

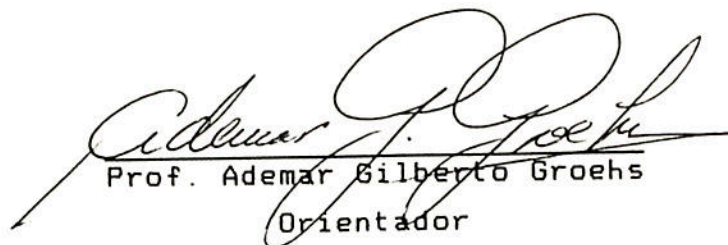
PRECONDICIONAMENTO DO MÉTODO DOS GRADIENTES CONJUGADOS
NUMA FORMULAÇÃO ELEMENTO-POR-ELEMENTO.

Ernesto Luiz Gomes Alquati

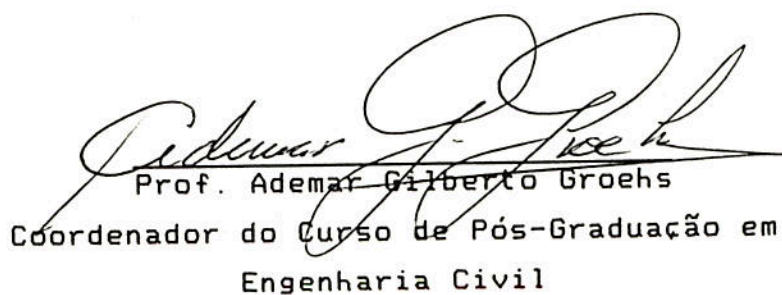
Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA.

Porto Alegre
Dezembro - 1991

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pelo Curso de Pós-Graduação.



Prof. Ademar Gilberto Groehs
Orientador



Prof. Ademar Gilberto Groehs
Coordenador do Curso de Pós-Graduação em
Engenharia Civil

BANCA EXAMINADORA

- Prof. Ademar Gilberto Groehs (Orientador)
D.Sc. pela COPPE/UFRJ
- Prof. Marco Tulio Menna Barreto de Vilhena
Dr. pela UFRGS
- Prof. Armando Miguel Awruch
D.Sc. pela COPPE/UFRJ
- Prof.^a Maria Ines Gobbo dos Santos
M.Sc. pelo CPGEC/UFRGS

AGRADECIMENTOS

Agradece-se às seguintes pessoas e instituições, indispensáveis a realização deste trabalho de dissertação:

ao Professor Ademar Gilberto Groehs pela orientação e apoio, fundamentais ao desenvolvimento do trabalho;

à Professora Maria Ines Gobbo dos Santos pela grande colaboração prestada;

aos Professores do Curso de Pós-Graduação em Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul pelo conhecimento transmitido; aos Funcionários pela colaboração;

a todos colegas pela convivência e pela amizade;

à CAPES - Coordenadoria de Aperfeiçoamento do Pessoal de Nível Superior pela ajuda financeira dada a este trabalho;

à Fundação Universidade do Rio Grande e em especial, aos colegas do Departamento de Materiais e Construção pelo apoio recebido.

A todos que de algum modo contribuíram para realização deste trabalho.

À memória de meu pai,
Prof. Mario Alquati e
a meus filhos Carlos e
Matheus.

SUMÁRIO

| | |
|---|------|
| LISTA DE FIGURAS | viii |
| LISTA DE TABELAS | xi |
| LISTA DE SÍMBOLOS | xiii |
| RESUMO | xvi |
| ABSTRACT | xvii |
| | |
| 1. - INTRODUÇÃO | 1 |
| 1.1 - Preliminares | 1 |
| 1.2 - Objetivos | 4 |
| 1.3 - Revisão da Literatura | 5 |
| 1.4 - Organização do Texto | 8 |
| 2. - O MÉTODO DOS GRADIENTES CONJUGADOS | 10 |
| 2.1 - Preliminares | 10 |
| 2.2 - Método de Máximo Descenso | 11 |
| 2.3 - Método dos Gradientes Conjugados | 15 |
| 2.4 - Algoritmo Básico para o Método dos Gradientes Conjugados | 18 |
| 2.5 - Taxa de Convergência do Método dos Gradientes Conjugados | 19 |
| 3. - A TÉCNICA DE PRECONDICIONAMENTO | 21 |
| 3.1 - Preliminares | 21 |
| 3.2 - Algoritmo Básico para o Método dos Gradientes Conjugados Precondicionado | 23 |
| 4. - FORMULAÇÃO ELEMENTO-POR-ELEMENTO E PRECONDICIONADO- RES EMPREGADOS | 27 |
| 4.1 - Preliminares | 27 |
| 4.2 - Produto matriz-vetor $K p$ | 27 |
| 4.3 - Descrição dos Precondicionadores Empregados | 29 |

| | |
|---|----|
| 4.3.1 - Precondicionador Diagonal (ou de Jacobi) | 30 |
| 4.3.2 - Precondicionador EPE de Cholesky | 30 |
| 4.3.3 - Precondicionador EPE de Crout | 31 |
| 4.3.4 - Precondicionador EPE de Gauss-Seidel Simetrizado | 32 |
| 4.4 - Solução do sistema auxiliar $\underline{P} \underline{z} = \underline{r}$ | 33 |
| 5. - ASPECTOS DA IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL | 35 |
| 5.1 - Preliminares | 35 |
| 5.2 - Produto matriz-vetor $\underline{K} \underline{p}$ | 36 |
| 5.3 - Construção dos Precondicionadores EPE | 38 |
| 5.4 - Solução do sistema auxiliar $\underline{P} \underline{z} = \underline{r}$ | 39 |
| 6. - RESUMO DOS EXEMPLOS NUMÉRICOS E DOS RESULTADOS OBTIDOS | 40 |
| 6.1 - Preliminares | 40 |
| 6.2 - Resumo dos Dados Relativos aos Exemplos Resolvidos | 42 |
| 6.3 - Resumo dos Resultados Obtidos | 43 |
| 6.3.1 - Taxa de Convergência e Tempo de Processamento | 43 |
| 6.3.2 - Requisitos de Armazenamento | 45 |
| 6.3.3 - Estimativa do Condicionamento | 46 |
| 6.4 - Observações Finais | 48 |
| 7. - CONCLUSÕES | 49 |
| ANEXO 1 - EXEMPLOS NUMÉRICOS E RESULTADOS OBTIDOS | 51 |
| I.1 - Introdução | 51 |
| I.2 - Problemas de Estado Plano | 52 |
| I.2.1 - Caso N.º 1 | 52 |
| I.2.2 - Caso N.º 2 | 56 |
| I.2.3 - Caso N.º 3 | 59 |
| I.2.4 - Caso N.º 4 | 63 |
| I.2.5 - Observações Complementares | 65 |
| I.3 - Problemas de Placas | 68 |
| I.3.1 - Caso N.º 5 | 68 |
| I.3.2 - Caso N.º 6 | 71 |
| I.3.3 - Caso N.º 7 | 75 |

| | |
|---|-----|
| I.3.4 - Caso N.º 8 | 79 |
| I.3.5 - Caso N.º 9 | 83 |
| I.3.6 - Observações Complementares | 86 |
| I.4 - Problemas de Cascas Poliédricas | 88 |
| I.4.1 - Caso N.º 10 | 88 |
| I.4.2 - Caso N.º 11 | 91 |
| I.4.3 - Caso N.º 12 | 95 |
| I.4.4 - Observações Complementares | 98 |
| I.5 - Problemas Tridimensionais | 100 |
| I.5.1 - Caso N.º 13 | 100 |
| I.5.2 - Caso N.º 14 | 103 |
| I.5.3 - Caso N.º 15 | 108 |
| I.5.4 - Observações Complementares | 111 |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 112 |

LISTA DE FIGURAS

Figura

| | | |
|---------|---|----|
| 2.2.1 | - Representação da equação (2.2.3) em \mathbb{R}^2 | 12 |
| 2.2.2 | - Iteração k no Método de Máximo Descenso para minimização de f em \mathbb{R}^2 | 14 |
| 2.4.1 | - Algoritmo Básico do Método dos Gradientes Conjugados..... | 18 |
| 3.2.1 | - Algoritmo para o Método dos Gradientes Conjugados com Precondicionamento..... | 25 |
| 4.3.2.1 | - Regularização de Winget..... | 32 |
| 5.2.1 | - Vetor INDEX | 36 |
| 5.2.2 | - Parcela do produto $\mathbf{K} \mathbf{p}$ relativa ao elemento 2 da malha mostrada na FIGURA 5.2.1 | 37 |
| 5.2.3 | - Preenchimento do arranjo RT para a malha da FIGURA 5.2.1 | 37 |
| 6.1.1 | - Esquema Geral de solução dos exemplos..... | 41 |

ANEXO 1

Figura

| | | |
|---------|---|----|
| I.2.1.1 | - Caso N.º 1..... | 53 |
| I.2.1.2 | - Malha do exemplo A-02..... | 54 |
| I.2.1.3 | - Performance da taxa de convergência para o preconditionador EPE de Gauss-Seidel Sim. | 55 |
| I.2.2.1 | - Caso N.º 2..... | 56 |
| I.2.2.2 | - Malha do exemplo B-02 | 56 |
| I.2.2.3 | - Performance da taxa de convergência do preconditionador EPE de Cholesky | 59 |
| I.2.3.1 | - Caso N.º 3..... | 60 |
| I.2.3.2 | - Malha do Exemplo C-02..... | 61 |

Figura

| | | |
|---------|--|----|
| I.2.3.3 | - Performance da taxa de convergência do preconditionador EPE de Cholesky | 62 |
| I.2.4.1 | - Caso N.º 4..... | 63 |
| I.2.4.2 | - Malha do exemplo D-02..... | 64 |
| I.2.4.3 | - Performance da taxa de convergência do preconditionador EPE de Cholesky | 66 |
| I.2.5.1 | - Variação do quociente D_{\max}/D_{\min} para os quatro casos de estado plano | 67 |
| I.3.1.1 | - Caso N.º 5..... | 68 |
| I.3.1.2 | - Malha do exemplo E-02..... | 69 |
| I.3.1.3 | - Performance da taxa de convergência do preconditionador EPE de Cholesky | 71 |
| I.3.2.1 | - Caso N.º 6..... | 72 |
| I.3.2.2 | - Malha do exemplo F-01..... | 73 |
| I.3.2.3 | - Performance da taxa de convergência do preconditionador EPE de Crout | 75 |
| I.3.3.1 | - Caso N.º 7..... | 76 |
| I.3.3.2 | - Malha do exemplo G-01..... | 77 |
| I.3.3.3 | - Performance da taxa de convergência do preconditionador EPE de Cholesky | 79 |
| I.3.4.1 | - Caso N.º 8..... | 80 |
| I.3.4.2 | - Malha do exemplo H-02..... | 81 |
| I.3.4.3 | - Performance da taxa de convergência do preconditionador EPE de Diagonal..... | 83 |
| I.3.5.1 | - Caso N.º 9..... | 84 |
| I.3.5.2 | - Malha do exemplo I-03..... | 85 |
| I.2.5.3 | - Performance da taxa de convergência do preconditionador EPE de Cholesky | 86 |
| I.3.6.1 | - Variação do quociente D_{\max}/D_{\min} com o número de graus de liberdade para os cinco casos de placas | 87 |
| I.4.1.1 | - Caso N.º 10..... | 88 |
| I.4.1.2 | - Malha do exemplo J-03..... | 89 |
| I.4.1.3 | - Performance da taxa de convergência do preconditionador EPE de Cholesky | 91 |

LISTA DE TABELAS

Tabela

| | | |
|---------|--|----|
| 6.2.1 | - Características dos casos analisados | 42 |
| 6.2.2 | - Características dos elementos e das malhas de elementos finitos de menor e maior densidade empregados nos casos analisados | 43 |
| 6.3.1.1 | - Algoritmos de melhor performance computacional | 44 |
| 6.3.1.2 | - Taxa de convergência obtida em cada caso pelo preconditionador de melhor performance | 45 |
| 6.3.2.1 | - Razão entre os requisitos de armazenamento para formulação EPE e Global | 46 |
| 6.3.3.1 | - Valores de D_{\max}/D_{\min} para as malhas de menor e maior densidade de elementos de cada caso analisado | 47 |

ANEXO I

Tabela

| | | |
|---------|---|----|
| I.2.1.1 | - Dados relativos às malhas do Caso N.º 1 | 53 |
| I.2.1.1 | - Resultados obtidos para o Caso N.º 1 | 54 |
| I.2.2.1 | - Dados relativos às malhas do Caso N.º 2 | 57 |
| I.2.2.2 | - Resultados obtidos para o Caso N.º 2 | 58 |
| I.2.3.1 | - Dados relativos às malhas do Caso N.º 3 | 60 |
| I.2.3.2 | - Resultados obtidos para o Caso N.º 3 | 61 |
| I.2.4.1 | - Dados relativos às malhas do Caso N.º 4 | 63 |
| I.2.4.2 | - Resultados obtidos para o Caso N.º 4 | 65 |
| I.3.1.1 | - Dados relativos às malhas do Caso N.º 5 | 69 |
| I.3.1.2 | - Resultados obtidos para o Caso N.º 5 | 70 |
| I.3.2.1 | - Dados relativos às malhas do Caso N.º 6 | 72 |

Tabela

| | | |
|---------|--|-----|
| I.3.2.2 | - Resultados obtidos para o Caso N.º 6 | 74 |
| I.3.3.1 | - Dados relativos às malhas do Caso N.º 7..... | 76 |
| I.3.3.2 | - Resultados obtidos para o Caso N.º 7 | 78 |
| I.3.4.1 | - Dados relativos às malhas do Caso N.º 8..... | 80 |
| I.3.4.2 | - Resultados obtidos para o Caso N.º 8 | 82 |
| I.3.5.1 | - Dados relativos às malhas do Caso N.º 9..... | 84 |
| I.3.5.2 | - Resultados obtidos para o Caso N.º 9 | 85 |
| I.4.1.1 | - Dados relativos às malhas do Caso N.º 10..... | 89 |
| I.4.1.2 | - Resultados obtidos para o Caso N.º 10 | 90 |
| I.4.2.1 | - Dados relativos às malhas do Caso N.º 11..... | 92 |
| I.4.2.2 | - Resultados obtidos para o Caso N.º 11 | 93 |
| I.4.3.1 | - Dados relativos às malhas do Caso N.º 12..... | 95 |
| I.4.3.2 | - Resultados obtidos para o Caso N.º 12 | 97 |
| I.5.1.1 | - Dados relativos às malhas do Caso N.º 13..... | 101 |
| I.5.1.2 | - Resultados obtidos para o Caso N.º 13 | 102 |
| I.5.2.1 | - Dados relativos às malhas do Caso N.º 14..... | 104 |
| I.5.2.2 | - Resultados obtidos para o Caso N.º 14 | 106 |
| I.5.3.1 | - Dados relativos às malhas do Caso N.º 15 | 108 |
| I.5.3.2 | - Resultados obtidos para o Caso N.º 15 | 109 |

Figura

| | | |
|---------|---|-----|
| I.4.2.1 | - Caso N.º 11..... | 92 |
| I.4.2.2 | - Malha do exemplo K-02..... | 93 |
| I.4.2.3 | - Performance da taxa de convergência do precondicionador EPE de Cholesky | 94 |
| I.4.3.1 | - Caso N.º 12..... | 95 |
| I.4.3.2 | - Malha do exemplo L-02..... | 96 |
| I.4.3.3 | - Performance da taxa de convergência do precondicionador EPE de Crout | 98 |
| I.4.4.1 | - Variação do quociente D_{\max}/D_{\min} com o número de graus de liberdade para os três casos de cascas poliédricas | 99 |
| I.5.1.1 | - Caso N.º 13 | 100 |
| I.5.1.2 | - Malha do exemplo M-05 | 101 |
| I.5.1.3 | - Performance da taxa de convergência do precondicionador EPE de Cholesky | 103 |
| I.5.2.1 | - Caso N.º 14..... | 104 |
| I.5.2.2 | - Malha do exemplo N-04..... | 105 |
| I.5.2.3 | - Performance da taxa de convergência do precondicionador EPE de Cholesky | 107 |
| I.5.3.1 | - Caso N.º 15 | 108 |
| I.5.3.2 | - Malha do exemplo P-02 | 109 |
| I.5.3.3 | - Performance da taxa de convergência do precondicionador EPE de Diagonal | 110 |
| I.5.4.1 | - Variação do quociente D_{\max}/D_{\min} com o número de graus de liberdade dos exemplos de sólido tridimensional | 111 |

LISTA DE SÍMBOLOS

- MEF - Método dos Elementos Finitos
MGC - Método dos Gradientes Conjugados
MGCP - Método dos Gradientes Conjugados Precondicionado
EPE - Elemento-por-elemento
EBE - Element-by-element

Capítulo 1

- \mathcal{L} - operador diferencial linear
 u - variáveis dependentes
 r - função das variáveis dependentes
 p - valor prescrito para u e/ou suas derivadas em Γ
 Ω - domínio do problema
 Γ - contorno de Ω
 c_j - parâmetros incógnitos
 ϕ_j - funções de interpolação
 $\tilde{L}, \tilde{L}^T, \tilde{D}$ - fatores de Crout de \tilde{K}
 \tilde{S}, \tilde{S}^T - fatores de Cholesky de \tilde{K}
 \tilde{L}, \tilde{U} - fatores de Gauss para \tilde{K} não simétrica

Capítulo 2

- \tilde{K} - matriz global do sistema
 \tilde{x} - vetor global de incógnitas
 \tilde{b} - vetor global dos termos independentes
 $f(\cdot)$ - funcional quadrático
 c - escalar
 \mathbb{R} - números reais
 \mathbb{R}^2 - espaço vetorial real bidimensional
 \mathbb{R}^N - espaço vetorial real de dimensão N

| | |
|---------------------------|---|
| $\mathbb{R}^{N \times N}$ | - espaço vetorial das matrizes de ordem N |
| N | - ordem do sistema global de equações |
| p | - vetor direção de busca |
| α_k | - parâmetro de linha de busca |
| β_k | - parâmetro de correção da direção de busca |
| $\ \cdot\ _2$ | - norma euclidiana |
| $\ \cdot\ _K$ | - norma da energia |
| $\rho(\cdot)$ | - número de condicionamento espectral |
| \hat{x} | - vetor solução exata |
| λ_1, λ_N | - maior e menor autovalores de \tilde{K} |
| D_{\max}, D_{\min} | - termos máximo e mínimo da diagonal de \tilde{K} |
| k, m | - número da iteração |
| ϵ | - tolerância |
| $\rho(\cdot)$ | - número limite para iterações |

Capítulo 3

| | |
|--------------------------|---|
| \tilde{z} | - vetor auxiliar |
| \tilde{P} | - matriz de preconditionamento |
| \tilde{Q}, \tilde{Q}^T | - fator de Cholesky de \tilde{P} |
| \tilde{H} | - matriz global do sistema preconditionado |
| \tilde{y} | - vetor de estimativas do sistema preconditionado |
| \tilde{d} | - vetor dos termos independentes do sistema preconditionado |
| \tilde{I} | - matriz Identidade |
| \tilde{r} | - vetor resíduo no sistema preconditionado |
| \tilde{p} | - vetor direção de busca no sistema preconditionado |

Capítulo 4

| | |
|-----------------------|---|
| \tilde{K} | - matriz de rigidez global |
| \tilde{K}^e | - matriz de rigidez do e-ésimo elemento |
| $\tilde{\bar{K}}^e$ | - matriz de rigidez regularizada do e-ésimo elemento |
| $\tilde{\tilde{K}}^e$ | - matriz de rigidez do e-ésimo elemento expandida para as dimensões globais |
| \tilde{y} | - vetor auxiliar onde é armazenado o produto $\tilde{K} p$ |
| p | - vetor direção de busca |
| p^e | - vetor direção de busca local correspondente ao |

- e-ésimo elemento
- \tilde{P} - matriz de condicionamento
- \tilde{z} - vetor auxiliar, solução de $\tilde{P} \tilde{z} = \tilde{r}$
- \tilde{D} - matriz diagonal de \tilde{K}
- \tilde{D}^e - matriz diagonal de \tilde{K}^e
- $\tilde{\tilde{D}}^e$ - matriz diagonal de $\tilde{\tilde{K}}^e$
- $\tilde{L}_p, \tilde{L}_p^T$ - matrizes triangulares inferior e superior decorrentes da fatoração de Cholesky ou Crout de \tilde{K}^e
- $\tilde{L}_s, \tilde{L}_s^T$ - matrizes triangulares inferior e superior decorrentes da fatoração por soma de \tilde{K}^e
- \tilde{D}_p - matriz diagonal da fatoração de Crout de \tilde{K}^e
- $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \tilde{L}_1^T, \tilde{L}_2^T$ - matrizes $\tilde{L}_p, \tilde{L}_p^T$ correspondentes aos elementos 1 e 2.

Capítulo 5

- INDEX - arranjo unidimensional apontador local-global
- RT - arranjo unidimensional onde são armazenadas as matrizes \tilde{K}^e
- LRT - arranjo unidimensional onde são armazenadas as matrizes \tilde{L}_p ou \tilde{L}_s .
- VTY - arranjo unidimensional correspondente a \tilde{y}
- VTP - arranjo unidimensional correspondente a \tilde{p}
- VTZ - arranjo unidimensional correspondente a \tilde{z}
- VTD - arranjo unidimensional correspondente a \tilde{D}
- NGDLE - número de graus de liberdade por elemento
- NGDLM - número de graus de liberdade da malha
- NEL - número de elementos

CAPÍTULO 6

- NL - número de nós por elemento
- GN - número de graus de liberdade por nó
- GL - número de graus de liberdade por elemento
- QL - número de elementos na malha
- QN - número de nós na malha
- GDL - número de graus de liberdade na malha

ANEXO 1

| | |
|---|---|
| E | - módulo de elasticidade longitudinal |
| μ | - coeficiente de Poisson |
| q | - carga distribuída uniforme |
| p | - pressão uniforme |
| P | - carga concentrada |
| g | - aceleração da gravidade |
| ρ | - peso específico |
| t | - espessura |
| H, L, A, B, a | - dimensões longitudinais e/ou transversais |
| R, D, R ₁ , R ₂ , D ₁ , D ₂ | - dimensões radiais |

RESUMO

Neste trabalho é estudada a solução pelo Método dos Gradientes Conjugados(MGC) de sistemas lineares de equações provenientes da análise estrutural pelo Método dos Elementos Finitos.

São apresentadas as características do método, sua taxa de convergência, o algoritmo básico e um critério de terminação.

A técnica do condicionamento é descrita e apresentado o algoritmo para uma formulação elemento-por-elemento. São apresentados os condicionadores Diagonal, EPE Cholesky, EPE Crout e EPE Gauss-Siedel Simetrizado.

Foram desenvolvidas rotinas computacionais e feito um estudo comparativo da performance destes condicionadores na solução de problemas de elasticidade linear gerados pelo Sistema GAELI em uma estação de trabalho SUN-SPARCstation 1+.

De forma geral, o condicionamento mostrou-se efetivo em acelerar a taxa de convergência do MGC e observou-se uma forte vantagem da solução iterativa numa formulação EPE sobre a formulação global em relação aos requisitos de armazenamento da matriz do sistema de equações.

ABSTRACT

This work studies the use of the Conjugate Gradient Method(CG) applied to the iterative solution of a system of equations, resulted from the analysis of linear geometrical and physical structures by the Finite Element Method(FEM).

The characteristics of the CG method, its rate of convergence, the basic algorithm and a termination criterion are discussed.

The preconditioning technique is presented and the element-by-element approach(EBE) with a preconditioner is also described. In this case, Diagonal, EBE Cholesky, EBE Crout e EBE Symmetrized Gauss-Seidel preconditioners were used.

Computational routines were developed and a study was developed comparing the performance of those preconditioners in the solution of linear elasticity problems, modeled with the GAELI System, using a SUN-SPARCstation 1+.

The efficiency of the preconditioning technique is showed by the significant increase in the rate of convergence of the CG Method. A remarkable advantage of the iterative solution in a EBE formulation is observed when storage requeriments of the system matrix are considered.

1 - INTRODUÇÃO

1.1 - Preliminares

Um grande número de problemas da física e da engenharia podem ser modelados por meio de equações diferenciais, que relacionem as variáveis físicas de interesse.

Tais problemas recaem naturalmente em três categorias físicas : problemas de equilíbrio, de autovalores e de propagação.

Problemas de equilíbrio são problemas estacionários nos quais a configuração de equilíbrio u em um domínio Ω é procurada pela solução de uma equação operacional do tipo

$$\mathcal{L} u + p = 0 \quad \text{em} \quad \Omega,$$

onde \mathcal{L} é um operador diferencial linear, sujeita a condições de contorno do tipo mista, descrita por \mathcal{B} na forma

$$\mathcal{B} u = r \quad \text{em} \quad \Gamma.$$

Na terminologia matemática tais problemas são conhecidos como *problemas de contorno*. Exemplos típicos incluem distribuições estacionárias de temperatura, tensões em equilíbrio em estruturas elásticas, escoamento viscoso estacionário. Apesar da aparente diversidade física, as equações de estado para todos estes problemas são do tipo *elípticas*.

Problemas de autovalores podem ser considerados como extensões dos problemas de equilíbrio onde valores críticos de certos parâmetros devem ser determinados em adição das correspondentes configurações estacionárias. Exemplos típicos incluem flambagem e estabilidade de estruturas, ressonância em

circuitos elétricos e acústicos, frequências naturais em estruturas, entre outros. Os operadores diferenciais nestes casos também são do tipo *elíptico*.

Problemas de propagação são problemas de valor inicial onde se procura o comportamento subsequente de um sistema a partir de um estado inicial conhecido. O domínio de integração é aberto. Em terminologia matemática tais problemas são conhecidos como *problemas de contorno e valor inicial*. As equações de estado para problemas de propagação são do tipo *parabólico* ou *hiperbólico*.

A dedução destas equações de estado é um problema por vezes difícil e sua solução exata é uma tarefa extremamente árdua e frequentemente impossível. Nestes casos, métodos aproximados de análise proporcionam meios alternativos para construção das soluções. Entre estes, os métodos variacionais clássicos (FINLAYSON¹²), tais como o de Ritz e o de Galerkin, são os mais frequentemente empregados.

Por estes procedimentos, a equação diferencial é colocada em uma forma variacional equivalente e admitindo-se que a solução aproximada seja uma combinação ($\sum c_j \phi_j$) de funções de aproximação dadas, ϕ_j , determinam-se os parâmetros incógnitos c_j a partir da forma variacional inicialmente estabelecida. Entretanto tais métodos são pouco efetivos para solução de problemas com automatização computacional da solução.

O Método dos Elementos Finitos (MEF) (ZIENKIEWICZ⁵¹), que constitui-se atualmente na mais importante técnica numérica para solução de problemas gerais de contorno, supera as dificuldades dos métodos variacionais clássicos. A aproximação de problemas de contorno pelas várias formulações possíveis do MEF leva a um sistema de equações lineares algébricas. Mesmo quando o operador diferencial é não-linear, o uso de métodos de linearização tais como o método de Newton, também conduz a um ou mais sistemas lineares de equações algébricas que devem ser resolvidos.

Na solução computacional pelo MEF, a maior parte do esforço é consumido na solução destas equações. As técnicas rotineiramente empregadas para solução destes sistemas de

equações são os chamados métodos diretos (CRISFIELD⁸). Nestes, a matriz global é fatorada e os fatores são subsequentemente usados para resolver as equações para um dado vetor global. As decomposições \underline{LDI}^T e \underline{SS}^T são largamente empregadas quando a matriz é simétrica, enquanto a decomposição \underline{LU} é empregada para os casos de matrizes não simétricas. A razão principal para a grande utilização destes métodos reside no fato que a resposta para uma dada análise é obtida em um número finito de etapas. Além disso, a solução para diferentes vetores globais é eficiente, visto que a fatorização necessita ser realizada apenas uma vez. Contudo, há um problema associado à fatorização de matrizes esparsas. As matrizes originadas do processo de fatorização normalmente apresentam uma esparsidade maior do que a matriz original. Por outro lado, a solução direta por fatorização da matriz global implica em um grande número de multiplicações e adições o que pode conduzir a um erro de proporções sérias quando se trata da solução de grandes sistemas de equações.

Assim, a necessidade de grandes requisitos de armazenamento, a incerteza no erro acumulado no processo de fatoração de matrizes de grande porte aliada a necessidade de se resolver problemas cada vez maiores e mais complexos e do surgimento de novas arquiteturas computacionais com capacidade de procesamento vetorizado e paralelo, levaram a uma retomada na pesquisa de técnicas para o melhoramento das taxas de convergência dos métodos iterativos visando a solução de grandes sistemas de equações.

Métodos Iterativos (HAGEMAN e YOUNG¹⁹) iniciam tipicamente com uma estimativa do vetor solução, a qual é refinada em sucessivas etapas, que dependem das propriedades das matrizes e da técnica iterativa, levando a um vetor que satisfaça as equações originais com um nível pré-estabelecido de precisão. A matriz original é preservada e no caso de sistemas muito esparsos com banda muito larga, pode haver uma significativa minimização dos requisitos de armazenamento sobre métodos diretos de fatorização.

O esforço computacional em um esquema iterativo

depende da velocidade de convergência e precisão com os quais as equações serão resolvidas. Uma taxa de convergência pode frequentemente ser melhorada por uma técnica conhecida como *precondicionamento* (EVANS¹¹). Nesta técnica, o sistema original de equações é multiplicado por uma matriz convenientemente escolhida de tal forma que o sistema de equações resultante fique mais próximo da matriz identidade do que o sistema original. Assim, um método iterativo aplicado a um sistema *precondicionado* de equações convergirá mais rapidamente do que aplicado ao sistema original. Em realidade, a matriz de *precondicionamento* é uma aproximação da inversa da matriz original. O desenvolvimento de *precondicionadores* eficientes foi outro motivo que também contribuiu para reavivar o interesse pelos métodos iterativos.

Dentre os métodos iterativos, aquele que se tornou popular por sua eficiência foi o *Método dos Gradientes Conjugados* (MGC). Tal popularidade deve-se a sua simplicidade de implementação computacional, facilidade de melhorar a taxa de convergência por um processo de *precondicionamento*, perfeita adaptação a uma formulação elemento-por-elemento (EPE), perfeita adequação a esquemas de refinamento adaptativos e facilidade para explorar as capacidades de processamento vetorial e paralelo quando disponíveis.

Assim, a solução iterativa pelo MGC constitui-se numa alternativa extremamente eficaz para a solução de grandes sistemas lineares de equações algébricas provenientes da solução de problemas de contorno lineares ou não.

1.2 - Objetivos

O presente trabalho tem por principais objetivos:

- estudar o Método dos Gradientes Conjugados para solução de sistemas lineares de equações algébricas decorrentes da análise estrutural por elementos finitos, considerando : sua formulação matemática, fatores que influenciam na taxa de convergência, algoritmo básico e *precondicionamento*
- estudar comparativamente o desempenho de quatro procedimentos

de condicionamento numa formulação EPE, que incluem os preconditionadores Diagonal, de Cholesky, de Crout, e de Gauss-Seidel Simetrizado.

O estudo e implementação do MGC neste trabalho, está limitado a solução de sistemas lineares de equações algébricas decorrentes da análise estática pelo MEF de problemas de elasticidade linear para os quais o Sistema GAELI (GROEHS e SANTOS¹⁸) está capacitado a resolver, quais sejam: estado plano de tensões e de deformações, placas finas e espessas, cascas poliédricas, sólidos axissimétricos, sólidos tridimensionais.

1.3 - Revisão da Literatura

Em 1952, HESTENES e STIEFEL²¹, a partir de estudos independentes, publicaram em conjunto a teoria geral do MGC para solução de sistemas lineares de equações algébricas, técnica similar em estilo a procedimentos iterativos tais como o Método de Máximo Descenso ("Steepest Descent Method"). Comprovaram que a convergência teórica à solução exata se dava em um número de iterações menor ou igual a ordem do sistema em um contexto de aritmética exata.

Provavelmente por causa da incerteza em relação à sua taxa de convergência, o MGC não foi intensamente empregado durante o período entre 1950 e 1970. Entretanto, alguns estudos importantes foram realizados neste período. HESTENES²⁰ apresentou novas variantes para a formulação do algoritmo básico. BECKMANN⁴ tratou de aspectos matemáticos, análise de erros e de uma implementação computacional. ENGELLI et al.¹⁰ demonstraram que o MGC converge mais rapidamente do que a iteração por Jacobi acelerado por Chebyshev para a solução da equação biharmônica por diferenças finitas, concluindo sobre a superioridade da performance do MGC à medida que o mal condicionamento do sistema cresce. Observações favoráveis sobre a eficiência do MGC para solução de sistemas de ordem elevada provenientes da análise estrutural por elementos finitos foram relatados por KOWALICK³⁵, FRIED¹⁵ e YETTRAN e HIRST⁴⁹.

Houve um reconhecimento crescente no sentido de que o

MGC poderia ser empregado na solução de grandes sistemas de equações. JENNINGS³⁰ estudou a influência do espectro de autovalores da matriz do sistema sobre a taxa de convergência. Inúmeros trabalhos são publicados sobre técnicas de condicionamento. JENNINGS e MALIK³² propuseram escalonamento diagonal e o processo de eliminação parcial como formas de condicionar o sistema e maximizar a taxa de convergência. MEIJEREINK e VORST³⁷, KERSHAW³⁴ propuseram diferentes condicionadores baseados numa fatorização incompleta de Cholesky. AJIZ e JENNINGS¹ apresentaram nova versão para este condicionador. EISENSTAT⁹ propôs uma classe de condicionadores baseados na fatorização incompleta do tipo \underline{LDL}^T . JOHNSON et al.³³ e SAAD⁴³ propuseram condicionadores polinomiais com o propósito de aproximação da inversa da matriz global do sistema.

Com o surgimento das arquiteturas computacionais que possibilitam processamento vetorizado e paralelo, as atenções dos pesquisadores voltaram-se, a partir da década passada para a formulação elemento-por-elemento, que possibilita explorar de forma bastante efetiva os novos recursos computacionais disponíveis com menores requisitos de memória inerentes a este tipo de formulação.

A paralelização e vetorização do algoritmo do MGC tem sido crescentemente investigada. VAN DER VORST⁴⁸ considerou a performance de implementação em FORTRAN do algoritmo dos gradientes conjugados para solução de grandes sistemas de equações nos computadores CRAY-1, CRAY X-MP e CYBER 205. SEAGER⁴⁴ estudou a performance da implementação do MGC com condicionamento diagonal, incompleto de Cholesky e SSOR com processamento paralelo em um CRAY X-M24 e em um CRAY X-M48. COUTINHO et al.⁷ estudaram comparativamente a performance da solução iterativa por gradientes conjugados e pelo algoritmo de Lanczos em um IBM 3090 E/6VF. Os algoritmos foram implementados utilizando uma formulação elemento-por-elemento e, os experimentos numéricos mostraram vantagem na utilização do primeiro. MELHEM³⁸ estudou a solução de grandes sistemas de equações provenientes da discretização de equações diferenciais

parciais por gradientes conjugados preconditionado, propondo uma estrutura de dados mais adequada a capacidade de vetorização disponível em um CRAY X-MP. HUGHES et al.²⁸ estudaram a solução de problemas tridimensionais lineares e não lineares em um CRAY X-MP48 com até 100000 graus de liberdade. Concluíram que o preconditionamento EPE de Crout para o MGC num esquema elemento-por-elemento apresenta menores custos computacionais de CPU e requisitos de armazenamento do que os exigidos para a solução por processo direto de fatoração.

Na formulação elemento-por-elemento a matriz global do sistema não é formada, utilizando-se as matrizes dos elementos como operadores. Esta idéia foi lançada primeiramente por FOX e STANTON¹³ e por FRIED¹⁴. Por outro lado, alguns autores reservam esta nomenclatura quando do emprego das matrizes dos elementos como preconditionadores do sistema de equações.

O algoritmo MGC com preconditionamento EPE foi inicialmente desenvolvido por HUGHES et al.²⁶ como um método de integração no tempo para resolução de problemas transientes de condução de calor. Posteriormente, o algoritmo foi reformulado e utilizado como uma técnica de solução iterativa de sistemas de equações lineares provenientes de esquemas de integração no tempo como utilizado por HUGHES et al.²⁷. O procedimento EPE, a partir de então, ganhou reconhecimento como um preconditionador efetivo para emprego com o algoritmo do MGC. Vários preconditionadores EPE foram estabelecidos, dentre eles os mais efetivos são os preconditionadores EPE de Cholesky, EPE de Crout e EPE de Gauss-Siedel Simetrizado. Estes preconditionadores foram desenvolvidos e estudados por HUGHES et al.^{24, 25, 29}, NOUR-OMID e PARLETT⁴¹ e MULLER e HUGHES³⁹.

A utilização das matrizes dos elementos como operadores é compatível com a arquitetura dos programas de elementos finitos e permite o desenvolvimento de algoritmos paralelos para computadores com multiprocessamento o que parece ser uma tendência para o futuro. Por outro lado, com o crescente emprego de microcomputadores para análise por elementos finitos, o emprego de uma formulação EPE torna-se vantajosa, visto que o tempo de processamento de

microcomputadores ter custo reduzido e como não envolve fatoração global, grandes problemas podem ser facilmente tratados em vista da memória interna disponível.

1.4 - Organização do Texto

O texto desta dissertação encontra-se dividido em sete capítulos, sendo o primeiro constituído pela presente introdução.

No Capítulo 2, apresenta-se o problema da minimização de um funcional quadrático pelo Método de Máximo Descenso. A seguir, são apresentadas algumas modificações neste método para se chegar ao Método dos Gradientes Conjugados. Para este último é apresentado o algoritmo básico para implementação computacional e os fatores que influenciam na sua taxa de convergência.

No Capítulo 3, é descrita a idéia básica da técnica de condicionamento e sua aplicação ao Método dos Gradientes Conjugados. Apresenta-se o algoritmo básico para implementação computacional do MGC condicionado.

No Capítulo 4, são abordados as operações que definem o tipo de formulação, global ou elemento-por-elemento, a ser empregada na implementação computacional do MGC. É descrito o produto matriz-vetor, que ocorre a cada iteração do método, numa formulação elemento-por-elemento. São descritos os condicionadores Diagonal, EPE de Cholesky, EPE de Crout e EPE de Gauss-Seidel Simetrizado empregados neste trabalho. Finalmente é descrita a solução do sistema auxiliar de equações que ocorre a cada iteração do MGCP.

No Capítulo 5, são descritas alguns aspectos computacionais de relevância na implementação das rotinas iterativas neste trabalho e os recursos computacionais empregados.

No Capítulo 6 são apresentados de forma concisa os dados relativos aos exemplos numéricos resolvidos e os resultados obtidos quanto a performance computacional dos algoritmos implementados.

No Capítulo 7 são traçadas as conclusões deste trabalho e sugeridas outras atividades para complementação e aperfeiçoamento do presente trabalho.

No ANEXO 1 são apresentados de forma completa e detalhada os dados relativos aos exemplos dos casos analisados, assim como os resultados obtidos em termos da performance computacional das rotinas iterativas para solução pelo MGC sem e com condicionamento.

2 - O MÉTODO DOS GRADIENTES CONJUGADOS

2.1 - Preliminares

A construção de soluções aproximadas para problemas de contorno pelas várias formas do MEF leva frequentemente à necessidade de se obter a solução de sistemas lineares de equações da forma

$$\underline{K} \underline{x} = \underline{b}, \quad (2.1.1)$$

onde $\underline{K} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ é uma matriz quadrada, simétrica positiva definida e esparsa, $\underline{x} \in \mathbb{R}^N$ o vetor das incógnitas e $\underline{b} \in \mathbb{R}^N$ o vetor dos termos independentes.

Numa formulação em deslocamentos pelo MEF para análise estrutural, \underline{K} é conhecida como a matriz de rigidez global do sistema, \underline{x} o vetor dos deslocamentos incógnitos e \underline{b} o vetor global de forças.

A solução de sistemas dados por (2.1.1) pode ser interpretada, como demonstrado por AXELSSON e BARKER³, como equivalente a minimização de um funcional quadrático.

Estes funcionais quadráticos, que frequentemente surgem da aplicação do método de Ritz-Galerkin por elementos finitos, tem a forma

$$f(\underline{x}) = \frac{1}{2} \underline{x}^T \underline{K} \underline{x} - \underline{b}^T \underline{x} + c, \quad (2.1.2)$$

onde $c \in \mathbb{R}$, onde $f(\underline{x})$ é a energia potencial do sistema discreto.

O funcional (2.1.2) tem um mínimo no ponto onde seu gradiente dado por

$$g(\underline{x}) = \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial \underline{x}} = \underline{K} \underline{x} - \underline{b} \quad (2.1.3)$$

torna-se nulo. Portanto, a solução de (2.1.1) é equivalente a minimização do funcional (2.1.2).

Uma das estratégias mais simples para minimização de um funcional é o Método de Máximo Descenso (*Method of Steepest Descent*), que será a seguir apresentado, a partir do qual com algumas alterações bem características se transforma no Método dos Gradientes Conjugados.

2.2 - Método de Máximo Descenso

A maioria dos métodos iterativos para minimização de um funcional quadrático f definido em \mathbb{R}^N , realizam iterações do tipo

$$\underline{x}^{k+1} = \underline{x}^k + \alpha_k \underline{p}^k, \quad (2.2.1)$$

onde \underline{x}^k é uma estimativa da solução exata $\hat{\underline{x}}$ na iteração k , $\alpha_k \underline{p}^k$ a correção desta estimativa. Nesta expressão, o vetor \underline{p}^k define a direção da correção ou direção de busca e será denominado vetor direção de busca; o escalar α_k , que determina a magnitude desta correção, minimiza ou reduz f em algum intervalo da linha que passa por \underline{x}^k com direção de \underline{p}^k entre as iterações k e $k+1$.

O emprego da fórmula de recorrência (2.2.1) apresenta dois problemas a serem resolvidos. O primeiro refere-se a escolha de \underline{p}^k e, o segundo refere-se a avaliação de f ao longo da linha $\underline{x} = \underline{x}^k + \alpha \underline{p}^k$ para $-\infty < \alpha < \infty$.

Pode-se provar (AXELSSON e BARKER³) que dentre todas as direções \underline{p} tomadas a partir de um ponto \underline{x} , aquela segundo a qual f decresce mais rapidamente nas vizinhanças de \underline{x} é dada por

$$\underline{p} = -\underline{g} \quad (2.2.2)$$

onde o vetor $\underline{g} = \underline{g}(\underline{x})$ é o gradiente de f dado em (2.1.3).

Por outro lado, o processo para determinação de α_k é denominado de "busca na linha" (*line search*). Neste, o valor de

α_k fica definido de modo a minimizar f ao longo da linha $\underline{x} = \underline{x}^k + \alpha_k \underline{p}^k$, ou seja

$$\frac{d}{d \alpha_k} [f(\underline{x}^k + \alpha_k \underline{p}^k)] = 0 \quad (2.2.3)$$

Na FIGURA 2.2.1 está representada a equação (2.2.3) para $f \in \mathbb{R}^2$.

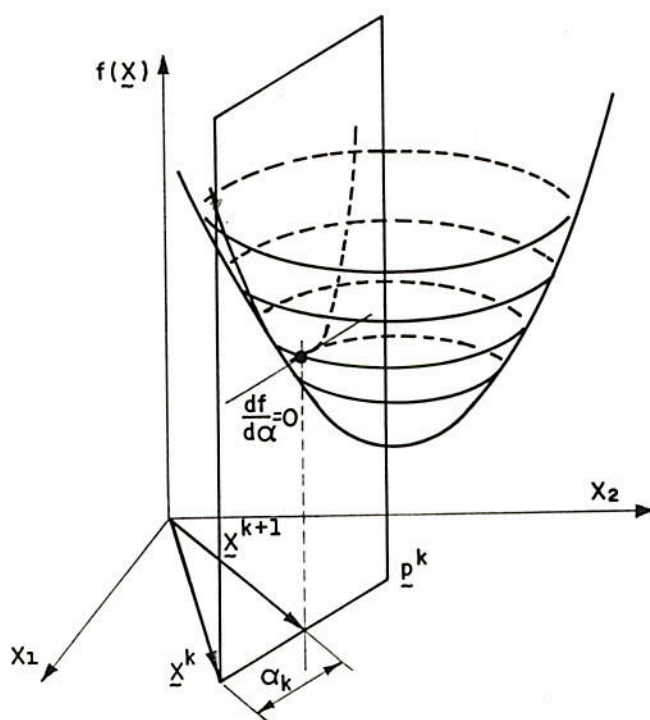


FIGURA 2.2.1 - Representação da equação (2.2.3) em \mathbb{R}^2 .

Substituindo-se \underline{x} por $\underline{x}^k + \alpha_k \underline{p}^k$ na expressão (2.1.2), obtém-se

$$f(\underline{x}^k + \alpha \underline{p}^k) = f(\underline{x}^k) + \alpha \underline{p}^T \underline{g}(\underline{x}^k) + \frac{1}{2} \alpha^2 \underline{p}^T \underline{K} \underline{p}^k. \quad (2.2.4)$$

Realizando a operação dada em (2.2.3) sobre (2.2.4) resulta

$$0 = p^T g(\underline{x}) + \alpha p^T K p, \quad (2.2.5)$$

e rearranjando seus termos, obtém-se

$$\alpha = \frac{-p^T \cdot g(\underline{x})}{p^T K p}. \quad (2.2.6)$$

Portanto, independente da escolha de p^k em (2.2.1), α_k fica dado por

$$\alpha_k = \frac{-p^{k,T} \cdot g^k(\underline{x}^k)}{p^{k,T} K p^k}. \quad (2.2.7)$$

Com base na expressão (2.2.2), a fórmula de recorrência (2.2.1) assume a forma

$$\underline{x}^{k+1} = \underline{x}^k - \alpha_k g^k(\underline{x}^k). \quad (2.2.8)$$

Esta relação junto com a estratégia de busca de linha dada em (2.2.7) define o Método de Máximo Descenso para minimização do funcional quadrático dado por (2.1.2). Assim, ficam definidas as etapas

$$g^k = K \underline{x}^k - b, \quad (2.2.9a)$$

$$\alpha_k = g^{k,T} g^k / g^{k,T} K g^k \quad (2.2.9b)$$

$$\underline{x}^{k+1} = \underline{x}^k - \alpha_k g^k \quad (2.2.9c)$$

onde $g^k = g(\underline{x}^k)$.

A k -ésima iteração de (2.2.9) é mostrada na FIGURA 2.2.2. Observa-se nesta figura que a linha que passa por \underline{x}^k e \underline{x}^{k+1} é tangente no ponto \underline{x}^{k+1} à superfície de nível elipsoidal definida por $f(\underline{x}) = f(\underline{x}^{k+1})$.

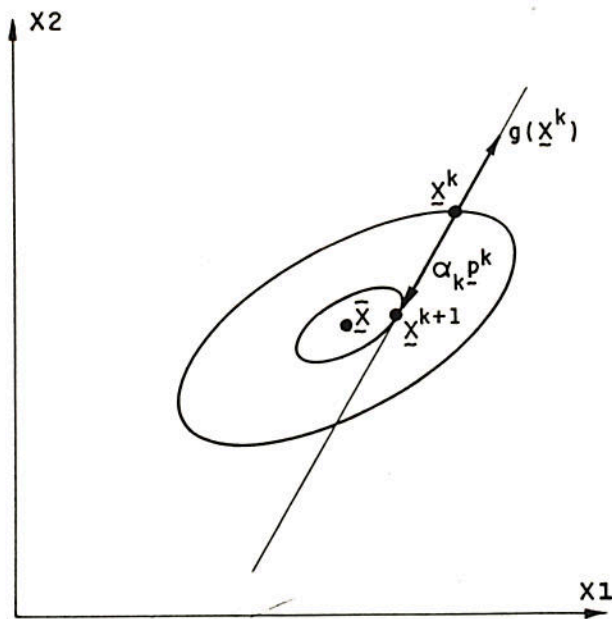


FIGURA 2.2.2 - Iteração k no Método de Máximo Descenso para minimização de f em \mathbb{R}^2

Tomando a expressão (2.2.9c) multiplicada membro a membro por \tilde{K} e subtraindo-se da equação o vetor \underline{b} , obtém-se

$$\underline{g}^{k+1} = \underline{g}^k - \alpha_k \tilde{K} \underline{g}^k \quad (2.2.10)$$

que permite o cálculo dos gradientes de forma recursiva.

As iterações podem, portanto, serem reformuladas como segue

$$\alpha_k = \underline{g}^{k,T} \underline{g}^k / \underline{g}^{k,T} \tilde{K} \underline{g}^k \quad (2.2.11a)$$

$$\underline{x}^{k+1} = \underline{x}^k - \alpha_k \underline{g}^k \quad (2.2.11b)$$

$$\underline{g}^{k+1} = \underline{g}^k - \alpha_k \tilde{K} \underline{g}^k \quad (2.2.11c)$$

onde, inicialmente $\underline{g}^0 = \tilde{K} \underline{x}^0 - \underline{b}$.

AXELSSON² demonstra que a convergência deste método descrita pela norma da energia é dada por

$$\|x^{k+1} - \hat{x}\|_K \leq \left[\frac{CC\tilde{K} - 1}{CC\tilde{K} + 1} \right]^k \|x^0 - \hat{x}\|_K \quad (2.2.12)$$

onde $\|\cdot\|_K$ representa norma da energia. O limite superior para o número de iterações k dado por

$$\rho(\varepsilon) = \frac{1}{2} CC\tilde{K} \ln(2/\varepsilon) + 1 \quad (2.2.13)$$

sendo ε a tolerância arbitrada.

Isto implicará que a convergência do método de máximo descenso seja descrita na norma da energia por

$$\|x^{k+1} - \hat{x}\|_K \leq \left[\frac{CC\tilde{K} - 1}{CC\tilde{K} + 1} \right] \|x^k - \hat{x}\|_K \quad (2.2.14)$$

Nas expressões (2.2.12) e (2.2.14), $CC\tilde{K}$ é denominado de número de condicionamento espectral da matriz \tilde{K} . Quando \tilde{K} é positiva definida e simétrica (CAREY e ODEN⁶), tem-se.

$$CC\tilde{K} = \lambda_N / \lambda_1 \quad (2.2.15)$$

onde λ_N e λ_1 são, respectivamente, o maior e o menor autovalores de \tilde{K} .

Infelizmente, a taxa de convergência deste método pode tornar-se proibitiva caso $CC\tilde{K}$ seja elevado, o que caracteriza \tilde{K} como sendo uma matriz mal condicionada.

2.3 O Método dos Gradientes Conjugados

Este método também permite a minimização de um funcional quadrático, mas ao contrário do Método de Máximo Descenso, produz a minimização após um número de iterações que é sempre menor ou igual a N , onde N é a ordem da matriz \tilde{K} . Esta propriedade, embora desejável, não é particularmente relevante quando N é muito grande, porque ela não se verifica na ausência de aritmética exata, inerente a qualquer ambiente computacional conhecido.

Aqui se admite que o vetor direção de busca é definido

por uma iteração do tipo

$$p^{k+1} = -g^{k+1} + \beta_k p^k \quad (2.3.1)$$

com $p^0 = -g^0$. Pode-se observar que se obtém o Método de Máximo Descenso fazendo $\beta_k = 0$. Por outro lado, a nova direção de busca fica determinada no plano gerado pelo gradiente no ponto x^{k+1} e a direção de busca prévia.

A escolha de β_k é feita de modo a assegurar que os vetores p^k sejam mutuamente ortogonais (ou conjugados) em relação à matriz K , de forma que é possível escrever

$$p^{i,T} K p^j = 0 \quad \text{para todo } i \neq j. \quad (2.3.2)$$

Tomando-se a transposta de (2.3.1) e pós-multiplicando membro a membro por $K p^k$, tem-se

$$p^{k+1,T} K p^k = -g^{k+1,T} K p^k + \beta_k p^{k,T} K p^k = 0, \quad (2.3.3)$$

do que resulta

$$\beta_k = \frac{g^{k+1,T} K p^k}{p^{k,T} K p^k} \quad (2.3.4)$$

É possível demonstrar também (GOLUB e VAN LOAN¹⁶) que a condição (2.3.2) conduz a outra relação de ortogonalidade dada por

$$g^{i,T} \cdot g^j = 0 \quad \text{para todo } i \neq j. \quad (2.3.5)$$

O processo iterativo dado pelas expressões (2.2.1), (2.3.1) e (2.3.4) é denominado de Método dos Gradientes Conjugados.

Existem expressões alternativas para os parâmetros β_k e α_k . Dentre estas, pode-se obter β_k a partir de (2.2.11c) reescrevendo-a na forma

$$g^{k+1} = g^k + \alpha_k \tilde{K} p^k, \quad (2.3.6)$$

da qual pode-se obter

$$\tilde{K} p^k = \frac{1}{\alpha_k} (g^{k+1} - g^k). \quad (2.3.7)$$

Levando este valor de $\tilde{K} p^k$ à expressão (2.3.4) e considerando a relação de ortogonalidade (2.3.5), obtém-se

$$\beta_k = \frac{g^{k+1, T} \cdot g^{k+1}}{g^{k, T} \cdot g^k}. \quad (2.3.8)$$

Pode-se observar que nesta expressão não consta a matriz \tilde{K} , o que é bastante favorável sob o ponto de vista computacional.

Expandindo a expressão de p^k dada por (2.3.1), tem-se

$$\begin{aligned} p^{k+1} &= -g^{k+1} + \beta_k p^k = -g^{k+1} + \beta_k (-g^k + \beta_{k-1} p^{k-1}) = \\ &= -g^{k+1} - \beta_k g^k + \beta_k \beta_{k-1} p^{k-1} = \dots \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

Multiplicando membro a membro esta expansão por g^{k+1} e considerando a relação de ortogonalidade (2.3.5), resulta

$$p^{k+1, T} g^{k+1} = -g^{k+1, T} g^{k+1}. \quad (2.3.10)$$

Usando este resultado na expressão (2.2.7), tem-se

$$\alpha_k = g^{k, T} g^k / p^{k, T} \tilde{K} p^k. \quad (2.3.11)$$

Em REID⁴², várias versões do MGC com diferentes expressões para α_k e β_k foram comparadas em relação ao esforço computacional, taxa de convergência e requisitos de armazenamento, e os resultados favoreceram a escolha de (2.3.8) e (2.3.11). Tal escolha coincide com o trabalho original de HESTENES e STIEFEL²¹ e, foi adotada neste trabalho.

2.4 Algoritmo Básico para o Método dos Gradientes Conjugados

Se for definido um vetor \tilde{r} , denominado de vetor resíduo, dado por

$$\tilde{r} = -g = b - K \tilde{x}, \quad (2.4.1)$$

é possível formalizar o MGC através da sequência de operações dadas no algoritmo mostrado no quadro da FIGURA 2.4.1. Para tanto, tomou-se as expressões (2.2.1), (2.3.1), (2.3.6), (2.3.8) e (2.3.11) e substituiu-se o vetor gradiente g pelo vetor resíduo definido acima em (2.4.1).

1. INICIALIZAÇÃO :

$$(a) \quad k = 0; \quad \tilde{x} = 0; \quad p^0 = \tilde{r}^0 = b \quad (2.4.2)$$

2. ATUALIZAÇÃO DOS VETORES ESTIMATIVA E RESÍDUO :

$$(b) \quad \alpha_k = (\tilde{r}^{k,T} \cdot \tilde{r}^k) / (p^{k,T} \cdot K p^k), \quad (2.4.3)$$

$$(c) \quad \tilde{x}^{k+1} = \tilde{x}^k + \alpha_k p^k, \quad (2.4.4)$$

$$(d) \quad \tilde{r}^{k+1} = \tilde{r}^k - \alpha_k K p^k. \quad (2.4.5)$$

3. TESTE DA CONVERGÊNCIA :

$$(e) \quad \text{Se } \|\tilde{r}^{k+1}\|_2 / \|\tilde{r}^0\|_2 \leq \text{tolerância, pare.} \quad (2.4.6)$$

4. ATUALIZAÇÃO DO VETOR DIREÇÃO DE BUSCA :

$$(f) \quad \beta_k = (\tilde{r}^{k+1,T} \cdot \tilde{r}^{k+1}) / (\tilde{r}^{k,T} \cdot \tilde{r}^k), \quad (2.4.7)$$

$$(g) \quad p^{k+1} = \tilde{r}^{k+1} + \beta_k p^k, \quad (2.4.8)$$

$$(h) \quad k = k + 1, \quad (2.4.9)$$

(i) retorna a etapa (b).

FIGURA 2.4.1 - Algoritmo Básico do Método dos Gradientes Conjugados.

Para este algoritmo, os requisitos de armazenamento incluem quatro arranjos unidimensionais para os vetores \underline{r} , \underline{x} , \underline{p} e $\underline{\chi}$, sendo neste último armazenado, a cada iteração, o produto matriz-vetor $\underline{K} \underline{p}$. O requisito para armazenamento de \underline{K} dependerá da formulação adotada e será abordado no capítulo 4 relativo a formulação elemento-por-elemento.

O custo computacional por iteração é dispendido na maior parte no produto matriz-vetor $\underline{K} \underline{p}$. Além disso, há três produtos vetor-vetor e três operações recursivas que requerem $3N$ multiplicações e $3N$ somas.

O critério de terminação das iterações ou de convergência adotado foi da norma euclidiana relativa do vetor resíduo dada na expressão (2.4.6). Existem outras possibilidades de escolha como está escrito em JENNINGS³¹.

2.5 Taxa de Convergência do Método dos Gradientes Conjugados

A análise da convergência do MGC foi objeto de estudo de vários pesquisadores, dentre eles, os trabalhos mais importantes são devidos a STEWART⁴⁵, AXELSSON², JENNINGS³⁰, GREENBAUM¹⁷ e VAN DER SLUIS et al⁴⁷.

Nestes trabalhos foi demonstrado que a convergência deste método é descrita segundo a norma da energia por uma expressão idêntica a (2.2.12) onde o limite superior para o número de iterações k para uma tolerância arbitrada ε é dada por

$$\rho(\varepsilon) = 1/2 [\text{CC}(\underline{K})]^{-1/2} \ln (2/\varepsilon) + 1, \quad (2.5.1)$$

onde $\text{CC}(\underline{K})$ é o número de condicionamento espectral da matriz \underline{K} como expresso em (2.2.15). Caso $\text{CC}(\underline{K})$ seja elevado, então este limite é muito menor do que o correspondente limite para o Método de Máximo Descenso. Por exemplo, se $\text{CC}(\underline{K}) = 10^4$ e $\varepsilon = 10^{-3}$, então $\rho(\varepsilon)=381$ para o MGC, enquanto $\rho(\varepsilon)=38005$ para o Método de Máximo Descenso.

Além disso, o MGC tem a propriedade de terminação finita, ou seja,

$$\tilde{x}^m = \hat{x}, \quad (2.5.2)$$

para algum $m \leq N$, onde N é a ordem de \tilde{K} , e \hat{x} a solução exata de (2.1.1). O valor de m não excede, e é normalmente igual ao número de autovalores distintos de \tilde{K} (AXELSSON²). Na prática, esta propriedade não é verificada tendo em vista os erros de truncamento impostos pelo computador que impedem a obtenção exata de \hat{x} e assim as iterações podem continuar até $m > N$.

O cálculo do número de condicionamento $C(\tilde{K})$ demanda esforço computacional elevado. Neste trabalho, se admite que os problemas tratados geram matrizes diagonais dominantes. Tendo por base o teorema de Gerschgorin (FRIED¹⁵) pode-se, em lugar de calcular o número de condicionamento espectral, estimar o condicionamento das matrizes dos exemplos resolvidos pela razão D_{\max} / D_{\min} , onde D_{\max} e D_{\min} são, respectivamente, o maior e o menor termos da diagonal de \tilde{K} , como foi sugerido e empregado por COUTINHO et al⁷.

3. - A TÉCNICA DE PRECONDICIONAMENTO

3.1 - Preliminares

No caso da análise estrutural, os valores do número de condicionamento espectral para as matrizes geradas pela discretização podem atingir valores extremamente elevados. Tal fato implica em um número de iterações maior do que N para ser atingida uma dada redução do resíduo, quando se utiliza aritmética de ponto flutuante com número limitado de dígitos.

A idéia central desta técnica consiste na aplicação do MGC a um sistema transformado de equações obtido pela pré-multiplicação da equação (2.1.1) por uma matriz \tilde{P} na forma

$$\tilde{P}^{-1} \tilde{K} \tilde{x} = \tilde{P}^{-1} \tilde{b}, \quad (3.1.1)$$

onde \tilde{P} é uma matriz simétrica positivo definida, denominada de matriz de condicionamento. O sistema (3.1.1) é chamado de sistema condicionado.

Esta transformação tem por objetivo tornar o número de condicionamento espectral do sistema condicionado, $\kappa(\tilde{P}^{-1}\tilde{K})$, bem menor do que $\kappa(\tilde{K})$, relativo ao sistema original. Isto conduzirá a uma drástica aceleração da taxa de convergência tendo em vista o estabelecido na expressão (2.5.1).

Observa-se que se $\tilde{P} = \tilde{K}$, então

$$\kappa(\tilde{P}^{-1}\tilde{K}) = 1, \quad (3.1.2)$$

e do condicionamento resultará apenas uma iteração, visto que a matriz condicionada será igual a matriz identidade, e a solução será dada por $\tilde{x} = \tilde{K}^{-1} \tilde{b}$. Entretanto, isto não é sensato

visto que todo esforço computacional seria dispendido na obtenção de \tilde{K}^{-1} transformando o método num procedimento direto de solução.

De outra parte, se

$$\tilde{P} = \tilde{I}, \quad (3.1.3)$$

sendo \tilde{I} a matriz identidade, ter-se-ia ausência de condicionamento, com $C(\tilde{P}^{-1}\tilde{K}) = C(\tilde{K})$.

Desta forma, a matriz de condicionamento \tilde{P} deverá ser uma aproximação simétrica positiva definida de \tilde{K} , escolhida entre a matriz identidade \tilde{I} e a própria matriz \tilde{K} .

Definindo a matriz de condicionamento em função de seus fatores de Cholesky por

$$\tilde{P} = \tilde{Q} \tilde{Q}^T, \quad (3.1.4)$$

pode-se reescrever o sistema condicionado (3.1.1) como segue

$$\tilde{Q}^{-1} \tilde{K} \tilde{Q}^{-T} \tilde{Q}^T \tilde{x} = \tilde{Q}^{-1} \tilde{b}, \quad (3.1.5)$$

ou

$$\tilde{H} \tilde{\chi} = \tilde{d}, \quad (3.1.6)$$

onde

$$\tilde{H} = \tilde{Q}^{-1} \tilde{K} \tilde{Q}^{-T}, \quad (3.1.7)$$

$$\tilde{\chi} = \tilde{Q}^T \tilde{x}, \quad (3.1.8)$$

$$\tilde{d} = \tilde{Q}^{-1} \tilde{b}, \quad (3.1.9)$$

sendo a matriz \tilde{H} positiva definida, pois $\tilde{\chi}^T \tilde{H} \tilde{\chi} = \tilde{x}^T \tilde{K} \tilde{x}$, visto que $\tilde{x}^T \tilde{K} \tilde{x} > 0$ para todo $\tilde{x} \neq \tilde{0}$ em \mathbb{R}^N .

A solução do sistema (3.1.6) estará associada a outro funcional quadrático ligado ao dado em (2.1.2) através da

expressão

$$f(\underline{\chi}) = f(\underline{Q}^T \underline{x}) = \frac{1}{2} \underline{\chi}^T \underline{H} \underline{\chi} - \underline{d}^T \underline{\chi} + c, \quad (3.1.10)$$

com \underline{H} , $\underline{\chi}$ e \underline{d} dados em (3.1.7) a (3.1.9), e sua minimização implicará na solução de (2.1.1)

3.2 - Algoritmo Básico para o Método dos Gradientes Conjugados Precondicionado

Para ser estabelecido um algoritmo básico para o Método dos Gradientes Conjugados Precondicionado (MGCP) é necessário aplicar as operações definidas de (2.4.2) a (2.4.9) na solução do sistema (3.1.6). Fazendo-se isto, tem-se

$$(a) \quad k = 0, \quad \underline{\chi}^0 = \underline{0}, \quad \underline{\tilde{r}}^0 = \underline{d}, \quad \underline{\tilde{p}}^0 = \underline{\tilde{r}}^0; \quad (3.2.1)$$

$$(b) \quad \alpha_k = (\underline{\tilde{r}}^{k,T} \underline{\tilde{r}}^k) / (\underline{\tilde{p}}^{k,T} \underline{H} \underline{\tilde{p}}^k); \quad (3.2.2)$$

$$(c) \quad \underline{\chi}^{k+1} = \underline{\chi}^k + \alpha_k \underline{\tilde{p}}^k; \quad (3.2.3)$$

$$(d) \quad \underline{\tilde{r}}^{k+1} = \underline{\tilde{r}}^k - \alpha_k \underline{H} \underline{\tilde{p}}^k; \quad (3.2.4)$$

$$(e) \quad \text{Se } \|\underline{\tilde{r}}^{k+1}\|_2 / \|\underline{\tilde{r}}^0\|_2 \leq \text{tolerância, pare.} \quad (3.2.5)$$

$$(f) \quad \beta_k = (\underline{\tilde{r}}^{k+1,T} \underline{\tilde{r}}^{k+1}) / (\underline{\tilde{r}}^{k,T} \underline{\tilde{r}}^k); \quad (3.2.6)$$

$$(g) \quad \underline{\tilde{p}}^{k+1} = \underline{\tilde{r}}^{k+1} + \beta_k \underline{\tilde{p}}^k; \quad (3.2.7)$$

$$(h) \quad k = k + 1; \quad (3.2.8)$$

$$(i) \quad \text{Retornar a etapa (b).} \quad (3.2.9)$$

Nas equações acima $\underline{\tilde{r}}$ é o vetor resíduo nas coordenadas transformadas, isto é,

$$\tilde{r} = d - H \chi, \quad (3.2.10)$$

e \tilde{p} o vetor direção de busca correspondente.

Desta forma, obtida a aproximação χ^m na iteração $k=m$, pode-se obter o correspondente \tilde{x}^m através da equação

$$\tilde{x}^m = Q^{-T} \chi^m. \quad (3.2.11)$$

Por outro lado, são válidas as seguintes relações

$$\tilde{r}^k = Q^{-1} r^k, \quad (3.2.12)$$

$$\chi^k = Q^T \tilde{x}^k, \quad (3.2.13)$$

$$\tilde{p}^k = Q^T p^k, \quad (3.2.14)$$

e substituindo-as nas operações definidas de (3.2.1) a (3.2.9), e considerando-se a transformação dada por (3.1.7), obtém-se

$$(a) \quad k = 0; \quad Q^T \tilde{x}^0 = \tilde{0}; \quad Q^{-1} r^0 = Q^{-1} b; \quad Q^T p^0 = Q^{-1} r^0; \quad (3.2.15)$$

$$(b) \quad \alpha_k = (r^k, {}^T Q^{-T}) \cdot (Q^{-1} r^k) / (Q^T p^k, {}^T (Q^{-1} Q Q^{-T}) (Q^T p^k)); \quad (3.2.16)$$

$$(c) \quad Q^T \tilde{x}^{k+1} = Q^T \tilde{x}^k + \alpha_k Q^T p^k; \quad (3.2.17)$$

$$(d) \quad Q^{-1} r^{k+1} = Q^{-1} r^k - \alpha_k (Q^{-1} Q Q^{-T}) Q^T p^k; \quad (3.2.18)$$

$$(e) \quad \text{Se } \|Q^{-1} r^{k+1}\|_2 / \|Q^{-1} r^0\|_2 \leq \text{tolerância, pare.} \quad (3.2.19)$$

$$(f) \quad \beta_k = (r^{k+1}, {}^T Q^{-T}) (Q^{-1} r^{k+1}) / (r^k, {}^T Q^{-T}) (Q^{-1} r^k); \quad (3.2.20)$$

$$(g) \quad Q^T p^{k+1} = Q^{-1} r^{k+1} + \beta_k Q^T p^k; \quad (3.2.21)$$

$$(h) \quad k = k + 1; \quad (3.2.22)$$

$$(i) \quad \text{Retorna a etapa (b).} \quad (3.2.23)$$

Fazendo as simplificações possíveis e considerando que

$$\underline{Q}^{-T} \underline{Q}^{-1} = (\underline{Q} \underline{Q}^T)^{-1} = \underline{P}^{-1} \quad (3.2.24)$$

e definindo um vetor auxiliar \underline{z} na forma

$$\underline{z} = \underline{P}^{-1} \underline{r}, \quad (3.2.25)$$

então o algoritmo do MGCP fica dado pelas operações estabelecidas no algoritmo apresentado no quadro da FIGURA 3.2.1.

1. INICIALIZAÇÃO :

$$(a) \quad k = 0, \quad \underline{x}^0 = \underline{0}, \quad \underline{r}^0 = \underline{b}, \quad (3.2.26)$$

$$(b) \quad \text{resolver } \underline{P} \underline{z}^0 = \underline{r}^0, \quad (3.2.27)$$

$$(c) \quad \underline{p}^0 = \underline{z}^0. \quad (3.2.28)$$

2. ATUALIZAÇÃO DOS VETORES ESTIMATIVA E RESÍDUO :

$$(d) \quad \alpha_k = (\underline{r}^{k,T} \cdot \underline{z}^k) / (\underline{p}^{k,T} \underline{K} \underline{p}^k), \quad (3.2.29)$$

$$(e) \quad \underline{x}^{k+1} = \underline{x}^k + \alpha_k \underline{p}^k, \quad (3.2.30)$$

$$(f) \quad \underline{r}^{k+1} = \underline{r}^k - \alpha_k \underline{K} \underline{p}^k. \quad (3.2.31)$$

3. TESTE DA CONVERGÊNCIA :

$$(g) \quad \text{Se } \|\underline{r}^{k+1}\|_2 / \|\underline{r}^0\|_2 \leq \text{tolerância, pare.} \quad (3.2.32)$$

4. ATUALIZAÇÃO DO VETOR DIREÇÃO DE BUSCA :

$$(h) \quad \text{resolver } \underline{P} \underline{z}^{k+1} = \underline{r}^{k+1} \quad (3.2.33)$$

$$(i) \quad \beta_k = (\underline{r}^{k+1,T} \cdot \underline{z}^{k+1}) / (\underline{r}^{k,T} \cdot \underline{z}^k), \quad (3.2.34)$$

$$(j) \quad \underline{p}^{k+1} = \underline{z}^{k+1} + \beta_k \underline{p}^k, \quad (3.2.35)$$

$$(k) \quad k = k + 1, \quad (3.2.36)$$

(l) retorna a etapa (b).

FIGURA 3.2.1 - Algoritmo Básico para o Método dos Gradientes Conjugados Precondicionado.

Para este algoritmo, os requisitos de armazenamento são os requeridos para o algoritmo do MGC, descritos na seção 2.4, acrescidos da necessidade de um quinto arranjo unidimensional para o armazenamento do vetor \underline{z} . Por outro lado, além da matriz \underline{K} , é necessário o armazenamento da matriz de condicionamento \underline{P} independentemente da formulação adotada.

O custo computacional deste algoritmo em relação ao do MGC envolve uma etapa de construção da matriz \underline{P} . Além disso, a cada iteração torna-se necessário a solução do sistema auxiliar $\underline{P} \underline{z} = \underline{r}$. Desta forma, a escolha de \underline{P} deve ser computacionalmente simples e a solução deste sistema auxiliar deve ser evidentemente muito mais eficiente do que a solução de (2.1.1).

4. - FORMULAÇÃO ELEMENTO-POR-ELEMENTO E PRECONDICIONADORES EMPREGADOS

4.1 - Preliminares

Pode-se observar nos algoritmos para o MGC e MGCP apresentados nas FIGURAS 2.4.1 e 3.2.1 que duas operações têm relevância destacada sobre as demais.

A primeira trata do produto matriz-vetor $\underline{K} \underline{p}$ realizado a cada iteração tanto no caso do MGC como no MGCP.

A segunda ocorre a cada iteração do MGCP e refere-se a solução do sistema auxiliar $\underline{P} \underline{z} = \underline{r}$, estando íntimamente ligada a escolha feita para a matriz de condicionamento \underline{P} .

Do ponto de vista computacional, estas duas operações se destacam pelo número de operações que realizam e pela eficiência a ser buscada para estas operações. Por outro lado, também tem relevância sobre as demais porque nestas duas operações estão envolvidas duas matrizes, \underline{K} e \underline{P} . A forma escolhida para a construção destas matrizes definirá se a formulação do método será *global* ou *elemento-por-elemento*.

4.2 - Produto matriz-vetor $\underline{K} \underline{p}$

Numa formulação global, este produto é realizado sobre a matriz global \underline{K} . Neste caso, deve-se considerar apenas os termos não nulos visando minimizar a área de armazenamento requerida. Além disso, devido a inerente esparsidade da matriz \underline{K} , faz-se necessário adotar uma estratégia de reordenação nodal a fim de minimizar o número de termos não nulos e criar vetores apontadores que permitam identificar as posições correspondentes a estes termos. Tal estrutura de dados com adoção de uma

estratégia de reordenação nodal é típica de um procedimento de solução por um método direto.

A natureza local das aproximações usadas no MEF fundamenta a formulação elemento-por-elemento que foi adotada neste trabalho.

Sabe-se que a matriz global \underline{K} é formada pela contribuição dos elementos que constituem a malha, na forma

$$\underline{K} = \sum_{e=1}^{NEL} \tilde{K}^e, \quad (4.2.1)$$

onde NEL representa o número de elementos finitos na malha e \tilde{K}^e correspondente à contribuição do e -ésimo elemento, é uma matriz $N \times N$ esparsa e expandida para as dimensões globais do sistema com os termos decorrentes desta expansão feitos nulos.

Na formulação elemento-por-elemento, \underline{K} não é explicitamente formada, sendo necessário armazenar apenas as matrizes de elemento \tilde{K}^e . O produto $\underline{K} p$ será calculado por

$$\chi = \underline{K} p = \sum_{e=1}^{NEL} (\tilde{K}^e p), \quad (4.2.2)$$

sendo $\chi \in \mathbb{R}^N$ um vetor de trabalho, onde é armazenado o resultado deste produto. Entretanto, apenas os termos não nulos de cada \tilde{K}^e devem ser considerados em cada multiplicação do somatório expresso por (4.2.2). Logo, estas multiplicações são realizadas a nível de elemento ao contrário da forma mostrada em (4.2.2), por

$$\chi = \underline{K} p = \sum_{e=1}^{NEL} (\tilde{K}^e p^e), \quad (4.2.3)$$

onde p^e é um vetor formado retirando-se do vetor p os termos relacionados com a matriz \tilde{K}^e (CAREY e JIANG⁵).

Normalmente, na formulação global a execução deste

produto matriz-vetor é envolvido um número menor de operações do que na formulação elemento-por-elemento, pois a contribuição de elementos vizinhos relativa a um nó comum é executada de uma única vez. Por outro lado, os requisitos de armazenamento exigidos pela formulação EPE tendem fortemente a serem menores à medida que as dimensões do problema cresce.

No emprego da formulação EPE, por não haver montagem da matriz global, torna-se desnecessário uma numeração criteriosa de elementos e nós. A ordem de entrada dos nós e dos elementos pode ser arbitrária, e a execução das operações é facilmente paralelizável se uma máquina com esta capacidade estiver disponível.

Assim, na formulação EPE empregada neste trabalho, o produto $\underline{K} \underline{p}$ é executado para cada elemento através das operações:

- identificação dos componentes do vetor global \underline{p} correspondente aos graus de liberdade do elemento,
- execução da multiplicação matriz-vetor a nível de elemento armazenando o resultado no vetor de trabalho $\underline{\chi}$.

Realizado este produto e obtido o vetor $\underline{\chi}$, este é empregado nas operações definidas em (2.4.3) e (2.4.5) para o MGC, e (3.2.29) 3 (3.2.31) para o MGCP.

Cabe salientar, que o emprego de uma formulação EPE implica que as condições de contorno do problema sejam aplicadas sobre as matrizes dos elementos ao contrário do normalmente feito em um método direto ou iterativo de solução trabalhando com a matriz global.

4.3 - Descrição dos Precondicionadores Empregados

No caso do MGCP, além da definição pela montagem ou não da matriz \underline{K} , o tipo de formulação é dependente da escolha e do processo de construção da matriz de condicionamento \underline{P} , tendo em vista a necessidade de solução do sistema auxiliar $\underline{P} \underline{z} = \underline{r}$ que aparece nas etapas (b) e (h) do seu algoritmo

apresentado na FIGURA 3.2.1.

Neste trabalho foram estudados quatro preconditionadores. O primeiro denominado de Diagonal ou de Jacobi leva a uma matriz \tilde{P} diagonal. Os outros três preconditionadores são construídos a partir da fatoração das matrizes dos elementos, e são denominados preconditionadores EPE (HUGHES e FERRENCZ²⁴).

4.3.1 - Precondicionador Diagonal (ou de Jacobi)

Neste caso, sugerido por FRIED¹⁴, define-se a matriz de condicionamento como

$$\tilde{P} = \text{diag}(\tilde{K}) = \tilde{D} = \tilde{D}^{1/2} \tilde{D}^{1/2}, \quad (4.3.1.1)$$

isto é, constituída pelos termos da diagonal de \tilde{K} .

Este preconditionador é especialmente favorável naqueles casos em que as variáveis de estado são dimensionalmente bastante diferentes. Além disso, seu requisito de armazenamento é bem menor do que o exigido pela maioria dos preconditionadores, haja visto que os termos não diagonais de \tilde{P} são nulos.

No presente trabalho, a implementação computacional foi realizada na forma dada em (3.1.5), ou seja,

$$\tilde{D}^{-1/2} \tilde{K} \tilde{D}^{-1/2} \tilde{D}^{1/2} \tilde{x} = \tilde{D}^{-1/2} \tilde{b}, \quad (4.3.1.2)$$

resultando num sistema transformado conforme (3.1.6). Este sistema é então resolvido pelo MGC. Ao final das iterações o sistema original foi restabelecido por

$$\tilde{x} = \tilde{D}^{-1/2} \tilde{y}. \quad (4.3.1.3)$$

4.3.2 - Precondicionador EPE de Cholesky

Este preconditionador é definido pela expressão

$$\tilde{P} = \tilde{D}^{1/2} \times \prod_{e=1}^{NEL} \tilde{L}_p(\tilde{K}^e) \times \prod_{e=1}^{NEL} \tilde{L}_p^T(\tilde{K}^e) \times \tilde{D}^{1/2} \quad (4.3.2.1)$$

onde o símbolo \prod representa produto. Nesta expressão identificam-se

$$\tilde{K}^e = \tilde{L}_p(\tilde{K}^e) \tilde{L}_p^T(\tilde{K}^e), \quad (4.3.2.2)$$

$$\tilde{K}^e = \tilde{I} + \tilde{D}^{-1/2} (\tilde{K}^e - \tilde{D}^e) \tilde{D}^{-1/2}, \quad (4.3.2.3)$$

$$\tilde{D} = \text{diag} (\tilde{K}), \quad (4.3.2.4)$$

$$\tilde{D}^e = \text{diag} (\tilde{K}^e), \quad (4.3.2.5)$$

onde \tilde{K}^e é a matriz relativa à contribuição do e-ésimo elemento admitida que tenha sido expandida para as dimensões de \tilde{K} com os termos decorrentes desta expansão feitos nulos, $\tilde{L}_p(\cdot)$ e $\tilde{L}_p^T(\cdot)$ são os fatores triangulares inferior e superior da fatoração de Cholesky das matrizes \tilde{K}^e a qual é denominada matriz regularizada do e-ésimo elemento.

Esta regularização definida por (4.3.2.3) é conhecida como regularização de Winget, e assegura que \tilde{K}^e seja positiva definida. Este processo apresentado por HUGHES e WINGET²⁵ é mostrado na FIGURA 4.3.2.1 para um elemento com tres graus de liberdade em uma malha que apresenta seis graus de liberdade.

Na expressão (4.3.2.1) a ordem inversa dos elementos no segundo produto assegura a simetria para a matriz de condicionamento \tilde{P} .

4.3.3 - Precondicionador EPE de Crout

Aqui, a matriz de condicionamento é definida de forma análoga ao caso anterior, com a fatoração das matrizes dos elementos baseada no processo de Crout, logo

$$\tilde{P} = \tilde{D}^{1/2} \times \prod_{\sigma=1}^{NEL} L_{\tilde{P}}(\tilde{K}^{\circ}) \times \prod_{\sigma=1}^{NEL} D_{\tilde{P}}(\tilde{K}^{\circ}) \times \prod_{\sigma=NEL}^1 L_{\tilde{P}}^T(\tilde{K}^{\circ}) \times \tilde{D}^{1/2} \quad (4.3.3.1)$$

As matrizes aqui envolvidas tem o mesmo significado do caso anterior, entretanto o emprego da fatoração por Crout implica que

$$\tilde{K}^{\circ} = L(\tilde{K}^{\circ}) D(\tilde{K}^{\circ}) L^T(\tilde{K}^{\circ}). \quad (4.3.3.2)$$

$$\tilde{K}^{\circ} = \begin{bmatrix} K_{11}^{\circ} & 0 & K_{12}^{\circ} & 0 & 0 & K_{13}^{\circ} \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & K_{22}^{\circ} & 0 & 0 & K_{23}^{\circ} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & K_{33}^{\circ} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & K_{12}^{\circ} & 0 & 0 & K_{13}^{\circ} \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & K_{23}^{\circ} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\tilde{K}^{\circ} - \tilde{D}^{\circ}}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{K_{12}^{\circ}}{\sqrt{D_1 D_2}} & 0 & 0 & \frac{K_{13}^{\circ}}{\sqrt{D_1 D_3}} \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & \frac{K_{23}^{\circ}}{\sqrt{D_2 D_3}} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{K_{12}^{\circ}}{D_1} & 0 & 0 & \frac{K_{13}^{\circ}}{D_1} \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & \frac{K_{23}^{\circ}}{D_2} \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} = \bar{K}^{\circ}$$

$$\boxed{D^{-1/2} (\tilde{K}^{\circ} - \tilde{D}^{\circ}) D^{-1/2}}$$

$$\boxed{\bar{K}^{\circ} = I + D^{-1/2} (\tilde{K}^{\circ} - \tilde{D}^{\circ}) D^{-1/2}}$$

$$\boxed{D^{\circ} = \text{diag}(\tilde{K}^{\circ}) \quad D = \text{diag}(K)}$$

FIGURA 4.3.2.1 - Regularização de Winget

4.3.4 - Precondicionador EPE de Gauss-Seidel Simetrizado

Neste preconditionador, ao contrário dos EPE Cholesky

e EPE Crout, a fatoração está baseada na decomposição por soma como apresentou NOUR-OMID⁴⁰, e a matriz de condicionamento tem a forma

$$\tilde{P} = \tilde{D}^{1/2} \times \prod_{e=1}^{NEL} [\tilde{I} + \tilde{L}_{\tilde{S}}(\tilde{K}^e)] \times \prod_{e=NEL}^1 [\tilde{I} + \tilde{L}_{\tilde{S}}^T(\tilde{K}^e)] \times \tilde{D}^{1/2} \quad (4.3.4.1)$$

Aqui, as matrizes envolvidas também tem significado idêntico aos dois condicionadores EPE anteriores. As matrizes $\tilde{L}_{\tilde{S}}(\cdot)$ e $\tilde{L}_{\tilde{S}}^T(\cdot)$ correspondem a decomposição por soma da matriz regularizada dos elementos segundo

$$\tilde{K}^e = \tilde{I} + \tilde{L}_{\tilde{S}}(\tilde{K}^e) + \tilde{L}_{\tilde{S}}^T(\tilde{K}^e). \quad (4.3.4.2)$$

Na proposta original deste condicionador, devido a NOUR-OMID⁴⁰ não era empregada a regularização de Winget aqui introduzida.

4.4 Solução do Sistema $\tilde{P} \tilde{z} = \tilde{r}$

Nos três algoritmos do MGCP relativos aos condicionadores EPE, é necessário a cada iteração resolver o sistema auxiliar $\tilde{P} \tilde{z} = \tilde{r}$.

A solução deste sistema deve, evidentemente, ser bastante mais eficiente sob o ponto de vista computacional, do que a solução do próprio sistema de equações, caso contrário a solução iterativa fica inviabilizada.

Para ilustrar as operações envolvidas no procedimento adotado, admite-se como exemplo uma malha com apenas dois elementos pois a generalização para um número maior é imediata. Utilizando-se o condicionador EPE de Cholesky, a matriz de condicionamento baseada na expressão (4.3.2.1) seria neste caso dada por

$$\tilde{P} = \tilde{D}^{1/2} (\tilde{L}_{\tilde{1}\tilde{2}} \tilde{L}_{\tilde{2}\tilde{1}}^T) \tilde{D}^{1/2}, \quad (4.4.1)$$

onde $\tilde{L}_{\tilde{1}}$, $\tilde{L}_{\tilde{2}}$, $\tilde{L}_{\tilde{1}}^T$ e $\tilde{L}_{\tilde{2}}^T$ são os fatores decorrentes da fatoração por

Cholesky das matrizes regularizadas dos elementos 1 e 2, e \underline{D} é a matriz diagonal global desta malha de dois elementos.

Logo, a cada iteração são realizadas as seguintes operações para solução do sistema auxiliar

$$\underline{D}^{1/2} \underline{L}_{\tilde{1}\tilde{2}} \underline{L}_{\tilde{2}\tilde{1}}^T \underline{D}^{1/2} \underline{z} = \underline{r}, \quad (4.4.2)$$

$$\underline{L}_{\tilde{1}\tilde{2}} \underline{L}_{\tilde{2}\tilde{1}}^T \underline{D}^{1/2} \underline{z} = \underline{D}^{-1/2} \underline{r} = \underline{u}_1, \quad (4.4.3)$$

$$\underline{L}_{\tilde{2}} \underline{L}_{\tilde{2}\tilde{1}}^T \underline{D}^{1/2} \underline{z} = \underline{L}_{\tilde{1}}^{-1} \underline{u}_1 = \underline{u}_2, \quad (4.4.4)$$

$$\underline{L}_{\tilde{2}\tilde{1}}^T \underline{D}^{1/2} \underline{z} = \underline{L}_{\tilde{2}}^{-1} \underline{u}_2 = \underline{u}_3, \quad (4.4.5)$$

$$\underline{L}_{\tilde{1}}^T \underline{D}^{1/2} \underline{z} = \underline{L}_{\tilde{2}}^{-T} \underline{u}_3 = \underline{u}_4, \quad (4.4.6)$$

$$\underline{D}^{1/2} \underline{z} = \underline{L}_{\tilde{1}}^{-T} \underline{u}_4 = \underline{u}_5, \quad (4.4.7)$$

$$\underline{z} = \underline{D}^{-1/2} \underline{u}_5. \quad (4.4.8)$$

Tres tipos de operações são realizadas, escalonamento diagonal, (4.4.3) e (4.4.8), retrosubstituições, (4.4.6) e (4.4.7), e substituições à frente, (4.4.4) e (4.4.5).

Assim, as matrizes dos elementos são formadas, regularizadas e fatoradas por Cholesky a nível local. A seguir, a solução do sistema auxiliar é efetuada a nível de elemento para as matrizes de elemento $\underline{L}_{\tilde{i}}$ e $\underline{L}_{\tilde{q}i}^T$ que constituem o preconditionador.

5. - ASPECTOS DA IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

5.1 - Preliminares

Neste trabalho foram implementadas cinco rotinas para solução iterativa pelo MGC.

A primeira refere-se ao MGC sem condicionamento conforme algoritmo mostrado na FIGURA 2.4.1. Foi utilizada uma formulação EPE, na qual não há montagem da matriz de rigidez global do sistema \underline{K} , conforme descrito na seção 4.2.

As outras quatro rotinas referem-se ao MGCP para os condicionadores descritos na seção 4.3. Em todas estas rotinas empregou-se também a formulação EPE para o produto matriz-vetor $\underline{K} \underline{p}$.

No caso do condicionador Diagonal, as matrizes dos elementos são condicionadas por escalonamento diagonal como descrito na seção 4.3.1 e, o sistema assim condicionado foi resolvido pelo algoritmo do MGC.

Para os outros três condicionadores, as rotinas seguem as etapas definidas pelo algoritmo do MGCP apresentado na FIGURA 3.2.1.

Todo trabalho computacional foi elaborado na linguagem FORTRAN, empregando-se o compilador SUN-FORTRAN 1.3 compatível com o padrão FORTRAN 77. Foi utilizada uma estação de trabalho SUN-SPARCstation 1+, sob o sistema operacional SunOS4.1 compatível com o padrão UNIX. Esta máquina dispunha de uma memória central de 40 Mb e memória virtual de 87 Mb, munida de um coprocessador aritmético Weitek 3167, clock de 25 MHz.

A seguir são descritos os aspectos computacionais de maior relevância.

5.2 Produto matriz-vetor K_p

Na implementação da formulação EPE para este produto, foi necessária a criação de uma estrutura de dados que permitisse um mapeamento do nível local para o global. Foi empregado um vetor apontador, denominado $INDEX(NEL \times NGDLE)$, onde NEL é o número de elementos na malha e $NGDLE$ é o número de graus de liberdade por elemento. Este vetor foi montado segundo a ordem sequencial da numeração dos elementos e preenchido com seus respectivos graus de liberdade nodais. Na FIGURA 5.2.1 é mostrado, para uma malha com três elementos triangulares lineares com uma incógnita por nó, as correspondentes entradas no vetor $INDEX$.

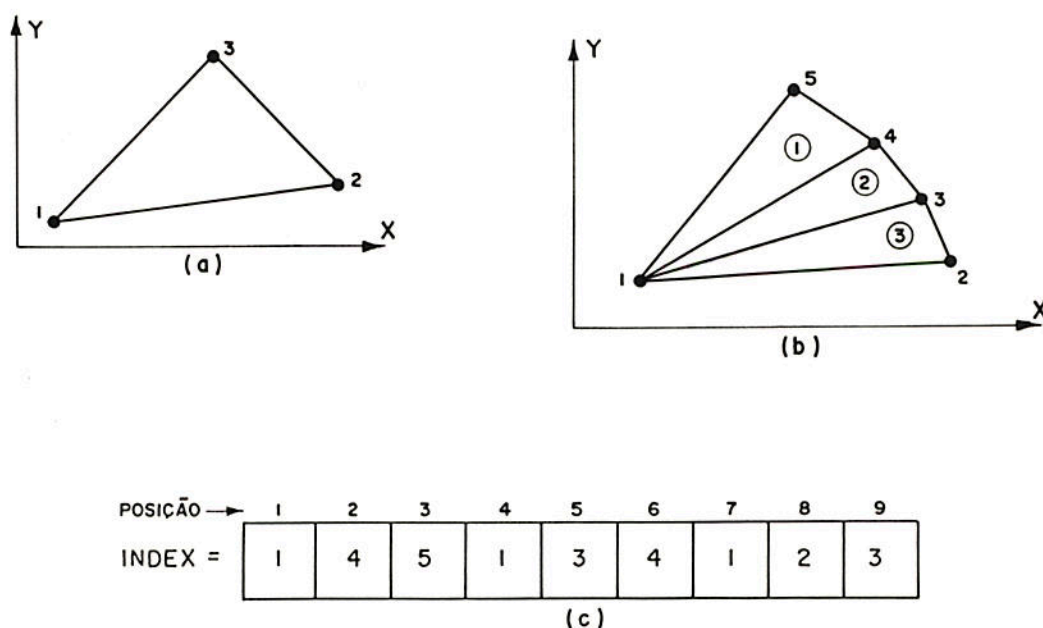


FIGURA 5.2.1 - Vetor $INDEX$. (a) Elemento triangular, (b) Malha com três elementos, (c) Preenchimento do correspondente vetor $INDEX$.

A execução do produto K_p se dá em um laço sobre todos os elementos da malha. O resultado a cada iteração é armazenado cumulativamente em um arranjo unidimensional denominado $VTYCNGDLM$. Para o vetor direção de busca p é utilizado outro arranjo unidimensional denominado $VTPCNGDLM$, onde $NGDLM$ é o número de graus de liberdade da malha. Na FIGURA

5.2.2 é mostrado a parcela do produto $\underline{K} \underline{p}$ correspondente ao elemento 2 da malha mostrada na FIGURA 5.2.1.

Por outro lado, as matrizes dos elementos \underline{K}^e são armazenadas sequencialmente segundo a numeração externa dos elementos na malha.

$$\begin{bmatrix} \text{VTY(INDEX(4))} \\ \text{VTY(INDEX(5))} \\ \text{VTY(INDEX(6))} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{VTY(INDEX(4))} \\ \text{VTY(INDEX(5))} \\ \text{VTY(INDEX(6))} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{RTC(10)} & \text{RTC(11)} & \text{RTC(12)} \\ \text{RTC(11)} & \text{RTC(13)} & \text{RTC(14)} \\ \text{RTC(12)} & \text{RTC(14)} & \text{RTC(15)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{VTP(INDEX(4))} \\ \text{VTP(INDEX(5))} \\ \text{VTP(INDEX(6))} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\gamma} = \underline{\gamma} + \underline{K}^2 \underline{p}^2$$

FIGURA 5.2.2 - Parcela do produto $\underline{K} \underline{p}$ relativa ao elemento 2 da malha mostrada na FIGURA 5.2.1.

É empregado um arranjo unidimensional denominado RT, armazenando-se apenas a porção triangular superior de cada matriz de elemento devido a sua simetria. O número de posições ocupadas pelos termos do triângulo superior de cada matriz de elemento é dado por $(\text{NGDLE}) \times (\text{NGDLE} + 1) / 2$.

Na FIGURA 5.2.3 é mostrado o preenchimento do arranjo RT para o caso da malha da FIGURA 5.2.1.

$$\underline{K}^1 = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 \\ & K_{22}^1 & K_{23}^1 \\ & & K_{33}^1 \end{bmatrix} \quad \underline{K}^2 = \begin{bmatrix} K_{11}^2 & K_{12}^2 & K_{13}^2 \\ & K_{22}^2 & K_{23}^2 \\ & & K_{33}^2 \end{bmatrix} \quad \underline{K}^3 = \begin{bmatrix} K_{11}^3 & K_{12}^3 & K_{13}^3 \\ & K_{22}^3 & K_{23}^3 \\ & & K_{33}^3 \end{bmatrix}$$

POS = 6 POS = 6 POS = 6
NGDLE = 3 NGDLE = 3 NGDLE = 3

$$\text{RT} = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & K_{33}^1 & K_{11}^2 & K_{12}^2 & K_{13}^2 & K_{22}^2 & K_{23}^2 & K_{33}^2 & K_{11}^3 & K_{12}^3 & K_{13}^3 & K_{22}^3 & K_{23}^3 & K_{33}^3 \end{bmatrix}$$

pos → 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 } 12 13 14 15 16 17 18

FIGURA 5.2.3 - Preenchimento do arranjo RT para a malha da FIGURA 5.2.1.

5.3 - Construção dos Precondicionadores EPE

A construção dos precondicionadores EPE de Cholesky, EPE de Crout e EPE de Gauss-Seidel Simetrizado se dão computacionalmente através de duas etapas bastante semelhantes.

Neste três casos, as matrizes dos elementos com as transformações descritas na seção 4.3, são empregados como operadores, portanto, é necessário uma outra estrutura de dados para armazenamento destas matrizes transformadas. Nas rotinas implementadas para estes três precondicionadores elas são armazenadas em um arranjo unidimensional denominado LRT cujo preenchimento é idêntico ao utilizado para o arranjo RT descrito na seção anterior.

A primeira etapa na construção destes precondicionadores consiste no processo de regularização de Winget sobre cada matriz de elemento como descrito na seção 4.3.2 e representado na FIGURA 4.3.2.1. Previamente a este processo, deve ser montado o vetor com os termos da diagonal da matriz global \underline{K} . Isto é realizado a partir dos termos das diagonais das matrizes dos elementos armazenadas em RT e do arranjo de conectividades. Este vetor com os termos da diagonal de \underline{K} é armazenado da mesma forma para as três rotinas, em um arranjo unidimensional denominado VTDCNGDLM, onde NGDLM é o número de graus de liberdade da malha.

A segunda etapa consiste na fatoração das matrizes dos elementos regularizadas. Este processo de fatoração se dá sobre cada matriz regularizada e consiste na aplicação da fatoração por produto, de Cholesky ou de Crout, ou na fatoração por soma definida na expressão 4.3.4.2.

Finda esta segunda etapa, fica construído o precondicionador EPE, constituindo-se de NEL matrizes triangulares superiores de elementos regularizadas, fatoradas e armazenadas no arranjo LRT, sendo NEL o número de elementos na malha.

5.4 - Solução do Sistema Auxiliar $\underline{P} \underline{z} = \underline{r}$.

A solução deste sistema auxiliar deve ser realizada quando da aplicação do algoritmo do MGCP, na sua fase de inicialização e durante cada iteração, conforme definidas pelas expressões 3.2.27 e 3.2.33, ambas do algoritmo mostrado na FIGURA 3.2.1.

O processo de solução deste sistema é realizado da mesma forma para os três preconditionadores EPE. Como a matriz de preconditionamento, neste três casos, está constituída pelo produto de matrizes triangulares superiores e inferiores, é suficiente um processo de substituição à frente seguido por uma retrossubstituição, como foi descrito na seção 4.4. para uma malha de dois elementos para o preconditionador EPE de Cholesky. Entretanto, é necessário fazer um mapeamento do nível local para o global durante o processo de substituição à frente e retrossubstituição, tendo em vista que as matrizes que constituem o preconditionador armazenadas em LRT, estão referidas ao nível local dos elementos.

Este mapeamento é realizado empregando-se o vetor **INDEX**, descrito na seção 5.2, e realizado de forma semelhante a empregada para o produto matriz-vetor $\underline{K} \underline{p}$.

Nas rotinas relativas aos três preconditionadores EPE o resultado da solução deste sistema a cada iteração é armazenado em um arranjo unidimensional denominado **VTZCNGDLM**.

6. - RESUMO DOS EXEMPLOS NÚMERICOS E DOS RESULTADOS OBTIDOS

6.1 - Preliminares

Neste capítulo são descritos de forma concisa os exemplos resolvidos neste trabalho e os resultados obtidos pela aplicação dos cinco algoritmos implementados para solução de problemas em elasticidade estática linear.

No ANEXO I deste trabalho é apresentada uma descrição detalhada e completa deste exemplos e seus respectivos resultados.

Os algoritmos foram analisados comparativamente quanto a sua performance computacional no que diz respeito ao número de iterações necessárias para convergência e ao tempo de processamento das iterações.

Também são comparados os requisitos de armazenamento da matriz de rigidez do sistema de cada exemplo para uma formulação elemento-por-elemento e para uma formulação global. *Para a formulação EPE, este requisito refere-se aos termos dos triângulos superiores ou inferiores das matrizes dos elementos que constituem a malha. Para a formulação global, este requisito refere-se ao preenchimento do perfil com minimização de banda de acordo com algoritmo desenvolvido no trabalho realizado por TEIXEIRA⁴⁶.*

Para todos os casos analisados limitou-se o número de iterações em 5000 e a tolerância foi fixada em 10^{-3} .

Todas as soluções iterativas foram realizadas na memória central, de tal sorte que não ocorreram operações de E/S durante a execução das iterações.

O processo de análise de cada exemplo passou por três

etapas. Na primeira, foi gerada a malha e os dados relativos às cargas, propriedades, tipo de elemento, constantes físicas e restrições de contorno. Isto foi realizado empregando-se os módulos de Entrada de Dados e Gerador/Corretor do Sistema GAELI (GROEHS e SANTOS¹⁸) no ambiente DOS.

Na segunda etapa, empregando-se o módulo GAPRE do Sistema GAELI, foram geradas as matrizes de rigidez dos elementos, o vetor global de forças e os vetores apontadores relativos a estruturas de dados empregada pelo Sistema GAELI.

Na terceira etapa, foi realizada a solução iterativa por cada um dos cinco algoritmos implementados. Estas duas últimas etapas foram realizadas em um ambiente UNIX. Na FIGURA 6.1.1 é mostrada o esquema geral de solução dos exemplos.

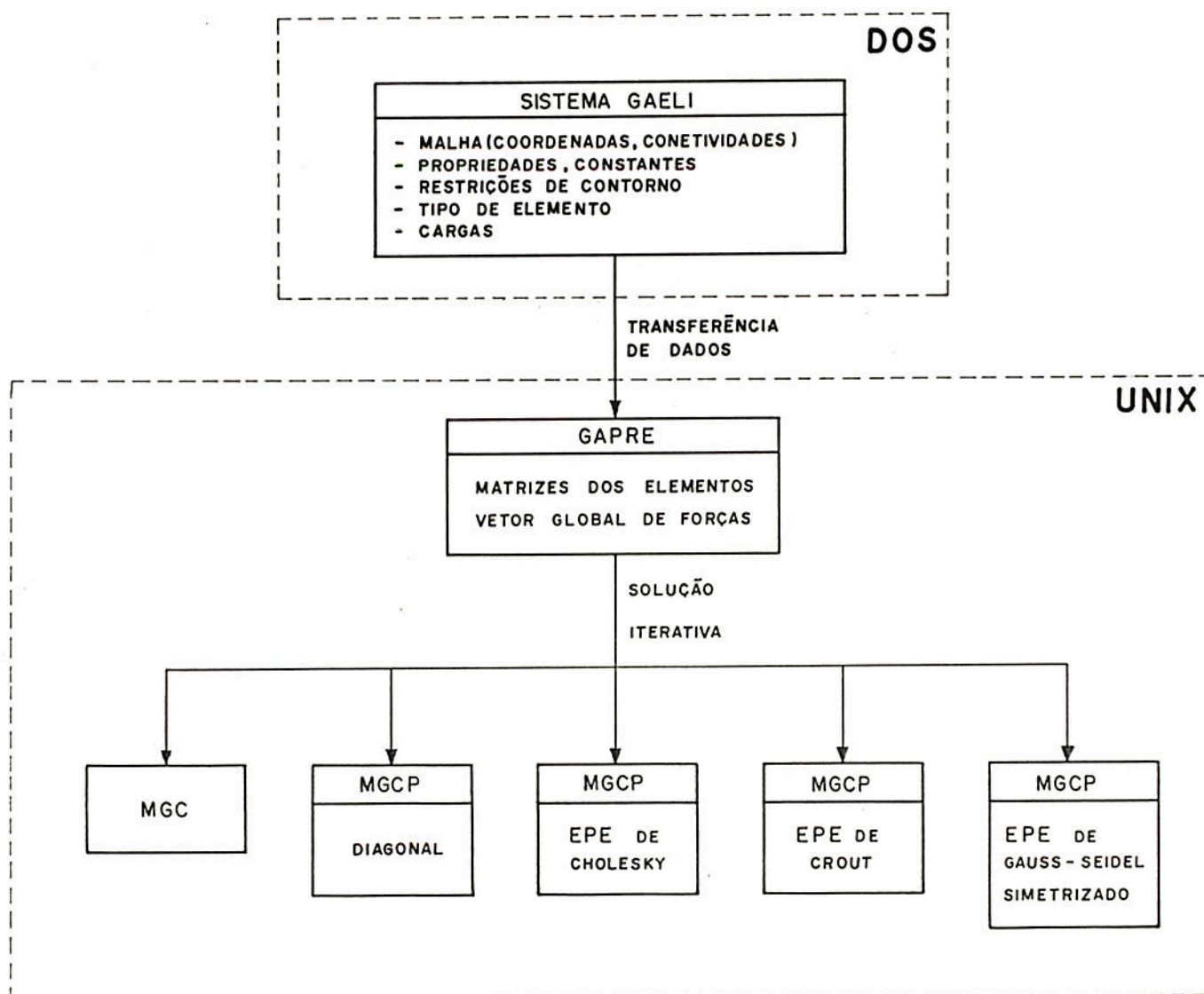


FIGURA 6.1.1 - Esquema geral de solução dos exemplos.

6.2 - Resumo dos Dados Relativos aos Exemplos Resolvidos

Foram analisados quinze casos, sendo cada um deles discretizado para um dado número de malhas graduaamente crescentes. Estes casos estão sumarizados na TABELA 6.2.1 quanto ao tipo de problema, topologia do domínio e número de exemplos analisados.

TABELA 6.2.1 - Características dos casos analisados.

| Caso | Tipo de Problema | Domínio | Número de Exemplos |
|------|-----------------------|-----------------------------|--------------------|
| 1 | Tensão Plana | Gancho curvo | 10 |
| 2 | Tensão Plana | Viga curta em balanço | 12 |
| 3 | Deformação Plana | Disco c/ furo central | 10 |
| 4 | Sólido axissimétrico | Esfera ôca | 10 |
| 5 | Placa fina(Kirchoff) | Placa hexagonal engastada | 10 |
| 6 | Placa fina(Kirchoff) | Placa quadrada apoiada | 10 |
| 7 | Placa fina(Kirchoff) | Placa retangular apoiada | 10 |
| 8 | Placa(Midlin) | Placa circular engastada | 13 |
| 9 | Placa(Midlin) | Placa retangular em balanço | 10 |
| 10 | Casca poliédrica | Viga T de paredes finas | 9 |
| 11 | Casca poliédrica | Cilindro de paredes finas | 9 |
| 12 | Casca poliédrica | Hemisfério | 10 |
| 13 | Sólido tridimensional | Bloco paralelepédico | 12 |
| 14 | Sólido tridimensional | Viga em balanço | 9 |
| 15 | Sólido tridimensional | Disco c/ furo central | 6 |

Na TABELA 6.2.2 é apresentado para cada um dos quinze casos, os dados relativos as características dos elementos empregados e os dados relativos às malhas de menor e maior densidade de elementos. Nesta tabela, NL é o número de nós por elemento, GN é o número de graus de liberdade por nó, GL é o número de graus de liberdade por elemento, QL é o número de nós na malha, QN é o número de nós na malha e GDL é o número de graus de liberdade na malha.

TABELA 6.2.2 - Características dos elementos e das malhas de elementos finitos de menor e maior densidade empregados nos casos analisados.

| Caso | Elemento Empregado | | | Malha Menos Densa | | | Malha Mais Densa | | | |
|------|--------------------|----|----|-------------------|-----|-----|------------------|------|------|------|
| | Tipo | NL | GN | GL | QL | QN | GDL | QL | QN | GDL |
| 1 | Triangular | 6 | 2 | 12 | 12 | 39 | 78 | 1200 | 2541 | 5082 |
| 2 | Quadrilátero | 4 | 2 | 8 | 121 | 144 | 288 | 3025 | 3136 | 6272 |
| 3 | Quadrilátero | 8 | 2 | 16 | 25 | 96 | 192 | 961 | 3008 | 6016 |
| 4 | Quadrilátero | 8 | 2 | 16 | 7 | 38 | 76 | 700 | 2261 | 4522 |
| 5 | Quadrilátero | 4 | 3 | 12 | 100 | 121 | 363 | 3025 | 3136 | 9408 |
| 6 | Quadrilátero | 4 | 3 | 12 | 100 | 121 | 363 | 3025 | 3136 | 9408 |
| 7 | Quadrilátero | 4 | 3 | 12 | 100 | 121 | 363 | 3025 | 3136 | 9408 |
| 8 | Quadrilátero | 8 | 3 | 24 | 48 | 169 | 507 | 768 | 2401 | 7203 |
| 9 | Quadrilátero | 8 | 3 | 24 | 16 | 65 | 195 | 961 | 3008 | 9024 |
| 10 | Quadrilátero | 4 | 6 | 24 | 16 | 25 | 150 | 1296 | 1369 | 8214 |
| 11 | Quadrilátero | 4 | 6 | 24 | 18 | 28 | 168 | 1458 | 1560 | 9240 |
| 12 | Quadrilátero | 4 | 6 | 24 | 48 | 61 | 366 | 1452 | 1519 | 9114 |
| 13 | Hexaédrico | 8 | 3 | 24 | 8 | 27 | 81 | 2197 | 2744 | 8232 |
| 14 | Hexaédrico | 8 | 3 | 24 | 16 | 45 | 135 | 2000 | 2541 | 7623 |
| 15 | Hexaédrico | 8 | 3 | 24 | 48 | 105 | 315 | 2058 | 2640 | 7920 |

6.3 - Resumo dos Resultados Obtidos

Nas tabelas que seguem, o tipo de problema é identificado por EPT para tensão plana, ETD para deformação plana, AXS para sólido axissimétrico, PLA para placas, CAS para cascas poliédricas e TRI para sólido tridimensional.

6.3.1 - Taxa de Convergência e Tempo de Processamento

Os cento e cinquenta exemplos dos quinze casos foram resolvidos pelos cinco algoritmos iterativos. A TABELA 6.3.1.1 apresenta o algoritmo de melhor desempenho quanto ao tempo de

processamento das iterações e maior taxa de convergência para cada caso. Aqui, entende-se por taxa de convergência a razão entre o número de graus de liberdade do problema pelo número de iterações necessárias para ser atingida a convergência estabelecida.

TABELA 6.3.1.1 - Algoritmos de melhor performance computacional.

| Caso | Tipo | ALGORITMO DE MELHOR DESEMPENHO | |
|------|------|--------------------------------|------------------------|
| | | Taxa de Convergência | Tempo de Processamento |
| 1 | EPT | EPE Gauss-Seidel Sim. | EPE Gauss-Seidel Sim. |
| 2 | EPT | EPE Cholesky | EPE Gauss-Seidel Sim. |
| 3 | EPD | EPE Cholesky | Diagonal |
| 4 | AXS | EPE Cholesky | Diagonal |
| 5 | PLA | EPE Cholesky | EPE Gauss-Seidel Sim. |
| 6 | PLA | EPE Cholesky | Diagonal |
| 7 | PLA | EPE Cholesky | EPE Cholesky |
| 8 | PLA | EPE Cholesky | Diagonal |
| 9 | PLA | EPE Cholesky | Diagonal |
| 10 | CAS | EPE Cholesky | Diagonal |
| 11 | CAS | EPE Cholesky | EPE Gauss-Seidel Sim. |
| 12 | CAS | EPE Cholesky | EPE Cholesky |
| 13 | TRI | EPE Cholesky | EPE Gauss-Seidel Sim. |
| 14 | TRI | EPE Cholesky | Diagonal |
| 15 | TRI | EPE Cholesky | Diagonal |

Por outro lado, na TABELA 6.3.2.1 é apresentado para o algoritmo de melhor desempenho a respectiva taxa de convergência obtida na solução dos exemplos, com malhas de menor e maior densidade de elementos, de cada caso.

TABELA 6.3.1.2 - Taxa de convergência obtida em cada caso pelo preconditionador de melhor performance.

| Caso | Tipo | Malha menos densa | Malha mais Densa |
|------|------|-------------------|------------------|
| 1 | EPT | 2,11 | 13,89 |
| 2 | EPT | 11,08 | 51,41 |
| 3 | EPD | 5,65 | 19,85 |
| 4 | AXS | 2,92 | 13,11 |
| 5 | PLA | 6,85 | 6,34 |
| 6 | PLA | 6,05 | 6,04 |
| 7 | PLA | 2,45 | 2,01 |
| 8 | PLA | 8,59 | 29,89 |
| 9 | PLA | 3,36 | 16,44 |
| 10 | CAS | 2,88 | 8,67 |
| 11 | CAS | 8,00 | 6,13 |
| 12 | CAS | 2,63 | 9,09 |
| 13 | TRI | 11,57 | 304,89 |
| 14 | TRI | 5,63 | 80,24 |
| 15 | TRI | 17,50 | 158,40 |

6.3.2 - Requisitos de Armazenamento

Na TABELA 6.3.2.1 é apresentada a razão do requisito de armazenamento para a formulação elemento-por-elemento pelo correspondente requisito para a formulação global dos algoritmos, relativa às malhas de menor e maior densidade de elementos para cada um dos quinze casos analisados.

Pelos dados mostrados nesta tabela, pode-se observar que à medida que aumenta a densidade de elementos finitos na malha a formulação elemento-por-elemento requer menor espaço para armazenamento. Cabe salientar que os valores tabelados devem ser considerados em dobro para o caso dos preconditionadores EPE, pois nestes casos é necessário armazenar as porções triangulares superiores ou inferiores decorrentes da

fatoração de cada matriz de elemento.

TABELA 6.3.2.1 - Razão entre os requisitos de armazenamento para formulação EPE e global.

| Caso | Tipo | Malha menos densa | Malha mais Densa |
|------|------|-------------------|------------------|
| 1 | EPT | 2,51 | 0,83 |
| 2 | EPT | 1,39 | 0,30 |
| 3 | EPD | 1,19 | 0,27 |
| 4 | AXS | 2,20 | 0,84 |
| 5 | PLA | 1,80 | 0,44 |
| 6 | PLA | 1,80 | 0,44 |
| 7 | PLA | 1,80 | 0,44 |
| 8 | PLA | 1,66 | 0,53 |
| 9 | PLA | 2,00 | 0,40 |
| 10 | CAS | 5,33 | 1,23 |
| 11 | CAS | 6,20 | 1,61 |
| 12 | CAS | 4,44 | 1,67 |
| 13 | TRI | 3,07 | 0,40 |
| 14 | TRI | 3,27 | 0,62 |
| 15 | TRI | 2,70 | 0,63 |

6.3.3 - Estimativa do Condicionamento

O condicionamento das matrizes de rigidez foi estimado a partir da razão D_{\max}/D_{\min} como referido na seção 2.5 do Capítulo 2. Na TABELA 6.3.3.1 é mostrado os valores desta razão para as malhas de menor e maior densidade de elementos relativas aos exemplos dos casos analisados.

O emprego da razão D_{\max}/D_{\min} permitiu uma boa avaliação para o condicionamento das matrizes de rigidez dos sistemas resolvidos.

TABELA 6.3.3.1 - Valores de D_{\max}/D_{\min} para as malhas de menor e maior densidade de elementos de cada caso analisado.

| Caso | Tipo | D_{\max}/D_{\min} | |
|------|------|---------------------|------------------------|
| | | Malha menos densa | Malha mais Densa |
| 1 | EPT | 18 | 10 |
| 2 | EPT | 4,9 | 4,9(*) |
| 3 | EPD | 11,4 | 13,1 |
| 4 | AXS | 93,2 | 1280 |
| 5 | PLA | 395 | 15601 |
| 6 | PLA | 2935 | 88806 |
| 7 | PLA | 19812 | 6×10^5 |
| 8 | PLA | 658 | 431 |
| 9 | PLA | 341 | 684 |
| 10 | CAS | $1,96 \times 10^8$ | $1,97 \times 10^8$ (*) |
| 11 | CAS | 2425 | $1,50 \times 10^5$ |
| 12 | CAS | 90464 | $2,50 \times 10^6$ |
| 13 | TRI | 31 | 40 |
| 14 | TRI | 11,8 | 11,8(*) |
| 15 | TRI | 26,7 | 33 |

(*) Valor praticamente constante para as malhas deste caso.

Pode-se observar pelos valores tabelados que:

- os quatro primeiros casos de estado plano são problemas bem condicionados, embora o caso n.º 4 tenha um condicionamento pior do que os outros três, fato este que confirmou-se no que diz respeito à taxa de convergência;
- os casos 5, 6 e 7 de placas finas, discretizados com o elemento DKQ constituiu-se em problemas extremamente mal condicionados, com o condicionamento piorando à medida que aumenta a relação entre os lados dos elementos na malha;
- os casos 8 e 9, de placas pela teoria de Midlin, são problemas bem condicionados;

- os casos 10, 11 e 12, de cascas poliédricas, são problemas com matrizes extremamente mal condicionadas; e
- finalmente, os três últimos casos, de sólidos tridimensionais, revelaram-se problemas extremamente bem condicionados.

6.4 - Observações Finais

Testes preliminares à solução dos casos tratados neste trabalho, demonstraram que a solução iterativa envolvendo interação com disco, isto é, operações de E/S durante as iterações, aumenta consideravelmente o tempo de processamento das iterações.

Por outro lado, se as variáveis no algoritmo forem definidas em precisão simples, isto é, palavras de 4 bytes para reais, ocorre um excessivo aumento no número de iterações para atingir-se uma mesma redução no resíduo, ou seja para uma mesma tolerância.

7 - CONCLUSÕES

O algoritmo do Método dos Gradientes Conjugados sem preconditionamento apresentou bom desempenho para os problemas bem condicionados, enquanto para os mal condicionados não obteve desempenho satisfatório, inclusive não conseguindo convergência dentro do limite de iterações estabelecido.

Os preconditionadores mostraram-se efetivos de forma geral para acelerar a taxa de convergência. Seus desempenhos foram mais eficientes à medida que crescia o mal condicionamento do problema analisado.

O algoritmo Diagonal apresentou resultados eficientes, tanto para problemas bem condicionados como para os mal condicionados. Na maioria dos casos analisados, gerou soluções mais rápidas embora a taxas de convergências menores do que os outros três preconditionadores, tendo em vista que envolve um menor número de operações durante cada iteração. Levando em consideração sua maior facilidade de implementação, que requer metade do armazenamento dos algoritmos EPE, e tendo em vista que não há matrizes fatoradas, permanece grande a sua utilidade.

Os algoritmos EPE mostraram-se mais eficientes na aceleração da taxa de convergência, principalmente quando empregados a problemas mal condicionados. A escolha entre fatoração de Cholesky ou de Crout não apresentou, no geral, diferenças relevantes. O algoritmo EPE Gauss-Siedel mostrou-se no geral pouco menos eficiente do que os outros dois preconditionadores EPE, embora tenha apresentado uma iteração mais rápida.

À medida que o porte do problema tratado cresce os requisitos de armazenamento para as matrizes dos elementos tornam-se menores do que para a matriz global, com maior vantagem quando tratam-se de problemas tridimensionais.

No geral o número de iterações necessárias à convergência decrescem percentualmente em relação ao número de graus de liberdade do problema, indicando uma tendência de maior eficiência na solução iterativa de problemas de grande porte.

Como continuação do presente trabalho sugere-se:

- a implementação dos algoritmos aqui tratados em máquinas com capacidade de processamento vetorial e paralelo;
- a implementação da solução iterativa por gradientes conjugados com condicionamento numa formulação EPE como iteração interna de processos baseados no algoritmo de Newton-Raphson para solução de problemas não lineares e um estudo de sua performance em relação ao algoritmo BFGS.
- estudo da performance dos algoritmos do MGC e MGCP numa formulação EPE para solução de sistemas de equações decorrentes da discretização por elementos finitos onde sejam empregados processos adaptativos de refinamento da solução. Em especial, aos processos adaptativos tipo $h - p$ e $-p$, pois nestes processos são empregados polinômios de interpolação hierárquicos que melhoram de forma bastante acentuada o condicionamento das matrizes de rigidez.

A N E X O I (ver Capítulo 6)

EXEMPLOS NÚMERICOS E RESULTADOS OBTIDOS

I.1 - Introdução

A finalidade deste anexo é apresentar em detalhe a descrição dos casos analisados e os respectivos resultados obtidos pela solução iterativa dos mesmos.

Cada caso foi discretizado para um dado número de malhas gradualmente crescentes. O número máximo de iterações foi limitado em 5000 e, para todos os casos foi adotada uma tolerância igual a 10^{-3} .

Foram computados o tempo de processamento das iterações e o número de iterações necessários à convergência. Além disso, como parâmetro auxiliar, foi calculada razão entre o maior e o menor termo da diagonal das matrizes de rigidez, D_{\max} / D_{\min} , para inferir o condicionamento dos sistemas de equações.

Por outro lado, os requisitos para armazenamento da matriz do sistema de equações de cada exemplo foram computados, tanto para a formulação elemento-por-elemento empregado neste trabalho como para uma formulação global. Estes requisitos que aparecem em tabelas que seguem, referem-se ao número de palavras de oito bytes. Para a formulação EPE dizem respeito ao armazenamento dos triângulos superiores das matrizes dos elementos que constituem a malha e, na formulação global, ao número de termos para preenchimento do perfil com minimização de banda conforme explicitado no trabalho de TEIXEIRA⁴⁶. Cabe

salientar que os valores tabelados para a formulação EPE devem ser considerados em dobro para os preconditionadores EPE de Cholesky, EPE de Crout e EPE de Gauss-Seidel Simetrizado, pois nestes três casos a construção do preconditionador implica na fatoração das matrizes dos elementos.

Ao longo deste anexo faz-se referência à taxa de convergência dos algoritmos relativos aos preconditionadores empregados. Este termo significa a razão entre número de graus de liberdade da malha de elementos finitos pelo número de iterações necessárias à convergência. Assim, uma maior taxa de convergência implica em um número menor de iterações para ser atingida a convergência especificada.

Foram analisados quinze casos, os quais foram classificados em quatro grupos, relativos a um mesmo tipo de problema em elasticidade estática linear.

I.2 - Problemas de Estado Plano

Foram analisados quatro casos. Os casos n.º 1 e 2 tratam de problemas de estado plano de tensões. Empregou-se no primeiro o elemento triangular de seis nós e, no segundo o elemento quadrilátero isoparamétrico de quatro nós. O caso n.º 3 trata de um problema de estado plano de deformações e o caso n.º 4 de um problema axissimétrico. Empregou-se para ambos o elemento quadrilátero isoparamétrico de oito nós. A descrição e características destes elementos pode ser encontrada em ZIENKIEWICZ⁵¹.

I.2.1 - Caso N.º 1

Um gancho curvo carregado no extremo livre como mostrado na FIGURA I.2.1.1, foi analisado.

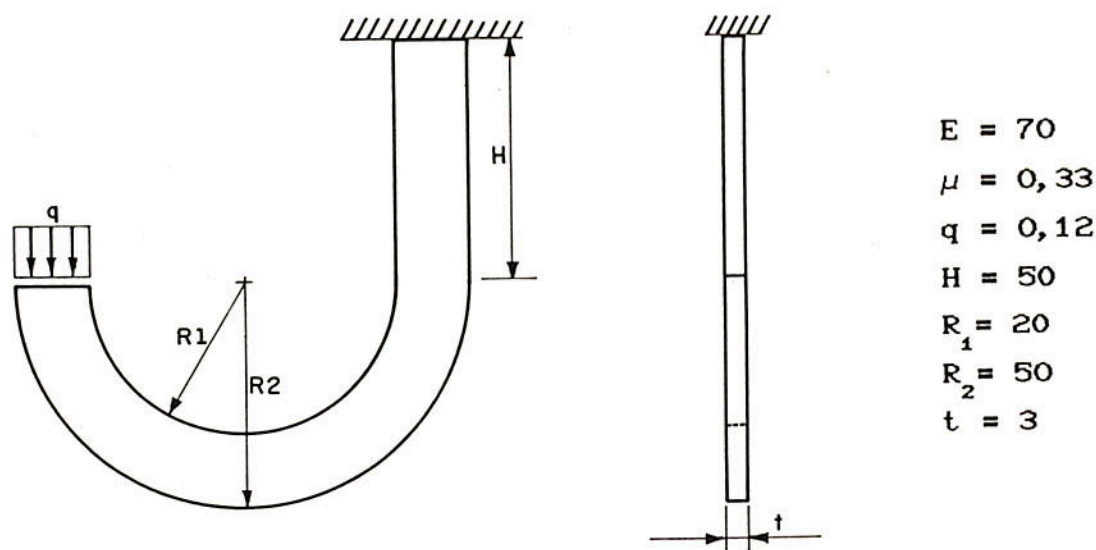


FIGURA I.2.1.1 - Caso N.º 1.

Foram estabelecidas dez malhas gradualmente crescentes cujos dados são apresentados na TABELA I.2.1.1.

TABELA I.2.1.1 - Dados relativos às malhas do Caso N.º 1.

| Exemplo | Malha | Número de Elem. | Número de Nós | Graus de Liberdade | Requisito p/ EPE | Armazenamento Global Perfil | Banda |
|---------|-------|-----------------|---------------|--------------------|------------------|-----------------------------|-------|
| A-01 | 2x6 | 12 | 39 | 78 | 936 | 372 | 16 |
| A-02 | 4x12 | 48 | 125 | 250 | 3744 | 1724 | 28 |
| A-03 | 6x18 | 108 | 259 | 518 | 8424 | 4570 | 36 |
| A-04 | 8x24 | 192 | 441 | 882 | 14976 | 9472 | 44 |
| A-05 | 10x30 | 300 | 671 | 1342 | 23400 | 16974 | 52 |
| A-06 | 12x36 | 432 | 949 | 1898 | 33696 | 27620 | 60 |
| A-07 | 14x42 | 588 | 1275 | 2550 | 45864 | 41954 | 68 |
| A-08 | 16x48 | 768 | 1649 | 3298 | 59904 | 60520 | 76 |
| A-09 | 18x54 | 972 | 2071 | 4142 | 75816 | 83862 | 84 |
| A-10 | 20x60 | 1200 | 2541 | 5082 | 93600 | 112524 | 92 |

Na FIGURA I.2.1.2 é mostrada a malha de elementos finitos relativa ao exemplo A-02.

Os resultados são apresentados na TABELA I.2.1.2, onde encontram-se, para cada exemplo, o número de iterações necessárias à convergência e o tempo de processamento relativo a cada procedimento iterativo.

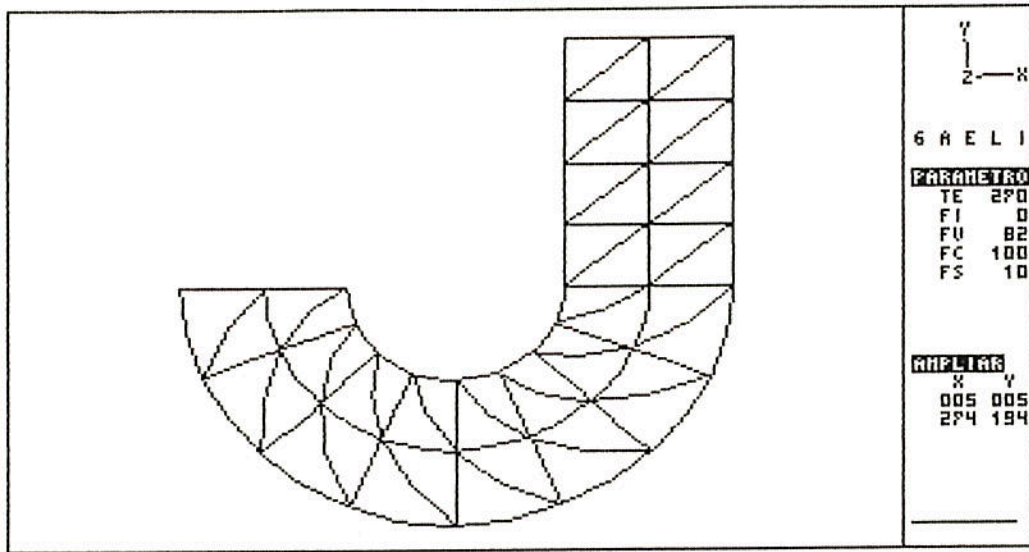


FIGURA I.2.1.2 - Malha do exemplo A-02.

TABELA I.2.1.2 - Resultados obtidos para o Caso N.º 1.

| Exemplo | PRECONDICIONADORES | | | | |
|--|--------------------|----------|-----------------|--------------|---------------------|
| | MGC | Diagonal | EPE Cholesky | EPE Crout | EPE Gauss-Seidel |
| NÚMERO DE ITERAÇÕES | | | | | |
| A-01 | 84 | 69 | 31 | 32 | 37 |
| A-02 | 178 | 153 | 66 | 68 | 73 |
| A-03 | 267 | 236 | 105 | 104 | 108 |
| A-04 | 360 | 323 | 143 | 144 | 144 |
| A-05 | 439 | 407 | 181 | 185 | 181 |
| A-06 | 526 | 494 | 223 | 226 | 217 |
| A-07 | 617 | 574 | 262 | 264 | 254 |
| A-08 | 713 | 663 | 304 | 307 | 292 |
| A-09 | 799 | 744 | 342 | 337 | 328 |
| A-10 | 892 | 833 | 386 | 388 | 366 |
| TEMPO DE PROCESSAMENTO (segundos) | | | | | |
| A-01 | 0,2 | 0,2 | 0,2 | 0,2 | 0,2 |
| A-02 | 1,6 | 1,3 | 1,5 | 1,5 | 1,3 |
| A-03 | 5,4 | 4,7 | 5,4 | 5,4 | 4,6 |
| A-04 | 13,5 | 12,4 | 13,2 | 13,5 | 11,0 |
| A-05 | 26,3 | 24,2 | 26,3 | 27,2 | 21,8 |
| A-06 | 45,4 | 42,3 | 46,4 | 47,8 | 37,7 |
| A-07 | 72,0 | 67,2 | 73,8 | 75,5 | 60,2 |
| A-08 | 108,8 | 101,1 | 111,4 | 114,4 | 91,0 |
| A-09 | 154,8 | 145,0 | 168,2 | 159,1 | 129,7 |
| A-10 | 214,0 | 201,6 | 221,1 | 226,0 | 178,4 |

Pode-se observar que os algoritmos EPE Cholesky, EPE Crout e EPE Gauss-Seidel Simetrizado alternam entre si a maior taxa de convergência, com leve vantagem para o último à medida que cresce o número de graus de liberdade.

Não houve diferença acentuada nos tempos de processamento dos cinco algoritmos, embora o preconditionador EPE Gauss-Seidel Simetrizado tenha apresentado melhor desempenho. Por tratar-se de problema bem condicionado, não houve ganho significativo com o preconditionamento.

Ocorre um decréscimo percentual do número de iterações necessárias para a convergência à medida que cresce a densidade de elementos na malha. Isto pode ser observado na gráfico da FIGURA I.2.1.3 onde é mostrado o desempenho do preconditionador EPE de Gauss-Seidel Simetrizado.

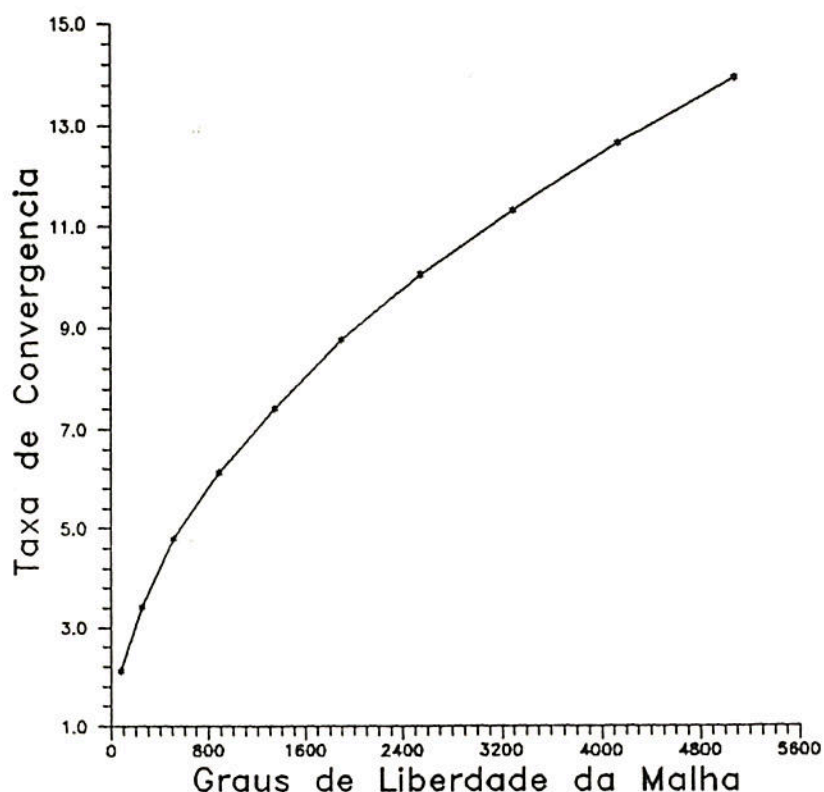
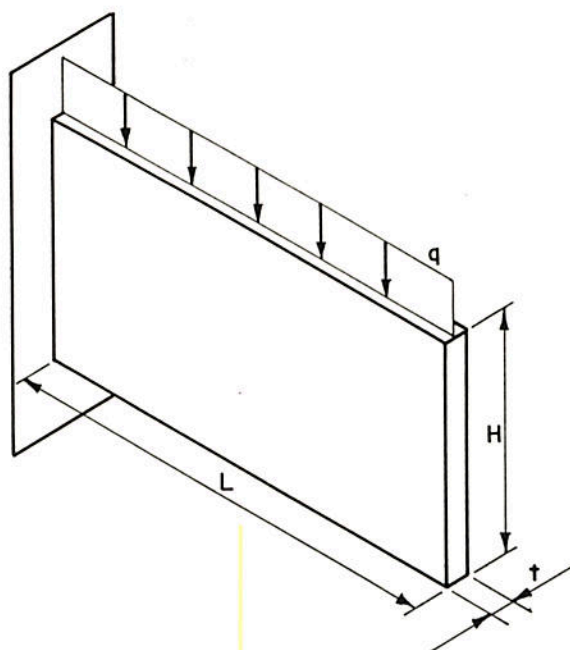


FIGURA I.2.1.3 - Performance da taxa de convergência para o preconditionador EPE de Gauss-Seidel Sim.

I.2.2 - Caso N.º 2

Neste caso foi analisada uma viga curta em balanço sob carga uniforme. Na FIGURA I.2.2.1 é apresentado um esboço do problema.



$$\begin{aligned}
 E &= 20 \\
 \mu &= 0,27 \\
 q &= 100 \\
 L &= 1,0 \\
 H &= 0,8 \\
 t &= 0,001
 \end{aligned}$$

FIGURA I.2.2.1 - Caso N.º 2.

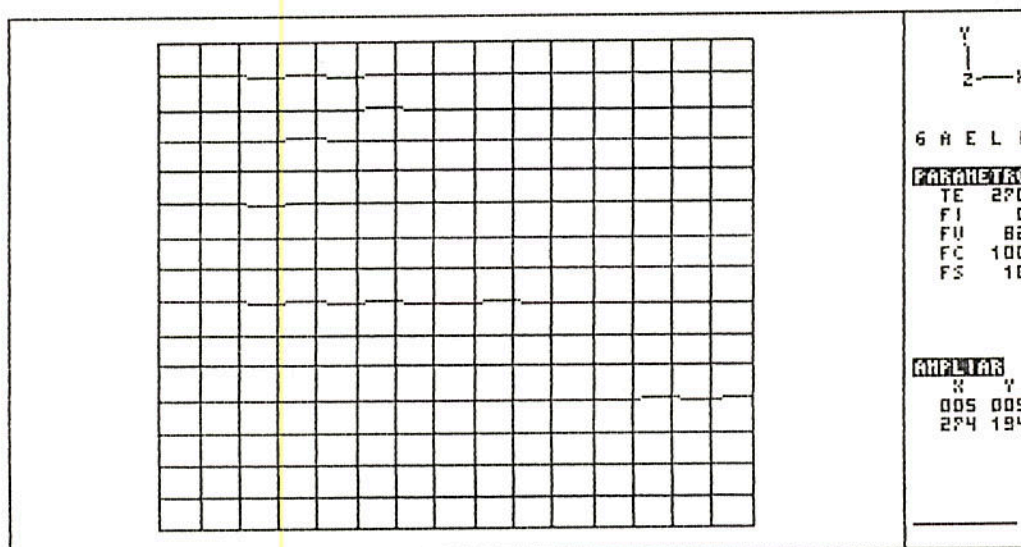


FIGURA I.2.2.2 - Malha do exemplo B-02.

Foram construídas doze malhas gradualmente crescentes, cujos dados são apresentados na TABELA I.2.2.1.

Na FIGURA I.2.2.2 é mostrada a malha de elementos finitos para o exemplo B-02.

TABELA I.2.2.1 - Dados relativos às malhas do Caso N.º 2.

| Exemplo | Malha | Número de Elem. | Número de Nós | Graus de Liberdade | Requisito p/ EPE | Armazenamento Global | Perfil Banda |
|---------|-------|-----------------|---------------|--------------------|------------------|----------------------|--------------|
| B-01 | 11x11 | 121 | 144 | 288 | 5184 | 3720 | 28 |
| B-02 | 15x15 | 225 | 256 | 512 | 8100 | 8672 | 36 |
| B-03 | 19x19 | 361 | 400 | 800 | 12996 | 16760 | 44 |
| B-04 | 23x23 | 529 | 576 | 1152 | 19044 | 28752 | 52 |
| B-05 | 27x27 | 729 | 784 | 1568 | 26244 | 45416 | 60 |
| B-06 | 31x31 | 961 | 1024 | 2048 | 34596 | 67520 | 68 |
| B-07 | 35x35 | 1225 | 1296 | 2592 | 44100 | 95832 | 76 |
| B-08 | 39x39 | 1521 | 1600 | 3200 | 54756 | 131120 | 84 |
| B-09 | 43x43 | 1849 | 1936 | 3872 | 66564 | 174152 | 92 |
| B-10 | 47x47 | 2209 | 2304 | 4608 | 79524 | 225696 | 100 |
| B-11 | 51x51 | 2601 | 2704 | 5408 | 93636 | 286520 | 108 |
| B-12 | 55x55 | 3025 | 3136 | 6272 | 108900 | 357392 | 116 |

Os resultados obtidos para cada um dos doze exemplos são apresentados na TABELA I.2.2.2.

Pode-se observar que a melhor performance relativa à taxa de convergência ocorreu para o algoritmo EPE Cholesky, embora os algoritmos EPE Crout e EPE Gauss-Seidel Simetrizado tenham apresentado comportamento bastante próximo do primeiro.

O algoritmo EPE Gauss-Seidel Simetrizado apresentou melhor desempenho quanto ao tempo de processamento das iterações, ficando os desempenhos dos algoritmos EPE Cholesky e EPE Crout muito próximos.

Na FIGURA I.2.2.3 é mostrado o desempenho da taxa de convergência do preconditionador EPE de Cholesky, da qual observa-se que há um decréscimo percentual do número de iterações para a convergência com o aumento de graus de liberdade da malha de elementos finitos.

TABELA I.2.2.1 - Resultados obtidos para o Caso N.º 2.

| Exemplo | PRECONDICIONADORES | | | | |
|-----------------------------------|--------------------|----------|-----------------|--------------|---------------------|
| | MGC | Diagonal | EPE Cholesky | EPE Crout | EPE Gauss-Seidel |
| NÚMERO DE ITERAÇÕES | | | | | |
| B-01 | 84 | 71 | 26 | 27 | 26 |
| B-02 | 112 | 98 | 34 | 36 | 36 |
| B-03 | 141 | 124 | 43 | 45 | 46 |
| B-04 | 168 | 151 | 52 | 54 | 55 |
| B-05 | 196 | 178 | 60 | 63 | 64 |
| B-06 | 224 | 205 | 69 | 72 | 72 |
| B-07 | 254 | 232 | 78 | 81 | 81 |
| B-08 | 283 | 258 | 87 | 90 | 90 |
| B-09 | 311 | 285 | 95 | 100 | 99 |
| B-10 | 339 | 312 | 104 | 109 | 109 |
| B-11 | 367 | 339 | 113 | 118 | 118 |
| B-12 | 395 | 365 | 122 | 127 | 127 |
| TEMPO DE PROCESSAMENTO (segundos) | | | | | |
| B-01 | 0,9 | 0,8 | 0,8 | 0,8 | 0,6 |
| B-02 | 2,2 | 1,9 | 1,9 | 2,0 | 1,5 |
| B-03 | 4,9 | 4,1 | 3,9 | 4,1 | 3,4 |
| B-04 | 8,4 | 7,5 | 6,8 | 7,2 | 5,8 |
| B-05 | 13,4 | 12,3 | 10,7 | 11,6 | 9,3 |
| B-06 | 20,3 | 18,5 | 16,2 | 17,4 | 13,6 |
| B-07 | 29,3 | 26,7 | 23,4 | 24,9 | 19,6 |
| B-08 | 40,6 | 37,2 | 32,3 | 34,3 | 27,2 |
| B-09 | 54,3 | 50,1 | 42,8 | 46,2 | 36,3 |
| B-10 | 70,8 | 66,0 | 55,8 | 60,0 | 47,7 |
| B-11 | 90,9 | 84,4 | 71,2 | 76,4 | 60,8 |
| B-12 | 114,2 | 105,5 | 89,3 | 95,7 | 76,3 |

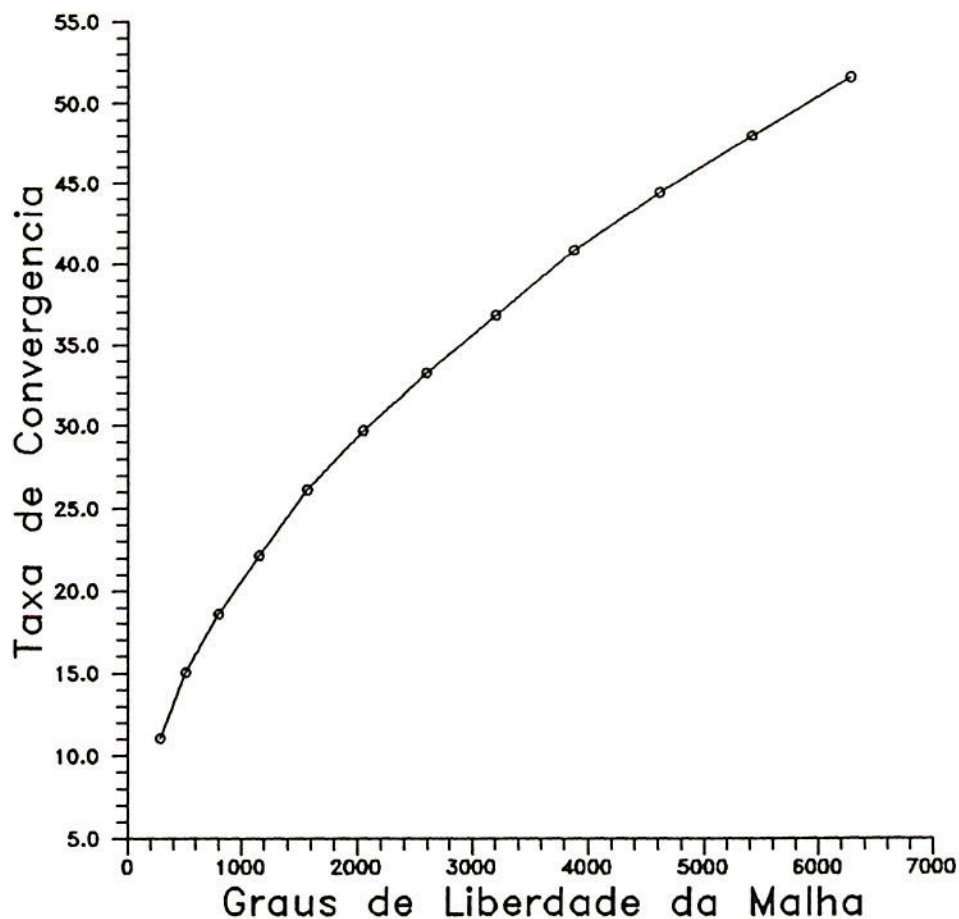


FIGURA I.2.2.3 - Performance da taxa de convergência do pre-condicionador EPE de Cholesky.

I.2.3 - Caso N.º 3

Neste terceiro caso foi analisado um disco circular com furo central sujeito a expansão radial conforme mostrado na FIGURA I.2.3.1.

Foram construídas dez malhas gradualmente crescentes cujos dados são mostrados na TABELA I.2.3.1.

Na FIGURA I.2.3.2 é mostrada a malha relativa ao exemplo C-02.

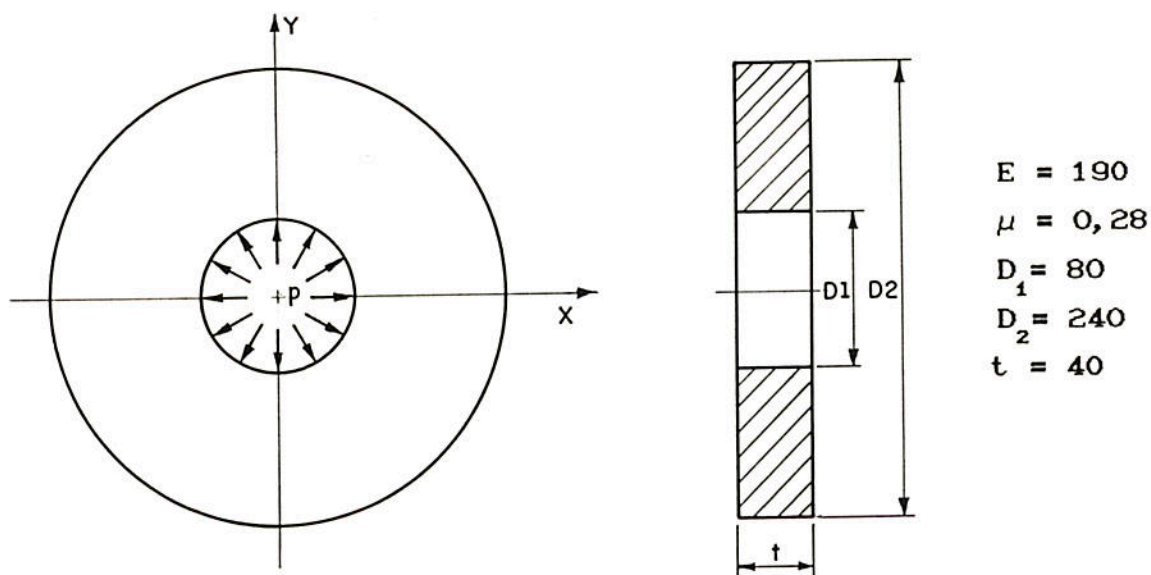


FIGURA I.2.3.1 - Caso N.º 3.

TABELA I.2.3.1 - Dados relativos às malhas do Caso N.º 3.

| Exemplo | Malha | Número de Elem. | Número de Nós | Graus de Liberdade | Requisito p/ EPE | Armazenamento Global Perfil | Banda |
|---------|-------|-----------------|---------------|--------------------|------------------|-----------------------------|-------|
| C-01 | 5x5 | 25 | 96 | 192 | 3400 | 2852 | 40 |
| C-02 | 8x8 | 64 | 225 | 450 | 8704 | 10082 | 58 |
| C-03 | 11x11 | 121 | 408 | 816 | 16456 | 24422 | 76 |
| C-04 | 14x14 | 196 | 645 | 1290 | 26656 | 48302 | 94 |
| C-05 | 17x17 | 289 | 936 | 1872 | 39304 | 84152 | 112 |
| C-06 | 20x20 | 400 | 1281 | 2562 | 54400 | 134402 | 130 |
| C-07 | 23x23 | 529 | 1680 | 3360 | 71944 | 201482 | 148 |
| C-08 | 26x26 | 676 | 2133 | 4266 | 91936 | 287822 | 166 |
| C-09 | 29x29 | 841 | 2640 | 5280 | 114376 | 395852 | 184 |
| C-10 | 31x31 | 961 | 3008 | 6016 | 130696 | 481122 | 196 |

Os resultados da solução iterativa pelos cinco algoritmos são mostrados na TABELA I.2.3.2.

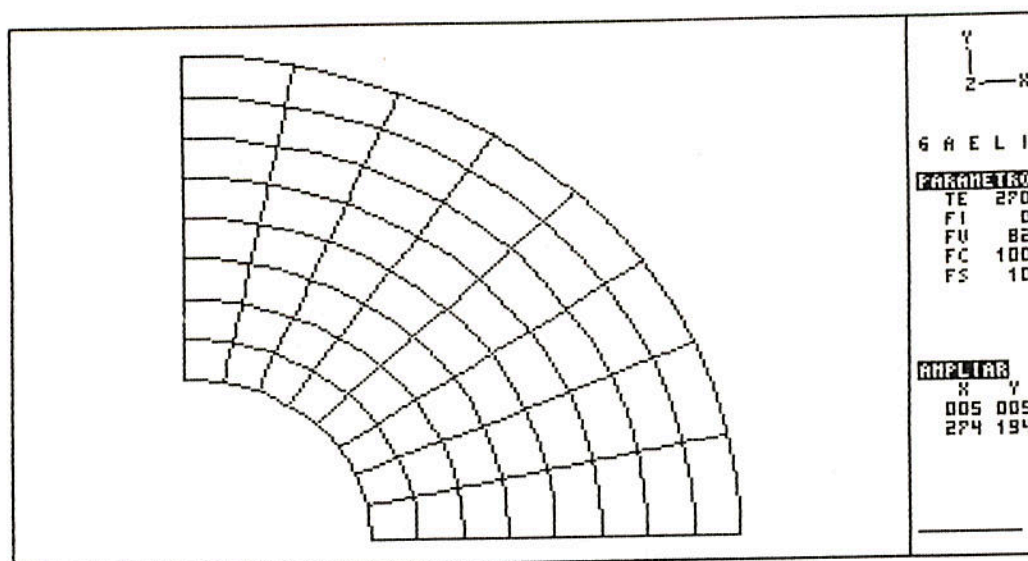


FIGURA I.2.3.2 - Malha do exemplo C-02.

TABELA I.2.3.2 - Resultados obtidos para o Caso N.º 3.

| Exemplo | MGC | PRECONDICIONADORES | | | |
|-----------------------------------|-------|--------------------|-----------------|--------------|---------------------|
| | | Diagonal | EPE Cholesky | EPE Crout | EPE Gauss-Seidel |
| NÚMERO DE ITERAÇÕES | | | | | |
| C-01 | 59 | 52 | 34 | 42 | 52 |
| C-02 | 97 | 84 | 66 | 72 | 90 |
| C-03 | 143 | 122 | 93 | 101 | 129 |
| C-04 | 187 | 158 | 123 | 100 | 169 |
| C-05 | 228 | 197 | 154 | 123 | 208 |
| C-06 | 270 | 232 | 184 | 147 | 246 |
| C-07 | 313 | 273 | 219 | 175 | 286 |
| C-08 | 354 | 307 | 250 | 203 | 324 |
| C-09 | 396 | 346 | 282 | 287 | 361 |
| C-10 | 423 | 372 | 303 | 309 | 385 |
| TEMPO DE PROCESSAMENTO (segundos) | | | | | |
| C-01 | 0,4 | 0,4 | 0,7 | 0,8 | 0,9 |
| C-02 | 2,0 | 1,8 | 3,5 | 3,8 | 4,1 |
| C-03 | 6,0 | 5,4 | 10,8 | 10,3 | 11,7 |
| C-04 | 13,1 | 10,9 | 20,2 | 17,5 | 27,5 |
| C-05 | 35,1 | 20,2 | 40,7 | 34,4 | 43,2 |
| C-06 | 37,2 | 32,0 | 60,1 | 48,9 | 70,9 |
| C-07 | 56,9 | 49,8 | 99,7 | 76,0 | 108,0 |
| C-08 | 81,6 | 71,0 | 135,3 | 112,3 | 157,3 |
| C-09 | 113,5 | 100,1 | 189,7 | 196,5 | 218,2 |
| C-10 | 138,7 | 123,5 | 232,6 | 241,7 | 266,0 |

Neste caso, a maior taxa de convergência foi obtida pelo algoritmo EPE Crout, embora o desempenho dos outros quatro preconditionadores tenha ficado bastante próximo deste.

Por outro lado, a melhor performance quanto ao tempo de processamento foi obtida pelo algoritmo Diagonal, tal desempenho se justifica haja visto que embora sua taxa de convergência tenha ficado aquém do algoritmo EPE Crout, requer um número menor de operações a cada iteração.

O gráfico da FIGURA 1.2.3.3 mostra que ocorre um decréscimo percentual do número de iterações em relação à ordem do problema à medida que aumenta o número de graus de liberdade do exemplo, como demonstra desempenho da taxa de convergência para o preconditionador EPE de Choleky.

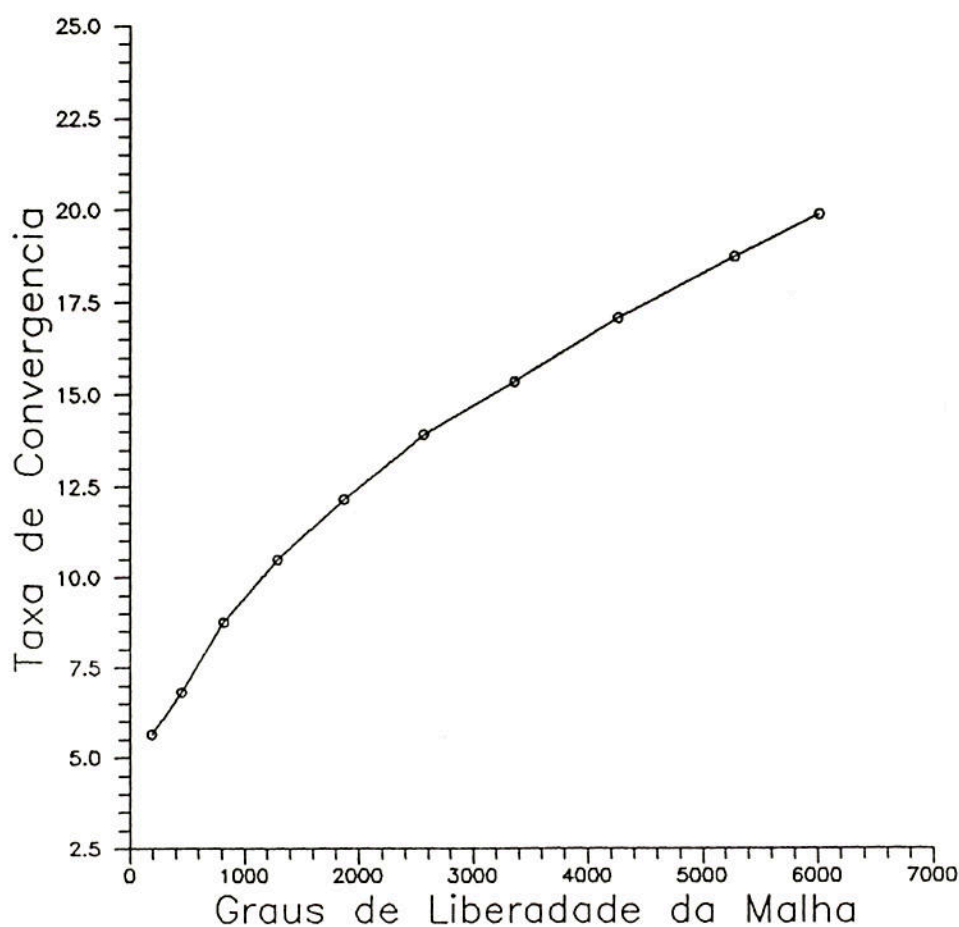
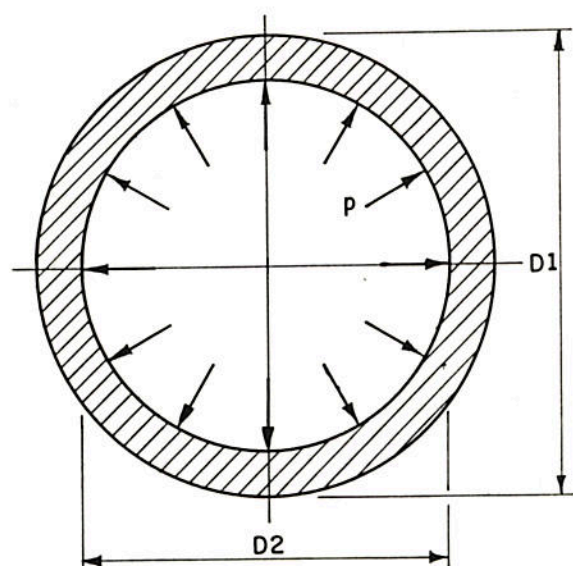


FIGURA 1.2.3.3 - Performance da taxa de convergência do preconditionador EPE de Cholesky.

I.2.4 - Caso N.º 4

Foi analisada uma esfera δ ca sob pressão interna conforme mostrado na FIGURA I.2.4.1.



$$E = 70$$

$$\mu = 0,33$$

$$p = 4 \times 10^{-4}$$

$$D_1 = 300$$

$$D_2 = 240$$

FIGURA I.2.4.1 - Caso N.º 4.

Foram construídas dez malhas gradualmente crescentes sobre um quarto do domínio tendo em vista a simetria do mesmo. Os dados relativos às dez malhas geradas são mostrados na TABELA I.2.4.1.

TABELA I.2.4.1 - Dados relativos às malhas do Caso N.º 4.

| Exemplo | Malha | Número de Elem. | Número de Nós | Graus de Liberdade | Requisito p/ EPE | Armazenamento Global Perfil | Armazenamento Global Banda |
|---------|-------|-----------------|---------------|--------------------|------------------|-----------------------------|----------------------------|
| D-01 | 1x7 | 7 | 38 | 76 | 952 | 432 | 20 |
| D-02 | 2x14 | 28 | 117 | 234 | 3808 | 1882 | 30 |
| D-03 | 3x21 | 63 | 238 | 476 | 8568 | 4876 | 40 |
| D-04 | 4x28 | 112 | 401 | 802 | 15232 | 9942 | 56 |
| D-05 | 5x35 | 175 | 606 | 1212 | 23800 | 17608 | 72 |
| D-06 | 6x42 | 252 | 853 | 1706 | 34272 | 28402 | 88 |
| D-07 | 7x49 | 343 | 1142 | 2284 | 46648 | 42852 | 104 |
| D-08 | 8x56 | 448 | 1473 | 2946 | 60928 | 61482 | 120 |
| D-09 | 9x63 | 567 | 1846 | 3692 | 77112 | 84832 | 136 |
| D-10 | 10x70 | 700 | 2261 | 4522 | 95200 | 113418 | 152 |

Na FIGURA I.2.4.2 é mostrada a malha de elementos finitos relativa ao exemplo D-03.

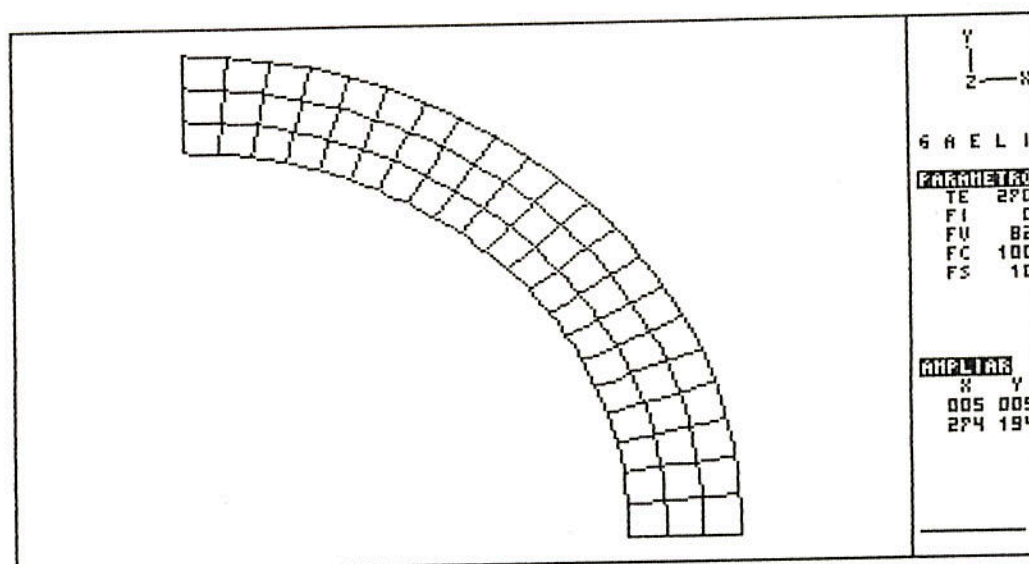


FIGURA I.2.4.2 - Malha do exemplo D-03.

Os resultados obtidos para solução iterativa dos exemplos com os cinco algoritmos são mostrados na TABELA I.2.4.2.

A melhor taxa de convergência alterna-se entre os algoritmos EPE Crout e EPE Cholesky. A melhor performance para o tempo de processamento das iterações foi obtida pelo preconditionador Diagonal.

Na FIGURA I.2.4.3 observa-se pelo gráfico mostrado que há redução percentual do número de iterações em relação ao número de graus de liberdade à medida que cresce o porte da malha analisada, como demonstra o comportamento da taxa de convergência do preconditionador EPE de Cholesky.

TABELA I.2.4.2 - Resultados obtidos para o Caso N.º 4.

| Exemplo | MGC | PRECONDICIONADORES | | | |
|-----------------------------------|-------|--------------------|-----------------|--------------|---------------------|
| | | Diagonal | EPE Cholesky | EPE Crout | EPE Gauss-Seidel |
| NÚMERO DE ITERAÇÕES | | | | | |
| D-01 | 90 | 58 | 26 | 37 | 40 |
| D-02 | 217 | 94 | 57 | 59 | 79 |
| D-03 | 391 | 136 | 97 | 100 | 131 |
| D-04 | 537 | 176 | 135 | 105 | 166 |
| D-05 | 670 | 196 | 177 | 148 | 226 |
| D-06 | 808 | 231 | 219 | 219 | 274 |
| D-07 | 943 | 271 | 259 | 261 | 319 |
| D-08 | 1066 | 309 | 300 | 302 | 366 |
| D-09 | 1194 | 351 | 341 | 340 | 411 |
| D-10 | 1341 | 391 | 345 | 380 | 455 |
| TEMPO DE PROCESSAMENTO (segundos) | | | | | |
| D-01 | 0,2 | 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,2 |
| D-02 | 1,8 | 0,8 | 1,3 | 1,3 | 1,5 |
| D-03 | 7,9 | 2,8 | 4,9 | 5,2 | 5,8 |
| D-04 | 20,3 | 6,8 | 12,2 | 9,6 | 13,2 |
| D-05 | 39,4 | 11,8 | 25,0 | 21,3 | 28,2 |
| D-06 | 68,9 | 19,8 | 44,4 | 45,2 | 49,2 |
| D-07 | 109,8 | 31,8 | 71,6 | 73,2 | 78,1 |
| D-08 | 162,7 | 47,4 | 108,0 | 110,4 | 117,2 |
| D-09 | 233,3 | 70,1 | 156,7 | 158,9 | 168,7 |
| D-10 | 324,0 | 95,1 | 193,2 | 223,5 | 237,2 |

I.2.5 - Observações Complementares

No geral, os casos analisados são problemas que geram matrizes bem condicionadas. Isto pode ser inferido do gráfico mostrado na FIGURA I.2.5.1, onde a variação do quociente D_{\min} / D_{\max} para os exemplos dos quatro casos está plotada segundo o número de graus de liberdade dos exemplos. Pode-se observar também, que o condicionamento das matrizes do Caso N.º 4 é bem pior do que os outros três casos, o que confirma o fato de neste caso os preconditionadores terem apresentado melhor desempenho na aceleração da taxa de convergência.

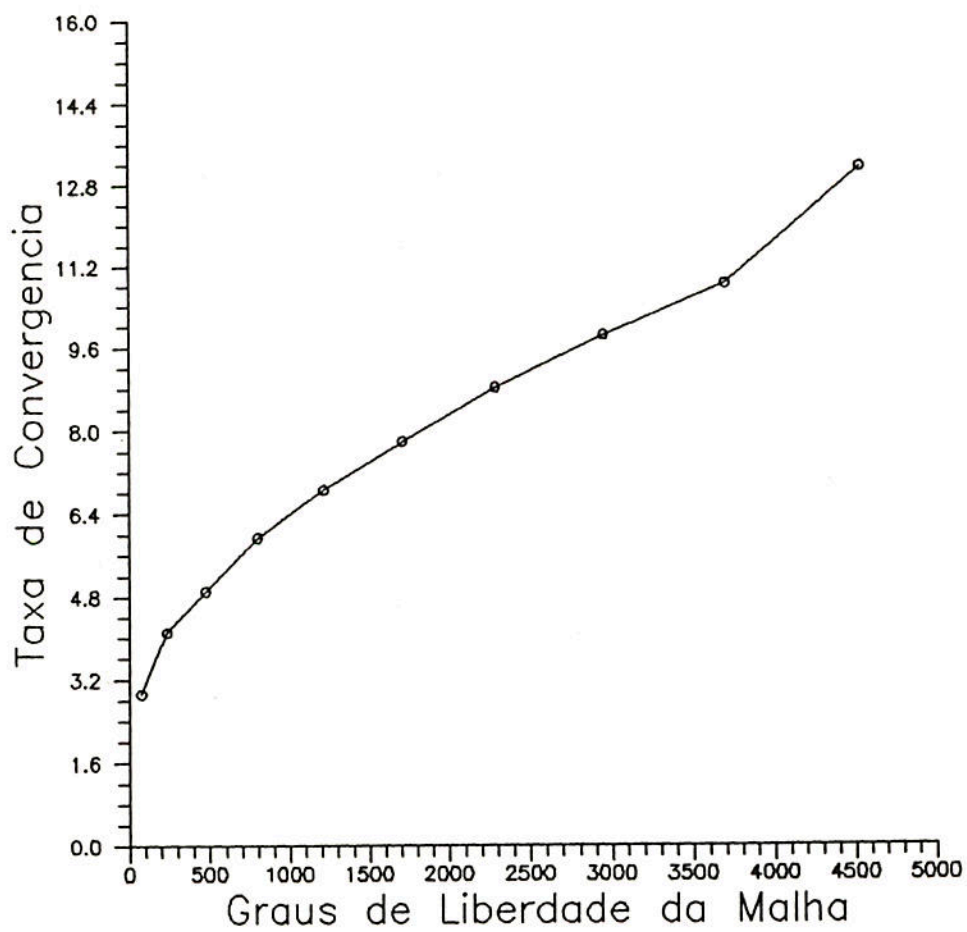


FIGURA I.2.4.3 - Performance da taxa de convergência do pre-condicionador EPE de Cholesky.

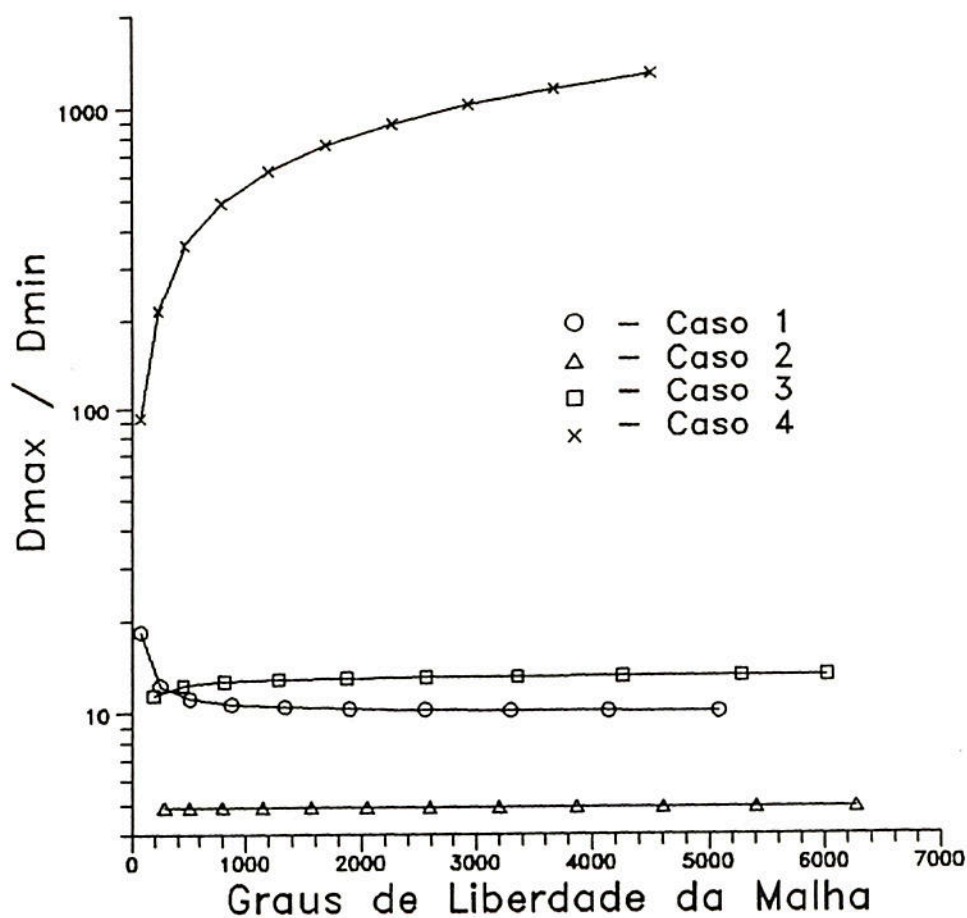


FIGURA I.2.5.1 - Variação do quociente D_{\max} / D_{\min} para os quatro casos de estado plano.

Os requisitos de armazenamento mostraram-se favoráveis à solução iterativa à medida que cresce o porte do problema tratado e a largura de banda das matrizes.

I.3 - Problemas de Placas

Foram analisados cinco casos. Os três primeiros, casos n.º 5, 6 e 7, tratam de problemas de placas finas segundo os postulados de Kirchoff onde não se considera os efeitos da distorção por corte. Empregou-se neste três casos o elemento quadrilátero de quatro nós conhecido na literatura como DKQ (HINTON e OWEN²²). Os casos n.º 8 e 9 tratam de problemas de placas segundo a teoria Midlin que considera a deformação por corte. Emprega-se nestes dois casos o elemento quadrilátero de oito nós (ZIENCKIEWICZ⁵¹).

I.3.1 - Caso N.º 5

Foi analisada uma placa hexagonal fina (HUGHES²³) de bordos engastados sujeita à uma carga concentrada no seu ponto central conforme mostrado na FIGURA I.3.1.1.

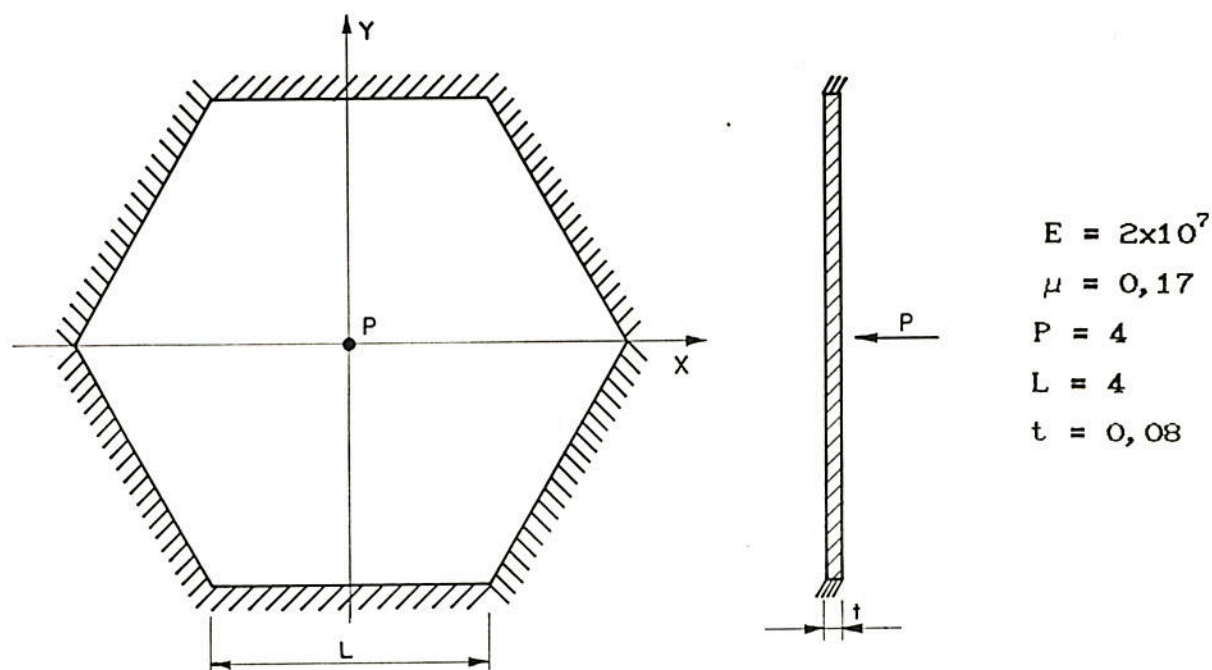


FIGURA I.3.1.1 - Caso N.º 5.

Foram estabelecidas dez malhas gradualmente crescentes

sobre um quarto do domínio devido a dupla simetria do problema. Os dados relativos a estas dez malhas são mostrados na TABELA I.3.1.1.

TABELA I.3.1.1 - Dados relativos às malhas do Caso N.º 5.

| Exemplo | Malha | Número de Elem. | Número de Nós | Graus de Liberdade | Requisito p/ EPE | Armazenamento Global Perfil | Banda |
|---------|-------|-----------------|---------------|--------------------|------------------|-----------------------------|-------|
| E-01 | 10x10 | 100 | 121 | 363 | 7800 | 4323 | 39 |
| E-02 | 15x15 | 225 | 256 | 768 | 17550 | 13008 | 54 |
| E-03 | 20x20 | 400 | 441 | 1323 | 31200 | 29043 | 69 |
| E-04 | 25x25 | 625 | 676 | 2028 | 48750 | 54678 | 84 |
| E-05 | 30x30 | 900 | 961 | 2883 | 70200 | 92163 | 99 |
| E-06 | 35x35 | 1225 | 1296 | 3888 | 95550 | 143748 | 114 |
| E-07 | 40x40 | 1600 | 1681 | 5043 | 124800 | 211683 | 129 |
| E-08 | 45x45 | 2025 | 2116 | 6348 | 157950 | 298218 | 144 |
| E-09 | 50x50 | 2500 | 2601 | 7803 | 195000 | 405603 | 159 |
| E-10 | 55x55 | 3025 | 3136 | 9408 | 235950 | 536088 | 174 |

Na FIGURA I.3.1.2 é mostrada a malha do exemplo E-02.

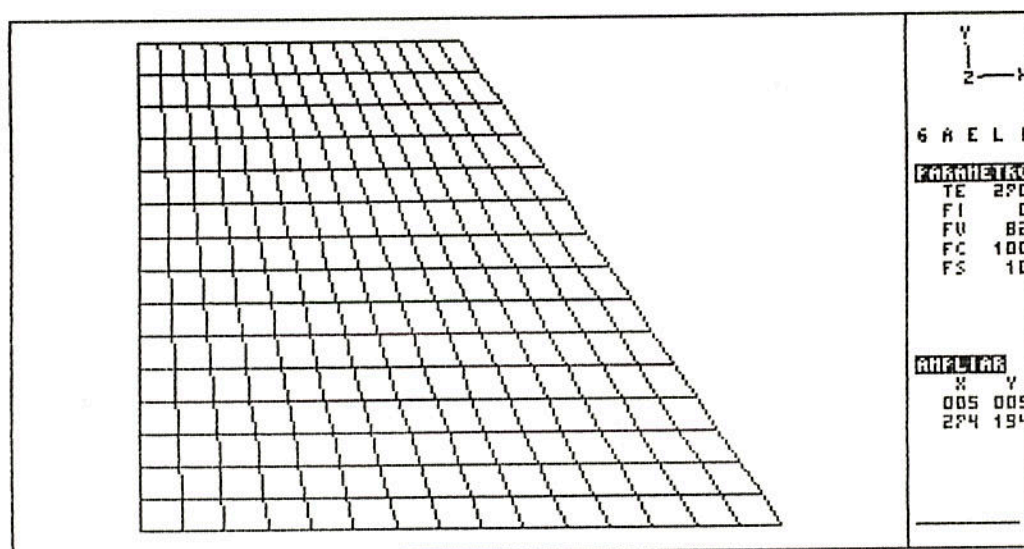


FIGURA I.3.1.2 - Malha do exemplo E-02.

O número de iterações para a convergência e os tempos de processamento para os cinco algoritmos são mostrados na TABELA I.3.1.2.

Observa-se que o algoritmo do MGC não convergiu para as malhas a partir do exemplo E-08. O melhor desempenho quanto à taxa de convergência foi obtido com o algoritmo EPE Cholesky, e com os algoritmos EPE Crout e EPE Gauss-Simetrizado apresentando comportamento bastante próximo do primeiro.

TABELA I.3.1.2 - Resultados obtidos para o Caso N.º 5.

| Exemplo | PRECONDICIONADORES | | | | |
|-----------------------------------|--------------------|----------|--------------|-----------|------------------|
| | MGC | Diagonal | EPE Cholesky | EPE Crout | EPE Gauss-Seidel |
| NÚMERO DE ITERAÇÕES | | | | | |
| E-01 | 204 | 131 | 53 | 55 | 57 |
| E-02 | 501 | 288 | 114 | 117 | 122 |
| E-03 | 924 | 509 | 201 | 206 | 215 |
| E-04 | 1508 | 763 | 313 | 321 | 333 |
| E-05 | 2260 | 1132 | 449 | 462 | 477 |
| E-06 | 3161 | 1538 | 611 | 629 | 645 |
| E-07 | 4167 | 2029 | 795 | 824 | 838 |
| E-08 | * | 2582 | 997 | 1041 | 1053 |
| E-09 | * | 3186 | 1228 | 1284 | 1289 |
| E-10 | * | 3857 | 1485 | 1550 | 1568 |
| TEMPO DE PROCESSAMENTO (segundos) | | | | | |
| E-01 | 3,6 | 2,3 | 2,5 | 2,6 | 2,1 |
| E-02 | 21,3 | 12,3 | 12,1 | 12,5 | 10,5 |
| E-03 | 69,8 | 40,5 | 38,8 | 44,1 | 32,7 |
| E-04 | 176,0 | 88,7 | 90,3 | 92,7 | 79,1 |
| E-05 | 378,2 | 192,9 | 187,3 | 193,0 | 164,6 |
| E-06 | 727,9 | 353,5 | 347,8 | 357,5 | 306,0 |
| E-07 | 1257,1 | 616,6 | 585,2 | 606,0 | 514,0 |
| E-08 | * | 1000,7 | 938,5 | 984,9 | 830,7 |
| E-09 | * | 1518,1 | 1417,8 | 1493,8 | 1251,1 |
| E-10 | * | 2221,1 | 2161,5 | 2237,8 | 1862,2 |

(*) Não houve convergência.

O algoritmo EPE Gauss-Seidel Simetrizado apresentou o melhor desempenho quanto ao tempo necessário para processamento das iterações, enquanto o comportamento dos outros três preconditionadores foi bastante parecido.

Neste caso não se observa um decréscimo percentual significativo do número de iterações com o aumento da densidade de elementos na malha. Isto pode ser observado na FIGURA

1.3.1.3, onde a performance da taxa de convergência do preconditionador EPE de Cholesky é mostrada.

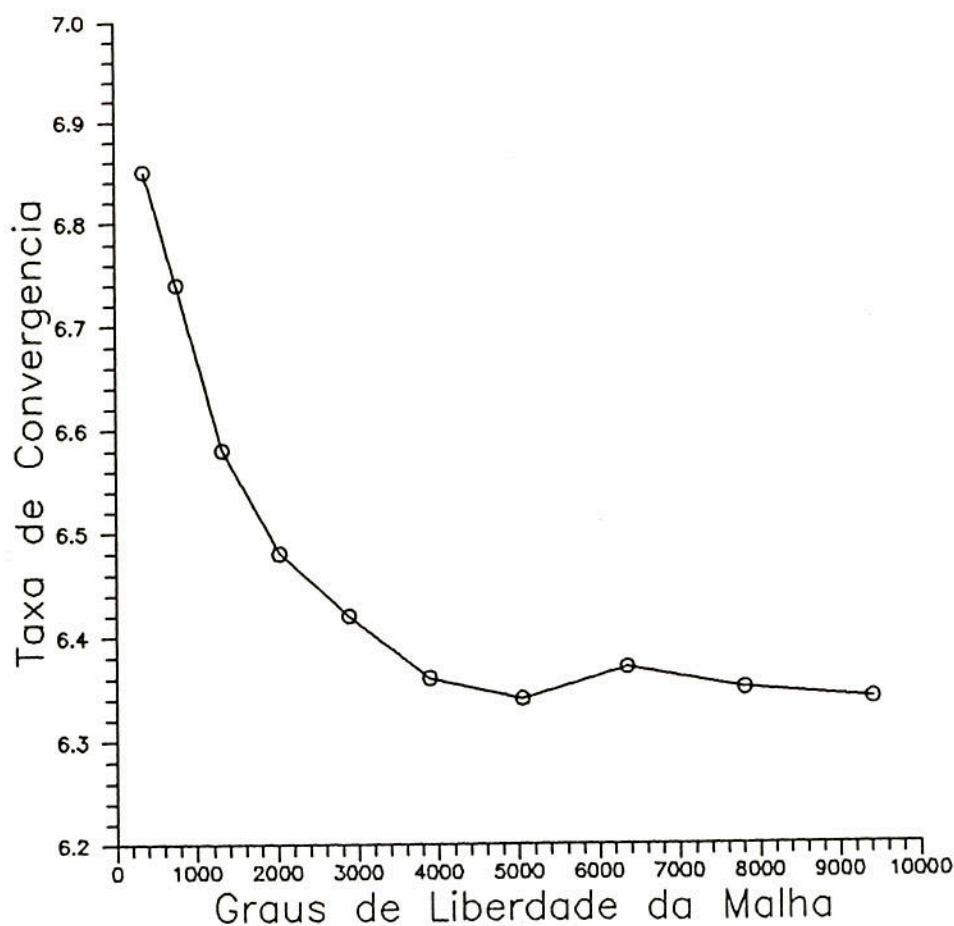


FIGURA 1.3.1.3 - Performance da taxa de convergência do preconditionador EPE de Cholesky.

1.3.2 - Caso N.º 6

Analisou-se aqui, uma placa fina quadrada de bordos apoiados sob carga uniformemente distribuída (MACNEAL e HARDER³⁶) conforme mostrado na FIGURA 1.3.2.1 .

Foram discretizadas dez malhas gradualmente crescentes. Estas discretizações foram feitas sobre um quarto do domínio tendo em vista a dupla simetria do mesmo. Os dados rela-

tivos a cada um dos dez exemplos gerados são apresentados na TABELA I.3.2.1.

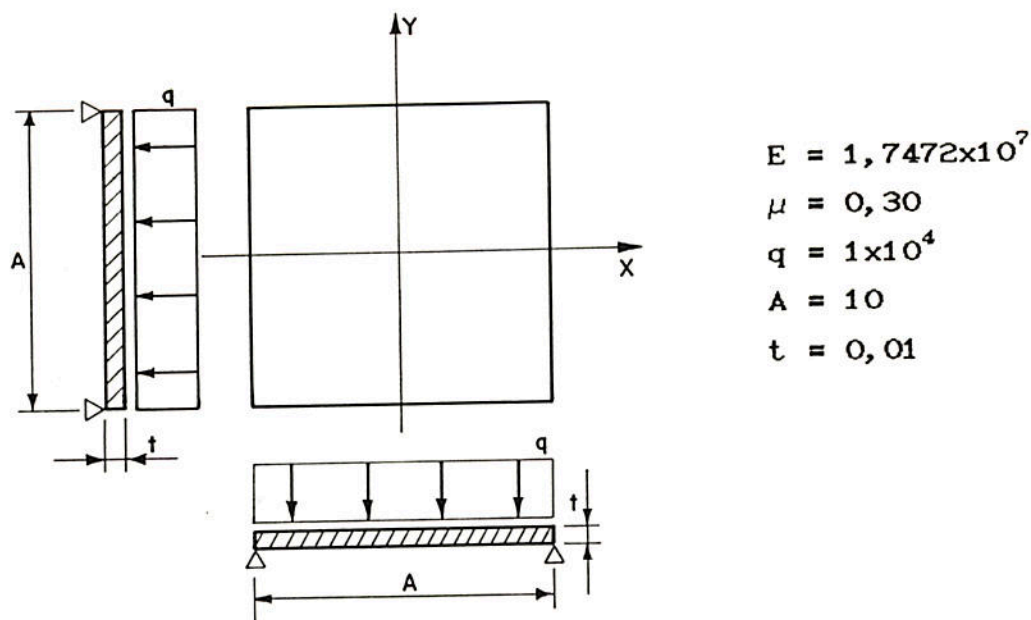


FIGURA I.3.2.1 - Caso N.º 6.

TABELA I.3.2.1 - Dados relativos às malhas do Caso N.º 6.

| Exemplo | Malha | Número de Elem. | Número de Nós | Graus de Liberdade | Requisito p/ EPE | Armazenamento Global Perfil | Banda |
|---------|-------|-----------------|---------------|--------------------|------------------|-----------------------------|-------|
| F-01 | 10x10 | 100 | 121 | 363 | 7800 | 4323 | 39 |
| F-02 | 15x15 | 225 | 256 | 768 | 17550 | 13008 | 54 |
| F-03 | 20x20 | 400 | 441 | 1323 | 31200 | 29043 | 69 |
| F-04 | 25x25 | 625 | 676 | 2028 | 48750 | 54678 | 84 |
| F-05 | 30x30 | 900 | 961 | 2883 | 70200 | 92163 | 99 |
| F-06 | 35x35 | 1225 | 1296 | 3888 | 95550 | 143748 | 114 |
| F-07 | 40x40 | 1600 | 1681 | 5043 | 124800 | 211683 | 129 |
| F-08 | 45x45 | 2025 | 2116 | 6348 | 157950 | 298218 | 144 |
| F-09 | 50x50 | 2500 | 2601 | 7803 | 195000 | 405603 | 159 |
| F-10 | 55x55 | 3025 | 3136 | 9408 | 235950 | 536088 | 174 |

Na FIGURA I.3.2.2 é mostrada a malha relativa ao exemplo F-01.

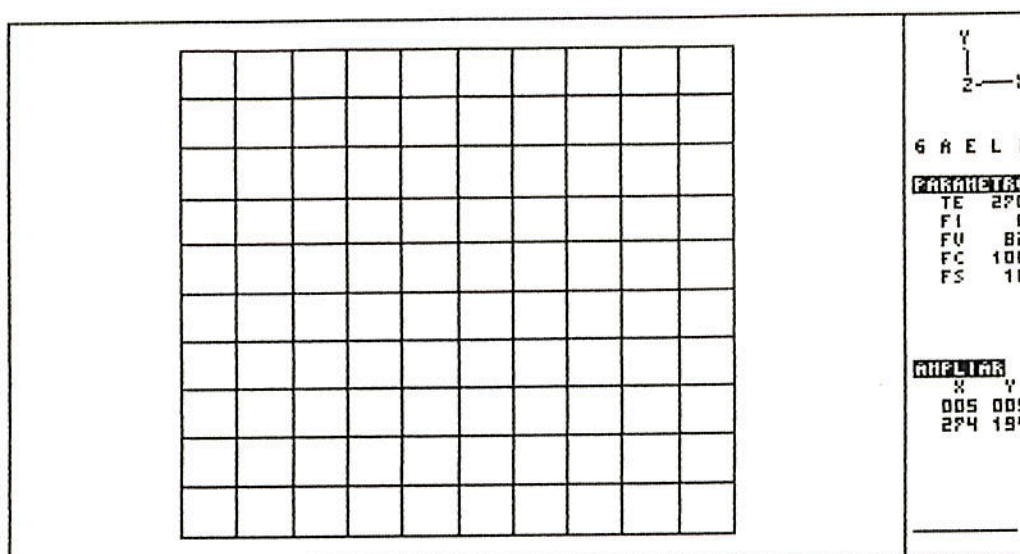


FIGURA I.3.2.2 - Malha do exemplo F-01.

Os resultados obtidos para a solução iterativa dos dez exemplos são apresentados na TABELA I.3.2.2.

Observa-se que para as duas malhas mais densas, o algoritmo do MGC não apresentou convergência. A melhor performance quanto à taxa de convergência alternou-se entre os algoritmos EPE Cholesky e EPE Crout, com o algoritmo EPE Gauss-Seidel Simetrizado apresentando desempenho levemente inferior.

Os menores tempos de processamento foram obtidos pelo algoritmo Diagonal, pois embora apresentando taxa de convergência inferior aos outros três preconditionadores, sua iteração é mais rápida.

Também não se observou neste caso um decréscimo significativo do número de iterações para a convergência com o aumento da densidade de elementos na malha. Isto pode ser observado no gráfico da FIGURA I.3.2.3, onde o desempenho da taxa de convergência do preconditionador EPE de Crout é mostrado.

TABELA I.3.2.2 - Resultados obtidos para o Caso N.º 6.

| Exemplo | PRECONDICIONADORES | | | | |
|-----------------------------------|--------------------|----------|-----------------|--------------|---------------------|
| | MGC | Diagonal | EPE Cholesky | EPE Crout | EPE Gauss-Seidel |
| NÚMERO DE ITERAÇÕES | | | | | |
| F-01 | 235 | 86 | 60 | 61 | 61 |
| F-02 | 482 | 180 | 129 | 128 | 135 |
| F-03 | 826 | 305 | 222 | 223 | 230 |
| F-04 | 1355 | 461 | 339 | 343 | 353 |
| F-05 | 1972 | 643 | 483 | 486 | 501 |
| F-06 | 2669 | 860 | 654 | 661 | 673 |
| F-07 | 3490 | 1109 | 852 | 833 | 849 |
| F-08 | 4420 | 1380 | 1075 | 1053 | 1061 |
| F-09 | * | 1692 | 1291 | 1297 | 1305 |
| F-10 | * | 2027 | 1557 | 1566 | 1576 |
| TEMPO DE PROCESSAMENTO (segundos) | | | | | |
| F-01 | 4,3 | 1,5 | 2,8 | 2,8 | 2,3 |
| F-02 | 20,5 | 7,7 | 13,8 | 13,5 | 11,6 |
| F-03 | 62,4 | 23,1 | 41,9 | 41,9 | 35,3 |
| F-04 | 160,0 | 54,2 | 98,8 | 100,4 | 84,8 |
| F-05 | 333,7 | 111,1 | 205,1 | 203,8 | 173,9 |
| F-06 | 621,8 | 203,4 | 373,2 | 372,1 | 316,1 |
| F-07 | 1084,0 | 338,1 | 630,9 | 624,4 | 526,4 |
| F-08 | 1669,5 | 524,1 | 984,7 | 979,4 | 820,5 |
| F-09 | * | 795,1 | 1458,2 | 1490,9 | 1245,2 |
| F-10 | * | 1151,9 | 2130,8 | 2177,1 | 1819,4 |

(*) Não houve convergência.

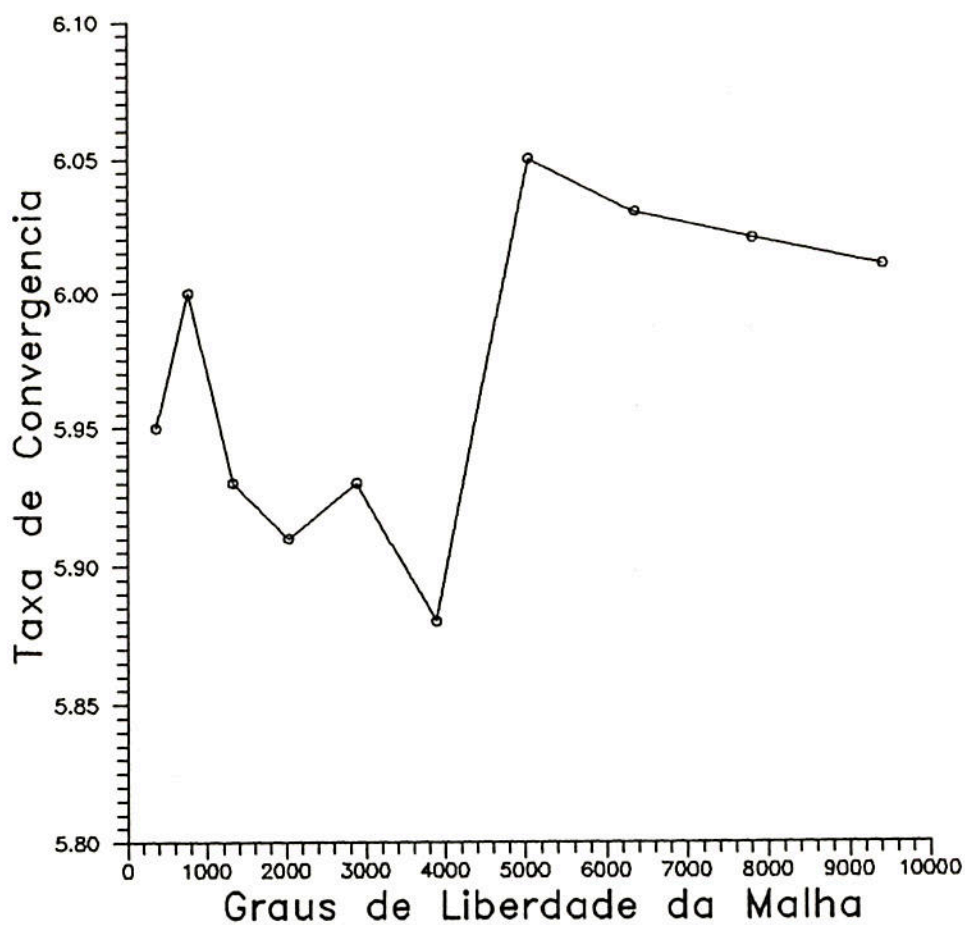


FIGURA I.3.2.3 - Performance da taxa de convergência do preconditionador EPE de Crout.

I.3.3 - Caso n.º 7

Neste caso foi analisada uma placa retangular fina de bordos apoiados sob carga uniformemente distribuída (MACNEAL e HARDER³⁶), conforme mostrado na FIGURA I.3.3.1.

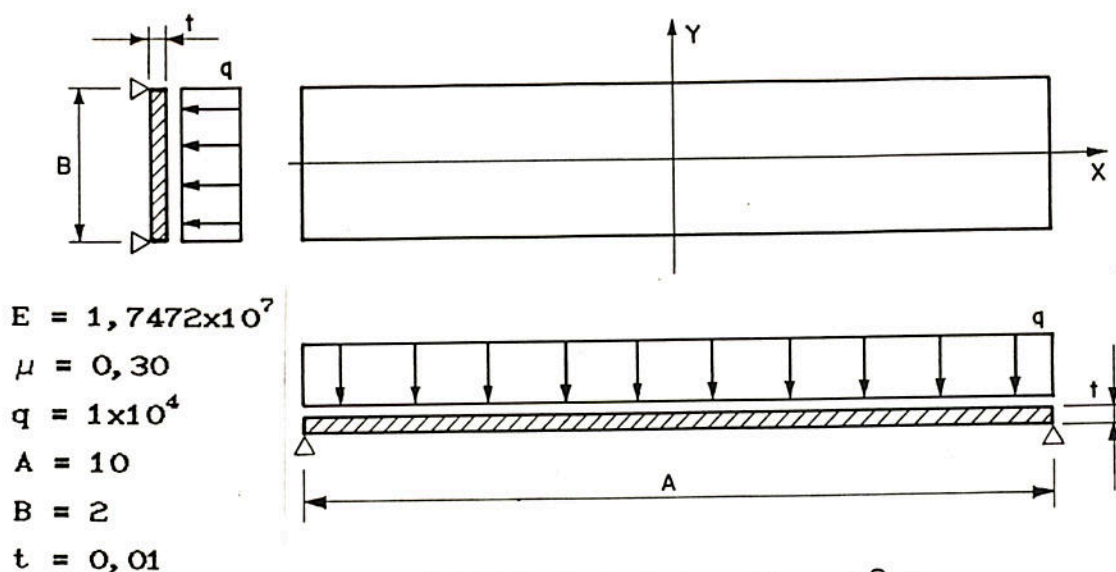


FIGURA I.3.3.1 - Caso N.º 7.

Foram discretizadas dez malhas gradualmente crescentes sobre um quarto do domínio. Na TABELA I.3.3.1 são mostrados os dados relativos às malhas dos exemplos gerados.

TABELA I.3.3.1 - Dados relativos às malhas do Caso N.º 7.

| Exemplo | Malha | Número de Elem. | Número de Nós | Graus de Liberdade | Requisito p/ EPE | Armazenamento Global Perfil | Banda |
|---------|-------|-----------------|---------------|--------------------|------------------|-----------------------------|-------|
| G-01 | 10x10 | 100 | 121 | 363 | 7800 | 4323 | 39 |
| G-02 | 15x15 | 225 | 256 | 768 | 17550 | 13008 | 54 |
| G-03 | 20x20 | 400 | 441 | 1323 | 31200 | 29043 | 69 |
| G-04 | 25x25 | 625 | 676 | 2028 | 48750 | 54678 | 84 |
| G-05 | 30x30 | 900 | 961 | 2883 | 70200 | 92163 | 99 |
| G-06 | 35x35 | 1225 | 1296 | 3888 | 95550 | 143748 | 114 |
| G-07 | 40x40 | 1600 | 1681 | 5043 | 124800 | 211683 | 129 |
| G-08 | 45x45 | 2025 | 2116 | 6348 | 157950 | 298218 | 144 |
| G-09 | 50x50 | 2500 | 2601 | 7803 | 195000 | 405603 | 159 |
| G-10 | 55x55 | 3025 | 3136 | 9408 | 235950 | 536088 | 174 |

Na FIGURA I.3.3.2 é mostrada a malha de elementos finitos para o exemplo G-01.

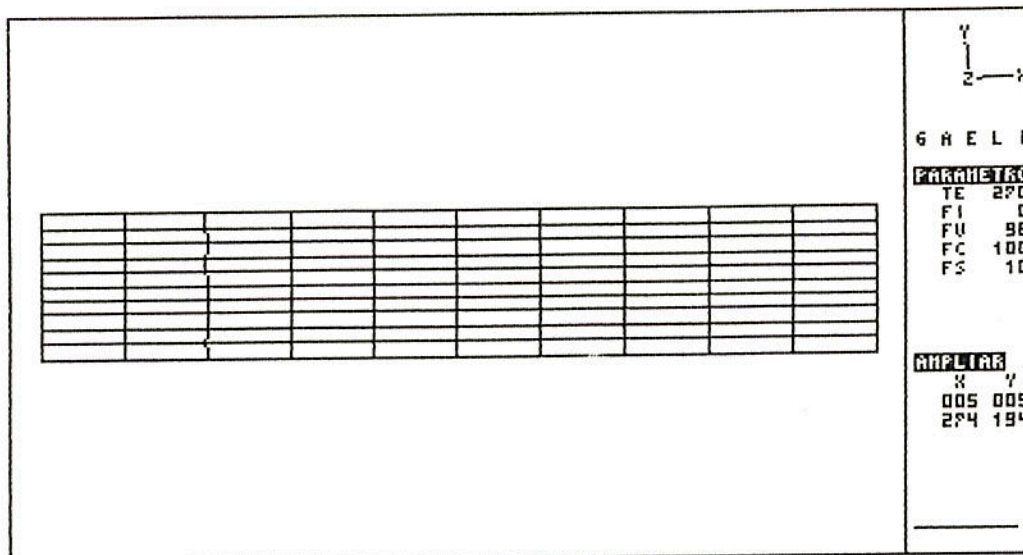


FIGURA I.3.3.2 - Malha do exemplo G-01.

Os resultados obtidos na solução iterativa dos dez exemplos são mostrados na TABELA I.3.3.2.

Observa-se que o melhor desempenho quanto à taxa de convergência e ao tempo de processamento das iterações foi obtido pelo preconditionador EPE de Cholesky. Os demais algoritmos não obtiveram convergência para todas as malhas geradas.

Neste caso não ocorreu um decréscimo do número de iterações com o aumento do número de garus de liberdade da malha. Isto pode ser observado no gráfico da FIGURA I.3.3.3 onde o desempenho da taxa de convergência do preconditionador EPE de Cholesky é mostrado.

TABELA I.3.3.2 - Resultados obtidos para o Caso N.º 7.

| Exemplo | PRECONDICIONADORES | | | | |
|-----------------------------------|--------------------|----------|-----------------|--------------|---------------------|
| | MGC | Diagonal | EPE Cholesky | EPE Crout | EPE Gauss-Seidel |
| NÚMERO DE ITERAÇÕES | | | | | |
| G-01 | 644 | 331 | 148 | 150 | 188 |
| G-02 | 1846 | 837 | 338 | 354 | 441 |
| G-03 | 3135 | 1601 | 594 | 632 | 816 |
| G-04 | * | 2593 | 943 | 1013 | 1279 |
| G-05 | * | 3757 | 1356 | 1458 | 1876 |
| G-06 | * | * | 1853 | 1990 | 2595 |
| G-07 | * | * | 2418 | 2619 | 3415 |
| G-08 | * | * | 3112 | 3323 | 4334 |
| G-09 | * | * | 3854 | 4146 | * |
| G-10 | * | * | 4676 | * | * |
| TEMPO DE PROCESSAMENTO (segundos) | | | | | |
| G-01 | 11,4 | 6,1 | 6,9 | 7,0 | 7,4 |
| G-02 | 79,1 | 36,3 | 35,9 | 37,5 | 38,3 |
| G-03 | 240,8 | 122,7 | 112,4 | 119,2 | 128,5 |
| G-04 | * | 306,9 | 276,3 | 300,4 | 309,4 |
| G-05 | * | 641,5 | 570,9 | 615,7 | 660,6 |
| G-06 | * | * | 1057,8 | 1189,0 | 1259,2 |
| G-07 | * | * | 1823,3 | 1978,8 | 2156,8 |
| G-08 | * | * | 2965,8 | 3184,7 | 3352,7 |
| G-09 | * | * | 4395,4 | 4754,6 | * |
| G-10 | * | * | 6386,7 | * | * |

(*) Não houve convergência.

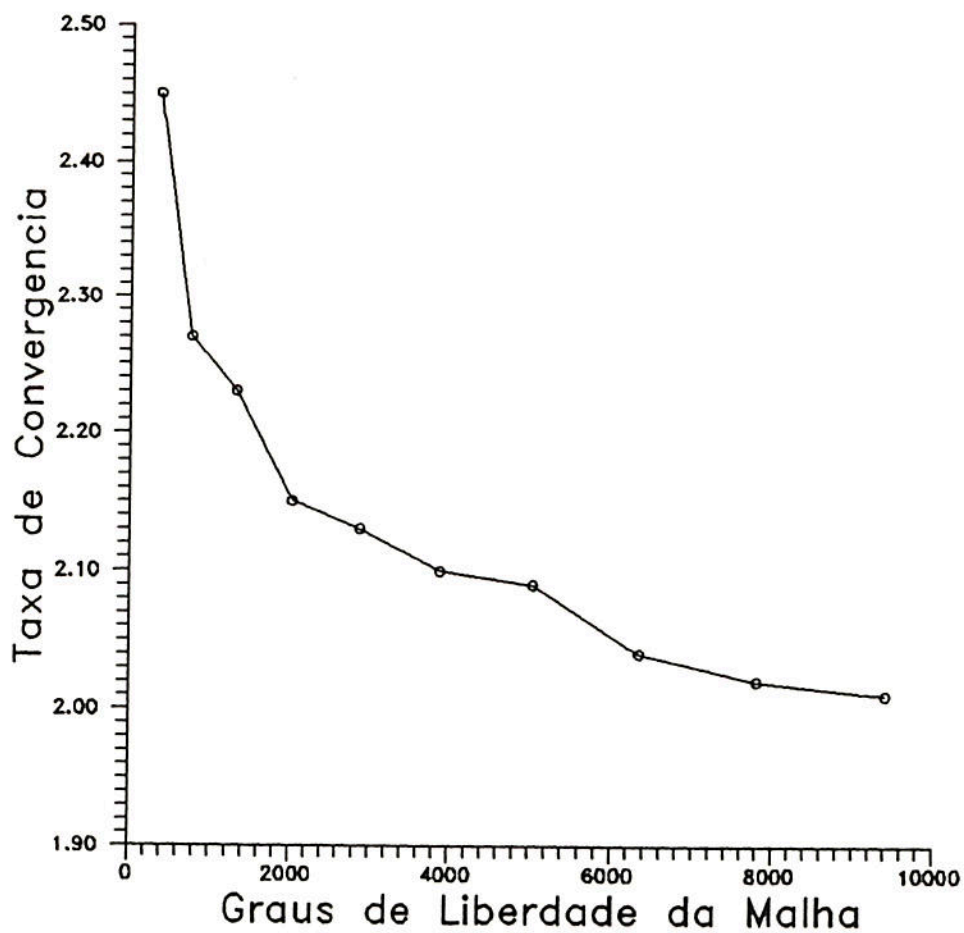


FIGURA I.3.3.3 - Performance da taxa de convergência do pre-condicionador EPE de Cholesky.

I.3.4 - Caso N.º 8

Neste caso foi tratado o problema de uma placa circular de bordo engastado sujeita a uma carga concentrada no seu ponto central (HUGHES²³) conforme mostrado na FIGURA I.3.4.1.

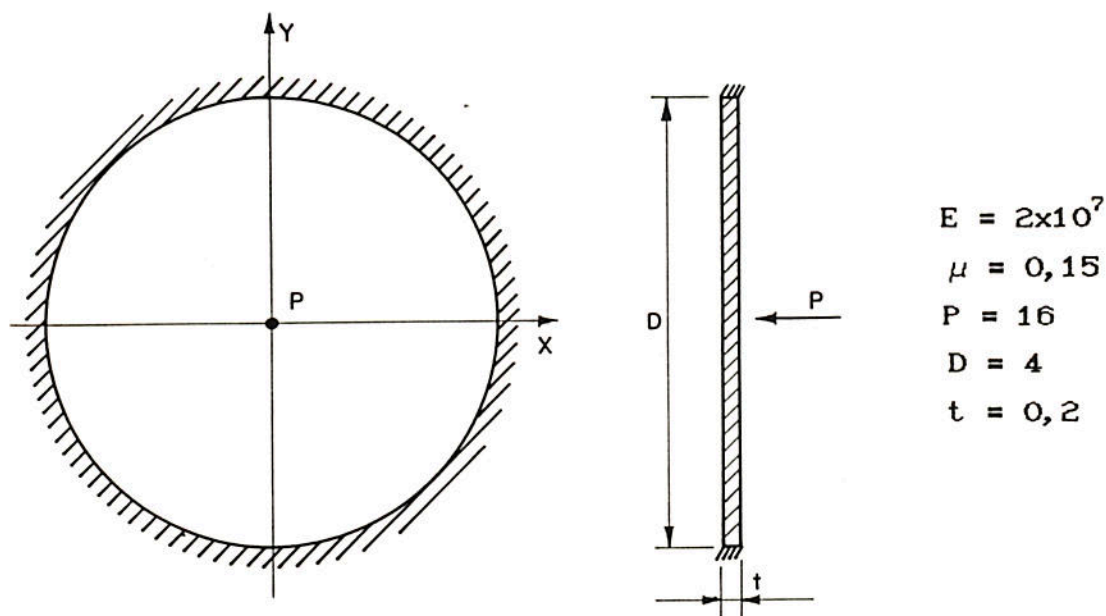


FIGURA I.3.4.1 - Caso N.º 8.

Foram discretizadas treze malhas gradualmente crescentes sobre um quarto do domínio devido à dupla simetria do problema. Na TABELA I.3.4.1 são mostrados os dados relativos às malhas dos exemplos gerados.

TABELA I.3.4.1 - Dados relativos às malhas do Caso N.º 8.

| Exemplo | Malha | Número de Elem. | Número de Nós | Graus de Liberdade | Requisito p/ EPE | Armazenamento Global Perfil | Banda |
|---------|---------|-----------------|---------------|--------------------|------------------|-----------------------------|-------|
| H-01 | 3x 4x 4 | 48 | 169 | 507 | 14400 | 8679 | 144 |
| H-02 | 3x 5x 5 | 75 | 256 | 768 | 22500 | 15903 | 174 |
| H-03 | 3x 6x 6 | 108 | 361 | 1083 | 32400 | 26301 | 204 |
| H-04 | 3x 7x 7 | 147 | 484 | 1452 | 44100 | 40449 | 234 |
| H-05 | 3x 8x 8 | 192 | 625 | 1875 | 57600 | 58923 | 264 |
| H-06 | 3x 9x 9 | 243 | 784 | 2352 | 72900 | 82299 | 294 |
| H-07 | 3x10x10 | 300 | 961 | 2783 | 90000 | 111153 | 324 |
| H-08 | 3x11x11 | 363 | 1156 | 3468 | 108900 | 146061 | 354 |
| H-09 | 3x12x12 | 432 | 1369 | 4107 | 129600 | 187599 | 384 |
| H-10 | 3x13x13 | 507 | 1600 | 4800 | 152100 | 236343 | 414 |
| H-11 | 3x14x14 | 588 | 1849 | 5547 | 176400 | 292869 | 444 |
| H-12 | 3x15x15 | 675 | 2116 | 6348 | 202500 | 357753 | 474 |
| H-13 | 3x16x16 | 768 | 2401 | 7203 | 230400 | 431571 | 504 |

Na FIGURA I.3.4.2 é mostrada a malha de elementos finitos para o exemplo H-02.

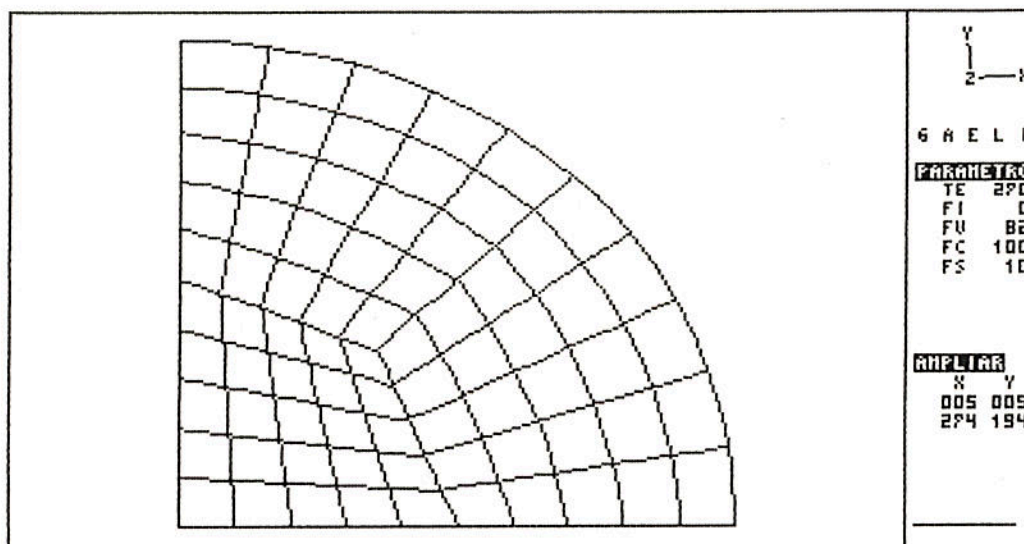


FIGURA I.3.4.2 - Malha do exemplo H-02.

Os resultados obtidos na solução iterativa dos treze exemplos pelos cinco algoritmos são mostrados na TABELA I.3.4.2.

O melhor desempenho quanto à taxa de convergência foi obtido pelo algoritmo EPE Cholesky. Os outros três preconditionadores também foram efetivos na solução pois apresentaram um número de iterações para atingir-se a convergência bem inferiores do que o algoritmo do MGC.

Quanto aos tempos de processamento, o algoritmo Diagonal apresentou o melhor desempenho. Os demais preconditionadores embora tenham ficado aquém deste, foram mais efetivos do que o algoritmo do MGC.

Ocorreu uma diminuição percentual do número de iterações para atingir-se a convergência à medida que cresce o número de graus de liberdade do problema, como pode ser observado no gráfico da FIGURA I.3.4.3, onde é mostrado o desempenho da taxa de convergência do preconditionador Diagonal.

TABELA I.3.4.2 - Resultados obtidos para o Caso N.º 8.

| Exemplo | PRECONDICIONADORES | | | | |
|-----------------------------------|--------------------|----------|-----------------|--------------|---------------------|
| | MGC | Diagonal | EPE Cholesky | EPE Crout | EPE Gauss-Seidel |
| NÚMERO DE ITERAÇÕES | | | | | |
| H-01 | 280 | 135 | 59 | 61 | 75 |
| H-02 | 359 | 126 | 72 | 78 | 100 |
| H-03 | 459 | 203 | 93 | 95 | 123 |
| H-04 | 550 | 236 | 110 | 113 | 148 |
| H-05 | 624 | 202 | 128 | 129 | 168 |
| H-06 | 717 | 228 | 146 | 143 | 193 |
| H-07 | 793 | 254 | 162 | 161 | 219 |
| H-08 | 897 | 279 | 180 | 179 | 244 |
| H-09 | 980 | 305 | 197 | 197 | 269 |
| H-10 | 1059 | 331 | 213 | 215 | 294 |
| H-11 | 1150 | 358 | 228 | 232 | 319 |
| H-12 | 1229 | 383 | 228 | 249 | 343 |
| H-13 | 1301 | 409 | 241 | 261 | 365 |
| TEMPO DE PROCESSAMENTO (segundos) | | | | | |
| H-01 | 10,1 | 4,6 | 4,9 | 5,3 | 5,3 |
| H-02 | 20,4 | 6,9 | 9,2 | 10,1 | 11,1 |
| H-03 | 37,1 | 16,1 | 16,7 | 17,7 | 20,0 |
| H-04 | 60,8 | 25,6 | 26,9 | 28,4 | 32,4 |
| H-05 | 89,4 | 28,7 | 40,6 | 42,1 | 48,0 |
| H-06 | 129,8 | 40,9 | 58,4 | 58,7 | 69,6 |
| H-07 | 176,4 | 56,1 | 79,8 | 81,1 | 97,4 |
| H-08 | 241,7 | 74,7 | 107,4 | 108,8 | 131,4 |
| H-09 | 313,7 | 97,2 | 140,1 | 141,9 | 172,7 |
| H-10 | 398,3 | 123,9 | 177,2 | 181,6 | 227,9 |
| H-11 | 517,0 | 155,6 | 222,5 | 245,5 | 293,7 |
| H-12 | 614,3 | 190,3 | 251,5 | 277,6 | 343,7 |
| H-13 | 770,8 | 232,4 | 299,8 | 342,4 | 476,2 |

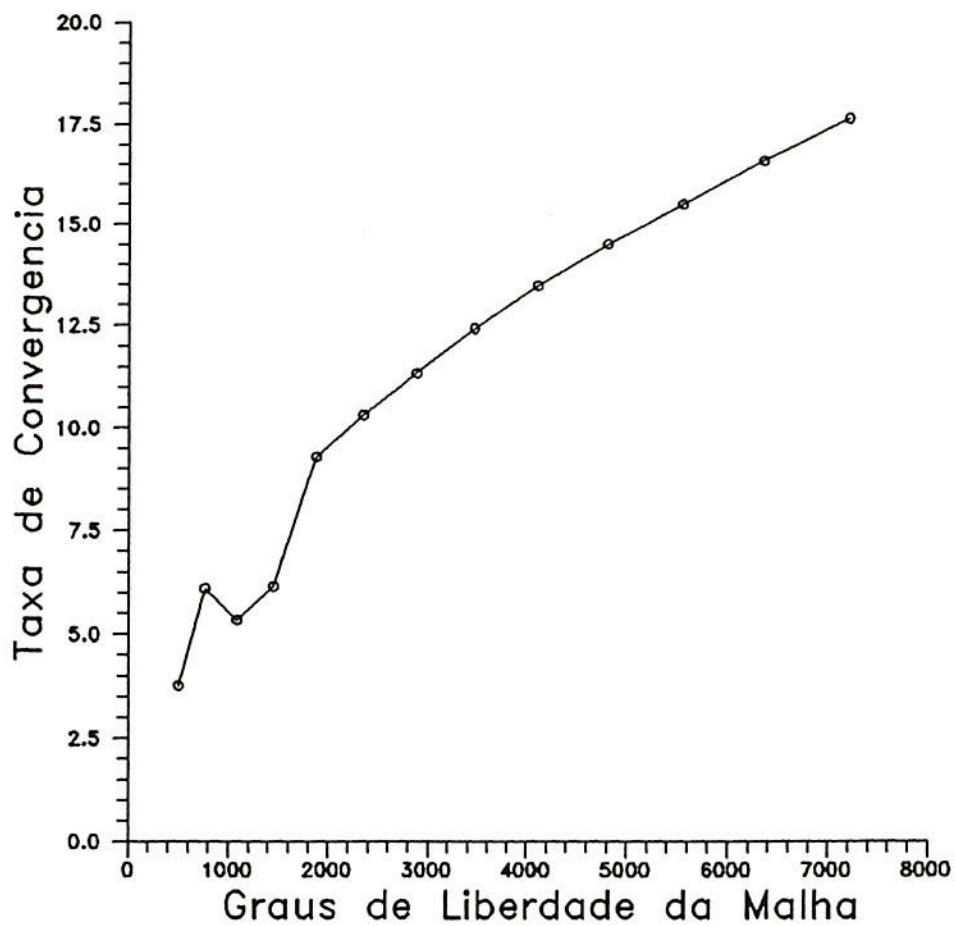


FIGURA I.3.4.3 - Performance da taxa de convergência do pre-condicionador EPE de Diagonal.

I.3.5 - Caso N.º 9

Foi analisada uma placa retangular engastada em um dos bordos e livre nos demais sujeita a seu peso próprio, conforme mostrado na FIGURA I.3.5.1.

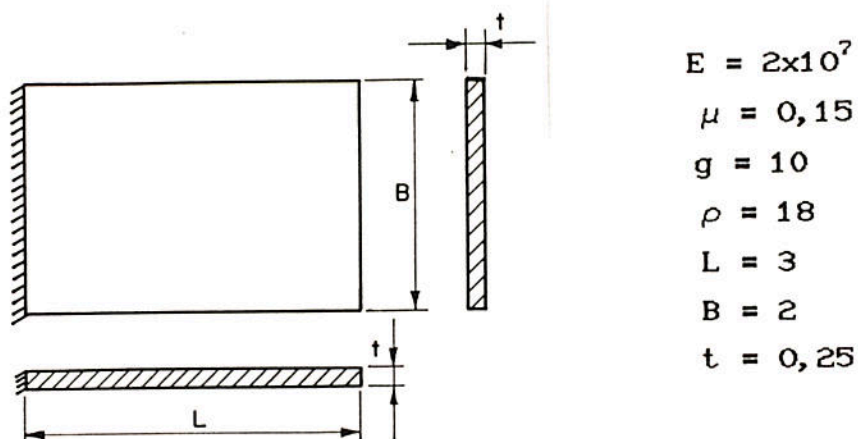


FIGURA I.3.5.1 - Caso N.º 9.

Foram construídas para este caso, dez malhas gradualmente crescentes. Os dados relativos a estes dez exemplos são mostrados na TABELA I.3.5.1.

TABELA I.3.5.1 - Dados relativos às malhas do Caso N.º 9.

| Exemplo | Malha | Número de Elem. | Número de Nós | Graus de Liberdade | Requisito p/ EPE | Armazenamento Global Perfil | Banda |
|---------|-------|-----------------|---------------|--------------------|------------------|-----------------------------|-------|
| I-01 | 4x4 | 16 | 65 | 195 | 4800 | 2403 | 51 |
| I-02 | 7x7 | 49 | 176 | 528 | 14700 | 10503 | 78 |
| I-03 | 10x10 | 100 | 341 | 1023 | 30000 | 28053 | 105 |
| I-04 | 13x13 | 169 | 560 | 1680 | 50700 | 58698 | 132 |
| I-05 | 16x16 | 256 | 833 | 2499 | 76800 | 106083 | 159 |
| I-06 | 19x19 | 361 | 1160 | 3480 | 108300 | 173853 | 186 |
| I-07 | 22x22 | 484 | 1541 | 4623 | 145200 | 265653 | 213 |
| I-08 | 25x25 | 625 | 1976 | 5928 | 187500 | 385128 | 240 |
| I-09 | 28x28 | 784 | 2465 | 7395 | 235200 | 535923 | 267 |
| I-10 | 31x31 | 961 | 3008 | 9024 | 288300 | 721683 | 294 |

Na FIGURA I.3.5.2 é mostrada a malha de elementos finitos para o exemplo I-03.

Os resultados obtidos na solução dos dez exemplos deste caso são apresentados na TABELA I.3.5.2.

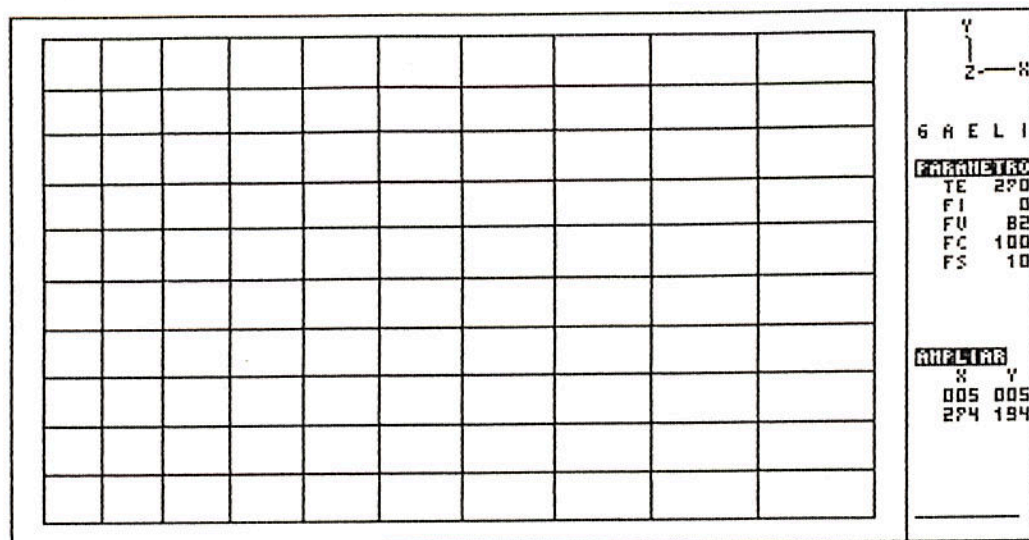


FIGURA I.3.5.2 - Malha do exemplo I-03.

TABELA I.3.5.2 - Resultados obtidos para o Caso N.º 9.

| Exemplo | PRECONDICIONADORES | | | | |
|-----------------------------------|--------------------|----------|-----------------|--------------|---------------------|
| | MGC | Diagonal | EPE Cholesky | EPE Crout | EPE Gauss-Seidel |
| NÚMERO DE ITERAÇÕES | | | | | |
| I-01 | 197 | 100 | 58 | 66 | 81 |
| I-02 | 473 | 158 | 100 | 102 | 130 |
| I-03 | 757 | 212 | 142 | 144 | 188 |
| I-04 | 1044 | 267 | 199 | 199 | 252 |
| I-05 | 1298 | 325 | 256 | 258 | 323 |
| I-06 | 1566 | 394 | 315 | 317 | 395 |
| I-07 | 1821 | 456 | 373 | 376 | 469 |
| I-08 | 2118 | 516 | 432 | 435 | 536 |
| I-09 | 2393 | 576 | 490 | 495 | 608 |
| I-10 | 2683 | 637 | 549 | 554 | 671 |
| TEMPO DE PROCESSAMENTO (segundos) | | | | | |
| I-01 | 2,4 | 1,1 | 1,6 | 1,8 | 1,9 |
| I-02 | 17,4 | 5,6 | 8,2 | 8,6 | 9,4 |
| I-03 | 56,7 | 15,6 | 23,4 | 24,4 | 27,8 |
| I-04 | 132,0 | 33,3 | 54,7 | 56,6 | 63,4 |
| I-05 | 251,3 | 62,2 | 107,6 | 111,4 | 135,4 |
| I-06 | 418,7 | 105,0 | 185,1 | 189,5 | 211,4 |
| I-07 | 651,7 | 168,8 | 290,5 | 296,7 | 333,0 |
| I-08 | 989,7 | 242,5 | 450,0 | 455,0 | 513,7 |
| I-09 | 1364,9 | 329,7 | 613,7 | 679,7 | 717,2 |
| I-10 | 1871,6 | 447,3 | 839,9 | 862,5 | 945,6 |

(*) Não houve convergência.

Observa-se que o condicionamento é bastante eficaz para diminuir o número de iterações à convergência. O melhor desempenho foi obtido pelo algoritmo EPE Cholesky, embora o condicionador EPE Crout tenha apresentado comportamento muito próximo. Por outro lado, o condicionador Diagonal apresentou os menores tempos de processamento das iterações.

O número de iterações decresce percentualmente com o aumento do número de graus de liberdade da malha analisada. Isto pode ser observado no gráfico da FIGURA I.3.5.3, onde é mostrado o desempenho da taxa de convergência para o condicionador EPE de Cholesky.

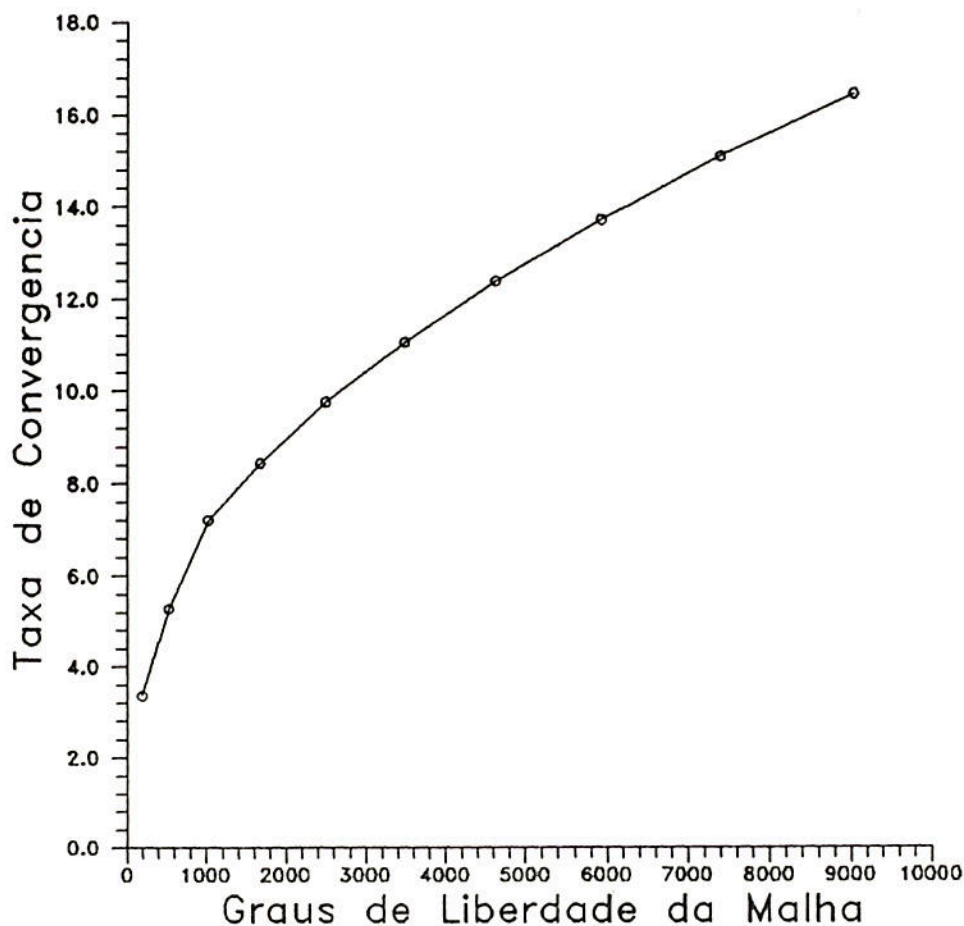


FIGURA I.3.5.3 - Performance da taxa de convergência do condicionador EPE de Cholesky.

I.3.6 - Observações Complementares

Nos três primeiros casos, onde empregou-se o elemento DKQ, foram geradas matrizes extremamente mal condicionadas, ao contrário dos dois últimos casos. Isto pode ser observado no gráfico da FIGURA I.3.6.1 onde a variação do quociente D_{\max}/D_{\min} é plotada segundo o número de graus de liberdade dos exemplos analisados. Isto explica as piores taxas de convergência obtidas com todos algoritmos na solução dos três primeiros casos.

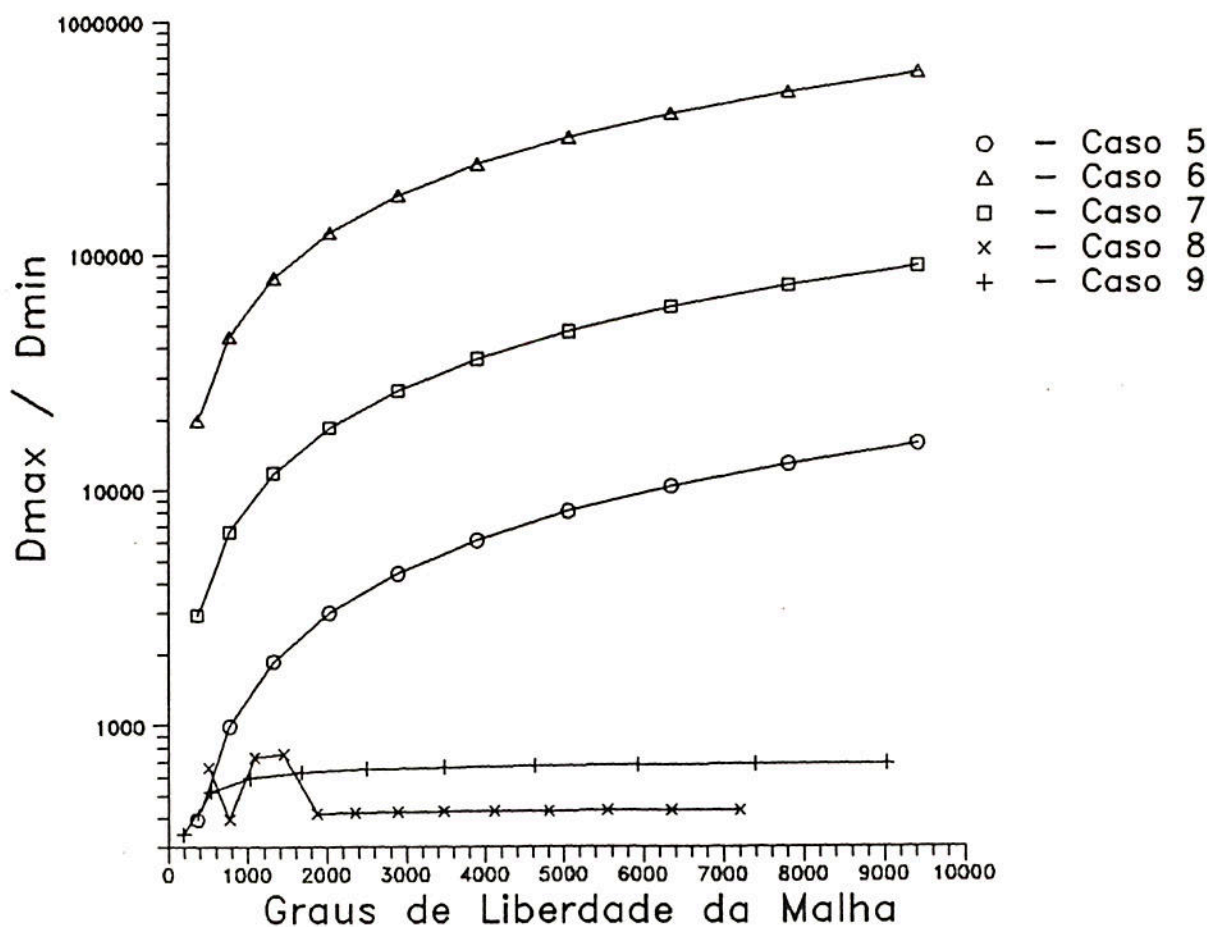


FIGURA I.3.6.1 - Variação do quociente D_{\max}/D_{\min} com o número de graus de liberdade para os cinco casos de placas.

Os requisitos de armazenamento mostraram-se favoráveis à solução iterativa à medida que aumentam o porte do problema e a largura de banda das respectivas matrizes.

I.4 - Problemas de Cascas Poliédricas

São analisados três problemas identificados como casos N.º 10, 11 e 12.. Em todos eles empregou-se para a discretização o elemento quadrilátero de quatro nós, obtido pelo acoplamento do elemento isoparamétrico de estado plano e o elemento de placa DKQ (HINTON e OWEN²²). No caso de geometrias curvas, a malha de elementos finitos produzirá uma superfície poliédrica aproximada.

I.4.1 - Caso N.º 10

Este caso tratou de uma viga T, de paredes finas, em balanço, sob carga concentrada na extremidade livre, conforme mostrado na FIGURA I.4.1.1.

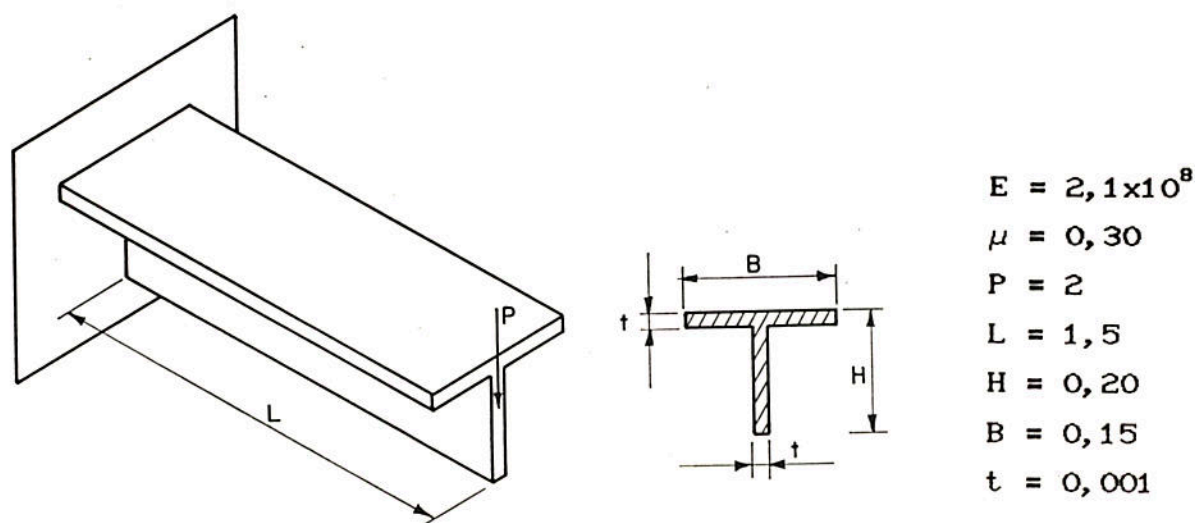


FIGURA I.4.1.1 - Caso N.º 10.

Foram construídas nove malhas gradualmente crescentes. Os dados relativos a estas malhas são mostrados na TABELA I.4.1.1.

Na FIGURA I.4.1.2 é mostrada a malha de elementos finitos para o exemplo J-03.

TABELA I.4.1.1 - Dados relativos às malhas do Caso N.º 10.

| Exemplo | Malha | Número de Elem. | Número de Nós | Graus de Liberdade | Requisito p/ EPE | Armazenamento Global Perfil | Banda |
|---------|-------|-----------------|---------------|--------------------|------------------|-----------------------------|-------|
| J-01 | 4x2 | 16 | 25 | 150 | 4800 | 900 | 48 |
| J-02 | 8x4 | 64 | 81 | 486 | 19200 | 4968 | 78 |
| J-03 | 12x6 | 144 | 169 | 1014 | 43200 | 14508 | 102 |
| J-04 | 16x8 | 256 | 289 | 1734 | 76800 | 31842 | 126 |
| J-05 | 20x10 | 400 | 441 | 2646 | 120000 | 59220 | 150 |
| J-06 | 24x12 | 576 | 625 | 3750 | 172800 | 99000 | 174 |
| J-07 | 28x14 | 784 | 841 | 5046 | 235200 | 153468 | 198 |
| J-08 | 32x16 | 1024 | 1089 | 6534 | 307200 | 224928 | 222 |
| J-09 | 36x18 | 1296 | 1369 | 8214 | 388800 | 315684 | 246 |

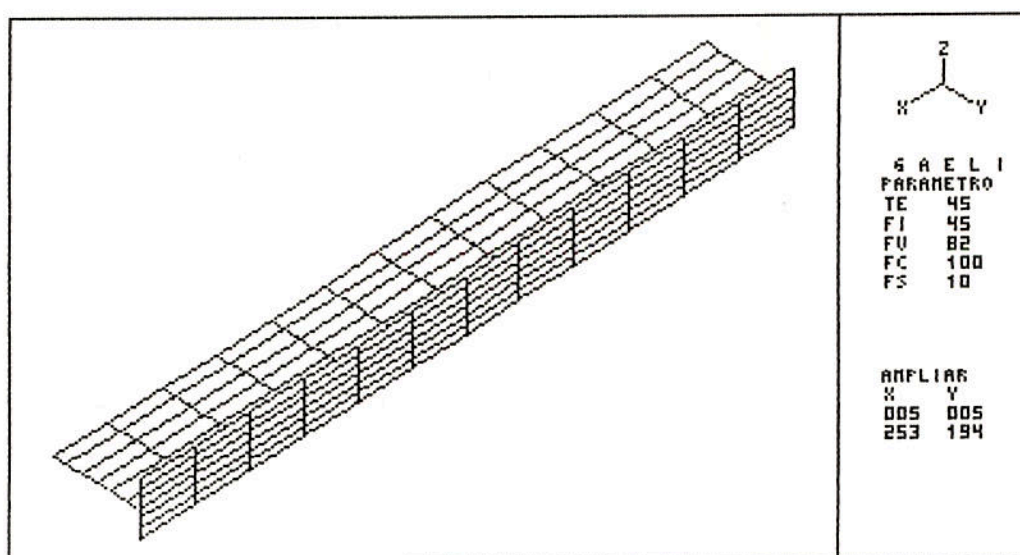


FIGURA I.4.1.2 - Malha do exemplo J-03.

Os resultados obtidos da solução iterativa destes nove exemplos são apresentados na TABELA I.4.1.2.

Observa-se que com o algoritmo do MGC não obteve-se convergência para os cinco exemplos de malhas mais densas. O melhor desempenho quanto à taxa de convergência foi obtido alternadamente pelos algoritmos dos preconditionadores EPE Crout e EPE Cholesky, com o preconditionador Diagonal apresentando desempenho pouco inferior aos dois primeiros.

Observa-se que os melhores tempos de processamento das

iterações foram obtidos pelo condicionamento Diagonal, enquanto o condicionador EPE Gauss-Seidel Simetrizado apresentou o pior desempenho.

TABELA I.4.1.2 - Resultados obtidos para o Caso N.º 10.

| Exemplo | PRECONDICIONADORES | | | | |
|--|--------------------|----------|-----------------|--------------|---------------------|
| | MGC | Diagonal | EPE Cholesky | EPE Crout | EPE Gauss-Seidel |
| NÚMERO DE ITERAÇÕES | | | | | |
| J-01 | 65 | 48 | 52 | 55 | 59 |
| J-02 | 450 | 129 | 132 | 141 | 194 |
| J-03 | 3370 | 227 | 228 | 235 | 379 |
| J-04 | 3440 | 340 | 389 | 373 | 609 |
| J-05 | * | 474 | 525 | 570 | 917 |
| J-06 | * | 612 | 702 | 758 | 1269 |
| J-07 | * | 758 | 878 | 988 | 1619 |
| J-08 | * | 962 | 788 | 868 | 1993 |
| J-09 | * | 1176 | 947 | 690 | 2504 |
| TEMPO DE PROCESSAMENTO (segundos) | | | | | |
| J-01 | 0,8 | 0,5 | 1,4 | 1,5 | 1,3 |
| J-02 | 21,4 | 5,9 | 13,8 | 15,2 | 18,3 |
| J-03 | 364,0 | 23,6 | 53,1 | 56,3 | 81,1 |
| J-04 | 643,6 | 62,8 | 159,2 | 157,5 | 228,6 |
| J-05 | * | 136,5 | 337,3 | 372,5 | 536,5 |
| J-06 | * | 254,5 | 649,1 | 710,2 | 1074,3 |
| J-07 | * | 429,5 | 1091,1 | 1222,5 | 1840,4 |
| J-08 | * | 711,2 | 1284,2 | 1420,7 | 2921,9 |
| J-09 | * | 1073,6 | 1909,9 | 1418,0 | 4748,4 |

(*) Não houve convergência.

Na FIGURA I.4.1.3 é mostrado um gráfico que apresenta o desempenho da taxa de convergência do condicionador EPE de Cholesky. Observa-se um decréscimo percentual do número de iterações necessárias para atingir-se a convergência com o aumento do número de graus de liberdade das malhas.

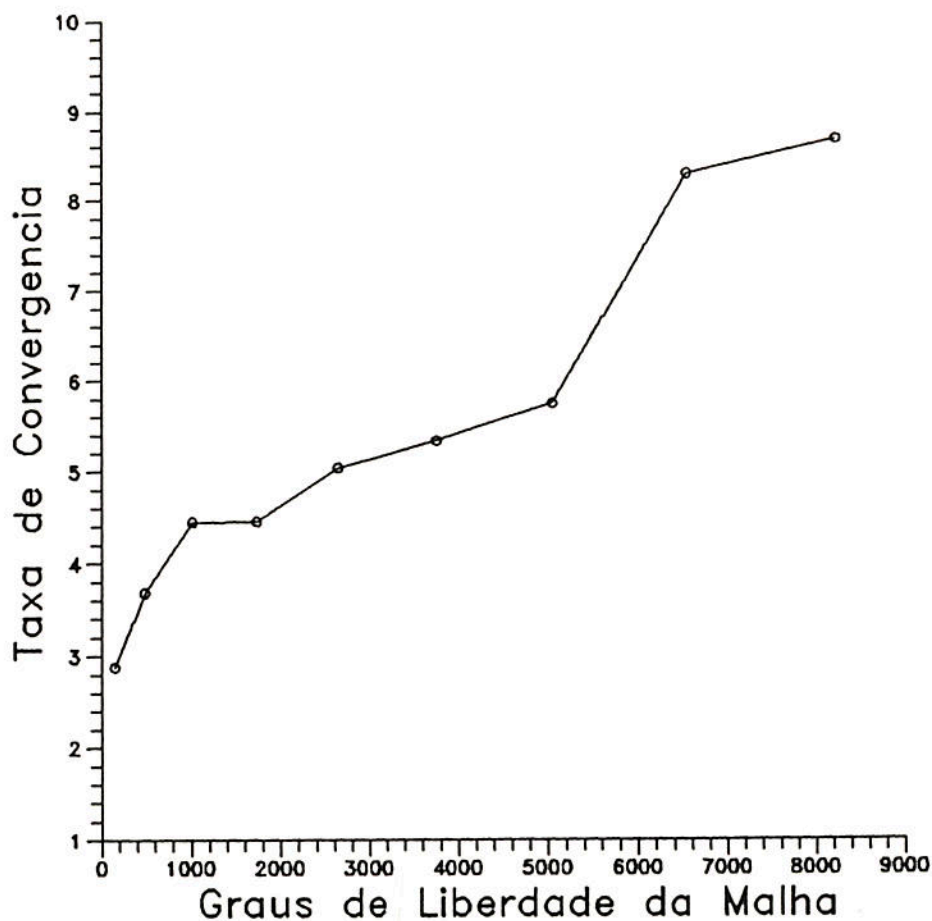


FIGURA I.4.1.3 - Performance da taxa de convergência do pre-condicionador EPE de Cholesky.

I.4.2 - Caso n.º 11

Neste caso se analisa um cilindro de paredes finas, com diafragmas nas extremidades, comprimido por duas forças diametralmente opostas como mostrado na FIGURA I.4.2.1, conforme proposto no trabalho de YUNUS et alli⁵⁰.

Foram discretizadas nove malhas gradualmente crescentes sobre um oitavo do domínio devido a tripla simetria apresentada pelo problema. Na TABELA I.4.2.1 são mostrados os dados relativos a cada uma das malhas dos nove exemplos.

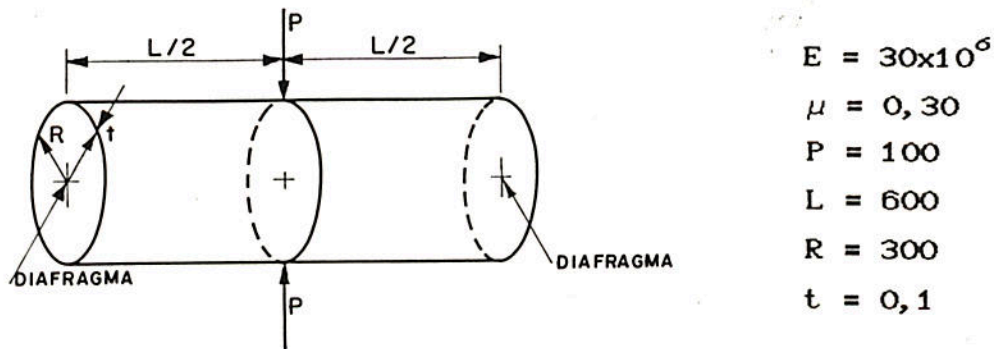


FIGURA I.4.2.1 - Caso N.º 11.

TABELA I.4.2.1 - Dados relativos às malhas do Caso N.º 11.

| Exemplo | Malha | Número de Elem. | Número de Nós | Graus de Liberdade | Requisito p/ EPE | Armazenamento Global Perfil | Banda |
|---------|-------|-----------------|---------------|--------------------|------------------|-----------------------------|-------|
| K-01 | 3x6 | 18 | 28 | 168 | 5400 | 870 | 36 |
| K-02 | 6x12 | 72 | 91 | 546 | 21600 | 4542 | 54 |
| K-03 | 9x18 | 162 | 190 | 1140 | 48600 | 12966 | 72 |
| K-04 | 12x24 | 288 | 325 | 1950 | 86400 | 28086 | 90 |
| K-05 | 15x30 | 450 | 496 | 2976 | 135000 | 51846 | 108 |
| K-06 | 18x36 | 648 | 703 | 4218 | 194400 | 86190 | 126 |
| K-07 | 21x42 | 882 | 946 | 5676 | 264600 | 133062 | 144 |
| K-08 | 24x48 | 1152 | 1225 | 7350 | 345600 | 194406 | 162 |
| K-09 | 27x54 | 1458 | 1540 | 9240 | 437400 | 272166 | 180 |

Na FIGURA I.4.2.2 é mostrada a malha de elementos finitos relativa ao exemplo K-02.

Os resultados obtidos pela solução iterativa com os cinco algoritmos são mostrados na TABELA I.4.2.2.

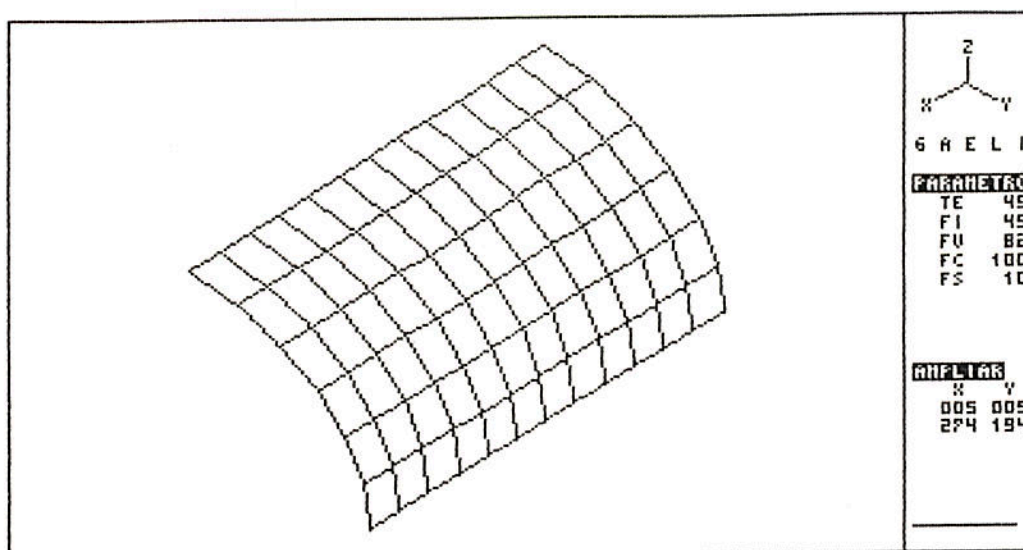


FIGURA I.4.2.2 - Malha do exemplo K-02.

TABELA I.4.2.2 - Resultados obtidos para o Caso N.º 11.

| Exemplo | PRECONDICIONADORES | | | | |
|-----------------------------------|--------------------|----------|-----------------|--------------|---------------------|
| | MGC | Diagonal | EPE Cholesky | EPE Crout | EPE Gauss-Seidel |
| NÚMERO DE ITERAÇÕES | | | | | |
| K-01 | 63 | 37 | 21 | 23 | 24 |
| K-02 | 563 | 229 | 133 | 133 | 142 |
| K-03 | 1300 | 726 | 434 | 436 | 473 |
| K-04 | 2623 | 1218 | 635 | 651 | 699 |
| K-05 | 4033 | 1679 | 786 | 771 | 823 |
| K-06 | * | 2117 | 953 | 942 | 942 |
| K-07 | * | 2627 | 1128 | 1113 | 1128 |
| K-08 | * | 3012 | 1276 | 1249 | 1319 |
| K-09 | * | 3388 | 1507 | 1518 | 1457 |
| TEMPO DE PROCESSAMENTO (segundos) | | | | | |
| K-01 | 0,8 | 0,4 | 0,7 | 0,7 | 0,8 |
| K-02 | 29,4 | 11,7 | 15,4 | 15,8 | 14,8 |
| K-03 | 154,4 | 84,7 | 111,9 | 116,8 | 112,9 |
| K-04 | 550,2 | 251,3 | 290,8 | 305,7 | 294,2 |
| K-05 | 1315,0 | 543,0 | 562,8 | 562,5 | 539,2 |
| K-06 | * | 996,5 | 995,9 | 986,6 | 892,4 |
| K-07 | * | 1651,7 | 1549,9 | 1551,7 | 1421,9 |
| K-08 | * | 2462,7 | 2293,6 | 2303,7 | 2154,2 |
| K-09 | * | 3447,7 | 3375,7 | 3507,7 | 3041,5 |

(*) Não houve convergência.

Observa-se, como ocorreu no caso anterior, que a solução pelo algoritmo do MGC apresentou convergência apenas para cinco malhas de menor densidade. O melhor desempenho quanto à taxa de convergência alternou-se entre os algoritmos EPE Cholesky, EPE Crout e EPE Gauss-Seidel Simetrizado.

Por outro lado, os menores tempos de processamento das iterações foram obtidos pelo algoritmo Gauss-Seidel Simetrizado. Os outros três algoritmos com condicionamento apresentaram desempenho inferior mas bastante próximo do primeiro.

A FIGURA I.4.2.3 mostra um gráfico onde está representado o desempenho do condicionador EPE de Gauss-Seidel Simetrizado com respeito à taxa de convergência. Observa-se que não há um decréscimo percentual significativo do número de iterações com o aumento da densidade de elementos na malha.

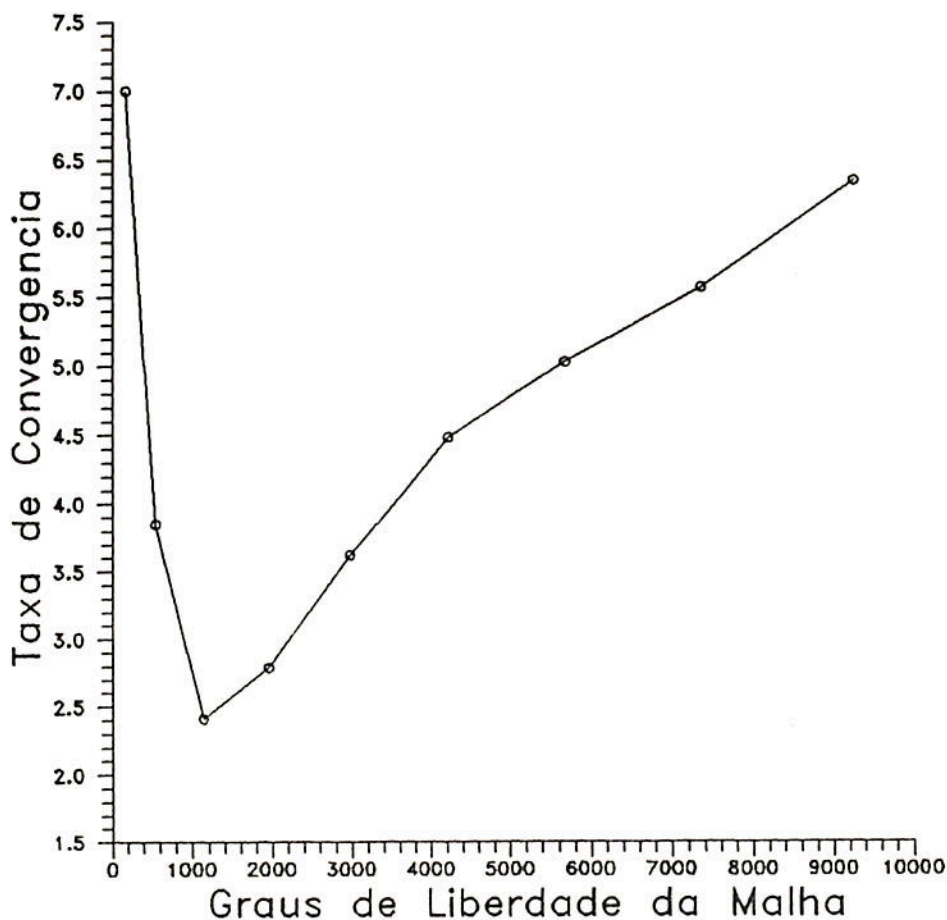
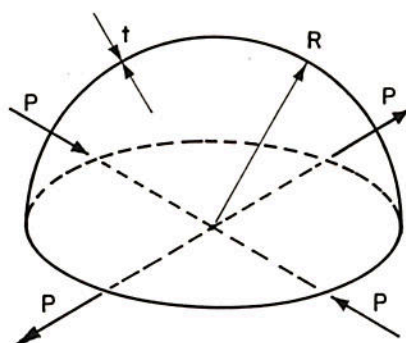


FIGURA I.4.2.3 - Performance da taxa de convergência do condicionador EPE de Gauss-Seidel Sim.

I.4.3 - Caso N.º 12

Este caso trata de um hemisfério de paredes finas, sujeito a quatro forças diametralmente opostas como mostrado na FIGURA I.4.3.1, proposto em YUNUS et alli⁵⁰.



$$E = 6,825 \times 10^7$$

$$\mu = 0,30$$

$$P = 1$$

$$R = 10$$

$$t = 0,04$$

FIGURA I.4.3.1 - Caso N.º 12.

Foram construídas dez malhas gradualmente crescentes. Na TABELA I.4.3.1 são apresentados os dados relativos aos dez exemplos analisados.

TABELA I.4.3.1 - Dados relativos às malhas do Caso N.º 11.

| Exemplo | Malha | Número de Elem. | Número de Nós | Graus de Liberdade | Requisito p/ EPE | Armazenamento Global | |
|---------|-------|-----------------|---------------|--------------------|------------------|----------------------|-------|
| | | | | | | Perfil | Banda |
| L-01 | 4x4 | 48 | 61 | 366 | 14400 | 3246 | 114 |
| L-02 | 6x6 | 108 | 127 | 762 | 32400 | 9498 | 162 |
| L-03 | 8x8 | 192 | 217 | 1302 | 57600 | 20886 | 210 |
| L-04 | 10x10 | 300 | 331 | 1986 | 90000 | 38946 | 258 |
| L-05 | 12x12 | 432 | 469 | 2814 | 129600 | 65214 | 306 |
| L-06 | 14x14 | 588 | 631 | 3786 | 176400 | 101226 | 354 |
| L-07 | 16x16 | 768 | 817 | 4902 | 230400 | 148518 | 402 |
| L-08 | 18x18 | 972 | 1027 | 6162 | 291600 | 208626 | 450 |
| L-09 | 20x20 | 1200 | 1261 | 7566 | 360000 | 283086 | 498 |
| L-10 | 22x22 | 1452 | 1519 | 9114 | 435600 | 373434 | 546 |

Na FIGURA I.4.3.2 é mostrada a malha de elementos finitos do exemplo L-02.

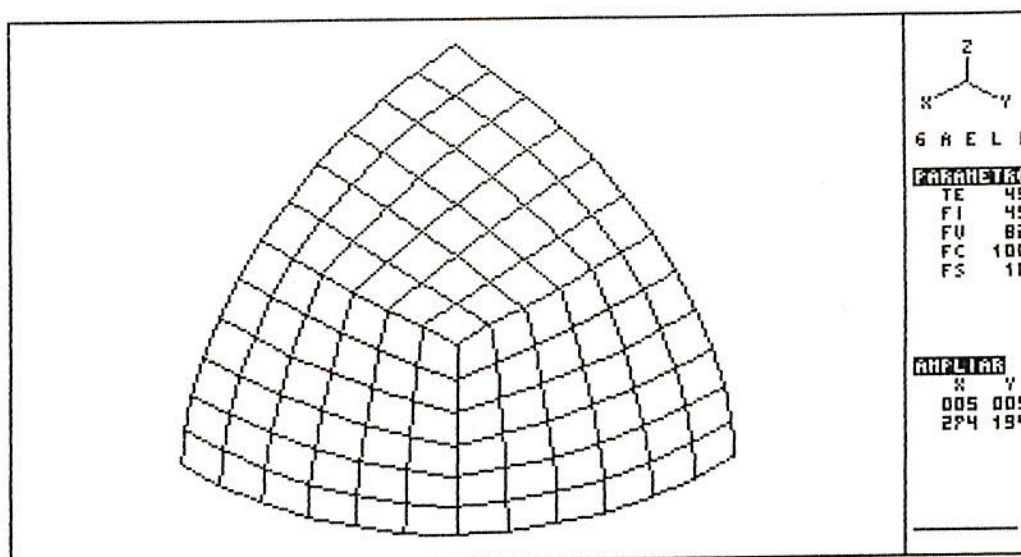


FIGURA I.4.3.2 - Malha do exemplo L-02.

Os resultados obtidos da solução iterativa para os exemplos deste caso são mostrados na TABELA I.4.3.2.

Observa-se como ocorreu nos dois casos anteriores que não houve convergência para as oito malhas mais densas quando do emprego do algoritmo sem condicionamento. A melhor performance quanto à taxa de convergência alternou-se entre os algoritmos EPE Cholesky e EPE Crout.

Por outro lado, estes dois algoritmos juntamente com o EPE Gauss-Seidel Simetrizado alternaram-se com os menores tempos de processamento das iterações.

Observa-se que para todos os preconditionadores há um decréscimo percentual do número de iterações para a convergência com o crescimento da densidade de elementos na malha. Na FIGURA I.4.3.3 está representado o desempenho do preconditionador EPE de Crout quanto à taxa de convergência onde este comportamento pode ser comprovado.

TABELA I.4.3.2 - Resultados obtidos para o Caso N.º 12.

| Exemplo | PRECONDICIONADORES | | | | |
|-----------------------------------|--------------------|----------|-----------------|--------------|---------------------|
| | MGC | Diagonal | EPE Cholesky | EPE Crout | EPE Gauss-Seidel |
| NÚMERO DE ITERAÇÕES | | | | | |
| L-01 | 1460 | 330 | 139 | 142 | 160 |
| L-02 | 3149 | 578 | 227 | 233 | 260 |
| L-03 | * | 719 | 316 | 320 | 353 |
| L-04 | * | 1069 | 413 | 414 | 455 |
| L-05 | * | 1124 | 508 | 514 | 560 |
| L-06 | * | 1346 | 606 | 612 | 665 |
| L-07 | * | 1569 | 706 | 709 | 776 |
| L-08 | * | 1822 | 809 | 811 | 887 |
| L-09 | * | 2371 | 907 | 905 | 995 |
| L-10 | * | 2641 | 1003 | 1002 | 1104 |
| TEMPO DE PROCESSAMENTO (segundos) | | | | | |
| L-01 | 62,4 | 11,5 | 11,3 | 12,4 | 11,5 |
| L-02 | 247,3 | 44,8 | 39,5 | 41,6 | 41,3 |
| L-03 | * | 99,1 | 96,9 | 100,7 | 99,3 |
| L-04 | * | 229,9 | 196,9 | 202,6 | 199,3 |
| L-05 | * | 348,0 | 350,3 | 358,4 | 351,3 |
| L-06 | * | 564,0 | 566,1 | 581,2 | 568,0 |
| L-07 | * | 866,0 | 867,6 | 878,0 | 868,4 |
| L-08 | * | 1270,6 | 1252,2 | 1267,8 | 1254,3 |
| L-09 | * | 2042,6 | 1766,5 | 1937,9 | 1822,9 |
| L-10 | * | 2708,7 | 2271,4 | 2298,8 | 2313,0 |

(*) Não houve convergência.

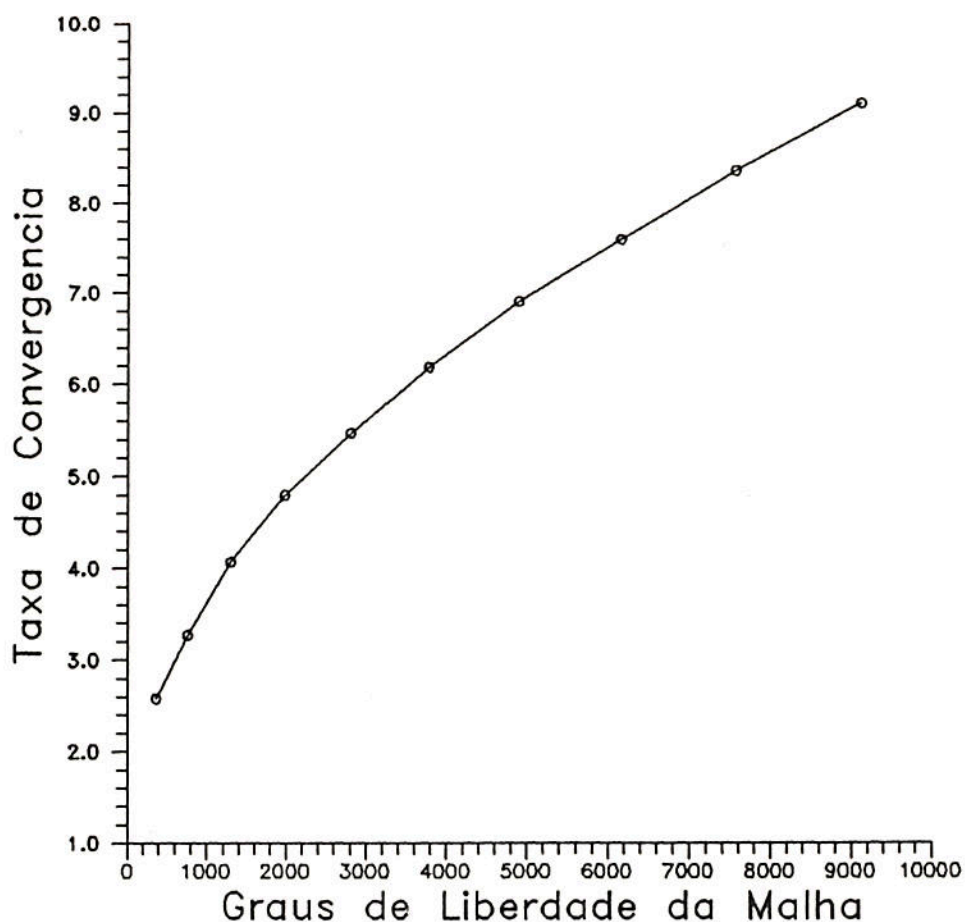


FIGURA I.4.3.3 - Performance da taxa de convergência do pre-condicionador EPE de Crout.

I.4.4 - Observações Complementares

Os três casos analisados como cascas poliédricas são problemas onde as matrizes geradas são extremamente mal condicionadas. Isto pode ser inferido do gráfico da FIGURA I.4.4.1, onde estão plotados as variações dos quocientes D_{\max}/D_{\min} segundo o número de graus de liberdade dos exemplos resolvidos.

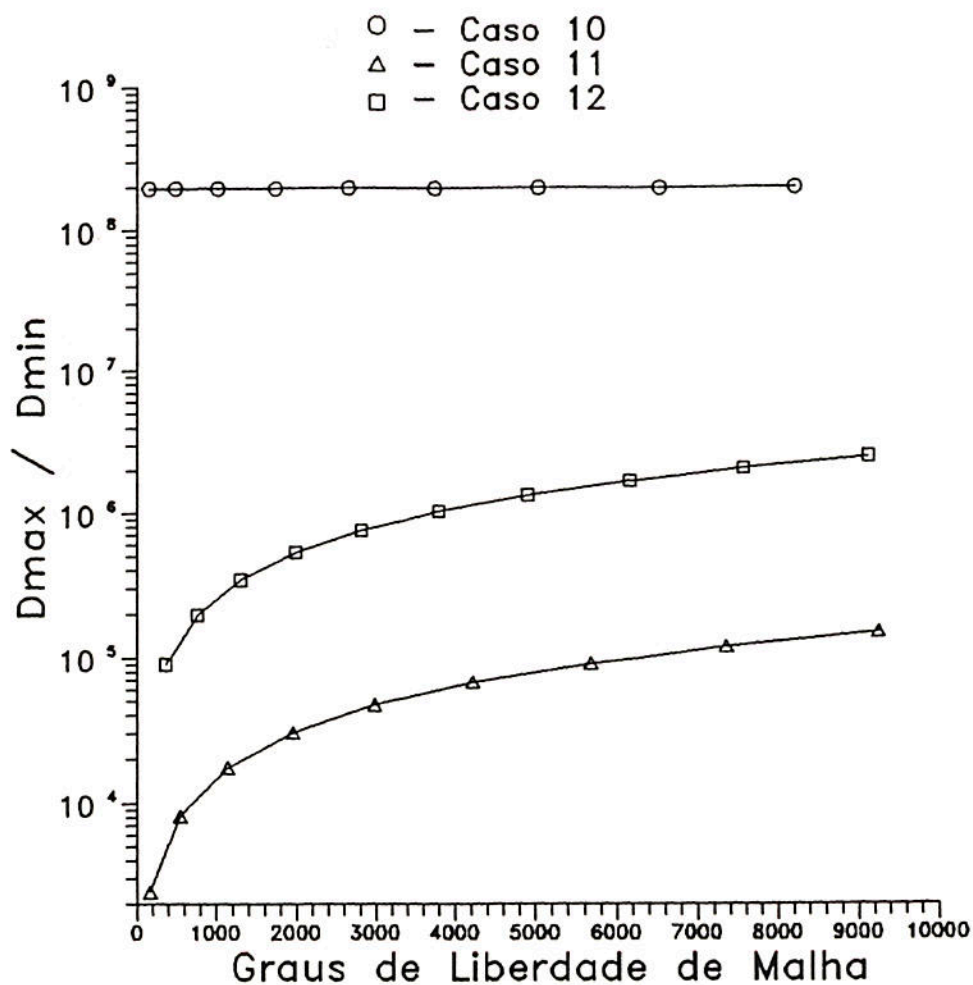


FIGURA I.4.4.1 - Variação do quociente D_{\max} / D_{\min} com o número de graus de liberdade dos exemplos dos três casos de cascas poliédricas.

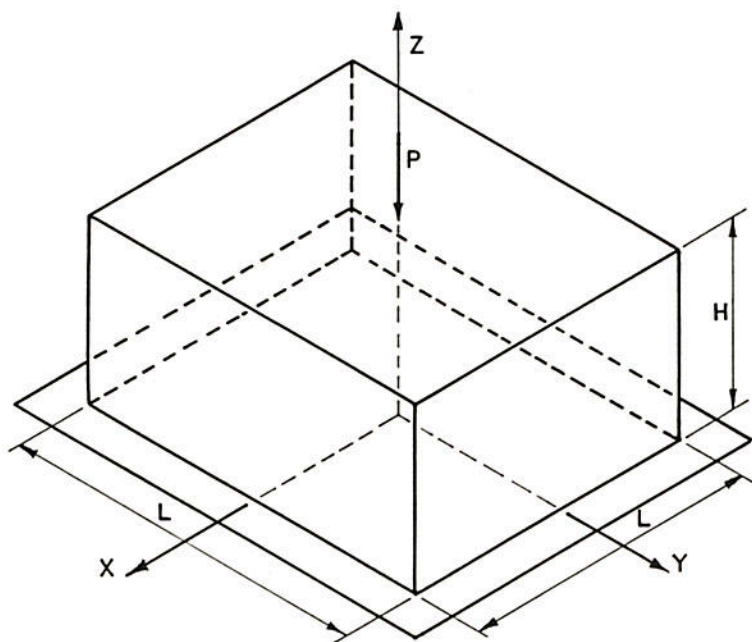
Para os três casos analisados os requisitos de armazenamento mostraram-se favoráveis à solução direta, embora com tendência clara de inversão deste favorecimento no sentido da solução iterativa para problemas de porte maior do que os analisados

I.5 - Problemas Tridimensionais

São tratados três casos de problemas tridimensionais. Em todos eles emprega-se o elemento hexaédrico trilinear de oito nós, com três incógnitas nodais como descrito em ZIENCKEWICZ⁵¹.

I.5.1 - Caso N.º 13

Neste caso é analisado o problema de Boussinesq, onde um bloco paralelepédico suporta uma carga compressiva no ponto central da seção do tampo, conforme descrito em ZIENCKEWICZ⁵¹ e mostrado na FIGURA I.5.1.1.



$$E = 2,88 \times 10^7$$

$$\mu = 0,25$$

$$P = 100$$

$$L = 1$$

$$H = 0,5$$

FIGURA I.5.1.1 - Caso N.º 13.

Foram construídas doze malhas gradualmente crescentes cujos dados estão representados na TABELA I.6.1.1.

Na FIGURA I.5.1.2 é mostrada a malha de elementos finitos do exemplo M-05.

Os resultados obtidos da solução iterativa destes doze exemplos são mostrados na TABELA I.5.1.2.

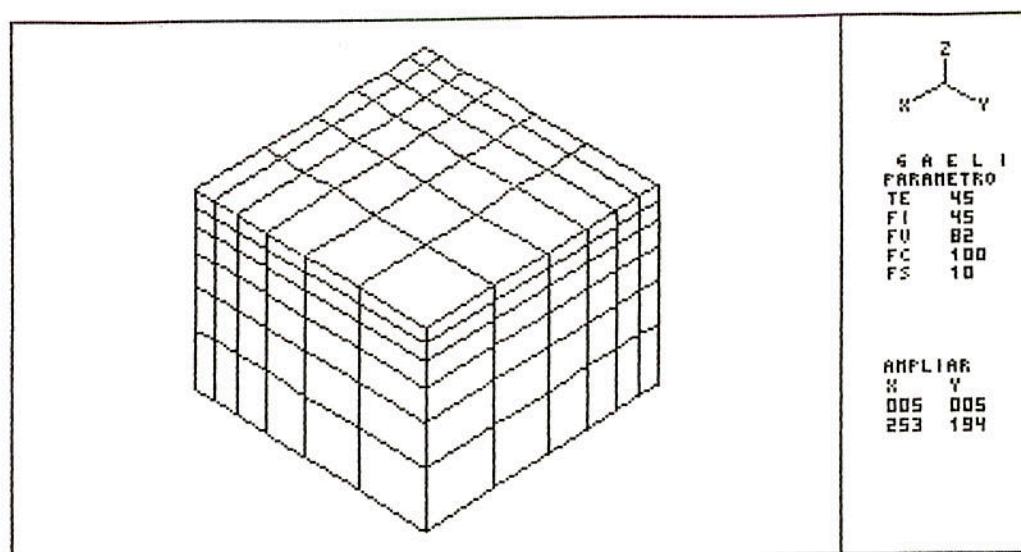


FIGURA I.5.1.2 - Malha do exemplo M-05.

TABELA I.5.1.1 - Dados relativos às malhas do Caso N.º 13.

| Exemplo | Malha | Número de Elem. | Número de Nós | Graus de Liberdade | Requisito p/ EPE | Armazenamento Global Perfil | Banda |
|---------|----------|-----------------|---------------|--------------------|------------------|-----------------------------|-------|
| M-01 | 2x 2x 2 | 8 | 27 | 81 | 2400 | 783 | 42 |
| M-02 | 3x 3x 3 | 27 | 64 | 192 | 8100 | 3216 | 66 |
| M-03 | 4x 4x 4 | 64 | 125 | 375 | 19200 | 9675 | 96 |
| M-04 | 5x 5x 5 | 125 | 216 | 648 | 37500 | 23868 | 132 |
| M-05 | 6x 6x 6 | 216 | 343 | 1029 | 64800 | 51303 | 174 |
| M-06 | 7x 7x 7 | 343 | 512 | 1536 | 102900 | 99648 | 222 |
| M-07 | 8x 8x 8 | 512 | 729 | 2187 | 153600 | 179091 | 276 |
| M-08 | 9x 9x 9 | 729 | 1000 | 3000 | 218700 | 302700 | 336 |
| M-09 | 10x10x10 | 1000 | 1331 | 3991 | 300000 | 486783 | 402 |
| M-10 | 11x11x11 | 1331 | 1728 | 5184 | 399300 | 751248 | 474 |
| M-11 | 12x12x12 | 1728 | 2197 | 6591 | 518400 | 1119963 | 552 |
| M-12 | 13x13x13 | 2197 | 2744 | 8232 | 659100 | 1621116 | 636 |

Observa-se que os quatro algoritmos preconditionados aceleram a convergência em relação ao desempenho do algoritmo do MGC. O melhor desempenho foi apresentado alternativamente pelos algoritmos EPE Cholesky, EPE Crout e EPE Gauss-Seidel Simetrizado com pequena vantagem para os dois primeiros.

TABELA I.5.1.2 - Resultados obtidos para o Caso N.º 13.

| Exemplo | PRECONDICIONADORES | | | | |
|-----------------------------------|--------------------|----------|-----------------|--------------|---------------------|
| | MGC | Diagonal | EPE Cholesky | EPE Crout | EPE Gauss-Seidel |
| NÚMERO DE ITERAÇÕES | | | | | |
| M-01 | 22 | 16 | 7 | 10 | 8 |
| M-02 | 33 | 20 | 9 | 9 | 11 |
| M-03 | 43 | 25 | 10 | 11 | 13 |
| M-04 | 55 | 33 | 13 | 14 | 21 |
| M-05 | 53 | 36 | 14 | 14 | 16 |
| M-06 | 63 | 42 | 16 | 16 | 18 |
| M-07 | 76 | 47 | 18 | 18 | 20 |
| M-08 | 89 | 53 | 20 | 20 | 21 |
| M-09 | 102 | 59 | 21 | 22 | 23 |
| M-10 | 113 | 64 | 23 | 23 | 25 |
| M-11 | 125 | 70 | 25 | 25 | 26 |
| M-12 | 131 | 79 | 27 | 28 | 28 |
| TEMPO DE PROCESSAMENTO (segundos) | | | | | |
| M-01 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,1 |
| M-02 | 0,6 | 0,3 | 0,6 | 0,6 | 0,4 |
| M-03 | 2,3 | 1,1 | 1,6 | 1,6 | 1,3 |
| M-04 | 5,6 | 4,8 | 3,6 | 5,7 | 6,4 |
| M-05 | 8,3 | 5,8 | 6,5 | 8,3 | 5,5 |
| M-06 | 22,4 | 10,5 | 11,8 | 11,8 | 9,5 |
| M-07 | 27,1 | 16,9 | 18,1 | 18,1 | 15,3 |
| M-08 | 44,9 | 27,2 | 28,1 | 28,0 | 22,5 |
| M-09 | 70,3 | 41,1 | 40,1 | 41,4 | 33,5 |
| M-10 | 104,0 | 59,4 | 57,5 | 57,2 | 48,4 |
| M-11 | 148,3 | 84,0 | 79,8 | 79,4 | 65,7 |
| M-12 | 196,7 | 120,9 | 110,3 | 111,7 | 89,1 |

O algoritmo Diagonal apresentou os menores tempos de processamento das iterações, com os algoritmos dos outros três preconditionadores apresentando performance bastante semelhante e pouco inferior ao primeiro.

Pode-se observar que ocorre um acentuado decréscimo percentual do número de iterações à medida que cresce o número de graus de liberdade da malha para todos os algoritmos. Isto pode ser observado no caso do preconditionador EPE de Cholesky no gráfico da FIGURA I.5.1.3, onde é mostrado a performance de sua taxa de convergência.

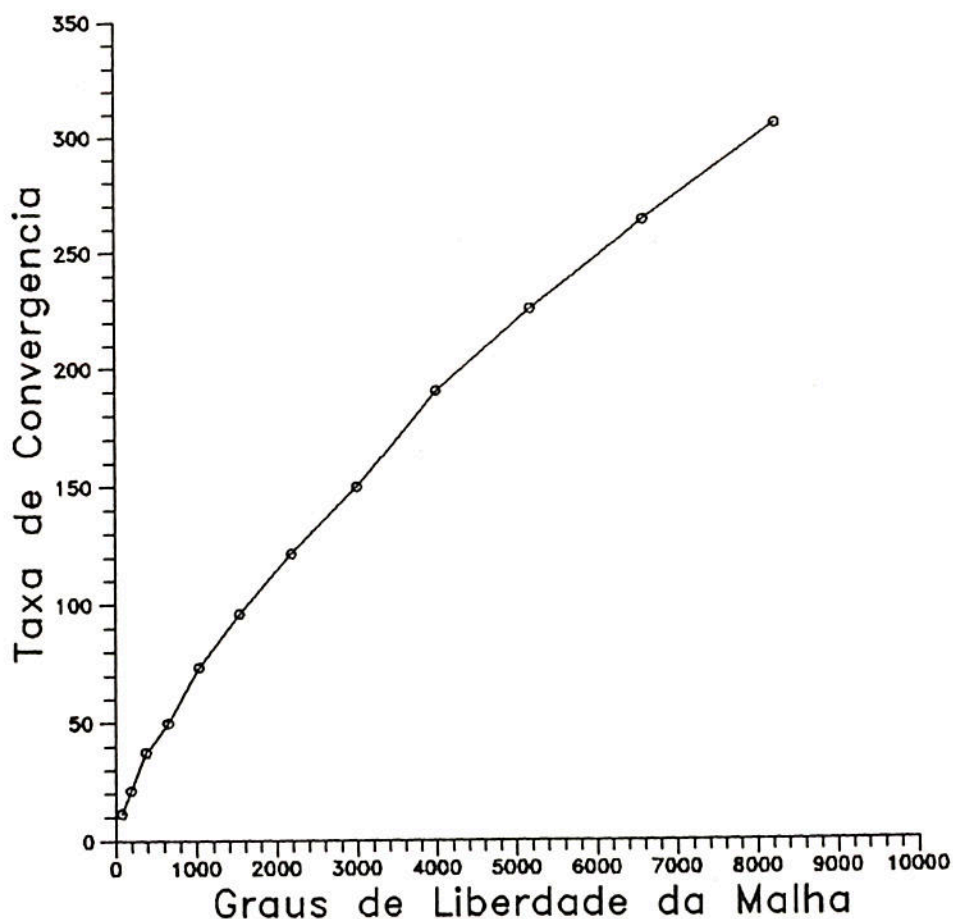


FIGURA I.5.1.3 - Performance da taxa de convergência do pre-condicionador EPE de Cholesky.

I.5.2 - Caso N.º 14

Neste caso, uma viga em balanço submetida a carga concentrada na extremidade livre, como mostrado na FIGURA I.5.2.1, foi analisada.

Foram discretizadas nove malhas gradualmente crescentes cujos dados são apresentados na TABELA I.5.2.1.

Na FIGURA I.5.2.2 é mostrada a malha de elementos

finitos do exemplo N-04.

Os resultados obtidos da solução iterativa para os nove exemplos são mostrados na TABELA I.5.2.2.

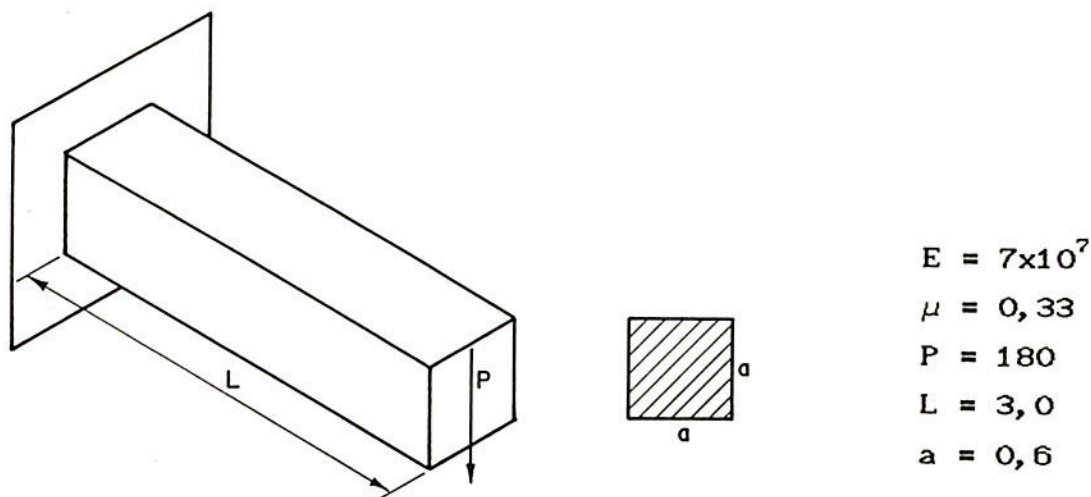


FIGURA I.5.2.1 - Caso N.º 14.

TABELA I.5.2.1 - Dados relativos às malhas do Caso N.º 14.

| Exemplo | Malha | Número de Elem. | Número de Nós | Graus de Liberdade | Requisito p/ EPE | Armazenamento Global | Perfil | Banda |
|---------|----------|-----------------|---------------|--------------------|------------------|----------------------|--------|-------|
| N-01 | 2x 2x 4 | 16 | 45 | 135 | 4800 | 1467 | 42 | |
| N-02 | 3x 3x 6 | 54 | 112 | 336 | 16200 | 6204 | 66 | |
| N-03 | 4x 4x 8 | 128 | 225 | 675 | 38400 | 18915 | 96 | |
| N-04 | 5x 5x10 | 250 | 396 | 1188 | 75000 | 46998 | 132 | |
| N-05 | 6x 6x12 | 432 | 637 | 1911 | 129600 | 101451 | 174 | |
| N-06 | 7x 7x14 | 686 | 960 | 2880 | 205800 | 197592 | 222 | |
| N-07 | 8x 8x16 | 1024 | 1377 | 4131 | 307200 | 355779 | 276 | |
| N-08 | 9x 9x18 | 1458 | 1900 | 5700 | 437400 | 602130 | 336 | |
| N-09 | 10x10x20 | 2000 | 2541 | 7623 | 600000 | 969243 | 402 | |

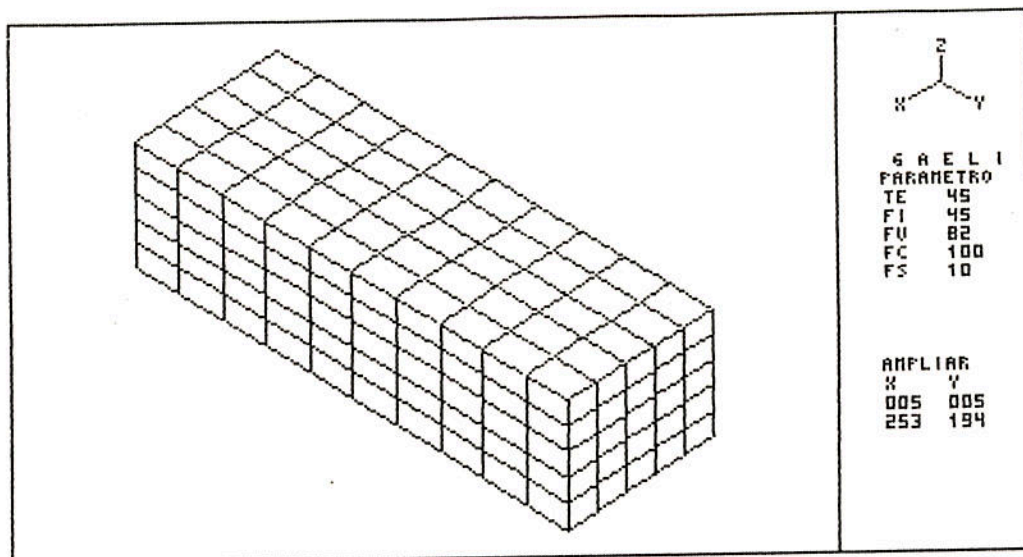


FIGURA I.5.2.2 - Malha do exemplo N-04.

Observa-se que a melhor taxa de convergência foi obtida pelo algoritmo do preconditionador EPE Cholesky, embora o algoritmo EPE Crout tenha apresentado desempenho bastante semelhante.

Por outro lado, os menores tempos de processamento das iterações foram obtidos, respectivamente, pelos algoritmos do preconditionador Diagonal e do MGC.

Pode-se observar que há um descréscimo percentual acentuado do número de iterações necessárias à convergência à medida que cresce o número de graus de liberdade da malha empregada para solução do problema. Isto é mostrado para o

precondicionador EPE de Cholesky no gráfico da FIGURA I.5.2.3.

TABELA I.5.2.2 - Resultados obtidos para o Caso N.º 14.

| Exemplo | PRECONDICIONADORES | | | | |
|-----------------------------------|--------------------|----------|-----------------|--------------|---------------------|
| | MGC | Diagonal | EPE Cholesky | EPE Crout | EPE Gauss-Seidel |
| NÚMERO DE ITERAÇÕES | | | | | |
| N-01 | 25 | 19 | 24 | 27 | 28 |
| N-02 | 51 | 34 | 33 | 33 | 37 |
| N-03 | 62 | 44 | 41 | 42 | 46 |
| N-04 | 81 | 59 | 46 | 51 | 55 |
| N-05 | 95 | 71 | 60 | 54 | 63 |
| N-06 | 108 | 84 | 69 | 70 | 72 |
| N-07 | 118 | 95 | 78 | 79 | 81 |
| N-08 | 134 | 108 | 86 | 89 | 91 |
| N-09 | 148 | 120 | 95 | 98 | 100 |
| TEMPO DE PROCESSAMENTO (segundos) | | | | | |
| N-01 | 0,3 | 0,2 | 0,7 | 0,7 | 0,7 |
| N-02 | 1,9 | 1,3 | 3,3 | 3,2 | 2,9 |
| N-03 | 5,9 | 4,0 | 9,3 | 9,6 | 8,5 |
| N-04 | 14,3 | 10,4 | 19,8 | 22,1 | 20,0 |
| N-05 | 29,0 | 21,8 | 43,6 | 40,1 | 40,4 |
| N-06 | 52,1 | 41,7 | 78,8 | 81,2 | 71,2 |
| N-07 | 84,6 | 68,6 | 132,5 | 136,1 | 118,8 |
| N-08 | 135,8 | 111,9 | 208,3 | 213,7 | 190,5 |
| N-09 | 204,8 | 168,4 | 312,3 | 327,0 | 297,8 |

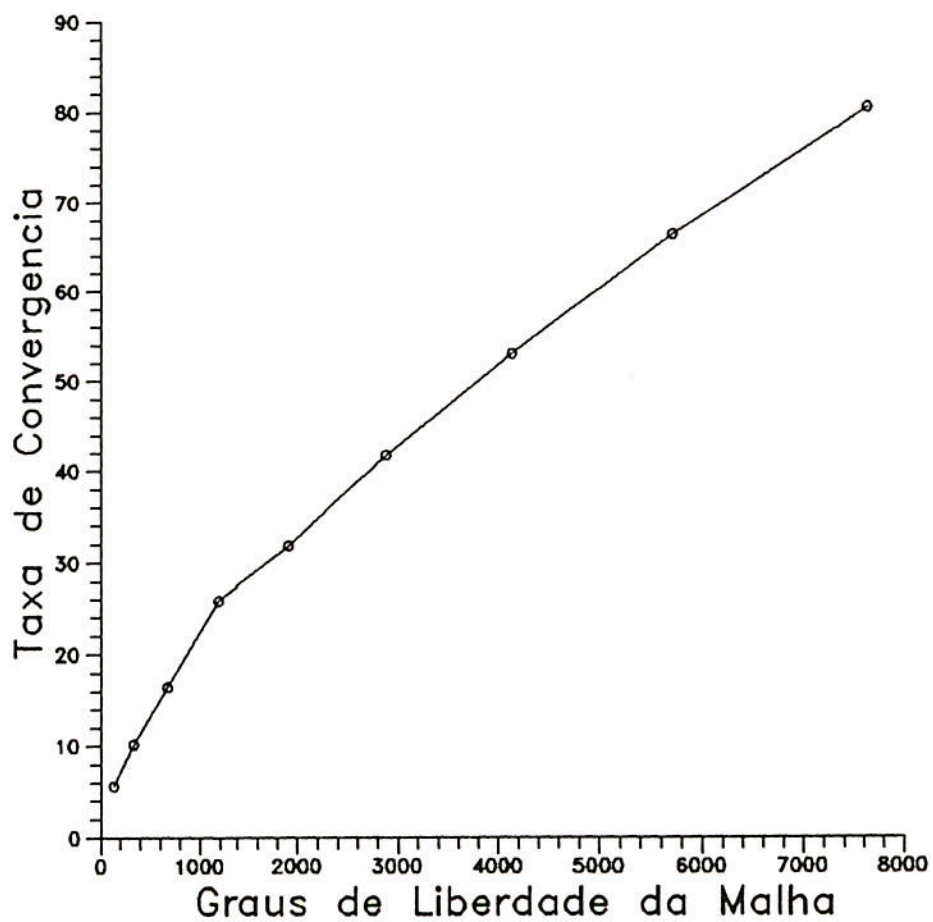


FIGURA I.5.2.3 - Performance da taxa de convergência do pre-condicionador EPE de Cholesky.

I.5.3 - Caso N.º 15

Neste último caso foi analisado um disco com furo central sob pressão radial como é mostrado na FIGURA I.5.3.1.

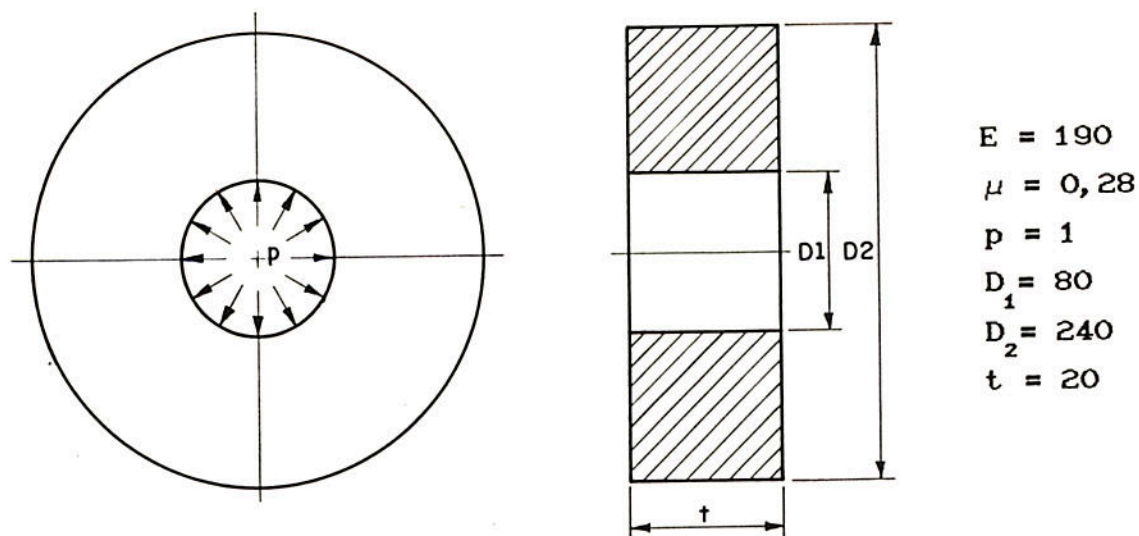


FIGURA I.5.3.1 - Caso N.º 15.

Foram construídas seis malhas gradualmente crescentes cujos características são apresentadas na TABELA I.5.3.1.

TABELA I.5.3.1 - Dados relativos às malhas do Caso N.º 15.

| Exemplo | Malha | Número de Elem. | Número de Nós | Graus de Liberdade | Requisito p/ EPE | Armazenamento Global Perfil | Banda |
|---------|---------|-----------------|---------------|--------------------|------------------|-----------------------------|-------|
| P-01 | 4x 6x2 | 48 | 105 | 315 | 14400 | 5331 | 60 |
| P-02 | 6x 9x3 | 162 | 280 | 840 | 48600 | 25518 | 102 |
| P-03 | 8x12x4 | 384 | 585 | 1755 | 115200 | 83859 | 156 |
| P-04 | 10x15x5 | 750 | 1056 | 3168 | 225000 | 219108 | 222 |
| P-05 | 12x18x6 | 1296 | 1729 | 5187 | 388800 | 490323 | 300 |
| P-06 | 14x21x7 | 2058 | 2640 | 7920 | 617400 | 981186 | 390 |

Na FIGURA I.5.3.2 é mostrada a malha de elementos finitos do exemplo P-02.

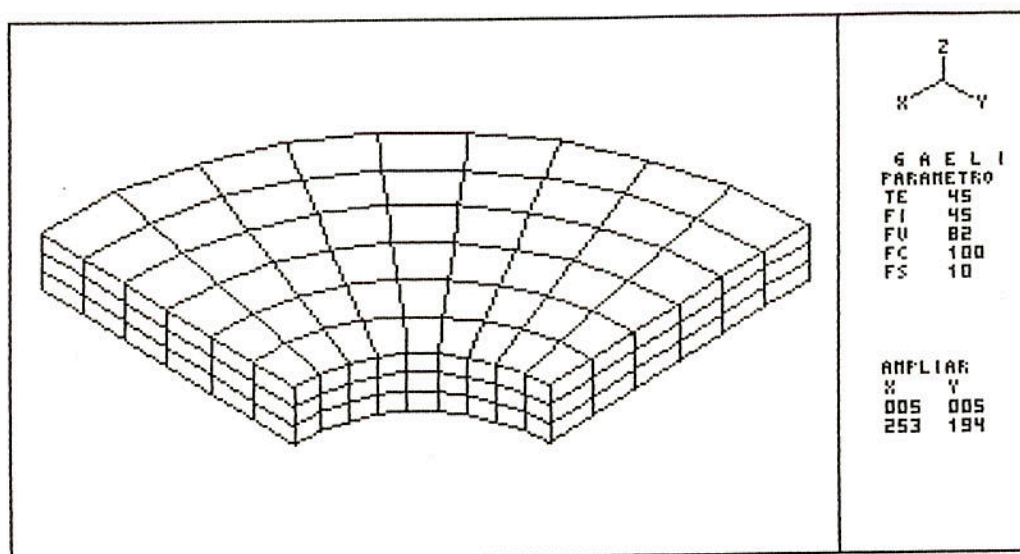


FIGURA I.5.3.2 - Malha do exemplo P-02.

Os resultados obtidos da solução iterativa com os cinco algoritmos são mostrados na TABELA I.5.3.2.

TABELA I.5.3.2 - Resultados obtidos para o Caso N.º 15.

| EXEMPLO | MGC | PRECONDICIONADORES | | | |
|-----------------------------------|-------|--------------------|-----------------|--------------|---------------------|
| | | Diagonal | EPE Cholesky | EPE Crout | EPE Gauss-Seidel |
| NÚMERO DE ITERAÇÕES | | | | | |
| P-01 | 49 | 31 | 18 | 19 | 31 |
| P-02 | 81 | 47 | 25 | 36 | 28 |
| P-03 | 110 | 50 | 31 | 43 | 34 |
| P-04 | 146 | 62 | 39 | 62 | 39 |
| P-05 | 169 | 74 | 45 | 46 | 45 |
| P-06 | 204 | 87 | 50 | 48 | 52 |
| TEMPO DE PROCESSAMENTO (segundos) | | | | | |
| P-01 | 1,6 | 1,0 | 1,7 | 1,8 | 2,1 |
| P-02 | 9,1 | 5,5 | 7,4 | 10,3 | 6,7 |
| P-03 | 29,6 | 13,6 | 21,2 | 28,6 | 18,9 |
| P-04 | 75,6 | 32,5 | 50,7 | 77,6 | 41,9 |
| P-05 | 150,6 | 66,7 | 99,5 | 101,5 | 83,4 |
| P-06 | 308,1 | 129,1 | 181,6 | 167,7 | 153,1 |

Observa-se que os quatro algoritmos com condicionamento são eficazes para acelerar a taxa de convergência. O melhor desempenho foi obtido pelo algoritmo EPE Cholesky.

Pode-se observar também, que os menores tempos de processamento das iterações foram obtidos pelo emprego do algoritmo Diagonal.

Por outro lado, um decréscimo percentual acentuado do número de iterações com o aumento do número de graus de liberdade da malha pode ser observado para todos algoritmos. No gráfico mostrado na FIGURA I.5.3.3, pode-se observar este comportamento para o condicionador Diagonal.

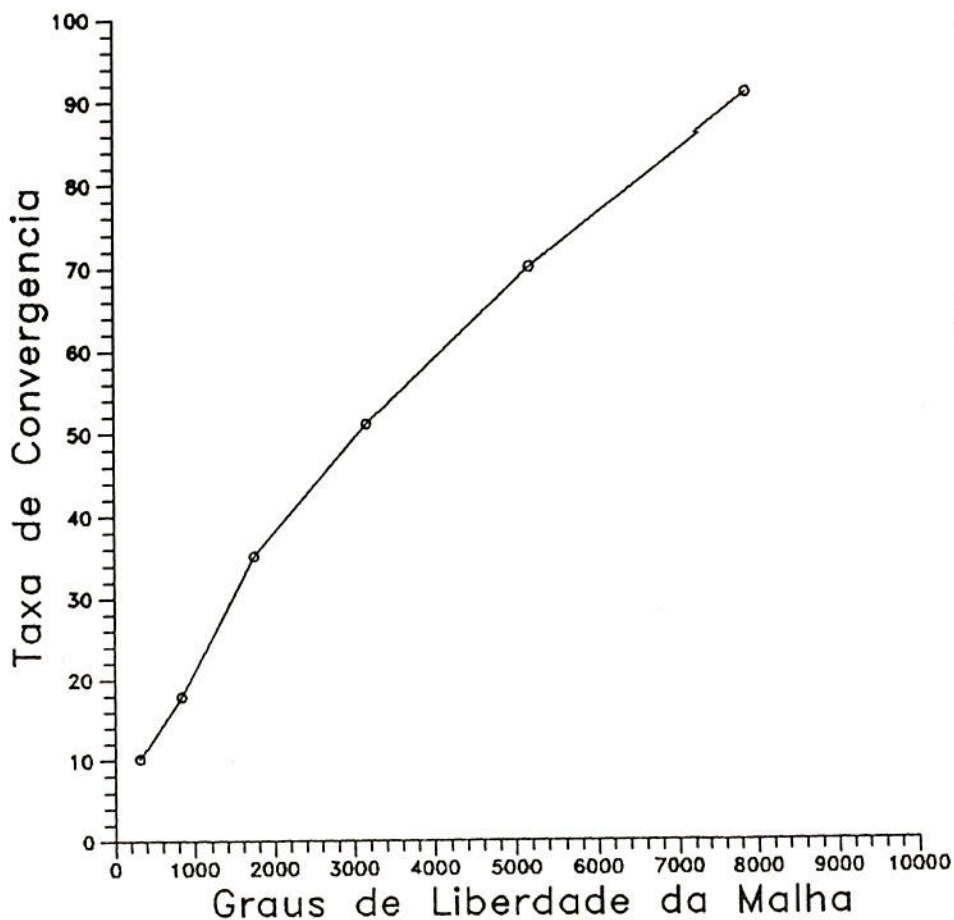


FIGURA I.5.3.3 - Performance da taxa de convergência para o condicionador EPE de Diagonal.

I.5.4 - Observações Complementares

Para os três casos analisados, as matrizes geradas são muito bem condicionadas, o que pode ser inferido dos valores do quociente D_{\max} / D_{\min} que estão plotados segundo os graus de liberdade dos exemplos no gráfico da FIGURA I.5.4.1.

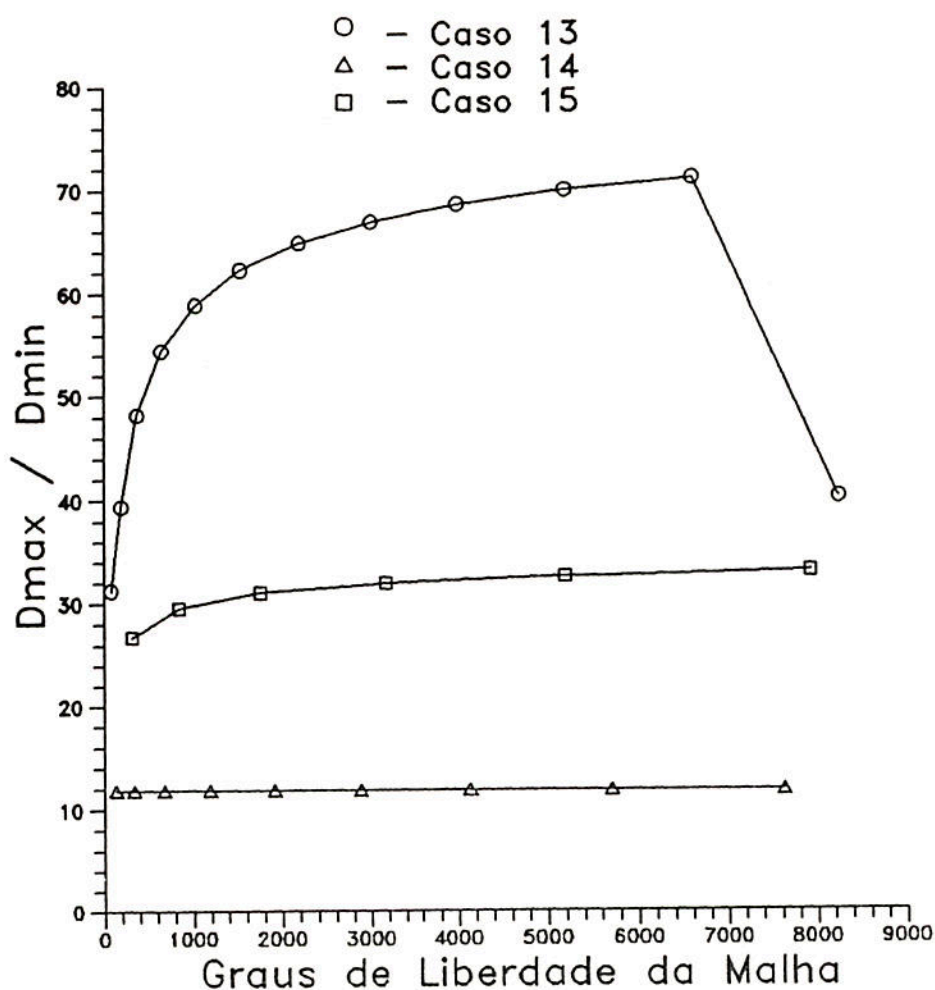


FIGURA I.5.4.1 - Variação do quociente D_{\max} / D_{\min} com o número de graus de liberdade dos exemplos de sólido tridimensional.

Os requisitos de armazenamento mostraram-se favoráveis à solução iterativa à medida que aumenta o porte do problema tratado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. AJIZ, M.A., JENNINGS, A. A robust incomplete Cholesky-conjugate gradient algorithm. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.20, p.949-966, 1984.
2. AXELSSON, O. A class of iterative methods for finite elements equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.9, p.123-137, 1976.
3. AXELSSON, O., BARKER, V.A. **Finite element solution of boundary value problems**. Orlando, Florida: Academic Press, 1984, 432p.
4. BECKMANN, F.S. The solution of linear equations by the conjugate gradient method. In: RALSTON, A., WILF, H.S. (Eds.) **Mathematical methods of digital computers**. New York : John Wiley, 1960. p.62-72.
5. CAREY, G.F., JIANG, B. Element-by-element linear and nonlinear solution schemes. **Communications in Applied Numerical Methods**, v.4, p.299-307, 1986.
6. CAREY, G.F., ODEN, J.T. **Finite elements ; computational aspects**. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1984. v.3.
7. COUTINHO, A.L.G.A. et al. Comparison of Lanczos and conjugate gradients for element-by-element solution of finite element equations on the IBM 3090 vector computer. **Computers and Structures**, v.39, n.1/2, p.47-55, 1991.
8. CRISFIELD, M.A. **Finite elements and solution procedures for**

- structural analysis**. Swansea, U.K. : Pineridge Press, 1986. 272p.
9. EISENSTAT, S.C. Efficient implementation of a class of preconditioned conjugate gradient methods. **SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing**, v.2, n.1, p.1-4, 1984.
 10. ENGELLI, M. et al. **Refined iterative methods for computation of the solution and the eigenvalues of self-adjoint boundary value problems**. Basle : Birkhauser-Verlag, 1959.
 11. EVANS, D.J. The use of preconditioning in iterative methods for solving linear equations with symmetric positive definite matrices. **Journal of the Institution of Mathematics Applications**, v.4, p.204-214, 1967.
 12. FINLAYSON, B.A. **The method of weighted residuals and variational principles**. New York : Academic Press, 1972. 428p.
 13. FOX, R.L., STANTON, E.L. Developments in structural analysis by direct energy minimization. **AIAA Journal**, v.6, n.6, p.1036-1042, June 1968.
 14. FRIED, I. A gradient computational procedure for the solution of large problems arising from the finite element discretization method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.2, p.477-494, 1970.
 15. ——— . More on gradient iterative methods in finite element analysis. **AIAA Journal**, v.7, n.3, p.565-567, Mar. 1969.
 16. GOLUB, G.H., VAN LOAN, C.F. **Matrix computations**. Baltimore, Maryland : John Hopkins University Press, 1989. 642p.
 17. GREENBAUM, A. Comparison of splittings used with the

- conjugate gradient algorithm. *Numerische Mathematik*, v.33, p.181-194, 1979.
18. GROEHS, A.G., SANTOS, M.I.G. GAELI - Gerador e analisador de estruturas lineares. Porto Alegre: CPGEC/UFRGS, 1990.181p.
 19. HAGEMAN, L.A., YOUNG, D.M. *Applied iterative methods*. San Diego, California : Academic Press, 1981. 386p.
 20. HESTENES, M.R. The conjugate-gradient method for solving linear systems. In: SYMPOSIA IN APPLIED MATHEMATICS. *Proceedings...* New York : McGraw-Hill, 1956. p.83-102.
 21. HESTENES, M.R., STIEFEL, E. Methods of conjugate gradients for solving linear systems. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, v.49, n.6, p.409-436, 1952.
 22. HINTON, E., OWEN, D.R.J. *Finite element programming*. London: Academic Press, 1977. 305p.
 23. HUGHES, T.J.R. *The finite element method ; linear static and dynamic finite element analysis*. Englewood Cliffs, N. J. : Prentice-Hall, 1987. 803p.
 24. HUGHES, T.J.R., FERENCZ, R.M. Large-scale vectorized implicit calculations in solid mechanics on a cray x-mp/48 utilizing EBE preconditioned conjugate gradients. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.61, p.215-248, 1987.
 25. HUGHES, T.J.R. , WINGET, J.M. Solution algorithms for nonlinear transient heat conduction analysis employing element-by-element iterative strategies. *Computer Methods Applied Mechanics and Engineering*, v.52, p.711-815, 1985.
 26. HUGHES, T.J.R., LEVIT, I., WINGET, J. Element-by-element implicit algorithms for heat conduction. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, v.109, p.576-585, 1983.

27. ——— . An element-by-element solution algorithm for problems of structural and solid mechanics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.36, p.241-254, 1983.
28. HUGHES, T.J.R. et al. New alternating direction procedures in finite element analysis based on EBE approximate factorizations. In: ATLURY, S.N., PERRONE, N. (Eds.) **Computer methods for nonlinear solids and structural mechanics**. New York : ASME, 1983. p.75-109. (AMD,54)
29. ——— . A progress report on EBE solution procedure in solids mechanics. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON NUMERICAL METHODS FOR NONLINEAR PROBLEMS, 2, Barcelona. **Proceedings...** Swansea, U.K. : Pineridge Press. v.2, p.18-26, 1984.
30. JENNINGS, A. Influence of the eigenvalue spectrum on the convergence rate of the conjugate gradient method. **Journal of the Institution of Mathematics Applications**, v.20, p.61-70, 1977.
31. JENNINGS, A. **Matrix computation for engineers and scientists**. London : John Wiley & Sons, 1988. 330p.
32. JENNINGS, A., MALIK, G.M. The solution of sparse linear equations by the conjugate gradient method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.12, p.141-158, 1978.
33. JOHNSON, O.G., MICCHELLI, C.A., PAUL, G. Polynomial preconditioners for conjugate gradient calculations. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v.20, n.2, p.362-376, 1983.
34. KERSHAW, D.S. The incomplete Cholesky-conjugate gradient method for the iterative solution of linear equations. **Journal of Computational Physics**, v.26, p.43-65, 1978.

35. KOWALIK, J. Iterative methods for linear equations in matrix structural analysis. *International Shipbuilding Progress*, v.13, p.59-68, 1966.
36. MACNEAL, R.H., HARDER, R.L. A proposed standard set of problems to test finite element accuracy. *Finite Elements in Analysis and Design*, v.1, p.3-20, 1985.
37. MEIJERINK, J.A., VAN DER VORST, H.A. An iterative solution method for linear systems of which the coefficient is a M-matrix. *Mathematics of Computation*, v.31, p.148-162, 1977.
38. MELHEM, R. Toward efficient implementation of preconditioned conjugate gradient methods on vector supercomputers. *International Journal for Supercomputing Applications*, v.1, p.70-98, 1987.
39. MULLER, A., HUGHES, T.J.R. Precondicionadores elemento-por-elemento y globales. Una perspectiva. *Revista Internacional de Metodos Numericos para Calculo y Diseno en Ingenieria*, v.2, n.1, p.27-41, 1986.
40. NOUR-OMID, B. A preconditioned conjugate gradient method for solution of finite element equations. In : INTERNATIONAL CONFERENCE ON INNOVATIVE METHODS FOR NONLINEAR PROBLEMS, 1984, New Orleans. *Proceedings...* Swansea, U.K.: Pineridge Press, 1984. p.51-62.
41. NOUR-OMID, B., PARLETT, B.N. Element preconditioning using splitting techniques. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, v.6, n.3, p.761-770, 1985.
42. REID, J.K. On the method of the conjugate gradients for the solution of large sparse systems of linear equations. In : REID, J.K. (Ed.) *Large sparse sets of linear equations*. New York : Academic Press, 1971. p.231-254.

43. SAAD, Y. Practical use of polynomial preconditioning for the conjugate gradient method. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, v.6, n.4, p.865-881, 1985.
44. SEAGER, M.K. Parallelizing conjugate gradient method on the CRAY X-MP. *Parallel Computing*, v.3, p.35-47, 1986.
45. STEWART, G.W. The convergence of the method of conjugate gradients at isolated extreme points of the spectrum. *Numerische Mathematik*, v.24, p.85-93, 1975.
46. TEIXEIRA, F.G. *Sistema de reordenação nodal para soluções do tipo banda*. Porto Alegre : CPGEC/UFRGS, 1991. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Escola de Engenharia, UFRGS.
47. VAN DER SLUIS, A., VAN DER VORST, H.A. The rate of convergence of conjugate gradients. *Numerische Mathematik*, v.48, p.543-560, 1986.
48. VAN DER VORST, H.A. The performance of Fortran implementations for preconditioned conjugate gradients on vector computer. *Parallel Computing*, v.3, p.49-58, 1986.
49. YETTRAM, A.L., HIRST, M.J.S. The solution of structural equilibrium equations by the conjugate method with particular reference to plane stress analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.3, p.349-360, 1971.
50. YUNUS, S.M., PAWLAK, T.P., WHEELER, M.J. Application of the Zienkiewicz-Zhu error estimator for plate and shell analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.29, p.1281-1298, 1990.
51. ZIENKIEWICZ, O.C. *The finite element method*. 3.ed. London : McGraw-Hill, 1986. 786p.