

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Generalizações analíticas do espectro de um grafo

por

Elizandro Max Borba

Tese submetida como requisito obrigatório
para obtenção do grau de
Doutor em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Vilmar Trevisan
Orientador

Prof. Dr. Carlos Hoppen
Coorientador

Porto Alegre, Março de 2018.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Borba, Elizandro Max

Generalizações analíticas do espectro de um grafo / Elizandro Max Borba.—Porto Alegre: PPGMAP da UFRGS, 2018.

92 p.: il.

Tese (doutorado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2018.

Orientador: Trevisan, Vilmar; Coorientador: Hoppen, Carlos

Tese: Matemática Aplicada
grafos, matriz laplaciana, raio p -espectral laplaciano, conectividade p -algébrica, particionamento.

AGRADECIMENTOS

À minha esposa, Katiúscia, e a todos os meus demais familiares, pelo constante apoio e afeto.

A todos do grupo de pesquisa em Matemática Discreta e Combinatória da UFRGS, em especial ao professor Vilmar, que me orienta e incentiva desde a graduação, e ao professor Carlos, cujas observações foram essenciais para a forma final desta tese.

A todos do grupo de pesquisa em Matemática Algorítmica e Discreta da Technische Universität Chemnitz, chefiado pelo professor Christoph Helmberg, que me acolheram durante meu ano de estada na Alemanha, onde aprendi muito em todos os aspectos.

Eu não poderia deixar de enfatizar as inestimáveis contribuições de Uwe Schwerdtfeger, cuja parceria inspirou várias das generalizações utilizadas, bem como dos colegas Eliseu Fritscher e Sebastian Richter, principalmente nos resultados iniciais.

Aos meus colegas e alunos da UERGS, onde leciono, pela compreensão.

Finalmente, agradeço ao PPGMAP, à Petrobrás e à CAPES por todas as oportunidades ao longo da minha pós-graduação.

RESUMO

Neste trabalho, introduzimos os conceitos de p -autovalores e p -autovetores do q -laplaciano de um grafo, que generalizam os conceitos usuais de autovalores e autovetores do laplaciano através do uso de normas associadas aos vértices e às arestas do grafo. Essa abordagem permite reescrever resultados de Teoria dos Grafos em um roupagem analítico-espectral. Estudamos o maior e o segundo menor p -autovalores do q -laplaciano, mostrando relações com invariantes como o tamanho de corte máximo e a constante de Cheeger, e apresentamos uma extensão dessa abordagem para a laplaciana sem sinal.

ABSTRACT

In this work, we introduce the concepts of p -eigenvalues and p -eigenvectors of the q -laplacian of a graph, which generalize the usual concepts of eigenvalues and eigenvectors of the laplacian through the use of norms associated to vertices and edges of the graph. This approach allows the rewriting of graph theory results in analytic-spectral guise. We studied the largest and the second smallest p -eigenvalues of the q -laplacian, showing relationships with invariants such as the maximum cut size and Cheeger constant, and present an extension of this approach for the signless laplacian.

Sumário

RESUMO	ii
ABSTRACT	iii
LISTA DE FIGURAS	vii
NOTAÇÕES	viii
1 INTRODUÇÃO	1
2 TEORIA ESPECTRAL DE GRAFOS E GENERALIZAÇÕES UTILIZANDO p-NORMAS	6
2.1 Grafos e representações matriciais	6
2.2 Teoria Espectral de Grafos	8
2.3 Espectro da matriz laplaciana	9
2.4 Generalizações utilizando p -normas	11
2.5 Observações sobre otimização	14
3 p-AUTOPARES DO q-LAPLACIANO	15
4 RAIOS p-ESPECTRAL q-LAPLACIANO	22
4.1 Introdução	22
4.2 Propriedades da função $p \rightarrow \mu_p^q(G)$	24
4.3 Caracterização das soluções para $p = 1$ e $p = \infty$	26

4.3.1	O caso $p = 1$	26
4.3.2	O caso $p = \infty$	29
4.4	Resultados para grafos bipartidos	30
4.5	O limite $q \rightarrow \infty$	34
5	CONNECTIVIDADE (p, q)-ALGÉBRICA	36
5.1	Introdução	36
5.2	O caso $q = 2, p = \infty$	38
5.2.1	Interpretação combinatória e física de a_∞^2	43
5.2.2	Cotas para $a_\infty^2(G)$	46
5.3	O caso $q = 2, p = 1$	48
5.3.1	Complexidade computacional	52
5.4	O caso $p = q = 1$	54
5.5	O limite $q \rightarrow \infty$	56
5.6	Propriedades da função $p \rightarrow a_p^q(G)$	59
6	O MENOR p-AUTOVALOR DO p-LAPLACIANO SEM SINAL	62
6.1	O limite $p \rightarrow 1^+$	64
6.2	O caso $p = \infty, q \rightarrow \infty$	70
7	CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS	73
	ÍNDICE REMISSIVO	74

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	75
---	-----------

Apêndices

A Teoria de Matrizes	80
B Teoria dos Grafos	81
C Análise e otimização	83
C.1 Problemas de Otimização e condições KKT	86
C.2 Soluções em pontos extremos	87
C.3 Parâmetros estatísticos baseados em p -normas	88
D Resultados auxiliares	91

Lista de Figuras

Figura 2.1	Um grafo e suas matrizes típicas.	8
Figura 2.2	O grafo de Turán $T_4(13)$	13
Figura 4.1	Gráfico de $\mu_p^2(K_2)$ em função de p	23
Figura 4.2	Contraexemplos para $q = 1$	29
Figura 4.3	Contraexemplo para $q = 1$	31
Figura 5.1	Solução de subproblema, mas não global e solução global de (5.13) para P_4	40
Figura 5.2	Uma solução ótima de (5.6) para uma árvore T , com $a_\infty^2(T) = 0,8$.	43
Figura 5.3	Exemplo de distância resistiva	44
Figura 5.4	Exemplo dos vetores x e y em um grafo de diâmetro 5.	59
Figura 6.1	Exemplos de C_w^t em um grafo.	66
Figura 6.2	Construção de G' a partir de G	69
Figura 7.1	O grafo completo K_5	82
Figura 7.2	O grafo bipartido completo $K_{3,4}$	82

NOTAÇÕES

Convenções usuais:

G	grafo
x	vetor
S	conjunto
M	($\in \{A, L, Q, N\}$) representação matricial de um grafo
i, j	vértice
p, q	número real ou ∞ (tipicamente $\in [1, \infty]$)
$[\cdot, \cdot], (\cdot, \cdot)$	intervalo fechado e aberto
$ S $	número de elementos do conjunto S
$\ x\ _p$	$= (\sum x_i ^p)^{1/p}$, p -norma de x
$\mathbf{1}$	vetor de uns
$\mathbf{0}$	vetor nulo
$A = A(G)$	matriz de adjacência de G
$a(G)$	segundo menor autovalor de $L(G)$ de G ($= a_2^2(G)$)
$a_p^q(G)$	segundo menor p -autovalor de $L_q(G)$
$B = B(G)$	matriz de incidência (com respeito a uma orientação) de G
$C = C(G)$	matriz de incidência (não orientada) de G
C_n	ciclo com n vértices
S_x^t	$= \{i \in V : x_i > t\}$
$\text{cut}(S)$	$= E(S, V \setminus S) $, tamanho do corte de S
$\text{diam}(G)$	diâmetro (distância máxima entre vértices) de G
d_i	grau de i
d_{ij}	número de arestas entre i e j (0 ou 1)
e_i	vetor com 1 na posição i e 0 nas demais posições

$E = E(G)$	conjunto das arestas de G
$E(S, T)$	arestas entre os conjuntos de vértices S e T
h_G	constante de Cheeger, $= \min_{S \subset V, S \leq \frac{ V }{2}} \frac{\text{cut}(S)}{ S }$
K_n	grafo completo com n vértices
$K_{p,q}$	grafo bipartido completo com classes de tamanho p e q
$L = L(G)$	matriz laplaciana de G
$L_q = L_q(G)$	q -laplaciano de G , $(L_q x)_i = \sum_{j:ij \in E} \phi_q(x_i - x_j)$
$\text{maxcut}(G)$	$= \max_{S \subset V(G)} \text{cut}(S)$, tamanho de um corte máximo de G
$m_p(x)$	$= \arg \sigma_p^p(x)$, p -média de x
$M_p(x)$	$= \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i ^p \right)^{1/p}$ p -ésima <i>power mean</i> de x
M_{ij}	entrada de M na i -ésima linha e j -ésima coluna
M_S	matriz formada pelas linhas e colunas de M indexadas por S
$M_{\bar{S}}$	submatriz de M sem as linhas e colunas indexadas por S
$M_{\bar{i}}$	submatriz de M sem a linha i e a coluna i
$N = N(G)$	matriz laplaciana normalizada de G
N_x	$= \{i : x_i < 0\}$
P_x	$= \{i : x_i > 0\}$
P_n	caminho com n arestas (e $n + 1$ vértices)
$Q = Q(G)$	matriz laplaciana sem sinal de G
$Q_q = Q_q(G)$	q -laplaciano de G , $(Q_q x)_i = \sum_{j:ij \in E} \phi_q(x_i + x_j)$
$R_p^q(x)$	$= \frac{x^T L_q x}{\ x\ _p^q}$ ($= \frac{x^T Q_q x}{\ x\ _p^q}$ no capítulo 6)
$\text{sign}(x)$	sinal de x ($= 0$ se $x = 0$)
$\text{Sign}(x)$	sinal (multivalorado) de x ($= [-1, 1]$ se $x = 0$)
\mathcal{T}_G	número de árvores geradoras de G
$\mathcal{T}_G(i, j)$	número de florestas geradoras de G com exatamente duas árvores T_i, T_j com $i \in V(T_i)$ e $j \in V(T_j)$
$V = V(G)$	conjunto dos vértices de G

x_i	i -ésima entrada de x
x_S	vetor formado pelas entradas de x indexadas por S
$x_{\bar{S}}$	vetor obtido removendo-se de x as entradas indexadas por S
$x_{\bar{i}}$	vetor obtido removendo-se de x a entrada i
Z_x	$= \{i : x_i = 0\}$
Δ_G	grau máximo de G
$\mu(G)$	raio espectral laplaciano de G
$\mu_p^q(G)$	$= \max_{\ x\ _p=1} x^T L_q x$, raio p -espectral q -laplaciano de G
$\phi_p(x)$	$= x ^{p-1} \text{sgn } x$ (aplicado por entrada se x é um vetor)
$\sigma_p(x)$	$= \sqrt[p]{\sigma_p^p(x)}$, p -desvio padrão de x
$\nu(G)$	menor autovalor de Q
$\nu_p^q(G)$	menor p -autovalor de Q_q
$\psi(G)$	$= \min_{\substack{S, T \subseteq V \\ S \cap T = \emptyset \neq S \cup T}} \frac{2 E(S) + 2 E(T) + \text{cut}(S \cup T)}{ S \cup T }$
$\hat{\psi}(G)$	$= \min_{\substack{S, T \subseteq V \\ S \cap T = \emptyset \neq S \cup T}} \frac{4 E(S) + 4 E(T) + \text{cut}(S \cup T)}{ S \cup T }$
$\omega(G)$	número de clique de G

1 INTRODUÇÃO

Grafos, de maneira simples, são constituídos de um conjunto de objetos (*vértices* ou *nós*) juntamente com suas interconexões (*arestas*). Esse conceito simples pode ser usado para modelar uma imensa variedade de fenômenos. Apenas para citar alguns exemplos básicos:

contexto	vértices	arestas
Redes de dados	computadores, roteadores etc.	cabos
Redes sociais	pessoas	amizades
Logística	idades, instalações	vias, caminhos
Internet	páginas	links
Química	átomos	ligações

Devido a essa gama de aplicações, problemas em Teoria dos Grafos são objeto de intensa pesquisa. Alguns desses problemas são “fáceis”, no sentido de possuírem um algoritmo “eficiente” (que retorna a solução exata em tempo polinomial), como por exemplo: árvore geradora mínima, corte mínimo/fluxo máximo e emparelhamento máximo [18]. Entretanto, muitos problemas são \mathcal{NP} -difíceis, de forma que não se conhecem algoritmos eficientes para resolvê-los [24].

Um método que tem encontrado sucesso para a análise de grafos é a Teoria Espectral de Grafos. Essa abordagem consiste em representar o grafo por uma matriz e então estudar o espectro (autovalores e autovetores) dessa matriz, aproveitando-se da existência de métodos numéricos bem desenvolvidos para a obtenção do espectro [27]. Essa tem sido uma área de pesquisa ativa nas últimas décadas [16], sendo que as investigações têm se dado em duas frentes principais. Por um lado, várias relações têm sido encontradas entre o espectro dessas matrizes e invariantes de Teoria dos Grafos, como grau máximo, tamanho de corte máximo e constante de Cheeger. Por outro, essas relações inspiram heurísticas para a obtenção

de soluções aproximadas de problemas \mathcal{NP} -difíceis, como particionamento e corte máximo. Mais alguns detalhes sobre essas pesquisas serão dados no Capítulo 2.

Mais recentemente, têm-se estudado métodos que partem da caracterização de Rayleigh-Ritz para o menor e maior autovalores de uma matriz simétrica, porém substituindo a norma euclidiana por uma p -norma. Em [34, 36] foi estudada a quantidade

$$\lambda_p(G) = \max_{\|x\|_p=1} x^T A x,$$

onde A é a matriz de adjacência de G . Isso é um exemplo do que chamaremos de p -autovalor (e logo x seria o p -autovetor associado a λ_p). Mostra-se que $\lambda_p(G)$ se relaciona com diferentes invariantes de G conforme o valor de p . Entre outros resultados, Kang e Nikiforov [34] obtiveram uma generalização de um Teorema clássico de Turán [48].

É natural cogitar estender essa abordagem para a matriz laplaciana L de G . Merece destaque o segundo menor autovalor de L , chamado de *conectividade algébrica*, $a(G)$, bem como o autovetor associado, o *vetor de Fiedler*, que é usado em heurísticas de particionamento [41]. Nesse sentido, Amghibeche [2] definiu uma contraparte não-linear de L , o p -laplaciano, ou L_p , sendo que o segundo menor p -autovalor de L_p , $a_p^p(G)$, é definido de forma similar à caracterização de Courant-Fischer para $a(G)$. Bühler e Hein [5] apresentaram cotas para a constante de Cheeger em termos de $a_p^p(G)$, que são justas quando p tende a 1.

Enfim, esses trabalhos mostram que o uso de p -normas permite reescrever parâmetros e resultados em uma roupagem analítico-espectral. Nesse trabalho apresentaremos algumas novas ferramentas para esta abordagem. Na definição de Amghibeche, os p -autovalores e L_p estavam acoplados pelo parâmetro p . No presente trabalho, trataremos dos p -autovalores e p -autovetores do q -laplaciano, ou seja, sem o acoplamento recém mencionado. Essa abordagem permite generalizar muitas das

demonstrações já existentes nos trabalhos anteriores sem prejuízo, e além disso novas conexões com parâmetros de Teorias dos Grafos podem ser reveladas.

Apresentamos agora de forma sucinta as definições mais importantes, deixando os detalhes para o Capítulo 3. Estudando os pontos críticos da função

$$R_p^q(x) = \frac{\sum_{ij \in E} |x_i - x_j|^q}{\|x\|_p^q}$$

para $p, q > 1$, que generaliza o quociente de Rayleigh (caso $p = q = 2$), o q -laplaciano L_q de G é definido como a função que satisfaz

$$(L_q x)_i = \sum_{j:ij \in E} \phi_q(x_i - x_j),$$

onde $\phi_p(t) = |t|^{p-1} \text{sign}(t)$ se $q > 1$. Um p -autopar (λ, v) de L_q satisfaz

$$L_q v = \lambda \phi_p(v),$$

e em particular para $p = q = 2$ temos a familiar autoequação $Lv = \lambda v$. Os casos em que $p = 1$ ou $q = 1$ serão ligeiramente diferentes. Como veremos, as escolhas de p e q correspondem à escolha de uma p -norma para os vértices e uma q -norma para as arestas de G .

Essa formulação tem diversas aplicações em Teoria dos Grafos. Nos Capítulos 4 a 6, mostraremos que estes parâmetros se relacionam com diferentes invariantes de Teoria dos Grafos. Por exemplo, mostraremos que o maior dos p -autovalores de L_q apresenta relações com o grau máximo e o corte máximo de G (Teoremas 4.4 e 4.5), e o segundo menor p -autovalor de L_q se relaciona com a constante de Cheeger (Proposição 5.35). Várias cotas são conhecidas para essas invariantes em termos de autovalores de L (algumas são mostradas no Capítulo 2), e aqui mostramos que, para escolhas adequadas de p e q , obtemos relações de igualdade. Na conclusão da tese podem ser encontradas tabelas que contêm um resumo dos resultados.

O presente trabalho está organizado da seguinte forma. No Capítulo 2, apresentamos algumas definições e problemas que motivaram o trabalho, bem como

conceitos e resultados necessários à sua compreensão. A seguir, no Capítulo 3, apresentamos o conceito de q -laplaciano e definimos seus p -autovalores e p -autovetores (p -autopares). O maior e o segundo menor p -autovalores do q -laplaciano são estudados mais profundamente nos Capítulos 4 e 5. Já no Capítulo 6, apresentamos uma extensão do q -laplaciano para a matriz laplaciana sem sinal, caso em que também há cotas e relações de igualdade com invariantes. Por fim, no Capítulo 7, resumimos nossas conclusões e apresentamos algumas perspectivas de trabalhos futuros.

Observações sobre notação

Logo antes da introdução, o leitor encontra um resumo das notações utilizadas, acompanhadas, se possível, de uma sucinta definição, para rápida referência.

A fim de deixar a notação menos carregada, cometemos intencionalmente alguns abusos. Para um grafo G , a referência a G pode ser omitida se G está claro no contexto. Por exemplo, frequentemente escreveremos L , V e Δ em vez de $L(G)$, $V(G)$ e Δ_G .

Pelo mesmo motivo, por vezes identificaremos um conjunto unitário com seu elemento, como por exemplo na Equação 3.1. A soma de conjuntos segue a convenção de Minkowski, com algumas extensões, como denotado a seguir:

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}, \quad cA = \{ca : a \in A\}, \quad A + c = \{a + c : a \in A\}.$$

Essas convenções também se aplicam à aritmética de conjuntos; assim, por exemplo, denotamos $[-1, 1] + 1 = [0, 2]$ em vez de $[-1, 1] + \{1\} = [0, 2]$.

Para vetores, adotamos as convenções a seguir. O vetor nulo é $\mathbf{0}$, o vetor de uns é $\mathbf{1}$, e e_i é o i -ésimo vetor da base canônica de \mathbb{R}^n . Dado $x \in \mathbb{R}^n$, com conjunto de índices S e $i \in S$, x_S é o vetor formado pelas entradas de x indexadas por S , e x_i é a i -ésima entrada de x . Similarmente, $x_{\bar{S}}$ é o vetor obtido removendo-se

de x as entradas indexadas por S , e $x_{\bar{i}}$ é o vetor obtido removendo-se de x a i -ésima entrada. Além disso, definimos os conjuntos

$$N_x = \{i : x_i < 0\}, \quad P_x = \{i : x_i > 0\} \quad \text{e} \quad Z_x = \{i : x_i = 0\}.$$

Para matrizes, usamos convenções similares. Para uma matriz M e conjunto de índices S , M_{ij} é a entrada de M na i -ésima linha e j -ésima coluna e M_S é a matriz formada pelas linhas e colunas de M indexadas por S . Obtemos $M_{\bar{S}}$ removendo de M as linhas e colunas indexadas por S , e $M_{\bar{i}}$ removendo de M a i -ésima linha e a i -ésima coluna.

2 TEORIA ESPECTRAL DE GRAFOS E GENERALIZAÇÕES UTILIZANDO p -NORMAS

Apresentamos a seguir alguns resultados que mostram que o espectro de um grafo pode fornecer informações sobre propriedades estruturais deste grafo, e como essa análise foi estendida com a utilização de p -normas.

2.1 Grafos e representações matriciais

Aqui resumiremos algumas definições básicas sobre grafos. O leitor mais familiarizado com o tema pode pular essa seção.

Um grafo (não-orientado) é um par $G = (V, E)$ de conjuntos tais que $E = \{\{i, j\} : i, j \in V, i \neq j\}$, ou seja, os elementos de E (arestas) são pares não-ordenados de elementos de V (vértices) [22]. Para concisão, denotaremos uma aresta entre i e j por ij em vez de $\{i, j\}$. Se $ij \in E$, dizemos que i e j são *vizinhos*. O número de vizinhos de i é seu *grau*, denotado por d_i . O número de arestas entre i e j (0 ou 1) é d_{ij} . O *grau máximo* de G é Δ_G .

Dados $S, T \subset V$, $E(S, T)$ é o conjunto de arestas entre S e T , ou seja, $E(S, T) = \{ij \in E : i \in S, j \in T\}$. O tamanho do corte, ou simplesmente *corte* de S , é o número de arestas entre S e seu complemento, ou seja, $\text{cut}(S) = |E(S, V \setminus S)|$, e $\text{maxcut}(G) = \max_{S \subset V} \text{cut}(S)$ é o *corte máximo* de G .

Um *passeio* (de tamanho k) é uma sequência de vértices $v_0 v_1 \dots v_k$ em que vértices consecutivos na sequência são vizinhos. Um passeio é *fechado* se $v_0 = v_k$. Se os vértices da sequência forem distintos, o passeio é dito um *caminho*, denotado por P_k . Se a P_k adicionarmos a aresta $v_k v_0$, temos um *ciclo*, denotado por C_n ($n = k + 1$).

O tamanho de um caminho mínimo entre i e j é a *distância* entre i e j , $d(i, j)$. Se nenhum tal caminho existe, convencionamos que $d(i, j) = \infty$. O *diâmetro* de G é a maior distância em G , ou seja, $\text{diam}(G) = \max_{i, j \in V} d(i, j)$.

Grafos podem ser representados por matrizes. A seguir definiremos as matrizes que serão utilizadas no texto. A *matriz de adjacência* $A = A(G)$ é a matriz $|V| \times |V|$ definida por

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } ij \in E; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A *matriz de incidência* (não orientada) de G , $C = C(G)$, é a matriz $|E| \times |V|$ definida por

$$C_{ei} = \begin{cases} 1 & \text{se } e \text{ incide em } i; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Embora tratemos aqui apenas de grafos não-orientados, excepcionalmente consideramos que é atribuída uma orientação às arestas de G , ou seja, cada aresta $e \in E$ parte de um vértice i e chega em um vértice j . A *matriz de incidência* (com respeito a uma orientação) de G , $B = B(G)$, é a matriz $|E| \times |V|$ definida por

$$B_{ei} = \begin{cases} -1 & \text{se } e \text{ parte de } i; \\ 1 & \text{se } e \text{ chega em } i; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

No exemplo da Figura 2.1, está implícita uma orientação.

Seja $D = D(G)$ a matriz diagonal tal que $D_{ii} = d_i$, onde d_i é o grau de i . A *matriz laplaciana* $L = L(G)$ é definida por $L = D - A$. Similarmente, a *matriz laplaciana sem sinal* $Q = Q(G)$ é definida por $Q = D + A$. Pode-se verificar que $L = B^T B$ e $Q = C^T C$.

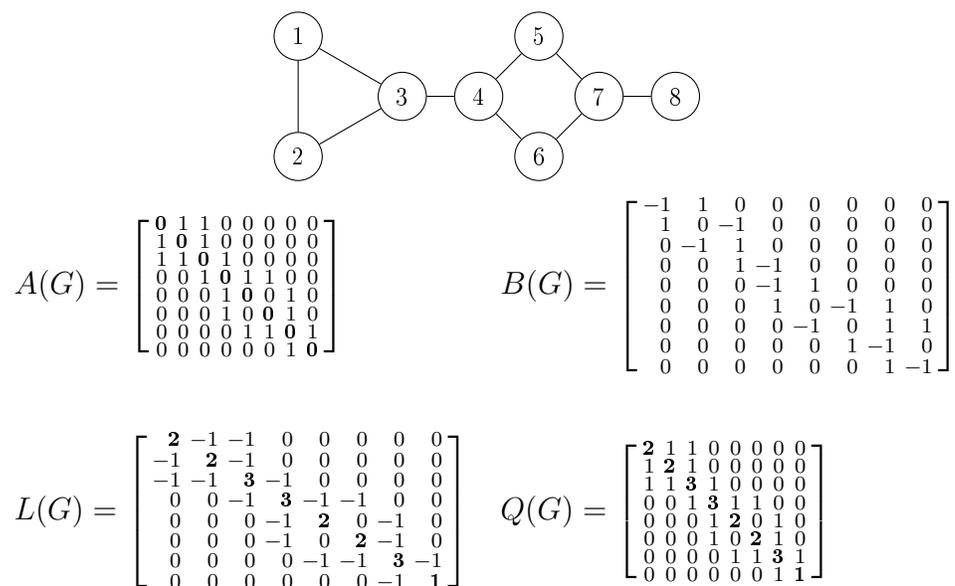


Figura 2.1: Um grafo e suas matrizes típicas.

2.2 Teoria Espectral de Grafos

A Teoria Espectral de Grafos busca obter relações entre as propriedades estruturais de grafos e o espectro (autovalores e autovetores a estes associados) das matrizes que podem ser associadas a um grafo. Como exemplo inicial, dos autovalores de $A(G)$, podemos obter relações com parâmetros como o número de cadeias fechadas de um dado comprimento, diâmetro, graus médio e máximo [1]. Uma aplicação interessante, e um dos marcos iniciais dessa teoria, foi o trabalho de Hückel [32], que estudou hidrocarbonetos insaturados, onde a estrutura da molécula é representada por um grafo, e mostrou que os autovalores correspondem aos níveis de energia dos elétrons π .

Segundo van Dam e Haemers [50], nos primórdios da teoria, essas relações pareciam tão fortes que acreditava-se que cada grafo G fosse *determinado por seu espectro*, ou seja, que não existisse um grafo não isomorfo a G com o mesmo espectro. Entretanto, hoje se sabe que existem inúmeros pares de grafos não isomorfos com o mesmo espectro (*pares coespectrais*). Ainda assim, uma conjectura central da

teoria é que “quase todos” os grafos são determinados por seu espectro, ou seja, que a fração de grafos com n vértices que são determinados por seu espectro tende a 1 quando $n \rightarrow \infty$.

Em outro exemplo de aplicação, Bonacich [7] sugeriu o uso de um autovetor associado ao maior autovalor de A como medida de centralidade (ou importância relativa) dos vértices de um grafo. Aprimoramentos dessa técnica tiveram um papel importante no desenvolvimento dos mecanismos de busca na Internet [12].

2.3 Espectro da matriz laplaciana

O estudo da matriz laplaciana $L = L(G)$ de um grafo remonta a Kirchhoff [37], que em 1847, estudando circuitos elétricos, provou o resultado que ficou conhecido como *Teorema da Matriz-Árvore*, que afirma que o número de árvores geradoras de G é igual a qualquer cofator de L . Denotaremos por $\mu(G)$ o maior autovalor de L , ou *raio espectral laplaciano*. Assim como o raio espectral de A , são conhecidas relações entre $\mu(G)$ e o grau máximo Δ , como o exemplo a seguir [28]:

$$\Delta + 1 \leq \mu(G) < \Delta + 1 + 2\sqrt{\Delta - 1}.$$

Uma relação mais interessante é com o corte máximo de G , $\text{maxcut}(G)$, cuja obtenção é um problema \mathcal{NP} -completo [25]. Uma cota simples é [43, Lema 3.1]

$$\mu(G) \geq \frac{4}{|V|} \text{maxcut}(G).$$

Com base em cotas espectrais aprimoradas utilizando perturbações da diagonal de L , foram desenvolvidos algoritmos de aproximação em tempo polinomial para o problema do corte máximo. Por exemplo, Goemans e Williamson [26] apresentaram um algoritmo que retorna um corte com tamanho mínimo de $0,878 \cdot \text{maxcut}(G)$.

Desde o trabalho seminal de Fiedler [23], o segundo menor autovalor de L também tem sido amplamente estudado por sua conexão com propriedades

estruturais, em especial as de conectividade de um grafo. Por isso, esse valor é chamado de *conectividade algébrica*, denotado por $a(G)$. Por exemplo, G é conexo se e somente se $a(G) > 0$ (retomaremos isso no Capítulo 3). Outra relação simples que justifica esse nome é a seguinte. Seja $\kappa(G)$ (respectivamente $\kappa'(G)$) o número mínimo de vértices (respectivamente arestas) que se deve remover de $G \neq K_n$ para torná-lo desconexo. No caso específico de $G = K_n$ (em que é impossível desconectar o grafo removendo vértices), define-se $\kappa(G) = n - 1$. Temos então que $a(G) \leq \kappa(G) \leq \kappa'(G)$.

A conectividade algébrica $a(G)$ também aparece nos chamados *problemas isoperimétricos*, estudados, entre outros, por Cheeger [15]. Esses problemas são motivados por questões relativas à razão entre a área de superfície e volume de regiões em variedades riemannianas [43]. Para grafos, analogamente, considera-se a razão entre a quantidade de arestas que separa um conjunto $S \subset V$ e o tamanho desse conjunto, ou seja, $\text{cut}(S)/|S|$. Essa quantidade é menor quando há um corte pequeno que separa o grafo em classes S e \bar{S} de tamanho equilibrado, características desejáveis de um bom corte.

O *número isoperimétrico* de G , h_G , também conhecido como *constante de Cheeger* de G , é definido por

$$h_G = \min_{\substack{S \subset V \\ |S| \leq \frac{|V|}{2}}} \frac{\text{cut}(S)}{|S|}.$$

A obtenção de h_G é um problema \mathcal{NP} -completo para multigrafos [42, Proposição 3.1]. Embora alguns trabalhos [5, 41] afirmem que o problema também é \mathcal{NP} -completo para grafos simples, não temos conhecimento de uma prova desta afirmação. O resultado a seguir relaciona h_G e $a(G)$.

Teorema 2.1 ([43], Corolário 3.8 e Teorema 3.10).

$$\frac{a(G)}{2} \leq h_G \leq \sqrt{a(G)(2\Delta - a(G))}.$$

Em outras palavras, se $a(G)$ é pequeno, então há um bom corte de G , e vice-versa. Por outro lado, Se $a(G)$ for grande, não é fácil separar o grafo através da remoção de vértices e arestas.

Um autovetor associado $a(G)$ é chamado de *vetor de Fiedler* e é usado em heurísticas de particionamento (ver [41] e referências contidas). A ideia básica é particionar o grafo em classes conforme o sinal das entradas do vetor.

2.4 Generalizações utilizando p -normas

É um fato básico da Álgebra Linear que os autovetores de uma matriz real simétrica M (de ordem n) correspondem aos pontos críticos do quociente de Rayleigh

$$R(x) = \frac{x^T M x}{\|x\|^2}, \quad x \neq 0,$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana. Para cada vetor $x \in \mathbb{R}^n$ não-nulo existe um vetor $y = x/\|x\|$ tal que $\|y\| = 1$ e $R(x) = R(y)$, de modo que podemos nos restringir ao conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$. Por exemplo, podemos obter o maior autovalor de M resolvendo o problema

$$\max_{\|x\|=1} x^T M x.$$

Para $p \geq 1$, uma p -norma $\|\cdot\|_p$ é uma generalização da norma euclidiana, definida por

$$\|x\|_p = \left(\sum_i |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

Além da norma euclidiana ($p = 2$), um caso notável é $p = 1$ ($\|x\|_1 = \sum |x_i|$, também conhecida como *norma do táxi*) e com base no limite $p \rightarrow \infty$ definimos a *norma do máximo* como $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$. Podemos cogitar sobre que tipo de resultados obteremos se substituirmos a norma euclidiana por uma outra p -norma.

Um dos resultados mais antigos desse tipo de que se tem conhecimento, embora não enunciado em termos de p -normas, foi apresentado por Motzkin e Straus

[44] e tem relação com o número de clique $\omega(G)$, cuja obtenção é um problema \mathcal{NP} -completo.

Teorema 2.2 (Motzkin-Straus). *Seja $G = (V, E)$ um grafo e considere o conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^{|V|} : x_i \geq 0 \text{ e } \sum x_i = 1\}$. Então*

$$\max_{x \in S} \sum_{ij \in E} x_i x_j = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\omega(G)} \right).$$

Como a função objetivo é igual a $x^T A x / 2$, podemos facilmente reescrever este resultado como

$$\max_{\|x\|_1=1} x^T A x = 1 - \frac{1}{\omega(G)}.$$

Outro exemplo em que alterar a norma trouxe resultados interessantes foi o do *raio p -espectral* [36], definido como

$$\lambda_p(G) = \max_{\|x\|_p=1} x^T A x. \quad (2.1)$$

Além de $\lambda_2(G)$ corresponder ao maior autovalor de $A(G)$, vê-se que o caso $p = 1$ é o Teorema de Motzkin-Straus, e que $\lambda_\infty(G) = 2|E(G)|$ (Proposição D.1).

Para falar de um resultado dessa teoria, lembramos o *grafo de Turán*, $T_r(n)$, que é o grafo r -partido completo com n vértices em que cada classe possui $\lfloor n/r \rfloor$ ou $\lceil n/r \rceil$ vértices (ou seja, as quantidades de vértices nas classes diferem entre si por no máximo uma unidade). Turán [48] provou que $T_r(n)$ possui o máximo número de arestas dentre os grafos de ordem n que não possuem K_{r+1} como subgrafo, e é o único grafo que atinge esse máximo.

Kang e Nikiforov [34] provaram o seguinte resultado:

Teorema 2.3. *Se G é um grafo de ordem n livre de K_{r+1} , então, para $p \geq 1$,*

$$\lambda_p(G) \leq \lambda_p(T_r(n)),$$

com a igualdade valendo se e somente se $G = T_r(n)$.

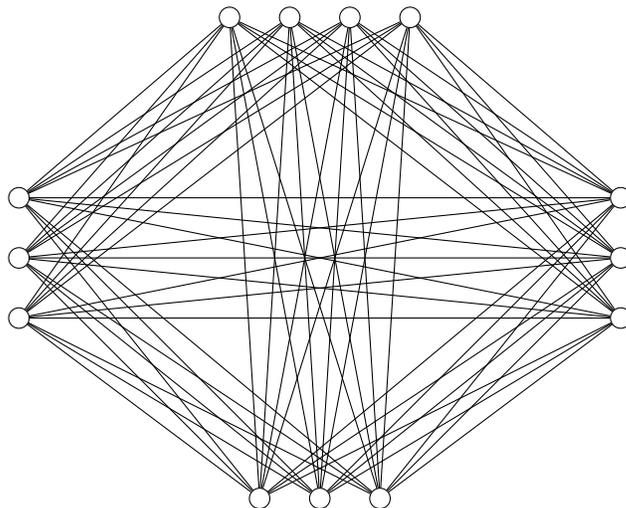


Figura 2.2: O grafo de Turán $T_4(13)$, que contém o maior número de arestas dentre os grafos de ordem 13 que não possuem K_5 como subgrafo.

Observe que o resultado de Turán é o caso $p = \infty$. Nikiforov [45] já havia provado o caso $p = 2$.

Outro exemplo do uso de p -normas em generalizações de problemas espectrais foi utilizada por Amghibech [2], que utilizou como “autovetores” os pontos críticos da função

$$R_p^p(x) = \frac{\sum_{ij \in E} |x_i - x_j|^p}{\|x\|_p^p}.$$

Denotaremos por $a_p^p(G)$ o segundo menor desses autovalores (que satisfaz certas condições, conforme veremos no capítulo 3). Bühler e Hein [5, 6] obtiveram cotas para a constante de Cheeger h_G em termos de a_p^p para $p > 1$ [6, Teorema 5.1]:

Teorema 2.4 (Bühler e Hein). *Para $p > 1$,*

$$\left(\frac{2}{\Delta_G}\right)^{p-1} \left(\frac{h_G}{p}\right)^p \leq a_p^p(G) \leq 2^{p-1} h_G.$$

Em particular, $\lim_{p \rightarrow 1^+} a_p^p(G) = h_G$.

2.5 Observações sobre otimização

Para uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e Lipschitz em uma vizinhança de x , um vetor $s \in \mathbb{R}^n$ é dito um *subgradiente* de f em x se possui a propriedade

$$f(y) - f(x) \geq s^T(y - x) \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

O conjunto de todos os subgradientes de f em x é chamado de *subdiferencial* de f em x , que denotamos por $\partial_x f(x)$:

$$\partial_x f(x) = \{s \in \mathbb{R}^n : \forall y \in \mathbb{R}^n : f(y) - f(x) \geq s^T(y - x)\}.$$

Esse conjunto é não vazio e convexo ([17, Proposição 2.1.2]), e em particular $\partial_x f(x) = \{\nabla_x f(x)\}$ se e somente se f é continuamente diferenciável em x ([17, Proposição 2.2.4]), como é o caso das normas. Citaremos aqui alguns fatos básicos sob subdiferenciais; mais detalhes podem ser encontrados no livro de Clarke [17]. Várias regras do cálculo diferencial se generalizam para subdiferenciais. Sendo $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função também Lipschitz em uma vizinhança de x , temos a Regra do Quociente ([17, Proposição 2.3.14])

$$\partial_x \left(\frac{f}{g} \right) (x) = \frac{g(x)\partial_x f(x) - f(x)\partial_x g(x)}{g^2(x)}$$

para $g(x) \neq 0$, e a Regra da Cadeia ([17, Proposição 2.3.10])

$$\partial_x (f \circ g)(x) = (\partial_x f \circ g)(x) \cdot \partial_x g(x).$$

Para otimização, uma propriedade importante é que uma condição necessária para que f possua um extremo local em x é que $\mathbf{0} \in \partial_x f(x)$ ([17, Proposição 2.3.2]).

3 p -AUTOPARES DO q -LAPLACIANO

Aqui apresentamos os conceitos de p -autopar e q -laplaciano, que estendem os conceitos usuais através de uma autoequação generalizada.

Neste capítulo damos a definição precisa do q -laplaciano L_q , bem como seus p -autovalores e p -autovetores a esses associados, e mostraremos como esses conceitos generalizam as definições usuais de laplaciano, autovalores e autovetores. Veremos, por exemplo, que p e q estão relacionados a normas para os vértices e arestas do grafo. Assim, a abordagem desta tese unifica as diferentes variações de norma já exploradas na literatura. Sendo assim, este capítulo traz resultados mais gerais, que servem como base e possibilitam a exploração mais detalhada de casos particulares nos capítulos subsequentes.

As definições generalizam outras já existentes na literatura [2]. Assim, alguns dos resultados enunciados abaixo já eram conhecidos para casos particulares, como $p = q > 1$. Entretanto, é interessante que tais resultados valham em geral para $p, q \geq 1$. Essa abordagem generalizada é uma das principais contribuições desta tese.

Após as definições iniciais, veremos que algumas propriedades do menor p -autovalor de L_q são as mesmas do menor autovalor de L , em especial no que diz respeito ao número de componentes conexas do grafo.

Embora a existência do maior e menor p -autovalores de L_q sejam triviais, o mesmo não vale necessariamente para os demais. Sendo assim, mostraremos que o segundo menor p -autovalor, objeto do Capítulo 5, é de fato bem definido.

Seguindo o que comentamos na seção 2.4, os autovetores da matriz laplaciana $L = L(G)$ de um grafo G podem ser obtidos através do quociente de

Rayleigh $R(x) = x^T Lx / \|x\|_2^2$, sendo que

$$x^T Lx = \sum_{ij \in E} (x_i - x_j)^2.$$

Essa fórmula é um caso especial da Proposição 3.2, que veremos logo mais. Portanto,

$$R(x) = \frac{\sum_{ij \in E} (x_i - x_j)^2}{\|x\|_2^2}.$$

Além disso, como visto na Seção 2.4, podemos restringir a busca por pontos críticos à bola unitária $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$. De fato, o numerador da expressão de $R(x)$ também pode ser visto como uma norma. Sendo B uma matriz de incidência de G relativa a uma orientação qualquer, como $L = B^T B$, temos que $x^T Lx = \|Bx\|_2^2$, de forma que podemos escrever

$$R(x) = \left(\frac{\|Bx\|_2}{\|x\|_2} \right)^2.$$

Para $p \in [1, \infty]$ e $q \in [1, \infty)$, definimos uma generalização do quociente de Rayleigh:

$$R_p^q(x) = \frac{\sum_{ij \in E} |x_i - x_j|^q}{\|x\|_p^q} = \left(\frac{\|Bx\|_q}{\|x\|_p} \right)^q.$$

Na fórmula acima pode-se notar que as escolhas de p e q podem ser vistas como a escolha de uma p -norma associada aos vértices do grafo e uma q -norma associada às arestas do grafo, pois cada entrada de x e Bx é associada, respectivamente, a um vértice e uma aresta do grafo. Seguindo o trabalho de Amghibeck [2], Bühler e Hein [5] chamaram de “autovetores” os pontos críticos de R_p^p , ou seja, o caso em que $p = q$, e seguiremos a mesma linha. Para o cálculo dos pontos críticos de $R_p^q(x)$, precisaremos de algumas definições. Para $t \in \mathbb{R}$, o *signal* de t é a função

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t > 0; \\ -1, & \text{se } t < 0; \\ 0, & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

O sinal estendido de t é a função multivalorada

$$\text{Sign}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t > 0; \\ -1, & \text{se } t < 0; \\ [-1, 1], & \text{se } t = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Para $p \geq 1$, considere também a função (multivalorada para $p = 1$)

$$\phi_p(t) = \begin{cases} |t|^{p-1} \text{sign}(t), & \text{se } p > 1; \\ \text{Sign}(t), & \text{se } p = 1. \end{cases}$$

Observe que $\phi_2(t) = t$. Se x é um vetor, consideramos que as funções $\text{sign}(x)$, $\text{Sign}(x)$ e $\phi_p(x)$ são aplicadas por entrada. Verifica-se então que $\partial_x(\|x\|_p^p) = p\phi_p(x)$, ou seja, $\nabla_x(\|x\|_p^p) = p\phi_p(x)$ para $p > 1$ e $\partial_x(\|x\|_1) = \text{Sign}(x)$.

O que buscamos agora é uma função $L_q : \mathbb{R}^{|V|} \rightarrow \mathbb{R}^{|V|}$ que tenha um papel semelhante ao de L para compor $R_p^q(x)$, ou seja, que tenha a propriedade $x^T L_q x = \sum_{ij \in E} |x_i - x_j|^q$. Note que denotamos $L_q x$ em vez de $L_q(x)$, não apenas para economizar notação, mas também para enfatizar a analogia entre L_q e L .

Definição 3.1. *Seja $G = (V, E)$ um grafo, $q \in [1, \infty)$ e $x \in \mathbb{R}^{|V|}$. O q -laplaciano L_q é a função definida por*

$$(L_q x)_i = \sum_{j:ij \in E} \phi_q(x_i - x_j).$$

Essa definição foi introduzida por Amghibech [2]. Abaixo, apresentamos algumas propriedades básicas do q -laplaciano, que já haviam sido mostradas em [6].

Proposição 3.2. *Seja L_q o q -laplaciano de $G = (V, E)$ e $c \in \mathbb{R}$. Então*

$$(a) \quad x^T L_q x = \sum_{ij \in E} |x_i - x_j|^q \geq 0;$$

$$(b) \quad L_q(x + c\mathbf{1}) = L_q x;$$

$$(c) \quad L_q c x = \phi(c) L_q x.$$

Demonstração. (a) Inicialmente temos que

$$x^T L_q x = \sum_{i \in V} x_i (L_q x)_i = \sum_{i \in V} \sum_{j: ij \in E} x_i \phi_q(x_i - x_j) = \sum_{i \in V} \sum_{j: ij \in E} x_i |x_i - x_j|^{q-1} \text{sign}(x_i - x_j).$$

Parcelas referentes a arestas ij tais que $x_i = x_j$ são nulas, e portanto podem ser livremente adicionadas ou retiradas da soma. Separamos então a soma conforme $x_i > x_j$ ($\text{sign}(x_i - x_j) = 1$) ou $x_i < x_j$ ($\text{sign}(x_i - x_j) = -1$):

$$\sum_{i \in V} \sum_{\substack{j: ij \in E \\ x_i > x_j}} x_i |x_i - x_j|^{q-1} - \sum_{i \in V} \sum_{\substack{j: ij \in E \\ x_i < x_j}} x_i |x_i - x_j|^{q-1} = \sum_{\substack{ij \in E \\ x_i > x_j}} x_i |x_i - x_j|^{q-1} - \sum_{\substack{ij \in E \\ x_i < x_j}} x_i |x_i - x_j|^{q-1}.$$

Invertendo o papel dos índices i e j no segundo termo, vale que $x_i > x_j$ (e logo $x_i - x_j = |x_i - x_j|$) para cada aresta ij . Logo

$$\sum_{ij \in E} x_i |x_i - x_j|^{q-1} - \sum_{ij \in E} x_j |x_i - x_j|^{q-1} = \sum_{ij \in E} |x_i - x_j| |x_i - x_j|^{q-1} = \sum_{ij \in E} |x_i - x_j|^q.$$

$$(b) (L_q x + c\mathbf{1})_i = \sum_{j: ij \in E} \phi_q(x_i + c - (x_j + c)) = \sum_{j: ij \in E} \phi_q(x_i - x_j) = (L_q x)_i.$$

$$(c) (L_q c x)_i = \sum_{j: ij \in E} \phi_q(c x_i - c x_j) = \sum_{j: ij \in E} \phi_q(c) \phi_q(x_i - x_j) = \phi_q(c) (L_q x)_i. \quad \square$$

Enfim, introduzimos a definição de p -autovalores e p -autovetores do q -laplaciano.

Definição 3.3. *Sejam $p, q \geq 1$. Um número real λ é dito um p -autovalor de $L_q = L_q(G)$ se existe um vetor real v tal que*

$$L_q v - \lambda \phi_p(v) \ni \mathbf{0}. \quad (3.2)$$

O vetor v é então dito um p -autovetor associado a λ .

Em outras palavras,

$$\exists \ell \in L_q v, u \in \phi_p(v) \text{ tais que } \ell = \lambda u. \quad (3.3)$$

Se $p, q > 1$, a Equação 3.2 torna-se

$$L_q v = \lambda \phi_p(v), \quad (3.4)$$

Em particular, para $p = q = 2$ temos a equação $Lv = \lambda v$ que caracteriza os autovalores e autovetores usuais. Essa definição é justificada pelo resultado a seguir.

Teorema 3.4. *O vetor $v \in \mathbb{R}^n$ é um ponto crítico de $R_p^q(x)$ se e somente se v é um p -autovetor de L_q associado ao p -autovalor $\lambda = \frac{v^T L_q v}{\|v\|_p^p}$.*

Demonstração. Seja v um ponto crítico de R_p^q . De $\partial_v R_p^q(v) \ni \mathbf{0}$ obtemos

$$\partial_v v^T L_q v \cdot \|v\|_p^q - v^T L_q v \cdot \partial_v \|v\|_p^q \ni \mathbf{0}.$$

Usando as regras de diferenciação do Lema D.2,

$$q L_q v \cdot \|v\|_p^q - v^T L_q v \cdot q \|v\|_p^{q-p} \phi_p(v) \ni \mathbf{0}.$$

Dividindo por $q \|v\|_p^q$ e rearranjando, obtemos

$$L_q v - \frac{v^T L_q v}{\|v\|_p^p} \phi_p(v) \ni \mathbf{0}.$$

ou seja, v é um p -autovetor de L_q com a propriedade enunciada. \square

Imitando o caso linear ($p = q = 2$), chamaremos a equação (3.2) de (p, q) -autoequação de L_q , e o par (λ, v) de p -autopar de L_q . Em particular, chamaremos o maior p -autovalor de L_q de raio p -espectral do q -laplaciano, o qual estudaremos no capítulo 4.

O resultado anterior, assim como o seguinte, já haviam sido demonstrados em [6] para $p = q > 1$.

Teorema 3.5. *O conjunto dos p -autovetores de L_q associados ao p -autovalor 0 é um espaço vetorial, cuja dimensão é igual ao número de componentes conexas de G , para qualquer $p \in [1, \infty]$.*

Demonstração. Mostraremos que $(0, v)$ é um p -autopar de L_q se e somente se v é constante em cada componente conexa, e daí segue o resultado. Se v é constante em cada componente conexa, então $v_i = v_j$ para cada $ij \in E$, e logo $(L_q v)_i = 0$, ou seja, $(0, v)$ é um p -autopar de L_q . Por outro lado, se $(0, v)$ é um p -autopar de L_q , pelo Teorema 3.4, devemos ter $\sum_{ij \in E} |v_i - v_j|^q = 0$. Sendo uma soma de termos positivos, necessariamente $v_i = v_j$ para cada $ij \in E$, logo v é constante em cada componente conexa. \square

Como consequência, $(0, \mathbf{1})$ sempre será um p -autopar de L_q . A seguir, enunciaremos uma propriedade importante de p -autovalores não-nulos, que já havia sido provada em [6] para $p > 1$.

Lema 3.6. *Para $p \geq 1$, seja v um p -autovetor associado a um p -autovalor não-nulo λ de L_q . Então*

$$\sum_{i \in V} \phi_p(v_i) \ni 0.$$

Demonstração. Para $p > 1$, como $\lambda \neq 0$, reescrevemos (3.2) como $\phi_p(v_i) = (L_q v)_i / \lambda$. Daí segue que

$$\sum_{i \in V} \phi_q(v_i) = \sum_{i \in V} \frac{(L_q v)_i}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i \in V} \sum_{j: ij \in E} \phi_p(v_i - v_j) = 0.$$

A última igualdade vale por simetria: para cada termo $v_i - v_j$ da soma, existe também o termo $v_j - v_i$. No caso geral, usando a Equação 3.3 e um raciocínio análogo ao anterior, obtemos

$$\sum_{i \in V} u_i = \frac{1}{\lambda} \sum_{i \in V} \ell_i \ni 0 \implies \sum_{i \in V} \phi_p(v_i) \ni 0.$$

\square

No caso linear $p = q = 2$, sabemos que L possui $n = |V|$ autovalores positivos. No caso de p -autovalores de L_q , a questão da multiplicidade não pode ser respondida tão diretamente, inclusive devido ao fato de que combinações lineares

de p -autovetores não são necessariamente p -autovetores. A proposição a seguir, entretanto, garante a existência ao menos do segundo menor p -autovalor de L_q .

Proposição 3.7. *O conjunto*

$$\mathcal{X} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_p = 1 \text{ e } \sum_{i \in V} \phi_p(x_i) = 0 \right\}$$

é compacto, e portanto R_p^q tem mínimo em \mathcal{X} .

Demonstração. Obviamente \mathcal{X} é limitado e a p -bola unitária é fechada. Resta então mostrar que o conjunto

$$\mathcal{Y} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum \phi_p(x_i) = 0 \right\} = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \in \mathbf{1}^T \partial \|x\|_p^p\}$$

é fechado. Seja $x_k \rightarrow x$ uma sequência convergente em \mathcal{Y} . Para $s_k \in \partial \|x_k\|_p^p$ temos que $\mathbf{1}^T s_k = 0$, logo $s_k \in \mathbf{1}^\perp$. Como $\mathbf{1}^\perp$ é fechado, existe uma subsequência convergente $s_{k_\ell} \rightarrow s$ com $s \in \mathbf{1}^\perp$. Pela definição de subdiferencial, para qualquer $y \in \mathbb{R}^n$, $\|y\|_p \geq \|x_{k_\ell}\|_p + s_{k_\ell}^T (y - x_{k_\ell})$, e por continuidade $\|y\|_p \geq \|x\|_p + s^T (y - x)$, ou seja, $s \in \partial \|x\|_p^p$ com $\mathbf{1}^T s = 0$, logo $s \in \mathcal{Y}$. \square

Essas propriedades nos permitirão definir uma generalização da *conectividade algébrica*, da qual trataremos no capítulo 5.

4 RAIIO p -ESPECTRAL q -LAPLACIANO

Aqui apresentamos o conceito de raio p -espectral q -laplaciano $\mu_p^q(G)$, relacionando os casos $p = 1$ e $p = \infty$ com parâmetros clássicos de Teoria dos Grafos, e caracterizando os grafos de dada ordem que maximizam $\mu_p^2(G)$ para $p > 2$, além de propriedades de $\mu_p^q(G)$ como função de p .

4.1 Introdução

O raio p -espectral q -laplaciano de um grafo é definido nos mesmos moldes do raio p -espectral da matriz de adjacência. Recordamos o quociente de Rayleigh generalizado

$$R_p^q(x) = \frac{\sum_{ij \in E} |x_i - x_j|^q}{\|x\|_p^q} = \left(\frac{\|Bx\|_q}{\|x\|_p} \right)^q,$$

onde B é a matriz de incidência de G relativa a uma orientação arbitrária.

Definição 4.1. *Seja G um grafo, $p \in [1, \infty]$ e $q \in [1, \infty)$. O raio p -espectral q -laplaciano de G , $\mu_p^q(G)$, é definido como*

$$\mu_p^q(G) = \max_{x \in \mathbb{R}^n} R_p^q(x) = \max_{\|x\|_p=1} \sum_{ij \in E} |x_i - x_j|^q. \quad (4.1)$$

Esse valor é bem definido, já que a p -esfera unitária é compacta e a função objetivo é contínua. Da definição conclui-se imediatamente que, se G tem n vértices, $\mu_p^q(K_n) \geq \mu_p^q(G) \geq \mu_p^q(H)$ para qualquer subgrafo gerador H de G . Como para grafos sem arestas o valor de R_p^q é sempre zero, assumiremos tacitamente que todos os grafos têm pelo menos uma aresta, e portanto pelo menos dois vértices, e também que não há vértices isolados, já que eles não contribuem para a soma em R_p^q .

Exemplo 4.2. O grafo K_2 nos oferece uma ideia inicial do comportamento de μ_p^q . Utilizando o método de Lagrange, pode-se verificar que o máximo é atingido

por qualquer vetor $x = (x_1, x_2)$ com $x_1 = -x_2 = 2^{-1/p}$, de modo que $\mu_p^q(K_2) = |x_1 - x_2|^q = |2 \cdot 2^{-1/p}|^q = 2^{q(1-1/p)}$ (ver gráfico para $q = 2$ na Figura 4.1).

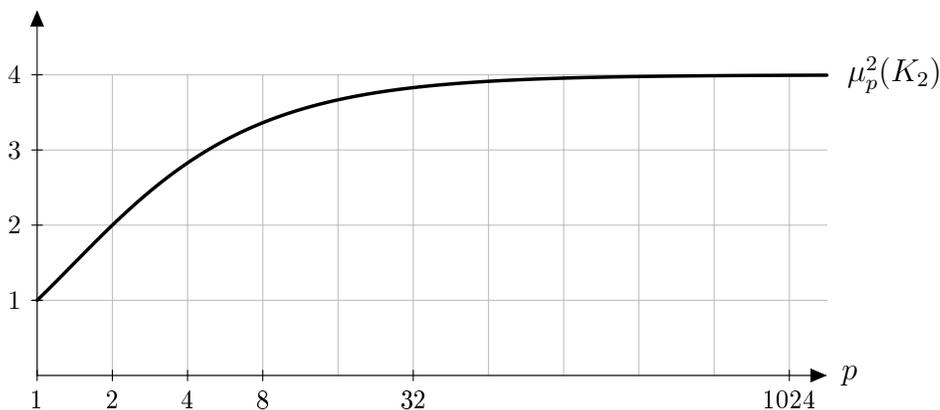


Figura 4.1: Gráfico de $\mu_p^2(K_2)$ em função de p (eixo horizontal em escala logarítmica).

Para problemas como o dado na definição de $\mu_p^q(G)$, é um fato conhecido da teoria da otimização que podemos restringir nossa busca pela solução aos pontos extremos do conjunto viável.

Corolário 4.3. *Seja f uma função convexa definida em um conjunto compacto convexo Ω e $\text{bd}(\Omega)$ sua fronteira. Então existem soluções do problema $\max_{x \in \text{bd}(\Omega)} f(x)$ que são pontos extremos de Ω .*

Demonstração. É uma consequência imediata do Teorema C.8. □

Considere então uma p -bola unitária em \mathbb{R}^n . Para $1 < p < \infty$, o resultado acima não ajuda a limitar o número de candidatos, pois todo ponto da p -bola unitária é extremo (Proposição C.7). Já para $p = 1$ ou $p = \infty$ temos um número limitado de candidatos a considerar, pois os pontos extremos da 1-bola são $\pm e_i, i = 1, \dots, n$, e os pontos extremos da ∞ -bola são $\{\pm 1\}^n$. Com base nisso, veremos a seguir que os casos $p = 1$ e $p = \infty$ podem ser prontamente interpretados em termos combinatórios.

Teorema 4.4. *Para qualquer $q \in [1, \infty)$, $\mu_1^q(G) = \Delta_G$.*

Demonstração. Pelo Corolário 4.3, precisamos considerar apenas os vetores $\pm e_i$. Temos então que $R_1^q(e_i) = \sum_{ij \in E} |\pm 1 - 0|^q = d_i$, logo o máximo é obtido para i com grau máximo. \square

Teorema 4.5. *Para qualquer $q \in [1, \infty)$, $\mu_\infty^q(G) = 2^q \maxcut(G)$.*

Demonstração. Pelo Corolário 4.3, precisamos considerar apenas os vetores $x \in \{\pm 1\}^n$, de modo que, para $P_x = \{i : x_i = 1\}$ e $N_x = \{i : x_i = -1\}$, temos

$$R_\infty^q(x) = \sum_{i \in P_x, j \in N_x} |1 - (-1)|^q = 2^q \text{cut}(P_x),$$

logo o máximo é atingido se $\text{cut}(P_x) = \maxcut(G)$. \square

4.2 Propriedades da função $p \rightarrow \mu_p^q(G)$

Mostraremos a seguir que a função $f_{G,q} : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f_{G,q}(p) = \mu_p^q(G),$$

é crescente (Lema 4.6), contínua (Lema 4.7) e converge quando $p \rightarrow \infty$ (Lema 4.8).

Lema 4.6. *Para um grafo G com pelo menos uma aresta, $f_{G,q}$ é estritamente crescente.*

Demonstração. Sejam $p' > p > 1$ e $x \in \mathbb{R}^n$ com $\|x\|_p = 1$ e $R_p^q(x) = \mu_p^q(G)$. Defina $x' = x/\|x\|_{p'}$. Como p -normas são não-crescentes em p (Proposição C.1), $\|x\|_{p'} \leq 1$, e logo

$$\mu_{p'}^q(G) \geq R_{p'}^q(x') = \frac{1}{\|x\|_{p'}^q} R_p^q(x) \geq R_p^q(x) = \mu_p^q(G). \quad (4.2)$$

Como G tem pelo menos uma aresta, então $\mu_p^q(G) \geq \mu_p^q(K_2) > 0$. Tem-se igualdade na equação (4.2) se e somente se $\|x\|_{p'}^q = \|x\|_p^q$, isto é, se $x = e_i$ para algum i (Lema

C.4). Argumentamos a seguir que, para $p > 1$, e_i nunca atinge o máximo, logo $\mu_{p'}^q(G) > \mu_p^q(G)$. Pela (p, q) -autoequação aplicada à coordenada i , como $x_i = 1$, tem-se que $d_i = \lambda$. Aplicada a um vizinho j de i , com $x_j = 0$, obtém-se que $\text{sign}(x_j - x_i) = 0$, o que implica que $x_j > 0$, contradição. Logo e_i não atinge o máximo, ou seja, $R_p^q(e_i) < \mu_p^q(G)$ para qualquer $i \in V$ e $p > 1$.

Finalmente, pelo Teorema 4.4, $\mu_1^q(G) = R_p^q(e_i)$ para i com grau máximo, logo $\mu_1^q(G) < \mu_p^q(G)$ para $p > 1$. Isso conclui a prova. \square

Lema 4.7. *Para qualquer grafo G , a função $f_{G,q}(p)$ é contínua.*

Demonstração. Sejam $p' > p \geq 1$ e $x' \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|x'\|_{p'} = 1$ e $R_{p'}^q(x') = \mu_{p'}^q(G)$. Pelo Lema C.4, $\|x'\|_p \leq n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}} \|x'\|_{p'}$. Defina $x = x'/\|x'\|_p$. Então

$$\mu_{p'}^q(G) = R_{p'}^q(x') = \|x'\|_p^q R_p^q(x) \leq n^{\frac{q}{p} - \frac{q}{p'}} \|x'\|_{p'}^q \mu_p^q(G) = n^{\frac{q}{p} - \frac{q}{p'}} \mu_p^q(G)$$

Pelo Lema 4.6, $\mu_{p'}^2(G) > \mu_p^2(G) > 0$. Como $|x_i - x_j| \leq 2$ para cada aresta ij e $|E| < n^2$, temos que $\mu_p^q(G) < 2^q n^2$. Logo

$$\begin{aligned} \mu_{p'}^q(G) - \mu_p^q(G) &\leq n^{\frac{q}{p} - \frac{q}{p'}} \mu_p^q(G) - \mu_p^q(G) \\ &< (n^{\frac{q}{p} - \frac{q}{p'}} - 1) \mu_p^q(G) \\ &< (n^{\frac{q}{p} - \frac{q}{p'}} - 1) 2^q n^2 \leq (n^{2q(p-p')} - 1) 2^q. \end{aligned}$$

Temos então que $\mu_{p'}^2(G) - \mu_p^2(G) < \epsilon$ se $p' - p < \frac{1}{2q} \log_n(1 + \epsilon/2^q)$. \square

Lema 4.8. *Para qualquer grafo G ,*

$$\lim_{p \rightarrow \infty} f_{G,q}(p) = \mu_\infty^q(G).$$

Demonstração. Para p dado, seja x tal que $\|x\|_p = 1$ e $R_p^q(x) = \mu_p^q(G)$. Pela prova do Lema 4.6, sabemos que $x \neq e_i$, logo $\max_i |x_i| < 1$. Defina $x' = x / \max_i |x_i|$. Podemos escolher $N = N(x') \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu_p^q(G) = R_p^q(x) = (\max_i |x_i|)^q R_p^q(x') > (\max_i |x_i|)^N \mu_\infty^q(G),$$

de modo que

$$0 < \mu_\infty^q(G) - \mu_p^q(G) < (1 - (\max_i |x_i|)^N) \mu_\infty^q(G).$$

Pode-se ver que $\max_i |x_i| \geq n^{-1/p}$. Concluimos a prova observando que

$$0 < \mu_\infty^q(G) - \mu_p^q(G) < (1 - n^{-N/p}) \mu_\infty^q(G),$$

e $n^{-N/p} \rightarrow 1$ quando $p \rightarrow \infty$. □

4.3 Caracterização das soluções para $p = 1$ e $p = \infty$

Para esses casos, embora os Teoremas 4.4 e 4.5 nos apontam os p -autovetores e alguns p -autovetores, resta determinar se p -autovetores de outras formas são possíveis.

4.3.1 O caso $p = 1$

Teorema 4.9. *Seja $G = (V, E)$ um grafo e x um 1-autovalor de L_q associado a $\mu_1^q(G)$, com $q > 1$. Se $\Delta_G \geq 2$, x é da forma $\pm e_i$ para $i \in V$ tal que $d_i = \Delta_G$. Se $\Delta_G = 1$, x é da forma $te_i - (1 - t)e_j$ para qualquer $ij \in E$ e $t \in [0, 1]$.*

Para a prova, precisaremos de alguns lemas.

Lema 4.10. *Seja G um grafo, $q > 1$ e $x \in \mathbb{R}^{|V|}$ tal que $\|x\|_1 = 1$ e $R_1^q(x) = \mu_1^q(G)$. Então no máximo uma entrada de x ou de $-x$ é positiva.*

Demonstração. Suponha que x ou $-x$ tem ao menos duas coordenadas positivas.

Sem perda de generalidade, sejam a, b tais que $x_a, x_b > 0$ e defina x' e x'' como

$$x'_k = \begin{cases} x_a + x_b & \text{se } k = a; \\ 0 & \text{se } k = b; \\ x_k & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad \text{e} \quad x''_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k = a; \\ x_a + x_b & \text{se } k = b; \\ x_k & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Considere as diferenças $\Delta' = R_1^q(x') - R_1^q(x)$ e $\Delta'' = R_1^q(x'') - R_1^q(x)$. Observe que

$$\begin{aligned} \Delta' = \sum_{\substack{ai \in E \\ i \neq b}} (|x_a + x_b - x_i|^q - |x_a - x_i|^q) &+ \sum_{\substack{bj \in E \\ j \neq a}} (|x_j|^q - |x_b - x_j|^q) \\ &+ d_{ab}(|x_a + x_b|^q - |x_a - x_b|^q) \end{aligned}$$

Para $q > 1$, a função $f(t) = |t|^q$ é estritamente convexa (Proposição D.4), e logo satisfaz a relação [4, Teorema 3.2.5, Corollary]

$$f(t) - f(u) > f'(u)(t - u).$$

Usando essa relação com $f(t) = |t|^q$ (logo $f'(u) = q\phi_q(u)$), $t = x_a + x_b - x_i$ e $u = x_a - x_i$, obtemos a seguinte cota para os termos da primeira soma:

$$|x_a + x_b - x_i|^q - |x_a - x_i|^q > q\phi_q(x_a - x_i)x_b.$$

Para a segunda soma, usamos novamente a relação com $t = x_j$ e $u = x_j - x_b$:

$$|x_j|^q - |x_b - x_j|^q > q\phi_q(x_j - x_b)x_b.$$

Para o último termo de Δ' , usamos $t = x_a + x_b$ e $u = x_a - x_b$ para obter

$$|x_a + x_b|^q - |x_a - x_b|^q > 2q\phi_q(x_a - x_b)x_b.$$

Com isso obtemos a seguinte cota:

$$\frac{\Delta'}{qx_b} > \sum_{\substack{ai \in E \\ i \neq b}} \phi_q(x_a - x_i) + \sum_{\substack{bj \in E \\ j \neq a}} \phi_q(x_j - x_b) + 2d_{ab}\phi(x_a - x_b).$$

Uma cota análoga para Δ''/qx_a é prontamente obtida invertendo os papéis de a e b :

$$\frac{\Delta''}{qx_a} > \sum_{\substack{bj \in E \\ j \neq a}} \phi_q(x_b - x_j) + \sum_{\substack{ai \in E \\ i \neq b}} \phi_q(x_i - x_a) + 2d_{ab}\phi(x_b - x_a).$$

Como $\phi_q(-t) = -\phi_q(t)$, concluimos que

$$\frac{\Delta'}{qx_b} + \frac{\Delta''}{qx_a} > 0,$$

logo pelo menos uma das diferenças Δ' e Δ'' é positiva. Mas isso contradiz a maximalidade de x . \square

Como a função $f(t) = |t|$ não é estritamente convexa, o raciocínio usado no Lema 4.10 não funciona para $q = 1$. Falaremos mais deste caso mais adiante.

Lema 4.11. *Seja G um grafo, $q > 1$ e $x \in \mathbb{R}^{|V|}$ tal que $\|x\|_1 = 1 = x_a + |x_b|$, com $x_a > 0 > x_b$ e $d_a \geq d_b$. Então $d_a = R_1^q(e_a) \geq R_1^q(x)$, com igualdade se e somente se $d_a = d_b = d_{ab}$.*

Demonstração. Note que $x_a^q + |x_b|^q < 1$, pois $|x_a| + |x_b| = 1$. Então

$$\begin{aligned} R_1^q(x) &= d_a x_a^q + d_b |x_b|^q + d_{ab}(1 - x_a^q - |x_b|^q) \\ &\leq d_a(x_a^q + |x_b|^q) + d_{ab}(1 - x_a^q - |x_b|^q) \leq d_a = R_1^q(e_a). \end{aligned}$$

A primeira e segunda desigualdades tornam-se igualdades se e somente se $d_a = d_b$ e $d_a = d_{ab}$, respectivamente. \square

Demonstração do Teorema 4.9. O Lema 4.10 implica que o vetor $x \in \mathbb{R}^n$ que atinge $\mu_1^q(G)$ satisfaz $\max\{|P_x|, |N_x|\} = 1$. Se $P_x = \emptyset$ ou $N_x = \emptyset$, estamos prontos, senão $|P_x| = |N_x| = 1$.

Se $\Delta_G \geq 2$, aplicamos o Lema 4.11. Se $\Delta_G = 1$, os vetores que satisfazem o Lema 4.10 são da forma $te_i - (1-t)e_j$ para $i, j \in V$, sendo que o máximo só é atingido se $ij \in E$ ou $t \in \{0, 1\}$. \square

O enunciado do Teorema 4.9, entretanto, não vale em geral para $q = 1$. Apresentamos na Figura 4.2 dois contraexemplos em que $\Delta_G \geq 2$ mas o vetor que atinge o máximo não é da forma $\pm e_i$. Note que em ambos os exemplos há mais de um vértice de grau máximo.

Lema 4.12. *Seja x um 1-autovetor de L_1 . Para cada $i \in V$, se $x_i \neq 0$, então i tem grau máximo.*

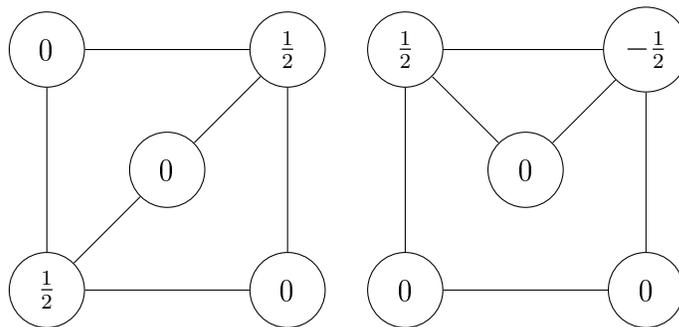


Figura 4.2: Contraexemplos ao enunciado do Teorema 4.9 no caso $q = 1$.

Demonstração. Suponha que $x_i > 0$. Usando $\lambda = \Delta_G$ e $\text{Sign}(x_i) = 1$ na autoequação (3.2) $(L_1 x)_i - \lambda \text{Sign}(x_i) \ni 0$, obtemos

$$\sum_{j:i j \in E} \text{Sign}(x_i - x_j) \ni \Delta_G.$$

Então i tem grau máximo, pois caso contrário não seria possível que a soma atingisse Δ_G . O argumento para o caso $x_i < 0$ é análogo. \square

Corolário 4.13. *O Teorema 4.9 vale também para $q = 1$ se G tiver apenas um vértice de grau máximo.*

4.3.2 O caso $p = \infty$

Assim, como para $p = 1$, para $p = \infty$, podemos caracterizar completamente os p -autovalores L_q se $q > 1$.

Teorema 4.14. *Sejam $q > 1$ e um grafo $G = (V, E)$. Os ∞ -autovalores associados a $\mu_\infty^q(G)$ são da forma $\mathbf{1}_P - \mathbf{1}_N$, onde $P \subseteq V$, $N = V \setminus P$ e (P, N) determinam um corte máximo em G .*

Demonstração. Seja x tal que $\|x\|_\infty = 1$. Suponha que haja $a \in V$ com $|x_a| < 1$.
Sejam $x', x'' \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$x'_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i = a; \\ x_i & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad \text{e} \quad x''_i = \begin{cases} -1 & \text{se } i = a; \\ x_i & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Considere as diferenças $\Delta' = R_\infty^q(x') - R_\infty^q(x)$ e $\Delta'' = R_\infty^q(x'') - R_\infty^q(x)$. Então

$$\Delta' = \sum_{ai \in E} (|1 - x_i|^q - |x_a - x_i|^q).$$

De maneira análoga ao que fizemos na prova do Lema 4.10, usamos a relação $f(t) - f(u) > f'(u)(t - u)$ com $f(t) = |t|^q$ (logo $f'(u) = q\phi(u)$), $t = 1 - x_i$ e $u = x_a - x_i$ para obter

$$|1 - x_i|^q - |x_a - x_i|^q > q\phi(x_a - x_i)(1 - x_a)$$

e logo

$$\Delta' > q(1 - x_a) \sum_{ai \in E} \phi(x_a - x_i).$$

Analogamente,

$$\Delta'' > q(1 + x_a) \sum_{ai \in E} \phi(x_i - x_a).$$

Concluimos que

$$\frac{\Delta'}{1 - x_a} + \frac{\Delta''}{1 + x_a} > 0.$$

Portanto, $\Delta' > 0$ ou $\Delta'' > 0$, contrariando a maximalidade de x . \square

O enunciado do Teorema 4.14 não vale para $q = 1$. Apresentamos na Figura 4.3 um contraexemplo. Note que o corte máximo é 5, logo $\mu_\infty^1(G) = 10$ pelo Teorema 4.5.

4.4 Resultados para grafos bipartidos

Como um corte máximo em K_n é dado por duas classes equilibradas quaisquer, temos como consequência imediata do Teorema 4.5 que $\mu_\infty^2(G) \leq$

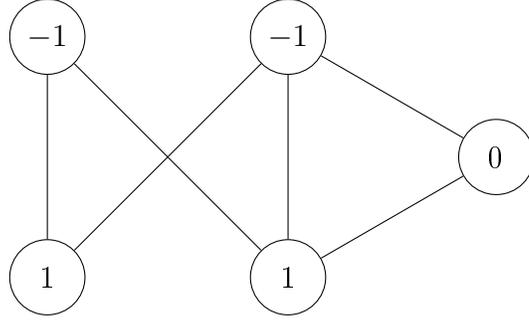


Figura 4.3: Contraexemplo do enunciado do Teorema 4.14 no caso $q = 1$.

$\mu_\infty^2(K_n) = n^2 - (n \bmod 2)$, com igualdade se e somente se G possui $K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil}$ como subgrafo. Nessa seção, provamos uma generalização desse resultado para $p > 2$:

Teorema 4.15. *Seja $G = (V, E)$ um grafo com $n = |V|$. Para $p > 2$,*

$$\mu_p^2(G) \leq n^{2-2/p}.$$

Se n é par, vale a igualdade se e somente se G contém $K_{n/2, n/2}$ como subgrafo.

Note que condição de igualdade nesse resultado não generaliza o caso $p = 2$, apesar de a cota também valer nesse caso. Para o raio espectral laplaciano usual, tem-se o seguinte resultado [19, Proposição 7.3.3]:

Lema 4.16. *Seja G um grafo com n vértices. Então $\mu_2^2(G) \leq n$, com igualdade se e somente se \bar{G} , o complemento de G , é desconexo.*

Note que \bar{G} ser desconexo equivale a G conter um grafo bipartido completo como subgrafo gerador. Entretanto, diferentemente do Teorema 4.15, não há necessidade de as classes de bipartição serem equilibradas.

Denotamos por $G = (S, T, E)$ um grafo bipartido com classes de vértices S e T e conjunto de arestas E . Inicialmente apresentamos três lemas auxiliares.

Lema 4.17. *Seja $G = (S, T, E)$ um grafo bipartido, e $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|x\|_p = 1$ e $R_p^q(x) = \mu_p^q(G)$. Então, temos que $P_x \subseteq S$ e $N_x \subseteq T$, ou que $P_x \subseteq T$ e $N_x \subseteq S$.*

Demonstração. Note que podemos inverter os sinais das entradas de x sem afetar sua viabilidade. Sem perda de generalidade, invertemos os sinais das entradas negativas em S e das entradas positivas em T . Assim, se houverem $x_i > 0 > x_j$ com i e j na mesma classe, substituímos, na soma em $R_p^q(x)$, termos da forma $\||x_i| - |x_j|\|^q$ por termos da forma $\||x_i| + |x_j|\|^q$, assim aumentando R_p^q . \square

Lema 4.18. *Sejam $G = (S, T, E)$ um grafo bipartido completo, $p > 2$, e $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|x\|_p = 1$ e $R_p^2 = \mu_p^2(G)$. Se i e j estão na mesma classe de bipartição, então $x_i = x_j$.*

Demonstração. Pelo Lema 4.17, podemos assumir, sem perda de generalidade, que os vértices em S e T têm, respectivamente, valores não-negativos e não-positivos. Suponha que existam $i, j \in S$ com $x_i \neq x_j$. Como G é bipartido completo, $R_p^2(x) = \sum_{k \in T} \sum_{i \in S} (x_i + |x_k|)^2$, com $|x_k| = -x_k$. Considere $x' \in \mathbb{R}^n$ tal que $x'_i = M_p(x_S)$ (M_p é a p -ésima *power mean*) se $i \in S$ e $x'_i = x_i$ se $i \in T$. Pode-se verificar que $\|x'\|_p = 1$. Afirmamos que $R_p^2(x') > R_p^2(x)$, em contradição com a maximalidade de x . Temos que

$$\begin{aligned}
\Delta &= R_p^2(x') - R_p^2(x) \\
&= \sum_{k \in T} \sum_{i \in S} [(M_p(x_S) + |x_k|)^2 - (x_i + |x_k|)^2] \\
&= \sum_{k \in T} \sum_{i \in S} [M_p^2(x_S) + 2M_p(x_S)|x_k| - x_i^2 - 2x_i|x_k|] \\
&= \sum_{k \in T} \left[\sum_{i \in S} M_p^2(x_S) + \sum_{i \in S} 2M_p(x_S)|x_k| - \sum_{i \in S} x_i^2 - 2 \sum_{i \in S} x_i|x_k| \right] \\
&= \sum_{k \in T} \left[|S|M_p^2(x_S) + 2|S|M_p(x_S)|x_k| - \sum_{i \in S} x_i^2 - 2|x_k| \sum_{i \in S} x_i \right].
\end{aligned}$$

Fixando k e usando a *Power Mean Inequality* (Teorema C.2), obtemos a desigualdade

$$\begin{aligned}
|S|M_p^2(x_S) + 2|S|M_p(x_S)|x_k| &> |S|M_2^2(x_S) + 2|S|M_1(x_S)|x_k| \\
&= \sum_{i \in S} x_i^2 + 2|x_k| \sum_{i \in S} x_i,
\end{aligned}$$

que implica que $\Delta > 0$. □

Esse resultado nos permite obter uma fórmula para grafos bipartidos completos.

Lema 4.19. *Seja $G = (S, T, E)$ um grafo bipartido completo. Para $p > 2$,*

$$\mu_p^2(G) = |S||T|(a + b)^2,$$

onde $a = \left(|S| + |T| \left(\frac{|S|}{|T|} \right)^{\frac{p}{p-1}} \right)^{-1/p}$, $b = \left(\frac{|S|}{|T|} \right)^{\frac{1}{p-1}}$. Em particular,

$$\mu_p^2(K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}) = n^{2-2/p}.$$

Demonstração. Pelo Lema 4.18, podemos assumir que $x_i = a$ se $i \in S$ e $x_i = -b$ se $i \in T$, para certos $a, b > 0$. Temos que $\mu_p^2(G) = \lambda = |S||T|(a + b)^2$ e aplicando a $(p, 2)$ -autoequação a um vértice qualquer de cada classe obtemos $|T|(a + b) = \lambda a^{p-1}$, $|S|(a + b) = \lambda b^{p-1}$. Resolvendo para a e b , obtêm-se os valores enunciados. □

Finalmente podemos provar o Teorema 4.15. Para conveniência, repetiremos o enunciado. Seja $G = (V, E)$ um grafo com $n = |V|$. Para $p > 2$,

$$\mu_p^2(G) \leq n^{2-2/p}.$$

Se n é par, vale a igualdade se e somente se G contém $K_{n/2, n/2}$ como subgrafo.

Demonstração do Teorema 4.15. Como $\mu_2^2(K_n) = n$, a cota $\mu_p^2(G) \leq n^{2-2/p}$ é uma consequência direta do Lema C.5. Para a condição “se”, pela Proposição 4.19, pode-se verificar que $\mu_p^2(K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}) = n^{2-2/p}$. Além disso, se $K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}} \subseteq G$, obviamente $\mu_p^2(G) = n^{2-2/p}$.

Para a condição “somente se”, seja $G = (V, E)$ um grafo e $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $R_p^q(x) = \mu_p^2(G) = n^{2-2/p}$. Pelo Lema C.5, isso implica que $\mu_2^2(G) = n$. Também pelo Lema C.5, como $p > 2$, devemos ter $|x_i| = |x_j|$ para $i, j \in V$. Observe que $V = P_x \cup N_x$. Como $(x_i - x_j)^2 = 0$ se i e j estão na mesma classe (P_x ou N_x),

temos que $\mu_p^2(G) = \sum_{i \in P_x} \sum_{j \in N_x} (x_i - x_j)^2$. Isso implica que $ij \in E$ para todo $i \in P_x$ e $j \in N_x$, caso contrário o valor de $R_p^q(x)$ calculado para o grafo G' obtido pela adição da aresta ij a G seria maior que o valor de $R_p^q(x)$ calculado em G , que é $n^{2-2/p}$, contradizendo o Lema C.5.

Resta mostrar que esse corte é equilibrado. A fórmula do Lema 4.19 assegura que $|x_i| = |x_j|$ para todos os vértices i, j se e somente se $|P_x| = |N_x|$, e portanto $|P_x| = |N_x| = n/2$. \square

Observe que o “somente se” não vale para $p = 2$, pelo Lema 4.16. Ainda que conjecturemos que a condição de igualdade também valha para n ímpar (obviamente com uma cota diferente, dada pelo Lema 4.19), o raciocínio usado na prova não funciona nesse caso, porque o grafo bipartido completo equilibrado não atinge a cota do Lema C.5.

4.5 O limite $q \rightarrow \infty$

Proposição 4.20. *Para qualquer grafo G com pelo menos uma aresta,*

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \mu_p^q(G) = \begin{cases} \Delta_G, & \text{se } p = 1 \\ \infty, & \text{se } p > 1. \end{cases}$$

Demonstração. Para o caso $p = 1$, a prova é idêntica à do Teorema 4.4, considerando o limite $q \rightarrow \infty$. Para $p > 1$, utilizando a fórmula para K_2 (Exemplo 4.2),

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \mu_p^q(G) \geq \lim_{q \rightarrow \infty} \mu_p^q(K_2) = \lim_{q \rightarrow \infty} 2^{q(1-1/p)} = \infty.$$

\square

Lembramos que R_p^q pode ser visto como uma razão entre normas, elevada à q -ésima potência. Se desconsiderarmos a potência e tomarmos o limite

$q \rightarrow \infty$, obtemos a seguinte quantidade:

$$\tilde{\mu}_p^\infty(G) = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|Bx\|_\infty}{\|x\|_p} = \max_{\|x\|_p=1} \max_{ij \in E} |x_i - x_j|. \quad (4.3)$$

Não é difícil concluir que $\tilde{\mu}_p^\infty(G) = 2^{(1-1/p)}$ para qualquer grafo G com pelo menos uma aresta, o que não é um resultado muito animador. Entretanto, esse tipo de análise será útil e trará alguns resultados mais interessantes nos próximos capítulos.

5 CONECTIVIDADE (p, q) -ALGÉBRICA

Vimos na Seção 2.3 algumas propriedades do segundo menor autovalor de L , chamado de conectividade algébrica de G e denotada por $a(G)$. Trataremos aqui do segundo menor p -autovalor de L_q , que chamaremos de conectividade (p, q) -algébrica, $a_p^q(G)$.

5.1 Introdução

Inspirados na conectividade algébrica de G *conectividade algébrica*, $a(G)$, da qual falamos na Seção 2.3, apresentamos a definição a seguir.

Definição 5.1. *Para $p \in [1, \infty]$, a conectividade (p, q) -algébrica de G , $a_p^q(G)$, é o segundo menor p -autovalor de L_q .*

Nesta seção mostraremos algumas propriedades básicas deste parâmetro, bem como diferentes formulações para sua obtenção. A partir disso, nas seções seguintes, obtemos resultados estruturais sobre as soluções ótimas das formulações para diversas combinações de p e q , sendo que, em vários casos, mostramos que a_p^q pode ser interpretado em termos de parâmetros clássicos de Teoria de Grafos, em particular a constante de Cheeger. Também são fornecidas cotas e resultados exatos para algumas classes de grafos.

Na Seção 5.2, mostramos que $a_\infty^2(G)$ pode ser interpretado em termos do número de florestas geradoras de G , e também em termos de resistência equivalente de um circuito elétrico (ver Teorema 5.12). A seguir, na Seção 5.3, exploramos a estrutura dos 1-autovetores associados a $a_1^2(G)$. Já na Seção 5.4 mostramos a equivalência entre $a_1^1(G)$ e a constante de Cheeger h_G . Na Seção 5.5, exploramos o limite de $a_p^q(G)$ quando $q \rightarrow \infty$. Por fim, na Seção 5.6, mudamos o ponto de vista e olhamos para $a_p^q(G)$ quando G está fixo e p é tomado como variável.

A obtenção de $a_p^q(G)$ pode ser formulada de várias maneiras. Usando a condição do Lema 3.6, temos a formulação

$$a_p^q(G) = \min_{\substack{\sum_i \phi_p(x_i) \ni 0 \\ \|x\|_p = 1}} \sum_{ij \in E} |x_i - x_j|^q. \quad (5.1)$$

Algumas propriedades básicas de a_p^q são dadas a seguir.

Proposição 5.2. *Seja G um grafo.*

- (a) $a_p^q(G)$ está bem definido.
- (b) G é conexo se e somente $a_p^q(G)$ é positivo.
- (c) Para qualquer $m \in \mathbb{R}^n$,

$$a_p^q(G) = \min_{\substack{\sum_i \phi_p(x_i - m) \ni 0 \\ \|x - m\mathbf{1}\|_p = 1}} \sum_{ij \in E} |x_i - x_j|^q. \quad (5.2)$$

Demonstração. Os itens (a), (b) e (c) são consequência, respectivamente, da Proposição 3.7, do Teorema 3.5 e do item (b) da Proposição 3.2. \square

Partindo da formulação da Equação (5.2), também podemos expressar $a_p^q(G)$ em termos dos conceitos de p -média e p -desvio padrão ($m_p(x)$ e $\sigma_p(x)$), que generalizam os conceitos usuais de média e desvio padrão (ver Apêndice, Seção C.3 para mais detalhes). Fixemos $m \in R$. De fato, a condição $\sum_i \phi_p(x_i - m) = 0$ é equivalente a $m = m_p(x)$ pela Proposição C.10 e, nesse caso, $\|x - m\mathbf{1}\|_p = \sigma_p(x)$. Assim obtemos

$$a_p^q(G) = \min_{\substack{m_p(x) = m \\ \sigma_p(x) = 1}} \sum_{ij \in E} |x_i - x_j|^q. \quad (5.3)$$

5.2 O caso $q = 2$, $p = \infty$

A p -média e o p -desvio padrão, quando $p = \infty$, correspondem, respectivamente, à média e à meia diferença entre seus extremos (Proposição C.12):

$$m_\infty(x) = \frac{\max_i x_i + \min_i x_i}{2} \quad \text{and} \quad \sigma_\infty(x) = \frac{\max_i x_i - \min_i x_i}{2}$$

Reescrevemos a equação (5.3) como

$$a_\infty^q(G) = \min_{\substack{m_\infty(x)=m \\ \sigma_\infty(x)=1}} x^T L_q x, \quad (5.4)$$

e em particular para $q = 2$

$$a_\infty^2(G) = \min_{\substack{m_\infty(x)=m \\ \sigma_\infty(x)=1}} x^T L x, \quad (5.5)$$

para um $m \in \mathbb{R}$ qualquer, de modo que é suficiente, em várias proposições que seguem, prová-las apenas para um valor de m convenientemente fixado (escolhas típicas são $m = 0$ e $m = 1$). Note que um vetor viável em (5.4) deve ter necessariamente duas entradas u, v tais que $x_u = \max_i x_i$, $x_v = \min_i x_i$, e $x_u - x_v = 2$ (por exemplo, $x_u = 1 = -x_v$ se $m = 0$, ou $x_u = 2$ e $x_v = 0$ se $m = 1$). A seguir argumentaremos que, se fixarmos tais entradas, podemos relaxar as restrições.

Proposição 5.3. *Para $q > 1$ e $m \in \mathbb{R}$,*

$$a_\infty^q(G) = \min_{\substack{i,j \in V \\ i \neq j}} \min_{\substack{x_i=m+1 \\ x_j=m-1}} x^T L_q x. \quad (5.6)$$

Demonstração. Fixe $m = 0$ em (5.4). Sejam $A = \{x \in \mathbb{R}^n : m_\infty(x) = 0, \sigma_\infty(x) = 1\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists i, j \in V, x_i = 1 = -x_j\}$. Obviamente $A \subseteq B$, logo $\min_{x \in B} x^T L_q x \leq \min_{x \in A} x^T L_q x$. Seja $v \in B$ (note que $\sigma_\infty(v) \geq 1$) e considere $u = \frac{v - m_\infty(v)\mathbf{1}}{\sigma_\infty(v)}$. Observe que $u \in A$ e

$$u^T L_q u = \frac{v^T L_q v}{\sigma_\infty^2(v)} \leq v^T L_q v.$$

Portanto $\min_{x \in A} x^T L_q x \leq \min_{x \in B} x^T L_q x$, e logo vale a igualdade. \square

Observe que as soluções de (5.6) são as mesmas de (5.1) se $m = 0$.

Corolário 5.4. $a_\infty^2(G)$ pode ser obtido em tempo polinomial.

Demonstração. Para $q = 2$, podemos olhar para a Equação (5.6) como o mínimo de um conjunto de $\binom{n}{2}$ problemas quadráticos convexos com restrições lineares, sendo que cada um pode ser resolvido em tempo polinomial ([52, Teorema 4.1]). No Teorema 5.12 mostra-se também como obter $a_\infty^2(G)$ resolvendo $\binom{n}{2}$ sistemas lineares. \square

As proposições seguintes mostram algumas propriedades da solução.

Proposição 5.5. *Seja G um grafo conexo e $x \in \mathbb{R}^n$ uma solução ótima de (5.6). Então x possui exatamente uma entrada x_a tal que $x_a = m + 1$, e exatamente uma entrada x_b tal que $x_b = m - 1$.*

Demonstração. Fixe $m = 0$ em (5.4). Necessariamente $x_a = 1 = -x_b$ para algum a e b . Pelo Lema 5.3, $\sigma_\infty(x) = 1$, logo $-1 \leq x_i \leq 1$ para cada $i \in V$. Suponha que $x_c = 1$ para algum $c \neq a$. Note que é possível escolher a e c com a propriedade de que c tem um vizinho i tal que $x_i < 1$. Para $\epsilon \in (0, 1)$ seja $x' = x - \epsilon e_c$. Pode-se verificar que

$$x^T Lx - x'^T Lx' = 2\epsilon \sum_{k:kc \in E} \left[(1 - x_k) - \frac{\epsilon}{2} \right].$$

Observe que $1 - x_k \geq 0$ para cada vizinho k de c e em especial $1 - x_i > 0$, e como ϵ pode ser tomado arbitrariamente pequeno, concluímos que $x'^T Lx' < x^T Lx$, contrariando a minimalidade de x . \square

Isso motiva a seguinte definição.

Definição 5.6. *Seja G um grafo conexo e x uma solução ótima de (5.6). Os vértices líderes de G (em x) são os vértices (únicos) i, j tais que $x_i = m + 1$ e $x_j = m - 1$.*

Nos referiremos ao mínimo mais interno da Equação (5.6),

$$s(i, j) = \min_{\substack{x_i=m+1 \\ x_j=m-1}} x^T L_q x, \quad (5.7)$$

como o *subproblema* que supõe i e j como vértices líderes. Observamos que uma solução para $s(i, j)$ pode não satisfazer a Proposição 5.5 se não for uma solução global. Por exemplo, considere o grafo $P_4 = abcde$ (Figura 5.1) e fixe $m = 0$. Se escolhermos $x_b = 1 = -x_d$, então para fim de minização obviamente devemos tomar $x_e = -1$, de modo que a aresta de não contribua para a soma, e obtemos $s(b, d) = 4/3$. Entretanto, a solução global é $x = (1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -1)^T$, e $a_\infty^2(P_4) = 1$ (ver o Exemplo 5.9 a seguir para uma explicação precisa desse resultado).

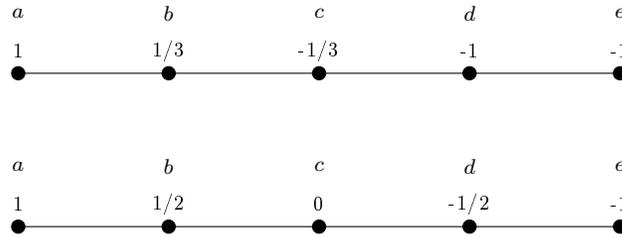


Figura 5.1: Solução de subproblema, mas não global (acima) e solução global (abaixo) de (5.13) para P_4 .

Proposição 5.7. *Seja G um grafo conexo e x uma solução ótima de (5.6). Se i não é um vértice líder, então*

$$x_i = \frac{1}{d_i} \sum_{j:ij \in E} x_j.$$

Em outras palavras, o valor de um vértice não-líder é a média do valor de seus vizinhos.

Demonstração. Fixe $m = 0$. Seja \hat{x} um ponto que satisfaz as condições KKT do problema $\min_{x_a=1=-x_b} x^T Lx$. Então $2L\hat{x} + \lambda_a e_a + \lambda_b e_b = 0$ para multiplicadores de Lagrange λ_a, λ_b , e em particular $0 = (L\hat{x})_i = d_i x_i - \sum_{j:ij \in E} x_j$ para $i \notin \{a, b\}$. \square

Se G possui pontos de articulação, podemos excluí-los de nossa busca pelos vértices líderes.

Proposição 5.8. *Um vértice líder não é um ponto de articulação.*

Demonstração. Seja G um grafo com um ponto de articulação v , e G_1, G_2 duas componentes obtidas removendo-se v . Fixando $m = 0$ em (5.4) e tomando algum $u \in G_2$, sem perda de generalidade, suponha que a solução ótima é a solução do subproblema $s(v, u)$, ou seja, $x_v = 1 = -x_u$. Lembramos que $x^T Lx = \sum_{ij \in E} (x_i - x_j)^2$, ou seja, a cada aresta ij associamos um termo não-negativo $(x_i - x_j)^2$. Fazendo $x_k = 1$ para cada $k \in G_1$, tornamos nulos os termos relativos a arestas dentro de G_1 e entre G_1 e v , e esta estratégia é ótima para fins de minimização. Mas essa solução contradiz a unicidade dos vértices líderes (Proposição 5.5). \square

Exemplo 5.9. Caminhos e árvores.

O cálculo de $a_\infty^2(G)$ e de um ∞ -autovetor associado em caminhos e árvores é simples, mas fornece uma visualização da solução do problema antes de partirmos para a solução para grafos em geral. Seja $P_\ell = 1 \ 2 \ \dots \ \ell + 1$ um caminho com ℓ arestas. Pela Proposição 5.8, os vértices líderes devem ser 1 e $\ell + 1$, já que qualquer outro vértice é um ponto de articulação. Pela Proposição 5.7, para $k = 2, \dots, \ell$, vemos que $x_k - x_{k-1} = x_{k+1} - x_k$, ou seja, $x_1, \dots, x_{\ell+1}$ é uma progressão aritmética de razão $2/\ell$. Logo

$$a_\infty^2(P_\ell) = \ell \left(\frac{2}{\ell} \right)^2 = \frac{4}{\ell} \quad (5.8)$$

O raciocínio se estende para árvores em geral. Os vértices líderes devem ser folhas de T , e os demais vértices têm propriedades dadas pela proposição a seguir.

Proposição 5.10. *Seja T uma árvore, e considere o caminho P entre duas folhas u, v de T . Então uma solução x de $s(u, v)$ satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i) *Se $i \in V(P) \setminus \{u, v\}$, x_i é a média de de seus vizinhos em P .*

(ii) Se $i \in V(T) \setminus V(P)$, $x_i = x_k$, onde k é o vértice em P mais próximo de i .

Demonstração. Suponha que x não satisfaz a propriedade (i) acima para algum i . Considere o subgrafo T_i induzido por i e pelos vértices fora de P para os quais i é vértice mais próximo em P . Seja então o vetor x' tal que, sendo a e b os vizinhos de i em P ,

$$x'_k = \begin{cases} \frac{x_a + x_b}{2} & \text{se } i \in T_i; \\ x_k & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Considere agora a diferença $\Delta = x^T Lx - x'^T Lx'$:

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum_{kj \in E(T_i)} [(x_k - x_j)^2 - \underbrace{(x'_k - x'_j)^2}_{=0}] \\ &\quad + (x_a - x_i)^2 - (x'_a - x'_i)^2 + (x_b - x_i)^2 - (x'_b - x'_i)^2 \\ &= \sum_{kj \in E(T_i)} (x_k - x_j)^2 \\ &\quad + (x_a - x_i)^2 - \frac{(x_a - x_b)^2}{2} + (x_b - x_i)^2 \end{aligned}$$

Pode-se verificar que a função $f(x_i) = (x_a - x_i)^2 + (x_b - x_i)^2$ tem mínimo global $\frac{(x_a - x_b)^2}{2}$ em $x_i = \frac{x_a + x_b}{2}$. Como x não satisfaz (i), a segunda linha da soma é positiva, e portanto $\Delta > 0$, contradizendo a minimalidade de x .

Analogamente, se x não satisfizer (ii), podemos fazer a mesma diferença entre x' e x , e neste caso a primeira linha da soma será positiva, e a segunda será não-negativa. \square

Corolário 5.11. *Seja T uma árvore. Então $a_\infty^2(T) = \frac{4}{\text{diam}(T)}$.*

Demonstração. Para cada par (u, v) de folhas de T , seja o caminho P_{uv} entre elas. Pela proposição 5.10, as arestas de T fora de P não contribuem para a função objetivo, de forma que $s(u, v) = a_\infty^2(P_{uv}) = 4/|E(P_{uv})|$ por (5.8). O mínimo global é atingido quando $|E(P_{uv})|$ é máximo, ou seja, $|E(P_{uv})| = \text{diam}(T)$. \square

Na Figura 5.2 vemos um exemplo de como fica a solução em uma árvore. O número próximo a cada vértice i é seu valor (x_i), e o caminho destacado é um diâmetro.

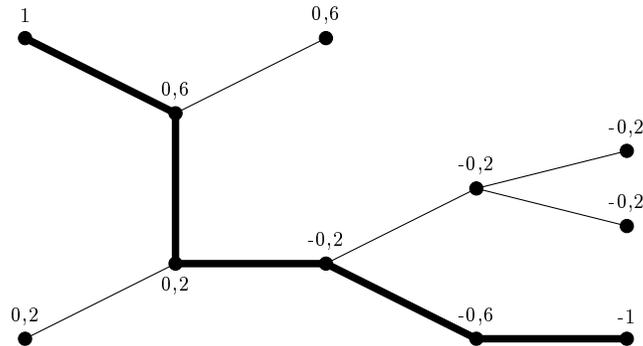


Figura 5.2: Uma solução ótima de (5.6) para uma árvore T , com $a_\infty^2(T) = 0,8$.

5.2.1 Interpretação combinatória e física de a_∞^2

O valor de $a_\infty^2(G)$ pode ser interpretado em termos do número de florestas geradoras de G . Para $i, j \in V$, denotamos por $\mathcal{T}_G(i, j)$ o número de florestas geradoras de G com exatamente duas árvores T_i, T_j com $i \in V(T_i)$ e $j \in V(T_j)$, e por \mathcal{T}_G o número de árvores geradoras de G .

Além disso, $a_\infty^2(G)$ tem relação direta com o conceito de *distância resistiva* (“resistance distance”), definida por Klein e Randić [38]. Nesse contexto, G representa uma malha elétrica em que cada aresta possui um resistor de 1 ohm. A distância resistiva Ω_{ij} entre os vértices i e j é definida como a resistência equivalente do circuito ao se aplicar uma diferença de potencial entre os pontos i e j (por exemplo, conectando i e j aos polos de uma bateria), como exemplificado na Figura 5.3.

Estas relações estão reunidas no teorema a seguir.

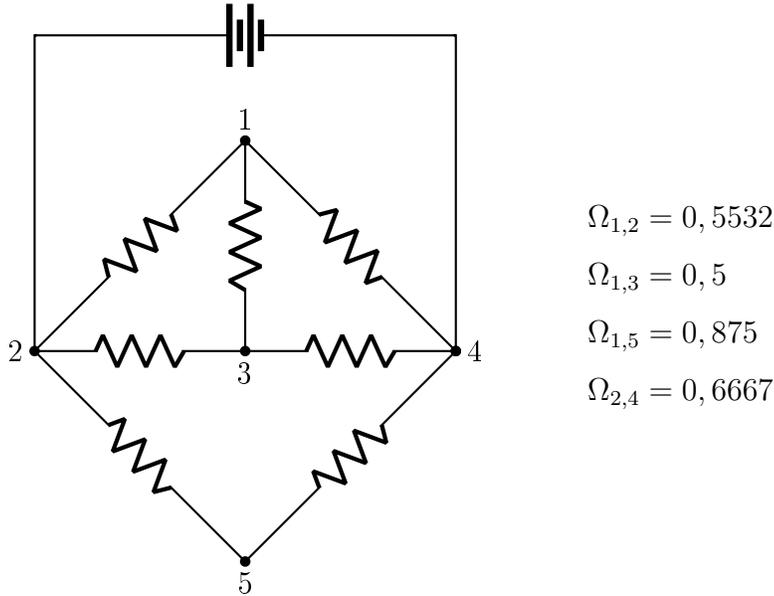


Figura 5.3: Exemplo de distância resistiva: $\Omega_{2,4}$ é a resistência equivalente quando os polos de uma bateria são conectados nos pontos 2 e 4.

Teorema 5.12. *Seja G um grafo conexo. Então*

$$a_{\infty}^2(G) = \frac{4\mathcal{T}_G}{\max_{i,j \in V} \mathcal{T}_G(i,j)} = \frac{4}{\max_{i,j \in V} \Omega_{ij}}.$$

A prova da primeira e da segunda igualdades são dadas, respectivamente, pelo Lema 5.15 e pelo Corolário 5.18. Além das notações acima para florestas geradores e distância resistiva, é sugerido ao leitor revisar a notação para matrizes contida no final da introdução. Dessa forma, o Teorema Matriz-Árvore, do qual já falamos na Seção 2.3, pode ser reescrito como segue.

Teorema 5.13 (Matriz-Árvore). *Seja $G = (V, E)$ um grafo com matriz laplaciana L . Então $\det L_{\bar{i}} = \mathcal{T}_G$ para qualquer $i \in V$.*

Esse resultado foi generalizado por Chaiken [14], e trata de grafos que podem ser dirigidos e com pesos, e os conjuntos de linhas e colunas a serem removidas podem ser diferentes. Enunciaremos aqui o caso especial adequado às nossas necessidades.

Teorema 5.14 (Teorema Matriz Árvore para todos os menores, caso $U = W$ e pesos unitários). *Seja $G = (V, E)$ um grafo com matriz laplaciana L e $U \subset V$. Então*

$$\det L_{\bar{U}} = |\mathcal{F}|,$$

onde \mathcal{F} é conjunto de florestas F com as seguintes propriedades:

- (i) F contém exatamente $|U|$ árvores;
- (ii) Cada árvore em F contém exatamente um vértice em U .

Então, para $\alpha = \{i, j\} \subset V$,

$$\det L_{\bar{\alpha}} = \mathcal{T}_G(i, j). \quad (5.9)$$

Lema 5.15. *Seja G um grafo conexo. Então $a_{\infty}^2(G) = \frac{4\mathcal{T}_G}{\max_{i,j \in V} \mathcal{T}_G(i, j)}$.*

Demonstração. Fixe $m = 1$ em (5.6):

$$a_{\infty}^2(G) = \min_{\substack{i,j \in V \\ i \neq j}} \min_{\substack{x_i=0 \\ x_j=2}} x^T Lx. \quad (5.10)$$

Como $x_i = 0$, então $x^T Lx = x_{\bar{i}}^T L_{\bar{i}} x_{\bar{i}}$. Podemos então reescrever o mínimo mais interno como $\min_{x_j=2} x_{\bar{i}}^T L_{\bar{i}} x_{\bar{i}}$, cuja condição de otimalidade de Lagrange é $2L_{\bar{i}} x_{\bar{i}} = \lambda e_j$, e multiplicando pela esquerda por $x_{\bar{i}}^T$ obtemos $\lambda = x^T Lx$. Como G é conexo, $\det L_{\bar{i}} = \mathcal{T}_G > 0$ pelo Teorema 5.13, logo $L_{\bar{i}}$ é invertível e $2x_{\bar{i}} = \lambda y$, onde $y = L_{\bar{i}}^{-1} e_j$. Aplicando a Regra de Cramer à equação $L_{\bar{i}} y = e_j$ e a Equação (5.9), obtemos

$$y_j = (L_{\bar{i}}^{-1})_{jj} = \frac{\det L_{\bar{\alpha}}}{\det L_{\bar{i}}} = \frac{\mathcal{T}_G(i, j)}{\mathcal{T}_G}.$$

Como $2x_j = 4 = \lambda y_j$, temos que $x^T Lx = \lambda = \frac{4}{y_j} = \frac{4\mathcal{T}_G}{\mathcal{T}_G(i, j)}$. Como o numerador é fixo para G dado, o mínimo é obtido maximizando-se o denominador.

□

Exemplo 5.16. Ciclo C_n .

Seja C_n um ciclo com n vértices rotulados de 0 até $n - 1$. Para obter uma árvore geradora de C_n , basta retirar uma aresta; como há n formas de fazer isso, temos que $\mathcal{T}_{C_n} = n$. Dados $i, j \in V$, para obter uma floresta geradora com exatamente 2 componentes, uma contendo i e a outra j , e devemos retirar duas arestas de C_n . Fixando $j = 0$, para cada i temos i escolhas de aresta, em um sentido, e $n - i$ escolhas no outro. Portanto, $\mathcal{T}_{C_n}(i, j) = i(n - i)$, com máximo em $i = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Conclui-se que

$$a_\infty^2(C_n) = \frac{16}{n - (n \bmod 2)\frac{1}{n}}.$$

Resta mostrar a conexão de $a_\infty^2(G)$ com as distâncias resistivas em G . O seguinte resultado foi provado por Bapat et. al. [3]:

Teorema 5.17. *Seja $\alpha = \{i, j\} \subset V$. Então $\Omega_{ij} = \frac{\det L_{\bar{\alpha}}}{\det L_{\bar{i}}}$.*

Então como consequência imediata do Lema 5.15 temos:

Corolário 5.18. *Seja G um grafo conexo. Então $a_\infty^2(G) = \frac{4}{\max_{i,j \in V} \Omega_{ij}}$.*

5.2.2 Cotas para $a_\infty^2(G)$

Fixe $m = 0$ em (5.6), com $x_i = -x_j = 1$ para certos i, j . A condição de otimalidade do subproblema $\min_{x_i=1=-x_j} x^T Lx$ pode ser escrita como

$$Lx = \begin{bmatrix} d_i & -d_{ij} & -v_i^T \\ -d_{ij} & d_j & -v_j^T \\ -v_i & -v_j & L_{\bar{\alpha}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ x_{\bar{\alpha}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ -\lambda \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_i + d_{ij} - v_i^T x_{\bar{\alpha}} \\ -d_j - d_{ij} - v_j^T x_{\bar{\alpha}} \\ -v_i + v_j + L_{\bar{\alpha}} x_{\bar{\alpha}} \end{bmatrix}$$

onde $\alpha = \{i, j\}$ e $v_k = L_{\bar{\alpha},k}$ para $k \in \alpha$. Segue que $L_{\bar{\alpha}} x_{\bar{\alpha}} + (v_j - v_i) = 0$. Se G é conexo, $L_{\bar{\alpha}}$ é invertível pelo Teorema 5.13 (Matriz-Árvore) e

$$x_{\bar{\alpha}} = L_{\bar{\alpha}}^{-1}(v_i - v_j). \quad (5.11)$$

A solução ótima também deve satisfazer a condição

$$d_i - v_i^T x_{\bar{\alpha}} = d_j - v_j^T x_{\bar{\alpha}} (= \lambda). \quad (5.12)$$

Substituindo (5.11) na função objetivo, obtemos

$$x^T Lx = x_{\bar{\alpha}}^T Lx_{\bar{\alpha}} = d_i + d_j + 2d_{ij} - (v_i - v_j)^T L_{\bar{\alpha}}^{-1}(v_i - v_j),$$

concluindo que

$$a_{\infty}^2(G) = \min_{\substack{i,j \in V \\ i \neq j}} \{d_i + d_j + 2d_{ij} - (v_i - v_j)^T L_{\bar{\alpha}}^{-1}(v_i - v_j)\}. \quad (5.13)$$

Proposição 5.19. $a_{\infty}^2(K_n) = 2n$.

Demonstração. Para qualquer par i, j , temos que $v_i - v_j = \mathbf{0}$, $d_i = d_j = n - 1$ e $d_{ij} = 1$, logo por (5.11) $x = e_i - e_j$ é uma solução e $a_{\infty}^2(K_n) = 2n$ por (5.13), também satisfazendo a condição (5.12). \square

Proposição 5.20. Se $|V| = n$ e $G \neq K_n$, então $a_{\infty}^2(G) \leq 2n - 4$.

Demonstração. Seja $K_n - ij$ o grafo obtido removendo-se de K_n a aresta ij . Então $v_i - v_j = \mathbf{0}$, $d_i = d_j = n - 2$ e $d_{ij} = 0$, logo por (5.11) $x = e_i - e_j$ é um vetor viável e $a_{\infty}^2(K_n - ij) \leq 2n - 4$ por (5.13). Qualquer outro grafo G não completo é um subgrafo gerador de $K_n - ij$ para certa aresta ij , de forma que $a_{\infty}^2(G) \leq a_{\infty}^2(K_n - ij)$. \square

No caso de árvores, já verificamos que os vértices líderes não são vizinhos, e o mesmo se observou nos experimentos computacionais, com a óbvia exceção dos grafos completos. Isso nos leva a enunciar a conjectura a seguir.

Conjectura 5.21. Os vértices líderes de G não são vizinhos, exceto se G for completo.

Proposição 5.22.

$$a_{\infty}^2(G) \leq \min_{\substack{i,j \in V \\ i \neq j}} \{d_i + d_j\} + 2.$$

Demonstração. Em (5.13), para uma solução ótima v , temos que $d_{ij} \in \{0, 1\}$, e $L_{\bar{\alpha}}$ é positiva semidefinida pelo Teorema do Entrelaçamento [11, Corolário 2.5.2], e o mesmo vale para sua inversa, o que implica que $(v_i - v_j)^T L_{\bar{\alpha}}^{-1}(v_i - v_j) \geq 0$. \square

Note que essa cota é atingida por K_n . Se valer a Conjectura 5.21, então a cota na Proposição 5.22 pode ser melhorada para grafos não-completos removendo-se o termo “+2”, já que $d_{ij} = 0$ em (5.13) nesse caso.

5.3 O caso $q = 2, p = 1$

Já falamos nas Seções 2.3 e 2.4 da relação entre $a(G) = a_2^2(G)$ e a constante de Cheeger h_G :

$$h_G = \min_{\substack{S \subset V \\ |S| \leq \frac{n}{2}}} \frac{\text{cut}(S)}{|S|},$$

e também que $a_1^1(G) = h_G$. Para $q \geq 1$, obtemos uma cota superior para $a_1^q(G)$ que se relaciona com um particionamento de G que é pelo menos mais estrito em termos do equilíbrio do tamanho das classes.

Proposição 5.23. *Seja $G = (V, E)$ um grafo. Então*

$$a_1^q(G) \leq \min_{\substack{S \subset V \\ |S| \leq \frac{n}{2}}} \frac{\text{cut}(S)}{|S|^q}.$$

Demonstração. Podemos reescrever a equação (5.1) como

$$a_1^q(G) = \min_{\sum_i \phi_p(x_i) \ni 0} \sum_{ij \in E} \frac{|x_i - x_j|^q}{\|x\|_p}.$$

Para cada $S \subset V$ com $|S| \leq \frac{n}{2}$, considere $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $x_i = 1$ se $i \in S$ e $x_i = 0$ se $i \in \bar{S}$. Verifica-se facilmente que $R_1^q(x) = \frac{\text{cut}(S)}{|S|^q}$. Resta mostrar que este vetor satisfaz a condição $\sum_i \phi_p(x_i) \ni 0$. De fato,

$$\sum_i \phi_p(x_i) = |S| + (|V| - |S|)[-1, 1] = [-|V| + 2|S|, |V|].$$

O limite inferior deste intervalo é não-positivo porque $|S| \leq \frac{n}{2}$. \square

Para $p = 1$, podemos então reescrever a equação (5.2) como

$$a_1^2(G) = \min_{\substack{\sum_i \text{Sign}(x_i) \ni 0 \\ \sum_i |x_i| = 1}} x^T Lx \quad (5.14)$$

e a equação (3.2) pode então ser escrita como $Lx = \lambda \text{Sign}(x)$; mais explicitamente,

$$(Lx)_i = \begin{cases} \lambda, & x_i > 0, \\ -\lambda, & x_i < 0, \\ [-\lambda, \lambda], & x = 0. \end{cases} \quad (5.15)$$

Lema 5.24. *Seja $x \in \mathbb{R}^n$. Então a condição $\sum_i \text{Sign}(x_i) \ni 0$ é equivalente a $|Z_x| \leq ||P_x| - |N_x||$.*

Demonstração. Primeiramente verificamos que

$$\begin{aligned} \sum_i \text{Sign}(x_i) &= |P_x| - |N_x| + |Z_x|[-1, 1] \\ &= [|P_x| - |N_x| - |Z_x|, |P_x| - |N_x| + |Z_x|] \end{aligned}$$

Então $\sum_i \text{Sign}(x_i) \ni 0$ se e somente se

$$\begin{aligned} |P_x| - |N_x| - |Z_x| &\leq 0 \leq |P_x| - |N_x| + |Z_x| \\ -|Z_x| &\leq |N_x| - |P_x| \leq |Z_x|, \end{aligned}$$

o que equivale a $|Z_x| \leq ||P_x| - |N_x||$. \square

Lema 5.25. *Seja G um grafo conexo. Então existe um 1-autovetor x de $a_1^2(G)$ com no máximo uma entrada nula e $||P_x| - |N_x|| \leq 1$.*

Demonstração. Suponha que $|Z_x| \geq 2$ e $|N_x| \geq |P_x|$. Sejam $u \in N_x$ e $z \in Z_x$, e $\epsilon \in (0, \min_{i \in N_x} |x_i|)$. Defina $x' = x + \epsilon(e_u + e_z)$. Mostremos que ele é viável para (5.14).

$$\begin{aligned} \|x'\|_1 &= \sum_i |x'_i| = \sum_{i \notin \{u,z\}} |x'_i| + |x'_u + \epsilon| + |x'_z| \\ &= \sum_{i \notin \{u,z\}} |x_i| + |x_u| - \epsilon + \epsilon = \sum_i |x_i| = \|x\|_1 \end{aligned}$$

Pelo Lema 5.24, $|N_x| - |P_x| \leq |Z_x|$. Pela definição de x' , temos que $|N_{x'}| = |N_x|$, $|P_{x'}| = |P_x| + 1$ e $|Z_{x'}| = |Z_x| - 1$, logo $|N_{x'}| - |P_{x'}| \leq |Z_{x'}|$ e portanto $\sum_i \text{Sign}(x'_i) \ni 0$. Pelo Teorema C.6 (Taylor) com $a = \epsilon(e_u + e_z)$, $f = x^T Lx$, $\nabla_x f = 2Lx$ e $H_x f = 2L$,

$$x'^T Lx' - x^T Lx = 2\epsilon(e_u + e_z)^T Lx + O(\epsilon^2).$$

Utilizando a condição (5.15), verifica-se que

$$(e_u + e_z)^T Lx = (Lx)_u + (Lx)_z = -\lambda + [-\lambda, \lambda] \leq 0,$$

logo $x'^T Lx' \leq x^T Lx$. A desigualdade estrita contradiz a minimalidade de x , e com igualdade x' é também um 1-autovetor de $a_1^2(G)$ com uma entrada nula a menos. Podemos repetir este processo até obtermos um 1-autovetor de a_1^2 com uma entrada nula. Nesse ponto, a propriedade $||P_x| - |N_x|| \leq 1$ vale pelo Lema 5.24. \square

Corolário 5.26. *Seja G um grafo com n de vértices. Então existe um 1-autovetor x de $a_1^2(G)$ com exatamente uma entrada nula e $|P_x| = |N_x| = \lfloor n/2 \rfloor$, se n é ímpar, e sem entradas nulas e $|P_x| = |N_x| = n/2$, se n é par.*

Demonstração. Seja x um 1-autovetor de $a_1^2(G)$ com $|Z_x| \leq 1$ (que existe pelo Lema 5.25) e $|P_x| \geq |N_x|$. A restrição $\sum_i \text{Sign}(x_i) \ni 0$ implica que $|Z_x| \geq |P_x| - |N_x|$, de forma que $|P_x| \leq |N_x| + 1$. Logo, para n ímpar, devemos ter pelo menos uma entrada nula, e estamos prontos. Se n é par e $|Z_x| = 1$, observe que $|P_x| = n/2 = |N_x| + 1$, e considere $x' = x - \epsilon \mathbf{1}$, onde $\epsilon = \frac{1}{2} \min_{i \in P_x} x_i$. Pela Proposição 3.2, $R_1^2(x') = R_1^2(x)$. Além disso, x' não tem entradas nulas, ou seja, $|P_{x'}| = |N_{x'}| = n/2$, logo $\sum_i \text{Sign}(x'_i) = 0$. Resta mostrar que a norma não se altera. De fato,

$$\|x'\|_1 = \sum_i |x - \epsilon| = \sum_{i \in P_x} (|x| - \epsilon) + \sum_{i \in N_x} (|x| + \epsilon) + \underbrace{\epsilon}_{Z_x} = \|x\|_1.$$

\square

Corolário 5.27. *Seja G um grafo com n de vértices. Então existe um 1-autovetor de $a_1^2(G)$ com no máximo uma entrada nula.*

Demonstração. Se n é ímpar, estamos prontos, pelo Corolário 5.26. Se n é par, tomemos um 1-autovetor x de a_1^2 e $|Z_x| = 0$ (que existe pelo Corolário 5.26) e defina $x' = x - \epsilon \mathbf{1}$, onde $\epsilon = \min_{i \in P_x} x_i$. Logo $R_1^2(x') = R_1^2(x)$, $\sum_i \text{Sign}(x'_i) = [|Z_{x'}|, 0] \ni 0$ e

$$\|x'\|_1 = \sum_i |x - \epsilon| = \sum_{i \in P_x} (|x| - \epsilon) + \sum_{i \in N_x} (|x| + \epsilon) = \|x\|_1,$$

logo x' é um 1-autovetor com $|Z_{x'}| \geq 1$. \square

Vamos agora mostrar uma propriedade que nos permitirá calcular a_1^2 para grafos completos.

Lema 5.28. *Seja $G = (V, E)$ um grafo e x um 1-autovetor de $a_1^2(G)$. Se $i, j \in V$ têm a mesma vizinhança, com exceção da vizinhança entre eles, e $\text{sign}(x_i) = \text{sign}(x_j)$, então $x_i = x_j$.*

Demonstração. O resultado vale trivialmente para entradas nulas. Suponhamos, para obter uma contradição, que $x_i > x_j > 0$. Defina x' tal que

$$x'_k = \begin{cases} \frac{x_i + x_j}{2}, & \text{se } k \in \{i, j\} \\ x_k, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como $i, j \in V$ têm a mesma vizinhança, com exceção da vizinhança entre eles, pode-se verificar que

$$\begin{aligned} x^T Lx - x'^T Lx' &= \sum_{\substack{ik \in E \\ k \neq j}} [(x_i - x_k)^2 - (x'_i - x_k)^2 + (x_j - x_k)^2 - (x'_j - x_k)^2] \\ &= \left(\frac{1}{2} + d_{ij}\right) (x_i - x_j)^2 > 0, \end{aligned}$$

contradizendo a minimalidade de x . \square

Proposição 5.29.

$$a_1^2(K_n) = \begin{cases} 1, & n \text{ é par} \\ 1 + \frac{1}{n-1}, & n \text{ é ímpar.} \end{cases}.$$

Demonstração. Seja x um 1-autovetor de $a_1^2(K_n)$. Pelos Lemas 5.25 e 5.28, para n par, x pode ser tomado com $n/2$ entradas positivas com valor a e $n/2$ entradas negativas com valor $-b$, para certos $a, b > 0$. Da restrição da norma obtemos $\frac{n}{2}a + \frac{n}{2}b = 1$, logo $a + b = \frac{2}{n}$ e

$$x^T Lx = \left(\frac{n}{2}\right)^2 (a + b)^2 = 1,$$

já que a soma em R_1^2 pode ser tomada apenas sobre as arestas entre P_x and N_x .

Para o caso ímpar, como temos um vértice i com $x_i = 0$, procede-se de maneira similar usando $n' = n - 1$ em vez de n . Por simetria, $a = b = \frac{1}{n'}$. Agora devemos levar em conta também as arestas entre i e P_x e entre i e N_x , logo

$$x^T Lx = \left(\frac{n'}{2}\right)^2 (a + b)^2 + \frac{n'}{2} (a^2 + b^2) = 1 + \frac{1}{n'}.$$

□

5.3.1 Complexidade computacional

Nosso objetivo a seguir é obter $a_1^2(G)$ por um algoritmo de “força bruta”. Seja $s \in \{-1, 0, 1\}^n$ um vetor contendo uma “configuração de sinais” desejada para x , ou seja, assumimos que $s_i = \text{sign}(x_i)$, e podemos restringir aos vetores com pelo menos uma entrada nula z , pelo Corolário 5.25. Descartemos, pois, as linhas e colunas de L e as entradas de x e s relativas às entradas nulas de x ; ou seja, denotando $(\tilde{\cdot}) = (\cdot)_{\bar{z}}$, a autoequação se torna $\tilde{L}\tilde{x} = \lambda\tilde{s}$. A restrição $\sum_i |x_i| = 1$ é equivalente a $\tilde{x}^T \tilde{s} = 1$, logo multiplicando a autoequação pela esquerda por \tilde{x}^T , obtemos que $\lambda = \tilde{x}^T \tilde{L}\tilde{x} = x^T Lx$. Se G é conexo, \tilde{L} é invertível e temos a solução

$$\tilde{x} = \lambda \tilde{L}^{-1} \tilde{s}. \quad (5.16)$$

Multiplicando pela esquerda por \tilde{s}^T e isolando $\lambda = x^T Lx$, obtemos

$$x^T Lx = (\tilde{s}^T \tilde{L}^{-1} \tilde{s})^{-1},$$

Pode ocorrer, no entanto, que os sinais da solução x obtida em (5.16) não sejam os mesmos de s ou que a condição $Lx = \lambda \text{Sign}(x)$ não seja satisfeita, portanto devemos checar se um vetor candidato satisfaz estes requisitos. Assim, escrevemos um algoritmo rudimentar de força bruta (Algoritmo 5.1).

Algoritmo 5.1: Algoritmo de força bruta para $a_1^2(G)$.

Input: grafo G com n vértices e matriz laplaciana L

Output: 1-autovalor a , 1-autovetor x^*

$a = \infty$

for $s \in \{-1, 0, 1\}^n$ com $Z_s = \{z\}$ e $|P_s| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ **do**

/* Iteração de Verificação */

$\tilde{L} = L_{\bar{z}}; \quad \tilde{s} = s_{\bar{z}};$

$\lambda = (\tilde{s}^T \tilde{L}^{-1} \tilde{s})^{-1}; \quad x_{\bar{z}} = \lambda \tilde{L}^{-1} \tilde{s};$

for $i \in V$ **do**

if $(Lx)_i \in \lambda \text{Sign}(x_i)$ e $\text{sign}(x_i) = s_i$ **then**

└ x é um candidato válido

/* Fim da Iteração de Verificação */

if x é um candidato válido e $\lambda < a$ **then**

└ $a = \lambda; \quad x^* = x;$

O problema de minimização (5.14),

$$a_1^2(G) = \min_{\substack{\sum_i \text{Sign}(x_i) \geq 0 \\ \sum_i |x_i| = 1}} x^T Lx,$$

pode ser formulado como um problema de decisão, como segue:

CONNECTIVIDADE (1,2)-ALGÉBRICA

INSTÂNCIA: Grafo G (com matriz laplaciana L e n vértices), cota $k \in \mathbb{Q}$.

QUESTÃO: $a_1^2(G) \leq k$?

Para falar da complexidade deste problema, seguiremos a definição de Sipser [47, Definition 7.15, 7.16]:

Definição 5.30. *Um verificador para uma linguagem A é um algoritmo V tal que $A = \{w : V \text{ aceita } \langle w, c \rangle \text{ para alguma string } c\}$. A classe de complexidade \mathcal{NP} é a classe das linguagens que têm verificadores que rodam em tempo polinomial no tamanho de w .*

A string c é dita um *certificado* de que w é um membro de A .

Proposição 5.31. *O problema CONECTIVIDADE (1,2)-ALGÉBRICA pertence à classe de complexidade \mathcal{NP} .*

Demonstração. A Iteração de Verificação do Algoritmo 5.1 é um verificador para a linguagem $\{G : a_1^2(G) \leq k\}$ usando o vetor de sinais s como certificado, e as operações efetuadas (como multiplicação e inversão de matrizes) são feitas em tempo polinomial em termos de n . \square

A Proposição 5.23, junto com experimentos computacionais, evidenciam que o 1-autovetor associado a $a_1^2(G)$ produz uma partição “Cheeger-like”, mas mais equilibrada em termos do tamanho das classes (de fato, tão equilibrada quanto possível, pelo Corolário 5.26). Em [51, Teorema 2] encontramos um resultado que evidencia que cortes mais equilibrados são mais difíceis (ou pelo menos tão difíceis quanto) de se obter. Como citamos na Seção 2.3, obter o corte de Cheeger em multigrafos é um problema \mathcal{NP} -completo, e acredita-se que o mesmo valha para grafos simples. Isso motiva a seguinte conjectura:

Conjectura 5.32. *O problema de encontrar $a_1^2(G)$ é \mathcal{NP} -completo.*

5.4 O caso $p = q = 1$

Como já citado na Seção 2.4, o caso em que $p = q$ já havia sido tratado anteriormente, mostrando relação com a constante de Cheeger h_G . Recordamos o

Teorema 2.4: para $p > 1$,

$$\left(\frac{2}{\Delta_G}\right)^{p-1} \left(\frac{h_G}{p}\right)^p \leq a_p^p(G) \leq 2^{p-1}h_G,$$

logo $\lim_{p \rightarrow 1^+} a_p^p(G) = h_G$.

Trataremos agora o caso $p = q = 1$ diretamente, e não mais como um limite. Lembramos que o 1-laplaciano L_1 satisfaz

$$(L_1x)_i = \sum_{j:ij \in E} \text{Sign}(x_i - x_j).$$

Proposição 5.33. *Se $\ell \in L_1x$ então $\ell \in L_1\mathbf{1}_{P_x}$.*

Demonstração. Seja $y = \mathbf{1}_{P_x}$. Mostraremos que $\text{Sign}(x_i - x_j) \subseteq \text{Sign}(y_i - y_j)$ para cada $ij \in E$. Se x_i e x_j têm o mesmo sinal ou se $x_i, x_j \leq 0$, então $y_i = y_j \in \{0, 1\}$, conforme o caso. Logo $\text{Sign}(y_i - y_j) = [-1, 1] \ni \text{Sign}(x_i - x_j)$. Se $x_i > 0$ e $x_j \leq 0$, então $y_i = 1, y_j = 0$ e $\text{Sign}(x_i - x_j) = 1 = \text{Sign}(y_i - y_j)$. Finalmente, se $x_i \leq 0$ e $x_j > 0$, então $y_i = 0, y_j = 1$ e $\text{Sign}(x_i - x_j) = -1 = \text{Sign}(y_i - y_j)$. \square

Corolário 5.34. *Se x é um 1-autovetor de L_1 associado ao 1-autovalor λ , o mesmo vale para $\mathbf{1}_{P_x}$.*

Demonstração. Por hipótese, $\exists \ell \in L_1x, u \in \phi_1(x)$ $\ell = \lambda u$. Pela Proposição 5.33, $\ell \in L_1\mathbf{1}_{P_x}$, logo existem $\ell \in L_1\mathbf{1}_{P_x}$ e $u \in \phi_1(x)$ tais que $\ell = \lambda u$, ou seja, $\mathbf{1}_{P_x}$ é um 1-autovetor de L_1 associado ao 1-autovalor λ . \square

Teorema 5.35. $a_1^1(G) = h_G$.

Demonstração. Se G é desconexo, estamos prontos. Suponhamos então que G é conexo. Pela Proposição 5.23, temos que $a_1^1(G) \leq h_G$, restando então provar que $a_1^1(G) \geq h_G$.

Pelo Corolário 5.34, para um autopar (λ, x) com $\lambda > 0$ e $y = \mathbf{1}_{P_x}$, (λ, y) também é um autopar com $\lambda = \text{cut}(P_x)/|P_x|$. Como $|N_y| = 0$, pelo Lema 5.24,

temos que $|Z_y| \geq |P_y| = |P_x|$, logo $|P_x| \leq |V|/2$, e portanto

$$\lambda = \frac{\text{cut}(P_x)}{|P_x|} \geq \min_{\substack{S \subset V \\ |S| \leq \frac{|V|}{2}}} \frac{\text{cut}(S)}{|S|} = h_G.$$

Como $a_1^1(G)$ é o menor 1-autovalor positivo de L_1 , então $a_1^1(G) \geq h_G$, o que conclui a prova. □

5.5 O limite $q \rightarrow \infty$

Assim como ocorreu com μ_p^q , não tratamos de a_p^q no caso $q \rightarrow \infty$. Para K_2 (Exemplo 4.2), o p -autovetor é viável para o problema da Equação 5.1, ou seja, $a_p^q(K_2) = \mu_p^q(K_2) = 2^{q(1-1/p)}$, que logo diverge quando $q \rightarrow \infty$. Para K_3 , para satisfazer a condição $\sum_i \text{Sign}(x_i) \ni 0$, devemos ter ou dois zeros (e aí apenas uma entrada não nula, e aí temos o autovetor associado a $\mu_1^q(K_3) = \Delta_{K_3} = 2$) ou apenas um zero e duas entradas de sinal oposto, logo $x = (a, -b, 0)$ para certos $a, b > 0$ tais que $a + b = 1$. Neste caso, $R_1^q(x) = a^q + b^q + (a + b)^q$, e concluimos que $\lim_{q \rightarrow \infty} a_1^q(K_3) = 1$.

Proposição 5.36. *Seja G um grafo conexo com pelo menos 3 vértices. Se $G \neq K_3$ ou $p > 1$, então*

$$\lim_{q \rightarrow \infty} a_p^q(G) = 0.$$

Demonstração. Se G é conexo e não completo, existem vértices a e b que não são vizinhos. Seja $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $x_a = -x_b = 2^{-1/p}$ e zero nas demais posições; observe que $\|x\|_p = 1$. Para $p > 1$, $\sum_i \phi_p(x_i) = \phi_p(x_a) + \phi_p(x_b) = 0$, e para $p = 1$, $\sum_i \text{Sign}(x_i) \ni 0$. Então $|x_i - x_j| \leq 2^{-1/p} < 1$ para cada aresta ij , e daí segue que

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \sum_{ij \in E} |x_i - x_j|^q = \sum_{ij \in E} \lim_{q \rightarrow \infty} |x_i - x_j|^q = 0.$$

Se $G = K_n$ com $n > 3$, para $a, b, c, d \in V$ procedemos similarmente tomando $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $x_a = x_b = -x_c = -x_d = 4^{-1/p}$ e zero nas demais posições. Para $G = K_3$ e $p > 1$, consideremos um vetor $x = (a, -b, -b)^T$ viável para (5.1), ou seja, $a^p + 2b^p = 1$ e $a^{p-1} = 2b^{p-1}$. Daí obtemos $a = (1 + 2^{1-\frac{p}{q-1}})^{-1/p}$ e $b = 2^{-\frac{1}{q-1}}a$. No limite $q \rightarrow \infty$ obtemos $a = b = 3^{-1/p}$, logo $a + b < 1$ e $\lim_{q \rightarrow \infty} R_p^q(x) = \lim_{q \rightarrow \infty} 2(a + b)^q = 0$.

□

De maneira similar ao que fizemos na Seção 4.5, definimos a quantidade

$$\tilde{a}_p^\infty(G) = \min_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \sum_i \phi_p(x_i) = 0}} \frac{\|Bx\|_\infty}{\|x\|_p} = \min_{\substack{\|x\|_p = 1 \\ \sum_i \phi_p(x_i) = 0}} \max_{ij \in E} |x_i - x_j|. \quad (5.17)$$

Entretanto, diferentemente da contraparte $\tilde{\mu}_p^\infty(G)$, cujo valor era constante independentemente do grafo, podemos obter relações de $\tilde{a}_p^\infty(G)$ com invariantes da Teoria dos Grafos.

Tratemos agora do caso em que $p = \infty$. Pela Proposição 5.3,

$$a_\infty^q(G) = \min_{\substack{i, j \in V \\ i \neq j}} \min_{\substack{x_i = m+1 \\ x_j = m-1}} x^T L_q x.$$

Então, tomando $m = 0$,

$$\tilde{a}_\infty^\infty(G) = \min_{\substack{u, v \in V \\ u \neq v}} \min_{x_u = 1 = -x_v} \max_{ij \in E} |x_i - x_j|. \quad (5.18)$$

Utilizando o mesmo raciocínio da Proposição 5.2, podemos ver que $\tilde{a}_\infty^\infty(G) > 0$ se e somente se G é conexo.

Proposição 5.37. *Para um grafo G conexo,*

$$\tilde{a}_\infty^\infty(G) = \frac{2}{\text{diam}(G)}.$$

Se convencionarmos que $1/\infty = 0$, o enunciado vale para qualquer grafo, pois $\text{diam}(G) = \infty$ se G é desconexo.

Demonstração. Podemos reescrever (5.18) como

$$\tilde{a}_\infty^\infty(G) = \min_{\substack{u,v \in V \\ u \neq v}} \alpha_{uv},$$

onde α_{uv} é a solução de

$$\begin{aligned} & \min && \alpha \\ \text{sujeito a} & && -\alpha \leq x_i - x_j \leq \alpha, \quad ij \in E \\ & && -1 \leq x_i \leq 1, \quad i \in V \\ & && x_u = 1 = -x_v. \end{aligned}$$

Como G é conexo, então $\alpha > 0$. Então $1/\alpha_{uv}$ é a solução de $\max 1/\alpha$ sujeito às mesmas restrições. Além disso, podemos dividir as expressões das restrições por α e introduzir variáveis $y_i = x_i/\alpha$ para $i \in V$, de modo que, pela terceira restrição, $\frac{1}{\alpha} = \frac{x_u}{\alpha} = y_u$ e $1/\alpha_{uv}$ é a solução de

$$\begin{aligned} & \max && y_u \\ \text{sujeito a} & && -1 \leq y_i - y_j \leq 1, \quad ij \in E \\ & && (y_v =) -y_u \leq y_i \leq y_u, \quad i \in V \end{aligned}$$

Seja $ui_1i_2 \cdots i_{k-1}v$ um caminho mínimo (de tamanho $k = d(u, v)$) entre u e v . Escrevendo a primeira restrição acima para cada aresta deste caminho,

$$\begin{aligned} -1 &\leq y_u - y_{i_1} &\leq 1 \\ -1 &\leq y_{i_1} - y_{i_2} &\leq 1 \\ &\vdots \\ -1 &\leq y_{i_{k-1}} - y_v &\leq 1 \end{aligned}$$

obtemos $-k \leq y_u - y_v (= 2y_u) \leq k$, o que equivale a $y_u \leq k/2$. Pode-se verificar que o vetor y cujas entradas são dadas por

$$y_i = \frac{1}{2} \max_{j \in V} d(u, j) - d(u, i)$$

é viável e satisfaz $y_u = k/2$, que equivale a

$$\frac{1}{\alpha_{uv}} = \frac{d(u, v)}{2},$$

e finalmente temos

$$\tilde{a}_\infty^\infty(G) = \min_{\substack{u,v \in V \\ u \neq v}} \frac{1}{\alpha_{uv}} = \min_{\substack{u,v \in V \\ u \neq v}} \frac{2}{d(u,v)} = \frac{2}{\max_{u,v \in V} d(u,v)} = \frac{2}{\text{diam}(G)}.$$

□

Observe que $x = y\alpha$, ou seja, sendo u a extremidade de um diâmetro,

$$x_i = 1 - 2 \frac{d(u,i)}{\text{diam}(G)}.$$

As entradas de x e y são exemplificadas no grafo da Figura 5.4.

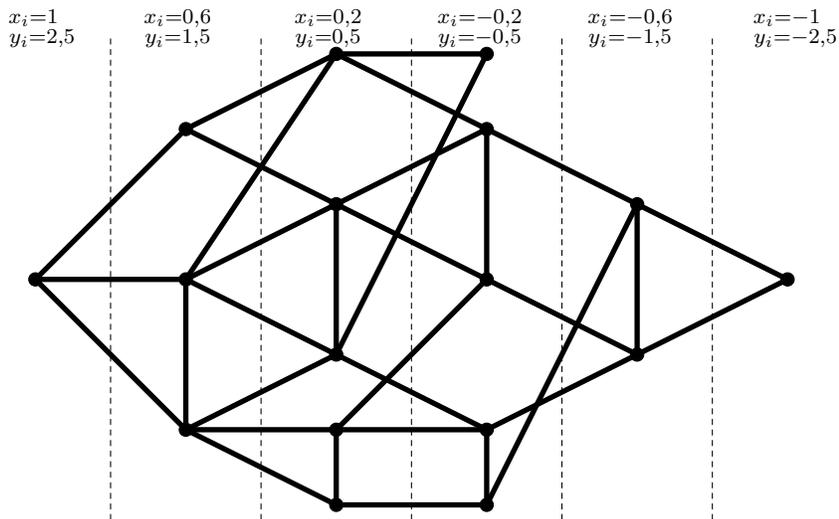


Figura 5.4: Exemplo dos vetores x e y em um grafo de diâmetro 5.

5.6 Propriedades da função $p \rightarrow a_p^q(G)$

Mostraremos a seguir que a função $a_{G,q} : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$a_{G,q}(p) = a_p^q(G)$$

é crescente (Lema 5.38) se G é conexo, contínua (Lema 5.39) e converge quando $p \rightarrow \infty$ (Lema 5.40).

Lema 5.38. *Para um grafo conexo G , $a_{G,2}(p)$ é estritamente crescente.*

Demonstração. Sejam $p' > p > 1$, seja x um p' -autovetor de $a_{p'}^q(G)$ com $\sigma_{p'}(x) = 1$ e $m_{p'}(x) = 0$, conforme a formulação (5.3). Defina

$$x' = \frac{x - m_p(x)\mathbf{1}}{\sigma_p(x)},$$

com $\sigma_p(x') = 1$ e $m_p(x') = 0$. Então

$$a_p^q(G) \leq R_p^q(x') = \frac{1}{\sigma_p^2(x)} R_{p'}^q(x) \leq a_{p'}^q(G), \quad (5.19)$$

pois $\sigma_p(x) \geq \sigma_{p'}(x) = 1$ (pela Proposição C.14). Como G é conexo, $a_p^q(G) > 0$. Tem-se igualdade na equação (5.19) se e somente se $x = e_i$ para algum i que não é um vetor viável, pois $m_p(e_i) \neq 0$.

Resta-nos mostrar que $a_p^2(G) > a_1^2(G)$. Observe que $R_1^2(e_i) \geq \delta_G$, o grau mínimo de G . Se G tem $n > 2$ vértices, sabemos que $a_1^2(G) \leq a_1^2(K_n) < 2 \leq \delta_G \leq R_1^2(e_i)$ (a desigualdade estrita vale pela Proposição 5.29), portanto e_i não atinge o mínimo para $a_1^2(G)$. Se $G = K_2$, para $p > 1$ os vetores viáveis têm a forma $\pm 2^{-1/p}(e_1 - e_2)$, de modo que $a^{(p)}(K_2) = 2^{2-2/p} > 1 = a_1^2(K_2)$ (Proposição 5.29). Isso conclui a prova. \square

Lema 5.39. *Para qualquer grafo G , a função $a_{G,2}(p)$ é contínua.*

Demonstração. Se G não é conexo, $a_{G,2}(p) = 0$ e estamos prontos. Se G é conexo, segue-se o mesmo raciocínio do Lema 4.7, usando que $a_{G,2}(p)$ é crescente (Lema 5.38) e $a_p^2(G) \leq \mu_p^2(G) \leq n^{2-2/p}$ para $p > 1$. \square

Lema 5.40. *Para qualquer grafo G ,*

$$\lim_{p \rightarrow \infty} a_{G,2}(p) = a_\infty^2(G).$$

Para p dado, seja x tal que $\|x\|_\infty = 1$ e $R_p^2(x) = a^{(\infty)}(G)$. Sabemos que $x \neq e_i$, logo $\|x\|_p > 1$. Definimos $x' = x/\|x\|_p$, de modo que $\|x'\|_\infty = 1$. Então

$$a_\infty^2(G) = R_\infty^2(x) = \|x\|_p^2 R_\infty^2(x') > \|x\|_p^2 a_p^2(G),$$

de modo que $0 < a_\infty^2(G) - a_p^2(G) < (1 - 1/\|x\|_p^2)a_p^2(G)$. Podemos verificar que $\|x\|_p \leq n^{1/p}$, de modo que

$$0 < a_\infty^2(G) - a_p^2(G) < (1 - n^{-2/p})a_p^2(G),$$

sendo que $n^{-2/p} \rightarrow 1$ quando $p \rightarrow \infty$.

6 O MENOR p -AUTOVALOR DO p -LAPLACIANO SEM SINAL

Aqui estenderemos a abordagem usada até agora para definir uma versão “sem sinal” do q -Laplaciano, que chamaremos Q_q , e estudaremos seu menor p -autovalor.

Como já falamos na Seção 2.1, a matriz laplaciana sem sinal $Q(G)$ é definida como $Q = D + A = C^T C$, C a é matriz de incidência de G , e podemos associá-la ao seguinte quociente de Rayleigh:

$$R(x) = \frac{x^T Q x}{\|x\|_2^2} = \frac{\sum_{ij \in E} (x_i + x_j)^2}{\|x\|_2^2} = \left(\frac{\|Cx\|_2}{\|x\|_2} \right)^2.$$

O menor autovalor de Q , que denotaremos $\nu(G)$, tem chamado a atenção desde o trabalho de Desai e Rao [21]. Assim como a conectividade algébrica pode ser usada para estimar a conectividade de um grafo, pela relação com a contante de Cheeger, $\nu(G)$ pode ser usado para estimar o quão próximo G está de ser bipartido. Defina-se a quantidade

$$\hat{\psi}(G) = \min_{\substack{S, T \subseteq V \\ S \cap T = \emptyset \neq S \cup T}} \frac{4|E(S)| + 4|E(T)| + \text{cut}(S \cup T)}{|S \cup T|}.$$

Claramente $\hat{\psi}(G) = 0$ se e somente se G tem um componente bipartido. Desai e Rao obtiveram a seguinte cota para $\nu(G)$ em termos de $\hat{\psi}(G)$ [21, Teoremas 3.1, 3.2, e comentários]:

Teorema 6.1. *Seja G um grafo.*

$$\frac{\hat{\psi}^2(G)}{4\Delta_G} \leq \nu(G) \leq 4\hat{\psi}(G).$$

Esta e outras propriedades de $\nu(G)$ podem ser encontradas na referência [20].

Procedendo analogamente ao que fizemos no Capítulo 3, para $p \in [1, \infty]$ e $q \in [1, \infty)$, definimos uma generalização do quociente de Rayleigh no contexto da

matriz laplaciana sem sinal:

$$R_p^q(x) = \frac{\sum_{ij \in E} |x_i + x_j|^q}{\|x\|_p^q} = \left(\frac{\|Cx\|_q}{\|x\|_p} \right)^q.$$

Definição 6.2. *Seja $G = (V, E)$ um grafo, $q \in [1, \infty)$ e $x \in \mathbb{R}^{|V|}$. O q -laplaciano sem sinal Q_q é a função definida por*

$$(Q_q x)_i = \sum_{j:ij \in E} \phi_q(x_i + x_j).$$

Algumas propriedades básicas do q -laplaciano:

Proposição 6.3. *Seja Q_q o q -laplaciano sem sinal de $G = (V, E)$ e $c \in \mathbb{R}$. Então*

$$(a) \ x^T Q_q x = \sum_{ij \in E} |x_i + x_j|^q \geq 0.$$

$$(b) \ Q_q c x = \phi(c) Q_q x.$$

Demonstração. Análoga à demonstração da Proposição 3.2. □

Definição 6.4. *Sejam $p, q \geq 1$. Um número real λ é dito um p -autovalor de $Q_q = Q_q(G)$ se existe um vetor real v tal que $Q_q v - \lambda \phi_p(v) \ni 0$. O vetor v é então dito um p -autovetor associado a λ . Em particular, se $p, q > 1$, $Q_q v = \lambda \phi_p(v)$.*

Também podemos ver que vale a versão análoga do Teorema 3.4, ou seja, os p -autovalores de Q_q são equivalentes aos pontos críticos de R_p^q . Não trataremos aqui do maior p -autovalor de Q_q . Imitando os Teoremas 4.4 e 4.5, não é difícil verificar que, para $p = 1$, ele será igual a Δ_G , e para $p = \infty$, ele será igual a $2^q |E(G)|$.

Quando ao menor p -autovalor de Q_q , que denotaremos por $\nu_p^q(G)$, podemos expressá-lo como segue:

$$\nu_p^q(G) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} R_p^q(x) = \min_{\|x\|_p=1} \sum_{ij \in E} |x_i + x_j|^q. \quad (6.1)$$

Teorema 6.5. $\nu_p^q(G) = 0$ se e somente se G tem um componente bipartido.

Demonstração. Se G tem um componente bipartido com classes S e T , para obter $R_p^q(x) = 0$ basta tomar x tal que

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{se } i \in S, \\ -1, & \text{se } i \in T, \\ 0, & \text{c. c.} \end{cases} \quad (6.2)$$

Por outro lado, se $R_p^q(x) = 0$, então $x_i + x_j = 0$ para cada aresta ij . Como $\|x\|_p = 1$, existe $v \in G$ (em um componente G_v) tal que $x_v \neq 0$. Os vizinhos de v , por sua vez, têm valor $-x_v$, e assim por diante, de modo que, para cada $i \in G_v$, temos

$$x_i = \begin{cases} x_v, & \text{se } d(i, v) \text{ é par,} \\ -x_v, & \text{se } d(i, v) \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Claramente estes dois casos constituem duas classes de uma bipartição, ou seja, G_v é bipartido. \square

6.1 O limite $p \rightarrow 1^+$

Aqui definiremos uma quantidade ligeiramente diferente de $\hat{\psi}$:

$$\psi(G) = \min_{\substack{S, T \subseteq V \\ S \cap T = \emptyset \neq S \cup T}} \frac{2|E(S)| + 2|E(T)| + \text{cut}(S \cup T)}{|S \cup T|}. \quad (6.3)$$

Obtemos o seguinte resultado:

Teorema 6.6. *Seja $G = (V, E)$ um grafo. Para $p > 1$,*

$$\left(\frac{2}{\Delta_G}\right)^{p-1} \left(\frac{\psi(G)}{p}\right)^p \leq \nu_p^p(G) \leq 2^{p-1} \psi(G).$$

Em particular, $\lim_{p \rightarrow 1^+} \nu_p^p(G) = \psi(G)$.

Não se pode deixar de notar a similaridade com o Teorema 2.4:

$$\left(\frac{2}{\Delta_G}\right)^{p-1} \left(\frac{h_G}{p}\right)^p \leq a_p^p(G) \leq 2^{p-1}h_G,$$

logo $\lim_{p \rightarrow 1^+} a_p^p(G) = h_G$.

Para a prova, precisaremos de dois Lemas auxiliares (6.7 e 6.8).

Lema 6.7. *Seja $p \geq 1$, $G = (V, E)$ um grafo e fixe $S, T \subseteq V$ com $S \cap T = \emptyset$. Então*

$$\nu_p^p(G)|S \cup T| \leq 2^p|E(S)| + 2^p|E(T)| + \text{cut}(S \cup T).$$

Em particular, $\nu_p^p(G) \leq 2^{p-1}\psi(G)$.

Demonstração. Se $S \cup T = \emptyset$, o resultado é trivial. Caso contrário, seja x como em (6.2). Uma computação simples nos mostra que

$$\nu_p^p(G) \leq R_p^p(x) = \frac{2^p|E(S)| + 2^p|E(T)| + \text{cut}(S \cup T)}{|S \cup T|},$$

o que conclui a prova no caso geral. Em particular, se S e T minimizam $\psi(G)$, então

$$\nu_p^p(G) \leq \frac{2^p|E(S)| + 2^p|E(T)| + 2^{p-1}\text{cut}(S \cup T)}{|S \cup T|} = 2^{p-1}\psi(G).$$

□

Para as provas seguintes, precisaremos de mais algumas notações. Consideremos vetores $w \in \mathbb{R}^{|V|}$ tais que, para algum $U \subseteq V$, $w_i > 0$ se $i \in U$ e $w_i = 0$ se $i \notin U$. Para $t \in \mathbb{R}$, denotamos então o conjunto

$$C_w^t = \{i \in U : w_i > t\}.$$

Observe que, ordenando as entradas de w em ordem não-decrescente, para entradas consecutivas $w_a < w_{a+1}$, o conjunto C_w^t é sempre o mesmo para $w_a \leq t < w_{a+1}$. Definimos também a quantidade

$$c_w(U) = \min_{0 \leq t < \max_{i \in U} w_i} \frac{\text{cut}(C_w^t)}{|C_w^t|}.$$

(Observe que o conjunto seria vazio se $t \geq \max_{i \in U} w_i$, e seria igual a V se $t < 0$.)

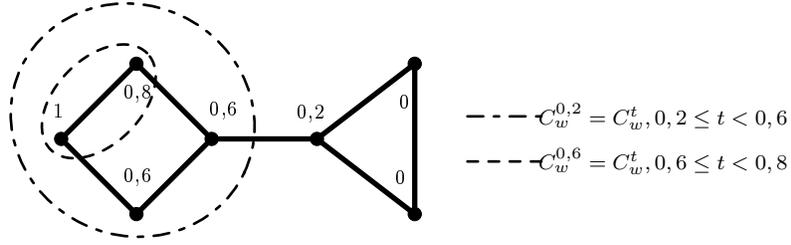


Figura 6.1: Exemplos de C_w^t em um grafo.

Lema 6.8. *Com a notação acima,*

$$\left(\frac{2}{\Delta_G}\right)^{p-1} \left(\frac{c_w(U)}{p}\right)^p \|w\|_p^p \leq \sum_{ij \in E} |w_i - w_j|^p.$$

Demonstração. Primeiramente mostraremos que

$$c_w(U) \|w\|_p^p \leq \sum_{ij \in E} |w_i^p - w_j^p|. \quad (6.4)$$

Para obter essa desigualdade, observe que

$$\begin{aligned} \sum_{ij \in E} |w_i^p - w_j^p| &= \sum_{\substack{ij \in E \\ w_i > w_j}} (w_i^p - w_j^p) = \sum_{\substack{ij \in E \\ w_i > w_j}} p \int_{w_j}^{w_i} t^{p-1} dt \\ &= p \int_0^\infty t^{p-1} \sum_{\substack{ij \in E \\ w_j \leq t < w_i}} 1 dt. \end{aligned}$$

Vamos olhar mais de perto a soma dentro da integral:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{ij \in E \\ w_j \leq t < w_i}} 1 &= |\{ij \in E : w_j \leq t < w_i\}| \\ &= |\{ij \in E : w_i > t \text{ e } w_j \leq t\}| \\ &= |\{ij \in E : i \in C_w^t \text{ e } j \notin C_w^t\}| = \text{cut}(C_w^t). \end{aligned}$$

Pela definição de c_w , temos que

$$\text{cut}(C_w^t) \geq c_w(U) |C_w^t| = c_w(U) \sum_{\substack{i \in V \\ w_i > t}} 1.$$

Continuando o cálculo anterior, obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{ij \in E} |w_i^p - w_j^p| &\geq p \int_0^\infty t^{p-1} c_w(U) \sum_{\substack{ij \in E \\ w_j \leq t < w_i}} 1 \, dt \\
&= c_w(U) \sum_{\substack{i \in V \\ w_i > 0}} \int_0^{w_i} p t^{p-1} dt \\
&= c_w(U) \sum_{\substack{i \in V \\ w_i > 0}} w_i^p = c_w(U) \|w\|_p^p.
\end{aligned}$$

Isso conclui a prova para $p = 1$. Para $p > 1$ e $q = \frac{p}{p-1}$ ($\log \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), usamos a Desigualdade de Hölder para mostrar que

$$\sum_{ij \in E} |w_i^p - w_j^p| = \sum_{ij \in E} |w_i - w_j| \frac{w_i^p - w_j^p}{w_i - w_j} \leq \left(\sum_{ij \in E} |w_i - w_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{ij \in E} \left(\frac{w_i^p - w_j^p}{w_i - w_j} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (6.5)$$

Vamos agora obter um cota para

$$\left(\frac{w_i^p - w_j^p}{w_i - w_j} \right)^q = p^q \left(\frac{1}{w_i - w_j} \int_{w_j}^{w_i} t^{p-1} dt \right)^{\frac{p}{p-1}}$$

assumindo $w_i > w_j$. Aplicando a Power Mean Inequality na forma integral (Teorema C.3), temos

$$\left(\frac{1}{w_i - w_j} \int_{w_j}^{w_i} t^{p-1} dt \right)^{\frac{1}{p-1}} \leq \left(\frac{1}{w_i - w_j} \int_{w_j}^{w_i} t^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

e como t^p é estritamente convexa (Proposição D.4), podemos limitá-la superiormente pela reta secante que passa pelos pontos (w_i, w_i^p) e (w_j, w_j^p) , obtendo

$$\left(\frac{w_i^p - w_j^p}{w_i - w_j} \right)^q \leq \frac{p^q}{w_i - w_j} \int_{w_j}^{w_i} t^p dt \leq p^q \left(\frac{w_i^p + w_j^p}{2} \right).$$

Substituindo esse termo no último fator em (6.5), obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{ij \in E} \left(\frac{w_i^p - w_j^p}{w_i - w_j} \right)^q \right)^{1/q} &\leq p \left(\sum_{ij \in E} \frac{w_i^p + w_j^p}{2} \right)^{1/q} = \frac{p}{2^{1/q}} \left(\sum_{i \in V} d_i w_i^p \right)^{1/q} \\
&\leq \frac{p}{2^{1/q}} (\Delta_G \|w\|_p^p)^{1/q} = p \left(\frac{\Delta_G}{2} \right)^{\frac{p-1}{p}} \|w\|_p^{p-1}.
\end{aligned}$$

Com isso em mãos, juntamos (6.4) e (6.5) para obter

$$c_w(U) \|w\|_p^p \leq \sum_{ij \in E} |w_i^p - w_j^p| \leq \left(\sum_{ij \in E} |w_i - w_j|^p \right)^{1/p} p \left(\frac{\Delta_G}{2} \right)^{\frac{p-1}{p}} \|w\|_p^{p-1}.$$

A desigualdade do enunciado é obtida desconsiderando a parte do meio da desigualdade acima, elevando ambos os lados à p -ésima potência e rearranjando os termos. \square

Enfim, podemos proceder à prova do Teorema 6.6, que enunciamos novamente. Para $p > 1$,

$$\left(\frac{2}{\Delta_G} \right)^{p-1} \left(\frac{\psi(G)}{p} \right)^p \leq \nu_p^p(G) \leq 2^{p-1} \psi(G).$$

Em particular, $\lim_{p \rightarrow 1^+} \nu_p^p(G) = \psi(G)$.

Demonstração do Teorema 6.6. Pelo Teorema 6.5, o resultado vale trivialmente se G tem um componente bipartido. A cota superior vem do Lema 6.7. Seja x tal que $\|x\|_p = 1$ e $R_p^p(x) = \nu_p^p(G)$, e os conjuntos

$$S = \{i \in V : x_i > 0\} \quad \text{e} \quad T = \{i \in V : x_i < 0\}.$$

Construiremos um grafo $G' = (V', E')$ como segue. Primeiramente, criamos cópias de S e T , ou seja, $S' = \{i' : i \in S\}$ e $T' = \{i' : i \in T\}$, e as adicionamos a V :

$$V' = V \cup S' \cup T'.$$

Já para construir E' , fazemos

$$E' = E(S, T) \cup E(S \cap T, V \setminus (S \cup T)) \cup \{i'j, ij' : ij \in E(S) \cup E(T)\}.$$

Na Figura 6.2 é esquematizada a construção de G' . Note que cada aresta ij em $E(S)$ ou $E(T)$ foi substituída por duas arestas ij' e $i'j$. Defina agora $w \in \mathbb{R}^{|V'|}$ tal que

$$w_i = \begin{cases} |x_i|, & \text{se } i \in S \cup T, \\ 0, & \text{c. c.} \end{cases} \quad (6.6)$$

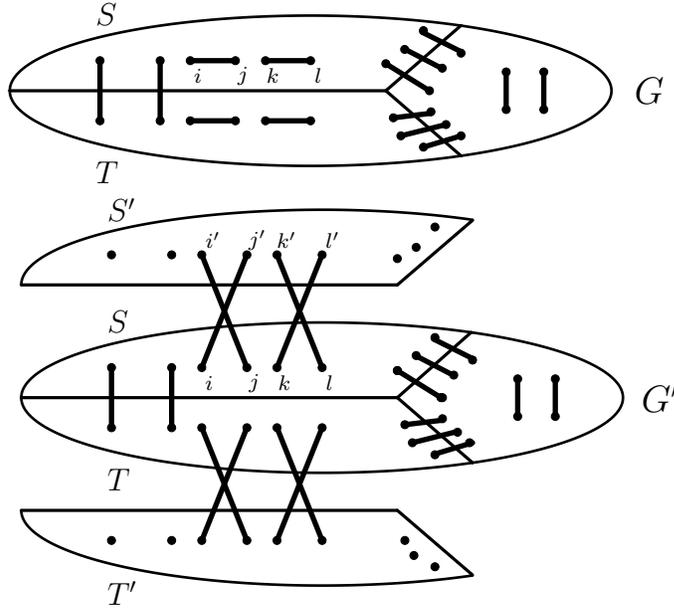


Figura 6.2: Construção de G' a partir de G .

Note que $\|w\|_p = 1$. Mostraremos que

$$\sum_{ij \in E'} |w_i - w_j|^p \leq \sum_{ij \in E} |x_i + x_j|^p. \quad (6.7)$$

Considere uma aresta $ij \in E(S) \cup E(T)$. Então temos $ij', i'j \in E'$ com $w_{i'} = w_{j'} = 0$, logo

$$|w_i - w_j|^p + |w_{i'} - w_{j'}|^p = w_i^p + w_j^p \leq (|x_i| + |x_j|)^p = |x_i + x_j|^p.$$

A desigualdade vale pela convexidade de $|t|^p$, e a última igualdade vale porque x_i e x_j têm o mesmo sinal. Para o restante das arestas, pode-se verificar facilmente que $|w_i - w_j|^p = |x_i + x_j|^p$. Mostraremos agora que

$$c_w(S \cup T) \geq \psi(G). \quad (6.8)$$

Considere o conjunto C_w^t tal que $c_w(S \cup T) = \frac{\text{cut}(C_w^t)}{|C_w^t|}$ para algum $t \in \{0, \max_{i \in V} w_i\}$, e defina

$$S^t = C_w^t \cap S \quad \text{e} \quad T^t = C_w^t \cap T.$$

Então, em G , pela definição de ψ ,

$$2|E(S^t)| + 2|E(T^t)| + \text{cut}(S^t \cup T^t) \geq \psi(G)|S^t \cup T^t|.$$

Agora vamos determinar $\text{cut}_{G'}(S^t \cup T^t)$. Para cada aresta $ij \in E(S^t) \cup E(T^t)$, temos em E' duas arestas $i'j$ e ij' no corte. Além disso, devemos contar as arestas em $E(S^t \cup T^t, V \setminus (S^t \cup T^t))$, que são em número de $\text{cut}_G(S^t \cup T^t)$. Então temos

$$c_w(S \cup T) \geq \frac{\text{cut}_{G'}(S^t \cup T^t)}{|S^t \cup T^t|} = \frac{2|E(S^t)| + 2|E(T^t)| + \text{cut}_G(S^t \cup T^t)}{|S^t \cup T^t|} \geq \psi(G).$$

Finalmente, aplicamos o Lema 6.8 a G' (com $U = S \cup T$), levando em conta as cotas dadas por (6.7) e (6.8) e os fatos de que $\Delta_{G'} = \Delta_G$ e $\|w\|_p = \|x\|_p = 1$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{\Delta_{G'}}\right)^{p-1} \left(\frac{\psi(G)}{p}\right)^p &\leq \left(\frac{2}{\Delta_G}\right)^{p-1} \left(\frac{c_w(S \cup T)}{p}\right)^p \\ &\leq \sum_{ij \in E} |w_i - w_j|^p \leq \min_{\|x\|_p=1} \sum_{ij \in E} |x_i + x_j|^q = \nu_p^p(G). \end{aligned}$$

□

6.2 O caso $p = \infty$, $q \rightarrow \infty$

Nesta seção faremos uma análise similar àquela usada nas Seções 4.5 e 5.5. Imitando a Proposição 5.36, podemos ver que, para qualquer grafo G ,

$\lim_{q \rightarrow \infty} \nu_p^q(G) = 0$. Definimos então a seguinte quantidade:

$$\tilde{\nu}_p^\infty(G) = \min_{\|x\|_p=1} \max_{ij \in E} |x_i + x_j|. \quad (6.9)$$

No caso $p = \infty$, escrevemos

$$\tilde{\nu}_\infty^\infty(G) = \min_{\|x\|_p=1} \max_{ij \in E} |x_i + x_j|. \quad (6.10)$$

Seguindo o mesmo método da Proposição 5.37, obtemos uma relação dessa quantidade com o tamanho de passeios fechados ímpares, ou seja, sequências de vértices $ui_1i_2 \dots i_{2k}u$ onde $k \in \mathbb{N}$ e vértices consecutivos na sequência são vizinhos. Lembramos que um grafo é bipartido se, e somente se, não contém um ciclo ímpar [22, Proposição 1.6.1].

Proposição 6.9. *Seja $G = (V, E)$ um grafo, e para $u \in V$ denote por $\ell(u)$ o tamanho do menor passeio fechado ímpar começando em u , com $\ell(u) = \infty$ se tal passeio não existir. Então*

$$\tilde{\nu}_\infty^\infty(G) = \frac{2}{\max_{u \in V} \ell(u)}. \quad (6.11)$$

Demonstração. Se G tem um componente bipartido G_v , então G_v não contém ciclos ímpares e logo não contém passeios fechados ímpares (pois todo passeio fechado ímpar contém um ciclo ímpar), logo $\ell(u) = \infty$ para cada $u \in V$ e estamos prontos. Assumimos então que G não tem componentes bipartidos. Podemos reescrever (6.10) como

$$\tilde{\nu}_\infty^\infty(G) = \min_{u \in V} \alpha_u,$$

onde α_u é a solução de

$$\begin{aligned} & \min && \alpha \\ \text{sujeito a} & && -\alpha \leq x_i + x_j \leq \alpha, \quad ij \in E \\ & && -1 \leq x_i \leq 1, \quad i \in V \\ & && x_u = 1 \end{aligned}$$

Sendo que $\alpha > 0$ e $1/\alpha_u$ é a solução de

$$\begin{aligned} & \max && y_u \\ \text{sujeito a} & && -1 \leq y_i + y_j \leq 1, \quad ij \in E \\ & && -y_u \leq y_i \leq y_u, \quad i \in V \end{aligned}$$

Seja $ui_1i_2 \cdots i_{2k}u$ um passeio ímpar fechado de tamanho $\ell(u) = 2k + 1$. Observe que esse passeio existe para cada $u \in V$, pois existe ao menos um ciclo ímpar no componente onde u está, e se u não está no ciclo podemos adicionar ao ciclo um caminho de u a um vértice no ciclo, obtendo assim um passeio como desejado.

Escrevendo a primeira restrição acima para cada aresta deste caminho,

$$\begin{array}{rcccc}
 -1 \leq & y_u & +y_{i_1} & & \leq 1 \\
 -1 \leq & & -y_{i_1} & -y_{i_2} & \leq 1 \\
 & & & \vdots & \\
 -1 \leq & & & -y_{2k-1} & -y_{2k} & \leq 1 \\
 -1 \leq & & & & y_{2k} & +y_u & \leq 1
 \end{array}$$

obtemos $-\ell(u) \leq 2y_u \leq \ell(u)$, o que implica que $y_u \leq \ell(u)/2$. Pode-se verificar que o vetor y cujas entradas são dadas por

$$y_i = \begin{cases} (-1)^{d(i,u)}(k - d(i,u) + \frac{1}{2}), & \text{se } d(i,u) \geq k, \\ 0, & d(i,u) < k. \end{cases}$$

é viável e satisfaz $y_u = \ell(u)/2$, o que equivale a

$$\frac{1}{\alpha_u} = \frac{\ell(u)}{2},$$

e finalmente temos

$$\tilde{\nu}_\infty(G) = \min_{u \in V} \frac{1}{\alpha_u} = \min_{u \in V} \frac{2}{\ell(u)} = \frac{2}{\max_{u \in V} \ell(u)}.$$

□

7 CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho introduzimos os p -autovalores do q -laplaciano L_q e p -autovetores a estes associados. Investigamos $\mu_p^q(G)$, o maior p -autovalor de L_q , que chamamos de raio p -espectral q -laplaciano, e $a_p^q(G)$, o segundo menor p -autovalor de L_q , que chamamos de conectividade (p, q) -algébrica. Também definimos uma variante “sem sinal” de L_q , que denotamos por Q_q , e estudamos o seu menor p -autovalor, $\nu_p^q(G)$. Mostramos, para diversas escolhas de p e q , que estes parâmetros se relacionam com diferentes invariantes de Teoria dos Grafos. Foram submetidos três artigos [8, 9, 10] sobre os resultados dos capítulos 4, 5 e 6, um para cada capítulo. Os resultados do capítulo 4 e do capítulo 6 encontram-se em fase de revisão, com recomendação de publicação, nos periódicos *Applicable Analysis and Discrete Mathematics* e *Electronic Journal of Combinatorics*, respectivamente.

A seguir, resumimos alguns dos resultados obtidos. Por “ $q = \infty^*$ ” nos referimos à variante em que usamos a raiz q -ésima do p -autovalor. Além disso, obtemos cotas para $\mu_p^2(G)$ (Teorema 4.15) e $\nu_p^p(G)$ (Teorema 6.6).

G	p	q	$\mu_p^q(G)$
qualquer	1	$\in [1, \infty]$	Δ_G
qualquer	∞	$\in [1, \infty)$	$2^q \text{maxcut}(G)$

G	p	q	$a_p^q(G)$
desconexo	$\in [1, \infty]$	$\in [1, \infty]$	0
qualquer	1	1	h_G
qualquer exceto K_2	> 1	∞	0
qualquer	∞	∞^*	$\frac{2}{\text{diam}(G)}$
qualquer	∞	2	$\frac{4}{\max_{i,j \in V} \Omega_{ij}}$

G	p	q	$\nu_p^q(G)$
com componente bipartido	$\in [1, \infty]$	$\in [1, \infty]$	0
qualquer	1	1	$\psi(G)$
qualquer	∞	∞^*	$\frac{2}{\max_{u \in V} \ell(u)}$

Claramente, ainda existem diversos casos particulares que podem serem explorados. Por exemplo, pode ser feito um estudo direto de ν_1^1 , semelhante ao existente para a_1^1 .

Como exemplo de aplicação dessa teoria em algoritmos, Hein e Bühler [30] propuseram um método de potência inversa para aproximar o corte de Cheeger baseado em p -autovetores de L_p . Talvez seja possível adaptar esse método para a computação de $\psi(G)$ utilizando p -autovetores de Q_p . Aliás, enquanto o problema do Corte de Cheeger é tido como \mathcal{NP} -completo, não encontramos na literatura a classe de complexidade do problema da obtenção de $\psi(G)$. Talvez a obtenção de um método lance alguma luz sobre essa questão.

Aliás, várias questões estão em aberto sobre a classe de complexidade dos problemas. Por exemplo, sabemos que a obtenção de μ_1^q , a_2^∞ e \tilde{a}_∞ é feita em tempo polinomial, enquanto que a obtenção de μ_∞^q , a_1^1 e possivelmente a_1^2 (Conjectura 5.32) são problemas \mathcal{NP} -completos. Talvez haja alguma monotonicidade na complexidade desses problemas; por exemplo, pode ser o caso de, para q fixo, a obtenção de μ_p^q ser mais difícil (ou pelo menos tão difícil) de obter quanto maior é o valor de p (e talvez o oposto ocorra para a_p^q).

Referências Bibliográficas

- [1] ABREU, N., DEL-VECCHIO, R., TREVISAN, V., AND VINAGRE, C. Teoria espectral de grafos - uma introdução. III Colóquio de Matemática da Região Sul, Florianópolis, 2014.
- [2] AMGHIBECH, S. Eigenvalues of the discrete p -laplacian for graphs. *Ars Combinatoria* 67 (2003), 283–302.
- [3] BAPAT, R. B., GUTMAN, I., AND XIAO, W. A simple method for computing resistance distance. *Zeitschrift für Naturforschung* 58a (2003), 494–498.
- [4] BAZAARA, M. S., SHERALI, H. D., AND SHETTY, C. M. *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. John Wiley & Sons, 2006.
- [5] BÜHLER, T., H. M. Spectral clustering based on the graph p -laplacian. In *Proceedings of the 26th International Conference on Machine Learning* (2009), Omnipress, pp. 81–88.
- [6] BÜHLER, T., H. M. Supplementary material for spectral clustering based on the graph p -laplacian, 2009.
- [7] BONACICH, P. Factoring and weighting approaches to status scores and clique identification. *J. Math. Sociol.* 2 (1972), 113–120.
- [8] BORBA, E. M., RICHTER, S., FRITSCHER, E., AND HOPPEN, C. The p -spectral radius of the laplacian. *preprint arxiv.org:1612.02643* (2016).
- [9] BORBA, E. M., RICHTER, S., AND SCHWERDTFEGGER, U. Non-linear generalizations of eigenvalues of graph laplacians and algebraic connectivity. *preprint www.tu-chemnitz.de/mathematik/preprint/* (2017).

- [10] BORBA, E. M., AND SCHWERDTFEGGER, U. Eigenvalue bounds for the signless p -laplacian. *preprint arxiv.org:1610.01357* (2016).
- [11] BROUWER, A. E., AND HAEMERS, W. H. *Spectra of Graphs*. Springer, 2012.
- [12] BRYAN, K., AND LEISE, T. The \$25,000,000,000 eigenvector: The linear algebra behind Google. *SIAM Rev* 812 (2006), 1–11.
- [13] BULLEN, P. S. *Handbook of means and their inequalities*. Kluwer Academic Publishers, 2003.
- [14] CHAIKEN, A. A combinatorial proof of the all minors matrix tree theorem. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods* 23 (1982), 319–329.
- [15] CHEEGER, J. *Problems in Analysis*. Princeton Univ. Press, 1970, ch. A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian, pp. 195–199.
- [16] CHUNG, F. R. K. *Spectral graph theory*, vol. 92. American Mathematical Society, 1997.
- [17] CLARKE, F. H. *Optimization and nonsmooth analysis*. SIAM, 1990.
- [18] CORMEN, T. H., LEISERSON, C. E., RIVEST, R. L., AND STEIN, C. *Introduction to Algorithms*. MIT Press and McGraw-Hill, 2001.
- [19] CVETKOVIĆ, D. M., ROWLINSON, P., AND SIMIC, S. *An introduction to the theory of graph spectra*. Cambridge University Press Cambridge, UK, 2010.
- [20] DE LIMA, L. S., OLIVEIRA, C. S., DE ABREU, N. M. M., AND NIKIFOROV, V. The smallest eigenvalue of the signless laplacian. *Linear Algebra and its Applications* 435, 10 (2011), 2570–2584.
- [21] DESAI, M., AND RAO, V. A characterization of the smallest eigenvalue of a graph. *Journal of Graph Theory* 18, 2 (1994), 181–194.

- [22] DIESTEL, R. *Graph Theory*. Springer-Verlag, 2005.
- [23] FIEDLER, M. Algebraic connectivity of graphs. *Czechoslovak Math. J.* 23 (1973), 298–305.
- [24] GAREY, M. R., AND JOHNSON, D. S. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. 1979.
- [25] GAREY, M. R., JOHNSON, D. S., AND STOCKMEYER, L. Some simplified np-complete problems. In *Proceedings of the Sixth Annual ACM Symposium on Theory of Computing* (1974), pp. 47–63.
- [26] GOEMANS, M. X., AND WILLIAMSON, D. P. Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming. *Journal of the ACM (JACM)* 42, 6 (1995), 1115–1145.
- [27] GOLUB, G. H., AND VAN DER VORST, H. A. Eigenvalue computation in the 20th century. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 123 (2000), 35–65.
- [28] GUTMAN, I., VIDOVIĆ, D., AND STEVANOVIĆ, D. Chemical applications of the laplacian spectrum. VI. on the largest laplacian eigenvalue of alkanes. *J. Serb. Chem. Soc.* 67 (2002), 407–413.
- [29] HARDY, G. H., LITTLEWOOD, J. E., AND PÓLYA, G. *Inequalities*. Cambridge University Press, 1952.
- [30] HEIN, M., AND BÜHLER, T. An inverse power method for nonlinear eigenproblems with applications in 1-spectral clustering and sparse pca. In *Advances in Neural Information Processing Systems* (2010), pp. 847–855.
- [31] HORN, R. A., AND JOHNSON, C. R. *Matrix Analysis*. 1985.
- [32] HÜCKEL, E. Quantentheoretische beiträge zum benzolproblem. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei* 70, 3 (1931), 204–286.

- [33] IZMAILOV, A., AND SOLODOV, M. *Otimização - vol 1: Condições de otimalidade, elementos de análise convexa e de dualidade*. IMPA, 2005.
- [34] KANG, L., AND NIKIFOROV, V. Extremal problems for the p -spectral radius of graphs, 2014.
- [35] KARUSH, W. Minima of functions of several variables with inequalities as side constraints. Master's thesis, Univ. of Chicago, Chicago, Illinois., 1939.
- [36] KEEVASH, P., LENZ, J., AND MUBAYI, D. Spectral extremal problems for hypergraphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 28, 4 (2014), 1838–1854.
- [37] KIRCHHOFF, G. Über die auflösung der gleichungen, auf welche man bei der untersuchung der linearen vertheilung galvanischer ströme geführt wird. *Annalen der Physik* 148, 12 (1847), 497–508.
- [38] KLEIN, D. J., AND RANDIĆ, M. Resistance distance. *Journal of Mathematical Chemistry*, 12 (1993), 81–95.
- [39] KUHN, H. W., AND TUCKER, A. W. Nonlinear programming. In *Proceedings of 2nd Berkeley Symposium* (1951), University of California Press, pp. 481–492.
- [40] LIMA, E. L. *Análise real*. IMPA, 2004.
- [41] LUXBURG, U. A tutorial on spectral clustering. *Statistics and Computing*, 17. (2007).
- [42] MOHAR, B. Isoperimetric numbers of graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 47, 3 (1989), 274–291.
- [43] MOHAR, B. Some applications of laplace eigenvalues of graphs. In *Graph symmetry*. Springer, 1997, pp. 225–275.

- [44] MOTZKIN, T. S., AND STRAUS, E. G. Maxima for graphs and a new proof of a theorem of Turán. *Canad. J. Math.* 17 (1965), 533–540.
- [45] NIKIFOROV, V. Bounds on graph eigenvalues II. *Linear Algebra and its Applications*, 427 (2007), 183–189.
- [46] PEČARIĆ, J., AND PEJKOVIĆ. On an integral inequality. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics* 5(2) (2004).
- [47] SIPSER, M. *Introduction to the Theory of Computation*. PWS, 1997.
- [48] TURÁN, P. On an extremal problem in graph theory (em húngaro). *Matematikai és Fizikai Lapok* 48 (1941), 436–452.
- [49] TUY, H. *Convex Analysis and Global Optimization*. Springer, 2016.
- [50] VAN DAM, E. R., AND HAEMERS, W. H. Which graphs are determined by their spectrum? *Linear Algebra and its Applications* 373 (2003), 241–272.
- [51] WAGNER, D., AND WAGNER, F. Between min cut and graph bisection. In *Proceedings of the 18th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science* (1993), pp. 744–750.
- [52] YE, Y., AND TSE, E. An extension of karmarkar’s projective algorithm for convex quadratic algorithm. *Mathematical Programming*, 44 (1989), 157–159.

APÊNDICES

Aqui reunimos alguns conceitos básicos de Teoria de Matrizes, Grafos e Otimização, bem como alguns resultados menores e algumas provas cuja inclusão poderia carregar desnecessariamente o texto.

A Teoria de Matrizes

Seja M uma matriz $n \times n$. Os *autovalores* de M são escalares tais que a equação $Mx = \lambda x$ possui solução $x \neq 0$. Tal vetor x é dito um *autovetor* associado a λ . Os autovalores podem ser calculados como raízes do polinômio $p_M(\lambda) = \det(\lambda I - M)$. Chamamos de *espectro* de M o conjunto dos autovalores λ de M , junto com suas respectivas multiplicidades como raiz de $p_M(\lambda)$.

Como visto na Seção 2.1, grafos podem ser representados por meio de matrizes simétricas. Uma característica notável das matrizes simétricas é que todos os seus autovalores são reais. Os Teoremas de Rayleigh e de Courant-Fischer permitem que se formule a obtenção de autovalores de uma matriz real simétrica como problemas de otimização.

Teorema A.1 (Rayleigh-Ritz, [31], Teorema 4.2.2, caso simétrico). *Seja M uma matriz real e simétrica de ordem n com autovalores $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. Então*

$$\lambda_n = \max_{x \neq 0} \frac{x^T M x}{x^T x} = \max_{x \neq 0} \frac{x^T M x}{x^T x} = \max_{\|x\|=1} x^T M x,$$

$$\lambda_1 = \min_{x \neq 0} \frac{x^T M x}{x^T x} = \min_{x \neq 0} \frac{x^T M x}{x^T x} = \min_{\|x\|=1} x^T M x.$$

Se um vetor x satisfaz a primeira igualdade, então x é um autovetor associado a λ_n , e se satisfaz a segunda igualdade, então x é um autovetor associado a λ_1 .

Teorema A.2 (Courant-Fischer, [31], Teorema 4.2.11, caso simétrico). *Seja M uma matriz real e simétrica de ordem n com autovalores $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. Então*

$$\lambda_k = \min_{\{S:\dim S=k\}} \max_{x \neq 0 \in S} \frac{x^T M x}{x^T x} = \max_{\{S:\dim S=n-k+1\}} \min_{x \neq 0 \in S} \frac{x^T M x}{x^T x},$$

onde S designa subespaços de \mathbb{R}^n . Se um vetor x satisfaz a igualdade, então x é um autovetor associado a λ_k .

M é dita *não negativa* se todas suas entradas são não negativas, e M é *reduzível* se existe uma matriz de permutação P tal que $P^{-1}MP$ é particionada em blocos diagonais; caso contrário, M é *irreduzível*. O *raio espectral* (ou *índice*) de M , denotado por $\rho(M)$, é definido como o máximo dentre os valores absolutos dos autovalores de M . Uma matriz simétrica M é *positiva semidefinida* se $x^T M x \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Teorema A.3 ([31], Teorema 7.2.1, caso simétrico). *Uma matriz simétrica M é positiva semidefinida se e somente se todos os seus autovalores são maiores ou iguais a zero.*

B Teoria dos Grafos

Esta seção contém as definições de Teoria de Grafos contidas nesse trabalho, além de alguns resultados básicos. Mais detalhes podem ser encontrados no livro de Diestel [22]. Um grafo de ordem n em que todo par de vértices está conectado por uma aresta é dito *completo*, denotado por K_n . Um vértice de grau zero (ou seja, sem vizinhos) é dito *isolado*.

Um **subgrafo** de G é um grafo $G' = (V', E')$ tal que $V' \subseteq V$. Podemos dizer que G contém G' ($G' \subseteq G$). Se todas as arestas entre vértices de V' também estão em G' , dizemos que G' é um **subgrafo induzido** por V' , o que denotamos por $G[V']$. O *número de clique* de G , denotado por $\omega(G)$, é o maior inteiro r tal que $K_r \subseteq G$.

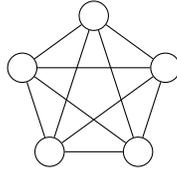


Figura 7.1: O grafo completo K_5 .

Um grafo G é dito *conexo* se sempre existe um caminho entre dois vértices quaisquer; caso contrário, G é dito *desconexo*. Uma *componente* de G é um subgrafo conexo maximal.

Fazemos uma *partição* em (ou *particionamos*) um grafo $G = (V, E)$ se separamos V em subconjuntos disjuntos e não-vazios (*classes*) cuja união é V . Se podemos particionar G em r classes de modo que não haja aresta entre vértices na mesma classe, G é dito *r-partido*; se, além disso, quaisquer dois vértices de classes diferentes forem adjacentes, G é dito *r-partido completo*. Se houverem apenas duas classes V_1 e $V_2 (= \overline{V_1})$, então $G = (V_1, V_2, E)$ é *bipartido*. Um grafo bipartido completo em que $|V_1| = p$ e $|V_2| = q$ é denotado por $K_{p,q}$.

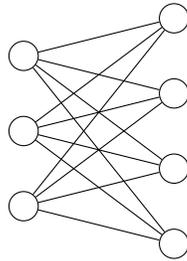


Figura 7.2: O grafo bipartido completo $K_{3,4}$.

C Análise e otimização

Essa seção contém algumas definições e resultados de Análise Real e Otimização que serão necessários para o desenvolvimento do trabalho. Mais detalhes podem ser encontrados em livros como o de Bazaara [4] e o de Izmailov [33].

Proposição C.1. *Sejam $x \in \mathbb{R}^n$ e $p, q \in [1, \infty]$. Então*

$$q > p \implies \|x\|_p \geq \|x\|_q,$$

com igualdade se e somente se x é nulo ou $x = \pm e_i, i = 1, \dots, n$.

Demonstração. Para vetores nulos o resultado é trivial. Sem perda de generalidade, considere que $\|x\|_q = 1$. Então $|x_i| \leq 1$ e logo $|x_i|^p \leq |x_i|^q$ para $i = 1, \dots, n$. Daí $\|x\|_p^p = \sum_i |x_i|^p \leq \sum_i |x_i|^q = \|x\|_q^q = 1$, logo $\|x\|_p \leq 1 = \|x\|_q$.

O “se” da condição de igualdade é trivial. Para o “somente se”, considere o problema $\min_{\|x\|_p=1} \|x\|_q$. A condição de Lagrange para um multiplicador λ e $i = 1, \dots, n$ é $q|x_i|^{q-1}\text{sign}(x_i) = \lambda p|x_i|^{p-1}\text{sign}(x_i)$, de modo que $x_i = 0$ ou $|x_j| = |x_k| = a$ se $x_j x_k \neq 0$, para algum $a \in (0, 1]$. Como $\|x\|_p \geq \|x\|_q = 1$, então $a^p \geq a^q$, e a igualdade vale somente se $a = 1$. Como $\|x\|_q = 1$, x só pode ter uma entrada com $\|x_j\| = 1$. \square

Denotamos a p -ésima *power mean* de $x \in \mathbb{R}^n$ por

$$M_p(x) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} = n^{-1/p} \|x\|_p.$$

Em particular, para vetores não-negativos, $M_{-\infty}$ é o mínimo, M_{-1} é a média harmônica, M_1 é a média aritmética, M_2 é a média quadrática e M_∞ é o máximo. Além disso, $M_p(x)$ é uma norma de x .

Teorema C.2 (*Power Mean Inequality*, [13], p. 202, Teorema 1, $\underline{w} = \mathbf{1}$). *Sejam $r, s \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Então*

$$r > s \implies M_r(x) \geq M_s(x),$$

com igualdade se e somente se $|x_1| = |x_2| = \dots = |x_n|$.

Essa desigualdade pode ser estendida para integrais.

Teorema C.3 (*Power Mean Inequality*, forma integral [46], Lema 2.1). *O Teorema C.2 também vale se substituirmos x por uma função não-negativa integrável $f(t)$ e definindo*

$$M_p(f(t)) = \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b (f(t))^p dt \right)^{1/p}.$$

A seguir, dois lemas técnicos que fornecem cotas úteis.

Lema C.4. *Sejam $r > s \geq 1$. Então para um vetor não-nulo $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$\|x\|_r \leq \|x\|_s \leq n^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}} \|x\|_r.$$

Além disso, a cota inferior é atingida apenas por $x = \pm e_i$, e para um vetor x^ que atinja a cota superior vale que $|x_i^*| = n^{-1/r} \|x\|_r$ para qualquer $i = 1, \dots, n$.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos assumir que x tem entradas não-negativas e $\|x\|_r = 1$. A cota inferior e a respectiva condição de igualdade seguem da Proposição C.1. A cota superior segue da *Power Mean Inequality*, pois $M_r(x) \geq M_s(x)$, pode ser rearranjado como $n^{-1/r} \|x\|_r \geq n^{-1/s} \|x\|_s$, com igualdade se e somente se todas as entradas são iguais a $n^{-1/r}$. \square

Lema C.5. *Seja uma matriz simétrica e positiva semidefinida com raio espectral λ , e $x \in \mathbb{R}^n$ com $\|x\|_p = 1$. Então*

$$x^T M x \leq \lambda n^{|1-2/p|},$$

com igualdade se e somente se $|x_i| = n^{-1/p}$ para qualquer $i = 1, \dots, n$

Demonstração. O resultado é trivial para $p = 2$. Pelo Teorema de Rayleigh-Ritz, $x^T M x \leq \lambda \|x\|_2^2$. Se $p > 2$, aplicando o Lema C.4 com $r = p$ e $s = 2$, obtemos $\max_{x: \|x\|_p=1} \|x\|_2 = n^{1/2-1/p}$, e logo $x^T M x \leq \lambda n^{1-2/p}$. Analogamente, para $p < 2$ obtemos $x^T M x \leq \lambda n^{2/p-1}$. \square

Uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é dita uma função *afim* se tem a forma $f(x) = Ax + b$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$.

Um conjunto $C \in \mathbb{R}^n$ é *convexo* se, para $x_1, x_2 \in C$ e $0 \leq t \leq 1$, $tx_1 + (1-t)x_2 \in C$. Exemplos de conjuntos convexos incluem hiperplanos, polítopos e bolas em uma p -norma. Uma função $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ é *convexa* se seu domínio C é convexo e para t, u em seu domínio e $\alpha \in (0, 1)$ vale a desigualdade

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2). \quad (7.1)$$

Se a desigualdade é estrita, dizemos que f é *estritamente convexa*.

Exemplos de funções convexas incluem x^a em \mathbb{R}_+ e $|x|^a$ em \mathbb{R} ($a \geq 1$) e p -normas em \mathbb{R}^n . Lembramos que, para uma função f duas vezes diferenciável, a sua *Hessiana* é a matriz $H_x f = [h_{ij}]$, onde $h_{ij} = \partial^2 f / \partial x_i \partial x_j$. Uma condição necessária e suficiente para f ser convexa é que $H_x f$ seja positiva semidefinida. Por exemplo, para formas quadráticas $q(x) = x^T M x$, temos que $H_x q = 2M$, logo $q(x)$ é convexa se e somente se M é positiva semidefinida.

Nestes termos, o Teorema de Taylor [40, cap. 3, Teorema 5] pode ser escrito como

Teorema C.6. *Seja f uma função duas vezes diferenciável em $S \subset \mathbb{R}^n$. Fixado $x \in S$, para todo $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $x + a \in S$,*

$$f(x + a) - f(x) = a^T \nabla_x f(x) + \frac{1}{2} a^T H_x f(x) a + r(a),$$

com $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{r(a)}{\|a\|_2^2} = 0$.

C.1 Problemas de Otimização e condições KKT

Seja $x \in \mathbb{R}^n$. Um *problema de otimização* tem a forma

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{sujeito a} \quad & g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & h_j(x) = 0 \quad j = 1, \dots, \ell, \end{aligned}$$

onde f, g e h são funções $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. O problema é apresentado como de minimização por convenção; para maximização, basta minimizar $-f(x)$. As funções g_i são chamadas *restrições de desigualdade* e as funções h_j são chamadas *restrições de igualdade*. Um vetor x que satisfaça as restrições é dito um vetor (ou ponto, ou solução) *viável*. Se x^* é viável e é tal que $f(x^*) \leq f(x)$ para qualquer x viável, então x^* é dito um vetor (ou ponto) *ótimo* (ou solução ótima) do problema de otimização.

Por concisão, podemos alternativamente representar as restrições por funções vetoriais $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\ell$:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{sujeito a} \quad & g(x) \leq 0 \\ & h(x) = 0. \end{aligned}$$

As condições de Karush-Kuhn-Tucker (ou condições KKT) [39, 35] são condições necessárias para que um vetor x^* seja um mínimo local, desde que algumas condições de regularidade sejam satisfeitas. Seja um problema de otimização em que a função objetivo e as restrições são subdiferenciáveis em um ponto x^* (denotamos o subdiferencial por ∂_x). Se x^* é um mínimo local, existem $\mu \in \mathbb{R}^m$ e $\lambda \in \mathbb{R}^\ell$ tais que as seguintes condições são satisfeitas:

Estacionariedade	$\partial_x f(x^*) + \mu^T \partial_x g(x^*) + \lambda^T \partial_x h(x^*) \ni 0$
Viabilidade primal	$g(x^*) \leq 0$ e $h(x^*) = 0$
Viabilidade dual	$\mu \geq 0$
Folga complementar	$\mu^T g(x^*) = 0$

Para funções diferenciáveis, o subdiferencial ∂_x pode ser substituído pelo gradiente ∇_x . Os componentes de μ e λ são chamados *multiplicadores KKT*. Caso $m = 0$, ou seja, se não houver restrições de desigualdade, os componentes de λ são chamados de *multiplicadores de Lagrange*.

As condições KKT são também *suficientes* para que x^* seja um mínimo se as condições a seguir forem satisfeitas: a função objetivo f é convexa, as funções das restrições de desigualdade são convexas e as funções das restrições de igualdade são afins.

C.2 Soluções em pontos extremos

Um ponto x em um conjunto convexo C é dito um *ponto extremo* de C se não existem pontos distintos $y, z \in C$ tais que $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$ para algum $\alpha \in (0, 1)$.

Proposição C.7. *Para $1 < p < \infty$, todo ponto da p -bola unitária é extremo.*

Demonstração. Suponha que $1 \leq p < \infty$ e que o ponto $x \in \mathbb{R}^n$ com $\|x\|_p = 1$ não é extremo. Então existem $y, z \in \mathbb{R}^n$, $y \neq x \neq z$, com $\|y\|_p = \|z\|_p = 1$ e tais que $x = \frac{y+z}{2}$, então $2\|x\|_p = 2 = \|y + z\|_p$. Daí segue que

$$2^p = \|y + z\|_p^p = \sum (|y_i|^p + |z_i|^p) = \|y\|_p^p + \|z\|_p^p = 2,$$

o que significa que $p = 1$. □

Teorema C.8 ([49], Corolário 2.14). *Seja f uma função convexa definida em um conjunto compacto convexo Ω . Se f tem um máximo em Ω , este é atingido em um ponto extremo de Ω .*

C.3 Parâmetros estatísticos baseados em p -normas

Aqui definiremos e apresentaremos algumas propriedades de versões de média, variância e desvio padrão baseados em p -normas. Provas das Proposições C.12, C.10, C.13 podem ser encontradas em [5], mas incluímos aqui versões curtas, para completude. Exceto onde indicado de forma diferente, as somas são sobre $i = 1, \dots, n$.

Definição C.9. *Seja $x \in \mathbb{R}^n$ um vetor e $p \geq 1$. A p -variância σ_p^p , a p -média m_p e o p -desvio padrão σ_p são dados por*

$$\sigma_p^p(x) = \min_{m \in \mathbb{R}} \|x - m\mathbf{1}\|_p^p, \quad m_p(x) = \arg \min_{m \in \mathbb{R}} \|x - m\mathbf{1}\|_p^p, \quad \sigma_p(x) = \sqrt[p]{\sigma_p^p(x)}.$$

Lembrando que $\|x - m\mathbf{1}\|_p^p = \sum |x_i - m|^p$. Observe que, para $p = 1$, a p -média pode ser um conjunto de valores.

Proposição C.10. *Seja $x \in \mathbb{R}^n$ e $p > 1$. Então*

$$m = m_p(x) \Leftrightarrow \sum \phi_p(x_i - m) = 0.$$

Demonstração. Calculando $\frac{\partial}{\partial m} \sum |x_i - m|^p = 0$, pode-se verificar que a condição dada é necessária para um minimizador m . Pela convexidade de $\sum |x_i - m|^p$ para $p > 1$, a condição é também suficiente. \square

Proposição C.11. *Seja $x \in \mathbb{R}^n$. Então*

$$m \in m_1(x) \Leftrightarrow \sum \text{Sign}(x_i - m) \ni 0.$$

Demonstração. Temos que $\partial_m \sum |x_i - m| = \sum \text{Sign}(x_i - m) \ni 0$, logo a condição dada é necessária para um minimizador m . Pela convexidade de $\sum |x_i - m|$, a condição é também suficiente. \square

Proposição C.12. *Sejam $x \in \mathbb{R}^n$ e $c \in \mathbb{R}$. Então*

$$(a) \sigma_p^p(x + c\mathbf{1}) = \sigma_p^p(x);$$

$$(b) \sigma_p^p(cx) = |c|^p \sigma_p^p(x);$$

$$(c) m_p(x + c\mathbf{1}) = m_p(x) + c;$$

$$(d) m_p(cx) = |c|m_p(x);$$

(e) Se x não é constante nem um vetor da base canônica, $\sigma_p^p(x)$ é crescente em p .

$$(f) m_\infty(x) = \frac{\max_i x_i + \min_i x_i}{2} \text{ e } \sigma_\infty(x) = \frac{\max_i x_i - \min_i x_i}{2}.$$

Demonstração. (a) Por um lado,

$$\sigma_p^p(x+c\mathbf{1}) = \min_{m \in \mathbb{R}} \sum |x_i+c-m|^p = \sum |x_i+c-m_p(x+c\mathbf{1})|^p \geq \min_{k \in \mathbb{R}} \sum |x_i-k|^p = \sigma_p^p(x).$$

Na igualdade fazemos $k = m_p(x + c\mathbf{1}) - c$. Por outro lado,

$$\sigma_p^p(x+c\mathbf{1}) = \min_{m \in \mathbb{R}} \sum |x_i+c-m|^p \leq \sum |x_i+c-(m_p(x)+c)|^p = \sum |x_i-m_p(x)|^p = \sigma_p^p(x).$$

Isso conclui a prova deste item.

(b) Se $c = 0$ estamos prontos. Se $c \neq 0$, então

$$\sigma_p^p(cx) = \min_{m \in \mathbb{R}} \sum |cx_i-m|^p = |c|^p \min_{m \in \mathbb{R}} \sum \left| x_i - \frac{m}{c} \right|^p = |c|^p \min_{k \in \mathbb{R}} \sum |x_i-k|^p = |c|^p \sigma_p^p(x).$$

Na penúltima igualdade, embora tenhamos alterado o minimizador, o mínimo não se altera.

(c) Pela Proposição C.10, $m = m_p(x)$ satisfaz $\sum \phi_p(x_i - m) = 0$. Seja $m' = m_p(x + c\mathbf{1})$. Então $0 = \sum \phi_p(x_i - m' + c) = \sum \phi_p(x_i - (m' - c))$, logo $m' - c = m_p(x) = m$.

(d) Similarmente ao item (c), sejam $m = m_p(x)$ e $m' = m_p(cx)$. Então $0 = \sum \phi_p(cx_i - m') = |c|^{p-1} \sum \phi_p(x_i - \frac{m'}{c})$, logo $\frac{m'}{c} = m_p(x) = m$.

(e) Trivialmente $\sigma_p^p(x) = 0$ se e somente se x é constante. Pelos itens (a) e (c), para cada p , em vez de x podemos tomar outro vetor com p -média zero e mesmo p -desvio, $x^{(p)} = x - m_p(x)\mathbf{1}$. Então $\sigma_p^p(x^{(p)}) = \|x^{(p)}\|_p^p$, e o resultado segue pela Proposição C.1.

(f) Seja $m = m_p(x)$. Quando $p \rightarrow \infty$, a condição $\sum_i \phi_p(x_i - m) = 0$ pode ser rearranjada como

$$\sum_{i:x_i > m} |x_i - m|^{p-1} = \sum_{i:x_i < m} |m - x_i|^{p-1}.$$

Elevando ambos os lados a $1/p$ e tomando $p \rightarrow \infty$, obtemos

$$\max_i (x_i - m) = \max_i (m - x_i) \Rightarrow \max_i x_i - m = m - \min_i x_i.$$

Logo $m = (\max_i x_i + \min_i x_i)/2$. Aplicando à definição de σ_p ,

$$\|x - m\mathbf{1}\|_\infty = \max_i \left| x_i - \frac{\max_i x_i + \min_i x_i}{2} \right| = \frac{\max_i x_i - \min_i x_i}{2}.$$

□

Proposição C.13. *Seja $x \in \mathbb{R}^n$. Então $\frac{\partial}{\partial x_i} \sigma_p^p(x) = p\phi_p(x_i - m_p(x))$.*

Demonstração. Basta usar que $\sigma_p^p(x) = \|x_i - m_p(x)\|^p$ e $\frac{d}{dx} |x|^p = p\phi(x)$. □

Proposição C.14. *Sejam $x \in \mathbb{R}^n$ e $p' > p \geq 1$. Então $\sigma_p(x) \geq \sigma_{p'}(x)$.*

Demonstração. A partir de (C.9), podemos escrever

$$\sigma_p(x) = \min_{m \in \mathbb{R}} \|x - m\mathbf{1}\|_p = \|x - m_p(x)\mathbf{1}\|_p,$$

e com isso e usando que normas não são crescentes (Proposição C.1), temos que

$$\sigma_{p'}(x) = \min_{m \in \mathbb{R}} \|x - m\mathbf{1}\|_{p'} \leq \|x - m_p(x)\mathbf{1}\|_{p'} \leq \|x - m_p(x)\mathbf{1}\|_p = \sigma_p(x).$$

□

D Resultados auxiliares

Proposição D.1. Para $G = (V, E)$, $\lambda_\infty(G) = 2|E|$.

Demonstração. Para $p = \infty$, a restrição na equação (2.1) torna-se $\max |x_i| \leq 1$. Então, para cada termo da soma, $x_i x_j \leq |x_i x_j| \leq 1$, logo

$$x^T A x = 2 \sum_{ij \in E} x_i x_j \leq 2 \sum_{ij \in E} 1 = 2|E|,$$

sendo que essa cota é atingida por $x = \mathbf{1}$. □

Lema D.2. Seja L_q o q -laplaciano de $G = (V, E)$ e $x \in \mathbb{R}^{|V|}$. Então

$$(a) \partial_x x^T L_q x = q L_q x.$$

$$(b) \partial_x \|x\|_p^p = p \phi_p(x).$$

$$(c) \partial_x \|x\|_p^q = q \|x\|^{q-p} \phi_p(x).$$

Demonstração. (a) $\partial_{x_i} \sum_{ij \in E} |x_i - x_j|^q = \sum_{j:ij \in E} q \phi_q(x_i - x_j) = q(L_q x)_i$.

$$(b) \partial_{x_i} \|x\|_p^p = \partial_{x_i} \sum_{j \in V} |x_j|^p = p \phi_p(x_i).$$

$$(c) \partial_{x_i} \|x\|_p^q = \partial_{x_i} (\|x\|_p^p)^{q/p} = \frac{q}{p} (\|x\|_p^p)^{q/p-1} \partial_{x_i} \|x\|_p^p = q \|x\|^{q-p} \phi_p(x_i). \quad \square$$

Lembramos que uma função é estritamente convexa se satisfaz

$$f(\alpha t + (1 - \alpha)u) < \alpha f(t) + (1 - \alpha)f(u). \quad (7.2)$$

para qualquer t, u em seu domínio com $t \neq u$ e $\alpha \in (0, 1)$.

Usaremos a seguinte forma da Desigualdade(s) de Hölder, conforme [29, Teorema 14].

Teorema D.3. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$, $p > 1$ e q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então

$$\left| \sum x_i y_i \right| \leq \left(\sum |x|^p \right)^{1/p} \left(\sum |y|^q \right)^{1/q},$$

com igualdade se e somente se, $|x_i^p|$ e $|y_i|^q$ são proporcionais para cada i ou $x_i y_i = 0$ para cada i .

Proposição D.4. Para $p > 1$, função $f(t) = |t|^p$ é estritamente convexa em \mathbb{R} .

Demonstração. Para f , a inequação (7.2) toma a forma

$$|\alpha t + (1 - \alpha)u|^p < \alpha|t|^p + (1 - \alpha)|u|^p.$$

Para $|t| = |u|$ com $t \neq u$, ou seja, $u = -t$, verifica-se que

$$|\alpha t + (1 - \alpha)(-t)|^p = \underbrace{|2\alpha - 1|}_{<1} |t|^p < |t|^p = \alpha|t|^p + (1 - \alpha)|t|^p.$$

Supomos então que $|t| \neq |u|$. Provaremos a inequação

$$|\alpha t + (1 - \alpha)u| < (\alpha|t|^p + (1 - \alpha)|u|^p)^{1/p},$$

que é equivalente a (7.2). Sendo $x = (\alpha^{1/p}|t|, (1 - \alpha)^{1/p}|u|)$ e $y = (\alpha^{1/p}, (1 - \alpha)^{1/q})$, usamos a Desigualdade Triangular seguida da Desigualdade de Hölder:

$$\begin{aligned} |\alpha t + (1 - \alpha)u| &\leq \alpha|t| + (1 - \alpha)|u| \\ &= \alpha^{1/p}|t| \cdot \alpha^{1/q} + (1 - \alpha)^{1/p}|u| \cdot (1 - \alpha)^{1/q} \\ &\leq (\alpha|t|^p + (1 - \alpha)|u|^p)^{1/p} \underbrace{(\alpha + (1 - \alpha))^{1/q}}_{=1} \\ &= (\alpha|t|^p + (1 - \alpha)|u|^p)^{1/p}. \end{aligned}$$

As condições de igualdade na Desigualdade de Hölder são atingidas se $|t| = |u|$, o que não vale por hipótese, logo a última desigualdade é estrita. \square