

OTIMIZAÇÃO DE PÓRTICOS MÚLTIPLOS PELO MÉTODO PLÁSTICO.

Sérgio Roberto Maestrini

SÉRGIO ROBERTO MAESTRINI

OTIMIZAÇÃO DE PÓRTICOS MÚLTIPLOS PELO MÉTODO PLÁSTICO

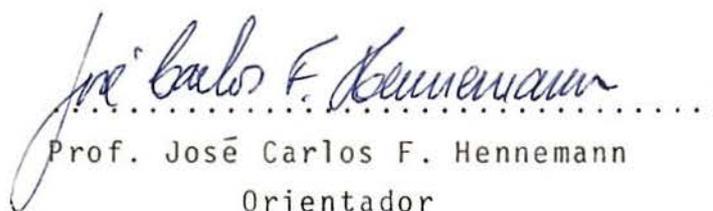
Tese apresentada ao corpo docente do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de "MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL".

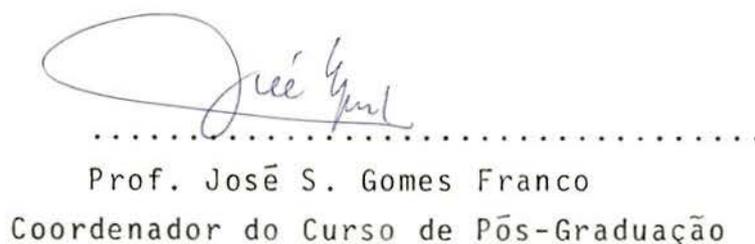
Porto Alegre
Estado do Rio Grande do Sul - Brasil

Dezembro 1978

ESCOLA DE ENGENHARIA
BIBLIOTECA

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de "MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL" e aprovada em sua forma final pelo orientador e pelo Curso de Pós-Graduação.


.....
Prof. José Carlos F. Hennemann
Orientador


.....
Prof. José S. Gomes Franco
Coordenador do Curso de Pós-Graduação

À minha esposa

Agradecimentos

Ao Professor Engenheiro José Carlos Ferraz Hennemann, orientador de tese, pelos ensinamentos que fundamentaram esta pesquisa.

Aos Professores, colegas e funcionários do Pós-Graduação em Engenharia Civil que de uma forma ou de outra colaboraram para a realização deste trabalho.

À Universidade Federal de Pelotas e à Universidade Católica de Pelotas pelo auxílio financeiro proporcionado.

SINOPSE

Este trabalho apresenta a otimização de pórticos múltiplos pelo método da combinação dos mecanismos. O problema é formulado como um caso de programação linear. São considerados pórticos de um andar com o número de vãos variando de um a cinco. Dois tipos de carregamento são utilizados: fixo e variável repetido. O critério de resistência à flexão governa o projeto, desprezando-se os efeitos da flambagem, de força normal, de força cortante, etc. O objetivo fundamental é fazer uma comparação entre os resultados obtidos considerando-se os dois tipos de carregamento independentemente. A função objetivo é o peso da estrutura expresso como uma combinação linear dos momentos plásticos das barras da estrutura. As variáveis de projeto são: A) O momento plástico dos pilares e B) o momento plástico das vigas. As soluções são obtidas através da sub-rotina simplex.

SYNOPSIS

This work presents the optimization of multi-bay frames using the combination of mechanisms technique. The problem is formulated as a linear programming problem. It deals with one story and one to five bays plane frames. Fixed and variable repeated loading are considered. The governing criterion is that of flexural strength, neglecting the effects of buckling, normal force, shear force, etc. The main objective is to compare the results obtained by the two loading type acting independently. The objective function is the structural weight given as a linear combination of the members' plastic moments. The design variables are: A) the plastic moment of the stanchions and B) the plastic moment of the beams. The solutions are found making use of the simplex procedure.

LISTA DE SÍMBOLOS

- a_{ki} = coeficiente que define a contribuição de M_{pi} na k -ésima condição de equilíbrio.
- \underline{A} = matriz dos a_{ki}
- \vec{b} = vetor que contém os trabalhos externos dos k mecanismos possíveis
- e_k = trabalho externo realizado pelas cargas de serviço no mecanismo k
- E = módulo de elasticidade longitudinal
- H = carga concentrada horizontal
- i = índice referente ao número de variáveis de projeto
- I_i = momento de inércia de barra, associado à variável i
- j = índice referente às seções críticas
- k = índice referente ao número de mecanismos possíveis
- l = comprimento de barra
- m, M = número de equações não triviais
- m_j = momento residual na seção j
- \bar{m}_j = momento residual estaticamente admissível na seção j
- $(M_y)_j$ = momento de escoamento na seção j
- M_j = momento fletor na seção j
- \mathbb{M}_j = momento fletor elástico na seção j
- $\mathbb{M}_j^{\max}, \mathbb{M}_j^+$ = valor máximo de \mathbb{M}_j
- $\mathbb{M}_j^{\min}, \mathbb{M}_j^-$ = valor mínimo de \mathbb{M}_j

$(M_p)_j$	= momento plástico na seção j
M_A	= momento plástico das barras verticais
M_B	= momento plástico das barras horizontais
n	= número de incógnitas
n_p	= número de mecanismo possíveis
p	= número de mecanismos independentes
Q	= peso por unidade de comprimento
Q^*	= função peso a ser minimizada
Q_{FIX}^*	= peso para carregamento fixo
Q_{VAR}^*	= peso para carregamento variável repetido
r	= grau de indeterminação estática
S	= número de rótulas plásticas possíveis
V	= carga concentrada vertical
W	= carga última especificada
W_c	= carga de colapso plástico
X_i	= variáveis de projeto
\vec{X}	= vetor que contém as variáveis de projeto
Z	= módulo elástico da seção transversal
Z_p	= módulo plástico da seção transversal
δ	= deflexão
ϵ	= deformação
λ_a, λ'_a	= fator de carga para plasticidade alternada
λ_c	= fator de carga para carregamento estático
λ_i, λ'_i	= fator de carga para colapso incremental
λ_s	= fator de carga para carregamento variável repetido

- θ_j = rotação da rótula existente na seção j
- θ_j^+ = valor positivo de θ_j
- θ_j^- = valor negativo de θ_j
- θ_{kj} = rotação da rótula j no mecanismo k
- θ_{kj}^+ = valor positivo de θ_{kj}
- θ_{kj}^- = valor negativo de θ_{kj}
- κ = curvatura
- ν = fator de forma
- σ_o = tensão de escoamento inferior
- σ_u = tensão de escoamento superior
- $\bar{\sigma}$ = tensão admissível

SUMÁRIO

	Pág.
CAPÍTULO I	
1. <u>Introdução</u>	
1.1 - Escopo dos Métodos Plásticos	1
1.2 - Histórico	2
CAPÍTULO II	
2. <u>Hipóteses básicas</u>	
2.1 - O conceito de rótula plástica	5
2.2 - Relação tensão-deformação para o aço doce	6
2.3 - Flexão elasto-plástica e momento plástico	8
2.4 - O princípio dos trabalhos virtuais	13
CAPÍTULO III	
3. <u>Teoremas fundamentais</u>	
3.1 - Introdução	16
3.2 - Teoremas	16
3.2.1 - Teorema estático	16
3.2.2 - Teorema cinemático	17
3.2.3 - Teorema da unicidade	17
3.3 - Mecanismos e deslocamentos virtuais	18
3.4 - O fator de carga	19
3.5 - Cargas distribuídas	20
3.6 - Tipos de colapso plástico	22
CAPÍTULO IV	
4. <u>Os métodos do cálculo plástico</u>	
4.1 - Introdução	23
4.2 - A técnica da combinação dos mecanismos	24
4.2.1 - Bases do método	24
4.2.2 - Rotações nodais	27
4.2.3 - Limitações do método	29

CAPÍTULO V

5. Carregamento variável repetido

5.1 - Introdução	31
5.2 - Definições	32
5.3 - Teoremas	34
5.3.1 - Teorema do limite inferior (Shake-down Theorem)	34
5.3.2 - Teorema do limite superior	35
5.3.3 - Observações e teorema da unicidade	37
5.4 - Métodos de projeto e análise	37
5.4.1 - O método das tentativas	37
5.4.2 - O método da combinação dos mecanismos	38
5.5 - Utilização	39

CAPÍTULO VI

6. A Otimização no regime plástico

6.1 - Introdução	41
6.2 - A programação linear	41
6.2.1 - Introdução	41
6.2.2 - Formulação Geral	42
6.2.3 - Conjuntos convexos	43
6.2.4 - Determinação da solução ótima	47
6.3 - Projeto plástico de peso mínimo	48
6.4 - Formulação geral do projeto plástico de peso mínimo	52
6.4.1 - Carregamento estático	52
6.4.2 - Carregamento variável repetido (Shake-down)	53

CAPÍTULO VII

7. Elaboração do programa computacional

7.1 - Introdução	56
7.2 - Considerações básicas	56
7.3 - Caso de carregamento estático	57
7.4 - Caso de carregamento variável repetido	58

CAPÍTULO VIII

8. <u>Aplicações</u>	82
----------------------------	----

CAPÍTULO IX

9. Conclusões e Sugestões

9.1 - Conclusões	98
9.2 - Sugestões	101
Referências Bibliográficas	102

1. Introdução

1.1 - Escopo dos métodos plásticos

No fim do século passado, baseados no trabalho pioneiro de Navier, alguns autores como Maxwell, Mohr, Castigliano e outros, desenvolveram os hoje chamados métodos clássicos da análise elástica. Seguindo a lei de Hooke, estes métodos eram eficientes porque, inicialmente, sendo aplicados apenas a treliças de madeira, não apresentavam dificuldades adicionais.

Porém, no início do presente século, se tornou comum o uso do concreto armado e do aço, materiais que usados em estruturas de barras, permitem ligações mais rígidas entre membros, possibilitando a transmissão de momentos para toda a estrutura. Foram, então, desenvolvidas técnicas adequadas para a análise deste tipo de estrutura. Apesar dos esforços, os novos métodos não eram eficientes para estruturas com grau de indeterminação estática elevada, proporcionando ao calculista trabalho demasiado.

Em vista disso e das excessivas simplificações que são necessárias para a aplicação dos processos elásticos, fugindo à realidade, desenvolveram-se os métodos plásticos com o objetivo de estabelecer procedimentos mais econômicos e mais racionais para a análise estrutural.

Por outro lado, além dos motivos supra, a capacidade de carga de uma estrutura hiperestática, cuja solicitação predominante seja a de flexão, raramente é esgotada quando a seção mais solicitada entra em escoamento. Excluída a possibilidade de flambagem, o colapso da estrutura se dará quando várias seções se plastificarem simultaneamente, dependendo, é óbvio, do número de redundantes. Este tipo de ruína é chamado colapso plástico e cada seção ao se plastificar dá origem a uma rótula plástica. A possibilidade de utilização de uma estrutura além do seu limite elástico está ligada à ductilidade do material que a compõe.

Estruturas constituídas de material dúctil geralmente

possuem uma reserva de resistência acima da carga de escoamento, a qual não pode ser utilizada quando se adotam processos elásticos.

Os cálculos baseados nos critérios de plasticidade são muito mais simples que os correspondentes elásticos para a análise da mesma estrutura. Esta simplicidade analítica é uma notável vantagem dos métodos plásticos, pois implica que esses não necessitam de tantas simplificações como nos métodos elásticos.

Mesmo com o advento da era da computação, a vantagem dos métodos plásticos não se diluiu; problemas de otimização na área da plasticidade são abordados com mais frequência e facilidade, tornando mais amplo o domínio dos métodos plásticos. Ainda com relação ao uso dos computadores, os métodos plásticos são atualmente abordados através da programação linear, dando mais uma mostra da sua versatilidade.

1.2 - Histórico

Embora o comportamento de vigas carregadas além do regime elástico tenha sido estudado muito mais cedo, aparentemente, Baker¹ foi o primeiro a imaginar que a teoria plástica simples seria uma maneira de simplificar e racionalizar o cálculo das estruturas mais complexas. Para tanto, apresentou em 1949 um método para calcular a carga crítica em pórticos com mais de um vão: o método das tentativas.

Segundo Neal²⁷ as primeiras publicações sobre a utilização da ductilidade dos metais foram devidas a Kazinczy, na Hungria em 1914, notando o pesquisador que uma viga bi-engastada em trava em colapso apenas quando tres seções transversais haviam se plastificado, comportando-se como articulações. A partir de então houve um forte crescimento de interesse a respeito dos métodos plásticos, salientando-se Maier-Leibnitz em 1928. Este notável pesquisador realizou testes e apresentou interpretações teóricas que colocaram, pela primeira vez, os métodos plásticos numa firme base quantitativa.

Até ser publicado o método das tentativas de Baker¹, toda a base do cálculo plástico era tida como intuitiva. Faziam-se necessários fundamentos matemáticos, sem os quais nenhuma teoria se desenvolve. Surgiram, então, nomes como Greenberg e Prager¹⁶, Horne³, Massonet²⁵ e outros para colocar os métodos plásticos so

near; as soluções foram obtidas através da sub-rotina simplex.

Além dos mencionados, outros pesquisadores^{4,10,11, 17, 28,29}, muito contribuíram para o progresso da teoria plástica no campo da otimização estrutural, porém, o mundo ainda se encontra no limiar desta era que poderá revolucionar todo o cálculo estrutural.

2. Hipóteses Básicas

2.1 - O conceito de rótula plástica

O objetivo fundamental dos métodos plásticos é prever para que cargas uma determinada estrutura entrará em colapso.

Supondo carregamento proporcional, uma estrutura comporta-se elasticamente até que a fibra extrema de sua seção mais solicitada entre em escoamento, não sendo mais válida, a partir daí, a teoria elástica. É, entretanto possível analisar o comportamento desta estrutura, suposta carregada além do seu limite elástico, através da teoria plástica, desde que certas idealizações sejam feitas. Em geral, nota-se que com o crescimento das cargas a seção mais solicitada se plastifica rapidamente, transmitindo um momento fletor maior que o momento que causou o primeiro escoamento. Ao se plastificar totalmente a seção comporta-se como uma rótula, sofrendo apenas movimento de rotação, com o momento fletor mantendo-se constante. A rótula em questão é chamada rótula plástica e o momento fletor que ela transmite é o momento plástico. Uma hipótese fundamental da teoria plástica é que uma rótula plástica pode sofrer rotações de qualquer magnitude desde que o momento fletor permaneça constante no seu valor plástico.

Se a estrutura for uma viga de aço, bi-apoiada, carregada no centro, como mostra a figura. 2.1(a), a seção mais solicitada está sob a carga; plastificada, esta seção dá lugar a uma rótula plástica e a deflexão cresce indefinidamente sob carga constante, desde que seja desprezado o acréscimo de resistência do material, como mostra o diagrama carga-deslocamento da figura 2.1(b).

O assumido aumento indefinido da deflexão sob carga constante é chamado de colapso plástico e a carga que o causa é a carga de colapso plástico, W_c .

O fato da rótula plástica transmitir um momento fletor

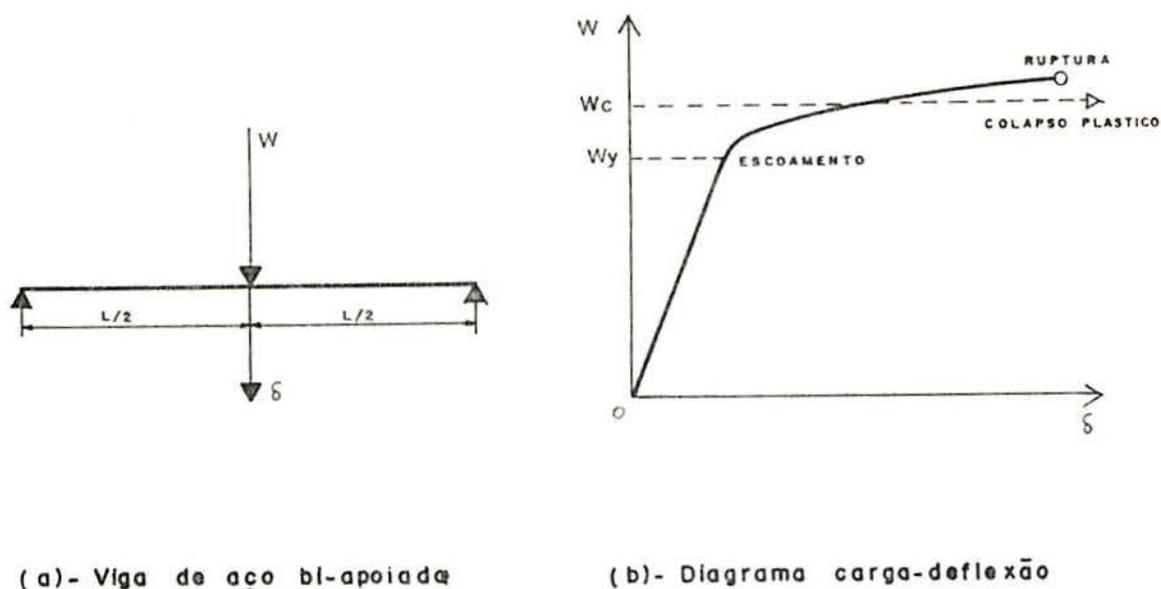


FIG. 2.1

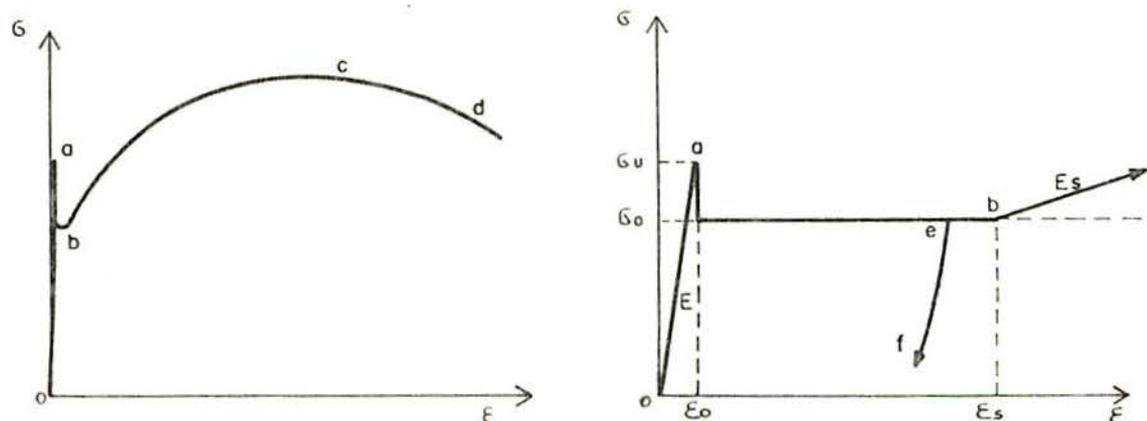
constante e definido implica que o mecanismo de movimento somente aparece quando a carga é tal que produza este momento na rótula.

Os métodos plásticos devem ser usados somente quando o critério governante do projeto é o colapso plástico. Existem casos cujo problema principal é o de evitar outros tipos de ruptura; é implicitamente assumido que nenhuma parte da estrutura se romperá por flambagem antes que a carga de colapso plástico seja atingida.

Os problemas de flambagem foram amplamente abordados por Baker³, que apresentou regras para que os mesmos não ocorram antes que seja atingida a carga de colapso plástico.

2.2. Relação tensão-deformação para aço doce

A figura 2.2(a) mostra o diagrama tensão-deformação de um corpo de prova de aço doce até sua ruptura, através de um ensaio simples de tração.



(a) - Diagrama tensão-deformação

(b) - Período de escoamento

FIG. 2.2 - RELAÇÃO TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA O AÇO.

A relação é linear no período elástico até que seja alcançada, em a , a tensão de escoamento superior. A tensão então cai bruscamente para a tensão de escoamento inferior e a deformação aumenta, a tensão permanecendo constante, até o ponto b , de maneira puramente plástica. Além de b , são necessários incrementos na tensão para produzir novas deformações, e o material experimenta o "encruamento".

Eventualmente a tensão máxima é atingida em c . Devido à estricção no corpo de prova, a tensão decresce a partir de c , até que ocorra a ruptura, em d .

Do ponto de vista da plasticidade o período de escoamento oab é o de maior interesse. Na figura 2.2(b) vê-se o período de escoamento com a escala de deformações ampliada, já que em b a deformação é geralmente da ordem de 1%-2%. Nesta figura a linha oa representa o módulo de Young, E , e a inclinação

da porção inicial que experimenta o encruamento é definida como E_s , a partir de b . Se a tensão for reduzida depois do escoamento, uma relação tal qual ef é observada; a inclinação inicial é o módulo de Young, e o desvio da sua linearidade no descarregamento é devido ao efeito Bauschinger.

Se a tensão for aumentada novamente depois de reduzida desta forma, o escoamento se dará ao ser atingida a tensão de escoamento inferior, ao longo de eb . Isto mostra que o encruamento do aço destrói a tensão de escoamento superior, a qual somente reaparece após tratamento térmico.

A teoria plástica simples negligencia o encruamento e o efeito Bauschinger, levando a uma relação tensão-deformação como a da figura 2.3(a).

Alguns aços, chamados do grupo B, não apresentam a tensão de escoamento superior pois são previamente trabalhados a frio; assim, desprezando esta tensão, chega-se à relação plástica ideal apresentada na figura 2.3(b).

Os erros introduzidos com estas simplificações são mínimos não afetando de maneira considerável o valor do momento plástico.

2.3. - Flexão elasto-plástica e momento plástico

Para uma viga de determinada seção transversal, homogênea, a relação entre momento fletor e curvatura além do limite elástico pode ser derivada da relação tensão-deformação desde que as hipóteses usuais da teoria da flexão sejam observadas:

A flexão se dá por pares situados nas extremidades da viga, de forma que não haja esforço de corte nem força axial.

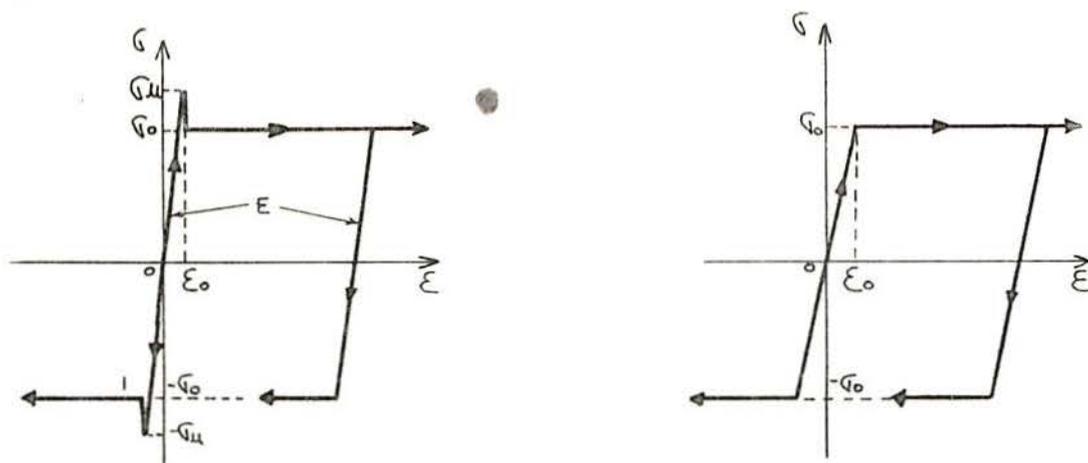
As deformações são pequenas, negligenciando-se outras tensões a não ser as longitudinais.

A relação entre a tensão longitudinal e a deformação é idêntica ao caso da tração simples.

As seções planas permanecem planas após a deformação.

Além disso será assumido que a relação tensão-deformação é do tipo plástico ideal mostrado na figura 2.3(b), sem tensão de escoamento superior, sendo a relação obedecida individual-

mente por cada fibra longitudinal da viga, suposta livre de quaisquer tensões residuais. A análise será simplificada consi-



(a) - Com tensão de escoamento superior

(b) - Relação plástica ideal

FIG. 2.3

deravelmente se a seção transversal for simétrica com respeito ao eixo contido no plano de flexão. Isto acontece em muitos casos práticos com o plano de flexão sendo vertical.

Uma viga, inicialmente reta, sujeita a momentos extremos M , se deforma num arco de círculo de raio R e diz-se que $\kappa=1/R$ é a curvatura da viga. A seção retangular desta viga é mostrada na figura 2.4(a) com M atuando em torno do eixo x .

Sendo σ_0 a tensão de escoamento inferior, a figura 2.4 (b) mostra a distribuição de tensões quando σ_0 é atingida na fibra mais afastada. Na figura 2.4(c) um incremento no momento atuante causou a plastificação de uma parte da seção modificando a distribuição de tensões, enquanto que na figura 2.4(d) vê-

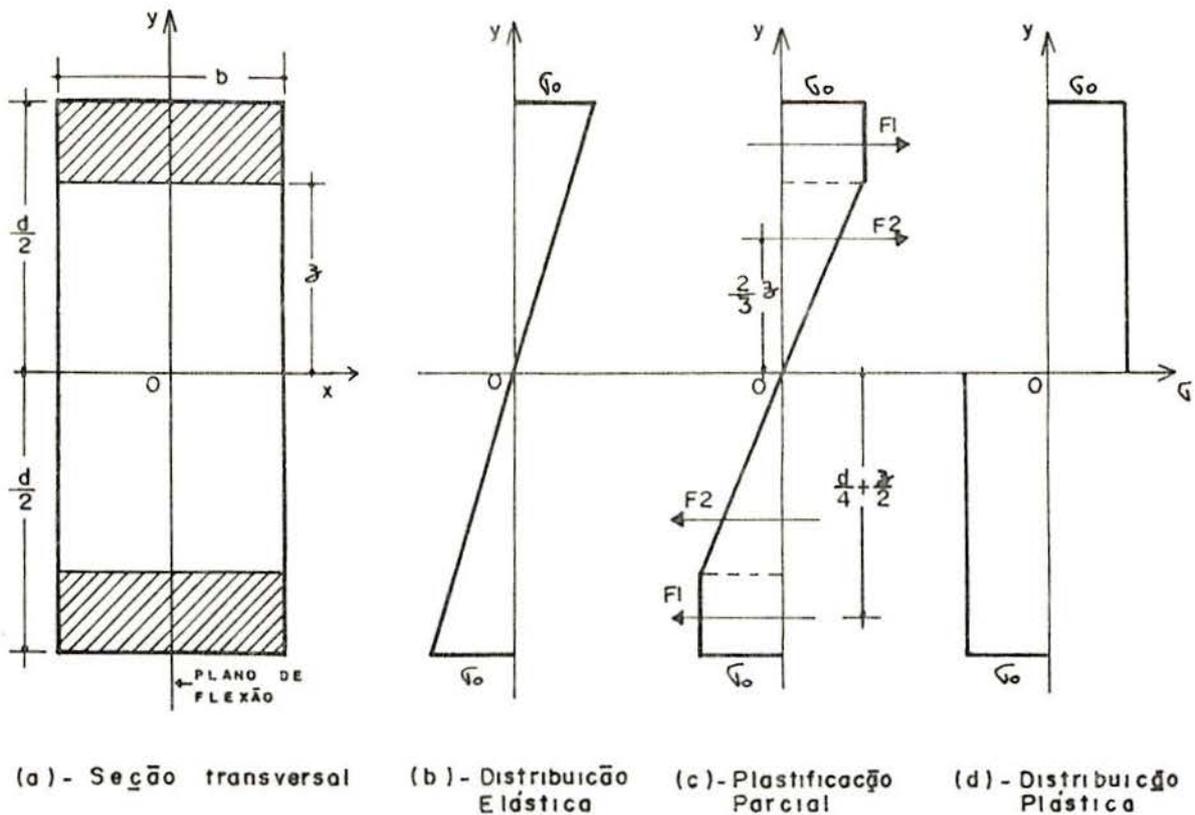


FIG. 2.4

se a distribuição de tensões quando toda a seção estiver plasticada.

O momento fletor correspondente à distribuição de tensões da figura 2.4(c) é:

$$M = \left| \frac{1}{2} \sigma_0 b z \right| \left| \frac{4}{3} z + \sigma_0 b \left| \frac{d}{2} - z \right| \right| \left| \frac{d}{2} + z \right| = b \left| \frac{d^2}{4} - \frac{1}{3} z^2 \right| \sigma_0 \quad (2.3.1)$$

Com $z = \frac{d}{2}$ a tensão distribui-se elasticamente em toda a seção e $M = M_y$ é o momento de escoamento, o maior momento que a seção pode suportar antes de escoar.

Tem-se, substituído em (2.3.1)

$$M_y = \frac{1}{6} b d^2 \sigma_0 \quad \text{ou} \quad M_y = Z \sigma_0 \quad (2.3.2)$$

onde Z é o conhecido módulo elástico da seção

Com $z = 0$ a seção estará totalmente plastificada; substituindo em (2.3.1), vem:

$$M_p = \frac{1}{4} b d^2 \sigma_0 \quad \text{ou} \quad M_p = Z_p \sigma_0 \quad (2.3.3)$$

onde Z_p é o módulo plástico da seção e M_p representa o momento plástico.

O momento plástico pode ser obtido diretamente. A figura 2.5 mostra uma seção transversal com um único eixo de simetria contido no plano de flexão que é vertical. Como a resultante das forças axiais deve ser nula, se a seção estiver totalmente plastificada, a linha neutra, nesta ocasião, deverá dividi-la em duas áreas iguais.

Sendo A a área total da seção e \bar{y}_1 e \bar{y}_2 as distâncias dos centróides das semi-áreas à linha neutra, o momento plástico será dado por:

$$M_p = \frac{1}{2} A (\bar{y}_1 + \bar{y}_2) \sigma_0 \quad (2.3.4)$$

E o módulo plástico por:

$$Z_p = \frac{1}{2} A (\bar{y}_1 + \bar{y}_2) \quad (2.3.5)$$

A razão entre o momento plástico e o momento fletor de escoamento é definida como fator de forma, v , tal que:

$$v = \frac{M_p}{M_y} = \frac{Z_p}{Z} \quad (2.3.6)$$

A base de todo o cálculo plástico está sumarizado na figura 2.6, a qual mostra a relação entre momento fletor M e curvatura κ para uma viga de rigidez EI e momento plástico M_p . É a relação momento fletor-curvatura ideal.

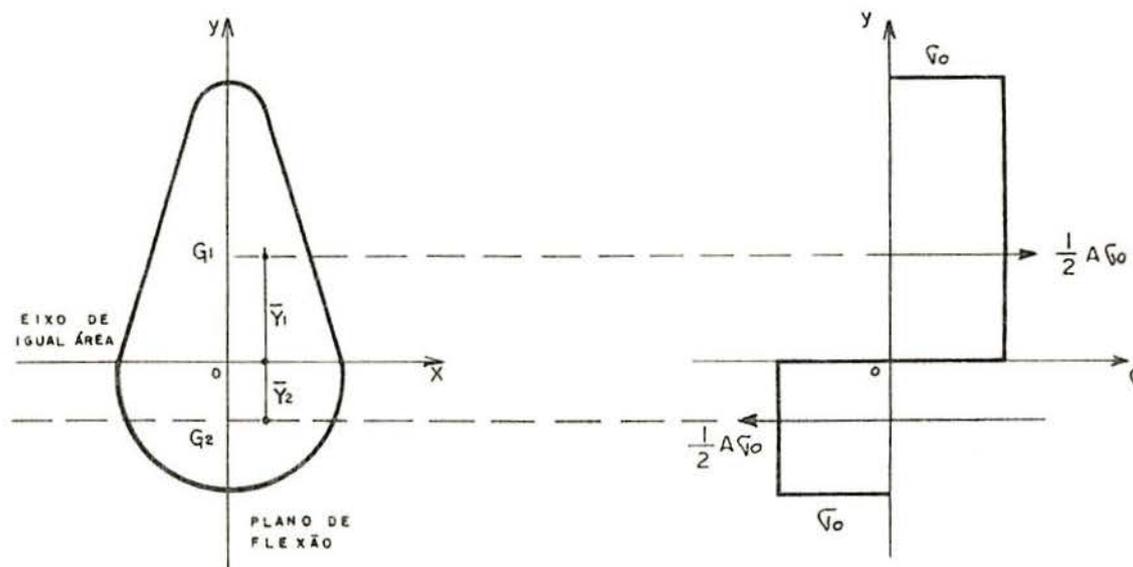


FIG. 2.5 - DISTRIBUIÇÃO PLÁSTICA DE TENSÕES

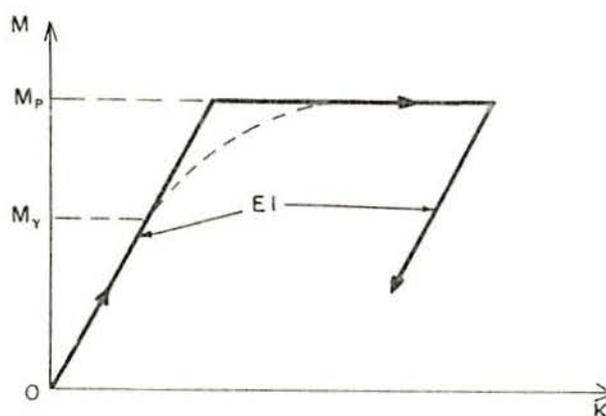


FIG. 2.6 - RELAÇÃO MOMENTO FLETOR-CURVATURA IDEAL.

Se uma estrutura estaticamente indeterminada for submetida a um carregamento proporcional, a formação da primeira rótula plástica não causará, geralmente, o colapso plástico. Novos incrementos de carga poderão ser efetuados com rótulas plásticas formando-se sucessivamente até que, finalmente, sejam suficientes para permitir a formação do mecanismo de movimento.

Conhecido o mecanismo de colapso tem-se condições de determinar diretamente a carga de colapso plástica da estrutura, tanto por um procedimento estático como por um cinemático.

2.4 - O princípio dos trabalhos virtuais

O princípio dos trabalhos virtuais para estruturas envolve sistemas de forças (cargas e momentos fletores), que satisfaçam as condições de equilíbrio e sistemas de deslocamentos (deflexões, curvaturas e rotações), que satisfaçam as condições de compatibilidade, tomando a forma:

$$\sum P \delta = \int M \kappa ds + \sum M \theta \quad (2.4.1)$$

Satisfazendo as condições de compatibilidade, basta a aplicação da equação (2.4.1) para que as condições de equilíbrio sejam satisfeitas e vice-versa. Em outras palavras, podemos eleger um sistema de deslocamentos arbitrário porém compatível, e, com a aplicação da equação dos trabalhos virtuais obter um sistema de forças equilibrado e vice-versa.

Como o presente trabalho não se preocupa com deflexões interessa apenas a aplicação do princípio para deslocamentos virtuais.

Para a viga bi-engastada da figura 2.7(a) a equação (2.4.1) pode ser escrita:

$$\sum P \delta^* = \sum M \theta^* \quad (2.4.2)$$

As rótulas inseridas não são plásticas, apenas foram introduzidas para permitir pequenos deslocamentos que realmente existem, enquanto que os membros entre as rótulas permanecem retos. Desta forma κ é sempre zero, figura 2.7(b), e o primeiro termo do segundo membro da (2.4.1) desaparece.

No que se segue, uma convenção de sinais será usada para momentos fletores, curvaturas e rotações. Momentos fletores positivos tracionam as fibras adjacentes à linha tracejada da figura 2.7, enquanto que curvaturas e rotações positivas cor

respondem a deformações de tração nas mesmas fibras.

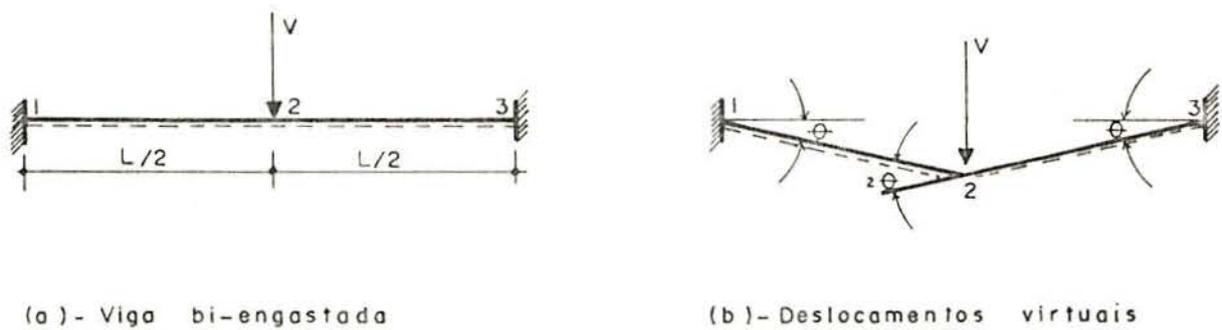


FIG. 2.7

Para a viga em questão tem-se aplicando a (2.4.2):

$$V \frac{l}{2} \theta = M_1 (-\theta) + M_2 (2\theta) + M_3 (-\theta) \quad (2.4.3)$$

cancelando θ vem:

$$\frac{Vl}{2} = -M_1 + 2M_2 - M_3 \quad (2.4.4)$$

Esta é a equação de equilíbrio que deve ser obedecida, não importando se o comportamento da viga for elástico ou parcialmente plástico. A equação (2.4.3) é independente das propriedades do material.

Supondo que a viga da figura 2.7 se plastifique nas seções 1, 2 e 3 transformando-se num mecanismo, os momentos M_1, M_2 e M_3 seriam o momento plástico M_p , e a (2.4.3) seria escrita:

$$\frac{Vl}{2} = -(-M_p) + 2M_p - (-M_p) \quad (2.4.5)$$

ou

$$\frac{V\ell}{2} = 4 M_p \quad (2.4.6)$$

V seria, então, a carga de colapso plástica W_c :

$$W_c = 8 \frac{M_p}{\ell} \quad (2.4.7)$$

Desta forma a equação dos trabalhos virtuais pode ser utilizada para determinar a carga de colapso plástica de uma estrutura, além de determinar sua análise estática completa.

3. Teoremas Fundamentais

3.1 - Introdução

No capítulo anterior mostrou-se que conhecido o mecanismo a carga de colapso plástica pode ser calculada facilmente; porém, são poucas as estruturas que fornecem a possibilidade de um só mecanismo. Na maioria dos casos haverá vários mecanismos e dentre todos é preciso selecionar o mecanismo real. Alguns teoremas auxiliarão na procura do mecanismo.

Assume-se que M_p é uma constante definida para cada membro não dependendo da força cortante nem da força axial.

3.2 - Teoremas

3.2.1 - Teorema estático

Uma distribuição de momentos fletores é dita estaticamente admissível quando satisfaz todas as condições de equilíbrio estático em relação a um conjunto de cargas externas prescritas; se esta distribuição de momentos fletores não exceder o momento plástico em nenhum ponto, além de estaticamente admissível, será segura. Para que uma estrutura seja capaz de suportar um dado conjunto de cargas é condição necessária a existência de ao menos uma distribuição de momentos fletores que seja segura, a qual deve ser estaticamente admissível. O teorema estático assegura a suficiência desta condição.

Para a apresentação formal do teorema supõe-se que um pórtico plano esteja sujeito a cargas $\lambda P_1, \lambda P_2, \dots, \lambda P_n$, cada carga sendo aplicada num dado ponto numa direção especificada. $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ são presumidas fixas e podem ser chamadas de cargas características e λ o fator de carga. As cargas são especificadas totalmente pelo valor de λ , e podem ser referidas coletivamente como o conjunto de cargas λ . O fator de carga que causa o colapso plástico é o fator de carga crítico, λ_c .

Teorema: Se existir qualquer distribuição de momentos fletores através de um pórtico plano que seja segura e estaticamente admissível em relação à

um conjunto de cargas λ , o valor de λ deverá ser menor ou igual ao fator de carga crítico, λ_c .

3.2.2. - Teorema cinemático

Se o mecanismo de colapso de um pórtico plano sujeito a um conjunto de cargas λ for conhecido, o fator de carga crítico poderá ser calculado equacionando-se o trabalho realizado pelas cargas externas durante um pequeno movimento do mecanismo com o trabalho absorvido nas rótulas plásticas. Se o mecanismo não for conhecido, uma equação semelhante poderá ser escrita para qualquer mecanismo que existir; para cada mecanismo surge um valor de λ .

Teorema: Para um dado pórtico plano sujeito a um conjunto de cargas λ , o valor de λ correspondente a qualquer mecanismo assumido deverá ser maior ou igual ao fator de carga crítico, λ_c .

Em outras palavras pode-se dizer que se os valores de λ correspondentes a todos os mecanismos de colapso possíveis forem calculados, o fator de carga crítico será o menor deles.

3.2.3 - Teorema da unicidade

Os dois teoremas anteriores podem ser combinados num só. Sabe-se do teorema estático que para qualquer valor de λ acima de λ_c não há distribuição de momentos fletores que seja segura e estaticamente admissível; por outro lado, sabe-se do teorema cinemático que não há a formação do mecanismo para o qual o correspondente fator de carga seja menor do que λ_c .

Teorema: Para um dado pórtico plano e um conjunto de cargas λ , se existir ao menos uma distribuição de momentos fletores que seja segura e estaticamente admissível na qual o momento plástico ocorra num número suficiente de seções para produzir um mecanismo, o correspondente fator de carga será o fator de carga crítico, λ_c .

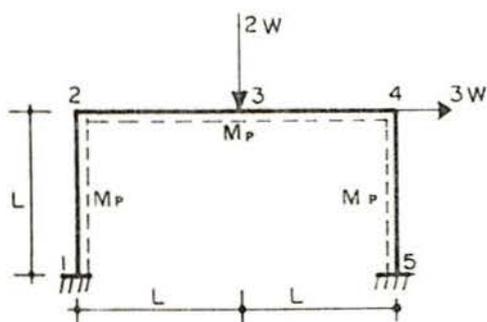
Sintetizando os tres teoremas apresentados tem-se:

Condições estáticas	$\lambda \leq \lambda_c$	$\lambda = \lambda_c$	
Condições cinemáticas	$\lambda \geq \lambda_c$		(3.2.3.1)

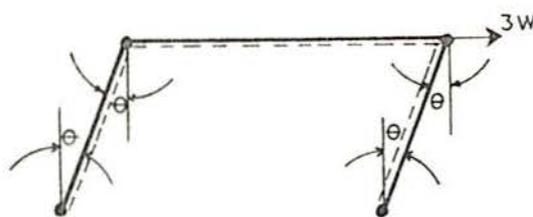
Onde as condições estáticas e cinemáticas são aquelas especificadas nos dois teoremas correspondentes.

3.3 - Mecanismos e Deslocamentos Virtuais

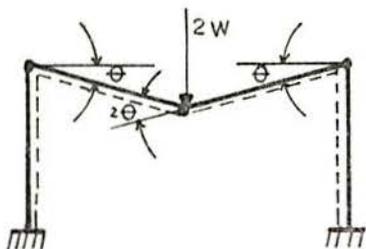
A figura 3.1(a) mostra um pórtico retangular simples. Seus membros são uniformes e possuem a mesma seção transversal, tendo comprimentos e sendo carregado conforme o esquema:



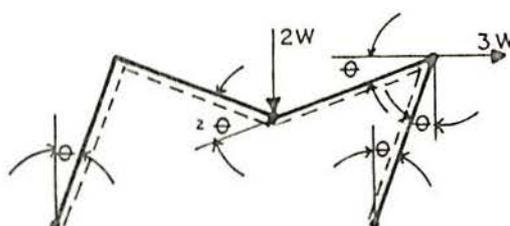
(a) - Cargas e dimensões



(b) - Mecanismo lateral



(c) - Mecanismo de viga



(d) - Mecanismo combinado

FIG. 3.1

O mecanismo lateral mostrado na figura 3.1(b) é completamente definido pela rotação horária da coluna à esquerda. A figura 3.1(c) mostra o mecanismo de viga e a 3.1(d) é o resultado da soma dos dois primeiros mecanismos, o mecanismo combinado.

O mecanismo lateral e o mecanismo de viga são os mecanismos independentes e seu número depende da quantidade de possíveis rótulas e do grau de indeterminação estática da estrutura.

ra.

Os mecanismos independentes fornecem equações de equilíbrio linearmente independentes enquanto que as equações fornecidas por mecanismos resultantes da combinação de mecanismos independentes são combinações lineares das mesmas.

Para o mecanismo lateral, utilizando o princípio dos trabalhos virtuais, pode-se escrever:

$$3\lambda\ell = -M_1 + M_2 - M_4 + M_5 \quad (3.3.1)$$

Para o mecanismo da viga tem-se:

$$2\lambda\ell = -M_2 + 2M_3 - M_4 \quad (3.3.2)$$

Para o mecanismo combinado da figura 3.1(d), somam-se (3.3.1) e (3.3.2):

$$5\lambda\ell = -M_1 + 2M_3 - 2M_4 + M_5 \quad (3.3.3)$$

Se os mecanismos fossem analisados do ponto de vista plástico, o teorema cinemático estabeleceria que o fator de carga crítico seria o menor dos fatores de carga fornecidos pelas (3.3.1), (3.3.2) e (3.3.3).

3.4 - O fator de carga

Uma estrutura é sempre projetada com alguma margem de segurança, isto é, as cargas de serviço são menores que as cargas que produziram o colapso. Esta segurança contra o colapso é representada pelo fator de carga crítico como foi visto na seção 3.2.

Além de garantir a segurança da estrutura sob as cargas de serviço, o fator de carga cobre erros de fabricação, imprecisão nos valores e outros defeitos. Com tantas variáveis é difícil fixar um valor para o fator de carga sobre uma base teórica.

Entretanto, se o cálculo plástico, que é mais racional, utilizar o mesmo fator utilizado para o cálculo elástico,

a estrutura deverá estar em segurança.

O cálculo elástico de uma viga é governado pela tensão correspondente ao maior momento fletor existente;

Se a tensão admissível for $\bar{\sigma}$, então:

$$M_y = \bar{\sigma} Z \quad (3.4.1)$$

a condição de colapso é dada por:

$$\lambda_c M_y = M_p = \sigma_o Z_p \quad (3.4.2)$$

substituindo:

$$\lambda_c = \frac{\sigma_o Z_p}{\bar{\sigma} Z} \quad (3.4.3)$$

ou

$$\lambda_c = \frac{\sigma_o}{\bar{\sigma}} v \quad (3.4.4)$$

Tomando $\sigma_o / \bar{\sigma} = 1,4$ e admitindo que $v = 1,15$ (perfil I), tem-se utilizando a (3.4.4):

$$\lambda_c = (1,4) (1,15) = 1,61$$

Esta aproximação é devida a Baker e Heyman² e é apenas uma estimativa do fator de carga crítico.

3.5 - Cargas distribuídas

Quando um ou mais membros da estrutura estiver sujeito a cargas distribuídas, a distribuição dos momentos fletores é parabólica, e o máximo momento pode ocorrer em qualquer posição. Se o mecanismo de colapso envolver uma rótula plástica na posição do momento fletor máximo, sua localização deverá ser determinada. Entretanto, este processo torna-se muito trabalhoso em certos casos e apenas fornece um grau de precisão duvidoso.

Carga distribuída

Carga equivalente

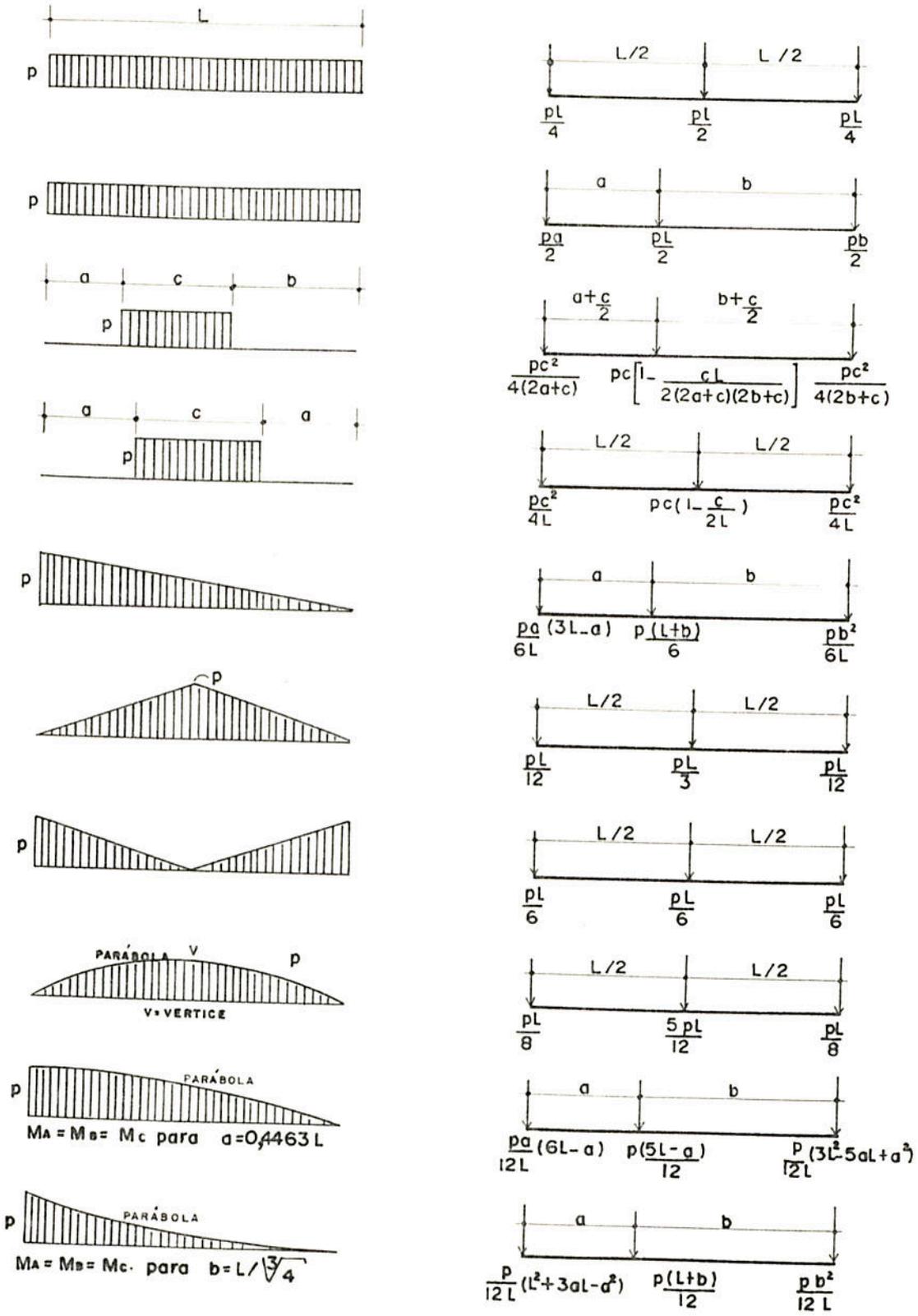


Tabela 3.1 — Cargas concentradas equivalentes

Neal²⁷, Baker e Heyman², mostraram que o erro cometido ao considerar a rótula em pontos definidos é mínimo, não afetando os resultados práticos.

Langendonck²⁴ sugere que quando houver forças externas distribuídas, faz-se sua substituição por forças concentradas e equivalentes, isto é, que exerçam o mesmo trabalho para a suposta forma de ruína da barra.

As cargas equivalentes constam de tres forças aplicadas nas extremidades da barra e no ponto que se pressupõe ser aquele em que se vai verificar a rótula plástica. O erro cometido é apenas na localização da rótula no vão e para carga uniformemente distribuída é em torno de 1%.

A tabela 3.1 apresenta alguns casos desenvolvidos por Langendonck.

3.6 - Tipos de Colapso Plástico

Considere-se um pórtico plano com r redundantes para o qual o mecanismo de colapso tenha somente um grau de liberdade com $(r + 1)$ rótulas plásticas. No instante do colapso os momentos fletores nas posições das rótulas plásticas serão conhecidos, e haverá uma equação de equilíbrio correspondente ao mecanismo de colapso a qual fornecerá o fator de carga. Restarão r equações de equilíbrio das quais poderão ser obtidas as r redundantes, de forma que a estrutura é estaticamente determinada no instante do colapso. Essa situação é descrita como colapso completo.

Se o colapso não for completo poderá ser parcial ou mais-que-completo. O colapso parcial ocorrerá quando o número de rótulas plásticas formadas no instante do colapso for insuficiente para tornar a estrutura estaticamente determinada. O colapso será mais-que-completo quando a dois ou mais mecanismos corresponder o mesmo fator de carga crítico. Os mecanismos que originam um colapso mais-que-completo podem ser transformados num mecanismo único com mais de um grau de liberdade.

4 - Os Métodos do Cálculo Plástico

4.1 - Introdução

Apesar de se ter chegado a bons resultados de maneira quase que intuitiva, tornava-se imperiosa cada vez mais a criação de métodos mais potentes para a análise plástica estrutural.

O método das tentativas de Baker¹ foi o pioneiro e, talvez por isso, muito limitado. Pode-se pensar em usá-lo apenas quando o mecanismo de colapso for conhecido ou quando a estrutura for tal que possua poucos mecanismos possíveis.

Horne³ desenvolveu o método da distribuição dos momentos plásticos, assim chamado por ter semelhanças com o método da distribuição dos momentos da análise elástica, o qual considera cada membro da estrutura separadamente, e, usando um processo sistemático, estabelece o equilíbrio entre os membros. Para pórticos pequenos e retangulares oferece bons resultados tornando-se muito trabalhoso para estruturas maiores.

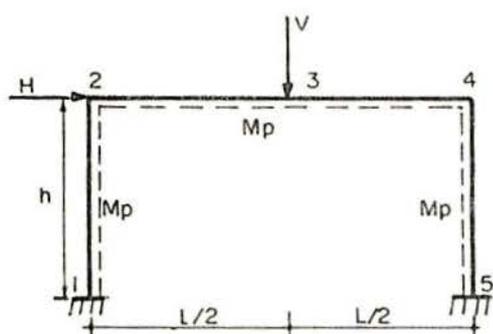
Quando o mecanismo de colapso não for conhecido, isto é, quando a estrutura oferecer muitas possibilidades de colapso, utiliza-se o método da combinação dos mecanismos devido a Neal e Symonds²⁷. O fundamental deste método é que, conhecidos a estrutura e o carregamento, todo mecanismo de colapso possível pode ser visto como a combinação de um certo número de mecanismos independentes.

Para cada mecanismo aplica-se o princípio dos trabalhos virtuais obtendo-se uma equação energética a qual fornece o correspondente valor do fator de carga λ . O verdadeiro mecanismo de colapso é distinto dos outros pelo fato que a ele corresponde o menor valor de λ , pelo teorema cinemático. Os mecanismos independentes que fornecem fatores de cargas baixos são examinados para ver se poderão ser combinados entre si formando outro mecanismo que produza um fator de carga menor ainda. É necessário somente examinar poucas das mais prováveis combinações para chegar ao mecanismo verdadeiro. Pode-se, a seguir, realizar uma análise estática para verificar o resultado.

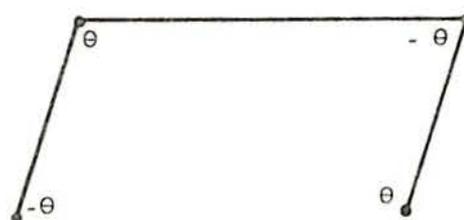
4.2 - A Técnica da combinação dos mecanismos

4.2.1 - Bases do método

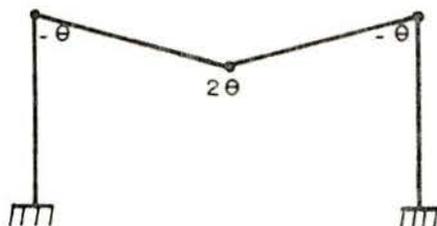
A figura 4.1 mostra um pórtico retangular simples, uniforme, e seus tres mecanismos virtuais possíveis.



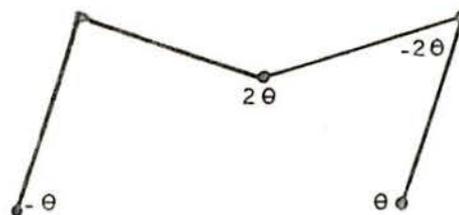
(a) - Estruturas e dimensões



(b) - Mecanismo lateral



(c) - Mecanismo de viga



(d) - Mecanismo combinado

FIG. 4.1.

Para o mecanismo combinado da 4.1(b), aplicando a equação dos trabalhos virtuais, tem-se:

$$Hh = -M_1 + M_2 - M_4 + M_5 \quad (4.2.1.1)$$

Esta equação deve ser satisfeita independentemente do comportamento da estrutura ser plástica ou elástica. Sejam as seções numeradas de um a cinco na figura 4.1(a) e seus respectivos momentos fletores M_i , $i = 1 \rightarrow 5$. A equação (4.2.1.1) relaciona estes

momentos de uma determinada maneira. Necessita-se saber quantas equações de equilíbrio deste tipo existem para uma dada estrutura.

As cinco seções numeradas na figura 4.1(a) são as seções críticas nas quais poderão se formar rótulas plásticas sob o particular sistema de cargas. Para o tipo de estrutura considerado as seções críticas ocorrerão nos pontos de carga e nos nós, em virtude do diagrama de momentos fletores ser constituído de linhas retas entre estas seções. De maneira mais geral, as cinco seções podem ser chamadas de seções principais pois o conhecimento dos momentos fletores nas suas posições descreve o estado do pórtico em qualquer estágio do carregamento.

O pórtico tem tres redundantes e, olhado desta forma, a distribuição dos momentos fletores seria completamente especificada se os valores destas redundantes fossem conhecidos.

Da equação (4.2.1.1), por exemplo, se os valores de M_1 , M_2 e M_4 fossem conhecidos, o valor de M_5 poderia ser calculado imediatamente. Deverã haver uma outra equação de equilíbrio que permita o cálculo de M_3 . Esta equação de equilíbrio pode ser escrita, com vistas ao mecanismo da figura 4.1(c) através da aplicação do princípio dos trabalhos virtuais:

$$\frac{1}{2} V_\ell = -M_2 + 2M_3 - M_4 \quad (4.2.1.2)$$

O terceiro mecanismo, figura 4.1(d), dá origem à seguinte equação:

$$Hh + \frac{1}{2} V_\ell = -M_1 + 2M_3 - 2M_4 + M_5 \quad (4.2.1.3)$$

Entretanto, a equação (4.2.1.3) não contém novas informações; é simplesmente o resultado da soma de (4.2.1.1) e (4.2.1.2). Somente duas equações são independentes.

Deste raciocínio pode ser deduzida a regra geral para o conhecimento do número de equações de equilíbrio num pórtico plano.

Se uma estrutura possuir um número N de seções críticas

e um número R de redundantes, existirão $(N-R)$ relações independentes entre os momentos fletores que atuam nas seções principais. Todas as demais equações que relacionam estes momentos fletores podem ser deduzidas das $(N-R)$ equações de equilíbrio independentes.

Agora, uma equação de equilíbrio tal qual (4.2.1.1) pode ser escrita admitindo que os mecanismos da figura 4.1 não sejam virtuais e sim mecanismos de colapso plástico, pois existe de fato uma correspondência exata entre uma equação de equilíbrio e um mecanismo de colapso.

Assim, para o mecanismo da figura 4.1(b), tem-se:

$$Hh\theta = M_p\theta + M_p\theta + M_p\theta + M_p\theta \quad (4.2.1.4)$$

ou

$$Hh = 4M_p \quad (4.2.1.5)$$

Para o mecanismo de viga da 4.1(c), vem:

$$\frac{1}{2} V\ell\theta = M_p\theta + 2M_p\theta + M_p\theta \quad (4.2.1.6)$$

ou

$$\frac{1}{2} V\ell = 4M_p \quad (4.2.1.7)$$

Para o mecanismo combinado:

$$Hh + \frac{1}{2} V\ell = 6M_p \quad (4.2.1.8)$$

A equação (4.2.1.8) foi obtida somando-se as equações (4.2.1.5) e (4.2.1.7), com um ajustamento: no seu lado direito há uma redução de $2M_p$ em virtude do cancelamento da rótula plástica na seção 2 quando os mecanismos foram combinados.

Deve ser notado que o cancelamento das rótulas plásticas é a chave do método da combinação dos mecanismos. Se duas equações tais como (4.2.1.5) e (4.2.1.7) forem combinadas sem qualquer redução no trabalho realizado pelas rótulas, o valor de λ resultará intermediário aos dois valores originais.

4.2.2. - Rotações Nodais

As seções críticas nas junções das barras da figura 4.1(a) foram marcadas corretamente pois os membros possuíam a mesma seção transversal, embora na prática a rótula pudesse se formar ou na viga ou na coluna. Entretanto, se a estrutura não for uniforme, a rótula se formará no membro menos rígido.

Para refletir esta consideração, duas seções críticas deveriam ser tomadas em cada junção, como mostra a figura 4.2.

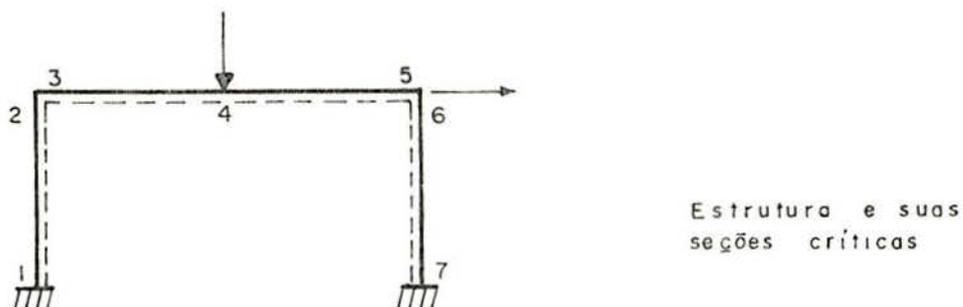


FIG. 4.2 - SEÇÕES CRÍTICAS

Desta forma, sob o carregamento mostrado o número de seções críticas é sete. Como o número de redundantes permanece tres, são necessários quatro mecanismos independentes para descrever completamente o comportamento do pórtico.

A figura 4.3 mostra os quatro mecanismos:

Os mecanismos das figuras 4.3(a) e 4.3(b) são os

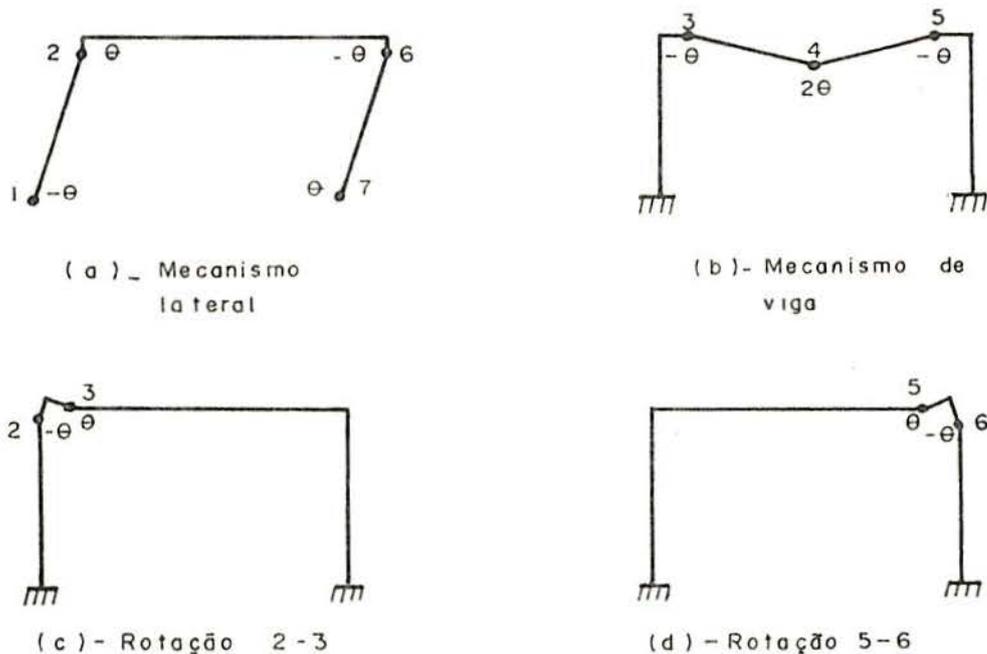


FIG. 4.3 - MECANISMOS INDEPENDENTES.

conhecidos lateral e de viga, enquanto que os outros dois são exemplos de uma importante classe de mecanismos elementares, as rotações nodais.

O significado das rotações nodais é bem entendido através de uma aplicação do princípio dos trabalhos virtuais.

Supondo o mecanismo da figura 4.3(c) tem-se:

$$(M_2) (-\theta) + (M_3) (\theta) = 0 \quad (4.2.2.1)$$

ou

$$M_2 = M_3 \quad (4.2.2.2)$$

A equação (4.2.2.2) apenas mostra que o momento fletor na junção 2-3 deve ser contínuo.

A rotação nodal será realmente importante quando a estrutura possuir nós onde concorram mais de duas barras, como na figura 4.4.

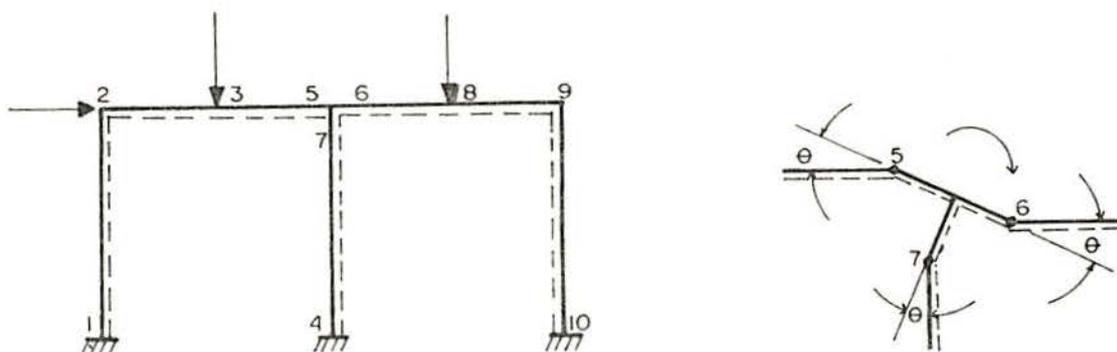


FIG. 4.4. - ROTAÇÃO NODAL DO NÓ CENTRAL DE UM PÓRTICO DE DOIS VÃOS.

A junção 5-6-7 apresenta uma rotação nodal com a seguinte equação de equilíbrio, de acordo com a convenção de sinais adotada:

$$M_6 = M_5 + M_7 \quad (4.2.2.3)$$

A equação (4.2.2.3) é de fato importante pois dela dependem inúmeros cancelamentos de rótulas plásticas possibilitando alcançar fatores de carga menores.

4.2.3. Limitações do Método

O cálculo da carga de colapso plástico para estruturas com grau de indeterminação estática muito alto é um processo muito trabalhoso mesmo com a possibilidade da aplicação do método da combinação dos mecanismos.

A principal dificuldade é que para uma estrutura com p mecanismos independentes existem

$$n_p = 2^p - 1 \quad (4.2.3.1)$$

mecanismos a serem investigados, a menos que um seja previamente identificado como o mecanismo de colapso pela aplicação paralela do teorema estático.

Outra dificuldade é que para um procedimento automático com o uso de computadores é necessária uma análise prévia da estrutura para informar à máquina os mecanismos independentes, isto, porém, levaria a um consumo excessivo de tempo computacional, visto que o computador percorreria todos os mecanismos possíveis.

Cohn e Grierson⁷ desenvolveram um programa automático (COMECH) que necessita da informação dos mecanismos independentes, cuja maior limitação é o tempo de execução. Para $p=6$ são necessários dez segundos, aumentando, porém, rapidamente com o grau de indeterminação estática da estrutura.

5. - Carregamento Variável Repetido

5.1 - Introdução

As cargas sobre uma estrutura podem variar consideravelmente durante sua existência. Sem falar no seu peso próprio, uma estrutura pode sofrer os efeitos do vento, da neve e até de terremotos. A magnitude dessas cargas não pode ser prevista num determinado instante, embora seus picos sejam conhecidos, visto que sua seqüência é imprevisível. Estes tipos de carregamento dizem-se variáveis repetidos.

É possível que sob cargas variáveis repetidas uma estrutura possa romper devido ao desenvolvimento de grandes deformações, mesmo que a maior carga possível não seja suficientemente grande para causar o colapso plástico, se aplicada estaticamente.

Sejam $\lambda P_1, \lambda P_2, \dots, \lambda P_r, \dots, \lambda P_n$

um conjunto de cargas que atuam sobre um pórtico num dado ponto e numa direção especificada; λ é um fator de carga comum a todas as cargas. O valor de qualquer carga, λP_r , pode variar entre os limites $(\lambda P_r^{\max}, \lambda P_r^{\min})$, independentemente das variações que possam ocorrer nos valores das outras cargas. Os limites (P_r^{\max}, P_r^{\min}) presumem-se conhecidos.

A ruptura pode dar-se de duas maneiras sob carregamento variável repetido:

A plasticidade alternada ocorre se as cargas, ou se a seqüência de aplicação das mesmas, façam com que um ou mais membros da estrutura sejam fletidos repetidamente de forma que as fibras, alternadamente tracionadas e comprimidas, entrem em escoamento. Haverá um fator de carga para a plasticidade alternada, λ_a , acima do qual sua ocorrência será provável.

O outro tipo de ruptura sob carregamento variável repetido se dá se combinações críticas das cargas seguem-se umas às outras em ciclos bem definidos. Se λ exceder um certo valor λ^* ,

haverão incrementos nas rotações das rótulas plásticas de certas seções durante cada ciclo de carga, incrementos esses no mesmo sentido. Se λ , apesar de exceder λ^* for menor que um valor crítico mais alto, λ_i , os incrementos nas rotações se tornarão progressivamente menores à medida que o número de ciclos aumentar. Alcança-se assim uma condição na qual, a cada ciclo, não existem mais variações nas rotações e as variações dos momentos fletores são puramente elásticas; diz-se que a estrutura "amorteceu". Entretanto, se λ exceder λ_i não há amortecimento, e durante cada ciclo as rotações serão finitas de tal forma que se ocorrer um número suficiente de ciclos, as rotações nas rótulas serão inaceitáveis provocando o colapso incremental, com λ_i sendo o fator de carga para o colapso incremental.

A obtenção de λ_a e λ_i , já se notou, não é tão simples e independente como a de λ_c . Quando se considera carregamento variável repetido é necessário o conhecimento da resposta elástica da estrutura para cada combinação de cargas, e, além disso, a envoltória dos momentos fletores elásticos em cada ponto de possível formação de rótulas plásticas.

5.2 - Definições

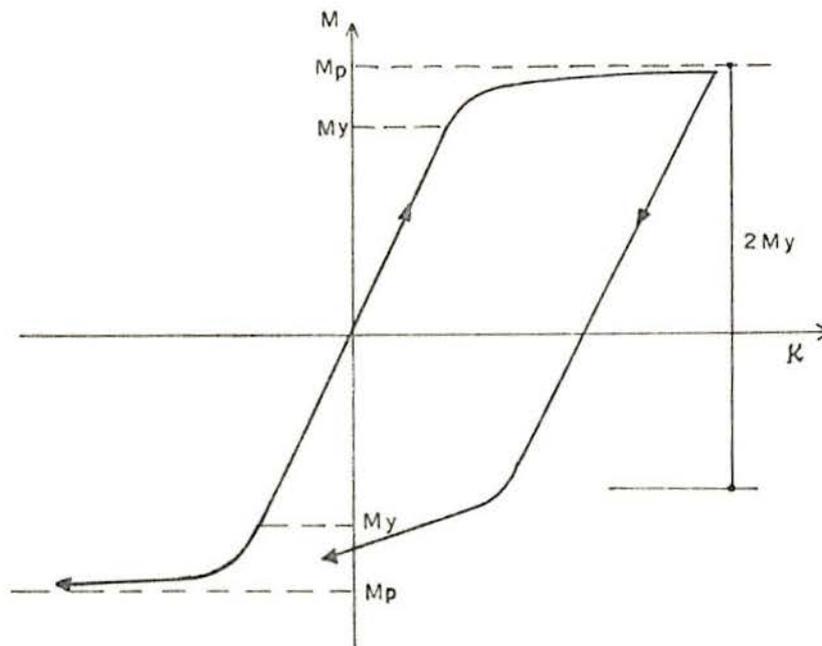
A figura 5.1 mostra a relação momento fletor-curvatura que é usualmente assumida quando se considera carregamento variável repetido (Shake-down analysis). A relação é apropriada para uma viga constituída de material elasto-plástico perfeito cuja seção transversal tenha dois eixos de simetria, sendo um deles o de flexão.

Seja M_j o momento fletor numa seção crítica j . Se todas as cargas forem removidas e a estrutura se comportar elasticamente durante o descarregamento, haverá um momento fletor residual nesta seção, definido por:

$$m_j = M_j - \mathbb{M}_j \quad (5.2.1)$$

onde \mathbb{M}_j é o momento fletor que seria produzido se a estrutura inteira se comportasse elasticamente.

É possível que o processo de descarregamento não seja



RELAÇÃO MOMENTO FLETOR - CURVATURA
PARA CARREGAMENTO VARIÁVEL REPETIDO

FIG. 5.1

completamente elástico, mas mesmo assim a (5.2.1) é válida. Qualquer distribuição de momentos residuais assim definida será estáticamente admissível sem carregamento externo desde que M_j e M_j sejam estaticamente admissíveis com o carregamento real.

Se cada carga variar entre os limites $(\lambda P_r^{\max}, \lambda P_r^{\min})$, o princípio da superposição dos efeitos poderá ser usado para determinar a envoltória dos momentos elásticos M_j , cujos valores máximos e mínimos serão λM_j^{\max} e λM_j^{\min} . O cálculo é facilmente executado se cada carga λP_r puder variar independentemente das outras.

Para plasticidade alternada: $\lambda_s = \lambda_a$

Para colapso incremental: $\lambda_s = \lambda_i$

5.3 - Teoremas

5.3.1 - Teorema do limite inferior (Shake - down Theorem)

Tendo em conta a relação da figura 5.1, estabeleça-se:

Teorema: Se existir qualquer distribuição de momentos fletores residuais, \bar{m} , a qual seja estaticamente admissível para a estrutura sem carga externa e que satisfaça as condições

$$\bar{m}_j + \lambda M_j^{\max} \leq (M_p)_j \quad (5.3.1.1)$$

$$\bar{m}_j + \lambda M_j^{\min} \geq - (M_p)_j \quad (5.3.1.2)$$

$$\lambda (M_j^{\max} - M_j^{\min}) \leq 2 (M_y)_j, \quad (5.3.1.3)$$

O valor de λ será menor ou igual ao fator de carga λ_s .

As condições (5.3.1.1), (5.3.1.2) e (5.3.1.3) são condições estáticas; é evidente que não sendo satisfeitas não haverá amortecimento. Em outras palavras, estas são as condições necessárias para que haja amortecimento, e o teorema do limite inferior assegura sua suficiência.

Se λ ultrapassar o valor de λ_s Será impossível encontrar qualquer conjunto de momentos residuais que satisfaça as condições de equilíbrio.

Se λ for imaginado crescendo uniformemente, se tornará progressivamente mais difícil satisfazer as inequações (5.3.1.1) e (5.3.1.2).

Uma possibilidade surge se a desigualdade (5.3.1.3) não for satisfeita numa seção particular embora tenha excedido a λ_s e as condições (5.3.1.1) e (5.3.1.2) se verificassem. Neste caso o colapso se daria por plasticidade alternada, com $\lambda_s = \lambda_a$.

A outra possibilidade aparece se as condições (5.3.1.3) e (5.3.1.2) não se verificarem simultaneamente, apesar

de que cada (5.3.1.3) se verifique. A ruptura neste caso seria por colapso incremental, com $\lambda_s = \lambda_j$.

Uma outra desigualdade pode ser derivada para cada seção j a partir das inequações (5.3.1.1) e (5.3.1.2):

$$-(M_p)_j - \lambda M_j^{\min} \leq \bar{m}_j \leq (M_p)_j - \lambda M_j^{\max}$$

ou

$$\lambda (M_j^{\max} - M_j^{\min}) \leq 2(M_p)_j \quad (5.3.1.4)$$

Comparando (5.3.1.3) com (5.3.1.4) nota-se que a última é menos restritiva e tornam-se iguais no caso de barras com $\nu = 1$, o que implica em $M_y = M_p$. Neste caso especial, a inequação (5.3.1.3) pode ser obtida das condições de amortecimento (Shake-down), pois está contida em (5.3.1.1) e (5.3.1.2).

As condições (5.3.1.1) e (5.3.1.3) são apropriadas somente quando os membros da estrutura obedecerem às condições estabelecidas anteriormente, que levam ao diagrama (M, κ) mostrado na figura 5.1. Se estas hipóteses não forem obedecidas, as condições para o ocorrência do amortecimento deverão ser estabelecidas em termos das distribuições de tensões em cada seção transversal em vez dos momentos resultantes.

5.3.2 - Teorema do limite superior

O teorema do limite superior está ligado a valores de λ derivados de determinados mecanismos envolvendo plasticidade alternada ou colapso incremental. A plasticidade alternada ocorrerá primeiramente na seção crítica cuja relação $(M^{\max} - M^{\min})$ seja maior. Se esta for a seção k , o fator de carga para o qual existirá a plasticidade alternada será:

$$\lambda'_a (M_k^{\max} - M_k^{\min}) = 2(M_y)_k \quad (5.3.2.1)$$

O valor de λ'_a assim calculado pode ser imaginado como o cor-

respondente a um mecanismo de plasticidade alternada consistindo de uma única rótula plástica, localizada na seção k.

Assumindo um mecanismo de colapso incremental, o correspondente valor λ'_i do fator de carga poderá ser calculado:

Seja θ_j a rotação da rótula existente na seção j; será θ_j^+ ou θ_j^- de acordo com a convenção adotada anteriormente. Seja m_j o conjunto de momentos fletores residuais no instante do colapso; seus valores podem ser calculados:

$$m_j + \lambda'_i M_j^{\max} = (M_p)_j \quad \text{para todo } \theta_j^+ \quad (5.3.2.2)$$

$$m_j + \lambda'_i M_j^{\min} = -(M_p)_j \quad \text{para todo } \theta_j^- \quad (5.3.2.3)$$

Como os m_j são estaticamente admissíveis para a estrutura descarregada, aplicando o princípio dos trabalhos virtuais, tem-se:

$$\sum m_j \theta_j = 0 \quad (5.3.2.4)$$

com o somatório cobrindo todas as j rótulas do mecanismo assumido.

Substituindo (5.3.2.2) e (5.3.2.3) em (5.3.2.4) tem-se:

$$\sum \left[(M_p)_j - \lambda'_i M_j^{\max} \right] \theta_j^+ + \sum \left[-(M_p)_j - \lambda'_i M_j^{\min} \right] \theta_j^- = 0$$

ou

$$\lambda'_i \sum \left[M_j^{\max} \theta_j^+ + M_j^{\min} \theta_j^- \right] = \sum (M_p)_j |\theta_j| \quad (5.3.2.5)$$

Teorema: O valor de λ correspondente a qualquer mecanismo escolhido, seja de plasticidade alternada ou colapso incremental, λ'_a ou λ'_i , deverá ser maior ou igual ao fator de carga de amortecimento, λ_s .

Qualquer valor de λ calculado desta forma satisfará as condições cinemáticas do teorema do limite superior.

5.3.3 - Observações e teorema da unicidade

A presença de momentos residuais devido a defeitos no tamanho das barras ou movimento dos apoios não modifica as condições para a ocorrência do amortecimento. Entretanto, a distribuição dos momentos fletores elásticos depende da rigidez dos nós e dos apoios, e por isto λ_s também dependerá. Isto contrasta com o colapso plástico sob carregamento estático, cujo fator de carga, λ_c , é independente da rigidez dos nós e suportes.

O teorema do limite inferior especifica condições que, se satisfeitas, asseguram que a fluência plástica cessará, porém não estabelece limites para as deflexões que possam se desenvolver numa estrutura sujeita a carregamento variável repetido.

Várias tentativas foram feitas para estabelecer tais limites mas até agora nenhuma obteve sucesso completo.

Um teorema para um único valor de λ_s pode ser formulado combinando-se os dois anteriores:

Teorema: Se as condições estáticas do teorema do limite inferior e as condições cinemáticas do teorema do limite superior forem encontradas, λ deverá ser igual ao fator de carga de amortecimento, λ_s .

5.4 - Métodos de projetos e análise

5.4.1 - O Método das tentativas

Baseado no teorema da unicidade, é limitado a estrutura com poucas redundantes, tais como vigas contínuas de dois ou tres vãos e pórticos simples. Para estas estruturas tanto a distribuição dos momentos residuais como λ_s podem ser determinados, por inspeção, em uma ou duas tentativas.

Sintetizando, o método das tentativas para carregamento variável repetido consiste em assumir um mecanismo de colapso incremental para o qual um correspondente valor de λ'_i ,

seja encontrado. Para isto se utilizam as equações (5.3.2.2) e (5.3.2.3) inseridas nas equações de equilíbrio para a estrutura sem carga externa.

Se o mecanismo assumido for do tipo completo estas equações serão também suficientes para determinar a distribuição dos momentos residuais através da estrutura. Os momentos fletores máximos e mínimos correspondentes ao valor de λ'_i calculado serão somados aos momentos residuais para determinar os momentos fletores extremos que poderão atuar. Se nenhum desses valores extremos exceder M_p , estará encontrado o mecanismo correto, senão deverá ser tentado outro mecanismo. Se o mecanismo verdadeiro for do tipo parcial o processo se torna muito demorado.

Para a plasticidade alternada, λ'_a é determinado utilizando-se a (5.3.2.1), a qual, no caso de $v=1$, pode ser escrita:

$$\lambda'_a = \frac{2(M_p)_k}{(M_k^{\max} - M_k^{\min})} \quad (5.4.1.1)$$

com k tendo o mesmo significado dado na seção (5.3.2).

Obtidos λ'_i e λ'_a , λ_s será o menor dos dois, isto é, se λ'_i for menor do que λ'_a , o colapso se dará pelo assumido mecanismo de colapso incremental, em caso contrário, pelo menos uma seção k se plastificará totalmente quando λ_s atingir λ'_a .

5.4.2 - O método da combinação dos mecanismos

Este método não apresenta as limitações do anterior no caso de mecanismos do tipo parcial. Para qualquer mecanismo de colapso incremental um correspondente valor de λ'_i poderá ser calculado através da aplicação do princípio dos trabalhos virtuais, com o teorema do limite superior estabelecendo que ao verdadeiro mecanismo de colapso incremental corresponderá o menor dos λ'_i , se forem examinados todos os mecanismos possíveis.

O método da combinação dos mecanismos consiste

simplesmente na derivação dos λ'_i , correspondentes aos mecanismos independentes e suas mais prováveis combinações até que se ache o menor deles. Se não forem todos examinados, o resultado deverá ser confirmado por uma comprovação estática, determinando a distribuição de momentos residuais correspondente e verificando que os momentos fletores máximo e mínimo podem ser adicionados ao momento residual em cada seção sem exceder o momento plástico.

A diferença entre a aplicação do método da combinação dos mecanismos para carga estática e carga repetida está apenas em alguns detalhes mas a essência é a mesma, pois os conceitos que fundamentam o método para carregamento estático foram estendidos pelos seus criadores para cobrir os casos de colapso incremental; entretanto, é mais difícil julgar quais são as combinações mais prováveis com vistas à obtenção de um λ'_i menor.

A plasticidade alternada também deverá ser verificada. Para cada seção onde for factível a formação de uma rótula plástica a equação (5.4.1.1) deverá ser aplicada e a conclusão, a partir daí, se apresentará como no parágrafo anterior.

5.5 - Utilização

Como foi visto, se uma estrutura apertada for sujeita a cargas variáveis repetidas não ocorrerá amortecimento se o fator de carga for tal que seja superior a λ_s , o qual é menor que λ_c , sendo o último o fator de carga para carregamento estático sob a pior combinação de cargas.

Isto levanta uma dúvida: a indefinida fluência plástica causada pelo colapso incremental e pela plasticidade alternada será um estado limite mais relevante do que o colapso estático para este conjunto de vigas?

Horne³ mostrou que uma estrutura projetada pelo método plástico estático terá uma pequena probabilidade de ruptura, a probabilidade da ocorrência da plasticidade alternada ou do colapso incremental será menor ainda. Isto decorre devido ao carregamento repetido ser de natureza aleatória, requerendo um

determinado número de ciclos de combinações críticas das cargas.

Por outro lado, a ruptura por colapso incremental é gradual de maneira a permitir correções evitando o progresso das deformações que levariam à formação do mecanismo de colapso incremental.

A plasticidade alternada, se ocorrer, não causa grandes deflexões. O único risco envolvido é o de ruptura do material por fadiga. Vários investigadores mostraram que a vida de vigas de aço doce sujeitas a cargas reversas é da ordem de 10^2 - 10^4 ciclos.

Como conclusão pode-se dizer que a menos que o projeto seja governado pela fadiga, uma estrutura projetada com um fator de carga contra o colapso estático será muito menos provável romper por colapso incremental ou plasticidade alternada do que por colapso estático sob a pior combinação das cargas.

6 - A Otimização no Regime Plástico

6.1 - Introdução

Paralelamente ao desenvolvimento dos métodos plásticos, Foulkes¹² foi o primeiro a formular o problema da otimização de pórticos no regime plástico como um caso de programação linear, assumindo que a função peso variasse linearmente em função das variáveis de projeto, e utilizando o método cinemático. Heyman^{20,21} também desenvolveu um procedimento que propiciava limites superiores e inferiores para projetos de peso mínimo. Os processos sugeridos por Heyman e Foulkes, fundamentalmente de tentativas, dependiam da identificação do projeto ótimo através do teorema de Foulkes, porém, com o aumento do número de variáveis se tornavam muito trabalhosos.

A unicidade das soluções ótimas foi estabelecida por Chan⁴ e mais tarde por Cohn, Parimi e Ghosh⁹.

A otimização para cargas alternativas foi investigada por Prager²⁸, que mostrou sua aplicação para pórticos simples.

Heyman¹⁸ foi quem primeiro estudou a minimização do peso de pórticos no regime plástico sob carregamento variável repetido, e sugeriu um método iterativo para incluir a variação da resposta elástica da estrutura com a mudança das variáveis de projeto.

Cohn e Parimi⁶ estudaram o projeto ótimo de estruturas em geral, no regime plástico, e apresentaram um apanhado geral com soluções obtidas através do método simplex, levando em consideração carregamento estático e variável repetido.

Para que seja feita a formulação matemática do problema da otimização no regime plástico é necessário adaptá-la à programação linear, para maior alcance.

6.2 - A programação linear

6.2.1 - Introdução

A escolha de uma solução particular para um pro

blema depende das condições apresentadas e do objetivo a que se quer chegar. A solução que satisfizer as condições e atingir o objetivo será dita solução ótima.

Na programação linear o objetivo que governa a escolha da solução é uma combinação linear das variáveis, chamada função objetivo. Na maioria dos casos práticos a função objetivo, na realidade, não seria linear, porém, assumindo-a linear, além de conseguir ótimas aproximações, evita-se o uso da programação não-linear, simplificando em muito o problema. A solução encontrada otimizará a função objetivo.

Matematicamente a programação linear opera com soluções não-negativas de sistemas de equações lineares indeterminados.

Em geral, combinando as restrições lineares do problema com a otimização da função objetivo, transforma-se o sistema de equações lineares, que é indeterminado, admitindo várias soluções, em um sistema que pode ser resolvido para uma única solução que otimiza a função objetivo.

Um problema de programação linear que descreve algo válido na prática, usualmente possui uma solução não-negativa com um correspondente valor finito da função objetivo, embora na realidade existam tres possibilidades:

- 1 - Não há solução devido à impossibilidade de encontrar valores não-negativos para as variáveis.
- 2 - Existe uma solução não-negativa, porém, esta torna infinito o valor da função objetivo.
- 3 - Existe uma solução não-negativa que dá um valor finito à função objetivo.

6.2.2 - Formulação geral

Em sua formulação geral, o problema da programação linear consiste em encontrar um vetor

$\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$, $\vec{X} \in \mathbb{R}^n$ que minimize a função linear

$$C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_jx_j + \dots + C_nx_n \quad (6.2.2.1)$$

Sujeito às restrições lineares:

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (6.2.2.2)$$

e

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots & \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n &= b_i \\ \dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (6.2.2.3)$$

onde os a_{ij} , b_i e c_j são constantes conhecidas e $m < n$

As características mais importantes de uma solução para o problema são apresentadas a seguir:

Uma solução $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ será admissível, se satisfizer as condições (6.2.2.2) e (6.2.2.3).

Uma solução básica para (6.2.2.3) é obtida tomando-se $(n - m)$ variáveis iguais a zero e resolvendo o sistema para as m variáveis restantes, desde que o determinante dos seus coeficientes seja diferente de zero. As m variáveis são chamadas variáveis básicas.

Uma solução básica admissível é uma solução básica que satisfaz (6.2.2.2).

Uma solução mínima admissível é uma solução admissível que minimiza (6.2.2.1).

Uma solução básica admissível não-degenerada é uma solução básica admissível com exatamente m x_i positivos.

6.2.3 - Conjuntos convexos

Para que mais detalhes a respeito de soluções se

jam fornecidas, necessita-se de informações sobre conjuntos convexos.

Uma combinação convexa de n pontos $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots, \vec{X}_n$ é um ponto

$$\vec{X} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{X}_i$$

onde

$$\alpha_i \geq 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$$

Um conjunto de pontos é convexo se, para qualquer par de pontos do conjunto, \vec{X}_1 e \vec{X}_2 , uma combinação convexa destes pontos está contida no conjunto.

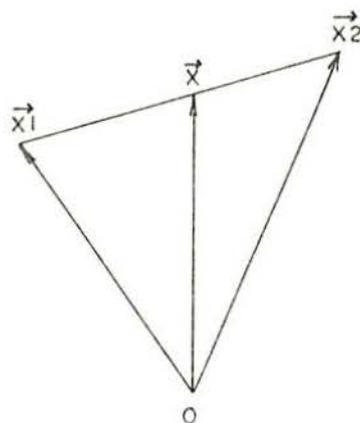
$$\vec{X} = \alpha_1 \vec{X}_1 + \alpha_2 \vec{X}_2$$

com

$$\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$$

e

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1$$



A figura 6.1 mostra alguns conjuntos convexos e outros não convexos.

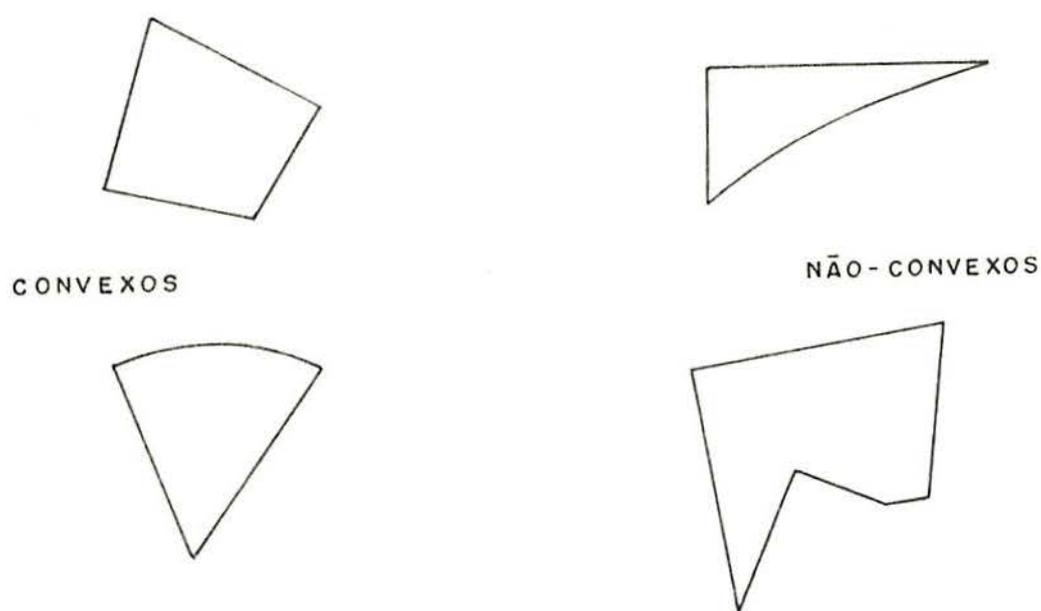


FIG. 6.1

Um ponto de um conjunto convexo será dito extremo se não puder ser expresso como uma combinação convexa de quaisquer outros dois pontos do conjunto.

Os vértices de um conjunto convexo são pontos extremos do conjunto.

Essas considerações são necessárias porque o conjunto de todas as soluções admissíveis de um problema de programação linear é um conjunto convexo.

Seja K o conjunto convexo das soluções de um problema de programação linear.

K é determinado pela intersecção do conjunto finito das restrições lineares (6.2.2.2) e (6.2.2.3); seu contorno, se ele não for vazio, consistirá de seções de alguns dos correspondentes hiperplanos. K será uma região de E_n e poderá

ser vazio, um poliedro convexo, ou uma região convexa que seja ilimitada em alguma direção.

Se K for vazio, o problema não possui soluções; se for um poliedro convexo, existe uma solução com um valor mínimo finito para a função objetivo, se for ilimitado, o problema tem uma solução, mas o mínimo pode ser também ilimitado.

Para propósitos computacionais sempre se assume que K seja um poliedro convexo. Com isso pode-se dizer que a função objetivo (6.2.2.1) assume seu mínimo em um ponto extremo do conjunto convexo gerado pelo conjunto de soluções admissíveis para o problema de programação linear. Se ela assumir seu mínimo em mais de um ponto extremo, tomará o mesmo valor para toda combinação convexa destes mesmos pontos.

Se K for assumido ser um poliedro convexo, terá um número finito de pontos extremos e, em duas dimensões, pode ser visto como mostra a figura 6.2:

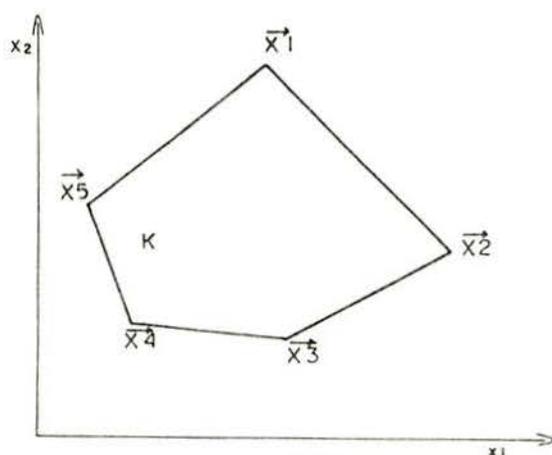


FIG. 6.2 - Poliedro convexo em duas dimensões.

Tres verdades podem ser estabelecidas:

1 - A função objetivo atinge seu mínimo num pon

to extremo de K .

- 2 - Cada solução básica admissível corresponde a um ponto extremo de K
- 3 - Cada ponto extremo de K possui m vetores l_i linearmente independentes dos n aos quais está associado.

6.2.4 - Determinação da solução ótima

Como se viu anteriormente, deve-se procurar a solução ótima entre as soluções admissíveis geradas por m vetores linearmente independentes.

Com n incógnitas e m equações haverá $\binom{m}{n}$ vértices; como a solução de um problema de programação linear está sempre num vértice, existirão no máximo $\binom{m}{n}$ conjuntos de m vetores linearmente independentes.

Para n e m muito grandes, seria uma tarefa impossível calcular todas as soluções possíveis e selecionar aquela que minimize a função objetivo. O que se necessita é um esquema computacional que selecione, de maneira ordenada, um pequeno subconjunto das soluções possíveis que convirja para a solução mínima. A sub-rotina simplex é tal esquema. Esta sub-rotina encontra um ponto extremo e determina se ele é o mínimo; se não é, o simplex vai para um ponto extremo vizinho, cujo correspondente valor da função objetivo seja menor ou igual ao valor precedente.

Em um número finito de passos semelhantes, usualmente entre m e $2m$, a solução ótima é alcançada. Além disso, o método simplex possibilita saber se o problema não possui soluções finitas ou admissíveis.

As restrições (6.2.2.3) podem ser escritas da seguinte forma:

$$\underline{A} \vec{X} = \vec{b} \quad (6.2.4.1)$$

onde $\underline{A} = |a_{ij}|$ é uma matriz $m \times n$
 $\vec{b} = \{b_i\}$ é um vetor $m \times 1$; $\vec{b} \geq 0$

e

$$\vec{X} = \{x_i\} \text{ é um vetor } n \times 1$$

Computacionalmente, o simplex se iniciará somente se na matriz \underline{A} estiver contida uma matriz unidade $m \times m$, a chamada base admissível. Se isto não acontecer deverá ser usada uma base artificial para dar partida ao método.

Se a (6.2.4.1) estiver sujeita a restrições do tipo

$$\underline{A} \vec{X} \geq \vec{b} \quad (6.2.4.2)$$

ou

$$\underline{A} \vec{X} \leq \vec{b} \quad (6.2.4.3)$$

também deverão ser feitas modificações.

Se as restrições forem do tipo (6.2.4.2), ao lado esquerdo da desigualdade deverão ser subtraídas certas variáveis que a transformem numa igualdade; são as variáveis de folga, que para restrições do tipo (6.2.4.3) deverão ser somadas ao lado esquerdo da desigualdade a fim de transformá-la numa igualdade.

No caso de restrições do tipo (6.2.4.3) as variáveis de folga, se necessárias, evitam o uso de uma base artificial, no caso (6.2.4.2) isto não é possível, pois a base admissível deve ser positiva.

6.3 - Projeto Plástico de peso mínimo

Supondo o pórtico retangular simples da figura 6.3, que possui viga de momento plástico M_B e pilares de momento plástico M_A , com cargas e comprimentos conforme o esquema.

O projeto plástico de peso mínimo para uma estrutura deste tipo se reduz a: Dado o conjunto de cargas W , já amplificado pelo fator de carga, se determinam os M_p que definem a seção dos elementos da estrutura segundo o critério do peso mínimo.

mo.

As variáveis de projeto serão o momento plástico da viga (M_B) e o dos pilares (M_A).

Sendo Q o peso por unidade de comprimento, estabelece-se uma relação linear entre Q e M_p .

Para uma barra, por hipótese:

$$Q = a + bM_p \quad (6.3.1)$$

Para toda a estrutura:

$$Q_t = \sum_{i=1}^n Q_i \ell_i \quad (6.3.2)$$

ou

$$Q_t = a \sum \ell_i + b \sum \ell_i M_{pi} \quad (6.3.3)$$

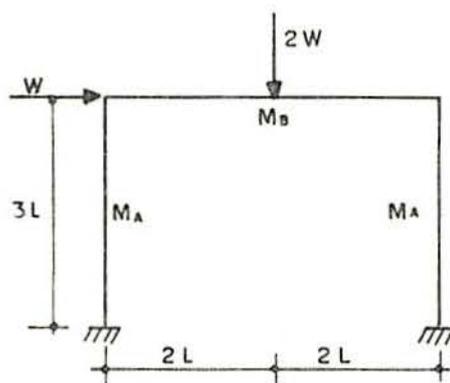


FIG. 6.3.

Como $a \sum \ell_i$ é uma constante, a função a minimizar será:

$$Q^* = \sum \ell_i M_{pi} \quad (6.3.4)$$

Como as incôgnitas são os valores de M_A e M_B , não se sabe qual dos dois é o maior, havendo, desta forma, seis mecanismos possíveis, como mostra a figura 6.4.

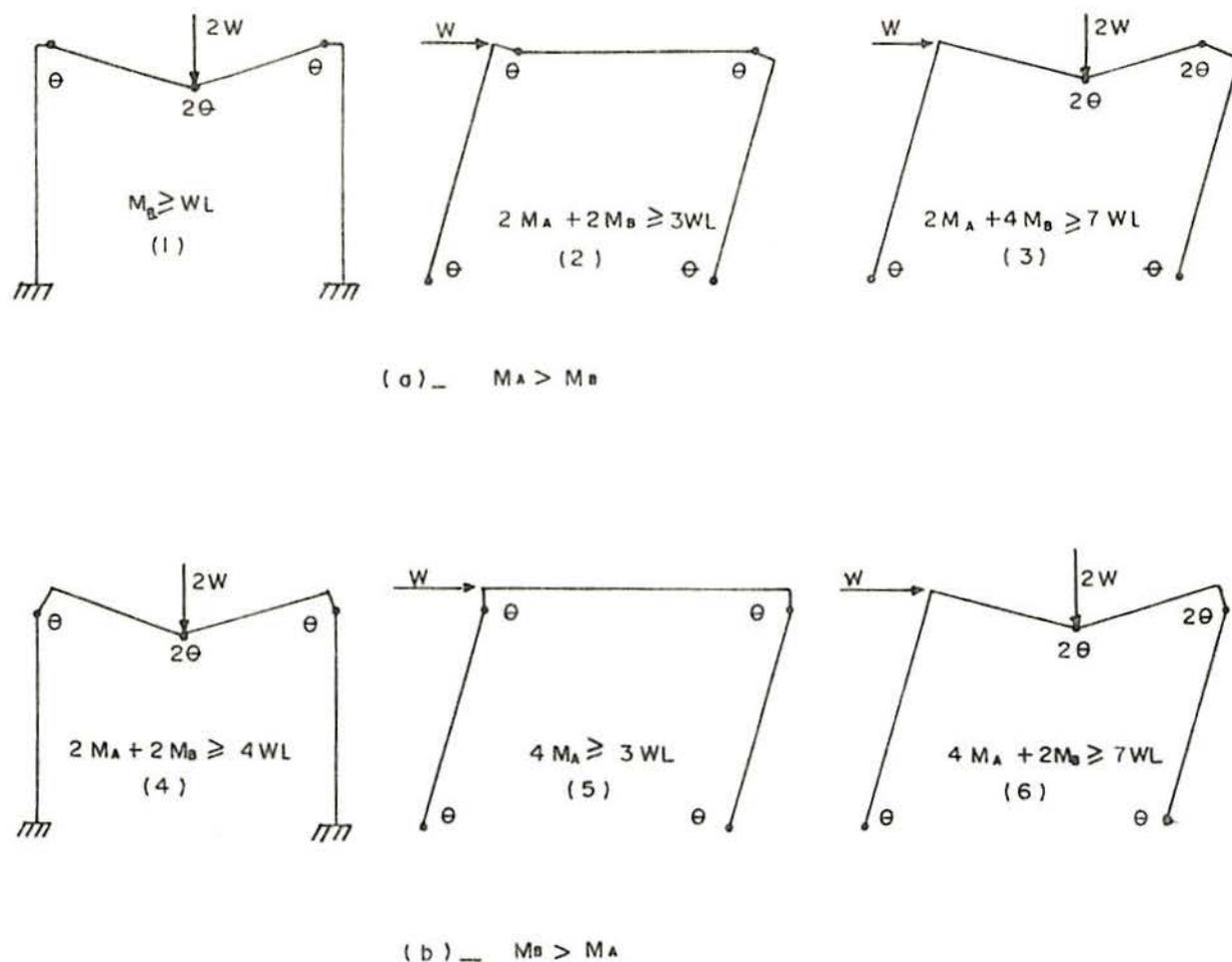


FIG. 6.4

Para que a estrutura não entre em colapso, as desigualdades apresentadas com as figuras acima devem ser verificadas.

Fazendo $M_A/Wl = X_1$ e $M_B/Wl = X_2$ estas inequações transformam-se respectivamente em:

$$(1) \quad X_2 \geq 1$$

$$(2) \quad X_1 + X_2 \geq \frac{3}{2} \quad \text{trivial devido a (4)}$$

$$(3) \quad 2X_1 + 4X_2 \geq 7$$

$$(4) \quad X_1 + X_2 \geq 2$$

$$(5) \quad 4X_1 \geq 3 \quad (6.3.5)$$

$$(6) \quad 4X_1 + 2X_2 \geq 7$$

A função a minimizar se torna:

$$Q^* = 6\ell \cdot M_A + 4\ell \cdot M_B$$

ou

$$\frac{Q^*}{W\ell^2} = 6X_1 + 4X_2 \quad (6.3.6)$$

com

$$\frac{Q^*}{W\ell^2} = Q' \quad \text{tem-se:}$$

$$Q' = 6X_1 + 4X_2 \quad (6.3.7)$$

Assim o problema está identificado como um problema de programação linear, a função objetivo é a equação (6.3.7) e as restrições são as equações (6.3.5).

A resolução do presente problema fornece $X_1 = X_2 = 7/6$ e $Q' = 35/3$ que substituídos nas equações originais dão:

$$M_A = M_B = \frac{7}{6} W\ell^2 \quad \text{e} \quad Q^* = \frac{35}{3} W\ell^2$$

Graficamente a solução pode ser obtida, como mostra a figura 6.5.

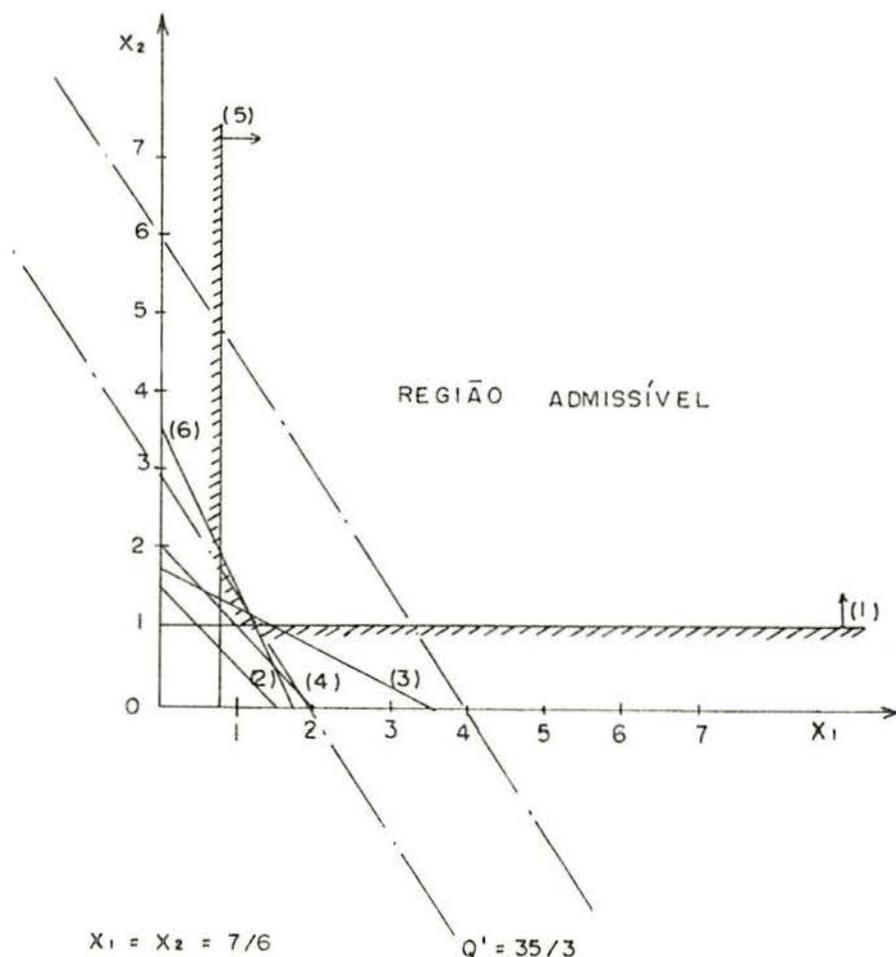


FIG. 6.5 - Solução gráfica.

6.4 - Formulação Geral do Projeto Plástico de Peso Mínimo.

Tendo em vista o exposto no parágrafo anterior, chega-se a uma formulação geral para o projeto plástico de peso mínimo. O método utilizado para obtenção dos mecanismos é o cinemático, baseado no teorema correspondente, que permite maior liberdade para a obtenção da solução ótima.

6.4.1 - Carregamento estático

O caso de carregamento estático ocorre quando

todas as cargas atuam sobre a estrutura com posições, grandezas e direções conhecidas.

Considere-se um pórtico plano de configuração conhecida e composto de barras prismáticas perfeitamente plásticas, o qual deve resistir às cargas dadas e ser projetado de forma que seu peso total seja um mínimo.

A formulação cinemática do problema de projeto ótimo é:

Encontrar M_{pi} ; ($i = 1, 2, \dots, n$)

Tal que $Q^* = \sum M_{pi} \ell_i = \text{mín}$ (6.4.1.1)

Sujeito a

$$\sum a_{ki} M_{pi} > \lambda e_k ; k = 1, 2, \dots, np \quad (6.4.1.2)$$

e

$$M_{pi} > 0 \quad (6.4.1.3)$$

onde os M_{pi} são as variáveis de projeto; ℓ_i os comprimentos das barras sobre as quais os M_{pi} são constantes; Q^* o peso total da estrutura e a_{ki} o coeficiente que define a contribuição de M_{pi} na k -ésima condição de equilíbrio.

As desigualdades (6.4.1.2) representam as condições de mecanismo e equilíbrio do problema, e estabelecem que a estrutura não deve romper sob cargas menores que as cargas últimas especificadas em qualquer dos np modos de colapso possíveis.

6.4.2 - Carregamento variável repetido (Shakedown).

Considerando o apresentado no capítulo 5, pode-se estender o problema da otimização para carregamento variável repetido.

O projeto de uma estrutura sujeita a um conjunto de cargas que dependem de um único parâmetro e possam variar arbitrariamente entre limites prescritos, deve assegurar que a

plasticidade alternada e o colapso incremental não ocorram para cargas abaixo de $\lambda_s W$, onde λ_s seja um fator de carga especificado.

A formulação cinemática do problema de projeto ótimo sob carregamento variável repetido é:

Encontrar M_{pi} ($i = 1, 2, \dots, n$)

(6.4.2.1)

tal que $\sum_{i=1}^n M_{pi} \ell_i = \min$

Sujeito a

$$\sum_{i=1}^n a_{ki} M_{pi} \geq \lambda_s \sum_{j=1}^s (\theta_{kj}^+ M_j^+ + \theta_{kj}^- M_j^-) ; k = 1, 2, \dots, np$$

(6.4.2.2)

$$2M_{pi} \geq \lambda_s (M_j^+ + M_j^-) ; \begin{array}{l} i = 1 \text{ para } j = 1, 2, \dots, S_1 \\ i = 2 \text{ para } j = S_1 + 1, \dots, S_2 \\ \text{-----} \\ i = n \text{ para } j = S_{n-1} + 1, \dots, S \end{array}$$

(6.4.2.3)

e

$$M_{pi} \geq 0$$

(6.4.2.4)

As desigualdades (6.4.2.2) asseguram que o colapso incremental não ocorre para nenhum dos np modo possíveis.

As desigualdades (6.4.2.3) asseguram que o colapso por plasticidade alternada não ocorre em nenhuma das s seções críticas.

Com o problema da otimização no regime plástico identificado da maneira apresentada, como um problema de programação linear, as soluções para ele são obtidas através da subrotina simplex, necessitando apenas da montagem do sistema de equações e da identificação da função objetivo. Todas as infor

mações necessárias para a implementação em computador foram indicadas, restando apenas a montagem do programa automático.

7 - Elaboração do Programa Computacional

7.1 - Introdução

O programa automático foi elaborado com base nas formulações cinemáticas apresentadas nos parágrafos (6.4.1) e (6.4.2), dependendo do carregamento ser estático ou variável repetido. Na maioria dos casos, a comparação entre os dois tipos de carregamento se mostra interessante, pelo menos, para confirmar o resultado obtido, podendo também mostrar o caminho mais aproximado à realidade.

Por outro lado, para um certo número de cargas independentes atuando dentro de limites prescritos, a probabilidade da ocorrência do colapso incremental é pequena se a estrutura em questão tiver sido dimensionada contra o colapso estático; e surge a pergunta: praticamente, não bastaria apenas o dimensionamento estático? A resposta pode ser delineada pela comparação dos dois casos.

Em vista disto, o programa foi dividido em duas partes: a primeira determina seções ótimas para carregamento estático e a segunda para carregamento variável repetido.

7.2 - Considerações básicas

Na equação $\underline{A} \vec{X} \geq \vec{b}$, o vetor \vec{X} representa as variáveis de projeto que no presente programa são duas: M_A e M_B ; respectivamente, o momento plástico das colunas e das vigas.

O vetor \vec{b} representa o trabalho realizado pelas cargas externas e a matriz \underline{A} a contribuição de M_A e/ou M_B para cada condição de equilíbrio.

O produto $\underline{A} \vec{X}$ representa o trabalho interno para cada mecanismo assumido, sendo que a matriz \underline{A} depende apenas da posição das rótulas plásticas; logo, tanto para carregamento estático como para carregamento variável repetido as incógnitas terão os mesmos coeficientes variando somente o trabalho externo. Esta diferença se deve ao fato de que para carregamento variável repetido o trabalho externo é função da resposta elástica

ca da estrutura.

Cada linha da matriz \underline{A} , como na figura 6.4(a) e (b), representa uma condição de equilíbrio (mecanismo), e serão tantas linhas quantas condições existirem mais duas, uma para a função objetivo e outra para suprir as necessidades do método de resolução. O número de colunas de \underline{A} será função da quantidade de variáveis de folga e de variáveis artificiais a serem inseridas.

Em suma, sendo M o número de mecanismos não triviais, a matriz \underline{A} será:

$$\underline{A} = \left| (M + 2) \times (2M + 3) \right| \quad (7.2.1)$$

Na última coluna de \underline{A} tem-se o vetor \vec{b} .

Como se nota, devem ser analisados todos os mecanismos possíveis para informar ao computador, que por si mesmo faz a detecção dos mecanismos triviais.

Para a confecção do programa automático foram utilizados pórticos retangulares de um andar com vãos variando de um a cinco, número este que pode a qualquer momento ser ampliado com alguns adendos ao programa. O carregamento considerado consiste de uma carga horizontal aplicada na extremidade superior do primeiro montante e de cargas verticais no centro das vigas; as vigas poderão estar carregadas ou não.

A tabela 2 apresenta os diversos mecanismos analisados para a elaboração do programa.

As soluções são obtidas através da sub-rotina simplex, a qual fornece o valor mínimo da função objetivo, no caso, o peso da estrutura, e os valores das variáveis de projeto, M_A e M_B , que o proporcionam; também são fornecidas as restrições críticas.

7.3 - Caso de carregamento estático

No caso de carregamento estático, o trabalho externo é independente das dimensões da seção transversal das barras, ne

cessitando-se de poucas informações adicionais para a montagem da matriz \underline{A} . Através de cartão se informa o número de vãos, sendo imediato o dimensionamento de \underline{A} ; a seguir, também de cartão, informa-se o carregamento e o comprimento das barras. A sub-rotina Mont faz a montagem de \underline{A} e a sub-rotina simplex fornece a solução e as restrições críticas.

A figura 7.1 mostra o fluxograma do procedimento descrito.

As restrições são numeradas de acordo com a tabela 2; por exemplo, para pórticos de 1 vão a restrição número 3 corresponde ao mecanismo combinado com $M_A > M_B$.

7.4 - Caso de carregamento variável repetido

Na solução apresentada neste trabalho para carregamento variável repetido, assumiu-se que a resposta elástica é independente das variáveis de projeto (momentos plásticos). Esta consideração não é suficientemente exata, embora conduza a erros desprezíveis na prática.

Como as estruturas em estudo são hiperestáticas, é necessário o conhecimento prévio das propriedades de cada barra para determinar os momentos máximo e mínimo nas seções críticas a fim de calcular o trabalho externo. Sendo I_A e I_B os momentos de inércia dos pilares e vigas, respectivamente, arbitram-se valores, normalmente $I_A = I_B$, para iniciar o processo. Após, obtêm-se M_A e M_B com $M_A \neq M_B$.

Como estes momentos plásticos foram obtidos a partir de momentos de inércia fictícios, poderia-se pensar num processo iterativo fazendo uso da expressão:

$$\frac{I_B}{I_A} = \left(\frac{M_B}{M_A} \right)^{1,4} \quad (7.4.1)$$

Segundo Cohn e Parimi⁸, depois de seis ou sete iterações chegar-se-ia à solução exata; no entanto, o peso obtido na solução inicial difere menos do que 1% do peso obtido na solução exa-

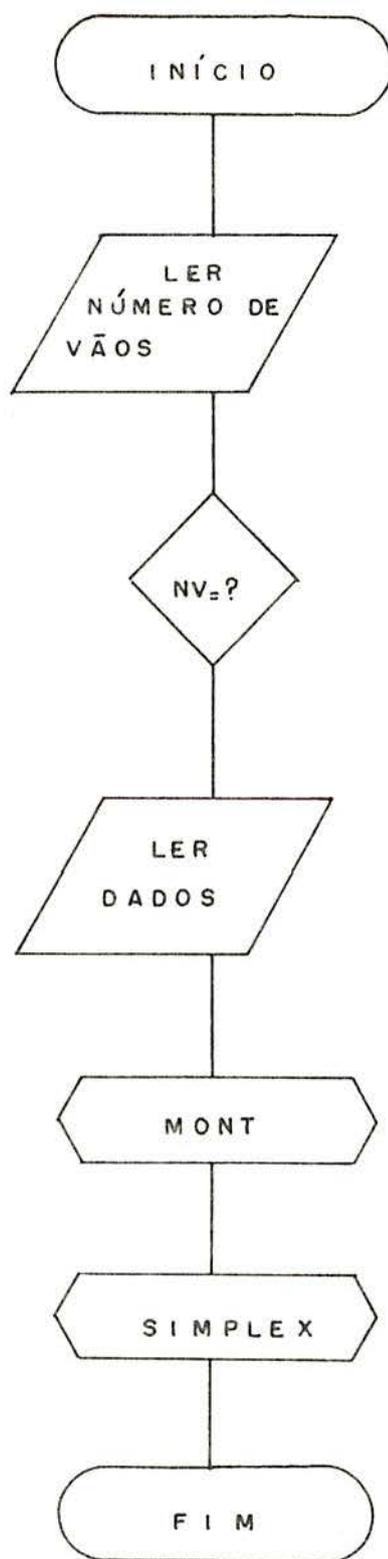
ta e as variáveis de projeto diferem em torno de 3% nas duas soluções citadas.

No cálculo da resposta elástica da estrutura utilizou-se o método da rigidez ou das deformações.

Para dimensionar a matriz A informa-se o número de vãos; após, as coordenadas dos nós, a conectividade, as propriedades, as restrições nodais e os carregamentos. Com a análise elástica obtém-se os momentos fletores nas seções críticas para os vários carregamentos independentes. Calcula-se a envoltória dos momentos fletores e a montagem da matriz A é imediata, considerando as restrições da plasticidade alternada e do colapso incremental. A sub-rotina simplex fornece a solução e as restrições críticas.

A figura 7.2 mostra o fluxograma para o caso em questão.

A identificação das restrições críticas é feita da mesma forma do caso anterior, com a utilização da tabela 2.



FIG_7.1 - FLUXOGRAMA DO PROGRAMA
PARA CARREGAMENTO ESTÁTICO

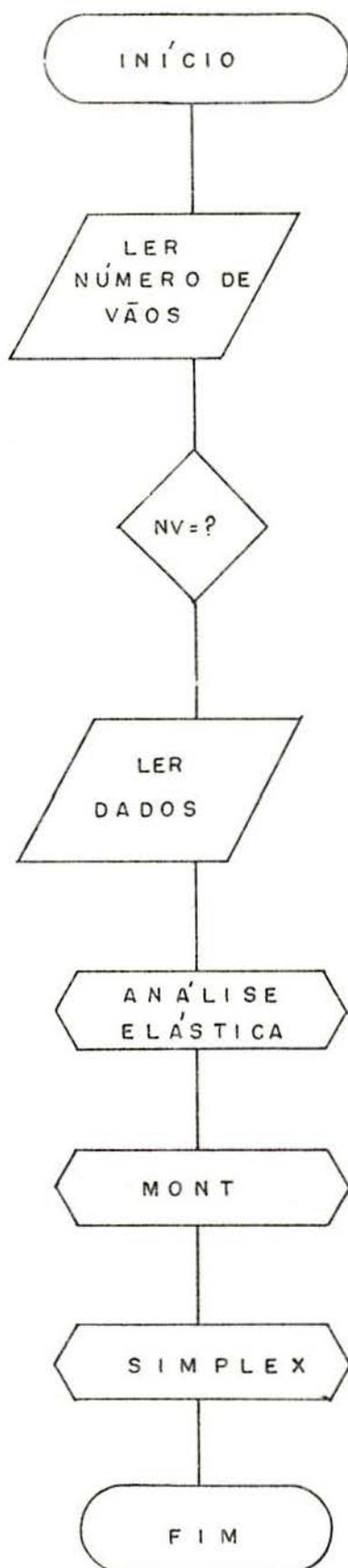
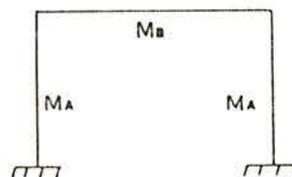


FIG. 7.2 — FLUXOGRAMA DO PROGRAMA PARA CARREGAMENTO VARIÁVEL REPETIDO

1 VÃO



1) $4 M_B \geq$



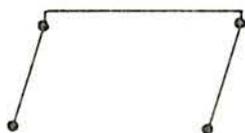
2) $2 M_A + 2 M_B \geq$



3) $2 M_A + 4 M_B \geq$



4) $4 M_A \geq$

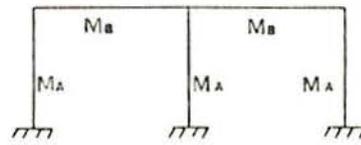


5) $4 M_A + 2 M_B \geq$



TABELA 2 - (a) - Pórtico de um vão

2 VÃOS



1) $4 M_B \geq$



2) $4 M_A + 2 M_B \geq$



3) $3 M_A + 4 M_B \geq$



4) $4 M_A + 4 M_B \geq$



5) $3 M_A + 8 M_B \geq$



6) $3 M_A + 6 M_B \geq$



7) $M_A + 3 M_B \geq$

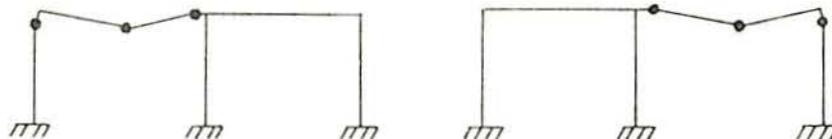


TABELA 2-(b)- Pórtico de dois vãos

8) $6 M_A \geq$



9) $5 M_A + 3 M_B \geq$



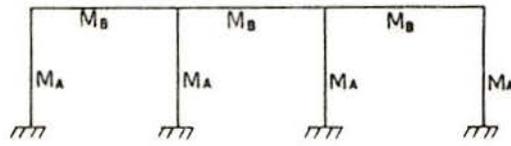
10) $6 M_A + 3 M_B \geq$



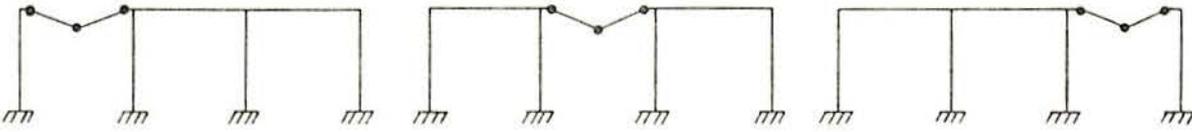
11) $5 M_A + 6 M_B \geq$



3 VÃOS



1) $4 M_B \geq$



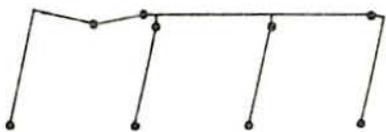
2) $6 M_A + 2 M_B \geq$



3) $4 M_A + 6 M_B \geq$



4) $6 M_A + 4 M_B \geq$



5) $4 M_A + 8 M_B \geq$



6) $5 M_A + 6 M_B \geq$



TABELA 2 - (c) - Pórtico com tres vãos

7) $5 M_A + 8 M_B \geq$



8) $4 M_A + 10 M_B \geq$



9) $4 M_A + 12 M_B \geq$



10) $M_A + 3 M_B \geq$



11) $8 M_A \geq$



12) $7 M_A + 3 M_B \geq$



13) $6 M_A + 4 M_B \geq$



14) $8 M_A + 3 M_B \geq$



15) $6 M_A + 7 M_B \geq$



16) $7 M_A + 6 M_B \geq$



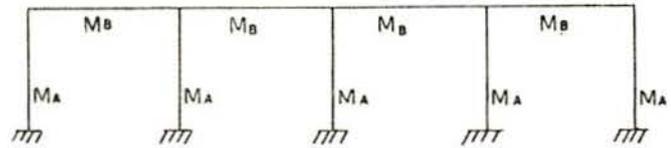
17) $7 M_A + 7 M_B \geq$



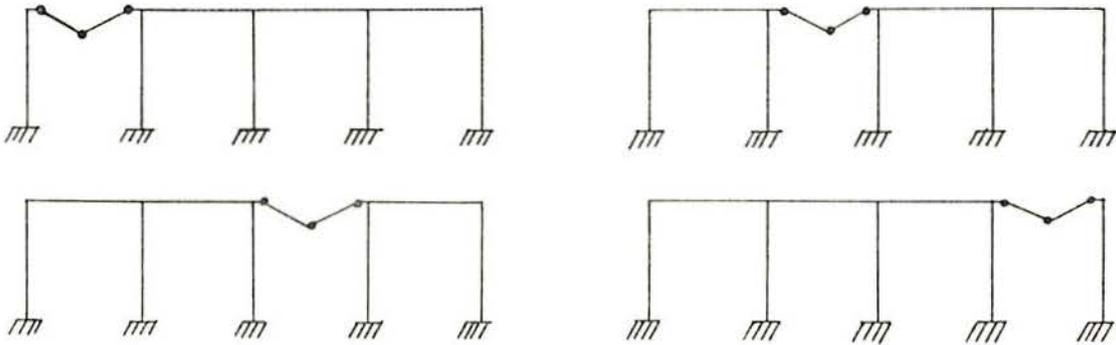
18) $6 M_A + 10 M_B \geq$



4 VĀOS



1) $4 M_B \geq$



2) $8 M_A + 2 M_B \geq$



3) $5 M_A + 8 M_B \geq$



4) $8 M_A + 4 M_B \geq$

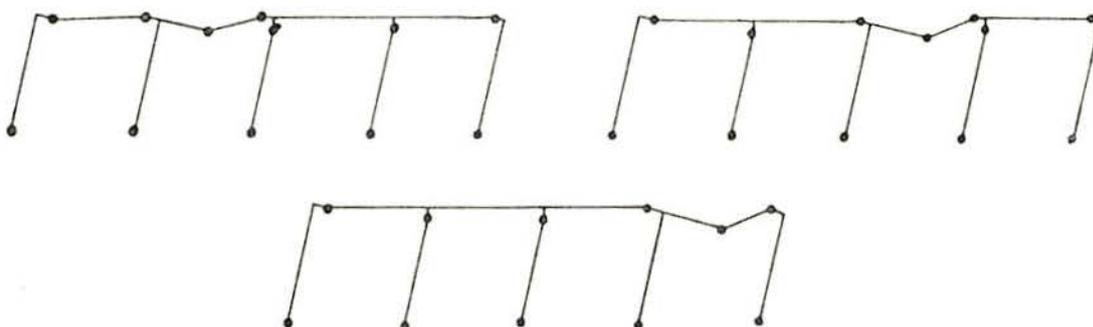


TABELA 2-(d) - Pórtico de quatro vãos.

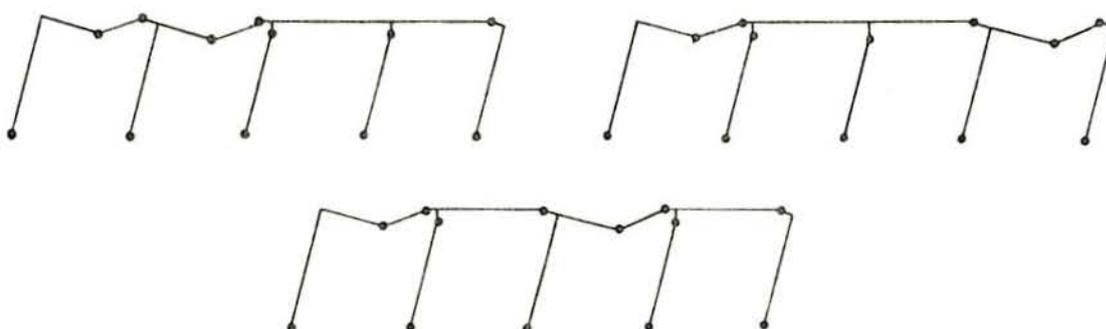
5) $5 M_A + 10 M_B \geq$



6) $7 M_A + 6 M_B \geq$



7) $7 M_A + 8 M_B \geq$



8) $5 M_A + 12 M_B \geq$

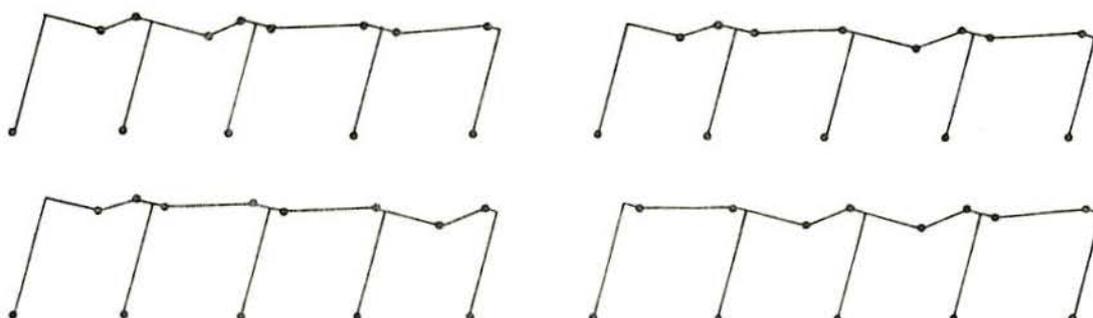
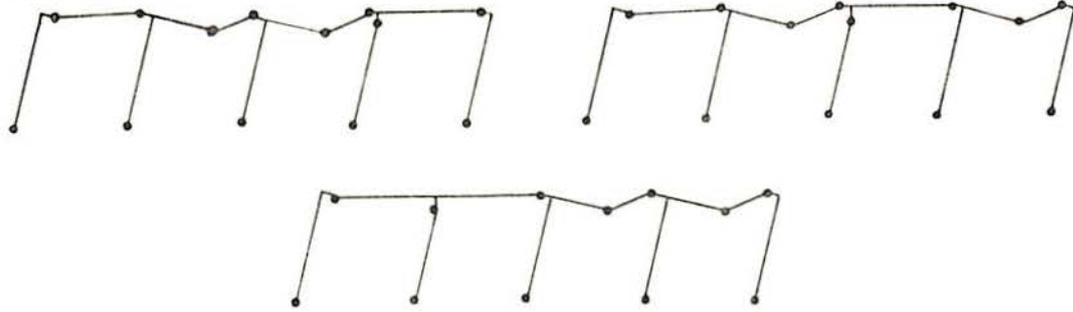


TABELA 2-(d)- Pórtico de quatro vãos (cont.)



9) $6 M_A + 10 M_B \geq$



10) $6 M_A + 12 M_B \geq$



11) $5 M_A + 14 M_B \geq$



12) $5 M_A + 16 M_B \geq$



TABELA 2 -(d)- Pórtico de quatro vãos (cont)

13) $M_A + 3M_B \geq$



14) $10 M_A \geq$



15) $9 M_A + 3 M_B \geq$



16) $9 M_A + 4 M_B \geq$



17) $10 M_A + 3 M_B \geq$



18) $8 M_A + 7 M_B \geq$



TABELA 2.-(d) - Pórtico de quatro vãos (cont)

19) $9 M_A + 6 M_B \geq$



20) $8 M_A + 8 M_B \geq$



21) $9 M_A + 7 M_B \geq$



22) $7 M_A + 11 M_B \geq$



23) $8 M_A + 10 M_B \geq$



24) $8 M_A + 11 M_B \geq$

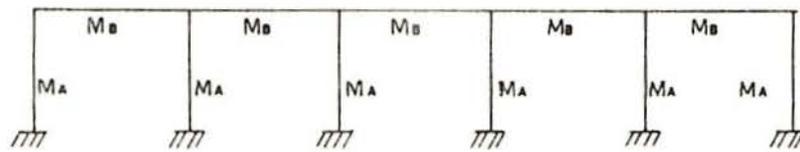


25) $7 M_A + 14 M_B \geq$

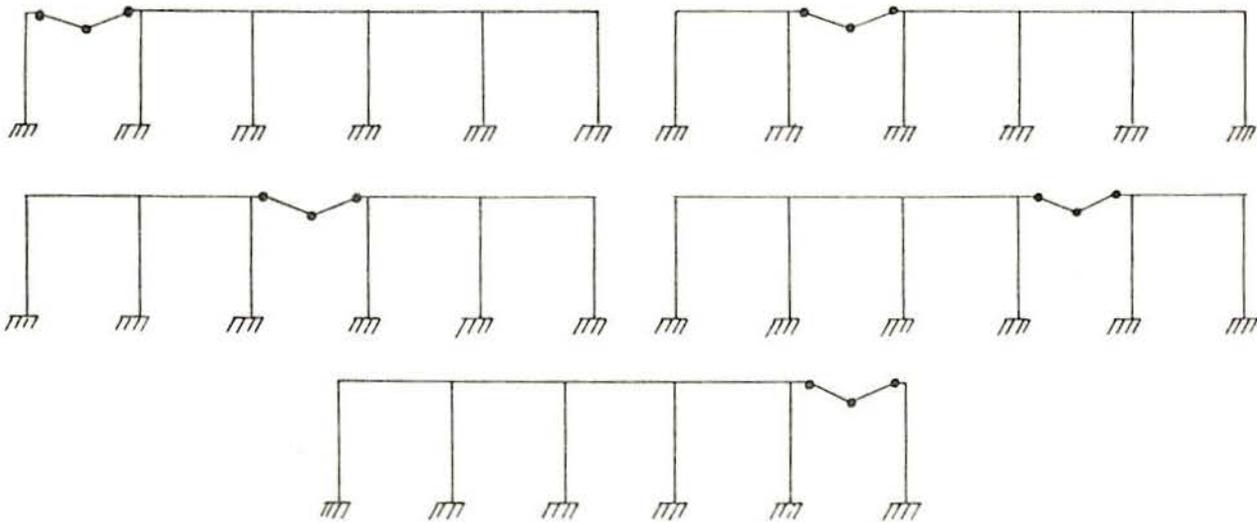


TABELA 2 -(d)- Pórtico de quatro vãos (cont)

5 VÃOS



1) $4 M_B \geq$



2) $10 M_A + 2 M_B \geq$



3) $6 M_A + 10 M_B \geq$

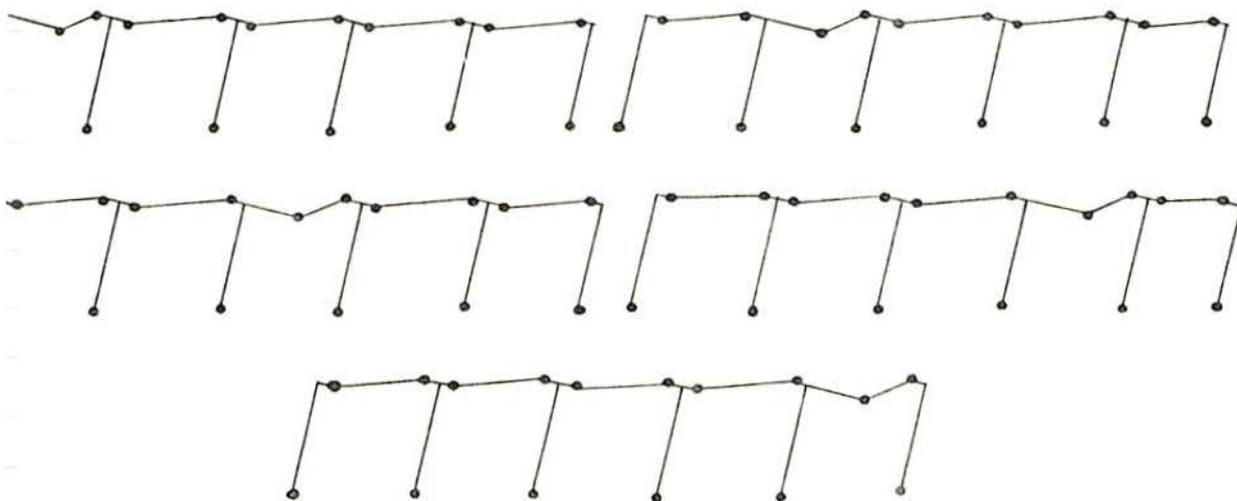


4) $10 M_A + 4 M_B \geq$



TABELA 2 -(e)- Pórtico de cinco vãos

$$6 M_A + 12 M_B \geq$$



$$6) \quad 9 M_A + 6 M_B \geq$$



$$7) \quad 9 M_A + 8 M_B \geq$$

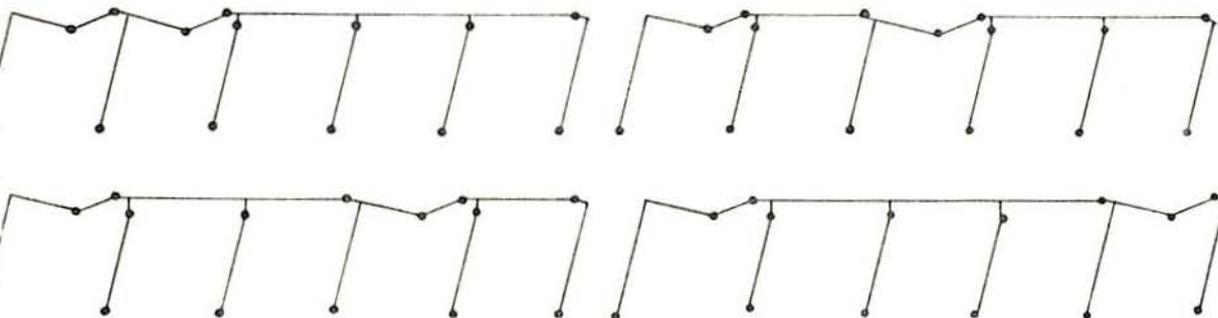
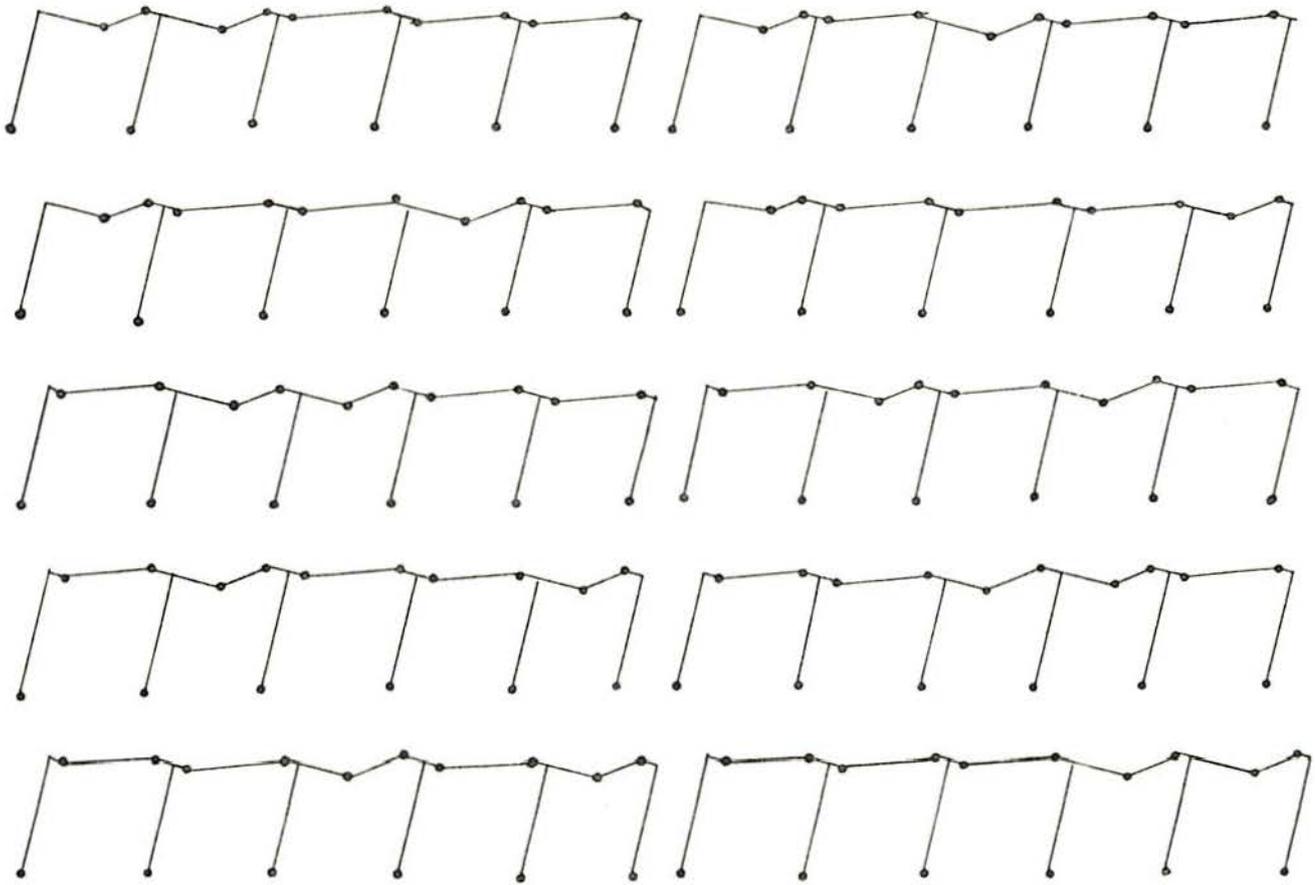


TABELA 2 -(e)- Pórtico de cinco vão (cont)

$$8) \quad 6 M_A + 14 M_B \geq$$



$$9) \quad 8 M_A + 10 M_B \geq$$

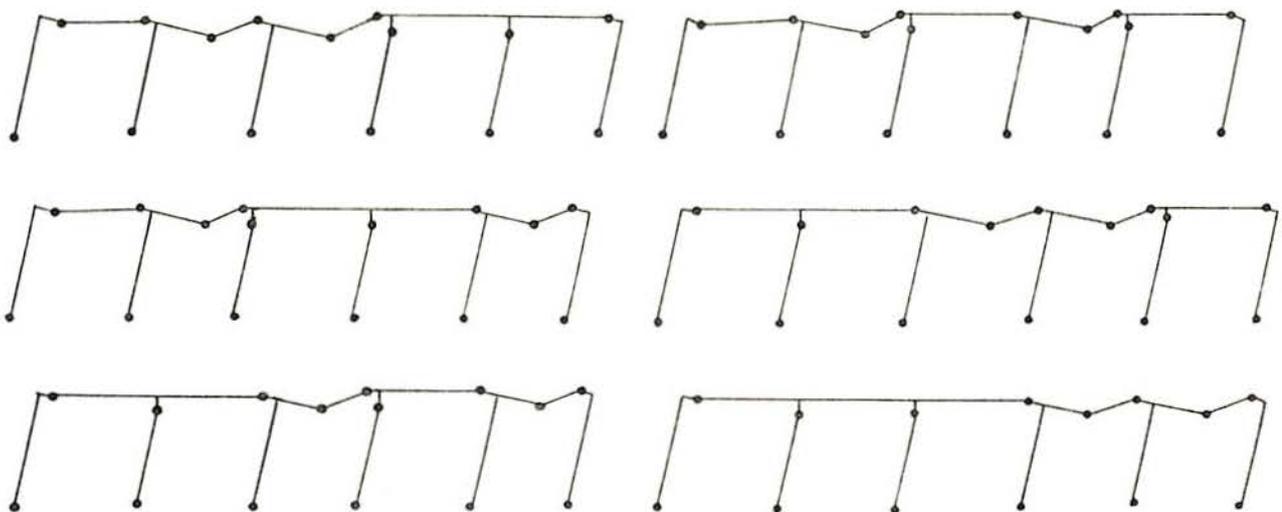


TABELA 2 .(e) - Pórtico de cinco vãos (cont)

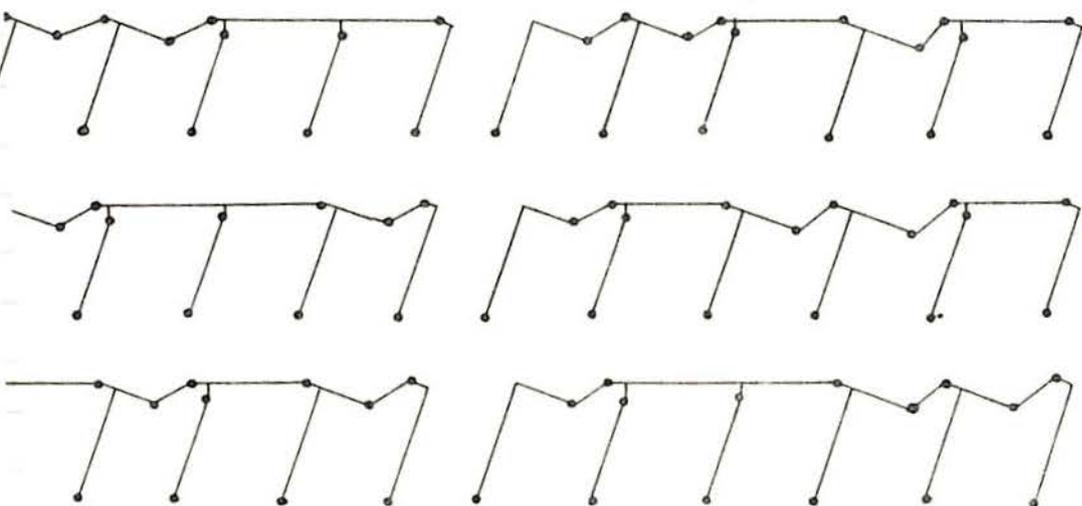
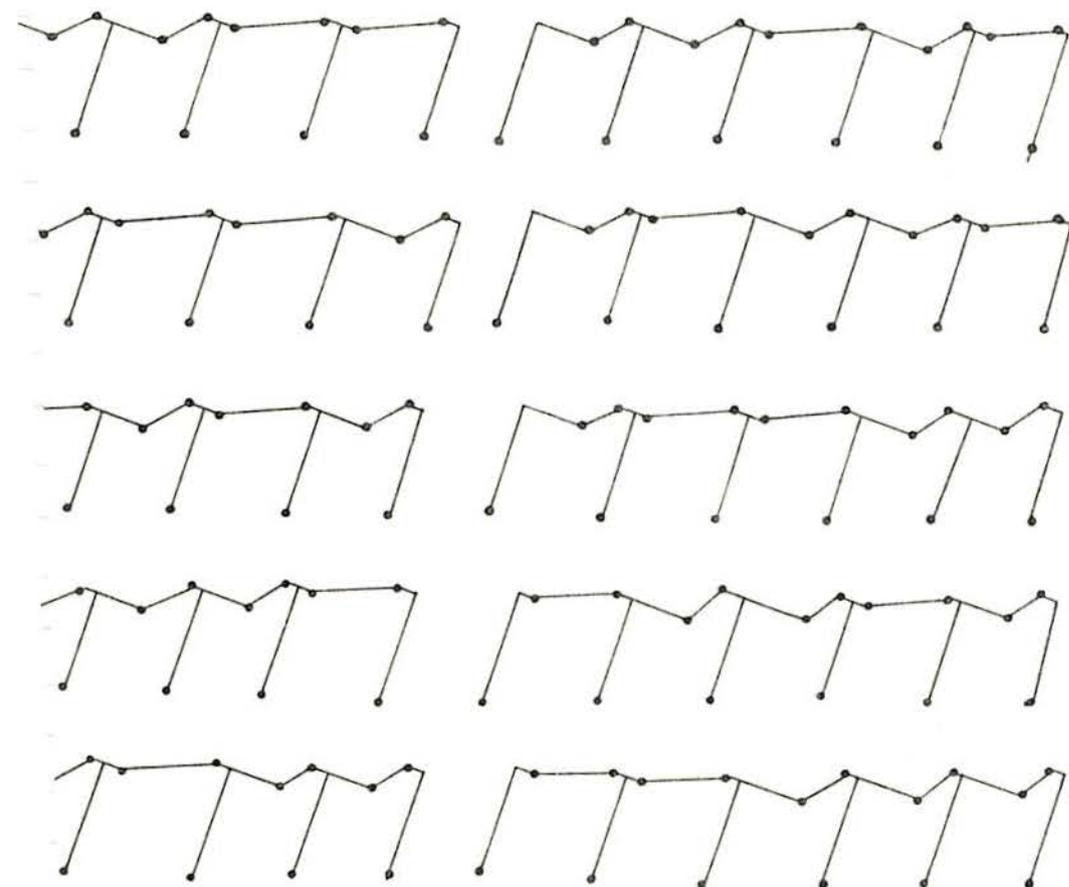
$14 \text{ Mb} + 12 \text{ Mb} \geq$

 $16 \text{ Mb} \geq$


TABELA 2 - (e) - Pórtico de cinco vãos (cont)

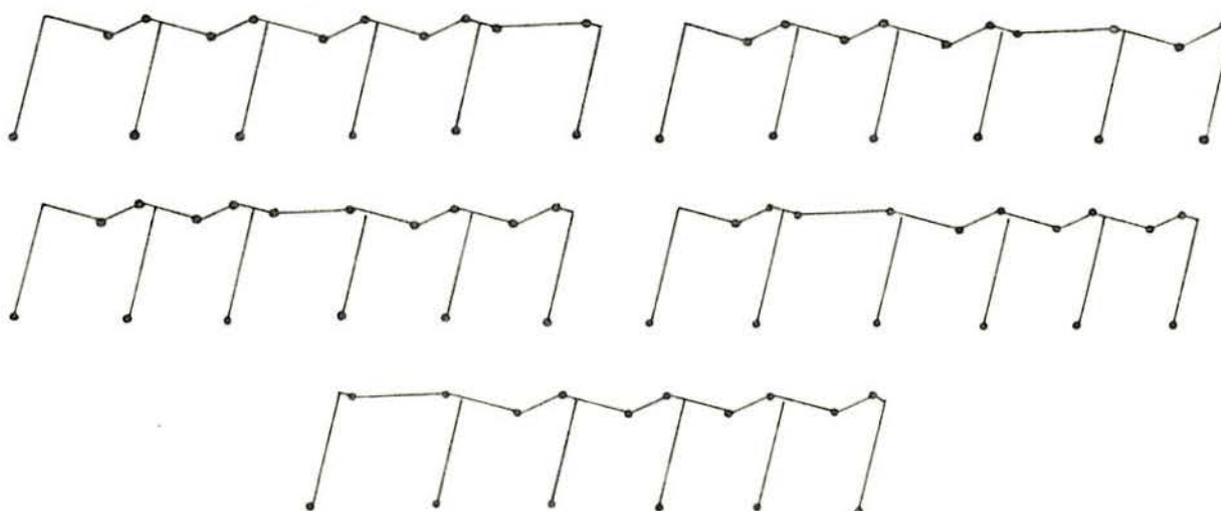
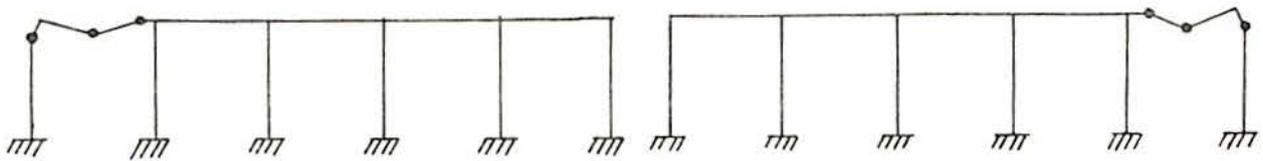
12) $7 M_A + 14 M_B \searrow$ 13) $7 M_A + 16 M_B \searrow$ 14) $6 M_A + 18 M_B \searrow$ 

TABELA 2-(e)-Pórtico de cinco vãos (cont)

15) $6 M_A + 20 M_B \geq$



16) $M_A + 3 M_B \geq$



17) $12 M_A \geq$



18) $11 M_A + 3 M_B \geq$



19) $11 M_A + 4 M_B \geq$

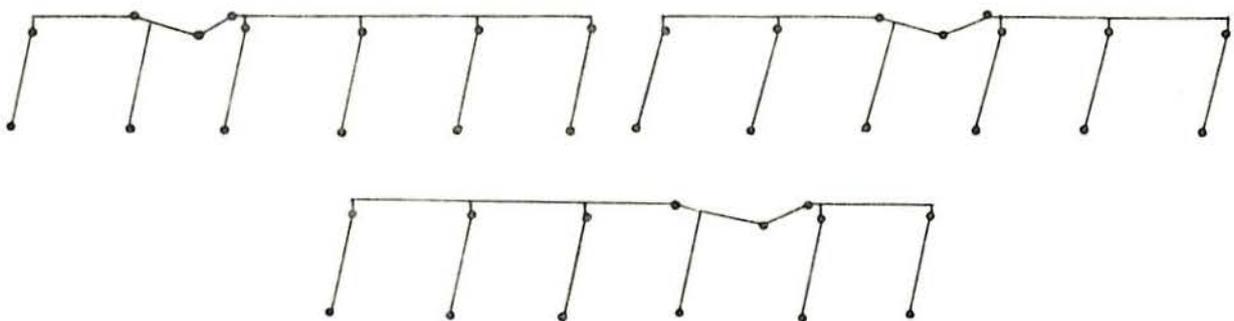
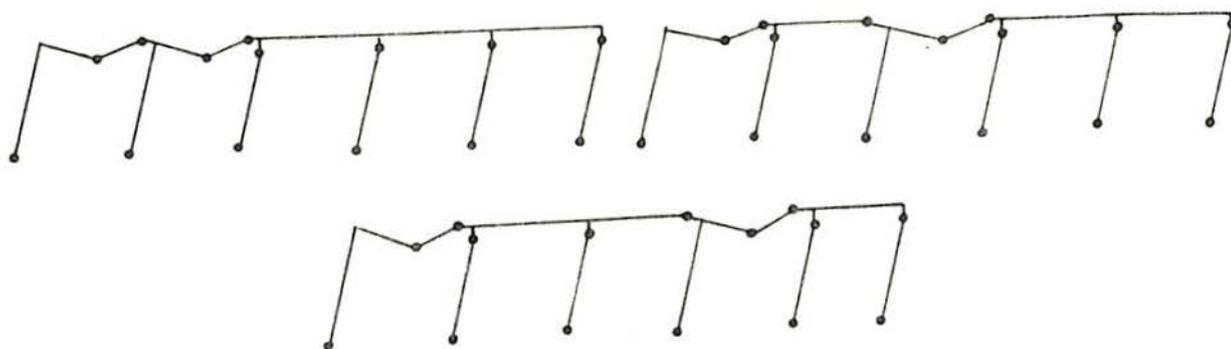


TABELA 2 - (e) - Pórtico de cinco vãos (cont)

20) $12 M_A + 3 M_B \geq$



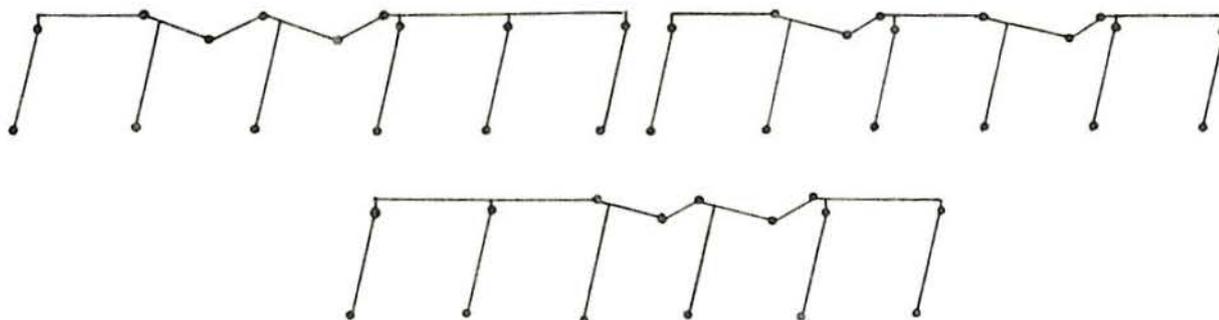
21) $10 M_A + 7 M_B \geq$



22) $11 M_A + 6 M_B \geq$



23) $10 M_A + 8 M_B \geq$



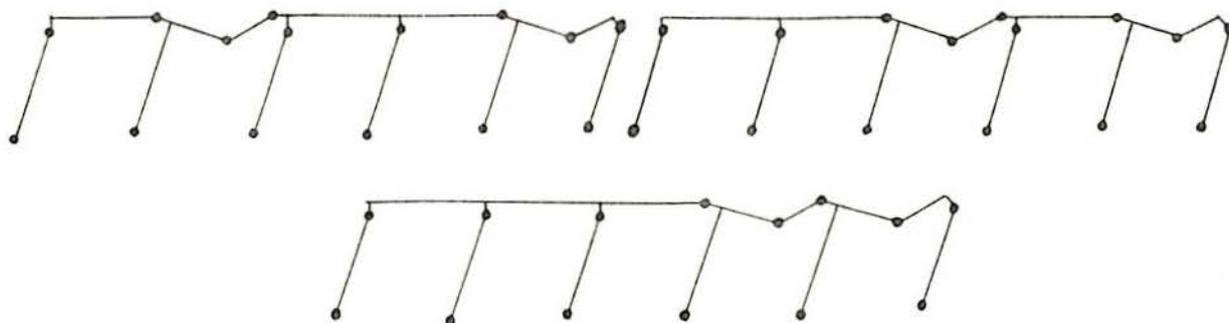
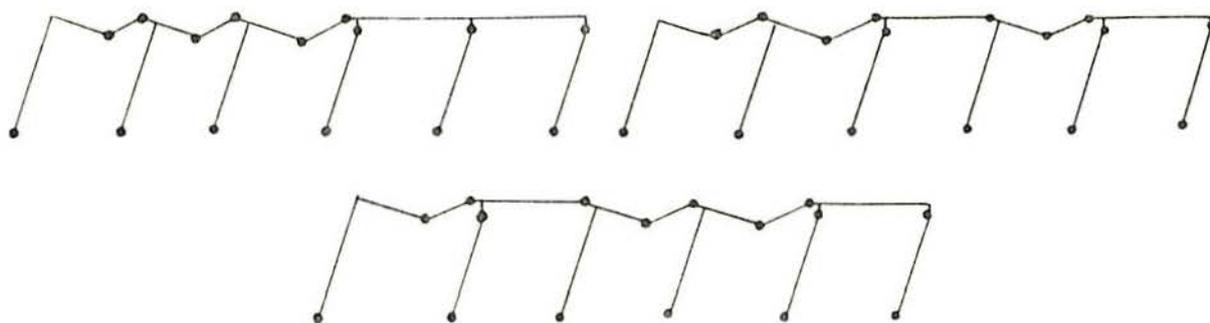
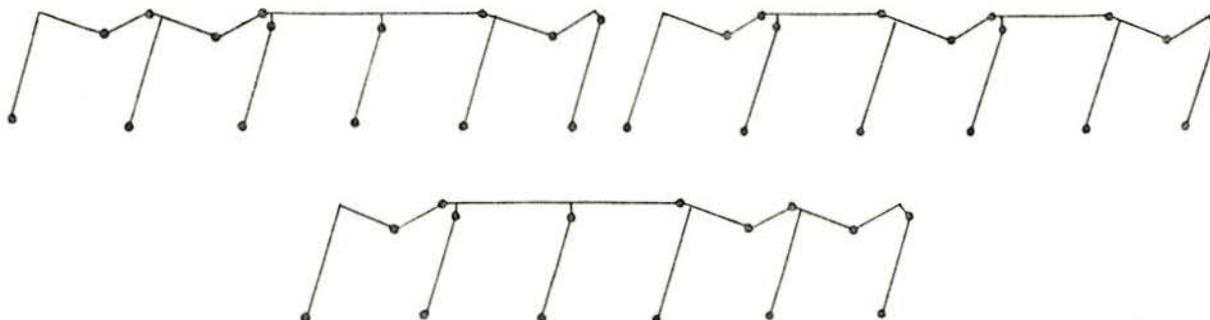
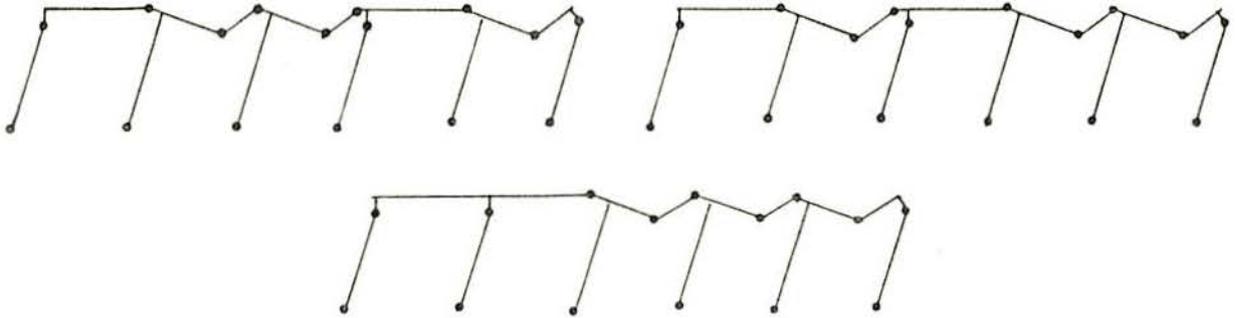
24) $11 M_A + 7 M_B \geq$ 25) $9 M_A + 11 M_B \geq$ 26) $10 M_A + 10 M_B \geq$ 27) $9 M_A + 12 M_B \geq$ 

TABELA 2 - (e) - Pórfico de cinco vãos (cont)

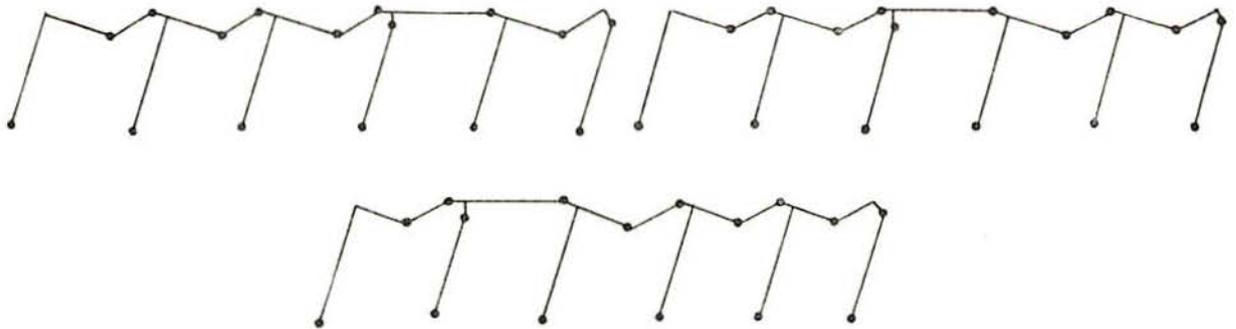
28) $10M_A + 11M_B \geq$



29) $8M_A + 15M_B \geq$



30) $9M_A + 14M_B \geq$



31) $9M_A + 15M_B \geq$



32) $8M_A + 18M_B \geq$



TABELA 2 - (e) - Pórtico de cinco vãos (cont)

8 - Aplicações

Foram testados pórticos múltiplos retangulares de dimensões e carregamento como, de maneira geral, mostra a figura 8.1.

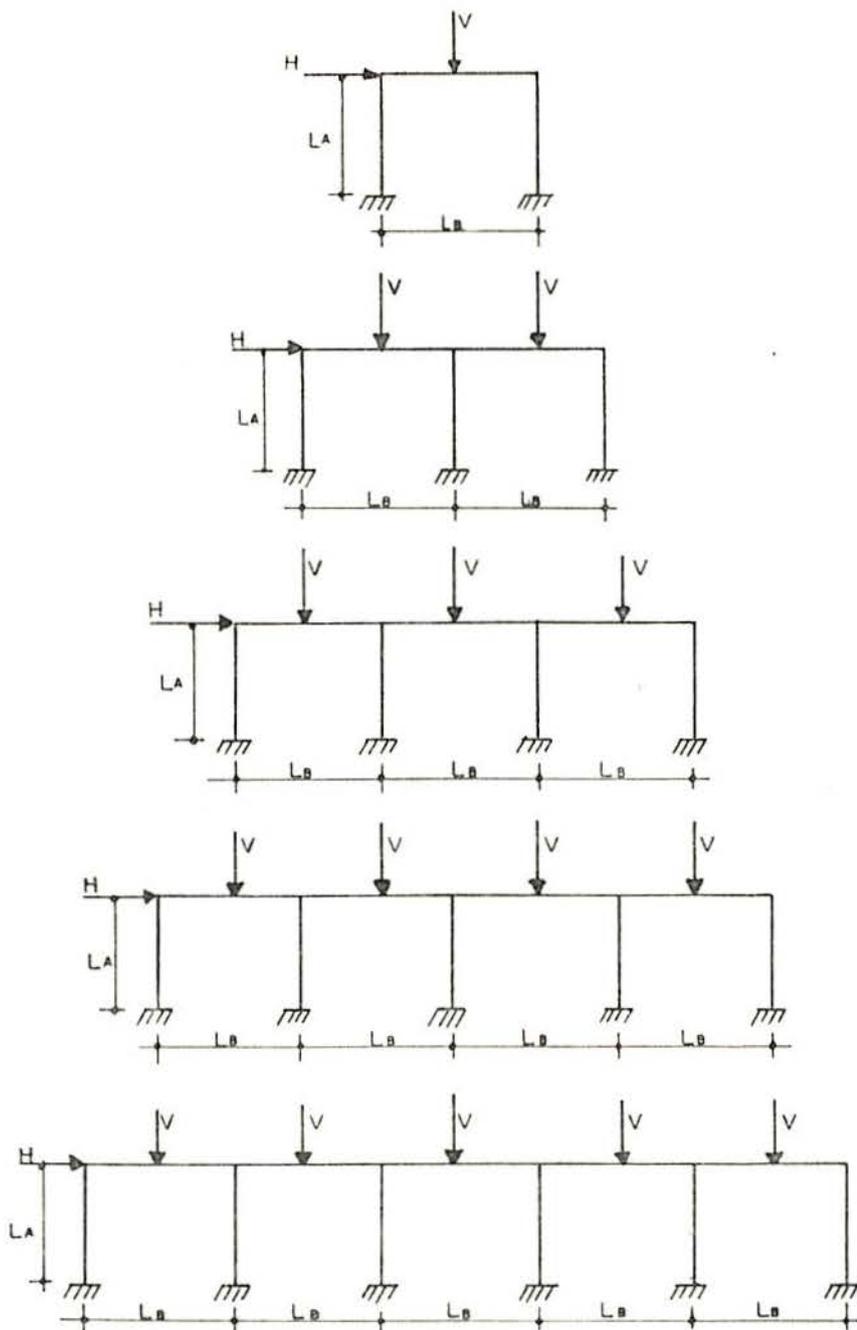


FIG. 8.1.

No estudo feito, foi admitido que $v=1$, ou seja, o momento plástico é o momento fletor que causa o escoamento da fibra mais afastada da linha neutra, na seção mais solicitada.

O fator de carga ou coeficiente de segurança, se supõe estar incluído nas cargas H e V.

A relação $H/V = 1/1$, por exemplo, significa que H e V possuem o mesmo valor, seja W, com $H=W$ e $V=W$ para o caso de carregamento estático e $H \in]0,W[$ e $V \in]0,W[$ para o caso de carregamento variável repetido. Como os momentos plásticos finais são dados em função de W, admite-se que W englobe o fator de carga.

Foram tomadas duas relações de vãos, $l_A/l_B = 2/3$ e $l_A/l_B = 1/2$ com H/V variando de 1/1 a 1/5 para cada relação l_A/l_B .

Os resultados são apresentados na Tabela 3, que mostra além dos momentos plásticos ótimos, o valor da função objetivo e as restrições que governaram o projeto; o mecanismo correspondente a cada restrição crítica é identificado na Tabela 2 para melhor visualização.

Convém salientar que os efeitos da flambagem nas peças verticais não são levados em conta, devendo ser verificados no caso de utilização prática.

A escolha de vãos iguais é justificada por sua maior utilização na prática, embora o programa não seja limitado a isto.

Normalmente, para este tipo de estrutura, as cargas verticais são maiores, no mínimo iguais, à carga horizontal. As relações H/V tomadas espelham os casos mais possíveis de ocorrer.

Outro fato a ser notado, está relacionado com a invariância da carga vertical de vão para vão. Poderia-se pensar na sua variação e até que se anulasse em algum dos vãos, porém, para considerar carregamentos variável repetido esta precisão pode ser duvidosa. Vale ressaltar que o programa elaborado não está restrito a cargas verticais iguais.

Dentro do esquema adotado e tendo em vista os resultados da Tabela 3, verificou-se a variação da função objetivo, que

neste caso representa o peso da estrutura, em relação ao tipo de carregamento.

A Tabela 4 mostra a razão Q^*_{var}/Q^*_{fix} e pode-se prontamente notar que esta razão é sempre maior do que a unidade.

Dos resultados e comparações apresentados diversas conclusões podem ser extraídas, sempre no sentido de simplificar e racionalizar o projeto estrutural.

As figuras 8.1 a 8.7 mostram as tabelas 3 e 4 em forma de gráfico.

$\frac{l_A}{l_B} \rightarrow$	2/3								1/2							
	FIX				VAR				FIX				VAR			
H/V +	M_A/Wl	M_B/Wl	Q^*/Wl^2	RC	M_A/Wl	M_B/Wl	Q^*/Wl^2	RC	M_A/Wl	M_B/Wl	Q^*/Wl^2	RC	M_A/Wl	M_B/Wl	Q^*/Wl^2	RC
1/1	0,5833	0,5833	4,0833	3 5	0,5990	0,5990	4,1926	3 5	0,3333	0,3333	1,3333	3 5	0,3344	0,3344	1,3377	3 5
1/2	0,8333	0,8333	5,8333	3 5	0,8646	0,8646	6,0519	3 5	0,5000	0,5000	2,0000	1 2 3 5	0,3948	0,7170	2,2236	2 5
1/3	1,0000	1,2500	7,7500	2 5	0,9308	1,5290	8,3100	2 5	0,5000	1,0000	3,0000	2 5	0,3981	1,2137	3,2236	2 5
1/4	1,0000	2,0000	10,0000	2 5	0,9776	2,2322	10,6069	2 5	0,5000	1,5000	4,0000	2 5	1,0559	1,0559	4,2236	1 2
1/5	1,0000	2,7500	12,2500	2 5	1,0244	2,9353	12,9037	2 5	0,5000	2,0000	5,0000	2 5	1,3059	1,3059	5,2236	1 2

TABELA 3(a) - 1 VÃO

$\frac{l_A}{l_B} \rightarrow$	2/3								1/2							
	FIX				VAR				FIX				VAR			
	M_A/Wl	M_B/Wl	Q^*/Wl^2	RC												
1/1	0,4000	0,5000	5,4000	9 11	0,5602	0,4777	6,2275	1 10	0,2727	0,2727	1,9091	5 11	0,3197	0,3150	2,2190	1 10
1/2	0,4000	1,0000	8,4000	9 11	0,8573	0,8573	10,3989	7 10	0,3333	0,5556	3,2222	7 11	0,4999	0,6018	3,9069	7 10
1/3	0,4000	1,5000	11,4000	9 11	1,1379	1,3070	14,6693	7 10	0,3333	0,8889	4,5556	7 11	0,6792	0,8905	5,5994	7 10
1/4	0,4000	2,0000	14,4000	9 11	1,4184	1,7382	18,9397	7 10	0,3333	1,2222	5,8889	7 11	0,8584	1,1791	7,2919	7 10
1/5	0,4000	2,5000	17,4000	9 11	1,6990	2,1694	23,2101	7 10	0,3333	1,5556	7,2222	7 11	1,0377	1,4678	8,9844	7 10

TABELA 3(b) - 2 VÃOS

$\frac{l_A}{l_B} \rightarrow$	2/3								1/2							
	FIX				VAR				FIX				VAR			
H/V ↓	M_A/Wl	M_B/Wl	Q^*/Wl^2	RC												
1/1	0,3235	0,4559	6,6912	16	0,4097	0,5008	7,7849	10	0,1765	0,2941	0,4706	16	0,2812	0,3341	3,1294	10
				18				13				18				11
1/2	0,4000	0,8667	11,0000	10	0,6043	0,9662	13,5299	10	0,2000	0,6000	4,4000	10	0,3731	0,6597	5,4509	10
				16				11				16				11
1/3	0,4000	1,3667	15,5000	10	0,8349	1,4195	19,4549	10	0,2000	0,9333	6,4000	10	0,5317	0,9632	7,9058	10
				16				11				16				11
1/4	0,4000	1,8667	20,0000	10	1,0655	1,8729	25,3799	10	0,2000	1,2667	8,4000	10	0,6903	1,2666	10,3607	10
				16				11				16				11
1/5	0,4000	2,3667	24,5000	10	1,2961	2,3262	31,3049	10	0,2000	1,6000	10,4000	10	0,8489	1,5700	12,8157	10
				16				11				16				11

TABELA 3(c) - 3 VÃOS

$\frac{x_A}{x_B} \rightarrow$	2/3								1/2							
	FIX				VAR				FIX				VAR			
	H/V ↓	$M_A/W\ell$	$M_B/W\ell$	$Q^*/W\ell^2$	RC	$M_A/W\ell$	$M_B/W\ell$	$Q^*/W\ell^2$	RC	$M_A/W\ell$	$M_B/W\ell$	$Q^*/W\ell^2$	RC	$M_A/W\ell$	$M_B/W\ell$	$Q^*/W\ell^2$
1/1	0,2619	0,4405	7,9048	19 23 25	0,3714	0,5143	9,8852	13 14	0,1429	0,2857	3,0000	13 19 23 25	0,2820	0,3345	4,0855	13 14
1/2	0,2857	0,9048	13,7143	13 19	0,6032	0,9689	17,6586	13 14	0,1429	0,6191	5,6667	13 19	0,3793	0,6590	7,1680	13 14
1/3	0,2857	1,4048	19,7143	13 19	0,8351	1,4234	25,4318	13 14	0,1429	0,9524	8,3333	13 19	0,5409	0,9620	10,4006	13 14
1/4	0,2857	1,9048	25,7143	13 19	1,0669	1,8780	33,2051	13 14	0,1429	1,2857	11,0000	13 19	0,7026	1,2650	13,6332	13 14
1/5	0,2857	2,4048	31,7143	13 19	1,2987	2,3326	40,9784	13 14	0,1429	1,6191	13,6667	13 19	0,8642	1,5681	16,8658	13 14

TABELA 3(d) - 4 VÃOS

$\frac{l_A}{l_B} \rightarrow$	2/3								1/2							
	FIX				VAR				FIX				VAR			
	M_A/Wl	M_B/Wl	Q^*/Wl^2	RC	M_A/Wl	M_B/Wl	Q^*/Wl^2	RC	M_A/Wl	M_B/Wl	Q^*/Wl^2	RC	M_A/Wl	M_B/Wl	Q^*/Wl^2	RC
1/1	0,2200	0,4300	9,0900	$\frac{22}{26}$ $\frac{30}{30}$	0,3742	0,5141	12,2025	$\frac{16}{17}$	0,1111	0,2963	3,6296	$\frac{16}{22}$	0,2820	0,3345	5,0373	$\frac{16}{17}$
1/2	0,2222	0,9259	16,0556	$\frac{16}{22}$	0,6096	0,9686	21,8428	$\frac{16}{17}$	0,1111	0,6296	6,9629	$\frac{16}{22}$	0,3811	0,6584	8,8717	$\frac{16}{17}$
1/3	0,2222	1,4259	24,0556	$\frac{16}{22}$	0,8448	1,4229	31,4829	$\frac{16}{17}$	0,1111	0,9629	10,2963	$\frac{16}{22}$	0,5437	0,9613	12,8754	$\frac{16}{17}$
1/4	0,2222	1,9259	31,5556	$\frac{16}{22}$	1,0802	1,8774	41,1231	$\frac{16}{17}$	0,1111	1,2963	13,6296	$\frac{16}{22}$	0,7063	1,2641	16,8791	$\frac{16}{17}$
1/5	0,2222	2,4259	39,0556	$\frac{16}{22}$	1,3156	2,3318	50,7633	$\frac{16}{17}$	0,1111	1,6296	16,9629	$\frac{16}{22}$	0,8689	1,5669	20,8828	$\frac{16}{17}$

TABELA 3(e) - 5 VÃOS

Q_{VAR}^* / Q_{FIX}^*

$\frac{l_A}{l_B} \rightarrow$	2/3					1/2				
	Nº de Vãos					Nº de Vãos				
$\downarrow H/V$	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1/1	1,02676	1,15324	1,16345	1,25053	1,34241	1,00329	1,16334	1,26664	1,36184	1,38784
1/2	1,03747	1,23796	1,22999	1,28759	1,31936	1,11180	1,21248	1,23884	1,26494	1,27414
1/3	1,07226	1,28678	1,25515	1,29002	1,30876	1,07453	1,22913	1,23528	1,24807	1,25049
1/4	1,06069	1,31526	1,26899	1,29131	1,30320	1,05590	1,23825	1,23342	1,23938	1,23842
1/5	1,05336	1,33391	1,27775	1,29211	1,29977	1,04472	1,24400	1,23228	1,23409	1,23108

TABELA 4

$$\frac{M_A}{w\ell}, \frac{M_B}{w\ell}$$

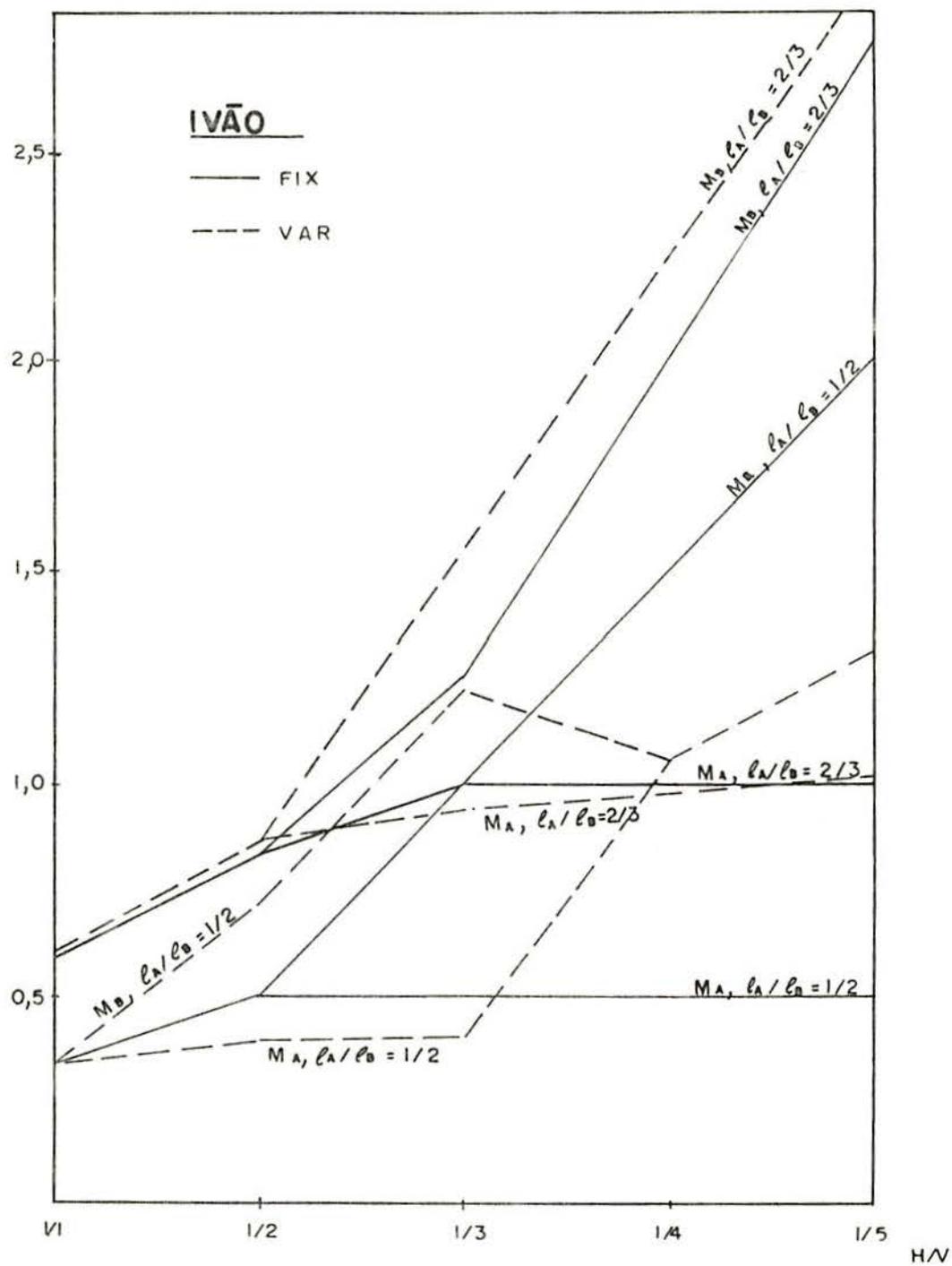


FIG. 8.1 - Pórtico de um Vão.

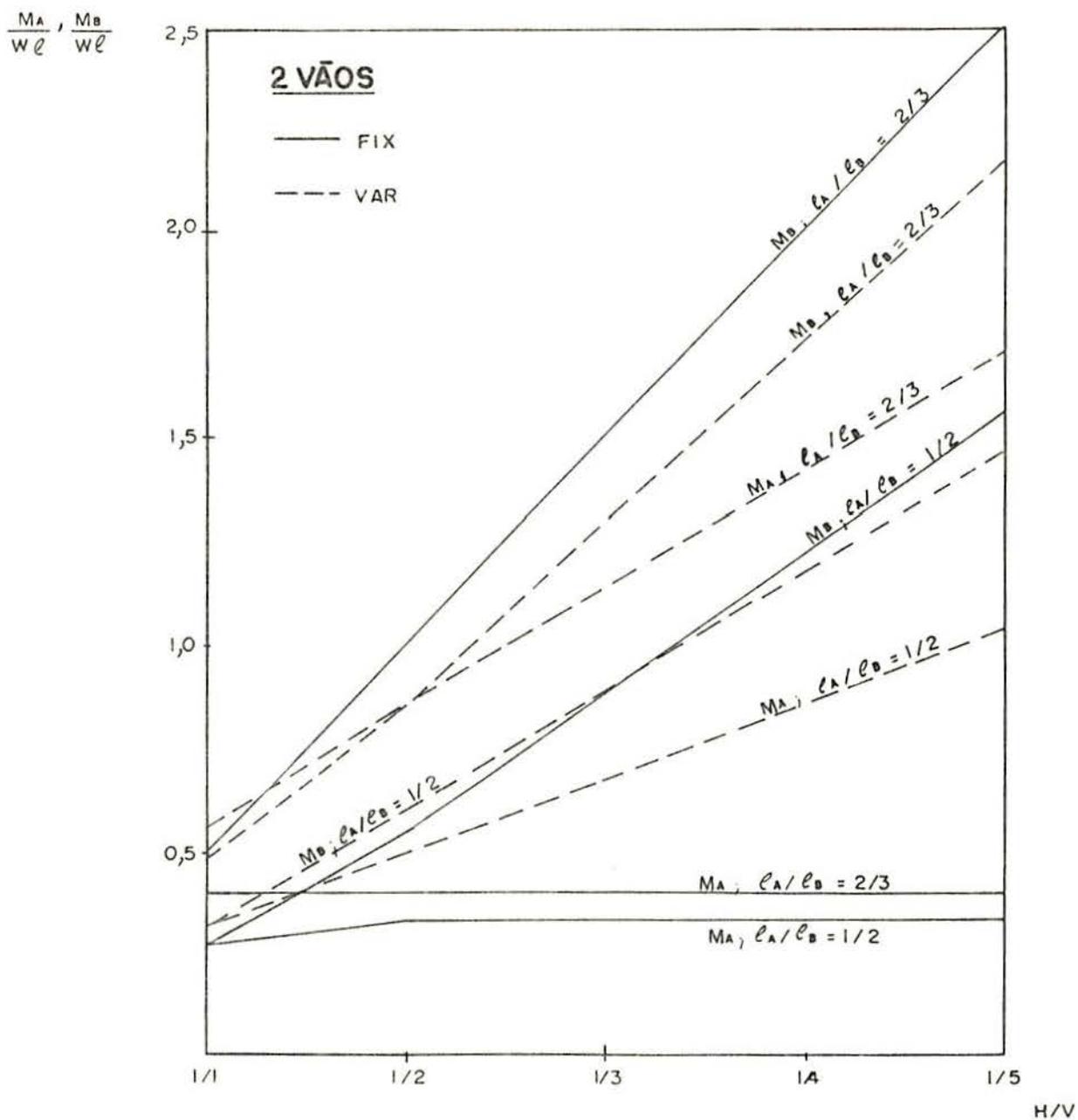


FIG. 8.2 - Pórtico de dois Vãos.

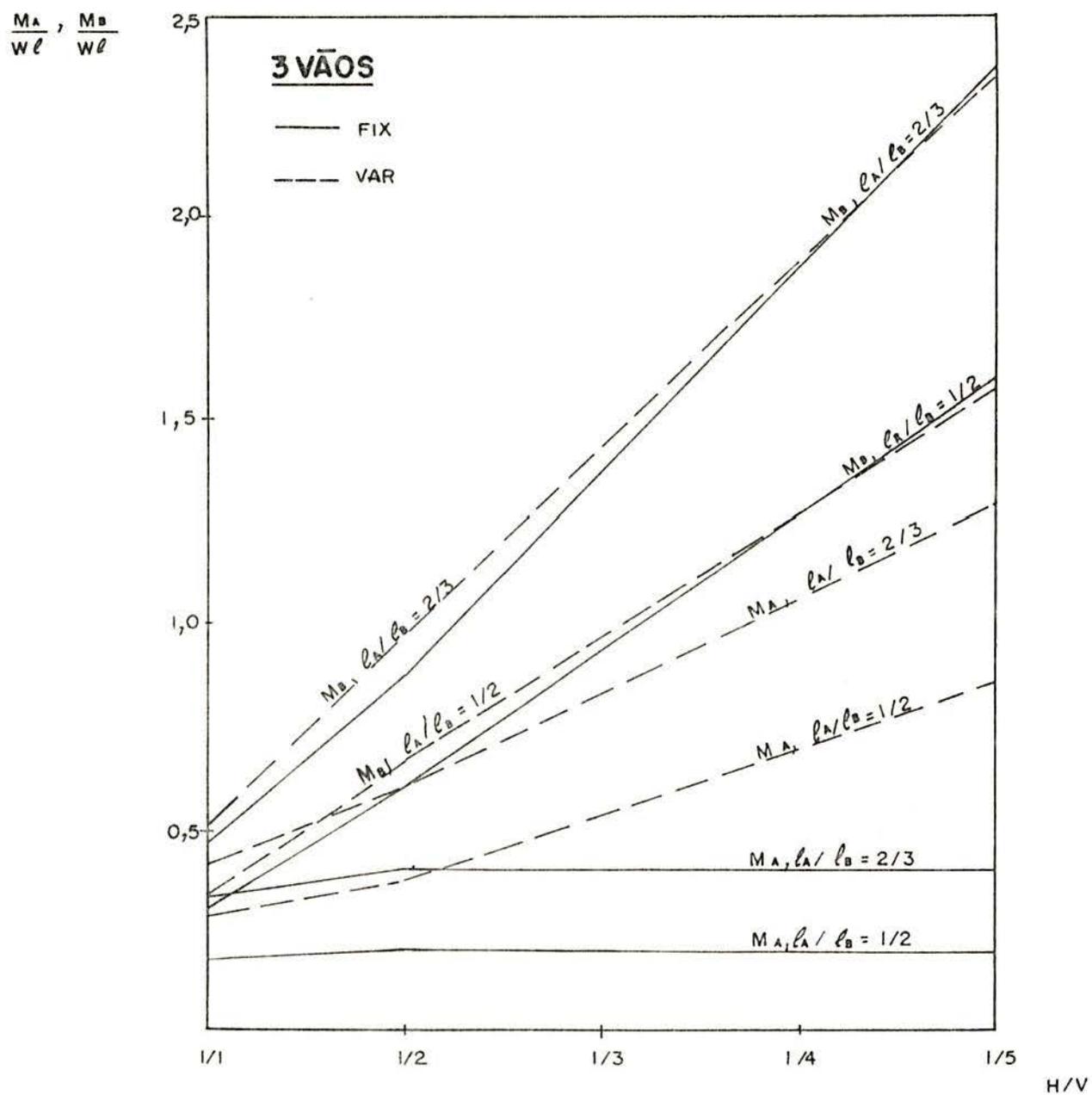


FIG. 8.3 Pórtico de tres Vãos.

$$\frac{M_A}{Wl}, \frac{M_B}{Wl}$$

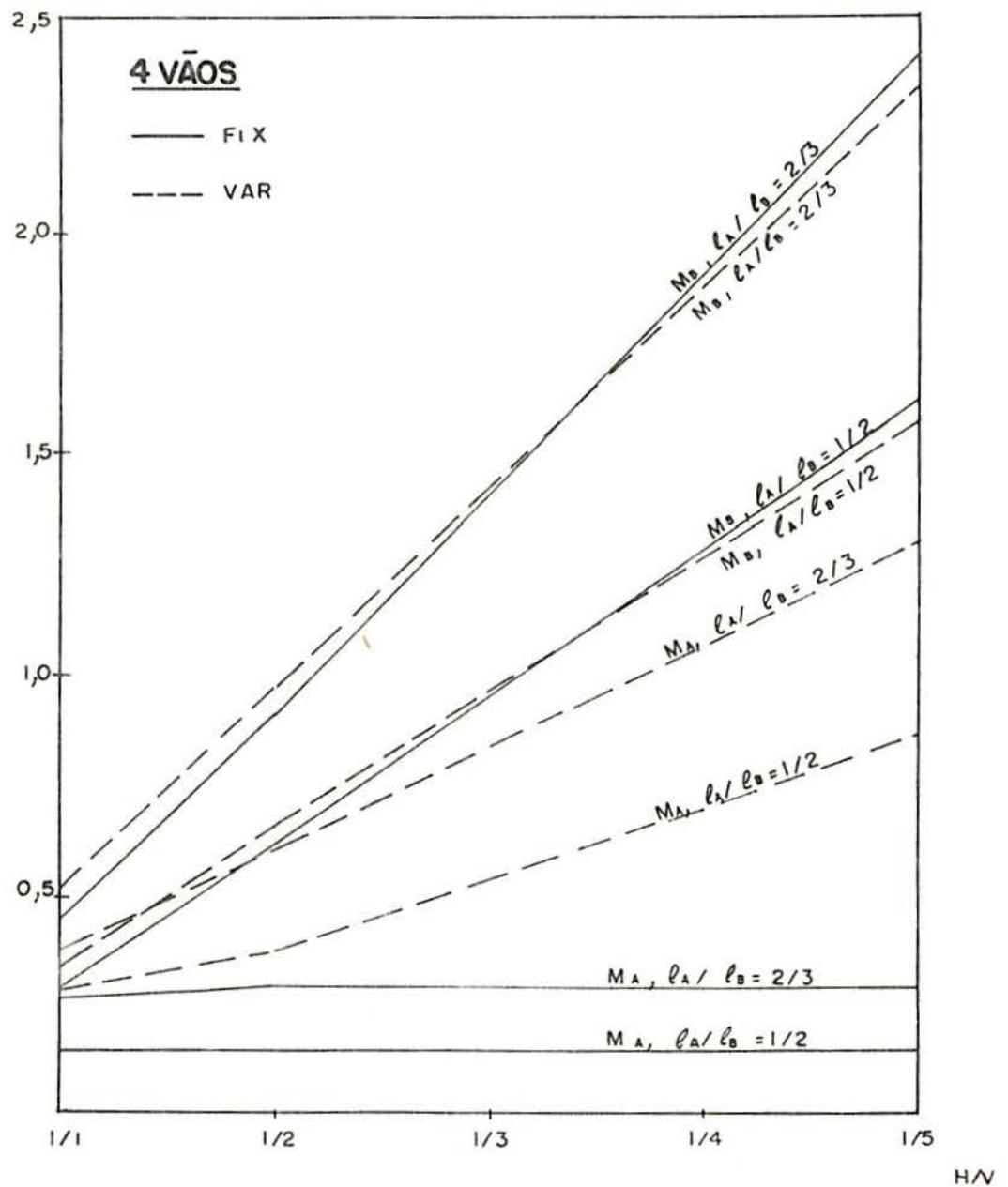


FIG. 8.4 - Pórtico de quatro Vãos.

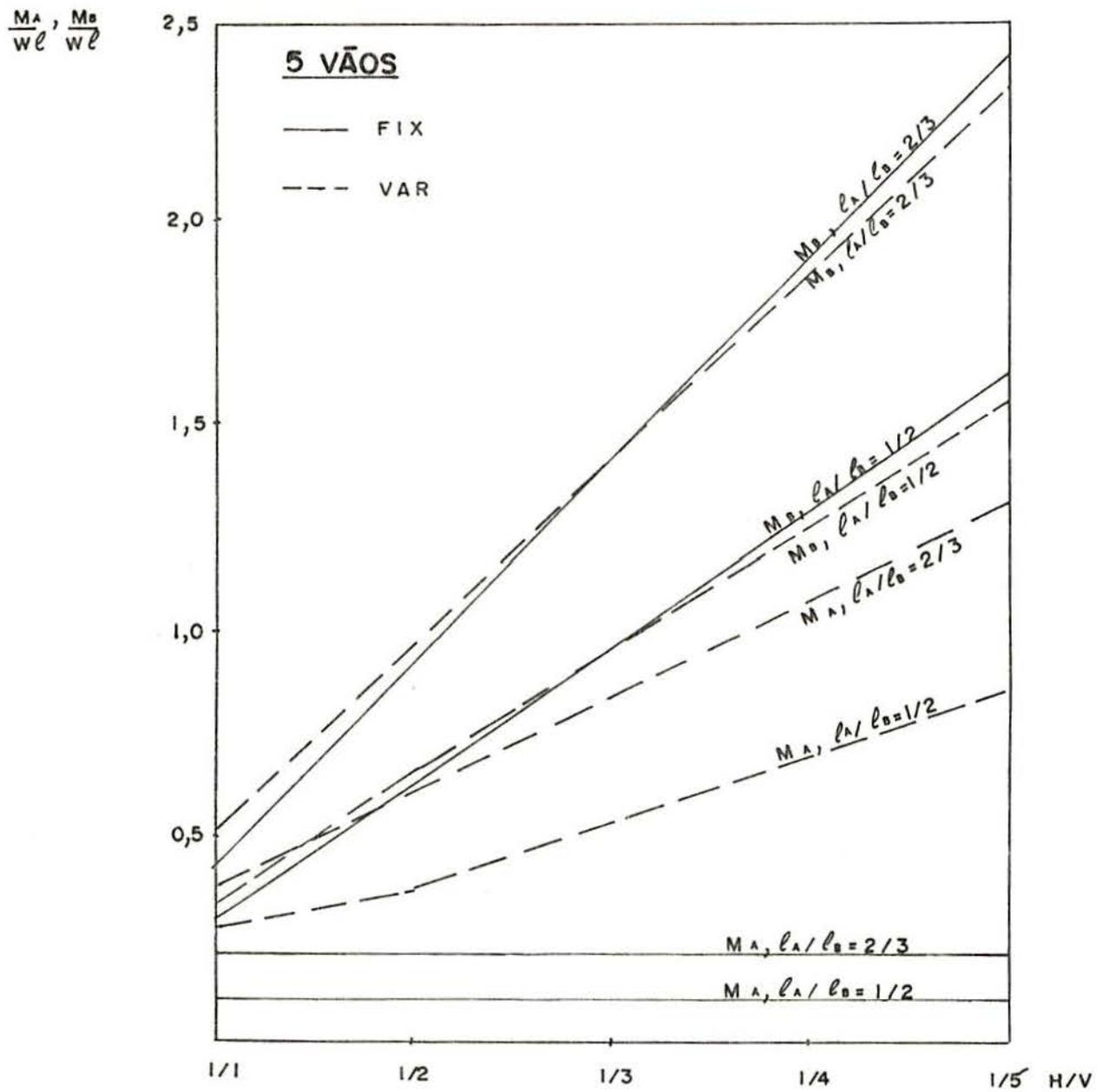


FIG. 8.5 - Pórticos de cinco Vãos

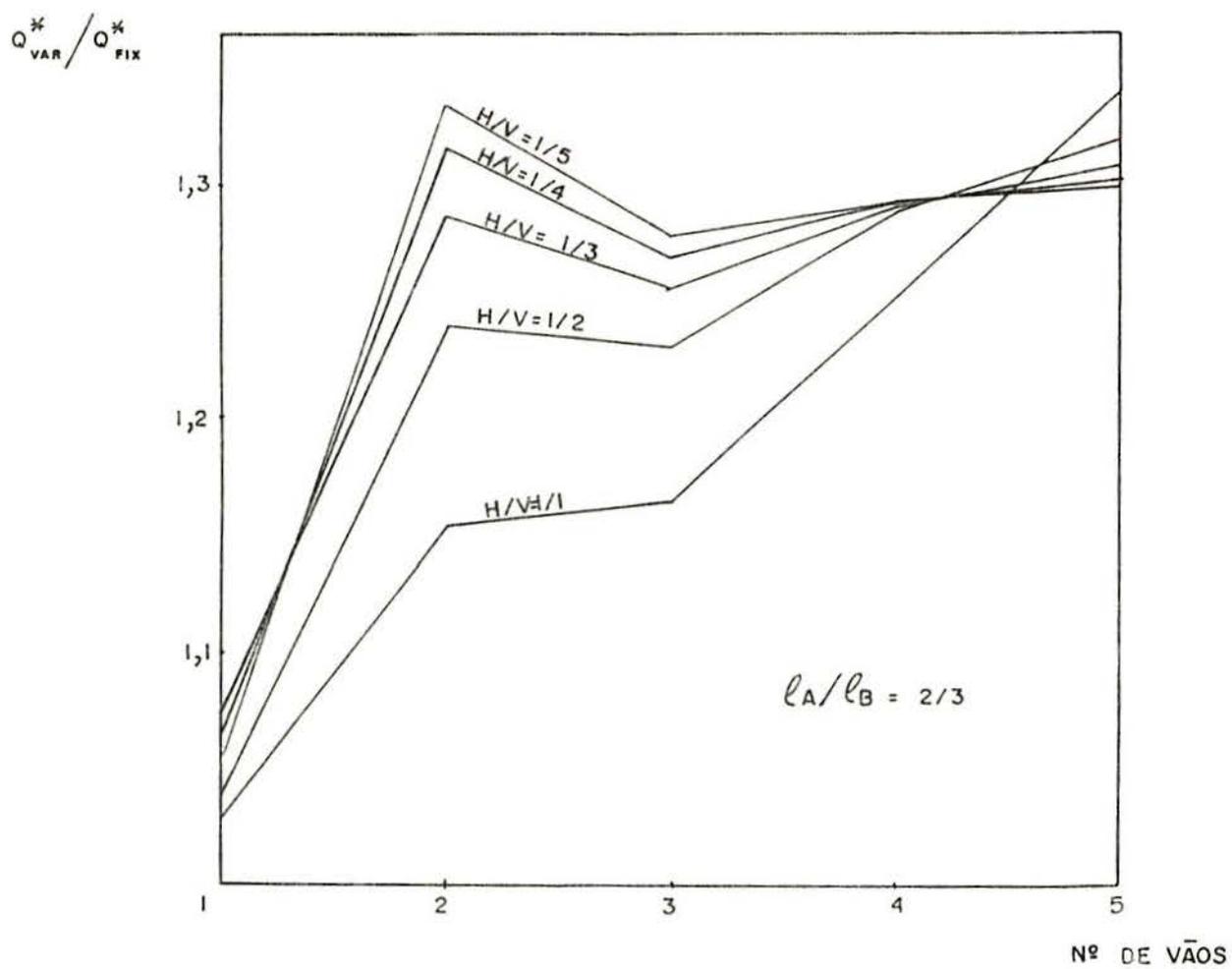


FIG. 8.6 - Relação de Vãos 2/3.

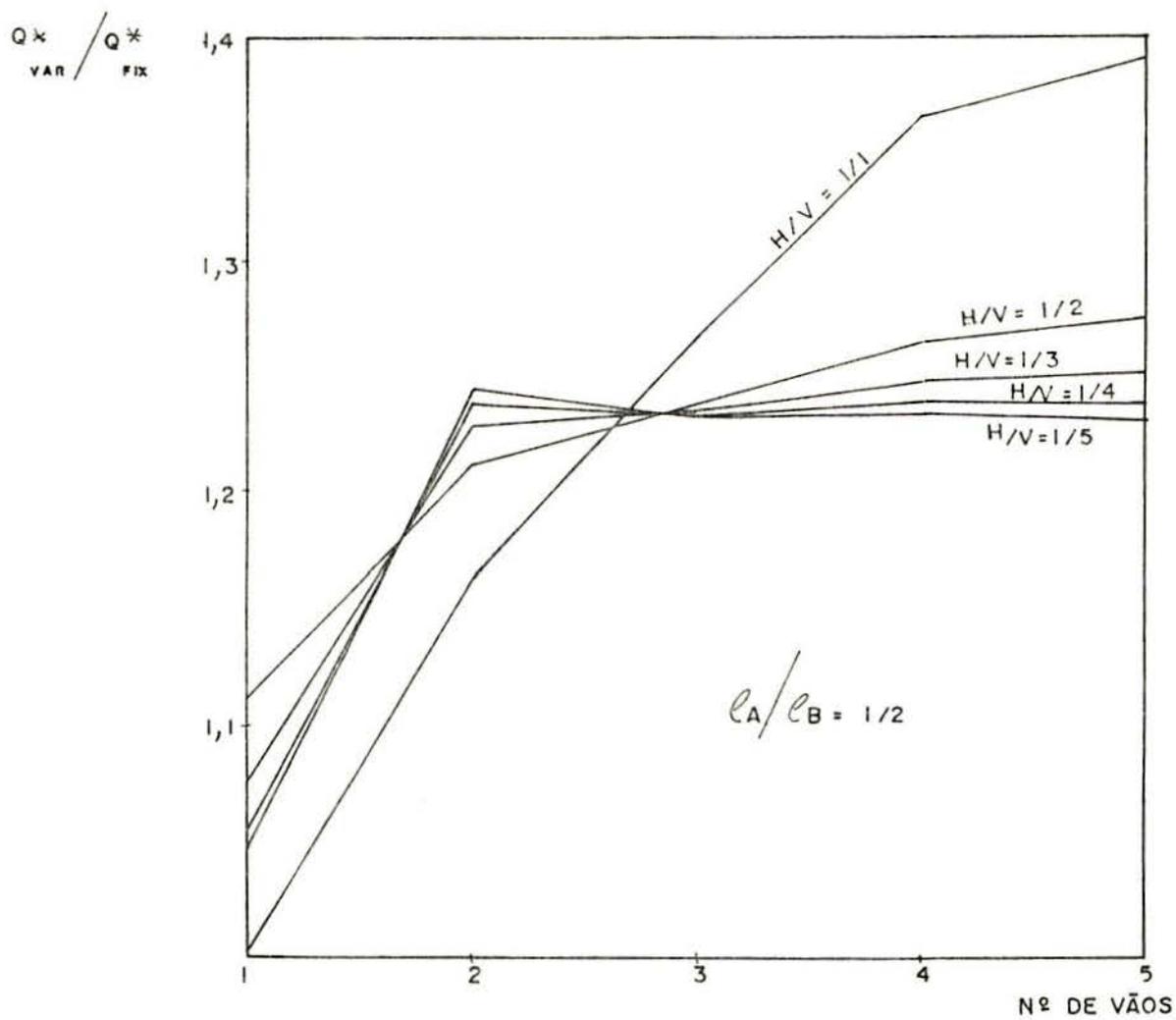


FIG. 8.7 - Relação de Vãos 1/2.

9 - Conclusões e Sugestões

9.1 - Conclusões

Os resultados obtidos mostraram que apenas para pōrtico de um vāo a diferença entre o projeto ōtimo com carregamento estātico e o projeto ōtimo com carregamento variāvel repetido ē mīnima.

Verificou-se que com o aumento do nūmero de vāos, a relaçaō Q_{var}^*/Q_{fix}^* se mantēm em torno de 1.3, levando a crer que o carregamento variāvel repetido seja, invariavelmente, o critērio de carga governante. Em outras palavras, o vetor \vec{b} da equaçāo (6.2.4.1), que representa o trabalho externo, terā valores maiores que os correspondentes para carregamento estātico.

Porēm, deve-se recordar, que o fator de carga foi considerado o mesmo, independente do tipo de carregamento.

$$\lambda_c = \lambda_s = 1,$$

o que nāo espelha a realidade, pois o carregamento variāvel repetido ē, usualmente, de natureza estocāstica, causando o colapso apōs vārios ciclos de carga se realizarem (Para o caso de carregamento estātico, as cargas de serviço sāo de natureza fixa e sabe-se de antemāo os valores que elas vāo assumir).

Desta forma, ē mais lōgico utilizar uma relaçaō λ_s/λ_c menor que a unidade para fazer uma comparaçaō entre os dois tipos de carregamento. Vārios pesquisadores verificaram que, na prātica, esta relaçaō varia normalmente de 0,8 a 0,96, o que significa dizer que pode haver uma reduçaō no valor produzido por Q_{var}^*/Q_{fix}^* .

Pode-se deduzir, entāo, que os resultados apresentados fornecem limites inferiores e superiores para a funçaō objetivo, enquanto que valores intermediārios podem ser obtidos com a escolha de fatores de carga mais adequados para as cargas.

Por outro lado, nos exemplos apresentados, deve-se notar que o número de cargas aumenta à medida que o número de vãos cresce, tornando-se cada vez menos provável a ocorrência de ciclos de carga definidos que possam causar o colapso incremental.

A partir de tres vãos, uma das restrições críticas, quando se considera carregamento variável repetido, é a de plasticidade alternada, que leva a um colapso local e não do tipo catastrófico. Esta situação se verifica na parte superior da segunda coluna a partir da esquerda, para relações H/V menores do que a unidade.

De imediato se deduz que a variação das cargas atuantes, de maneira independente uma da outra, provoca momentos fletores alternantes em sentido na seção considerada, de valores e frequências tais que induzem à plasticidade alternada. Na realidade, são necessários muitos ciclos de carga para que isto ocorra e, como sua manifestação é gradual, este tipo de colapso fornece a possibilidade de prevenção. Cargas móveis, que podem passar repetidas vezes pelo mesmo lugar, são as mais indicadas para causar um colapso do tipo incremental ou alternado. Se as cargas não forem de natureza móvel, deve-se fazer um estudo da probabilidade da variação das cargas e chegar a um fator de carga adequado.

A teoria plástica simples se concentra apenas no critério de resistência, sem se preocupar com deflexões, nem entrar no estudo da instabilidade de cada membro individualmente ou da estrutura como um todo; nas aplicações efetuadas sob carregamento estático, para alguns casos de H/V, foram encontrados valores de M_B muito maiores que M_A , sendo este último o momento plástico dos pilares. Isto leva a crer que, aparentemente, a estrutura projetada desta forma, será sensível ao fenômeno da instabilidade, bem mais do que se fosse utilizado carregamento variável repetido. Somente para pórticos de um vão há uma semelhança relativa entre M_A e M_B .

É interessante notar a pouca variação de M_A e M_B , sob carregamento variável repetido, em relação ao número de vãos, para a mesma razão H/V; isto deve-se ao fato que, mesmo que o pórti-

co tenha mais de dois vãos, as cargas que produzem as maiores variações nas restrições críticas sob a carga horizontal e as cargas verticais localizadas nas duas primeiras vigas a partir da esquerda, principalmente se uma das restrições for a de plasticidade alternada.

No caso de cargas fixas, o momento plástico das vigas, M_B , cresce muito pouco com o aumento do número de vãos, enquanto que o momento plástico dos pilares, M_A , decresce de maneira acentuada, considerando-se a mesma relação H/V; por outro lado, considerando as várias razões H/V para a mesma estrutura, nota-se que M_B aumenta numa proporção constante e que M_A permanece invariável. Estes fatos são conseqüências das restrições críticas serem semelhantes; o primeiro deles está ligado ao número de rótulas plásticas formadas nas barras verticais de um dos mecanismos críticos e o segundo depende diretamente de H/V, já que para uma mesma estrutura, verificou-se, as restrições críticas, ou os mecanismos críticos, são sempre os mesmos, notadamente para relações H/V menores do que a unidade.

Sintetizando os fatos acima descritos, considerando os pórticos planos e os tipos de carregamento utilizados, pode-se concluir:

- a - Deve-se utilizar carregamento variável repetido apenas quando se tiver certeza de que as cargas variarão com uma freqüência adequada; caso de cargas móveis.
- b - As estruturas projetadas sob o critério de carga fixa são mais sensíveis à instabilidade.
- c - Os valores obtidos para uma estrutura de dois vãos, considerando carregamento variável repetido, permitem uma estimativa quase exata para estruturas com mais vãos, desde que os vãos sejam do mesmo tamanho e as cargas assumam variações semelhantes.
- d - Abaixo de um certo valor de λ_s/λ_c , a solução ótima sob carregamento estático também o é para carregamento variável repetido; acima de um outro valor de λ_s/λ_c , a solução ótima para carregamento variável

vel repetido também o \bar{e} para cargas fixas. Para valores intermediários de λ_s/λ_c o projeto depende dos dois tipos de carregamento.

- e - A formulação do projeto estrutural ótimo sob carregamento variável repetido como um problema de programação linear, é uma técnica eficiente mesmo para estruturas mais complexas.

9.2 - Sugestões

Baseando-se nas conclusões do parágrafo anterior, pode-se unificar dois programas existentes para a obtenção de resultados que dependam dos dois tipos de carregamento simultaneamente, são poucas as modificações necessárias, já que a matriz A da equação (6.2.4.1) não depende do tipo de carga atuante, apenas da localização da carga.

Pode-se pensar, também, na modificação do tipo de estrutura, considerando, por exemplo, que os pórticos tenham as vigas inclinadas (pitched-roof frames), necessitando, neste caso, de mudanças um pouco mais significativas.

O estudo da influência das forças axial e cortante também seria de interesse, podendo, talvez, influir restrições de maneira substancial.

Muitos tópicos foram abordados, e não se fez menção à inclusão de restrições para evitar a instabilidade e prevenir as grandes deformações; é que a teoria plástica ainda não está suficientemente desenvolvida para incluir esses tipos de restrições embora as verificações necessárias devam ser feitas.

Assim, tudo o que vier reforçar, ampliar e melhorar este trabalho será de grande utilidade para todos e, além disso será um reconhecimento ao magnífico esforço dos criadores e incentivadores da teoria plástica para estruturas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. BAKER, J.F. The design of steel frames. Structural Engineer, London, 27:397-431, 1949
2. BAKER, J.F. & HEYMAN, J. Plastic design of frames. Cambridge University, 1969, v.1.
3. BAKER, J.F.; HORNE, M.R.; HEYMAN, J. Plastic behaviour and design. In: BAKER, J.F. The steel skeleton. Cambridge University, 1956. v.2.
4. CHAN, H.S.Y. On Foulkes mechanism in portal frame design for alternative loads. Journal of Applied Mechanics, New York, ASME, 36(1):73-4, Mar. 1969.
5. COHN, M.Z. Limit design of reinforced concrete frames: Journal of Structural Division, New York, ASCE, 94(10): 2467-83, Oct. 1968.
6. COHN, M.Z.; GHOSH, S.K.; PARIMI, S.R. A unified approach to theory of plastic structures. Journal of Engineering Mechanics Division, New York, ASCE, 98(5):1133-58, Oct. 1972.
7. COHN, M.Z. & GRIERSON, D.E. An automatic approach to the analysis of plastic frames under fixed and variable loading. The Structural Engineer, London, 49(7):291-7 July 1971.
8. COHN, M.Z. & PARIMI, S.R. Optimal design of plastic structures for fixed and shakedown loadings. Journal of Applied Mechanics, New York, ASME, 40(2); 595-9, June 1973.
9. COHN, M.Z.; PARIMI, S.R.; GHOSH, S.K. On the uniqueness of plastic optimal design. Israel Journal of Technology, Jerusalem, 9(5):489-93, 1971.
10. DAVIES, J.M. Variable repeated loading and the plastic design of structures. The Structural Engineer, London, 48(5);181-94, May 1970.
11. DORN, W.S. & GREENBERG, H.J. Linear programming and plastic limit analysis of structures. Quarterly of Applied Mathematics, Providence, EUA, 15(2):155-67, July 1957.
12. FOULKES, J. Minimum weight design and the theory of plastic collapse. Quarterly of Applied Mathematics, Providence EUA, 10:347-58, Jan. 1953
13. GASS, S.I. Linear programming; methods and applications. 3.ed. New York, McGraw-Hill, 1969.
14. GAYLORD Jr., E.H. & GAYLORD, C.N. Design of steel structures. 2.ed. New York, McGraw-Hill, 1972.
15. GERE, J.M. & WEAVER Jr., W. Analysis of framed structures. Toronto, Van Nostrand, 1965.

16. GREENBERG, H.J. & PRAGER, W. Limit design of beams and frames. Transactions of the ASCE, New York, 117:447-58, 1952.
17. GRIERSON, D.E. & GLADWELL, G.M.L. Collapse load analysis using linear programming. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 97(5):1561-73, May 1971.
18. HEYMAN, J. Minimum weight of frames under shakedown loading. Journal of Engineering Mechanics Division, New York, ASCE, 84(4):1790-25, Oct. 1958.
19. _____. Plastic design and limit state design. The Structural Engineer, London, 51(4):127-31, Apr. 1973.
20. _____. Plastic design of beams and plane frames for minimum material consumption. Quarterly Applied Mathematics, Providence, EUA, 8(4):373-81, Jan. 1951.
21. _____. Plastic design of plane frames for minimum weight. The Structural Engineer, London, 31(5):125-9, May 1953.
22. _____ et alii. Shakedown analysis. The Structural Engineer, London, 46(4):97-106, Apr. 1968.
23. HODGE Jr., P.G. Plastic analysis of structures. New York, McGraw-Hill, 1959.
24. LANGENDONCK, T. van. Inequações lineares. São Paulo, Associação Brasileira de Cimento Portland, 1959.
25. MASSONET, C. & SAVE, M. Calculo plastico de las construcciones. Barcelona, Montaner Y Simon, 1966.
26. MENDELSON, A. Plasticity; Theory and application. New York, MacMillan, 1968.
27. NEAL, B.G. The plastic methods of structural analysis. London, Chapman & Hall, 1956.
28. PRAGER, W. Optimum plastic design of a portal frame for alternative loads. Journal of Applied Mechanics, New York, ASME, 34(3):772-3, Sep. 1967.
29. RUBINSTEIN, M.F. & KARAGOZIAN, J. Building design using linear programming. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 92(6):223-45, Dec. 1966.