

EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES PELO
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAULO ELISEU PORTELLA

Dissertação apresentada ao corpo docente do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Porto Alegre

Setembro de 1984

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pelo Curso de Pós-Graduação.

P.W. Partridge

Prof. Paul William Partridge
Orientador

José Carlos Ferraz Hennemann

Prof. José Carlos Ferraz Hennemann
Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil

*A meus pais
e irmãos.*

AGRADECIMENTOS

Ao professor Paul William Partridge pela dedicação na orientação deste trabalho e pelo incentivo recebido no desenvolvimento do mesmo.

Aos professores e funcionários do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul que colaboraram de alguma forma para a realização deste trabalho.

Aos amigos e colegas de Porto Alegre pelo companheirismo e cordialidade durante a temporada gaúcha.

A todo o pessoal do CESEC da Universidade Federal do Paraná pelo apoio e confiança depositados.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	1
CAPÍTULO 1	
TEORIA GERAL.....	3
1.1 - Equações Governantes.....	3
1.2 - Condições de Contorno.....	18
CAPÍTULO 2	
REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	23
2.1 - Introdução.....	23
2.2 - Formulações Usando Velocidades e Pressão.....	24
2.3 - Formulações Usando Função de Corrente e Vorticidade.....	32
2.4 - Formulações Usando Função de Corrente.....	36
CAPÍTULO 3	
FORMULAÇÃO EM FUNÇÃO DE CORRENTE E VORTICIDADE.....	38
3.1 - Introdução.....	38
3.2 - Formulação em Elementos Finitos.....	39
3.3 - Aplicações Numéricas.....	48
CAPÍTULO 4	
FORMULAÇÃO EM VELOCIDADES E PRESSÃO.....	57
4.1 - Introdução.....	57
4.2 - Caso Estacionário.....	57
4.3 - Aplicação Numérica.....	62
4.4 - Caso Transiente.....	63
4.5 - Aplicação da Formulação Transiente.....	73
4.6 - Aspectos Computacionais.....	76
CONCLUSÕES.....	78

APÊNDICE A

ELEMENTOS TRIANGULARES DE TRÊS NÓS.....80

APÊNDICE B

ESQUEMA TRAPEZOIDAL DE PASSOS FRACIONÁRIOS PARA
INTEGRAÇÃO NO TEMPO.....84

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....87

INTRODUÇÃO

O método dos elementos finitos foi inventado para ser usado inicialmente em problemas da mecânica dos sólidos, campo onde ele tem uma interpretação física. Apenas recentemente, o método tem sido aplicado a fluidos. Seu sucesso na mecânica dos fluidos é essencialmente devido ao fato de que os contornos do problema são usualmente complicados e também porque apresenta regras sistemáticas para o desenvolvimento de esquemas numéricos estáveis aproximando problemas matematicamente bem posicionados, com vários tipos de condições de contorno. De outra forma, não haveria razão válida para descartar os métodos mais clássicos de diferenças finitas, pois o MEF necessita de mais memória da máquina, além de apresentar maior complexidade de programação. A vantagem, entretanto, é que o programa é universal.

Escrever um bom programa para as equações de Navier-Stokes não é uma tarefa simples, pois existem muitas dificuldades específicas como os fortes gradientes de velocidade que podem ocorrer e que uma malha finita é incapaz de representar apropriadamente. Por causa disso, muitas técnicas têm sido desenvolvidas, como por exemplo os esquemas de elementos finitos com "upwind".

O presente trabalho tem por objetivo analisar as equações de Navier-Stokes para escoamento viscoso bi-dimensional incompressível usando o MEF e tem um caráter eminentemente investigativo, visando apresentar as características básicas do problema.

No capítulo 1 são lembradas as equações diferenciais parciais governantes do problema usando diferentes variáveis independentes e as respectivas condições de contorno.

No capítulo 2 é feita uma descrição expedita dos métodos utilizados por alguns pesquisadores nos últimos anos e serve para dar uma idéia ilustrativa do atual estágio de desenvolvimento das técnicas de resolução.

A formulação em função de corrente e vorticidade é delineada no capítulo 3 em termos de discretização em elementos finitos. As equações estacionárias são resolvidas simultaneamente pelo método de Newton-Raphson e uma técnica direta para a imposição das condições de contorno em vorticidade é empregada. São apresentados exemplos de fluxo entre paredes paralelas e em torno de um obstáculo sólido cilíndrico.

No capítulo 4 as equações de Navier-Stokes são resolvidas tendo como variáveis as componentes de velocidade e a pressão. São analisados tanto o caso estacionário como o dependente do tempo. O método da função de penalidade é usado para a restrição de incompressibilidade. Para o caso transiente, um método implícito e completamente acoplado é empregado para integrar as equações no tempo e uma técnica de balanceamento da difusão ("upwind") é introduzida para eliminar oscilações não reais do escoamento.

Para maiores detalhes dos assuntos aqui tratados deve-se recorrer à bibliografia citada ao longo do texto e que segue ao final deste trabalho.

1. TEORIA GERAL

1.1 - Equações Governantes

Embora a forma geral das equações de Navier-Stokes seja bem conhecida, é importante rederivar as equações a partir do princípio da conservação da massa e das leis do movimento de Newton. Isto permitirá obter uma melhor compreensão dos termos nas equações com relação às condições de contorno. As equações seguintes são formuladas num sistema Euleriano de coordenadas retangulares. A descrição espacial ou descrição Euleriana é a mais usada em mecânica dos fluidos, pois fixa atenção numa dada região do espaço ao invés de numa dada partícula. Os eixos cartesianos ortogonais serão denotados por x , y e z ou, quando for usada a notação indicial, por x_1 , x_2 e x_3 correspondentemente.

As componentes de velocidade e a densidade do fluido num ponto estão relacionadas através do requerimento de que o fluido deve ser contínuo, tanto no espaço (isto é, sem vazios no interior do fluido) como no tempo (isto é, a massa do fluido não é criada nem destruída). Esta relação é válida para fluidos viscosos e não-viscosos.

Seja ρ a densidade do fluido, a qual depende da posição e do tempo

$$\rho = \rho(x, y, z, t) \quad (1.1.1)$$

Considere-se um paralelepípedo elementar de dimensões δx , δy , δz através do qual o fluido passa (Fig.(1.1.1)). Se o centro do elemento estiver em (x, y, z) e as componentes da velocidade no tempo t neste ponto forem respectivamente u , v e w , então o fluxo da massa que passa pelo centro através do elemento na direção x é $\rho u \delta y \delta z$. O fluxo que entra através da face mais próxima da origem a uma distância de $\delta x/2$

é $(\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x) \delta y \delta z$ e o fluxo que sai da face mais distante da origem a uma distância também de $\delta x/2$ do centro é $(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x) \delta y \delta z$. O ganho em massa por unidade de tempo no interior do elemento a partir destas duas faces é $-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \delta x \delta y \delta z$ e, similarmente, para os outros dois pares de faces tem-se $-\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \delta x \delta y \delta z$ e $-\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \delta x \delta y \delta z$. O ganho total em massa por unidade de tempo a partir de todas as faces é

$$-\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z$$

que deve ser igual à taxa de aumento de massa no tempo $\frac{\partial}{\partial t} (\rho \delta x \delta y \delta z)$, portanto:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (1.1.2a)$$

Esta equação, uma consequência da conservação da massa, é conhecida como a Equação da Continuidade (ver VALLENTINE [41]).

Usando-se a notação indicial e efetuando-se as derivadas dos produtos em (1.1.2a) obtém-se:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (1.1.2b)$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial \rho}{\partial x_i} u_i + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (1.1.3)$$

É útil agora introduzir o conceito de derivada temporal material em coordenadas espaciais.

Ao utilizarmos a descrição Euleriana pode-se assumir que sempre existe uma função $x(X, t)$ suficientemente diferenciável definindo o movimento, mesmo que este não seja conhecido. Então, substituindo-a na descrição espacial da velocidade obtém-se

$$\underline{u} = \underline{g}(x, t) = \underline{g}[x(X, t), t]$$

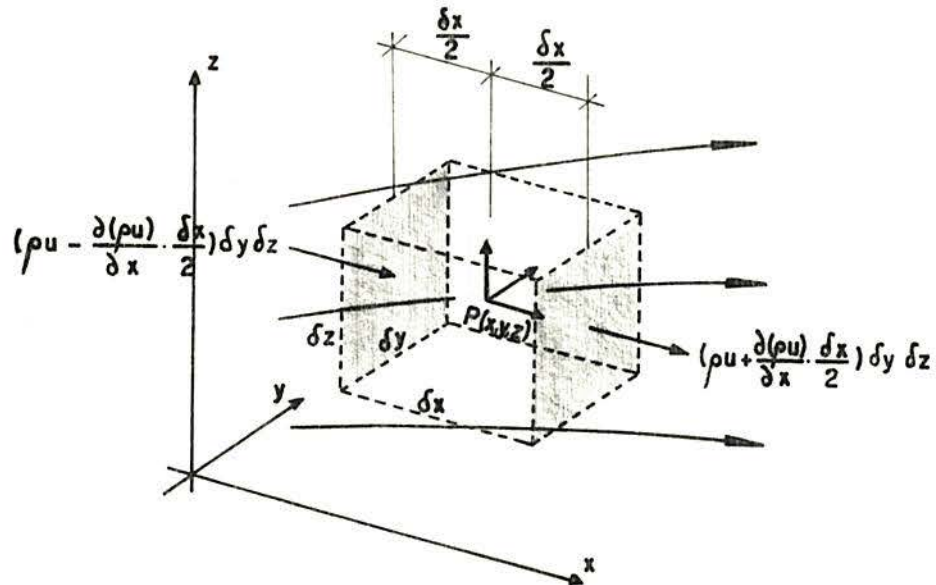


Fig.(1.1.1)

ou em coordenadas cartesianas

$$u_m = g_m \left[x_1(X_1, X_2, X_3, t), \quad x_2(X_1, X_2, X_3, t), \quad x_3(X_1, X_2, X_3, t), \quad t \right]$$

e, pela regra da cadeia,

$$\left(\frac{du_m}{dt} \right)_x = \left(\frac{\partial u_m}{\partial t} \right)_x + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \left(\frac{\partial x_k}{\partial t} \right)_x \quad (\text{soma em } K) \quad (1.1.4)$$

mas, sabe-se que

$$\left(\frac{\partial x_k}{\partial t} \right)_x = u_k \quad (1.1.5)$$

Assim, a componente da aceleração a_m que é a derivada material da componente de velocidade pode ser escrita:

$$a_m = \frac{du_m}{dt} = \frac{\partial u_m}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \quad (\text{soma em } K) \quad (1.1.6)$$

Usando-se a mesma notação para a derivada material da densidade, tem-se

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial\rho}{\partial x_i} \quad (1.1.7)$$

Substituindo-se as eq. (3) e (7) em (2b) obtêm-se a seguinte forma para a equação da continuidade:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{ou,} \quad (1.1.8a)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] = 0 \quad \text{ou,} \quad (1.1.8b)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \underline{u} = 0 \quad (1.1.8c)$$

Para fluidos incompressíveis, com ρ constante, esta equação se reduz a

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{ou} \quad \operatorname{div} \underline{u} = 0 \quad \text{ou} \quad \nabla \cdot \underline{u} = 0 \quad (1.1.9)$$

Caso a componente de velocidade na direção z seja constante, a equação toma a forma bi-dimensional

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.1.10)$$

As leis do movimento de Newton relacionam as forças atuando num elemento de fluido com sua aceleração. Uma partícula de fluido no ponto x_i no tempo t estará situada num ponto vizinho $x_i + \Delta x_i$ no tempo $t + \Delta t$. A mudança da componente da velocidade da partícula na direção x_i é

$$\Delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Delta x_j \quad (1.1.11)$$

A componente de aceleração correspondente da partícula situada no ponto x_i no tempo t é

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u_i}{\Delta t} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{du_i}{dt} \quad (1.1.12)$$

que é a derivada material da velocidade. Aqui, o termo $(\partial u_i / \partial t)$ representa a aceleração "local", já que aparece a partir de mudanças na velocidade com o tempo no ponto x_i , e os demais termos são conhecidos como aceleração "convectiva", pois aparecem de mudanças na velocidade com a mudança de posição. Em fluxo estacionário ("steady-state flow"), isto é, fluxo em que as velocidades e acelerações não variam com o tempo, a aceleração local é nula, mas as partículas do fluido possuem aceleração convectiva se o fluxo for não-uniforme, como por exemplo num canal de paredes convergentes. Em fluxo uniforme, isto é, o fluxo em que as velocidades e acelerações não variam com a posição, a aceleração convectiva é nula, mas as partículas do fluido possuem aceleração local se o fluxo for não-estacionário, como num fluxo com descarga crescente.

Antes de deduzir-se as equações do movimento, é conveniente recordar o conceito de tensor de tensão de Cauchy. Deseja-se considerar as tensões de cisalhamento e as normais (incluindo a pressão) no balanço de quantidade de movimento. Considere-se um cubo de fluido como o mostrado na fig. (1.1.2). As tensões são indicadas por σ_{ij} onde os índices indicam a face de atuação e a direção da tensão respectivamente. As tensões podem variar através do fluido e seu gradiente pode existir. O tensor das tensões pode ser escrito na forma matricial

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (1.1.13)$$

As três componentes da diagonal de σ_{ij} são "tensões normais" no sentido de que cada uma delas dá a componente normal da força de superfície que age através de uma superfície plana paralela a um dos planos coordenados. As seis componentes fora da diagonal são as "tensões tangenciais", também chamadas tensões de corte já que aparecem de um movimento cisalhante em que camadas paralelas de fluido escorregam umas em relação às outras. Destas seis componentes apenas três são independentes, pois o tensor é simétrico ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$).

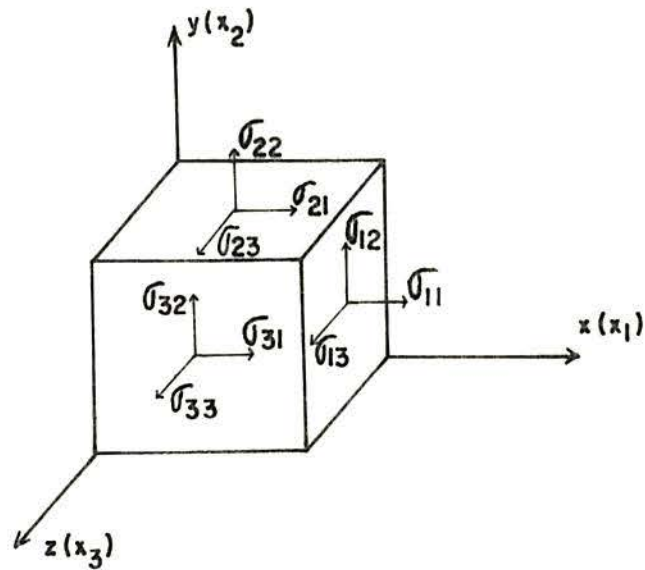


Fig. (1.1.2)

O princípio da quantidade de movimento para uma coleção de partículas declara que a variação da quantidade de movimento total com o tempo de um dado conjunto de partículas é igual à soma vetorial de todas as forças externas que atuam nas partículas, desde que a terceira lei de Newton de ação e reação governe as forças internas. Para estendermos este princípio ao meio contínuo, considere-se uma dada massa do meio, instantaneamente ocupando um volume V e tendo por fronteira uma superfície S , sob a ação de forças de superfície \underline{T} por unidade de área e forças de corpo \underline{B} por unidade de massa (Fig. (1.1.3)).

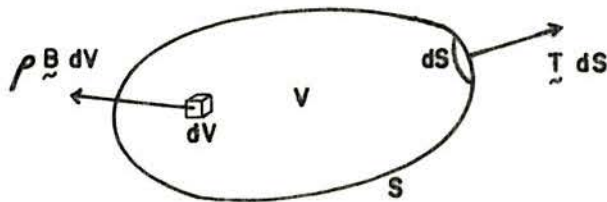


Fig. (1.1.3)

A variação da quantidade de movimento total da massa dada é $\frac{d}{dt} \int \rho \underline{u} dV$, onde d/dt denota a derivada material ou substancial. O balanço da quantidade de movimento é então expresso por

$$\int_S \underline{T}_i dS + \int_V \rho \underline{B}_i dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho \underline{u}_i dV \quad (1.1.14)$$

ou, em coordenadas retangulares

$$\int_S T_i dS + \int_V \rho B_i dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho u_i dV \quad (1.1.15)$$

que é um postulado básico da mecânica do contínuo.

Sendo \underline{n} o vetor normal externo à superfície S tem-se que

$$T_i = \sigma_{ji} n_j \quad (1.1.16)$$

Aplicando-se o teorema da divergência no termo da esquerda da eq. (15), resulta

$$\int_S \sigma_{ji} n_j dS = \int_V \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} dV \quad (1.1.17)$$

Logo, tem-se

$$\int_V \left[\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho B_i - \rho \frac{du_i}{dt} \right] dV = 0 \quad (1.1.18)$$

Para um volume V arbitrário, tem-se que em cada ponto

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho B_i = \rho \frac{du_i}{dt} \quad \text{ou,} \quad (1.1.19a)$$

$$\nabla \cdot \underline{\sigma} + \rho \underline{B} = \rho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} \quad (1.1.19b)$$

Que são as equações do movimento de Cauchy.

Resta agora relacionar as tensões com as componentes de velocidade através da lei constitutiva do fluido.

A experiência indica que um fluido em repouso ou em fluxo uniforme não pode apresentar tensões de cisalhamento. Neste caso o que existe é um estado de tensões puramente hidrostático

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} \quad (1.1.20)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker e p é a pressão estática, igual à pressão normal média

$$p = \bar{p} = -\sigma_{kk}/3 \quad (1.1.21)$$

Tal é o caso também de um fluido ideal não-viscoso, definido como o que não suporta tensão tangencial mesmo quando está em movimento. Nenhum fluido é, na realidade, não-viscoso, mas em muitos casos os efeitos de pressão e forças de corpo predominam sobre os efeitos viscosos e o fluxo pode ser analisado satisfatoriamente como se o fluido fosse ideal, exceto no interior da camada limite, uma fina camada de transição próxima a um objeto sólido imerso no fluxo ou próxima a uma parede do canal, onde os efeitos viscosos são da mesma magnitude que os outros efeitos.

Para fluidos viscosos em movimento vão se desenvolver tensões tangenciais e a equação constitutiva vai diferir daquela do fluido ideal (eq.(20)). De acordo com Stokes (1845), assume-se que a diferença entre as tensões no fluido deformado e a tensão de equilíbrio estático é uma função do tensor taxa de deformação \underline{D} , de modo que a tensão total é

$$\underline{\sigma} = -p \underline{I} + f(\underline{D}) \quad (1.1.22)$$

Quando a função f é linear o fluido é chamado Newtoniano e a equação constitutiva em coordenadas cartesianas toma a forma

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + C_{ijrs} D_{rs} \quad (1.1.23)$$

onde C_{ijrs} são constantes. Desde que o tensor de tensões σ_{ij} e a taxa de deformação D_{rs} são ambos simétricos, requer-

-se que C_{ijrs} seja simétrico tanto em i e j como em r e s . Além disso, serão considerados apenas fluidos isotrópicos. O tensor isotrópico de quarta ordem mais geral com componentes C_{ijrs} simétricos em ij e rs tem a forma (ver MALVERN [26])

$$C_{ijrs} = \lambda \delta_{ij} \delta_{rs} + \mu (\delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jr}) \quad (1.1.24)$$

onde λ e μ são dois parâmetros independentes caracterizando a viscosidade do fluido.

Substituindo a eq. (24) na (23) e utilizando-se a propriedade do delta de Kronecker, a equação constitutiva fica

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda D_{kk} \delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \quad (1.1.25)$$

O tensor de deformação ou velocidade de deformação é totalmente similar ao tensor das pequenas deformações da Teoria da Elasticidade, apenas que as componentes de deslocamentos dão lugar às componentes de velocidade:

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.1.26)$$

Tendo em vista as equações (19) e (25) calcula-se

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial D_{ji}}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \underline{u}) + \nabla^2 u_i \end{aligned} \quad (1.1.27)$$

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ji} + \lambda \frac{\partial D_{kk}}{\partial x_j} \delta_{ji} + 2\mu \frac{\partial D_{ji}}{\partial x_j} \quad (1.1.28)$$

Mas, tem-se que

$$D_{kk} = \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \nabla \cdot \underline{u} \quad (1.1.29)$$

Fazendo as substituições em (28), vem

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \underline{u}) + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \underline{u}) + \mu \nabla^2 u_i \quad (1.1.30)$$

Levando às equações do movimento (19):

$$- \frac{\partial p}{\partial x_i} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \underline{u}) + \mu \nabla^2 u_i + \rho B_i = \rho \frac{du_i}{dt} \quad (1.1.31a)$$

Ou, apenas em notação vetorial

$$- \nabla p + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \underline{u}) + \mu \nabla^2 \underline{u} + \rho \underline{B} = \rho \frac{d\underline{u}}{dt} \quad (1.1.31b)$$

Que são as equações generalizadas de NAVIER-STOKES.

Empregando a eq. (9) obtêm-se as equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis, depois de dividir por ρ :

$$\frac{d\underline{u}}{dt} = \underline{B} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \underline{u} \quad (1.1.32)$$

onde

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.1.33)$$

é a chamada viscosidade cinemática.

Nas equações (32) o termo $\nu \nabla^2 \underline{u}$ representa a força interna adicional devida à viscosidade do fluido. Estas equações sem estes termos são conhecidas como as equações de Euler para o escoamento sem atrito. Para melhor compreensão, é conveniente examinar brevemente a componente de tal força na direção x . A fig. (1.1.4) mostra um pequeno elemento num fluxo viscoso incompressível nesta direção.

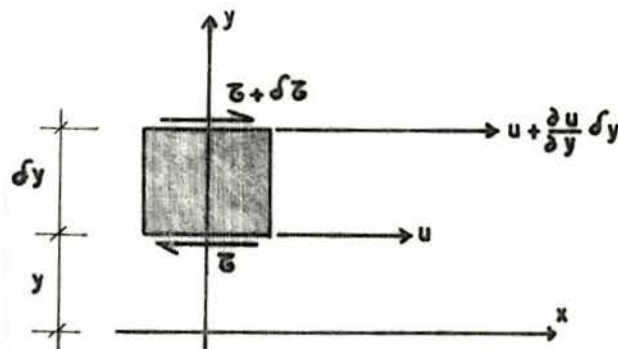


Fig. (1.1.4)

As tensões tangenciais viscosas aparecem devido à existência de um gradiente de velocidade $\partial u / \partial y$ perpendicular ao fluxo e, portanto, na direção x estas tensões são

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad e \quad (1.1.34)$$

$$\tau + \delta\tau = \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(u + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y \right) = \mu \frac{\partial u}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \delta y \quad (1.1.35)$$

Portanto,

$$\delta\tau = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \delta y \quad (1.1.36)$$

Se a área do elemento onde atua τ é S , a força no elemento é

$$S \delta\tau = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} S \delta y = \nu \delta m \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.1.37)$$

onde ν é a viscosidade cinemática e $\delta m = \rho S \delta y$ é a massa do elemento. Logo, a força viscosa por unidade de massa devida ao gradiente de velocidade $\frac{\partial u}{\partial y}$ é $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Para o caso geral, com os gradientes $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, a força total na direção x será

$$\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \nu \nabla^2 u \quad (1.1.38)$$

Deste ponto em diante tratar-se-ão as equações apenas em sua forma bi-dimensional. As forças de corpo \underline{B} podem ser escritas em termos de uma força potencial gravitacional $\Omega = gh$, sendo g a aceleração da gravidade e h a distância segundo um eixo paralelo à direção da força de gravidade (orientado para cima) em relação a um "datum" ou ponto de referência arbitrário, de modo que a força por unidade de massa nesta direção é

$$\frac{\partial \Omega}{\partial h} = -g \quad (1.1.39a)$$

Assim, para as direções x e y têm-se as forças de corpo:

$$B_x = - \frac{\partial}{\partial x} (gh) \quad e \quad B_y = - \frac{\partial}{\partial y} (gh) \quad (1.1.39b)$$

Assim, as eq. (32), explicitando-se os termos da derivada material, tomam a forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1.1.40a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (1.1.40b)$$

É útil agora tornar estas equações adimensionais, isto é, independentes do sistema de unidades adotado. Pela similaridade dinâmica, as variáveis adimensionais são introduzidas para facilitar a comparação entre o fluxo modelo e o protótipo desde que sejam geometricamente similares. Assim escolhemos "valores característicos" para comprimento (L), tempo (T), velocidade (V), pressão (p_0) e densidade (ρ_0), de modo que as variáveis adimensionais ficam definidas por

$$x' = \frac{x}{L}, \quad t' = \frac{t}{T}, \quad \underline{u}' = \frac{\underline{u}}{V}, \quad p' = \frac{p}{p_0}, \quad \rho' = \frac{\rho}{\rho_0} \quad (1.1.41)$$

Transcrevendo as eq. (40) em forma vetorial

$$\rho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \rho \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} = -\rho g \nabla h - \nabla p + \mu \nabla^2 \underline{u} \quad (1.1.42)$$

Substituindo-se as eq. (41) e tendo em vista que $\nabla' = L \cdot \nabla$ vem

$$\left(\rho_0 \frac{V}{T} \right) \rho' \frac{\partial \underline{u}'}{\partial t'} + \left(\frac{\rho_0 V^2}{L} \right) \rho' \underline{u}' \cdot \nabla' \underline{u}' = -(\rho_0 g) \rho' \nabla' h' - \left(\frac{p_0}{L} \right) \nabla' p' + \left(\frac{\mu V}{L^2} \right) \nabla'^2 \underline{u}' \quad (1.1.43)$$

Multiplicando-se por $L/(\rho_0 V^2)$:

$$\frac{L}{VT} \rho' \frac{\partial \underline{u}'}{\partial t'} + \rho' \underline{u}' \cdot \nabla' \underline{u}' = -\frac{Lg}{V^2} \rho' \nabla' h' - \frac{p_0}{\rho_0 V^2} \nabla' p' + \frac{\mu}{\rho_0 LV} \nabla'^2 \underline{u}' \quad (1.1.44)$$

que são as equações de Navier-Stokes adimensionais.

A razão entre os coeficientes da força de inércia e da força viscosa na eq. (43) resulta no chamado número de Reynolds

$$R_e = \frac{\rho_o VL}{\mu} \quad (1.1.45)$$

Este coeficiente adimensional é um dos números característicos do fluxo. Para dois casos extremos, as equações podem ser simplificadas: no caso de fluxo lento ("creeping flow") de fluidos com viscosidade muito grande (muito pequeno número de Reynolds) que resulta num sistema de equações lineares quando $R_e \rightarrow 0$; e o limite oposto de viscosidade muito pequena (grande R_e) em que os efeitos da viscosidade são pronunciados apenas numa pequena região, a camada limite, onde os gradientes de velocidades são tão grandes que as forças viscosas são importantes mesmo para pequenos valores de μ . As equações são ainda não-lineares, e sua solução é ainda muito difícil.

As forças de corpo serão omitidas. Isto equivale a dizer que a pressão será interpretada apenas como pressão dinâmica, que se assume não ser afetada pelos termos da força de corpo. Pela condição de incompressibilidade tem-se que $\rho \equiv \rho_o$ e, se forem escolhidas e fixadas uma escala de pressão $p_o = \rho_o V^2$ e uma escala de tempo $T = L/V$, conclui-se que

$$\rho' = 1, \quad \frac{p_o}{\rho_o V^2} = 1, \quad \frac{L}{VT} = 1 \quad (1.1.46)$$

Portanto, as eq. (44), após omitir-se o superscrito que indica a adimensionalidade das variáveis, podem ser escritas na forma

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{u} = -\nabla p + \frac{1}{R_e} \nabla^2 \tilde{u} \quad (1.1.47)$$

Estas equações, juntamente com a equação da continuidade, constituem as equações governantes do problema de escoamento de fluido viscoso incompressível. Transcrevendo-as em termos das componentes, tem-se

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1.1.48)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (1.1.49)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.1.50)$$

onde $R_e = VL/\nu$ e $\nu = \mu/\rho$.

Pode-se representar estas equações sob outra forma, trocando-se as variáveis independentes u, v, p por outras variáveis independentes ψ (função de corrente) e ω (vorticidade).

Num fluido, a parte simétrica do tensor de deformação (ou gradientes espaciais da velocidade) é o tensor taxa de deformação da eq. (26) e a parte anti-simétrica é o tensor de rotação, tensor de vorticidade ou tensor spin que é escrito como

$$\frac{1}{2} \underline{\underline{\omega}} = \underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2} \nabla_x \underline{u} = \frac{1}{2} \text{rot } \underline{u} \quad (1.1.51)$$

ou seja, a velocidade angular física do fluido $\underline{\underline{\Omega}}$ é igual à metade do rotacional do vetor velocidade. Para escoamentos bi-dimensionais a única componente que subsiste é

$$\Omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1.1.52a)$$

A correspondente vorticidade ω_z , que passará a ser designada apenas como ω , é o dobro da velocidade angular

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.1.52b)$$

Através da figura (1.1.5) pode-se ilustrar geometricamente este conceito. Vê-se que ω é o dobro do valor médio da componente z da velocidade angular do elemento de fluido $\Delta x \Delta y$.

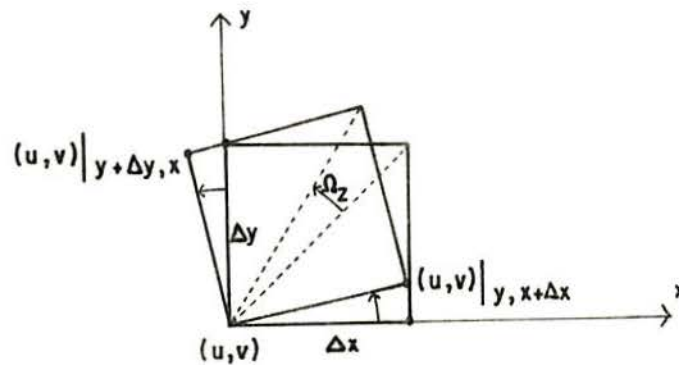


Fig. (1.1.5)

A linha Δx tem velocidade angular $(v|_{x+\Delta x} - v|_x)/\Delta x$ e a linha Δy tem velocidade angular $-(u|_{y+\Delta y} - u|_y)/\Delta y$, cuja média é $\frac{1}{2}(\partial v/\partial x - \partial u/\partial y)$, a velocidade angular média do quadrado $\Delta x \Delta y$.

Tomando-se agora as derivadas cruzadas das equações (48) e (49), tem-se

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} + \frac{\partial}{\partial y} (u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}) = -\frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} + \frac{1}{R_e} (\nabla^2 u) \quad (1.1.53)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}) = -\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R_e} (\nabla^2 v) \quad (1.1.54)$$

Subtraindo-se a eq. (53) da (54), tendo em vista a (52b) e impondo a eq. da continuidade (50), deduz-se a chamada equação de transporte de vorticidade (onde os termos de pressão são eliminados)

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{R_e} \nabla^2 \omega \quad \text{ou} \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{R_e} \nabla^2 \omega \quad (1.1.55)$$

Introduzindo-se a função de corrente ψ , definida como

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{e} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.1.56)$$

de modo que a eq. da continuidade seja satisfeita identicamente, a eq. (55) pode ser expressa como

$$\nabla^2 \omega - R_e \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) = 0 \quad (1.1.57)$$

e a relação entre ψ e ω é

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)$$

$$\therefore \omega = -\nabla^2 \psi \quad (1.1.58)$$

As eq. (57) e (58) são as equações governantes da formulação em função de corrente - vorticidade para o fluxo de fluido viscoso incompressível.

A forma final de equação a ser considerada aqui usa apenas a função de corrente como variável e é derivada levando-se (58) em (57) dando

$$\nabla^4 \psi - R_e \left[\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi) + \frac{\partial \psi}{\partial y} \nabla^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \nabla^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right] = 0 \quad (1.1.59)$$

Quando R_e é muito pequeno ("creeping flow") esta equação pode ser simplificada para

$$\nabla^4 \psi = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = 0 \quad (1.1.60)$$

que é conhecida como equação bi-harmônica para fluxo de fluido altamente viscoso.

1.2 - Condições de Contorno

Considere-se o movimento de um meio contínuo através de uma região fechada A de um espaço Euclidiano bi-dimensional. Estabeleça-se em A um sistema de referência inercial fixo definido pelos vetores de uma base ortogonal cujas coordenadas espaciais de um ponto P são denotadas por x_i e as componentes de velocidade do meio em P num tempo t são denotadas

por $u_i = u_i(x_1, x_2, t)$. A fronteira S , envolvendo a região A , pode ser considerada em duas partes distintas S_1 e S_2 . A porção S_1 chamada contorno "rígido" pode assumir duas formas:

a) Contorno rígido de escorregamento livre ("free slip") representando um estado de tensão tangencial zero.

$$u_n = 0$$

$$\frac{\sigma_s}{\rho} = \nu \left(\frac{\partial u_n}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial n} \right) = 0 \quad (1.2.1)$$

onde n e s indicam as direções normal e tangencial ao contorno respectivamente. Esta condição pode ser considerada como um plano de simetria, ao invés de uma "parede" verdadeira ou pode representar uma superfície não aderente, que é uma aproximação usada em certos problemas de escoamento com número de Reynolds alto.

b) Contorno rígido sem escorregamento ("no-slip") requerendo que tanto a componente tangencial da velocidade como a componente normal sejam zero.

$$u_n = 0$$

$$u_s = 0 \quad (1.2.2)$$

Esta condição é o equivalente a declarar que a tensão tangencial exercida no fluido adjacente a uma fronteira deste tipo pela própria fronteira é suficiente para reter o movimento deste fluido na direção tangencial. Ou seja, é equivalente a

$$u_n = 0$$

$$\frac{\sigma_s}{\rho} = \nu \left[\frac{\partial \bar{u}_n}{\partial s} + \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial n} \right] \quad (1.2.3)$$

onde a barra superscrita denota uma quantidade conhecida "a priori".

A porção S_2 é chamada fronteira de fluxo e pode ser tratada como contorno de entrada onde as velocidades normal e

tangencial são especificadas, como em (2), ou pelas duas formas seguintes:

a) As tensões no contorno são especificadas. A partir das equações (1.1.25) e (1.1.26) e ainda impondo a condição (1.1.9) tem-se

$$\frac{\sigma_{ij}}{\rho} = -p \delta_{ij} + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.2.4)$$

que pode também ser escrita como

$$\frac{\sigma_n}{\rho} = -p + 2\nu \frac{\partial u_n}{\partial n} \quad (1.2.5)$$

$$\frac{\sigma_s}{\rho} = \nu \left(\frac{\partial u_s}{\partial n} + \frac{\partial u_n}{\partial s} \right)$$

b) A derivada normal de ambas as velocidades e mais a pressão são especificadas

$$\frac{\partial u_i}{\partial n} = \bar{g}_i \quad (1.2.6)$$

$$p = \bar{p}$$

As condições (a) e (b) são igualmente aplicáveis para contornos de entrada e de saída, mas no último caso a pressão deve também ser especificada em um ponto da região a fim de definir a pressão de maneira única.

As condições de contorno para a formulação em função de corrente-vorticidade são as seguintes:

Contorno rígido

a) Escorregamento livre

Substituindo-se as velocidades na eq. (1) e notando-se que $\partial u_n / \partial s = 0$, tem-se

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = 0 \quad (1.2.7)$$

$$\omega = 0$$

onde a primeira equação pode ser substituída por $\psi = \bar{\psi}$.

b) Sem escorregamento

Usando-se agora as eq. (2):

$$\text{Para } \psi \begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial s} = 0 \rightarrow \psi = \bar{\psi} \\ \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \end{cases} \quad (1.2.8)$$

$$\text{Para } \omega \begin{cases} \omega = \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial n} = \bar{\omega} \quad \text{ou} \\ \frac{\partial \omega}{\partial n} = \bar{g}_\omega \end{cases}$$

Note-se que os valores $\bar{\omega}$ ou \bar{g}_ω normalmente não são conhecidos no contorno sólido, donde a dificuldade em aplicar a condição de contorno para vorticidade. Pode-se aproximá-las usando-se a seguinte relação

$$\omega = \frac{\partial u_s}{\partial n} - \frac{\partial u_n}{\partial s}; \quad \frac{\partial u_n}{\partial s} = 0; \quad u_s = -\frac{\partial \psi}{\partial n} \quad (1.2.9)$$

$$\therefore \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2}$$

ao longo do contorno.

Contorno de fluxo

$$\text{Para } \psi \begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial n} = \bar{g}_\psi \quad \text{ou} \quad \psi = \bar{\psi} \end{cases} \quad (1.2.10)$$

$$\text{Para } \omega \begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial n} = \bar{g}_\omega \quad \text{ou} \quad \omega = \bar{\omega} \end{cases}$$

É comum também usar as duas segundas condições ($\psi = \bar{\psi}$, $\omega = \bar{\omega}$) para o contorno de entrada e as duas primeiras para a saída. Isto significa que a velocidade normal (\bar{u}_n) na entrada é especificada e também o é o gradiente normal da velocidade tangencial que, no caso particular de $\bar{\omega} = 0$ e $\bar{\psi}$ linear é ze

ro. Para o fluxo de saída a velocidade tangencial é especificada e, quando \bar{g}_ψ e \bar{g}_ω são zero, um fluxo paralelo (uniforme) é induzido.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 - Introdução

A aplicação do Método dos Elementos Finitos (MEF) às equações não-lineares de Navier-Stokes tem recebido considerável atenção nos últimos anos e o progresso nesta área tem sido muito rápido.

Existe uma grande quantidade de literatura acerca de modelos discretos de escoamento de fluidos obtidos usando-se aproximações em diferenças finitas para as equações diferenciais governantes. Tais modelos apresentam sérias limitações com respeito a problemas envolvendo geometrias e condições de contorno complexas.

O conceito de elementos finitos apresenta muitas vantagens sobre métodos convencionais de discretização devido à simplicidade com que as condições de contorno podem ser aplicadas e a facilidade com que domínios complexos e multiplamente conexos podem ser aproximados.

Comparativamente, foi apenas recentemente que o método dos elementos finitos, originário dos campos da mecânica estrutural e dos sólidos, começou a ser aplicado a problemas de dinâmica dos fluidos. O desenvolvimento do método começou com a solução de problemas em que os termos convectivos eram ausentes ou desprezíveis em comparação com as forças viscosas, como por exemplo os problemas de fluxo potencial e de fluxo lento ("creeping flow"). Mais tarde, houve progressos na solução de problemas, incluindo forças de inércia, embora com limite superior para o número de Reynolds, a fim de se evitar as instabilidades inerentes aos cálculos numéricos quando os termos convectivos são predominantes.

Os desenvolvimentos da aplicação do MEF na solução das equações de Navier-Stokes têm progredido em três áreas básicas, de acordo com as variáveis usadas, quais sejam: veloci-

dade e pressão (chamadas variáveis primitivas), função de corrente e vorticidade e apenas função de corrente.

Os métodos de solução das equações diferenciais parciais podem ser a grosso modo divididos em duas categorias: aproximações explícitas, onde cada equação é resolvida alternadamente, com alguma forma de relaxação das variáveis entre as iterações, e a aproximação implícita, onde um Jacobiano envolvendo todas as equações e todas as variáveis pode ser formado.

Nos esquemas explícitos, se se tiver como condição de contorno apenas velocidades paralelas aos eixos x e y , pode-se segregar totalmente as equações correspondentes a cada uma das variáveis independentes. Tendo como condição de contorno velocidades não paralelas aos eixos coordenados, pode-se segregar apenas a equação referente à pressão. Estes dois casos necessitam de menor espaço de armazenamento. Entretanto, utilizam mais tempo de computador, pois apresentam limitações no tamanho do intervalo de tempo, bem como dependência do espaçamento da malha.

Nos esquemas implícitos obtêm-se matrizes com largura de banda maior que necessita mais memória (nenhuma segregação de equações). Utiliza menos tempo de computação, pois o passo de tempo pode ser tomado com qualquer tamanho, sendo limitado apenas pela precisão.

Neste capítulo procurar-se-á dar uma idéia abrangente e bastante sucinta sobre os métodos utilizados por diversos pesquisadores nos últimos anos para obter uma aproximação por elementos finitos da solução do problema de escoamento bi-dimensional de fluido viscoso newtoniano incompressível.

2.2 - Formulações Usando Velocidades e Pressão

As formulações em que as componentes de velocidade e a pressão são resolvidas simultaneamente são chamadas formulações integradas. Quase todos os trabalhos em elementos finitos usando as variáveis primitivas são deste tipo.

Aplicando-se a aproximação de Galerkin ou qualquer outro método de resíduos ponderados às equações (1.1.48),

(1.1.49) e (1.1.50), resulta um sistema de equações discretizadas globais da forma

$$\underline{M} \dot{\underline{z}} + \left[\underline{C}(\underline{z}) + \underline{K} \right] \underline{z} = \underline{f} \quad (2.2.1)$$

onde \underline{M} é a matriz de massa, \underline{C} é a matriz convectiva, \underline{K} é a matriz difusiva (similar à matriz de rigidez da análise estrutural); \underline{z} é o vetor das incógnitas nodais (velocidades e pressão e, possivelmente, suas respectivas derivadas) e \underline{f} um vetor de carga resultante de forças de corpo, forças de superfície ou condições de contorno prescritas. O ponto representa derivação com respeito ao tempo.

Os aspectos mais importantes desta equação matricial são que \underline{C} depende das incógnitas de velocidade (não de pressão) em virtude da não-linearidade do termo convectivo e é não-simétrica, enquanto que \underline{K} é constante e simétrica, mas possui zeros na diagonal, dificuldade esta associada com a natureza desacoplada da equação da continuidade com relação à variável pressão. Assim, tem-se que o sistema de equações obtido é não-linear, com a matriz dos coeficientes resultando não-simétrica e ainda sendo não positiva-definida.

Usualmente a equação (1) é reduzida à sua forma estacionária ("steady state")

$$\left[\underline{C}(\underline{z}) + \underline{K} \right] \underline{z} = \underline{f} \quad (2.2.2)$$

e deve-se empregar um método para resolver este sistema não-linear. Existem dois tipos mais populares de tais métodos. No primeiro tipo, a matriz dos coeficientes é tornada simétrica passando-se todos os termos, ou apenas a parte não-simétrica, de $\underline{C}(\underline{z})$, \underline{z} calculados no passo de iteração prévio para o lado direito, como parte do vetor de carga para a próxima iteração. Este processo segue o método da deformação inicial da mecânica dos sólidos. No outro tipo têm-se os métodos de substituição sucessiva e Newton-Raphson, que retêm os coeficientes não-simétricos da matriz que é decomposta em cada passo. Os métodos do primeiro tipo são logo descartados porque eles

não convergem para números de Reynolds mais altos, enquanto que os do segundo têm melhor estabilidade. Destes, as experiências indicam que o método de Newton-Raphson é o que atinge maior eficiência. Conclui-se que nesta área parece ser essencial reter os efeitos não-lineares e não-simétricos na matriz dos coeficientes e, portanto, deve-se usar um algoritmo que seja eficiente para matrizes banda não-simétricas e não-positivamente definidas.

Quanto ao tipo de elemento finito utilizado, muitos experimentos têm sido feitos.

Tem-se observado que em problemas de dinâmica dos fluidos o uso de elementos de alta ordem não oferece grandes vantagens em relação a elementos mais simples (lineares) com respeito à precisão da solução. Ou seja, ao invés de empregar um elemento com função de interpolação de alto grau, utilizam-se vários elementos mais simples, com sensível redução na complexidade de programação.

GARTLING et al. [13] apresentam úteis experiências usando duas diferentes interpolações para o elemento. A primeira usa para um elemento quadrilátero isoparamétrico de oito nós uma formulação bi-quadrática para as velocidades e bilinear para a pressão. A outra usa um quadrilátero geral construído a partir de quatro triângulos de seis nós em que as velocidades são quadráticas e a pressão linear. Assim, ambas resultam tendo velocidades em oito nós externos e pressões em quatro, mas a última tem onze variáveis extras nos nós internos que devem ser retidas nos cálculos. Embora seja de se esperar que estas variáveis internas extras forneçam resultados mais acurados, suas experiências no problema de Hamel (fluxo laminar em canal convergente) não mostraram nenhuma diferença significativa entre as duas. Realmente, esta conclusão é consistente com experiências da mecânica dos sólidos. Por exemplo, em estado plano de tensões um quadrilátero feito a partir de dois ou quatro triângulos de deformação constante (CST) não é melhor do que o obtido da transformação de um retângulo bilinear.

A solução do problema transiente usando variáveis primitivas representado pela equação (1) ainda não foi comple-

tamente explorada e existem poucas experiências disponíveis. ODEN e WELLFORD [31] usam um método auto-corretor de Runge-Kutta de quarta ordem e apresentam alguns resultados para o desenvolvimento de fluxo no interior da camada limite. KAWAHARA et al. [23] usam diferenças finitas progressivas para a derivada temporal e, empregando o método da perturbação, analisam o escoamento em um canal com degrau. Em ambos os métodos os termos não-lineares são deslocados para a direita e a matriz dos coeficientes, que é simétrica mas não-positiva definida, é constante e, portanto, só decomposta uma vez.

Um método alternativo para se lidar com as variáveis primitivas é a formulação segregada, em que as velocidades e a pressão são desacopladas. As equações básicas são agora as duas expressões de quantidade de movimento para o sistema \underline{u}

$$u_{,t} + u u_{,x} + v u_{,y} - \frac{1}{R_e} (2 u_{,xx} + u_{,yy} + v_{,xy}) = -p_{,x} \quad (2.2.3)$$

$$v_{,t} + u v_{,x} + v v_{,y} - \frac{1}{R_e} (u_{,xy} + v_{,xx} + 2 v_{,yy}) = -p_{,y}$$

onde os subscritos indicam derivação em relação à respectiva variável. Tomando-se o divergente destas equações obtém-se uma equação de Poisson para a pressão

$$\nabla^2 p = - \left[D^2 + u D_{,x} + v D_{,y} + 2(v_{,x} u_{,y} - u_{,x} v_{,y}) \right] - \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{2}{R_e} \nabla^2 D = \theta \quad (2.2.4)$$

onde $D = u_{,x} + v_{,y}$ é a dilatação. Neste esquema, a equação da continuidade que diz que $D = 0$ não pode ser satisfeita ponto a ponto na solução aproximada. Assim, desprezando-se os termos menos significativos, θ é aproximado por

$$\theta = -2 (u_{,y} v_{,x} - u_{,x} v_{,y}) - (u_{,xt} + v_{,yt}) \quad (2.2.5)$$

A idéia é então resolver alternadamente em termos de pressão e velocidade as equações (4) e (3) respectivamente. Em cada passo, a pressão é assumida como conhecida a partir do passo prévio enquanto é calculada a velocidade e vice-versa.

O método de Newton-Raphson não é mais vantajoso e uma solução passo-a-passo no tempo faz-se necessária mesmo para problemas estacionários. O método ainda necessita muito estudo, pois não se sabe quão bem a continuidade é satisfeita e existem problemas de convergência para números de Reynolds mais altos cuja causa não é clara (ver ref. [37]).

Uma outra alternativa para o uso da formulação em variáveis primitivas é o uso de um campo solenoidal para interpolações de velocidade, isto é, satisfazendo exatamente a equação de continuidade. O progresso nesta área tem sido lento, pois existem muitas dificuldades em formular tais campos solenoidais com as variáveis primitivas e é quase impossível satisfazer simultaneamente os requerimentos de incompressibilidade e compatibilidade das velocidades (ref. [32]).

Um processo que vem ganhando atenção nos últimos anos é o método da função de penalidade. É um método baseado no método dos multiplicadores de Lagrange para a imposição de uma equação de restrição ao conjunto de equações governantes e pode ser visto através do estabelecimento de princípios pseudo-variacionais. Para fluidos incompressíveis esta restrição consiste na satisfação da equação da continuidade, baseada no princípio de conservação da massa. O modelo mais comum de tal método constitui-se em modificar esta equação, tornando-a acoplada com a variável pressão

$$u_{i,i} = -\frac{1}{\lambda} p \quad (2.2.6)$$

sendo λ um número grande, de modo que quando $\lambda \rightarrow \infty$ a continuidade é satisfeita exatamente (ver HEINRICH e MARSHALL [18]).

O método foi primeiramente aplicado, no contexto da análise por elementos finitos, na solução de problemas de elasticidade para sólidos incompressíveis, considerando-se o limite das soluções compressíveis quando o módulo de Poisson se aproxima de 0,5.

J.N. REDDY [36] apresenta uma interessante revisão no contexto geral da solução de problemas de minimização sujeitos a restrição. São detalhadas algumas propriedades matemáticas do método da função de penalidade, tais como teoremas

sobre a existência e unicidade da solução para o problema penalizado e sua convergência para a solução do problema original. São apresentados dois modelos de penalidade (um convencional e um misto) demonstrando-se a sua equivalência e é feita uma análise da influência do parâmetro de penalidade na precisão da solução.

KAWAHARA e HIRANO [24] apresentam um método baseado num esquema explícito de dois passos para integração numérica no tempo e usam elementos finitos triangulares de três nós. Para vencer a dificuldade de que o fluido é incompressível é usado o método da função de penalidade, que tem sua idéia básica na análise clássica por diferenças finitas, e está relacionada com a de compressibilidade artificial. Os fluidos existentes na natureza não são estritamente incompressíveis, isto é, as observações sempre mostram que a velocidade de propagação do som através do fluido tem um valor finito. Assim, a equação da continuidade é modificada de maneira que, se a velocidade do som tende ao infinito, a equação se torna coincidente com a equação da continuidade convencional. Esta é também a interpretação física do método da função de penalidade. A equação proposta tem a forma

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u_i p_{,i} + \rho C^2 u_{i,i} = 0 \quad (2.2.7)$$

onde C é a velocidade do som.

Apesar de o esquema implícito ser mais estável e permitir usar um incremento de tempo maior do que no esquema explícito, os autores justificam a utilização deste último com o fato de que é necessário o uso de uma idealização extremamente refinada para computar o fluxo com alto número de Reynolds, o que implica na necessidade de grande espaço de memória para o armazenamento das matrizes do sistema de equações simultâneas. O método aqui empregado reduz drasticamente esta necessidade, pois faz a diagonalização ("lumping") da matriz dos coeficientes cuja inversão pode então ser feita diretamente, com operações simples. Este processo de concentrar os coeficientes apenas na diagonal principal da matriz é executado

utilizando-se um parâmetro seletivo que controla o amortecimento e a estabilidade numéricos. O exemplo estudado é o do desenvolvimento de vórtices atrás de um cilindro e os resultados concordam favoravelmente com resultados experimentais.

P.M. GRESHO e R.L. LEE [15] também estudam com êxito o mesmo problema, usando um esquema explícito onde as equações são integradas através de um método previsor-corretor. É empregado um elemento quadrilátero de nove nós usando 4x4 pontos de integração gaussiana e matriz de massa consistente. O incremento de tempo é mudado automaticamente em cada passo e é baseado unicamente em requerimentos de precisão para a integração no tempo, através da obtenção de uma boa estimativa do erro local de truncamento no tempo. Assim, observando-se a escala de tempo, pode-se ter uma visão útil do aspecto físico do escoamento. Por exemplo, a formação de camada limite ou desenvolvimento de vórtices de Karman requerem passos de tempo pequenos, enquanto que incrementos maiores de tempo podem ser suficientes para fluxos que estão se aproximando do estado estacionário. Assim, tem-se um algoritmo econômico, pois o passo de tempo selecionado é aumentado sempre que possível e diminuído apenas quando necessário.

Mais tarde, P.M. GRESHO et al. [16] apresentam um estudo do mesmo problema de um canal com um obstáculo cilíndrico usando uma formulação explícita, empregando a mesma malha, mas com um elemento de quatro nós com interpolação bi-linear para velocidade, sendo a pressão constante em cada elemento. Este elemento não obteve sucesso na correta simulação da formação de vórtices atrás da obstrução. Segundo os autores, as causas seriam erros decorrentes da diagonalização da matriz de massa ("mass lumping"), o que somente seria preciso com a utilização de uma malha extremamente fina.

A. ECER et al. [12] investigam a introdução das condições de contorno para as equações de Navier-Stokes através de uma formulação variacional. É usado um esquema de integração numérica implícito de passo simples e inteiramente acoplado, baseado no princípio variacional. São empregados elementos quadriláteros isoparamétricos bilineares para o estudo do

fluxo em torno de um cilindro e através de um canal com degrau. É utilizado um método de relaxação entre as iterações para melhorar a convergência e um modelo simples de turbulência é adotado.

Tem-se observado que em problemas nos quais os termos de convecção são dominantes, o método dos elementos finitos não tem alcançado o nível de sucesso dos métodos existentes de diferenças finitas. Em geral, a maioria das experiências na aplicação do MEF a problemas de mecânica estrutural e dos sólidos envolve operadores simétricos. Até recentemente, praticamente nenhuma atenção teórica tinha sido dedicada ao fato de que os operadores convectivos são não-simétricos e que, portanto, novas técnicas necessitariam ser desenvolvidas para tratá-los efetivamente.

Elementos finitos usando o método de Galerkin apresentam o mesmo caráter de aproximação que diferenças finitas centrais para os operadores diferenciais de primeira ordem. É bem sabido que o uso de diferenças centradas para a aproximação do termo convectivo pode causar severas oscilações não físicas na solução, sempre que o tamanho da malha excede um certo valor crítico. Isto acontece basicamente devido à combinação das naturezas essencialmente elípticas e parabólicas dos termos difusivo e convectivo respectivamente. Com a aproximação por diferenças finitas essas dificuldades já haviam sido encontradas e foram controladas usando-se diferenças centrais para o primeiro termo e diferenças regressivas (conhecidas como "upwind") para o segundo. Descobriu-se que estas últimas, embora sejam formalmente menos precisas que as diferenças centrais, eliminam as oscilações espúrias da solução sem necessitar refinamento da malha.

Entretanto, o termo convectivo com upwind pode ser construído simplesmente pela adição de uma difusão artificial ao tratamento com diferenças centrais, preservando o grau de precisão. Generalizando-se para o caso bi-dimensional, uma formulação por elementos finitos pode ser desenvolvida modificando-se as funções de interpolação (ou de peso) para alcançar o efeito de upwind. Em essência, o elemento a montante de um nó é tomado com um peso maior do que o elemento a jusante

do nó. A formulação assim obtida é referida como método de resíduos ponderados de Petrov-Galerkin (ver referências [17], [19], [20], [25] e [6]).

Este método será visto mais detalhadamente em capítulo posterior neste trabalho.

2.3 - Formulações Usando Função de Corrente e Vorticidade

A principal motivação em se usar a formulação em função de corrente e vorticidade é evitar as dificuldades inerentes à variável pressão. Entretanto, evitando-se uma dificuldade, depara-se com uma nova, que no caso é a de que as condições de contorno não são conhecidas a priori e, portanto, sem usar um artifício, ψ e ω não podem ser resolvidas simultaneamente. O que se faz normalmente é usar um esquema semelhante ao da formulação segregada para velocidades e pressão vista anteriormente.

Esta formulação tem a vantagem de satisfazer exatamente a conservação da massa e reduzir o número de equações diferenciais parciais simultâneas de três para duas em relação à formulação em variáveis primitivas. A dificuldade com a aproximação usando função de corrente e vorticidade é que, de duas equações diferenciais parciais de segunda ordem, uma, a equação de Poisson para a função de corrente, tem duas condições de contorno ao invés de apenas uma requerida, e a outra, a equação de transporte de vorticidade, não tem nenhuma. Os pesquisadores em diferenças finitas já há algum tempo contornaram esta dificuldade definindo a vorticidade na fronteira a partir da variação ao longo da normal ao contorno do campo de função de corrente determinado numa iteração prévia. Este é o chamado método da fórmula da vorticidade no contorno, que também tem sido adotado por pesquisadores em elementos finitos (ver STEVENS [38]).

Um dos primeiros trabalhos que mostraram que o método dos elementos finitos é adequado, versátil e prático quando aplicado a problemas de escoamento viscoso num domínio arbitrário foi o de R.T. CHENG [8]. O problema de valor de contorno

é formulado tomando-se um funcional variacional para a função de corrente e um pseudo-variacional para a vorticidade. Uma solução estacionária é assumida quando a solução transiente se torna convergente. Um estudo do escoamento em uma família de canais com estrangulamento localizado é apresentado. As condições de contorno em vorticidade para os pontos localizados na parede sólida não são aplicadas diretamente, mas calculadas através de uma expansão local de ψ em séries de Taylor, de modo que a vorticidade na parede pode ser obtida em função dos valores da função de corrente na parede e em ponto interior do domínio situado na direção normal à parede. A expressão para este cálculo é dada por

$$\omega(x_p, y_p) = \frac{2}{h^2} (\psi(x_p, y_p) - \psi(x_I, y_I)) \quad (2.3.1)$$

onde p e I indicam respectivamente pontos situados na parede e no interior ao longo da direção normal e h é a distância entre eles. Em cada passo de tempo as equações são resolvidas de forma desacoplada para a função de corrente e para vorticidade.

Outro trabalho também pioneiro foi o de C. TAYLOR e P. HOOD [39], no qual é proposto um método iterativo para satisfazer as condições de contorno até a obtenção de campos auto-consistentes de função de corrente e de vorticidade. No entanto, a eficiência de tal técnica iterativa é limitada a uma pequena faixa de números de Reynolds.

Em trabalho mais recente, CAMPION-RENSON e CROCHET [7] demonstram que tais iterações são desnecessárias. Empregam uma formulação variacional mista e, através de uma reconsideração da formulação de Galerkin para as equações de Navier-Stokes, pode-se resolver simultaneamente as mesmas em sua forma discretizada sem recorrer a um procedimento iterativo para satisfazer as condições de contorno, que é a principal dificuldade da formulação em ψ e ω . As derivadas normais de ψ impostas em parte do contorno aparecem em forma de integrais de linha como termos de força e fazem parte do termo independente, no lado direito do sistema de equações discretizadas. São apresentados exemplos de fluxo em uma cavidade de seção quadrada

e em um canal com degrau, com resultados em boa concordância com as soluções existentes.

G. DHATT et al. [10] também propõem um método para se determinar os valores da vorticidade no contorno resolvendo-se simultaneamente as equações de ψ e ω , para o caso estacionário, utilizando o método de Newton-Raphson. A solução é obtida através do cálculo de vários incrementos do vetor das incógnitas até que o vetor dos resíduos seja minimizado. A matriz dos coeficientes de cada iteração é chamada matriz tangente (também chamada matriz de Jacobiano) e é obtida a partir da discretização da primeira variação do funcional derivado do método dos resíduos ponderados de Galerkin. O método consiste em se substituir na matriz tangente a equação da vorticidade correspondente ao nó do contorno ("no slip") por um vetor que representa, na média, a derivada de ψ na direção da normal ao contorno neste nó e que é calculado em função da distribuição espacial de ψ através das funções de interpolação, ficando implícitos os valores de ψ na vizinhança do ponto em questão. As condições de contorno para não escorregamento são, portanto, introduzidas explicitamente nas equações não-lineares, e pode-se dizer que as condições para derivada normal em ψ empregadas na referência [7] são, assim, consideradas como condições de contorno adicionais.

M. IKEGAWA [22] apresenta um método baseado na lei de conservação da vorticidade, a qual afirma que, num pequeno volume de controle S , a quantidade de vorticidade transportada por convecção através da fronteira de S deve ser igual à dissipação de vorticidade em S . Elementos finitos triangulares simples de três nós são usados, os termos convectivos são tratados através de um tipo modificado de diferenças finitas regressivas mais conhecidas como "upwind differences", já mencionado anteriormente, que apresenta boa estabilidade, e o tempo de computação é poupado através do uso de um método de relaxação.

A integração no tempo é de importância fundamental na solução das equações de fluxo transiente incompressível. Esquemas simples de integração explícita geralmente são tais que,

quando o número de Reynolds aumenta, o incremento de tempo tem que ser diminuído, resultando muito pequeno para R_e moderadamente grande. A fim de melhorar esse critério de estabilidade, BREBBIA e SMITH [4] usam uma técnica semi-implícita de passos fracionários que aumenta bastante a estabilidade e permite a investigação da solução para R_e maiores mais economicamente. O caso de um canal com obstrução cilíndrica é estudado usando-se malhas com quatro densidades diferentes. O desenvolvimento de vórtices de Karman periódicos (solução "quasi-steady") é obtido para número de Reynolds até 100.

Um outro interessante algoritmo para contornar a dificuldade de não se conhecer condições de contorno para vorticidade é proposto por L. QUARTAPELLE et al. [33] e [34]. Ao invés de tentar determinar as condições de contorno para vorticidade como um substituto equivalente das condições de contorno para função de corrente, faz-se uso de condições exatas para vorticidade na forma de projeções, de um caráter integral, sobre o campo de vorticidade. Demonstra-se que as condições de contorno em velocidade podem ser transformadas em condições de tipo integral completamente equivalentes no campo de vorticidade através da determinação da projeção deste sobre o campo dos vetores harmônicos lineares para o domínio em estudo. O método consiste então em se resolver em seqüência duas equações de segunda ordem para ω e ψ , sendo a primeira com condições de contorno do tipo integral e a outra com condições usuais de Dirichlet. Para o caso estacionário bi-dimensional, tais equações têm a forma:

$$\nabla^2 \omega = R_e \cdot J(\omega, \psi) \quad (2.3.2)$$

$$\int_V \omega \eta \, dV = \oint_S \left[b \eta - a \frac{\partial \eta}{\partial n} \right] dS, \quad \forall \eta: \nabla^2 \eta = 0 \quad (2.3.3)$$

$$\nabla^2 \psi = \omega \quad (2.3.4)$$

$$\psi|_S = a \quad (2.3.5)$$

onde $b = \partial\psi/\partial n|_S$, s e n são direções tangenciais e normais ao contorno, J é o Jacobiano representando o termo convectivo não

-linear e η é qualquer função harmônica em V . A equação (3) pode ser interpretada geometricamente como o produto escalar de ω e η no espaço de Hilbert L^2 das funções de quadrado integrável. Quando a e b são nulos, as funções são ortogonais; caso contrário, a projeção de ω no espaço das funções harmônicas fica determinada por estes dois valores.

Durante a fase de pesquisa deste trabalho tentou-se testar esta formulação, que apresenta um bom fundamento matemático, usando-se elementos finitos triangulares. A tarefa de escrever o programa não foi simples, apresentando várias dificuldades, como por exemplo a complexidade da imposição de condições de contorno do tipo integral. Ao final, os resultados obtidos para o problema de fluxo confinado entre placas paralelas foram bastante desanimadores. Além de não se obter convergência para números de Reynolds mais altos (>50), quando esta era obtida os resultados não eram coerentes. Talvez fosse necessária uma melhor análise do método e do programa, mas, pelo menos por enquanto, houve-se por bem não insistir com tal formulação.

2.4 - Formulações Usando Função de Corrente

Apenas para completar, far-se-á menção a um método alternativo que é aplicável a problemas de fluxo lento ("creeping flow"). A equação bi-harmônica governante deste problema pode ser solucionada considerando-se uma aproximação variacional. A maior vantagem prática da aproximação é que os programas para a solução de problemas de flexão de placas e das equações de fluxo lento são idênticas e, portanto, os programas existentes podem ser usados. Mas estas aplicações são limitadas.

Uma formulação usando o método de Galerkin pode ter aplicação em fluxos com números de Reynolds mais altos. Entretanto, é claro que a principal desvantagem do método é a necessidade de se usar elementos de alta ordem, enquanto que a vantagem é que apenas uma equação ao invés de três é capaz de descrever o comportamento do fluido.

Apenas poucos pesquisadores têm empregado esta formu-

lação, primariamente devido à dificuldade em se discretizar equações diferenciais parciais de quarta ordem através do MEF, juntamente com condições de contorno complicadas.

3. FORMULAÇÃO EM FUNÇÃO DE CORRENTE E VORTICIDADE

3.1 - Introdução

Neste capítulo apresentar-se-á um processo para a resolução das equações bi-dimensionais de Navier-Stokes usando o método dos elementos finitos em que o fluxo é representado pelas variáveis função de corrente ψ e vorticidade ω . Esta formulação satisfaz identicamente a equação da continuidade através da escolha da função de corrente, mas o problema imposto pelas condições de contorno para não escorregamento nas fronteiras sólidas é a maior dificuldade.

Muitos autores tratam estas condições de uma maneira iterativa (ref. [39], [8]), transformando o problema estacionário em não-estacionário e tomando a solução limite no tempo, mas com convergência pobre e custo computacional elevado. Em trabalho mais recente (ref. [7]), mostra-se que tais iterações são desnecessárias e que as condições de contorno podem ser impostas mais diretamente.

No estudo aqui efetuado é apresentado um método direto e explícito para a introdução das condições para os contornos sólidos ("no-slip") nas equações não-lineares. Apenas o problema de fluxo estacionário é analisado e a formulação acoplada, resolvida simultaneamente em ψ e ω , emprega o método de Newton-Raphson para a solução do sistema de equações não-lineares. Ver DHATT et al. [10] e [11].

São apresentados exemplos de fluxo entre placas paralelas e de escoamento em torno de um obstáculo sólido cilíndrico. A formulação revelou-se eficiente na solução das equações de Navier-Stokes para regime laminar.

3.2 - Formulação em Elementos Finitos

As equações de Navier-Stokes adimensionalizadas, governantes do problema de fluxo incompressível bi-dimensional e dadas pelas equações (1.1.57-58), podem ser transcritas para o caso estacionário como

$$\nabla^2 \psi + \omega = 0 \quad (3.2.1)$$

$$\nabla^2 \omega - R_e (\psi, y \omega, x - \psi, x \omega, y) = 0 \quad (3.2.2)$$

dadas numa região geométrica V , que é o domínio do problema, sendo S a sua fronteira.

As condições de contorno são:

$$\psi = \bar{\psi} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = \bar{g}_\psi = \bar{u} \quad \text{em } S \quad (3.2.3a)$$

$$\omega = \bar{\omega} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \omega}{\partial n} = \bar{g}_\omega \quad \text{em } S \quad (3.2.3b)$$

onde n é a normal a S dirigida para o exterior e o traço superior indica valores conhecidos no contorno.

Ao longo de contornos sólidos, as condições de não escorregamento são dadas na seguinte forma:

$$\psi = \bar{\psi} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = \bar{u} \quad \text{em } S \quad (3.2.4)$$

Nota-se que duas condições são dadas para ψ e nenhuma para ω .

O método dos resíduos ponderados de Galerkin é empregado para obter uma forma integral correspondente às equações (1) e (2):

$$W = -\iint_V \left[(\nabla^2 \psi + \omega) \delta \psi + \{ \nabla^2 \omega - R_e (\psi, y \omega, x - \psi, x \omega, y) \} \delta \omega \right] dx dy = 0 \quad (3.2.5)$$

onde $\delta \psi$ e $\delta \omega$ são as funções de peso (δ indica variação).

A equação (5) pode agora ser integrada por partes a fim de se obter uma forma integral fraca ("weak form"). Para

tanto, pode-se aplicar a fórmula de Green aos termos correspondentes aos laplacianos. Para $\nabla^2\psi$ tem-se

$$\iint_V \delta\psi \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} dx dy \equiv - \iint_V \frac{\partial}{\partial x} (\delta\psi) \frac{\partial\psi}{\partial x} dx dy + \oint_S \delta\psi \frac{\partial\psi}{\partial x} n_x dS \quad (3.2.6)$$

$$\iint_V \delta\psi \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} dx dy \equiv - \iint_V \frac{\partial}{\partial y} (\delta\psi) \frac{\partial\psi}{\partial y} dx dy + \oint_S \delta\psi \frac{\partial\psi}{\partial y} n_y dS$$

onde n_x e n_y são os cossenos diretores da direção normal externa ao contorno S com respeito a x e y. A derivada ao longo da normal é dada pela regra da cadeia por

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = \frac{\partial\psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial n} = \frac{\partial\psi}{\partial x} n_x + \frac{\partial\psi}{\partial y} n_y \quad (3.2.7)$$

que pode ser levada em (6).

Assim, procedendo-se similarmente para $\nabla^2\omega$, a forma integral pode ser escrita:

$$\begin{aligned} W = & \iint_V \left[(\delta\psi,_{x} \psi,_{x} + \delta\psi,_{y} \psi,_{y} - \delta\psi \cdot \omega) + \right. \\ & \left. + (\delta\omega,_{x} \omega,_{x} + \delta\omega,_{y} \omega,_{y}) + R_e \delta\omega (\psi,_{y} \omega,_{x} - \psi,_{x} \omega,_{y}) \right] dx dy - \\ & - \int_{S_1} \delta\psi \frac{\partial\psi}{\partial n} dS - \int_{S_2} \delta\omega \frac{\partial\omega}{\partial n} dS = 0 \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

onde S_1 é a parte do contorno S onde $\partial\psi/\partial n = \bar{g}_\psi$ apenas (não ψ) é conhecida e S_2 corresponde à parte onde $\partial\omega/\partial n = \bar{g}_\omega$ é dada (condições de Neumann). Assume-se que as condições de Dirichlet $\psi = \bar{\psi}$ e $\omega = \bar{\omega}$, quando presentes, são satisfeitas diretamente.

Uma expressão discretizada para W é obtida usando-se uma aproximação por elementos finitos para $\psi(x,y)$ e $\omega(x,y)$:

$$W = \sum_{i=1}^m W^e(\psi, \omega) \quad (3.2.9)$$

onde m é o número de elementos finitos e W^e é o funcional do

problema para o elemento "e".

As variáveis do problema podem ter seus valores ψ^e e ω^e em qualquer ponto do elemento "e" definidos em função dos valores das mesmas nos pontos nodais do elemento, na forma:

$$\psi^e = \sum_{k=1}^r \phi_k^e \psi_k^{e,n} ; \quad \omega^e = \sum_{k=1}^r \phi_k^e \omega_k^{e,n} \quad (3.2.10)$$

onde as funções ϕ_k^e são as funções de forma ou funções de interpolação e r é o número destas. Em forma matricial, têm-se

$$\psi^e = \underline{\phi}^T \underline{\psi}^n = \underline{\psi}^{n,T} \underline{\phi} ; \quad \omega^e = \underline{\phi}^T \underline{\omega}^n = \underline{\omega}^{n,T} \underline{\phi} \quad (3.2.11)$$

Assim, uma expressão genérica para W^e pode ser obtida:

$$\begin{aligned} W^e = & \iint_{V^e} \left[(\underline{\delta\psi}^{n,T} \underline{\phi}_{,x} \underline{\phi}_{,x}^T \underline{\psi}^n + \underline{\delta\psi}^{n,T} \underline{\phi}_{,y} \underline{\phi}_{,y}^T \underline{\psi}^n - \underline{\delta\psi}^{n,T} \underline{\phi\phi}^T \underline{\omega}^n) + \right. \\ & + (\underline{\delta\omega}^{n,T} \underline{\phi}_{,x} \underline{\phi}_{,x}^T \underline{\omega}^n + \underline{\delta\omega}^{n,T} \underline{\phi}_{,y} \underline{\phi}_{,y}^T \underline{\omega}^n) + \\ & \left. + R_e \underline{\delta\omega}^{n,T} \underline{\phi} (\underline{\psi}^{n,T} \underline{\phi}_{,y} \underline{\phi}_{,x}^T \underline{\omega}^n - \underline{\psi}^{n,T} \underline{\phi}_{,x} \underline{\phi}_{,y}^T \underline{\omega}^n) \right] dx dy - \\ & - \int_{S_1} \underline{\delta\psi}^{n,T} \underline{\phi} \bar{g}_\psi dS - \int_{S_2} \underline{\delta\omega}^{n,T} \underline{\phi} \bar{g}_\omega dS = 0 \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Reagrupando os termos:

$$\begin{aligned} W^e = & \iint_{V^e} \{ \underline{\delta\psi}^{n,T} \left[(\underline{\phi}_{,x} \underline{\phi}_{,x}^T + \underline{\phi}_{,y} \underline{\phi}_{,y}^T) \underline{\psi}^n - \underline{\phi\phi}^T \underline{\omega}^n \right] + \\ & + \underline{\delta\omega}^{n,T} \left[(\underline{\phi}_{,x} \underline{\phi}_{,x}^T + \underline{\phi}_{,y} \underline{\phi}_{,y}^T) + R_e \underline{\phi} \underline{\psi}^{n,T} (\underline{\phi}_{,y} \underline{\phi}_{,x}^T - \underline{\phi}_{,x} \underline{\phi}_{,y}^T) \right] \omega^n \} dx dy - \\ & - \underline{\delta\psi}^{n,T} \int_{S_1} \underline{\phi} \bar{g}_\psi dS - \underline{\delta\omega}^{n,T} \int_{S_2} \underline{\phi} \bar{g}_\omega dS = 0 \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

Portanto, a nível de elemento, tem-se uma expressão do tipo

$$\underline{\delta U}_e^{n,T} [\underline{K}^e] \underline{U}_e^n - \underline{\delta U}_e^{n,T} \underline{F}_e^n = 0 \quad (3.2.14)$$

onde

$$\underline{\delta U}_e^n = \begin{Bmatrix} \underline{\delta \psi}^n \\ \underline{\delta \omega}^n \end{Bmatrix} \quad \underline{U}_e^n = \begin{Bmatrix} \underline{\psi}^n \\ \underline{\omega}^n \end{Bmatrix} \quad (3.2.15)$$

$$[\underline{K}^e] = \iint_{V^e} \begin{bmatrix} \underline{\phi}_{,x} & \underline{\phi}_{,x}^T + \underline{\phi}_{,y} & \underline{\phi}_{,y}^T & \vdots & -\underline{\phi} & \underline{\phi}^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \underline{\phi}_{,x} & \underline{\phi}_{,x}^T + \underline{\phi}_{,y} & \underline{\phi}_{,y}^T + \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & +R_e \underline{\phi} & \underline{\psi}^n, T & (\underline{\phi}_{,y} & \underline{\phi}_{,x}^T - \underline{\phi}_{,x} & \underline{\phi}_{,y}^T) \end{bmatrix} dx dy \quad (3.2.16)$$

$$\underline{F}_e^n = \begin{Bmatrix} \int_{S_1} \underline{\phi} \bar{g}_\psi dS \\ \int_{S_2} \underline{\phi} \bar{g}_\omega dS \end{Bmatrix} \quad (3.2.17)$$

Integrando-se a função ϕ sobre o elemento, obtêm-se a matriz do elemento para esse problema particular. Tomando-se as contribuições de todos os elementos, obtêm-se uma expressão global para o problema discretizado:

$$W = \underline{\delta U}^T (\underline{F} - [\underline{K}] \underline{U}) = \underline{\delta U}^T \underline{R} \quad (3.2.18)$$

onde \underline{U} é o vetor que contém as variáveis nodais do sistema, $\underline{\delta U}$ é a primeira variação de \underline{U} , \underline{F} é o vetor de carga equivalente devido a condições de contorno não homogêneas, \underline{R} é o chamado vetor resíduo (que deve ser minimizado) e $[\underline{K}]$ é a correspondente matriz global de equilíbrio, que é não linear e não simétrica.

Da arbitrariedade da variação $\underline{\delta U}$ segue-se que o sistema de equações não lineares toma a forma:

$$\underline{F} - [\underline{K}] \underline{U} = \underline{R} \quad (3.2.19)$$

Como a matriz $[\underline{K}]$ depende das incógnitas \underline{U} , para resolver esta sistema empregar-se-á o método de Newton-Raphson, já consagrado por sua grande eficiência. Para tanto, há a ne-

cessidade de se calcular a matriz tangente, a qual é obtida pela discretização da primeira variação do funcional W , dado em (8), e que pode ser expressa por

$$\begin{aligned} \Delta(W) = \iint_V & \left[(\delta\psi,_{x} \Delta\psi,_{x} + \delta\psi,_{y} \Delta\psi,_{y} - \delta\psi \Delta\omega) + \right. \\ & + (\delta\omega,_{x} \Delta\omega,_{x} + \delta\omega,_{y} \Delta\omega,_{y}) + \\ & + R_e \delta\omega (\psi,_{y} \Delta\omega,_{x} - \psi,_{x} \Delta\omega,_{y}) + \\ & \left. + R_e \delta\omega (\omega,_{x} \Delta\psi,_{y} - \omega,_{y} \Delta\psi,_{x}) \right] dx dy \quad (3.2.20) \end{aligned}$$

Procedendo-se a discretização, chega-se a:

$$\begin{aligned} \Delta(W) = \iint_V & \{ \delta\psi^{n,T} ([\phi,_{x} \phi,_{x}^T + \phi,_{y} \phi,_{y}^T] \Delta\psi^n - \phi \phi^T \Delta\omega^n) + \\ & + \delta\omega^{n,T} [R_e \phi(\omega^{n,T} \phi,_{x} \phi,_{y}^T - \omega^{n,T} \phi,_{y} \phi,_{x}^T) \Delta\psi^n + \\ & + (\phi,_{x} \phi,_{x}^T + \phi,_{y} \phi,_{y}^T + R_e \phi [\psi^{n,T} \phi,_{y} \phi,_{x}^T - \psi^{n,T} \phi,_{x} \phi,_{y}^T]) \Delta\omega^n] \} dx dy \quad (3.2.21) \end{aligned}$$

O que conduz a uma expressão do tipo:

$$\Delta(W) = \delta U^T [\underline{K}_T] \Delta U \quad (3.2.22)$$

onde a matriz tangente $[\underline{K}_T]$ pode ser escrita simbolicamente como

$$[\underline{K}_T] = \begin{bmatrix} \underline{K}_{\psi\psi} & \vdots & \underline{K}_{\psi\omega} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \underline{K}_{\omega\psi} & \vdots & \underline{K}_{\omega\omega} \end{bmatrix} \quad (3.2.23)$$

em que

$$\underline{K}_{\psi\psi} = \iint_V (\phi,_{x} \phi,_{x}^T + \phi,_{y} \phi,_{y}^T) dx dy \quad (3.2.24a)$$

$$\underline{K}_{\psi\omega} = \iint_V (-\phi \phi^T) dx dy \quad (3.2.24b)$$

$$\underline{K}_{\omega\psi} = R_e \iint_V \underline{\phi} \omega^{n,T} (\underline{\phi}_{,x} \underline{\phi}_{,y}^T - \underline{\phi}_{,y} \underline{\phi}_{,x}^T) dx dy \quad (3.2.24c)$$

$$\underline{K}_{\omega\omega} = \iint_V \left[\underline{\phi}_{,x} \underline{\phi}_{,x}^T + \underline{\phi}_{,y} \underline{\phi}_{,y}^T + R_e \underline{\phi} \psi^{n,T} (\underline{\phi}_{,y} \underline{\phi}_{,x}^T - \underline{\phi}_{,x} \underline{\phi}_{,y}^T) \right] dx dy \quad (3.2.24d)$$

As sub-matrizes $\underline{K}_{\psi\psi}$ e $\underline{K}_{\psi\omega}$ são constantes e idênticas às correspondentes na equação (16), enquanto que $\underline{K}_{\omega\psi}$ e $\underline{K}_{\omega\omega}$ dependem de \underline{U} .

O algoritmo de Newton-Raphson empregado consiste no seguinte:

1) Dado um número de Reynolds, escolher uma solução de partida para \underline{U} . Geralmente esta é tomada igual à solução prévia. Aqui, tomou-se \underline{U} nulo em todos os pontos nodais à exceção dos situados no contorno, que têm valores prescritos para ψ e ω .

2) Calcular o resíduo \underline{R} através da equação (19) e a matriz tangente (eq. (23)).

3) Resolver o sistema linear

$$[\underline{K}_T] \underline{\Delta U} = \underline{R} \quad (3.2.25)$$

para obter
$$\underline{\Delta U} = [\underline{K}_T]^{-1} \underline{R} \quad (3.2.26)$$

A solução é então incrementada de $\underline{\Delta U}$:

$$\underline{U}^{i+1} = \underline{U}^i + \underline{\Delta U}^i \quad (3.2.27)$$

4) Testar a convergência e, se necessário, repetir os passos 2 e 3. Esta convergência é obtida se a diferença na solução em duas iterações consecutivas for menor do que uma dada tolerância em 90% dos pontos nodais.

A figura (3.2.1) dá uma idéia esquemática do método.

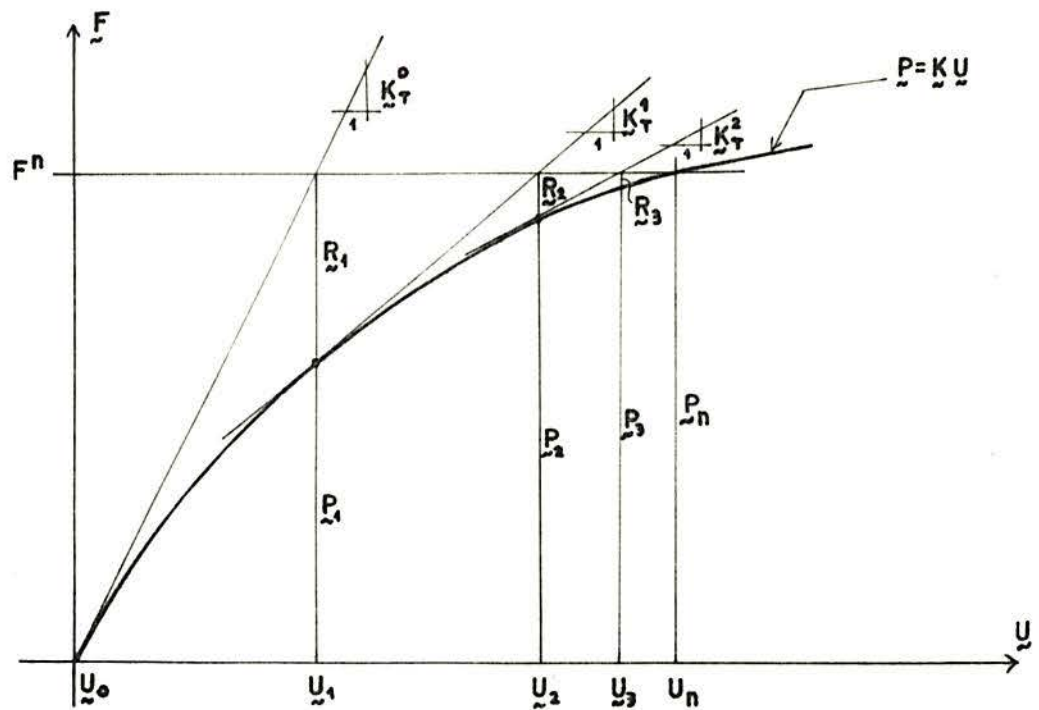


Fig.(3.2.1) - ESQUEMA DE NEWTON-RAPHSON

A fim de melhorar as características de convergência, adotou-se um método de relaxação da solução. No início de cada iteração, a solução é tomada como uma combinação linear das soluções nas duas iterações anteriores:

$$\underline{U}^i = c \underline{U}^{i-1} + (1 - c) \underline{U}^{i-2} \quad (3.2.28)$$

onde c é o parâmetro de relaxação tomado no intervalo $0,5 \leq c \leq 1$.

O sistema não-linear (19) é resolvido pelo método de Newton-Raphson após a introdução das condições de contorno. As condições correspondentes às equações (3a) e (3b) são introduzidas na maneira usual do método dos elementos finitos, ou seja, simplesmente requerem que valores apropriados sejam substituídos nas respectivas equações. As condições para o contorno sólido, dadas em (4), requerem um tratamento especial. A primeira delas, correspondente a ψ , é introduzida diretamente, à maneira tradicional. Para a equação correspondente a ω nes-

te contorno procede-se a implementação de uma aproximação de segunda ordem que usa as duas condições seguintes para um ponto (x_0, y_0) da fronteira sólida (ver eq. (1.2.9)):

$$\omega = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2} \quad (3.2.29)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \bar{u} \quad (3.2.30)$$

onde \bar{u} é a velocidade de deslocamento (conhecida) do contorno sólido na direção perpendicular a "n".

A expansão em série de Taylor de $\psi(x,y)$ em torno do ponto (x_0, y_0) ao longo da direção "n" normal ao contorno é dada por:

$$\psi(x,y) = \psi(x_0, y_0) + h \frac{\partial \psi}{\partial n}(x_0, y_0) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2}(x_0, y_0) + O(h^3) \quad (3.2.31)$$

onde h é a distância entre um ponto interior (x,y) e o ponto (x_0, y_0) (ver fig.(3.2.2)) e $O(h^3)$ o erro cometido no truncamento da série. Impondo as equações (29) e (30) nesta expressão obtém-se:

$$\omega(x_0, y_0) + \frac{2}{h^2} \left[\psi(x, y) - \psi(x_0, y_0) \right] = \frac{2\bar{u}}{h} \quad (3.2.32)$$

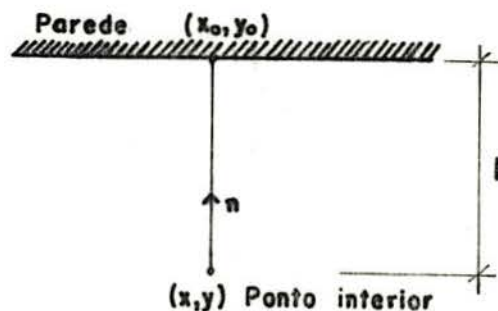


Fig.(3.2.2)

A matriz tangente global \tilde{K}_T é então modificada substituindo-se a equação correspondente à vorticidade no nó do contorno sólido pela equação (32), que define o valor de ω em termos de \bar{u} , $\psi(x,y)$ e $\psi(x_0,y_0)$. Para tanto, o seguinte procedimento é empregado: Seja a variável ω correspondente ao ponto (x_0,y_0) no contorno sólido definida pela j -ésima equação na matriz \tilde{K}_T . Os números das equações para $\psi(x_0,y_0)$ no nó do contorno e $\psi(x,y)$ no ponto interior normal ao contorno são representados por j_1 e j_2 respectivamente. Por simplicidade, assume-se que o ponto (x,y) representa um nó de elemento. Pode-se então escrever o algoritmo da seguinte forma:

a) Calcular a distância h entre (x,y) e (x_0,y_0) .

b) Modificar os elementos da linha j da matriz $[\tilde{K}_T]$ de maneira que

$$K_T(j, j_1) = -K_T(j, j_2) = -\frac{2}{h^2} \quad (3.2.33a)$$

$$K_T(j, j) = 1 \quad (3.2.33b)$$

$$K_T(j, i) = 0 \quad \text{para todo } i \neq j, j_1, j_2 \quad (3.2.33c)$$

c) Trocar o j -ésimo termo do vetor resíduo por $2\bar{u}/h$.

d) Repetir este processo para cada ω correspondendo a todos os nós da parede sólida.

Esta é uma maneira simples, direta e efetiva de se introduzir as condições para não escorregamento nas equações de Navier-Stokes com a formulação $\psi-\omega$.

Apenas para citar, a formulação da condição de contorno para vorticidade pode ser aproximada também de uma segunda forma, que consiste em expressar ω como um polinômio de grau correspondente à função de interpolação do elemento, isto é, linear, quadrática, etc. e integrar a vorticidade duas vezes com relação a n , usando a eq. (29), ao longo da linha de comprimento h normal à parede. Para um elemento de três nós (linear) e com $\partial\psi/\partial n = 0$, resulta:

$$\omega(x_0, y_0) + \frac{3}{h^2} \left[\psi(x, y) - \psi(x_0, y_0) \right] + \frac{1}{2} \omega(x, y) = 0 \quad (3.2.34)$$

As equações (32) e (34) são igualmente aplicáveis e testes têm mostrado que há muito pequena diferença nos resultados. BREBBIA e SMITH [4].

3.3 - Aplicações Numéricas

A formulação da seção 3.2 foi inicialmente aplicada, para propósito de análise de precisão, estabilidade e convergência, ao problema do fluxo confinado entre placas planas paralelas infinitamente longas. A distância entre as placas é de 2 unidades de comprimento (tomada adimensionalmente) e a viscosidade é selecionada de modo a fornecer um número de Reynolds teste de 200. Este problema é apresentado por BAKER [2], que usa uma formulação em elementos finitos similar à citada por CONNOR e BREBBIA [9]. O fluxo alcança um perfil de velocidade completamente desenvolvido a uma distância axial de cerca de 20 unidades. Devido à simetria, apenas metade do problema necessita ser estudado. A geometria e a malha de elementos finitos para o problema são mostrados na figura (3.3.1).

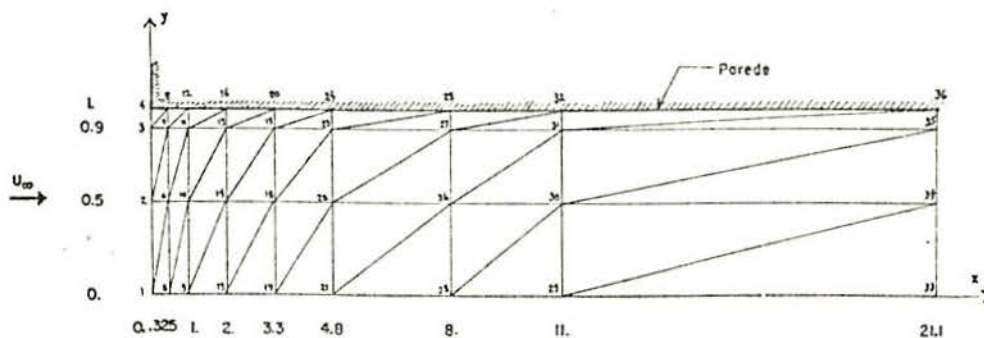


Fig. (3.3.1)

O duto é considerado inicialmente contendo fluido em repouso, e que é instantaneamente acelerado através da aplicação de um perfil de velocidades unitário uniforme não dimensional na entrada do duto. As condições iniciais tanto para ψ como para ω são tomadas como nulas no interior do domínio. Quanto às especificações de condições de contorno, tem-se que, para velocidade uniforme na entrada, a vorticidade é zero e a função de corrente é uma função linear da ordenada y . Ao longo do plano central, devido à simetria, a vorticidade bem como a função de corrente são nulas. As derivadas normais tanto de ψ como de ω se anulam na saída, forçando um fluxo paralelo, mas não necessariamente completamente desenvolvido. Como não há injeção de massa, o valor de ψ ao longo da parede superior é constante e tomado igual a 1, enquanto que a vorticidade nestes pontos depende da distribuição interior da função de corrente e seu valor é obtido através da fórmula (3.2.32).

São usados elementos finitos triangulares de três nós e, portanto, com a função de interpolação variando linearmente em cada elemento. No apêndice A deste trabalho são apresentadas algumas regras que possibilitam, usando este tipo de elemento, integrar as equações da seção anterior, a fim de se obter as matrizes de cada elemento que, somadas, vão formar o sistema de equações globais discretizadas representativo do problema em apreço.

Utilizando-se um coeficiente de relaxação $c = 0.85$, obtém-se convergência para a solução em apenas cinco iterações. Os resultados obtidos são mostrados na tabela da página seguinte e são comparados com a solução por elementos finitos de BAKER [2] e com a de GOSMAN et al. que utiliza uma malha de diferenças finitas contendo 440 células computacionais para obter a solução "steady state" para número de Reynolds 200 e que é citada também na referência [2].

Os resultados apresentam uma concordância bastante boa com as outras soluções e dir-se-ia que se aproximam mais da solução em diferenças finitas, que tem maior precisão, do que a formulação de BAKER. O erro máximo de aproximadamente 5% na função de corrente ocorreu no nó mais próximo ao canto na entrada do duto. A concordância da solução para vorticidade, é,

NÓ	ESTE ESTUDO		ELEMENTOS FINITOS BAKER		DIFERENÇAS FINITAS GOSMAN et al.	
	ψ	ω	ψ	ω	ψ	ω
6	0.5647	-0.0173	0.595	0.343	0.539	0.039
7	0.9536	2.9061	0.967	3.60	0.957	5.12
8	1.	9.2792	1.	8.14	1.	9.73
10	0.6119	0.2427	0.641	0.606	0.589	0.262
11	0.9755	3.7310	0.980	3.77	0.976	4.26
12	1.	4.8911	1.	4.04	1.	5.05
14	0.6316	0.5301	0.656	0.731	0.623	0.623
15	0.9800	3.5184	0.982	3.61	0.980	3.57
16	1.	4.0095	1.	3.55	1.	4.44
18	0.6381	0.5819	0.667	1.05	0.644	0.881
19	0.9807	3.4344	0.983	3.11	0.982	3.20
20	1.	3.8602	1.	3.57	1.	4.14
22	0.6605	0.9607	0.675	1.09	0.659	1.10
23	0.9816	3.2026	0.983	3.09	0.983	3.04
24	1.	3.6733	1.	3.58	1.	3.71
26	0.6571	0.9448	0.669	1.16	0.674	1.27
27	0.9824	3.0679	0.983	3.15	0.984	2.88
28	1.	3.5264	1.	3.60	1.	3.28
30	0.6866	1.3820	0.684	1.31	0.681	1.44
31	0.9831	3.0129	0.984	2.96	0.985	2.76
32	1.	3.3758	1.	3.30	1.	3.12
34	0.6606	1.3624	0.688	0.92	0.685	1.50
35	0.9860	2.5781	0.983	3.06	0.985	2.70
36	1.	2.8057	1.	3.51	1.	3.60

DISTRIBUIÇÃO ESTACIONÁRIA DE FUNÇÃO DE CORRENTE
E VORTICIDADE PARA $R_e = 200$

similarmente, melhor na região longe deste canto. A malha aqui utilizada é certamente grosseira e o seu refinamento, especialmente na região da entrada, pode efetivamente melhorar a solução, tendo-se em vista a boa aproximação aqui alcançada. Isto possibilita ainda a obtenção de maiores detalhes do fluxo exatamente nos locais onde desejados.

A mesma formulação é em seguida empregada na tentativa de se obter uma solução numérica para as equações laminares do movimento de um fluido viscoso incompressível escoando em torno de um obstáculo cilíndrico. Um fluxo com velocidade uniforme U é assumido incidindo normalmente num domínio retangular onde é posicionado um cilindro circular infinitamente longo, assim possibilitando que o escoamento seja tomado como bi-dimensional. O caso de uma obstrução cilíndrica tem sido extensivamente estudado tanto no campo numérico como no experimental sendo que a simulação numérica da formação de vórtices constitui um dos problemas mais desafiadores da mecânica dos fluidos.

A geometria e as condições de contorno do problema empregadas na análise são mostradas na figura (3.3.2), enquanto que a idealização do domínio em elementos finitos triangulares é apresentada na figura (3.3.3).

A malha utilizada contém 770 elementos e 426 nós numerados de forma a produzir a menor largura de banda possível nas matrizes, e apresenta-se mais densa na vizinhança do obstáculo sólido que é onde aparecem os maiores gradientes das variáveis ψ e ω . Ao longo dos contornos superior e inferior os valores da função de corrente são especificados como uma constante, bem como na superfície do cilindro. A vorticidade é especificada como nula nas paredes superior e inferior, o que significa que é imposta uma condição para escorregamento livre. No cilindro, as condições "no slip" são impostas usando-se a equação (3.2.32). Para fluxo uniforme na entrada do canal a vorticidade é zero e a função de corrente é uma função linear da coordenada y . As derivadas normais de ψ e ω são tomadas como zero na saída, forçando um fluxo paralelo.

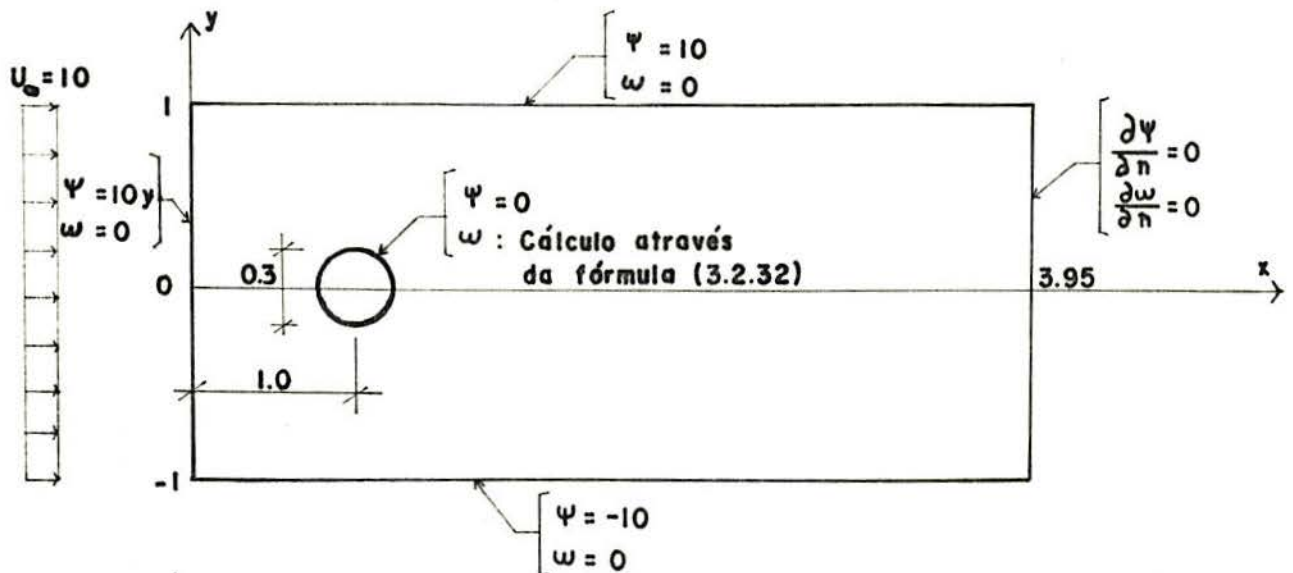


Fig. (3.3.2)

Como condição inicial para a primeira iteração, os campos de função de corrente e vorticidade são tomados como nulos em todo o interior do domínio. Inicialmente a viscosidade é escolhida de modo a corresponder a um número de Reynolds igual a 1. Com um parâmetro de relaxação $c = 0.85$ em (3.2.28), a solução converge, sendo necessárias apenas 5 iterações. Na figura (3.3.4) são plotadas as linhas de fluxo obtidas para este caso.

Ao se tentar empregar o esquema acima para $R_e \geq 5$ não mais se obteve convergência das soluções, as quais apresentam um caráter oscilatório entre as iterações. A fim de remediar esta situação e melhorar as características de convergência do problema não-linear, tentou-se implantar uma técnica chamada "line search", baseada numa idéia apresentada por MATTHIES e STRANG [27], que consiste em se somar apenas uma fração do incremento ΔU em cada iteração, ao invés do incremento total em (3.2.27), de modo a tentar evitar que a solução tenda a divergir e cause "over flow". Assim, tem-se para uma nova iteração

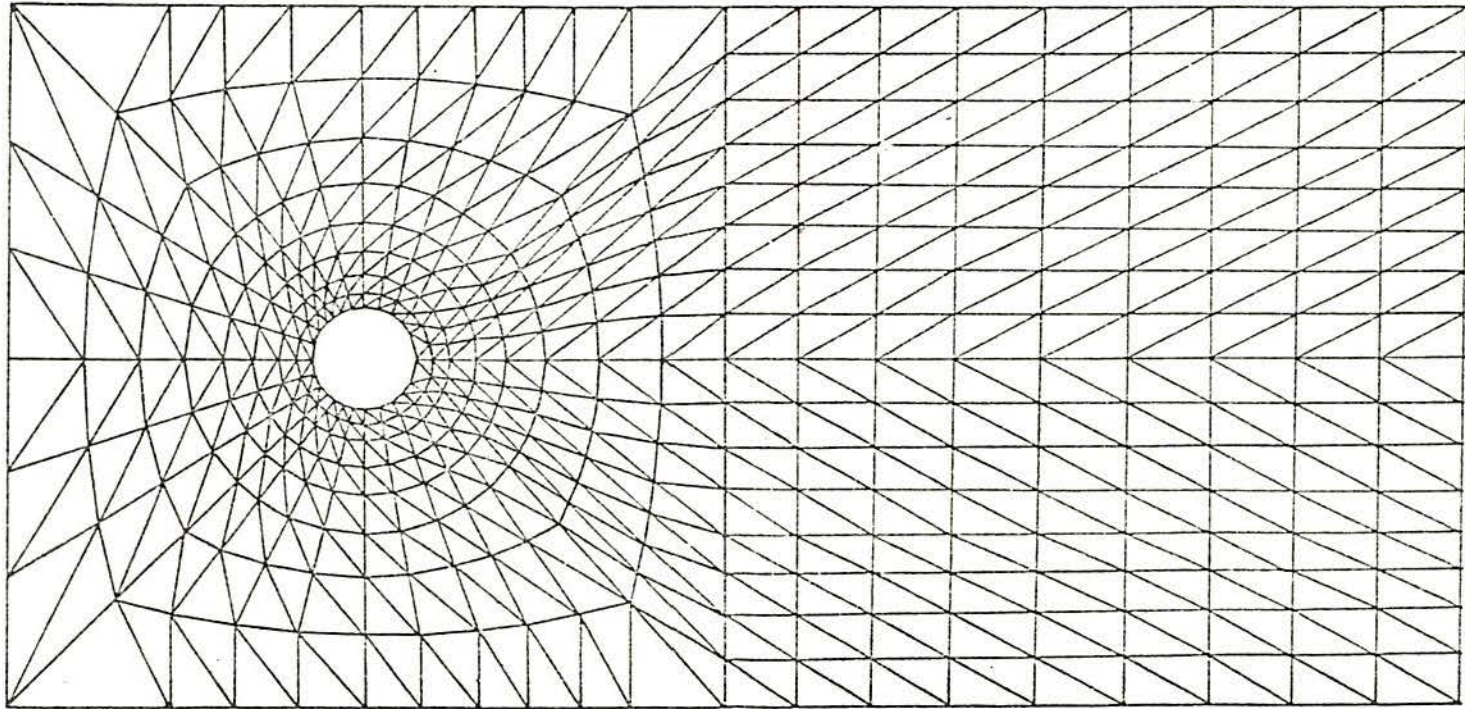


Fig. (3.3.3)

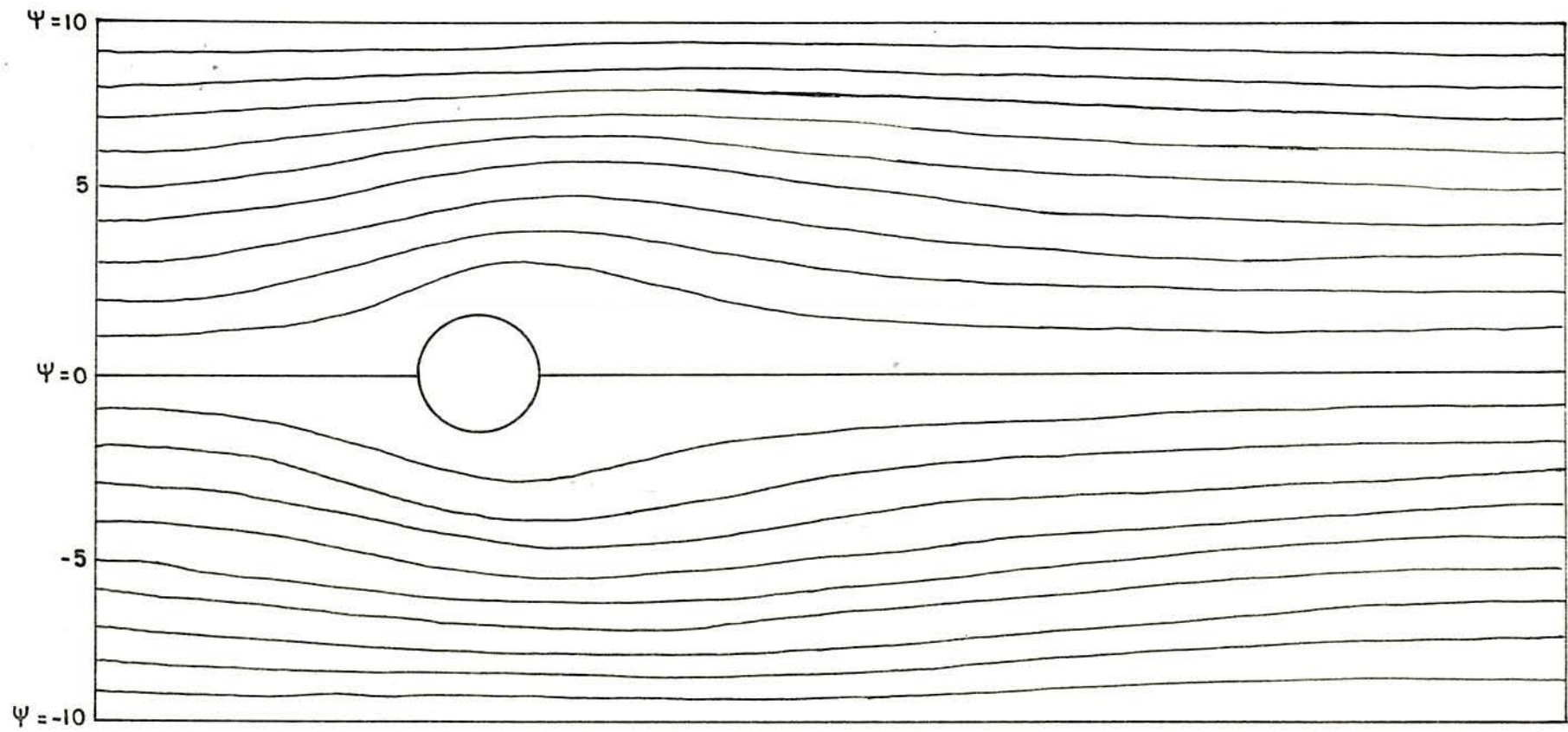


Fig. (3.3.4)

$$\underline{U}^{(i+1)} = \underline{U}^{(i)} + s^{(i)} \Delta \underline{U}^{(i)} \quad (3.3.1)$$

onde $s^{(i)}$ é um parâmetro escalar que é escolhido de maneira que o vetor resíduo

$$\underline{R}^{(i+1)} = \underline{F} - \underline{K} \underline{U}^{(i+1)} \quad (3.3.2)$$

tenha componente nula na direção de $\Delta \underline{U}$, ou seja, que o produto escalar entre estes vetores seja nulo:

$$(\Delta \underline{U}^{(i)}) \cdot \underline{R}^{(i+1)} = 0 \quad (3.3.3)$$

Fazendo as substituições

$$\Delta \underline{U}^{(i)} \cdot (\underline{F} - \underline{K} \underline{U}^{(i+1)}) = \Delta \underline{U}^{(i)} \cdot [\underline{F} - \underline{K} (\underline{U}^{(i)} + s^{(i)} \Delta \underline{U}^{(i)})] = 0 \quad (3.3.4)$$

mas, tem-se que

$$\underline{R}^{(i)} = \underline{F} - \underline{K} \underline{U}^{(i)} \quad (3.3.5)$$

donde se deduz

$$s^{(i)} = \frac{\Delta \underline{U}^{(i)T} \underline{R}^{(i)}}{\Delta \underline{U}^{(i)T} \underline{K} \Delta \underline{U}^{(i)}} \quad (3.3.6)$$

No programa, o que se faz é calcular o valor de uma função

$$G(s) = \Delta \underline{U}^{(i)} \cdot (\underline{R}^{(i)} - s \underline{K} \Delta \underline{U}^{(i)}) \quad (3.3.7)$$

de modo que $G(s) = 0$ define o valor de s procurado. Segundo [27], $s^{(i)}$ é aceitável se

$$\left| G(s^{(i)}) \right| \leq \frac{1}{2} \left| G(0) \right| \quad (3.3.8)$$

De acordo com a figura (3.3.5), uma aproximação genérica para s pode ser obtida por:

$$s_{j+1} = s_j + \frac{G(s_j) \cdot (s_j - s_{j-1})}{G(s_{j-1}) - G(s_j)} \quad (3.3.9)$$

até que seja satisfeito o critério (8).

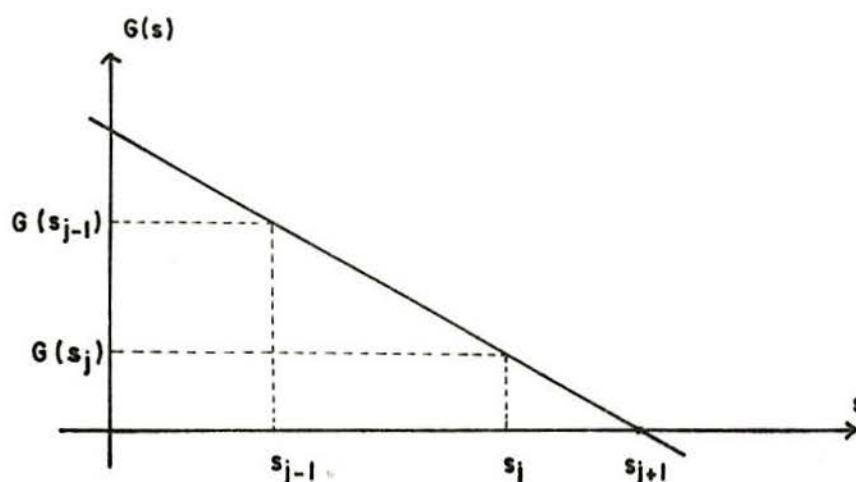


Fig. (3.3.5)

Caso se obtenha $s > 1$ deve-se tomar $s = 1$.

Desafortunadamente, mesmo com a aplicação da técnica acima, os resultados obtidos para Reynolds mais altos não foram satisfatórios. A solução convergiu, mas tão somente porque os valores do parâmetro s ao longo das iterações tenderam a zero. Assim, a solução estabilizou-se, a despeito de o vetor resíduo não ser minimizado.

A conclusão a que se chegou é que a formulação apresentada na seção 3.2 é boa apenas para baixos números de Reynolds, ou seja, para escoamento em regime laminar. Entretanto, sua vantagem reside no fato de que as condições de contorno para não escorregamento são introduzidas de maneira simples e direta.

4. FORMULAÇÃO EM VELOCIDADES E PRESSÃO

4.1 - Introdução

Neste capítulo analisa-se as equações de Navier-Stokes pelo método dos elementos finitos utilizando as variáveis primitivas. Inicialmente, estuda-se o caso estacionário, em que o método de função de penalidade é usado para satisfazer a continuidade, eliminando a variável pressão.

Em seguida, apresenta-se um método para resolução do caso transiente em que se utiliza uma combinação das formulações levemente compressível e de penalidade, e a pressão é mantida como variável explícita. Para melhorar a solução é introduzido o efeito de "upwind" (viscosidade artificial) desenvolvido para o MEF. Para integrar no tempo é empregado um método implícito baseado no esquema trapezoidal.

O exemplo de canal com obstrução cilíndrica é estudado em ambas as formulações.

4.2 - Caso Estacionário

As equações de Navier-Stokes independentes do tempo para as variáveis u , v , p são, a partir de (1.1.48-49):

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R_e} \nabla^2 u \quad (4.2.1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{R_e} \nabla^2 v$$

juntamente com a equação da continuidade (1.1.10).

O método da função de penalidade permite que se elimine a variável pressão, ficando (1) apenas em função das velocidades, e consiste em satisfazer aproximadamente a restrição de incompressibilidade (ver, por exemplo, [36], [11], [18] e

[20]). Para tanto, a eq. da continuidade é modificada da seguinte maneira:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\lambda} p \quad (4.2.2)$$

ou seja,

$$-p = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (4.2.3)$$

onde $\lambda > 0$ é um escalar chamado parâmetro de penalidade.

As funções de penalidade podem ser vistas através do estabelecimento de princípios pseudo-variacionais (ZIENKIEWICZ [42]).

Princípios variacionais restringidos requerem que um funcional π seja estacionário e sujeito a restrições dadas, por exemplo, por relações diferenciais do tipo

$$g(\phi) = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (4.2.4)$$

Assim, pode-se tentar estabelecer um novo princípio variacional em que se introduz um conjunto de funções α conhecido como multiplicadores de Lagrange, e requerer que

$$\bar{\pi} = \bar{\pi}(\phi, \alpha) = \pi + \int_{\Omega} \alpha^T g \, d\Omega \quad (4.2.5)$$

seja estacionário. A variação deste funcional resulta em

$$\delta \bar{\pi} = \delta \pi + \int_{\Omega} \delta \alpha^T g \, d\Omega + \int_{\Omega} \alpha^T \delta g \, d\Omega \quad (4.2.6)$$

que é verdadeiro apenas se π é estacionário e as restrições (4) são satisfeitas.

Entretanto, as funções α têm que ser discretizadas, aumentando o número de incógnitas do problema. Para vencer esta dificuldade, é possível requerer a estacionalidade de um funcional modificado baseado numa função de penalidade em que se minimiza aproximadamente

$$\bar{\pi} = \pi + \lambda \int_{\Omega} g^T g \, d\Omega \quad (4.2.7)$$

em que λ é um número positivo grande qualquer que penaliza o erro da não satisfação das restrições. Fisicamente, o parâmetro de penalidade λ pode ser interpretado como uma grande viscosidade dilatacional. Uma dificuldade puramente numérica pode aparecer quando λ aumenta, pois as equações discretizadas tendem a se tornar mal-condicionadas. Mas, com os computadores modernos, de alta precisão aritmética, o método da função de penalidade está se tornando cada vez mais popular.

Substituindo-se a eq. (3) nas equações (1), a pressão e a eq. da continuidade são eliminadas (ficam contidas implicitamente nas equações modificadas da quantidade de movimento), obtendo-se após multiplicá-las por R_e :

$$\begin{aligned} -\nabla^2 u - \lambda R_e \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + R_e \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= 0 \\ -\nabla^2 v - \lambda R_e \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + R_e \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Uma expressão de Galerkin pode então ser construída:

$$\begin{aligned} W = \iint_A \{ & \left[-(u,_{xx} + u,_{yy}) - \lambda R_e (u,_{xx} + v,_{xy}) + \right. \\ & \left. + R_e (u \cdot u,_{x} + v \cdot u,_{y}) \right] \delta u + \\ & \left[-(v,_{xx} + v,_{yy}) - \lambda R_e (u,_{xy} + v,_{yy}) + \right. \\ & \left. + R_e (u \cdot v,_{x} + v \cdot v,_{y}) \right] \delta v \} dx dy \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

cuja forma fraca, após a integração por partes, é obtida:

$$\begin{aligned} W = \iint_A \left[\delta u,_{x} u,_{x} + \delta u,_{y} \cdot u,_{y} + \lambda R_e \delta u,_{x} (u,_{x} + v,_{y}) + \right. \\ \left. + R_e \delta u (u \cdot u,_{x} + v \cdot u,_{y}) \right] dx dy - \\ - \int_S \delta u \frac{\partial u}{\partial n} dS - \lambda R_e \int_y \delta u (u,_{x} + v,_{y}) dy + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \iint_A \left[\delta v_{,x} \cdot v_{,x} + \delta v_{,y} \cdot v_{,y} + \lambda R_e \delta v_{,y} (u_{,x} + v_{,y}) + \right. \\
& \left. + R_e \delta v (u \cdot v_{,x} + v \cdot v_{,y}) \right] dx dy - \\
& - \int_S \delta u \frac{\partial v}{\partial n} dS - \lambda R_e \int_x \delta u (u_{,x} + v_{,y}) dx \quad (4.2.10)
\end{aligned}$$

Como sô se terão condiçôes essenciais no contorno, do tipo $u = \bar{u}$ e $v = \bar{v}$, os termos envolvendo integrais de linha em (10) podem ser omitidos. Discretizando-se esta equação através da função de interpolação ϕ , de maneira que

$$u = \underline{\phi}^T \underline{u}^n ; \quad v = \underline{\phi}^T \underline{v}^n \quad (4.2.11)$$

obtêm-se para o problema uma expressão do tipo

$$\underline{F} - [\underline{K}] \underline{U} = \underline{R} \quad (4.2.12)$$

onde \underline{F} é o vetor de cargas nodais equivalentes, \underline{R} é o resíduo ou vetor de força não balanceada, \underline{U} é o vetor das incôgnitas nodais e $[\underline{K}]$ a matriz global representativa do problema, a qual a nível de elemento consiste em

$$[\underline{K}]^e = \begin{bmatrix} K_{\sim uu} & \vdots & K_{\sim uv} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ K_{\sim vu} & \vdots & K_{\sim vv} \end{bmatrix} \quad (4.2.13a)$$

$$\begin{aligned}
K_{\sim uu} = \iint_A \left[\underline{\phi}_{,x} \underline{\phi}_{,x}^T + \underline{\phi}_{,y} \underline{\phi}_{,y}^T + \lambda R_e \underline{\phi}_{,x} \underline{\phi}_{,x}^T \right. \\
\left. + R_e \underline{\phi} (\underline{u}^{n,T} \underline{\phi}_{,x}^T + \underline{v}^{n,T} \underline{\phi}_{,y}^T) \right] dA \quad (4.2.13b)
\end{aligned}$$

$$K_{\sim uv} = \lambda R_e \iint_A \underline{\phi}_{,x} \underline{\phi}_{,y}^T dA \quad (4.2.13c)$$

$$K_{\sim vu} = \lambda R_e \iint_A \underline{\phi}_{,y} \underline{\phi}_{,x}^T dA \quad (4.2.13d)$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{vv} = \iint_A \left[\phi_{,x} \phi_{,x}^T + \phi_{,y} \phi_{,y}^T + \lambda R_e \phi_{,y} \phi_{,y}^T + \right. \\ \left. + R_e \phi \left(\underline{u}^{n,T} \phi_{,x}^T + \underline{v}^{n,T} \phi_{,y}^T \right) \right] dA \end{aligned} \quad (4.2.13e)$$

A discretização da primeira variação de W conduz à dedução da matriz tangente $[\tilde{K}_T]$ (ou matriz jacobiana) que resulta, para cada elemento:

$$[\tilde{K}_T]^e = \begin{bmatrix} K_{Tuu} & \vdots & K_{Tuv} \\ \dots & \dots & \dots \\ K_{Tvu} & \vdots & K_{Tvv} \end{bmatrix} \quad (4.2.14a)$$

$$\begin{aligned} K_{Tuu} = \iint_A \left[\phi_{,x} \phi_{,x}^T + \phi_{,y} \phi_{,y}^T + \lambda R_e \phi_{,x} \phi_{,x}^T + \right. \\ \left. + R_e \phi \left(\phi_{,x}^T \underline{u}^n \phi^T + \underline{v}^{n,T} \phi_{,y}^T + \underline{u}^{n,T} \phi_{,x}^T \right) \right] dA \end{aligned} \quad (4.2.14b)$$

$$K_{Tuv} = \iint_A \left[\lambda R_e \phi_{,x} \phi_{,y}^T + R_e \phi \phi_{,y}^T \underline{u}^n \phi^T \right] dA \quad (4.2.14c)$$

$$K_{Tvu} = \iint_A \left[\lambda R_e \phi_{,y} \phi_{,x}^T + R_e \phi \phi_{,x}^T \underline{v}^n \phi^T \right] dA \quad (4.2.14d)$$

$$\begin{aligned} K_{Tvv} = \iint_A \left[\phi_{,x} \phi_{,x}^T + \phi_{,y} \phi_{,y}^T + \lambda R_e \phi_{,y} \phi_{,y}^T + \right. \\ \left. + R_e \phi \left(\underline{v}^{n,T} \phi_{,y}^T + \underline{u}^{n,T} \phi_{,x}^T + \phi_{,y}^T \underline{v}^n \phi^T \right) \right] dA \end{aligned} \quad (4.2.14e)$$

O sistema não-linear da equação (12) pode agora ser resolvido pelo método de Newton-Raphson da mesma maneira descrita na seção 3.2. As condições de contorno são todas do tipo Dirichlet, não apresentando a sua imposição nenhuma dificuldade.

4.3 - Aplicação Numérica

A formulação desenvolvida na seção 4.2 é aplicada ao mesmo exemplo de fluxo em torno de uma obstrução cilíndrica circular estudado no capítulo 3. A malha de elementos finitos triangulares é a mostrada na figura (3.3.3), na qual todo o domínio é discretizado, apesar de ser simétrico, em virtude de o obstáculo induzir um fluxo assimétrico no canal.

P. GRESHO et al [15] apresentam um estudo deste tipo de fluxo, iniciando do repouso até um número de Reynolds final de cerca de 100, ao qual a formação de vórtices é sabida ocorrer. Ao que se sabe, esta talvez represente uma das primeiras simulações com sucesso deste fenômeno de fluxo usando o MEF com a formulação de Galerkin e as variáveis primitivas. Mesmo em diferenças finitas, apenas recentemente tem sido computada a formação de vórtices usando como variáveis as velocidades e a pressão. O elemento empregado foi o quadrilátero de 9 nós, contendo a malha 850 nós, num total de 1929 equações.

As condições de contorno impostas ao problema são as seguintes: perfil de velocidades uniforme na entrada do canal, componente vertical de velocidade igual a zero ao longo das paredes superior e inferior e ambas as componentes (horizontal e vertical) nulas na face do cilindro.

Foram executados vários exemplos, cobrindo uma ampla gama de números de Reynolds (até 10^4) e as soluções convergiram em poucas iterações. As condições de contorno foram mantidas as mesmas para todos os exemplos, apenas variando a viscosidade do fluido de modo a se obter o R_e desejado. Surpreendentemente, o que se observou foi que as soluções obtidas resultaram todas coincidentes, com os mesmos perfis de velocidade, independentemente do valor de R_e escolhido.

O que se pode concluir é que a eliminação da variável pressão das equações, através da introdução do parâmetro de penalidade λ , causou uma "insensibilidade numérica" já que λ é um número grande (deve ser tomado entre 10^4 e 10^{10}) e está no numerador, o que faz com que os termos em que aparece sempre predominem sobre os demais.

DHATT e FOMO [11] apresentam um estudo usando a mesma formulação, mas com elemento quadrilátero de 9 nós e sugerem que os termos envolvendo λ sejam calculados usando-se integração numérica reduzida (no caso, 2x2 pontos para a quadratura gaussiana). É óbvio que não se pode empregar este procedimento para o elemento linear, pois não é possível reduzir a ordem de integração.

Poder-se-ia deixar de eliminar a variável pressão das equações diferenciais, às expensas de se aumentar um grau de liberdade por nó, e deixar λ no denominador, que assim só apareceria em um termo, ao invés de se propagar por toda a matriz do elemento, como se vê nas equações (4.2.13-14). Não usar a função de penalidade implicaria na obtenção de matrizes mal condicionadas (zero na diagonal), pois a equação da continuidade não inclui a variável pressão.

Entretanto, como para o caso de escoamento com obstáculo a solução estacionária não tem um significado físico real, pois é instável e varia com o passar do tempo, deixar-se-á esta discussão para a seção seguinte, onde será introduzida a variável temporal.

4.4 - Caso Transiente

Já se comentou anteriormente que o MEF com o método de resíduos ponderados de Galerkin encontra sérias dificuldades no tratamento de problemas de mecânica de fluidos nos quais os termos convectivos são significativos e os respectivos operadores são não simétricos. Nestes casos, aparecem oscilações não físicas no fluxo e no fenômeno de transporte convectivo com altos números de Reynolds. As oscilações podem apenas ser removidas pelo severo refinamento da malha, o que diminui a utilidade prática do método de Galerkin.

Tem-se observado que o método de Galerkin em elementos finitos produz o mesmo tipo de aproximação para os termos convectivos que o método de diferenças finitas centrais. Na teoria de diferenças finitas, o comportamento adverso das diferenças centrais nestas circunstâncias tem sido notado há algum

tempo. Isto tem levado ao desenvolvimento dos chamados esquemas de diferenças "upwind", que eliminam as oscilações, mas têm desvantagens com respeito à precisão.

Motivados por estas experiências, pesquisadores têm recentemente voltado sua atenção para o desenvolvimento de esquemas de elementos finitos com upwind.

Subseqüentemente, tornou-se aparente que uma combinação de diferenças centrais e regressivas (upwind) era melhor do que qualquer delas aplicada isoladamente. Para um problema modelo unidimensional simples, é possível selecionar a combinação que resulta em soluções exatas nos pontos nodais. Equivalentemente, uma quantidade apropriada de difusão artificial pode ser adicionada à formulação em diferenças centrais. Muitas críticas têm sido feitas a este método em virtude da interpretação da difusão artificial. Deve ser lembrado, entretanto, que a difusão artificial é relativa às diferenças centrais, e não ao problema físico real. Na realidade, é mais correto considerar os métodos em diferenças centrais como tendo difusão artificial negativa com respeito à solução exata. Para o problema unidimensional pode-se demonstrar que a solução é nodalmente exata (ref. [19], [6]) quando a difusão artificial \bar{K} é dada por

$$\bar{K} = (u h/2) \cdot G \quad (4.4.1)$$

$$G = \coth(\alpha) - 1/\alpha \quad (4.4.2)$$

$$\alpha = u h/(2 K) \quad (4.4.3)$$

onde u é a dada velocidade do fluxo, h o espaçamento entre os nós e K é a difusibilidade.

Para ilustrar, apresentar-se-á como exemplo a solução de um problema unidimensional com coeficiente constante e termo fonte dependente da posição. A equação é a seguinte:

$$-\frac{d^2\phi}{dx^2} + 200 \frac{d\phi}{dx} = x^2 \quad 0 < x < 1 \quad (4.4.4)$$

sendo $\phi = 0$ em $x = 0$ e $x = 1$. Conforme se pode observar na figura (4.4.1), a solução pelo esquema de Galerkin usual produz oscilações ("wiggles"), mesmo com o uso de refinamento no espaçamento da malha em pontos localizados, sendo que o requerimento do emprego de upwind é aparente neste problema.

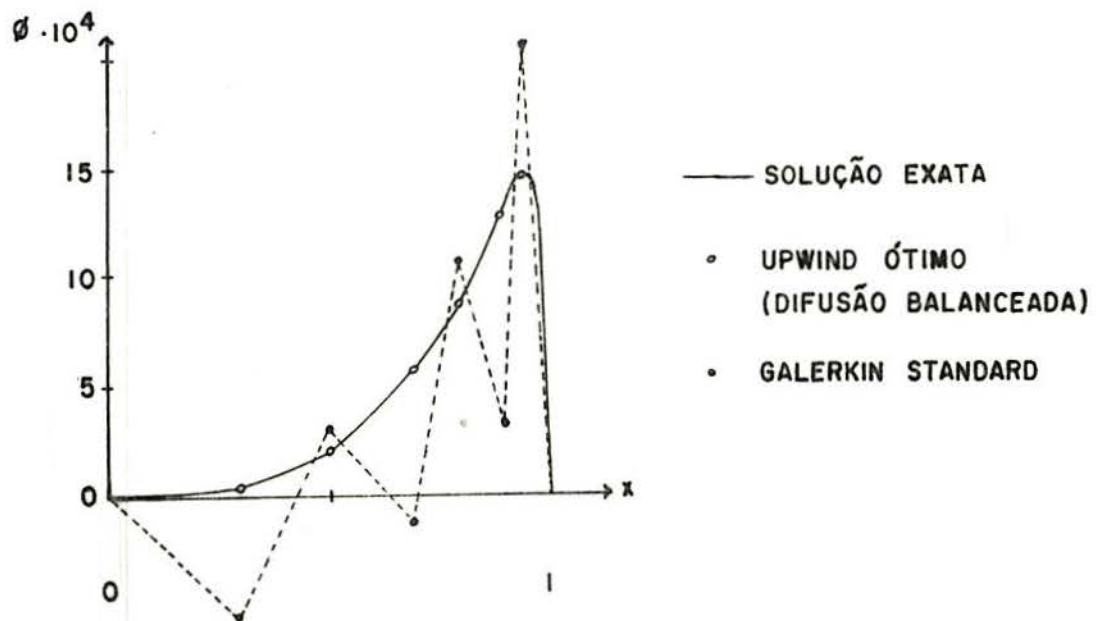


Fig.(4.4.1)

O esquema de upwind com balanceamento ótimo da difusão provê não apenas soluções livres de oscilações, mas também com valores praticamente exatos na mesma base de elementos finitos.

Existem três técnicas básicas utilizadas para alcançar o efeito de upwind em elementos finitos:

a) Difusão artificial: a difusão artificial dada por (1-3) é somada à difusão física e uma discretização em elementos finitos usando Galerkin convencional é empregada. Isto, na realidade, é um balanceamento da difusão, já que é compensada a difusão negativa do tratamento de Galerkin (ver KELLY et al. [25]).

b) Quadratura: a regra de quadratura numérica para o termo convectivo é modificada de maneira a proporcionar o efei-

to de upwind.

c) Petrov-Galerkin: a função de peso para um nó típico é modificada de modo a ponderar mais o elemento a montante do nó do que o situado a jusante. Este procedimento é muito mais geral do que os esquemas em diferenças finitas com que têm sido feitas comparações (ver ref. [17], [6]).

Aqui, examinar-se-á o primeiro processo, o da introdução de uma difusão adicional que decresce com o tamanho do elemento. Esta técnica fornece soluções exatas para modelos unidimensionais, mas, quando da generalização para problemas multidimensionais, as soluções tendem a exibir difusão excessiva na direção perpendicular ao fluxo. Para contornar isto, o que se faz é adicionar a difusão (ou viscosidade) apenas na direção do fluxo, ao longo das linhas de corrente. Para tanto, introduz-se um caráter tensorial para o termo de difusibilidade.

Para elementos bi-dimensionais empregam-se generalizações "ad hoc" das expressões (1-3):

$$\bar{K} = (G_x \cdot u \cdot h_x + G_y \cdot v \cdot h_y) / 2 \quad (4.4.5)$$

onde

$$G_x = (\coth \alpha_x) - 1/\alpha_x ; \quad G_y = (\coth \alpha_y) - 1/\alpha_y \quad (4.4.6)$$

$$\alpha_x = u h_x / (2K) ; \quad \alpha_y = v h_y / (2K) \quad (4.4.7)$$

$$h_x = \frac{2}{3} \ell_x ; \quad h_y = \frac{2}{3} \ell_y \quad (4.4.8)$$

em que u e v são as médias das componentes horizontais e verticais de velocidade nos nós do elemento e ℓ_x e ℓ_y são comprimentos característicos do elemento triangular (fig. (4.4.2)).

No caso, K corresponde à viscosidade cinemática ν .

$$u = (u_1 + u_2 + u_3) / 3 \quad (4.4.9)$$

$$v = (v_1 + v_2 + v_3) / 3 \quad (4.4.10)$$

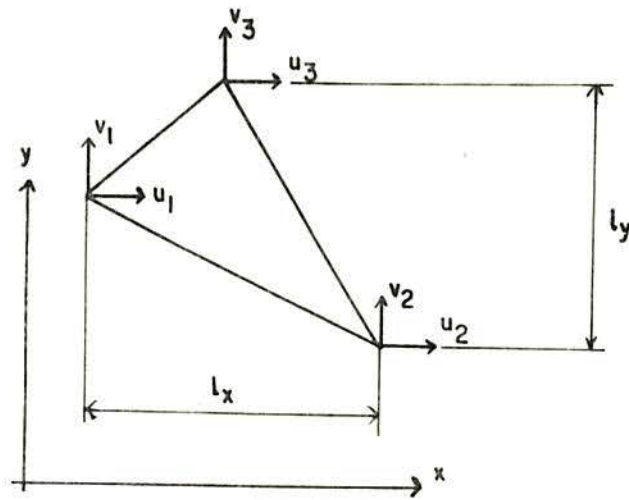


Fig. (4.4.2)

A fim de melhorar a eficiência computacional, pode-se empregar a seguinte aproximação para o parâmetro de upwind (6):

$$G = \begin{cases} -1 - 1/\alpha & \alpha < 1 \\ 0 & -1 \leq \alpha \leq 1 \\ 1 - 1/\alpha & \alpha > 1 \end{cases} \quad (4.4.11)$$

Para o caso transiente recomenda-se (ver [6]) em lugar de (5) a expressão

$$\bar{K} = (G_x \cdot u \cdot h_x + G_y \cdot v \cdot h_y) / \sqrt{15} \quad (4.4.12)$$

O parâmetro difusivo \bar{K} é posto na forma de um tensor de segunda ordem, desta maneira introduzindo uma anisotropia no fluido (a viscosidade artificial \bar{K} é adicionada apenas na direção do fluxo):

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \quad (4.4.13)$$

com as componentes

$$K_1 = (v + \bar{K} \cos^2 \theta) / (LV)$$

$$K_2 = K_3 = \bar{K} \cos \theta \sin \theta / (LV) \quad (4.4.13a)$$

$$K_4 = (v + \bar{K} \sin^2 \theta) / (LV)$$

onde θ é o ângulo em relação ao eixo x do vetor velocidade, tomado para o elemento e L e V são os valores característicos de comprimento e velocidade para adimensionalizar o problema.

As equações de Navier-Stokes são então tomadas na forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \tilde{\nabla}^T \tilde{K} \tilde{\nabla} u \quad (4.4.14)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial y} + \tilde{\nabla}^T \tilde{K} \tilde{\nabla} v$$

onde \tilde{K} é definido para cada elemento e

$$\tilde{\nabla}^T = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\} \quad (4.4.15)$$

A fim de possibilitar o tratamento da restrição de incompressibilidade sem resolver uma equação auxiliar para pressão, usar-se-á a formulação da função de penalidade dada pela expressão (4.2.2). Além disso, há um processo alternativo chamado formulação levemente compressível, na qual a pressão é assumida como sendo função da densidade:

$$p - p_{ref} = \beta (\rho - \rho_{ref}) \quad (4.4.16)$$

onde β é o módulo de dilatação volumétrica ("Bulk modulus") e p_{ref} e ρ_{ref} são valores constantes de referência de pressão e densidade, respectivamente. A equação completa da continuidade, dada por (1.1.8) é

$$\rho_{,t} = - \rho u_{i,i} \quad (4.4.17)$$

Tomando a derivada temporal de (16) e levando-a em (17) ob-

têm-se a equação modificada

$$u_{i,i} = - \frac{1}{\rho\beta} p_{,t} \quad (4.4.18)$$

Uma combinação das formulações de penalidade e levemente compressível resulta consideravelmente mais eficiente computacionalmente do que resolver as equações da quantidade de movimento usando uma das formulações isoladamente. Assim, usar-se-á a expressão

$$u_{i,i} = - \frac{1}{\lambda} p - \frac{1}{\rho\beta} p_{,t} \quad (4.4.19)$$

deixando-se explícita a variável pressão.

Expandindo (14) e (19), o conjunto de equações a ser resolvido é:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} - K_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - K_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \\ - K_3 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - K_4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \quad (4.4.20a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} - K_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - K_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \\ - K_3 \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} - K_4 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \quad (4.4.20b)$$

$$\frac{1}{\rho\beta} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\lambda} p + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.4.20c)$$

Aplicando-se o método dos resíduos ponderados de Galerkin com o fim de transformar as equações (20) numa forma integral, integrando-se por partes os termos de segunda ordem e expandindo-se as incógnitas u , v e p através da função de interpolação na forma usual, obtém-se para cada elemento, em forma condensada, a seguinte equação matricial:

$$\underline{M}^e \dot{\underline{Q}}^e + \underline{A}^e(Q) \underline{Q}^e = \underline{Q} \quad (4.4.21)$$

Aqui, $\underline{Q}^{e,T} = \{\underline{u}^n, \underline{v}^n, \underline{p}^n\}$ é o vetor das incógnitas nodais, \underline{M}^e é a chamada matriz de massa do elemento e a matriz \underline{A}^e resulta dependente das incógnitas \underline{Q} . Pode-se desmembrar a matriz \underline{A}^e numa soma de duas matrizes, uma constante e a outra dependendo das variáveis:

$$\underline{A}^e = \underline{A}_c^e + \underline{A}_v^e \quad (4.4.22)$$

As matrizes acima são definidas, na forma particionada, por:

$$\underline{M}^e = \begin{bmatrix} \underline{M}^* & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{M}^* & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \frac{1}{\rho\beta} \underline{M}^* \end{bmatrix}; \quad \underline{A}_c^e = \begin{bmatrix} \underline{A}_1 & \underline{0} & \underline{A}_2 \\ \underline{0} & \underline{A}_1 & \underline{A}_3 \\ \underline{A}_2 & \underline{A}_3 & \frac{1}{\lambda} \underline{M}^* \end{bmatrix};$$

$$\underline{A}_v^e = \begin{bmatrix} \underline{A}_4 & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{A}_4 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \quad (4.4.23)$$

E as sub-matrizes:

$$\underline{M}^* = \iint_A \underline{\phi} \underline{\phi}^T dA \quad (4.4.24a)$$

$$\underline{A}_1 = \iint_A \left[K_1 \underline{\phi}_{,x} \underline{\phi}_{,x}^T + K_2 \underline{\phi}_{,x} \underline{\phi}_{,y}^T + K_3 \underline{\phi}_{,y} \underline{\phi}_{,x}^T + K_4 \underline{\phi}_{,y} \underline{\phi}_{,y}^T \right] dA \quad (4.4.24b)$$

$$\underline{A}_2 = \iint_A \underline{\phi} \underline{\phi}_{,x}^T dA \quad (4.4.24c)$$

$$\underline{A}_3 = \iint_A \underline{\phi} \underline{\phi}_{,y}^T dA \quad (4.4.24d)$$

$$\underline{A}_4 = \iint_A \underline{\phi} \underline{\phi}^T (\underline{u}^n \underline{\phi}_{,x} + \underline{v}^n \underline{\phi}_{,y}) dA \quad (4.4.24e)$$

Sendo $\underline{\phi}$ a função de interpolação, o superíndice T a operação de transposição e n o número de nós do elemento.

Tomando-se as contribuições de todos os elementos,

partindo da expressão (21), pode-se montar a equação matricial global de todo o sistema, obtendo-se uma expressão do tipo:

$$\underline{\underline{M}} \dot{\underline{\underline{Q}}} + \underline{\underline{A}}_c \underline{\underline{Q}} + \underline{\underline{A}}_v (Q) \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{0}} \quad (4.4.25)$$

O ponto acima das incógnitas indica derivação em relação ao tempo.

A equação (25) necessita agora ser integrada ao longo do tempo. Para tanto, existem diversos métodos mais usados como o esquema trapezoidal, método de Runge-Kutta, método do previsor-corretor, etc. Destes, o esquema trapezoidal se destaca por apresentar grande eficiência e estabilidade, além da simplicidade de sua aplicação.

Para o exemplo de problema linear, comum na Dinâmica das estruturas

$$\underline{\underline{M}} \dot{\underline{\underline{d}}} + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{d}} = \underline{\underline{F}} \quad (4.4.26)$$

o método trapezoidal generalizado, para o algoritmo de passo simples, é o seguinte:

$$\underline{\underline{M}} \underline{\underline{v}}_{i+1} + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{d}}_{i+1} = \underline{\underline{F}}_{i+1} \quad (4.4.27)$$

$$\underline{\underline{d}}_{i+1} = \underline{\underline{d}}_i + \Delta t \underline{\underline{v}}_{i+\alpha} \quad (4.4.28)$$

$$\underline{\underline{v}}_{i+\alpha} = (1 - \alpha) \underline{\underline{v}}_i + \alpha \underline{\underline{v}}_{i+1} \quad (4.4.29)$$

onde $\underline{\underline{d}}_i$ e $\underline{\underline{v}}_i = \dot{\underline{\underline{d}}}_i$ são aproximações de $\underline{\underline{d}}(t_i)$ e $\underline{\underline{v}}(t_i)$ respectivamente; $\underline{\underline{F}}_{i+1} = \underline{\underline{F}}(t_{i+1})$; Δt é o passo de tempo; e α é um parâmetro tomado no intervalo $[0, 1]$. Alguns dos mais conhecidos membros da família dos métodos trapezoidais generalizados são identificados a seguir.

α	Método
0	Diferenças progressivas; Euler progressivo
1/2	Regra trapezoidal; Regra do ponto médio; Cranck-Nicolson
2/3	Galerkin
1	Diferenças regressivas; Euler regressivo

No caso de $\alpha = 0$, o método é dito ser explícito. Os métodos explícitos têm valor se \underline{M} for assumida "lumped" (isto é, diagonal). Neste caso, a solução pode ser levada adiante sem a necessidade de resolver sistema de equações. Se $\alpha \neq 0$, o método é implícito e, nestes casos, um sistema de equações, com matriz dos coeficientes $(\underline{M} + \alpha \Delta t \underline{K})$, necessita ser resolvido a cada passo, já que \underline{K} normalmente não será diagonal.

Para resolver (25) empregar-se-á um método baseado na regra trapezoidal, mas com o passo de tempo dividido em dois sub-passos ou passos fracionários. Este método é apresentado no apêndice B deste trabalho.

O algoritmo, em que o conjunto de equações está balanceado em $t+\Delta t$ (entre t e $t+2\Delta t$), é o seguinte:

$$\left[\underline{M} + \frac{\Delta t}{2} \underline{A}_c \right] \underline{Q}_{t+\Delta t} = \left[\underline{M} - \frac{\Delta t}{2} \underline{A}_c \right] \underline{Q}_t \quad (4.4.30a)$$

$$\left[\underline{M} + \frac{\Delta t}{2} \underline{A}_c \right] \underline{Q}_{t+2\Delta t} = \left[\underline{M} - \frac{\Delta t}{2} (\underline{A}_c + 4 \underline{A}_v) \right] \underline{Q}_{t+\Delta t} \quad (4.4.30b)$$

Estes dois sistemas de equações são resolvidos em seqüência em cada passo, fazendo com que a solução vá avançando ao longo do tempo.

A matriz dos coeficientes é constante. Entretanto, as componentes do tensor de difusibilidade que aparecem na formação de \underline{A}_c dependem do vetor velocidade, sendo, portanto,

conveniente a sua atualização periódica, depois de alguns passos.

O algoritmo (30) é bastante estável e permite a utilização de passos de tempo relativamente grandes.

As condições de contorno a serem impostas no problema são do tipo $u = \bar{u}$ e $v = \bar{v}$ e são introduzidas nos sistemas (30) sem nenhuma dificuldade. Para a variável pressão não é imposta nenhuma condição de contorno, uma vez que isto seria redundante e inconsistente com a equação da continuidade (a qual deve ser descartada no nó onde se prescrever o valor da pressão). Esta equação determina implicitamente o valor da pressão a partir do campo de velocidades, no caso de fluxo incompressível.

4.5 - Aplicação da Formulação Transiente

Examinar-se-á o caso do canal com obstrução cilíndrica. A malha, formada por elementos triangulares, é mostrada na figura (3.3.3). Como condição inicial para o problema, é tomado um campo nulo para velocidades e pressão no interior do domínio, o que equivale a dizer que o fluxo é acelerado instantaneamente a partir do repouso. Como condições de contorno, são impostos um perfil uniforme de velocidades na entrada do canal, velocidade nula na face do obstáculo sólido e componente vertical nula para a velocidade ao longo das paredes do canal.

Pela variação sistemática dos vários parâmetros como o incremento de tempo, o parâmetro de penalidade e o número de Reynolds, fêz-se uma tentativa para achar a aproximação ótima para o problema de fluxo em torno de um cilindro circular. O principal intuito é prover a informação necessária para indicar a linha de aproximação mais frutífera para problemas mais complicados e áreas para futura pesquisa.

Observou-se que, aumentando-se R_e , o incremento Δt precisava ser diminuído, bem como o parâmetro λ , que não podia ser muito grande, sob pena de os campos de velocidades e pressão divergirem rapidamente.

Na figura (4.5.2) são apresentados alguns resultados para um número de Reynolds igual a 100. O parâmetro de penali-

dade utilizado foi 10^4 . Os gráficos mostram a variação ao longo do tempo dos valores de velocidades obtidos para os nós A e B e pressão no nó C. As posições destes nós são indicadas na figura (4.5.1).

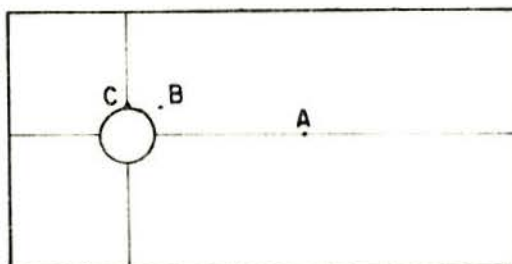


Fig. (4.5.1)

Um erro fundamental na formulação parece causar severas oscilações no campo de pressão. Este erro é possivelmente devido à incompatibilidade das funções de interpolação usadas, as quais são lineares e contínuas tanto para pressão como para velocidades. Sendo a pressão definida nos pontos nodais do elemento triangular, o divergente do campo de velocidades é nulo nestes pontos (conservação da massa), mas não no interior do elemento.

As quantidades nodais e de elemento não podem ser igualadas num ponto do espaço sem algum tipo de processo de tomada da média. Assim como a pressão é uma quantidade nodal, seu gradiente é uma quantidade de elemento. O MEF desta forma toma a média do gradiente de pressão em cada elemento em torno do nó em questão a fim de obter a equação governante neste nó. O gradiente de pressão pode então ser considerado como contínuo. As restrições na pressão são portanto efetuadas através do gradiente médio nos nós nas equações da quantidade de movimento e através da equação da continuidade, esta satisfazendo a divergência média igual a zero em cada nó. Por melhor que seja o processo de tomada da média, ele causará uma redução da precisão. Sugere-se que este é o efeito numérico

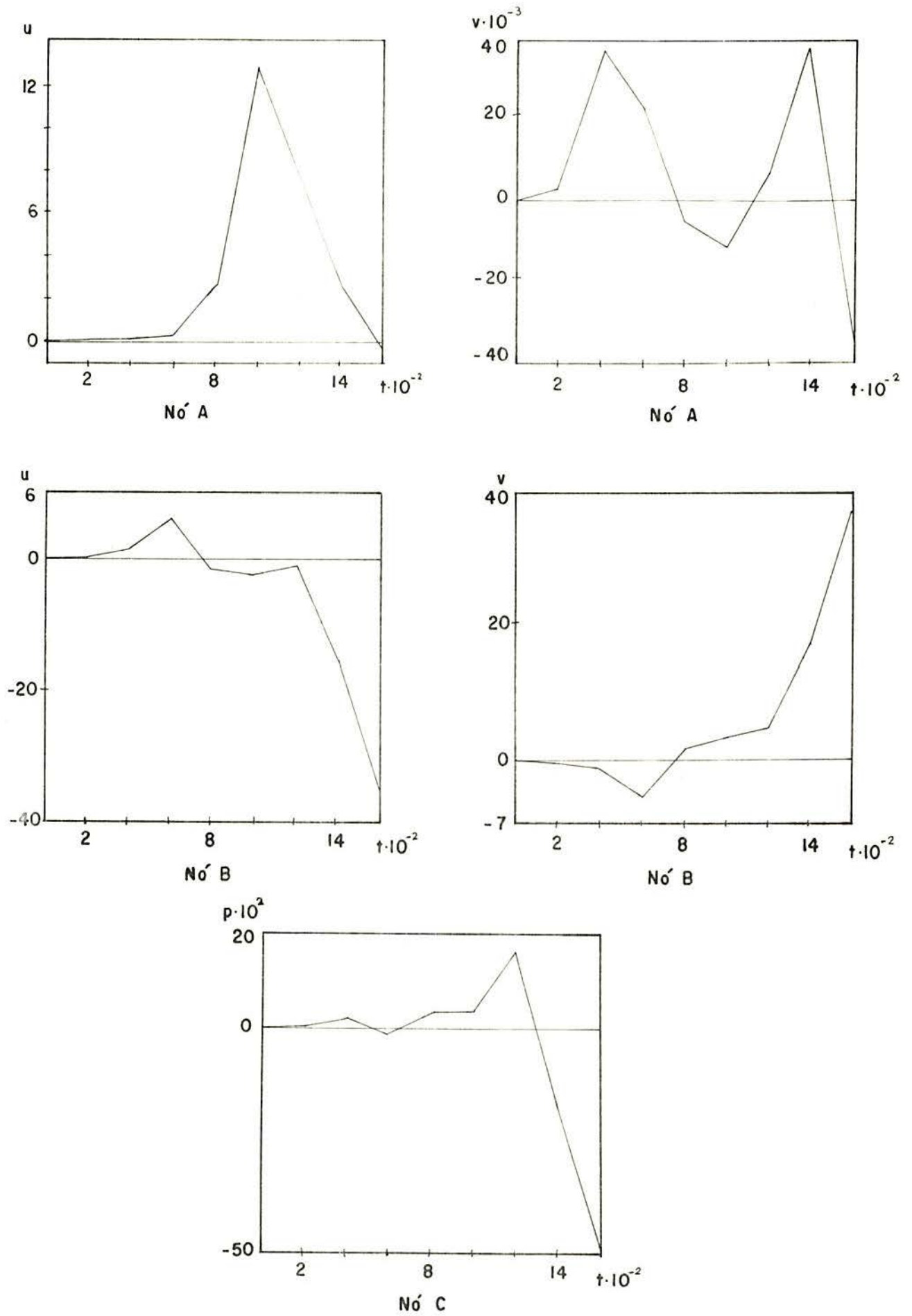


Fig. (4.5.2)

do uso da mesma função de interpolação para velocidade e pressão e que as oscilações dos valores da pressão são causados por este processo.

Talvez a solução para isso fosse definir-se a pressão no centróide do triângulo, de modo que a divergência dentro de cada elemento seja zero (logo, em todo o domínio).

Além disso, para o uso do método da função de penalidade, recomenda-se o uso de uma ordem mais baixa para a regra de integração do termo em λ (ver HUGHES et al. [20]). Entretanto, para empregar esta integração reduzida seletiva far-se-ia necessário o uso de elementos com função de interpolação de ordem mais alta que o triângulo linear (o mais usado é o quadrilátero isoparamétrico bilinear de 4 nós). Isto não consta dos objetivos deste trabalho, em virtude do tempo exíguo.

4.6 - Aspectos Computacionais

Todos os programas deste trabalho foram codificados na linguagem FORTRAN e executados inicialmente num computador BURROUGHS B-6700 e mais tarde num DIGITAL DEC-10. Houve dificuldades inicialmente para adequar o tamanho da malha do exemplo da obstrução cilíndrica à disponibilidade de memória. O Fortran do B-6700 limita o tamanho máximo dos arranjos em 65535 posições, limite este que foi utilizado para dimensionar a malha (426 nós, 770 elementos) para os casos de duas incógnitas por nó. Já no DEC-10 foi possível programar a formulação com três variáveis nodais da seção 4.4, apesar de a disponibilidade global de armazenamento ser menor.

Para a resolução dos sistemas de equações lineares com matriz dos coeficientes do tipo banda não simétrica foi utilizado o método de decomposição de Banachiewicz, no qual empregou-se um vetor perfil para controlar a esparsidade externa da matriz (os elementos nulos fora da banda não são armazenados nem processados).

O tempo de CPU resultou relativamente elevado, principalmente no caso transiente. Neste, perdeu-se em parte a vantagem de que a matriz dos coeficientes resultaria constante, necessitando ser decomposta apenas uma vez, isso devido à in-

clusão do efeito de upwind, em que a matriz precisa ser atualizada ocasionalmente.

Para facilitar a interpretação dos resultados, desenvolveu-se uma rotina para plotar as linhas de corrente por intermédio da impressora. A figura (3.3.4), por exemplo, foi obtida a partir desta técnica.

CONCLUSÕES

A solução das equações de Navier-Stokes por elementos finitos é ainda uma técnica relativamente nova e muitos pontos de conjectura aparecem quando a viabilidade do método é questionada.

A questão mais importante de todas, a de quanto esforço computacional é necessário para uma dada precisão, não tem sido respondida satisfatoriamente em termos de números de nós, discretização em elementos e esquemas de integração no tempo.

O presente trabalho não tem a pretensão de dirimir todas as dúvidas sobre o assunto. É apenas um estudo preliminar que visa servir de base para futuros desenvolvimentos. A resolução numérica do problema é bastante difícil e muitos de seus aspectos carecem de melhor esclarecimento.

Os resultados das aplicações numéricas aqui apresentados, em geral não foram de muito boa qualidade e uma maior ênfase foi dada ao aspecto teórico. No problema do obstáculo sólido, para melhorar a precisão, talvez fosse necessário o emprego de uma malha mais densa, concentrando mais elementos nas proximidades do cilindro, onde os gradientes são mais actuados. Mas isto implicaria num custo proibitivo e a capacidade de armazenamento do computador seria suplantada.

Uma alternativa seria utilizar um método explícito para a integração no tempo, no qual as matrizes são diagonalizadas e diretamente inversíveis, desta forma economizando tempo de processamento e armazenamento. Isto permitiria tomar malhas bem mais densas. Entretanto, conceber essas malhas seria uma tarefa colossal e exigiria o desenvolvimento de um gerador automático para seus dados em virtude da complexidade da geometria e concentração variável dos elementos. Isto, porém, está fora do escopo deste trabalho.

Além disso, os métodos explícitos têm pouca estabi-

lidade e, portanto, apresentam a desvantagem de exigir passos de tempo muito pequenos, aumentando também o custo.

Outra opção seria testar elementos de mais alta ordem, de maior precisão. Esta parece ser a melhor saída e existe na literatura uma ampla gama de sugestões quanto a tipos de elementos.

Ainda há muita coisa a se fazer no estudo das equações de Navier-Stokes, mas o que retarda a investigação no momento é o custo excessivamente alto das computações. Como sugestões para futuros desenvolvimentos pode-se citar o caso de fluxo transônico, ou ainda a simulação dependente do tempo de um campo de vento tri-dimensional com distribuição de temperatura e concentração de poluentes na camada limite atmosférica.

E mais, no ponto de vista do MEF, os seguintes problemas ainda não estão sob controle: fluxo viscoso compressível, problemas dependentes do tempo com ondas de choque, fluxo com várias fases. E o tratamento da turbulência espera por uma melhor modelagem do problema.

É, por conseguinte, um campo passível ainda de muita pesquisa.

APÊNDICE A

Elementos Triangulares de Três Nós

Se o domínio de um problema bi-dimensional for discretizado em elementos finitos do tipo triangular (figura (A.1)), pode-se propor uma função

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (\text{A.1})$$

que varia linearmente no sub-domínio triangular e produz três incógnitas por elemento, que podem ser relacionadas com os valores nos nós 1, 2 e 3.

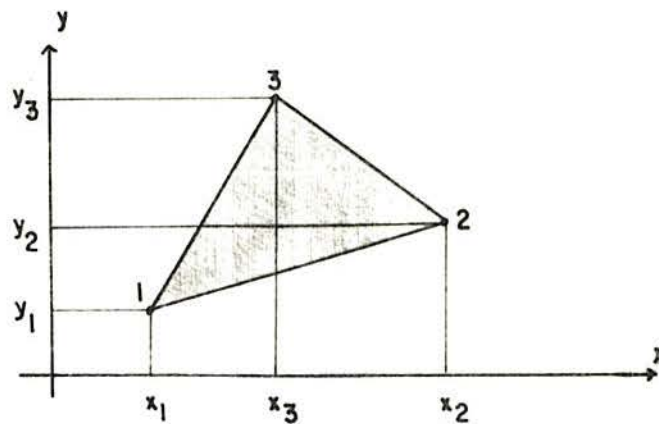


Fig. (A.1)

Em se tratando de elementos triangulares, não é conveniente trabalhar com coordenadas cartesianas. Faz-se uso, então, das coordenadas triangulares ou coordenadas de área, as quais permitem representação mais simples das funções de interpolação e integrações mais fáceis.

Na figura (A.2), um ponto P de coordenadas (x,y) define juntamente com os cantos três sub-triângulos de áreas A_1 ,

A_2 e A_3 .

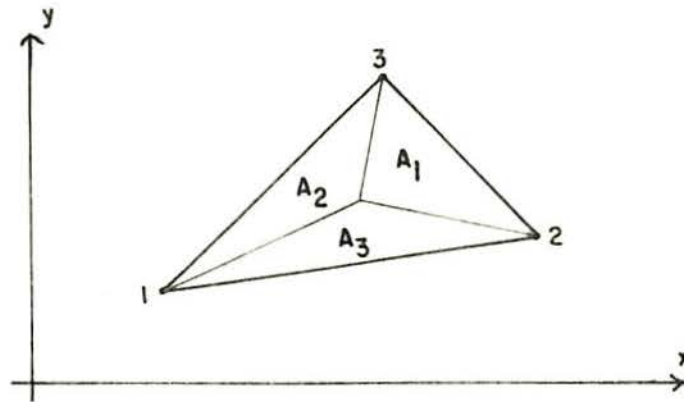


Fig.(A.2)

A área total do triângulo é

$$A = A_1 + A_2 + A_3 \quad (\text{A.2})$$

Note-se que as áreas A_i definem univocamente a posição de um ponto no interior do triângulo. Normalizando-se estes valores, tem-se que as coordenadas triangulares são dadas por

$$L_1 = \frac{A_1}{A} ; \quad L_2 = \frac{A_2}{A} ; \quad L_3 = \frac{A_3}{A} \quad (\text{A.3})$$

A relação entre as coordenadas cartesianas e triangulares pode ser deduzida e é a seguinte:

$$L_i = C_{1i} + x C_{2i} + y C_{3i} \quad (\text{A.4})$$

onde

$$C_{1i} = (x_j y_k - y_j x_k) / B$$

$$C_{2i} = (y_j - y_k) / B$$

$$C_{3i} = (x_k - x_j) / B$$

$$B = 2A = (x_2 y_3 + x_1 y_2 + x_3 y_1) - (x_2 y_1 + x_1 y_3 + y_2 x_3)$$

(A.5)

Os índices i, j, k são permutados ciclicamente entre os valores 1, 2, 3.

Usando a regra da cadeia, obtêm-se para as derivadas de uma função definida em termos de coordenadas triangulares:

$$\frac{\partial f(L_1, L_2, L_3)}{\partial x} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial L_i} C_{2i} \quad (\text{A.6a})$$

$$\frac{\partial f(L_1, L_2, L_3)}{\partial y} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial L_i} C_{3i} \quad (\text{A.6b})$$

A integração de funções polinomiais em termos de L_i é simples e pode ser efetuada usando-se a expressão

$$\iint L_1^i L_2^j L_3^k dA = \frac{i! j! k!}{(i+j+k+2)!} \cdot 2A \quad (\text{A.7})$$

Para integração em uma dimensão, por exemplo ao longo do lado 1-2 do triângulo, emprega-se a fórmula:

$$\int L_1^i L_2^j dS = \frac{i! j!}{(i+j+1)!} \ell_{12} \quad (\text{A.8})$$

onde ℓ_{12} é o comprimento do lado 1-2, no qual $L_3 = 0$.

Comparando-se as expressões (A.4) e (A.1) vê-se que as coordenadas triangulares L_k coincidem com as funções de interpolação ou de forma para o caso linear.

$$\phi_k = L_k \quad (\text{A.9})$$

Portanto, a expansão linear aproximada de uma função u pode ser escrita em termos das coordenadas de área:

$$u = L_1 u_1 + L_2 u_2 + L_3 u_3 = \sum_{k=1}^3 L_k u_k \quad (\text{A.10})$$

onde u_k são os valores nodais de u . Têm-se, por conseguinte:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_1 C_{21} + u_2 C_{22} + u_3 C_{23}$$

(A.11)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u_1 C_{31} + u_2 C_{32} + u_3 C_{33}$$

Ver referências [43], [35], [5] e [3].

APÊNDICE B

Esquema Trapezoidal de Passos Fracionários para Integração no Tempo

Considere-se a equação matricial transiente seguinte:

$$\underline{\underline{M}} \dot{\underline{\underline{Q}}} + \underline{\underline{A}}_c \underline{\underline{Q}} + \underline{\underline{A}}_v (Q) \underline{\underline{Q}} + \underline{\underline{P}} = \underline{\underline{0}} \quad (\text{B.1})$$

em que $\underline{\underline{Q}}$ é o vetor das incógnitas, $\underline{\underline{M}}$ a matriz de massa, $\underline{\underline{A}}_c$ a matriz que contém termos lineares, $\underline{\underline{A}}_v$ a matriz dos termos não lineares e $\underline{\underline{P}}$ o vetor independente.

O esquema da regra trapezoidal admite as seguintes condições aproximadas:

$$\dot{\underline{\underline{Q}}} = \frac{Q_{t+\Delta t} - Q_t}{\Delta t}; \quad Q = \frac{Q_{t+\Delta t} + Q_t}{2}; \quad P = \frac{P_{t+\Delta t} + P_t}{2} \quad (\text{B.2})$$

Substituindo-se (B.2) em (B.1) obtém-se para $t+\Delta t$:

$$\left[\underline{\underline{M}} + \frac{\Delta t}{2} \underline{\underline{A}}_c + \frac{\Delta t}{2} \underline{\underline{A}}_v (Q_{t+\Delta t}) \right] \underline{\underline{Q}}_{t+\Delta t} = \left[\underline{\underline{M}} - \frac{\Delta t}{2} \underline{\underline{A}}_c - \frac{\Delta t}{2} \underline{\underline{A}}_v (Q_t) \right] \underline{\underline{Q}}_t - \frac{\Delta t}{2} (P_{t+\Delta t} + P_t) \quad (\text{B.3})$$

Da mesma forma, para $t+2\Delta t$:

$$\left[\underline{\underline{M}} + \frac{\Delta t}{2} \underline{\underline{A}}_c + \frac{\Delta t}{2} \underline{\underline{A}}_v (Q_{t+2\Delta t}) \right] \underline{\underline{Q}}_{t+2\Delta t} = \left[\underline{\underline{M}} - \frac{\Delta t}{2} \underline{\underline{A}}_c - \frac{\Delta t}{2} \underline{\underline{A}}_v (Q_{t+\Delta t}) \right] \underline{\underline{Q}}_{t+\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} (P_{t+2\Delta t} + P_{t+\Delta t}) \quad (\text{B.4})$$

Uma função $f(x)$ pode ser expandida em série de Taylor, na forma

$$f(x) = f(0) + x \cdot f'(0) + o(x^2) \quad (\text{B.5})$$

$$f(x) = f(0) + x \cdot f'(0)$$

$$f(x+\Delta t) = f(0) + (x+\Delta t) \cdot f'(0) \quad (\text{B.6})$$

$$f(x+2\Delta t) = f(0) + (x+2\Delta t) \cdot f'(0)$$

E, portanto,

$$\begin{aligned} f(x) + f(x+2\Delta t) &= 2 f(0) + (2x+2\Delta t) \cdot f'(0) \\ &= 2 f(x+\Delta t) \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Isto pode ser generalizado para a equação matricial

$$\underline{A}_v(Q_t) \underline{Q}_t + \underline{A}_v(Q_{t+2\Delta t}) \underline{Q}_{t+2\Delta t} = 2 \underline{A}_v(Q_{t+\Delta t}) \underline{Q}_{t+\Delta t} \quad (\text{B.8})$$

Levando esta equação ao conjunto das equações (B.3) e (B.4), de modo que a soma destas resulte inalterada, obtêm-se

$$\left[\underline{M} + \frac{\Delta t}{2} \underline{A}_c \right] \underline{Q}_{t+\Delta t} = \left[\underline{M} - \frac{\Delta t}{2} \underline{A}_c \right] \underline{Q}_t - \frac{\Delta t}{2} (\underline{P}_{t+\Delta t} + \underline{P}_t) \quad (\text{B.9a})$$

$$\begin{aligned} \left[\underline{M} + \frac{\Delta t}{2} \underline{A}_c \right] \underline{Q}_{t+2\Delta t} &= \left[\underline{M} - \frac{\Delta t}{2} \underline{A}_c - 2 \Delta t \underline{A}_v(Q_{t+\Delta t}) \right] \underline{Q}_{t+\Delta t} - \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2} (\underline{P}_{t+2\Delta t} + \underline{P}_{t+\Delta t}) \end{aligned} \quad (\text{B.9b})$$

As equações (B.9) são balanceadas em $t+\Delta t$ (entre t e $t+2\Delta t$) e constituem o algoritmo para a solução de (B.1). Cada equação é avaliada num sub-passo com intervalo Δt , sendo o passo total de $2\Delta t$. As equações individuais não são balanceadas, entretanto, a soma das equações, a qual representa o passo completo, é balanceada no ponto médio do passo e corresponde à aproximação correta da expressão diferencial do problema.

Entre as vantagens deste esquema, pode-se enumerar:

a) A matriz dos coeficientes do sistema de equações

necessita ser triangularizada apenas uma vez, pois é constante e idêntica nos dois sub-passos.

b) O esquema é bastante estável, sendo que o tamanho do intervalo de tempo só está limitado pela precisão, a qual, por sua vez, é comparável a outros esquemas mais dispendiosos (ver AWRUCH e PARTRIDGE [1]).

c) Não são necessárias iterações a cada passo.

d) O custo computacional é bastante menor do que o de outros esquemas implícitos.

Ver também [4] e [9].

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] AWRUCH, A.M. & PARTRIDGE, P.W.: "Comparação de esquemas numéricos para o estudo de circulação em águas rasas", Anais do II Simpósio sobre Sistemas Computacionais para Engenharia Civil, vol. II, pp.111-125, São Paulo, 1978.
- [2] BAKER, A.J.: "Finite element solution algorithm for viscous incompressible fluid dynamics", Int. J. for Num. Meth. in Eng., vol. 6, pp.89-101, 1973.
- [3] BREBBIA, C.A. & FERRANTE, A.J.: "The finite element technique", Editora da UFRGS, 1975.
- [4] BREBBIA, C.A. & SMITH, S.: "Solution of Navier-Stokes equations for transient incompressible flow", in Finite Elements in Water Resources, Pentech Press, pp.4.205-4.230, 1976.
- [5] BREBBIA, C.A. and FERRANTE, A.J.: "Computational methods for the solution of engineering problems", Pentech Press, 1978.
- [6] BROOKS, A.N. & HUGHES, T.J.R.: "Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, no.32, pp.199-259, 1982.
- [7] CAMPION-RENSON, A. & CROCHET, M.J.: "On the Stream function-vorticity finite element solutions of Navier-Stokes equations", Int. J. for Num. Meth. in Eng., vol.12, pp.1809-1818, 1978.
- [8] CHENG, R.T.: "Numerical solution of the Navier-Stokes equations by the finite element method", The Physics of Fluids, vol. 15, no.12, pp.2098-2105, 1972.

- [9] CONNOR, J.J. & BREBBIA, C.A.: "Finite element techniques for fluid flow", Newnes-Butterworths, 1976.
- [10] DHATT, G., KAMGA FOMO, B. & BOURQUE, C.: "A ψ - ω finite element formulation for the Navier-Stokes equations", Int. J. for Num. Meth. in Eng., vol. 17, pp.199-212, 1981.
- [11] DHATT, G. & KAMGA FOMO, B.: "Different finite element formulations for the Navier-Stokes equations", in Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow, Pineridge Press, pp.179-189, 1981.
- [12] ECER, A., ROUT, R.K. & WARD, P.: "Investigation of solution of Navier-Stokes equations using a variational formulation", Int. J. for Num. Meth. in Fluids, vol. 3, pp.23-31, 1983.
- [13] GARTLING, D.K., NICKELL, R.E. & TANNER, R.I.: "A finite element convergence study for accelerating flow problems", Int. J. for Num. Meth. in Eng., vol. 11, pp.1155-1174, 1977.
- [14] GORDON, D.: "Numerical calculations on viscous flow fields through cylinder arrays", Computer and Fluids, vol. 6, pp.1-13, 1978.
- [15] GRESHO, P.M., LEE, R.L. & SANI, R.L.: "On the time-dependent solution of the incompressible Navier-Stokes equations in two and three dimensions", in Recent Advances in Numerical Methods in Fluids, Pineridge Press, pp.27-79, 1980.
- [16] GRESHO, P.M., LEE, R.L. and UPSON, C.D.: "FEM solution of the Navier-Stokes equations for vortex shedding behind a cylinder: experiments with the four-node element", in Finite Element in Water Resources, Pentech Press, pp.4.48-4.65, 1980.
- [17] HEINRICH, J.C., HUYAKORN, P.S., ZIENKIEWICZ, O.C. & MITCHELL, A.R.: "An 'upwind' finite element scheme for two-dimensional convective transport equation", Int. J. Num. Meth. in Eng., vol. 11, pp.131-143, 1977.

- [18] HEINRICH, J.C. & MARSHALL, R.S.: "Viscous incompressible flow by a penalty function finite element method", computers and fluids, vol. 9, pp.73-83, 1981.
- [19] HUGHES, T.J.R.: "A simple scheme for developing 'upwind' finite elements", Int. J. Num. Meth. in Eng., vol. 12, pp. 1359-1365, 1978.
- [20] HUGHES, T.J.R., LIU, W.K. & BROOKS, A.: "Finite element analysis of incompressible viscous flows by the penalty function formulation", J. of Computational Physics, vol. 30, pp.1-60, 1979.
- [21] HUYA KORN, P.S., TAYLOR, C., LEE, R.L. & GRESHO, P.M.: "A comparison of various mixed-interpolation finite elements in the velocity-pressure formulation of the Navier-Stokes equations", Computers and Fluids, vol. 6, pp. 25-35, 1978.
- [22] IKEGAWA, M.: "A new finite element technique for the analysis of steady viscous flow problems", Int. J. for Num. Meth. in Eng., vol. 14, pp.103-113, 1979.
- [23] KAWAHARA, M., YOSHIMURA, N., NAKAGAWA, K. & OHSAKA, H.: "Steady and unsteady finite element analysis of incompressible viscous fluid", Int. J. for Num. Meth. in Eng., vol. 10, pp.437-456, 1976.
- [24] KAWAHARA, M. & HIRANO, H.: "A finite element method for high reynolds number viscous fluid flow using two step explicit scheme", Int. J. for Num. Meth. in Fluids, vol. 3, pp.137-163, 1983.
- [25] KELLY, D.W., NAKAZAWA, S., ZIENKIEWICZ, O.C. & HEINRICH, J.C.: "A note on upwinding and anisotropic balancing dissipation in finite element approximations to convective diffusion problems", Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 5, pp.1705-1711, 1980.
- [26] MALVERN, L.E.: "Introduction to the mechanics of a continuous medium", Prentice-Hall, 1969.

- [27] MATTHIES, H. & STRANG, G.: "The solution of nonlinear finite element equations", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol. 14, pp.1613-1629, 1979.
- [28] MOULT, A., BURLEY, D. & RAWSON, H.: "The numerical solution of two-dimensional steady flow problems by the finite element method", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol. 14, pp.11-35, 1979.
- [29] ODEN, T. & SOMOGYI, D.: "Finite element applications in fluid dynamics", *Journal of the Eng. Mechanics Division*, vol. 95, pp.821-826, 1969.
- [30] ODEN, T.: "Finite element analysis of Navier-Stokes equation", *J. of the Eng. Mech. Division*, vol. 96, pp.529-534, 1970.
- [31] ODEN, T. & WELLFORD, L.C.: "Analysis of flow of viscous fluids by the finite element method", *AIAA Journal*, vol. 10, pp.1590-1599, 1972.
- [32] OLSON, M.D.: "Comparison of various finite element solution methods for the Navier-Stokes equations", in *Finite Elements in Water Resources*, Pentech Press, pp. 4.185-4.203, 1976.
- [33] QUARTAPELLE, L. & VALZ-GRIS, F.: "Projection conditions on the vorticity in viscous incompressible flows", *Int. J. Num. Meth. in Fluids*, vol. 1, pp.129-144, 1981.
- [34] QUARTAPELLE, L., VALZ-GRIS, F. & NAPOLITANO, M.: "Integral conditions on the vorticity: numerical algorithms for the steady and unsteady Navier-Stokes equations", in *Num. Meth. in Laminar and Turbulent Flow*, Pineridge Press, pp.79-89, 1981.
- [35] RAO, S.S.: "The finite element method in engineering", Pergamon Press, 1982.
- [36] REDDY, J.N.: "On penalty function methods in the finite element analysis of flow problems", *Int. J. for Num. Meth. in Fluids*, vol. 2, pp.151-171, 1982.

- [37] ROACHE, P.J.: "Computational fluid dynamics", Hermosa Pub., Albuquerque, USA, 1972.
- [38] STEVENS, W.N.R.: "Finite element, stream function-vorticity solution of steady laminar natural convection", Int. J. for Num. Meth. in Fluids, vol. 2, pp.349-366, 1982.
- [39] TAYLOR, C. & HOOD, P.: "A Numerical solution of the Navier-Stokes equations using the finite element technique", Computers and Fluids, vol. 1, pp.73-100, 1973.
- [40] THOMASSET, F.: "Implementation of finite element methods for Navier-Stokes equations", Springer-Verlag, 1981.
- [41] VALLENTINE, H.R.: "Applied hydrodynamics", Butterworth & Co. LTd., 1969.
- [42] ZIENKIEWICZ, O.C.: "Why finite elements?", in Finite Elements in Fluids, John Wiley & Sons, pp. 1-23, 1975.
- [43] ZIENKIEWICZ, O.C.: "The finite element method", 3rd ed., Mc Graw-Hill, 1977.