavia, pode-se também incluir os efeitos de saturação partônica, levando-se em consideração os múltiplos espalhamentos.

<sup>3</sup> Para maiores informações sobre as regras de Feynman da QCD no cone de luz, veja Referência [47].

Consideremos um fóton virtual com virtualidade  $Q^2$  que flutua em um dipolo de quarks, tal como foi considerado na seção anterior.

A teoria de múltiplos espalhamentos de Glauber usa o método de deslocamento de fase para tratar uma partícula que sofre sucessivos espalhamentos em altas energias. No caso de flutuações hadrônicas (pares de quarks ou glúons), os espalhamentos são coerentes. Como há interferência entre eles, espera-se uma diminuição na seção de choque nuclear, de forma que  $\sigma_{nucleo} < A\sigma_{nucleon}$ . Por outro lado, para espalhamentos completamente incoerentes, espera-se que a seção de choque nuclear seja igual a  $A\sigma_{nucleon}$ . A expressão no formalismo de Glauber que calcula a seção de choque total de um hádron com um núcleo é dada por [18]

$$\sigma_{tot}^{nucleo} = 2 \int d^2\vec{b} [1 - e^{-\frac{1}{2}\sigma_{nucleon}S_A(\vec{b})}] , \quad (4.17)$$

em que  $S_A(b)$  é chamada de função perfil e tem dependência no parâmetro de impacto  $\vec{b}$ . Este parâmetro é simbolizado pelo vetor  $\vec{b}$  e mede a separação entre os centros dos dois núcleos na colisão (conforme é mostrado na Figura 4.2), e é uma variável conjugada ao momento transferido  $t$ . A função de perfil dá a informação da distribuição angular do espalhamento e também de como os nucleons estão distribuídos dentro do núcleo.

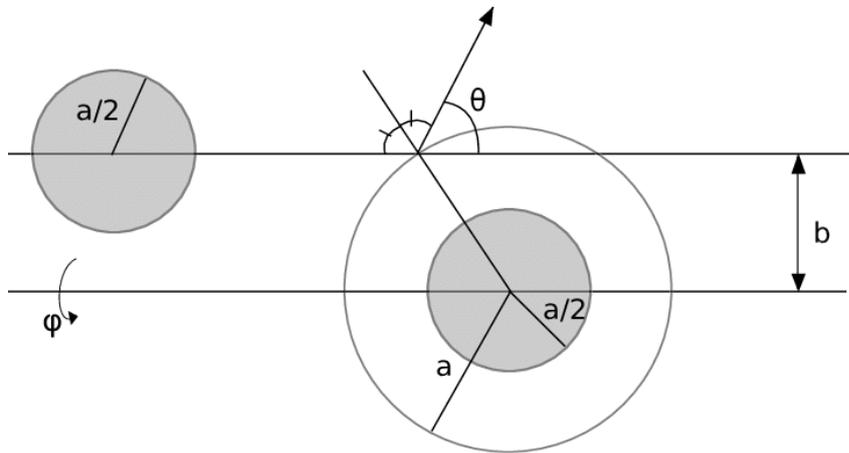


Figura 4.2 – Representação esquemática de uma colisão, com parâmetro de impacto  $\vec{b}$ , entre duas esferas rígidas de diâmetro  $a$ . [64]

Consideremos agora uma amplitude de espalhamento  $M(s, t)$  que está em função das variáveis de Mandelstam  $s$  e  $t$ . Usando o modelo eikonal<sup>4</sup>, é possível escrever essa amplitude em termos da variável  $s$  e do parâmetro de impacto  $\vec{b}$ , de forma que

$$m(s, \vec{b}) = \frac{1}{2\pi} \int d^2\vec{q} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{b}} M(s, t = -q^2) . \quad (4.18)$$

No segundo capítulo tratamos também do teorema óptico, cuja expressão é dada por<sup>5</sup>

$$\sigma_{tot} = 4\pi \operatorname{Im}[M(s, 0)] . \quad (4.19)$$

Sendo assim, as seções de choque total e elástica (através do teorema óptico) são reescritas na representação de parâmetro de impacto  $\vec{b}$  como

$$\sigma_{tot} = 4\pi \operatorname{Im}[M(s, 0)] = 2 \int d^2\vec{b} \operatorname{Im}[m(s, \vec{b})] . \quad (4.20)$$

$$\sigma_{el} = \int d^2\vec{b} |m(s, \vec{b})|^2 . \quad (4.21)$$

Devido ao vínculo de unitariedade, a seção de choque total deve ser escrita como a soma da seção de choque elástica com a seção de choque inelástica, de forma que

$$\sigma_{tot} = \sigma_{el} + \sigma_{inel} . \quad (4.22)$$

Desta maneira, fazendo uso das Eqs. (4.20), (4.21) e (4.22),

$$2\operatorname{Im}[m(s, \vec{b})] = |m(s, \vec{b})|^2 + A_{inel}(s, \vec{b}) , \quad (4.23)$$

em que  $A_{inel}$  é a soma sobre as contribuições dos canais inelásticos. Se a parte real da amplitude se anula em altas energias (pequenos valores de  $x$ ), a Eq. (4.23) tem como solução:

$$m(s, \vec{b}) = i[1 - e^{-\frac{1}{2}\Omega(s, \vec{b})}] , \quad (4.24)$$

onde  $\Omega(s, \vec{b})$  é chamada de função opacidade, determinada a partir de uma modelagem detalhada da interação, e mede a probabilidade de que nenhum espalhamento inelástico

<sup>4</sup> Para discussão sobre o modelo eikonal, veja Referência [65].

<sup>5</sup> Esta expressão é equivalente a que foi derivada no Capítulo 2.

com o alvo ocorra. Se a função opacidade for fatorizada na forma  $\Omega(s, \vec{b}) = \Omega(s)S(\vec{b})$ , pode-se identificar a opacidade da Eq. (4.24) como  $\Omega(s \approx Q^2/x, \vec{r}) = \sigma_{nucleon}(x, \vec{r})$ .

Para o cálculo da seção de choque dipolo-nucleon, faz-se a extensão do formalismo de Glauber para o caso de um processo dipolo-nucleon, de forma a obtermos o formalismo de Glauber-Mueller [17, 18]:

$$\sigma_{dip}^{GM} = 2 \int d^2\vec{b} [1 - e^{-\frac{1}{2}\sigma_{nucleon}^{q\bar{q}}S(\vec{b})}] . \quad (4.25)$$

Esta abordagem é válida apenas no limite de pequeno  $x$ . Em altas energias os espalhamentos sucessivos são tratados como colisões independentes, de forma que o processo é descrito pela representação eikonal clássica de uma partícula relativística cruzando o núcleo (no caso nuclear). Da mesma forma que não existe correlação entre os nucleons no caso nuclear, também não existe correlação de pártons no caso hadrônico, de maneira que apenas os pártons mais rápidos interagem com o alvo.

Deve-se tratar agora da função de perfil  $S(\vec{b})$ . Como já mencionado, esta variável contém a dependência no espalhamento, ou seja, dependência no momento transferido  $t$ , e pode ser aproximada por uma parametrização exponencial, de modo que tenha uma forma gaussiana no espaço de  $\vec{b}$  (no caso nuclear):

$$S(\vec{b}) = \frac{A}{\pi R_A^2} e^{-\frac{b^2}{R_A^2}} , \quad (4.26)$$

onde  $R_A$  é o tamanho transversal do alvo e  $A$  é o número atômico do núcleo. Para o caso de um nucleon apenas,  $A = 1$ . Em se tratando do próton,  $R^2$  está entre os valores  $5 - 17 \text{ GeV}^{-2}$ . [63]

Na próxima seção trataremos do modelo fenomenológico GBW (Golec-Biernat e Wüsthoff) [19], cuja expressão é baseada no modelo de Glauber-Mueller. Contudo, a expressão da seção de choque contém parâmetros ajustados a partir de dados experimentais, já que se trata de um modelo fenomenológico.

## 4.2 O modelo fenomenológico GBW

Uma das dificuldades encontradas no cálculo da seção de choque de dipolo é modelar a função de glúons não-integrada. Devido a isso, adota-se a estratégia de parametrizar esta seção de choque ao realizar uma interpolação entre a região de grande  $Q^2$  (regime *hard*)

e pequeno  $Q^2$  (regime *soft*) [57]. Como foi visto na seção anterior, utilizando o teorema óptico juntamente com o modelo eikonal, a seção de choque de dipolos é dada por [63]

$$\sigma_{dip}(x, r_{\perp}) = 2 \int d^2\vec{b} N(x, \vec{b}, r_{\perp}) , \quad (4.27)$$

em que  $r_{\perp}^{\vec{}}$  é a distância transversa entre o quark e o antiquark<sup>6</sup> e  $N(x, \vec{b}, r_{\perp})$  é a parte imaginária da amplitude de espalhamento dipolo-hádron [veja Eq. (4.20)]. Assumindo a seguinte forma fatorizada para  $N_{GBW}(x, r_{\perp}, b)$ :

$$N_{GBW}(x, r_{\perp}, b) = N_{GBW}(x, r_{\perp})S(b) , \quad (4.28)$$

onde  $S(b) = \Theta(b - R_{proton})$ , temos que

$$\sigma_{tot}^{GBW} = 2 \int_0^{\infty} N(x, r_{\perp})\Theta(b - R_{proton})d^2\vec{b} = 2 \int_0^{R_{proton}} N(x, r_{\perp})d^2\vec{b} , \quad (4.29)$$

$$\sigma_{tot}^{GBW} = \sigma_0 N(x, r_{\perp}) , \quad (4.30)$$

em que  $\sigma_0 = 2\pi R_{proton}^2$ . Este parâmetro provém da QCD não-perturbativa, sendo ajustado a partir dos dados experimentais. Para pequenos valores de  $r_{\perp}$ ,  $N(x, r_{\perp}) \sim r_{\perp}^2$ . Assim, o sistema é fracamente interagente, característica da transparência de cor<sup>7</sup>. Em contrapartida, para grandes valores de  $r_{\perp}$ ,  $N(x, r_{\perp}) \sim 1$ , o sistema é fortemente interagente, o que indica que o mesmo se encontra no regime de saturação e, desta forma,  $\sigma_{dip}$  é igual à constante  $\sigma_0$ .

O modelo de Golec-Biernat e Wüsthoff (GBW) [19] é inspirado no modelo eikonal de Glauber-Mueller, de modo que

$$\sigma_{dip}^{GBW}(x, r_{\perp}) = \sigma_0 \left[ 1 - e^{-\frac{r_{\perp}^2 Q_s^2(x)}{4}} \right] , \quad (4.31)$$

onde  $Q_s^2(x)$  é a escala de saturação, dada por  $Q_s^2(x) = Q_0^2(x/x_0)^{\lambda}$ , em que  $Q_0^2 = 1 \text{ GeV}^2$ . Os parâmetros  $\sigma_0$ ,  $x_0$  e  $\lambda$  foram ajustados a partir dos dados de HERA<sup>8</sup> para DIS inclusivo no limite de pequeno  $x$ , e são dados por  $\sigma_0 = 23 \text{ mb}$ ,  $x_0 = 3 \times 10^{-4}$  e  $\lambda = 0,288$  [67].

<sup>6</sup> Na seção anterior, foi utilizada a variável  $x_{\perp}^{\vec{}}$  para representar a distância transversa entre o par quark-antiquark. Nesta seção estamos usando a variável  $r_{\perp}^{\vec{}}$  apenas para seguir a notação da referência utilizada.

<sup>7</sup> Para uma discussão mais detalhada sobre o conceito de transparência de cor, veja Referência [66].

<sup>8</sup> HERA é a abreviatura para *Hadron Electron Ring Accelerator*. Era um acelerador localizado no centro de pesquisas físicas DESY, em Hamburgo, e que operou até 2007.

Na seção seguinte discorreremos a respeito da equação de Balitsky-Kovchegov (BK), cujo desenvolvimento e aplicação também se dão no contexto do formalismo de dipolos de cor.

### 4.3 A equação BK

A equação de evolução não-linear de Balitsky-Kovchegov (BK) [13,14] é utilizada no formalismo de dipolos de cor, considerando a emissão de um glúon por parte do quark ou antiquark (Figura 4.3). Faremos um tratamento bem sucinto, seguindo a notação utilizada na Referência [68], onde podem ser encontrados os detalhes e o desenvolvimento completo dos cálculos.

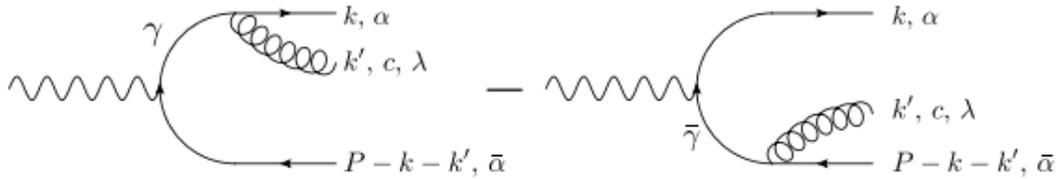


Figura 4.3 – Diagramas de emissão de glúon do processo  $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g$ . [68]

Na seção anterior tratamos do modelo de dipolos, um formalismo que permite a fatorização do diagrama da Figura (4.1) em dois processos: a flutuação do fóton virtual em um dipolo de quarks e a interação deste dipolo com o próton.

Consideremos a divisão do fóton virtual no par quark anti-quark. A função de onda que descreve tal processo, na notação do cone de luz, é dada por [68]

$$\psi_{s,s'}^L(z, r_T) = \frac{-ef e}{2\pi\sqrt{\pi}} Qz(1-z)K_0(\epsilon r_T)\delta_{s,-s'} , \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \psi_{s,s'}^T, \lambda=\pm 1(z, r_T) = & \frac{ef e}{(2\pi)^{3/2}} \left[ i\sqrt{2} \frac{\epsilon^{\pm 1} r_T}{|r_T|} K_1(\epsilon r_T) (z\delta_{s,\mp 1} - (1-z)\delta_{s,\pm 1}) \delta_{s,-s'} \right. \\ & \left. + m_f K_0(\epsilon r_T) \delta_{s,\pm 1} \delta_{s',\pm 1} \right] , \quad (4.33) \end{aligned}$$

onde  $e_f$  é a carga do quark em termos da carga elementar  $e$ ,  $K_0$  é a função de Bessel modificada do segundo tipo de ordem zero,  $K_1$  é a função de Bessel modificada do segundo

tipo de primeira ordem,  $m_f$  é a massa do quark,  $r_T$  é a distância transversa entre o par quark-antiquark,  $z = (k^+/q^+)$ ,  $s$  é o spin do quark,  $s'$  é o spin do antiquark e os índices superiores  $L$  e  $T$  indicam as componentes longitudinal e transversal da função de onda, respectivamente. Os vetores de polarização do fóton são, no calibre do cone de luz,

$$\epsilon_L(q) = \left(0, 0, \frac{Q}{q^+}\right), \quad (4.34)$$

$$\epsilon_T(q) = \left(0, \epsilon_T^\lambda, \frac{q_T \cdot \epsilon_T^\lambda}{q^+}\right). \quad (4.35)$$

Consideremos agora a emissão de um glúon com momento  $k$ , cor  $c$  e helicidade  $\lambda$  por um quark de momento  $p$ , spin  $s$  e cor  $\alpha$ , no limite de altas energias. O quark, após o espalhamento, terá momento  $(p - k)$ , cor  $\beta$  e spin  $s'$ . Desta forma, utilizando as regras de Feynman da QCD no cone de luz, a função de onda do processo  $q \rightarrow qg$  é calculada como

$$\begin{aligned} \Psi_{q \rightarrow qg}(k_T, z) &= \sqrt{p^+} \frac{u_{s'}(p - k)}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2(p - k)^+}} \frac{t_{\alpha\beta}^c g_s \not{\epsilon}_\lambda^\mu(k) \gamma_\mu}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2k^+}} \frac{u_s(p)}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p^+}} \\ &\times \frac{(2\pi)^3}{p^- - k^- - (p - k)^-}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

sendo  $p^+ = k^+/z$ . O denominador  $(p - k)^-$  corresponde à componente “menos” do momento de uma partícula na camada de massa contendo tri-momento  $(p^- - k^-)$  e  $t^c$  é o gerador do grupo  $SU(3)$ . No limite de altas energias,  $z \ll 1$ .

Como o glúon emitido é real, devemos exigir que esteja na camada de massa e, portanto, este só pode ter polarização transversal, o que leva ao fato de que

$$\epsilon^\lambda(k) = \left(0, \epsilon_T^\lambda, \frac{k_T \cdot \epsilon_T^\lambda}{k^+}\right). \quad (4.37)$$

Passaremos agora para a derivação da equação BK. Quando a energia do processo é elevada, aumenta a rapidez do dipolo. Neste caso, há mais espaço de fase disponível e o quark ou o antiquark podem emitir um glúon, de maneira que teremos processos da forma  $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g$ . Tal emissão funciona como uma correção de mais alta ordem ( $\sim \alpha_s$ ) para o estado do fóton virtual que flutua no par quark-antiquark. Sem considerar a emissão do glúon, esse estado pode ser escrito como

$$|\gamma^*\rangle = |\gamma^*\rangle_0 + \frac{1}{\sqrt{N_c}} \int dz d^2 r_T \psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\alpha\bar{\alpha}}(r_T, z) |q_\alpha(x) \bar{q}_{\bar{\alpha}}(y)\rangle_0, \quad (4.38)$$

onde  $|q_\alpha(x)\bar{q}_{\bar{\alpha}}(y)\rangle_0$  é o estado do dipolo definido por

$$|q_s(k)\bar{q}_s(k')\rangle_0 = b_s^\dagger(k)d_{s'}^\dagger(k')|0\rangle, \quad (4.39)$$

em que  $b_s(k)$  é o operador de destruição do férmion e  $d_{s'}^\dagger(k')$  é o operador de criação do antiférmion.

No caso da emissão de um glúon pelo quark ou pelo antiquark, o estado do fóton virtual é dado por

$$\begin{aligned} |\gamma^*\rangle &= |\gamma^*\rangle_0 + \frac{1}{\sqrt{N_c}} \int dz d^2 r_T \psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\alpha\bar{\alpha}}(r_T, z) C(r_T) |q_\alpha(x)\bar{q}_{\bar{\alpha}}(y)\rangle_0 \\ &+ \frac{1}{\sqrt{N_c}} \int dz d^2 r_T dz' d^2 r'_T \Psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g}(r_T, r'_T, z, z') |q_\alpha\bar{q}_{\bar{\alpha}}(y)g_c(z)\rangle_0, \end{aligned} \quad (4.40)$$

onde foi colocado o termo  $C(r_T)$  no primeiro termo da equação para que não seja alterada a normalização da função de onda, cuja fórmula é expressa por

$$\Psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g}(k_T, k'_T, z, z') = \psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}(k_T + k'_T, z) \Psi_{q \rightarrow qg}(k'_T, z') - \psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}(k_T, z) \Psi_{q \rightarrow qg}(k'_T, z'). \quad (4.41)$$

No espaço de coordenadas, obtemos:

$$\Psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g}(r_T, r'_T, z, z') = -\frac{g_s t_{\alpha\bar{\alpha}}^c}{4\pi^2 \sqrt{\pi z'}} \psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\alpha\bar{\alpha}}(r_T, z) \int d^2 k'_T (e^{ik'_T \cdot (r'_T - r_T)} - e^{ik'_T \cdot r'_T}) \frac{\epsilon_T \cdot k'_T}{k'^2_T}, \quad (4.42)$$

onde  $r'_T - r_T$  é a distância transversa entre o quark e o glúon emitido,  $r'_T$  é a distância transversa entre o antiquark e o glúon,  $\psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\alpha\bar{\alpha}}(r_T, z)$  é a função de onda do processo  $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}$  e  $\bar{\alpha}$  é a cor do antiquark. O cálculo da integral da Eq. (4.42) resulta em

$$\Psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g}(r_T, r'_T, z, z') = -\frac{ig_s t_{\alpha\bar{\alpha}}^c}{2\pi^2 \sqrt{\pi z'}} \psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\alpha\bar{\alpha}}(r_T, z) \left( \frac{\epsilon_T \cdot r'_T}{r'^2_T} - \frac{\epsilon_T \cdot (r'_T - r_T)}{(r'_T - r_T)^2} \right). \quad (4.43)$$

Levando em conta que  $t_{\alpha\bar{\alpha}}^c$  é hermitiano e realizando o produto interno do estado do fóton virtual da Eq. (4.38), temos, sem a contribuição da correção por emissão do glúon,

$$\langle \gamma^* | \gamma^* \rangle = 1 + \frac{1}{N_c} \int dz d^2 r_T |\psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\alpha\bar{\alpha}}|^2. \quad (4.44)$$

Contudo, se for considerada a emissão do glúon,

$$\begin{aligned} \langle \gamma^* | \gamma^* \rangle &= 1 + \frac{1}{N_c} \int dz d^2 r_T |C(r_T)|^2 |\psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\alpha\bar{\alpha}}|^2 \\ &+ \int dz d^2 r_T dz' d^2 r'_T |\psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\alpha\bar{\alpha}}|^2 \frac{g_s^2}{N_c 4\pi^3 z'} t_{\alpha\bar{\alpha}}^c t_{\bar{\alpha}\alpha}^c \left| \epsilon_T^\lambda \cdot \left( \frac{r'_T}{r'_T{}^2} + \frac{(r_T - r'_T)}{(r_T - r'_T)^2} \right) \right|^2. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Deve-se realizar a soma sobre as polarizações dos glúons e sobre as cores do quark, antiquark e glúons. Assim, pode-se usar a propriedade

$$\sum_{\lambda=1,2} \epsilon_{\lambda \cdot p}^* \epsilon_{\lambda \cdot p'} = p \cdot p', \quad (4.46)$$

e o fato de que  $t_{\alpha\bar{\alpha}}^c t_{\bar{\alpha}\alpha}^c = (N_c^2 - 1)/2$ . Por conseguinte,

$$\begin{aligned} \langle \gamma^* | \gamma^* \rangle &= 1 + \frac{1}{N_c} \int dz d^2 r_T |\psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\alpha\bar{\alpha}}|^2 \\ &\times \left[ |C(r_T)|^2 N_c + \int d^2 r'_T \frac{dz'}{z} \frac{g_s^2}{4\pi^3} \frac{N_c^2 - 1}{2} \frac{r_T^2}{(r'_T - r_T)^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Usando  $(N_c^2 - 1)/N_c \approx N_c$ ,  $y = \ln(1/z')$  e  $\alpha_s = (g_s^2/4\pi)$ , se compararmos as Eqs. (4.44) e (4.47),

$$|C(r_T)|^2 = 1 - \int d^2 r'_T dy \frac{\alpha_s N_c}{2\pi^2} \frac{r_T^2}{r'_T{}^2 (r_T - r'_T)^2}. \quad (4.48)$$

A equação BK é uma equação de evolução na variável rapidez  $y$ . Nosso objetivo é determinar a amplitude de espalhamento dos diagramas da Figura 4.3 quando aumentada a energia (maior rapidez), contando que o quark ou o antiquark possam emitir um glúon. Desta maneira, a probabilidade do dipolo emitir um glúon é dada pelo módulo quadrado da função de onda do processo  $q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}g$ , a qual está contida no terceiro termo da Eq. (4.47). Portanto, realizando a soma sobre cores e tomando seu módulo quadrado,

$$\frac{1}{N_c} \sum_{cor} |\Psi_{q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}g}(r'_T, r_T, z, z')|^2 d^2 r'_T dz' = \frac{\alpha_s N_c}{2\pi^2 z'} \frac{r_T^2}{r'_T{}^2 (r_T - r'_T)^2} d^2 r'_T dz'. \quad (4.49)$$

Como  $y = \ln(1/z')$ , podemos calcular a contribuição do processo  $q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}g$  para a amplitude de espalhamento frontal elástica:

$$\frac{\alpha_s N_c}{2\pi^2} \int dy d^2 r'_T \frac{r_T^2}{r'_T{}^2 (r_T - r'_T)^2} N_{q\bar{q}g}(y, r_T, r'_T), \quad (4.50)$$

onde  $N_{q\bar{q}g}(y, r_T, r'_T)$  é a amplitude de espalhamento frontal para o sistema dipolo-glúon. Em contrapartida, a probabilidade de haver apenas um estado  $q\bar{q}$  é reduzida por um fator  $1 - |C(r_T)|^2$ , conforme pode ser verificado através da Eq. (4.48).

Então, é construída uma equação de renormalização para  $N_{q\bar{q}}$  no caso em que há correção pela emissão de glúon, o qual pode ser considerado como parte da função de onda do fóton virtual. Neste caso, a amplitude de espalhamento será

$$N_{q\bar{q}}(y, r_T) + \frac{\alpha_s N_c}{2\pi^2} \int dy d^2 r'_T \frac{r_T^2}{r_T'^2 (r_T - r'_T)^2} [N_{q\bar{q}g}(y, r_T, r'_T) - N_{q\bar{q}}(y, r_T)] . \quad (4.51)$$

Por outro lado, se considerarmos o glúon como fazendo parte da função de onda do hádron, teremos um dipolo com rapidez  $y + \Delta y$ . Como a amplitude não pode depender da escolha entre o glúon fazer parte da função de onda do fóton virtual ou do hádron, a Eq. (4.51) deve ser equivalente a  $N_{q\bar{q}}(y + \Delta y, r_T)$ , de modo que

$$\begin{aligned} N_{q\bar{q}}(y + \Delta y, r_T) = N_{q\bar{q}}(y, r_T) + \frac{\alpha_s N_c}{2\pi^2} \Delta y \int d^2 r'_T \frac{r_T^2}{r_T'^2 (r_T - r'_T)^2} \\ \times [N_{q\bar{q}g}(y, r_T, r'_T) - N_{q\bar{q}}(y, r_T)] , \end{aligned} \quad (4.52)$$

onde se supôs que  $\Delta y$  é pequeno de modo que se substituiu a integral em  $y$  por  $\Delta y$ .

No limite de  $N_c$  grande, usa-se a aproximação  $N_c^2 - 1 \approx N_c^2$ . O número de configurações possíveis do glúon emitido é  $N_c^2 - 1$ , visto que a configuração singleto não é permitida. Assim, considera-se que o glúon emitido equivale a um dipolo de quarks, pois cada quark possui  $N_c$  configurações possíveis e, desta forma, um par quark-antiquark possui  $N_c^2$  configurações possíveis.

A probabilidade do sistema não sofrer espalhamento pelo hádron vale

$$P_{q\bar{q}g}(r_T, r'_T) = P_{q\bar{q}}(r_T, r'_T) P_{q\bar{q}}(r_T - r'_T) . \quad (4.53)$$

Portanto,

$$N_{q\bar{q}g}(r_T, r'_T) = N_{q\bar{q}}(r'_T) - N_{q\bar{q}}(r_T - r'_T) - N_{q\bar{q}}(r'_T) N_{q\bar{q}}(r_T - r'_T) , \quad (4.54)$$

sendo  $P = 1 - N$ . A dependência em  $y$  na equação acima está implícita. Substituindo esse resultado na equação de renormalização de grupo (Eq. 4.52), dividindo por  $\Delta y$  e usando o limite de  $\Delta y$  pequeno, teremos:

$$\frac{\partial N_{q\bar{q}}(r_T)}{\partial y} = \frac{\alpha_s N_c}{2\pi^2} \int d^2 r'_T \frac{r_T^2}{r_T'^2 (r_T - r'_T)^2}$$

$$\times [N_{q\bar{q}}(r'_T) + N_{q\bar{q}}(r_T - r'_T) - N_{q\bar{q}}(r_T) - N_{q\bar{q}}(r'_T)N_{q\bar{q}}(r_T - r'_T)] . \quad (4.55)$$

A equação acima é chamada de Balitsky-Kovchegov (BK) [13, 14], a qual fornece a amplitude de espalhamento do dipolo  $N_{q\bar{q}}$  para rapidez  $y > 0$  a partir de uma condição inicial  $N_{q\bar{q}}(y = 0, r_T)$ , fazendo a aproximação de grande  $N_c$ . A solução assintótica da BK será usada nas nossas análises.

No próximo capítulo implementamos os cálculos numéricos dos observáveis  $\sigma_{tot}$ ,  $\sigma_{el}$  e  $B$ , considerando colisões méson-próton e bárion-próton. Primeiramente, realizamos uma discussão acerca dos modelos de saturação utilizados, analisando como cada um se comporta quando da variação de  $x$  e da distância transversa  $r_\perp$  dos dipolos para, em seguida, apresentar os resultados numéricos alcançados através destes modelos.

## 5 O modelo de dipolos aplicado a processos hadrônicos *soft* em altas energias

Neste capítulo serão realizados os cálculos numéricos de alguns observáveis em processos hadrônicos envolvendo mésons e bárions. Para tanto, será utilizado o formalismo de dipolos aplicado ao DIS, o qual será adaptado para processos puramente hadrônicos. O objetivo é calcular os valores de seção de choque total ( $\sigma_{tot}$ ), seção de choque elástica ( $\sigma_{el}$ ) e *slope* elástico ( $B$ ), fazendo uso dos modelos de saturação partônica e também da fenomenologia de Regge, visto que estamos trabalhando no regime *soft* da QCD.

Neste trabalho, partiremos da hipótese de que também em colisões hádron-hádron em altas energias os dipolos de cor podem ser os graus de liberdade corretos, mesmo se forem consideradas grandes distâncias transversas [2]. Sendo assim, será utilizada a expressão do cálculo da seção de choque total do DIS da Eq. (4.4). A seção de choque de dipolo será determinada a partir de três modelos: Glauber-Mueller [17, 18], GBW [19] e b-CGC [22], enquanto que a função de onda do fóton será substituída pela função de onda do hádron.

Adaptando a expressão da Eq. (4.4) para o caso hádron-hádron, temos que

$$\sigma_{H-proton}(x) = \int dr_{\perp}^2 |\psi_H(r_{\perp})|^2 \sigma_{dip}(x, r_{\perp}) , \quad (5.1)$$

onde  $\psi_H(r_{\perp})$  representa a função de onda do hádron que colide com o alvo.

No caso do modelo de dipolos de cor aplicado ao DIS, o fóton é tratado como um par quark-antiquark. Para o caso hadrônico, trataremos o méson como um dipolo, visto que um méson é formado por um quark e por um antiquark. Por outro lado, no caso dos bárions devemos considerar dois dipolos, já que bárions são formados de três quarks. Um dos dipolos será formado por dois quarks e o outro será formado entre o CM desse dipolo e o outro quark que restou.

Na QCD não existe um método estabelecido para determinação das funções de onda dos hádrons. O grupo Dosch et al. de Heidelberg [69] calculou as seções de choque hadrônicas usando modelo estocástico do vácuo adotando um ansatz para  $\psi_H(r_{\perp})$ . Devido à dependência em sabor das seções de choque hadrônicas, em [69] foi considerado que a seção de choque total depende do tamanho dos hádrons em questão, pois foi observado que seu valor decresce com o aumento do número de quarks *strange*. Assim, considerou-se uma

forma gaussiana para as funções de onda do hádron, a qual será adotada neste trabalho também. Para o caso dos mésons,

$$|\psi_M(r_\perp)|^2 = \frac{1}{\pi S_M^2} e^{-\frac{r_\perp^2}{S_M^2}} . \quad (5.2)$$

Na equação acima,  $S_M$  é um parâmetro que está relacionado ao tamanho do méson, sendo determinado experimentalmente através dos raios eletromagnéticos do pión e do káon, de maneira que  $S_M = \sqrt{\frac{8}{3}} R_M$ , em que  $R_\pi = 0,66 \pm 0,01 \text{ fm}$  e  $R_K = 0,58 \pm 0,04 \text{ fm}$ . Analogamente, para os bárions,

$$|\psi_B(r_\perp)|^2 = \frac{1}{\pi S_B^2} e^{-\frac{r_\perp^2}{S_B^2}} , \quad (5.3)$$

onde  $S_B$  é um parâmetro que está relacionado ao tamanho do bárion. Neste trabalho os dois bárions considerados são o próton e o antipróton, cujos raios eletromagnéticos são idênticos e dados por  $R_p = 0,862 \pm 0,012 \text{ fm}$ . Para o próton,  $S_p = \sqrt{\frac{3}{2}} R_p$ .

No DIS, o  $x$  de Bjorken é definido em termos de  $Q^2$  e  $W$  (energia do CM). Já no caso hadrônico, não há “virtualidade do fóton”, portanto postularemos  $x$  como sendo  $x = Q_0^2/s$ , em que  $Q_0^2$  pode ser associado ao *cut-off* dado pela massa dos quarks, de maneira que  $Q_0^2 \approx 4m_q^2$ , e será determinado tendo em vista dados experimentais. A variável  $s$  é o quadrado da energia do CM.

Devido ao fato de que estamos trabalhando na região não-perturbativa, há contribuição das trajetórias de Regge em baixas energias para a seção de choque. Sendo assim, utilizaremos uma parametrização que tem tido sucesso para interações *soft*, chamada de trajetórias secundárias. Usando a fórmula de Gribov [38], a contribuição secundária dos reggeons será dada por (no caso da interação  $\gamma^*p$ ): [58]

$$\left(\frac{s}{s_0}\right)^{\alpha_R} \int \frac{dM^2 \rho(M^2)}{Q^2 + M^2} g_R(M^2) , \quad (5.4)$$

onde  $\rho(M^2)$  é um parâmetro relacionado à seção de choque no processo  $e^+e^-$  e  $g_R$  é o resíduo da trajetória secundária. A Eq. (5.4) é aproximada usando as seguintes contribuições:

$$\sigma^{\gamma p} \sim f(0) \frac{\tilde{M}^2}{(Q^2 + \tilde{M}^2)} \left(\frac{s}{s_0}\right)^{\alpha_R} ,$$

$$\alpha_R = -0,45 ; s_0 = 1 \text{ GeV}^2 , \quad (5.5)$$

em que  $f(0)$  é o resíduo em  $Q^2 = 0$  e é determinado através do ajuste aos dados de seções de choque de fotoprodução inclusiva em baixa energia. O parâmetro  $\tilde{M}^2$  também é ajustado. Os valores de  $f(0)$  e  $\tilde{M}^2$  são, respectivamente,  $0, 19 \text{ mb}$  e  $2 \text{ GeV}^2$ . Neste trabalho, utilizaremos uma parametrização semelhante à Eq. (5.4). A integral da Eq. (5.4) será substituída por uma constante,  $C$ , a ser ajustada tendo em vista os dados experimentais, de maneira que  $\sigma_{tot}^{reggeons} = C(s/s_0)^{\alpha_R}$ .

Iniciemos agora a discussão acerca do regime de saturação, isto é, começaremos o tratamento QCD dos processos (no contexto da teoria de Regge, estamos falando da contribuição do Pomeron, trajetória de Regge dominante em altas energias). Na Referência [59] é tratada a equação BK com dependência em parâmetro de impacto, sendo expressa por

$$\begin{aligned} \tilde{N}(x_{01}, Y, b) &= \tilde{N}(x_{01}, Y_0, b) \exp\left[-\frac{2C_F\alpha_s}{\pi} \ln\left(\frac{x_{01}^2}{\rho^2}\right)(Y - Y_0)\right] \\ &\quad + \frac{C_F\alpha_s}{\pi^2} \int_{Y_0}^Y dy \exp\left[-\frac{2C_F\alpha_s}{\pi} \ln\left(\frac{x_{01}^2}{\rho^2}\right)(Y - y)\right] \\ &\quad \times \int_{\rho} d^2\vec{x}_2 \frac{x_{01}^2}{x_{02}^2 x_{12}^2} \left[ 2\tilde{N}\left(\vec{x}_{02}, y; \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{x}_{12}\right) - \tilde{N}\left(\vec{x}_{02}, y; \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{x}_{12}\right) \tilde{N}\left(\vec{x}_{12}, y; \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{x}_{02}\right) \right]. \end{aligned} \quad (5.6)$$

A equação acima é escrita para  $N(r_{\perp}, x; b) = \text{Im}[a_{dip}(r_{\perp}, x; b)]$ , onde  $a_{dip}$  é a amplitude de espalhamento elástico para um dipolo de tamanho  $r_{\perp}$ . A variável  $Y$  é a rapidez, cuja expressão é  $Y = -\ln x$ . Por conseguinte,  $Y_0$  é a rapidez inicial, sendo sua expressão dada por  $Y_0 = -\ln x_0$ . O *cut-off*  $\rho$  é necessário para regularizar a integral, porém não aparece nas quantidades físicas. No limite de grande  $N_c$ ,  $C_F = N_c/2$ .

Na Eq. (5.6), o dipolo de tamanho  $\vec{x}_{10}$  decai em dois outros dipolos de tamanhos  $\vec{x}_{12}$  e  $\vec{x}_{20}$  com probabilidade de decaimento dada pelo módulo quadrado da função de onda, i.e.,  $|\Psi|^2 = \frac{x_{10}^2}{x_{02}^2 x_{12}^2}$ .

Conforme argumentado em [59], a solução numérica da equação acima é de extrema complexidade e demanda um grande tempo computacional. Portanto, é calculada a amplitude de espalhamento de dipolo sem dependência no parâmetro de impacto  $\vec{b}$ , e depois é assumido um ansatz da seguinte forma [2, 58, 59]:

$$\tilde{N}(r_{\perp}, x, b) = \left(1 - e^{-\frac{\kappa(x, r_{\perp})S(b)}{S(0)}}\right), \quad (5.7)$$

em que

$$\kappa(x, r_{\perp}) = -2 \ln[1 - \tilde{N}(r_{\perp}, x, b = 0)] , \quad (5.8)$$

sendo  $\tilde{N}(r_{\perp}, x, b)$  a solução da equação BK com dependência no parâmetro de impacto [Eq. (5.6)]. As variáveis  $S(b)$  e  $S(0)$  são as funções de perfil do próton alvo, sobre as quais trataremos posteriormente.

O ansatz da Eq. (5.7) corresponde à fórmula de Glauber-Mueller [17, 18]. O valor de  $N(r_{\perp}, x, b = 0)$  é a solução da equação BK para parâmetro de impacto  $b = 0$ , e seu valor foi obtido através do modelo CGC de Iancu-Itakura e Munier<sup>1</sup> [22]. Este modelo calcula a amplitude de dipolos pequenos e dipolos grandes. Para os últimos, a amplitude é obtida através da solução da equação BK, enquanto que para pequenos dipolos utiliza-se a aproximação de ponto de sela para a equação BFKL em ordem dominante. Portanto, a amplitude de espalhamento dipolo-próton é dada por [20, 21]

$$N(x, r_{\perp}) = \begin{cases} N_0 \left( \frac{r_{\perp} Q_s}{2} \right)^{2 \left[ \gamma_s + \frac{1}{\kappa \lambda Y} \ln \left( \frac{2}{r_{\perp} Q_s} \right) \right]} , & \text{se } r_{\perp} Q_s \leq 2 \\ 1 - e^{-A \ln^2(B r_{\perp} Q_s)} & , \text{ se } r_{\perp} Q_s > 2 \end{cases} , \quad (5.9)$$

onde  $Q_s$  é a escala de saturação definida por  $Q_s(x) = (x_0/x)^{\lambda/2} \text{ GeV}$ ,  $Y = \ln(1/x)$  e  $\kappa = \chi''(\gamma_s)/\chi'(\gamma_s)$ , em que  $\chi$  é a função característica da equação BFKL em ordem dominante. Os valores de  $A$  e  $B$  são determinados a partir da condição de continuidade de  $N(x, r_{\perp})$  e de sua derivada em  $r_{\perp} Q_s = 2$  e, assim,

$$A = - \frac{N_0^2 \gamma_s^2}{(1 - N_0)^2 \ln(1 - N_0)} , \quad (5.10)$$

$$B = \frac{1}{2} (1 - N_0)^{-\frac{(1-N_0)}{N_0 \gamma_s}} . \quad (5.11)$$

A seção de choque de dipolo é, então, expressa por

$$\sigma_{dip} = 2 \int d^2 \vec{b} N(x, r_{\perp}, b) = 2 \int d^2 \vec{b} S(b) N(x, r_{\perp}) = \sigma_0 N(x, r_{\perp}) , \quad (5.12)$$

<sup>1</sup> Inicialmente foi utilizada a rotina AAMQS disponibilizada por [70], a qual realiza a solução da equação BK para parâmetro de impacto nulo. No entanto, esta rotina calcula a componente imaginária da amplitude de dipolo até valores de  $x$  que não são suficientemente pequenos para se alcançar as energias do LHC. Como um dos principais objetivos deste trabalho é analisar o comportamento dos diferentes modelos de saturação nas energias do LHC, não foi possível utilizar a rotina AAMQS. Todavia, testamos a sua eficiência em baixas energias e obtemos resultados satisfatórios.

em que a dependência de  $N(x, r_\perp, b)$  em  $b$  é fatorizada na forma  $N(x, r_\perp, b) = S(b)N(x, r_\perp)$ . O próton é aproximado como um disco homogêneo de raio  $R_p$ , o que leva a uma função de perfil do tipo Heaviside  $S(b) = \Theta(R_p - b)$  (tal como no modelo GBW). Desta forma,  $\sigma_0 = 2\pi R_p^2$ .

O ajuste original do modelo CGC fixou os parâmetros  $\gamma_s = 0,63$  e  $\kappa = 9,9$  nos valores da equação BFKL em ordem dominante. Os ajustes centrais foram obtidos com  $N_0 = 0,7$ , enquanto que os parâmetros  $\sigma_0$ ,  $x_0$  e  $\lambda$  foram ajustados a partir dos dados de  $F_2$  em HERA para  $x \leq 0,01$  e  $Q^2 \leq 45 \text{ GeV}^2$ , e têm valores, respectivamente, dados por:  $\sigma_0 = 35,7 \text{ mb}$ ,  $x_0 = 2,7 \times 10^{-7}$  e  $\lambda = 0,177$ .

Em relação ao parâmetro  $S(0)$  na Eq. (5.7), trata-se da função de perfil calculada em parâmetro de impacto  $b = 0$ . Neste trabalho, consideramos duas funções de perfil  $S(b)$ , sendo uma delas gaussiana:

$$S(b) = \frac{1}{\pi R_p^2} e^{-\frac{b^2}{R_p^2}}, \quad (5.13)$$

correspondente a um fator de forma na variável conjugada  $t$  dado por

$$F_{\text{gaussiana}}(t) = e^{\frac{1}{4} R_p^2 t}. \quad (5.14)$$

Também foi considerada uma  $S(b)$  com a seguinte expressão:

$$S(b) = \frac{2}{\pi R_p^2} \frac{2\sqrt{2}b}{R_p} K_1 \left( \frac{2\sqrt{2}b}{R_p} \right), \quad (5.15)$$

correspondente a um fator de forma na variável conjugada  $t$  chamado de fator de forma de “dipolo”, cuja expressão é dada por

$$F_{\text{dipolo}}(t) = \frac{1}{\left(1 - \frac{R_p^2 t}{8}\right)^2}. \quad (5.16)$$

Nas equações acima,  $R_p$  refere-se ao tamanho da região de interação do próton alvo, conforme discutido na Referência [71], e  $K_1$  é função de Bessel modificada de segundo tipo de primeira ordem. O valor de  $R_p$  é obtido a partir do ajuste da função de estrutura  $F_2$ . Para o caso da  $S(b)$  gaussiana, esse valor é de  $R_p^2 = 3,1 \text{ GeV}^{-2}$ , enquanto que para a  $S(b)$  que contém  $K_1$ ,  $R_p^2 = 4,46 \text{ GeV}^{-2}$ . [2, 58–60]<sup>2</sup>

<sup>2</sup> Os valores de  $R_p$  foram determinados a partir do ajuste de  $F_2$  com os dados de HERA. Como não dispomos da solução da equação BK para  $b = 0$  utilizada em [2], deve-se considerar esses valores como aproximações para os valores de  $R_p$  que seriam determinados a partir do ajuste de  $F_2$  caso se utilizasse a amplitude de dipolos calculada com o modelo CGC utilizado neste trabalho.

Com a amplitude  $\tilde{N}(r_{\perp}, x, b)$  da Eq. (5.7), a seção de choque total de dipolo é obtida via teorema óptico:

$$\sigma_{dip}(r_{\perp}, x) = 2 \int d^2\vec{b} \tilde{N}(r_{\perp}, x, b) . \quad (5.17)$$

Outro modelo utilizado neste trabalho foi o GBW [19]. Conforme discutido na Seção 4.2 do Capítulo 4, o GBW é um modelo fenomenológico baseado nos modelos eikonais, onde a seção de choque de dipolo é expressa por

$$\sigma_{dip}^{GBW}(r_{\perp}, x) = \sigma_0 \left[ 1 - e^{-\frac{-r_{\perp}^2}{4R_0^2}} \right] , \quad (5.18)$$

em que  $R_0^2 = (x/x_0)^{\lambda}$ , sendo os valores de  $x_0 = 3 \times 10^{-4}$ ,  $\sigma_0 = 23 \text{ mb}$  e  $\lambda = 0,29$  ajustados a partir dos dados de HERA.

O terceiro modelo considerado foi o b-CGC, que é o modelo CGC com dependência no parâmetro de impacto. A seção de choque de dipolo calculada através do modelo b-CGC é expressa por [20, 21]

$$\frac{d\sigma_{dip}}{d^2\vec{b}} = 2N(x, r_{\perp}, b) = 2 \times \begin{cases} N_0 \left( \frac{r_{\perp} Q_s}{2} \right)^{2 \left[ \gamma_s + \frac{1}{\kappa \lambda Y} \ln \left( \frac{2}{r_{\perp} Q_s} \right) \right]} , & \text{se } r_{\perp} Q_s \leq 2 \\ 1 - e^{-A \ln^2(B r_{\perp} Q_s)} & , \text{ se } r_{\perp} Q_s > 2 \end{cases} , \quad (5.19)$$

onde  $Q_s(x, b)$  é a escala de saturação dependente do parâmetro de impacto, e é definida por

$$Q_s(x, b) \equiv \left( \frac{x_0}{x} \right)^{\frac{\lambda}{2}} \left[ \exp \left( - \frac{b^2}{2B_{CGC}} \right) \right]^{\frac{1}{2\gamma_s}} . \quad (5.20)$$

Os valores de  $A$  e  $B$  são os mesmos das Eqs. (5.10) e (5.11). Os parâmetros  $\gamma_s$ ,  $B_{CGC}$ ,  $N_0$ ,  $x_0$  e  $\lambda$  foram determinados a partir do ajuste dos dados de  $F_2$  em ZEUS<sup>3</sup> com  $x \leq 0,01$  e  $Q^2 \in [0, 25; 45] \text{ GeV}^2$ , e seus valores são dados, respectivamente, por:  $\gamma_s = 0,63$ ;  $B_{CGC} = 5,5 \text{ GeV}^{-2}$ ;  $N_0 = 0,417$ ;  $x_0 = 5,95 \times 10^{-4}$  e  $\lambda = 0,159$ .

A variável  $B$ , como já citado anteriormente, é o *slope* elástico, cujo valor mede a declividade frontal da seção de choque elástica, sendo definido através da seguinte expressão:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} \Big|_{t=0} e^{-Bt} , \quad (5.21)$$

<sup>3</sup> ZEUS é o nome de um dos experimentos do acelerador HERA.

e está relacionado ao tamanho das partículas que compõem o processo. Seu valor pode ser calculado através de  $B = B_0 + B'$ , onde  $B'$  está relacionado à média do quadrado do parâmetro de impacto, sendo expresso por [2, 58–60]

$$B' = \frac{\int d^2 r_{\perp} |\psi_H(r_{\perp})|^2 b^2 N(r_{\perp}, b, x) d^2 \vec{b}}{\sigma_{tot}} = \frac{1}{2} \langle b^2 \rangle, \quad (5.22)$$

e  $B_0 = 7,8 \text{ GeV}^{-2}$ , cujo valor está relacionado aos fatores de forma dos hádrons e foi determinado tendo em vista os dados experimentais [2].

Após obter-se o valor de  $B$ , pode-se calcular o valor da seção de choque elástica através da seguinte expressão [2]:

$$\sigma_{el} = \frac{(\sigma_{tot})^2}{16\pi B}. \quad (5.23)$$

Para o cálculo das integrais utilizou-se o método de integração Romberg. Todo o código foi desenvolvido em linguagem C++.

Na seção seguinte, analisaremos o comportamento da seção de choque de dipolo em função da variação de  $r_{\perp}$  e  $x$  e, após isso, nas seções subsequentes, realizaremos o cálculo numérico de  $\sigma_{tot}$ ,  $\sigma_{el}$  e  $B$  para os processos pión-próton ( $\pi^+p$ ), káon-próton ( $K^+p$ ), próton-próton ( $pp$ ) e antipróton-próton ( $\bar{p}p$ ).

## 5.1 Seção de choque de dipolo

Nesta seção, tal como comentado no final da seção anterior, analisaremos a seção de choque de dipolo, levando em conta seu comportamento quando da variação de  $x$  ou  $r_{\perp}$ . Desta forma, pode-se estudar como este observável se comporta frente à variação da distância transversa dos dipolos, bem como da diminuição da variável  $x$ , cujo valor está relacionado à escala de saturação no regime de saturação partônico.

A Figura 5.1 mostra os valores das seções de choque de dipolo calculadas com quatro modelos: Glauber-Mueller com função de perfil gaussiana (GM-G), Glauber-Mueller com função de perfil que contém a função de Bessel modificada  $K_1$  (GM-D), GBW e b-CGC. Como pode-se perceber, o modelo b-CGC é o que apresenta maior crescimento da seção de choque de dipolo à medida que o tamanho dos dipolos aumenta, isto é, ele é mais sensível que os outros modelos em relação à distância transversa  $r_{\perp}$ .

Na Figura 5.2, são apresentados os gráficos das seções de choque de dipolo levando em conta a variação em  $x$  e mantendo  $r_{\perp}$  fixo. Como pode ser notado, os grandes dipolos apresentam maior contribuição para a seção de choque e, novamente, o b-CGC mostra maior crescimento de  $\sigma_{dip}$  frente ao decrescimento de  $x$  (à medida que  $x$  diminui, aumenta a saturação partônica), isto é, aumento da energia do CM. Nas próximas seções trataremos das colisões  $\pi^+p$ ,  $K^+p$ ,  $pp$  e  $\bar{p}p$ , tal como citado anteriormente.

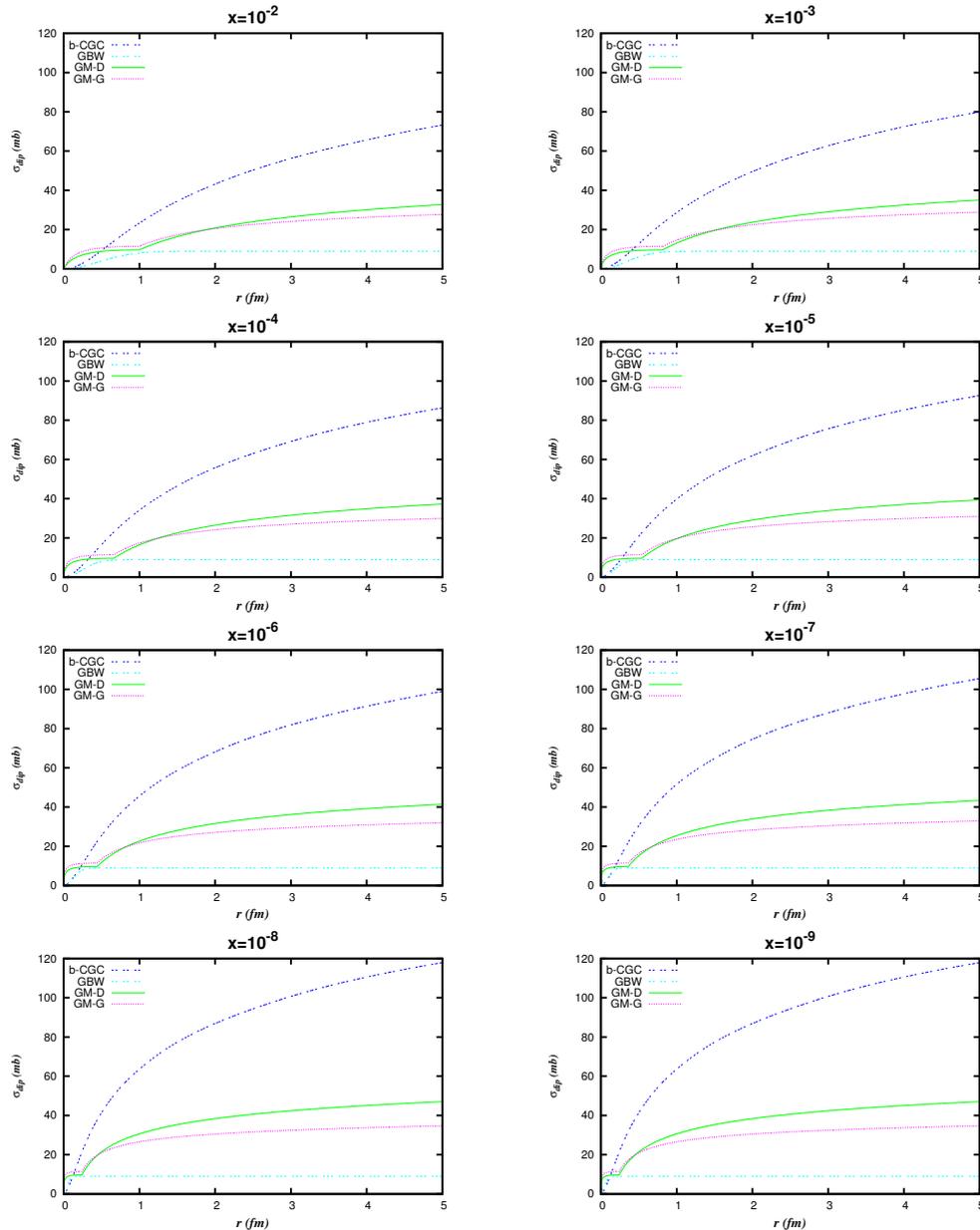


Figura 5.1 – Seção de choque de dipolo calculada com os modelos b-CGC, GBW, GM-G e GM-D, considerando diferentes valores de  $x$ .

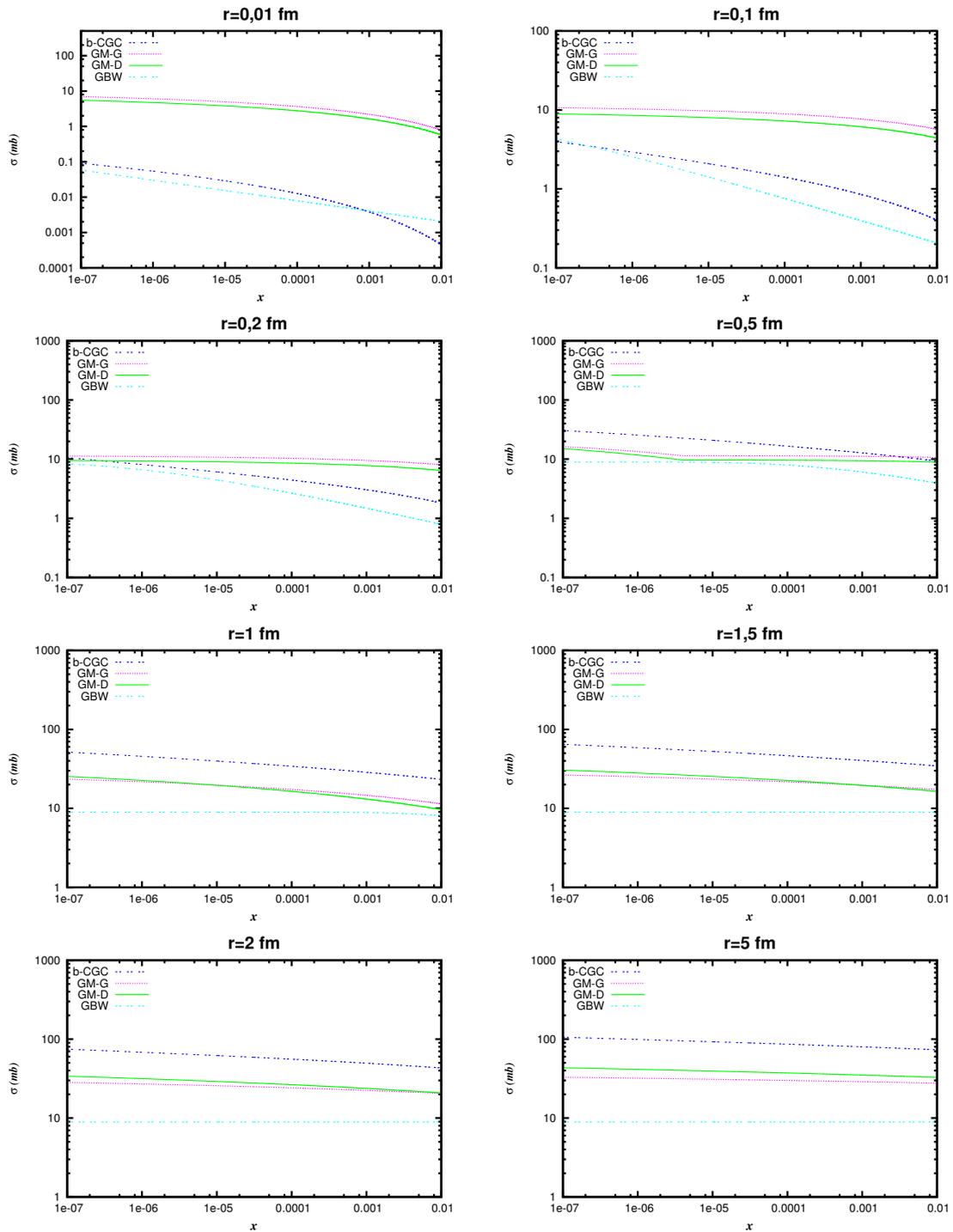


Figura 5.2 – Seção de choque de dipolo calculada com os modelos b-CGC, GBW, GM-G e GM-D, considerando diferentes valores de  $r_{\perp}$ .

## 5.2 Processo $\pi^+p$

Os dados experimentais do processo pión-proton em altas energias são provenientes de medidas indiretas (obtidas através do processo  $p + p \rightarrow n + X$ ) da seção de choque total  $\pi^+p$  no experimento LHCf, visto que não há medidas diretas deste processo no LHC<sup>4</sup>. Para detalhes de como estas medidas foram feitas, veja Referências [72, 73]. Os dados experimentais, bem como os valores de seção de choque total e elástica, obtidos através dos modelos GM-D, GM-G, GBW e b-CGC, podem ser vistos nas Figuras 5.3 e 5.4.

Para o processo pión-próton utilizando o modelo de Glauber-Mueller com função de perfil gaussiana, o valor de  $Q_0^2$  que melhor se ajustou aos dados foi  $Q_0^{2(GM-G)} = 1 \times 10^{-4} \text{ GeV}^2$ , enquanto que a contribuição de reggeons<sup>5</sup> foi de  $25 \times (s/s_0)^{-0,45} \text{ mb}$ , sendo  $s_0 = 1 \text{ GeV}^2$ . Em  $P_{lab} = 6,5 \times 10^6 \text{ GeV}$ ,  $\sigma_{tot}(\pi^+p)^{GM-G}$  obtida foi cerca de 42% de  $\sigma_{tot}(\pi^+p)^{GM-G}$  experimental no valor de  $P_{lab}$  analisado.

Usando o modelo de Glauber-Mueller com função de perfil cuja expressão contém a função  $K_1$ , o valor de  $Q_0^2$  obtido foi  $Q_0^{2(GM-D)} = 1 \times 10^{-4} \text{ GeV}^2$ , com uma contribuição de reggeons de  $30 \times (s/s_0)^{-0,45} \text{ mb}$ . Em  $P_{lab} = 6,5 \times 10^6 \text{ GeV}$ ,  $\sigma_{tot}(\pi^+p)^{GM-D}$  obtida foi cerca de 50% da seção de choque total medida no valor de  $P_{lab}$  considerado.

Para o GBW,  $Q_0^{2(GBW)} = 1 \times 10^{-3} \text{ GeV}^2$  e a contribuição das trajetórias secundárias foi de  $10 \times (s/s_0)^{-0,45} \text{ mb}$ . Em  $P_{lab} = 6,5 \times 10^6 \text{ GeV}$ ,  $\sigma_{tot}(\pi^+p)^{(GBW)}$  corresponde a cerca de 35% da medida experimental.

Por último, para o modelo b-CGC,  $Q_0^{2(b-CGC)} = 2,5 \text{ GeV}^2$ , enquanto que a contribuição dos reggeons foi de  $85 \times (s/s_0)^{-0,45} \text{ mb}$ . Em  $P_{lab} = 6,5 \times 10^6 \text{ GeV}$ ,  $\sigma_{tot}(\pi^+p)^{(GBW)}$  corresponde a cerca de 68% de medida experimental.<sup>6</sup>

<sup>4</sup> No trabalho de [2], calculou-se a seção de choque  $\pi^-p$ . Neste trabalho, consideramos  $\pi^+$  ao invés de  $\pi^-$ , visto que os dados de seção de choque total com medida indireta em altas energias foram feitos para  $\pi^+$ .

<sup>5</sup> O valor da seção de choque total,  $\sigma_{tot}$ , foi obtido através da soma da contribuição dos reggeons com a seção de choque total oriunda dos cálculos utilizando a QCD, de maneira que  $\sigma_{tot} = \sigma_{tot}^{reggeons} + \sigma_{tot}^{QCD}$ , onde  $\sigma_{tot}^{reggeons} = C(s/s_0)^{-0,45}$  e  $\sigma_{tot}^{QCD}$  é obtida através da Eq. (5.1).

<sup>6</sup> No processo  $\pi^+p$  não há dados da seção de choque elástica em altas energias. Como os modelos apresentam resultados muito próximos em baixas energias, não há sentido em comparar seus resultados com os dados experimentais. Quanto ao observável  $B$ , não há nenhum dado experimental para este processo em altas energias e, portanto, só mostraremos os resultados do cálculo de  $B$  para as colisões  $pp$  e  $\bar{p}p$ .

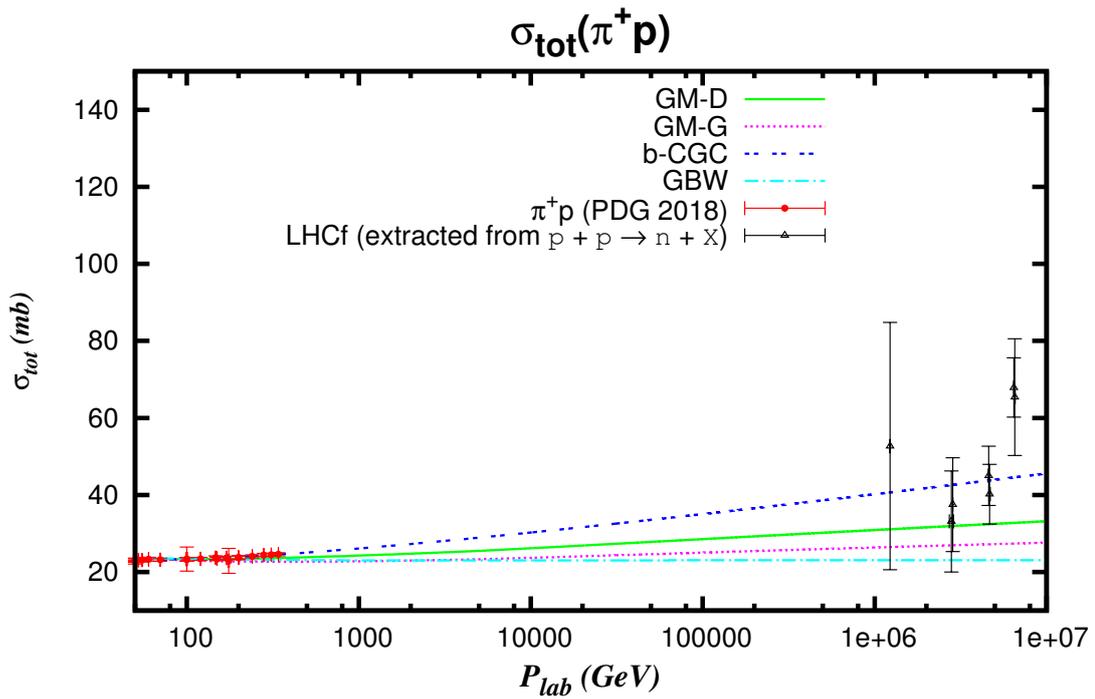


Figura 5.3 – Seção de choque total para o processo  $\pi^+p$  calculada com os modelos GM-D, GM-G, GBW e b-CGC, e dados experimentais. [72–74]

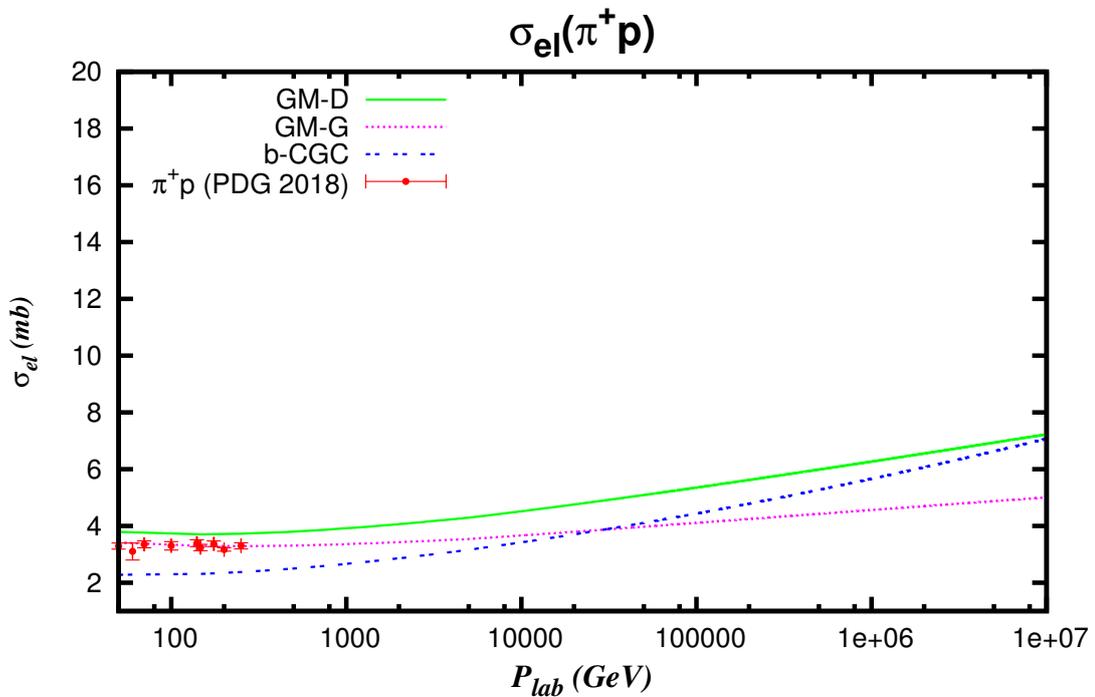


Figura 5.4 – Seção de choque elástica para o processo  $\pi^+p$  calculada com os modelos GM-D, GM-G e b-CGC, e dados experimentais. [74]

### 5.3 Processo $K^+p$

Embora não haja dados de seção de choque para a colisão káon-próton em altas energias, calculou-se as seções de choque total e elástica com os mesmos modelos, a fim de se investigar seus resultados em altas energias.

Através do modelo de Glauber-Mueller com função de perfil Gaussiana, o valor de  $Q_0^2$  que melhor se ajustou aos dados foi  $Q_0^{2(GM-G)} = 2 \times 10^{-4} \text{ GeV}^2$ . Devido ao fato de que o canal  $K^+p$  é exótico, não há ressonâncias no canal  $s$  e, portanto, a contribuição dos reggeons é pequena. Usando o modelo de Glauber-Mueller com função de perfil cuja expressão contém a função  $K_1$ , o valor de  $Q_0^2$  foi  $Q_0^{2(GM-D)} = 2 \times 10^{-4} \text{ GeV}^2$ . Para o modelo GBW,  $Q_0^{2(GBW)} = 9 \times 10^{-2} \text{ GeV}^2$ . Por último, no caso do modelo b-CGC,  $Q_0^{2(b-CGC)} = 1,5 \text{ GeV}^2$ . Os dados experimentais, juntamente com os valores calculados das seções de choque total e elástica, podem ser vistos nas Figuras 5.5 e 5.6.

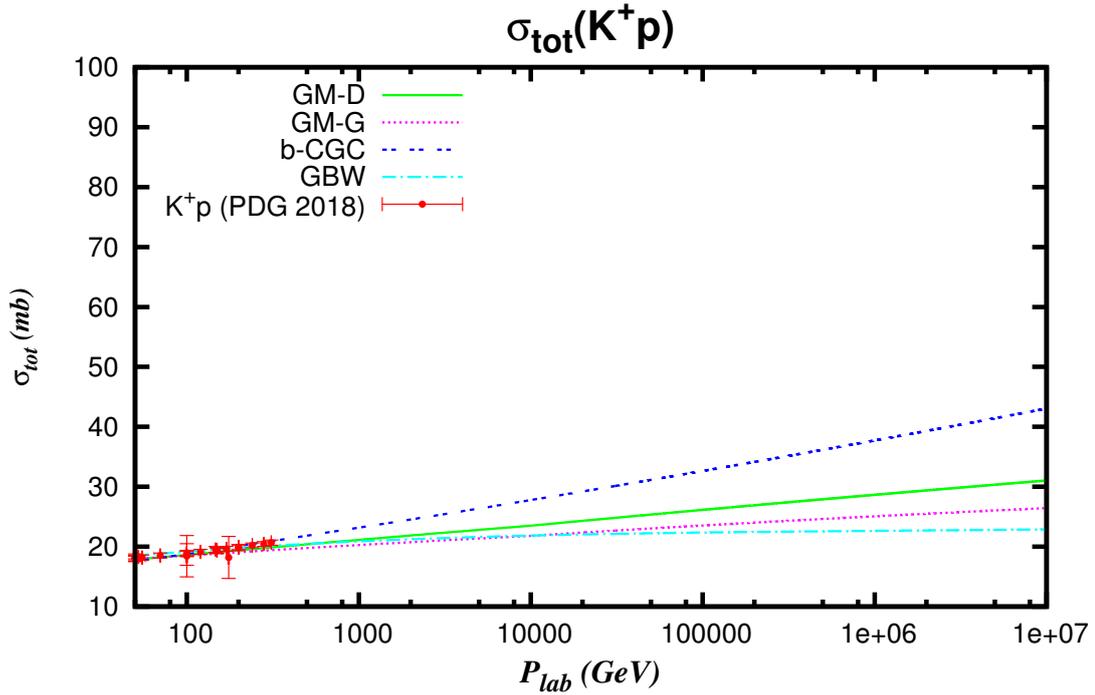


Figura 5.5 – Seção de choque total para o processo  $K^+p$  calculada com os modelos GM-D, GM-G, GBW e b-CGC, e dados experimentais. [74]

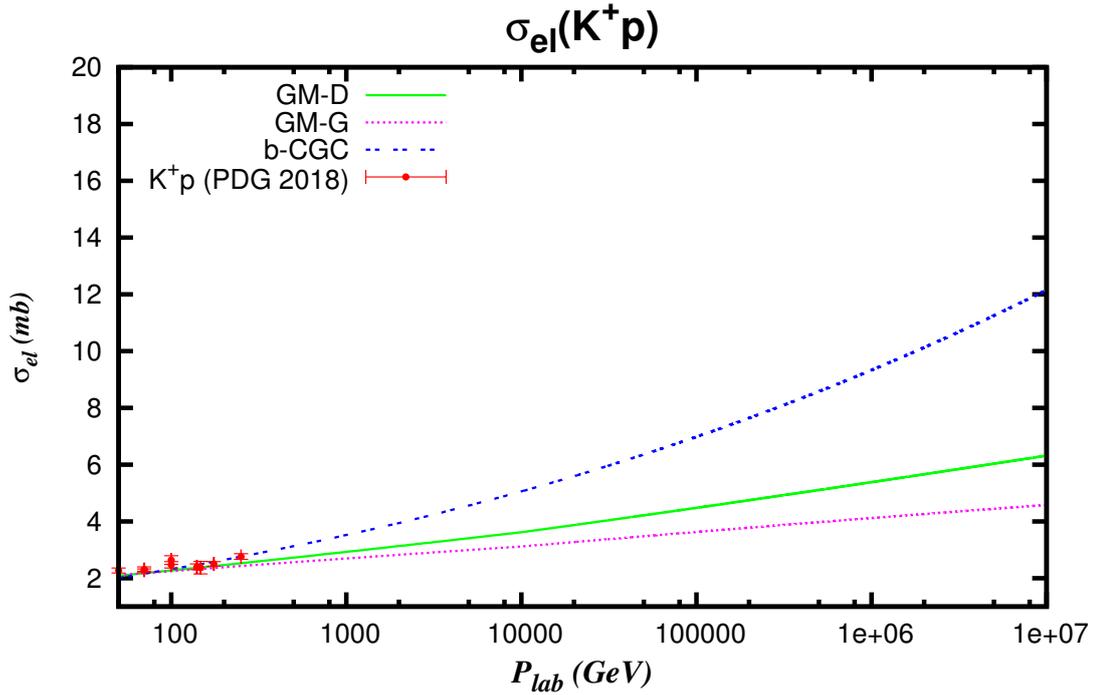


Figura 5.6 – Seção de choque elástica para o processo  $K^+p$  calculada com os modelos GM-D, GM-G e b-CGC, e dados experimentais. [74]

## 5.4 Processos $pp$ e $\bar{p}p$

No caso da colisão próton-próton, há mais dados disponíveis em altas energias, provenientes das medidas de raios cósmicos e do experimentos ATLAS e TOTEM do LHC, chegando este último à energia de CM de  $13 \text{ TeV}$  [74–79].

Para o modelo GM-G, o valor utilizado de  $Q_0^2$  foi  $Q_0^{2(GM-G)} = 1 \times 10^{-2} \text{ GeV}^2$ , com uma contribuição de trajetórias secundárias de  $50 \times (s/s_0)^{-0,45} \text{ mb}$ . O valor de  $\sigma_{tot}^{(GM-G)}$  corresponde a, aproximadamente, 47% da seção de choque total medida em  $\sqrt{s} = 13 \text{ TeV}$  no experimento TOTEM do LHC, enquanto que  $\sigma_{el}^{(GM-G)}$  é cerca de 42% do valor experimental da seção de choque elástica na mesma energia.

Em relação ao modelo GM-D,  $Q_0^{2(GM-D)} = 7 \times 10^{-3} \text{ GeV}^2$ , juntamente com uma contribuição de reggeons de valor  $60 \times (s/s_0)^{-0,45} \text{ mb}$ . Em  $\sqrt{s} = 13 \text{ TeV}$ ,  $\sigma_{tot}^{(GM-D)}$  é cerca de 56% do valor medido da seção de choque total. Para o caso de  $\sigma_{el}^{(GM-D)}$ , esta tem aproximadamente 50% do valor de  $\sigma_{el}$  experimental.

No GBW, fizemos  $Q_0^{2(GBW)} = 0,7 \times 10^{-3} \text{ GeV}^2$ , com um valor de trajetórias secundárias dado por  $30 \times (s/s_0)^{-0,45} \text{ mb}$ . A seção de choque total obtida pelo GBW

corresponde a um valor por volta de 41% do valor medido em  $\sqrt{s} = 13 \text{ TeV}$ . Este modelo, tal como nos processos anteriores, apresentou uma resposta muito ruim em altas energias, fato este que será discutido nas conclusões.

Para o b-CGC,  $Q_0^{2(b-CGC)} = 30 \text{ GeV}^2$ , sendo a contribuição dos reggeons igual a  $30 \times (s/s_0)^{-0,45} \text{ mb}$ . Em  $\sqrt{s} = 13 \text{ TeV}$ , o valor de  $\sigma_{tot}^{(b-CGC)}$  calculado é 80% do valor experimental, enquanto que  $\sigma_{el}^{(b-CGC)}$  representa 86% da seção de choque elástica experimental.

Calculamos também o valor do observável  $B$  neste processo. Os resultados obtidos em  $\sqrt{s} = 13 \text{ TeV}$  correspondem a, aproximadamente, 46% (GM-G), 53% (GM-D) e 64% (b-CGC) do valor experimental.

Os valores de  $\sigma_{tot}$ ,  $\sigma_{el}$  e  $B$  obtidos através dos modelos, bem como os dados experimentais do processo  $pp$ , podem ser vistos nas Figuras 5.7, 5.8 e 5.9.

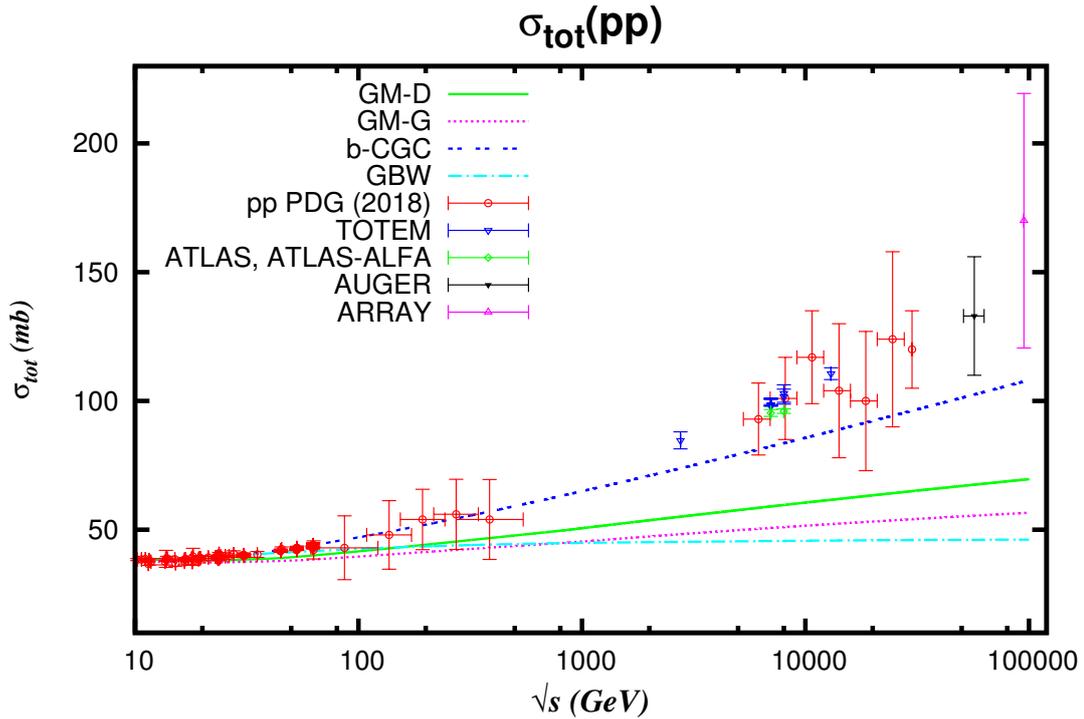


Figura 5.7 – Seção de choque total para o processo  $pp$  calculada com os modelos GM-D, GM-G, GBW e b-CGC, e dados experimentais. [74–79]

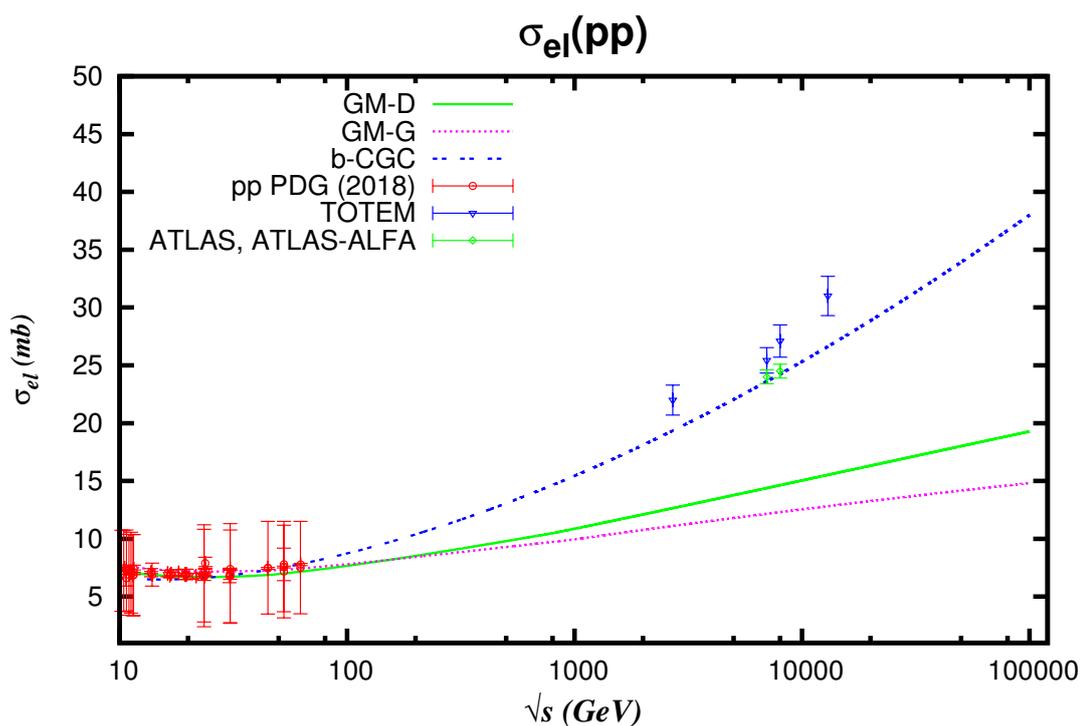


Figura 5.8 – Seção de choque elástica para o processo  $pp$  calculada com os modelos GM-D, GM-G e b-CGC, e dados experimentais. [74–79]

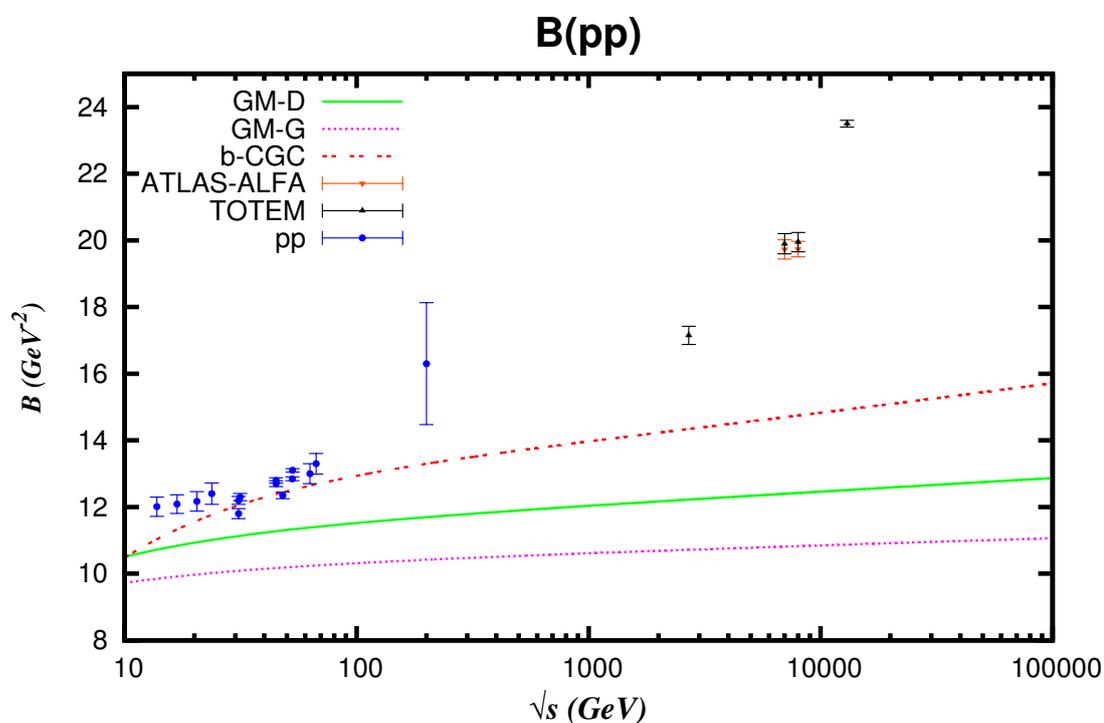


Figura 5.9 – Os valores de  $B$  calculados para o processo  $pp$  com os modelos GM-D, GM-G e b-CGC, e dados experimentais. [79]

O último processo considerado é a colisão  $\bar{p}p$ , para a qual os valores de  $Q_0^2$  são idênticos aos da colisão  $pp$ , sendo a contribuição das trajetórias de Regge a única diferença entre esses dois processos.

No modelo GM-G, os reggeons contribuíram com  $95 \times (s/s_0)^{-0,45} \text{ mb}$ , enquanto que no GM-D esta contribuição foi de  $105 \times (s/s_0)^{-0,45} \text{ mb}$ . Já no modelo GBW, este valor foi de  $70 \times (s/s_0)^{-0,45} \text{ mb}$ . Por último, no modelo b-CGC, os reggeons somaram  $130 \times (s/s_0)^{-0,45} \text{ mb}$ .

Os modelos GM-G, GM-D, GBW e b-CGC apresentaram resultados, respectivamente, de 65%, 73%, 62% e 96% da seção de choque total medida no experimento E710 do Tevatron ( $\sqrt{s} = 1,8 \text{ TeV}$ ). Em relação à seção de choque elástica, os resultados foram 64% (GM-G), 72% (GM-D), e 106% (b-CGC) do valor experimental na mesma energia.

Tal como no processo  $pp$ , calculou-se  $B$  com os modelos GM-G, GM-D e b-CGC. Os valores obtidos representam, respectivamente, 65%, 75% e 87% dos valores experimentais em  $\sqrt{s} = 1,8 \text{ TeV}$ .

Os valores de  $\sigma_{tot}$ ,  $\sigma_{el}$  e  $B$  obtidos através dos modelos, bem como os dados experimentais do processo  $\bar{p}p$ , podem ser vistos nas Figuras 5.10, 5.11 e 5.12.

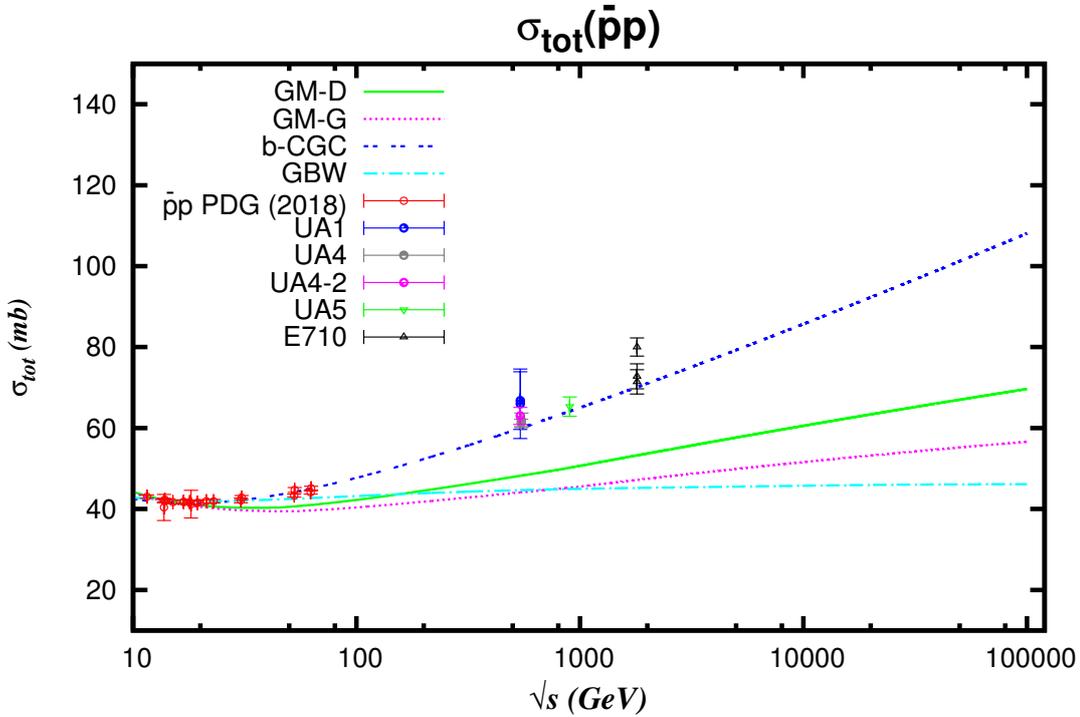


Figura 5.10 – Seção de choque total para o processo  $\bar{p}p$  calculada com os modelos GM-D, GM-G, GBW e b-CGC, e dados experimentais. [74, 79, 80]

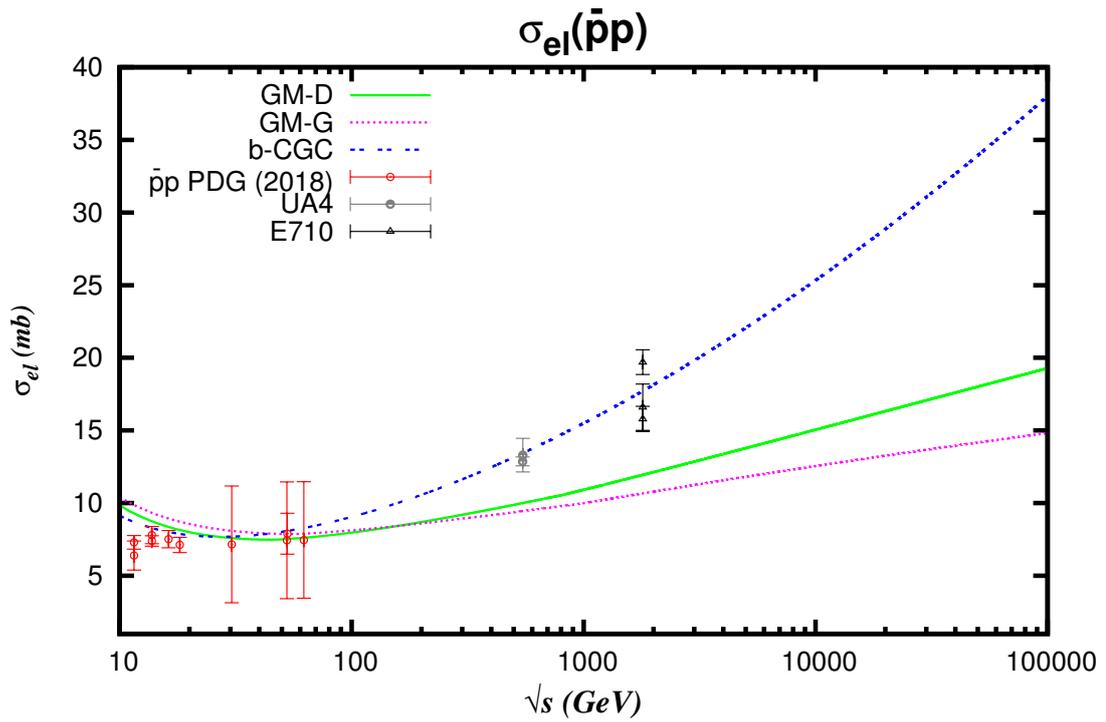


Figura 5.11 – Seção de choque elástica para o processo  $\bar{p}p$  calculada com os modelos GM-D, GM-G e b-CGC, e dados experimentais. [74, 79, 80]

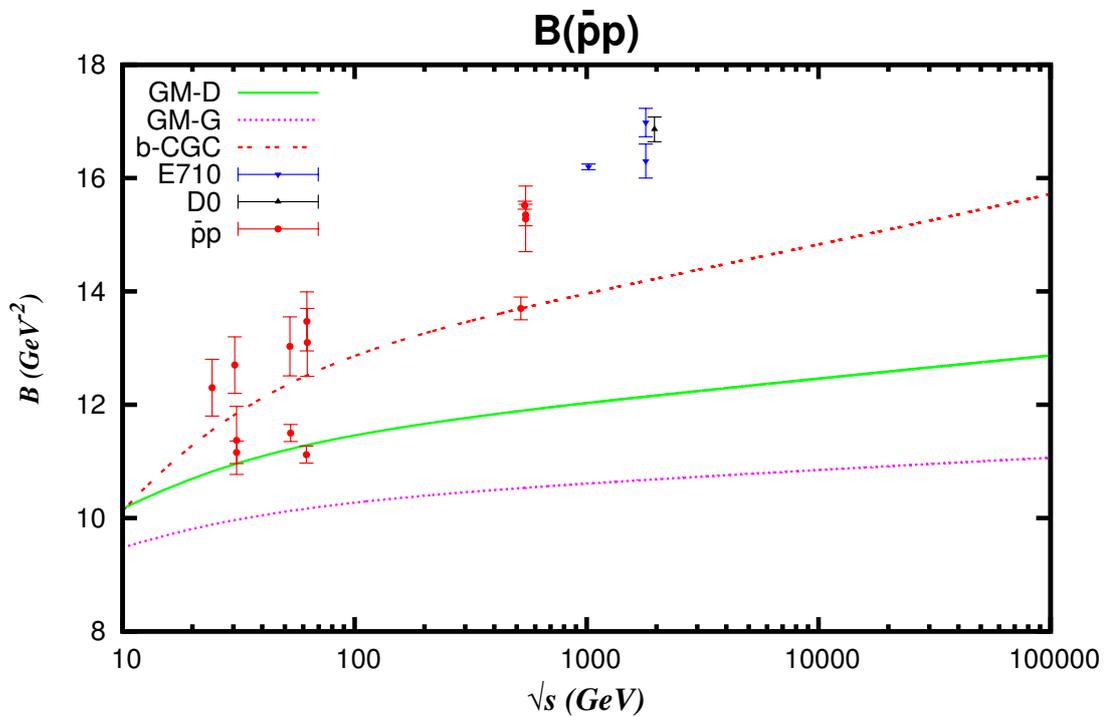


Figura 5.12 – Os valores de  $B$  calculados para o processo  $\bar{p}p$  com os modelos GM-D, GM-G e b-CGC, e dados experimentais. [79]

Após a apresentação dos resultados, se faz necessária uma discussão detalhada a respeito de alguns pontos, tais como: dependência da seção de choque no parâmetro de impacto  $\vec{b}$ , os valores utilizados de  $Q_0^2$ , bem como a razão da diferença entre os resultados apresentados por cada modelo. Também deve ser feita uma análise acerca do comportamento dos modelos em função da variação de  $x$  e de  $r_\perp$ . Todas estas questões citadas serão tratadas no capítulo *Conclusões*.

## 6 Conclusões

Dentre os modelos analisados, o que apresentou os melhores resultados foi o b-CGC, como pode ser visto nos gráficos das Seções 5.2, 5.3 e 5.4. Este fato se deve, muito provavelmente, à expressão da escala de saturação deste modelo, a qual possui dependência no parâmetro de impacto. Na Referência [2], já havia sido argumentado que a forma com que a seção de choque depende do parâmetro de impacto é um fator determinante no crescimento de  $\sigma_{dip}$  no limite de altas energias. Os dois modelos de Glauber-Mueller, por exemplo, apresentam diferença nos resultados devido ao fato de que possuem funções de perfil distintas, sendo que são estas funções que determinam a forma da dependência de  $\sigma_{dip}$  no parâmetro de impacto.. No GM-G (perfil gaussiano),  $\sigma_{tot} \sim \ln s$ , enquanto que no caso do GM-D,  $\sigma_{tot} \sim \ln^2 s$  [2]. O GBW, por não apresentar dependência explícita no parâmetro de impacto, apresenta o menor crescimento da seção de choque no limite assintótico, entre todos os modelos (este fato já havia sido investigado no trabalho de [2]). A forma com que b-CGC depende de  $b$  não é evidente, visto que a dependência neste parâmetro está implícita dentro da escala de saturação, de maneira que a expressão da função de perfil neste modelo não é de fácil determinação. Sendo assim, uma das medidas a serem realizadas seria investigar de forma mais abrangente a dependência que o b-CGC possui no parâmetro de impacto, determinando qual a forma exata da função de perfil  $S(b)$ .

Nos gráficos da Seção 5.1, pode-se perceber que o b-CGC é mais sensível frente à variação de  $x$  e também de  $r_{\perp}$ . Esta sensibilidade se tornou preponderante frente aos outros modelos. A variação da seção de choque de dipolo, no caso deste modelo, é muito maior à medida que o tamanho dos dipolos aumenta, o que não ocorre nos outros modelos. A quantidade  $\sigma_{dip}$  no b-CGC também varia de forma considerável à medida que  $x$  decresce, i.e., à medida que a escala de saturação aumenta. Como já citado, há o parâmetro  $b$  dentro da sua escala de saturação, e é muito provável que este fator seja determinante para que ocorra tal comportamento.

As funções de onda consideradas para os hádrons também precisam de uma análise mais detalhada para que sejam apontadas as incertezas teóricas relacionadas, já que a forma gaussiana provém de um ansatz, pois não há um método determinado na QCD para o cálculo das funções de onda do hádron.

Em relação aos modelos de Glauber-Mueller, é preciso mencionar que os valores utilizados de  $R_p^2$  (tamanho da região de interação do próton alvo) foram ajustados em [60] utilizando-se  $N(x, r_\perp, b = 0)$ , a qual é a solução da equação BK com parâmetro de impacto nulo. Por consistência, deve-se ajustar esses valores de  $N(x, r_\perp, b = 0)$  utilizados neste trabalho, os quais foram obtidos através do modelo CGC.

Em relação ao uso do modelo CGC, deve-se atentar para o fato que se fez uma aproximação, visto que o ansatz é assumido como solução da equação BK com dependência no parâmetro de impacto. Isso ocorre pela seguinte razão: para pequenos dipolos, o CGC considera a solução da BFKL em ordem dominante; para grandes dipolos é considerada a solução da equação BK no limite assintótico. Este último fato apontado pode ser verificado na primeira série de gráficos da Seção 5.1, onde a seção de choque é calculada para diferentes valores de  $x$ . Há uma mudança de funções nos modelos GM-G e GM-D. Tal fato decorre da mudança da expressão da amplitude de dipolo em  $r_\perp Q_s = 2$  no modelo CGC, ponto crítico de separação entre dipolos pequenos e grandes. Outro ponto importante a ser levantado é que, nas Referências [2, 58, 59], o ansatz considerado da Eq. (5.7) é inserido na equação BK com dependência em parâmetro de impacto para que seja feita a conferência se há de fato concordância entre os lados esquerdo e direito da Eq. (5.6). Atesta-se que, próximo à região de saturação, o ansatz não é a solução exata da equação BK, e isso ocorre principalmente devido ao comportamento numérico do parâmetro  $\kappa$  nesta região. Neste sentido, propomos que seja utilizada diretamente a solução da equação BK com dependência no parâmetro de impacto. No trabalho [62], publicado no final de 2018, é implementada esta solução. Desta forma, se faz relevante o estudo detalhado deste trabalho, a fim de que se possa determinar tal solução e, assim, analisar o resultado de  $\sigma_{tot}$  extraindo a amplitude de dipolo diretamente da solução da equação BK com parâmetro de impacto.

Outra questão muito importante a ser levantada é a necessidade de se inserir outros modelos de saturação, tal como o BGBK (Bartels-Golec-Biernat-Kowalski) [81] e IP-Sat [20, 82, 83]. Tal importância se deve ao fato de que se faz necessário investigar a dependência dos mesmos no parâmetro de impacto e, assim, comparar com os resultados obtidos com os modelos deste trabalho. Também é relevante adicionar outros observáveis ao nosso tratamento, tal como o parâmetro  $\rho$  e a seção de choque difrativa, entre outros.

Uma ação importante seria adicionar o modelo FKS [84] ao trabalho, no qual a seção de choque de dipolo depende diretamente de  $s$ , e não de  $x$ . Sendo assim, pode-se

investigar a dependência dos resultados no parâmetro  $Q_0^2$  (o qual está relacionado ao  $x$  através de  $x \approx Q_0^2/s$ ), tratando de forma mais elucidativa esta questão, visto que o  $x$  de Bjorken não é bem definido no caso de processos *soft* (ao contrário dos processos *hard*, onde o  $x$  é bem definido).

Já no primeiro semestre de 2019, pretende-se realizar o ajuste numérico dos parâmetros livres  $Q_0^2$  e da constante presente na contribuição dos reggeons, a fim de que se possa determinar de forma precisa quais são os valores ideais desses parâmetros que melhor se ajustam aos dados experimentais.

Por fim, de forma conclusiva, deve-se apontar que o fato mais relevante levantado, após esta discussão, é comparar o modelo b-CGC com outros modelos, a fim de investigar como estes modelos dependem do parâmetro de impacto para, então, concluir qual a dependência nas funções de perfil que faz com que a seção de choque total se ajuste melhor aos dados experimentais em altas energias.

## Referências

- [1] Ciesielski R. *Acta Physica Polonica B (Proc. Suppl.)*, 8(769), 2015.
- [2] J. Bartels, E. Gotsman, E. Levin, M. Lublinsky, and U. Maor. The Dipole picture and saturation in soft processes. *Phys. Lett.*, B556:114–122, 2003.
- [3] Marcel Froissart. Asymptotic behavior and subtractions in the Mandelstam representation. *Phys. Rev.*, 123:1053–1057, 1961.
- [4] C. A. S. Bahia, M. Broilo, and E. G. S. Luna. Nonperturbative QCD effects in forward scattering at the LHC. *Phys. Rev.*, D92(7):074039, 2015.
- [5] Magno V. T. Machado. Phenomenology of hard diffraction at high energies. In *Proceedings, New Trends in High-Energy Physics and QCD: Natal, Rio Grande do Norte, Brazil, October 21 Oct - November 06, 2014*, pages 62–86, 2016, 2016.
- [6] Yuri L. Dokshitzer. Calculation of the Structure Functions for Deep Inelastic Scattering and  $e^+ e^-$  Annihilation by Perturbation Theory in Quantum Chromodynamics. *Sov. Phys. JETP*, 46:641–653, 1977. [*Zh. Eksp. Teor. Fiz.*73,1216(1977)].
- [7] V. N. Gribov and L. N. Lipatov. Deep inelastic  $e p$  scattering in perturbation theory. *Sov. J. Nucl. Phys.*, 15:438–450, 1972. [*Yad. Fiz.*15,781(1972)].
- [8] Guido Altarelli and G. Parisi. Asymptotic Freedom in Parton Language. *Nucl. Phys.*, B126:298–318, 1977.
- [9] Victor S. Fadin, E. A. Kuraev, and L. N. Lipatov. On the Pommeranchuk Singularity in Asymptotically Free Theories. *Phys. Lett.*, 60B:50–52, 1975.
- [10] E. A. Kuraev, L. N. Lipatov, and Victor S. Fadin. Multi - Reggeon Processes in the Yang-Mills Theory. *Sov. Phys. JETP*, 44:443–450, 1976. [*Zh. Eksp. Teor. Fiz.*71,840(1976)].
- [11] E. A. Kuraev, L. N. Lipatov, and Victor S. Fadin. The Pommeranchuk Singularity in Nonabelian Gauge Theories. *Sov. Phys. JETP*, 45:199–204, 1977. [*Zh. Eksp. Teor. Fiz.*72,377(1977)].

- [12] I. I. Balitsky and L. N. Lipatov. The Pomeron singularity in Quantum Chromodynamics. *Sov. J. Nucl. Phys.*, 28:822–829, 1978. [*Yad. Fiz.*28,1597(1978)].
- [13] I. Balitsky. Operator expansion for high-energy scattering. *Nucl. Phys.*, B463:99–160, 1996.
- [14] Yuri V. Kovchegov. Small  $x$   $F(2)$  structure function of a nucleus including multiple pomeron exchanges. *Phys. Rev.*, D60:034008, 1999.
- [15] L. V. Gribov, E. M. Levin, and M. G. Ryskin. Semihard Processes in QCD. *Phys. Rept.*, 100:1–150, 1983.
- [16] Alfred H. Mueller and Jian-wei Qiu. Gluon Recombination and Shadowing at Small Values of  $x$ . *Nucl. Phys.*, B268:427–452, 1986.
- [17] Yuri V. Kovchegov and Eugene Levin. *Quantum chromodynamics at high energy*, volume 33. Cambridge University Press, 2012.
- [18] Jeffrey R. Forshaw and D. A. Ross. Quantum chromodynamics and the pomeron. *Cambridge Lect. Notes Phys.*, 9:1–248, 1997.
- [19] Krzysztof J. Golec-Biernat and M. Wusthoff. Saturation in diffractive deep inelastic scattering. *Phys. Rev.*, D60:114023, 1999.
- [20] H. Kowalski, L. Motyka, and G. Watt. Exclusive diffractive processes at HERA within the dipole picture. *Phys. Rev.*, D74:074016, 2006.
- [21] G. Watt and H. Kowalski. Impact parameter dependent colour glass condensate dipole model. *Phys. Rev.*, D78:014016, 2008.
- [22] Francois Gelis, Edmond Iancu, Jamal Jalilian-Marian, and Raju Venugopalan. The Color Glass Condensate. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, 60:463–489, 2010.
- [23] Alan D. Martin. Proton structure, Partons, QCD, DGLAP and beyond. *Acta Phys. Polon.*, B39:2025–2062, 2008.
- [24] V. Barone and E. Predazzi. *High-Energy Particle Diffraction*, volume v.565 of *Texts and Monographs in Physics*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2002.

- [25] Michele Arneodo and Markus Diehl. Diffraction for non-believers. In *HERA and the LHC: A Workshop on the implications of HERA for LHC physics. Proceedings, Part B*, pages 425–446, 2005.
- [26] T. Regge. Introduction to complex orbital momenta. *Nuovo Cim.*, 14:951, 1959.
- [27] T. Regge. Bound states, shadow states and Mandelstam representation. *Nuovo Cim.*, 18:947–956, 1960.
- [28] Mateus Broilo. *Aspectos não perturbativos da QCD em espalhamentos elásticos hadrônicos*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2017.
- [29] S. Mandelstam. Determination of the pion - nucleon scattering amplitude from dispersion relations and unitarity. General theory. *Phys. Rev.*, 112:1344–1360, 1958.
- [30] S. Donnachie, Hans Gunter Dosch, O. Nachtmann, and P. Landshoff. Pomeron physics and QCD. *Camb. Monogr. Part. Phys. Nucl. Phys. Cosmol.*, 19:1–347, 2002.
- [31] G. F. Chew and Steven C. Frautschi. Principle of Equivalence for All Strongly Interacting Particles Within the S Matrix Framework. *Phys. Rev. Lett.*, 7:394–397, 1961.
- [32] G. F. Chew and Steven C. Frautschi. Regge Trajectories and the Principle of Maximum Strength for Strong Interactions. *Phys. Rev. Lett.*, 8:41–44, 1962.
- [33] V. N. Gribov. Analytic properties of the partial wave amplitudes and the asymptotic behavior of the scattering amplitude. *Sov. Phys. JETP*, 15:873, 1962. [Nucl. Phys.40,107(1963)].
- [34] V. N. Gribov. A REGGEON DIAGRAM TECHNIQUE. *Sov. Phys. JETP*, 26:414–422, 1968. [Zh. Eksp. Teor. Fiz.53,654(1967)].
- [35] V. N. Gribov. Inelastic processes at super high-energies and the problem of nuclear cross-sections. *Sov. J. Nucl. Phys.*, 9:369, 1969. [Yad. Fiz.9,640(1969)].
- [36] David Greynat and Eduardo de Rafael. Froissart-Martin bound for pion-pion scattering in QCD. *Phys. Rev.*, D88(3):034015, 2013.
- [37] Eugene Levin. Everything about Reggeons. Part 1: Reggeons in 'soft' interaction. 1997.

- [38] V. N. Gribov. *The theory of complex angular momenta: Gribov lectures on theoretical physics*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2007.
- [39] S. Ceci, M. Vukšić, and B. Zauner. Breit-Wigner phase is a fundamental property of a resonance. 2014.
- [40] Vincent Mathieu, Nikolai Kochelev, and Vicente Vento. The Physics of Glueballs. *Int. J. Mod. Phys.*, E18:1–49, 2009.
- [41] L. L. Jenkovszky, A. I. Lengyel, and D. I. Lontkovskiy. The Pomeron and Odderon in elastic, inelastic and total cross sections at the LHC. *Int. J. Mod. Phys.*, A26:4755–4771, 2011.
- [42] S. Abatzis et al. Observation of a narrow scalar meson at 1450-MeV in the reaction  $pp \rightarrow p(f) (\pi^+ \pi^- \pi^+ \pi^-) p(s)$  at 450-GeV/c using the CERN Omega Spectrometer. *Phys. Lett.*, B324:509–514, 1994.
- [43] J. Beringer et al. (Particle Data Group). *Phys. Rev.*, D86(010001), 2012.
- [44] Giulia Pancheri and Y. N. Srivastava. Introduction to the physics of the total cross-section at LHC. *Eur. Phys. J.*, C77(3):150, 2017.
- [45] G. Altarelli. QCD: The theory of strong interactions. 2008.
- [46] Dmitri Diakonov. QCD scattering: From DGLAP to BFKL. *CERN Cour.*, 50N6:24–26, 2010.
- [47] Alexandre Deur, Stanley J. Brodsky, and Guy F. de Teramond. The QCD Running Coupling. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 90:1–74, 2016.
- [48] Curtis G. Callan, Jr. Broken scale invariance in scalar field theory. *Phys. Rev.*, D2:1541–1547, 1970.
- [49] David J. Gross and Frank Wilczek. Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories. *Phys. Rev. Lett.*, 30:1343–1346, 1973. [271(1973)].
- [50] William E. Caswell. Asymptotic Behavior of Nonabelian Gauge Theories to Two Loop Order. *Phys. Rev. Lett.*, 33:244, 1974.

- [51] D. R. T. Jones. Two Loop Diagrams in Yang-Mills Theory. *Nucl. Phys.*, B75:531, 1974.
- [52] Marcos André Betemps Vaz da Silva. *A produção de Dileptons no Condensado de Vidros de Cor*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2007.
- [53] G. Altarelli. Gauge theories and the standard model. 2008.
- [54] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to quantum field theory*. Addison-Wesley, Reading, USA, 1995.
- [55] Kresimir Kumericki. Feynman Diagrams for Beginners. 2016.
- [56] Tung-Mow Yan and Sidney D. Drell. The Parton Model and its Applications. *Int. J. Mod. Phys.*, A29:0071, 2014.
- [57] Glauber Sampaio dos Santos. *Investigando a produção de mésons vetoriais e fótons diretos em colisões envolvendo íons pesados no Large Hadron Collider*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2016.
- [58] J. Bartels, E. Gotsman, E. Levin, M. Lublinsky, and U. Maor. QCD saturation and photoproduction on proton and nuclei targets. *Phys. Rev.*, D68:054008, 2003.
- [59] M. Lublinsky. Non-linear Evolution and Parton Distributions at low x. *Sci. Cult. Ser.-Phys.*, 21:840–843, 2002.
- [60] E. Gotsman, E. Levin, M. Lublinsky, and U. Maor. Towards a new global QCD analysis: Low x DIS data from nonlinear evolution. *Eur. Phys. J.*, C27:411–425, 2003.
- [61] B. Z. Kopeliovich, L. I. Lapidus, and A. B. Zamolodchikov. Dynamics of Color in Hadron Diffraction on Nuclei. *JETP Lett.*, 33:595–597, 1981. [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.33,612(1981)].
- [62] Curtis G. Callan, Jr. and David J. Gross. High-energy electroproduction and the constitution of the electric current. *Phys. Rev. Lett.*, 22:156–159, 1969.
- [63] Magno Valério Trindade Machado. *Física de Pomeron a altas energias*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2002.

- [64] Rodrigo Carlos Viana Coelho. *Lattice Boltzmann Method for Bosons and Fermions*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2014.
- [65] Daniel N. Kabat. Validity of the Eikonal approximation. *Comments Nucl. Part. Phys.*, 20(6):325–335, 1992.
- [66] Dieter Schildknecht. Color Transparency and Saturation in QCD. *Subnucl. Ser.*, 50:45–65, 2014.
- [67] M. Derrick et al. Measurement of the F2 structure function in deep inelastic e+ p scattering using 1994 data from the ZEUS detector at HERA. *Z. Phys.*, C72:399–424, 1996.
- [68] Heiki Mäntysaari. *Balitsky-Kovchegov Equation*. PhD thesis, University of Jyväskylä, 2011.
- [69] E. Ferreira H. G. Dosch and A. Kramer. *Phys. Rev.*, D50(1992), 1994.
- [70] Javier L. Albacete, Nestor Armesto, Jose Guilherme Milhano, Paloma Quiroga-Arias, and Carlos A. Salgado. AAMQS: A non-linear QCD analysis of new HERA data at small-x including heavy quarks. *Eur. Phys. J.*, C71:1705, 2011.
- [71] A. Caldwell and H. Kowalski. The J/psi Way to Nuclear Structure. In *Elastic and Diffractive Scattering. Proceedings, 13th International Conference, Blois Workshop, CERN, Geneva, Switzerland, June 29-July 3, 2009*, pages 190–192, 2009.
- [72] V. A. Khoze, A. D. Martin, and M. G. Ryskin. Total  $\pi^+p$  cross section extracted from the leading neutron spectra at the LHC. *Phys. Rev.*, D96(3):034018, 2017.
- [73] R. A. Ryutin. Total pion–proton cross section from the new LHCf data on leading neutrons spectra. *Eur. Phys. J.*, C77(2):114, 2017. [Erratum: *Eur. Phys. J.*C77,no.12,843(2017)].
- [74] M. Tanabashi et al. (Particle Data Group). *Phys. Rev.*, D98(010001), 2018.
- [75] Frigyes Janos Nemes. Elastic and total cross-section measurements by TOTEM: Past and future. *PoS*, DIS2017:059, 2018.
- [76] William Hanlon and Rasha Abbasi. Proton-Air Cross Section and Composition of Ultra High Energy Cosmic Rays Observed by Telescope Array. In *Proceedings, 17th*

*conference on Elastic and Diffractive Scattering (EDS Blois 2017): Prague, Czech Republic, June 26-30, 2017, 2017.*

- [77] Morad Aaboud et al. Measurement of the total cross section from elastic scattering in  $pp$  collisions at  $\sqrt{s} = 8$  TeV with the ATLAS detector. *Phys. Lett.*, B761:158–178, 2016.
- [78] Georges Aad et al. Measurement of the total cross section from elastic scattering in  $pp$  collisions at  $\sqrt{s} = 7$  TeV with the ATLAS detector. *Nucl. Phys.*, B889:486–548, 2014.
- [79] Norbert Bence, László Jenkovszky, and István Szanyi. New physics from TOTEM’s recent measurements of elastic and total cross sections. 2018.
- [80] Norman A. Amos et al. A Luminosity Independent Measurement of the  $\bar{p}p$  Total Cross-section at  $\sqrt{s} = 1.8$ -tev. *Phys. Lett.*, B243:158–164, 1990.
- [81] J. Bartels, Krzysztof J. Golec-Biernat, and H. Kowalski. A modification of the saturation model: DGLAP evolution. *Phys. Rev.*, D66:014001, 2002.
- [82] Henri Kowalski and Derek Teaney. An Impact parameter dipole saturation model. *Phys. Rev.*, D68:114005, 2003.
- [83] Amir H. Rezaeian, Marat Siddikov, Merijn Van de Klundert, and Raju Venugopalan. Analysis of combined HERA data in the Impact-Parameter dependent Saturation model. *Phys. Rev.*, D87(3):034002, 2013.
- [84] Jeffrey R. Forshaw, R. Sandapen, and Graham Shaw. Color dipoles and rho, phi electroproduction. *Phys. Rev.*, D69:094013, 2004.