

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

AVALIAÇÃO NUMÉRICA DE UM MODELO DE VISCOPLASTICIDADE COM
ENDURECIMENTO DEPENDENTE DA TAXA DE DEFORMAÇÃO

por

Andrey Brezolin

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, Dezembro de 2018

AValiação Numérica de um Modelo de Viscoplasticidade com
Endurecimento Dependente da Taxa de Deformação

por

Andrey Brezolin
Engenheiro mecânico

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Rossi

Aprovada por:

Prof. Dr. Tiago dos Santos DEM / UFSM

Prof. Dr. Ignacio Iturrioz PROMEC / UFRGS

Prof. Dr. Rogério José Marczak PROMEC / UFRGS

Prof. Dr. Fernando Marcelo Pereira
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 14 de Dezembro de 2018

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador, prof. Rodrigo Rossi, pela orientação, dedicação, confiança, pelos conhecimentos compartilhados e a sua disponibilidade durante todo o mestrado.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro.

Agradeço aos professores da comissão de avaliação por suas valiosas contribuições para o trabalho.

Por fim, agradeço a todos que contribuíram para essa dissertação.

RESUMO

Neste trabalho foi implementado e avaliado o modelo viscoplástico com endurecimento dependente da taxa de deformação proposto por dos Santos, 2016, sob deformações finitas utilizando o método dos elementos finitos. A implementação foi realizada com o uso das rotinas de usuário presentes no *software* comercial ABAQUS para a solução global pelos métodos implícito e explícito. Foram criadas rotinas para o problema tridimensional, axissimétrico, estado plano de deformações e estado plano de tensões. Cabe ressaltar que, esse último caso necessitou de uma atenção especial para a imposição das restrições do estado plano de tensões na formulação constitutiva. Para esse fim, foi utilizada a chamada teoria do estado plano de tensões projetado, e desse modo, foram reescritas todas as equações constitutivas. Expressões analíticas foram desenvolvidas para problemas simples, visando verificar todas as rotinas por meio da comparação entre os resultados numéricos obtidos pela implementação em relação as referidas expressões. Além disso, para problemas mais complexos, realizaram-se comparações com soluções de referência encontradas em publicações sobre o tema. Por fim, avaliou-se a resposta mecânica obtida em uma aplicação prática de engenharia, a qual trata-se do processo de conformação mecânica a altas velocidades. Nesse processo, segundo a bibliografia, elevadas taxas de deformação são desenvolvidas, motivando a utilização de modelos constitutivos viscoplásticos para a determinação do comportamento mecânico. Levando isso em consideração, a fim de evidenciar a influência da adoção do modelo constitutivo na resposta mecânica, foi realizada a comparação entre o modelo constitutivo adotado neste trabalho e o modelo de Johnson-Cook, o qual é tradicionalmente utilizado em avaliações do processo de conformação a altas velocidades. Apesar de ambos os modelos terem sido calibrados a partir de dados experimentais associados ao mesmo material, foram evidenciadas diferenças substanciais nas comparações. Essas diferenças não são somente em termos de deslocamentos, mas também em relação às tensões, deformações viscoplásticas e variáveis internas.

Palavras-chave: Elevadas taxas de deformação; Viscoplasticidade; Endurecimento dependente da taxa; Método dos elementos finitos.

ABSTRACT

In this work was implemented and evaluated the strain-rate hardening viscoplastic model proposed by dos Santos, 2016, following a finite strain framework using the finite element method. The implementation was performed using the user routines present in the commercial software ABAQUS for global solution by implicit and explicit methods. The routines were created for the three-dimensional, axisymmetric, plane strain state and plane stress state problems. It should be noted that, the latter case required special attention to the imposition of stress state constraints on constitutive formulation. For this purpose, the so-called projected stress state theory was used, and in this way, all the constitutive equations were rewritten. Analytical expressions were developed for simple problems, aiming to verify all the routines by comparing the numerical results obtained by the implementation in relation to mentioned expressions. Moreover, for more complex problems, comparisons were made in relation the reference solutions found in publications on the theme. Finally, the mechanical response obtained in a practical engineering application, which is a high-speed forming process, was evaluated. According to the literature, in this process, high strain-rates are developed, motivating the use of constitutive viscoplastic models to determine the mechanical behavior. Taking this into consideration, in order to evidence the influence of the adopted constitutive model on the overall mechanical response, a comparison was made between the constitutive model adopted in this work and the Johnson-Cook model, which is traditionally used in high-speed forming process assessments. Although both models were calibrated considering the experimental data associated with the same material, substantial differences were observed in the comparisons. These differences are not only in terms of displacements but also in relation to stress, viscoplastic strain and internal variables.

Keywords: High strain-rate; Viscoplasticity; Strain-rate hardening; Finite element method.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Objetivos	4
1.2	Viscoplasticidade: uma introdução	4
1.3	Organização do Trabalho	7
2	ELASTO-VISCOPLASTICIDADE EM DEFORMAÇÕES FINITAS	9
2.1	Fundamentos da mecânica do contínuo	9
2.1.1	Cinemática e deformação	9
2.2	Modelos constitutivos baseados em potenciais hiperelásticos	11
2.2.1	Decomposição multiplicativa do gradiente de deformação	11
2.2.2	Deformação logarítmica	14
2.3	Descrição do constitutivo modelo adotado	14
2.3.1	Função de escoamento	18
2.3.2	Regra de fluxo e evolução inelástica	18
2.3.3	Função de sobretensão	22
2.3.4	Determinação dos parâmetros do modelo adotado	22
2.4	Particularização para o estado plano de tensões	23
2.4.1	Equações no estado plano de tensões projetado	25
2.4.2	Função de escoamento e evolução inelástica para o estado plano de tensões	27
3	ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO GLOBAL	30
3.1	Equações de equilíbrio	30
3.2	Princípio das potências virtuais	31
3.3	Determinação do problema incremental	32
3.4	Análise estática: Estratégia de solução implícita	32
3.4.1	Linearização	33
3.4.2	O método de <i>Newton-Raphson</i>	35
3.5	Análise dinâmica: Estratégia de solução explícita	36

4	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	39
4.1	Resolvendo o problema constitutivo para o modelo tridimensional	39
4.1.1	Algoritmo de predição elástica e correção viscoplástica	41
4.1.2	Determinação do módulo consistente tangente	48
4.2	Resolvendo o problema constitutivo para o modelo no estado plano de tensões	51
4.2.1	Algoritmo preditor elástico - corretor viscoplástico no estado plano de tensões	52
4.2.2	Operador consistente tangente viscoplástico para o estado plano de tensões	56
4.3	Implementação da rotina de material no <i>software</i> ABAQUS	58
5	VERIFICAÇÃO DA IMPLEMENTAÇÃO	61
5.1	Determinação das expressões analíticas e semi-analíticas	61
5.1.1	Compressão unidimensional – Casos: tridimensional, estado plano de tensões e axissimétrico	62
5.1.2	Compressão unidimensional – Caso: estado plano de deformações	65
5.1.3	Cisalhamento simples	68
5.1.4	Extensão biaxial com rotação finita – Casos: tridimensional e estado plano de tensões	71
5.2	Solução dos problemas numéricos de verificação	74
5.2.1	Problemas de verificação com resposta analítica	75
5.2.2	Problemas de verificação por meio de comparações com outras publicações	83
6	PROCESSO DE CONFORMAÇÃO A ALTAS VELOCIDADES	92
6.1	O estado da arte no processo de conformação eletromagnética	92
6.2	O modelo constitutivo de Johnson-Cook	93
6.3	Avaliação numérica	95
6.3.1	Compressão de tubo a altas velocidades	95
6.3.2	Conformação de chapas finas em altas velocidades	100
7	CONCLUSÕES	104
7.1	Sugestões para trabalho futuros	106
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	106

APÊNDICE A	Método de <i>Newton-Raphson</i>	113
APÊNDICE B	Derivadas do modelo tridimensional	115
APÊNDICE C	Operador tangente consistente para o problema tridimensional	118
APÊNDICE D	Derivadas para o estado plano de tensões	121
APÊNDICE E	Operador consistente tangente para o estado plano de tensões	124
APÊNDICE F	Processo de estabilização da tensão	127

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Avaliações de problemas de engenharia com resposta viscoplástica: (a) usinagem em altas velocidades, (b) conformação mecânica em altas velocidades, (c) testes de impacto, (d) testes balísticos, (e) aplicações aeroespaciais, (f) aplicações navais e (g) no segmento óleo e gás. [Adaptado das obras citadas anteriormente]	1
Figura 1.2	Representação esquemática da resposta viscoplástica por meio de carregamentos unidimensionais para uma determinada amostra de material: (a) influência da taxa de deformação na resposta da tensão; (b) fenômeno de fluência; (c) relaxação da tensão e (d) mudança da sensibilidade da tensão a um valor crítico de taxa de deformação. [Adaptado de de Souza Neto et al., 2008 e dos Santos, 2016]	5
Figura 1.3	Representação esquemática da resposta viscoplástica: dependência da história da taxa de deformação: (a) e (b) tensão em relação a deformação; (c) e (d) são as histórias da taxa de deformação. Linhas pontilhadas em (a) e (b) são as respostas de tensão monotônica com taxa constante. [Adaptado de dos Santos, 2016]	7
Figura 2.1	Representação esquemática das configurações do corpo.	9
Figura 2.2	Decomposição multiplicativa do gradiente de deformação.	12
Figura 3.1	Corpo em equilíbrio no \mathbb{R}^3 no instante t	30
Figura 4.1	Interpretações geométricas referente as decomposições do gradiente de deformação entre o instante inicial, o instante n e o instante $n + 1$. [Adaptado de Bonet e Wood, 1997]	48
Figura 4.2	Fluxograma – Iteração entre ABAQUS e rotina de usuário UMAT.	59
Figura 4.3	Fluxograma – Iteração entre ABAQUS e rotina de usuário VUMAT.	60

Figura 5.1	Compressão unidimensional: (a) representação esquemática e condições de contorno para a compressão homogênea e (b) deformação em relação ao tempo.	63
Figura 5.2	Cisalhamento simples: (a) representação esquemática e condições de contorno para o cisalhamento simples e (b) deslocamento v em relação ao tempo.	68
Figura 5.3	Extensão biaxial com rotação finita: (a) representação esquemática e condições de contorno e (b) deslocamento ϖ em relação ao tempo.	71
Figura 5.4	Dimensões e condições de contorno para o compressão simples. . .	76
Figura 5.5	Compressão homogênea para os casos tridimensional, EPT e axissimétrico – Comparação com o resultado analítico: (a) tensão-deformação e (b) endurecimento-deformação viscoplástica acumulada.	77
Figura 5.6	Compressão homogênea para o EPD – Comparação com o resultado semi-analítico: (a) tensão-deformação e (b) endurecimento-deformação viscoplástica acumulada.	78
Figura 5.7	Dimensões e condições de contorno para o cisalhamento simples. . .	79
Figura 5.8	Cisalhamento simples para o estado tridimensional, EPT e EPD – Comparação com o resultado semi-analítico: (a) tensão-deformação e (b) endurecimento-deformação viscoplástica acumulada.	80
Figura 5.9	Dimensões e condições de contorno para o problema de alongamento biaxial em conjunto com a rotação finita.	81
Figura 5.10	Extensão biaxial e rotação para o estado tridimensional e EPT – Comparação com o resultado analítico: (a) tensão-deformação e (b) endurecimento-deformação viscoplástica acumulada.	82
Figura 5.11	Placa perfurada no EPT: representação esquemática das dimensões, discretização e condições de contorno. [Adaptado de Perić, 1993]	84

Figura 5.12	Placa perfurada no EPT: comparação entre a implementação e os resultados de referência para a força-deslocamento utilizando diferentes taxas de carregamento $^{2v_0/l_0}$ e $m = 1$	85
Figura 5.13	Placa perfurada no EPT: comparação entre a implementação e os resultados de referência para a força-deslocamento utilizando diferentes taxas de carregamento $^{2v_0/l_0}$ e $m = 10$	86
Figura 5.14	Placa perfurada no EPT: comparação entre a implementação e os resultados de referência para a força-deslocamento utilizando diferentes taxas de carregamento $^{2v_0/l_0}$ e $m = 100$	86
Figura 5.15	Placa perfurada no EPT: contornos de deformação viscoplástica acumulada – Taxas de carregamento: (a), (b) e (c) $0,555 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$; (d) $0,555 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$; (e) e (f) $0,555 \times 10^2 \text{ s}^{-1}$	87
Figura 5.16	Placa perfurada no no EPD: representação esquemática das dimensões, discretização e condições de contorno. [Adaptado de Alfano et al., 2001]	88
Figura 5.17	Placa perfurada no EPD: comparação força-deslocamento entre os resultados de Alfano et al., 2001 e o presente trabalho para o modelo de Perić com $m = 2$ para diferentes valores de $\vartheta/\Delta t$	89
Figura 5.18	Placa perfurada no EPD: comparação força-deslocamento entre os resultados de Alfano et al., 2001 e o presente trabalho para o modelo de Perić com $m = 5$ para diferentes valores de $\vartheta/\Delta t$	89
Figura 5.19	Placa perfurada no EPD: contornos de deformação viscoplástica acumulada para $m = 2$	90
Figura 5.20	Placa perfurada no EPD: comparação força-deslocamento entre os resultados de Alfano et al., 2001 e o presente trabalho para o modelo de Perić com $\vartheta/\Delta t = 10^2$ e diferentes valores de m	90
Figura 5.21	Placa perfurada no EPD: comparação força-deslocamento entre os resultados de Alfano et al., 2001 e o presente trabalho para o modelo de Perić com $\vartheta/\Delta t = 10^4$ e diferentes valores de m	91

Figura 5.22	Placa perfurada no EPD: contornos de deformação viscoplástica acumulada para $\vartheta/\Delta t = 10^2$	91
Figura 6.1	Diferentes configurações do processo de CEM. [Adaptado de Harvey e Brower, 1958]	93
Figura 6.2	Superfícies de tensão em termos da deformação viscoplástica acumulada e da taxa de deformação para os modelos: (a) Johnson-Cook e (b) dos Santos.	94
Figura 6.3	Compressão de tubo a altas velocidades: geometria, discretização por elementos finitos e condições de contorno para o processo de compressão eletromagnética para a simulação no ABAQUS/Explícito.	96
Figura 6.4	Processo de compressão de tubo: perfil da corrente de descarga para $U = 1500\text{J}$. [Adaptado de Geier et al., 2014]	97
Figura 6.5	Compressão de tubo a altas velocidades – Configuração final para ambos os modelos: (a) geometria deformada e (b) razão de variação da espessura ao longo do comprimento do tubo.	98
Figura 6.6	Compressão de tubo a altas velocidades: tensão de <i>von Mises</i> e deformação viscoplástica acumulada em vários estágios do processo de CEM para o modelo axissimétrico.	99
Figura 6.7	Compressão de tubo a altas velocidades – Tensão após o processo de estabilização ao longo da seção transversal da parede deformada do tubo: (a) direção radial, (b) direção circunferencial e (c) direção axial.	99
Figura 6.8	Processo de conformação de chapas finas em altas velocidades: modelo geométrico, discretização por elementos finitos e condições de contorno para o processo de CEM de chapas finas para simulação no ABAQUS/Explícito.	100

Figura 6.9	Processo de conformação de chapas finas em altas velocidades – Perfil de pressão eletromagnética para o máximo valor de corrente de descarga no tempo $6,5 \mu\text{s}$ para $U=1500 \text{ J}$. Os círculos são valores de pressão eletromagnética computados por método presente em Paese et al., 2019 e a linha sólida é o ajuste de dados, encontrado usando a Equação 6.3 . [Adaptado de Paese et al., 2019]	101
Figura 6.10	Processo de conformação de chapas finas em altas velocidades: tensão de <i>von Mises</i> e deformação viscoplástica acumulada em vários estágios do processo de CEM para o modelo axissimétrico.	102
Figura 6.11	Processo de conformação de chapas finas em altas velocidades: razão de variação da espessura da chapa em relação a distância radial normalizada.	103
Figura 6.12	Processo de conformação de chapas finas em altas velocidades: tensões após a estabilização da tensão através da espessura a partir da superfície superior na região central da peça conformada; (a) direção radial, (b) direção circunferencial e (c) direção axial.	103
Figura A.1	Método de <i>Newton-Raphson</i> para a solução de um sistema de equações não lineares.	114
Figura F.1	Comparação de resultados da estabilização da tensão com a aplicação do amortecimento artificial. Durante o período (a) ocorre a aplicação do pulso magnético e a conformação do componente pela inércia, e o período (b) é apenas uma fase de estabilização da tensão por meio da elevação dos parâmetros de <i>bulk viscosity</i>	128

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1	Resumo estado elástico de teste	43
Tabela 4.2	Resumo do estado corretor viscoplástico para o modelo tridi- mensional.	47
Tabela 4.3	Resumo do estado corretor viscoplástico para o EPT.	56
Tabela 5.1	Parâmetros de material para o alumínio recozido AA1050, com $\dot{\epsilon}_{lwr} = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ e $\dot{\epsilon}_{up} = 1,5 \times 10^4 \text{ s}^{-1}$. [Fonte: dos Santos, 2016] . .	75
Tabela 5.2	Dados utilizados para a simulação de compressão simples.	76
Tabela 5.3	Dados utilizados para a simulação de cisalhamento simples.	79
Tabela 5.4	Dados utilizados para a simulação da extensão biaxial e rota- ção finita.	81
Tabela 6.1	Parâmetros ajustados a partir dos dados do trabalho de dos Santos, 2016, para o modelo isotérmico de Johnson–Cook. [Fonte: Paese et al., 2019]	94

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

EPD	Estado Plano de Deformações
EPT	Estado Plano de Tensões
MEF	Método dos Elementos Finitos
CEM	Conformação EletroMagnética
CFC	Cúbico de Face Centrada

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Latinos

a	Constante modelo analítico
A	Variável endurecimento isotrópico, Pa
A_1	Variável relacionada ao endurecimento isotrópico, Pa
A_2	Variável relacionada ao endurecimento isotrópico, Pa
A_∞	Parâmetro relacionado a saturação do endurecimento, Pa
A_∞^{up}	Referência superior do parâmetro A_∞ , Pa
A_∞^{lwr}	Referência inferior do parâmetro A_∞ , Pa
\bar{A}_∞	Valor efetivo referente a história da taxa de deformação do A_∞ , Pa
\mathbf{b}	Vetor com a força de corpo na configuração corrente, N/m ³
\mathbf{B}	Tensor de <i>Green</i> à esquerda, m/m
c	Parâmetro linear do endurecimento
c_p	Fator de concentração de campo eletromagnético
\mathbf{C}	Tensor de <i>Green</i> à direita, m/m
d	Profundidade da geometria deformada, m
d_0	Profundidade da geometria indeformada, m
$d\mathbf{x}$	Segmento infinitesimal na configuração corrente
$d\mathbf{X}$	Segmento infinitesimal na configuração de referência
\mathbf{D}	Tensor taxa de deformação, 1/s
$\tilde{\mathbf{D}}$	Tensor taxa de deformação rotacionado, 1/s
$\delta\mathbf{D}$	Tensor taxa de deformação virtual, 1/s
$\tilde{\mathbf{D}}_{ps}$	Tensor taxa de deformação rotacionado para o EPT, 1/s
$\bar{\mathbf{D}}$	Tensor taxa de deformação na configuração intermediária, 1/s
\mathbb{D}_{ps}^e	Tensor constitutivo elástico aplicado ao EPT, Pa
\mathbf{e}	Tensor de deformação elástico, m/m
\mathbf{e}	Vetor contendo as deformações elásticas no EPT, m/m
esp	Espessura da geometria deformada, m
esp_0	Espessura da geometria indeformada, m
E	Módulo de elasticidade, Pa
e_{tol}	Tolerância para o método de <i>Newton-Raphson</i>

$f(\boldsymbol{\tau}, A)$	Função de escoamento, Pa
$f_{ps}(\boldsymbol{\tau}, A)$	Função de escoamento para o EPT, Pa
\tilde{f}_{ps}	Função relacionada à função de escoamento para o EPT, Pa
\mathbf{f}^{int}	Vetor de forças nodais internas global, N
\mathbf{f}^{ext}	Vetor de forças nodais externas global, N
\mathbf{F}	Gradiente de deformação, m/m
$\delta\mathbf{F}$	Gradiente de deformação virtual, m/m
\mathbf{F}_u	Decomposição da deformação - configuração de deformação, m/m
h_1	Parâmetro dependente da taxa de deformação relacionado a ϕ_1
h_2	Parâmetro dependente da taxa de deformação relacionado a ϕ_2
H_1	Taxa de endurecimento associado a A_1 , 1/s
H_2	Taxa de endurecimento associado a A_2 , 1/s
\bar{H}	Módulo de endurecimento relacionado com a variável α_1 , Pa
\tilde{H}	Módulo de endurecimento relacionado com a variável α_2 , Pa
\mathbf{H}	Matriz que relaciona a tensão de teste com a tensão em $n + 1$, Pa
i	Número de iterações do método de <i>Newton-Raphson</i>
I	Corrente de descarga, A
\mathbf{I}	Tensor identidade de segunda ordem
\mathbb{I}	Tensor identidade de quarta ordem
J	Jacobiano da deformação, m ³ /m ³
k_A	Tensão de escoamento pra o modelo de Johnson-Cook, Pa
k_B	Variável que representa o efeito da taxa no modelo Johnson-Cook, Pa
k_C	Parâmetro material do modelo de Johnson-Cook
k_n	Variável que representa o efeito da taxa no modelo Johnson-Cook
k_{1i}	Coefficiente pressão eletromagnética
k_{2i}	Coefficiente pressão eletromagnética
k_{3i}	Coefficiente pressão eletromagnética
K	Taxa de deformação, s ⁻¹
l	Altura da geometria deformada, m
l_0	Altura da geometria indeformada, m
l_a	Comprimento da bobina, m
\mathbf{l}	Autovetor das direções principais de deformação

L	Gradiente espacial de velocidades, 1/s
$\delta\mathbf{L}$	Gradiente espacial de velocidades virtuais, 1/s
$\bar{\mathbf{L}}$	Gradiente de velocidades na configuração intermediária, 1/s
m	Parâmetro de sensibilidade a taxa
M	Matriz de massa, Kg
\mathbf{n}	Vetor unitário normal a superfície
n	Número de incrementos
n_e	Número de enrolamentos da bobina
\mathbf{N}_τ	Derivada de função de escoamento f em relação a τ
N_A	Derivada de função de escoamento f em relação a A
p	Pressão eletromagnética, Pa
P	Mapeamento de projeção para o estado plano
$\bar{\mathbf{P}}$	Mapeamento de projeção para o estado plano modificado
P	Primeira tensão de <i>Piola-Kirchhoff</i> , Pa
Q	Matriz ortogonal
$\bar{\mathbf{q}}$	Vetor fluxo de calor, J/(s · m ²)
r	Coordenada radial, m
r_i	Raio interno, m
r_o	Raio externo, m
s	Entropia interna específica, J/(Kg·K)
$R(A)$	Raio da superfície de escoamento, Pa
R	Tensor de rotação
\mathbb{R}^n	Espaço Euclidiano de ordem n
t	Tempo em dado instante, s
Δt_c	Incremento de tempo crítico, s
\mathbf{t}	Vetor tração na configuração corrente, N/m ²
\mathbf{u}	Vetor de deslocamentos, m
$\bar{\mathbf{u}}$	Vetor de deslocamentos prescritos, m
U	Energia, J
U	Tensor de alongamento à direita, m/m
\mathbf{v}	Vetor de velocidades, m/s
$\bar{\mathbf{v}}$	Vetor de velocidades prescritas, m/s

$\delta \mathbf{v}$	Campo de velocidades virtuais m/s
\mathbf{V}	Tensor de alongamento à esquerda, m/m
w	Largura da geometria deformada, m
w_0	Largura da geometria indeformada, m
\mathbf{W}	Tensor de rotação, 1/s
$\overline{\mathbf{W}}$	Tensor de rotação na configuração intermediária, 1/s
\mathbf{x}	Coordenadas espaciais, m
\mathbf{X}	Coordenadas materiais, m

Símbolos Gregos

α_1	Variável interna relacionada ao endurecimento, m/m
α_2	Variável interna relacionada ao endurecimento, m/m
α_∞	Parâmetro de saturação relacionado com α_1
$\boldsymbol{\alpha}$	Conjunto das variáveis internas, m/m
$\beta_i(\dot{\epsilon})$	Parâmetro dependente da taxa relacionado com δ e A_∞
$\gamma(\Delta\bar{\lambda})$	Função para o EPT, Pa
Γ	Contorno do domínio do corpo na configuração corrente
Γ^0	Contorno do domínio do corpo na configuração de referência
Γ^v	Superfície com condição de contorno essencial na configuração corrente
Γ^t	Superfície com condição de contorno natural na configuração corrente
δ	Parâmetro relacionado ao endurecimento não linear dependente da taxa
δ_{ij}	Delta de Kronecker
δ^{up}	Referência superior do parâmetro δ
δ^{lwr}	Referência inferior do parâmetro δ
ϵ	Deformação viscoplástica acumulada, m/m
ϵ_0	Deformação viscoplástica de referência modelo de Johnson-Cook, m/m
$\dot{\epsilon}_{lwr}$	Referência inferior da taxa de deformação, 1/s
$\dot{\epsilon}_{up}$	Referência superior da taxa de deformação, 1/s
ζ	Variável auxiliar do operador tangente
η	Variável auxiliar do operador tangente
θ	Temperatura absoluta, K
θ_m	Temperatura de fusão modelo Johnson-Cook, K
θ_0	Temperatura de referência modelo Johnson-Cook, K

$\Theta(\langle f \rangle, A)$	Função de sobretensão
$\Theta^{-1}(\dot{\lambda}, A)$	Inverso da função de sobretensão
$\bar{\Theta}^{-1}(\dot{\lambda}, A)$	Versão algorítmica do inverso da função de sobretensão
ϑ	Parâmetro de viscosidade relacionado ao modelo de Peric, s
ϑ_1	Parâmetro de viscosidade relacionado ao modelo de Peric modificado, s
ϑ_2	Parâmetro de viscosidade relacionado ao modelo de Peric modificado, s
κ	Módulo de compressibilidade, Pa
$\dot{\lambda}$	Multiplicador viscoplástico, m/m
$\dot{\bar{\lambda}}$	Multiplicador viscoplástico modificado para o EPT, m/m
$\Delta\lambda$	Multiplicador viscoplástico incremental, m/m
$\Delta\bar{\lambda}$	Multiplicador viscoplástico incremental para o EPT, m/m
Λ	Variável auxiliar do operador tangente
Λ	Autovalor de \mathbf{V}^e , m/m
μ	Módulo de cisalhamento, Pa
μ_{mag}	Permeabilidade magnética
ν	Coefficiente de <i>Poisson</i>
ξ_i	Parâmetro da função $\beta_i(\dot{\epsilon})$
$O(\cdot)$	Vizinhança do ponto (\cdot)
ϖ	Comprimento relacionado ao modelo analítico, m
ϱ	Ângulo relacionado ao modelo analítico, rad
ρ	Massa específica na configuração corrente, kg/m ³
ρ_0	Massa específica na configuração de referência, kg/m ³
σ	Tensão de <i>Cauchy</i> , Pa
σ	Vetor contendo a tensão de <i>Cauchy</i> no EPT, Pa
σ_y	Primeira tensão de escoamento, Pa
τ	Tensões de <i>Kirchhoff</i> , Pa
τ	Vetor com tensões de <i>Kirchhoff</i> restrita ao estado plano, Pa
v	Comprimento relacionado ao modelo analítico, m
ϕ	Potencial de fluxo, Pa
φ	Função mapeamento entre configuração de referência e corrente
χ	Variável auxiliar do operador tangente
ψ	Energia livre específica de <i>Helmholtz</i> por unidade de volume, J/kg

ω_1	Variável auxiliar do operador tangente
ω_2	Variável auxiliar do operador tangente
$\bar{\omega}$	Variável auxiliar do operador tangente
Ω	Domínio do corpo na configuração corrente
Ω^0	Domínio do corpo na configuração de referência

Espaços e conjuntos

\mathcal{S}	Espaço vetorial simétrico de segunda ordem
\mathcal{S}_P	Subespaço vetorial simétrico restrito ao estado plano
\mathcal{S}_D	Subespaço vetorial simétrico restrito ao desviador no estado plano
\mathcal{K}	Espaço das velocidades cinematicamente admissíveis
\mathcal{V}	Espaço das velocidades virtuais
\mathcal{G}	Conjunto domínio elástico, Pa
\mathcal{Y}	Contorno do domínio elástico, Pa

Tensores de quarta ordem

\mathbb{B}_{n+1}	Termo dependente da resposta geométrica em $\bar{\mathbb{M}}_{n+1}$, m/m
\mathbb{D}_{n+1}	Termo dependente da resposta do material em $\bar{\mathbb{M}}_{n+1}$, Pa
\mathbb{D}^e	Módulo hiperelástico, Pa
\mathbb{M}	Módulo tangente na configuração de referência, Pa
$\bar{\mathbb{M}}$	Módulo tangente contínuo na configuração corrente, Pa
$\bar{\mathbb{M}}_{n+1}$	Módulo tangente consistente na configuração corrente, Pa
\mathbb{L}_{n+1}	Termo dependente da resposta geométrica em $\bar{\mathbb{M}}_{n+1}$, m/m

Funcionais

$\delta\mathcal{P}(\mathbf{v}, \delta\mathbf{v})$	Funcional potência virtual total, J
$\delta\mathcal{P}_{int}(\mathbf{v}, \delta\mathbf{v})$	Funcional potência virtual interna, J
$\delta\mathcal{P}_{ext}(\mathbf{v}, \delta\mathbf{v})$	Funcional potência virtual externa, J
$\delta\mathcal{P}_{ine}(\mathbf{v}, \delta\mathbf{v})$	Funcional potência virtual inercial, J

Operadores matemáticos

$\text{sym}(\cdot)$	Parte simétrica de (\cdot)
$\text{skew}(\cdot)$	Parte antissimétrica de (\cdot)
$\text{tr}(\cdot)$	Traço da matriz (\cdot)
$\ln(\cdot)$	Logaritmo natural de (\cdot)
$\ (\cdot)\ $	Norma Euclidiana de (\cdot)

$\langle(\cdot)\rangle$	Operador de <i>Macaulay</i> , $\langle(\cdot)\rangle = 1/2((\cdot) + (\cdot))$
$\exp(\cdot)$	Exponencial de (\cdot)
$\operatorname{div}_{\mathbf{x}}(\cdot)$	Divergente de (\cdot)
$ (\cdot) $	Valor absoluto de (\cdot)
$\det(\cdot)$	Determinante de (\cdot)
$\dot{(\cdot)}$	Derivada temporal de (\cdot)
$\ddot{(\cdot)}$	Derivada temporal segunda de (\cdot)
$(\cdot)^{-1}$	Inverso de (\cdot)
$\nabla_{\mathbf{x}}(\cdot)$	Operador gradiente espacial, 1/m
$\nabla_{\mathbf{X}}(\cdot)$	Operador gradiente material, 1/m
$\Delta(\cdot)$	Incremento de (\cdot)

Subscritos e sobrescritos

$(\cdot)^T$	Transposto de (\cdot)
$(\cdot)^k$	Valor de (\cdot) na iteração k
$(\cdot)^{k+1}$	Valor de (\cdot) na iteração $k + 1$
$(\cdot)_{\infty}$	Valor de saturação da variável (\cdot)
$(\cdot)^{\text{teste}}$	Valor de teste de (\cdot)
$(\cdot)_i$	Valor inicial de (\cdot)
$(\cdot)_f$	Valor final de (\cdot)
$(\cdot)^V$	Parte volumétrica de (\cdot)
$(\cdot)^D$	Parte desviadora de (\cdot)
$(\cdot)^e$	Parte elástica de (\cdot)
$(\cdot)^{vp}$	Parte viscoplástica de (\cdot)
$(\cdot)_{n+1}$	Incremento $n + 1$ de (\cdot)
$(\cdot)_n$	Incremento n de (\cdot)
$(\cdot)^*$	Representação diagonal de (\cdot)
$(\cdot)_{\max}$	Valor máximo de (\cdot)
$(\cdot)_{\text{total}}$	Valor total de (\cdot)

1 INTRODUÇÃO

No âmbito da engenharia muitos avanços são alcançados por meio da previsão de comportamentos e consequências devido a ocorrência de determinados fenômenos físicos. Nesse contexto, especificamente no campo da modelagem constitutiva da viscoplasticidade em metais, a compreensão do comportamento do material perante uma solicitação mecânica, de uma maneira precisa, rápida e racional é de extrema importância perante muitas aplicações práticas de engenharia.

A viscoplasticidade está associada, principalmente, a aplicações onde ocorrem o desenvolvimento de elevadas taxas de deformação. Entre inúmeras aplicações nos campos científicos e tecnológicos, conforme apresentado pela Figura 1.1, podem ser citadas as mais diversas análises das operações de manufatura: como a usinagem de metais [Mabrouki et al., 2008] e a conformação mecânica em altas velocidades [Oliveira et al., 2005], testes de impacto em estruturas automotivas [Dietenberger et al., 2005], os testes balísticos na área militar e de segurança [Klepaczko et al., 2009], aplicações no segmento aeroespacial [Liu et al., 2015], na área naval [Yu e Amdahl, 2018] e no segmento óleo e gás [Kristoffersen et al., 2013].

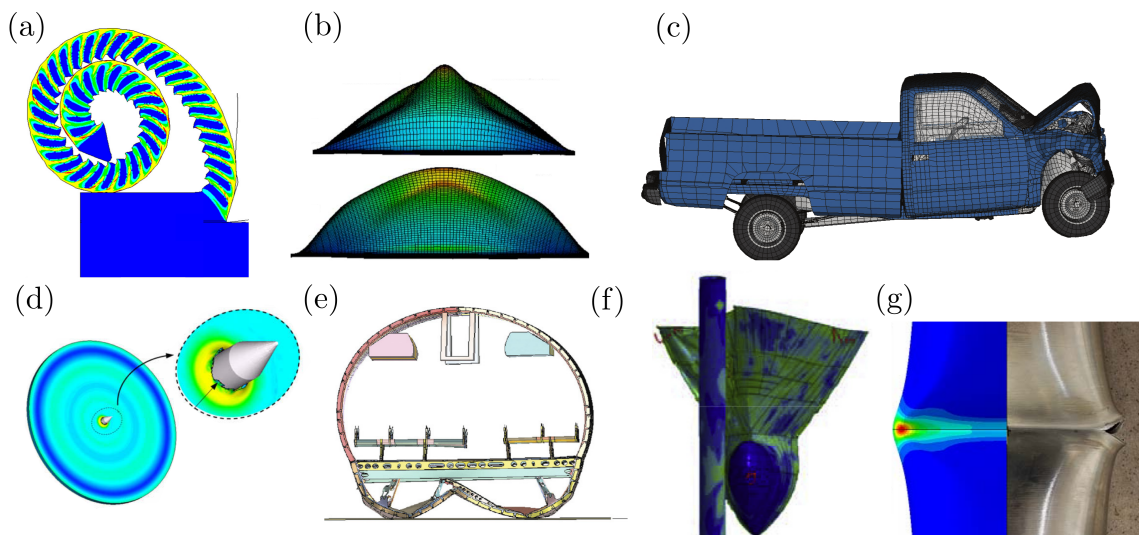


Figura 1.1 – Avaliações de problemas de engenharia com resposta viscoplástica: (a) usinagem em altas velocidades, (b) conformação mecânica em altas velocidades, (c) testes de impacto, (d) testes balísticos, (e) aplicações aeroespaciais, (f) aplicações navais e (g) no segmento óleo e gás. [Adaptado das obras citadas anteriormente]

Com base nisso, existem diversos modelos constitutivos viscoplásticos propostos na literatura. Alguns deles levam em conta somente os efeitos instantâneos da taxa de deformação, mantendo a evolução do endurecimento (isotrópico) somente em termos da deformação viscoplástica, como Perzyna, 1966, 1971 e Perić, 1993. Enquanto outros são formulados por meio de evidência empírica, sendo esses simples, de fácil implementação e solução, como é o caso do modelo de Johnson e Cook, 1983. Também existem os modelos de base física, como o modelo *Mechanical Threshold Stress* de Follansbee e Kocks, 1988. Tais modelos apresentam uma melhor descrição dos efeitos devido as altas taxas de deformação, em relação aos modelos empíricos, como o de Johnson e Cook, 1983, [Tanner et al., 1999; Xu e Huang, 2015]. Entretanto os mesmos requerem algoritmos de otimização complexos e elevado esforço computacional para encontrar os parâmetros associados ao modelo [Gao e Zhang, 2012].

Nesse contexto, também existem os modelos chamados semi-físicos, os quais seguem uma abordagem fenomenológica, sendo esses mais simples que os modelos de base física e dependendo da formulação podem capturar importantes efeitos. Como é o caso do modelo constitutivo viscoplástico proposto por dos Santos, 2016, o qual é adotado neste trabalho. Este modelo possui as características de capturar a sensibilidade instantânea em relação à taxa de deformação e tem a evolução do endurecimento guiada pela deformação viscoplástica e também pela taxa de deformação. Um outro exemplo de modelo com endurecimento dependente da taxa pode ser visto nos trabalhos de Molinari e Ravichandran, 2005.

Neste trabalho o modelo constitutivo viscoplástico adotado, foi implementado no *software* comercial de elementos finitos ABAQUS por meio das chamadas rotinas de usuário. A motivação da incorporação do modelo constitutivo em um *software* comercial foi devido à robustez, versatilidade, praticidade e ampla biblioteca de elementos que esse recurso possibilita. Visando desenvolver diferentes análises, foram criadas rotinas para a resposta do material no estado tridimensional, e também para os casos especiais, como: estado axissimétrico, o estado plano de deformações (EPD), o estado plano de tensões (EPT). Com exceção ao EPT, todos os outros estados são facilmente obtidos a partir do caso tridimensional. Já para o caso EPT, para a imposição das restrições associadas ao mesmo, todas as equações constitutivas foram reescritas por meio da chamada teoria da projeção de tensão.

As rotinas desenvolvidas neste trabalho foram verificadas, de modo a assegurar a correta implementação e conseqüentemente a obtenção da resposta constitutiva esperada. Com esse propósito, foram desenvolvidas formulações analíticas para problemas simples, que serviram para a realização de comparações com os resultados numéricos. Casos mais complexos foram avaliados por meio de comparações entre os resultados numéricos da implementação em relação as soluções de referência encontradas na literatura.

Com o interesse de avaliar a resposta do modelo constitutivo frente a uma aplicação prática de engenharia, neste trabalho foi explorado o modelamento do processo de conformação mecânica a altas velocidades. Estes processos vem ganhando muita atenção das indústrias ao redor do mundo nas últimas décadas, conforme Kamal e Daehn, 2006, estes envolvem velocidades que excedem 200 m/s, podem desenvolver elevadas taxas de deformação, superiores à 10^4 s^{-1} . Conforme Gayakwad et al., 2014, engenheiros têm desenvolvido uma série de novos produtos, superando algumas questões técnicas relacionadas aos tradicionais processos de conformação. Entre alguns dos processos de conformação a altas velocidades, destacam-se a conformação por explosão, a conformação eletro-hidráulica e a Conformação EletroMagnética (CEM). Segundo Psyk et al., 2011, esse último é o qual aparenta ser o mais atrativo ao nível de larga escala de produção, pois é um processo limpo, em que não existe contato físico entre a ferramenta e a peça a ser conformada, além de ser o mais fácil de ser controlado e de apresentar repetibilidade.

Um compreensivo e racional entendimento do processo de conformação a altas velocidades é uma tarefa complexa, pois envolve fenômenos multifísicos acoplados, como os fenômenos elétricos, magnéticos, mecânicos e por vezes transferência de calor, contato e impacto. Focando a atenção no comportamento mecânico do material, o principal problema no processo de CEM é a previsão dos efeitos decorrentes da taxa de deformação na resposta mecânica do material na peça conformada, por meio de modelos relativamente simples. Perante esse cenário, neste trabalho o processo de CEM foi avaliado a partir de comparações entre os resultados numéricos obtidos pela utilização do modelo de dos Santos, 2016, e o modelo de Johnson e Cook, 1983, o qual é o usualmente empregado nas avaliações do processo de conformação a altas velocidades [Karch e Roll, 2005; Siddiqui, 2009; Haratmeh et al., 2017; Paese et al., 2019]. Neste trabalho foram examinadas duas aplicações do processo CEM: a compressão de tubo e a conformação de chapa fina. Ambos os modelos foram calibrados por meio de dados experimentais para o alumínio AA1050.

1.1 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é:

- Avaliação do modelo constitutivo viscoplástico com o endurecimento dependente da taxa de deformação proposto por dos Santos, 2016, sob deformações finitas.

Visando atender o objetivo principal, os objetivos específicos propostos são:

- Formar uma base consistente sobre os aspectos fundamentais ligados ao modelo constitutivo, bem como a sua implementação no *software* comercial de elementos finitos ABAQUS;
- Desenvolver a particularização do modelo constitutivo adotado para o estado plano de tensões (EPT);
- Implementar o modelo constitutivo por meio das rotinas de usuário presentes no *software* ABAQUS, para solução global implícita e explícita, em análises no estado tridimensional, estado plano de deformações (EPD), EPT e axissimétrico;
- Realizar verificações na implementação computacional desenvolvida, certificando a correta resposta constitutiva do modelo implementado;
- Avaliar a resposta mecânica obtida por meio do modelo viscoplástico proposto por dos Santos, 2016, em comparação ao modelo de Johnson e Cook, 1983, em aplicações do processo de conformação mecânica a altas velocidades.

1.2 Viscoplasticidade: uma introdução

Esta seção tem como objetivo apresentar uma introdução sobre o fenômeno de viscoplasticidade em materiais através de uma abordagem fenomenológica. Conforme de Souza Neto et al., 2008, o real comportamento dos materiais é geralmente dependente do tempo. As repostas de tensão sempre são dependentes da taxa em que o carregamento é aplicado. Em muitas aplicações essa dependência não é significativa ao ponto de vista da resposta mecânica apresentada pelo material. Entretanto, para a predição mais próxima da representação do comportamento do material, em muitos casos, deve-se levar em conta os efeitos da dependência da taxa de deformação na resposta constitutiva.

De acordo com Ottosen e Ristinmaa, 2005 e de Souza Neto et al., 2008, os principais fenômenos que envolvem a viscoplasticidade são a dependência da taxa de deformação na tensão, o fenômeno fluência e o fenômeno de relaxação da tensão, conforme representados respectivamente na Figura 1.2 (a)-(c).

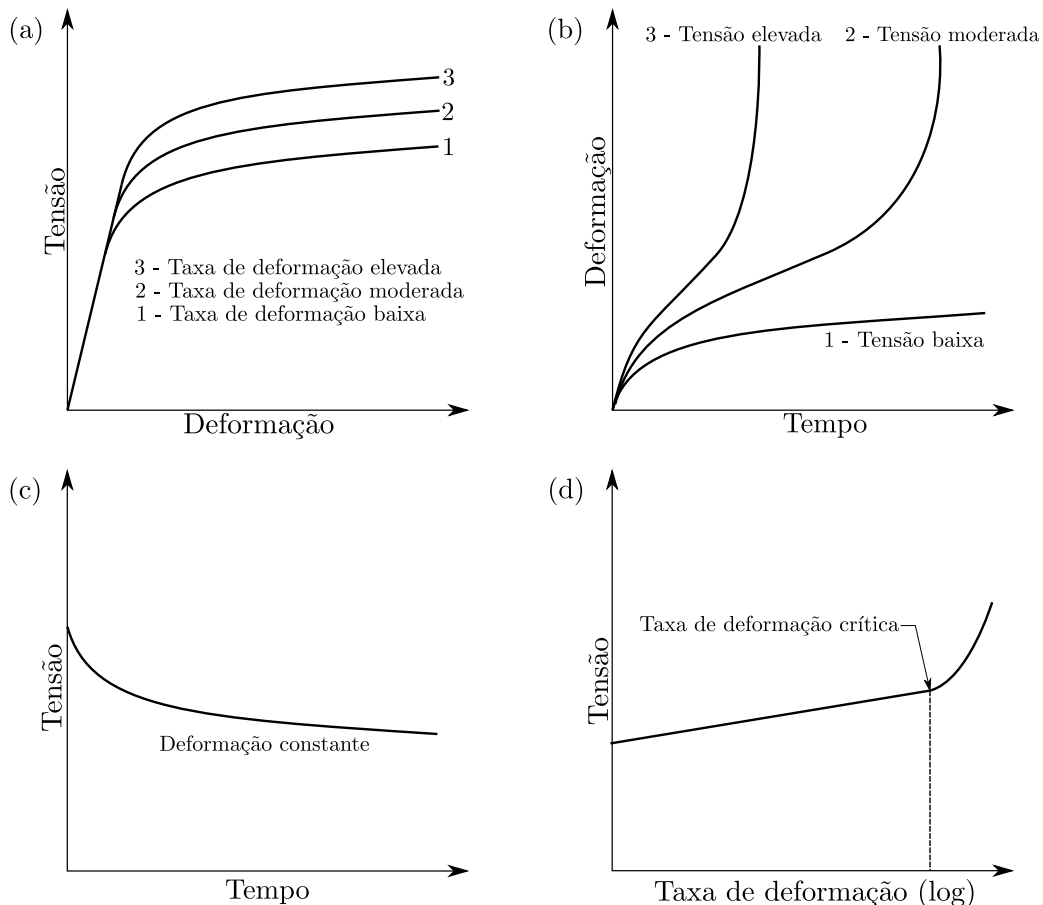


Figura 1.2 – Representação esquemática da resposta viscoplástica por meio de carregamentos unidimensionais para uma determinada amostra de material: (a) influência da taxa de deformação na resposta da tensão; (b) fenômeno de fluência; (c) relaxação da tensão e (d) mudança da sensibilidade da tensão a um valor crítico de taxa de deformação. [Adaptado de de Souza Neto et al., 2008 e dos Santos, 2016]

Conforme de Souza Neto et al., 2008, na Figura 1.2 (a) é ilustrado a dependência da taxa de deformação na resposta da tensão. Observa-se que o comportamento do material é influenciado pela taxa de deformação aplicada, tanto para a tensão de escoamento inicial quanto para as curvas de endurecimento. Normalmente, esse fenômeno é mais perceptível em aplicações onde as temperaturas são muito elevadas, no caso dos metais, em torno de um terço de sua temperatura de fusão. Porém, ainda assim é importante considerar esse

fenômeno para aplicações onde existam elevadas taxas de deformação, como ocorre em simulações dos processos de usinagem e de conformação mecânica a altas velocidades.

O segundo aspecto apresentado na Figura 1.2 (b), é o chamado fenômeno de fluência, que se manifesta quando uma amostra de material é carregada até determinado nível de tensão e mantida constante por um longo período. Com o avanço do tempo é observado a ocorrência de um contínuo fluxo viscoplástico. A velocidade que esse fenômeno evolui está diretamente relacionada ao nível de tensão em que a amostra está submetida, para níveis mais elevados o processo de fluência ocorre de forma mais rápida. Esse fenômeno é usualmente considerado em projetos de reatores nucleares e componentes de turbina a jato.

Na Figura 1.2 (c), é ilustrado o fenômeno chamado de relaxação de tensão. Ele é observado quando certa amostra é submetida à um determinado nível de deformação e mantida nesse nível por um longo período. Ao longo do tempo, será observado um decaimento nos níveis de tensões presentes na amostra. Esse fenômeno geralmente é encontrado em situações onde é exigido uma pré-tensão inicial em determinado componente mecânico.

Na Figura 1.2 (d), de acordo com Follansbee, 1986 e Follansbee e Kocks, 1988, é apresentado a resposta da sensibilidade da tensão a um determinado valor crítico de taxa de deformação, ou seja, quando determinado nível de taxa de deformação é atingido a resposta da tensão apresenta uma repentina e substancial elevação de seu nível. O valor da taxa de deformação crítica é dependente para cada material, para metais com microestrutura cúbica de face centrada (CFC) ela é em torno de 10^3 s^{-1} . Este fenômeno pode ocorrer até mesmo a temperatura ambiente em aplicações onde existam elevadas taxas de deformação envolvidas.

Adicionalmente, também existem os efeitos devido as chamadas histórias de carregamento [Klepaczko, 1975; Chiem e Duffy, 1983; Rashid et al., 1992; Tanner e McDowell, 1999]. Em relação aos efeitos da história da taxa de deformação na resposta do material, na Figura 1.3, estão presentes duas respostas de tensão-deformação 1.3 (a) e 1.3 (b) relacionadas respectivamente para duas histórias de taxa de deformação 1.3 (c) e 1.3 (d). No instante dado pelo ponto 1, a taxa de deformação é abruptamente alterada, observando um salto Δ_i na tensão. Entretanto, ao comparar os resultados de tensão apresentada para um carregamento monotônico imposto desde o ponto 0, por meio de uma taxa de

deformação constante e idêntica à taxa final do caso anterior, percebe-se a existência de uma diferença Δ_h , entre os níveis de tensão encontrados. Ou seja, mesmo que com as taxas finais idênticas, a aplicação que anteriormente passou por diferentes taxas de deformação, não apresenta a mesma resposta em relação a aplicação monotônica com uma taxa de deformação constante. Essa diferença indica que a resposta de tensão apresenta uma dependência das histórias de deformação experimentadas pelo material ao longo do tempo.

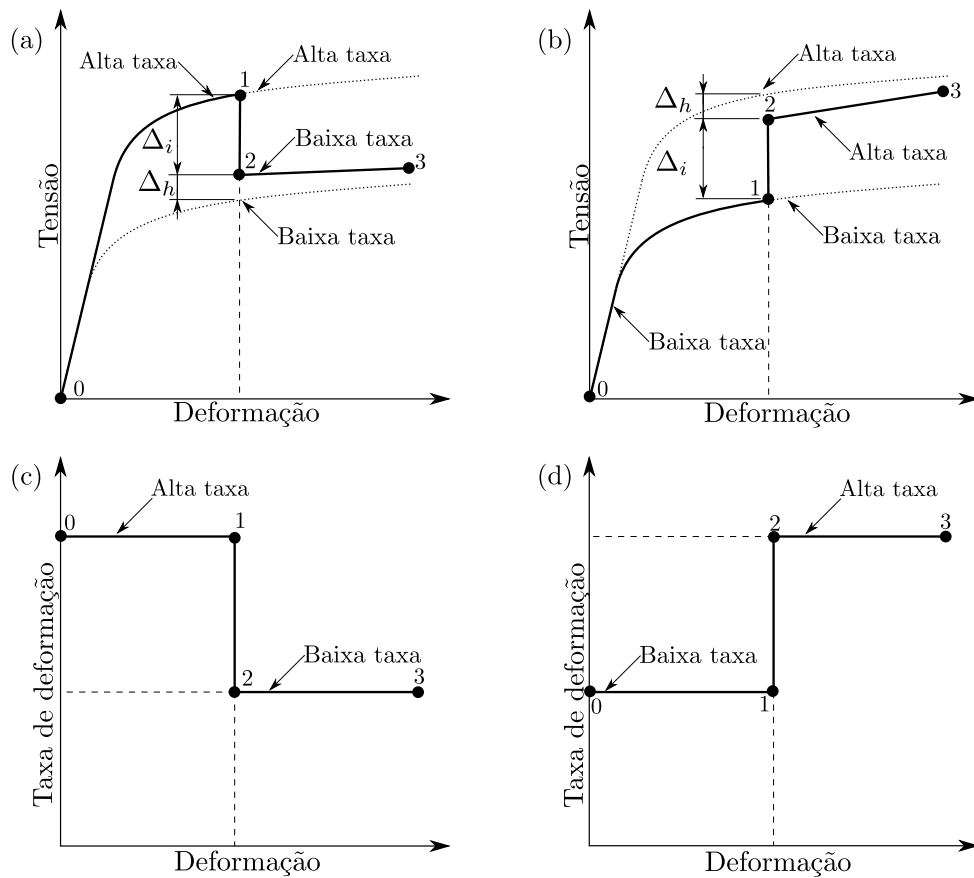


Figura 1.3 – Representação esquemática da resposta viscoplástica: dependência da história da taxa de deformação: (a) e (b) tensão em relação a deformação; (c) e (d) são as histórias da taxa de deformação. Linhas pontilhadas em (a) e (b) são as respostas de tensão monotônica com taxa constante. [Adaptado de dos Santos, 2016]

1.3 Organização do Trabalho

O presente trabalho está estruturado em seis capítulos, organizados como o descrito a seguir:

No Capítulo 2, é apresentado uma revisão bibliográfica dos principais temas que envolvem a mecânica do contínuo no contexto de deformações finitas. Também, neste capítulo, é dado ênfase em uma apresentação detalhada do modelo constitutivo adotado neste trabalho.

No Capítulo 3, é abordada a solução do problema global no contexto do método dos elementos finitos (MEF), partindo desde as equações de equilíbrio até a construção das estratégias de solução do problema. Para o problema estático é apresentada a solução pelo método implícito e para o problema dinâmico é apresentada a solução pelo método explícito.

No Capítulo 4, são expostas as etapas de implementação computacional do modelo constitutivo adotado. São apresentadas a implementação do modelo tridimensional, do modelo exclusivamente para o EPT e por fim os principais aspectos ligados a incorporação do modelo constitutivo no *software* elementos finitos ABAQUS por meio das chamadas rotinas de usuário.

No Capítulo 5, é abordada a verificação da implementação computacional, apresentando soluções analíticas para problemas simples. Por fim, são apresentadas comparações entre a resposta da presente implementação em relação às respostas analíticas e também frente a resultados disponíveis na literatura.

No Capítulo 6, a resposta mecânica do processo de conformação a altas velocidades é avaliada, comparando os resultados encontrados pelo modelo de dos Santos, 2016, em relação ao modelo de Johnson e Cook, 1983, os quais foram calibrados para o mesmos dados de material.

Por fim, são apresentadas as conclusões, comentários e sugestões de trabalhos futuros. Nos apêndices são encontrados, em detalhes, os termos tangentes para o método de *Newton-Raphson* necessários no mapeamento de retorno e o desenvolvimento dos operadores tangentes para a solução do problema global.

2 ELASTO-VISCOPLASTICIDADE EM DEFORMAÇÕES FINITAS

Neste capítulo será apresentada uma breve fundamentação teórica sobre os temas relacionados com a elasto-viscoplasticidade em deformações finitas, com o objetivo de estabelecer ao leitor uma base para o entendimento do modelo constitutivo adotado neste trabalho.

2.1 Fundamentos da mecânica do contínuo

Esta seção tem como objetivo principal apresentar uma introdução aos assuntos ligados à mecânica do contínuo que serão abordados no decorrer deste trabalho. Para isso, utilizou-se como referência base as fundamentações teóricas encontradas em bibliografias sobre o tema, como os trabalhos de [Malvern, 1969; Spencer, 1980; de Souza Neto et al., 2008; Reddy, 2008].

2.1.1 Cinemática e deformação

Considera-se um corpo contido no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , em seu estado inicial no tempo inicial $t = t_i$, aqui intitulada de configuração de referência, sendo o domínio desse corpo dado por Ω^0 e o seu contorno dado por Γ^0 . Supõe-se que uma determinada região desse corpo em um dado instante $t = t_f$, ocupa uma nova região no espaço, aqui chamada de configuração corrente, encontrando-se agora em um novo domínio denotado por Ω e em um novo contorno dado por Γ , de acordo com a Figura 2.1.

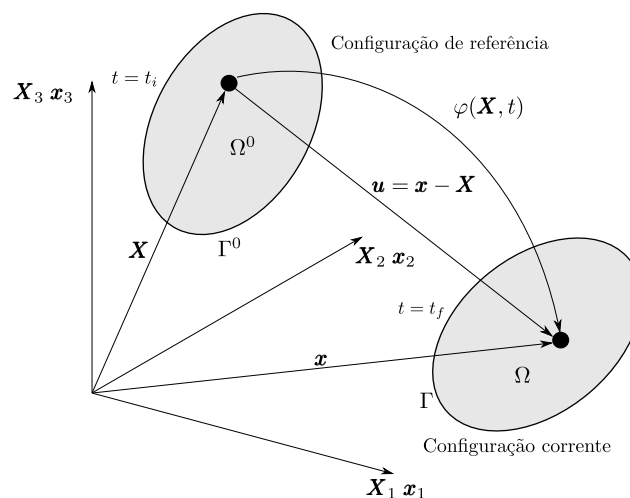


Figura 2.1 – Representação esquemática das configurações do corpo.

Supondo a existência de um vetor posição de uma partícula contida no domínio do corpo seja dado para a configuração de referência por \mathbf{X} (coordenadas materiais ou lagrangianas) e na configuração corrente por \mathbf{x} (coordenadas espaciais ou eulerianas), é possível definir a existência de um mapeamento dado por $\varphi : \Omega^0 \rightarrow \Omega$, em que $\varphi(\mathbf{X}, t)$ é uma função que executa o mapeamento entre as configurações de referência e a configuração corrente, ou seja

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t) \text{ ou } \mathbf{X} = \varphi^{-1}(\mathbf{x}, t) . \quad (2.1)$$

Também é possível determinar o vetor de deslocamento \mathbf{u} de uma partícula presente no corpo, entre a posição de referência \mathbf{X} e a posição corrente \mathbf{x} , por meio da seguinte expressão

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \text{ ou } \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) . \quad (2.2)$$

O gradiente de deformação \mathbf{F} , estabelece a relação entre um segmento infinitesimal $d\mathbf{X}$ na configuração de referência e um segmento $d\mathbf{x}$ na configuração corrente, sendo definido por

$$\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{X}}\varphi(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial\varphi(\mathbf{X}, t)}{\partial\mathbf{X}} = \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{X}} , \quad (2.3)$$

e o Jacobiano do mapeamento de deformação definido por J , é expresso por meio da seguinte expressão

$$J = \det(\mathbf{F}) , \quad (2.4)$$

onde $\det(\cdot)$ é o determinante da matriz (\cdot) .

Pela imposição da condição de que $J > 0$, é respeitado o mapeamento um para um, e assim o teorema da decomposição polar admite uma única representação para o gradiente de deformação, dada por¹

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} , \quad (2.5)$$

com \mathbf{U} e \mathbf{V} tensores positivos definidos e simétricos e \mathbf{R} é um tensor ortogonal. Os tensores \mathbf{U} , \mathbf{V} e \mathbf{R} são, respectivamente, os tensores de alongamento à direita, alongamento à esquerda e de rotação. Os tensores de alongamento também possuem relação com os tensores de *Green* à direita \mathbf{C} e à esquerda \mathbf{B} , respectivamente conforme apresentado na

¹Ao longo deste trabalho o símbolo da operação de contração simples (\cdot) será omitido para operações entre um tensor e um vetor ou um tensor e um tensor. Por exemplo: supondo que \mathbf{S} e \mathbf{T} são tensores e \mathbf{u} é um vetor, as operações $\mathbf{S} \cdot \mathbf{u}$ e $\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}$ serão escritas como $\mathbf{S}\mathbf{u}$ e $\mathbf{S}\mathbf{T}$.

seguinte equação

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 \text{ e } \mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2 . \quad (2.6)$$

De maneira similar ao gradiente de deformações, o gradiente espacial de velocidades \mathbf{L} , é definido por meio da seguinte expressão

$$\mathbf{L} = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} , \quad (2.7)$$

em que \mathbf{v} são as velocidades espaciais. O gradiente espacial de velocidades pode ser decomposto em uma parcela simétrica² \mathbf{D} e uma parcela antissimétrica \mathbf{W} , de acordo com

$$\mathbf{L} = \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)}_{\mathbf{D}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T)}_{\mathbf{W}} , \quad (2.8)$$

e desta forma

$$\mathbf{L} = \text{sym}(\mathbf{L}) + \text{skew}(\mathbf{L}) = \mathbf{D} + \mathbf{W} , \quad (2.9)$$

onde \mathbf{D} é o tensor taxa de deformação e \mathbf{W} é o tensor taxa de rotação. Também outra importante forma de apresentar o gradiente espacial de velocidades é dado pela seguinte expressão

$$\mathbf{L} = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} . \quad (2.10)$$

2.2 Modelos constitutivos baseados em potenciais hiperelásticos

Esta seção tem com objetivo apresentar as principais características associadas à adoção de um modelo constitutivo isotrópico baseado em potenciais hiperelásticos e na decomposição multiplicativa do gradiente de deformação.

2.2.1 Decomposição multiplicativa do gradiente de deformação

De acordo com os trabalhos de Bonet e Wood, 1997; Perić e Owen, 1998; Belytschko et al., 2000 e de Souza Neto et al., 2008, uma das principais hipóteses adotadas na utilização dos modelos baseados em potenciais hiperelásticos é a adoção da decomposição multiplicativa do gradiente de deformação em uma parcela elástica \mathbf{F}^e e em uma parcela

²Para um dado tensor \mathbf{Y} , $\text{sym}(\mathbf{Y})$ é a parte simétrica de \mathbf{Y} e $\text{skew}(\mathbf{Y})$ é a parte antissimétrica de \mathbf{Y} , tal que $\mathbf{Y} = \text{sym}(\mathbf{Y}) + \text{skew}(\mathbf{Y})$.

viscoplástica \mathbf{F}^{vp} , ou seja

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}^e(\mathbf{X}, t)\mathbf{F}^{vp}(\mathbf{X}, t) . \quad (2.11)$$

Com a decomposição multiplicativa do gradiente de deformação pela Equação 2.11, é introduzido um estado virtual não tensionado O_ξ , definido como uma configuração intermediária, conforme observa-se na Figura 2.2. Essa configuração tem como objetivo exclusivo a representação da resposta constitutiva do material.

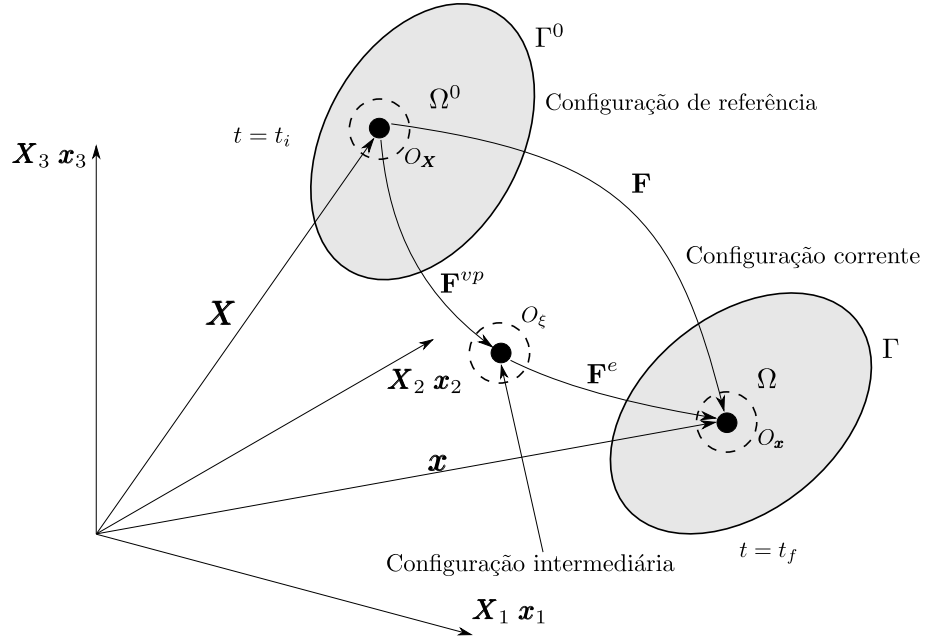


Figura 2.2 – Decomposição multiplicativa do gradiente de deformação.

A partir da decomposição multiplicativa do gradiente de deformação, é possível obter importantes resultados que auxiliam no desenvolvimento da implementação do modelo constitutivo. O gradiente de velocidade \mathbf{L} dado pela Equação 2.10, pode ser estabelecido por meio da Equação 2.11, de acordo com

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = (\mathbf{F}^e\mathbf{F}^{vp}) \cdot (\mathbf{F}^e\mathbf{F}^{vp})^{-1} = \underbrace{\dot{\mathbf{F}}^e (\mathbf{F}^e)^{-1}}_{\mathbf{L}^e} + \underbrace{\mathbf{F}^e \dot{\mathbf{F}}^{vp} (\mathbf{F}^{vp})^{-1} (\mathbf{F}^e)^{-1}}_{\mathbf{L}^{vp}} , \quad (2.12)$$

onde \mathbf{L}^e e \mathbf{L}^{vp} na Equação 2.12 são as parcelas elástica e viscoplástica de \mathbf{L} , ou seja $\mathbf{L} = \mathbf{L}^e + \mathbf{L}^{vp}$. Com isso, é possível estabelecer a decomposição do tensor taxa de deformação também em uma parcela elástica \mathbf{D}^e e em uma parcela viscoplástica \mathbf{D}^{vp}

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^{vp} = \text{sym}(\mathbf{L}^e) + \text{sym}(\mathbf{L}^{vp}) . \quad (2.13)$$

Outra consequência da utilização da decomposição multiplicativa do gradiente de deformação é a possibilidade de reescrever a decomposição polar nas partes elásticas e viscoplásticas dos tensores de alongamento e rotação, resultando em

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{R}^e \mathbf{U}^e = \mathbf{V}^e \mathbf{R}^e \text{ e } \mathbf{F}^{vp} = \mathbf{R}^{vp} \mathbf{U}^{vp} = \mathbf{V}^{vp} \mathbf{R}^{vp} . \quad (2.14)$$

De acordo com Perić e Owen, 1998 e de Souza Neto et al., 2008, para o posterior equacionamento é conveniente introduzir a contribuição viscoplástica modificada ao gradiente espacial de velocidades, definido pela Equação 2.12. Assim, por meio de um *pull back* para a configuração intermediária, escreve-se

$$\bar{\mathbf{L}}^{vp} = (\mathbf{F}^e)^{-1} \mathbf{L}^{vp} \mathbf{F}^e = (\mathbf{F}^e)^{-1} \left[\mathbf{F}^e \dot{\mathbf{F}}^{vp} (\mathbf{F}^{vp})^{-1} (\mathbf{F}^e)^{-1} \right] \mathbf{F}^e , \quad (2.15)$$

resultando em

$$\bar{\mathbf{L}}^{vp} = \dot{\mathbf{F}}^{vp} (\mathbf{F}^{vp})^{-1} , \quad (2.16)$$

com $\bar{\mathbf{L}}^{vp}$ dado na configuração intermediária livre de tensão. Este pode ser decomposto de acordo com

$$\bar{\mathbf{L}}^{vp} = \bar{\mathbf{D}}^{vp} + \bar{\mathbf{W}}^{vp} , \quad (2.17)$$

e $\bar{\mathbf{D}}$ é o tensor taxa de deformação na configuração intermediária e $\bar{\mathbf{W}}$ é o tensor taxa de rotação na configuração intermediária, sendo que

$$\bar{\mathbf{D}}^{vp} = \text{sym} [\bar{\mathbf{L}}^{vp}] \text{ e } \bar{\mathbf{W}}^{vp} = \text{skew} [\bar{\mathbf{L}}^{vp}] . \quad (2.18)$$

Em contraste com a publicação de dos Santos, 2016, no presente trabalho foi adotada a configuração corrente para a obtenção das equações constitutivas, escolha que será justificada ao longo do trabalho. Para isso, conforme Perić e Owen, 1998 e de Souza Neto et al., 2008, escreve-se a rotação sobre $\bar{\mathbf{D}}^{vp}$, definida pela seguinte equação

$$\tilde{\mathbf{D}}^{vp} = \mathbf{R}^e \bar{\mathbf{D}}^{vp} \mathbf{R}^{eT} = \mathbf{R}^e \text{sym} \left[\dot{\mathbf{F}}^{vp} (\mathbf{F}^{vp})^{-1} \right] \mathbf{R}^{eT} , \quad (2.19)$$

a qual será adotada na definição da regra de fluxo viscoplástico.

Por meio da adoção da hipótese de isotropia inelástica [Eterovic e Bathe, 1990; Weber e Anand, 1990; de Souza Neto et al., 2008], assume-se que na configuração local livre de tensões a rotação do fluxo viscoplástico é nulo, sendo assim

$$\bar{\mathbf{W}}^{vp} = 0 . \quad (2.20)$$

2.2.2 Deformação logarítmica

No presente trabalho será dado enfoque apenas na versão euleriana da medida de deformação logarítmica, a qual é definida em função do tensor de alongamento à esquerda elástico \mathbf{V}^e , de acordo com

$$\mathbf{e}^e = \ln(\mathbf{V}^e) = \frac{1}{2} \ln(\mathbf{B}^e), \quad (2.21)$$

onde $\ln(\cdot)$ é logaritmo do tensor (\cdot) .

2.3 Descrição do constitutivo modelo adotado

Esta seção tem como objetivo apresentar de uma forma breve as principais características associadas ao modelo constitutivo empregado neste trabalho. O modelo constitutivo proposto por dos Santos, 2016, possui como objetivo prever as principais características constitutivas que são relacionadas à deformação de metais com microestrutura cúbica de face centrada (CFC) em condições isotérmicas, sobre altas taxas de deformação, sendo essas, de uma maneira geral: o endurecimento induzido pela deformação, o endurecimento induzido pela taxa de deformação e a sensibilidade instantânea em relação a taxa de deformação. Informações complementares sobre o modelo constitutivo adotado podem ser encontradas em dos Santos et al., 2016 e dos Santos, 2016.

A formulação segue uma abordagem semifísica, com as variáveis inelásticas e suas regras de evolução sendo qualitativamente guiadas por considerações metalúrgicas baseadas no acúmulo e organização das discordâncias. O modelo adota a decomposição do gradiente de deformação em parte elástica e viscoplástica de acordo com o apresentado na Seção 2.2. O material é considerado isotrópico e a formulação constitutiva é baseada na versão lagrangiana da deformação logarítmica e na tensão rotacionada de *Kirchhoff*. A resposta elástica é linear e dada por um modelo hiperelástico de *Hencky*. O critério de *von Mises* é adotado juntamente com um endurecimento isotrópico, a evolução inelástica é dada por uma função de sobretensão e uma regra de fluxo associativa. A regra de endurecimento é dependente da taxa de deformação e de sua história de deformação.

Entretanto, no presente trabalho foram necessárias algumas modificações para a implementação do modelo por meio das rotinas de usuário no *software* comercial de elementos finitos ABAQUS. Essas modificações foram motivadas devido ao fato de que o *software* utiliza em sua formulação a versão euleriana da medida de deformação. Sendo

assim, foram executadas adequações nas equações constitutivas originais, para que de maneira natural a formulação com as medidas requeridas pelo *software* fossem obtidas, e assim, satisfazer estritamente a conformidade entre os pares conjugados de tensão e deformação. Portanto, as equações apresentadas no decorrer deste trabalho estão na versão corrente, utilizado em conjunto com a medida de deformação logarítmica euleriana a tensão de *Kirchhoff*, tal combinação pode ser observada nos trabalhos de Perić e Owen, 1998 e de Souza Neto et al., 2008.

O modelo de dos Santos, 2016, assume que o processo é isotérmico, assim $\dot{\theta} = 0$, dessa forma o estado termodinâmico de qualquer ponto do material é unicamente determinado pela deformação elástica \mathbf{e}^e e por um conjunto de variáveis internas $\boldsymbol{\alpha}$.

O potencial de energia livre pode ser decomposto em uma parcela elástica dada por ψ^e e uma parcela inelástica representada por ψ^{vp} , desse modo a energia livre de *Helmholtz* total é dada pela soma das parcelas da seguinte forma

$$\psi(\mathbf{e}^e, \boldsymbol{\alpha}) = \psi^e(\mathbf{e}^e) + \psi^{vp}(\boldsymbol{\alpha}) , \quad (2.22)$$

onde a parcela elástica é dada em termos de \mathbf{e}^e e a parcela inelástica é em função das variáveis inelásticas macroscópicas associadas ao endurecimento isotrópico $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$.

Computando a derivada temporal da energia livre dada pela Equação 2.22 obtém-se a seguinte expressão

$$\dot{\psi}(\mathbf{e}^e, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{e}^e} : \dot{\mathbf{e}}^e + \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \psi^{vp}}{\partial \alpha_k} \dot{\alpha}_k , \quad (2.23)$$

aplicando a regra da cadeia na definição de \mathbf{e}^e dada pela Equação 2.21, surge

$$\dot{\psi}(\mathbf{e}^e, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2} \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{e}^e} : \frac{\partial(\ln \mathbf{B}^e)}{\partial(\mathbf{B}^e)} \dot{\mathbf{B}}^e + \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \psi^{vp}}{\partial \alpha_k} \dot{\alpha}_k , \quad (2.24)$$

que após um pouco de algebrismo resulta em

$$\dot{\psi}(\mathbf{e}^e, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{e}^e} : \frac{\partial(\ln \mathbf{B}^e)}{\partial(\mathbf{B}^e)} \right] \mathbf{B}^e : \dot{\mathbf{B}}^e \mathbf{B}^{e-1} + \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \psi^{vp}}{\partial \alpha_k} \dot{\alpha}_k . \quad (2.25)$$

Como discutido em Perić e Owen, 1998 e de Souza Neto et al., 2008, os tensores \mathbf{e}^e , \mathbf{B}^e e $\partial \psi / \partial \mathbf{e}^e$, compartilham os mesmas direções principais, sendo esses membros de uma classe de tensores isotrópicos que asseguram a seguinte igualdade³

³Uma extensa fundamentação sobre o tema pode ser observado em de Souza Neto et al., 2008, p. 529.

$$\left[\frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{e}^e} : \frac{\partial (\ln \mathbf{B}^e)}{\partial (\mathbf{B}^e)} \right] \mathbf{B}^e = \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{e}^e} , \quad (2.26)$$

reescrevendo a Equação 2.25, surge

$$\dot{\psi}(\mathbf{e}^e, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2} \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{e}^e} : \dot{\mathbf{B}}^e \mathbf{B}^{e-1} + \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \psi^{vp}}{\partial \alpha_k} \dot{\alpha}_k . \quad (2.27)$$

Substituindo a derivada temporal de \mathbf{B}^e na Equação 2.27, após algum algebrismo, reescreve-se a mesma da seguinte forma

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(\mathbf{e}^e, \boldsymbol{\alpha}) = & \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{e}^e} : \left\{ \mathbf{D} + \frac{1}{2} \left[\mathbf{F}^e \mathbf{F}^{vp} (\mathbf{F}^{vp-1}) \cdot \mathbf{F}^{eT} + \mathbf{F}^e (\mathbf{F}^{vp-T}) \cdot \mathbf{F}^{vpT} \mathbf{F}^{e-1} \right] \right\} + \\ & + \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \psi^{vp}}{\partial \alpha_k} \dot{\alpha}_k . \end{aligned} \quad (2.28)$$

Com o uso das seguintes relações

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{vp} (\mathbf{F}^{vp-1}) \cdot &= -\dot{\mathbf{F}}^{vp} \mathbf{F}^{vp-1} = -\bar{\mathbf{L}}^{vp} , \\ (\mathbf{F}^{vp-T}) \cdot \mathbf{F}^{vpT} &= -\mathbf{F}^{vp-T} (\dot{\mathbf{F}}^{vpT}) \cdot = -\bar{\mathbf{L}}^{vpT} , \end{aligned} \quad (2.29)$$

em conjunto com a decomposição polar do gradiente de deformação e com a Equação 2.14, a Equação 2.28 fica reescrita como

$$\dot{\psi}(\mathbf{e}^e, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{e}^e} \left\{ \mathbf{D} - \frac{1}{2} \mathbf{V}^e \mathbf{R}^e \left[\bar{\mathbf{L}}^{vp} + \bar{\mathbf{L}}^{vpT} \right] \mathbf{R}^{eT} \mathbf{V}^{e-1} \right\} + \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \psi^{vp}}{\partial \alpha_k} \dot{\alpha}_k . \quad (2.30)$$

Por fim, introduzindo a definição do tensor taxa de deformação rotacionado $\tilde{\mathbf{D}}^{vp}$, dado pela Equação 2.19, e pela consideração da isotropia elástica, escreve-se a Equação 2.30 como

$$\dot{\psi}(\mathbf{e}^e, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{e}^e} : \left(\mathbf{D} - \tilde{\mathbf{D}}^{vp} \right) + \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \psi^{vp}}{\partial \alpha_k} \dot{\alpha}_k . \quad (2.31)$$

A inequação de *Clausius-Duhem*, de acordo com Perić e Owen, 1998 e de Souza Neto et al., 2008, é dada em sua forma geral por meio da combinação da primeira e segunda lei da termodinâmica, resultando na seguinte expressão em termos da dissipação por unidade de volume de referência

$$\boldsymbol{\tau} : \mathbf{D} - \rho_0 (\dot{\psi} + s\dot{\theta}) - \frac{J}{\theta} \bar{\mathbf{q}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \theta \geq 0 , \quad (2.32)$$

onde s é a entropia específica, θ é a temperatura absoluta, $\bar{\mathbf{q}}$ é o fluxo de calor e ρ_0 é a densidade em massa na configuração de referência. Eliminando todos os efeitos térmicos,

a Equação 2.32 pode ser reescrita da seguinte forma

$$\boldsymbol{\tau} : \mathbf{D} - \rho_0 \dot{\psi} \geq 0, \quad (2.33)$$

introduzindo a Equação 2.31 em 2.33 e reajustando os termos ela fica estabelecida pela expressão

$$\left(\boldsymbol{\tau} - \rho_0 \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{e}^e} \right) : \mathbf{D} + \rho_0 \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{e}^e} : \tilde{\mathbf{D}}^{vp} - \rho_0 \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \psi^{vp}}{\partial \alpha_k} \dot{\alpha}_k \geq 0. \quad (2.34)$$

Como a Equação 2.34 é verdadeira para qualquer processo termodinâmico a desigualdade acima disposta implica na seguinte lei constitutiva para a tensão de *Kirchhoff*, dada por

$$\boldsymbol{\tau} = \rho_0 \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{e}^e}. \quad (2.35)$$

O conjunto de variáveis internas dadas por $\alpha_k = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, são conjugadas com as respectivas forças termodinâmicas A_1 e A_2 associadas ao endurecimento isotrópico, definidas por

$$A_k := \rho_0 \frac{\partial \psi^{vp}}{\partial \alpha_k}, \quad k = \{1, 2\}. \quad (2.36)$$

E por fim, com a consideração da não existência de dissipação negativa, reescreve-se a Equação 2.34 de acordo com

$$\boldsymbol{\tau} : \tilde{\mathbf{D}}^{vp} - \sum_{k=1}^2 A_k \dot{\alpha}_k \geq 0. \quad (2.37)$$

Conforme dos Santos, 2016, adota-se a energia livre dada na forma quadrática, de acordo com as seguintes expressões

$$\rho_0 \psi^e = \frac{1}{2} \mathbf{e}^e : \mathbb{D}^e : \mathbf{e}^e, \quad \rho_0 \psi^{vp} = \frac{1}{2} \left(\bar{H} \alpha_1^2 + \tilde{H} \alpha_2^2 \right), \quad (2.38)$$

sendo \mathbb{D}^e o tensor constitutivo hiperelástico de quarta ordem e $\bar{H}, \tilde{H} \geq 0$ os parâmetros constantes do modelo. Para elasticidade linear isotrópica o tensor \mathbb{D}^e é estabelecido de acordo com

$$\mathbb{D}^e = 2\mu \mathbb{I} + \left(\kappa - \frac{2}{3}\mu \right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}, \quad (2.39)$$

onde κ e μ são o módulo de compressibilidade e o módulo de cisalhamento. O tensor \mathbf{I} é o tensor identidade de segunda ordem e \mathbb{I} é o tensor identidade simétrico de quarta ordem dado por $\mathbb{I} = 1/2 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$ onde δ_{ij} é o delta de *Kronecker*⁴.

⁴Delta de *Kronecker* - $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$.

Por meio das Equações 2.35, 2.36 e 2.38, são obtidas as seguintes relações constitutivas

$$\boldsymbol{\tau} = \rho_0 \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{e}^e} = \mathbb{D}^e : \mathbf{e}^e, \quad A_1 = \rho_0 \frac{\partial \psi^{vp}}{\partial \alpha_1} = \bar{H} \alpha_1 \quad \text{e} \quad A_2 = \rho_0 \frac{\partial \psi^{vp}}{\partial \alpha_2} = \tilde{H} \alpha_2. \quad (2.40)$$

2.3.1 Função de escoamento

O modelo de dos Santos, 2016, adota o critério de escoamento de *von Mises*, aqui definido em termos da tensão de *Kirchhoff* e da variável A , a qual representa o endurecimento isotrópico. A função de escoamento $f(\boldsymbol{\tau}, A)$, é estabelecida por meio da seguinte equação

$$f(\boldsymbol{\tau}, A) = \|\boldsymbol{\tau}^D\| - \underbrace{\sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_y + A)}_{R(A)}, \quad (2.41)$$

onde $\|\boldsymbol{\tau}^D\| = \sqrt{\boldsymbol{\tau}^D : \boldsymbol{\tau}^D}$, com $\boldsymbol{\tau}^D = \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\tau}) \mathbf{I}$ sendo a parcela desviadora de $\boldsymbol{\tau}$, σ_y é a tensão de escoamento inicial, sendo A a variável que representa o endurecimento isotrópico e $R(A)$ é o raio da superfície de escoamento. Assume-se que a variável A seja dada pela soma das duas forças termodinâmicas A_1 e A_2

$$A = A_1 + A_2. \quad (2.42)$$

Assim, o domínio elástico é definido por um conjunto convexo fechado \mathcal{G} , que depende de $\boldsymbol{\tau}$ e A , dado por

$$\mathcal{G} = [(\boldsymbol{\tau}, A) | f(\boldsymbol{\tau}, A) \leq 0]. \quad (2.43)$$

Quando $f = 0$, é definida a superfície de escoamento \mathcal{Y} , determinando o contorno de \mathcal{G}

$$\mathcal{Y} = [(\boldsymbol{\tau}, A) | f(\boldsymbol{\tau}, A) = 0]. \quad (2.44)$$

2.3.2 Regra de fluxo e evolução inelástica

Seguindo a formulação constitutiva, a evolução das variáveis internas do modelo é estabelecida por meio das seguintes relações constitutivas

$$\tilde{\mathbf{D}}^{vp} = \dot{\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}}; \quad \dot{\alpha}_1 = -\dot{\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial A_1} \quad \text{e} \quad \dot{\alpha}_2 = -\dot{\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial A_2}, \quad (2.45)$$

sendo $\phi = \phi(\boldsymbol{\tau}, A)$ definido como um potencial de fluxo e $\dot{\lambda} \geq 0$ um multiplicador viscoplástico, que no modelo deverá satisfazer a equação cinética, que emprega a proposta de Perzyna, 1966, 1971, a qual segue a uma abordagem fenomenológica no contexto da viscoplasticidade. Sendo assim, a equação cinética é estabelecida por meio da função de sobretensão dada por

$$\dot{\lambda} = \Theta(\langle f \rangle, A) , \quad (2.46)$$

com $\langle \cdot \rangle = 1/2(\cdot + |\cdot|)$ sendo o operador de *Macaulay* e Θ é a função viscoplástica de sobretensão. O modelo assume que a função de sobretensão Θ é dependente de f e também do parâmetro de endurecimento A . Para valores de $f \geq 0$, admite-se que Θ possui inversa em termos de f e $\dot{\lambda}$, conforme

$$f = \Theta^{-1}(\dot{\lambda}, A) . \quad (2.47)$$

O modelo assume a decomposição dos potenciais de fluxo associados com a evolução inelástica, de acordo com

$$\phi(\boldsymbol{\tau}, A_1, A_2) = \phi_{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\tau}) + \phi_1(A_1) + \phi_2(A_2) , \quad (2.48)$$

definindo os seguintes potenciais

$$\phi_{\boldsymbol{\tau}} = \|\boldsymbol{\tau}^D\|, \quad \phi_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}}h_1 \left(1 - \frac{A_1}{2A_{\infty}}\right) A_1, \quad e \quad \phi_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}}h_2 A_2 , \quad (2.49)$$

com $A_{\infty} \geq 0$, $h_1 \geq 0$ e $h_2 \geq 0$ sendo parâmetros que dependem da taxa de deformação, através da deformação viscoplástica acumulada ε , cuja a taxa é definida de acordo com

$$\dot{\varepsilon} := \sqrt{\frac{2}{3}}\|\tilde{\mathbf{D}}^{vp}\| \geq 0 . \quad (2.50)$$

O potencial de fluxo assumido na Equação 2.49₁, é conforme o critério de escoamento de *von Mises* considerando uma regra de fluxo associativa. Assim, pela Equação 2.45₁ a seguinte regra é obtida

$$\tilde{\mathbf{D}}^{vp} = \dot{\lambda} \mathbf{N}_{\boldsymbol{\tau}} , \quad (2.51)$$

onde $\mathbf{N}_{\boldsymbol{\tau}} := \frac{\boldsymbol{\tau}^D}{\|\boldsymbol{\tau}^D\|}$ é um tensor unitário: $\|\mathbf{N}_{\boldsymbol{\tau}}\| = 1$. Consequentemente, por meio da Equação 2.51, a taxa da deformação viscoplástica dada pela Equação 2.50, é

$$\dot{\varepsilon} := \sqrt{\frac{2}{3}}\dot{\lambda} \geq 0 . \quad (2.52)$$

No contexto físico (uma detalhada discussão sobre o tema pode ser encontrada em dos Santos, 2016), no ponto de vista da microestrutura, a contribuição da variável $\dot{\alpha}_1$ está relacionada aos fenômenos de acúmulo e arranjo das células de discordâncias. Tais fenômenos governam o endurecimento do material nos estágios iniciais do processo de deformação. A evolução dessa variável é estabelecida por meio das Equações 2.40₂, 2.45₂, 2.49₂ e 2.52, resultando na seguinte equação

$$\dot{\alpha}_1 = h_1 \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_\infty} \right) \dot{\varepsilon} , \quad (2.53)$$

com α_∞ sendo o parâmetro de saturação relacionado com α_1 . Por meio das Equações 2.40 e 2.53, chega-se na seguinte expressão para a evolução de A_1

$$\dot{A}_1 = H_1 \left(1 - \frac{A_1}{A_\infty} \right) \dot{\varepsilon} , \quad (2.54)$$

onde $H_1 := \bar{H}h_1$ é a taxa de endurecimento e $A_\infty := \bar{H}\alpha_\infty$ é o parâmetro de saturação do endurecimento. A Equação 2.54 é diretamente integrada com uma regra de endurecimento do tipo *Voce*, resultando na seguinte expressão

$$\frac{A_1 - A_\infty}{A_{1i} - A_\infty} = \exp[-\delta(\varepsilon - \varepsilon_i)] , \quad (2.55)$$

sendo A_{1i} e ε_i os valores iniciais das respectivas variáveis. Os parâmetros $\delta = \frac{H_1}{A_\infty}$ e A_∞ são considerados dependentes da taxa.

A segunda variável de endurecimento α_2 está relacionada a processos que ocorrem no nível microscópico nos estágios mais avançados da deformação, assumindo a seguinte relação linear com $\dot{\varepsilon}$

$$\dot{\alpha}_2 = h_2 \dot{\varepsilon} . \quad (2.56)$$

Pelas Equações 2.40₃ e 2.56 a taxa de A_2 em termos da taxa de deformação viscoplástica acumulada é obtida pela seguinte equação

$$\dot{A}_2 = H_2 \dot{\varepsilon} , \quad (2.57)$$

com $H_2 := \tilde{H}h_2$. Em seguida, escreve-se a variável H_2 em relação ao parâmetro de saturação A_∞ , ou seja, $H_2 = cA_\infty$, resultando em

$$\dot{A}_2 = cA_\infty \dot{\varepsilon} , \quad (2.58)$$

com c sendo uma constate. A integração da Equação 2.58 considerando uma taxa constante $\dot{\varepsilon}$, é dada por

$$A_2 = A_{2i} + cA_\infty(\varepsilon - \varepsilon_i) , \quad (2.59)$$

ainda, conforme dos Santos, 2016, levando em consideração que o parâmetro c seja um valor pequeno, a diferença para valores de tensão entre a taxa de deformação quase-estática e ao nível elevado será pequena quando comparado com a tensão total. Sendo assim, escreve-se

$$A_2 \approx cA_\infty\varepsilon . \quad (2.60)$$

Combinando as Equações 2.42, 2.55 e 2.60 obtêm-se como resultado a seguinte equação para o endurecimento

$$A = A_i + A_\infty c(\varepsilon - \varepsilon_i) + [A_\infty(1 + c\varepsilon_i) - A_i]\{1 - \exp[-\delta(\varepsilon - \varepsilon_i)]\} , \quad (2.61)$$

com A_i sendo o valor inicial da variável A . Para casos onde a seguinte relação $A_i = \varepsilon_i = 0$ é mantida, a Equação 2.61 pode ser reduzida a

$$A = A_\infty [1 + c\varepsilon - \exp(-\delta\varepsilon)] . \quad (2.62)$$

A contabilização dos efeitos da taxa de deformação na resposta do endurecimento é realizada transformando os parâmetros δ e A_∞ dependentes da taxa, pelas seguintes equações

$$\delta = [1 - \beta_1(\dot{\varepsilon})] \delta^{lwr} + \beta_1(\dot{\varepsilon}) \delta^{up} , \quad (2.63)$$

e

$$A_\infty = [1 - \beta_2(\dot{\varepsilon})] A_\infty^{lwr} + \beta_2(\dot{\varepsilon}) A_\infty^{up} , \quad (2.64)$$

onde δ^{lwr} e A_∞^{lwr} são, respectivamente, os valores de δ e A_∞ , medidos na taxa de referência inferior $\dot{\varepsilon}_{lwr} \ll 1$ e δ^{up} e A_∞^{up} são valores associados com a taxa de referência superior $\dot{\varepsilon}_{up} \gg 1$. A função β_i para $i = \{1, 2\}$ é dada pela seguinte equação

$$\beta_i(\dot{\varepsilon}) = \left(\frac{\langle \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_{lwr} \rangle}{\dot{\varepsilon}_{up} - \dot{\varepsilon}_{lwr}} \right)^{\xi_i} . \quad (2.65)$$

A saturação da variável A é considerada dependente da história de deformação, assim a variável de saturação do endurecimento efetiva \bar{A}_∞ é introduzida pela equação

$$\bar{A}_\infty := \frac{1}{\bar{\varepsilon}} \int_0^{\bar{\varepsilon}} A_\infty(\dot{\varepsilon}) d\varepsilon , \quad (2.66)$$

em que $\bar{\varepsilon}$ é a deformação viscoplástica acumulada atual e $A_\infty(\dot{\varepsilon})$ é obtida através da Equação 2.64. Ressaltando que para uma carregamento com taxa de deformação constante, a Equação 2.66 reduz a $\bar{A}_\infty = A_\infty$.

2.3.3 Função de sobretensão

Conforme dos Santos, 2016, para a incorporação da dependência instantânea da taxa de deformação, o modelo utilizou propostas fenomenológicas para a chamada função de sobretensão $\Theta(\langle f \rangle, A)$. Entre diferentes modelos, neste trabalho foram utilizadas duas diferentes formas para a representação da função de sobretensão, a primeira delas é a proposta por Perić, 1993, a qual é estabelecida como

$$\dot{\lambda} = \Theta(\langle f \rangle, A) = \frac{1}{\vartheta} \left\{ \left[\frac{\langle f \rangle + R(A)}{R(A)} \right]^m - 1 \right\}, \quad (2.67)$$

e a sua inversa $\Theta^{-1}(\dot{\lambda}, A)$ para $f \geq 0$ é dada por

$$f = \Theta^{-1}(\dot{\lambda}, A) = R(A) \left[(1 + \vartheta \dot{\lambda})^{1/m} - 1 \right], \quad (2.68)$$

onde ϑ é um parâmetro viscoso e $1/m$ é um parâmetro de sensibilidade à taxa.

A outra função de sobretensão utilizada foi a proposta por dos Santos, 2016, a qual é baseada na função de Perić, porém com a adição do termo $\vartheta_2 \dot{\lambda}$, o qual possui a intenção de melhorar a resposta fenomenológica esperada em algumas aplicações. Com a incorporação do termo citado a equação é dada por

$$f = \Theta^{-1}(\dot{\lambda}, A) = R(A) \left[(1 + \vartheta_1 \dot{\lambda})^{1/m} + \vartheta_2 \dot{\lambda} - 1 \right], \quad (2.69)$$

com ϑ_1 e ϑ_2 sendo parâmetros viscosos.

2.3.4 Determinação dos parâmetros do modelo adotado

Para a determinação dos parâmetros relacionados ao modelo constitutivo adotado, uma longa e detalhada discussão é encontrada em dos Santos, 2016. Resumidamente, no modelo existem 11 parâmetros que estão relacionados a resposta inelástica. Para a determinação destes, *a priori* são definidas as taxas de deformação de referência $\{\dot{\varepsilon}_{lwr}, \dot{\varepsilon}_{up}\}$, estes valores definem a faixa de taxas de deformação que a calibração dos parâmetros é aplicada.

Na etapa de calibração são definidos os seguintes parâmetros: para o endurecimento quase estático relacionado a deformação $\{\sigma_y, c, \delta^{qs}, A_\infty^{qs}\}$ ⁵; para o endurecimento relacionado a taxa de deformação $\{\delta^{lwr}, \delta^{up}, \xi_1, A_\infty^{lwr}, A_\infty^{up}, \xi_2\}$ e para a sensibilidade instantânea a taxa de deformação $\{\vartheta_1, m, \vartheta_2\}$.

2.4 Particularização para o estado plano de tensões

Esta seção tem o objetivo de apresentar a particularização efetuada nas equações constitutivas do problema tridimensional de elasto-viscoplasticidade, apresentado na Seção 2.3, para o seu emprego na solução de problemas no estado plano de tensões (EPT). O emprego do modelo constitutivo apresentado anteriormente é facilmente particularizado do caso tridimensional para os casos axissimétrico e estado plano de deformações (EPD). As equações constitutivas são apenas modificadas para estarem de acordo com o número de componentes de tensão e deformação presentes em cada análise desejada. Entretanto, o mesmo não ocorre com a mesma facilidade para o caso em EPT. A imposição das condições do EPT nas formulações inelásticas não é uma tarefa simples, tanto do ponto de vista analítico, quanto do ponto de vista numérico. Para a realização dessa tarefa, diversos procedimentos estão propostos na literatura utilizando diferentes abordagens ao nível local⁶ e global.

Entre algumas das abordagens existentes na literatura para tratar o problema no EPT, em de Souza Neto et al., 2008, são citadas três maneiras que serão brevemente apresentadas a seguir:

a) A utilização do mapeamento de retorno tridimensional padrão ao nível local, com a inclusão das condições do EPT adicionadas como uma restrição estrutural ao nível de solução global;

b) A utilização do algoritmo original para o modelo tridimensional sem a realização de nenhuma modificação, com a imposição das restrições do EPT sendo adicionadas por um processo de solução iterativo. Esse processo é realizado ao nível local, ou seja, sem realizar modificações nas estratégias globais de solução. Processo conhecido como *nested iterations*;

⁵Os parâmetros δ^{qs} e A_∞^{qs} são os valores de δ e A_∞ medidos a uma taxa de deformação quase estática, os mesmos são utilizados em etapas subsequentes da calibração para a determinação de $\{\delta^{lwr}, \delta^{up}, A_\infty^{lwr}, A_\infty^{up}\}$.

⁶Ao nível do ponto de integração.

c) Por meio da modificação de todas as equações constitutivas do modelo, aplicando as restrições do EPT com o uso da teoria de projeção de tensão. Esse processo também é realizado ao nível local.

Todos os casos citados anteriormente são equivalentes, as diferenças são decorrentes da forma que a restrição do EPT é imposta. Uma das abordagens mais utilizadas é baseada na teoria do EPT projetado, relatado primeiramente por [Schreyer et al., 1979; Jetteur, 1986; Simo e Taylor, 1986]. Essa abordagem pode ser observada em diversos trabalhos, considerando elastoplasticidade com a função de escoamento do tipo J_2 [Alfano et al., 1998; Montáns, 2003; Ohno et al., 2013], viscoplasticidade [Walz et al., 1990; Ohno et al., 2016] e teoria de dano [Paris e Saanouni, 2011]. Poucos trabalhos empregam uma estratégia de estado plano projetado usando outros critérios de escoamento [Lee et al., 1998; Valoroso e Rosati, 2009b].

No trabalho de Valoroso e Rosati, 2009a, a partir da formulação tridimensional foi desenvolvido um mapeamento de retorno consistente para o EPT, utilizando a teoria da tensão projetada em plasticidade isotrópica. Os autores mostraram, em contraste com as abordagens anteriores [Schreyer et al., 1979; Jetteur, 1986; Simo e Taylor, 1986; Montáns, 2003], que o mapeamento de retorno e o operador tangente consistente podem ser obtidos pela particularização da formulação tridimensional para o EPT. Contudo, para modelos constitutivos que não empregam a função de escoamento do tipo *von Mises*, a obtenção da formulação pode ser uma tarefa muito complexa por meio da teoria da projeção da tensão e muitas vezes outros procedimentos necessitam ser aplicados para a imposição do EPT.

Existem poucos trabalhos na bibliografia relatando a formulação de modelos viscoplásticos em EPT, principalmente utilizando as funções de sobretensão. Um enfoque especial é encontrado nos trabalhos de Paris, 2008 e Paris e Saanouni, 2011, nos quais foi utilizado o conceito da projeção de tensão conforme apresentado por Simo e Taylor, 1986. Nesse caso, a partir do modelo no estado tridimensional é obtida a formulação no EPT para o modelo viscoplástico de Norton (maiores detalhes sobre esse modelo podem ser encontrados em Chaboche, 2008). A teoria da projeção da tensão foi empregada para a obtenção das equações do mapeamento de retorno e a determinação do operador tangente consistente.

2.4.1 Equações no estado plano de tensões projetado

Para a formulação do EPT, a notação de Voigt é convenientemente adotada. O problema de elasticidade linear para materiais isotrópicos é dado pela Equação 2.39. Ao utilizar a notação de Voigt, o mesmo fica reescrito como

$$\begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11}^e \\ e_{22}^e \\ e_{33}^e \\ 2e_{23}^e \\ 2e_{13}^e \\ 2e_{12}^e \end{bmatrix}, \quad (2.70)$$

onde E e ν são, respectivamente, o módulo de elasticidade e o coeficiente de *Poisson*.

De acordo com de Souza Neto et al., 2008, o problema no EPT é definido por envolver apenas tensões e deformações no plano, sendo equivalente ao modelo tridimensional com a adição da restrição do estado plano. Com a imposição das restrições do EPT, assumindo que as componentes de tensão no plano são τ_{11} , τ_{22} e τ_{12} , a Equação 2.70, reduz a

$$\begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11}^e \\ e_{22}^e \\ 2e_{12}^e \end{bmatrix} \longrightarrow \boldsymbol{\tau} = \mathbb{D}_{ps}^e \mathbf{e}^e, \quad (2.71)$$

com a componente de deformação fora do plano dada por $e_{33}^e = \frac{-\nu}{E} (\tau_{11} + \tau_{22})$.

Assim, adotando uma notação compacta, as tensões no estado plano $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}_P \subset \mathcal{S}$, são definidas em forma vetorial

$$\boldsymbol{\tau} := [\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{12}]^T, \quad (2.72)$$

onde \mathcal{S}_P , de acordo com Simo e Taylor, 1986 e Simo e Hughes, 1998, é o subespaço do EPT denotado por $\mathcal{S}_P \subset \mathcal{S}$ e \mathcal{S} sendo o espaço vetorial simétrico de segunda ordem que possui dimensão⁷ $\dim[\mathcal{S}] = 6$. Esse é obtido de $\mathcal{S}_P \subset \mathcal{S}$ levando em consideração as três restrições de tensão, definido por

$$\mathcal{S}_P := \{ \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S} | \tau_{13} = \tau_{23} = \tau_{33} \equiv 0 \}, \quad (2.73)$$

⁷Observe que $\dim(\cdot)$ é a dimensão de (\cdot) .

com $\dim[\mathcal{S}_P] = 3$. Por fim, as deformações no EPT consequentemente são definidas de forma vetorial⁸ por

$$\mathbf{e} := [e_{11}, e_{22}, 2e_{12}]^T . \quad (2.74)$$

Similarmente, o subespaço simétrico do tensor desviador de segunda ordem, denotado por $\mathcal{S}_D \subset \mathcal{S}$, é definido adicionando três restrições em \mathcal{S} , tal que

$$\mathcal{S}_D := \{ \boldsymbol{\tau}^D \in \mathcal{S} \mid \tau_{13}^D = \tau_{23}^D = 0, \text{tr}[\boldsymbol{\tau}^D] := \tau_{kk}^D \equiv 0 \} . \quad (2.75)$$

Além disso, o vetor de tensões desviadoras, $\boldsymbol{\tau}^D \in \mathcal{S}_D \subset \mathcal{S}$, é definido por

$$\boldsymbol{\tau}^D := [\tau_{11}^D, \tau_{22}^D, \tau_{12}^D]^T , \quad (2.76)$$

onde evidentemente $\dim[\mathcal{S}_D] = 3$.

Sendo $\bar{\mathbf{P}}$ um mapeamento linear $\bar{\mathbf{P}} : \mathcal{S}_P \rightarrow \mathcal{S}_D$, é possível conectar o tensor de tensão restrito $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}_P$ diretamente ao seu desviador $\boldsymbol{\tau}^D \in \mathcal{S}_D$, por meio da seguinte operação

$$\boldsymbol{\tau}^D := \bar{\mathbf{P}}\boldsymbol{\tau} , \quad (2.77)$$

onde

$$\bar{\mathbf{P}} := \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} . \quad (2.78)$$

Para formular a versão do EPT diretamente para um critério de escoamento do tipo J_2 , considerando o espaço \mathcal{S}_D é necessário também considerar as deformações desviadoras, descritas de forma vetorial como

$$\mathbf{e}^D := [e_{11}^D, e_{22}^D, 2e_{12}^D]^T , \quad (2.79)$$

com $e_{11}^D := e_{11} - \frac{1}{3}\text{tr}[\mathbf{e}]$ e $e_{22}^D := e_{22} - \frac{1}{3}\text{tr}[\mathbf{e}]$. Por fim, ao expressar as deformações desviadoras em termos das tensões desviadoras e considerar o fator de dois na deformação cisalhante, modificando a forma da matriz presente na Equação 2.78, a Equação 2.79 pode ser obtida diretamente pela operação

$$\mathbf{e}^D := \mathbf{P}\mathbf{e} , \quad (2.80)$$

⁸Observe que $\boldsymbol{\tau}$ e \mathbf{e} são tensores e $\boldsymbol{\tau}^D$ e \mathbf{e}^D são vetores.

com

$$\mathbf{P} := \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} . \quad (2.81)$$

2.4.2 Função de escoamento e evolução inelástica para o estado plano de tensões

A particularização da função de escoamento do modelo tridimensional dada pela Equação 2.41 para o modelo no EPT, é realizada com a utilização do mapeamento dado por \mathbf{P} , definido na seção anterior. Inicialmente optou-se, a partir da expressão para o produto interno das tensões desviadoras sem restrições, estabelecer as expressões para o EPT naturalmente pela imposição das restrições para o estado plano. Deste modo, ao expandir o produto interno da tensão desviadora, considerando as restrições impostas ao EPT ($\tau_{23}^D = \tau_{31}^D = 0$) e também levando em consideração a simetria do tensor de tensões, resulta

$$\boldsymbol{\tau}^D : \boldsymbol{\tau}^D = \tau_{11}^D \tau_{11}^D + \tau_{22}^D \tau_{22}^D + \tau_{33}^D \tau_{33}^D + 2\tau_{12}^D \tau_{12}^D . \quad (2.82)$$

Agora, passando as tensões desviadoras para a sua forma completa e considerando a restrição do estado plano $\tau_{33} = 0$, escreve-se

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}^D : \boldsymbol{\tau}^D &= \left[\tau_{11} - \frac{1}{3}(\tau_{11} + \tau_{22}) \right]^2 + \left[\tau_{22} - \frac{1}{3}(\tau_{11} + \tau_{22}) \right]^2 + \left[-\frac{1}{3}(\tau_{11} + \tau_{22}) \right]^2 + 2(\tau_{12})^2 , \\ &= \frac{2}{3}\tau_{11}^2 + \frac{2}{3}\tau_{22}^2 - \frac{2}{3}\tau_{11}\tau_{22} + 2\tau_{12}^2 . \end{aligned} \quad (2.83)$$

Por fim, conclui-se que para um determinado caso EPT, a seguinte expressão, possui o papel de particularizar a equação para o produto interno das tensões desviadoras, diretamente para o estado plano, simplesmente por meio da utilização da seguinte operação

$$\boldsymbol{\tau}^D : \boldsymbol{\tau}^D = \boldsymbol{\tau}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\tau} = \frac{2}{3}\tau_{11}^2 + \frac{2}{3}\tau_{22}^2 - \frac{2}{3}\tau_{11}\tau_{22} + 2\tau_{12}^2 . \quad (2.84)$$

Substituindo a Equação 2.84 em 2.41, a função de escoamento no EPT $f_{ps}(\boldsymbol{\tau}, A)$, fica dada por

$$f_{ps}(\boldsymbol{\tau}, A) = \sqrt{\boldsymbol{\tau}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\tau}} - R(A) . \quad (2.85)$$

Vale a pena frisar que, apesar da função de escoamento para o caso tridimensional dada pela Equação 2.41 e para o caso restrito ao EPT dada pela Equação 2.85, possuírem diferentes formatos, ambas retornam o mesmo valor para uma dado estado plano estabelecido, ou seja, $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}_P \longrightarrow f = f_{ps}$.

Para complementar a formulação constitutiva viscoplástica para o EPT é estabelecida a relação entre a função de escoamento f_{ps} no EPT, dada pela Equação 2.85, e a função de sobretensão Θ , conforme apresentado na Equação 2.47. Nesse caso, adotando a função de Perić modificada, Equação 2.69, obtém-se

$$f_{ps} = \sqrt{\boldsymbol{\tau}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\tau}} - R(A) = \Theta^{-1}(\dot{\lambda}, A) = R(A) \left[(1 + \vartheta_1 \dot{\lambda})^{1/m} + \vartheta_2 \dot{\lambda} - 1 \right] . \quad (2.86)$$

No entanto, observe que a última equação é uma particularização direta da função viscoplástica de sobretensão, onde o argumento é o $\dot{\lambda}$ e $(\vartheta_1, \vartheta_2, m)$ são parâmetros ajustados no contexto tridimensional. Portanto, para particularizar o modelo tridimensional para o EPT, modificações devem ser realizadas sobre a mesma.

Primeiramente, para a Equação 2.86 ser manuseada com maior facilidade, adota-se o procedimento empregado por Simo e Taylor, 1986, Simo e Hughes, 1998 e de Souza Neto et al., 2008, obtém-se

$$\tilde{f}_{ps} = \frac{1}{2} [f_{ps}(\boldsymbol{\tau}, A) + R(A)]^2 . \quad (2.87)$$

Esse termo está relacionado à função inicial pela expressão

$$f_{ps} = \sqrt{2\tilde{f}_{ps}(\boldsymbol{\tau})} - R(A) = \Theta^{-1}(\dot{\lambda}, A) , \quad (2.88)$$

onde $2\tilde{f}_{ps}(\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{\tau}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\tau}$. Assim, a seguinte relação é obtida:

$$\tilde{f}_{ps} = \frac{1}{3} (\sigma_y + A)^2 \left[\left(1 + \vartheta_1 \dot{\lambda} \right)^{1/m} + \vartheta_2 \dot{\lambda} \right]^2 . \quad (2.89)$$

Para a determinação da evolução inelástica, também se faz necessária a sua particularização para o EPT. A regra de fluxo viscoplástico conforme apresentado na Equação 2.45 para o caso tridimensional é reescrita para o EPT, com $\phi_{\boldsymbol{\tau}}$ dado pela Equação 2.49₁, assumindo a representação conforme a Equação 2.84, escreve-se a seguinte equação para a regra de fluxo

$$\tilde{\mathbf{D}}_{ps}^{vp} = \dot{\lambda} \frac{\partial \phi_{\boldsymbol{\tau}}}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{\tau}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\tau}}} \dot{\lambda} \mathbf{P} \boldsymbol{\tau} , \quad (2.90)$$

e de maneira compacta, reescreve-se

$$\tilde{\mathbf{D}}_{ps}^{vp} = \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{\tau}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\tau}}} \dot{\lambda} \mathbf{P} \boldsymbol{\tau} = \dot{\tilde{\lambda}} \mathbf{P} \boldsymbol{\tau} , \quad (2.91)$$

onde $\tilde{\mathbf{D}}_{ps}^{vp} = [\tilde{D}_{ps11}^{vp}, \tilde{D}_{ps22}^{vp}, 2\tilde{D}_{ps12}^{vp}]^T$, e $\dot{\tilde{\lambda}}$ é convenientemente definido visando facilitar aplicações futuras da expressão anterior, sendo que o mesmo está relacionado com o multiplicador original (tridimensional) $\dot{\lambda}$, por meio da equação

$$\dot{\tilde{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{\tau}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\tau}}} \dot{\lambda} . \quad (2.92)$$

Note que $\mathbf{P} \boldsymbol{\tau}$ não é um vetor unitário, assim o multiplicador $\dot{\tilde{\lambda}}$ não representa a magnitude de $\tilde{\mathbf{D}}_{ps}^{vp}$.

A taxa da deformação viscoplástica acumulada, dada por meio da Equação 2.50, é modificada para o EPT fazendo uso da Equação 2.92, assim escreve-se conforme

$$\dot{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\lambda} = \dot{\tilde{\lambda}} \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\tau}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\tau}} . \quad (2.93)$$

A relação dada na Equação 2.92 é um ponto importante a ser destacado na particularização para o EPT. Tendo em vista que $\dot{\lambda}$ é o argumento original da função viscoplástica tridimensional dada pela Equação 2.69, não é possível simplesmente substituir λ por $\tilde{\lambda}$, com por exemplo

$$\tilde{f}_{ps} = \frac{1}{3} (\sigma_y + A)^2 \left[\left(1 + \vartheta_1 \dot{\tilde{\lambda}} \right)^{1/m} + \vartheta_2 \dot{\tilde{\lambda}} \right]^2 . \quad (2.94)$$

Caso a substituição direta seja realizada, os parâmetros ajustados para o caso tridimensional não poderão ser usados para o problema EPT, fornecendo então resultados incorretos.

A correta substituição passa pela utilização da Equação 2.92, oque resulta em

$$\tilde{f}_{ps} = \frac{1}{3} (\sigma_y + A)^2 \left[\left(1 + \vartheta_1 \dot{\tilde{\lambda}} \sqrt{\boldsymbol{\tau}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\tau}} \right)^{1/m} + \vartheta_2 \dot{\tilde{\lambda}} \sqrt{\boldsymbol{\tau}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\tau}} \right]^2 . \quad (2.95)$$

3 ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO GLOBAL

Neste capítulo serão apresentados conceitos fundamentais que são empregados na solução do problema de valor de contorno global, partindo das equações de equilíbrio até as técnicas de solução implícita e explícita por meio do método dos elementos finitos (MEF). A motivação desse capítulo foi aproximar o leitor ao procedimento utilizado pelo *software* ABAQUS para a solução do problema global.

3.1 Equações de equilíbrio

Baseado em [Malvern, 1969; Belytschko et al., 2000; Gurtin et al., 2010], inicialmente considera-se um corpo em equilíbrio no espaço \mathbb{R}^3 em um dado instante de tempo t , cujo o domínio fechado é dado por Ω e o contorno desse domínio por Γ , conforme apresentado pela Figura 3.1. Ainda, considera-se que em um determinado contorno Γ^t pertencente a Γ , esteja situado um vetor normal \mathbf{n} saindo do contorno e um vetor de tração \mathbf{t} atuando sobre o mesmo. Além disso, assume-se que em todo o domínio Ω , atua uma força por unidade de volume $\rho\mathbf{b}$. Por fim, considera-se uma determinada porção do contorno Γ^v , esteja atribuída a condição de contorno essencial dada por velocidades prescritas $\bar{\mathbf{v}}$. Como hipótese, $\Gamma^t \cup \Gamma^v = \Gamma$ e $\Gamma^t \cap \Gamma^v = \emptyset$.

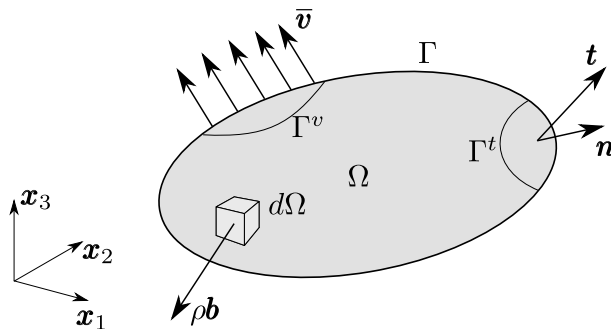


Figura 3.1 – Corpo em equilíbrio no \mathbb{R}^3 no instante t .

A condição de equilíbrio implica que a força resultante dada pela soma das forças atuantes no corpo deve ser igual a força inercial $\rho\dot{\mathbf{v}}$, onde $\dot{\mathbf{v}}$ é a aceleração do corpo. Assim, escreve-se o equilíbrio do corpo em um determinado instante de tempo pela seguinte expressão

$$\int_{\Gamma^t} \mathbf{t} d\Gamma^t + \int_{\Omega} \rho\mathbf{b} d\Omega = \int_{\Omega} \rho\dot{\mathbf{v}} d\Omega . \quad (3.1)$$

Reescrevendo o vetor de tração \mathbf{t} pela equação de *Cauchy*, $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}$, a Equação 3.1, fica

$$\int_{\Gamma^t} \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}d\Gamma^t + \int_{\Omega} \rho\mathbf{b}d\Omega = \int_{\Omega} \rho\dot{\mathbf{v}}d\Omega . \quad (3.2)$$

Por meio da aplicação do teorema de *Gauss*¹, reescreve-se a Equação 3.2 da seguinte forma

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\sigma}d\Omega + \int_{\Omega} \rho\mathbf{b}d\Omega = \int_{\Omega} \rho\dot{\mathbf{v}}d\Omega . \quad (3.3)$$

Assumindo que o integrando seja contínuo e o volume seja arbitrário fica definido o problema de valor de contorno na configuração corrente como: para as condições iniciais $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{v}_0$ e $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t_0) = \boldsymbol{\sigma}_0$, em cada instante de tempo $t \in [t_i, t_f]$, determinar \mathbf{v} que é solução do problema

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x})\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) &= \rho(\mathbf{x})\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) \text{ em } \Omega , \\ \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) &= \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n} \text{ em } \Gamma^t , \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) &= \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) \text{ em } \Gamma^v . \end{aligned} \quad (3.4)$$

3.2 Princípio das potências virtuais

Nesta seção o princípio das potências virtuais é utilizado para a apresentação da formulação fraca associada as equações de equilíbrio desenvolvidas anteriormente na Seção 3.1, para isso utilizou-se como referência as obras de [Lemaitre e Chaboche, 1990; Bonet e Wood, 1997; Belytschko et al., 2000; Gurtin et al., 2010]. O princípio das potências virtuais é definido pela seguinte expressão

$$\delta\mathcal{P}(\mathbf{v}, \delta\mathbf{v}) = \underbrace{\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \delta\mathbf{D} d\Omega}_{\delta\mathcal{P}_{int}} - \underbrace{\left(\int_{\Gamma^t} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{v} d\Gamma^t + \int_{\Omega} \rho\mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{v} d\Omega \right)}_{\delta\mathcal{P}_{ext}} + \underbrace{\int_{\Omega} \rho\dot{\mathbf{v}} \cdot \delta\mathbf{v} d\Omega}_{\delta\mathcal{P}_{ine}} \quad \forall \delta\mathbf{v} \in \mathcal{V} , \quad (3.5)$$

assim, pode ser escrito

$$\delta\mathcal{P}(\mathbf{v}, \delta\mathbf{v}) = \delta\mathcal{P}_{int} - \delta\mathcal{P}_{ext} + \delta\mathcal{P}_{ine} \quad \forall \delta\mathbf{v} \in \mathcal{V} . \quad (3.6)$$

onde $\delta\mathcal{P}_{int}$ representa a potência virtual interna, $\delta\mathcal{P}_{ext}$ a potência virtual externa e $\delta\mathcal{P}_{ine}$ a potência virtual devido aos efeitos inerciais. Onde $\delta\mathbf{v}$, pode ser interpretado como um campo de velocidades virtuais, que possui como hipótese a consideração de sua arbitrariedade.

¹Teorema de Gauss - $\int_{\Gamma} \mathbf{n} \star \mathcal{A} d\Gamma = \int_{\Omega} \nabla \star \mathcal{A}(\cdot) d\Omega$, onde \mathcal{A} é uma função contínua (escalar, vetor ou tensor) e \star é um operador equivalente. [Malvern, 1969]

idade, entretanto, ainda assim o mesmo deve satisfazer as restrições cinemáticas para o problema. Portanto, o espaço das velocidades cinematicamente admissíveis \mathcal{K} , é definido por

$$\mathcal{K} = \{ \mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} \text{ em } \Gamma^v \} , \quad (3.7)$$

e \mathcal{V} é o espaço das velocidades virtuais, definido como

$$\mathcal{V} = \{ \delta \mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \delta \mathbf{v} = 0 \text{ em } \Gamma^v \} . \quad (3.8)$$

Desse modo, o problema agora consiste: para as condições iniciais $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{v}_0$ e $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t_0) = \boldsymbol{\sigma}_0$, determinar o campo cinematicamente admissível $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{K}$ tal que, em cada instante $t \in [t_i, t_f]$ seja satisfeita a equação

$$\delta \mathcal{P}(\mathbf{v}, \delta \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{v} \in \mathcal{V} . \quad (3.9)$$

3.3 Determinação do problema incremental

As equações apresentadas na Seção 3.2, são resolvidas por meio de n incrementos de tempo, ou seja, o instante de tempo $[t_i, t_f]$ é subdividido em n intervalos de tempo. Portanto, todas as componentes dependentes do tempo são discretizadas, de tal forma que a Equação 3.9 e conseqüentemente o problema de valor de contorno ficam dados por: para as condições iniciais $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{v}_0$ e $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t_0) = \boldsymbol{\sigma}_0$, determinar $\mathbf{v}_{n+1} \in \mathcal{K}$, tal que, seja satisfeita a equação

$$\delta \mathcal{P}(\mathbf{v}_{n+1}, \delta \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{v} \in \mathcal{V} , \quad (3.10)$$

com

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{P}(\mathbf{v}_{n+1}, \delta \mathbf{v}) = & \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \delta \mathbf{D}_{n+1} d\Omega - \int_{\Gamma^t} \mathbf{t}_{n+1} \cdot \delta \mathbf{v} d\Gamma^t + \\ & - \int_{\Omega} \rho \mathbf{b}_{n+1} \cdot \delta \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{v}}_{n+1} \cdot \delta \mathbf{v} d\Omega \quad \forall \delta \mathbf{v} \in \mathcal{V} . \end{aligned} \quad (3.11)$$

3.4 Análise estática: Estratégia de solução implícita

Esta seção apresenta a estratégia de solução do problema global para a análise estática usando o método de solução implícito. Nessa abordagem são desconsiderados os efeitos inerciais presentes na Equação 3.10. A chave para a solução do problema global utilizando o método implícito, conforme apresentado por Bonet e Wood, 1997, está na

obtenção da posição de equilíbrio global para o corpo em cada instante de tempo. Como o problema definido pela Equação 3.10 é não linear, uma maneira eficiente para obter a solução para a determinação do equilíbrio é a aplicação de um método numérico, como o método iterativo de *Newton-Raphson*. Para isso, é necessário a linearização da forma fraca das equações de equilíbrio apresentadas anteriormente para a posterior aplicação no método.

3.4.1 Linearização

Neste trabalho o enfoque da linearização será dado apenas no termo correspondente a potência interna \mathcal{P}_{int} , devido ao fato que o modelo constitutivo implica diretamente sobre o mesmo. Apesar do trabalho adotar a configuração corrente para a determinação das equações de equilíbrio, de acordo com Bonet e Wood, 1997, é conveniente realizar a linearização em relação a configuração de referência, pois o volume elementar inicial $d\Omega^0$ é constante durante a linearização. Sendo assim, antes da linearização foi necessária reescrever a potência interna na configuração de referência, e após concluída, retornar a configuração corrente por meio de um algebrismo.

Ao reescrever a taxa de deformação virtual $\delta\mathbf{D}$, fazendo uso da simetria do tensor de *Cauchy*, e visando facilitar a interpretação escrevendo em termos do campo de deslocamentos cinematicamente admissíveis ao invés do campo de velocidades², a potência interna dada pela Equação 3.6, fica reescrita

$$\delta\mathcal{P}_{int}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \delta\mathbf{L} + \boldsymbol{\sigma} : \delta\mathbf{L}^T d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \delta\mathbf{L} d\Omega \quad \forall \delta\mathbf{v} \in \mathcal{V} , \quad (3.12)$$

levando em consideração a Equação 2.10 e escrevendo a Equação 3.12 em termos do volume de referência Ω^0 , fica

$$\delta\mathcal{P}_{int}^0(\mathbf{u}, \delta\mathbf{v}) = \int_{\Omega^0} J \boldsymbol{\sigma} : (\delta\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}) d\Omega^0 \quad \forall \delta\mathbf{v} \in \mathcal{V} , \quad (3.13)$$

por meio de algumas propriedades do traço³ e rearranjado os termos da equação anterior,

²Vale destacar que, de acordo com Belytschko et al., 2000, sabendo que a velocidade é a derivada temporal do deslocamento, o campo de deslocamentos também poderia ser considerado no espaço das respostas cinematicamente admissíveis e no espaço das respostas virtuais, respectivamente nas Equações 3.7 e 3.8

³ $\mathbf{A}:\mathbf{B}=\text{tr}(\mathbf{A}^T\mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{B}\mathbf{A}^T) = \text{tr}(\mathbf{B}^T\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^T)$ onde \mathbf{A} e \mathbf{B} são tensores. [Bonet e Wood, 1997]

escreve-se a potência virtual em termos da primeira tensão de *Piola-Kirchhoff*, como

$$\delta\mathcal{P}_{int}^0(\mathbf{u}, \delta\mathbf{v}) = \int_{\Omega^0} \text{tr}(J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\delta\dot{\mathbf{F}}) d\Omega^0 = \int_{\Omega^0} (J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}) : \delta\dot{\mathbf{F}} d\Omega^0 = \int_{\Omega^0} \mathbf{P} : \delta\dot{\mathbf{F}} d\Omega^0 \quad \forall \delta\mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (3.14)$$

Finalizadas as operações realizadas anteriormente, a linearização da potência interna pode ser estabelecida. Para isso, conforme apresentado em Bonet e Wood, 1997, Simo e Hughes, 1998 e de Souza Neto et al., 2008, utiliza-se o conceito da derivada direcional sobre o funcional da Equação 3.14. Tomando como hipótese que $\delta\mathcal{P}_{int}^0(\mathbf{u}_0, \delta\mathbf{v})$ no instante t_0 , seja conhecido, deste modo pretende-se estabelecer a solução para \mathbf{u} de acordo com

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \tilde{\mathbf{u}}. \quad (3.15)$$

Considerando que $\delta\mathcal{P}_{int}^0$ seja suficientemente regular, por meio de uma expansão por série de *Taylor* do funcional da Equação 3.14 e levando em consideração a Equação 3.15, escreve-se

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{P}_{int}(\mathbf{u}_0 + \tilde{\mathbf{u}}, \delta\mathbf{v}) &= \delta\mathcal{P}_{int}(\mathbf{u}_0, \delta\mathbf{v}) + \left. \frac{d}{d\epsilon} \delta\mathcal{P}_{int}(\mathbf{u}_0 + \epsilon\tilde{\mathbf{u}}, \delta\mathbf{v}) \right|_{\epsilon=0} + \\ &+ O(\mathbf{u}_0 + \epsilon\tilde{\mathbf{u}}, \delta\mathbf{v})^2 = 0 \quad \forall \delta\mathbf{v} \in \mathcal{V}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

e utilizando uma aproximação de primeira ordem surge

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \delta\mathcal{P}_{int}^0(\mathbf{u}_0 + \epsilon\tilde{\mathbf{u}}, \delta\mathbf{v}) \right|_{\epsilon=0} = \delta\mathcal{P}_{int}^0(\mathbf{u}_0, \delta\mathbf{v}) \quad \forall \delta\mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (3.17)$$

Por meio da Equação 3.17, e utilizando a definição presente na Equação 3.14, escreve-se

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \delta\mathcal{P}_{int}^0(\mathbf{u}_0 + \epsilon\tilde{\mathbf{u}}, \delta\mathbf{v}) \right|_{\epsilon=0} = \int_{\Omega^0} \left. \frac{d}{d\epsilon} \mathbf{P}(\mathbf{u}_0 + \epsilon\tilde{\mathbf{u}}, \delta\mathbf{v}) : \delta\dot{\mathbf{F}} \right|_{\epsilon=0} d\Omega^0 \quad \forall \delta\mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad (3.18)$$

como $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{F})$, resulta

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \mathbf{P}(\mathbf{u}_0 + \epsilon\tilde{\mathbf{u}}, \delta\mathbf{v}) \right|_{\epsilon=0} = \left. \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{F}} \right|_{\mathbf{u}_0} \left. \frac{d}{d\epsilon} \mathbf{F}(\mathbf{u}_0 + \epsilon\tilde{\mathbf{u}}, \delta\mathbf{v}) \right|_{\epsilon=0} \quad \forall \delta\mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad (3.19)$$

e \mathbf{F} é linearizado na direção de $\tilde{\mathbf{u}}$, conforme

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \mathbf{F}(\mathbf{u}_0 + \epsilon\tilde{\mathbf{u}}, \delta\mathbf{v}) \right|_{\epsilon=0} = \left. \frac{d}{d\epsilon} \nabla_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}_0 + \epsilon\tilde{\mathbf{u}}, \delta\mathbf{v}) \right|_{\epsilon=0} = \nabla_{\mathbf{X}}\tilde{\mathbf{u}} \quad \forall \delta\mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad (3.20)$$

por fim, rescrevendo a Equação 3.18, surge

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \delta \mathcal{P}_{int}^0(\mathbf{u}_0 + \epsilon \tilde{\mathbf{u}}, \delta \mathbf{v}) \right|_{\epsilon=0} = \int_{\Omega^0} \mathbb{M} : \nabla_{\mathbf{X}} \tilde{\mathbf{u}} : \nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{v} \, d\Omega^0 \quad \forall \delta \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad (3.21)$$

onde \mathbb{M} é o módulo tangente estabelecido por

$$\mathbb{M} = \left. \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{F}} \right|_{\mathbf{u}_0}. \quad (3.22)$$

Finalizada a linearização, realiza-se o retorno para configuração corrente por meio de uma transformação do tipo *push forward* rescrevendo a Equação 3.21 de acordo com a seguinte expressão

$$\int_{\Omega^0} \mathbb{M} : \nabla_{\mathbf{X}} \tilde{\mathbf{u}} : \nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{v} \, d\Omega^0 = \int_{\Omega} J^{-1} \mathbb{M} : \nabla_{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{u}} \mathbf{F} : \nabla_{\mathbf{x}} \delta \mathbf{v} \mathbf{F} \, d\Omega \quad \forall \delta \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad (3.23)$$

rearranjado os termos do lado direito da igualdade acima, a expressão fica escrita como

$$\frac{d}{d\epsilon} \delta \mathcal{P}_{int}(\mathbf{u}_0 + \epsilon \tilde{\mathbf{u}}, \delta \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \bar{\mathbb{M}} : \nabla_{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{u}} : \nabla_{\mathbf{x}} \delta \mathbf{v} \, d\Omega \quad \forall \delta \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad (3.24)$$

onde $\bar{\mathbb{M}}$ é dado por ⁴

$$\bar{\mathbb{M}}_{ijkl} = \frac{1}{J} \mathbb{M}_{imkn} F_{jm} F_{ln}. \quad (3.25)$$

3.4.2 O método de *Newton-Raphson*

O método de *Newton-Raphson*, cujo o seu desenvolvimento detalhado está presente no anexo A deste trabalho, e aqui o mesmo é apresentado para a resolução do problema não linear dado pela Equação 3.11. Conforme Bonet e Wood, 1997 e Perić e Owen, 1998, o problema geral está em encontrar um $\Delta \mathbf{u}_{n+1}^k$ na k -ésima iteração que satisfaça a seguinte equação

$$\delta \mathcal{P}(\mathbf{u}_{n+1}^{k+1}, \delta \mathbf{v}) = \delta \mathcal{P}(\mathbf{u}_{n+1}^k + \Delta \mathbf{u}_{n+1}^k, \delta \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad (3.26)$$

com condições iniciais $\mathbf{u}_{n+1}^0 = \mathbf{u}_n$, onde \mathbf{u}_n é a solução convergida no instante anterior. E conforme a Equação 3.17 escreve-se

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \delta \mathcal{P}(\mathbf{u}_{n+1}^k + \epsilon \Delta \mathbf{u}_{n+1}^k, \delta \mathbf{v}) \right|_{\epsilon=0} = -\delta \mathcal{P}(\mathbf{u}_{n+1}^k, \delta \mathbf{v}) \quad \forall \delta \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (3.27)$$

⁴A expressão foi disposta em notação indicial com o objetivo de facilitar as interpretações posteriores de sua aplicação.

Ao inserir a Equação 3.24 em 3.27, tem como resultado a equação incremental para a potência virtual linearizada

$$\int_{\Omega} \overline{\mathbb{M}}_{n+1}^k : \nabla_{\mathbf{x}} (\Delta \mathbf{u}_{n+1}^k) : \nabla_{\mathbf{x}} \delta \mathbf{v} \, d\Omega = -\delta \mathcal{P}(\mathbf{u}_{n+1}^k, \delta \mathbf{v}) \quad \forall \delta \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad (3.28)$$

onde $\overline{\mathbb{M}}_{n+1}^k$ é o módulo tangente consistente definido na Equação 3.25 para k -ésima iteração e $\delta \mathcal{P}$ em $n+1$ é

$$\delta \mathcal{P}(\mathbf{u}_{n+1}^k, \delta \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \delta \mathbf{D}_{n+1} \, d\Omega - \int_{\Gamma^t} \mathbf{t}_{n+1} \cdot \delta \mathbf{v} \, d\Gamma^t - \int_{\Omega} \rho \mathbf{b}_{n+1} \cdot \delta \mathbf{v} \, d\Omega \quad \forall \delta \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (3.29)$$

Com a solução do sistema em relação a $\Delta \mathbf{u}_{n+1}^k$ são obtidos os incrementos de deslocamentos, os quais são adicionados ao incremento atual para a obtenção de um novo incremento de deslocamentos, de tal forma

$$\mathbf{u}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{u}_{n+1}^k + \Delta \mathbf{u}_{n+1}^k. \quad (3.30)$$

Em seguida é verificado se o resíduo calculado por $\delta \mathcal{P}(\mathbf{u}_{n+1}^{k+1}, \delta \mathbf{v})$ é menor que a tolerância determinada e_{tol}

$$\delta \mathcal{P}(\mathbf{u}_{n+1}^{k+1}, \delta \mathbf{v}) < e_{tol}, \quad (3.31)$$

caso o mesmo seja menor, então é atualizado \mathbf{u}_{n+1} pela seguinte expressão

$$\mathbf{u}_{n+1} \longleftarrow \mathbf{u}_{n+1}^{k+1}, \quad (3.32)$$

caso contrário, ocorre

$$\mathbf{u}_{n+1}^k \longleftarrow \mathbf{u}_{n+1}^{k+1} \text{ e } k = k + 1. \quad (3.33)$$

O método continua até que seja satisfeito a determinação do equilíbrio pelo critério de convergência adotado.

3.5 Análise dinâmica: Estratégia de solução explícita

De acordo com Bathe, 1996, nas soluções dinâmicas o equilíbrio estático no tempo t , é obtido levando em conta os efeitos da dependência das acelerações nas forças de inércia e também, em muitos casos, a dependência das velocidades nas forças de amortecimento.

Segundo Belytschko et al., 2000, o método mais popular dos métodos explícitos utilizado em problemas do campo da mecânica é dado pelo método das diferenças finitas centrais. Em um breve resumo, o método é estabelecido por meio da consideração de que os incrementos de tempo são dados por

$$\Delta t_{n+1/2} = t_{n+1} - t_n, \quad t_{n+1/2} = 1/2(t_{n+1} + t_n), \quad \Delta t_n = t_{n+1/2} - t_{n-1/2}. \quad (3.34)$$

A equação para a velocidade utilizando o método de diferenças centrais é expressa como

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1/2} \equiv \mathbf{v}_{n+1/2} = \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{t_{n+1} - t_n} = \frac{1}{\Delta t_{n+1/2}}(\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n), \quad (3.35)$$

rearranjado os termos da equação anterior é possível escrever

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t_{n+1/2} \dot{\mathbf{u}}_{n+1/2}, \quad (3.36)$$

e a aceleração é dada por

$$\ddot{\mathbf{u}}_n = \frac{\dot{\mathbf{u}}_{n+1/2} - \dot{\mathbf{u}}_{n-1/2}}{t_{n+1/2} - t_{n-1/2}}, \quad (3.37)$$

com

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1/2} = \dot{\mathbf{u}}_{n-1/2} + \Delta t_n \ddot{\mathbf{u}}_n. \quad (3.38)$$

Efetuada a substituição da Equação 3.36 e sua versão para o instante $t_{n-1/2}$ a aceleração é dada para o caso de incrementos de tempo de mesma magnitude da seguinte forma

$$\ddot{\mathbf{u}}_n = \frac{(\mathbf{u}_{n+1} - 2\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n-1})}{(\Delta t_n)^2}. \quad (3.39)$$

Para facilitar a compreensão do método, a partir da forma fraca das equações de equilíbrio, por meio da adoção de uma discretização por elementos finitos padrão, apresentada em obras clássicas sobre o assunto, [Bathe, 1996; Bonet e Wood, 1997; Crisfield, 1997; Belytschko et al., 2000], pode-se escrever a tradicional representação discreta das equações de balanço de movimento nodais, como

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_{int} = \mathbf{f}_{ext}, \quad (3.40)$$

onde \mathbf{M} é a matriz de massa, \mathbf{f}_{int} é o vetor que representa a contribuição devido a força interna dependente do campo de tensões que satisfaz as relações constitutivas e o termo \mathbf{f}_{ext} é o vetor que representa a força devido os carregamentos externos aplicados. Introduzindo o método das diferenças centrais na integração da Equação 3.40 para o dado instante t_n resulta

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}_{ext}(\mathbf{u}_n, t_n) - \mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}_n, t_n) , \quad (3.41)$$

a equação para a atualização das velocidades nodais e deslocamento são obtidas substituindo a Equação 3.41 em 3.38, surgindo

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1/2} = \dot{\mathbf{u}}_{n-1/2} + \Delta t_n \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{f}_{ext}(\mathbf{u}_n, t_n) - \mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}_n, t_n)] , \quad (3.42)$$

para qualquer incremento de tempo n , os deslocamentos \mathbf{u}_n são conhecidos e as forças nodais podem ser determinadas. Os deslocamentos no instante $n+1$ são obtidos por meio da Equação 3.36. Por fim, conforme Bathe, 1996, também é possível, e muito utilizado, a introdução de um termo dependente da velocidade com o propósito de atuar na dissipação de energia na equação resultante.

Observe que as atualizações das velocidades e dos deslocamentos nodais podem serem realizadas sem a solução de qualquer sistema de equações, desde que a matriz \mathbf{M} seja diagonal. Segundo Belytschko et al., 2000, essa é uma característica presente nos métodos explícitos, a integração no tempo das equações de equilíbrio não requer a solução de qualquer equação.

O método explícito integra em relação ao tempo por meio de pequenos incrementos de tempo. Apesar de sua simplicidade é importante frisar que o método explícito é condicionalmente estável, essa condição está relacionada ao Δt utilizado. Se o incremento de tempo usado para o cálculo exceder um incremento de tempo crítico Δt_c , a solução apresentará problemas. Existem na literatura formas de realizar uma estimativa do Δt_c que pode ser usado para determinada aplicação do método. Evidentemente, essa é uma breve introdução sobre o método, maiores detalhes podem ser observados na bibliografia, em [Bathe, 1996; Belytschko et al., 2000; Ibrahimbegovic, 2010; Wu e Gu, 2012].

4 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Nos capítulos anteriores foram apresentados aspectos ligados à formulação do modelo constitutivo empregado neste trabalho, e também das estratégias para a solução do problema global. No capítulo atual serão apresentadas as principais características relacionadas a montagem e a implementação computacional do problema constitutivo desenvolvido anteriormente. Este capítulo segue as mesmas estratégias que as encontradas no trabalho de dos Santos, 2016, porém conforme já mencionado nos capítulos anteriores, seguindo uma interpretação relacionada a configuração corrente, que pode ser observada em Perić e Owen, 1998 e de Souza Neto et al., 2008.

O capítulo atual aborda as etapas de solução do problema constitutivo para o modelo tridimensional, sendo que a partir desse, são obtidos o estado plano de deformações (EPD) e axissimétrico. Também nesse capítulo é abordado o modelo exclusivamente aplicado ao estado plano de tensões (EPT). Vale ressaltar que muitos dos temas tratados na montagem do modelo tridimensional, são igualmente aplicáveis para o modelo restrito ao EPT, sendo assim quando necessário serão apenas citados como referência. Por fim, este capítulo trará uma breve ideia sobre a implementação computacional do modelo constitutivo no *software* de elementos finitos ABAQUS, mediante a implementação das rotinas de usuário que possuem como objetivo determinar o comportamento do material.

4.1 Resolvendo o problema constitutivo para o modelo tridimensional

Esta seção tem como objetivo apresentar como o modelo constitutivo tridimensional adotado, apresentado na Seção 2.3 foi construído para a sua implementação. Seguindo uma abordagem padrão, as taxas de qualquer variável (\cdot) considerando um subintervalo (t_n, t_{n+1}) , são dadas por

$$\frac{d(\cdot)}{dt} \approx \frac{(\cdot)_{n+1} - (\cdot)_n}{\Delta t}, \text{ para } t \in (t_n, t_{n+1}), \quad (4.1)$$

onde $\Delta t := t_{n+1} - t_n$, é o incremento de tempo. A evolução do deformação viscoplástica acumulada ε , dada pela Equação 2.52 é aproximada pelo método de *backward Euler* padrão, de acordo com

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta \lambda, \quad (4.2)$$

de modo que o multiplicador viscoplástico incremental $\Delta\lambda$, deve satisfazer a seguinte relação

$$\Delta\lambda = 0, \text{ para } f_{n+1} \leq 0, \quad (4.3)$$

e pela Equação 2.47 escreve-se

$$f(\boldsymbol{\tau}_{n+1}, A_{n+1}) = \|\boldsymbol{\tau}_{n+1}^D\| - \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_y + A_{n+1}) = \bar{\Theta}^{-1}(\Delta\lambda, A_{n+1}), \quad (4.4)$$

para $f_{n+1} > 0$. Observe que a função $\bar{\Theta}^{-1}$ é forma algorítmica de Θ^{-1} , que é dada pelas Equações 2.68 e 2.69. A evolução da variável relacionada ao endurecimento A , é obtida por meio da Equação 2.61 considerando $\dot{\varepsilon} \approx \frac{\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n}{\Delta t}$ para um incremento de tempo entre (t_n, t_{n+1}) , assim resultando na equação

$$A_{n+1} = A_n + \bar{A}_{\infty n+1} c(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n) + [\bar{A}_{\infty n+1}(1 + c\varepsilon_n) - A_n] [1 - \exp(-\delta_{n+1}(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n))], \quad (4.5)$$

com os parâmetros δ_{n+1} e $\bar{A}_{\infty n+1}$. O parâmetro δ_{n+1} é calculado por meio das Equações 2.63 e 2.65, resultando assim

$$\delta_{n+1} = \delta^{lwr} + \left[\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\langle \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n - \Delta t \dot{\varepsilon}_{lwr} \rangle}{\dot{\varepsilon}_{up} - \dot{\varepsilon}_{lwr}} \right) \right]^{\xi_1} (\delta^{up} - \delta^{lwr}). \quad (4.6)$$

O parâmetro $\bar{A}_{\infty n+1}$ presente na Equação 4.5 é calculado por meio das Equações 2.64, 2.65 e 2.66. Para isso, considerando um carregamento em que n distintas taxas de deformações constantes são aplicadas, para o incremento $(n+1)$ o atual valor efetivo referente à dependência da história da taxa de deformação em A_∞ dado pela Equação 2.66, é escrito

$$\bar{A}_{\infty n+1} = \frac{1}{\varepsilon_{n+1}} \left[\sum_{i=1}^n A_{\infty i} \Delta\varepsilon_i + A_{\infty n+1} (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n) \right], \quad (4.7)$$

onde $A_{\infty i} = A_\infty(\dot{\varepsilon}_i)$, $\Delta\varepsilon_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}$ e ε_n é a deformação viscoplástica acumulada total no instante n . Sendo assim, a Equação 4.7 pode ser rescrita como

$$\bar{A}_{\infty n+1} = \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}} \bar{A}_{\infty n} + \left(1 - \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}} \right) A_{\infty n+1}, \quad (4.8)$$

onde $A_{\infty n} = \frac{1}{\varepsilon_n} \sum_{i=1}^n A_{\infty i} \Delta\varepsilon_i$. E $A_{\infty n+1}$ é obtida pela Equação 2.64, resultando na seguinte expressão

$$A_{\infty n+1} = A_\infty^{lwr} + \left[\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\langle \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n - \Delta t \dot{\varepsilon}_{lwr} \rangle}{\dot{\varepsilon}_{up} - \dot{\varepsilon}_{lwr}} \right) \right]^{\xi_2} (A_\infty^{up} - A_\infty^{lwr}). \quad (4.9)$$

Também para a solução do problema constitutivo é conveniente realizar a discretização da regra de fluxo viscoplástico. A partir da definição presente na Equação 2.19, ao isolar $\dot{\mathbf{F}}^{vp}$ e realizar uma pós-multiplicação em ambos os lados da equação por \mathbf{F}^{vp} , escreve-se

$$\dot{\mathbf{F}}^{vp} = \mathbf{R}^{e^T} \tilde{\mathbf{D}}^{vp} \mathbf{R}^e \mathbf{F}^{vp} . \quad (4.10)$$

A partir de Equação 4.10, para discretizar a regra de fluxo viscoplástico, se faz necessário a utilização de um mapeamento do tipo *backward* exponencial¹ para a sua integração [Weber e Anand, 1990; Eterovic e Bathe, 1990; Perić e Owen, 1998; de Souza Neto et al., 2008], resultando em

$$\mathbf{F}_{n+1}^{vp} = \exp \left(\mathbf{R}_{n+1}^{e^T} \Delta t \tilde{\mathbf{D}}_{n+1}^{vp} \mathbf{R}_{n+1}^e \right) \mathbf{F}_n^{vp} . \quad (4.11)$$

Rescrevendo a Equação 4.11 pela condição da isotropia do tensor exponencial² e associando a Equação 2.51, surge

$$\mathbf{F}_{n+1}^{vp} = \mathbf{R}_{n+1}^{e^T} \exp \left(\Delta \lambda \mathbf{N}_{\tau_{n+1}} \right) \mathbf{R}_{n+1}^e \mathbf{F}_n^{vp} . \quad (4.12)$$

Sendo assim, para a solução do problema constitutivo é necessário a utilização de um método numérico a fim de encontrar a solução do sistema de equações não lineares definido pelas Equações 4.2, 4.4, 4.5, 4.6, 4.8 e 4.12 em relação as seguintes incógnitas $\{\mathbf{F}_{n+1}^{vp}, \varepsilon_{n+1}, \Delta \lambda, A_{n+1}, \delta_{n+1}, \bar{A}_{\infty_{n+1}}\}$, e com

$$\begin{aligned} \tau_{n+1} &= \mathbb{D}^e : \mathbf{e}_{n+1}^e , \\ \mathbf{e}_{n+1}^e &= \ln(\mathbf{V}_{n+1}^e) . \end{aligned} \quad (4.13)$$

4.1.1 Algoritmo de predição elástica e correção viscoplástica

Com base nas equações constitutivas do modelo adotado, apresentadas anteriormente, o objetivo desta seção é estabelecer o algoritmo a ser utilizado para a solução do problema constitutivo. Seguindo os trabalhos de dos Santos, 2016, o algoritmo que foi adotado para essa finalidade é do tipo preditor/corretor. O mesmo resumidamente

¹Considerando uma equação diferencial ordinária: $\dot{\mathbf{Z}}_{n+1}(t) = \mathbf{Z}\mathbf{Y}(t)$ com a condição inicial $\mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{Y}_0$, onde \mathbf{Z} e \mathbf{Y} são tensores constantes, aplicando o mapeamento exponencial resulta em: $\mathbf{Z}_{n+1} = \exp[\Delta t \mathbf{Y}(t_{n+1})] \mathbf{Z}_n$. [de Souza Neto et al., 2008]

²Para qualquer tensor ortogonal \mathbf{Q} , se mantém: $\exp[\mathbf{Q}\mathbf{Z}\mathbf{Q}^T] = \mathbf{Q} \exp[\mathbf{Z}] \mathbf{Q}^T$, e deste modo o tensor exponencial é uma função isotrópica. [de Souza Neto et al., 2008]

apresenta duas fases: a primeira chamada de predição elástica e a segunda de correção viscoplástica. Na predição elástica, assume-se que todo o incremento de deformação dado seja elástico. Já na correção viscoplástica, caso o incremento de deformação não seja puramente elástico durante a verificação executada na fase anterior, irão ser efetuadas as correções nas variáveis do problema.

Sendo assim, a consideração da existência de um estado totalmente elástico implica em

$$\dot{\mathbf{F}}^{vp} = 0 \text{ e } \dot{A} = 0 , \quad (4.14)$$

e também os seus estados incrementais de teste, conforme

$$\mathbf{F}_{n+1}^{vp\text{teste}} = \mathbf{F}_n^{vp} \text{ e } A_{n+1}^{\text{teste}} = A_n . \quad (4.15)$$

A decomposição do gradiente de deformação através das configurações n e $n + 1$, conforme Figura 4.1, é

$$\mathbf{F}_u = \mathbf{F}_{n+1}(\mathbf{F}_n)^{-1} , \quad (4.16)$$

e \mathbf{F}_n é definido como

$$\mathbf{F}_n = \mathbf{F}_n^e \mathbf{F}_n^p , \quad (4.17)$$

sendo o gradiente de deformação elástico de teste definido por

$$\mathbf{F}_{n+1}^{e\text{teste}} = \mathbf{F}_u \mathbf{F}_n^e , \quad (4.18)$$

e por fim, pelas Equações 4.16 e 4.17, rearranjando os termos rescreve-se a equação anterior como

$$\mathbf{F}_{n+1}^{e\text{teste}} = \mathbf{F}_{n+1} (\mathbf{F}_n^{vp})^{-1} . \quad (4.19)$$

Sendo assim, o estado elástico de teste é definido pelo gradiente de deformação elástico \mathbf{F}^e , e também pela medida de deformação elástica, que neste trabalho, conforme citado anteriormente a medida de deformação é dada na configuração euleriana por

$$\mathbf{e}_{n+1}^{e\text{teste}} = \frac{1}{2} \ln \left(\mathbf{B}_{n+1}^{e\text{teste}} \right) , \quad (4.20)$$

onde $\mathbf{B}_{n+1}^{e\text{teste}}$ é o tensor de *Green* à esquerda elástico de teste. O estado de tensão é definido pela Equação 2.40₁, por meio da relação constitutiva, $\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{\text{teste}} = \mathbb{D}^e : \mathbf{e}_{n+1}^{e\text{teste}}$. Desse modo, se o estado é elástico, então

$$f(\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{\text{teste}}, A_{n+1}^{\text{teste}}) \leq 0 , \quad (4.21)$$

existindo uma única solução possível para o problema, e todas as variáveis são atualizadas de acordo com

$$(\cdot)_{n+1} \leftarrow (\cdot)_{n+1}^{\text{teste}} . \quad (4.22)$$

Na Tabela 4.1 é apresentado resumidamente as etapas de cálculo do algoritmo para a fase de predição elástica.

Tabela 4.1 – Resumo estado elástico de teste

1-Resumo – Algoritmo Preditor - Estado elástico de teste	
(a) Primeiramente assume-se o estado teste, considerando todo o incremento elástico	
	$\mathbf{e}_{n+1}^{e^{\text{teste}}} = \mathbf{e}_n^e + \Delta \mathbf{e} , \quad (4.23)$
	$A_{n+1}^{\text{teste}} = A_n . \quad (4.24)$
(b) Cálculo da tensão de teste por meio da relação constitutiva elástica	
	$\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{\text{teste}} = \mathbb{D}^e : \mathbf{e}_{n+1}^{e^{\text{teste}}} . \quad (4.25)$
(c) Verificação do critério de escoamento	
	$f(\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{\text{teste}}, A_{n+1}^{\text{teste}}) \leq 0 . \quad (4.26)$
Se o estado elástico de teste está dentro do domínio elástico ou sobre a superfície de escoamento então o incremento de deformação é elástico e neste caso apenas atualiza-se as variáveis usando	
	$(\cdot)_{n+1} \leftarrow (\cdot)_{n+1}^{\text{teste}} , \quad (4.27)$
e algoritmo é finalizado ou se encaminha para o próximo incremento de $\Delta \mathbf{e}$. Caso $f(\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{\text{teste}}, A_{n+1}^{\text{teste}}) > 0$, ou seja o valor encontra-se fora do domínio elástico, sendo necessárias efetuar correções, e desta forma encaminha-se para a segunda parte do algoritmo.	

Se o incremento não for totalmente elástico, ou seja, na verificação do critério de escoamento o valor encontrado superou o limite imposto pela função de escoamento, ou seja

$$f(\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{\text{teste}}, A_{n+1}^{\text{teste}}) > 0 , \quad (4.28)$$

então se faz necessário a resolução de um sistema de equações não lineares dado pelas Equações 4.2, 4.4, 4.5, 4.6, 4.8 e 4.12 em relação as incógnitas $\{\mathbf{F}_{n+1}^{vp}, \varepsilon_{n+1}, \Delta \lambda, A_{n+1}, \delta_{n+1}, \bar{A}_{\infty n+1}\}$ para a solução do problema.

No entanto, com o objetivo de facilitar a solução do sistema determinado anteriormente, modificações nas equações estabelecidas podem ser realizadas. Primeiramente, tomando a Equação 4.12, invertendo ambos os lados da mesma e pré-multiplicando por \mathbf{F}_{n+1} , tendo em vista a Equação 2.11, escreve-se

$$\mathbf{F}_{n+1}^e = \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{R}_{n+1}^{eT} \exp(\Delta\lambda \mathbf{N}_{\tau_{n+1}})^{-1} \mathbf{R}_{n+1}^e (\mathbf{F}_n^{vp})^{-1}, \quad (4.29)$$

em seguida, por meio da Equação 4.19, e pela isotropia surge

$$\mathbf{F}_{n+1}^e = \mathbf{F}_{n+1}^{e\text{teste}} \mathbf{R}_{n+1}^{eT} \exp(\Delta\lambda \mathbf{N}_{\tau_{n+1}})^{-1} \mathbf{R}_{n+1}^e, \quad (4.30)$$

por fim, utilizando uma propriedade do tensor exponencial³, escreve-se

$$\mathbf{F}_{n+1}^e = \mathbf{F}_{n+1}^{e\text{teste}} \mathbf{R}_{n+1}^{eT} \exp(-\Delta\lambda \mathbf{N}_{\tau_{n+1}}) \mathbf{R}_{n+1}^e. \quad (4.31)$$

A partir da Equação 4.31, conforme Perić e Owen, 1998 e de Souza Neto et al., 2008, é possível realizar algumas operações algébricas, de modo a obtenção de uma equação para a deformação logarítmica elástica e com isso a simplificação das equações presentes no mapeamento de retorno. Primeiramente, partindo da Equação 4.31, pós-multiplicando ambos os lados da mesma por \mathbf{R}_{n+1}^{eT} , surge

$$\mathbf{V}_{n+1}^e = \mathbf{F}_{n+1}^{e\text{teste}} \mathbf{R}_{n+1}^{eT} \exp(-\Delta\lambda \mathbf{N}_{\tau_{n+1}}), \quad (4.32)$$

invertendo o termo exponencial escreve-se

$$\mathbf{V}_{n+1}^e \exp(\Delta\lambda \mathbf{N}_{\tau_{n+1}}) = \mathbf{F}_{n+1}^{e\text{teste}} \mathbf{R}_{n+1}^{eT}, \quad (4.33)$$

agora, pós-multiplicando ambos os lados pela transposta do termo exponencial e por meio de mais uma propriedade do tensor exponencial⁴, resulta em

$$\mathbf{V}_{n+1}^e \exp(2\Delta\lambda \mathbf{N}_{\tau_{n+1}}) \mathbf{V}_{n+1}^e = \left(\mathbf{V}_{n+1}^{e\text{teste}} \right)^2, \quad (4.34)$$

devido a suposição elástica isotrópica, \mathbf{V}^e e $\boldsymbol{\tau}$ comutam. Sendo assim, rearranjando os termos e tomando a raiz quadrada de ambos os lados da Equação 4.34, escreve-se

$$\mathbf{V}_{n+1}^e = \mathbf{V}_{n+1}^{e\text{teste}} \exp(-\Delta\lambda \mathbf{N}_{\tau_{n+1}}), \quad (4.35)$$

³Propriedade: $\exp[-\mathbf{Z}] = (\exp[\mathbf{Z}])^{-1}$, onde \mathbf{Z} é um tensor genérico. [de Souza Neto et al., 2008]

⁴Propriedade: $\exp[n\mathbf{Z}] = (\exp[\mathbf{Z}])^n$, onde \mathbf{Z} é um tensor genérico e n é um escalar. [de Souza Neto et al., 2008]

e por fim, tomando o logaritmo do tensor de ambos os lados da Equação 4.35 , resulta na seguinte expressão para a versão euleriana da deformação logarítmica

$$\mathbf{e}_{n+1}^e = \mathbf{e}_{n+1}^{e^{\text{teste}}} - \Delta\lambda \mathbf{N}_{\boldsymbol{\tau}_{n+1}} . \quad (4.36)$$

Com a manipulação algébrica executada anteriormente, o sistema de equações a serem resolvidas torna-se mais simples, ou seja, agora se faz necessário a resolução do sistema de equações não lineares , dado pelas Equações 4.2, 4.4, 4.5, 4.6, 4.8 e 4.36 em relação as seguintes incógnitas $\{\mathbf{e}_{n+1}^e, \varepsilon_{n+1}, \Delta\lambda, A_{n+1}, \delta_{n+1}, \bar{A}_{\infty_{n+1}}\}$.

Além disso, neste ponto do desenvolvimento das equações que solucionam o problema constitutivo, outras adequações podem ser executadas para a redução do número de incógnitas presentes no mapeamento de retorno. Seguindo o mesmo procedimento que apresentado em dos Santos, 2016, é possível reduzir as Equações 4.4 e 4.36 para uma única equação escalar. O procedimento inicia-se pela decomposição da deformação em parte volumétrica e parte desviadora

$$\mathbf{e}^e = \mathbf{e}^{e^V} + \mathbf{e}^{e^D} , \quad (4.37)$$

onde

$$\mathbf{e}^{e^V} = \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{e}^e) \mathbf{I} . \quad (4.38)$$

Conseqüentemente a Equação 4.36, também pode ser decomposta em parte volumétrica e parte desviadora de acordo com

$$(\mathbf{e}^{e^V})_{n+1} = (\mathbf{e}^{e^V})_{n+1}^{\text{teste}} , \quad (4.39)$$

$$(\mathbf{e}^{e^D})_{n+1} = (\mathbf{e}^{e^D})_{n+1}^{\text{teste}} - \Delta\lambda \mathbf{N}_{\boldsymbol{\tau}_{n+1}} . \quad (4.40)$$

Devido a consideração do critério de *von Mises*, a regra de fluxo associativa e conforme observado nas equações anteriores, a correção viscoplástica dada pelo algoritmo é realizada somente na parte desviadora da deformação. As partes da deformação volumétrica \mathbf{e}^{e^V} , e desviadora \mathbf{e}^{e^D} , estão relacionados com o a tensão $\boldsymbol{\tau}$, pelas seguintes expressões

$$\text{tr}(\boldsymbol{\tau}) \mathbf{I} = 9\kappa \mathbf{e}^{e^V} \implies \text{tr}(\boldsymbol{\tau}) = 3\kappa \text{tr}(\mathbf{e}^e) , \quad (4.41)$$

e

$$\boldsymbol{\tau}^D = 2\mu \mathbf{e}^{e^D} . \quad (4.42)$$

Assim, com base na Equação 4.40, a Equação 4.42 pode ser reescrita conforme a seguinte expressão

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1}^D = \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{D\text{teste}} - \Delta\lambda 2\mu \mathbf{N}_{\boldsymbol{\tau}_{n+1}} . \quad (4.43)$$

Manipulando a Equação 4.43 é possível mostrar que tanto a tensão desviadora atual $\boldsymbol{\tau}_{n+1}^D$, quanto a tensão desviadora de teste $\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{D\text{teste}}$ são tensores colineares, isto é

$$\mathbf{N}_{\boldsymbol{\tau}_{n+1}} = \mathbf{N}_{\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{\text{teste}}} , \quad (4.44)$$

resultando a partir da Equação 4.43 em

$$\|\boldsymbol{\tau}_{n+1}^D\| = \|\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{D\text{teste}}\| - \Delta\lambda 2\mu . \quad (4.45)$$

Desse modo, ao substituir a Equação 4.45 em 4.4, tem-se como resultado a seguinte expressão

$$\|\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{D\text{teste}}\| - \Delta\lambda 2\mu - \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_y + A_{n+1}) = \bar{\Theta}^{-1}(\Delta\lambda, A_{n+1}) , \quad (4.46)$$

assim, reduzindo as Equações 4.4 e 4.32 para a uma única equação escalar.

Finalmente, uma terceira e última simplificação nas equações remanescentes pode ser realizada, ao executar a substituição da Equação 4.2 em 4.5 à 4.8, resultando nas seguintes expressões

$$A_{n+1} = A_n + \bar{A}_{\infty n+1} c \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\lambda + [\bar{A}_{\infty n+1} (1 + c\varepsilon_n) - A_n] \left[1 - \exp\left(-\delta_{n+1} \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\lambda\right) \right] , \quad (4.47)$$

$$\delta_{n+1} = \delta^{lwr} + \left[\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\langle \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\lambda - \Delta t \dot{\varepsilon}_{lwr} \rangle}{\dot{\varepsilon}_{up} - \dot{\varepsilon}_{lwr}} \right) \right]^{\xi_1} (\delta^{up} - \delta^{lwr}) , \quad (4.48)$$

$$\bar{A}_{\infty n+1} = \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_n + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\lambda} \bar{A}_{\infty n} + \left(1 - \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_n + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\lambda} \right) A_{\infty n+1} , \quad (4.49)$$

com

$$A_{\infty n+1} = A_{\infty}^{lwr} + \left[\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\langle \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\lambda - \Delta t \dot{\varepsilon}_{lwr} \rangle}{\dot{\varepsilon}_{up} - \dot{\varepsilon}_{lwr}} \right) \right]^{\xi_2} (A_{\infty}^{up} - A_{\infty}^{lwr}) , \quad (4.50)$$

desse modo, o sistema de equações não lineares a ser resolvido é dado pelas Equações 4.46 à 4.49 em relação as seguintes incógnitas $\{\Delta\lambda, A_{n+1}, \delta_{n+1}, \bar{A}_{\infty n+1}\}$.

Na tabela a seguir se encontra um resumo da etapa de correção viscoplástica para o problema constitutivo desenvolvido anteriormente.

Tabela 4.2 – Resumo do estado corretor viscoplástico para o modelo tridimensional.

2 - Resumo – Algoritmo corretor - Mapeamento de retorno
<p>(a) Como $f(\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{\text{teste}}, A_{n+1}^{\text{teste}}) > 0$ então $\Delta\lambda > 0$ e as variáveis $(\Delta\lambda, A_{n+1}, \delta_{n+1}, \bar{A}_{\infty_{n+1}})$ são tais que $f(\boldsymbol{\tau}_{n+1}, A_{n+1}) = \bar{\Theta}^{-1}$. A solução do problema requer a solução do sistema de equações dado pela Equação 4.51</p> $\begin{cases} f_1 = \ \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{D^{\text{teste}}}\ - \Delta\lambda 2\mu - \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_y + A_{n+1}) - \bar{\Theta}^{-1}(\Delta\lambda, A_{n+1}) ; \\ f_2 = A_{n+1} - A_n - \bar{A}_{\infty_{n+1}} c \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\lambda - [\bar{A}_{\infty_{n+1}}(1 + c\varepsilon_n) - A_n] \left[1 - \exp\left(-\delta_{n+1} \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\lambda\right) \right] ; \\ f_3 = \delta_{n+1} - \delta^{lwr} - \left[\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\langle \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\lambda - \Delta t \dot{\varepsilon}_{lwr} \rangle}{\dot{\varepsilon}_{up} - \dot{\varepsilon}_{lwr}} \right) \right]^{\xi_1} (\delta^{up} - \delta^{lwr}) ; \\ f_4 = \bar{A}_{\infty_{n+1}} - \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_n + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\lambda} \bar{A}_{\infty_n} - \left(1 - \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_n + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\lambda} \right) A_{\infty_{n+1}} . \end{cases} \quad (4.51)$ <p>(b) Com a solução do sistema de equações, atualiza-se $\{\boldsymbol{\tau}_{n+1}, \mathbf{e}_{n+1}^e$ e $\varepsilon_{n+1}\}$ de acordo com as seguintes equações</p> $\boldsymbol{\tau}_{n+1}^D = \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{D^{\text{teste}}} - \Delta\lambda 2\mu \mathbf{N}_{\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{\text{teste}}} , \quad (4.52)$ $\boldsymbol{\tau}_{n+1} = \boldsymbol{\tau}_{n+1}^D + \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{\text{teste}}) \mathbf{I} , \quad (4.53)$ $\mathbf{e}_{n+1}^e = \mathbf{e}_{n+1}^{e^{\text{teste}}} - \Delta\lambda \mathbf{N}_{\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{\text{teste}}} , \quad (4.54)$ $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{n+1} + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\lambda , \quad (4.55)$ $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \det(\mathbf{F}_{n+1}^{-1}) \boldsymbol{\tau}_{n+1} , \quad (4.56)$ <p>e o algoritmo é finalizado ou se encaminha para o próximo incremento de $\Delta\mathbf{e}$.</p>

O sistema de equações dado pela Equação 4.51 é resolvido pelo método de *Newton-Raphson* de acordo com o que é apresentado no Apêndice A. A convergência do método é atingida quando o erro admissível dado pela norma euclidiana dos valores encontrados em \mathbf{f} for menor ou igual a e_{tol} , ou seja, $\|\mathbf{f}\| \leq e_{tol}$, e ainda assim menor que o número máximo de iterações permitido, n_{max} . As derivadas das equações não lineares \mathbf{f} , para o método de *Newton-Raphson* do modelo tridimensional estão presentes no Apêndice B.

Na Figura 4.1, é ilustrado as interpretações geométricas referentes as decomposições dos gradientes de deformação entre os instantes de tempo t_i e t_{n+1} .

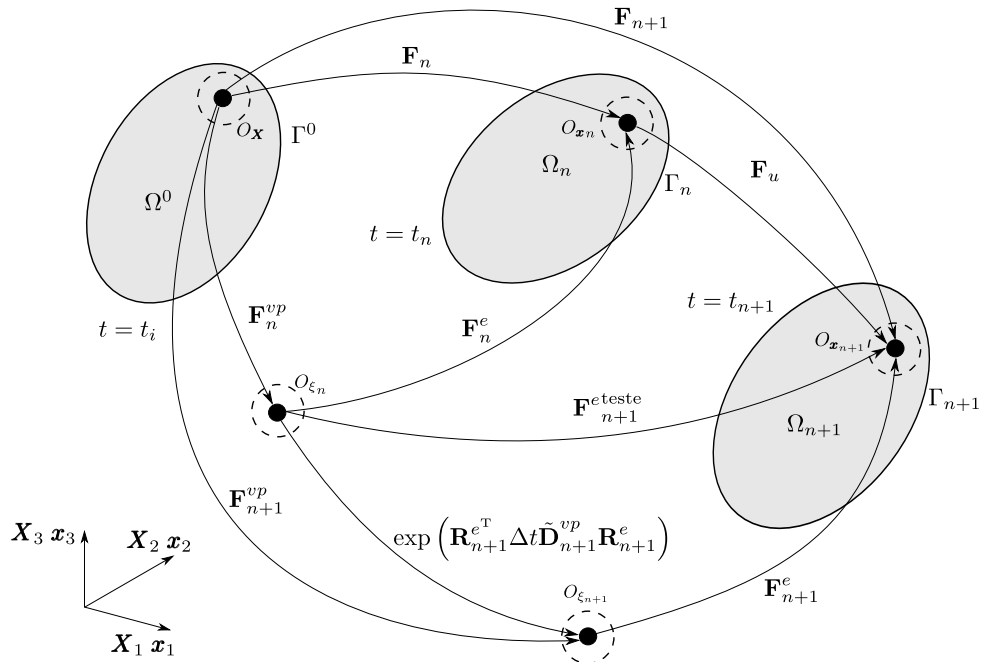


Figura 4.1 – Interpretações geométricas referente as decomposições do gradiente de deformação entre o instante inicial, o instante n e o instante $n + 1$. [Adaptado de Bonet e Wood, 1997]

4.1.2 Determinação do módulo consistente tangente

Nesta seção será realizada a determinação do módulo consistente tangente a partir da linearização realizada para o método de *Newton-Raphson* presente na Seção 3.4.1. Desse modo, escrevendo indicialmente o termo \mathbb{M} , encontrado na Equação 3.25, o mesmo fica estabelecido como

$$\mathbb{M}_{imkn} = \frac{\partial P_{im}}{\partial F_{kn}}, \quad (4.57)$$

por meio da definição da primeira tensão de *Piola Kirchhoff* $\mathbf{P} = \mathbf{J}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} = \boldsymbol{\tau}\mathbf{F}^{-T}$ reescreve-se a Equação 4.57 de acordo com

$$\mathbb{M}_{imkn} = \frac{\partial}{\partial F_{kn}} (\tau_{ip} F_{mp}^{-1}) = \frac{\partial \tau_{ip}}{\partial F_{kn}} F_{mp}^{-1} + \tau_{ip} \frac{\partial F_{mp}^{-1}}{\partial F_{kn}}, \quad (4.58)$$

pela relação da derivada da função inversa⁵, escreve-se

$$\frac{\partial F_{mp}^{-1}}{\partial F_{kn}} = -F_{mk}^{-1} F_{np}^{-1}, \quad (4.59)$$

⁵ $\frac{d}{d\mathbf{X}}(\mathbf{X}^{-1}) = -\mathbf{X}_{ik}^{-1} \mathbf{X}_{lj}^{-1}$, onde \mathbf{X} é um tensor. [de Souza Neto et al., 2008]

substituindo o resultado na Equação 4.58, assim obtendo

$$\mathbb{M}_{imkn} = \frac{\partial \tau_{ip}}{\partial \mathbf{F}_{kn}} \mathbf{F}_{mp}^{-1} - \tau_{ip} \mathbf{F}_{mk}^{-1} \mathbf{F}_{np}^{-1}, \quad (4.60)$$

ao realizar substituição da Equação 4.60 em 3.25, após uma manipulação algébrica escreve-se

$$\overline{\mathbb{M}}_{ijkl} = \frac{1}{J} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial \mathbf{F}_{kn}} \mathbf{F}_{ln} - \sigma_{il} \delta_{jk}. \quad (4.61)$$

Por fim, buscando a determinação da expressão final para o módulo consistente tangente, segundo Perić e Owen, 1998 e de Souza Neto et al., 2008 a tensão de *Kirchhoff* atualizada, $\boldsymbol{\tau}_{n+1}$, é função de um conjunto de variáveis internas, $\boldsymbol{\alpha}$, dada no instante t_n e da medida de deformação elástica de teste $\mathbf{e}_{n+1}^{e\text{teste}}$, sendo assim escreve-se

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1} = \hat{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\alpha}_n, \mathbf{e}_{n+1}^{e\text{teste}}), \quad (4.62)$$

levando em consideração que $\mathbf{e}_{n+1}^{e\text{teste}}$ é função de $\mathbf{B}_{n+1}^{e\text{teste}}$ e que por sua vez é função de \mathbf{F}_{n+1}^{vp} e \mathbf{F}_{n+1} , define-se uma função constitutiva incremental $\hat{\boldsymbol{\tau}}$, a qual é dada pela seguinte equação

$$\hat{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\alpha}_n, \mathbf{e}_{n+1}^{e\text{teste}}) := \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\alpha}_n, \mathbf{e}_{n+1}^{e\text{teste}}(\mathbf{B}_{n+1}^{e\text{teste}}(\mathbf{F}_n^{vp}, \mathbf{F}_{n+1}))) . \quad (4.63)$$

O termo $\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial \mathbf{F}_{kn}}$ presente na Equação 4.61, é obtido por meio da aplicação da regra da cadeia na Equação 4.63, resultando em

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\tau}}}{\partial \mathbf{F}_{n+1}} = \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\tau}}}{\partial \mathbf{e}_{n+1}^{e\text{teste}}} : \frac{\partial \mathbf{e}_{n+1}^{e\text{teste}}}{\partial \mathbf{B}_{n+1}^{e\text{teste}}} : \frac{\partial \mathbf{B}_{n+1}^{e\text{teste}}}{\partial \mathbf{F}_{n+1}^e}. \quad (4.64)$$

Ao realizar substituição da Equação 4.64 em 4.61, e após algumas operações algébricas, resulta na seguinte expressão para operador tangente consistente

$$\overline{\mathbb{M}}_{ijkl} = \frac{1}{2J} [\mathbb{D}_{n+1} : \mathbb{L}_{n+1} : \mathbb{B}_{n+1}] - \sigma_{il} \delta_{jk}, \quad (4.65)$$

com tensor \mathbb{L}_{n+1} definido por

$$\mathbb{L}_{n+1} = \frac{\partial \ln(\mathbf{B}_{n+1}^{e\text{teste}})}{\partial \mathbf{B}_{n+1}^{e\text{teste}}}, \quad (4.66)$$

e o tensor \mathbb{B}_{n+1} por

$$(\mathbb{B}_{n+1})_{ijkl} = \delta_{ik} \left(\mathbf{B}_{n+1}^{e_{teste}} \right)_{jl} + \delta_{jk} \left(\mathbf{B}_{n+1}^{e_{teste}} \right)_{il} . \quad (4.67)$$

Finalmente, observe que \mathbb{D}_{n+1} na Equação 4.65, é o único termo com dependência da resposta do material e neste trabalho o enfoque será dado em sua determinação. Durante a fase puramente elástica o mesmo é determinado pelo tensor constitutivo elástico \mathbb{D}_{n+1}^e , entretanto durante a fase elasto-viscoplástica é dado pelo módulo viscoplástico consistente tangente \mathbb{D}_{n+1}^{vp} , dado por

$$\mathbb{D}_{n+1}^{vp} = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_{n+1}}{\partial \mathbf{e}_{n+1}^{e_{teste}}} . \quad (4.68)$$

As expressões desenvolvidas anteriormente, diferem em relação as presentes no trabalho de dos Santos, 2016, apenas em relação as medidas de tensão e deformação obtidas. Assim, conforme dos Santos, 2016, apresenta em seu trabalho o módulo consistente tangente é obtido pela linearização das Equações 4.4, 4.36, 4.47, 4.48, 4.49 e 4.50 (procedimento executado no Apêndice C) resultando na seguinte equação

$$\mathbb{D}_{n+1}^{vp} = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_{n+1}}{\partial \mathbf{e}_{n+1}^{e_{teste}}} = \left(\mathbb{D}^{e^{-1}} + \Delta\lambda \frac{\partial \mathbf{N}_{\boldsymbol{\tau}_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\tau}_{n+1}} + \frac{1}{\chi} \mathbf{N}_{\boldsymbol{\tau}_{n+1}} \otimes \mathbf{N}_{\boldsymbol{\tau}_{n+1}} \right)^{-1} , \quad (4.69)$$

onde

$$\chi = \left[\frac{\partial \bar{\Theta}^{-1}}{\partial \Delta\lambda} + \left(\frac{\partial \bar{\Theta}^{-1}}{\partial A_{n+1}} - \frac{\partial f_{n+1}}{\partial A_{n+1}} \right) \Lambda \right] , \quad (4.70)$$

e

$$\begin{aligned} \Lambda = & \sqrt{\frac{2}{3}} \{ \delta_{n+1} [\bar{A}_{\infty n+1} (1 + c\varepsilon_n) - A_n] \zeta + \bar{A}_{\infty n+1} c \} + \\ & + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\lambda [\bar{A}_{\infty n+1} (1 + c\varepsilon_n) - A_n] \zeta \omega_1 + \\ & \left[(1 + c\varepsilon_n)(1 - \zeta) + c\sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\lambda \right] \omega_2 , \end{aligned} \quad (4.71)$$

com

$$\omega_1 = \frac{\xi_1}{\Delta t} \eta \left(\frac{\delta^{up} - \delta^{lwr}}{\dot{\varepsilon}_{up} - \dot{\varepsilon}_{lwr}} \right) \left[\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\left\langle \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\lambda - \Delta t \dot{\varepsilon}_{lwr} \right\rangle}{\dot{\varepsilon}_{up} - \dot{\varepsilon}_{lwr}} \right) \right]^{\xi_1 - 1} , \quad (4.72)$$

e

$$\omega_2 = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}\varepsilon_n}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\Delta\lambda + \varepsilon_n\right)^2} (A_{\infty_{n+1}} - \bar{A}_{\infty_n}) + \left(1 - \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{\frac{2}{3}}\Delta\lambda + \varepsilon_n}\right) \frac{\partial A_{\infty_{n+1}}}{\partial \Delta\lambda}, \quad (4.73)$$

com $\frac{\partial A_{\infty_{n+1}}}{\partial \Delta\lambda}$ dado por

$$\frac{\partial A_{\infty_{n+1}}}{\partial \Delta\lambda} = \frac{\xi_2}{\Delta t} \eta \left(\frac{A_{\infty}^{up} - A_{\infty}^{lwr}}{\dot{\varepsilon}_{up} - \dot{\varepsilon}_{lwr}} \right) \left[\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\left\langle \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta\lambda - \Delta t \dot{\varepsilon}_{lwr} \right\rangle}{\dot{\varepsilon}_{up} - \dot{\varepsilon}_{lwr}} \right) \right]^{\xi_2 - 1}, \quad (4.74)$$

e

$$\zeta = \exp \left(-\delta_{n+1} \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta\lambda \right), \quad (4.75)$$

por fim

$$\eta = \frac{\partial}{\partial \Delta\lambda} \left\langle \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta\lambda - \Delta t \dot{\varepsilon}_{lwr} \right\rangle. \quad (4.76)$$

4.2 Resolvendo o problema constitutivo para o modelo no estado plano de tensões

Em muitos aspectos as equações desenvolvidas exclusivamente para o EPT se assemelham ao desenvolvido para o modelo tridimensional presente na Seção 4.1. Em vista disso, nessa seção serão apresentadas apenas as equações que sofreram modificações para o presente desenvolvimento.

Seguindo o mesmo procedimento adotado na seção anterior, a evolução da deformação viscoplástica acumulada para a aplicação no EPT dada pela Equação 2.93, é reescrita de acordo com

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta\bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\tau}_{n+1}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\tau}_{n+1}}. \quad (4.77)$$

O multiplicador incremental viscoplástico modificado para o EPT $\Delta\bar{\lambda}$, deve satisfazer a seguinte condição

$$\Delta\bar{\lambda} = 0 \text{ para } f_{ps_{n+1}} \leq 0. \quad (4.78)$$

Pela Equação 2.87 e fazendo uso da Equação 2.92, para $f_{ps_{n+1}} > 0$, escreve-se a

seguinte equação

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{ps_{n+1}} = & \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau}_{n+1}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\tau}_{n+1} - \frac{1}{3} (\sigma_y + A_{n+1})^2 \\ & \left[\left(1 + \vartheta_1 \frac{\Delta \bar{\lambda}}{\Delta t} \sqrt{\boldsymbol{\tau}_{n+1}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\tau}_{n+1}} \right)^{1/m} + \vartheta_2 \frac{\Delta \bar{\lambda}}{\Delta t} \sqrt{\boldsymbol{\tau}_{n+1}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\tau}_{n+1}} \right]^2 = 0 . \end{aligned} \quad (4.79)$$

4.2.1 Algoritmo preditor elástico - corretor viscoplástico no estado plano de tensões

De maneira geral a etapa de predição elástica para o EPT é semelhante ao modelo tridimensional apresentado na Tabela 4.1, porém agora para $f_{n+1}(\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{\text{teste}}, A_{n+1}^{\text{teste}}) = f_{ps_{n+1}}(\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{\text{teste}}, A_{n+1}^{\text{teste}})$, $\mathbb{D}^e = \mathbb{D}_{ps}^e$ e com as medidas de tensão e deformação em suas formas vetoriais conforme destacado na Seção 2.4.1.

Caso na verificação da função de escoamento para o EPT, $f_{ps_{n+1}}(\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{\text{teste}}, A_{n+1}^{\text{teste}}) > 0$, é iniciada o algoritmo de correção viscoplástica. Durante essa etapa a deformação elástica \mathbf{e}^e , calculada de maneira análoga ao caso tridimensional, é determinada por meio da seguinte equação

$$\mathbf{e}_{n+1}^e = \mathbf{e}_{n+1}^{e^{\text{teste}}} - \Delta \bar{\lambda} \mathbf{P} \boldsymbol{\tau}_{n+1} . \quad (4.80)$$

Para a solução do problema constitutivo no EPT, é necessária a solução de um sistema de equações não lineares dado pelas Equações, 4.5, 4.6, 4.8, 4.77, 4.79 e 4.80, em relação as seguintes variáveis $\{\varepsilon_{n+1}, \mathbf{e}_{n+1}^e, \Delta \bar{\lambda}, A_{n+1}, \delta_{n+1}, \bar{A}_{\infty_{n+1}}\}$, pelo uso de um método numérico.

Visando facilitar a solução do sistema, através de uma manipulação algébrica na Equação 4.80 escreve-se a tensão no instante $n + 1$ a partir da tensão de teste da etapa de predição elástica, conforme a equação abaixo

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1} = \mathbf{H}(\Delta \bar{\lambda}) \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{\text{teste}} , \quad (4.81)$$

com

$$\mathbf{H}(\Delta \bar{\lambda}) = [\mathbb{D}_{ps}^{e^{-1}} + \Delta \bar{\lambda} \mathbf{P}]^{-1} \mathbb{D}_{ps}^{e^{-1}} . \quad (4.82)$$

Assim é possível obter a redução do número de incógnitas do problema ao manipular as Equações 4.79 e 4.81, de modo a transforma-las em uma única equação tendo

como a única incógnita presente o multiplicador $\Delta\bar{\lambda}$, escrevendo a seguinte expressão

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\tau}_{n+1} = \gamma(\Delta\bar{\lambda}) , \quad (4.83)$$

com a substituição da Equação 4.81, na equação estabelecida anteriormente, define-se a função $\gamma(\Delta\bar{\lambda})$, como

$$\gamma(\Delta\bar{\lambda}) = (\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{\text{teste}})^T \mathbf{H}^T(\Delta\bar{\lambda}) \mathbf{P} \mathbf{H}(\Delta\bar{\lambda}) \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{\text{teste}} . \quad (4.84)$$

O resultado estabelecido acima apresenta uma equação com apenas uma incógnita, de acordo com o esperado, porém conforme evidenciado e de acordo com de Souza Neto et al., 2008, a obtenção da solução da Equação 4.84 é um tanto quanto complicada. Isso ocorre devido ao fato da função escalar acima ser dependente da matriz $\mathbf{H}(\Delta\bar{\lambda})$, presente na Equação 4.82, a qual envolve a soma, multiplicação e inversão de outras matrizes. Como para a presente aplicação, onde o comportamento elástico é isotrópico, a Equação 4.84 pode ser consideravelmente simplificada. O ponto chave para isso advém da observação que as matrizes \mathbf{P} e \mathbb{D}^e compartilham dos mesmos autovetores, ou seja ambas tem a representação diagonal na mesma base (como \mathbb{D}_{ps}^{e-1} e \mathbf{H}). A matriz ortogonal \mathbf{Q} que representa a transformação é

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad (4.85)$$

Aplicando a transformação ortogonal para \mathbf{P} e \mathbb{D}_{ps}^e obtêm-se as seguintes representações diagonais

$$\mathbf{P}^* \equiv \mathbf{Q} \mathbf{P} \mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} , \quad (4.86)$$

e

$$\mathbb{D}_{ps}^{e*} \equiv \mathbf{Q} \mathbb{D}_{ps}^e \mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} . \quad (4.87)$$

Na mesma base a matriz \mathbf{H} também possui representação diagonal conforme estabelecido pela seguinte expressão

$$\mathbf{H}^*(\Delta\bar{\lambda}) \equiv [\mathbb{D}_{ps}^{*e^{-1}} + \Delta\bar{\lambda}\mathbf{P}^*]^{-1}\mathbb{D}_{ps}^{*e^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{3(1-\nu)}{3(1-\nu) + E\Delta\bar{\lambda}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 + 2G\Delta\bar{\lambda}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1 + 2G\Delta\bar{\lambda}} \end{bmatrix}, \quad (4.88)$$

e a representação correspondente da tensão elástica de teste é dada por

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{\text{teste}*} \equiv \mathbf{Q}\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{\text{teste}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_{11}^{\text{teste}} + \tau_{22}^{\text{teste}}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_{22}^{\text{teste}} - \tau_{11}^{\text{teste}}) \\ \tau_{12}^{\text{teste}} \end{bmatrix}, \quad (4.89)$$

por fim, a Equação 4.84 pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{\text{T}}\mathbf{P}\boldsymbol{\tau}_{n+1} &= \gamma(\Delta\bar{\lambda}) \equiv (\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{\text{teste}})^{\text{T}}\mathbf{H}^{\text{T}}(\Delta\bar{\lambda})\mathbf{P}\mathbf{H}(\Delta\bar{\lambda})\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{\text{teste}}, \\ &= (\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{\text{teste}*})^{\text{T}}[\mathbf{H}^*(\Delta\bar{\lambda})]^2\mathbf{P}^*\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{\text{teste}*}, \\ &= \frac{(\tau_{11}^{\text{teste}} + \tau_{22}^{\text{teste}})^2}{6 \left[1 + \frac{E\Delta\bar{\lambda}}{3(1-\nu)}\right]^2} + \frac{\frac{1}{2}(\tau_{22}^{\text{teste}} - \tau_{11}^{\text{teste}})^2 + 2(\tau_{12}^{\text{teste}})^2}{(1 + 2G\Delta\bar{\lambda})^2}. \end{aligned} \quad (4.90)$$

Fazendo o uso das Equações 4.85 e 4.88, a matriz $\mathbf{H}(\Delta\bar{\lambda})$ definida pela Equação 4.82, pode ser reescrita de uma maneira ainda mais simplificada por meio da seguinte expressão

$$\mathbf{H}(\Delta\bar{\lambda}) = \mathbf{Q}^{\text{T}}\mathbf{H}^*(\Delta\bar{\lambda})\mathbf{Q}, \quad (4.91)$$

com

$$\mathbf{H}(\Delta\bar{\lambda}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\mathbf{H}_{11}^* + \mathbf{H}_{22}^*) & \frac{1}{2}(\mathbf{H}_{11}^* - \mathbf{H}_{22}^*) & 0 \\ \frac{1}{2}(\mathbf{H}_{11}^* - \mathbf{H}_{22}^*) & \frac{1}{2}(\mathbf{H}_{11}^* + \mathbf{H}_{22}^*) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{H}_{33}^* \end{bmatrix}, \quad (4.92)$$

e

$$\mathbf{H}_{11}^* = \frac{3(1-\nu)}{3(1-\nu) + E\Delta\bar{\lambda}}, \quad \mathbf{H}_{22}^* = \frac{1}{1 + 2G\Delta\bar{\lambda}} \quad \text{e} \quad \mathbf{H}_{33}^* = \mathbf{H}_{22}^*. \quad (4.93)$$

Com as simplificações realizadas anteriormente, é possível rescrever as Equações 4.77 e 4.79, para um formato mais simples, possuindo apenas uma única variável desconhecida $\Delta\bar{\lambda}$, desse modo

$$\frac{1}{2}\gamma(\Delta\bar{\lambda}) - \frac{1}{3}(\sigma_y + A_{n+1})^2 \left[\left(1 + \vartheta_1 \frac{\Delta\bar{\lambda}}{\Delta t} \sqrt{\gamma(\Delta\bar{\lambda})} \right)^{1/m} + \vartheta_2 \frac{\Delta\bar{\lambda}}{\Delta t} \right]^2 = 0, \quad (4.94)$$

e

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta\bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3}\gamma(\Delta\bar{\lambda})}. \quad (4.95)$$

Por fim, ao realizar uma nova simplificação, inserindo a Equação 4.95 nas equações 4.5 à 4.9, obtendo

$$A_{n+1} = A_n + \bar{A}_{\infty n+1} c \left(\Delta\bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3}\gamma(\Delta\bar{\lambda})} \right) + [\bar{A}_{\infty n+1} (1 + c\varepsilon_n) - A_n] \left[1 - \exp \left(-\delta_{n+1} \Delta\bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3}\gamma(\Delta\bar{\lambda})} \right) \right], \quad (4.96)$$

bem como

$$\delta_{n+1} = \delta_{\infty}^{lwr} + \left[\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\left\langle \Delta\bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3}\gamma(\Delta\bar{\lambda})} - \Delta t \dot{\varepsilon}_{lwr} \right\rangle}{\dot{\varepsilon}_{up} - \dot{\varepsilon}_{lwr}} \right) \right]^{\xi_1} (\delta_{\infty}^{up} - \delta_{\infty}^{lwr}), \quad (4.97)$$

e

$$\bar{A}_{\infty n+1} = \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_n + \Delta\bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3}\gamma(\Delta\bar{\lambda})}} \bar{A}_{\infty n} + \left(1 - \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_n + \Delta\bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3}\gamma(\Delta\bar{\lambda})}} \right) A_{\infty n+1}, \quad (4.98)$$

com

$$A_{\infty n+1} = A_{\infty}^{lwr} + \left[\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\left\langle \Delta\bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3}\gamma(\Delta\bar{\lambda})} - \Delta t \dot{\varepsilon}_{lwr} \right\rangle}{\dot{\varepsilon}_{up} - \dot{\varepsilon}_{lwr}} \right) \right]^{\xi_2} (A_{\infty}^{up} - A_{\infty}^{lwr}). \quad (4.99)$$

Assim, ao realizar as simplificações mencionadas um novo sistema de equações é formado pelas Equações 4.94, 4.96, 4.97 e 4.98 em relação as seguintes incógnitas $\{\Delta\bar{\lambda}, A_{n+1}, \delta_{n+1}, \bar{A}_{\infty n+1}\}$. Na tabela a seguir está apresentado um resumo para o algoritmo corretor viscoplástico no EPT.

Tabela 4.3 – Resumo do estado corretor viscoplástico para o EPT.

3 - Resumo – Corretor viscoplástico - Mapeamento de retorno
<p>(a) Como $f_{ps}(\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{\text{teste}}, A_{n+1}^{\text{teste}}) > 0$ conseqüentemente $\Delta\bar{\lambda} > 0$ e as variáveis $(\Delta\bar{\lambda}, A_{n+1}, \delta_{n+1}, \bar{A}_{\infty n+1})$ são tais que $f_{ps}(\boldsymbol{\tau}_{n+1}, A_{n+1}) = \bar{\Theta}^{-1}$. A solução do problema constitutivo requer a solução do sistema de equações dado na Equação 4.100.</p> $\left\{ \begin{array}{l} f_1 = \frac{1}{2}\gamma(\Delta\bar{\lambda}) - \frac{1}{3}(\sigma_y + A_{n+1})^2 \left[\left(1 + \vartheta_1 \frac{\Delta\bar{\lambda}}{\Delta t} \sqrt{\gamma(\Delta\bar{\lambda})} \right)^{1/m} + \vartheta_2 \frac{\Delta\bar{\lambda}}{\Delta t} \right]^2 ; \\ f_2 = A_{n+1} - A_n - \bar{A}_{\infty n+1} c \left(\Delta\bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3}\gamma(\Delta\bar{\lambda})} \right) - [\bar{A}_{\infty n+1} (1 + c\varepsilon_n) - A_n] \\ \quad \left[1 - \exp \left(-\delta_{n+1} \Delta\bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3}\gamma(\Delta\bar{\lambda})} \right) \right] ; \\ f_3 = \delta_{n+1} - \delta^{lwr} - \left[\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\left\langle \Delta\bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3}\gamma(\Delta\bar{\lambda})} - \Delta t \dot{\varepsilon}_{lwr} \right\rangle}{\dot{\varepsilon}_{up} - \dot{\varepsilon}_{lwr}} \right) \right]^{\xi_1} (\delta^{up} - \delta^{lwr}) ; \\ f_4 = \bar{A}_{\infty n+1} - \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_n + \Delta\bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3}\gamma(\Delta\bar{\lambda})}} \bar{A}_{\infty n} - \left(1 - \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_n + \Delta\bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3}\gamma(\Delta\bar{\lambda})}} \right) A_{\infty n+1} . \end{array} \right. \quad (4.100)$ <p>(b) Com a solução do sistema de equações atualiza-se $\{\boldsymbol{\tau}_{n+1}, \mathbf{e}_{n+1}^e \text{ e } \varepsilon_{n+1}\}$ de acordo com as seguintes equações</p> $\boldsymbol{\tau}_{n+1} = \mathbf{H}(\Delta\bar{\lambda}) \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{\text{teste}} , \quad (4.101)$ $\mathbf{e}_{n+1}^e = \mathbf{e}_{n+1}^{e\text{teste}} - \Delta\bar{\lambda} \mathbf{P} \boldsymbol{\tau}_{n+1} , \quad (4.102)$ $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta\bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3}\gamma(\Delta\bar{\lambda})} , \quad (4.103)$ $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \det(\mathbf{F}_{n+1}^{-1}) \boldsymbol{\tau}_{n+1} , \quad (4.104)$ <p>e algoritmo é finalizado ou se encaminha para o próximo incremento de Δe.</p>

O sistema de equações presente na Equação 4.100 é resolvido utilizando as mesmas características citadas na Seção 4.1.1. As derivadas das equações não lineares \mathbf{f} , necessárias para o método de *Newton-Raphson* para o modelo EPT estão presentes no Apêndice D.

4.2.2 Operador consistente tangente viscoplástico para o estado plano de tensões

Para a determinação do operador tangente viscoplástico restrito ao EPT utilizou-se procedimento análogo ao usado na Seção 4.1.2. Para os incrementos totalmente elásticos

utiliza-se a matriz constitutiva elástica no EPT, da pela Equação 2.70, caso contrário, o operador tangente consistente viscoplástico no EPT, é definido por

$$\mathbb{D}_{ps_{n+1}}^{vp} = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_{n+1}}{\partial \mathbf{e}_{n+1}^{e_{\text{teste}}}}, \quad (4.105)$$

o qual é obtido da linearização das Equações 4.79, 4.80, 4.96, 4.97 e 4.98 (procedimento executado no apêndice E), resultando em

$$\mathbb{D}_{ps_{n+1}}^{vp} = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_{n+1}}{\partial \mathbf{e}_{n+1}^{e_{\text{teste}}}} = \left[\mathbb{D}^{e^{-1}} + \frac{1}{\chi} (\mathbf{P}\boldsymbol{\tau}_{n+1} \otimes \mathbf{P}\boldsymbol{\tau}_{n+1}) + \Delta\bar{\lambda}\mathbf{P} \right]^{-1}, \quad (4.106)$$

com χ dado por

$$\chi = - \left(\frac{\partial \tilde{f}_{ps_{n+1}}}{\partial A_{n+1}} \Lambda + \frac{\partial \tilde{f}_{ps_{n+1}}}{\partial \Delta\bar{\lambda}} \right), \quad (4.107)$$

e Λ dado

$$\begin{aligned} \Lambda = & \{ \delta_{n+1} \zeta [\bar{A}_{\infty n+1} (1 + c\varepsilon_n) - A_n] + \bar{A}_{\infty n+1} c \} \bar{\omega} + \\ & + \omega_1 [\bar{A}_{\infty n+1} (1 + c\varepsilon_n) - A_n] \zeta \left(\Delta\bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3} \gamma(\Delta\bar{\lambda})} \right) + \\ & + \omega_2 \left[c \Delta\bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3} \gamma(\Delta\bar{\lambda})} + (1 + c\varepsilon_n) (1 - \zeta) \right], \end{aligned} \quad (4.108)$$

e com

$$\bar{\omega} = \left(\sqrt{\frac{2}{3} \gamma(\Delta\bar{\lambda})} + \frac{\Delta\bar{\lambda}}{3 \sqrt{\frac{2}{3} \gamma(\Delta\bar{\lambda})}} \frac{\partial \gamma}{\partial \Delta\bar{\lambda}} \right), \quad (4.109)$$

também

$$\omega_1 = \frac{\xi_1}{\Delta t} \eta \left[\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\left\langle \Delta\bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3} \gamma(\Delta\bar{\lambda})} - \Delta t \dot{\varepsilon}_{lwr} \right\rangle}{\dot{\varepsilon}_{up} - \dot{\varepsilon}_{lwr}} \right) \right]^{\xi_1 - 1} \frac{(\delta_{\infty}^{up} - \delta_{\infty}^{lwr})}{(\dot{\varepsilon}_{up} - \dot{\varepsilon}_{lwr})}, \quad (4.110)$$

e

$$\omega_2 = \frac{\varepsilon_n \bar{\omega}}{\left(\varepsilon_n + \Delta\bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3} \gamma(\Delta\bar{\lambda})} \right)^2} (A_{\infty n+1} - \bar{A}_{\infty n}) + \left(1 - \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_n + \Delta\bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3} \gamma(\Delta\bar{\lambda})}} \right) \frac{\partial A_{\infty n+1}}{\partial \Delta\bar{\lambda}}, \quad (4.111)$$

com $\frac{\partial A_{\infty n+1}}{\partial \Delta \lambda}$

$$\frac{\partial A_{\infty n+1}}{\partial \Delta \lambda} = \frac{\xi_2}{\Delta t} \eta \left[\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\left\langle \Delta \bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3} \gamma(\Delta \bar{\lambda})} - \Delta t \dot{\epsilon}_{lwr} \right\rangle}{\dot{\epsilon}_{up} - \dot{\epsilon}_{lwr}} \right) \right]^{\xi_2 - 1} \frac{(A_{\infty}^{up} - A_{\infty}^{lwr})}{(\dot{\epsilon}_{up} - \dot{\epsilon}_{lwr})}, \quad (4.112)$$

e

$$\zeta = \exp \left(-\delta_{n+1} \Delta \bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3} \gamma(\Delta \bar{\lambda})} \right), \quad (4.113)$$

por fim

$$\eta = \frac{\partial}{\partial \Delta \bar{\lambda}} \left\langle \Delta \bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3} \gamma(\Delta \bar{\lambda})} - \Delta t \dot{\epsilon}_{lwr} \right\rangle. \quad (4.114)$$

4.3 Implementação da rotina de material no *software* ABAQUS

Conforme mencionado, neste trabalho utilizou-se o *software* comercial ABAQUS para a solução de todos os problemas propostos. Para a realização dessa tarefa foram necessárias implementações de rotinas de usuário associadas ao modelo constitutivo adotado. No ABAQUS, as rotinas de usuário que possuem essa finalidade são conhecidas como UMAT para problemas resolvidos com uma estratégia de solução global implícita e VUMAT para estratégias de solução global explícita. Como este trabalho empregou problemas com ambas as abordagens foram criadas tanto a rotina UMAT, quanto a rotina VUMAT. Ambas as rotinas foram desenvolvidas por intermédio da linguagem de programação *Fortran 77*.

Conforme o manual do *software*, Abaqus, 2011, para o caso da UMAT, o *software* de elementos finitos ABAQUS utiliza o método de *Newton-Raphson*, igualmente ao desenvolvido na Seção 3.4.2, para a obtenção das soluções de problemas não-lineares. Durante o processamento de uma iteração global i , a rotina UMAT é chamada para cada ponto de integração presente no modelo de elementos finitos analisado. De modo geral, a cada iteração são fornecidos os incrementos de deformação total Δe (DSTRAN) e os incrementos de rotação (DROT) baseados na formulação de Hughes e Winget, 1980. Com os incrementos de rotação é possível realizar a rotação nos tensores que necessitam levar em conta a rotação de corpo rígido associada ao incremento. Além disso, o *software* repassa o gradiente de deformação do instante anterior e atual do incremento (DFGRD0/DFGRD1)

e as demais variáveis internas convergidas no instante anterior. A medida de deformação adotada pelo *software* para problemas não lineares em deformações finitas é dada por $\ln(\mathbf{V})$ e a medida de tensão requerida para a solução do problema de equilíbrio global é a tensão de *Cauchy* $\boldsymbol{\sigma}$.

A rotina de usuário UMAT tem como objetivo repassar ao *software* as tensões atualizadas (STRESS), as demais variáveis dependentes da análise (STATEV) e a determinação da matriz tangente requerida para a solução do problema de equilíbrio global pela utilização do método de *Newton-Rahpson* (DDSDDE).

No fluxograma presente na Figura 4.2, baseado em Abaqus, 2011, é descrito de forma esquemática as interações entre a rotina de usuário UMAT e o *software* de elementos finitos ABAQUS, durante o processamento da solução não linear para um determinado ponto de integração presente no modelo.

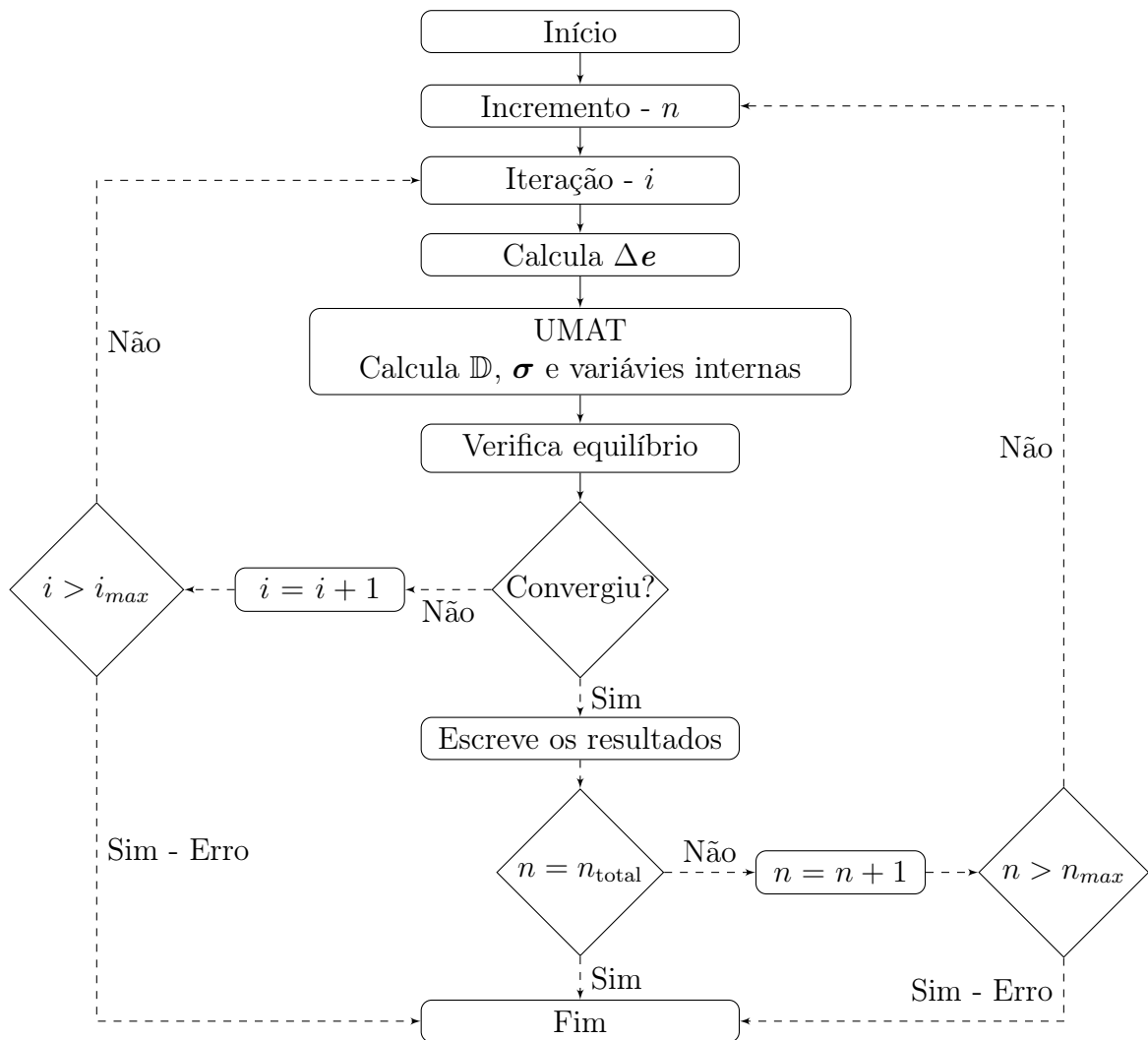


Figura 4.2 – Fluxograma – Iteração entre ABAQUS e rotina de usuário UMAT.

Já na rotina VUMAT de modo geral, as entradas e requisitos de saídas são basicamente os mesmos que os encontrados na UMAT. Evidentemente o processo de solução explícito não exige um método iterativo como o método de *Newton-Rahpson*, assim não se faz necessário o cálculo do operador tangente. Na comparação entre ambas as rotinas de usuário, a principal diferença é que no ABAQUS/explicito algumas quantidades tensoriais são dadas em relação ao sistema de coordenadas que está rodando com o material. Assim, neste trabalho a partir da rotina de usuário UMAT, adotou-se um esquema de conversão apropriado, conforme pode ser observado em Yang, 2010, onde por meio de cuidadosas alterações pode-se facilmente obter a rotina VUMAT para ser utilizada no ABAQUS/explicito. Vale destacar, que apesar da solução global ser realizada por um método explícito, a solução ao nível local continua sendo realizada pelo método implícito, conforme as equações apresentadas nas secções anteriores.

No fluxograma da Figura 4.3, baseado em Abaqus, 2011, é um apresentado uma breve representação esquemática da iteração entre o *software* e a rotina VUMAT para solução de um determinado ponto de integração presente no modelo.

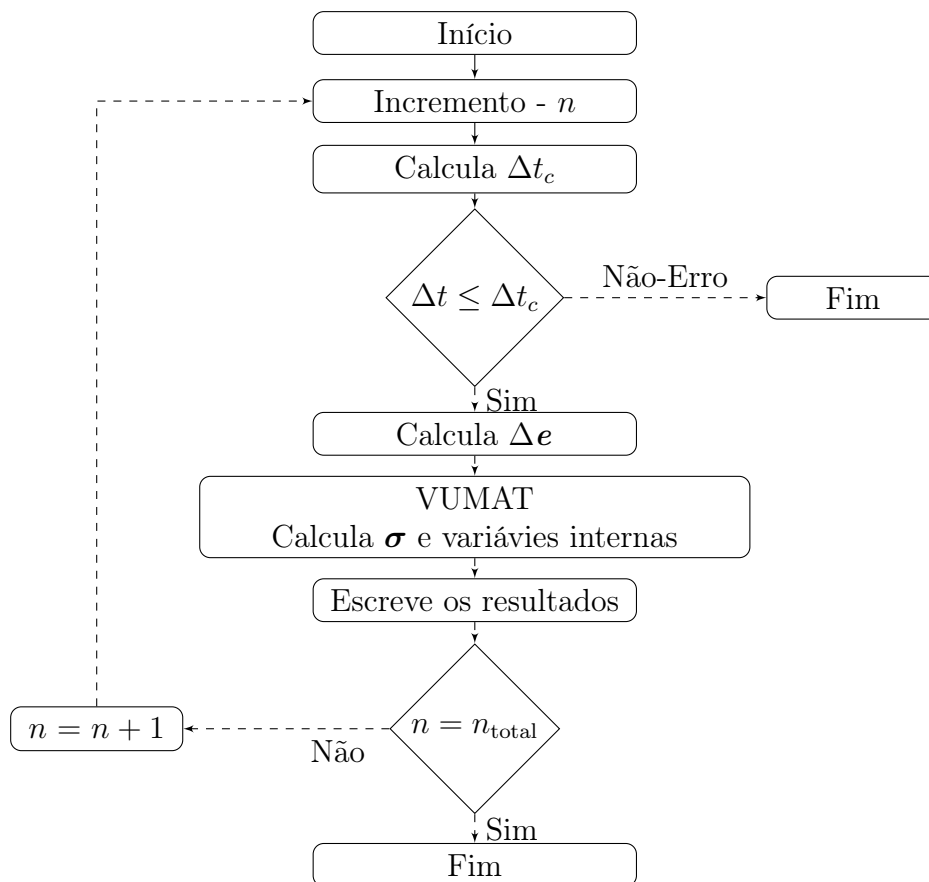


Figura 4.3 – Fluxograma – Iteração entre ABAQUS e rotina de usuário VUMAT.

5 VERIFICAÇÃO DA IMPLEMENTAÇÃO

Este capítulo foi motivado devido à necessidade da verificação¹ da implementação do modelo constitutivo adotado neste trabalho antes da utilização da mesma na solução de um problema prático de engenharia, dessa forma verificando o real cumprimento dos aspectos constitutivos esperados. Conforme Dunne e Petrinic, 2005, a realização da verificação do modelo implementado é indispensável, para isso são necessárias as execuções de testes na rotina implementada por meio da utilização de modelos com um único elemento e até mesmo múltiplos, aplicando condições de carregamento axiais e de cisalhamento. Além disso, é possível a realização de comparações com problemas de maior complexidade, em que o campo de tensões e deformações não é uniforme, porém conhecido. Esse procedimento pode ser realizado mesmo que para isso, algumas considerações no modelo implementado necessitem ser realizadas, como o "desligamento" de algumas características constitutivas para que dessa maneira possa ser estabelecido um critério de comparação entre a resposta conhecida e o modelo implementado.

Assim, neste capítulo, primeiramente, serão determinados resultados analíticos (e semi-analíticos²) para modelos simples e, em seguida, a comparação entre estes resultados e os resultados numéricos. Por fim, comparações serão devidamente realizadas entre problemas de maior complexidade encontrados na bibliografia, em relação a presente implementação computacional.

5.1 Determinação das expressões analíticas e semi-analíticas

Essa seção tem como objetivo a determinação das expressões analíticas e semi-analíticas usadas na verificação dos modelos implementados por meio da rotina de usuário no *software* comercial de elementos finitos ABAQUS. Sendo assim, foram desenvolvidos problemas simples visando estabelecer uma formulação analítica para os principais aspectos ligados à verificação do modelo. Baseado nisso, foram estabelecidos alguns casos de carregamento em uma geometria homogênea de formato quadrilateral, sendo esses:

¹Neste trabalho o entendimento de verificação, segue a abordagem presente em Roache, 2008, onde a verificação é conceituada como a ação de comprovar se as equações adotadas para o problema estão implementadas e resolvidas da maneira correta. Diferentemente do conceito de validação, onde é necessária uma comprovação física e experimental da garantia da representatividade do problema matemático frente ao problema físico.

²O termo semi-analítico refere-se as expressões que sofreram alguma aproximação durante a sua construção.

a) O primeiro caso trata-se da aplicação de um carregamento de compressão uniaxial, desse modo produzindo um campo de tensão uniaxial e homogêneo. Avaliando as respostas para o estado tridimensional, o estado plano de tensões (EPT), o estado plano de deformações (EPD) e axissimétrico;

b) O segundo caso refere-se a aplicação de um deslocamento que resulta em um cisalhamento simples, produzindo um campo de tensão e deformação cisalhante homogêneo, para as respostas no estado tridimensional, EPT e EPD;

c) Por fim, no terceiro caso avaliou-se um problema onde em conjunto de uma extensão biaxial uniforme no plano ocorre rotação de corpo rígido, visando observar os cumprimentos dos quesitos de objetividade e invariância em relação ao observador. Nesse problema são produzidos campos de tensão e deformação planares uniformes e idênticos, para as respostas no estado tridimensional e no EPT.

Como hipótese para a construção de todas as expressões presentes nesta seção, foram desprezados os efeitos inerciais devido ao carregamento, o material foi considerado homogêneo e de comportamento rígido-viscoplástico ($\tilde{\mathbf{D}}^{vp} = \mathbf{D}$).

5.1.1 Compressão unidimensional – Casos: tridimensional, estado plano de tensões e axissimétrico

Para o desenvolvimento de expressões analíticas para um problema de compressão homogênea, considera-se uma amostra do material com geometria em formato quadrilátero, definido na configuração de referência com altura dada por l_0 , largura w_0 e profundidade d_0 . O quadrilátero está situado entre duas placas rígidas e sujeito a um deslocamento vertical $u_2 = 0$ em $X_2 = 0$ e $u_2 = \bar{u}_2$ em $X_2 = l_0$, conforme Figura 5.1 (a). Pelo fato das expressões analíticas terem diferentes construções, nesta seção as equações desenvolvidas são exclusivamente empregadas para os casos tridimensional, EPT e axissimétrico³.

O mapeamento para a configuração deformada do problema estabelecido na Figura 5.1 é dado por

$$\begin{aligned}x_1 &= a_1 X_1 \\x_2 &= a_2 X_2 \\x_3 &= a_1 X_3 ,\end{aligned}\tag{5.1}$$

³Apesar do problema desenvolvido nesta seção não ser axissimétrico, para um carregamento unidimensional com deslocamento prescrito as equações desenvolvidas possuem validade, pois resultam em um campo de tensão uniaxial.

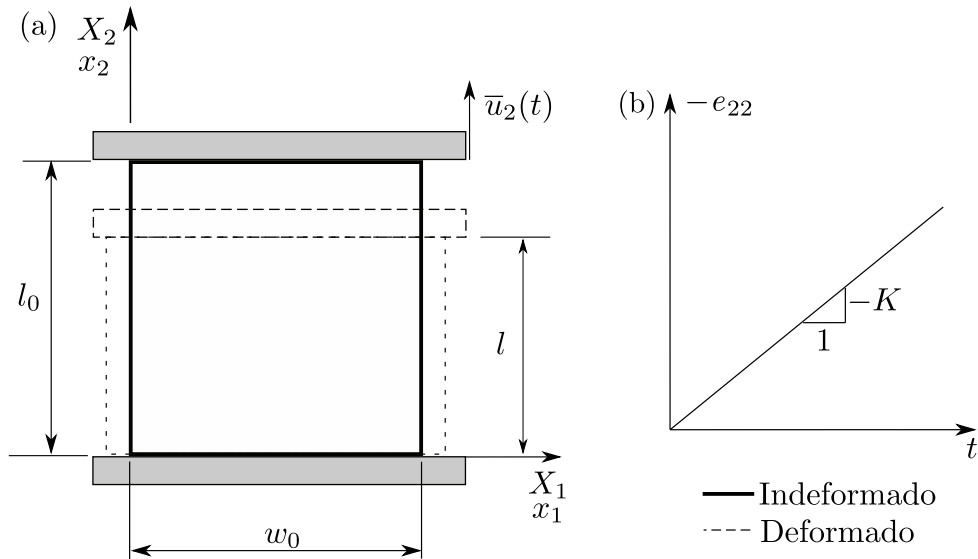


Figura 5.1 – Compressão unidimensional: (a) representação esquemática e condições de contorno para a compressão homogênea e (b) deformação em relação ao tempo.

onde a_i são constantes a serem determinadas.

O gradiente de deformação \mathbf{F} , o tensor de *Green* à esquerda \mathbf{B} e o tensor de alongamento à esquerda \mathbf{V} , são dados por

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{V}^2 = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} a_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & a_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & a_1^2 \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

Deste modo, a medida de deformação logarítmica, dada por \mathbf{e} é definida de acordo com

$$\mathbf{e} = \ln(\mathbf{V}) = \begin{bmatrix} \ln(a_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ln(a_2) & 0 \\ 0 & 0 & \ln(a_1) \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

O gradiente de velocidades \mathbf{L} e a taxa de deformação \mathbf{D} , são estabelecidos pelos seguintes resultados

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{a}_1}{a_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{a}_2}{a_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{a}_1}{a_1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) = \begin{bmatrix} \frac{\dot{a}_1}{a_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{a}_2}{a_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{a}_1}{a_1} \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Ainda, a_2 pode ser determinado pelas condições de contorno, de acordo com $u_2 = \bar{u}_2$ em $X_2 = l_0$, resultando em

$$a_2 = 1 + \frac{\bar{u}}{l_0} = \frac{l}{l_0}, \quad (5.5)$$

a taxa de deformação axial é dada por

$$\dot{e}_{22} = \frac{\dot{a}_2}{a_2} = \frac{\dot{\bar{u}}_2}{l_0 + \bar{u}_2}. \quad (5.6)$$

A análise será restringida apenas a uma taxa de deformação constante K , dessa forma para o caso analisado, observa-se

$$\dot{e}_{22} = D_{22} = K. \quad (5.7)$$

O deslocamento prescrito $\bar{u}_2(t)$ da face superior do quadrilátero é encontrado por meio da deformação axial e_{22} aplicada a uma taxa constante K , dado pela Equação 5.6, o mesmo é escrito por

$$\bar{u}_2(t) = l_0[\exp(Kt) - 1]. \quad (5.8)$$

Tomando como hipótese para o caso de uma compressão simples unidimensional, aplicado aos casos de tensão tridimensional, EPT e axissimétrico, as seguintes interpretações são válidas: $\tau_{11} = \tau_{33} = 0$, com $\tau_{22} \neq 0$ e $\tau_{ij} = 0$ para $i \neq j$. O tensor de tensões e sua parcela desviadora ficam estabelecidos conforme

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau}^D = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}\tau_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}\tau_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\tau_{22} \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Pela norma da parcela desviadora do tensor de tensões presente na Equação 5.9, resulta em

$$\|\boldsymbol{\tau}^D\| = \sqrt{\frac{2}{3}}|\tau_{22}|. \quad (5.10)$$

Pelas Equações 2.50 e 5.4, tendo em vista que o material é considerado rígido-viscoplástico e pela hipótese da preservação da isocoriedade do fluxo plástico⁴, é possível estabelecer

$$\dot{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}}\|\mathbf{D}\| = \left| \frac{\dot{a}_2}{a_2} \right| = |K| \text{ e } \varepsilon = \int_0^t \dot{\varepsilon} dt = \int_0^t |K| dt = |K|t. \quad (5.11)$$

⁴A isocoriedade do fluxo viscoplástico respeita as seguintes igualdades $\text{tr}(\mathbf{L}^{vp}) = \text{tr}(\mathbf{D}^{vp}) = \text{tr}(\dot{\mathbf{F}}^{vp} (\mathbf{F}^{vp})^{-1}) = 0$. [de Souza Neto et al., 2008]

A variável relacionada ao endurecimento é calculada por meio da Equação 2.62, sendo a variável δ dada pelas Equações 2.63 e 2.65 com $i = 1$, e A_∞ obtido pelas Equações 2.64 e 2.65 com $i = 2$.

Completando a formulação constitutiva, a função de escoamento deve respeitar a relação $f = \Theta^{-1}$, onde a função de sobretensão $\Theta^{-1}(\dot{\lambda}, A)$ adotada para todas as expressões desenvolvidas nesta seção é a função de Perić modificada, obtida por meio da Equação 2.69. Por meio da combinação das Equações 2.41, 2.52, 2.69 e 5.10 tem-se como resultado a seguinte expressão analítica para a cálculo da tensão normal na direção de aplicação do carregamento

$$|\tau_{22}| = (\sigma_y + A) \left[\left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}} \vartheta_1 \dot{\epsilon} \right)^{1/m} + \sqrt{\frac{3}{2}} \vartheta_2 \dot{\epsilon} \right], \quad (5.12)$$

válida para o caso tridimensional de tensões e para o caso EPT. Além disso, é possível observar, e de acordo com o esperado, a Equação 5.12 é igualmente encontrada para o caso axissimétrico desenvolvido nos trabalhos de dos Santos et al., 2016 e dos Santos, 2016.

5.1.2 Compressão unidimensional – Caso: estado plano de deformações

Considerando novamente o problema de compressão unidimensional estabelecido na seção anterior pela Figura 5.1, o qual possui igual geometria e condições de contorno, entretanto nessa seção, aplicado sobre a hipótese do estado plano de deformações (EPD), o mapeamento para a configuração deformada do problema é estabelecido por meio da seguinte expressão

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 X_1 \\ x_2 &= a_2 X_2 \\ x_3 &= X_3, \end{aligned} \quad (5.13)$$

onde a_i são constantes a serem determinadas.

O gradiente de deformação \mathbf{F} , o tensor de *Green* à esquerda \mathbf{B} e o tensor de alongamento à esquerda \mathbf{V} , são dados por

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \mathbf{V}^2 = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} a_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & a_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

Com isso, a partir da Equação 5.14, a medida de deformação logarítmica \mathbf{e} , é definida como

$$\mathbf{e} = \ln(\mathbf{V}) = \begin{bmatrix} \ln(a_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ln(a_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \quad (5.15)$$

O gradiente de velocidades \mathbf{L} e a taxa de deformação \mathbf{D} , são dados pelos seguintes resultados

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{a}_1}{a_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{a}_2}{a_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) = \begin{bmatrix} \frac{\dot{a}_1}{a_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{a}_2}{a_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \quad (5.16)$$

A determinação de a_2 , da taxa de deformação axial e o deslocamento $\bar{u}_2(t)$, segue o mesmo procedimento que o encontrado no caso anterior, conseqüentemente resultam em expressões idênticas as encontradas anteriormente, presentes nas Equações 5.5 à 5.8.

Tomando como hipótese que para o caso de uma compressão simples unidimensional, aplicada ao EPD, as seguintes interpretações sejam mantidas; $\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{33} \neq 0$ e $\tau_{ij} = 0$ para $i \neq j$, o tensor de tensões fica estabelecido por

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{33} \end{bmatrix} . \quad (5.17)$$

Entretanto, de acordo com Khan e Huang, 1995 e Shames e Cozzarelli, 1997, para o EPD não existe fluxo viscoplástico na direção normal fora do plano, dessa forma assume-se a seguinte relação

$$D_{33} = \dot{\lambda} N_{\tau_{33}} = \dot{\lambda} \frac{\tau_{33}^D}{\|\boldsymbol{\tau}^D\|} = 0 , \quad (5.18)$$

por meio desta é possível determinar a componente de tensão τ_{33} presente no tensor da Equação 5.17. Portanto, para qualquer $\dot{\lambda} > 0$ a Equação 5.18 deve ser verdadeira, logo, a única componente que pode ser nula é o τ_{33}^D . Assim, a partir da componente do tensor desviador τ_{33}^D , escreve-se

$$\tau_{33}^D = 0 = \tau_{33} - \frac{1}{3}(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}) , \quad (5.19)$$

concluindo que

$$\tau_{33} = \frac{\tau_{11} + \tau_{22}}{2}. \quad (5.20)$$

Com isso, reescrevendo o tensor de tensões $\boldsymbol{\tau}$ apresentado na Equação 5.17, e sua parcela desviadora $\boldsymbol{\tau}^D$ ficam estabelecidos

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\tau_{11} + \tau_{22}}{2} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau}^D = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\tau_{11} - \tau_{22}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\tau_{22} - \tau_{11}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.21)$$

A norma da tensão desviadora dada pela Equação 5.21 é estabelecida pela seguinte equação

$$\|\boldsymbol{\tau}^D\| = \frac{1}{2} \sqrt{(\tau_{11} - \tau_{22})^2 + (\tau_{22} - \tau_{11})^2}, \quad (5.22)$$

pela hipótese do EPD para o presente problema, é assumido que a tensão $\tau_{11} \approx 0$, ou seja, essa componente é suficientemente pequena quando comparada com a componente de tensão τ_{22} e, conseqüentemente, não afeta, significativamente, o resultado da norma da tensão desviadora obtida pela Equação 5.22, assim reescreve-se como

$$\|\boldsymbol{\tau}^D\| = \sqrt{\frac{1}{2}} |\tau_{22}|. \quad (5.23)$$

Pelas Equações 2.50 e 5.16, tendo em vista que o material é rígido-viscoplástico e pela hipótese da preservação da isocoriedade do fluxo plástico, é possível estabelecer a seguinte relação

$$\dot{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\mathbf{D}\| = \frac{2}{\sqrt{3}} \left| \frac{\dot{a}_2}{a_2} \right| = \frac{2}{\sqrt{3}} |K| \text{ e } \varepsilon = \int_0^t \dot{\varepsilon} dt = \int_0^t \frac{2}{\sqrt{3}} |K| dt = \frac{2}{\sqrt{3}} |K| t. \quad (5.24)$$

A variável relacionada ao endurecimento isotópico A , é calculada da mesma maneira que na Seção 5.1.1. Por fim, utilizando novamente a mesma abordagem apresentada no desenvolvimento da seção anterior, com a combinação das Equações 2.41, 2.52, 2.69 e 5.23 tem como resultado a seguinte expressão semi-analítica para o cálculo da tensão normal no sentido da aplicação do carregamento

$$|\tau_{22}| = \frac{2}{\sqrt{3}} (\sigma_y + A) \left[\left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}} \vartheta_1 \dot{\varepsilon} \right)^{1/m} + \sqrt{\frac{3}{2}} \vartheta_2 \dot{\varepsilon} \right], \quad (5.25)$$

válida para o caso EPD.

5.1.3 Cisalhamento simples

O problema abordado nesta seção consiste na aplicação de um carregamento que resulta em um cisalhamento simples em um quadrilátero, definido inicialmente na configuração de referência, possuindo altura l_0 , largura w_0 e profundidade d_0 . O quadrilátero encontra-se situado entre duas placas rígidas, onde em $X_2 = 0$ encontra-se fixo e em $X_2 = l_0$ e sujeito a um deslocamento horizontal planar $u_1 = \bar{u}_1(t)$, conforme presente na Figura 5.2 (a).

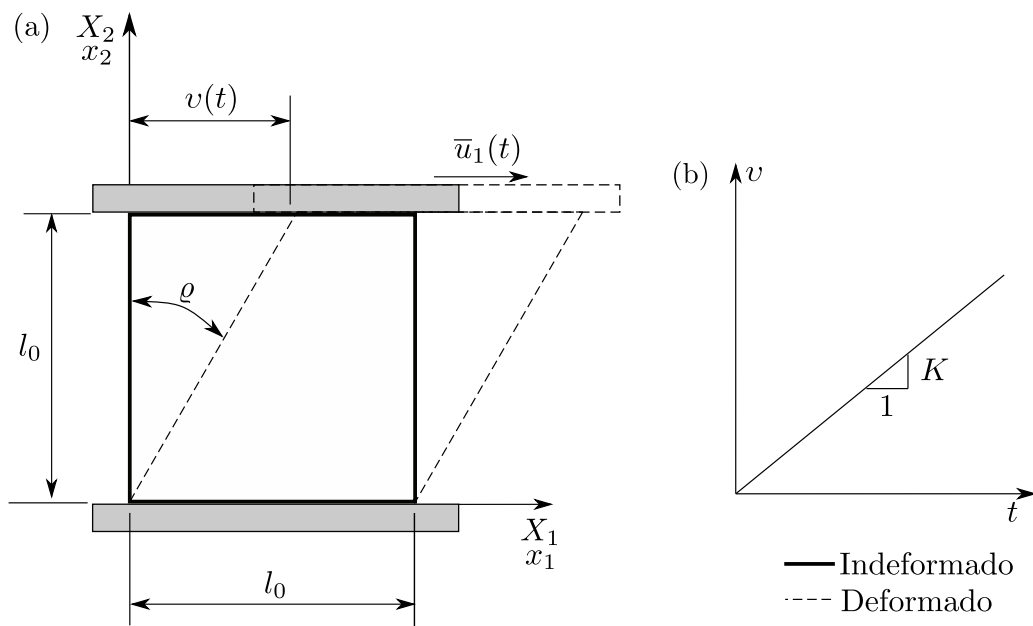


Figura 5.2 – Cisalhamento simples: (a) representação esquemática e condições de contorno para o cisalhamento simples e (b) deslocamento v em relação ao tempo.

O mapeamento para a configuração deformada do problema de cisalhamento simples da Figura 5.2 é dado por

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 + vX_2 \\ x_2 &= X_2 \\ x_3 &= X_3, \end{aligned} \tag{5.26}$$

com v dado pela representação presente na Figura 5.2 (b).

Observe que devido a característica do campo de deslocamentos para o problema de cisalhamento simples, conforme apresentado pela Equação 5.26, as expressões desenvolvidas nesta seção são aplicadas tanto para o estado tridimensional e EPT, quanto para o EPD.

O gradiente de deformação \mathbf{F} , o tensor de *Green* à esquerda \mathbf{B} e o tensor de alongamento à esquerda \mathbf{V} , são dados por

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{V}^2 = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} (1+v^2) & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.27)$$

As deformações logarítmicas \mathbf{e} , podem ser obtidas por meio da operação dada pela Equação 5.28 em relação ao tensor \mathbf{V}

$$\mathbf{e} = \ln(\mathbf{V}) = \sum_{i=1}^3 \ln(\Lambda_i) \mathbf{l}_i \otimes \mathbf{l}_i = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}, \quad (5.28)$$

onde Λ_i e \mathbf{l}_i são, respectivamente, os autovalores e os autovetores do tensor de alongamento à esquerda \mathbf{V} . Como resultado da expressão anterior, os valores a_{ij} , com $a_{22} = -a_{11}$, $a_{12} = a_{21}$ e $a_{33} \cong 0$, são constantes a serem determinadas com a solução da Equação 5.28 e os demais termos da matriz resultante são todos nulos.

O gradiente de velocidades \mathbf{L} e a taxa de deformação \mathbf{D} , são obtidos por meio das seguintes expressões

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) = \begin{bmatrix} 0 & \dot{v}/2 & 0 \\ \dot{v}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.29)$$

A partir de v , com as condições de contorno $u_1 = \bar{u}_1$ em $X_2 = l_0$, são estabelecidas as seguintes relações

$$v = \frac{u_1}{l_0} = \frac{\bar{u}_1}{l_0}, \quad (5.30)$$

como $v = Kt$, escreve-se

$$\bar{u}_1(t) = l_0 Kt, \quad (5.31)$$

e por fim

$$\dot{\bar{u}}_1(t) = l_0 \dot{v} = l_0 K. \quad (5.32)$$

O valor do ângulo de rotação ϱ do corpo analisado em relação ao eixo fixo de referência X_2 , conforme demonstrado na Figura 5.2, é dado pelas seguintes expressões

$$\tan(\varrho) = \frac{v}{l_0} = \frac{Kt}{l_0}. \quad (5.33)$$

O problema de cisalhamento simples em deformações finitas, em contraste com o mesmo situado em pequenas deformações, possui tanto as tensões cisalhantes no plano quanto as tensões normais. Desse modo, o tensor de tensões $\boldsymbol{\tau}$ e sua parcela desviadora $\boldsymbol{\tau}^D$ ficam estabelecidos por

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & 0 \\ \tau_{21} & \tau_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau}^D = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\tau_{11} - \frac{1}{3}\tau_{22} & \tau_{12} & 0 \\ \tau_{21} & \frac{2}{3}\tau_{22} - \frac{1}{3}\tau_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}(\tau_{11} + \tau_{22}) \end{bmatrix}. \quad (5.34)$$

A norma da tensão desviadora $\boldsymbol{\tau}^D$, estabelecida pela Equação 5.34 é dada por meio da expressão

$$\|\boldsymbol{\tau}^D\| = \sqrt{\frac{2}{3}\tau_{11}^2 + \frac{2}{3}\tau_{22}^2 - \frac{2}{3}\tau_{11}\tau_{22} + 2\tau_{12}^2}. \quad (5.35)$$

Assume-se como hipótese que para valores totais de v não tão grandes, as tensões normais são muito menores que as tensões cisalhantes, sendo assim elas não possuem uma contribuição significativa no computo da norma estabelecida pela Equação 5.35. Tal suposição também pode ser encontrada em Dunne e Petrinic, 2005. Portanto, as tensões normais são consideradas nulas, $\tau_{ij} = 0$ para $i = j$, e desse modo, juntamente com a simetria do tensor de tensões, a norma da tensão desviadora pela Equação 5.35 fica estabelecida de acordo com

$$\|\boldsymbol{\tau}^D\| = \sqrt{2}|\tau_{12}|. \quad (5.36)$$

Pelas Equações 2.50 e 5.29 a deformação viscoplástica acumulada é dada através das seguintes expressões

$$\dot{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}}\|\mathbf{D}\| = \frac{1}{\sqrt{3}}K = e \quad \varepsilon = \int_0^t \dot{\varepsilon} dt = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{3}}K dt = \frac{1}{\sqrt{3}}Kt. \quad (5.37)$$

A variável de endurecimento A , é calculada da mesma forma que apresentada na Seção 5.1.1. Igualmente ao caso anterior a função de escoamento deve respeitar $f = \Theta^{-1}$, onde a função $\Theta^{-1}(\dot{\lambda}, A)$ é obtida pela Equação 2.69. Combinando as Equações 2.41, 2.52, 2.69 e 5.36 resultando na seguinte expressão semi-analítica para o cálculo da tensão cisalhante,

$$|\tau_{12}| = \sqrt{\frac{1}{3}}(\sigma_y + A) \left[\left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}}\vartheta_1\dot{\varepsilon} \right)^{1/m} + \sqrt{\frac{3}{2}}\vartheta_2\dot{\varepsilon} \right], \quad (5.38)$$

válida para o estado tridimensional de tensões, EPD e EPT.

5.1.4 Extensão biaxial com rotação finita – Casos: tridimensional e estado plano de tensões

Nesta seção foi desenvolvido um problema onde dois carregamentos são empregados sobre um quadrilátero de forma simultânea. Em conjunto com uma extensão biaxial no plano, ocorre uma rotação finita em torno de um eixo fixo. O quadrilátero inicialmente encontra-se situado na configuração de referência, apresentando a altura l_0 , a largura w_0 e a profundidade d_0 . O mesmo sofre um alongamento conjunto nos eixos X_1 e X_2 e uma rotação finita que ocorre em torno do eixo X_3 , conforme apresentado esquematicamente por meio da Figura 5.3.

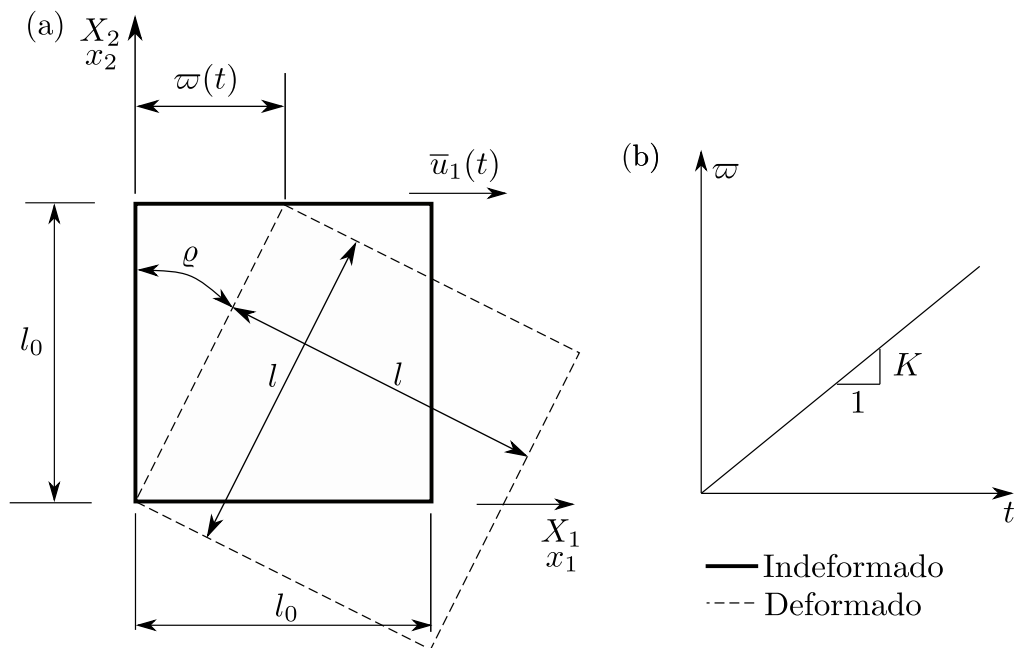


Figura 5.3 – Extensão biaxial com rotação finita: (a) representação esquemática e condições de contorno e (b) deslocamento ϖ em relação ao tempo.

O mapeamento para a configuração deformada do problema apresentado nesta seção é dado por meio de

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 + \varpi X_2 \\ x_2 &= X_2 - \varpi X_1 \\ x_3 &= aX_3, \end{aligned} \quad (5.39)$$

com a sendo uma constante a ser determinada e ϖ é dada em relação ao tempo pela Figura 5.3 (b).

O gradiente de deformação \mathbf{F} , o tensor de *Green* à esquerda \mathbf{B} e o tensor de alongamento à esquerda \mathbf{V} , são

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & \varpi & 0 \\ -\varpi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{V}^2 = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} (1 + \varpi^2) & 0 & 0 \\ 0 & (1 + \varpi^2) & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix}. \quad (5.40)$$

Com isso, a medida de deformação logarítmica \mathbf{e} é definida por meio da seguinte operação:

$$\mathbf{e} = \ln(\mathbf{V}) = \begin{bmatrix} \ln(\sqrt{1 + \varpi^2}) & 0 & 0 \\ 0 & \ln(\sqrt{1 + \varpi^2}) & 0 \\ 0 & 0 & \ln(a) \end{bmatrix}. \quad (5.41)$$

O gradiente de velocidades \mathbf{L} e a taxa de deformação \mathbf{D} , são estabelecidos pelas seguintes expressões

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\varpi\dot{\varpi}}{\varpi^2 + 1} & \frac{\dot{\varpi}}{\varpi^2 + 1} & 0 \\ -\frac{\dot{\varpi}}{\varpi^2 + 1} & \frac{\varpi\dot{\varpi}}{\varpi^2 + 1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{a}}{a} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) = \begin{bmatrix} \frac{\varpi\dot{\varpi}}{\varpi^2 + 1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\varpi\dot{\varpi}}{\varpi^2 + 1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{a}}{a} \end{bmatrix}. \quad (5.42)$$

Com base no campo de deslocamentos dado pela Equação 5.39 é possível obter o vetor de deslocamentos no plano em qualquer instante de tempo para um determinado ponto pertencente no domínio do corpo analisado por meio das seguintes expressões

$$u_1(t) = \varpi X_2 \quad \text{e} \quad u_2(t) = -\varpi X_1. \quad (5.43)$$

A partir de ϖ e com as condições de contorno $u_1 = \bar{u}_1$ em $X_1 = 0$ e $X_2 = l_0$ são obtidas as seguintes expressões

$$\varpi = \frac{u_1}{l_0} = \frac{\bar{u}_1}{l_0}, \quad (5.44)$$

e deste modo

$$\bar{u}_1(t) = l_0 K t, \quad (5.45)$$

e assim

$$\dot{\bar{u}}_1(t) = l_0 \dot{\varpi} = l_0 K. \quad (5.46)$$

Além disso, também é possível determinar o valor do ângulo de rotação ϱ do corpo analisado em relação ao eixo fixo de referência X_2 , conforme demonstrado na Figura 5.3, resultando nas seguintes expressões

$$\cos(\varrho) = \frac{l_0}{l} \text{ ou } \tan(\varrho) = \frac{\varpi}{l_0} = \frac{Kt}{l_0} . \quad (5.47)$$

Assume-se que para o presente problema, estabelecido dentro da hipótese de tensões no estado tridimensional e no EPT, a extensão biaxial apresenta apenas componentes de tensões não nulas nas direções normais aos eixos em que ocorre o alongamento do quadrilátero, assim, o tensor de tensões $\boldsymbol{\tau}$ e a sua parcela desviadora $\boldsymbol{\tau}^D$, ficam definidos por

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau}^D = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\tau_{11} - \frac{1}{3}\tau_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}\tau_{22} - \frac{1}{3}\tau_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}(\tau_{11} + \tau_{22}) \end{bmatrix} . \quad (5.48)$$

A norma da tensão desviadora $\boldsymbol{\tau}^D$, estabelecida pela Equação 5.48 é dada por meio da expressão

$$\|\boldsymbol{\tau}^D\| = \sqrt{\frac{2}{3}\tau_{11}^2 + \frac{2}{3}\tau_{22}^2 - \frac{2}{3}\tau_{11}\tau_{22}} , \quad (5.49)$$

considerando que ambas as tensões apresentadas possuam valor idêntico, ou seja, $\tau_{11} = \tau_{22} = \check{\tau}$, com $\check{\tau}$ sendo uma tensão a ser determinada pela solução do problema, a Equação 5.49 resultam em

$$\|\boldsymbol{\tau}^D\| = \sqrt{\frac{2}{3}}|\check{\tau}| . \quad (5.50)$$

Pelas Equações 2.50 e 5.42, a deformação viscoplástica acumulada é determinada por

$$\dot{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}}\|\mathbf{D}\| = 2 \left(\frac{\varpi \dot{\varpi}}{\varpi^2 + 1} \right) = 2 \left[\frac{K^2 t}{(K^2 t^2 + 1)} \right] , \quad (5.51)$$

e assim

$$\varepsilon = \int_0^t \dot{\varepsilon} dt = \int_0^t \frac{2K^2 t}{(K^2 t^2 + 1)} dt = \ln(K^2 t^2 + 1) . \quad (5.52)$$

A representação da variável relacionada ao endurecimento A , diferentemente dos casos anteriores em que a taxa de deformação era constante, é obtida por meio da Equação 2.61, onde a variável δ é calculada pelas Equações 2.63 e 2.65 com $i = 1$, e agora é levado em consideração $A_\infty = \bar{A}_\infty$ obtido por meio da Equação 2.66 em conjunto com as Equações 2.64 e 2.65 com $i = 2$.

Da mesma maneira que para os casos anteriores, a função de escoamento deve satisfazer $f = \Theta^{-1}$, com a função $\Theta^{-1}(\dot{\lambda}, A)$ é obtida pela utilização da Equação 2.69. Por meio da combinação das Equações 2.41, 2.52, 2.69 e 5.50 resulta na seguinte expressão analítica para a tensão

$$|\check{\tau}| = |\tau_{11,22}| = (\sigma_y + A) \left[\left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}} \vartheta_1 \dot{\epsilon} \right)^{1/m} + \sqrt{\frac{3}{2}} \vartheta_2 \dot{\epsilon} \right], \quad (5.53)$$

válida para o estado tridimensional e EPT.

5.2 Solução dos problemas numéricos de verificação

As soluções dos problemas numéricos de verificação estabelecidos neste trabalho foram obtidas com a utilização do *software* comercial de elementos finitos ABAQUS em conjunto com rotinas de usuário UMAT, que tem por finalidade a determinação do comportamento do material. Essa verificação tem como objetivo avaliar se a resposta obtida pela implementação está de acordo com os aspectos constitutivos esperados para o problema analisado.

Como citado anteriormente, para os problemas avaliados nesta seção foram desconsiderados os efeitos inerciais, assim, nesse trabalho serão apresentadas somente as comparações das respostas obtidas com a utilização do método dos elementos finitos (MEF), por meio da solução do problema global pelo *solver* implícito, com a utilização da rotina de usuário UMAT. Contudo, a implementação da rotina VUMAT utilizada pelo *solver* explícito, também foi submetida a processos de verificações, a fim de também comprovar a sua correta implementação computacional.

O problema local foi resolvido pelo uso do método de *Newton-Raphson*, conforme apresentado no Capítulo 4. O critério de convergência adotado para todas as soluções foi que o resíduo da norma euclidiana das equações não lineares \mathbf{f}_{n+1} , presentes nas Tabelas 4.2 e 4.3, seja menor que o erro admissível $e_{tol} = 10^{-6}$. O número máximo de iterações permitidas para a convergência de um incremento foi $i_{max} = 20$. A solução do problema implícito global foi controlada diretamente pelo ABAQUS, utilizando o método de *Newton-Raphson*. As configurações relativas aos controles do *solver* foram mantidas conforme o padrão do *software*.

5.2.1 Problemas de verificação com resposta analítica

Para verificação da implementação computacional realizada neste trabalho, inicialmente realizaram-se comparações entre as respostas para problemas de menor complexidade, entretanto com soluções analíticas (ou semi-analíticas) fechadas, desenvolvidas na Seção 5.1 deste trabalho.

Todas as análises desenvolvidas nesta seção utilizaram a função de sobretensão de Perić modificada, proposta por dos Santos, 2016, sendo que o material utilizado trata-se de um alumínio recozido AA1050, que possui módulo de elasticidade $E = 70$ GPa e coeficiente de *Poisson* $\nu = 0,33$. Demais parâmetros do modelo constitutivo utilizado para o desenvolvimento da análise são dados na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Parâmetros de material para o alumínio recozido AA1050, com

$$\dot{\epsilon}_{lwr} = 10^{-4} \text{ s}^{-1} \text{ e } \dot{\epsilon}_{up} = 1,5 \times 10^4 \text{ s}^{-1}. \text{ [Fonte: dos Santos, 2016]}$$

σ_y (MPa)	c (-)	δ^{lwr} (-)	δ^{up} (-)	ξ_1 (-)	A_∞^{lwr} (MPa)	A_∞^{up} (MPa)	ξ_2 (-)	ϑ_1 (s)	ϑ_2 (s)	m (-)
41,2	0,15	3,9	9,7	0,36	81,3	97,6	0,14	2×10^4	5×10^{-6}	292

5.2.1.1 Compressão homogênea

O problema desenvolvido nesta seção consiste na solução de uma compressão homogênea, para a aplicação de diferentes taxas de deformação, em uma geometria de formato quadrilátero, para o estado tridimensional de tensões, EPT e EPD. A presente análise além de verificar a resposta da implementação em relação a resposta analítica, também tem como objetivo a verificação da resposta no EPT em relação ao estado tridimensional de tensões.

O modelo no estado tridimensional utilizou um único elemento linear de 8 nós com integração reduzida e controles de elemento conforme o padrão. Já para os modelos em EPT e EPD, também foi utilizado um único elemento, porém bilinear de 4 nós com integração reduzida e os controles do elemento mantidos conforme o padrão. As dimensões e condições de contorno são apresentadas de forma esquemática pela Figura 5.4. O modelo foi construído com condições de simetria por meio da aplicação de condições de contorno apropriadas.

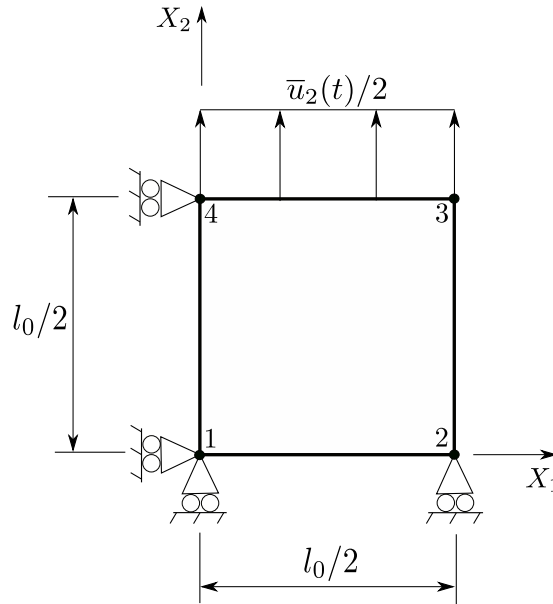


Figura 5.4 – Dimensões e condições de contorno para o compressão simples.

A análise foi realizada pela imposição de uma deformação de compressão homogênea total $e_{22f} = -0,5$ no tempo final t_f , obtida pela aplicação de um deslocamento prescrito total de $\bar{u}_{2f} = -2,36$ mm na face superior do elemento de acordo com observado na Figura 5.4. A simulação numérica foi executada pela imposição de $n_{\text{total}} = 20$ incrementos de tempo para quatro diferentes taxas de deformação, conforme apresentado na Tabela 5.2, onde observa-se que o caso 1 apresenta uma taxa quase estática e o caso 4 a mais alta taxa empregada na análise.

Tabela 5.2 – Dados utilizados para a simulação de compressão simples.

Caso	$ K (\text{s}^{-1})$	$t_f(\text{s})$	e_{22f}	$\bar{u}_f(\text{mm})$	$l_0(\text{mm})$
Caso 1	10^{-2}	5×10^1	-0,5	-2,36	6
Caso 2	10^0	5×10^{-1}	-0,5	-2,36	6
Caso 3	10^2	5×10^{-3}	-0,5	-2,36	6
Caso 4	10^4	5×10^{-5}	-0,5	-2,36	6

Nos gráficos presentes na Figura 5.5 são apresentadas as respostas de tensão-deformação e do endurecimento em relação a deformação viscoplástica acumulada em comparação com as respostas analíticas desenvolvidas na Seção 5.1.1. Além disso, também estão plotadas as respostas presentes em dos Santos, 2016, para o estado axissimétrico, conforme supracitado, apesar de possuir geometria diferente, condições de contorno idênticas são empregadas resultando em um carregamento uniaxial.

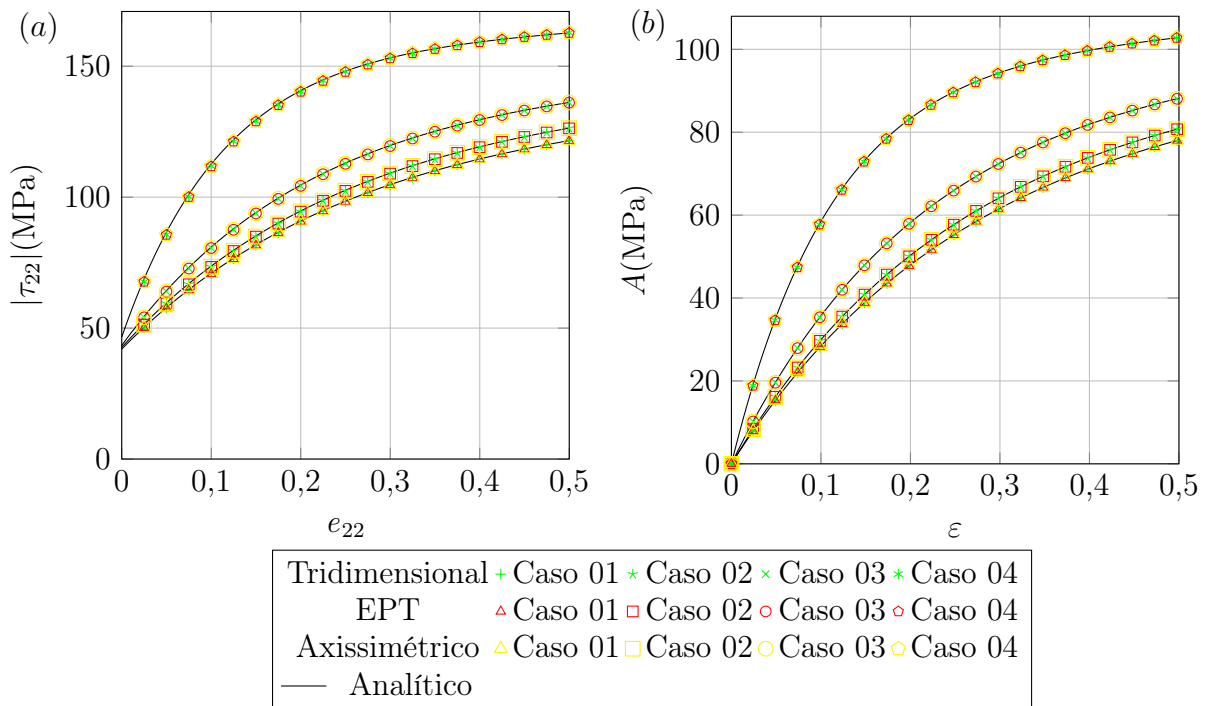


Figura 5.5 – Compressão homogênea para os casos tridimensional, EPT e axissimétrico – Comparação com o resultado analítico: (a) tensão-deformação e (b) endurecimento-deformação viscoplástica acumulada.

Conforme observa-se nos gráficos da Figura 5.5 as respostas encontradas por meio da solução do problema numérico para todos os modelos analisados apresentaram boa aproximação em relação à solução analítica. Entretanto, conforme já observado no trabalho de dos Santos, 2016, nos níveis mais baixos de deformação é observada uma pequena divergência em relação a resposta de referência. Essa variação é devido à maior contribuição da parte elástica no início da deformação, a qual devido a hipótese do material comportar-se de maneira rígido-viscoplástica foi negligenciada no desenvolvimento das expressões analíticas. Por fim, constatou-se que na comparação entre as respostas para o estado tridimensional de tensões e para o EPT, apresentaram equivalência conforme o esperado.

Nos gráficos da Figura 5.6, novamente são plotadas a tensão em relação a deformação e o endurecimento em relação a deformação viscoplástica acumulada, porém agora para o problema desenvolvido em EPD.

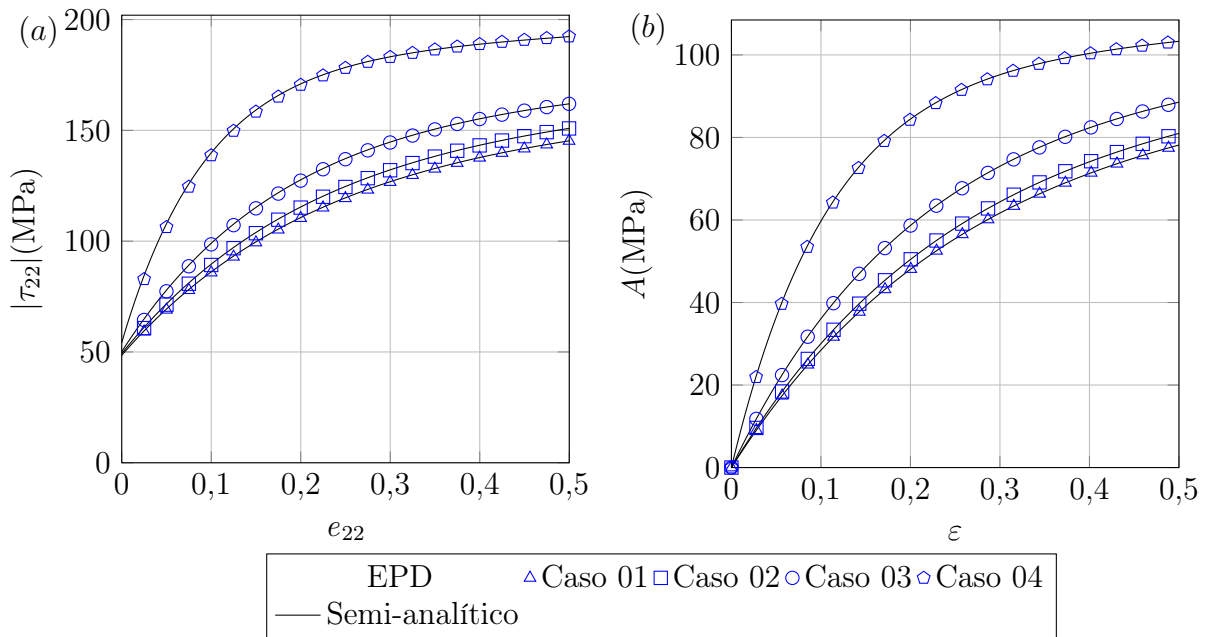


Figura 5.6 – Compressão homogênea para o EPD – Comparação com o resultado semi-analítico: (a) tensão-deformação e (b) endurecimento-deformação viscoplástica acumulada.

Pela análise dos gráficos da Figura 5.6, levando em consideração o já mencionado efeito elástico sobre a resposta e a aproximação da resposta analítica para o presente caso, as soluções numéricas para o problema no EPD apresentaram boa aproximação em relação a resposta semi-analítica.

A convergência local do método de *Newton-Raphson* apresentou para o Caso 1 a necessidade de 4 iterações em cada incremento de tempo para os modelos tridimensional e EPD, e para o modelo no EPT foram necessárias 13 iterações. Já no Caso 4 foram necessárias 7 iterações em cada incremento de tempo para os modelos tridimensional e EPD, e novamente 13 iterações para o modelo no EPT. A convergência global para a determinação do equilíbrio, não apresentou variação entre os casos e modelos analisados, sendo necessárias no máximo 3 iterações na convergência de cada incremento de tempo.

5.2.1.2 Cisalhamento simples

Nesta seção foi realizada a construção de um problema de cisalhamento simples desenvolvido novamente considerando um quadrilátero no estado tridimensional de ten-

sões, EPT e EPD. Novamente, foram realizadas comparações conforme ocorreram na seção anterior. O modelo numérico aplicado ao cisalhamento simples consistiu em um único elemento, com características idênticas ao da seção anterior, porém para o caso tridimensional o elemento utilizado foi quadrático com 20 nós e para os modelos planos era biquadrático com 8 nós. As dimensões e condições de contorno para o problema estão apresentadas esquematicamente na Figura 5.7.

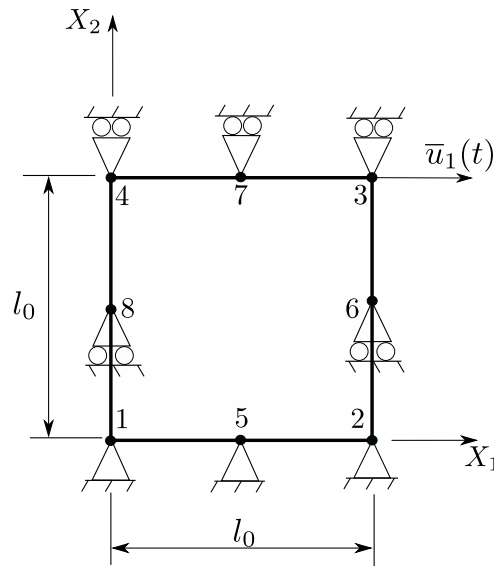


Figura 5.7 – Dimensões e condições de contorno para o cisalhamento simples.

A análise foi realizada pela imposição de uma deformação cisalhante homogênea total $2e_{12f} = 0,5$ no tempo final t_f , resultante da aplicação de um deslocamento prescrito total de $\bar{u}_{1f} = 3,124$ mm na face superior do elemento de acordo com o que é observado na Figura 5.7. A simulação numérica foi executada pela imposição de $n_{\text{total}} = 20$ incrementos de tempo para as diferentes taxas de deformação, conforme apresentado na Tabela 5.3.

Tabela 5.3 – Dados utilizados para a simulação de cisalhamento simples.

Caso	$ K (\text{s}^{-1})$	$t_f(\text{s})$	$2e_{12f}$	$\bar{u}_f(\text{mm})$	$l_0(\text{mm})$
Caso 1	10^{-2}	$5,208 \times 10^1$	0,5	3,124	6
Caso 2	10^0	$5,208 \times 10^{-1}$	0,5	3,124	6
Caso 3	10^2	$5,208 \times 10^{-3}$	0,5	3,124	6
Caso 4	10^4	$5,208 \times 10^{-5}$	0,5	3,124	6

Nos gráficos presentes na Figura 5.8 são apresentadas as respostas de tensão-deformação e do endurecimento em relação a deformação viscoplástica acumulada em comparação com a resposta semi-analítica desenvolvida na Seção 5.1.3.

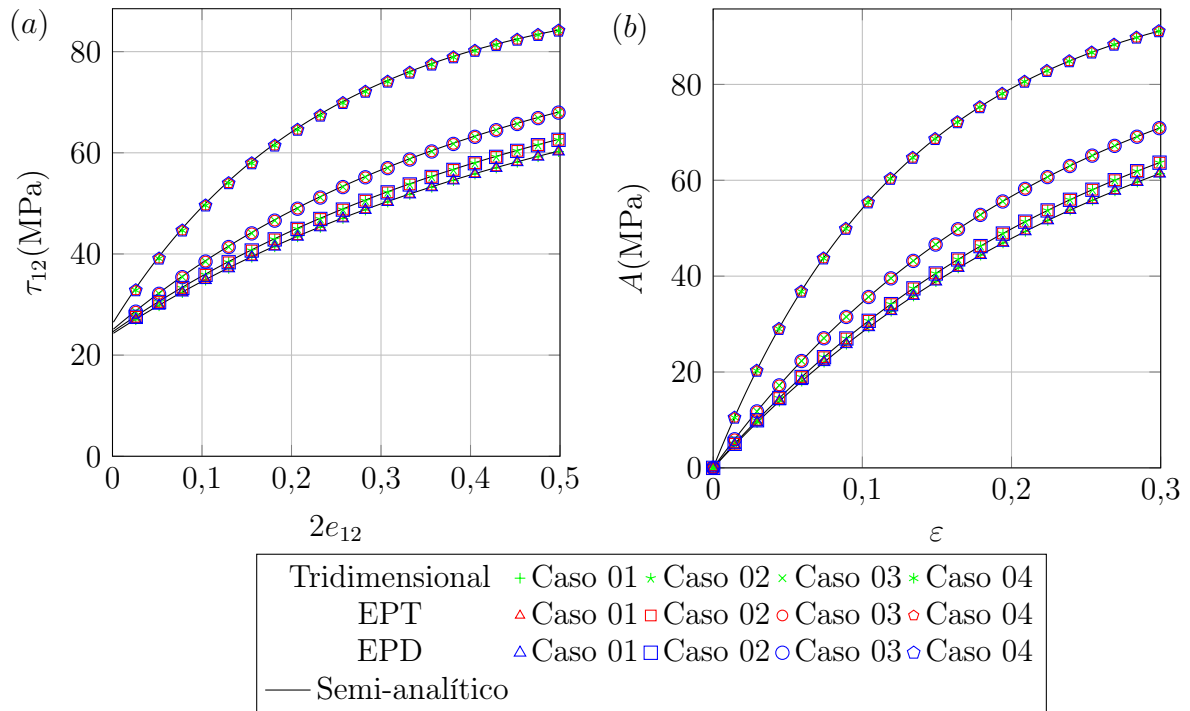


Figura 5.8 – Cisalhamento simples para o estado tridimensional, EPT e EPD – Comparação com o resultado semi-analítico: (a) tensão-deformação e (b) endurecimento-deformação viscoplástica acumulada.

Ao observar os gráficos presentes na Figura 5.8, na comparação entre os casos analisados é possível presenciar uma pequena variação das respostas obtidas pelo modelo numérico em relação a resposta analítica. Essa variação além de estar relacionada com a já mencionada contribuição elástica, também possui relação com as hipóteses simplificativas que foram adotadas para a montagem das expressões semi-analíticas na Seção 5.1.3. Todavia, ainda assim os resultados encontrados nos modelos numéricos apresentaram uma boa aproximação em relação a solução semi-analítica. Além disso, é possível observar que o resultado encontrado na comparação entre as respostas para o estado tridimensional e EPT está de acordo a resposta esperada.

De modo geral, para todos os casos analisados, a convergência local do método de *Newton-Raphson* necessitou de 6 iterações em cada incremento de tempo para os modelos tridimensional e EPD e de 12 iterações em cada incremento de tempo para o modelo EPT. A convergência do problema global não apresentou variação entre ambos os casos e modelos, sendo necessárias no máximo 2 iterações para a convergência de cada incremento de tempo.

5.2.1.3 Alongamento biaxial e rotação finita

Nesta seção foi abordada a verificação da implementação computacional de um problema no qual ocorrem de maneira simultânea uma extensão biaxial em conjunto com uma rotação finita, cuja a resposta analítica foi desenvolvida na Seção 5.1.4. O modelo numérico utilizado também consistiu em apenas um único elemento com características idênticas ao do elemento finito utilizado na Seção 5.2.1.1. Em cada nó no plano do elemento foram adicionadas condições de contorno de deslocamento prescrito, de acordo com o campo de deslocamentos para o problema, conforme observado na Figura 5.9.

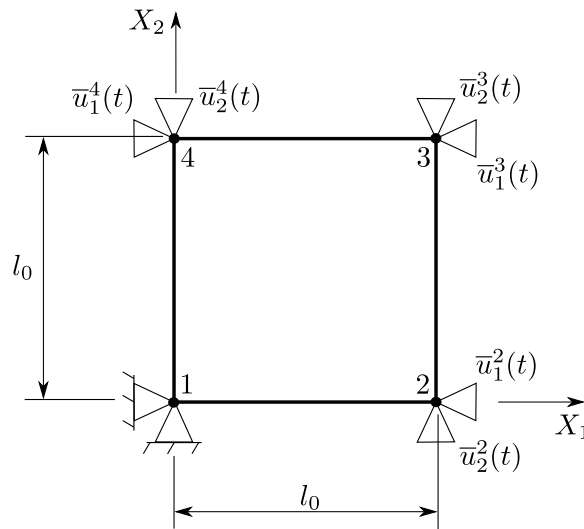


Figura 5.9 – Dimensões e condições de contorno para o problema de alongamento biaxial em conjunto com a rotação finita.

O campo de deslocamentos foi dado pela Equação 5.43, para essa análise foi utilizado $\varpi = 1,3108$, resultando em um campo de deformações homogêneo de 0,5 no tempo t_f . Na Tabela 5.4, estão dispostos os parâmetros utilizados para a análise, a qual foi executada pela imposição de $n_{total} = 20$ incrementos de tempo.

Tabela 5.4 – Dados utilizados para a simulação da extensão biaxial e rotação finita.

Caso	$ K (\text{s}^{-1})$	$t_f(\text{s})$	e_{22f}	$\varpi(\text{mm})$	$l_0(\text{mm})$
Caso 1	10^{-2}	$1,3108 \times 10^2$	0,5	1,3108	1
Caso 2	10^0	$1,3108 \times 10^0$	0,5	1,3108	1
Caso 3	10^2	$1,3108 \times 10^{-2}$	0,5	1,3108	1
Caso 4	10^4	$1,3108 \times 10^{-5}$	0,5	1,3108	1

Mais uma vez, buscou-se encontrar a resposta de tensão-deformação e o endurecimento em relação a deformação viscoplástica acumulada de acordo com o observado na Figura 5.10. Comparando as respostas para o estado tridimensional de tensões, EPT e a resposta analítica desenvolvida na Seção 5.1.4.

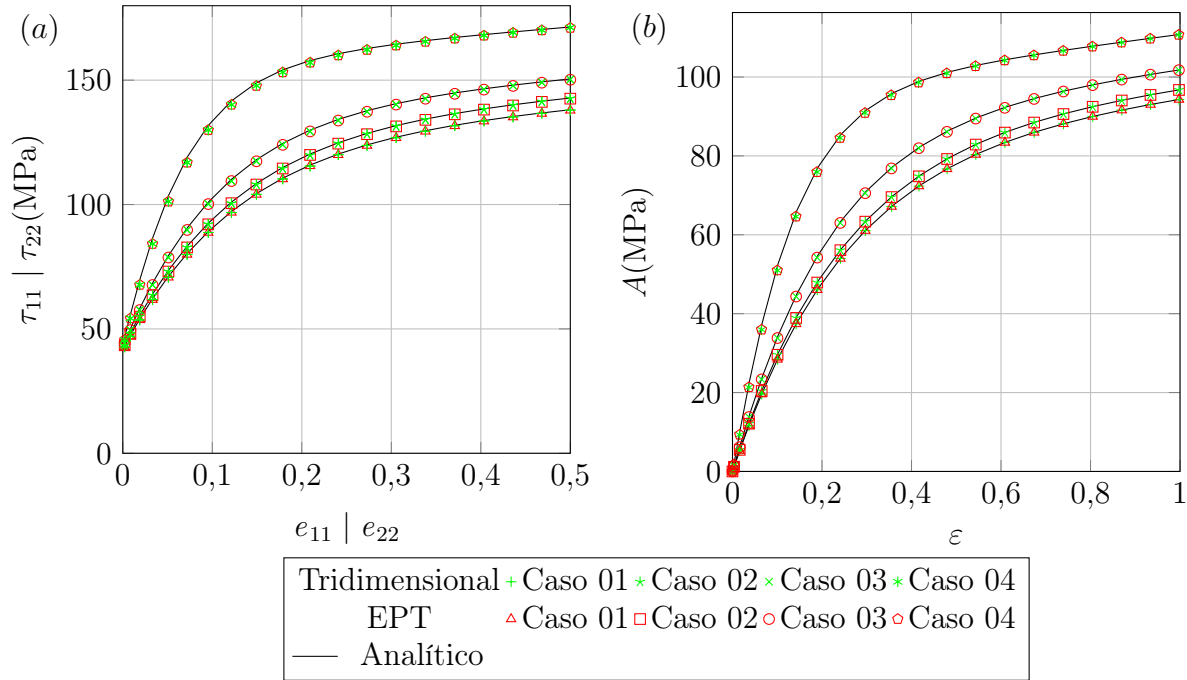


Figura 5.10 – Extensão biaxial e rotação para o estado tridimensional e EPT – Comparação com o resultado analítico: (a) tensão-deformação e (b) endurecimento-deformação viscoplástica acumulada.

De acordo com o observado nos gráficos da Figura 5.10, percebe-se uma variação um pouco mais acentuada nos níveis mais baixos de deformação devido ao problema possuir uma maior contribuição da parte elástica nestes níveis. Entretanto, as respostas encontradas ainda assim são muito próximas, satisfazendo a resposta esperada para o problema analisado.

A convergência local do método de *Newton-Raphson* apresentou para o Caso 1 a necessidade de 4 iterações em cada incremento de tempo para o modelo tridimensional e 12 iterações para o modelo EPT. No Caso 4 foram necessárias 5 iterações em cada incremento de tempo no modelo tridimensional e 13 para o modelo EPT. A convergência global não apresentou variação entre os casos, entretanto para o modelo no estado tridimensional foram necessárias no máximo 3 iterações para a convergência em cada incremento de tempo, enquanto no modelo para o EPT foram necessárias no máximo 2 iterações.

5.2.2 Problemas de verificação por meio de comparações com outras publicações

Visto que os aspectos investigados durante a Seção 5.2.1 foram satisfeitos, e desse modo verificando a implementação realizada neste trabalho perante aos critérios investigados, como sequência das verificações da implementação foram avaliados problemas de referência que possuem maior complexidade, os quais foram encontrados em publicações sobre o tema na bibliografia.

Diferentemente dos problemas desenvolvidos até aqui, os quais apresentavam campos em que a tensão e a deformação eram homogêneos, nas avaliações desenvolvidas nesta seção isso deixa de acontecer, tornando o problema mais complexo do ponto de vista da resposta para o comportamento do material. Desse modo, com o objetivo de prosseguir com a verificação da implementação do modelo constitutivo adotado, estabeleceram-se comparações entre o modelo implementado neste trabalho e resultados disponíveis na literatura.

5.2.2.1 Estado plano de tensões em uma placa perfurada

Nesta seção é descrito um problema de elasto-viscoplástico no EPT do alongamento axial de uma placa retangular perfurada com um furo circular central, conforme Figura 5.11. Problemas como esse são frequentemente desenvolvidos e apresentados nas verificações de implementações computacionais de modelos constitutivos. O problema tratado nesta seção foi publicado primeiramente por Perić, 1993 e posteriormente por de Souza Neto et al., 2008, ambas as publicações mencionadas apresentam esse problema para o EPT adotando diferentes estratégias para a sua solução.

O modelo usado para essa análise foi construído utilizando condições de simetria, por meio da aplicação de condições de contorno apropriadas, assim a análise levou em consideração apenas um quarto da placa. O modelo foi discretizado utilizando elementos finitos triangulares de três nós, com integração reduzida, com os controles de elemento mantidos padrão, resultando em um total de 576 elementos. Na Figura 5.11 são apresentadas as dimensões, discretização por elementos finitos, condições de contorno empregadas no modelo, propriedades do material e a regra de endurecimento conforme encontrada nas publicações citadas anteriormente.

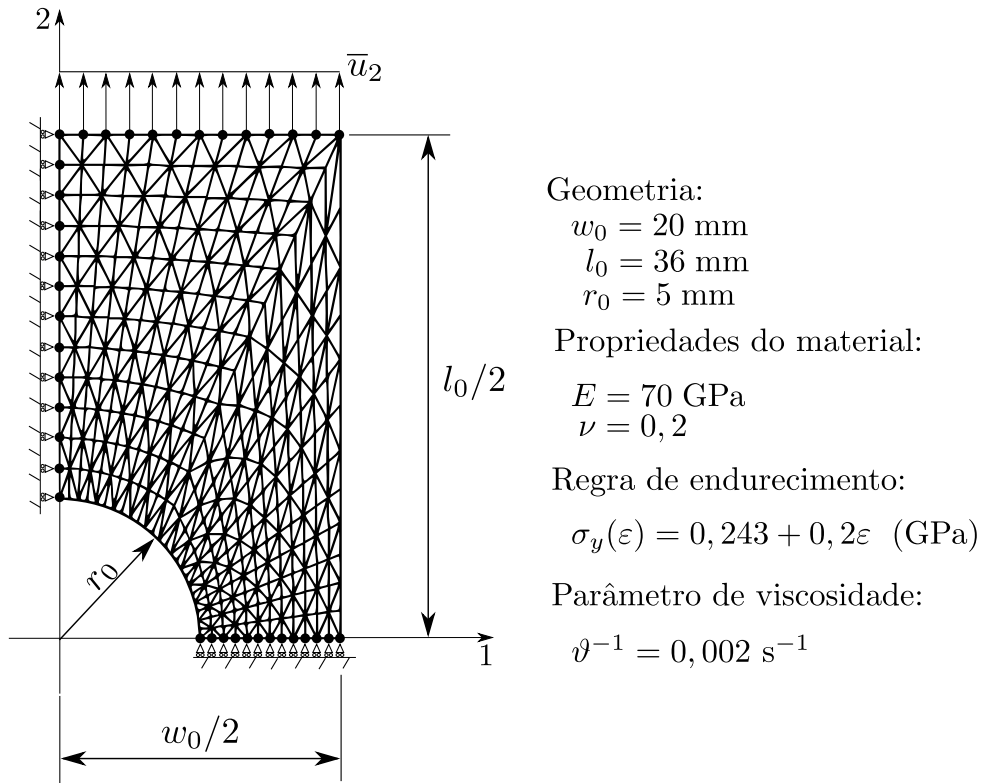


Figura 5.11 – Placa perfurada no EPT: representação esquemática das dimensões, discretização e condições de contorno. [Adaptado de Perić, 1993]

Para a realização da comparação entre as respostas para o problema, modificações foram necessárias nos parâmetros de entrada do modelo de dos Santos, 2016. Ao comparar a regra de endurecimento das referidas publicações, percebe-se que alguns aspectos constitutivos presentes na implementação atual não se aplicam a regra utilizada nos trabalhos citados. Assim, para a resposta do endurecimento ser compatível com as publicações citadas anteriormente, considerou-se nulos os parâmetros δ^{lwr} , δ^{up} , ξ_1 e ξ_2 , e unitários os parâmetros A_∞^{lwr} e A_∞^{up} .

Além disso, também existe uma diferença em relação ao formato das equações dos modelos citados em relação ao modelo de dos Santos, 2016. Em virtude disso, para a obtenção das mesmas interpretações relativas à função de sobretensão, foi necessário efetuar a multiplicação do parâmetro de entrada relacionado a viscosidade para o modelo de Perić ϑ , pelo fator de $\sqrt{2/3}$.

Todas análises foram executadas por meio da aplicação de uma taxa de carregamento constante para um deslocamento vertical total de $\bar{u}_2 = 6,15$ mm, aplicado na face superior da placa, de acordo com o apresentado pela Figura 5.11. Este carrega-

mento foi aplicado para diferentes taxas de carregamento que variaram entre os valores ${}^{2v_2}/l_0=0,555\times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ e ${}^{2v_2}/l_0=0,555\times 10^2 \text{ s}^{-1}$, com v_2 sendo a velocidade da aplicação do carregamento citado na direção 2.

Como resultado buscou-se a relação entre a força de reação apresentada na aresta fixa da placa, obtida pela soma das reações nodais, em relação ao deslocamento da aresta que possui condição de contorno prescrita. Em seguida, realizou-se a comparação da resposta encontrada em relação aos resultados presentes nos trabalhos de Perić, 1993 e de Souza Neto et al., 2008, para três diferentes parâmetros de sensibilidade à taxa de deformação $m = 1, 10$ e 100 .

Nos gráficos das Figuras 5.12, 5.13 e 5.14, estão apresentados os resultados obtidos com a solução do modelo adotado. Para a comparação entre os resultados obtidos neste trabalho em relação aos resultados das publicações citadas, foi realizada uma cuidadosa digitalização nos gráficos presentes nas referidas publicações. Além disso, plotou-se a resposta independente da taxa de deformação, obtida por meio da implementação, pela imposição de valores elevados para o parâmetro de sensibilidade à taxa de deformação m , a qual possui somente o caráter ilustrativo e comparativo na presente avaliação.

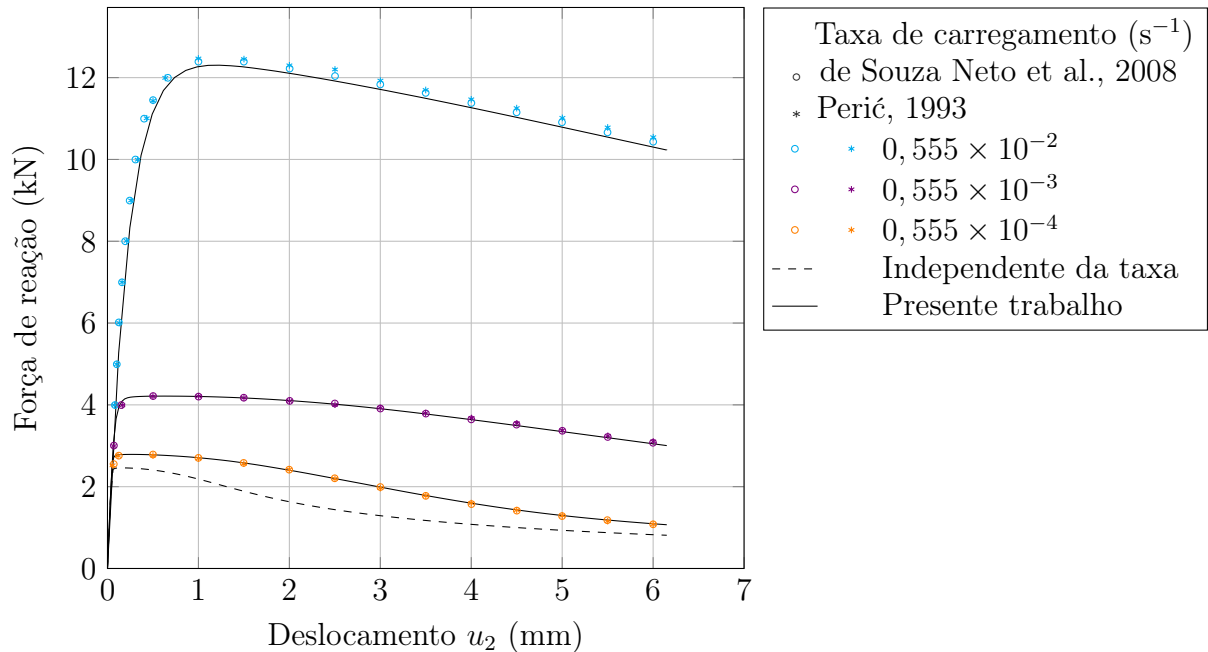


Figura 5.12 – Placa perfurada no EPT: comparação entre a implementação e os resultados de referência para a força-deslocamento utilizando diferentes taxas de carregamento ${}^{2v_0}/l_0$ e $m = 1$.

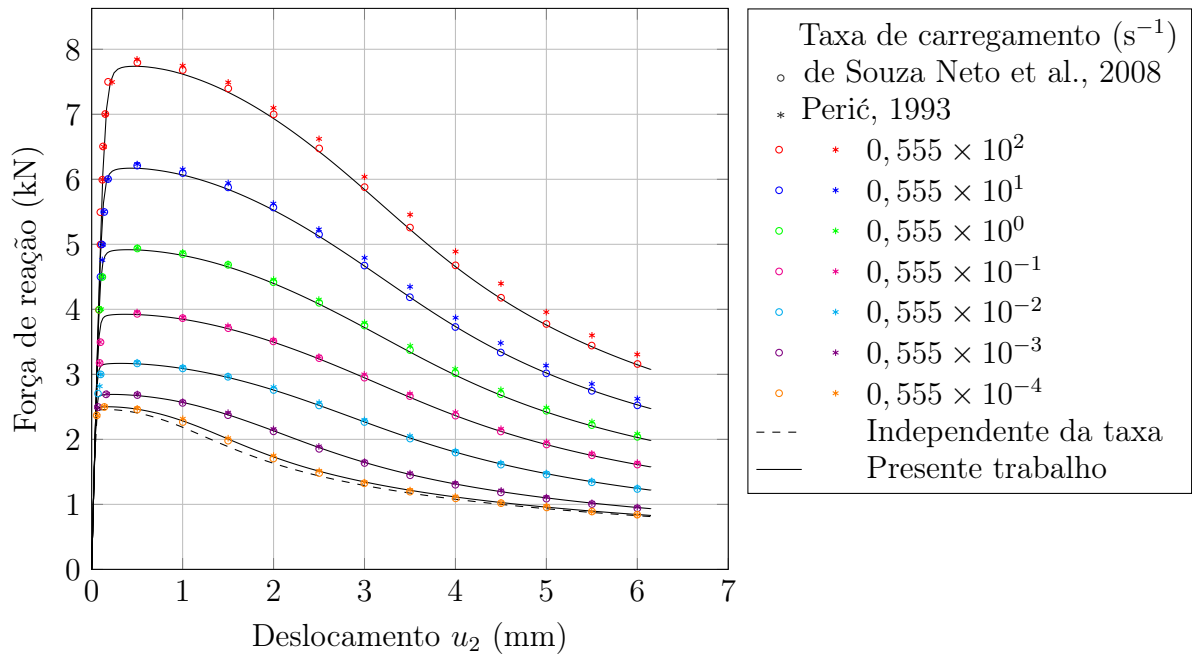


Figura 5.13 – Placa perfurada no EPT: comparação entre a implementação e os resultados de referência para a força-deslocamento utilizando diferentes taxas de carregamento $^{2v_0/l_0}$ e $m = 10$.

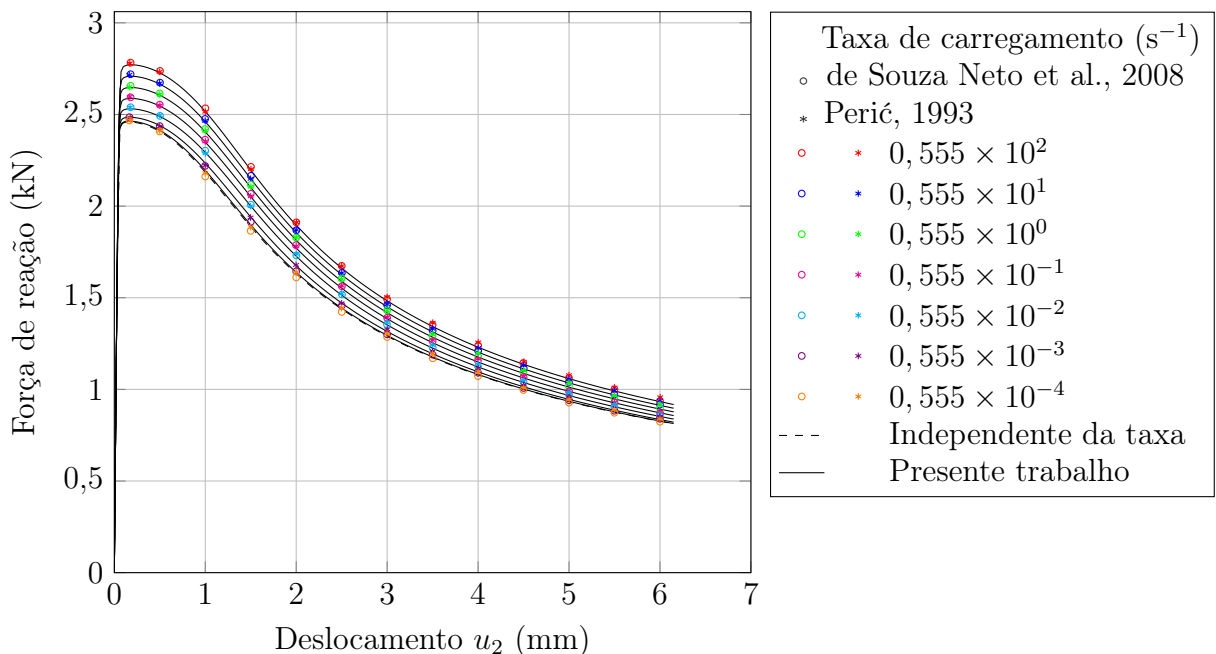


Figura 5.14 – Placa perfurada no EPT: comparação entre a implementação e os resultados de referência para a força-deslocamento utilizando diferentes taxas de carregamento $^{2v_0/l_0}$ e $m = 100$.

Evidentemente, o processo de digitalização implica na introdução de algumas incertezas em relação aos dados obtidos, entretanto conforme observado nos gráficos das Figuras 5.12, 5.13 e 5.14, a presente implementação apresentou resultados muito próximos aos encontrados nos referidos trabalhos. Em resumo, obtiveram-se respostas conforme o esperado, sendo que quanto maior a taxa de carregamento, maior foi a força de reação encontrada, já com o aumento do parâmetro de sensibilidade, menores forças são obtidas. Na Figura 5.15 são exibidos os contornos de deformação viscoplástica acumulada para diferentes taxas e parâmetros de sensibilidade para um deslocamento de $\bar{u}_2 = 0,3 \text{ mm}$.

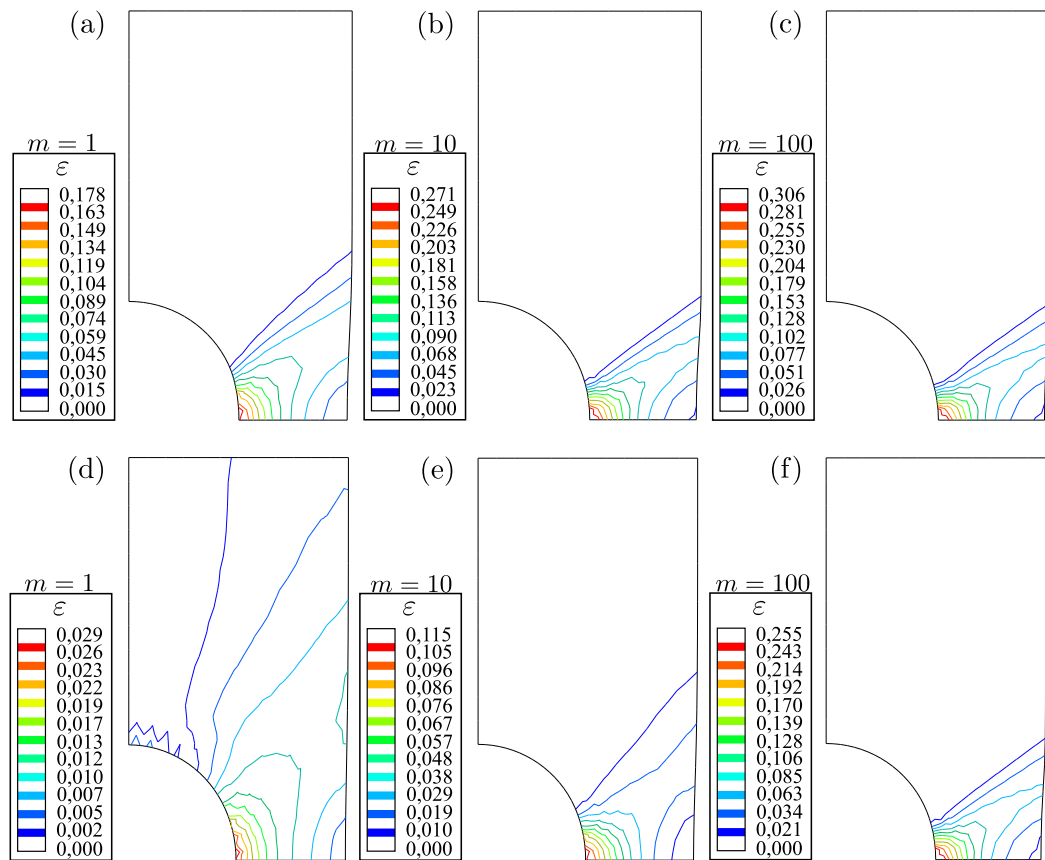


Figura 5.15 – Placa perfurada no EPT: contornos de deformação viscoplástica acumulada – Taxas de carregamento: (a), (b) e (c) $0,555 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$; (d) $0,555 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$; (e) e (f) $0,555 \times 10^2 \text{ s}^{-1}$.

Nos gráficos anteriores observa-se uma redução na força de reação em relação ao avanço do deslocamento aplicado. De acordo com Perić, 1993 e de Souza Neto et al., 2008, essa perda da rigidez decorre devido ao afinamento da placa em sua seção mais fraca, causada devido à plastificação do material conforme observa-se na Figura 5.15, levando a um aumento do fluxo plástico e um maior enfraquecimento da seção mais estreita.

5.2.2.2 Estado plano de deformações em uma placa perfurada

Nesta seção é realizada a verificação de um problema semelhante ao da seção anterior, entretanto agora sobre a hipótese do EPD. O problema consiste em um alongamento de uma placa retangular infinitamente longa com um furo circular central, presente na publicação de Alfano et al., 2001. O material considerado para a análise possui a hipótese de ser elástico-perfeitamente viscoplástico.

O problema consiste na aplicação de um deslocamento total de $u_{2f} = 50$ mm na borda superior da placa, impostos em 25 incrementos de $\Delta u = 2$ mm. A representação da geometria e condições de contorno estão dispostas na Figura 5.16. A discretização foi realizada com elementos quadriláteros bilineares de 4 nós com integração reduzida, com controles de elemento mantidos padrão, possuindo no total de 288 elementos. Por razões de simetria apenas um quarto da placa foi modelada por meio da aplicação de condições de contorno devidamente apropriadas. Devido a hipótese do material ser elástico-perfeitamente viscoplástico, os parâmetros de entrada para o modelo de dos Santos, 2016, relacionados ao endurecimento foram considerados nulos.

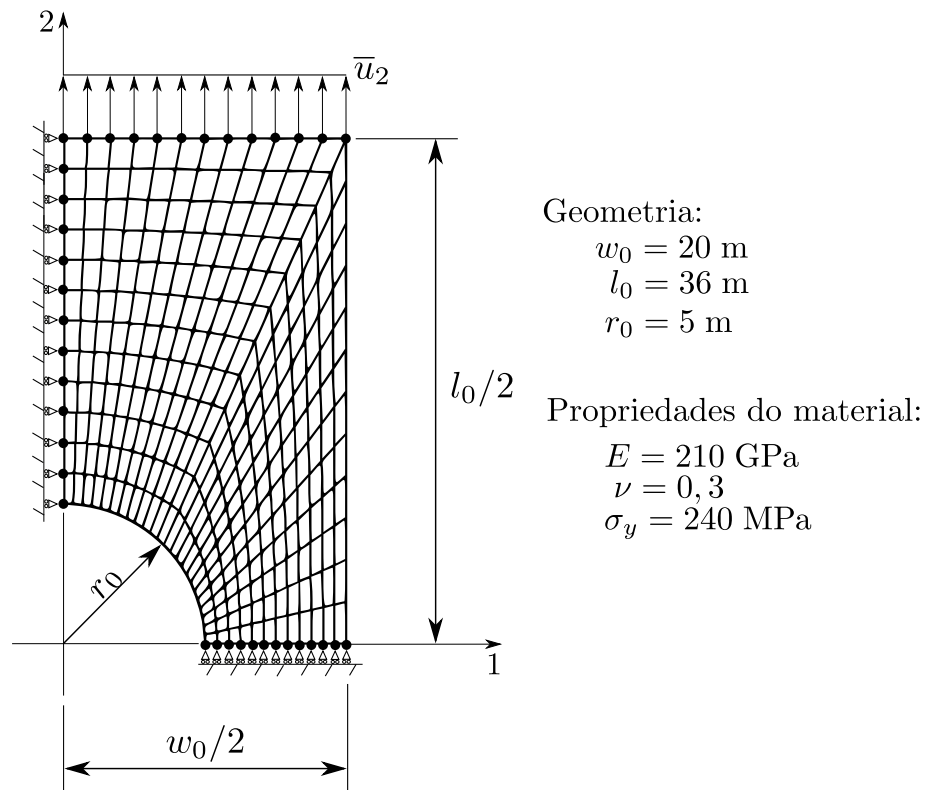


Figura 5.16 – Placa perfurada no no EPD: representação esquemática das dimensões, discretização e condições de contorno. [Adaptado de Alfano et al., 2001]

Nos gráficos das Figuras 5.17 e 5.18 capturou-se a força de reação total na aresta inferior, pela soma das forças de reação nodais, em relação ao deslocamento prescrito na aresta superior, levando em consideração a variação do parâmetro $\vartheta/\Delta t$, para os parâmetros de sensibilidade à taxa $m = 2$ e $m = 5$. Novamente, como no caso anterior, a resposta encontrada na publicação de Alfano et al., 2001, passou por uma cuidadosa digitalização.

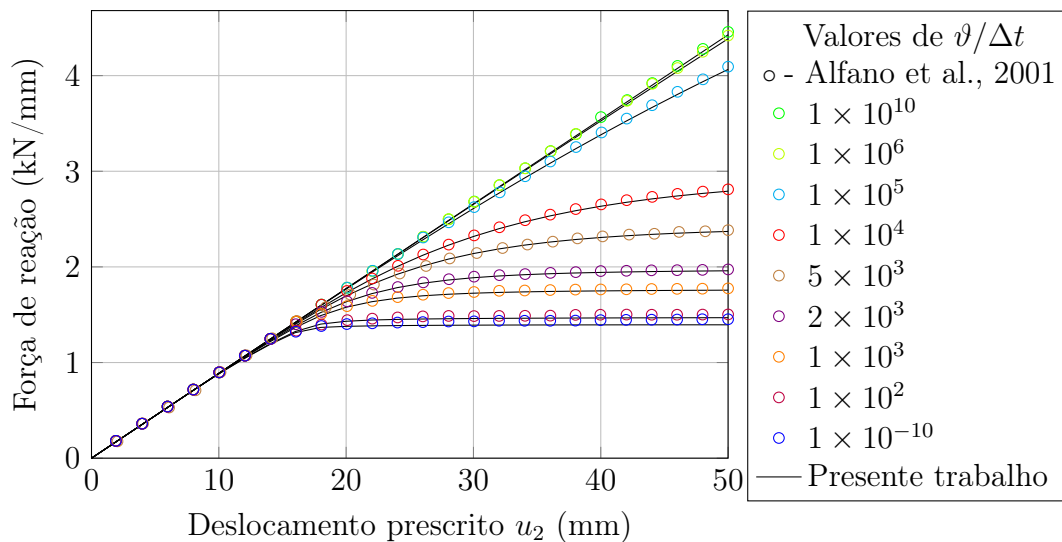


Figura 5.17 – Placa perfurada no EPD: comparação força-deslocamento entre os resultados de Alfano et al., 2001 e o presente trabalho para o modelo de Perić com $m = 2$ para diferentes valores de $\vartheta/\Delta t$.

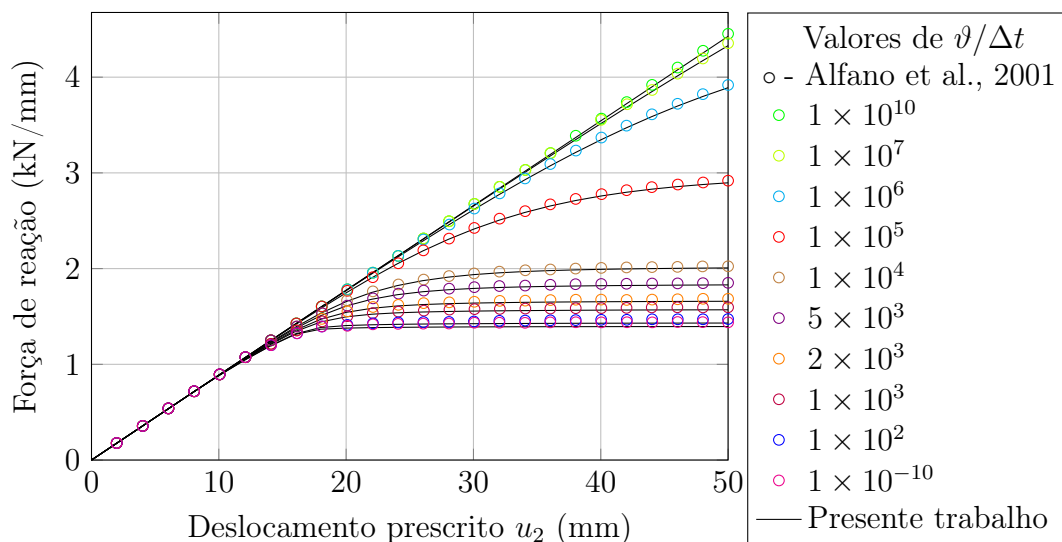


Figura 5.18 – Placa perfurada no EPD: comparação força-deslocamento entre os resultados de Alfano et al., 2001 e o presente trabalho para o modelo de Perić com $m = 5$ para diferentes valores de $\vartheta/\Delta t$.

Conforme observado nos gráficos das Figuras 5.17 e 5.18, levando em consideração as incertezas do processo de digitalização, ainda assim a comparação entre os resultados apresenta boa proximidade. De maneira geral, as mesmas características do problema EPT foram encontradas aqui, ou seja, a resposta da força-deslocamento é influenciada pela taxa do carregamento. Na Figura 5.19 são apresentadas os contornos de deformação plástica acumulada de diferentes parâmetros $\vartheta/\Delta t$ para um deslocamento $\bar{u}_2 = 50$ mm.

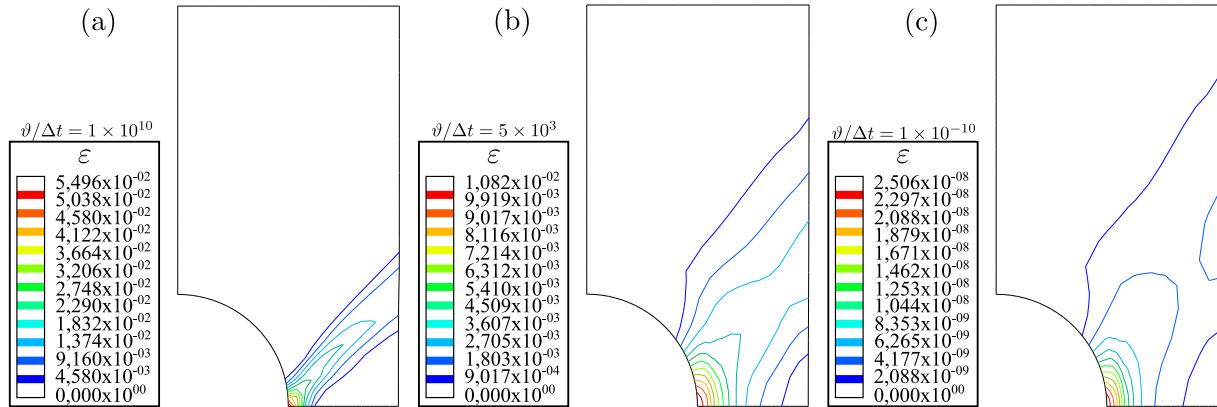


Figura 5.19 – Placa perfurada no EPD: contornos de deformação viscoplástica acumulada para $m = 2$

Nos gráficos das Figuras 5.20 e 5.21, foram plotados a força de reação pelo deslocamento, porém para diferentes valores de m , mantendo a mesma taxa de carregamento.

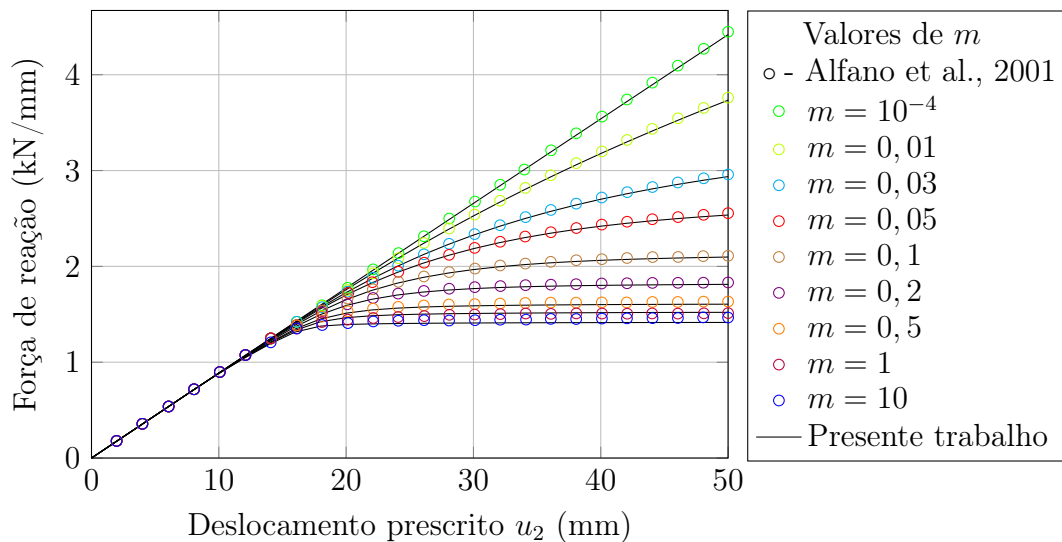


Figura 5.20 – Placa perfurada no EPD: comparação força-deslocamento entre os resultados de Alfano et al., 2001 e o presente trabalho para o modelo de Perić com

$\vartheta/\Delta t = 10^2$ e diferentes valores de m .

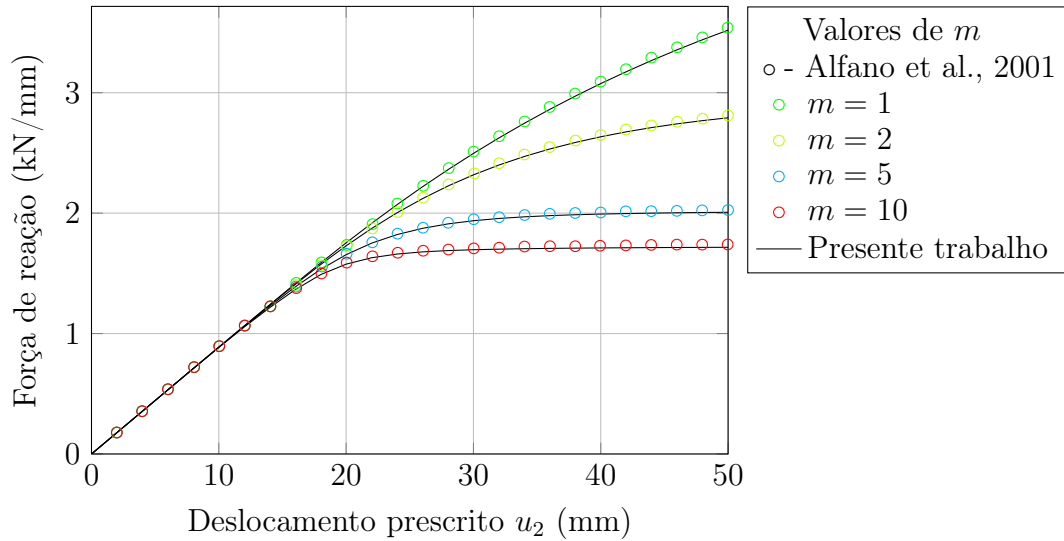


Figura 5.21 – Placa perfurada no EPD: comparação força-deslocamento entre os resultados de Alfano et al., 2001 e o presente trabalho para o modelo de Perić com $\vartheta/\Delta t = 10^4$ e diferentes valores de m .

Nos gráficos das Figuras 5.20 e 5.21, novamente as respostas apresentaram boa proximidade na comparação entre as respostas. Em resumo, percebe-se a influência do parâmetro de sensibilidade m na resposta da força de reação. Na Figura 5.22 são apresentados os contornos de deformação viscoplástica acumulada para diferentes valores de m e $\vartheta/\Delta t = 10^2$ para um deslocamento de $\bar{u}_2 = 50$ mm.

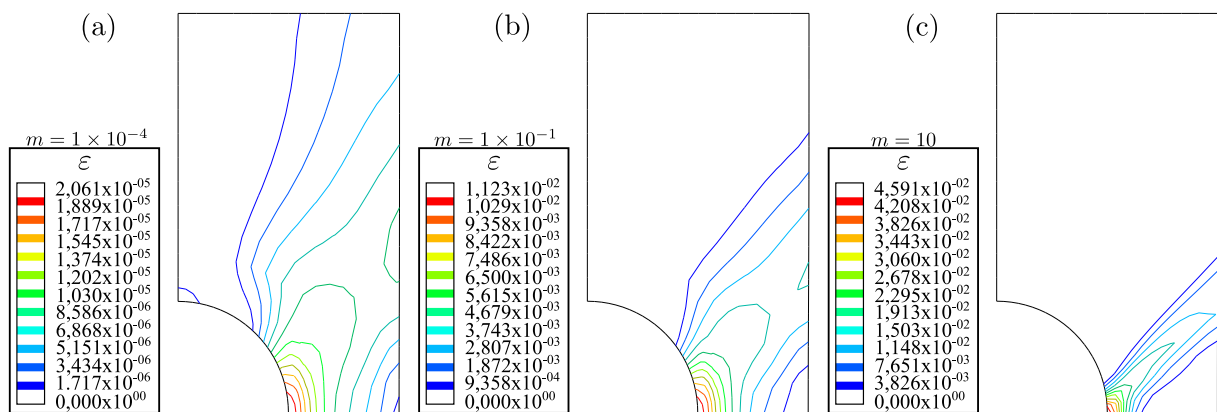


Figura 5.22 – Placa perfurada no EPD: contornos de deformação viscoplástica acumulada para $\vartheta/\Delta t = 10^2$.

6 PROCESSO DE CONFORMAÇÃO A ALTAS VELOCIDADES

Este capítulo tem como finalidade a avaliação da resposta mecânica para um problema prático de engenharia usando modelos elasto-viscoplásticos. O problema avaliado situa-se no campo do modelamento do processo de conformação mecânica a altas velocidades, onde entre inúmeras aplicações existentes, neste trabalho a atenção será dada ao processo de conformação eletromagnética (CEM).

6.1 O estado da arte no processo de conformação eletromagnética

Com base nos trabalhos de Takatsu et al., 1988; Siddiqui, 2009; Psyk et al., 2011 e Gayakwad et al., 2014 o processo de conformação eletromagnética (CEM) é uma técnica de conformação que ocorre a elevadas velocidades, sem a existência de contato entre a ferramenta de conformação e a peça, onde elevadas forças podem ser transmitidas para a peça metálica a ser conformada, a qual deve ser obrigatoriamente constituída por material altamente condutor elétrico.

O processo CEM é baseado nas forças repulsivas geradas pela oposição ao campo magnético gerado em condutores. Por meio de uma descarga de um banco de capacitores, o fluxo de corrente que varia no tempo flui para a bobina, formando um campo magnético transiente que induz corrente na peça. A deformação é guiada pela interação entre a corrente induzida na peça com o campo magnético gerado por uma bobina posicionada em sua proximidade. As correntes geradas fluem em oposição e assim desenvolvendo as forças de corpo necessárias para deformar a peça.

No processo CEM desenvolvem-se elevadas velocidades, onde as taxas de deformação podem chegar na ordem de 10^4 s^{-1} . O que explica a utilização de modelos constitutivos dependentes da taxa de deformação para o modelamento mecânico. Como a duração do pulso eletromagnético é muito curto, as forças de inércia tem um importante papel na deformação plástica para a formação da peça conformada.

Dependendo do arranjo entre a geometria da bobina e da peça a ser conformada, diferentes geometrias finais podem ser obtidas pelo processo CEM, destacam-se a compressão e expansão de componentes tubulares e a conformação de chapas metálicas planas finas. Na Figura 6.1, são apresentadas representações esquemáticas das principais aplicações do processo CEM.

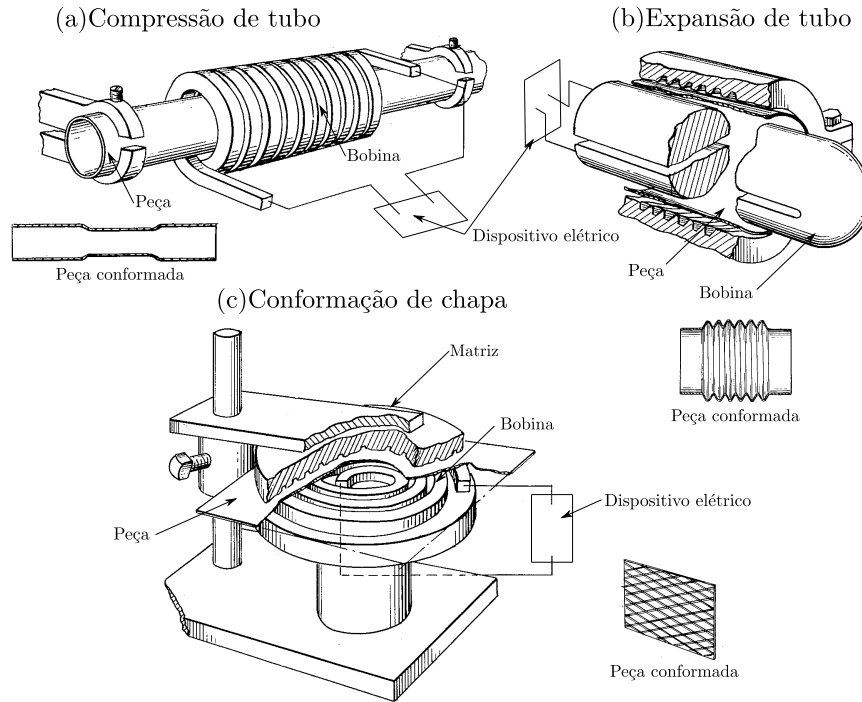


Figura 6.1 – Diferentes configurações do processo de CEM. [Adaptado de Harvey e Brower, 1958]

Nota: este trabalho limitou-se a avaliação das características mecânicas dos componentes conformados obtidas pelo processo CEM, temas que envolvem a tecnologia do processo e os fenômenos eletro-magnéticos estão detalhados nos trabalhos citados.

6.2 O modelo constitutivo de Johnson-Cook

Nesta seção será brevemente apresentado o conhecido empírico, e isotrópico modelo de Johnson-Cook. Originalmente apresentado em Johnson e Cook, 1983, o modelo incorpora os efeitos da deformação, da taxa de deformação e da temperatura. O modelo constitutivo de Johnson-Cook é amplamente empregado para modelagens no campo científico e tecnológico, disponível em muitos *softwares* comerciais de elementos finitos, como em ABAQUS.

O modelo viscoplástico de Johnson-Cook pode ser escrito, para condições isotérmicas ¹, como

$$\sigma = (k_A + k_B \varepsilon^{k_n}) \left[1 + k_C \ln \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right) \right], \quad (6.1)$$

¹O termo $\left(\frac{\theta - \theta_0}{\theta_m - \theta_0} \right)$ foi considerado unitário.

onde σ é a tensão de fluxo, $\dot{\varepsilon}_0$ é a taxa de deformação plástica de referência, k_A é a tensão de escoamento, k_B e k_n representa o efeito de deformação no endurecimento e k_C é um parâmetro de material associado a taxa de deformação.

Os dados experimentais para o alumínio recozido AA1050 estão presentes no trabalho de dos Santos, 2016, o qual emprega na evolução da tensão a contribuição da tensão de escoamento e da tensão viscosa, serviram como base para os procedimentos de ajustes de dados, conforme presente nos trabalhos de Paese et al., 2019, para o intervalo $\dot{\varepsilon} \in [10^{-2}, 2 \times 10^3]$ e $||\varepsilon|| \in [0 - 0,5]$, resultando nos valores apresentados na Tabela 6.1. A densidade considerada foi de 2700 kg/m^3 e os parâmetros de elasticidade isotrópica de 70 GPa para o módulo de elasticidade e 0,33 para o coeficiente de *Poisson*.

Tabela 6.1 – Parâmetros ajustados a partir dos dados do trabalho de dos Santos, 2016, para o modelo isotérmico de Johnson–Cook. [Fonte: Paese et al., 2019]

k_A (MPa)	k_B (MPa)	k_C (-)	k_n (-)	ε_0 (-)
41,965	125,323	$18,355 \times 10^{-3}$	0,6258	0,01

Na Figura 6.2 é apresentado as superfícies teóricas de tensão em relação a deformação viscoplástica acumulada e a taxa de deformação para os modelos de Johnson-Cook e dos Santos, para o alumínio AA1050.

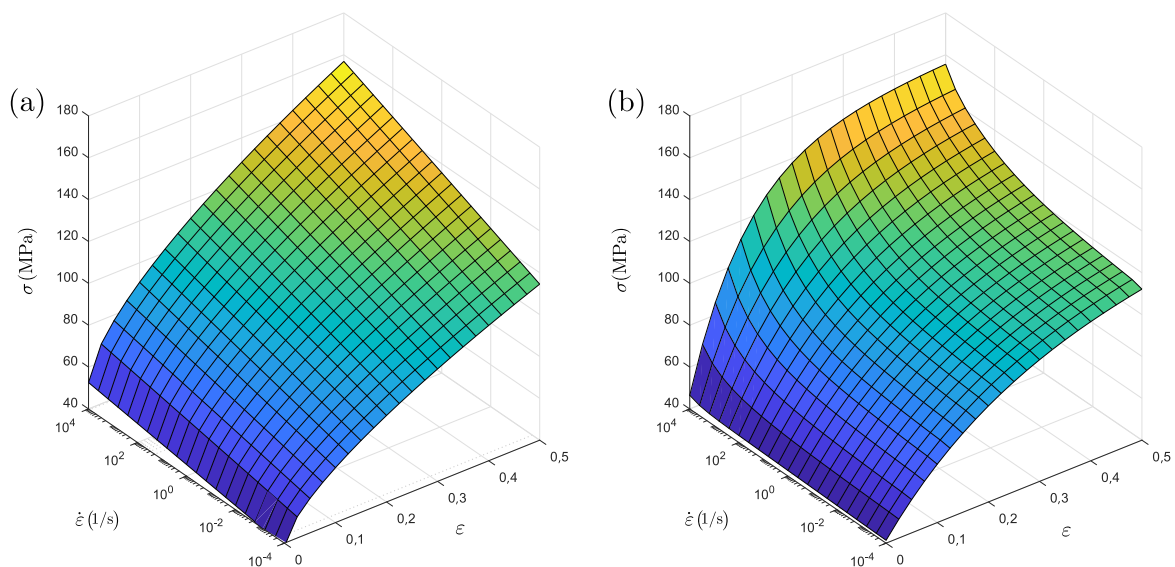


Figura 6.2 – Superfícies de tensão em termos da deformação viscoplástica acumulada e da taxa de deformação para os modelos: (a) Johnson-Cook e (b) dos Santos.

6.3 Avaliação numérica

Nesta seção as respostas mecânicas de dois processos de CEM foram avaliadas: a compressão de tubo e a conformação de chapas finas a altas velocidades. Evidentemente a modelagem do processo CEM demanda de modelos multifísicos para assim abranger os fenômenos elétricos, magnéticos e mecânicos. Entretanto, neste trabalho assumiu que o fenômeno eletromagnético e o fenômeno mecânico são problemas independentes. Por essa abordagem, o carregamento devido a força eletromagnética sobre o corpo a ser deformado é conhecido como pressão eletromagnética. Assim, os dados necessários para a modelagem mecânica da compressão do tubo e da conformação da chapa utilizaram respectivamente como referência os trabalhos de Geier et al., 2014 e Paese et al., 2019.

A pressão eletromagnética foi usada como condição de contorno no modelamento do problema mecânico, o qual foi resolvido por meio do método dos elementos finitos (MEF), pela utilização do *solver* explícito do *software* de elementos finitos ABAQUS. Para o modelo de Johnson-Cook utilizou-se o modelo padrão presente no *software*, já para o modelo constitutivo de dos Santos uma rotina de usuário VUMAT foi utilizada. Também, uma rotina de usuário VDLOAD foi implementada para os perfis de pressão eletromagnética transientes usados como carregamento para o caso da conformação da chapa.

6.3.1 Compressão de tubo a altas velocidades

Nesta seção, o processo de compressão de tubo a altas velocidades foi avaliado. O modelo geométrico usado para isso consistiu em uma representação axissimétrica como ilustrado na Figura 6.3. O tubo tem raio externo inicial de $r_o = 7$ mm, raio interno de $r_i = 5$ mm e comprimento $l_0 = 25$ mm. Devido a razões de simetria, somente um quarto do modelo do tubo foi considerado na presente simulação, por meio da aplicação de condições de contorno apropriadas. O carregamento da pressão eletromagnética foi aplicado na porção central da peça no sentido negativo do eixo r .

O modelo foi discretizado usando elementos finitos explícitos quadrilaterais axissimétricos, com integração reduzida e controles de elemento padrão. A discretização usou 8 elementos através da espessura e 98 elementos ao longo da direção axial. Um detalhe da discretização usada para o modelo está ilustrada na Figura 6.3.

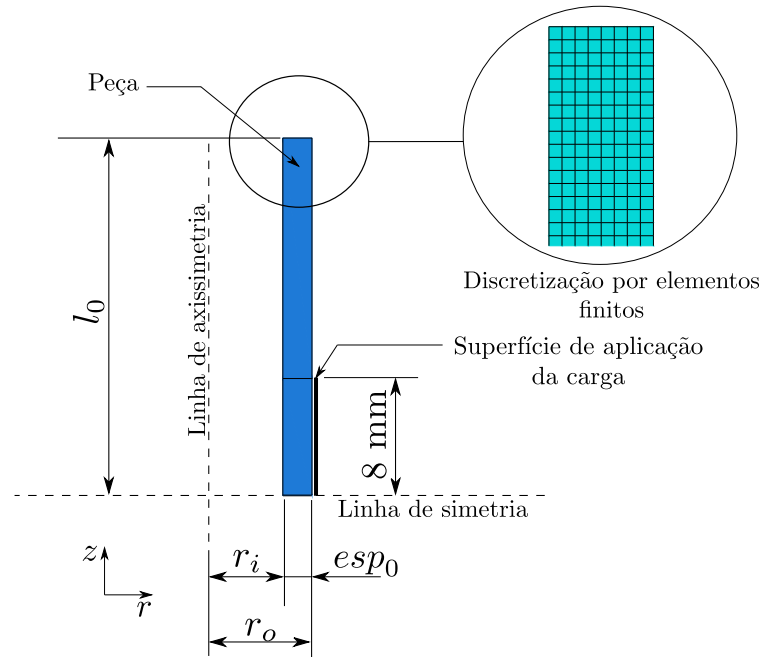


Figura 6.3 – Compressão de tubo a altas velocidades: geometria, discretização por elementos finitos e condições de contorno para o processo de compressão eletromagnética para a simulação no ABAQUS/Explícito.

Segundo Geier et al., 2014, para o problema de CEM como o de compressão de tubos, um modelador² de campo pode também ser usado com o objetivo de concentrar e intensificar a pressão eletromagnética sobre uma determinada região da superfície externa do tubo. O pulso de pressão eletromagnética resultante p , cuja a sua magnitude varia em relação ao tempo, mas é constante no espaço, pode ser estimado por meio da seguinte expressão

$$p(t) = \frac{1}{2} \mu_{mag} \left[\frac{l_a}{n_e} I(t) \right]^2 c_p, \quad (6.2)$$

estabelecida em termos da permeabilidade magnética μ_{mag} , corrente de descarga I , o fator de concentração de campo c_p , o comprimento da bobina l_a e número de enrolamentos da bobina n_e (veja mais detalhes em Geier et al., 2014). Na Figura 6.4 é apresentada a curva de corrente de descarga usada para a determinação da pressão eletromagnética por meio da Equação 6.2.

²Este componente atua em conjunto com a bobina, é também conhecido como concentrador de campo, sendo utilizado com o objetivo de alterar o campo magnético e intensificar a pressão magnética sobre uma determinada região localizada na peça a ser conformada. Maiores detalhes podem ser encontrados em Geier et al., 2014.

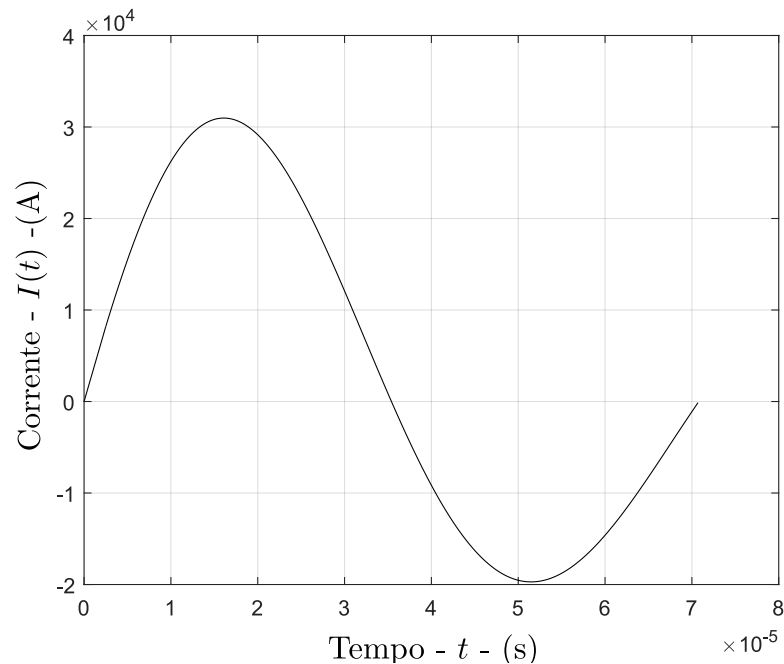


Figura 6.4 – Processo de compressão de tubo: perfil da corrente de descarga para $U = 1500\text{J}$. [Adaptado de Geier et al., 2014]

A Figura 6.5 compara as características mecânicas encontradas na configuração deformada usando os modelos constitutivos citados. Especificamente na Figura 6.5 (a) é apresentada a comparação referente a configuração encontrada ao final do estágio de conformação. A simulação empregando o modelo de Johnson-Cook encontrou um raio externo final de 4,88 mm, a espessura da parede $esp = 2,79$ mm e um comprimento total igual a 25,25 mm na configuração final. Em contraste, a simulação usando o modelo de dos Santos, o raio externo foi igual a 5,14 mm, a espessura da parede $esp = 2,58$ mm e o comprimento final de 25,15 mm foi obtido.

Na Figura 6.5 (b) é apresentado a razão da variação da espessura normalizada pela comprimento inicial do tubo ao longo da direção longitudinal. É evidente que ocorre um aumento da espessura da parede do tubo na região conformada para ambos os modelos. Nas imediações do comprimento normalizado de 0,4 é possível observar uma pequena redução na espessura novamente para ambos os modelos. Claramente, o problema que emprega o modelo de Johnson-Cook apresenta a maior variação de espessura ao longo do comprimento total em quase toda a extensão da parede conformada.

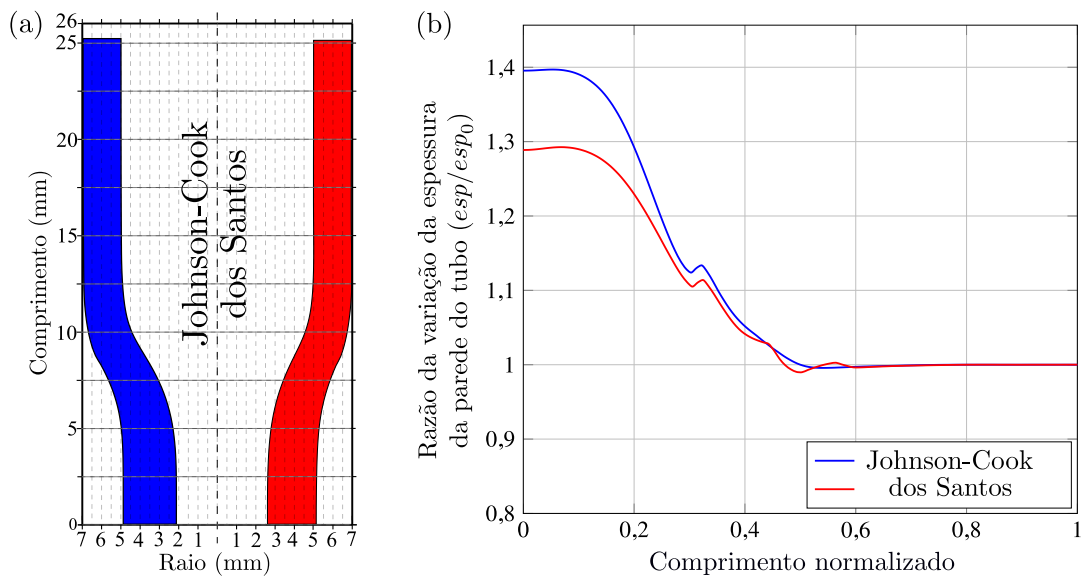


Figura 6.5 – Compressão de tubo a altas velocidades – Configuração final para ambos os modelos: (a) geometria deformada e (b) razão de variação da espessura ao longo do comprimento do tubo.

Apesar de ambos os modelos terem sido calibrados a partir de dados experimentais associados ao mesmo material, os resultados obtidos em cada modelo são distintos. Diferenças podem ser observadas não apenas em termos de deslocamentos, mas também, como já esperado, em termos da tensão e da deformação. A Figura 6.6 apresenta a tensão de *von Mises* e a deformação viscoplástica acumulada para diferentes instantes de tempo durante o processo de CEM para os modelos avaliados. Conforme pode ser observado, durante e ao final (após a estabilização da tensão – ver apêndice F) da conformação, os campos de tensão e deformação obtidos em cada modelo constitutivo são diferentes. Em resumo, o modelo de Johnson-Cook apresentou valores mais altos de tensão de *von Mises* e de deformação viscoplástica acumulada do que o modelo de dos Santos.

Com a intenção de avaliar a distribuição da tensão ao final do processo de CEM, após a estabilização da tensão, as tensões nas direções radial, circunferencial e axial foram plotadas para os pontos de integração através da espessura da parede do tubo. A Figura 6.7 apresenta a distribuição de tensões no centro da região conformada em relação a distância radial r , a partir da superfície interna do tubo. Como o observado, a tensão resultante para cada modelo constitutivo utilizado apresentou diferenças substanciais em todas as direções avaliadas.

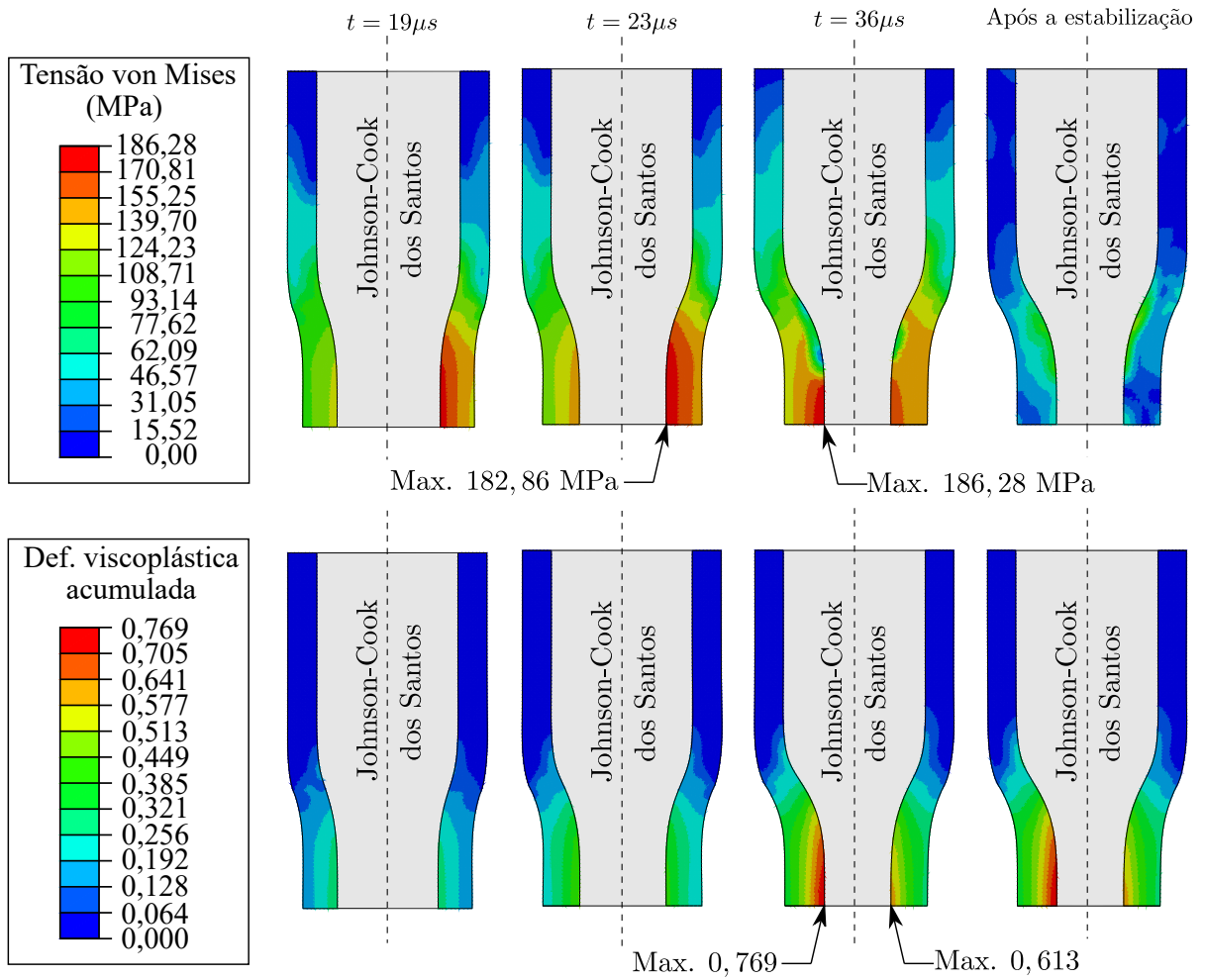


Figura 6.6 – Compressão de tubo a altas velocidades: tensão de *von Mises* e deformação viscoplástica acumulada em vários estágios do processo de CEM para o modelo axissimétrico.

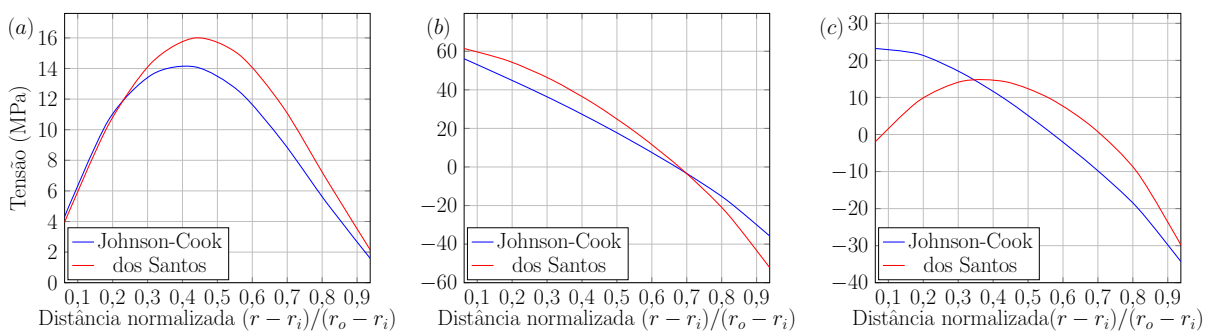


Figura 6.7 – Compressão de tubo a altas velocidades – Tensão após o processo de estabilização ao longo da seção transversal da parede deformada do tubo: (a) direção radial, (b) direção circunferencial e (c) direção axial.

6.3.2 Conformação de chapas finas em altas velocidades

Nesta seção, o processo de conformação eletromagnética de chapas finas foi investigado. O modelo geométrico consiste em uma representação axissimétrica conforme ilustrado pela Figura 6.8. A peça tem um raio inicial $r_o = 55$ mm e a espessura $esp_0 = 1$ mm. A matriz e o prensa-chapas foram modelados como superfícies analíticas rígidas e a pressão eletromagnética foi estabelecida na linha superior da peça no sentido negativo do eixo z . A força de 12,5 kN foi aplicada na parte superior do prensa-chapas, para simular a compressão realizada na fase de pré-carregamento, um coeficiente de fricção de 0,2 foi aplicado na simulação, veja Paese et al., 2019 para mais detalhes.

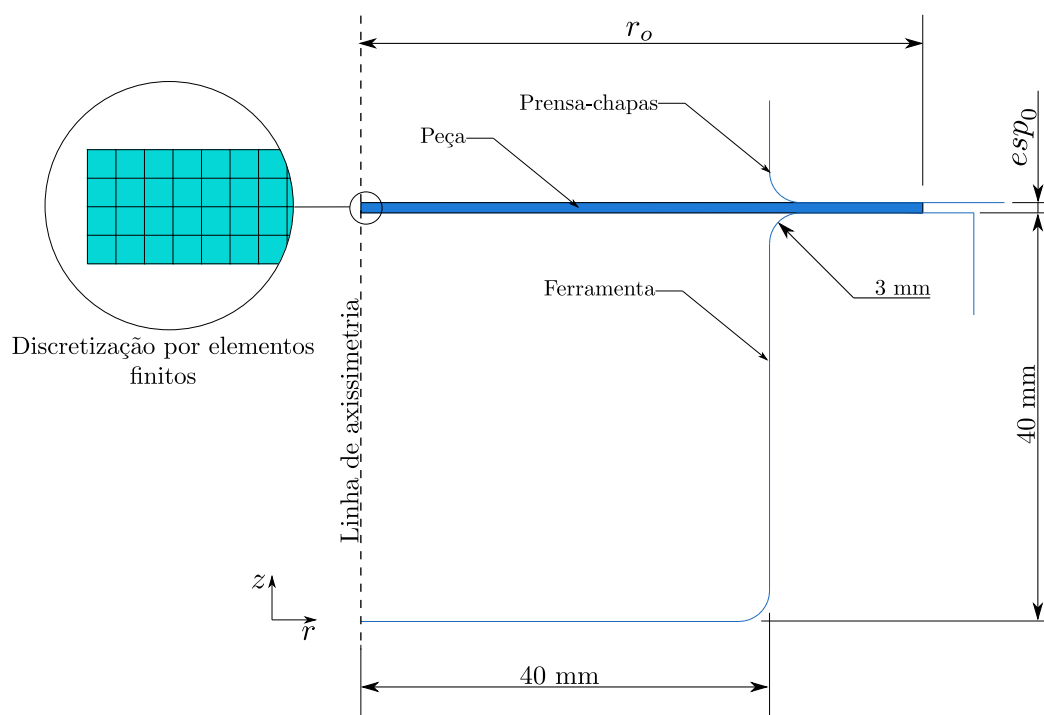


Figura 6.8 – Processo de conformação de chapas finas em altas velocidades: modelo geométrico, discretização por elementos finitos e condições de contorno para o processo de CEM de chapas finas para simulação no ABAQUS/Explícito.

A discretização realizada nessa seção usou o mesmo elemento finito que foi empregado no processo CEM avaliado anteriormente, porém agora utilizando 4 elementos através da espessura e 220 ao longo da direção radial. Conforme trabalho de Paese et al., 2019, os valores da distribuição da pressão eletromagnética foram fornecidos por meio de um método próprio a cada $0,1 \mu s$. Os dados foram interpolados radialmente, mas manti-

dos constantes a cada intervalo de tempo. Para evitar a necessidade de concordância entre malhas do problema eletromagnético e o problema mecânico, a pressão eletromagnética foi descrita por meio de um ajuste de dados usando a soma de senos dado por

$$p(r) = \sum_{i=1}^8 k_{1i} \text{sen} (k_{2i}r + k_{3i}) , \quad (6.3)$$

onde os coeficientes k_{1i} , k_{2i} , and k_{3i} foram determinados pelo *cftool* no *software* Matlab e mantidos constantes durante o incremento de tempo. A Figura 6.9 apresenta um exemplo do ajuste usado para o perfil de pressão eletromagnética, por meio da Equação 6.3. A pressão eletromagnética foi calculada para a energia $U=1500$ J.

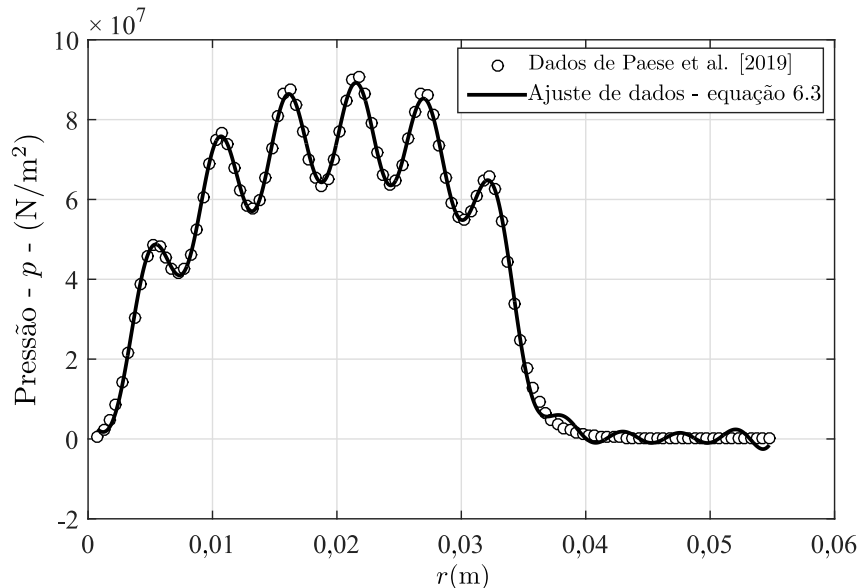


Figura 6.9 – Processo de conformação de chapas finas em altas velocidades – Perfil de pressão eletromagnética para o máximo valor de corrente de descarga no tempo $6,5 \mu\text{s}$ para $U=1500$ J. Os círculos são valores de pressão eletromagnética computados por método presente em Paese et al., 2019 e a linha sólida é o ajuste de dados, encontrado usando a Equação 6.3 . [Adaptado de Paese et al., 2019]

Similarmente ao processo da CEM anterior, diferentes resultados foram obtidos para cada modelo constitutivo utilizado. A Figura 6.10 apresenta os campos de tensão de *von Mises* e a deformação viscoplástica acumulada na configuração corrente, para diferentes estágios do processo da CEM. A análise que empregou o modelo de Johnson-Cook apresentou o deslocamento vertical total no centro da peça conformada o valor de 36,52 mm, enquanto para o modelo de dos Santos o deslocamento total foi de 35,58 mm.

A espessura final no centro da peça deformada foi de $esp = 0,598$ mm para o modelo Johnson-Cook e $esp = 0,632$ mm para o modelo de dos Santos.

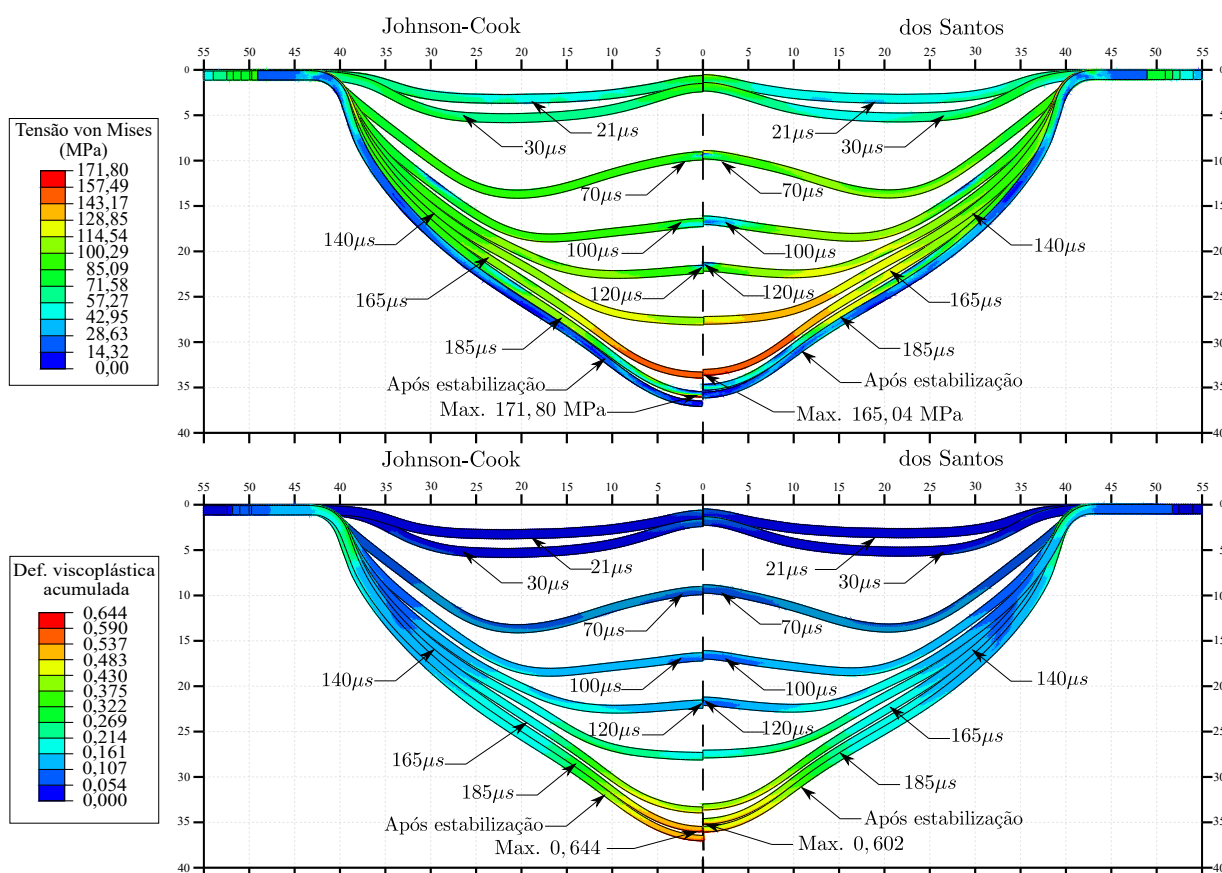


Figura 6.10 – Processo de conformação de chapas finas em altas velocidades: tensão de *von Mises* e deformação viscoplástica acumulada em vários estágios do processo de CEM para o modelo axissimétrico.

A Figura 6.11 apresenta a razão de variação da espessura ao longo da coordenada radial r , tendo origem no centro da peça deformada. Um afinamento da espessura ocorre na região central da peça deformada para ambos os modelos constitutivos. A variação de espessura ao longo da distância radial da peça deformada, para o modelo de Johnson-Cook, como ocorreu para o processo de CEM anterior, foi maior do que para o modelo de dos Santos.

Novamente, a distribuição do estado de tensões após a sua estabilização (ver apêndice F) foi investigado. Gráficos do estado de tensão no centro da peça conformada em relação a distância normalizada através da espessura final são apresentadas na Figura 6.12. Como no caso anterior, as tensões após a estabilização são diferentes para cada modelo constitutivo empregado na avaliação.

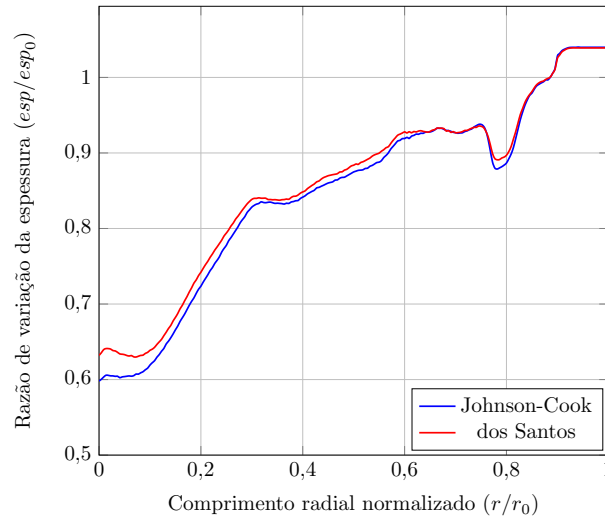


Figura 6.11 – Processo de conformação de chapas finas em altas velocidades: razão de variação da espessura da chapa em relação a distância radial normalizada.

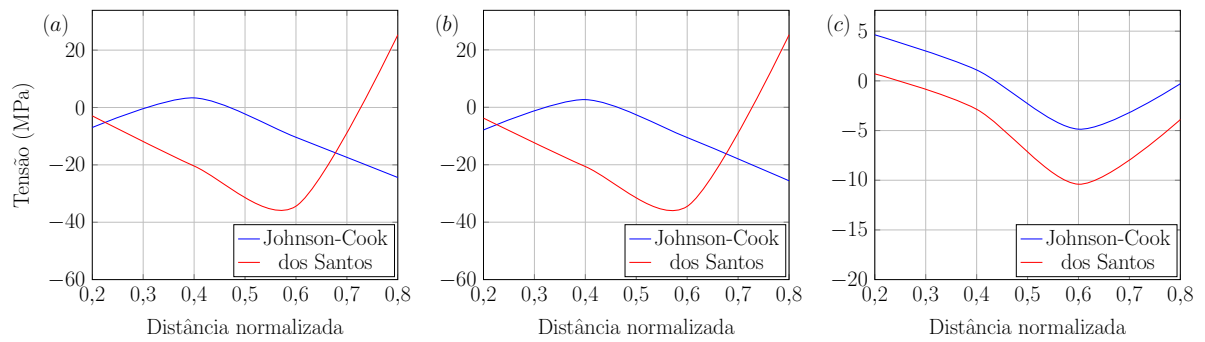


Figura 6.12 – Processo de conformação de chapas finas em altas velocidades: tensões após a estabilização da tensão através da espessura a partir da superfície superior na região central da peça conformada; (a) direção radial, (b) direção circunferencial e (c) direção axial.

7 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi realizada a implementação e a avaliação do modelo constitutivo viscoplástico proposto por dos Santos, 2016, utilizando o método dos elementos finitos (MEF), por meio do *software* comercial ABAQUS. Tendo em vista os aspectos observados no decorrer deste trabalho, é possível afirmar que os objetivos estabelecidos foram atingidos.

Na revisão bibliográfica, as principais características teóricas do problema de elasto-viscoplasticidade sob deformações finitas foram apresentadas. O modelo constitutivo de dos Santos, 2016, foi exposto de forma resumida levando em consideração a obtenção dos principais equacionamentos relacionados ao mesmo. Os quais foram reescritos tendo como objetivo estarem compatíveis com as medidas requeridas pelo *software* ABAQUS, para a implementação do problema constitutivo por meio das chamadas rotinas de usuário que definem o comportamento do material. Levando isso em consideração, as equações constitutivas que nos trabalhos originais de dos Santos, 2016, estão situadas na configuração de referência, foram reescritas a fim de que as respostas estivessem direcionadas para a configuração corrente.

Também foi apresentada a particularização das equações constitutivas do modelo adotado, originalmente no estado tridimensional diretamente para o estado plano de tensões (EPT). Assim, para a imposição das restrições do EPT, todas as equações foram reescritas por meio da utilização da teoria da projeção da tensão. Na bibliografia existem poucos trabalhos sobre o tema no âmbito da viscoplasticidade utilizando a chamada função de sobretensão. Entretanto, a teoria pode ser empregada para essa finalidade, desde que seja observado o correto tratamento da função citada na obtenção do equacionamento no EPT.

A apresentação do método de solução global, novamente objetivou aproximar o leitor de maneira fiel à teoria empregada pelo ABAQUS. Desse modo, a partir das equações de equilíbrio por meio do método das potências virtuais estabeleceram-se as equações que solucionam o problema ao nível global. Na solução pela análise estática utilizou a linearização para a determinação do operador tangente na configuração corrente, e para a análise dinâmica explícita apresentou-se os principais equacionamentos que solucionam o problema.

A construção do problema para implementação computacional seguiu abordagem idêntica à apresentada em dos Santos, 2016. Para o caso EPT foram necessárias modificações, as quais foram realizadas em concordância com a literatura. A partir da implementação computacional, rotinas de usuário no ABAQUS foram criadas para a determinação da resposta constitutiva para problemas resolvidos pelo método de solução global implícito e explícito, para os casos tridimensional, axissimétrico, estado plano de deformações (EPD) e EPT.

Verificações nos modelos implementados foram realizadas a fim de garantir a correta resposta constitutiva. Desse modo, equacionamentos analíticos e semi-analíticos para problemas simples, desconsiderando os efeitos inerciais, foram formulados. Comparações entre as expressões desenvolvidas e as respostas numéricas obtidas pelas rotinas foram realizadas. Adicionalmente, para o EPT buscou-se verificar o cumprimento da resposta constitutiva em relação ao caso tridimensional homogêneo. Já para problemas mais complexos comparações com respostas de referência encontradas em publicações foram realizadas. Visto que os resultados obtidos por meio das comparações de verificação foram próximos, afirma-se que a implementação realizada pelas rotinas de usuário no ABAQUS está verificada.

Durante a análise do processo de conformação a altas velocidades, foram investigadas as características mecânicas obtidas por dois modelos viscoplásticos distintos. A resposta mecânica obtida com a formulação constitutiva adotada nesse trabalho foi comparada com a resposta obtida pelo modelo de Johnson-Cook. De acordo com o que é relatado na literatura, as taxas de deformação na ordem de 10^4 s^{-1} podem ser alcançadas em processos de conformação a altas velocidades. Sabe-se que, em consequência disso, os efeitos no endurecimento devido a altas taxa de deformação desempenham um papel importante na resposta observada, já que o comportamento do endurecimento tem influência direta na resposta de tensão e na evolução inelástica. Assim, de antemão era esperado a ocorrência de diferenças nas comparações entre os modelos, que de fato, baseado nos resultados apresentados tais diferenças foram observadas.

As investigações foram conduzidas considerando características mecânicas específicas, como deslocamentos, tensões e deformações viscoplásticas. Apesar de ambos os modelos terem sido calibrados com dados experimentais do mesmo material, diferenças foram observadas. Do ponto de vista físico, diferentes respostas foram encontradas em

relação ao aspecto final da peça conformada para cada modelo avaliado. Além disso, como o estado de tensões e deformações viscoplásticas acumuladas são dependentes da escolha do modelo constitutivo, influências poderão ser evidenciadas também para o limite de conformação ou para a estimativa da vida em fadiga do componente conformado.

7.1 Sugestões para trabalho futuros

Elaborar expressões analíticas para verificações da resposta numérica para problemas simples, levando em consideração os efeitos devido a inércia. Avaliar a influência das ondas de choque desenvolvidas em problemas dinâmicos na resposta mecânica do material utilizando o modelo constitutivo adotado nesse trabalho.

No que se refere à avaliação do processo de conformação a altas velocidades, baseado nos resultados apresentados anteriormente, é evidente que futuras investigações necessitam serem realizadas para fornecer um melhor entendimento do comportamento mecânico do modelo com o endurecimento dependente da taxa. Com base nisso, as sugestões de trabalhos futuros são: caracterizar experimentalmente a resposta de endurecimento ao longo da peça e realizar avaliações usando outros modelos constitutivos viscoplásticos em comparação com a presente abordagem.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abaqus, S. **Abaqus: Theory Manual 6.11**. Dassault Systèmes, 2011.
- Alfano, G., Angelis, F., e Rosati, L. General Solution Procedures in Elasto/Viscoplasticity, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 190, p. 5123–5147, 2001.
- Alfano, G., De Angelis, F., e Rosati, L. **An implicit integration procedure for plane stress J2 elastoplasticity**. In Proceedings of the IV World Congress on Computational Mechanics. CIMNE, Barcelona, 1998.
- Bathe, K. **Finite Element Procedures**. Prentice Hall, 1996.
- Belytschko, T., Liu, W. K., e Moran, B. **Nonlinear Finite elements for Continua and Structures**. John Wiley and Sons, Ltd, Publication, 2000.
- Bonet, J. e Wood, D. R. **Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis**. Cambridge University Press, 1997.
- Chaboche, J. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories, **International Journal of Plasticity**, vol. 24, p. 1642 – 1693, 2008.
- Chiem, C. e Duffy, J. Strain rate history effects and observations of dislocation substructure in aluminum single crystals following dynamic deformation, **Materials Science and Engineering**, vol. 57, p. 233–247, 1983.
- Crisfield, M. **Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures**. Number v. 2 in Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Wiley, 1997.
- de Souza Neto, E., Perić, D., e Owen, D. R. J. **Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications**. John Wiley and Sons, Ltd, Publication, 2008.
- Dietenberger, M., Buyuk, M., e Kan, C. Development of a high strain-rate dependent vehicle model, **LS-Dyna Anwenderforum**, 2005.
- dos Santos, T. **Experimental Characterization and Constitutive Modeling of Viscoplastic Effects in High Strain-rate Deformation of Polycrystalline FCC Metals**. Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2016.
- dos Santos, T., Rosa, P. A., Maghous, S., e Rossi, R. A simplified approach to high strain rate effects in cold deformation of polycrystalline FCC metals: Constitutive formulation and model calibration, **International Journal of Plasticity**, vol. 82, p. 76 – 96, 2016.
- Dunne, F. e Petrinic, N. **Introduction to Computational Plasticity**. Oxford University Press, 2005.
- Eterovic, A. L. e Bathe, K.-J. A hyperelastic-based large strain elasto-plastic constitutive formulation with combined isotropic-kinematic hardening using the logarithmic stress and strain measures, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 30(6), p. 1099–1114, 1990.

Follansbee, P. 24 - High strain rate deformation in FCC metals and alloys. Em Murr, L.E.; Staudhammer, K.P; Meyers, M.A., editores, **Metallurgical Applications of Shock-Wave and High-Strain Rate Phenomena**, p. 451–479, 1986.

Follansbee, P. e Kocks, U. A constitutive description of the deformation of copper based on the use of the mechanical threshold stress as an internal state variable, **Acta Metallurgica**, vol. 36(1), p. 81–93, 1988.

Gao, C. e Zhang, L. Constitutive modelling of plasticity of fcc metals under extremely high strain rates, **International Journal of Plasticity**, vol. 32-33, p. 121–133, 2012.

Gayakwad, D., Dargar, M. K., Sharma, P. K., Purohit, R., e Rana, R. A Review on Electromagnetic Forming Process, **Procedia Materials Science**, vol. 6, p. 520 – 527, 2014.

Geier, M., José, M. M., Rossi, R., Rosa, P. A. R., e Martins, P. A. F. Interference-fit Joining of Aluminium Tubes by Electromagnetic Forming, **Advanced Materials Research**, vol. 853, p. 448 – 493, 2014.

Gurtin, M., Fried, E., e Anand, L. **The Mechanics and Thermodynamics of Continua**. Cambridge University Press, 2010.

Haratmeh, H. E., Arezoodar, A. F., e Farzin, M. Numerical and experimental investigation of inward tube electromagnetic forming, **The International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, vol. 88, p. 1175 – 1185, 2017.

Harvey, G. e Brower, D. **Metal Forming Device and Method.**, 1958.

Hughes, T. e Winget, J. Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large-deformation analysis, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 15, p. 1862–1867, 1980.

Ibrahimbegovic, A. **Nonlinear Solid Mechanics: Theoretical Formulations and Finite Element Solution Methods**. Solid Mechanics and Its Applications. Springer Netherlands, 2010.

Jetteur, P. Implicit integration algorithm for elastoplasticity in plane stress analysis, **Engineering Computations**, vol. 3(3), p. 251–253, 1986.

Johnson, G. e Cook, W. **A Constitutive Model and Data for Metals Subjected to Large Strains, High Strain Rates, and High Temperatures**. In Proceedings 7th International Symposium on Ballistics, p. 541–547, The Hague, 1983.

Kamal, M. e Daehn, G. S. A Uniform Pressure Electromagnetic Actuator for Forming Flat Sheets, **Journal of Manufacturing Science and Engineering**, vol. 129, p. 369 – 379, 2006.

Karch, C. e Roll, K. Transient simulation of Electromagnetic Forming of Aluminium Tubes, **Advanced Materials Research**, vol. 6-8, p. 639–648, 2005.

Khan, A. e Huang, S. **Continuum Theory of Plasticity**. John Wiley and Sons, Ltd, Publication, 1995.

Klepaczko, J. Thermally activated flow and strain rate history effects for some polycrystalline f.c.c. metals, **Materials Science and Engineering**, vol. 18, p. 121–135, 1975.

Klepaczko, J., Rusinek, A., Rodríguez-Martínez, J., Peçherski, R., e Arias, A. Modelling of thermo-viscoplastic behaviour of DH-36 and Weldom 460-E structural steels at wide ranges of strain rates and temperatures, comparison of constitutive relations for impact problems, **Mechanics of Materials**, vol. 41, p. 599 – 621, 2009.

Kristoffersen, M., Børvik, T., Langseth, M., Hopperstad, O. S., Ilstad, H., e Levold, E. Damage and failure in an X65 steel pipeline cause by trawl gear impact, **Proceedings of the ASME 2013 32nd International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering OMAE2013**, 2013.

Lee, S., Yoon, J., e Yang, D. A stress integration algorithm for plane stress elastoplasticity and its applications to explicit finite element analysis of sheet metal forming processes, **Computers & Structures**, vol. 66(2), p. 301 – 311, 1998.

Lemaitre, J. e Chaboche, J. **Mechanics of Solid Materials**. Cambridge University Press, 1990.

Liu, X., Guo, J., Bai, C., Sun, X., e Mou, R. Drop test and crash simulation of a civil airplane fuselage section, **Chinese Journal of Aeronautics**, vol. 28, p. 447 – 456, 2015.

Mabrouki, T., Girardin, F., Asad, M., e Rigal, J. Numerical and experimental study of dry cutting for an aeronautic aluminium alloy (A2024-T351), **International Journal of Machine Tools and Manufacture**, vol. 48, p. 1187 – 1197, 2008.

Maheo, L., Grolleau, V., e Rio, G. Numerical damping of spurious oscillations: a comparison between the Bulk Viscosity method and the explicit dissipative Tchamwa-Wielgosz scheme, **Computational Mechanics Manuscript**, vol. 51, p. 109 – 128, 2013.

Malvern, L. E. **Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium**. Prentice-Hall, 1969.

Meyers, M. **Dynamic Behavior of Materials**. Wiley-Interscience publication. Wiley, 1994.

Molinari, A. e Ravichandran, G. Constitutive modeling of high-strain-rate deformation in metals based on the evolution of an effective microstructural length, **Mechanics of Materials**, vol. 37(7), p. 737 – 752, 2005.

Montáns, F. J. Implicit plane stress algorithm for multilayer J2-plasticity using the Prager-Ziegler translation rule, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 59(3), p. 409–418, 2003.

Ohno, N., Tsuda, M., e Kamei, T. Elastoplastic implicit integration algorithm applicable to both plane stress and three-dimensional stress states, **Finite Elements in Analysis and Design**, vol. 66, p. 1 – 11, 2013.

Ohno, N., Tsuda, M., Sugiyama, H., e Okumura, D. Elastic-viscoplastic implicit integration algorithm applicable to both plane stress and three-dimensional stress states, **Finite Elements in Analysis and Design**, vol. 109, p. 54 – 64, 2016.

Oliveira, D. A., Worswick, M. J., Finn, M., e Newman, D. Electromagnetic forming of aluminum alloy sheet: Free-form and cavity fill experiments and model, **Journal of Materials Processing Technology**, vol. 170, p. 350 – 362, 2005.

Ottosen, N. e Ristinmaa, M. **The mechanics of constitutive modeling**. Elsevier, 2005.

Paese, E., Geier, M., Homrich, R. P., Rosa, P., e Rossi, R. Sheet metal electromagnetic forming using a flat spiral coil: Experiments, modeling, and validation, **Journal of Materials Processing Technology**, vol. 263, p. 408 – 422, 2019.

Paris, T. **Modélisation du Comportement Mécanique des Liaisons Soudées Hétérogènes Ta/TA6V : Comportement et Critère de Rupture**. Tese de doutorado, Université de Technologie de Troyes, 2008.

Paris, T. e Saanouni, K. Damaged behavior under plane stress, **European Journal of Computational Mechanics**, vol. 20(5-6), p. 341–368, 2011.

Perić, D. On a class of constitutive equations in viscoplasticity: Formulation and computational issues, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 36(8), p. 1365–1393, 1993.

Perić, D. e Owen, D. Finite-element applications to the nonlinear mechanics of solids, **Reports on Progress in Physics**, vol. 61, p. 1495–1574, 1998.

Perzyna, P. **Fundamental Problems in Viscoplasticity**. vol. 9 of Advances in Applied Mechanics, p. 243–377. Elsevier, 1966.

Perzyna, P. **Thermodynamic Theory of Viscoplasticity**. vol. 11 of Advances in Applied Mechanics, p. 313–354. Elsevier, 1971.

Psyk, V., Risch, D., Kinsey, B., Tekkaya, A., e Kleiner, M. Electromagnetic forming—A review, **Journal of Materials Processing Technology**, vol. 211, p. 787 – 829, 2011.

Rashid, M. M., Gray III, G. T., , e Nemat-Nasser, S. Heterogeneous deformations in copper single crystals at high and low strain rates, **Philosophical Magazine A**, vol. 65, p. 707–735, 1992.

Reddy, J. **An Introduction to Continuum Mechanics: with Applications**. Cambridge University Press, 2008.

Richtmyer, R. e Morton, K. **Difference Methods for Initial-value Problems**. Interscience tracts in pure and applied mathematics. Interscience Publishers, 1967.

Roache, P. J. **Fundamentals of Verification and Validation**. Hermosa Publishers, 2008.

Schreyer, H. L., Kulak, R. F., e Kramer, J. M. Accurate numerical solutions for elastic-plastic models, **Journal of Pressure Vessel Technology**, vol. 101(3), p. 226–234, 1979.

Shames, I. e Cozzarelli, F. **Elastic and Inelastic Stress Analysis**. Taylor Francis Group, 1997.

Siddiqui, M. **Numerical Modelling and Simulation of Electromagnetic Forming Process**. Tese de doutorado, Université de Strasbourg, 2009.

Simo, J. e Hughes, T. **Computational Inelasticity: Interdisciplinary Applied Mathematics**. Springer, 1998.

Simo, J. C. e Taylor, R. L. A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 22(3), p. 649–670, 1986.

Spencer, A. J. M. **Continuum Mechanics**. Longman, 1980.

Takatsu, N., Kato, M., Sato, K., e Tobe, T. High-speed forming of metals sheets by eletromagnetic force, **JSME International Journal. Ser. 3, Vibration, Control Engineering, Engineering for Industry**, vol. 211, p. 787 – 829, 1988.

Tanner, A., McGinty, R., e McDowell, D. Modeling temperature and strain rate history effects in OFHC Cu, **International Journal of Plasticity**, vol. 15, p. 575–603, 1999.

Tanner, A. B. e McDowell, D. L. Deformation, temperature and strain rate sequence experiments on OFHC Cu, **International Journal of Plasticity**, vol. 15(4), p. 375–399, 1999.

Valoroso, N. e Rosati, L. Consistent derivation of the constitutive algorithm for plane stress isotropic plasticity. Part I: Theoretical formulation, **International Journal of Solids and Structures**, vol. 46(1), p. 74 – 91, 2009a.

Valoroso, N. e Rosati, L. Consistent derivation of the constitutive algorithm for plane stress isotropic plasticity. Part II: Computational issues, **International Journal of Solids and Structures**, vol. 46(1), p. 92 – 124, 2009b.

Walz, G., Hornberger, K., e Stamm, H. An implicit integration algorithm for plane stress viscoplastic constitutive equations, **Computers & Structures**, vol. 36(3), p. 539 – 546, 1990.

Weber, G. e Anand, L. Finite deformation constitutive equations and a time integration procedure for isotropic, hyperelastic-viscoplastic solids, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 79, p. 173–202, 1990.

Wu, S. e Gu, L. **Introduction to the Explicit Finite Element Method for Nonlinear Transient Dynamics**. Wiley, 2012.

Xu, Z. e Huang, F. Comparison of constitutive models for FCC metals over wide temperature and strain rate ranges with application to pure copper, **International Journal of Impact Engineering**, vol. 79, p. 65–74, 2015.

Yang, S.-Y. Conversion of ABAQUS user Material Subroutines, **Journal of the Computational Structural Engineering Institute of Korea**, vol. 6, p. 635 – 640, 2010.

Yu, Z. e Amdahl, J. A review of structural responses and design of offshore tubular structures subjected to ship impacts, **Ocean Engineering**, vol. 154, p. 177 – 203, 2018.

APÊNDICE A – Método de *Newton-Raphson*

Nesta seção o método de *Newton-Raphson* é apresentado para a solução de um sistema de equações não lineares dada pelo vetor \mathbf{r} em relação ao vetor de variáveis \mathbf{w} . Inicialmente considere que

$$\mathbf{w}_{n+1}^0 = \mathbf{w}_n, \quad i = 0, \quad (\text{A.1})$$

onde k é uma iteração do método de *Newton-Raphson*, com $k = 0$ sendo o valor inicial convergido no último incremento. Assim, a iteração $k + 1$ é definida por

$$\mathbf{w}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{w}_{n+1}^k + \Delta\mathbf{w}_{n+1}^k. \quad (\text{A.2})$$

Para a determinação do incremento $\Delta\mathbf{w}_{n+1}^k$, se faz necessário a satisfação da seguinte expressão

$$\mathbf{r}(\mathbf{w}_{n+1}^{k+1}) = \mathbf{r}(\mathbf{w}_{n+1}^k + \Delta\mathbf{w}_{n+1}^k) = 0. \quad (\text{A.3})$$

Ao realizar uma expansão na Equação A.3 por meio de série de *Taylor* em torno da aproximação \mathbf{w}_{n+1}^k , e truncando nos termos de primeira ordem, obtêm-se a seguinte aproximação

$$\mathbf{r}(\mathbf{w}_{n+1}^{k+1}) \approx \mathbf{r}(\mathbf{w}_{n+1}^k) + \frac{\partial\mathbf{r}(\mathbf{w}_{n+1}^k)}{\partial\mathbf{w}}\Delta\mathbf{w}_{n+1}^k, \quad (\text{A.4})$$

a matriz tangente fica definida como

$$\mathbf{M}^k = \frac{\partial\mathbf{r}(\mathbf{w}_{n+1}^k)}{\partial\mathbf{w}}, \quad (\text{A.5})$$

assim uma estimativa para $\Delta\mathbf{w}_{n+1}^k$ é dada pela solução

$$\mathbf{M} [\Delta\mathbf{w}_{n+1}^k] = -\mathbf{r}(\mathbf{w}_{n+1}^k). \quad (\text{A.6})$$

No fluxograma presente na Figura A.1 é apresentado esquematicamente o algoritmo do método de *Newton-Raphson*.

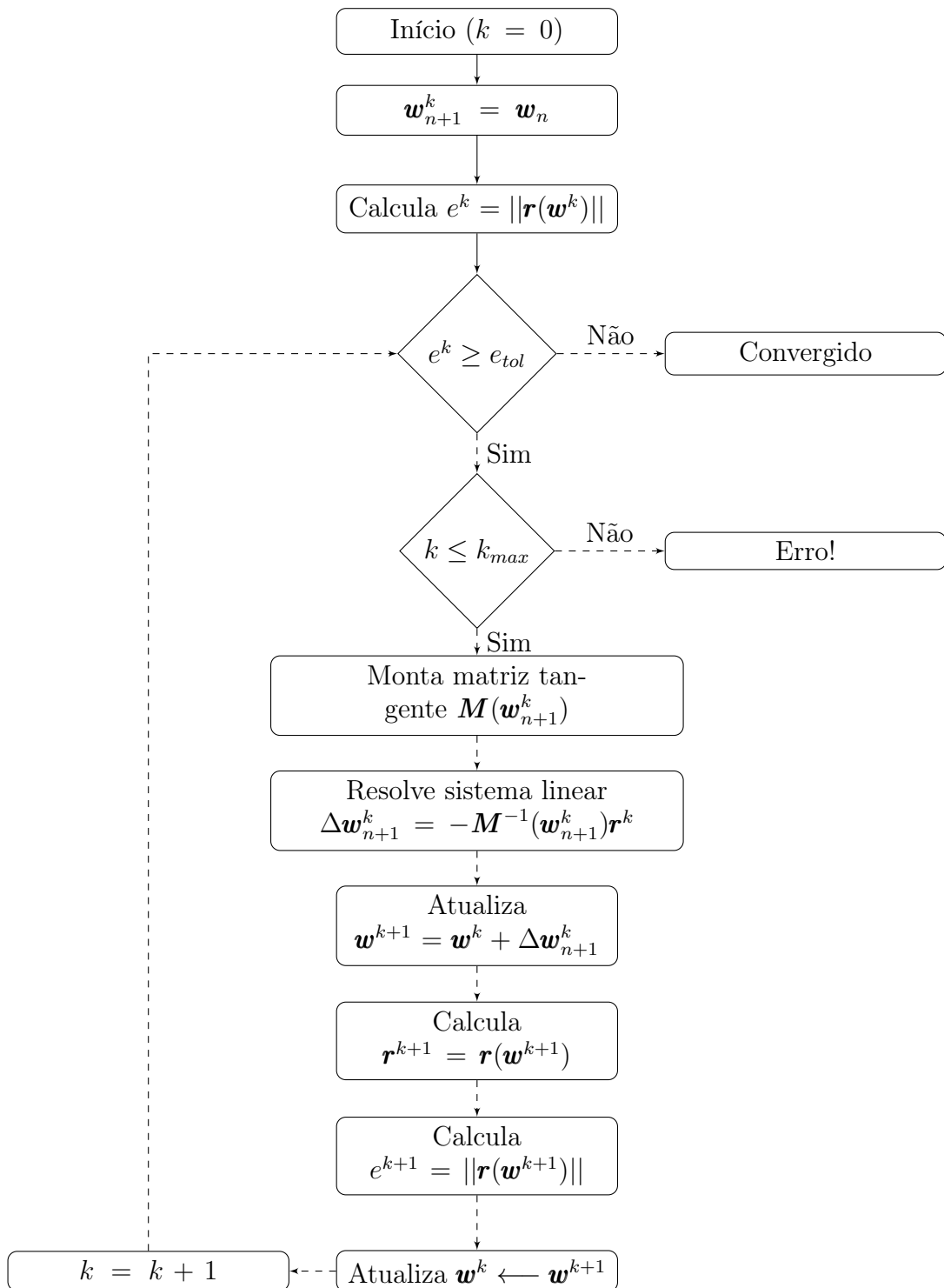


Figura A.1 – Método de *Newton-Raphson* para a solução de um sistema de equações não lineares.

APÊNDICE B – Derivadas do modelo tridimensional

A seguir serão apresentadas todas as derivadas das funções \mathbf{f} , presentes no mapeamento de retorno para o modelo tridimensional, em relação as variáveis $\Delta\lambda, A_{n+1}, \delta_{n+1}, \bar{A}_{\infty_{n+1}}$.

$$f_1 = \|\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{D^{\text{teste}}}\| - \Delta\lambda 2\mu - \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_y + A_{n+1}) - \bar{\Theta}^{-1}(\Delta\lambda, A_{n+1}) = 0, \quad (\text{B.1})$$

$$f_2 = A_{n+1} - A_n - \bar{A}_{\infty_{n+1}} c \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\lambda - [\bar{A}_{\infty_{n+1}}(1 + c\varepsilon_n) - A_n] \left[1 - \exp\left(-\delta_{n+1} \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\lambda\right) \right] = 0, \quad (\text{B.2})$$

$$f_3 = \delta_{n+1} - \delta^{lwr} - \left[\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\langle \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\lambda - \Delta t \dot{\varepsilon}_{lwr} \rangle}{\dot{\varepsilon}_{up} - \dot{\varepsilon}_{lwr}} \right) \right]^{\xi_1} (\delta^{up} - \delta^{lwr}) = 0, \quad (\text{B.3})$$

$$f_4 = \bar{A}_{\infty_{n+1}} - \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\lambda + \varepsilon_n} \bar{A}_{\infty_n} - \left(1 - \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\lambda + \varepsilon_n} \right) A_{\infty_{n+1}} = 0, \quad (\text{B.4})$$

com

$$A_{\infty_{n+1}} = A_{\infty}^{lwr} + \left[\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\langle \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\lambda - \Delta t \dot{\varepsilon}_{lwr} \rangle}{\dot{\varepsilon}_{up} - \dot{\varepsilon}_{lwr}} \right) \right]^{\xi_2} (A_{\infty}^{up} - A_{\infty}^{lwr}). \quad (\text{B.5})$$

B.1 Derivadas função f_1

$$\frac{\partial f_1}{\partial \Delta\lambda} = -2\mu - \frac{\partial \bar{\Theta}^{-1}}{\partial \Delta\lambda}, \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial A_{n+1}} = -\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\partial \bar{\Theta}^{-1}}{\partial A_{n+1}}, \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \delta_{n+1}} = 0, \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \bar{A}_{\infty_{n+1}}} = 0, \quad (\text{B.9})$$

com

$$\frac{\partial \bar{\Theta}^{-1}}{\partial \Delta\lambda} = \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_y + A_{n+1}) \left[\frac{1}{m} \frac{\vartheta_1}{\Delta t} \left(1 + \vartheta_1 \frac{\Delta\lambda}{\Delta t} \right)^{1/m-1} + \frac{\vartheta_2}{\Delta t} \right], \quad (\text{B.10})$$

e

$$\frac{\partial \bar{\Theta}^{-1}}{\partial A_{n+1}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[\left(1 + \vartheta_1 \frac{\Delta \lambda}{\Delta t} \right)^{1/m} + \vartheta_2 \frac{\Delta \lambda}{\Delta t} - 1 \right]. \quad (\text{B.11})$$

B.2 Derivadas função f_2

$$\frac{\partial f_2}{\partial \Delta \lambda} = -\sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ c \bar{A}_{\infty n+1} + \delta_{n+1} [\bar{A}_{\infty n+1} (1 + c \varepsilon_n) - A_n] \exp \left(-\delta_{n+1} \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta \lambda \right) \right\}, \quad (\text{B.12})$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial A_{n+1}} = 1, \quad (\text{B.13})$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \delta_{n+1}} = [\bar{A}_{\infty n+1} (1 + c \varepsilon_n) - A_n] \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta \lambda \exp \left(-\delta_{n+1} \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta \lambda \right), \quad (\text{B.14})$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \bar{A}_{\infty n+1}} = -c \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta \lambda - (1 + \varepsilon_n) \left[1 - \exp \left(\delta_{n+1} \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta \lambda \right) \right]. \quad (\text{B.15})$$

B.3 Derivadas função f_3

$$\frac{\partial f_3}{\partial \Delta \lambda} = -\frac{\xi_1}{\Delta t} \eta \left[\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\left\langle \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta \lambda - \Delta t \dot{\varepsilon}_{lwr} \right\rangle}{\dot{\varepsilon}_{up} - \dot{\varepsilon}_{lwr}} \right) \right]^{\xi_1 - 1} \left(\frac{\delta^{up} - \delta^{lwr}}{\dot{\varepsilon}_{up} - \dot{\varepsilon}_{lwr}} \right), \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial A_{n+1}} = 1, \quad (\text{B.17})$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial \delta_{n+1}} = 1, \quad (\text{B.18})$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial \bar{A}_{\infty n+1}} = 0, \quad (\text{B.19})$$

com

$$\eta = \frac{\partial}{\partial \Delta \lambda} \left\langle \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta \lambda - \Delta t \dot{\varepsilon}_{lwr} \right\rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \Delta \lambda - \Delta t \dot{\varepsilon}_{lwr} \right) \leq 0, \\ \sqrt{\frac{2}{3}}, & \text{se } \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \Delta \lambda - \Delta t \dot{\varepsilon}_{lwr} \right) > 0. \end{cases} \quad (\text{B.20})$$

B.4 Derivadas função f_4

$$\frac{\partial f_4}{\partial \Delta \lambda} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} \varepsilon_n}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \Delta \lambda + \varepsilon_n\right)^2} (\bar{A}_{\infty n} - A_{\infty n+1}) - \left(1 - \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{\frac{2}{3}} \Delta \lambda + \varepsilon_n}\right) \frac{\partial A_{\infty n+1}}{\partial \Delta \lambda}, \quad (\text{B.21})$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial A_{n+1}} = 0, \quad (\text{B.22})$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial \delta_{n+1}} = 0, \quad (\text{B.23})$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial \bar{A}_{\infty n+1}} = 1. \quad (\text{B.24})$$

com

$$\frac{\partial A_{\infty n+1}}{\partial \Delta \lambda} = \frac{\xi_2}{\Delta t} \eta \left[\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\langle \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta \lambda - \Delta t \dot{\varepsilon}_{lwr} \rangle}{\dot{\varepsilon}_{up} - \dot{\varepsilon}_{lwr}} \right) \right]^{\xi_2 - 1} \left(\frac{A_{\infty}^{up} - A_{\infty}^{lwr}}{\dot{\varepsilon}_{up} - \dot{\varepsilon}_{lwr}} \right). \quad (\text{B.25})$$

APÊNDICE C – Operador tangente consistente para o problema tridimensional

O módulo tangente para o problema tridimensional é obtido por meio da linearização das Equações 4.4, 4.36, 4.47, 4.48, 4.49 e 4.50.

Seguindo os trabalhos de dos Santos, 2016, a linearização da Equação 4.4 é dada por

$$\mathbf{N}_{\tau_{n+1}} : d\tau_{n+1} + N_{A_{n+1}} dA_{n+1} = \frac{\partial \bar{\Theta}^{-1}}{\partial \Delta\lambda} d(\Delta\lambda) + \frac{\partial \bar{\Theta}^{-1}}{\partial A_{n+1}} dA_{n+1} , \quad (\text{C.1})$$

com $N_{A_{n+1}}$ definido por

$$N_{A_{n+1}} = \frac{\partial f_{n+1}}{\partial A_{n+1}} = -\sqrt{\frac{2}{3}} . \quad (\text{C.2})$$

Assim, dA_{n+1} é dada por

$$dA_{n+1} = \frac{\partial A_{n+1}}{\partial \bar{A}_{\infty_{n+1}}} d\bar{A}_{\infty_{n+1}} + \frac{\partial A_{n+1}}{\partial \Delta\lambda} d(\Delta\lambda) + \frac{\partial A_{n+1}}{\partial \delta_{n+1}} d(\delta_{n+1}) , \quad (\text{C.3})$$

com

$$\begin{aligned} dA_{n+1} = & \left[(1 + c\varepsilon_n)(1 - \zeta) + c\sqrt{\frac{2}{3}\Delta\lambda} \right] d(\bar{A}_{\infty_{n+1}}) + \\ & + \sqrt{\frac{2}{3}} \{ \delta_{n+1} [\bar{A}_{\infty_{n+1}}(1 + c\varepsilon_n - A_n)] \zeta + \bar{A}_{\infty_{n+1}c} \} d(\Delta\lambda) + \\ & + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\lambda [\bar{A}_{\infty_{n+1}}(1 + c\varepsilon_n) - A_n] \zeta d\delta_{n+1} , \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

juntamente com

$$\zeta = \exp \left(-\delta_{n+1} \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\lambda \right) . \quad (\text{C.5})$$

A parcela $d\delta_{n+1}$ é dada por

$$d\delta_{n+1} = \frac{\partial \delta_{n+1}}{\partial \Delta\lambda} d(\Delta\lambda) , \quad (\text{C.6})$$

que por simplicidade será escrita como

$$d\delta_{n+1} = \omega_1 d(\Delta\lambda) . \quad (\text{C.7})$$

Da mesma forma, a parcela $d\bar{A}_{\infty_{n+1}}$, é dada por

$$d\bar{A}_{\infty_{n+1}} = \frac{\partial \bar{A}_{\infty_{n+1}}}{\partial \Delta \lambda} d(\Delta \lambda) , \quad (\text{C.8})$$

a qual pode ser rescrita da seguinte maneira

$$d\bar{A}_{\infty_{n+1}} = \omega_2 d(\Delta \lambda) . \quad (\text{C.9})$$

Sendo que

$$\omega_1 = \frac{\xi_1}{\Delta t} \eta \left(\frac{\delta^{up} - \delta^{lwr}}{\dot{\epsilon}_{up} - \dot{\epsilon}_{lwr}} \right) \left[\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\langle \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta \lambda - \Delta t \dot{\epsilon}_{lwr} \rangle}{\dot{\epsilon}_{up} - \dot{\epsilon}_{lwr}} \right) \right]^{\xi_1 - 1} , \quad (\text{C.10})$$

com

$$\eta = \frac{\partial}{\partial \Delta \lambda} \left\langle \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta \lambda - \Delta t \dot{\epsilon}_{lwr} \right\rangle . \quad (\text{C.11})$$

e

$$\omega_2 = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} \varepsilon_n}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \Delta \lambda + \varepsilon_n \right)^2} (A_{\infty_{n+1}} - \bar{A}_{\infty_n}) + \left(1 - \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{\frac{2}{3}} \Delta \lambda + \varepsilon_n} \right) \frac{\partial A_{\infty_{n+1}}}{\partial \Delta \lambda} . \quad (\text{C.12})$$

Combinando as equações restantes e combinando com as Equações C.4, C.7 e C.9, escreve-se

$$dA_{n+1} = \Lambda d(\Delta \lambda) , \quad (\text{C.13})$$

onde Λ é dado por

$$\begin{aligned} \Lambda = & \sqrt{\frac{2}{3}} \{ \delta_{n+1} [\bar{A}_{\infty_{n+1}} (1 + c\varepsilon_n) - A_n] \zeta + \bar{A}_{\infty_{n+1}} c \} + \\ & + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta \lambda [\bar{A}_{\infty_{n+1}} (1 + c\varepsilon_n) - A_n] \zeta \omega_1 + \\ & \left[(1 + c\varepsilon_n)(1 - \zeta) + c \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta \lambda \right] \omega_2 . \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Inserindo a Equação C.14 em C.1

$$\mathbf{N}_{\tau_{n+1}} : d\tau_{n+1} = \left[\frac{\partial \bar{\Theta}^{-1}}{\partial \Delta \lambda} + \left(\frac{\partial \bar{\Theta}^{-1}}{\partial A_{n+1}} - N_{A_{n+1}} \right) \Lambda \right] d(\Delta \lambda) , \quad (\text{C.15})$$

e reajustando os termos escreve-se

$$d(\Delta\lambda) = \frac{1}{\chi} \mathbf{N}_{\tau_{n+1}} : d\boldsymbol{\tau}_{n+1} , \quad (\text{C.16})$$

onde χ é dado por

$$\chi = \left[\frac{\partial \bar{\Theta}^{-1}}{\partial \Delta\lambda} + \left(\frac{\partial \bar{\Theta}^{-1}}{\partial A_{n+1}} - \mathbf{N}_{A_{n+1}} \right) \Lambda \right] . \quad (\text{C.17})$$

Da linearização da Equação 4.36 surge

$$d\mathbf{e}_{n+1}^e = d\mathbf{e}_{n+1}^{e^{\text{teste}}} - d(\Delta\lambda) \mathbf{N}_{\tau_{n+1}} - \Delta\lambda \frac{\partial \mathbf{N}_{\tau_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\tau}_{n+1}} : d\boldsymbol{\tau}_{n+1} , \quad (\text{C.18})$$

com

$$\frac{\partial \mathbf{N}_{\tau_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\tau}_{n+1}} = \frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}_{n+1}^D\|} \left(\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \mathbf{N}_{\tau_{n+1}} \otimes \mathbf{N}_{\tau_{n+1}} \right) . \quad (\text{C.19})$$

Substituindo as Equações C.16 em C.18 e utilizando a relação $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{G}) : \mathbf{K} = (\mathbf{G} : \mathbf{K}) \mathbf{A}$ escreve-se

$$d\mathbf{e}_{n+1}^e = d\mathbf{e}_{n+1}^{e^{\text{teste}}} - \left(\frac{1}{\chi} \mathbf{N}_{\tau_{n+1}} : d\boldsymbol{\tau}_{n+1} \right) \mathbf{N}_{\tau_{n+1}} - \Delta\lambda \frac{\partial \mathbf{N}_{\tau_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\tau}_{n+1}} : d\boldsymbol{\tau}_{n+1} , \quad (\text{C.20})$$

utilizando a relação elástica $d\mathbf{e}_{n+1}^e = \mathbb{D}^{e^{-1}} : d\boldsymbol{\tau}_{n+1}$, na Equação C.20 a mesma fica estabelecida como

$$\mathbb{D}^{e^{-1}} : d\boldsymbol{\tau}_{n+1} + \Delta\lambda \frac{\partial \mathbf{N}_{\tau_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\tau}_{n+1}} : d\boldsymbol{\tau}_{n+1} + \frac{1}{\chi} (\mathbf{N}_{\tau_{n+1}} \otimes \mathbf{N}_{\tau_{n+1}}) : d\boldsymbol{\tau}_{n+1} = d\mathbf{e}_{n+1}^{e^{\text{teste}}} , \quad (\text{C.21})$$

por fim

$$\mathbb{D}^{vp} = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_{n+1}}{\partial \mathbf{e}_{n+1}^{e^{\text{teste}}}} = \left(\mathbb{D}^{e^{-1}} + \Delta\lambda \frac{\partial \mathbf{N}_{\tau_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\tau}_{n+1}} + \frac{1}{\chi} \mathbf{N}_{\tau_{n+1}} \otimes \mathbf{N}_{\tau_{n+1}} \right)^{-1} . \quad (\text{C.22})$$

APÊNDICE D – Derivadas para o estado plano de tensões

A seguir serão apresentadas todas as derivadas das funções \mathbf{f} , presentes no mapeamento de retorno para o estado plano de tensões, em relação as seguintes variáveis $\Delta\bar{\lambda}, A_{n+1}, \delta_{n+1}, \bar{A}_{\infty_{n+1}}$.

$$f_1 = \frac{1}{2}\gamma(\Delta\bar{\lambda}) - \frac{1}{3}(\sigma_y + A_{n+1})^2 \left[\left(1 + \vartheta_1 \frac{\Delta\bar{\lambda}}{\Delta t} \sqrt{\gamma(\Delta\bar{\lambda})}\right)^{1/m} + \vartheta_2 \frac{\Delta\bar{\lambda}}{\Delta t} \sqrt{\gamma(\Delta\bar{\lambda})} \right]^2, \quad (\text{D.1})$$

$$f_2 = A_{n+1} - A_n - \bar{A}_{\infty_{n+1}} c \left[\Delta\bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3}\gamma(\Delta\bar{\lambda})} \right] - [\bar{A}_{\infty_{n+1}} (1 + c\varepsilon_n) - A_n] \left\{ 1 - \exp \left[-\delta_{n+1} \Delta\bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3}\gamma(\Delta\bar{\lambda})} \right] \right\}, \quad (\text{D.2})$$

$$f_3 = \delta_{n+1} - \delta_{\infty}^{lwr} - \left[\frac{1}{\Delta t} \frac{\left\langle \Delta\bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3}\gamma(\Delta\bar{\lambda})} - \Delta t \dot{\varepsilon}_{lwr} \right\rangle}{\dot{\varepsilon}_{up} - \dot{\varepsilon}_{lwr}} \right]^{\xi_1} (\delta_{\infty}^{up} - \delta_{\infty}^{lwr}), \quad (\text{D.3})$$

$$f_4 = \bar{A}_{\infty_{n+1}} - \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_n + \Delta\bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3}\gamma(\Delta\bar{\lambda})}} \bar{A}_{\infty_n} - \left[1 - \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_n + \Delta\bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3}\gamma(\Delta\bar{\lambda})}} \right] A_{\infty_{n+1}}, \quad (\text{D.4})$$

com

$$A_{\infty_{n+1}} = A_{\infty}^{lwr} + \left[\frac{1}{\Delta t} \frac{\left\langle \Delta\bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3}\gamma(\Delta\bar{\lambda})} - \Delta t \dot{\varepsilon}_{lwr} \right\rangle}{\dot{\varepsilon}_{up} - \dot{\varepsilon}_{lwr}} \right]^{\xi_2} (A_{\infty}^{up} - A_{\infty}^{lwr}). \quad (\text{D.5})$$

D.1 Derivadas função f_1

$$\frac{\partial f_1}{\partial \Delta\bar{\lambda}} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma}{\partial \Delta\bar{\lambda}} - \frac{2}{3} (\sigma_y + A_{n+1})^2 \left[\left(1 + \vartheta_1 \frac{\Delta\bar{\lambda}}{\Delta t} \sqrt{\gamma(\Delta\bar{\lambda})}\right)^{1/m} + \vartheta_2 \frac{\Delta\bar{\lambda}}{\Delta t} \sqrt{\gamma(\Delta\bar{\lambda})} \right] \left[\frac{1}{m} \frac{\vartheta_1}{\Delta t} \left(1 + \vartheta_1 \frac{\Delta\bar{\lambda}}{\Delta t} \sqrt{\gamma(\Delta\bar{\lambda})}\right)^{1/m-1} + \frac{\vartheta_2}{\Delta t} \right] \left[\sqrt{\gamma(\Delta\bar{\lambda})} + \frac{1}{2} \frac{\Delta\bar{\lambda}}{\sqrt{\gamma(\Delta\bar{\lambda})}} \frac{\partial \gamma(\Delta\bar{\lambda})}{\partial \Delta\bar{\lambda}} \right], \quad (\text{D.6})$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial A_{n+1}} = -\frac{2}{3} (\sigma_y + A_{n+1}) \left[\left(1 + \vartheta_1 \frac{\Delta\bar{\lambda}}{\Delta t} \sqrt{\gamma(\Delta\bar{\lambda})}\right)^{1/m} + \vartheta_2 \frac{\Delta\bar{\lambda}}{\Delta t} \sqrt{\gamma(\Delta\bar{\lambda})} \right]^2, \quad (\text{D.7})$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \delta_{n+1}} = 0, \quad (\text{D.8})$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \bar{A}_{\infty_{n+1}}} = 0, \quad (\text{D.9})$$

com

$$\frac{\partial \gamma(\Delta \bar{\lambda})}{\partial \Delta \bar{\lambda}} = -\frac{(\tau_{11}^{\text{teste}} + \tau_{22}^{\text{teste}})^2}{9 \left[1 + \frac{E \Delta \bar{\lambda}}{3(1-\nu)} \right]^3} \frac{E}{(1-\nu)} - 2G \frac{(\tau_{22}^{\text{teste}} - \tau_{11}^{\text{teste}})^2 + 4(\tau_{12}^{\text{teste}})^2}{(1 + 2G \Delta \bar{\lambda})^3}. \quad (\text{D.10})$$

D.2 Derivadas função f_2

$$\frac{\partial f_2}{\partial \Delta \bar{\lambda}} = \left\{ -\bar{A}_{\infty_{n+1}} c - \delta_{n+1} [\bar{A}_{\infty_{n+1}} (1 + c \varepsilon_n) - A_n] \exp \left[-\delta_{n+1} \Delta \bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3} \gamma(\Delta \bar{\lambda})} \right] \right\} \bar{\omega}, \quad (\text{D.11})$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial A_{n+1}} = 1, \quad (\text{D.12})$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \delta_{n+1}} = -[\bar{A}_{\infty_{n+1}} (1 + c \varepsilon_n) - A_n] \left\{ -\exp \left[-\delta_{n+1} \Delta \bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3} \gamma(\Delta \bar{\lambda})} \right] \right\} \left[\Delta \bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3} \gamma(\Delta \bar{\lambda})} \right], \quad (\text{D.13})$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \bar{A}_{\infty_{n+1}}} = -c \left[\Delta \bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3} \gamma(\Delta \bar{\lambda})} \right] - (1 + c \varepsilon_n) \left\{ 1 - \exp \left[-\delta_{n+1} \Delta \bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3} \gamma(\Delta \bar{\lambda})} \right] \right\}, \quad (\text{D.14})$$

com

$$\bar{\omega}(\Delta \bar{\lambda}) = \frac{\partial}{\partial \Delta \bar{\lambda}} \left[\Delta \bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3} \gamma(\Delta \bar{\lambda})} \right] = \left[\sqrt{\frac{2}{3} \gamma(\Delta \bar{\lambda})} + \Delta \bar{\lambda} \frac{1}{3 \sqrt{\frac{2}{3} \gamma(\Delta \bar{\lambda})}} \frac{\partial \gamma(\Delta \bar{\lambda})}{\partial \Delta \bar{\lambda}} \right]. \quad (\text{D.15})$$

D.3 Derivadas função f_3

$$\frac{\partial f_3}{\partial \Delta \lambda} = -\frac{\xi_1}{\Delta t} \eta \left[\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\left\langle \Delta \bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3} \gamma(\Delta \bar{\lambda})} - \Delta t \dot{\varepsilon}_{lwr} \right\rangle}{\dot{\varepsilon}_{up} - \dot{\varepsilon}_{lwr}} \right) \right]^{\xi_1 - 1} \frac{(\delta_{\infty}^{up} - \delta_{\infty}^{lwr})}{(\dot{\varepsilon}_{up} - \dot{\varepsilon}_{lwr})}, \quad (\text{D.16})$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial A_{n+1}} = 0, \quad (\text{D.17})$$

$$\frac{\partial f_3}{\delta_{n+1}} = 1, \quad (\text{D.18})$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial \bar{A}_{\infty_{n+1}}} = 0, \quad (\text{D.19})$$

com

$$\eta = \frac{\partial}{\partial \Delta \bar{\lambda}} \left\langle \Delta \bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3} \gamma(\Delta \bar{\lambda})} - \Delta t \dot{\epsilon}_{lwr} \right\rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } \left[\Delta \bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3} \gamma(\Delta \bar{\lambda})} - \Delta t \dot{\epsilon}_{lwr} \right] \leq 0, \\ \bar{\omega}(\Delta \bar{\lambda}), & \text{se } \left[\Delta \bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3} \gamma(\Delta \bar{\lambda})} - \Delta t \dot{\epsilon}_{lwr} \right] > 0. \end{cases} \quad (\text{D.20})$$

D.4 Derivadas função f_4

$$\frac{\partial f_4}{\partial \Delta \lambda} = \frac{\varepsilon_n \bar{\omega}}{\left[\varepsilon_n + \Delta \bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3} \gamma(\Delta \bar{\lambda})} \right]^2} (\bar{A}_{\infty_n} - A_{\infty_{n+1}}) - \left[1 - \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_n + \Delta \bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3} \gamma(\Delta \bar{\lambda})}} \right] \frac{\partial A_{\infty_{n+1}}}{\partial \Delta \bar{\lambda}}, \quad (\text{D.21})$$

$$\frac{\partial f_4}{A_{n+1}} = 0, \quad (\text{D.22})$$

$$\frac{\partial f_4}{\delta_{n+1}} = 0, \quad (\text{D.23})$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial \bar{A}_{\infty_{n+1}}} = 1, \quad (\text{D.24})$$

com

$$\frac{\partial A_{\infty_{n+1}}}{\partial \Delta \lambda} = \frac{\xi_2}{\Delta t} \eta \left[\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\left\langle \Delta \bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3} \gamma(\Delta \bar{\lambda})} - \Delta t \dot{\epsilon}_{lwr} \right\rangle}{\dot{\epsilon}_{up} - \dot{\epsilon}_{lwr}} \right) \right]^{\xi_2 - 1} \frac{(A_{\infty}^{up} - A_{\infty}^{lwr})}{(\dot{\epsilon}_{up} - \dot{\epsilon}_{lwr})}. \quad (\text{D.25})$$

APÊNDICE E – Operador consistente tangente para o estado plano de tensões

O operador tangente \mathbb{D}_{ps}^{vp} , é obtido da linearização das Equações 4.79, 4.80, 4.96, 4.97 e 4.98.

A linearização da Equação 4.79, resulta

$$\frac{\partial \tilde{f}_{ps_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\tau}_{n+1}} d\boldsymbol{\tau}_{n+1} + \frac{\partial \tilde{f}_{ps_{n+1}}}{\partial A_{n+1}} dA_{n+1} + \frac{\partial \tilde{f}_{ps_{n+1}}}{\partial \Delta \bar{\lambda}} d(\Delta \bar{\lambda}) = 0, \quad (\text{E.1})$$

com

$$\frac{\partial \tilde{f}_{ps_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\tau}_{n+1}} = \mathbf{P} \boldsymbol{\tau}_{n+1}, \quad (\text{E.2})$$

juntamente com

$$\frac{\partial \tilde{f}_{ps_{n+1}}}{\partial A_{n+1}} = -\frac{2}{3}(\sigma_y + A_{n+1}) \left[\left(1 + \vartheta_1 \frac{\Delta \bar{\lambda}}{\Delta t} \sqrt{\gamma(\Delta \bar{\lambda})} \right)^{1/m} + \vartheta_2 \frac{\Delta \bar{\lambda}}{\Delta t} \sqrt{\gamma(\Delta \bar{\lambda})} \right]^2, \quad (\text{E.3})$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}_{ps_{n+1}}}{\partial \Delta \bar{\lambda}} = & -\frac{2}{3}(\sigma_y + A_{n+1})^2 \left[\left(1 + \vartheta_1 \frac{\Delta \bar{\lambda}}{\Delta t} \sqrt{\gamma(\Delta \bar{\lambda})} \right)^{1/m} + \vartheta_2 \frac{\Delta \bar{\lambda}}{\Delta t} \sqrt{\gamma(\Delta \bar{\lambda})} \right] \\ & \left[\frac{1}{m} \frac{\vartheta_1}{\Delta t} \left(1 + \vartheta_1 \frac{\Delta \bar{\lambda}}{\Delta t} \sqrt{\gamma(\Delta \bar{\lambda})} \right)^{1/m-1} + \frac{\vartheta_2}{\Delta t} \right] \left(\sqrt{\gamma(\Delta \bar{\lambda})} + \frac{1}{2} \frac{\Delta \bar{\lambda}}{\sqrt{\gamma(\Delta \bar{\lambda})}} \frac{\partial \gamma(\Delta \bar{\lambda})}{\partial \Delta \bar{\lambda}} \right). \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Assim dA_{n+1} é dada por

$$dA_{n+1} = \frac{\partial A_{n+1}}{\partial \bar{A}_{\infty_{n+1}}} (d\bar{A}_{\infty_{n+1}}) + \frac{\partial A_{n+1}}{\partial \Delta \bar{\lambda}} d(\Delta \bar{\lambda}) + \frac{\partial A_{n+1}}{\partial \delta_{n+1}} d(\delta_{n+1}), \quad (\text{E.5})$$

então

$$\begin{aligned} dA_{n+1} = & \{ \delta_{n+1} \zeta [\bar{A}_{\infty_{n+1}} (1 + c\varepsilon_n) - A_n] + \bar{A}_{\infty_{n+1}} c \} \bar{\omega} d(\Delta \lambda) + \\ & + [\bar{A}_{\infty_{n+1}} (1 + c\varepsilon_n) - A_n] \zeta \left(\Delta \bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3} \gamma(\Delta \bar{\lambda})} \right) d\delta_{n+1} + \\ & + \left[c \Delta \bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3} \gamma(\Delta \bar{\lambda})} + (1 + c\varepsilon_n) (1 - \zeta) \right] d\bar{A}_{\infty_{n+1}}, \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

com

$$\zeta = \exp \left(-\delta_{n+1} \Delta \bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3} \gamma(\Delta \bar{\lambda})} \right). \quad (\text{E.7})$$

A parcela $d\delta_{n+1}$ é dada por

$$d\delta_{n+1} = \frac{\partial\delta_{n+1}}{\partial\Delta\bar{\lambda}}d(\Delta\bar{\lambda}) , \quad (\text{E.8})$$

que por simplicidade fica

$$d\delta_{n+1} = \omega_1 d(\Delta\bar{\lambda}) . \quad (\text{E.9})$$

E a parcela $d\bar{A}_{\infty_{n+1}}$ é

$$d\bar{A}_{\infty_{n+1}} = \frac{\partial\bar{A}_{\infty_{n+1}}}{\partial\Delta\bar{\lambda}}d(\Delta\bar{\lambda}) , \quad (\text{E.10})$$

a qual pode ser rescrita

$$d\bar{A}_{\infty_{n+1}} = \omega_2 d(\Delta\bar{\lambda}) . \quad (\text{E.11})$$

Sabendo que

$$\omega_1 = \frac{\xi_1}{\Delta t} \eta \left[\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\left\langle \Delta\bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma(\Delta\bar{\lambda}) - \Delta t \dot{\epsilon}_{lwr} \right\rangle}{\dot{\epsilon}_{up} - \dot{\epsilon}_{lwr}} \right) \right]^{\xi_1 - 1} \frac{(\delta_{\infty}^{up} - \delta_{\infty}^{lwr})}{(\dot{\epsilon}_{up} - \dot{\epsilon}_{lwr})} , \quad (\text{E.12})$$

com

$$\eta = \frac{\partial}{\partial\Delta\bar{\lambda}} \left\langle \Delta\bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma(\Delta\bar{\lambda}) - \Delta t \dot{\epsilon}_{lwr} \right\rangle , \quad (\text{E.13})$$

e assim

$$\omega_2 = \frac{\varepsilon_n \bar{\omega}}{\left(\varepsilon_n + \Delta\bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma(\Delta\bar{\lambda}) \right)^2} (A_{\infty_{n+1}} - \bar{A}_{\infty_n}) + \left(1 - \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_n + \Delta\bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma(\Delta\bar{\lambda})} \right) \frac{\partial A_{\infty_{n+1}}}{\partial\Delta\bar{\lambda}} . \quad (\text{E.14})$$

Pelas Equações E.6, E.9 e E.11, escreve-se

$$dA_{n+1} = \Lambda d(\Delta\bar{\lambda}) , \quad (\text{E.15})$$

onde Λ é

$$\begin{aligned} \Lambda = & \{\delta_{n+1}\zeta [\bar{A}_{\infty n+1} (1 + c\varepsilon_n) - A_n] + \bar{A}_{\infty n+1}c\}\bar{\omega} + \\ & + \omega_1 [\bar{A}_{\infty n+1} (1 + c\varepsilon_n) - A_n] \zeta \left(\Delta\bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3}\gamma(\Delta\bar{\lambda})} \right) + \\ & + \omega_2 \left[c\Delta\bar{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3}\gamma(\Delta\bar{\lambda})} + (1 + c\varepsilon_n)(1 - \zeta) \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

Inserindo Equação E.16 em E.1 e reajustando os termos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}_{ps_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\tau}_{n+1}} \cdot d\boldsymbol{\tau}_{n+1} + \frac{\partial \tilde{f}_{ps_{n+1}}}{\partial A_{n+1}} \Lambda d(\Delta\bar{\lambda}) + \frac{\partial \tilde{f}_{ps_{n+1}}}{\partial \Delta\bar{\lambda}} d(\Delta\bar{\lambda}) &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{f}_{ps_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\tau}_{n+1}} \cdot d\boldsymbol{\tau}_{n+1} &= - \left(\frac{\partial \tilde{f}_{ps_{n+1}}}{\partial A_{n+1}} \Lambda + \frac{\partial \tilde{f}_{ps_{n+1}}}{\partial \Delta\bar{\lambda}} \right) d(\Delta\bar{\lambda}), \\ d(\Delta\bar{\lambda}) &= \frac{1}{\chi} \frac{\partial \tilde{f}_{ps_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\tau}_{n+1}} \cdot d\boldsymbol{\tau}_{n+1}, \end{aligned} \quad (\text{E.17})$$

onde χ é dado por

$$\chi = - \left(\frac{\partial \tilde{f}_{ps_{n+1}}}{\partial A_{n+1}} \Lambda + \frac{\partial \tilde{f}_{ps_{n+1}}}{\partial \Delta\bar{\lambda}} \right). \quad (\text{E.18})$$

Da linearização da Equação 4.80 surge

$$d\mathbf{e}_{n+1}^e = d\mathbf{e}_{n+1}^{\text{teste}} - \left(d(\Delta\bar{\lambda}) \mathbf{P}\boldsymbol{\tau}_{n+1} + \Delta\bar{\lambda} \mathbf{P} \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\tau}_{n+1}} d\boldsymbol{\tau}_{n+1} \right). \quad (\text{E.19})$$

Substituindo a Equação E.17 em E.19 e utilizando a relação $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{g})\mathbf{k} = (\mathbf{g} \cdot \mathbf{k})\mathbf{a}$ escreve-se

$$\begin{aligned} d\mathbf{e}_{n+1}^e &= d\mathbf{e}_{n+1}^{\text{teste}} - \left(d(\Delta\bar{\lambda}) \mathbf{P}\boldsymbol{\tau}_{n+1} + \Delta\bar{\lambda} \mathbf{P} \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\tau}_{n+1}} d\boldsymbol{\tau}_{n+1} \right), \\ d\mathbf{e}_{n+1}^e + \left[\left(\frac{1}{\chi} \mathbf{P}\boldsymbol{\tau}_{n+1} \cdot d\boldsymbol{\tau}_{n+1} \right) \mathbf{P}\boldsymbol{\tau}_{n+1} + \Delta\bar{\lambda} \mathbf{P} \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\tau}_{n+1}} d\boldsymbol{\tau}_{n+1} \right] &= d\mathbf{e}_{n+1}^{\text{teste}}, \\ d\mathbf{e}_{n+1}^e + \left[\frac{1}{\chi} (\mathbf{P}\boldsymbol{\tau}_{n+1} \otimes \mathbf{P}\boldsymbol{\tau}_{n+1}) d\boldsymbol{\tau}_{n+1} + \Delta\bar{\lambda} \mathbf{P} \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\tau}_{n+1}} d\boldsymbol{\tau}_{n+1} \right] &= d\mathbf{e}_{n+1}^{\text{teste}}. \end{aligned} \quad (\text{E.20})$$

Por meio da relação elástica inversa $d\mathbf{e}_{n+1}^e = \mathbb{D}_{ps}^{e-1} d\boldsymbol{\tau}_{n+1}$ a Equação E.20, pode ser rearranjada de acordo com

$$\mathbb{D}_{ps}^{e-1} d\boldsymbol{\tau}_{n+1} + \frac{1}{\chi} (\mathbf{P}\boldsymbol{\tau}_{n+1} \otimes \mathbf{P}\boldsymbol{\tau}_{n+1}) d\boldsymbol{\tau}_{n+1} + \Delta\bar{\lambda} \mathbf{P} \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\tau}_{n+1}} d\boldsymbol{\tau}_{n+1} = d\mathbf{e}_{n+1}^{\text{teste}}. \quad (\text{E.21})$$

E por fim, o operador tangente consistente viscoplástico para o estado plano de tensão é

$$\mathbb{D}_{ps_{n+1}}^{vp} = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_{n+1}}{\partial \mathbf{e}_{n+1}^{\text{teste}}} = \left[\mathbb{D}_{ps}^{e-1} + \frac{1}{\chi} (\mathbf{P}\boldsymbol{\tau}_{n+1} \otimes \mathbf{P}\boldsymbol{\tau}_{n+1}) + \Delta\bar{\lambda} \mathbf{P} \right]^{-1}. \quad (\text{E.22})$$

APÊNDICE F – Processo de estabilização da tensão

Nos eventos dinâmicos os fenômenos relacionados com a inércia desempenham importante papel na resposta mecânica do material. Para a simulação de tais fenômenos o método dos elementos finitos por meio de um esquema explícito é geralmente empregado. Entretanto, conforme Ibrahimbegovic, 2010, associado ao método, em problemas que envolvem propagação de ondas mecânicas certas oscilações espúrias podem ser encontradas, e assim prejudicando o entendimento da resposta encontrada no problema avaliado.

Para contornar esse problema existem métodos onde é estabelecido um amortecimento artificial, conforme pode ser encontrado em [Richtmyer e Morton, 1967; Meyers, 1994]. Um dos métodos muito utilizado no esquema explícito das diferenças finitas centrais é o chamado *bulk viscosity*. Conforme Maheo et al., 2013, este método basicamente adiciona um termo artificial de viscosidade na equação de equilíbrio com o objetivo de eliminar as oscilações espúrias, dissipando a energia presente nas mais altas frequências. Este método é usado em propagações de choques, estudos de propagação de ondas e inclusive aplicado aos processos de conformação a altas velocidades. O mesmo encontra-se disponível na maioria dos *softwares* comerciais de elementos finitos.

Nas simulações dos processos de conformação mecânica a altas velocidades realizadas neste trabalho, essas oscilações foram observadas, tornando difícil o processo de capturar as tensões remanescentes ao término do processo de conformação. Para superar essas perturbações nas respostas observadas e apresentar os valores estabilizados, optou pela elevação dos parâmetros referentes ao *bulk viscosity*.

Na Figura F.1, é apresentado o resultado de toda a história de tensão tangencial para um ponto de integração presente no modelo de compressão de tubo. A aplicação do amortecimento foi realizada ao final da conformação mecânica do componente. Como é possível observar, sem a utilização do amortecimento artificial dado pelo *bulk viscosity*, o resultado de tensão apresenta oscilações, sem tendência a estabilização em um determinado valor. Por outro lado, o mesmo não ocorre com o acréscimo do amortecimento artificial, por essa abordagem a tensão apresenta uma tendência definida em se estabilizar nas proximidades de um valor.

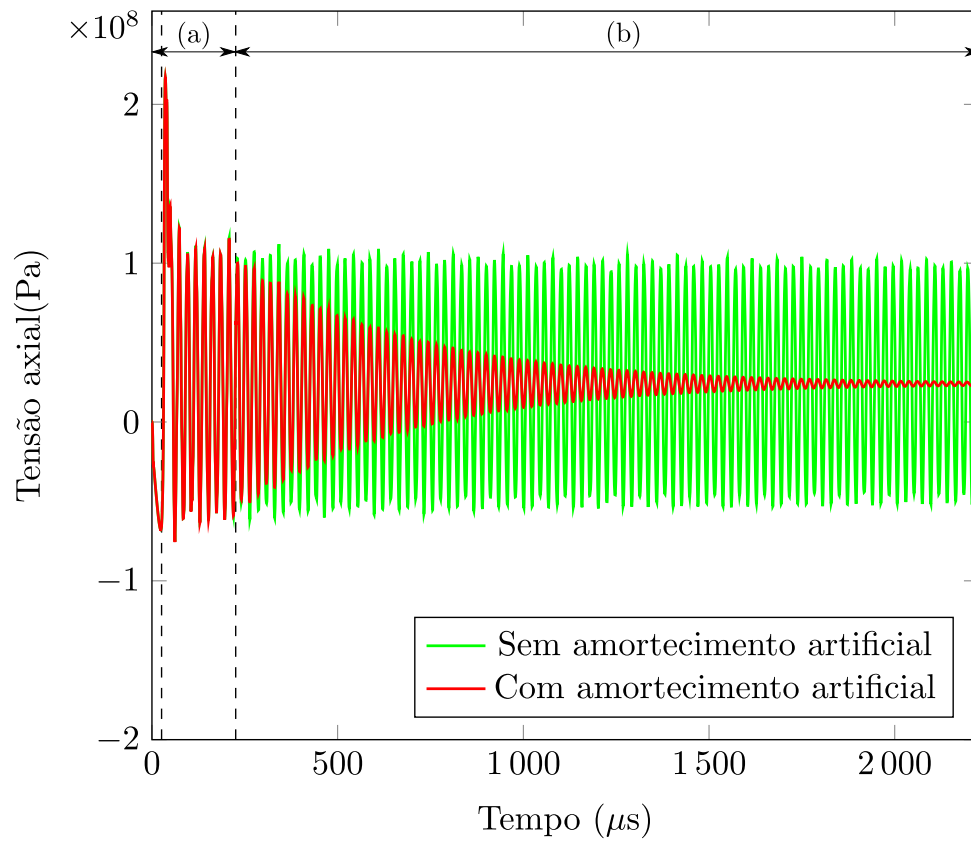


Figura F.1 – Comparação de resultados da estabilização da tensão com a aplicação do amortecimento artificial. Durante o período (a) ocorre a aplicação do pulso magnético e a conformação do componente pela inércia, e o período (b) é apenas uma fase de estabilização da tensão por meio da elevação dos parâmetros de *bulk viscosity*.