

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Instituto de Física  
Programa de Pós-Graduação

Efeitos ponderomotivos e ressonantes  
em uma partícula acelerada por modos eletromagnéticos.

Ivanessa da Silveira Almansa

Dissertação <sup>1</sup> apresentada ao Programa de Pós-Graduação na modalidade Mestrado Acadêmico Stricto Sensu de Física Teórica do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul por Ivanessa Almansa sob orientação do Prof. Dr. Felipe Rizzato como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física.

Porto Alegre, RS, Brasil

2019

---

<sup>1</sup>Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

# Agradecimentos

Primeiramente eu gostaria de agradecer à minha mãe, Eni, e ao meu irmão, Dhamens, por toda estrutura familiar durante toda a minha vida.

Queria agradecer ao meu orientador, Prof. Dr. Felipe Rizzato, pela paciência, ensinamentos, os conselhos valiosos e a sua dedicação durante a orientação.

Aos colegas de grupo pelas conversa e todo o auxilio durante o mestrado. Especialmente ao Felipe Russman e ao Eduardo Peter, que estiveram mais presente durante este percurso.

Aos meus colegas de curso e amigos que me apoiaram durante essa trajetória com palavras amigas.

Ao CNPQ pelo o financiamento.

Muito obrigada

*Dedico esta dissertação à memória de Ivo Manoel, meu pai, que não esteve presente nessa trajetória, mas sempre me incentivou a fazer ciência.*

# Resumo

A presente dissertação consiste na aplicação do formalismo hamiltoniano para estudar uma partícula relativística interagindo com um Wiggler modulado e um campo de laser de amplitude constante. A partícula é injetada com uma velocidade lenta e distante da região de máximo potencial. Após um regime ponderomotivo, que pré-acelera a partícula e a coloca em ressonância com a onda portadora, a partícula é capturada e acelerada para valores de velocidades próximos a velocidade da luz. A escolha de um sistema de *free-electron-laser* inverso, formado pelos campos laser e Wiggler, que fornece a força de aceleração longitudinal de maneira mais estável que a de um plasma. Enquanto a velocidade da partícula permanece menor que a velocidade de fase da onda, é feita uma aproximação da sua dinâmica média usando uma abordagem analítica do regime ponderomotivo. Para validar aproximação, utilizamos simulações numéricas, bem como para explorar várias características do aprisionamento e aceleração ressonante.

**Palavras-chave:** onda eletromagnética, aceleradores, laser, potencial ponderomotriz

# Abstract

The present dissertation consists in the application of Hamiltonian formalism to study the relativistic particle interacting with a modulated Wiggler and a constant amplitude laser field. The particle is injected with a slowly velocity far away from the maximum of potential. After a ponderomotive regime, which pre-accelerates the particle and put it resonant with the carrier wave, the particle is captured and accelerated towards speed of light. The choice of a system as inverse free-electron laser setting, formed by the laser and Wiggler fields provide the longitudinal acceleration force in a way more stable and robust than that of a plasma. While the particle velocity remains less than the carrier phase velocity, our analysis was made through an analytical approach of ponderomotive regime. In order to validate this approach we used numerical simulations as well as to explore various features of the resonant trapping and acceleration.

**key-words:** electromagnetic wave, accelerators, nonlinear dynamics, ponderomotive potential, laser

# Sumário

<b>Sumário</b>	<b>III</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>1</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2 O modelo</b>	<b>4</b>
2.1 Potencial vetor . . . . .	4
2.2 Formalismo Hamiltoniano . . . . .	6
<b>3 Análise da dinâmica do Modelo</b>	<b>9</b>
3.1 Sistema Completo . . . . .	9
3.2 Mapas de parâmetros . . . . .	12
3.3 Regime Acelerador . . . . .	15
3.3.1 Aceleração Adiabática . . . . .	19
<b>4 Aproximação Ponderomotiva</b>	<b>22</b>
4.1 Validação da aproximação ponderomotiva . . . . .	26
4.1.1 Fronteira com o regime acelerador . . . . .	27
<b>5 Conclusão</b>	<b>30</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>32</b>

# Lista de Figuras

2.1	Potencial vetor . . . . .	5
3.1	Velocidade versus tempo para o sistema completo . . . . .	10
3.2	Espaço de fase para o sistema completo . . . . .	11
3.3	Mapa parâmetros entre as velocidades e $\alpha$ . . . . .	12
3.4	Velocidade versus tempo no regime passante . . . . .	13
3.5	Mapa de parâmetros em função das amplitudes do campo . . . . .	14
3.6	Velocidade versus tempo para o regime ressonante . . . . .	15
3.7	Mapa de parâmetros do ganho de energia . . . . .	18
3.8	Velocidade versus tempo para o regime acelerador . . . . .	19
3.9	$H - p_x$ versus $x$ . . . . .	20
3.10	Ganho versus as amplitudes . . . . .	21
4.1	Comparação entre a solução do sistema original e ponderomotivo . . . . .	27
4.2	Velocidade versus tempo para regime passante . . . . .	28
4.3	Velocidade versus tempo para o regime reflexivo . . . . .	29

# Capítulo 1

## Introdução

Os aceleradores de plasma laser (*laser wakefield accelerators*, ou LWFA) são aceleradores de partículas carregadas, tais como elétrons, pósitron e íons. As partículas são aceleradas devido aos fortes impulsos de laser que se propagam no plasma. Essa técnica para aceleração de partículas é relativamente antiga, foi desenvolvida por Tajima e Dawson (1), porém avaliações expressivas experimentais desta técnica só foram realizadas recentemente em consequência do desenvolvimento de laser extremamente potentes e com pulsos muito curtos (2). A aceleração que ocorre devido as ondas eletromagnéticas têm sido um assunto de muito interesse e de intensa análise nos últimos anos. (1, 3, 4, 5).

Através da interação entre partículas carregadas com modos puramente eletrostáticos atuando como uma onda transportadora de alta frequência e modulação lenta é possível alcançar a eficiência na aceleração de partículas a partir de pequenas velocidades relativísticas de injeção. Esta aceleração é resultado da combinação dos efeitos ponderomotivos e ressonantes (6). Neste contexto o conceito de força ou potencial ponderomotiva, qual representa o efeito de campo de alta frequência no movimento lento das partículas devido aos modos eletrostáticos (7), é de suma importância. A força ponderomotiva governa a dinâmica do centro-guia das partículas e pode ser deduzida por análise perturbativa de primeira ordem na força de Lorentz em torno do centro de oscilação (8).

Os modos eletrostáticos apropriados para aceleração podem ser obtidos em plasmas na forma de ondas de plasmas. As ondas de plasma se propagam dentro de um espectro relativamente amplo de velocidade de fase, mas mantêm a sua própria velocidade de grupo nula em sistemas frios (9). Estas duas condições (espectro amplo e a velocidade de grupo nulo) são necessárias para criar um envelope estacionário localizado de uma onda de alta frequência, permitindo obter um modo eletrostático

apropriado para aceleração.

Sabemos que plasmas são sistemas instáveis e de difícil controle externo (10). Podemos contornar essa dificuldade usando uma configuração de um *free-electron-laser* (FEL) inverso, que ao invés de funcionar como os tradicionais FEL que transfere a energia do feixe de elétrons para laser, o FEL inverso transfere a energia do laser para o feixe de elétron (11). No presente trabalho o FEL inverso é constituído por um *Wiggler* modulado e modos de laser (12, 13, 14). O efeito de *beat-wave* formados pelos os campos *Wiggler* e laser atua de forma semelhante ao potencial elétrico do modo eletrostático para fornecer as forças de aceleração longitudinal. A motivação geral aqui, como mencionada anteriormente, é que, como os modos eletromagnéticos não precisam de um ambiente de plasma o esquema geral seria mais estável e robusto.

O propósito deste trabalho é investigar uma forma alternativa, mas similar, ao esquema de aceleração através de modos eletrostáticos. Ao invés deles serão usados modos eletromagnéticos. O estudo da dinâmica da partícula será feito usando o formalismo hamiltoniano. Uma aproximação ponderomotiva descreverá o regime em que a partícula tem a velocidade menor que a velocidade de fase da onda. Esta aproximação descreve o comportamento médio da velocidade da partícula, e consiste na busca de uma transformação canônica do hamiltoniano original do sistema.

A dissertação foi dividida da seguinte maneira, começaremos descrevendo o modelo, logo após analisaremos a dinâmica do sistema completo. No cap.4 descreveremos a aproximação ponderomotiva e sua comparação com o sistema completo e por fim a conclusão.

# Capítulo 2

## O modelo

### 2.1 Potencial vetor

A partícula será colocada a interagir com a ação combinada de um campo magnetostático de *Wiggler* com um laser de alta frequência, ambos circularmente polarizados. O *Wiggler* é um dispositivo de interseção que produz um campo magnético transversal estático, periodicamente alternado (15).

Os potenciais vetores dos campos eletromagnéticos dos dispositivos *Wiggler* e laser serão descritos, respectivamente, por

$$\mathbf{A}_w = A_{w0} e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} [\cos(\theta_w) \hat{\mathbf{y}} - \sin(\theta_w) \hat{\mathbf{z}}] \quad (2.1)$$

$$\mathbf{A}_l = A_{l0} [\cos(\theta_l) \hat{\mathbf{y}} + \sin(\theta_l) \hat{\mathbf{z}}] \quad (2.2)$$

onde  $A_{w0}$  e  $A_{l0}$  são, respectivamente, as amplitudes máximas do *Wiggler* e do laser,  $\theta_l \equiv k_l x - \omega_l t$  e  $\theta_w \equiv k_w x$  são as fases da onda do laser e do *Wiggler* magnético. A modulação do *Wiggler* é representada pelo fator exponencial gaussiano, onde o parâmetro  $\sigma$  é comprimento característico do envelope da onda. A modulação é necessária para providenciar as ótimas condições de aceleração.

Para garantirmos a condição de lenta modulação, analisaremos a função de potencial vetor do sistema completo que é a soma das equações (2.1) e (2.2)

$$\mathbf{A} = \left( A_{w0} e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \cos(\theta_w) + A_{l0} \cos(\theta_l) \right) \hat{\mathbf{y}} - \left( A_{w0} e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \sin(\theta_w) - A_{l0} \sin(\theta_l) \right) \hat{\mathbf{z}}, \quad (2.3)$$

e seu módulo. Para tal separaremos a função nas suas componentes:

$$A_y = A_{w0} e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \cos(\theta_w) + A_{l0} \cos(\theta_l), \quad (2.4)$$

e

$$A_z = A_{w0} e^{\frac{-x^2}{\sigma^2}} \sin(\theta_w) + A_{l0} \sin(\theta_l). \quad (2.5)$$

Elevando-as ao quadrado e somando-as

$$\begin{aligned} |A|^2 = A_y^2 + A_z^2 &= A_{w0}^2 e^{\frac{-x^2}{\sigma^2}} \cos^2(\theta_w) + 2A_{l0}A_{w0} e^{\frac{-x^2}{\sigma^2}} \cos(\theta_l) \cos(\theta_w) + A_{l0}^2 \cos^2(\theta_l) \\ &+ A_{w0}^2 e^{\frac{-x^2}{\sigma^2}} \sin^2(\theta_w) - 2A_{l0}A_{w0} e^{\frac{-x^2}{\sigma^2}} \sin(\theta_l) \sin(\theta_l) + A_{l0}^2 \sin^2(\theta_l) \end{aligned}$$

obtemos

$$|A|^2 = A_y^2 + A_z^2 = A_{w0}^2 e^{\frac{-x^2}{\sigma^2}} + 2A_{w0}A_{l0} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} \cos(\theta_w + \theta_l) + A_{l0}^2. \quad (2.6)$$

Escolhemos  $\sigma \gg 1/k_{l,w}$  de modo a valer a condição de lenta modulação. A figura 2.1 mostra dois gráficos que ilustram a intensidade do potencial vetor (2.6) para o instante de tempo fixo  $t=0$ . A curva em laranja exibida nos dois painéis foi gerada para diferentes valores do parâmetro  $\sigma$  com  $k_l = k_w = 0.5 \text{ m}^{-1}$ ,  $w_l = 1 \text{ rad/s}$  e  $A_{l0} = A_{w0} = 1 \text{ T/m}$ . No painel (a)  $\sigma = 100 \text{ m}$  e (b)  $\sigma = 1000 \text{ m}$ . Os envelopes da intensidade do potencial vetor, representados pela as linhas pontilhada na Figura 2.1 foram construídos usando apenas funções exponencias gaussianas.

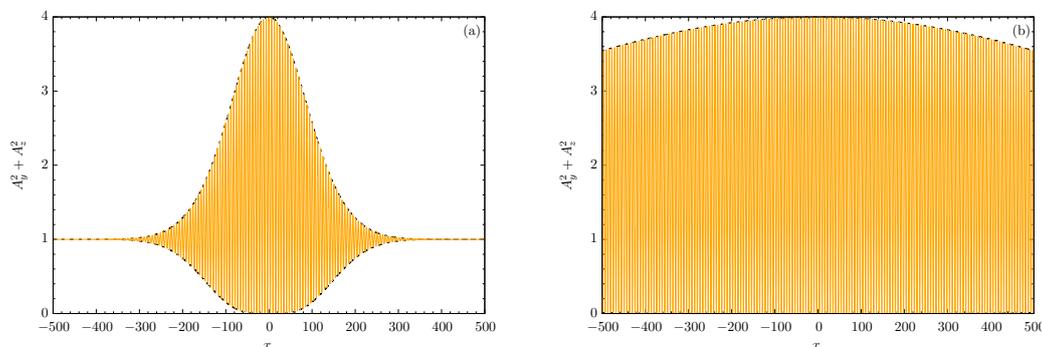


Figura 2.1: Gráfico da intensidade do potencial (2.6) versus  $x$  no instante de tempo  $t = 0$ . Os gráficos foram construídos para  $k_w = k_l = 1 \text{ m}^{-1}$ ,  $w_l = 1 \text{ rad/s}$ ,  $A_{w0} = A_{l0} = 1 \text{ T/m}$ , (a)  $\sigma = 100 \text{ m}$  e (b)  $\sigma = 1000 \text{ m}$ .

Na Figura 2.1 temos no quadro (b) modulação imperceptível comparada com que é observado no quadro (a) no intervalo de  $-200 \leq x \leq 200$ . Então, o valor do parâmetro  $\sigma$  que melhor satisfaz a condição de lenta modulação é de  $\sigma = 1000$  (esse será o valor usado no decorrer do trabalho).

## 2.2 Formalismo Hamiltoniano

O lagrangiano de uma partícula relativística carregada  $q$  interagindo com um campo eletromagnético arbitrário  $\mathbf{E} = \Delta\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$  e  $\mathbf{B} = \Delta \times \mathbf{A}$  é dado por

$$L = -mc^2 \frac{1}{\gamma} + q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - q\phi \quad (2.7)$$

onde  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$  é o fator relativístico,  $v$  é a velocidade da partícula,  $m$  é a massa da partícula e  $c$  é a velocidade da luz no vácuo (16).

A partir do lagrangiano (2.7) conseguimos obter o hamiltoniano através de uma transformação de Legendre do lagrangiano.

$$H = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \sum_i \dot{q}_i p_i - L, \quad (2.8)$$

ou seja,

$$H = mc^2\gamma + q\phi, \quad (2.9)$$

sendo  $\gamma = \sqrt{1 + \frac{(\mathbf{p}-q\mathbf{A})^2}{m^2c^2}}$  nas coordenadas de momentum (16). O sistema estudado é puramente eletromagnético ( $\phi = 0$ ).

O modelo é descrito em coordenadas cartesianas, sendo assim podemos reescrever o hamiltoniano (2.9)

$$H = \sqrt{1 + \frac{p_x^2 + (p_y - qA_y)^2 + (p_z - qA_z)^2}{m^2c^2}}. \quad (2.10)$$

O hamiltoniano (2.10) não depende explicitamente das coordenadas  $y$  e  $z$ . Portanto,  $p_y$  e  $p_z$  são quantidades conservadas, i.e,

$$\dot{p}_y = \frac{\partial H}{\partial y} = 0 \quad (2.11)$$

$$\dot{p}_z = \frac{\partial H}{\partial z} = 0. \quad (2.12)$$

Incidindo a partícula paralela ao eixo  $x$ , teremos  $\dot{p}_y = \dot{p}_z = 0$  durante toda a dinâmica do sistema. Com isso, o hamiltoniano (2.10) simplifica-se para

$$H = mc^2 \sqrt{1 + \frac{p_x^2 + q^2 (A_y^2 + A_z^2)}{m^2c^2}}. \quad (2.13)$$

Substituindo (2.6) em (2.13), segue

$$H = mc^2 \sqrt{1 + \frac{P_x^2 + q^2 \left( A_{l0}^2 + A_{w0}^2 e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} + 2A_{w0}A_{l0} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cos(\theta_w + \theta_l) \right)}{m^2 c^2}}. \quad (2.14)$$

A velocidade de fase da onda portadora é  $v_\phi = \frac{w_l}{k_l + k_w}$ , formado pelo acoplamento do tipo *beat* dos campos do *Wiggler* e de laser ( $\theta_w + \theta_l = (k_l + k_w)x - w_l t$ ) (17).

Afim de compactar a notação optamos por normalizar as coordenadas que descrevem a dinâmica do sistema em novas coordenadas adimensionais. Para esse fim adotaremos um parâmetro adimensional  $\alpha$ , que é a velocidade de fase da onda normalizada pela velocidade da luz, definindo como  $\sqrt{\alpha} \equiv \frac{w_l}{c}$ . Usaremos as seguintes normalizações

$$\begin{aligned} \frac{H}{mc^2} &\rightarrow H, & \frac{\alpha p_x}{mc} &\rightarrow p_x, & \frac{q\mathbf{A}}{mc^2} &\rightarrow \mathbf{A}, \\ (k_l + k_w)x &\rightarrow x, & (k_l + k_w)\sigma &\rightarrow \sigma, & wt &\rightarrow t. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Portanto, o hamiltoniano (2.14) adimensional é

$$H = \sqrt{1 + \frac{p_x^2}{\alpha} + A_{l0}^2 + A_{w0}^2 e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} + 2A_{l0}A_{w0} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cos(x - t)}. \quad (2.16)$$

Em vista da normalização supomos que a velocidade da partícula está em unidades medida de  $\alpha^{1/2}$  e é igual a velocidade dimensional normalizada pela velocidade da luz ( $\frac{v_x}{c}$ ).

Realizando uma expansão em séries de Taylor do hamiltoniano (2.16) em torno de  $A_{w0} = A_{l0} = A = 0$ , isto é, nos regimes de baixa amplitude, temos:

$$H \approx \sqrt{1 + \frac{p_x^2}{\alpha}} + A^2 \frac{1 + e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} + 2e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cos(x - t)}{2\sqrt{1 + \frac{p_x^2}{\alpha}}} + \mathcal{O}(A^4). \quad (2.17)$$

O hamiltoniano que representa a dinâmica de uma partícula interagindo com um campo puramente eletrostáticos vistas nas Refs.(6, 18) se a assemelha com a expressão (2.17). O primeiro termo da expressão é igual ao primeiro termo encontrado no hamiltoniano nas Refs. (6, 18), já o segundo termo tem um comportamento semelhante ao do potencial eletrostático. Outras semelhanças são que as duas dinâmicas, eletrostática e eletromagnética (estudadas nessa dissertação), são unidimensional

ao longo do eixo  $x$  contendo um termo de onda portadora de alta-frequência e de modulação lenta que podem, portanto, acelerar e capturar as partículas.

# Capítulo 3

## Análise da dinâmica do Modelo

### 3.1 Sistema Completo

Iniciamos a análise do sistema explorando o comportamento geral da dinâmica exata do Hamiltoniano (2.16).

As equações de movimento na forma canônica de Hamilton são

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} \quad \text{e} \quad \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x}. \quad (3.1)$$

Aplicando as equações (3.1) ao hamiltoniano (2.16) obtemos,

$$\dot{x} = \frac{p_x}{\alpha \sqrt{1 + \frac{p_x^2}{\alpha} + A_{l0}^2 + A_{w0}^2 e^{\frac{-x^2}{\sigma^2}} + 2A_{l0}A_{w0}e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} \cos(x-t)}} \quad (3.2)$$

$$\dot{p}_x = \frac{A_{w0}e^{\frac{-x^2}{\sigma^2}} \left[ \frac{x}{\sigma^2} \left( A_{w0}e^{\frac{-x^2}{\sigma^2}} + A_{l0} \cos(x-t) \right) + A_{l0} \sin(x-t) \right]}{\sqrt{1 + \frac{p_x^2}{\alpha} + A_{l0}^2 + A_{w0}^2 e^{\frac{-x^2}{\sigma^2}} + 2A_{l0}A_{w0}e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} \cos(x-t)}}. \quad (3.3)$$

Com o auxílio de uma rotina de Rugge Kutta de quarta ordem escrita em *Fortran90* podemos resolver o sistema de equações diferenciais. Como estamos interessados na situação em que a partícula começa a interagir lentamente com o potencial da onda. Para tal, a partícula será injetada muito distante da posição em que o potencial começa a afetá-la significativamente, isto é, muito distante da origem  $x = 0$  m. Então, durante o decorrer da análise da dinâmica sempre será usado  $x_0 = -10\sigma$ .

Para explorar o movimento da partícula, inicialmente, vamos fixar os valores de amplitude máxima dos potenciais e do parâmetro  $\alpha$  e variar a velocidade inicial de

injeção  $v_0\sqrt{\alpha}$ . Foram fixados  $\alpha = 0.9$  e  $A_w = A_{I0} = 25$ .

Constatamos que para diferentes velocidade de injeção teremos diferentes comportamentos. Estes resultados estão ilustrado nas figuras 3.1 e 3.2. Na Fig 3.1 temos a velocidade da partícula versus tempo e na Fig 3.2 o espaço de fase do sistema. Nos painéis de ambas as figuras temos em (a) a menor velocidade de injeção, (b) temos uma velocidade de injeção intermediária, (c) temos a maior velocidade de injeção que proporciona a ressonância entre a velocidade da partícula com a velocidade de fase da onda.

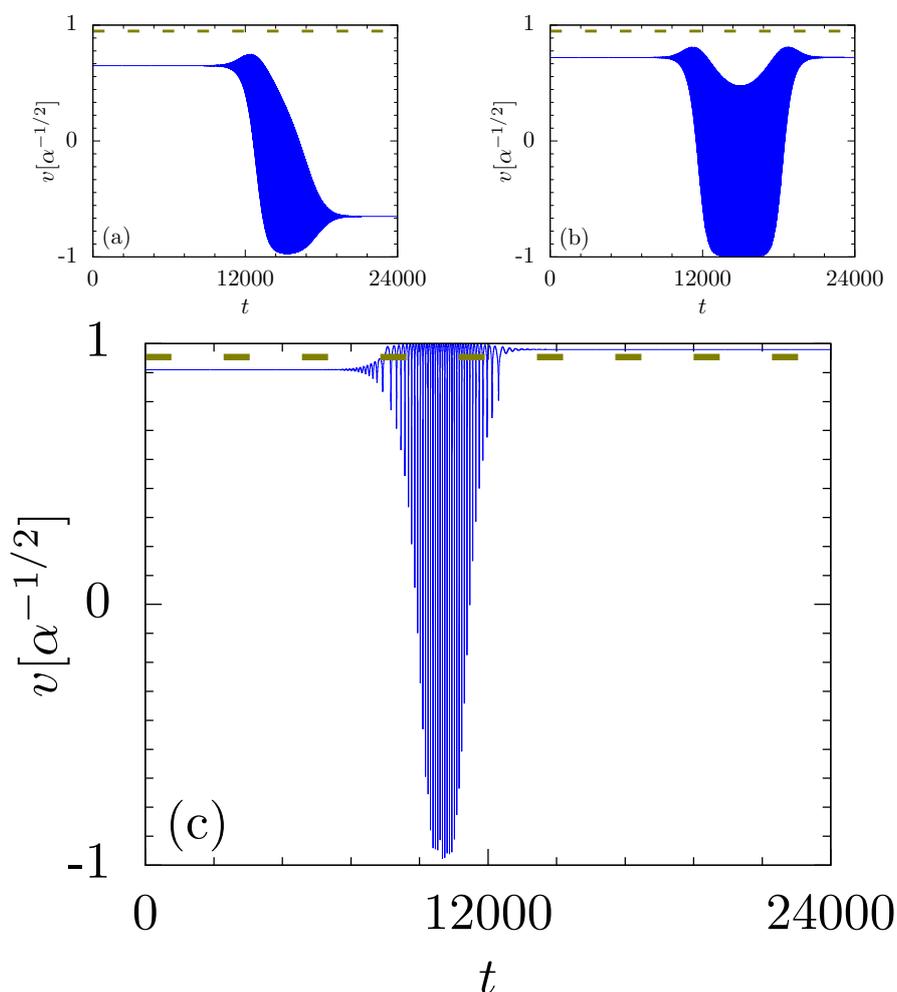


Figura 3.1: Velocidade da partícula versus tempo para o sistema completo para diferentes velocidades de injeção. A curva em azul representa o hamiltoniano (2.16) e linha pontilhada marrom representa a velocidade de fase adimensional  $\sqrt{\alpha}$ . Para cada painel temos a seguinte velocidade de injeção (a)  $v_0\sqrt{\alpha} = 0.65$ , (b)  $v_0\sqrt{\alpha} = 0.72$  e (c)  $v_0\sqrt{\alpha} = 0.9$

Nas Figura 3.1 obtemos que para diferentes valores de velocidades de injeção da partícula temos diferentes regimes. Sendo em cada quadro: (a) a partícula atinge

velocidades finais negativas que caracteriza o regime ponderomotivo reflexivo, já em (b) as partículas são ejetadas com a mesma velocidade com que foram injetadas caracterizando o regime ponderomotivo passante e em (c) onde a partícula atinge velocidade de fase da onda e ultrapassa-a caracterizando o regime acelerador.

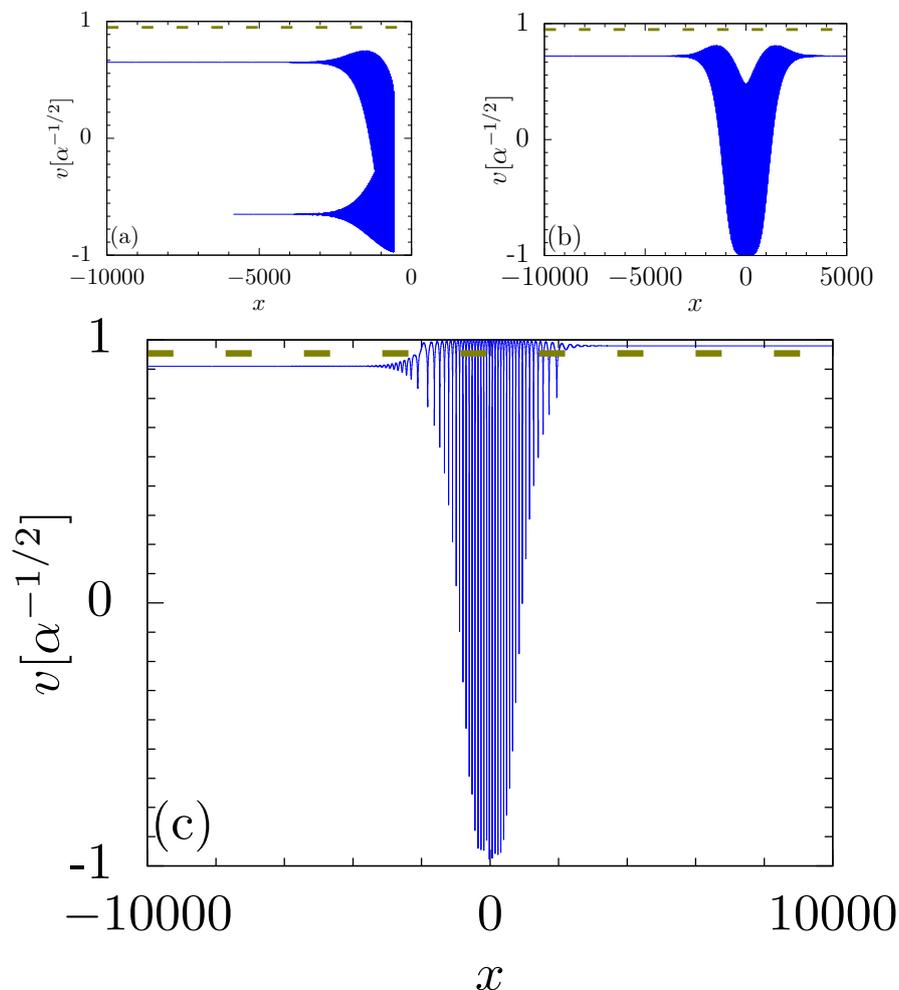


Figura 3.2: Velocidade versus a posição para o sistema completo para diferentes velocidades de injeção. A curva em azul representa o hamiltoniano (2.16) e linha pontilhada marrom representa a velocidade de fase adimensional  $\sqrt{\alpha}$ . Para cada painel temos a seguinte velocidade de injeção (a)  $v_0\sqrt{\alpha} = 0.65$ , (b)  $v_0\sqrt{\alpha} = 0.72$  e (c)  $v_0\sqrt{\alpha} = 0.9$

Reforçando os diferentes regimes obtidos na Fig. 3.1. O espaço de fase (Fig. 3.2) mostra em: (a) o regime ponderomotivo reflexivo onde as partículas são refletidas de pela parede de máximo de potencial localizada nas vizinhanças da origem  $x=0$ , (b) o regime ponderomotivo passante onde as partículas não interagem significativamente com o potencial e (c) o regime acelerador em que a partícula é capturada em torno da região de  $x = 0$ .

## 3.2 Mapas de parâmetros

Teremos uma visão mais geral de todos regimes e as respectivas transições entre eles através de um mapa de parâmetros (Fig. 3.3) que é classificado por cores para velocidades finais  $v_f$  e nos eixos a velocidade de injeção  $v_0\sqrt{\alpha}$  e o  $\alpha$ .

Na Fig. 3.3 são exibidos, novamente, os três possíveis regimes. As cores acinzentadas representam velocidades finais negativas e, portanto, o regime reflexivo. As cores avermelhadas representam velocidades finais positivas menores do que a velocidade de fase da onda e, portanto, o regime passante. Finalmente, as cores azuladas representam velocidades finais iguais ou superiores a velocidade de fase da onda e, portanto, o regime acelerador.

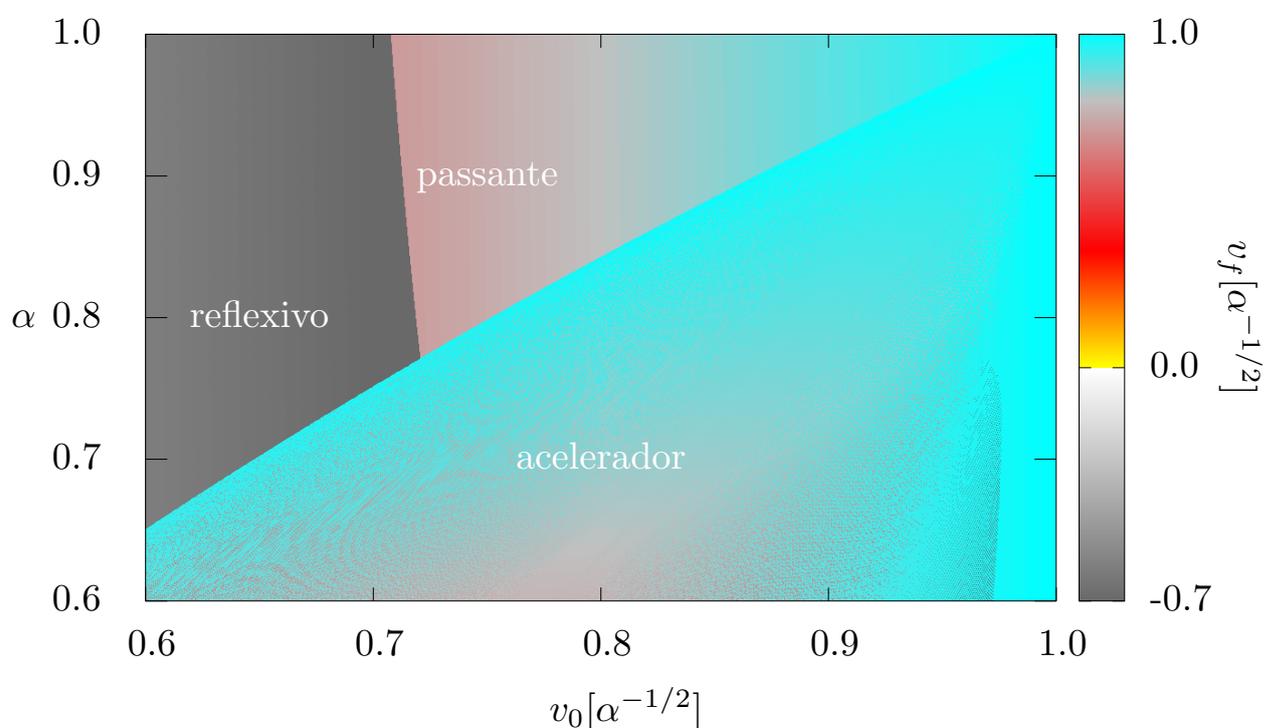


Figura 3.3: Mapa de parâmetros para velocidades finais dependente de  $\alpha$  e da velocidade de injeção. Neste caso temos  $A_{w0} = A_{l0} = 25$

É claro também que esse mapa de parâmetros exibe um diagrama de fase. Para pequenos valores de  $\alpha$  e de velocidades de injeção há possibilidade de transição entre os regimes reflexivo e acelerador. Para os mesmos pequenos valores de velocidade, mas com  $\alpha$  acima de 0,78 a transição é possível de acontecer entre os regimes reflexivo e passante. A transição entre os regimes passante e o acelerador só ocorre para maiores valores de velocidade de injeção.

Na Fig. 3.4 podemos fazer a comparação entre diferentes valores de velocidade

de injeção para o mesmo valor do parâmetro  $\alpha$  para o regime passante. No caso do painel (a) a velocidade injeção é  $v_0\sqrt{\alpha} = 0.72$  e nota-se um pequeno aumento de velocidade no início da interação entre a partícula e o potencial seguida de uma queda. Já no painel (b), como uma velocidade injeção maior que a citada anteriormente, o aumento de velocidade é mais lento, estão com a velocidade mais próxima da velocidade de fase. Esses máximos são um indício que estamos próximos do regime acelerador, ou seja, com um pequeno aumento da velocidade de injeção a partícula é capturada. Essa transição entres regimes pode ser reiterada com Fig. 3.3 citada anteriormente.

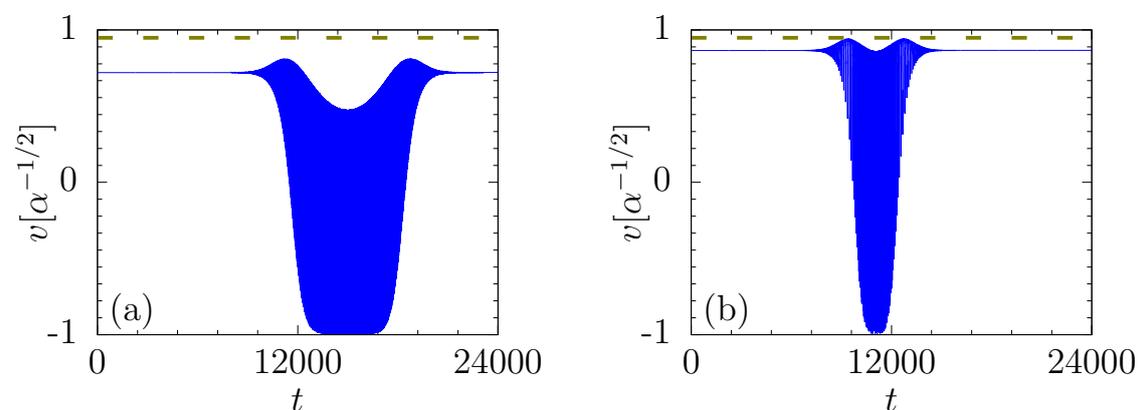


Figura 3.4: Velocidade versus tempo no regime passante com diferentes velocidades de injeção. A curva em azul representa dinâmica do sistema completo e linha pontilhada marrom representa a velocidade de fase da onda. As velocidade injeção para cada painel são (a)  $v\sqrt{\alpha} = 0.72$  e (b)  $v\sqrt{\alpha} = 0.865$

Na Figura 3.5 (a) e (b) é mostrada a velocidade final em termos da velocidade inicial de injeção para dois diferentes valores de  $\alpha$  com a mesmo valor de amplitude máxima dos campos do *Wiggler* e do laser. O padrão exibido reitera a observação feita no parágrafo anterior referente ao mapa 3.3.

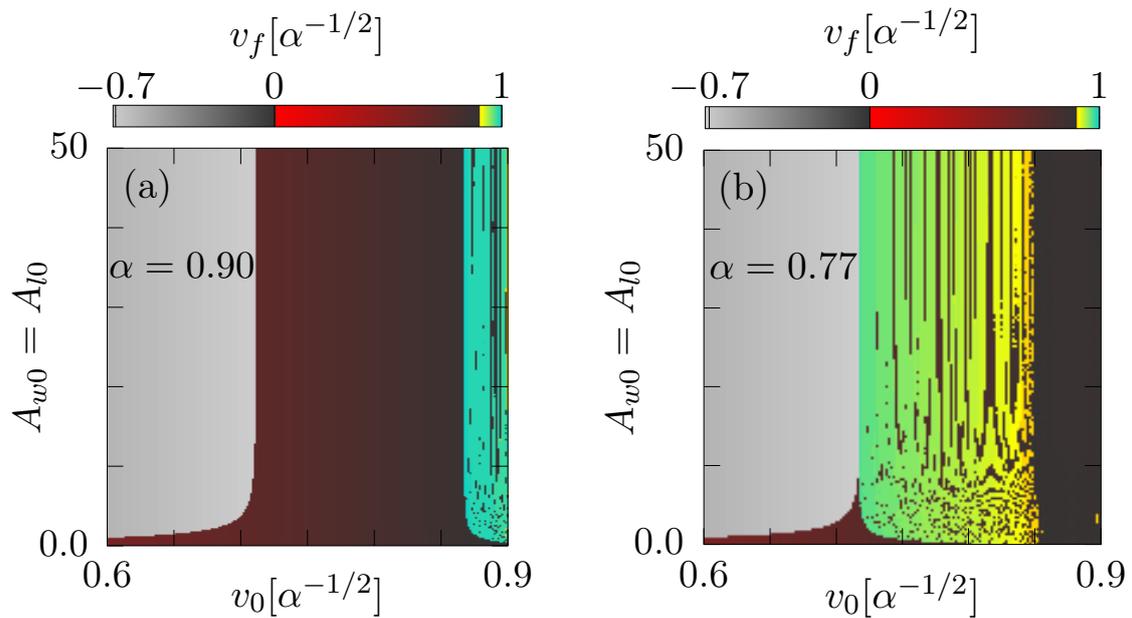


Figura 3.5: Mapa de parâmetros da velocidade final em função das amplitudes dos campos  $A_{w0} = A_{l0}$  e da velocidade de injeção  $v_0\sqrt{\alpha}$ . Para os painéis (a) e (b) foram usados diferentes valores de  $\alpha$

Na figura 3.6 fizemos uma comparação entre o mesmo valor de velocidade de injeção e diferentes valores para o parâmetro  $\alpha$  e, também, para o mesmo valor de  $\alpha$  mas, diferentes velocidades de injeção.

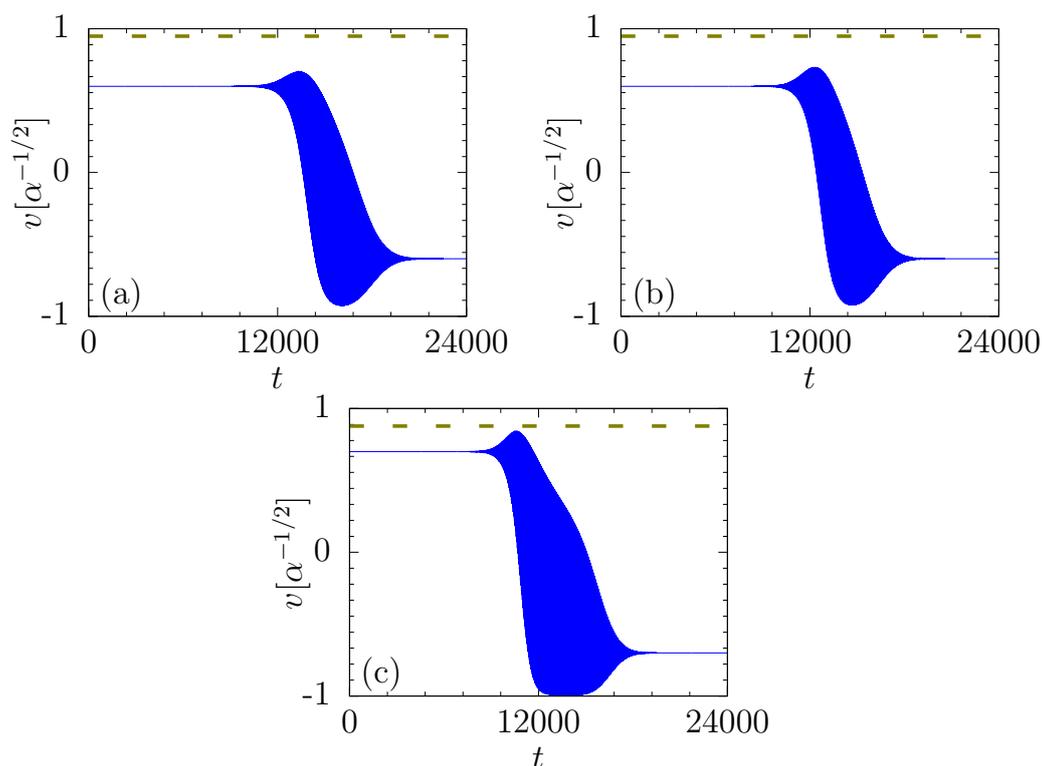


Figura 3.6: Velocidade versus tempo para regime ressonante para diferentes valores do parâmetros  $\alpha$  e de velocidade injeção com  $A_{w0} = A_{l0} = 25$ . A curva em azul representa o hamiltoniano (2.16) e linha pontilhada marrom representa a velocidade de fase adimensional  $\sqrt{\alpha}$ . No painel (a)  $\alpha = 0.9$  e  $v_0\sqrt{\alpha} = 0.6$ , (b)  $\alpha = 0.77$  e  $v_0\sqrt{\alpha} = 0.6$  e (c)  $\alpha = 0.77$  e  $v_0\sqrt{\alpha} = 0.7$

Destacando o painel (c), que tem a maior velocidade de injeção, observamos o aumento mais intenso de velocidade. O máximo de velocidade crescente com a velocidade de injeção indica que estamos na iminência do regime acelerador. De fato, essa transição entre o regime reflexivo e o acelerador é previsto para  $\alpha = 0.77$  pelo mapa mostrado na Fig. 3.5.(b).

### 3.3 Regime Acelerador

As partículas são conduzidas pela força ponderomotiva até o ponto no qual elas são capturadas pelo poço de potencial de alta frequência. Nessas circunstâncias, que a partícula é capturada, ocorre a quebra do regime ponderomotivo, isto é, a influência do potencial sobre as partículas não se configura mais como força ponderomotiva. A partir desse momento estamos interessados no ganho de energia cinética da partícula visto que, em trabalhos anteriores (6, 18, 19) foi constatado ganho de energia cinética consideráveis provenientes da interação da carga com modos eletrostáticos.

Na iminência na captura, partículas que inicialmente estavam defasadas em relação a *beat-wave* foram aceleradas pelo campo ponderomotivo e agora estão se movendo com velocidade próxima a velocidade de fase da *beat-wave*(6). Nesse cenário os termos que representam a lenta modulação se tornam desprezíveis, ou seja,  $x^2/\sigma^2 \ll 1$ , posto que a captura ocorre na vizinhança de  $x = 0$ . Por consequência, a dinâmica do sistema tem apenas um grau de liberdade (a saber, depende apenas da fase  $\theta = x - t$ ) e uma constante de movimento pode ser obtida. Atualizando o hamiltoniano (2.16) obtêm-se

$$H = \sqrt{1 + \frac{p_x^2}{\alpha} + A_{l0}^2 + A_{w0}^2 + 2A_{l0}A_{w0} \cos(\theta)}. \quad (3.4)$$

Para o hamiltoniano (3.4)

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad (3.5)$$

isto é,  $\dot{p}_x = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt}$  e, portanto

$$H - p_x = \text{Constante}. \quad (3.6)$$

Com base em que

$$v_x = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{\alpha H} \quad (3.7)$$

somos capazes de reescrever o hamiltoniano (3.6) em termos da velocidade da partícula

$$H(1 - \alpha v_x) = C, \quad (3.8)$$

e  $H = \sqrt{\frac{1}{1 - \alpha v_x^2} (1 + A_{l0}^2 + A_{w0}^2 + 2A_{l0}A_{w0} \cos(x - t))}$  escrito em função da velocidade.

A partícula experimenta a máxima velocidade no ponto mínimo de potencial que é  $\theta = \pi$ . Para explorar essa situação a velocidade de injeção é ajustada para  $v_x = 1$  e a fase  $\theta = 0$ . Por conseguinte, conseguimos obter o valor da constante que é

$$C = \sqrt{(1 - \alpha) (1 + A_{l0}^2 + A_{w0}^2 + 2A_{l0}A_{w0})}. \quad (3.9)$$

A velocidade é máxima em  $\theta = \pi$

$$\begin{aligned} \frac{1 - \alpha v_{\max}}{\sqrt{1 - \alpha v_{\max}^2}} &= \frac{\sqrt{(1 - \alpha)(1 + A_{l0}^2 + A_{w0}^2 + 2A_{l0}A_{w0})}}{\sqrt{1 + A_{l0}^2 + A_{w0}^2 - 2A_{l0}A_{w0}}}, \\ \frac{1 - \alpha v_{\max}}{\sqrt{1 - \alpha v_{\max}^2}} &= \frac{\sqrt{(1 - \alpha)(1 + (A_{l0} + A_{w0})^2)}}{\sqrt{1 + (A_{l0} - A_{w0})^2}}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

rearranjando os termos da expressão acima

$$\begin{aligned} v_{\max}^2 \sqrt{\alpha} [1 + (A_{l0} + A_{w0})^2 - 4\alpha A_{l0}A_{w0}] + v_{\max} \sqrt{\alpha} [2\sqrt{\alpha} (1 + (A_{l0} - A_{w0})^2)] \\ - 4A_{l0}A_{w0} + \alpha (1 + (A_{l0} + A_{w0})^2) = 0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

dividindo os dois lados do polinômio (3.10) por  $A_{w0}^2$  e definindo  $f \equiv \frac{A_{l0}}{A_{w0}}$ , obtemos

$$\begin{aligned} v_{\max}^2 \sqrt{\alpha} \left[ \frac{1}{A_{w0}^2} + (f + 1)^2 - 4\alpha f \right] + v_{\max} \sqrt{\alpha} \left[ 2\sqrt{\alpha} \left( \frac{1}{A_{w0}^2} + (f - 1)^2 \right) \right] \\ - 4f + \alpha \left( \frac{1}{A_{w0}^2} + (f + 1)^2 \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

A equação (3.12) é uma função polinomial de segundo grau em relação a  $v_{\max}\alpha$ , desta maneira, admite duas soluções. Como a solução que considera a raiz negativa é menor que solução que considera raiz positiva e estamos interessados na velocidade máxima, desconsideraremos a solução de raiz negativa. Portanto, a solução é

$$v_{\max} \sqrt{\alpha} = \frac{\sqrt{\alpha} \left( \frac{1}{A_{w0}^2} + (1 - f)^2 \right) + 2\sqrt{(\alpha - 1)^2 f \left( \frac{1}{A_{w0}^2} + (1 + f)^2 \right)}}{\frac{1}{A_{w0}^2} + (f + 1)^2 - 4\alpha f}. \quad (3.13)$$

No caso em que as amplitudes unidimensionais do laser e do *Wiggler* são muito maiores que 1 ( $A_{w0}, A_{l0} \gg 1$ ), portanto, a velocidade máxima (3.13) é

$$\frac{v_{\max, \text{dim}}}{c} = v_{\max} \sqrt{\alpha} \xrightarrow{A_{w0}, A_{l0} \gg 1} \frac{\sqrt{\alpha} (f - 1)^2 + 2\sqrt{(\alpha - 1)^2 f (f + 1)^2}}{(f + 1)^2 - 4\alpha f} + \mathcal{O} \left( \frac{1}{A_{(l,w)0}^2} \right) \quad (3.14)$$

para diferentes valores de  $f$  obtemos resultados diferentes para 3.14, ou seja,

$$\begin{cases} v_{\max} \sqrt{\alpha} = \sqrt{\alpha} & \text{se } 0 < f \ll 1 \text{ ou } f \gg 1 \\ v_{\max} \sqrt{\alpha} = 1 & \text{se } f \rightarrow 1 \end{cases} \quad (3.15)$$

A aproximação (3.14) nos sugere que aceleração é ótima, onde velocidade máxima tende a velocidade da luz, é quando o laser e o *Wiggler* têm a mesma amplitude: quanto maior amplitude comum, mais próxima à velocidade da luz a velocidade máxima é. Por outro lado, se  $f \neq 1$  a velocidade máxima será limitada no intervalo entre a velocidade de fase do modo *beat*  $c\sqrt{\alpha}$  e a velocidade da luz, não importando quão grandes sejam as amplitudes dos campos. A velocidade máxima da partícula não depende significativamente da fase inicial.

A eficiência da aceleração pode ser verificada através do ganho de velocidade que é calculado pela seguinte equação  $G_{v_{\max}} \equiv \log \left[ \frac{1-\sqrt{\alpha}}{1-\sqrt{\alpha}v_x(\theta=\pi)} \right]$ , que resulta quão perto o valor de velocidade máxima é da velocidade luz  $c$  em comparação a velocidade fase. Para ter uma visão mais geral deste caso plotamos um mapa de parâmetros (Fig. 3.7) que reproduz o  $G_{v_{\max}}$  em termos das amplitudes das  $A_{w0}$  e  $A_{l0}$ . A figura mostra que ao menos que as amplitudes sejam iguais, a aceleração não é ideal. Mesmo quando aumentam as duas amplitudes, mas mantendo-as diferentes,  $f \neq 1$ , temos valores menores para a velocidade máxima. Por outro lado, quando  $f = 1$  a velocidade final pode chegar mais próxima de  $c$ . Isto é, depende da escolha adequada das amplitudes, que devem ser iguais como é mostrado na faixa central da Fig. 3.7. Estes valores altos de amplitudes são compatíveis como os lasers de alta frequência com os *petawatt* e futuramente dos *exawatt* (20) e lasers de infravermelho auto focalizados de intensidades relativisticamente altas (21).

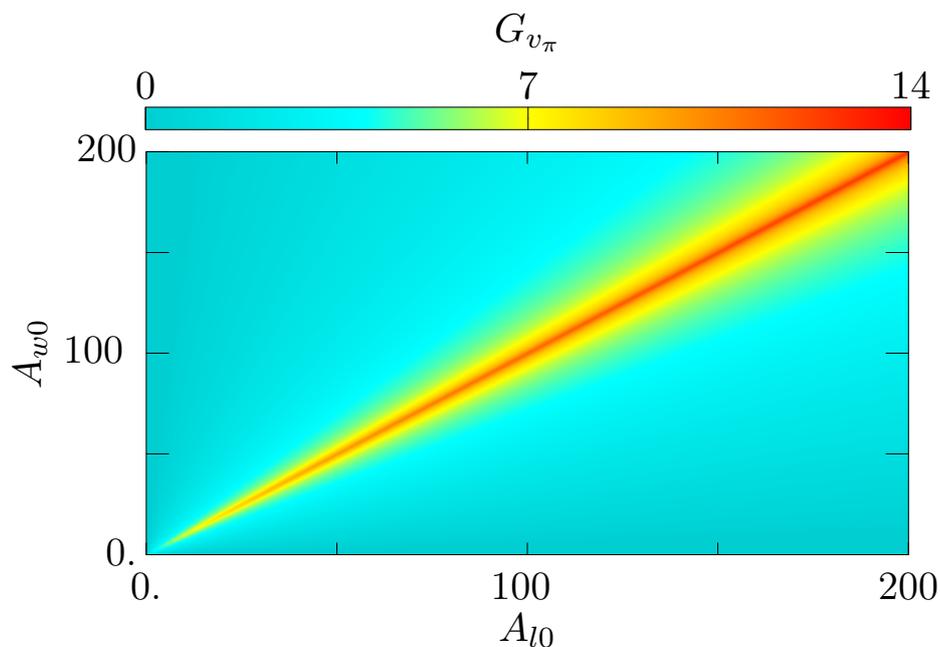


Figura 3.7: Mapa de parâmetros do  $G_{v_{\pi}}$  em termos das amplitudes do Laser do *Wiggler*. Neste caso usamos  $\alpha = 0.9$ .

### 3.3.1 Aceleração Adiabática

Iremos analisar como ocorre o processo de aceleração das partículas quando em regime acelerador.

Quando tomamos  $f = 1$  na expressão (3.14) a velocidade máxima aproxima-se da velocidade da luz. Na figura 3.8 a velocidade máxima calculada foi de, aproximadamente, 99,9999% da velocidade luz.

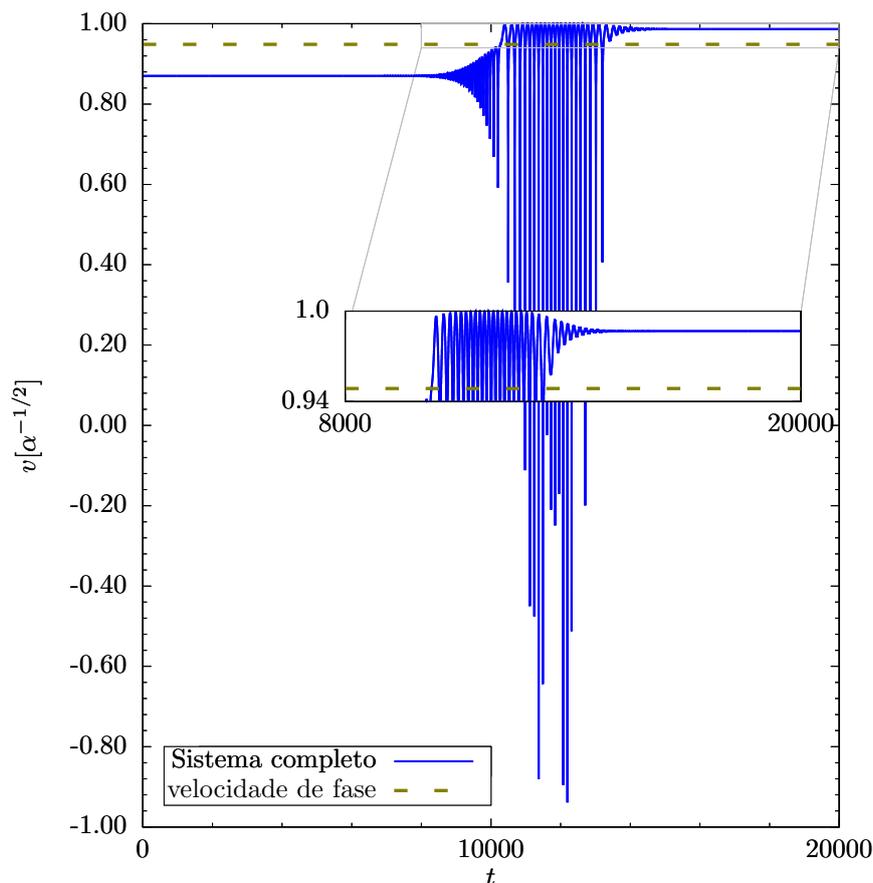


Figura 3.8: Velocidade versus tempo para o regime acelerador onde a curva em azul representa a dinâmicas da partícula a curva tracejada em marrom a velocidade de fase da onda. Neste caso foram usados os seguintes valores: a velocidade injeção  $v_0\sqrt{\alpha} = 0.87$ ,  $\alpha = 0.9$  e  $A_{w0} = A_{l0} = 100$

No caso da captura das partículas por modos eletrostáticos - onde as partículas são catapultadas logo após atingir a ressonância - aqui, na captura pelo arranjo do laser e do *Wiggler*, a velocidade da partícula capturada oscila durante um longo período de tempo, antes de, finalmente, atingir a velocidade de ejeção mesmo depois de atingir a ressonância (6, 22). Esse tipo de comportamento caracteriza a presença de alguma variável adiabática envolvida no processo de aceleração que, certamente,

relaciona-se com a troca de energia entre as partículas e os campos.

Uma excelente variável que se pode usar para rastrear o processo adiabático é fornecida pela combinação  $H - p_x$  introduzida a partir da Eq. 2.16. A variável é, rigorosamente, constante no caso de campos espacialmente uniformes. Espera-se que a quantidade  $H - p_x$  por ter sido construída com modulação espacial lenta, seja a variável adiabática a qual nos referíamos.

Para verificar a adiabaticidade exibimos na figura 3.9 a evolução espacial da quantidade  $H - p_x$ . De fato, há variação somente numa vizinhança extremamente próxima da origem. Por isso, podemos usar como uma constante no processo de captura das partículas.

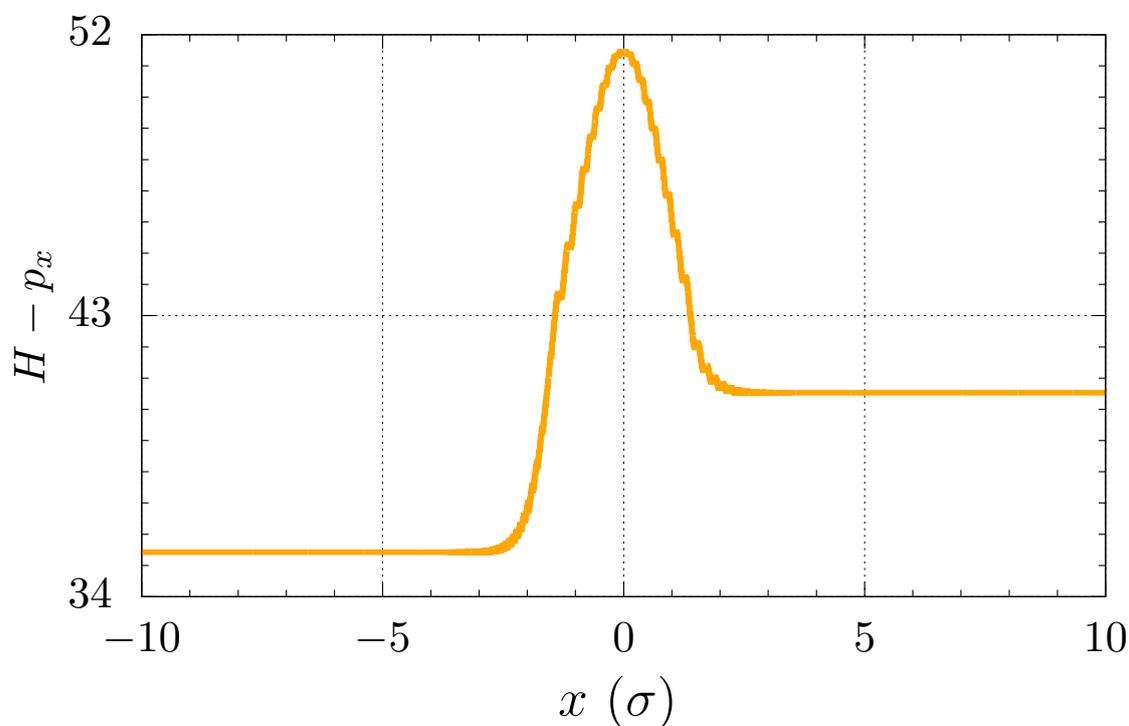


Figura 3.9: A variação adiabática de  $H - p_x$ . Os parâmetros:  $v_0\sqrt{\alpha} = 0.87$  e  $\alpha = 0.9$

Criamos a figura 3.10 afim de analisar como o processo de aceleração responde ao crescimento das amplitudes dos campos eletromagnéticos. A figura mostra o ganho de velocidade, mas agora considerando modulação da amplitude. A velocidade injeção é tal que o movimento da partícula beira a ressonância. Medimos o ganho de acordo com a equação  $G_{v_{\max}} = \log \frac{1 - \sqrt{\alpha}}{1 - \sqrt{\alpha}v_{\max}}$ . Observa-se que o ganho é altamente crescente até um certo valor de amplitude e passa a saturar a partir deste. Mesmo para pequenas amplitudes de campo o processo de captura ocorre.

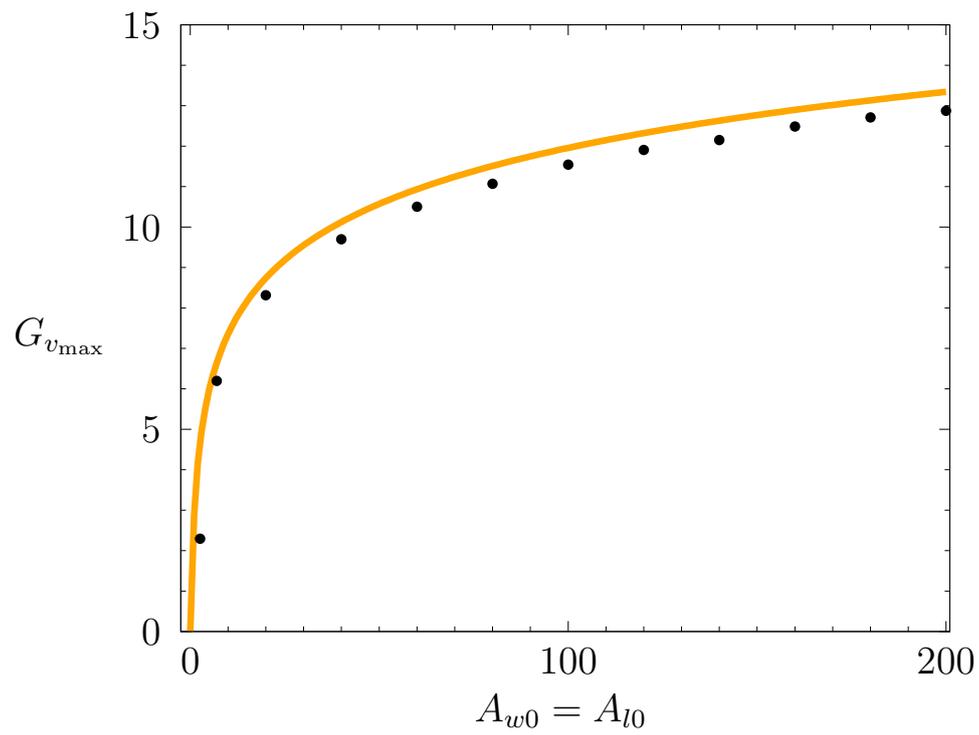


Figura 3.10: A curva em laranja foi construída com a equação (3.14). Os pontos em preto foram obtidos através da dinâmica completa do sistema. Parâmetros:  $\alpha = 0.9$  e  $v_0\sqrt{\alpha} = 0.87$

## Capítulo 4

# Aproximação Ponderomotiva

Faremos agora a análise da lenta modulação de alta frequência do Hamiltoniano na forma (2.16) com a aproximação ponderomotiva. A aproximação ponderomotiva, quando válida, descreve a dinâmica em termos de quantidades médias do tempo (sobre as altas frequências), o que nos leva a um formalismo mais simples e, muitas vezes, integrável.

Em trabalhos encontrados na literatura (23, 24, 25) a aproximação ponderomotiva é realizada através de ciclos médios de lagrangiano no qual se calcula a média em relação a escala de tempo rápida mantendo apenas a escala de tempo lenta (17). A expressão resultante é precisa desde que a velocidade se mantenha longe da ressonância ( $\dot{x} = 1$ ), onde o formalismo não é mais válido e as partículas são capturadas pela onda. Entretanto, como a nossa análise está interessada também na vizinhança imediata da região de quebra do regime ponderomotivo, propomos a adição de um termo que leva em conta a dependência no tempo do hamiltoniano (2.16) na dinâmica média.

Nossa abordagem consiste, basicamente, em procurar uma transformação canônica com a qual se possa remover consistentemente todos os termos de altas frequência que governam o hamiltoniano (2.16). O procedimento, quando válido, descreve a dinâmica em termos das variáveis médias de tempo que nos fornecem um sistema conservativo (17, 26, 27).

As variáveis transformadas são  $X$ ,  $P_x$  e  $\mathcal{H}$ . Utilizaremos a função geratriz na forma  $F(x, P_x, t) = xP_x + f(x, P_x, t)$  e portanto, as equações que relacionam as variáveis transformadas com as originais são (28):

$$p_x = P_x + \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (4.1)$$

$$X = x + \frac{\partial f}{\partial P_x} \quad (4.2)$$

e

$$\mathcal{H} = H + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (4.3)$$

A função  $f$  será construída de maneira a eliminar os termos de altas frequências do hamiltoniano (2.16), o qual contém termos tanto dependentes do tempo, que surgem do termo da *beat-wave*, quanto termos independentes do tempo. A aproximação ponderomotiva que estamos buscando deve ser capaz de destacar o efeito médio desse termo dependente do tempo sob a dinâmica média das partículas.

A abordagem ponderomotiva pode tornar-se complicada devido à raiz quadrada do hamiltoniano original. Não desejamos comprometer a validade da abordagem em campos de altas intensidades e, por isso, tentaremos escrever o hamiltoniano ponderomotivo, da forma

$$\mathcal{H} = \sqrt{1 + \frac{P_x^2}{\alpha} + A_{l0}^2 + A_{w0}^2 e^{-\frac{x^2}{\sigma}} + h(X, P_x)}. \quad (4.4)$$

O termo ainda desconhecido  $h(X, P_x)$  é inserido para incorporar o efeito médio dos termos de alta frequência contendo uma contribuição de mais alta ordem nas amplitudes.

Substituindo os hamiltonianos (2.16) e (4.4) na equação (4.3) e efetuando a transformação (4.1) obtemos

$$\sqrt{1 + \frac{1}{\alpha} \left( P_x + \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + A_{l0}^2 + 2A_{w0}^2 e^{-\frac{x^2}{\sigma}} + 2A_{l0}A_{w0} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cos(x-t) + \frac{\partial f}{\partial t}} = \sqrt{1 + \frac{P_x^2}{\alpha} + A_{l0}^2 + A_{w0}^2 e^{-\frac{x^2}{\sigma}} + h(X, P_x)}. \quad (4.5)$$

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado ficamos com

$$1 + \frac{1}{\alpha} \left( P_x + \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + A_{l0}^2 + 2A_{w0}^2 e^{-\frac{x^2}{\sigma}} + 2A_{l0}A_{w0} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cos(x-t) = 1 + \frac{P_x^2}{\alpha} + A_{l0}^2 + A_{w0}^2 e^{-\frac{x^2}{\sigma}} + h(X, P_x) + 2\mathcal{H} \frac{\partial f}{\partial t} + \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 \quad (4.6)$$

e simplificando os termos semelhantes, finalmente

$$\frac{1}{\alpha} \left( 2P_x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \right) + 2A_{l0}A_{w0} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cos(x-t) = h(X, P_x) + 2\mathcal{H} \frac{\partial f}{\partial t} + \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)^2$$

e daí isolamos o  $h(X, P_x)$ :

$$h = -2\frac{P_x}{\alpha}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + 2\mathcal{H}\frac{\partial f}{\partial t} - \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 + 2A_{w0}A_{l0}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\cos(x-t). \quad (4.7)$$

A expressão (4.7) é não linear na função  $f$  que é de alta frequência. Portanto, substituímos a expressão (4.7) por

$$h = -\left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \right\rangle_{\theta}, \quad (4.8)$$

onde o símbolo  $\langle \rangle_{\theta}$  indica média sobre as variáveis rápidas.

Para simplificar escolhemos  $\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial f}{\partial x}$  e reescrevemos a equação (4.7) para

$$h = \frac{\partial f}{\partial t}\left(2\mathcal{H} - 2\frac{P_x}{\alpha}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) + 2A_{w0}A_{l0}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\cos(x-t). \quad (4.9)$$

Faremos uma expansão harmônica de  $f$ , isto é, escreveremos  $f = f_1(\theta) + f_2(2\theta) + \dots$  com  $\theta = x - t$  e  $\langle f_n \rangle_{\theta}$ , onde o subíndice indica a ordem do produto das amplitudes dos campos. Negligenciaremos os termos maiores do que os de segunda ordem, o que é suficiente para descrever o processo. Neste caso estamos supondo que os harmônicos superiores aos de segunda ordem contribuem menos para forma completa da função  $f$ , que é algo que deve ser verificado quando compararmos os resultados teóricos com os numéricos.

Efetuada a expansão harmônica atualizamos a expressão (4.9) para

$$h = \left(\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial t}\right)\left(2\mathcal{H} - 2\frac{P_x}{\alpha}\right) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial t}\right)^2\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) + 2A_{w0}A_{l0}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\cos(x-t), \quad (4.10)$$

Definindo  $\Gamma \equiv \sqrt{1 + \frac{P_x^2}{\alpha} + A_{l0}^2 + A_{w0}^2}e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}$  e negligenciado os termos de terceira e quarta ordem ficamos com

$$h = \frac{\partial f_1}{\partial t}\left(2\Gamma - 2\frac{P_x}{\alpha}\right) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)^2\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) + \frac{\partial f_2}{\partial t}\left(2\Gamma - 2\frac{P_x}{\alpha}\right) + 2A_{w0}A_{l0}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\cos(x-t). \quad (4.11)$$

Compatibilizando a ordem dos termos na expressão (4.11) devemos verificar, primeiramente, que

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}\left(2\Gamma - 2\frac{P_x}{\alpha}\right) + 2A_{w0}A_{l0}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\cos(x-t) = 0. \quad (4.12)$$

Integrando, obtemos a função  $f_1$

$$f_1 = \frac{A_{w0}A_{l0}}{\left(\Gamma - \frac{P_x}{\alpha}\right)} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} \sin(x-t). \quad (4.13)$$

Alimentando os termos remanescentes na expressão (4.11) com a recém obtida (4.13) seremos capazes de calcular a parcela  $f_2$  utilizando a mesma estratégia de compatibilidade de ordens. Fazendo isso,

$$\begin{aligned} h &= \left[ - \left( \frac{A_{w0}A_{l0}}{\Gamma - \frac{P_x}{\alpha}} \right) e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} \cos(x-t) \right]^2 \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right) + \frac{\partial f_2}{\partial t} \left( 2\Gamma - 2\frac{P_x}{\alpha} \right) \\ &= \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right) \left( \frac{A_{w0}A_{l0}}{\Gamma - \frac{P_x}{\alpha}} \right)^2 e^{\frac{-x^2}{\sigma^2}} \cos^2(x-t) + \frac{\partial f_2}{\partial t} \left( 2\Gamma - 2\frac{P_x}{\alpha} \right), \end{aligned}$$

e lembrando que  $\cos^2 \theta = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta)$ , segue

$$h = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right) \left( \frac{A_{w0}A_{l0}}{\Gamma - \frac{P_x}{\alpha}} \right)^2 e^{\frac{-x^2}{\sigma^2}} (1 + \cos(2(x-t))) + \frac{\partial f_2}{\partial t} \left( 2\Gamma - 2\frac{P_x}{\alpha} \right). \quad (4.14)$$

A função  $f_2$  que elimina o termo restante de alta frequência deve satisfazer

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} \left( 2\Gamma - 2\frac{P_x}{\alpha} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right) \left( \frac{A_{w0}A_{l0}}{\Gamma - \frac{P_x}{\alpha}} \right)^2 e^{\frac{-x^2}{\sigma^2}} \cos(2(x-t)). \quad (4.15)$$

Integrando,

$$f_2 = \frac{1}{8} \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right) \left( \frac{A_{w0}A_{l0}}{\Gamma - \frac{P_x}{\alpha}} \right)^2 e^{\frac{-x^2}{\sigma^2}} \sin(2x-2t). \quad (4.16)$$

Ainda falta considerarmos a transformação na posição (4.2). A função gaussiana que depende dessa transformação expande-se em série de potencias de acordo com

$$e^{\frac{-(x - \frac{\partial f}{\partial P_x})^2}{\sigma^2}} = e^{\frac{-x^2}{\sigma^2}} - \frac{2X}{\sigma^2} \frac{\partial f}{\partial P_x} e^{\frac{-x^2}{\sigma^2}} + \mathcal{O} \left( \left( \frac{\partial f}{\partial P_x} \right)^2 \right). \quad (4.17)$$

Como vale  $\frac{2X}{\sigma^2}(x-X) \ll 1$ , então,

$$\frac{2X}{\sigma^2} \frac{\partial f}{\partial P_x} e^{\frac{-x^2}{\sigma^2}} \ll 1, \quad (4.18)$$

e daí, o efeito da transformação é simplesmente a troca de  $x$  por  $X$ .

Por fim,  $h$  isento dos termos de alta frequência apresenta-se:

$$h(X, P_x) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right) \left( \frac{A_{w0} A_{l0}}{\Gamma - \frac{P_x}{\alpha}} \right)^2 e^{-\frac{X^2}{\sigma^2}}. \quad (4.19)$$

O hamiltoniano ponderomotivo completo é, então,

$$\mathcal{H} = \sqrt{1 + \frac{P_x^2}{\alpha} + A_{l0}^2 + A_{w0}^2 e^{-\frac{X^2}{\sigma^2}} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right) \left( \frac{A_{w0} A_{l0}}{\Gamma - \frac{P_x}{\alpha}} \right)^2 e^{-\frac{X^2}{\sigma^2}}} \quad (4.20)$$

e as equações que regem a dinâmica do centro-guia são

$$\dot{X} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_x} = \frac{2 \frac{P_x}{\alpha} \left( \frac{P_x}{\alpha} - \Gamma \right) - \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right) A_{l0}^2 A_{w0}^2 \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{P_x}{\alpha \Gamma} \right)}{2 \mathcal{H} \left( \frac{P_x}{\alpha} - \Gamma \right)} \quad (4.21)$$

e

$$\dot{P}_x = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X} = \frac{X A_{w0}^2 e^{-\frac{X^2}{\sigma^2}} \left[ 2 \Gamma \left( \frac{P_x}{\alpha} - \Gamma \right)^3 - A_{l0}^2 \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right) \left( A_{w0}^2 e^{-\frac{X^2}{\sigma^2}} + \Gamma \left( \frac{P_x}{\alpha} - \Gamma \right) \right) \right]}{2 \sigma^2 \Gamma \left( \frac{P_x}{\alpha} - \Gamma \right)^3 \mathcal{H}} \quad (4.22)$$

## 4.1 Validação da aproximação ponderomotiva

A comparação entre a análise numérica exata e os resultados aproximados (devidos à aproximação ponderomotiva) para os diferentes regimes no qual a aproximação é válida são mostrados na Fig. 4.1. A linha pontilhada em marrom é a velocidade de fase, a curva em azul descreve a solução da dinâmica completa do hamiltoniano 2.16, e a curva em laranja representa sua média. Esta média foi obtida através da função de média móvel do programa *Mathematica*. As linhas pontilhadas em preto são resultados da aproximação ponderomotiva. Para construção dos gráficos foram usadas diferentes velocidades de injeção. Nos quadros (a) e (b) usamos  $v_0 \sqrt{\alpha} = 0.65$ , que resulta em velocidades finais negativas (caracteriza, portanto, o regime reflexivo) e no quadros (c) e (d) usamos  $v_0 \sqrt{\alpha} = 0.72$  (a velocidade de ejeção é a mesma do que a velocidade de injeção, o que caracteriza o regime passante).

A superposição exibida na figura 4.1 entre a velocidade média prevista pelo sistema completo (curva em laranja) com a prevista pela aproximação ponderomotiva é, claramente, satisfatória uma vez que as curvas são praticamente indistinguíveis. Muito satisfatoriamente também prevê-se as curvas que envelopam a forma dos grá-

ficos (linhas pontilhadas superior e inferior).

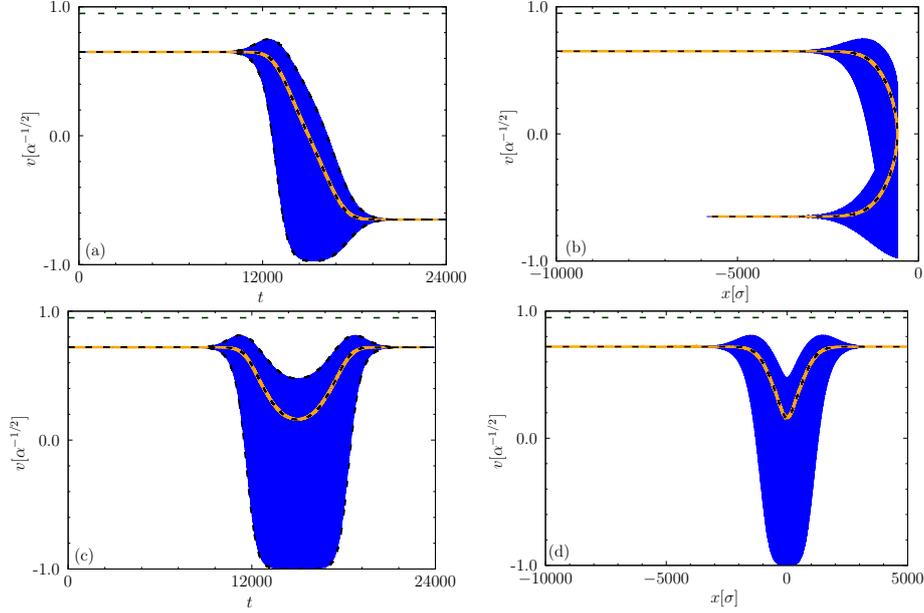


Figura 4.1: Nos quadros (a) e (c) temos velocidade versus tempo e nos quadros (b) e (d) o espaço de fase para diferentes velocidade injeção e os parâmetros fixos  $\alpha = 0.9$  e  $A_{w0} = A_{l0} = 25$ . No painel e as curvas descrevem a azul sistema completa e a laranja descreve a média do sistema completo. As linhas pontilhadas são as previsões da aproximação ponderomotiva. A velocidade de injeção para cada quadro são (a) e (b) é  $v_0\sqrt{\alpha} = 0.65$  e para (c) e (d) é  $v_0\sqrt{\alpha} = 0.72$ .

#### 4.1.1 Fronteira com o regime acelerador

Estamos interessados em descrever a dinâmica das partículas na fronteira da transição regimes passante e reflexivo para o regime acelerador. Para tanto escolheremos as velocidades de injeção e o parametro  $\alpha$  onde ocorre a transição.

A Fig 4.2 descreve a comparação entre a soluções numéricas da média da dinâmica completa, em laranja, do Hamiltoniano ponderomotivo (4.20), em preto, e em verde a solução do hamiltoniano ponderomotivo (4.4) considerando o termo  $h(X, P_x)$  igual a zero. A figura mostra que a presença do termo  $h$  no hamiltoniano ponderomotivo é crucial para termos um ajuste perfeito com a curva da dinâmica total. Nas curvas em preto e vermelho constam dois picos que mostram que a partícula são injetadas na onda modulada e passam por estágios de *uphill acceleration*. Esse fato caracteriza que a partícula está na iminência da ressonância.

Por outro lado, quando escolhemos  $h \rightarrow 0$  o resultado da curva é puramente *dowhill* em que as partículas são empurradas para trás e não atraídas pelo potencial.

Esse tipo de resultado é obtidos em teorias que obtêm a média através do formalismo Lagrangiano.

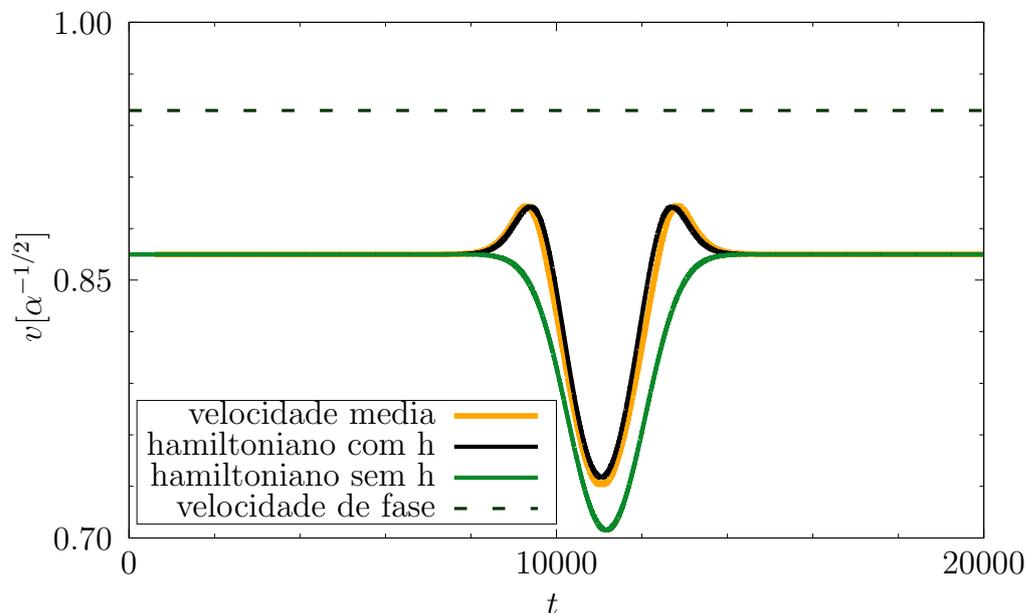


Figura 4.2: Velocidade versus tempo para regime passante com velocidade de injeção  $v_0\sqrt{\alpha} = 0.867$ . A figura apresenta a comparação da solução exata do tempo médio, curva em laranja, com a solução da aproximação ponderomotiva dos Hamiltonianos (4.20) e (4.4), com e sem  $h(X, P_x)$  a correção do termo  $h$  respectivamente.

*Uphill acceleration* é estudada em muitos casos com ajuda de aproximação usando o formalismo Lagrangiano (23, 18). Esse tipo de aproximação providencia informações importantes, embora só seja válida quando a velocidade média tem único valor para um específico valor de potencial. Este fato é observado quando se usa conservação de energia na forma  $E = v\frac{dL}{dv} - L$ , no que produz uma relação entre qualquer velocidade dada e a intensidade do campo presente em  $L$  (29). Isso não é o que acontece aqui, uma vez que, nos lados esquerdo e direito da depressão central simétrica, a partícula atravessa, pontos diferentes de intensidade de campo com a mesma velocidade.

Para destacar o papel do termo  $h$ , também consideramos o caso de menores velocidades de injeção. Mantendo as mesmas amplitudes de campo, espera-se que as partículas sejam refletidas pelo modo de batida localizado nessas circunstâncias. Na figura 4.3 com  $\alpha = 0.77$  temos a transição do regime ressonante para o regime acelerador, observa-se novamente que a partícula é inicialmente atraída pelo campo (nota-se distorções ascendentes na velocidade, evidenciando novamente o *uphill acceleration*) e para depois ser refletida posteriormente com a velocidade negativa final,

característica do regime ponderomotivo reflexivo. A comparação entre o hamiltoniano 4.4 com o termo  $h(X, P_x) = 0$  com hamiltoniano 4.20, que termo  $h(X, P_x) \neq 0$  são mostrados novamente. No caso que a aproximação do hamiltoniano considera o termo  $h$  diferente zero concorda com a simulação do sistema completo, incluindo a região que a velocidade da partícula é negativa.

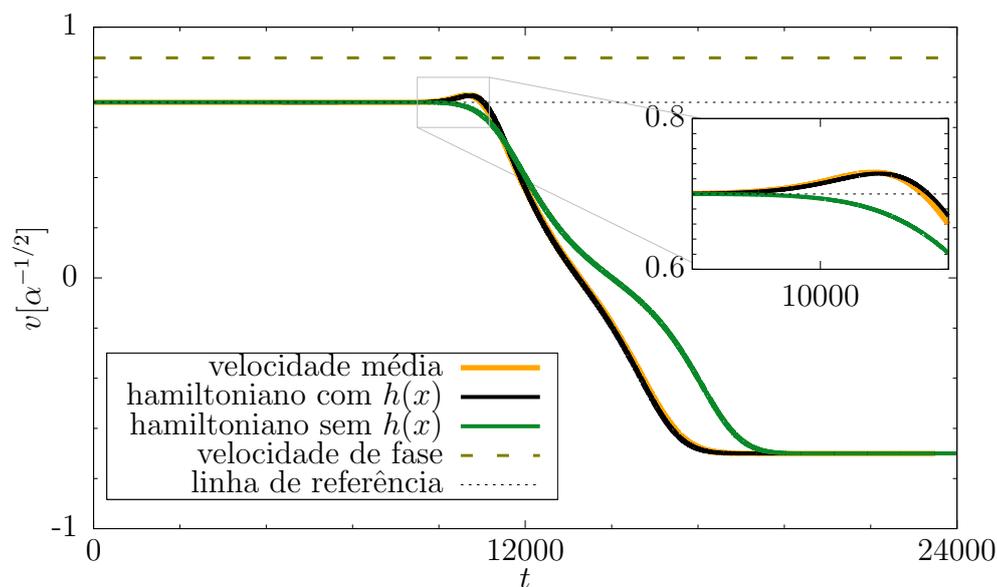


Figura 4.3: Velocidade versus tempo para o regime reflexivo, exibindo a comparação entre o tempo médio da solução exata, e da solução ponderomotiva com e sem termo  $h$ . Neste caso nos consideramos  $\alpha = 0.77$

Os picos vistos nas Fig. 4.2 e 4.3 são de fato um indicio que partícula está próximo de atingir velocidades iguais a velocidade de fase. Isto é, tendo um pequena variação no valor da sua velocidade de injeção as partículas são capturadas. A descrição correta desses picos evidencia aumento na precisão da aproximação ponderomotiva descrita nesta dissertação comparadas com aproximações baseado em ciclo de lagrangeano médio.

# Capítulo 5

## Conclusão

Obtemos a mesma eficiência de aceleração que ocorre na transição de fase entre os regimes ponderomotivo e ressonante (acelerador) providenciados por uma onda eletrostática lentamente modulada substituindo tais ondas por um esquema de *free-electron-laser* inverso.

A dinâmica da partícula é dividida em três regimes: reflexivo, passante e acelerador. Mostramos que cada um deles é alcançado por uma combinação na escolha do parâmetro  $\alpha$  (que traz a informação da velocidade de fase) e da velocidade de injeção.

Conseguimos descrever a fase ponderomotiva (que se instala nos regimes reflexivo e passante) por meio de uma aproximação fundamentada no formalismo hamiltoniano. Tal aproximação reproduziu satisfatoriamente até mesmo a dinâmica da partícula próximo ao regime ressonante com a onda. A mesma descrição eficiente não é obtida com as médias usuais calculadas com base em aproximações via métodos que consideram ciclos médios do lagrangiano. A análise desse resultado indica que a força ponderomotriz arranja as partículas para alcançar velocidades próximas a velocidade de fase da onda, e que uma vez capturada, i.e, uma vez atingida a velocidade de fase, as partículas entram no regime acelerador.

No regime acelerador as partículas atingem a velocidade de fase da onda e são aceleradas a velocidades muito próximas a velocidade da luz. Graças a adiabaticidade do processo de aceleração fomos capazes de prever a velocidade máxima experimentada pela partícula e, com isso, modelamos o seu ganho de energia. Mostra-se que o ganho é otimizado quando as amplitudes do laser e do *Wiggler* têm o mesmo valor de amplitude.

Os resultados analisados nesse dissertação pode ser obtido com um campo de *wiggler* na ordem de  $B_w \sim 10$  Tesla. Escolhendo como comprimento de onda do *wiggler*

igual à  $\lambda_w \sim 10$  cm, é obtido a amplitude campo magnético usada nesta dissertação ( $A_w \sim 100$ ). Considerando a velocidade de fase dimensional ( $\frac{v_\phi}{c} = \sqrt{\alpha} = \frac{1}{1+k_w/k_l}$ ) com  $k_{l,w} \sim \frac{1}{\lambda_{l,w}}$  e tomando  $\alpha = 0.9$  teríamos  $\lambda_l \sim 0.5$  cm. Esse valor fica próxima ao comprimento de onda de lasers de infravermelho. Para valores mais altos de  $\alpha$  resultaria comprimentos de ondas de laser mais curto que também poderiam ser descrito pelo o formalismo estudado. Como usamos  $\sigma = 1000$  e com os comprimentos de onda já citado e após reverter para variáveis dimensionais estimamos que o comprimento necessário para que a interação entre a partícula e onda ocorra é de 5 m. Estes dados são apresentados resumidamente na Tabela 5.1.

$\alpha$	0.9
$B_w$	$\sim 10$ Tesla
$\lambda_w$	$\sim 10$ cm
$\lambda_l$	$\sim 0.5$ cm
Comprimento	$\sim 500$ cm

Tabela 5.1: Resumo dos parâmetros reais

Uma perspectiva futura ao trabalho é considerar os efeitos de perda radioativa. Pode ser considerado, também, os efeitos de curvatura transversal do *Wiggler*, pois no nosso modelo desconsideramos os efeitos de curvatura devido a presença de magnetos e correntes localizadas que os geram. Outra análise futura interessante é considerar a dinâmica autoconsistente entre a partícula e onda aceleradora.

# Referências Bibliográficas

- [1] TAJIMA, T.; DAWSON, J. Laser electron accelerator. *Physical Review Letters*, APS, v. 43, n. 4, p. 267, 1979.
- [2] MOUROU, G.; UMSTADTER, D. Development and applications of compact high-intensity lasers. *Physics of Fluids B: Plasma Physics*, AIP, v. 4, n. 7, p. 2315–2325, 1992.
- [3] KATSOULEAS, T.; DAWSON, J. Unlimited electron acceleration in laser-driven plasma waves. *Physical Review Letters*, APS, v. 51, n. 5, p. 392, 1983.
- [4] SHUKLA, P. K. et al. Relativistic nonlinear effects in plasmas. *Physics Reports*, Elsevier, v. 138, n. 1-2, p. 1–149, 1986.
- [5] TZOUFRAS, M. et al. Beam loading in the nonlinear regime of plasma-based acceleration. *Physical review letters*, APS, v. 101, n. 14, p. 145002, 2008.
- [6] MARINI, S. et al. Breakdown of the ponderomotive approximation as an acceleration mechanism in wave-particle nonlinear dynamics. *Physics of Plasmas*, AIP Publishing, v. 24, n. 9, p. 093113, 2017.
- [7] GREBOGI, C.; LITTLEJOHN, R. G. Relativistic ponderomotive hamiltonian. *The Physics of fluids*, AIP, v. 27, n. 8, p. 1996–2004, 1984.
- [8] BAUER, D.; MULSER, P.; STEEB, W.-H. Relativistic ponderomotive force, uphill acceleration, and transition to chaos. *Physical review letters*, APS, v. 75, n. 25, p. 4622, 1995.
- [9] MENDONÇA, J. T. *Theory of photon acceleration*. [S.l.]: CRC Press, 2000.
- [10] WU, C. S. Kinetic cyclotron and synchrotron maser instabilities: Radio emission processes by direct amplification of radiation. *Space Science Reviews*, v. 41, n. 3, p. 215–298, Aug 1985.

- [11] COURANT, E.; PELLEGRINI, C.; ZAKOWICZ, W. High-energy inverse free-electron laser accelerator. In: AIP. *AIP Conference Proceedings*. [S.l.], 1985. v. 127, n. 1, p. 849–874.
- [12] MONTEIRO, L. et al. Quantum fluid model of coherent stimulated radiation by a dense relativistic cold electron beam. *Physics of Plasmas*, AIP, v. 20, n. 7, p. 073101, 2013.
- [13] PETER, E.; RIZZATO, F.; ENDLER, A. Application of nonlinear models to estimate the gain of one-dimensional free-electron lasers. *Journal of Plasma Physics*, Cambridge University Press, v. 83, n. 3, 2017.
- [14] PETER, E. et al. Mixing and space-charge effects in free-electron lasers. *Physics of Plasmas*, AIP, v. 20, n. 12, p. 123104, 2013.
- [15] BROWN, G. et al. Wiggler and undulator magnets—a review. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research*, Elsevier, v. 208, n. 1-3, p. 65–77, 1983.
- [16] LANDAU, L. D. *The classical theory of fields*. [S.l.]: Elsevier, 2013. v. 2.
- [17] EVSTATIEV, E.; MORRISON, P.; HORTON, W. A relativistic beam-plasma system with electromagnetic waves. *Physics of plasmas*, AIP, v. 12, n. 7, p. 072108, 2005.
- [18] ALMANSA, I. et al. Uphill acceleration in a spatially modulated electrostatic field particle accelerator. *Physics of Plasmas*, AIP Publishing, v. 25, n. 11, p. 113107, 2018.
- [19] RUSSMAN, F. et al. Self focusing in a spatially modulated electrostatic field particle accelerator. *Physics of Plasmas*, AIP Publishing, v. 25, n. 2, p. 023110, 2018.
- [20] SHARMA, A. High energy electron and proton acceleration by circularly polarized laser pulse from near critical density hydrogen gas target. *Scientific reports*, Nature Publishing Group, v. 8, n. 1, p. 2191, 2018.
- [21] YANG, X.; BRUNETTI, E.; JAROSZYNSKI, D. A. High-energy coherent terahertz radiation emitted by wide-angle electron beams from a laser-wakefield accelerator. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 20, n. 4, p. 043046, 2018.

- [22] RUSSMAN, F. et al. Self focusing in a spatially modulated electrostatic field particle accelerator. v. 25, p. 023110, 02 2018.
- [23] MULSER, P.; BAUER, D. *High power laser-matter interaction*. [S.l.]: Springer, 2010. v. 238.
- [24] TOKMAN, M. Effect of the ponderomotive force of a relativistically strong wave field on charged particles. *Plasma Physics Reports*, v. 25, n. 2, p. 140–144, 1999.
- [25] MACCHI, A. *A Superintense Laser-Plasma Interaction Theory Primer*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.
- [26] GREBOGI, C.; LITTLEJOHN, R. G. Relativistic ponderomotive hamiltonian. *The Physics of fluids*, AIP, v. 27, n. 8, p. 1996–2004, 1984.
- [27] CARY, J. R.; KAUFMAN, A. N. Ponderomotive effects in collisionless plasma: A lie transform approach. *The Physics of Fluids*, AIP, v. 24, n. 7, p. 1238–1250, 1981.
- [28] GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. *Classical Mechanics*. Second edition. [S.l.]: Addison-Wesley, 1980. 638 p.
- [29] BURTON, D. A. et al. Observations on the ponderomotive force. In: SOCIETY OF PHOTO-OPTICAL INSTRUMENTATION ENGINEERS (SPIE). [S.l.], 2017.

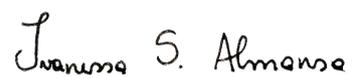
**Orientador:**

A handwritten signature in black ink, appearing to be 'F. Barbedo Rizzato', written over a horizontal line.

---

Prof. Dr. Felipe Barbedo Rizzato

**Aluna:**

A handwritten signature in black ink, appearing to be 'Ivanessa S. Almansa', written over a horizontal line.

---

Ivanessa da Silveira Almansa