

ANÁLISE NÃO-LINEAR DE PÓRTICOS  
EM CONCRETO ARMADO OU PROTENDIDO,  
PARA CARGAS DE CURTA DURAÇÃO

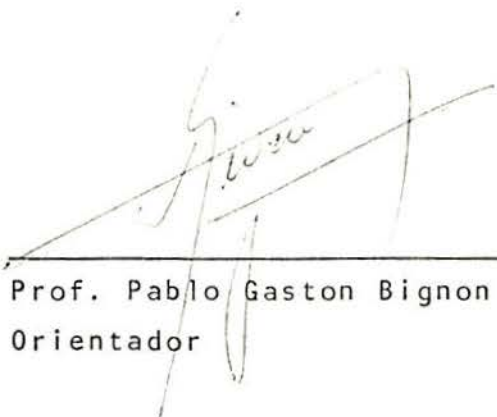
MARIA DE LOURDES SILVA VIANA

Dissertação apresentada ao corpo docente do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Porto Alegre  
Dezembro de 1984


ESCOLA DE ENGENHARIA  
BIBLIOTECA

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pelo Curso de Pós-Graduação.



---

Prof. Pablo Gaston Bignon  
Orientador



---

Prof. José Carlos Ferraz Hennemann  
Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Eng. Civil

À minha família

## AGRADECIMENTOS

Ao Professor Pablo G. Bignon pela dedicada orientação recebida ao longo deste trabalho.

Ao Professor José Carlos Ferraz Hennemann, coordenador deste curso, e na sua pessoa a todos os professores, pela ajuda dispensada.

Aos Professores Ruben Braga, Luiz de Lacerda Júnior e demais membros da diretoria da Fundação Mineira de Educação e Cultura (FUMEC), pelo apoio e incentivo recebidos no decorrer deste trabalho.

Ao Conselho Nacional de Energia Nuclear (CNEN) e à Coordenação do Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo auxílio financeiro.

À Liliani Gaeversen, pela excelente datilografia.

À Juliana Zart Bonilha, pela elaboração da bibliografia.

Ao José Milton de Araújo, pelas sugestões e constante colaboração.

Aos colegas e funcionários deste curso, pela amizade, incentivo e colaboração, e a todos aqueles que de alguma maneira ajudaram na realização deste trabalho.



## RESUMO

Este trabalho tem por objetivo desenvolver e implementar, computacionalmente, um procedimento numérico para analisar pórticos planos em concreto armado e em concreto protendido, submetidos a cargas de curta duração, com a consideração das não-linearidades física e geométrica.

Aplica-se a carga de forma incremental e, para cada etapa, utiliza-se o método dos elementos finitos, com uma formulação em deslocamentos, para resolver as equações de equilíbrio.

Divide-se a seção transversal do elemento em faixas simétricas em relação ao plano de atuação das cargas exteriores, sendo assim possível acompanhar variações na largura, das características mecânicas e das equações constitutivas de cada material.

Estuda-se as estruturas em concreto protendido com armaduras pós-tracionadas, com aderência.

Apresenta-se uma série de exemplos numéricos a fim de verificar a validade e a aplicabilidade do método e do algoritmo desenvolvidos e compara-se os resultados obtidos com dados experimentais e respostas devidas a outros pesquisadores.

## SUMMARY

The object of the present study is to develop and implement on the computer, a numerical procedure for analysing planar reinforced and prestressed concrete frames under short term loading duration, considering physical and geometric non linearities.

The loads are applied in increments and at each stage a Finite Element displacement model is used to solve the equilibrium equations.

The cross section of each element is divided into layers which are symmetric in relation to the exterior load plane. In this way it is possible to accompany variations in the width, mechanical properties and constitutive equations of each material.

Post-tensioned bonded structures are analyzed.

A series of numerical examples are presented in order to verify the validity and applicability of the method and the algorithm developed. The results obtained were compared with experimental measurements and analytical results obtained by others investigators.

## SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	1
1.1 - Generalidades.....	1
1.2 - Objetivos e Metodologia.....	4
2. PROPRIEDADES DOS MATERIAIS.....	6
2.1 - Generalidades.....	6
2.2 - Concreto.....	7
2.2.1 - Deformação.....	7
2.2.2 - Deformação de curta duração. Relação tensão-deformação.....	10
2.2.3 - Deformação de longa duração.....	19
2.3 - Aços para Armadura Ordinária.....	20
2.4 - Aços para Protensão.....	23
3. ALGORITMO DE SOLUÇÃO.....	28
3.1 - Considerações Gerais.....	28
3.2 - Solução da Equação de Equilíbrio.....	29
3.3 - Programa Computacional.....	32
3.3.1 - Convenção dos blocos diagramas.....	33
3.3.2 - Fluxograma do programa principal.....	34
3.3.3 - Sub-rotinas.....	39
4. UM PROCESSO DE CÁLCULO PARA ESTRUTURAS EM CONCRETO ARMADO.....	57
4.1 - Definições e Hipóteses.....	57
4.2 - Equação de Equilíbrio do Elemento. Cálculo das Ações de Extremo de Membro.....	58
4.3 - Cálculo de Deformações e Tensões.....	63
4.4 - Cálculo do Vetor de Forças Internas Resistentes.....	64

5. EXTENSÃO DO PROCESSO DE CÁLCULO PARA ESTRUTURAS EM CONCRETO PROTENDIDO.....	67
5.1 - Generalidades.....	67
5.2 - Definições e Hipóteses.....	69
5.3 - Análise de Estruturas Pós-Tracionadas.....	72
5.3.1 - Análise na transferência da protensão.....	72
5.3.2 - Determinação das ações nodais equivalentes à protensão.....	75
5.3.3 - Síntese da análise durante a transferência da protensão.....	82
5.3.4 - Análise depois da transferência.....	82
6. APLICAÇÕES NUMÉRICAS.....	86
6.1 - Generalidades.....	86
6.2 - Estruturas em Concreto Armado.....	86
6.2.1 - Viga ensaiada por SCHEEG e DECANINI - isostática, seção constante.....	86
6.2.2 - Viga-coluna submetida à flexo-compressão com pequena excentricidade - isostática, seção constante.....	89
6.2.3 - Viga coluna ensaiada no laboratório de Zurich - isostática, seção constante.....	91
6.2.4 - Estrutura em cruz, ensaiada por THOMPSON e PARK.....	94
6.3 - Estruturas em Concreto Protendido.....	98
6.3.1 - Vigas contínuas ensaiadas por LIN - 2 vãos, seção constante, um cabo de protensão.....	98
6.3.2 - Viga ensaiada por WARWARUK, SOZEN e SIESS - isostática, seção constante, um cabo de protensão.....	108
6.3.3 - Viga ensaiada por BRECKENRIDGE - isostática, seção variável, 2 cabos de protensão.....	110
6.3.4 - Estruturas em cruz, com a viga em concreto protendido, testadas por THOMPSON e PARK.....	113

7. CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	117
7.1 - Generalidades.....	117
7.2 - Conclusões.....	117
7.2.1 - Ponto de vista teórico.....	117
7.2.2 - Ponto de vista computacional.....	118
7.3 - Sugestões.....	119
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	121



## LISTA DE SÍMBOLOS

### 1. Letras romanas maiúsculas

- $A_p$  - área da seção transversal do cabo de protensão
- $\vec{D}$  - vetor de desequilíbrio
- $E_c$  - módulo de deformação longitudinal inicial do concreto
- $E_p$  - módulo de deformação longitudinal inicial do aço para protensão
- $E_1$  - módulo de deformação longitudinal inicial do aço para armadura ordinária
- $E_2$  - módulo de deformação longitudinal, para o estágio II, do aço para armadura ordinária
- $\vec{K}_0$  - matriz de rigidez tangente inicial da estrutura
- $L$  - comprimento do elemento de concreto
- $L_s$  - comprimento do segmento de cabo de protensão
- $L_t$  - comprimento total do cabo de protensão
- $\vec{P}_{EXT}$  - vetor das cargas externas atuantes na estrutura
- $\vec{P}_L$  - vetor das ações de extremo de membro lineares para a estrutura
- $\vec{P}_{NL}$  - vetor das ações de extremo de membro não-lineares para a estrutura
- $\vec{P}_p$  - vetor das forças nodais equivalentes à protensão para o elemento
- $P_o$  - força de protensão inicial
- $\vec{R}$  - vetor das ações de extremo de membro para o elemento
- $\vec{R}_p$  - vetor da contribuição do aço para protensão nas ações de extremo de membro

$\underline{U}$  - vetor de deslocamentos da estrutura

$V_0$  - volume do elemento indeformado

$W$  - trabalho

## 2. Letras romanas minúsculas

$e_i$  - excentricidade do cabo de protensão no nó  $i$

$f_c$  - resistência à compressão do concreto, medida no ensaio de um corpo de prova

$f'_c$  - tensão máxima do diagrama tensão-deformação do concreto

$f_{cd}$  - resistência de cálculo à compressão do concreto

$f_{ck}$  - resistência característica à compressão do concreto

$f_{cm}$  - média dos valores da resistência à compressão do concreto medidos em ensaios de corpos de prova

$f_{so,2}$  - tensão convencional de escoamento do aço

$f_r$  - força de atrito

$f_y$  - tensão de escoamento do aço

$f_{yk}$  - resistência característica à tração do aço

$f_{yp}$  - tensão de escoamento do aço para protensão

$k$  - perda por atrito, por metro linear, representativa dos desvios parasitários da bainha

$k_\varrho$  - variação angular da bainha, por metro linear

$p$  - parâmetro que representa a posição no eixo do elemento

$p_k$  - pontos, no eixo do elemento de concreto, para a integração de Gauss

$p_m$  - carga uniformemente distribuída no segmento de cabo, representativa das perdas imediatas ao longo do mesmo

$u_0$  - deslocamento axial de qualquer ponto do eixo do elemento de concreto

$u(x,y)$  - deslocamento, na direção  $x$ , de qualquer ponto do elemento

$v(x)$  - deslocamento transversal ao eixo do elemento

$w_k$  - pesos correspondentes aos pontos de integração

### 3. Letras gregas minúsculas

$\alpha$  - ângulo

$\beta$  - matriz de rotação

$\delta$  - deslocamento

$\bar{\delta}$  - coeficiente de variação

$\epsilon^a$  - deformação devida ao envelhecimento do concreto

$\epsilon^c$  - deformação devida à fluência do concreto

$\epsilon^m$  - deformação mecânica

$\epsilon_{max}$  - deformação máxima

$\epsilon^{nm}$  - deformação não-mecânica

$\epsilon_o$  - deformação correspondente à tensão máxima, no diagrama tensão-deformação do concreto

$\epsilon^T$  - deformação devida à mudança de temperatura

$\epsilon_r$  - deformação residual

$\epsilon^s$  - deformação devida à retração do concreto

$\epsilon_{xp}$  - deformação na faixa de concreto situada à distância  $y_p$

$\epsilon_x^L$  - deformação associada ao eixo local do cabo de protensão

$\epsilon(x,y)$  - componente, na direção  $x$ , do tensor de deformações finitas

$\epsilon_u$  - deformação última

$\mu$  - coeficiente de atrito entre o cabo de protensão e a bainha

$\sigma_x^L$  - tensão total na direção do eixo do cabo de protensão

$\bar{\sigma}_x^L$  - tensão no cabo, acumulada a partir do início do carregamento externo

$\phi$  - função de forma para  $u_o(x)$

$\psi$  - função de forma para  $v(x)$



## 1. INTRODUÇÃO

### 1.1 - Generalidades

As estruturas em concreto armado e em concreto protendido devem ser projetadas para atender condições de utilização e segurança. Para assegurá-las, é necessário fazer uma previsão acurada de deslocamentos, forças internas e deformações da estrutura, submetida às cargas de serviço que lhe são impostas. Tais cargas incluem tanto a história de carga ativa à qual a estrutura está submetida, quanto as cargas impostas pelas condições do ambiente no qual ela está inserida.

Para avaliar a segurança em relação à ruptura, a carga última deve ser estimada o melhor possível, sendo, às vezes desejável ainda, ter uma previsão do comportamento da estrutura durante uma série de carregamentos atingindo as fases elástica, inelástica e nas vizinhanças da ruptura.

A determinação analítica de deslocamentos, forças internas, tensões e deformações de estruturas em concreto armado ou protendido, durante toda sua história de carga, é complicada em função de vários fatores que incluem:

- a não-homogeneidade;
- a mudança contínua da topologia do sistema, devida à fissuração do concreto;
- as relações tensão-deformação não-lineares dos materiais componentes;
- o escorregamento das armaduras;
- a variação das propriedades do concreto com o tempo;
- as deformações devidas à fluência, retração, história de carga e mudanças de temperatura;
- as perdas de protensão;
- os efeitos da não-linearidade geométrica.

Devido às dificuldades mencionadas, no passado, para o projeto das estruturas em concreto, era necessário se basear principalmente em fórmulas empíricas, derivadas de numerosos experimentos. Entretanto, com o advento dos computadores digitais e os modernos e poderosos métodos de análise, tal como a técnica dos elementos finitos, nas duas décadas passadas foram feitos muitos esforços para desenvolver soluções analíticas que permitissem interpretar e prever os resultados experimentais com um fundamento mais consistente.

Inúmeros trabalhos têm sido publicados discutindo os métodos de solução para problemas estruturais não-lineares, e intensivas pesquisas neste sentido continuam sendo feitas, no âmbito nacional e internacional. Cita-se aqui os mais representativos, iniciando pelo trabalho de TILLERSON, STRICKLIN e HAISLER<sup>47</sup>, que compara, documenta e avalia as técnicas desenvolvidas para esse tipo de análise.

CONNOR, LOGCHER e CHAN<sup>18</sup> publicaram um estudo para análise não-linear geométrica de estruturas reticuladas, apresentando as equações necessárias para a solução do problema através de substituições sucessivas e do método de Newton-Raphson.

O comportamento elasto-plástico não-linear de pórticos planos foi analisado por RIDHA e LEE<sup>38</sup>. A análise apresentada no estudo incorpora as deformações finitas dos nós da estrutura e o fenômeno da plasticidade.

KROENKE, GUTZWILLER e LEE<sup>31</sup> apresentaram um trabalho onde se estuda um elemento de viga-coluna utilizado na análise de pórticos planos em concreto armado. Nessa formulação, foram incluídos os efeitos de grandes deslocamentos e utilizadas curvas momento-curvatura com características inelásticas.

Quanto ao método dos elementos finitos, a teoria e sua aplicação, para análise linear e não-linear de estruturas, é tratada, entre outras, nas obras de ZIENKIEWICZ<sup>52</sup> e DESAI e ABEL<sup>22</sup>. A primeira publicação sobre a aplicação da técnica dos elementos finitos, para estruturas em concreto armado, foi feita por SCORDELIS<sup>35</sup>, em 1967. Foram analisadas vigas simples, nas quais o concreto e o aço foram representados por ele



mentos triangulares de deformação constante. Executou-se uma análise elástica-linear com padrões de fissuração pré-definidos, para se determinar as tensões principais no concreto, tensões no aço e tensões de aderência.

NILSON<sup>36</sup> introduziu na análise as propriedades não-lineares dos materiais, usando um método incremental em termos de carga.

ZIENKIEWICZ et al<sup>53</sup> usaram uma aproximação de tensão inicial para estudos de tensões bidimensionais, incluindo tensão de fissuração e comportamento elasto-plástico em compressão.

BERGMAN e HOLLAND<sup>6</sup> desenvolveram uma análise de estruturas em concreto armado, utilizando o método dos elementos finitos, e apresentaram um esquema de vários modelos matemáticos, propostos com a finalidade de representar o comportamento interativo dos dois materiais.

No Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, várias dissertações foram dedicadas a vigas, pilares e pórticos em concreto armado. O trabalho de HOFFMANN<sup>28</sup> é voltado para a verificação e dimensionamento de pilares esbeltos em concreto armado, submetidos a flexo-compressão normal, levando em conta, de forma aproximada, os efeitos de segunda ordem. SPERANDIO<sup>44</sup> estendeu o estudo anterior ao caso de flexo-compressão oblíqua. SARAGOSA<sup>14</sup> ampliou e generalizou trabalhos prévios de BIGNON<sup>8</sup> sobre pórticos planos em concreto armado, onde inclusive se leva em consideração as rotações localizadas, produzidas por escorregamento das armaduras. CAMPOS FILHO<sup>12</sup> desenvolveu um estudo sobre análise não-linear de pilares em concreto armado, com seção transversal e distribuição de armadura arbitrárias, variáveis ao longo do eixo, e com condições genéricas de apoio. A fluência e a retração do concreto são consideradas.

Em relação ao concreto protendido, a partir do primeiro artigo, publicado por FREYSSINET, em 1941, uma extensa bibliografia está disponível sobre os materiais, processos construtivos, cálculo e verificação de estruturas protendidas. Entre os autores que mais contribuíram para o desenvolvimento

e difusão dessas técnicas, pode-se citar LEONHARDT<sup>32</sup>, em cujo livro apresenta uma relação das obras publicadas desde o início do concreto protendido, e GUYON<sup>26,27</sup>, cujos estudos clássicos foram vertidos para várias línguas, permitindo assim a difusão e intensificação desses procedimentos.

As primeiras normas sobre concreto protendido foram redigidas na Alemanha, em 1943, sob a direção de RÜSCH.

No Brasil, a primeira obra executada em concreto protendido foi a ponte do Galeão, no Rio de Janeiro, em 1948, pelo sistema Freyssinet, mas as publicações específicas apareceram posteriormente. Em 1957, CARDOZO<sup>13</sup> publicou artigos descrevendo os processos de protensão existentes até então e, no ano seguinte, FERRAZ<sup>23</sup> deu continuidade ao trabalho de CARDOZO, com um curso na forma de uma série de artigos. Vários outros autores se dedicaram ao assunto, surgindo vários trabalhos, destacando-se o livro de PFEIL<sup>37</sup>, de 1980, sendo o dimensionamento sempre baseado numa análise linear.

Para estruturas em concreto protendido, o método dos elementos finitos, até 1977, havia sido empregado somente para o estudo de vasos de contenção de reatores nucleares<sup>49,19</sup>. Nesse ano, KANG<sup>30</sup> apresentou um trabalho onde são analisados vigas e pilares em concreto armado e protendido, considerando, inclusive, as deformações devidas à fluência, retração, envelhecimento do concreto e as devidas à relaxação do aço.

## 1.2 - Objetivos e Metodologia

O presente estudo tem por objetivo desenvolver e implementar computacionalmente um procedimento numérico eficiente, para analisar estruturas em concreto armado ou protendido, submetidas a cargas de curta duração, considerando as não-linearidades física e geométrica.

A carga é aplicada de forma incremental e, para cada etapa, as equações de equilíbrio não-lineares são resolvidas pelo método dos elementos finitos, baseando-se a formulação em um modelo de deslocamentos.

A seção normal do elemento é dividida em faixas si-



métricas em relação ao plano de atuação das cargas exteriores, permitindo acompanhar variações da largura, das características mecânicas e das equações constitutivas de cada material. As ações de extremo de membro são avaliadas por uma dupla integração, sendo uma sobre as faixas, e outra ao longo do eixo do elemento.

A não-linearidade geométrica é introduzida no problema através das relações deformações-deslocamentos decorrentes de uma teoria na hipótese de pequenas deformações e moderadas rotações.

Quanto às estruturas protendidas, são analisadas aquelas com armaduras pós-tracionadas, com aderência, distinguindo-se dois estágios de carregamentos, isto é, durante e depois da transferência da protensão.

A formulação é aplicável a pórticos em concreto armado ou protendido, desde que a armadura não seja interrompida na interseção entre vigas e pilares, evitando assim a formação de fissuras localizadas devidas a fortes escorregamentos, cujo efeito não é considerado.

Apresenta-se uma série de exemplos numéricos, a fim de verificar a validade e aplicabilidade do método e do algoritmo estudados e compara-se os resultados com dados experimentais e respostas obtidas por outros pesquisadores.

## 2. PROPRIEDADES DOS MATERIAIS

### 2.1 - Generalidades

As estruturas em concreto armado e em concreto protendido são constituídas de concreto, aço para armadura ordinária ou aço para protensão e se caracterizam por um comportamento mecânico sumamente complexo. O aço pode ser considerado um material homogêneo com propriedades, em geral, bem definidas. Já o concreto é um material heterogêneo constituído de cimento, areia, brita e água. Devido a esta heterogeneidade, as suas propriedades dependem de muitos fatores e são de difícil definição. Entretanto, num sentido macroscópico, pode-se considerá-lo um material homogêneo, se suas propriedades são definidas com bases estatísticas. Essa hipótese é, em geral, aceita para as estruturas de engenharia civil e permite estudar o comportamento das peças como se fossem constituídas de dois materiais homogêneos. Tanto o aço quanto o concreto apresentam propriedades não lineares.

A relação tensão-deformação deste último, além de não-linear, é diferente para tração e compressão. A fissuração é um dos mais importantes fatores que contribui para a não-linearidade física do conjunto. Além disso, as propriedades do concreto são dependentes da sua idade e das condições do ambiente, tais como temperatura e umidade, assim como da história de carga.

O aço para armadura ordinária, geralmente é assumido ter uma relação tensão-deformação não-linear, porém simétrica para tração e compressão, e suas propriedades podem ser consideradas independentes do tempo e das condições ambientes, para a maioria das aplicações em engenharia civil, principalmente quando a velocidade de deformação não é muito elevada.

O aço para protensão é usado somente para absorver esforços de tração. Ele tem alta resistência, seu diagrama

tensão-deformação é também não-linear, mas a forma deste é diferente daquela do aço para armadura ordinária. As armaduras protendidas, normalmente, trabalham em alto regime de tensão, verificando-se conseqüentemente uma perda gradativa da mesma no tempo, chamada relaxação.

Para o presente estudo, assume-se que existe uma perfeita aderência entre o concreto e o aço para armadura ordinária, isto é, o aço experimenta as mesmas deformações que o concreto adjacente, o que implica na continuidade do campo de deslocamentos da peça em concreto armado. Tal hipótese é também válida para as estruturas em concreto protendido com aderência, depois da transferência da protensão, onde existe uma ligação perfeita entre o aço e o concreto.

Discute-se, a seguir, importantes propriedades dos três materiais citados e o modelo matemático que as representa.

## 2.2 - Concreto

### 2.2.1 - Deformação

A deformação no concreto segue leis sumamente complexas, já que ela resulta de fenômenos de diferentes tipos, cada um obedecendo regras particulares. A complexidade das leis que regem a deformação no concreto se deve à heterogeneidade da sua estrutura.

A hipótese de que a deformação no concreto pode ser considerada composta de deformações causadas por diferentes fenômenos, foi verificada experimentalmente por DAVIS<sup>20,21,48</sup> e GLANVILLE<sup>25</sup>. KANG<sup>30</sup> assume que a deformação uniaxial total,  $\epsilon(t)$ , a um tempo qualquer  $t$ , é composta de

$$\epsilon(t) = \epsilon^m(t) + \epsilon^{nm}(t); \quad (2.1)$$

$$\epsilon^{nm}(t) = \epsilon^c(t) + \epsilon^s(t) + \epsilon^a(t) + \epsilon^T(t).$$

$\epsilon^m(t)$  é a deformação mecânica, ou deformação instantânea, cau



sada pelas cargas de curta duração;

$\epsilon^{nm}(t)$  é a deformação não mecânica e consiste de

- $\epsilon^c(t)$ , deformação devida à fluência (**creep**);
- $\epsilon^s(t)$ , deformação devida à retração (**shrinkage**);
- $\epsilon^a(t)$ , deformação devida ao envelhecimento (**aging**);
- $\epsilon^T(t)$ , deformação devida à mudança de temperatura.

As deformações  $\epsilon^m(t)$ ,  $\epsilon^c(t)$ ,  $\epsilon^a(t)$  são produzidas por tensões, isto é, ocorrem sob aplicação de carregamento externo.

$\epsilon^s(t)$  e  $\epsilon^T(t)$  não são produzidas por tensões. Ocorrem independentemente da estrutura estar carregada ou não.

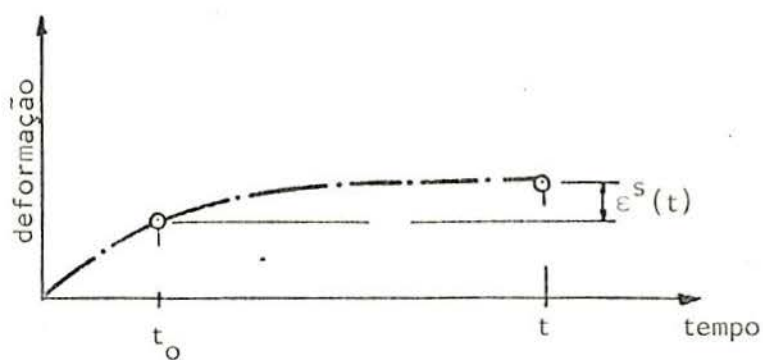
A relação entre cada uma dessas deformações e o tempo  $t$  está representada na figura 2.1<sup>30</sup>, exceto para a deformação devida à mudança de temperatura. A figura 2.1.a mostra a retração de uma peça de concreto descarregada. A retração do concreto é definida como a mudança de volume da peça, que ocorre de forma independente das tensões impostas e de mudanças de temperatura.

Na figura 2.1.b, vê-se a história de deformação de uma peça de concreto, em equilíbrio higrométrico com o meio ambiente, ou seja, o ar e a peça têm o mesmo teor de umidade. Tal peça foi submetida a uma compressão axial constante. O acréscimo  $\epsilon^c(t)$  de deformação no tempo  $t$ , com relação à deformação no tempo  $t_0$ , suposto ocorrido sob tensão constante, é definido por fluência.

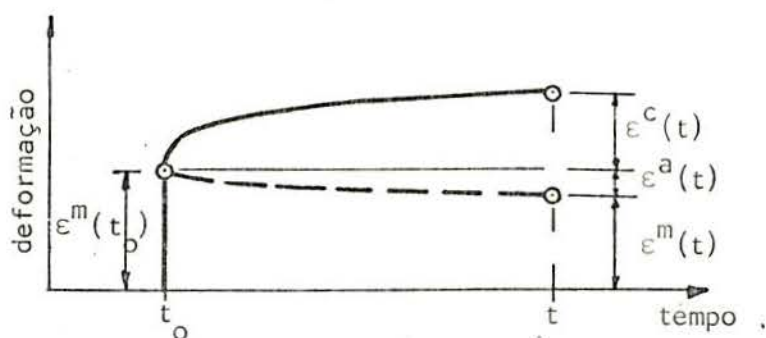
Se, numa peça semelhante, a mesma carga do ensaio anterior é aplicada no tempo  $t$ , a deformação mecânica  $\epsilon^m(t)$  é menor do que aquela ocorrida no tempo  $t_0$ , devido ao aumento da resistência e do módulo de deformação com o tempo. A diferença entre  $\epsilon^m(t_0)$  e  $\epsilon^m(t)$  é chamada deformação por envelhecimento,  $\epsilon^a(t)$ .

A figura 2.1.c mostra a história de deformação de uma peça seca, carregada, na qual todas as componentes da deformação total estão representadas, exceto aquela devida à mudança de temperatura.



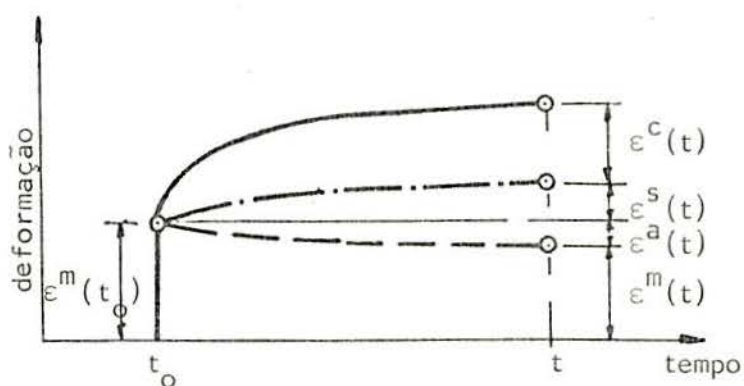


- a -



— carregamento aplicado no tempo  $t_0$   
 - - - carregamento instantâneo no tempo  $t$

- b -



— carregamento aplicado no tempo  $t_0$   
 - - - carregamento instantâneo no tempo  $t$   
 - . - limite entre  $\epsilon^c$  e  $\epsilon^s$  para carregamento no tempo  $t_0$

- c -

FIGURA 2.1. a) Deformação de uma peça descarregada;  
 b) deformação de uma peça em equilíbrio higrométrico com o meio ambiente;  
 c) deformação de uma peça seca carregada.

Este trabalho se limita à análise de pórticos planos em concreto armado e em concreto protendido, constituídos de peças de seções simétricas, submetidas a cargas de curta duração, estando presente somente deformações mecânicas.

### 2.2.2 - Deformação de curta duração. Relação tensão-deformação

Entre os elementos importantes para a determinação da resposta de uma estrutura em concreto armado ou protendido, estão a relação tensão-deformação dos seus materiais, a natureza da carga e a duração do carregamento. A relação  $\sigma$ - $\epsilon$  para o concreto pode ser obtida através de testes em corpos de prova, geralmente normalizados de acordo com o tipo de sollicitação que se investiga, ou ainda através de medições feitas na zona comprimida de peças submetidas a ensaios de flexão.

A figura 2.2 mostra duas curvas  $\sigma$ - $\epsilon$  obtidas em teste de velocidade de deformação constante, em um corpo de prova cilíndrico, axialmente comprimido, para dois concretos diferentes<sup>11</sup>. Nota-se uma evidente correlação entre o valor da resistência e a forma da curva, ou seja, o concreto de resistência mais baixa é menos frágil, sua ruptura ocorrendo para um valor da deformação maior que para o concreto de resistência mais alta.

As curvas consistem em um trecho inicial, relativamente linear, seguido por um trecho curvo, de declividade decrescente, que alcança um ponto máximo de coordenadas  $(\epsilon_0, f_c)$  com declividade zero, prolongando-se num ramo descendente que termina quando é alcançada a deformação máxima  $\epsilon_{max}$ . Para a maioria dos concretos usuais,  $\epsilon_0$  vale aproximadamente<sup>4</sup>  $0,002^{30}$ , valor adotado pela Norma Brasileira NB-1/78. A parte reta inicial chega até 30% da tensão máxima, aproximadamente<sup>30</sup>. A resistência à compressão do concreto,  $f_c$ , é definida como a máxima tensão de compressão obtida em um ensaio num corpo de prova cilíndrico, cúbico ou prismático, dependendo das normas técnicas de cada país. Para a mesma dosagem do concreto, verifica-se uma considerável flutuação de resultados, os quais seguem aproximadamente a curva normal de distribuição

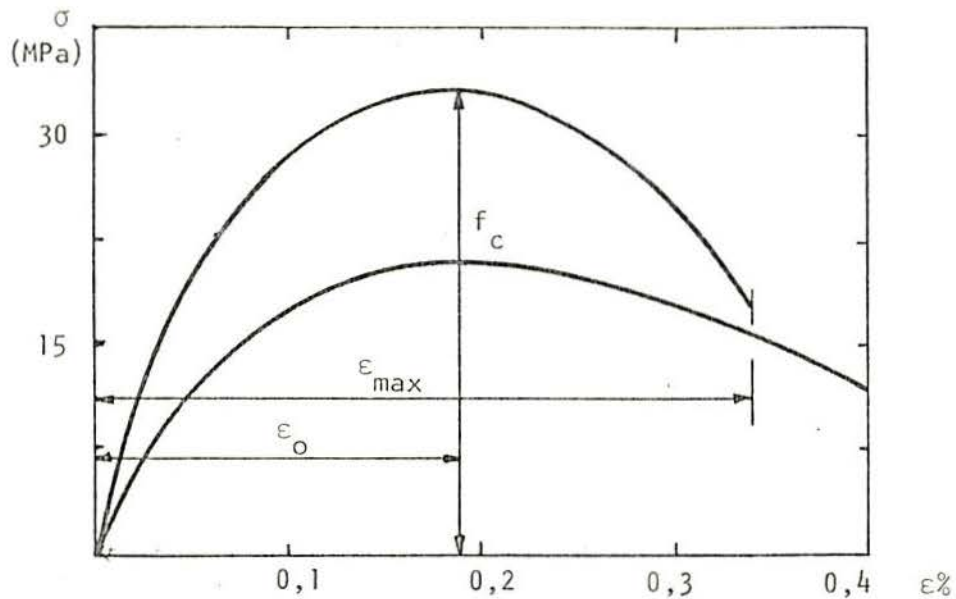


FIGURA 2.2 - Relações  $\sigma$ - $\epsilon$  típicas do concreto.

da teoria de probabilidades. Assim, é possível abordar a conceituação da resistência do concreto estatisticamente.

Denomina-se resistência característica do concreto,  $f_{ck}$ , um valor mínimo estatístico, acima do qual ficam situados 95% dos valores da resistência  $f_c$  obtidos experimentalmente. Com base na curva normal de distribuição, e sendo  $f_{cm}$  a média dos resultados, pode-se escrever<sup>37</sup>

$$f_{ck} = f_{cm} (1 - 1,645 \bar{\delta}) ; \quad (2.2)$$

onde  $\bar{\delta}$  é o coeficiente de variação ou dispersão dos valores e é dado por

$$\bar{\delta} = \frac{s}{f_{cm}} = \frac{1}{f_{cm}} \sqrt{\frac{\sum (f_c - f_{cm})^2}{n - 1}} . \quad (2.3)$$

O número de corpos de prova depende do volume de concreto da obra e é especificado no item 15 da NB-1/78.

A resistência à compressão do concreto é influenciada por vários fatores, entre eles a relação água-cimento, a granulometria dos agregados e a idade do mesmo na época do ensaio. Na figura 2.3 está representada a curva resistência-tempo, na qual pode-se notar um considerável aumento na resistência.

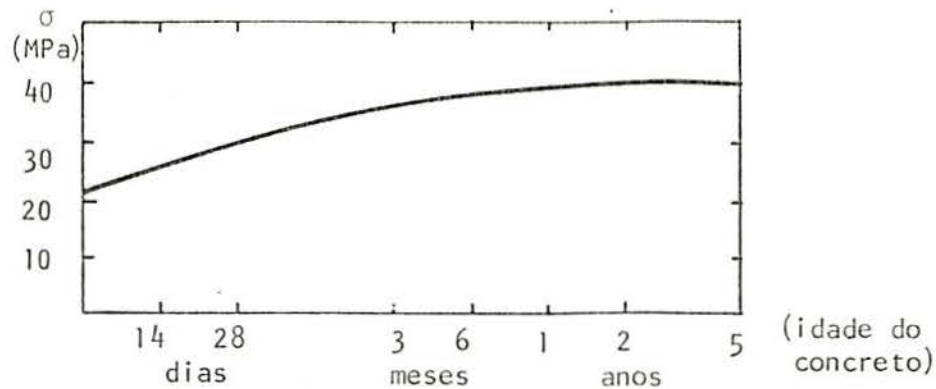


FIGURA 2.3 - Efeito da idade do concreto na resistência à compressão.

Essa variação ao longo do tempo deve ser levada em conta na análise das estruturas de concreto submetidas a carregamentos acidentais ao longo do tempo, já que a relação  $\sigma$ - $\epsilon$  depende da resistência à compressão.

A forma da curva  $\sigma$ - $\epsilon$  é também afetada pela velocidade de deformação. A figura 2.4 mostra tal influência<sup>40</sup>.

A declividade da tangente à curva tensão-deformação na origem, é chamada módulo de deformação longitudinal do concreto,  $E_c$ . Ele é função da resistência à compressão. O valor dado pela Norma Brasileira NB-1/78<sup>4</sup>, no item 8.25, para o cálculo das deformações da estrutura é

$$E_c = 6600 \sqrt{f_{cj}} \quad (\text{MPa}) ; \quad (2.4)$$

sendo

$$f_{cj} = f_{ck} + 3,5 \text{ MPa} . \quad (2.5)$$



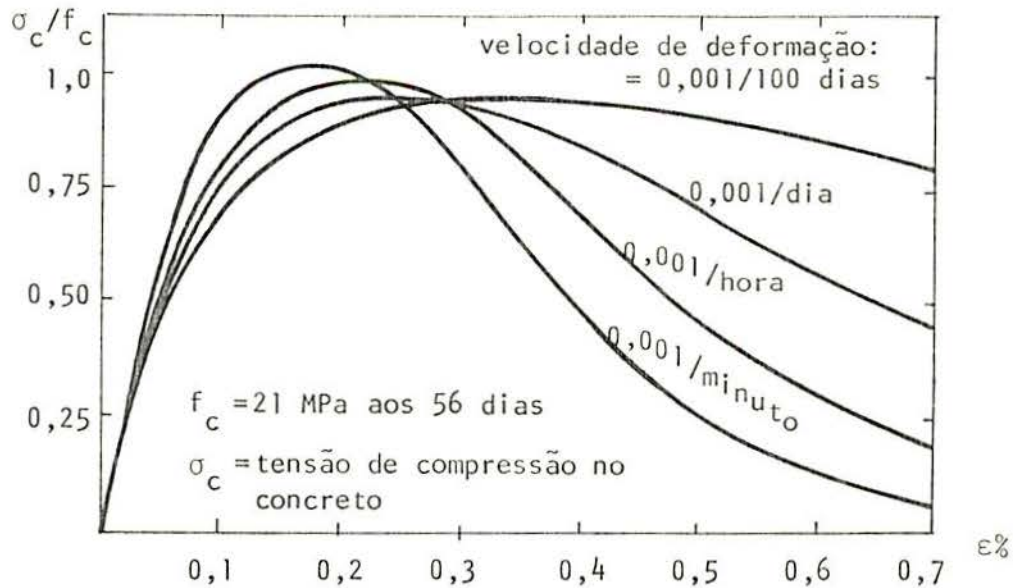


FIGURA 2.4 - Influência da velocidade de aplicação da deformação sobre a curva  $\sigma$ - $\epsilon$ .

O CEB<sup>16</sup> no Code Modèle, estabelece, para cálculo de deformações de curta duração

$$E_c = 9,5 (f_{ck} + 8)^{1/3} \quad (2.6)$$

com  $E_c$  em GPa,  $f_{ck}$  em MPa, determinada em cilindros, aos 28 dias.

O Código Britânico de Uso Estrutural do Concreto CP110:1972, dá, sob forma de tabela, o módulo tangente em GPa, para diversos valores de resistências cúbicas, determinadas em corpos de prova cúbicos de 15 cm de aresta, em MPa. Esses valores estão relacionados pela expressão<sup>34</sup>

$$E_c = 9,1 f_c^{0,33} \quad (2.7)$$

Para o ACI<sup>1</sup>  $E_c$  vale

$$E_c = 4,73 \sqrt{f_c} \quad ; \quad (2.8)$$

com  $f_c$  em MPa, determinada em corpos de prova cilíndricos, e  $E_c$  em GPa.

SOZEN<sup>43</sup> sugere

$$E_c = \frac{2,067 \times 10^5}{6 + \frac{68,9}{f_{ck}}}; \quad (2.9)$$

sendo  $f_{ck}$  e  $E_c$  em MPa.

Todas as expressões são relativas a concretos com peso específico da ordem de  $23 \text{ KN/m}^3$ . Cabe aqui salientar que, para uma mesma resistência, os valores de  $E_c$  dados pelas diversas fórmulas são bastante diferentes.

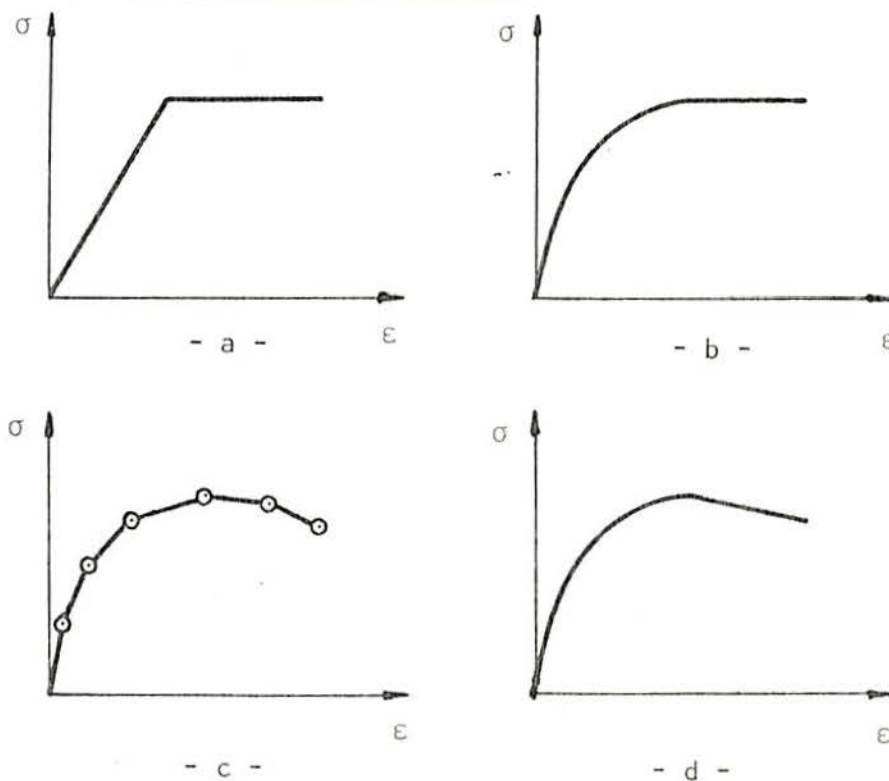


FIGURA 2.5 - Idealizações de relações tensão-deformação.

Para uma análise teórica de estruturas, é necessário estabelecer uma formulação matemática para a curva  $\sigma$ - $\epsilon$ . Algumas das idealizações matemáticas utilizadas mais frequentemente são mostradas na figura 2.5<sup>30</sup>.

A figura 2.5.a mostra um modelo bilinear que é o mais simples dos modelos não-lineares. Na figura 2.5.b está um modelo constituído de uma parábola e uma reta paralela ao

eixo das abscissas.

A figura 2.5.c apresenta um modelo multilinear, no qual a curva é aproximada por uma série de segmentos retos. Embora este modelo seja muito versátil, sendo capaz de representar uma grande variedade de curvas  $\sigma$ - $\epsilon$ , o seu uso é restrito a casos especiais onde os dados experimentais para um dado concreto sejam conhecidos<sup>30</sup>.

A figura 2.5.d mostra o modelo sugerido por HOGNESTAD<sup>29</sup>, utilizado por KROENKE<sup>31</sup>, WILHELM<sup>51</sup>, ARONI<sup>2</sup> e KANG<sup>30</sup>. Neste trabalho adotou-se a sua formulação matemática, com pequenas modificações no aspecto final da curva.

O ramo ascendente da curva segue a equação

$$\sigma = f'_c \frac{\epsilon^m}{\epsilon_0} \left( 2 - \frac{\epsilon^m}{\epsilon_0} \right) ; \quad (2.10)$$

onde

-  $f'_c$  é a tensão máxima, dada como uma fração da resistência à compressão  $f_c$

$$f'_c = r_c f_c . \quad (2.11)$$

RÜSCH e HOGNESTAD sugerem  $r_c = 0,85$  que é o valor adotado pela NB-1/78. Outros autores usam  $r_c = 1$ . Neste trabalho,  $r_c$  é um parâmetro de entrada, para que possa ser estudado para cada problema;

-  $\epsilon^m$  é a deformação mecânica;

-  $\epsilon_0$  é a deformação correspondente a  $f'_c$  e é dada

por

$$\epsilon_0 = \frac{2 f'_c}{E_c} ; \quad (2.12)$$

na qual  $E_c$  é o módulo tangente inicial.

Diferenciando a equação (2.10), obtêm-se o módulo tangente  $E_t$ , sendo

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^m} = E_c \left(1 - \frac{\varepsilon^m}{\varepsilon_o}\right) \quad (2.13)$$

Pelas equações (2.10), (2.12) e (2.13) acima, nota-se que o ramo ascendente da curva é uma parábola do segundo grau e que o módulo tangente varia linearmente desde a origem, onde ele tem o seu valor máximo, até reduzir-se a zero no ponto máximo da curva. A partir deste ponto, o diagrama é um segmento de reta que termina na deformação última  $\varepsilon_u$ . KANG considera um decréscimo na resistência neste trecho. No presente trabalho, não se leva em conta tal decréscimo e o módulo de deformação para este tramo vale zero.

A NB-1/78 recomenda, para dimensionamento, o diagrama tensão-deformação parábola-retângulo da figura 2.6.

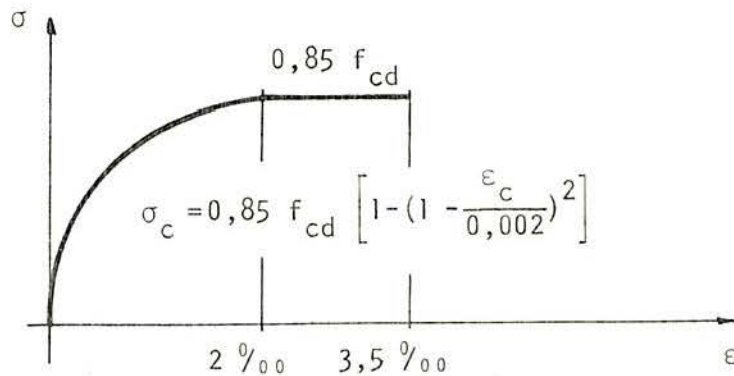


FIGURA 2.6 - Diagrama  $\sigma$ - $\varepsilon$  proposto pela NB-1/78.

O CEB<sup>16</sup> recomenda, para dimensionamento o diagrama da figura 2.7.a e, para cálculo de deformações, o da figura 2.7.b.

A resistência à tração do concreto vale aproximadamente 10% da resistência à compressão<sup>34</sup>. Ela é usualmente determinada em ensaios de tração axial, compressão diametral e testes de flexão de vigas de concreto simples.

No diagrama  $\sigma$ - $\varepsilon$ , para a tração, prolonga-se o tramo inicial da compressão, linear e de declividade  $E_c$ , até o ponto  $(\varepsilon_t, f'_t)$ , sendo  $f'_t$  a tensão máxima de tração admitida



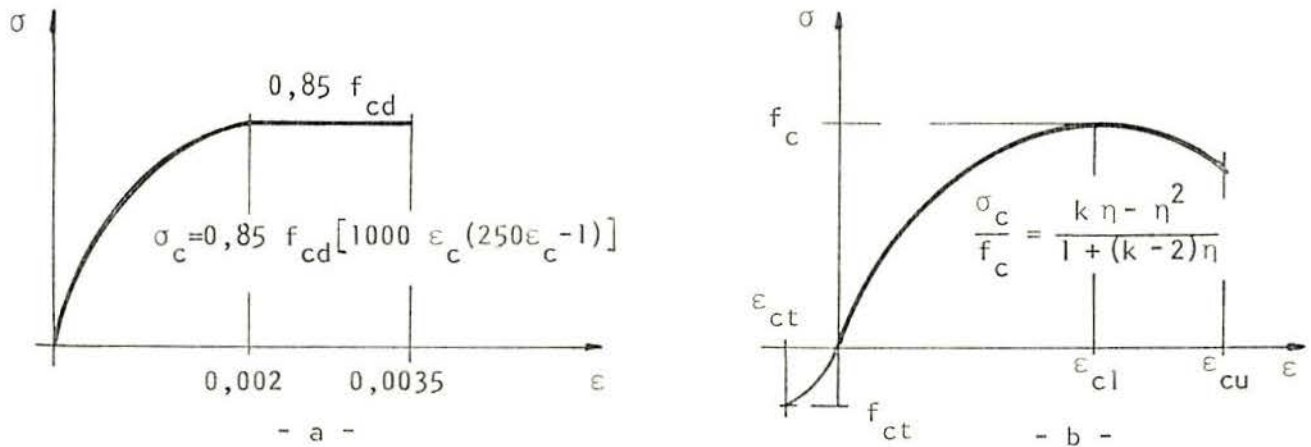


FIGURA 2.7 - Diagramas  $\sigma$ - $\epsilon$  recomendados pelo CEB.

pelo concreto. Dessa forma, a relação tensão-deformação para o concreto tracionado pode ser escrita como segue

$$\sigma = E_c \epsilon^m ; \quad (2.14)$$

$$E_t = E_c .$$

Para ficar completo, o diagrama deve admitir descargas e posteriores recargas. O modelo adotado é simples, sendo a inclinação da linha de descarga e recarga, definida pelo módulo de deformação inicial  $E_c$ .

O diagrama tensão-deformação adotado está completo na figura 2.8. Assume-se que o concreto fissa quando a tensão de tração excede o valor  $f'_t$ . O esmagamento ocorre quando a deformação mecânica de compressão, ultrapassa a deformação última  $\epsilon_u$ . As fissuras podem fechar na compressão e reabrir na tração, sem nenhuma resistência.

Em literatura recente, BLAKELEY e PARK<sup>9</sup> apresentaram um modelo matemático mais refinado para a relação  $\sigma$ - $\epsilon$ , mostrado na figura 2.9.

O ramo ascendente, uma parábola do segundo grau, tem como equação aquela mesma sugerida por HOGNESTAD e adotada neste trabalho. A diferença está no ramo descendente, na existência do tramo BC e no esquema histerético-degradativo que pode desenvolver-se com solicitações de compressão, uma vez atingidas deformações superiores a  $\epsilon_0$ .

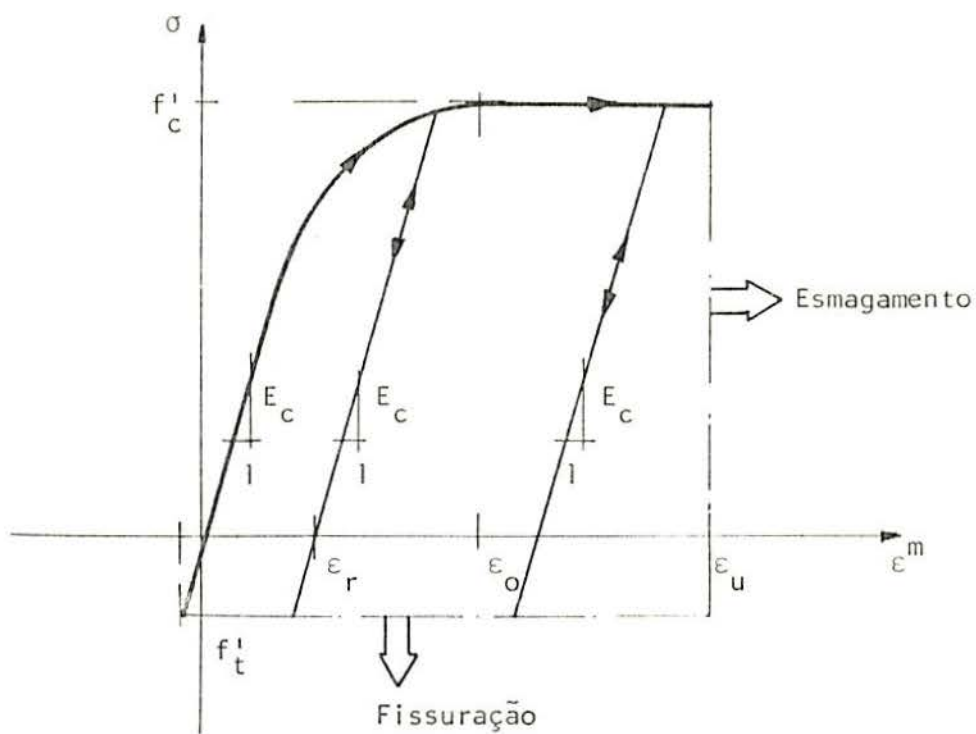


FIGURA 2.8 - Diagrama  $\sigma$ - $\epsilon$  adotado para o presente estudo.

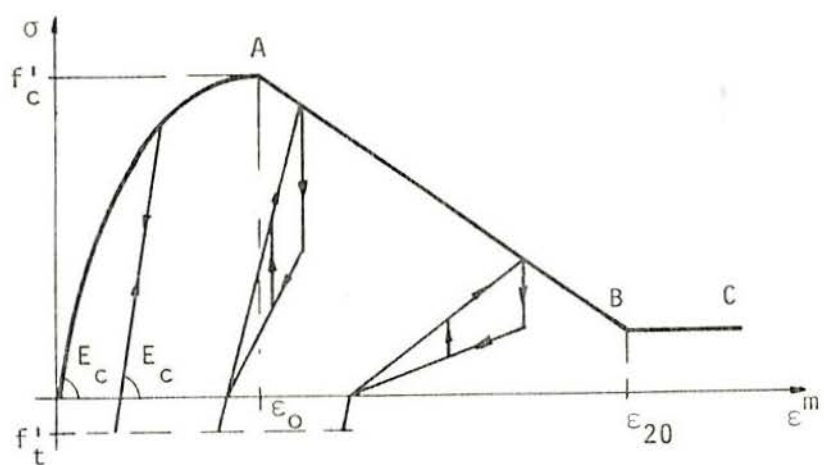


FIGURA 2.9 - Diagrama  $\sigma$ - $\epsilon$  proposto por BLAKELEY e PARK.

### 2.2.3 - Deformação de longa duração

Entre os materiais usados nas estruturas correntes, o concreto é o único que tem suas deformações e propriedades dependentes do tempo, sob condições de serviço<sup>30</sup>. As deformações que são funções do tempo são a retração e a fluência.

A retração se manifesta na forma de uma diminuição de volume devida à evaporação da água não fixada quimicamente durante o endurecimento. Ela acontece independentemente do estado de tensões existentes, dependendo somente das tensões capilares, da idade do concreto, da temperatura e da umidade relativa do ambiente. A retração é parcialmente reversível através da expansão que ocorre em peças situadas dentro d'água ou em locais de alta umidade relativa do ar<sup>32</sup>. Sabe-se ainda que a retração, geralmente, aumenta com a relação água-cimento e diminui com o volume dos agregados e o tamanho da peça.

A fluência é definida como um aumento nas deformações ao longo do tempo, sob a ação de cargas ou tensões permanentes. O desenvolvimento da fluência está ilustrado na figura 2.10<sup>11</sup>.

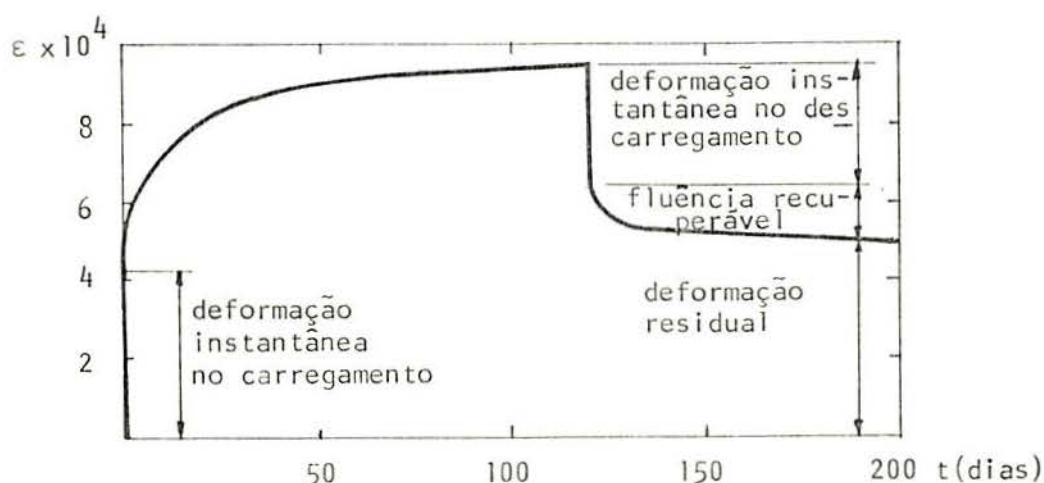


FIGURA 2.10 - Fluência.



A curva representa a deformação ao longo do tempo, de uma peça de concreto testada em um ambiente com umidade relativa de 95%, submetida a uma tensão de compressão de 14,8 MPa e depois descarregada. O tempo  $t$  é contado a partir da aplicação da carga.

Após o carregamento, a deformação aumenta com o tempo, devido à fluência, numa razão decrescente. Passados 120 dias, a carga mantida constante, a deformação vale mais de duas vezes aquela ocorrida no carregamento. Quando a carga é removida, a deformação diminui imediatamente - é a deformação instantânea para esta idade, sendo seu valor menor que aquele da deformação instantânea inicial. Este fato é seguido de um decréscimo gradual na deformação, chamado de fluência recuperável ou reversível, ou ainda retardada. Como se vê no gráfico, a sua forma é semelhante à da fluência.

A fluência do concreto é influenciada por vários fatores, sendo os mais importantes a idade do concreto no carregamento, a intensidade das tensões, o volume e granulometria dos agregados, a resistência à compressão, o tamanho da peça, a umidade e a temperatura.

Para o estudo das deformações diferidas, deve ainda ser levado em conta o envelhecimento do concreto, pois dele decorre um acréscimo, com o tempo, na resistência e no módulo de deformação longitudinal do material.

### 2.3 - Aços para Armadura Ordinária

Para estruturas de concreto armado, os aços empregados são, em geral, denominados pelo valor característico do limite de escoamento,  $f_{yk}$ , que varia entre 250 e 600 MPa. Alguns tipos de aço têm patamar de escoamento definido e a tensão correspondente a este patamar chama-se limite de escoamento real. Outros aços não têm patamar de escoamento, definindo-se então uma tensão convencional de escoamento,  $f_{s0,2}$ , igual à tensão necessária para se obter uma deformação residual de 0,2%. Os aços empregados no concreto armado podem ser utilizados também nas peças protendidas, onde são chamados de armadura suplementar ou armadura frouxa. Ela desempe-

nha várias funções importantes, como por exemplo, reduzir a fissuração provocada por retração do concreto; aumentar o momento de fissuração da peça; aumentar o momento fletor de ruptura da seção; absorver tensões de tração e, no caso de ocorrerem momentos superiores ao de fissuração, a armadura suplementar auxilia os cabos no controle da abertura das fissuras<sup>37</sup>.

As propriedades dos aços para armadura ordinária, em geral, não dependem das condições ambientes ou do tempo. O seu diagrama tensão-deformação simplificado depende de valores que são facilmente obtidos em testes de laboratório.

Para o presente estudo, empregou-se o modelo bilinear elasto-plástico usado por KANG<sup>30</sup>, que é simétrico em relação à origem, como se vê na figura 2.11.

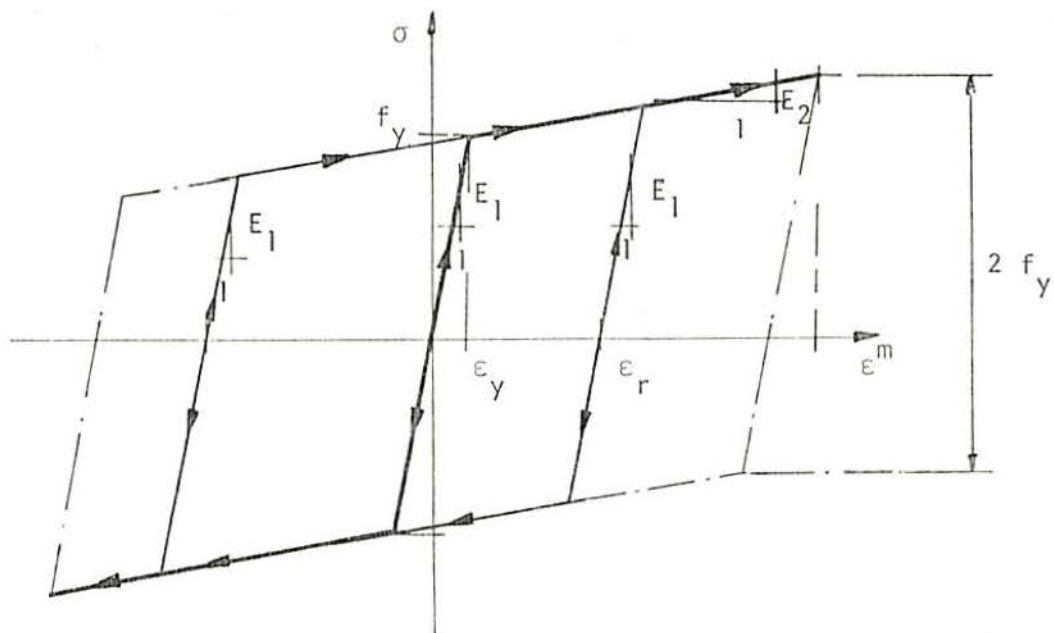


FIGURA 2.11 - Diagrama  $\sigma$ - $\epsilon$  dos aços para armadura ordinária.

Para a linha de descarga e recarga, considera-se a mesma inclinação do tramo inicial, ou seja, o módulo de deformação inicial. Identifica-se quatro fases diferentes, cujas equações são:

a) Estádio I. Tensões iniciais de tração ou compressão.

$$\sigma = E_1 \varepsilon^m ; \quad (2.15)$$

onde  $E_1$  é o módulo de deformação inicial.

b) Estádio II. Após o escoamento.

$$\sigma = E_2 \varepsilon^m \pm (f_y - E_2 \varepsilon_y) ; \quad (2.16)$$

onde  $E_2$  é o módulo de deformação do estágio II,  $f_y$  é a tensão de escoamento e  $\varepsilon_y$  a deformação correspondente a  $f_y$ .

c) Descarga ou recarga.

$$\sigma = E_1 (\varepsilon^m - \varepsilon_r) ; \quad (2.17)$$

sendo  $\varepsilon_r$ , a deformação residual, conforme a figura 2.11.

d) Ruptura.

Assume-se que ela ocorre quando a deformação mecânica  $\varepsilon^m$  excede a deformação última  $\varepsilon_u$ .

O comportamento histerético das peças em concreto armado e protendido, sob solicitações de flexão predominante, é principalmente influenciado pelo comportamento do aço e, em medida muito menor pelo modelo do concreto. Uma aproximação melhor que a oferecida pelo simples modelo bilinear anterior é aquela correspondente a modelos mais refinados como por exemplo o de AGRAWAL, mostrado na figura 2.12.

Esse modelo, combinado com o de BLAKELEY e PARK para o concreto, foi testado com êxito por SCHIRMBECK e BIGNON<sup>42</sup> obtendo-se acuradas aproximações com resultados experimentais provenientes de diversas bibliografias.



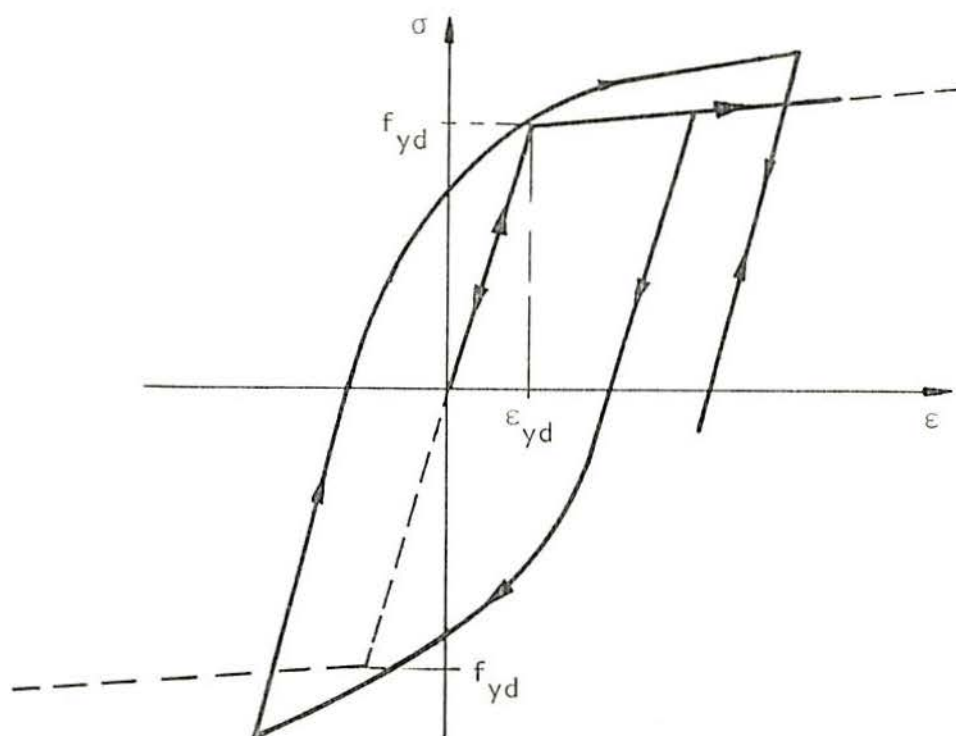


FIGURA 2.12 - Diagrama  $\sigma$ - $\epsilon$  para o aço, proposto por AGRAWAL.

#### 2.4 - Aços para Protensão

Os aços para protensão distinguem-se daqueles para armadura ordinária por apresentarem o limite de escoamento e a resistência à tração consideravelmente mais elevados. Se caracterizam pelas altas resistências e pela ausência de um patamar de escoamento.

Os aços para protensão podem ser agrupados nas seguintes categorias<sup>37</sup>:

a) Fios trefilados de aço carbono. A trefilação produz encruamento do aço, aumentando sua resistência.

b) Cordoalhas. São formadas por fios enrolados em forma de hélice, sendo as mais comuns constituídas por três ou sete fios.

c) Barras de aço-liga de alta resistência, laminadas a quente.

Os aços para protensão se classificam ainda quanto

ao tratamento que recebem. No Brasil, a Companhia Siderúrgica Belgo-Mineira produz fios e cordoalhas com aços em duas modalidades de tratamento. São eles:

a) Aços aliviados ou de relaxação normal (RN). São retificados por um tratamento térmico que alivia tensões internas de trefilação.

b) Aços estabilizados ou de baixa relaxação (RB). São aços trefilados que recebem um tratamento termo-mecânico, que consiste num aquecimento a  $400^{\circ}\text{C}$  e estiramento à deformação unitária de 1%, o qual melhora as características elásticas e reduz as perdas de tensão por relaxação do aço.

Os cabos de protensão são compostos de fios ou cordoalhas, justapostos. A instalação do cabo consiste na disposição da armadura de protensão na bainha, que deverá ser feita de maneira a possibilitar uma boa capacidade de deslizamento e espaço suficiente entre a armadura e a mesma, de maneira a permitir o fluxo da nata de injeção<sup>32</sup>. Os fios ou cordoalhas podem ser dispostos de diversas maneiras, variando, em geral, com o processo de protensão.

No caso de feixes de fios lisos, eles podem ser mantidos em suas posições por meio de espaçadores, porém esta prática está em desuso devido ao seu alto custo. Os fios lisos podem também ser dispostos circunferencialmente em torno de uma espiral interna que tem o passo de hélice reduzido na região de mudança de direção. Isto torna a espiral mais forte, para resistir às forças devidas às mudanças de direção.

Quando são usados fios de grandes diâmetros - 12 a 16 mm - o número de fios é pequeno e os fios são dispostos uns juntos dos outros<sup>32</sup>.

No caso de feixes de fios nervurados ou cordoalhas, não é necessário adotar um arranjo especial, porque devido às nervuras e aos espaços internos das cordoalhas, sempre há espaços livres que permitem a penetração da nata de injeção<sup>32</sup>.

As barras são usadas, em geral, isoladas, ou seja, uma por bainha. Neste caso, a escolha correta depende apenas do diâmetro interno da bainha comparado com o da barra.



As bainhas são tubos onde é colocada a armadura de protensão para que ela deslize com o mínimo de atrito. Elas são geralmente feitas com chapa fina de aço, em máquinas especiais que produzem um tubo flexível de parede corrugada. A corrugação é conveniente para aumentar a resistência da bainha, bem como sua aderência ao concreto. A bainha deve ter uma certa flexibilidade, para permitir as curvas dos cabos<sup>37</sup>.

O diagrama tensão-deformação dos aços para protensão apresenta, no início do carregamento, um trecho linear. Só as cordoalhas e os cabos constituem, até certo ponto, uma exceção, pois logo no início do carregamento ocorrem deformações plásticas devidas à acomodação dos fios<sup>39</sup>.

É adotado aqui o diagrama tensão-deformação tetralinear mostrado na figura 2.13<sup>8</sup> adaptado a partir dos valores do Catálogo de Fios e Cordoalhas para Concreto Protendido, da CSBM<sup>17</sup>.

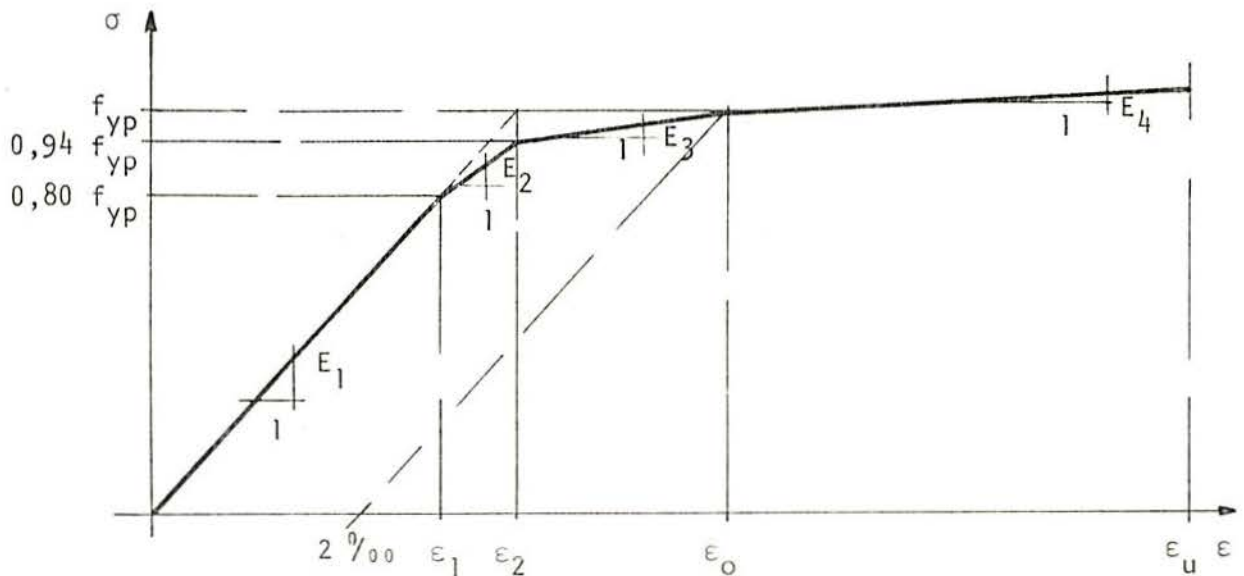


FIGURA 2.13 - Diagrama  $\sigma$ - $\epsilon$  para os aços de protensão.

As equações para as quatro retas do diagrama são

a) Quando  $\epsilon_p < \epsilon_1$

$$\sigma = E_1 \epsilon_p .$$

Como

$$\epsilon_2 = \frac{f_{yp}}{E_1}, \quad E_1 = \frac{f_{yp}}{\epsilon_2}; \quad (2.18)$$

fica

$$\sigma = f_{yp} \frac{\epsilon_p}{\epsilon_2}.$$

b) Quando  $\epsilon_1 < \epsilon_p < \epsilon_2$

$$\sigma = 0,8 f_{yp} + (\epsilon_p - \epsilon_1) E_2.$$

Mas

$$\epsilon_1 = 0,8 \epsilon_2;$$

$$E_2 = \frac{(0,94 - 0,8) f_{yp}}{\epsilon_2 - \epsilon_1} = \frac{0,14 f_{yp}}{\epsilon_2 - 0,8 \epsilon_2} = \frac{0,7 f_{yp}}{\epsilon_2}; \quad (2.19)$$

$$\sigma = 0,8 f_{yp} + (\epsilon_p - 0,8 \epsilon_2) \frac{0,7 f_{yp}}{\epsilon_2};$$

$$\sigma = 0,8 f_{yp} + 0,7 f_{yp} \frac{\epsilon_p}{\epsilon_2} - 0,56 f_{yp};$$

e finalmente

$$\sigma = f_{yp} \left( 0,24 + 0,7 \frac{\epsilon_p}{\epsilon_2} \right).$$

c) Quando  $\epsilon_2 < \epsilon_p < \epsilon_o$

$$\sigma = 0,94 f_{yp} + (\epsilon_p - \epsilon_2) E_3;$$

mas

$$\epsilon_o = \epsilon_2 + 0,002; \quad (2.20)$$

$$E_3 = \frac{(1 - 0,94) f_{yp}}{\epsilon_o - \epsilon_2} = \frac{0,06 f_{yp}}{\epsilon_2 + 0,002 - \epsilon_2} = 30 f_{yp};$$

resultando

$$\sigma = f_{yp} [0,94 + 30 (\epsilon_p - \epsilon_2)] .$$

d) Quando  $\epsilon_p > \epsilon_0$

$$\sigma = f_{yp} + (\epsilon_p - \epsilon_0) E_4 . \quad (2.21)$$

Já que os aços para protensão não apresentam patamar de escoamento definido, toma-se como limite de escoamento convencional à tração,  $f_{yp}$ , a tensão à qual corresponde uma deformação unitária residual de 0,2%.

Um fator importante nas propriedades dos aços de alta resistência, é a relaxação da tensão com o tempo, que pode ser definida como um decréscimo na tensão, com o tempo, sob deformação constante. A P-NB-116<sup>3</sup> de 1970 recomenda que a perda de tensão devida à relaxação seja de 60 MPa. O CEB<sup>16</sup> adota valores das perdas por relaxação expressos em função da tensão inicial e vários pesquisadores desenvolveram fórmulas baseadas em suas experiências.

### 3. ALGORITMO DE SOLUÇÃO

#### 3.1 - Considerações Gerais

Utiliza-se, neste estudo, a técnica dos elementos finitos para a análise estrutural de p $\ddot{o}$ r $\ddot{t}$ icos em concreto armado ou em concreto protendido. A estrutura  $\acute{e}$  idealizada como um conjunto de elementos conectados por n $\acute{o}$ s e com condi $\tilde{c}$ o $\tilde{e}$ s de contorno definidas. Assume-se que as cargas concentradas externas s $\ddot{a}$ o sempre aplicadas nos n $\acute{o}$ s. As cargas distribu $\ddot{i}$ das nos elementos s $\ddot{a}$ o convertidas em a $\tilde{c}$ o $\tilde{e}$ s nodais equivalentes.

Dadas a geometria, a carga aplicada, as condi $\tilde{c}$ o $\tilde{e}$ s de contorno e a rela $\tilde{c}$ o $\tilde{e}$ m tens $\ddot{a}$ o-deforma $\tilde{c}$ o $\tilde{e}$ m dos materiais, podem ser encontrados para a estrutura deslocamentos nodais, rea $\tilde{c}$ o $\tilde{e}$ s de apoio, for $\tilde{c}$ as internas nos elementos, tens $\ddot{o}$ es e deforma $\tilde{c}$ o $\tilde{e}$ s, para carga de curta dura $\tilde{c}$ o $\tilde{e}$ m.

Para a an $\acute{a}$ lise da estrutura no tempo, s $\ddot{a}$ o necess $\acute{a}$ rias a hist $\acute{o}$ ria de carga, hist $\acute{o}$ ria de temperatura, caracter $\acute{i}$ sticas de flu $\tilde{e}$ ncia e retra $\tilde{c}$ o $\tilde{e}$ m, para a determina $\tilde{c}$ o $\tilde{e}$ m da resposta da estrutura.

Quanto  $\grave{a}$  localiza $\tilde{c}$ o $\tilde{e}$ m da estrutura no plano,  $\acute{e}$  definido um sistema global de coordenadas cartesianas retangulares, X e Y, e cada elemento possui um igual sistema local, x e y, como  $\acute{e}$  mostrado na figura 3.1.

A n $\ddot{a}$ o-linearidade f $\acute{i}$ sica  $\acute{e}$  facilmente inclu $\ddot{i}$ da com a utiliza $\tilde{c}$ o $\tilde{e}$ m da rela $\tilde{c}$ o $\tilde{e}$ m tens $\ddot{a}$ o-deforma $\tilde{c}$ o $\tilde{e}$ m dos materiais, enquanto a n $\ddot{a}$ o-linearidade geom $\acute{e}$ trica  $\acute{e}$  introduzida no problema atrav $\acute{e}$ s das rela $\tilde{c}$ o $\tilde{e}$ s deforma $\tilde{c}$ o $\tilde{e}$ s-deslocamentos decorrentes de uma teoria na hip $\acute{o}$ tese de pequenas deforma $\tilde{c}$ o $\tilde{e}$ s e moderadas rota $\tilde{c}$ o $\tilde{e}$ s.



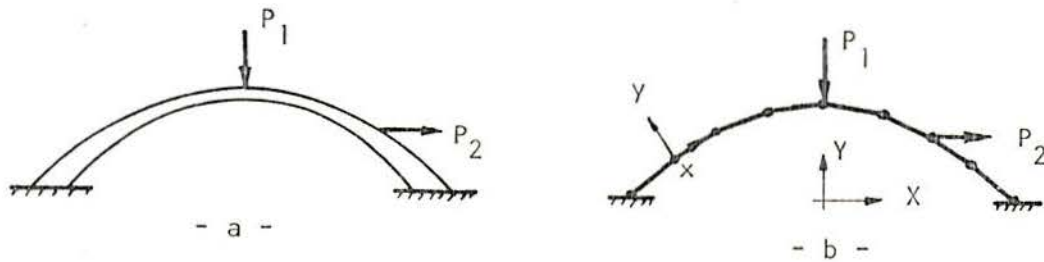


FIGURA 3.1 - Estrutura: a) real; b) idealizada.

### 3.2 - Solução da Equação de Equilíbrio

Para o método dos elementos finitos com modelo em deslocamentos, o equilíbrio estrutural do conjunto fica garantido se

$$\underline{P}_{NL}(\underline{U}) = \underline{P}_{EXT} \quad (3.2)$$

onde  $\underline{P}_{NL}(\underline{U})$  é um vetor de ações de extremo de membro calculado com todas as não-linearidades presentes e montado sobre a estrutura, e  $\underline{P}_{EXT}$  é a respectiva montagem nodal das cargas exteriores.

Designando de  $\underline{U}$  o vetor de deslocamentos nodais procurado, pode-se escrever

$$\underline{K}_0 \underline{U} = \underline{P}_L ; \quad (3.3)$$

onde  $\underline{K}_0$  é a matriz de rigidez tangente inicial e  $\underline{P}_L$  as respectivas ações de extremo de membro lineares.

Adicionando (3.2) e (3.3), tem-se

$$\underline{K}_0 \underline{U} + \underline{P}_{NL}(\underline{U}) = \underline{P}_{EXT} + \underline{P}_L \quad (3.4)$$

ou

$$\underline{K}_0 \underline{U} = \underline{P}_{EXT} + \underline{P}_L - \underline{P}_{NL}(\underline{U}) . \quad (3.5)$$

Esta equação não-linear deve ser verificada em todas as etapas de cargas, e para o seu ajuste existem diversas técnicas incrementais, iterativas ou mistas. Por exemplo, uma forma incremental é a que se segue.

Para a etapa n, tem-se

$$\underline{K}_0 \underline{U}^n = \underline{P}_{EXT}^n + \underline{P}_L^n - \underline{P}_{NL}^n(\underline{U}) . \quad (3.6)$$

Na etapa n+1

$$\begin{aligned} \underline{K}_0 (\underline{U}^n + \Delta \underline{U}^{n \rightarrow n+1}) &= \underline{P}_{EXT}^n + \Delta \underline{P}_{EXT} + (\underline{P}_L - \underline{P}_{NL})^n + \\ &+ (\Delta \underline{P}_L - \Delta \underline{P}_{NL}(\underline{U}))^{n \rightarrow n+1} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Subtraindo (3.7) de (3.6), a equação para o processo incremental fica

$$\underline{K}_0 \Delta \underline{U} = \Delta \underline{P}_{EXT} + (\Delta \underline{P}_L - \Delta \underline{P}_{NL}(\underline{U})) \quad (3.8)$$

ou

$$\underline{K}_0 \Delta \underline{U} = \Delta \underline{P}_{EXT} + \Delta \underline{D} ; \quad (3.9)$$

onde

$$\Delta \underline{D} = \Delta \underline{P}_L - \Delta \underline{P}_{NL}(\underline{U}) ; \quad (3.10)$$

é o vetor de desequilíbrio.

A matriz  $\underline{K}_0$  é conhecida, já que ela depende somente das propriedades dos materiais e das características geométricas do elemento, e o incremento de carga  $\Delta \underline{P}_{EXT}$  também é definido. O incremento de deslocamento  $\Delta \underline{U}$  é a incógnita a determinar. O vetor de desequilíbrio  $\Delta \underline{D}$  também não é conhecido, podendo ser ajustado iterativamente. Mas os processos iterativos são dispendiosos em termos computacionais e apresentam dificuldades na convergência ou instabilidade numérica. Assim, adota-se neste estudo o método da projeção linear, na forma proposta por STRICKLIN<sup>47</sup> e empregado por BIGNON<sup>7</sup> na análise não-linear de cascas de concreto armado. O vetor de

desequilíbrio é avaliado da seguinte forma

$$\Delta \underline{D}^{n \rightarrow n+1} = \underline{D}^{n+1} - \underline{D}^n ; \quad (3.11)$$

na qual  $\underline{D}^{n+1}$  é obtido por uma expansão em série de Taylor de primeira ordem.

$$\underline{D}^{n+1} = \underline{D}^n + \Delta \underline{P} \frac{\partial (\underline{D}^n)}{\partial \underline{P}} . \quad (3.12)$$

Usando diferenças de primeira ordem

$$\frac{\partial (\underline{D}^n)}{\partial \underline{P}} = \frac{\underline{D}^n - \underline{D}^{n-1}}{\Delta \partial \underline{P}} \quad (3.13)$$

resulta

$$\underline{D}^{n+1} = 2 \underline{D}^n - \underline{D}^{n-1} ; \quad (3.14)$$

seguinte

$$\Delta \underline{D}^{n \rightarrow n+1} = \underline{D}^{n+1} - \underline{D}^n = \underline{D}^n - \underline{D}^{n-1} . \quad (3.15)$$

Esta aproximação equivale a uma extrapolação linear de  $\Delta \underline{D}$  em dois incrementos consecutivos de cargas

Pode-se trabalhar também com deslocamentos acumulados, sendo a equação de equilíbrio da seguinte forma

$$\begin{aligned} K_{\underline{O}} \underline{U}^{n+1} &= \underline{P}_{\underline{EXT}}^{n+1} + (\underline{P}_{\underline{L}} - \underline{P}_{\underline{NL}}(\underline{U}))^n + \\ &+ (\Delta \underline{P}_{\underline{L}} - \Delta \underline{P}_{\underline{NL}}(\underline{U}))^{n \rightarrow n+1} \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde, da mesma forma que para o algoritmo incremental, o vetor de desequilíbrio é

$$\Delta \underline{D} = \Delta \underline{P}_{\underline{L}} - \Delta \underline{P}_{\underline{NL}}(\underline{U}) ; \quad (3.17)$$

e é avaliado pela expressão 3.15.

Os dois algoritmos apresentados têm a vantagem do menor tempo de processamento, devido ao fato de se evitar as iterações e de não ser necessária a atualização da matriz de

rigidez a cada etapa. Por outro lado, é reconhecidamente sabido, que os algoritmos de rigidez constante apresentam uma acentuada dificuldade para representar pronunciados patamares associados com fortes deformações plásticas, assim como a ausência de iterações pode se manifestar em alguma forma de inércia numérica.

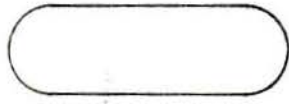
### 3.3 - Programa Computacional

O programa PROTENDE foi desenvolvido em linguagem FORTRAN, de acordo com o algoritmo apresentado na seção 3.2, empregando no cálculo das ações de extremo, as equações constitutivas dadas, e implementado no computador BURROUGHS-6700 do Centro de Processamento de Dados da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Tal programa efetua, de acordo com uma chave de entrada, a análise não-linear física e geométrica de pórticos em concreto armado ou protendido. O programa é restrito às aplicações com cargas de curta duração e foi desenvolvido de maneira a incluir de forma direta os efeitos dependentes do tempo, como a fluência, retração, envelhecimento, assim como a influência de mudança de temperatura e outras fontes de auto-deformação.

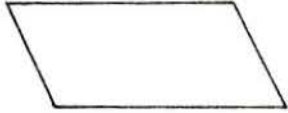
Serão dados a seguir um breve fluxograma do programa PROTENDE e a finalidade e o fluxograma de cada sub-rotina.



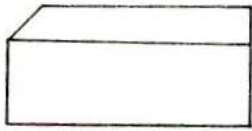
### 3.3.1 - Convenção dos blocos diagramas<sup>15</sup>



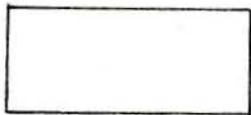
início ou fim



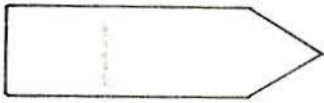
operação de entrada e saída



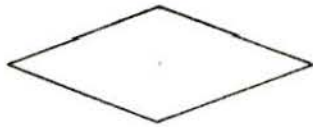
chamada de subrotina



execução



iteração

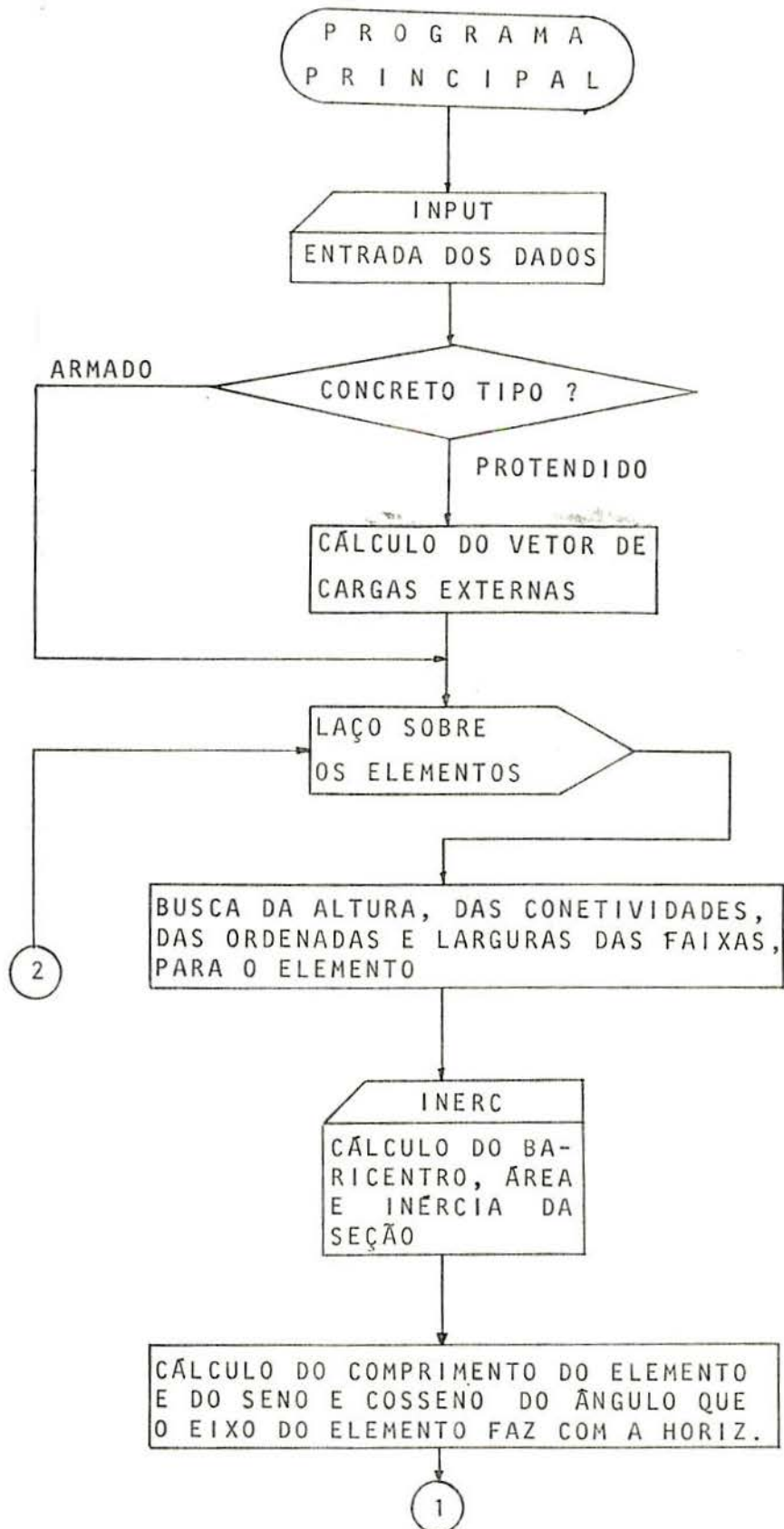


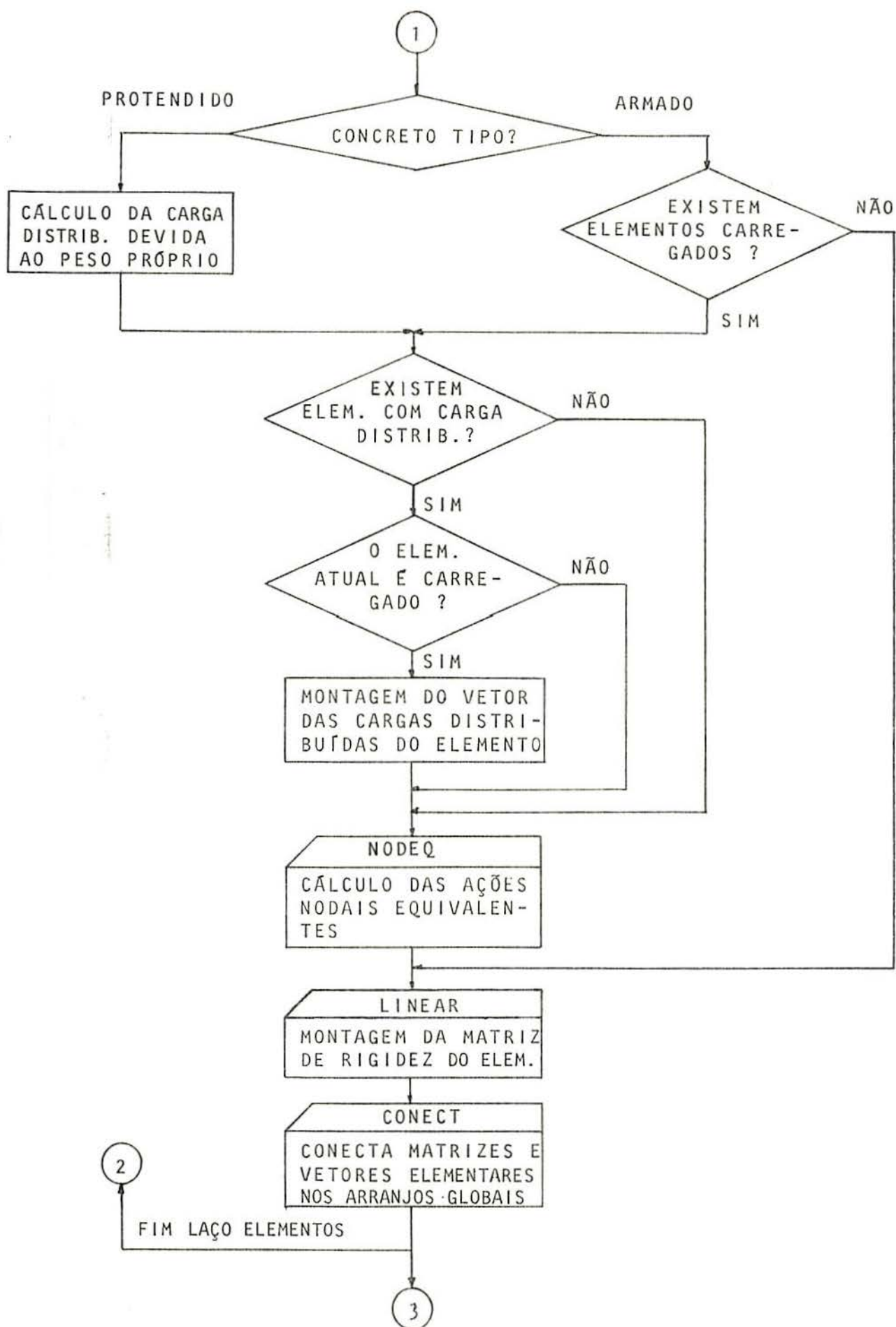
decisão

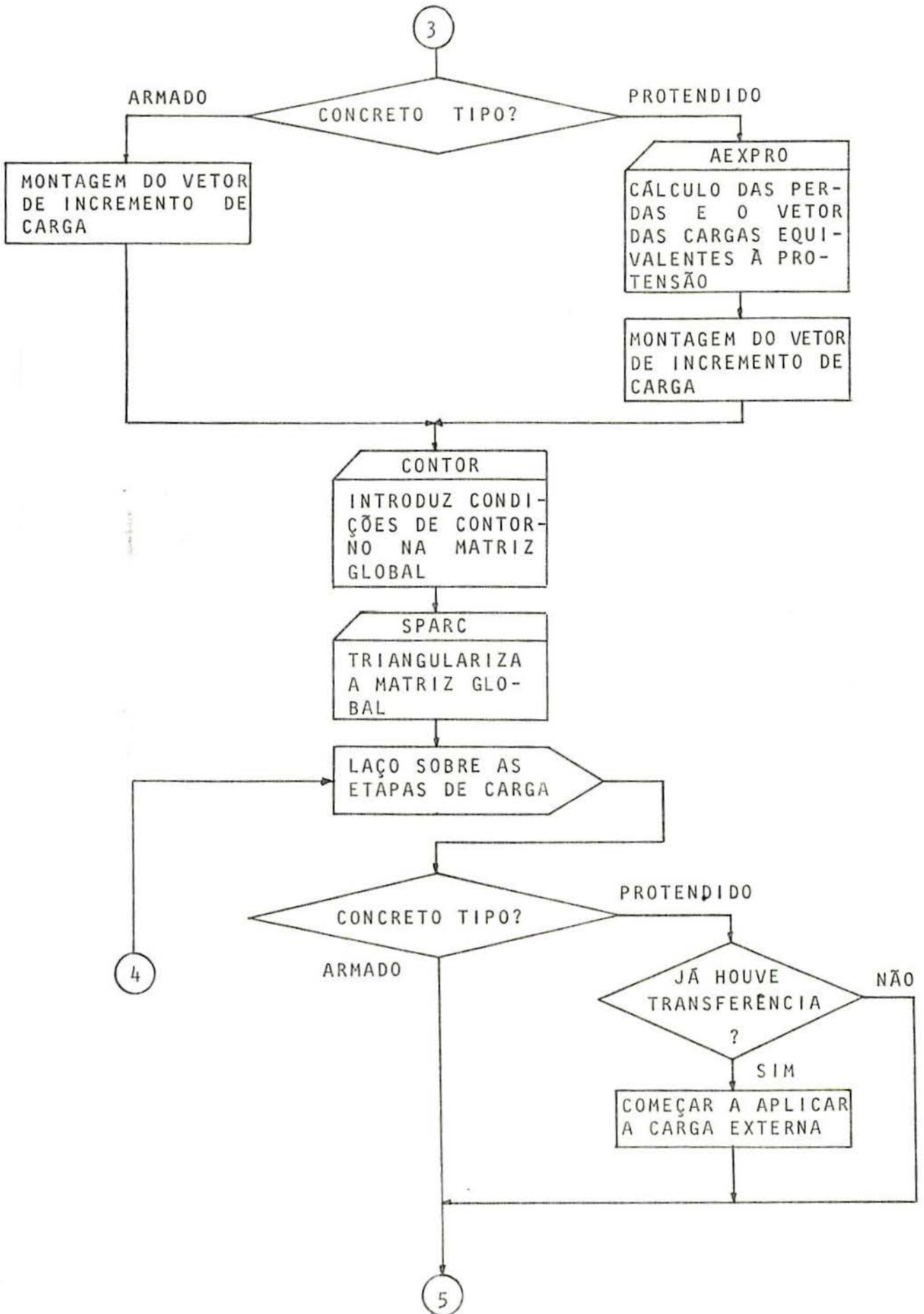


conector

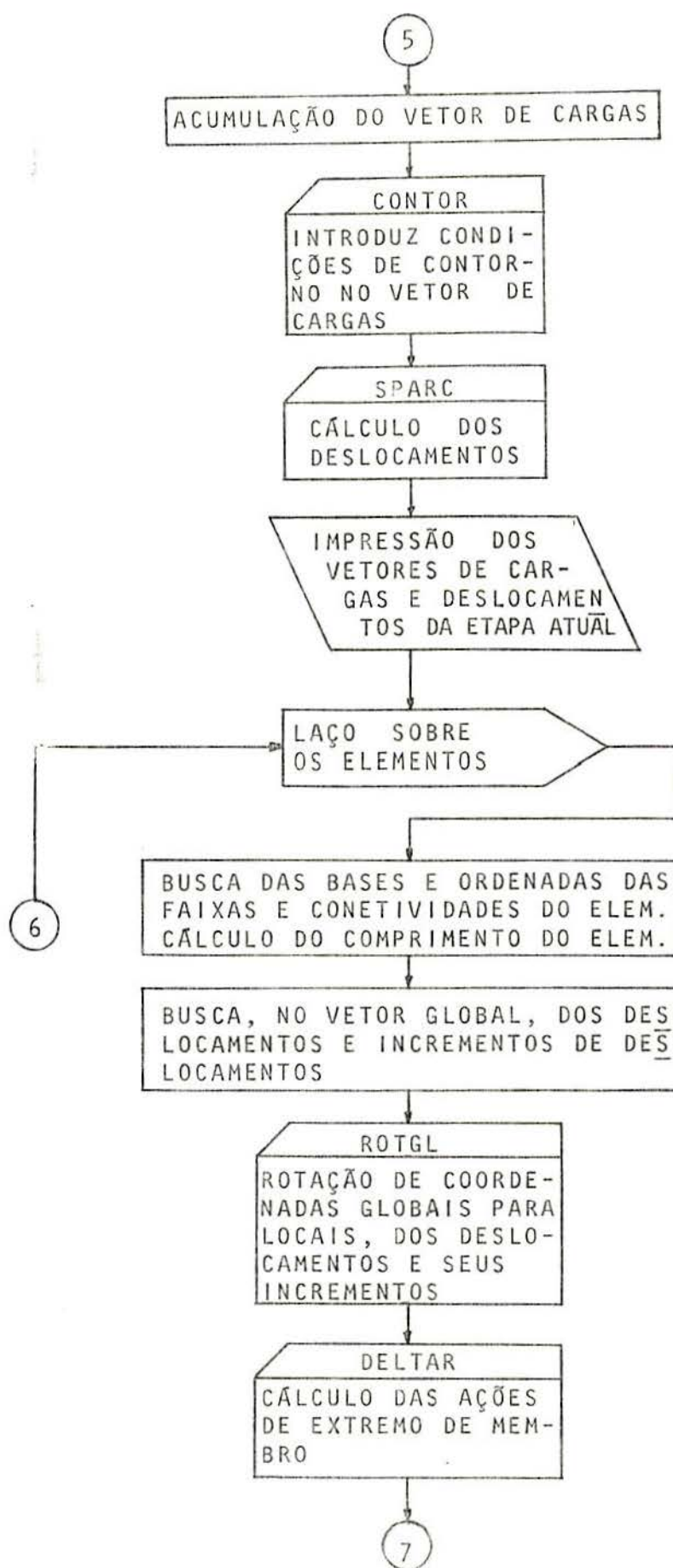
## 3.3.2 - Fluxograma do programa principal













### 3.3.3 - Sub-rotinas

a) -Nome: DELTAR

-Descrição:

Determina as ações de extremo de membro do elemento, lineares e não lineares, incrementais e totais, pelo processo de cálculo que será detalhado no capítulo 4.

-Lógica do programa:

Basicamente esta sub-rotina calcula a integral

$$\underline{R} = \int_V \sigma (\underline{B}^T + \underline{C}^T \underline{C} \underline{U}) dV ;$$

para o algoritmo em deslocamentos acumulados; e

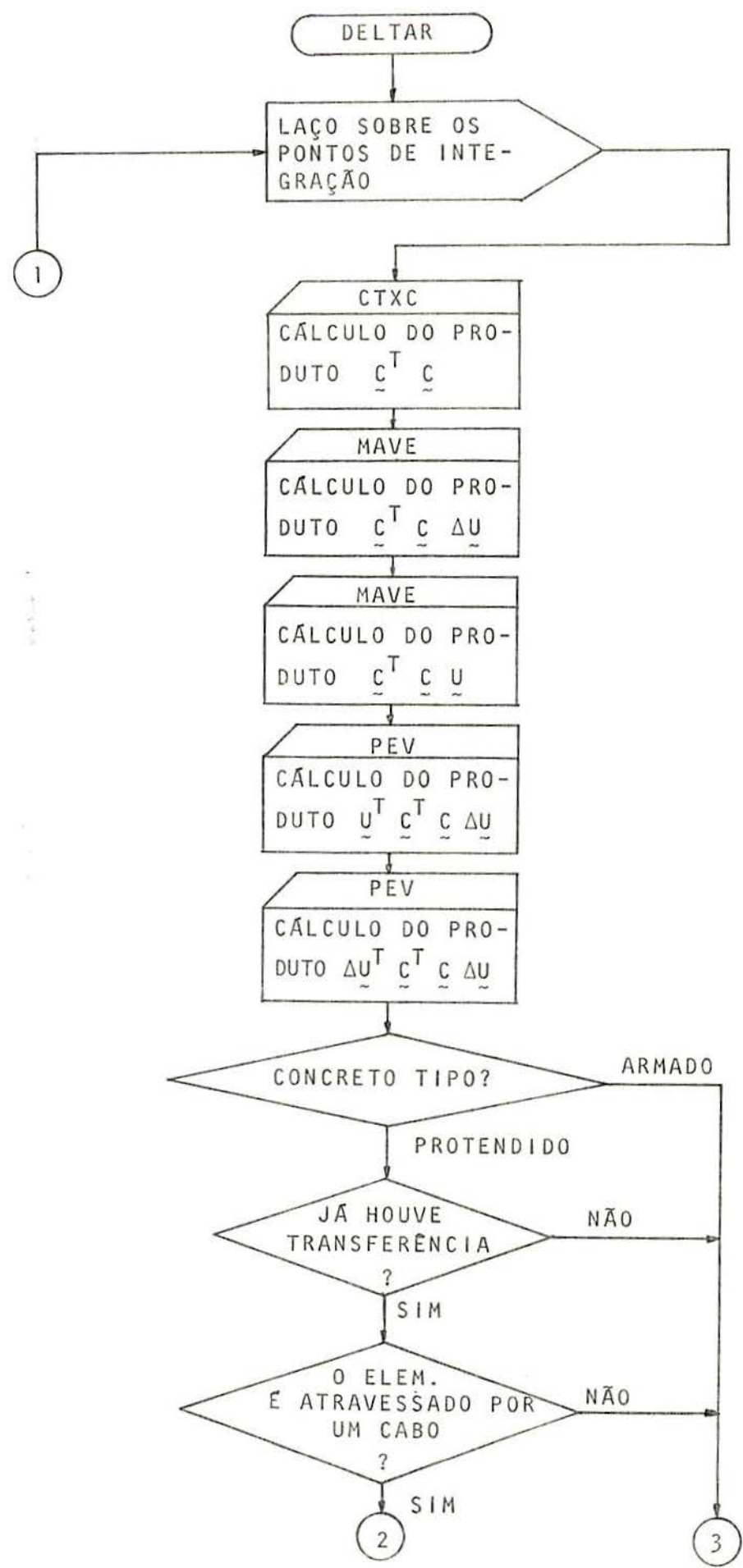
$$\Delta \underline{R} = \int_V [\Delta \sigma (\underline{B}^T + \underline{C}^T \underline{C} \underline{U}) + \sigma \underline{C}^T \underline{C} \Delta \underline{U}] dV ;$$

para o algoritmo em termos dos incrementos de deslocamentos.

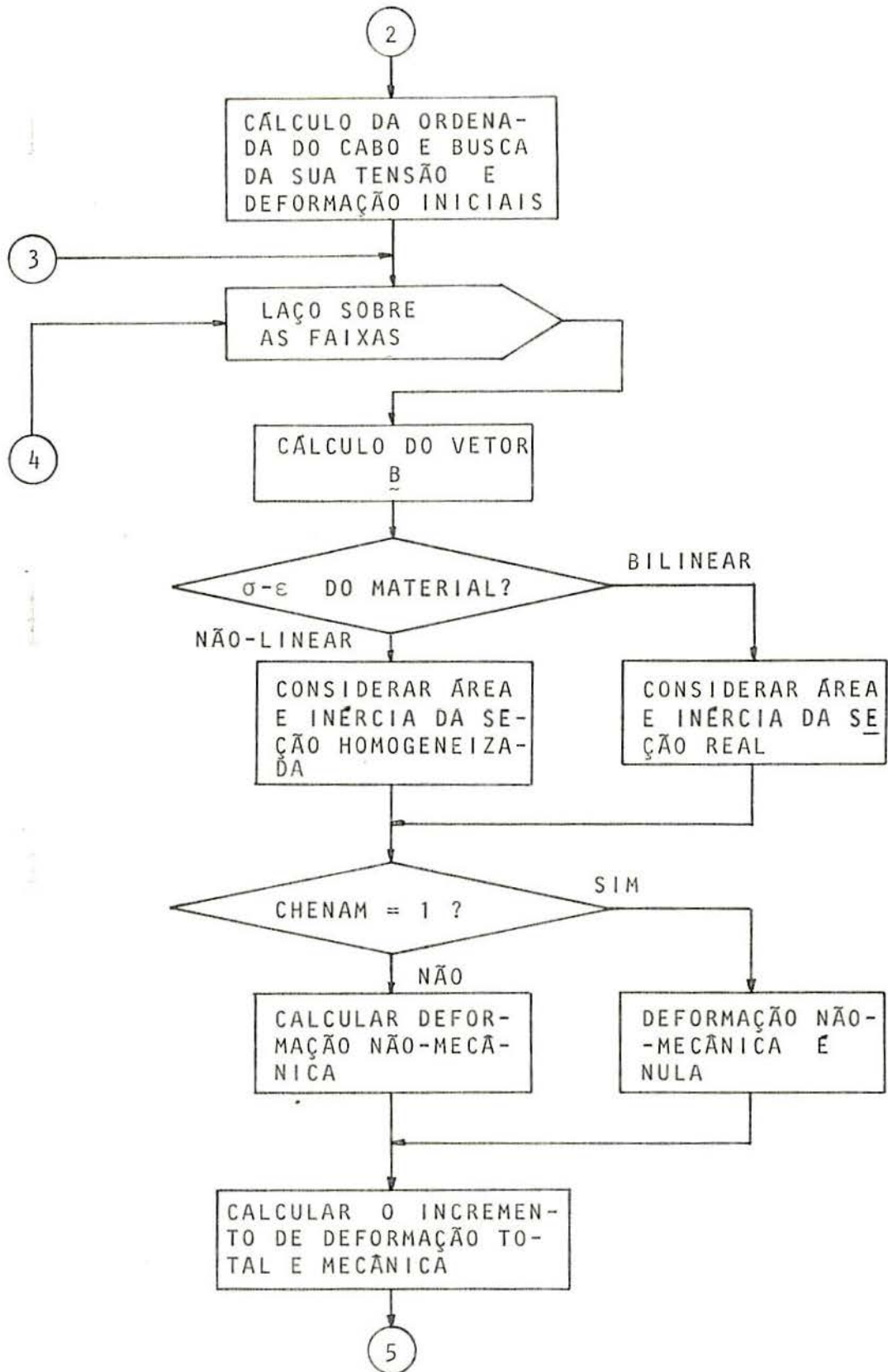
O incremento de deformação mecânica  $\Delta \epsilon^m$  é calculado por

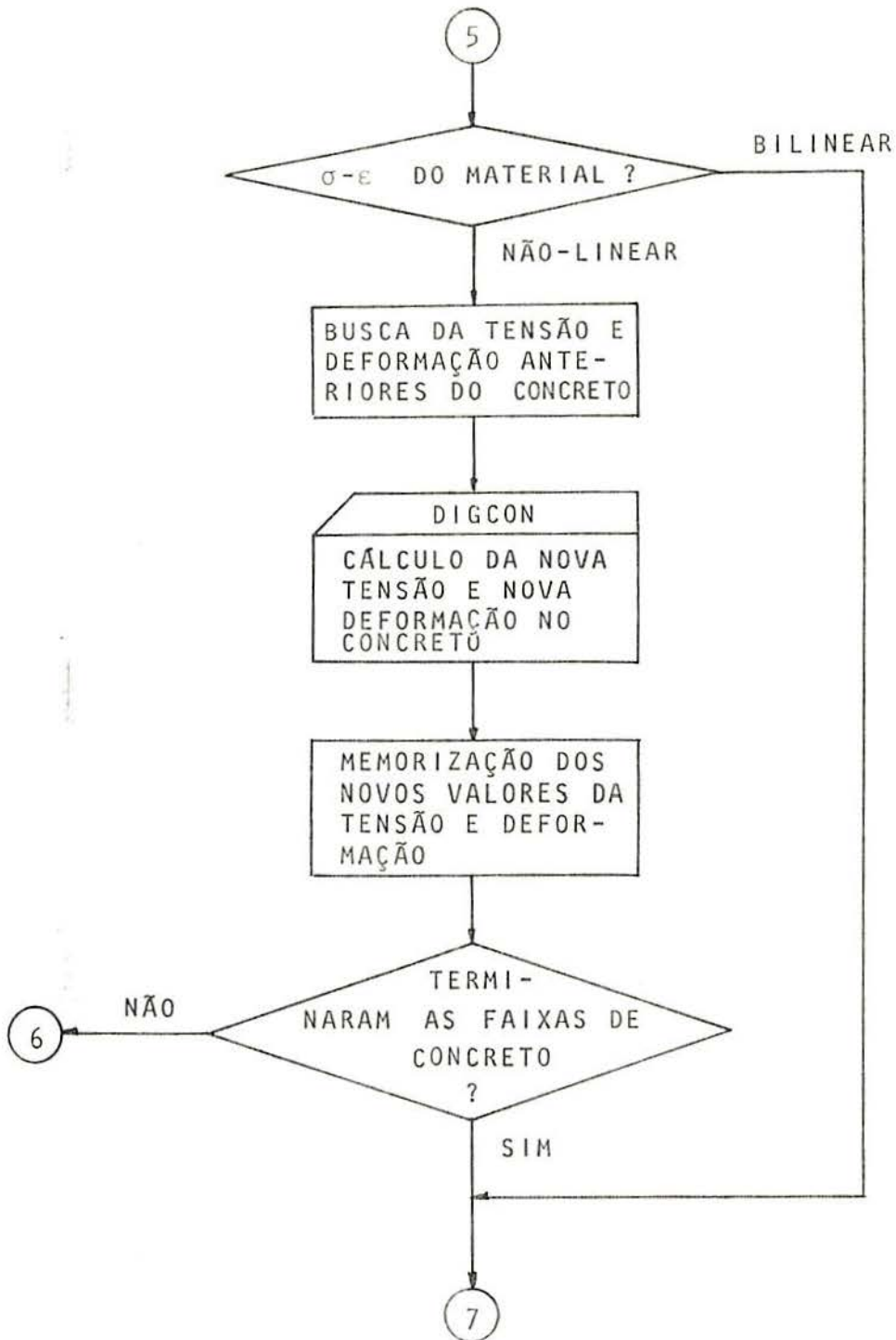
$$\Delta \epsilon^m = \underline{B} \Delta \underline{U} + \underline{U}^T \underline{C}^T \underline{C} \Delta \underline{U} + \frac{1}{2} \Delta \underline{U}^T \underline{C}^T \underline{C} \Delta \underline{U} .$$

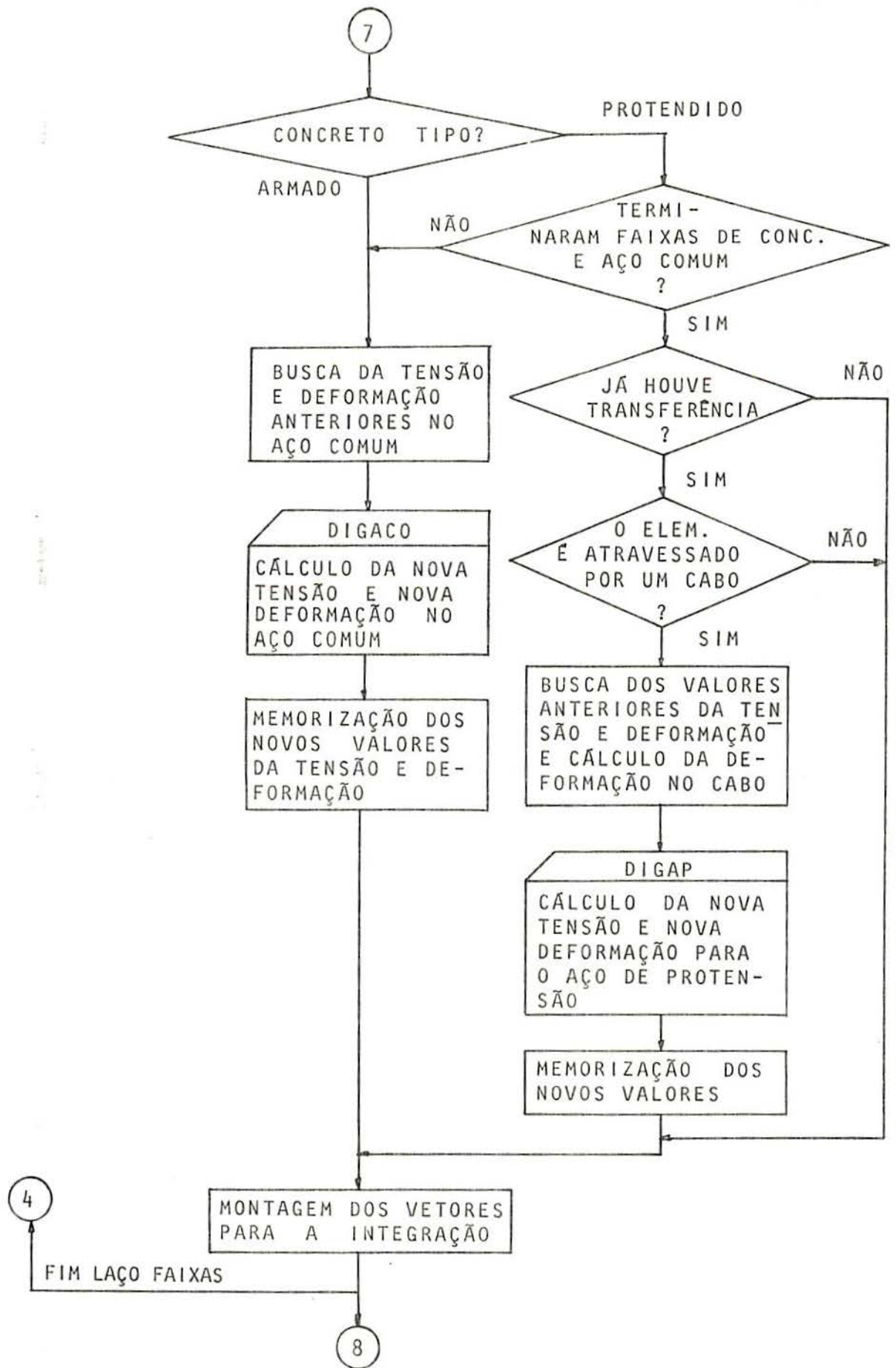
-Fluxograma:

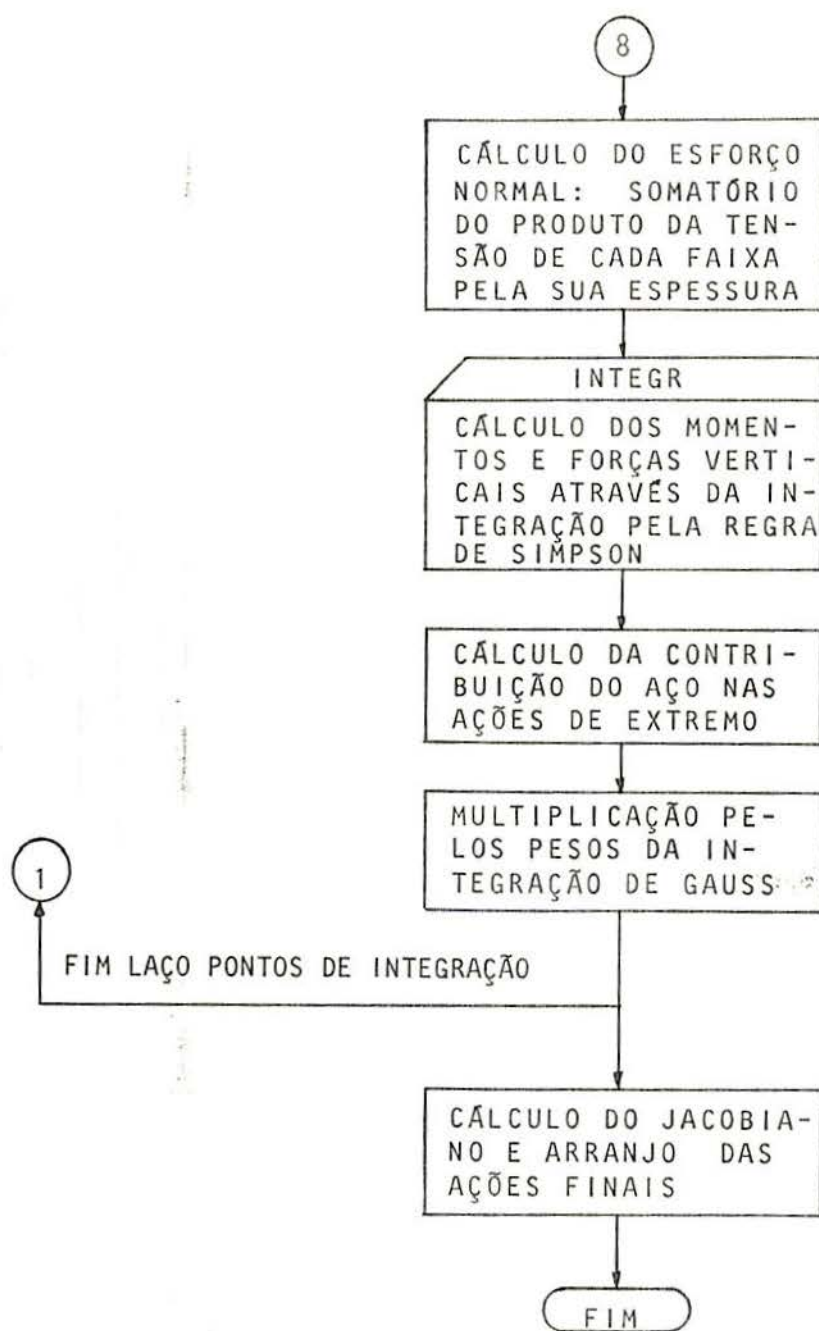














b) -Nome: AEXPRO

-Descrição:

Calcula as forças nodais equivalentes à força de protensão ao longo do cabo, avaliando perdas por atrito e por escorregamento de ancoragem, como será explicado no capítulo 5.

- Lógica do programa:

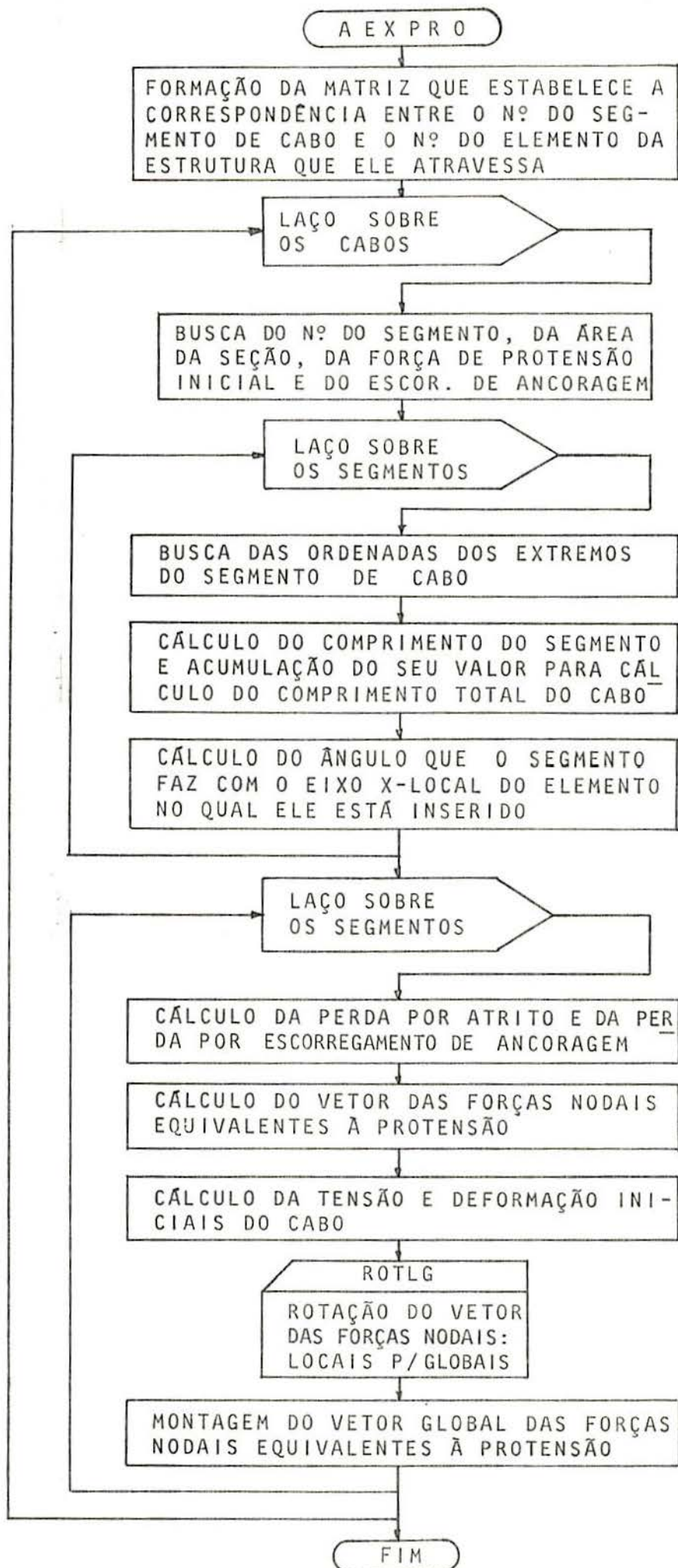
Dada a força de protensão inicial de cada cabo, a subrotina calcula perdas por atrito através da fórmula

$$P_2 = P_1 e^{-(\mu \alpha + k L)} ;$$

e as perdas por escorregamento de ancoragem por

$$P_A = P_1 - \frac{E_p A_p \Delta L_s L_s}{L_t^2} .$$

-Fluxograma:



c) -Nome: INERC

-Descrição:

Calcula a ordenada do baricentro da seção em relação ao eixo de referência, a área da seção transversal e o momento de inércia em relação ao eixo de referência e em relação ao eixo baricêntrico. Calcula ainda a área e a inércia da seção homogeneizada, levando em conta a presença do aço na seção.

-Lógica do programa:

Se a seção é retangular, as características geométricas são calculadas por

$$A = b h \quad \text{e} \quad I = \frac{b h^3}{12}$$

Se a seção é qualquer, tem-se a largura e a ordenada de cada faixa, sendo então feito

$$A = \sum_{i=1}^n b_i h_i$$

e

$$I = \sum_{i=1}^n \left( \frac{b_i h_i^3}{12} + b_i h_i y_i^2 \right) ;$$

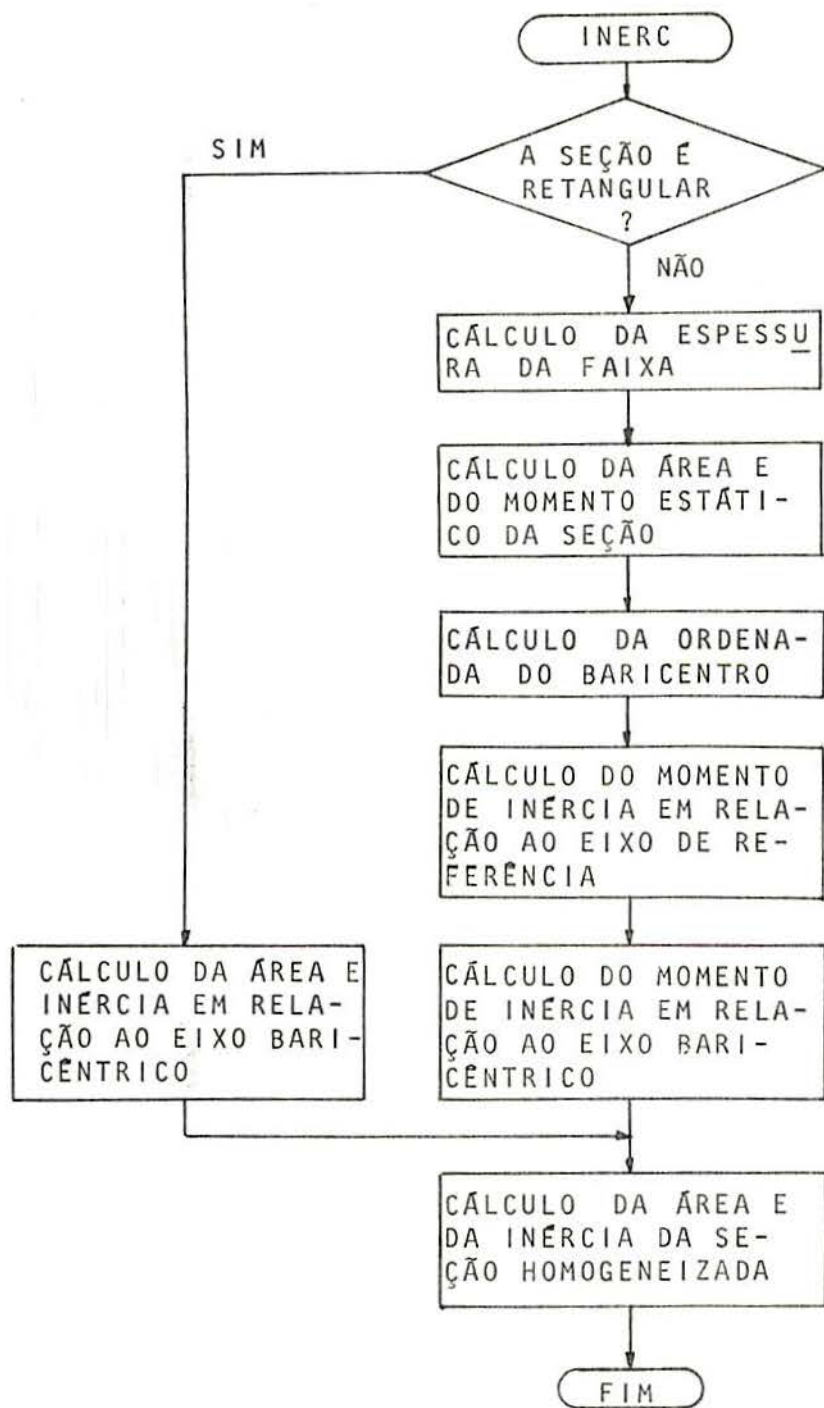
onde  $h_i$  é a altura da faixa, que é constante e dada por

$$h_i = y_i - y_{i-1} .$$

Para o eixo baricêntrico, faz-se uma translação

$$I_G = I_X - A y_G^2 .$$

-Fluxograma:





d) -Nome: DIGCON

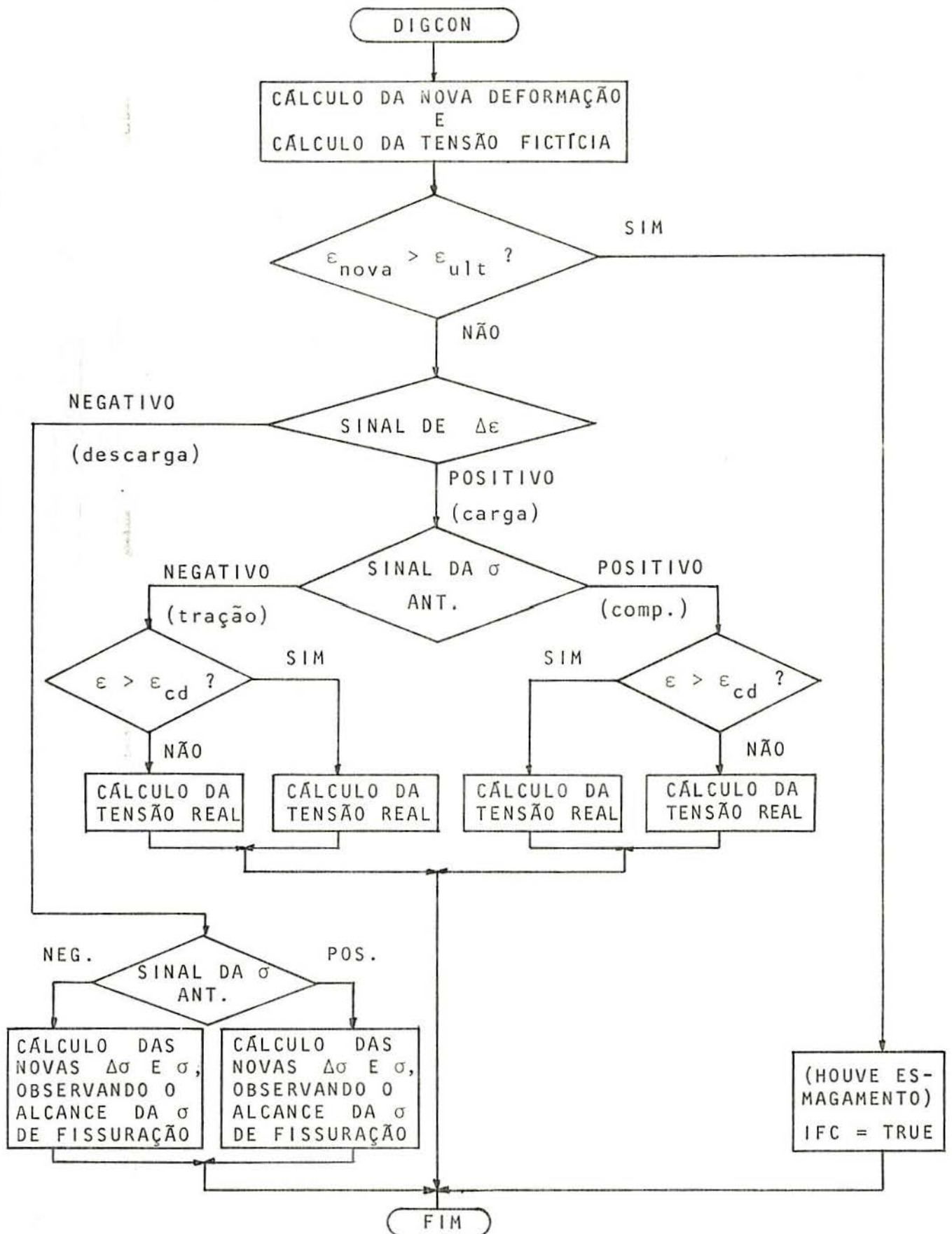
-Descrição:

Calcula tensões e incrementos de tensões para cada faixa de concreto, sendo dados o incremento de deformação e os valores da tensão e da deformação da etapa anterior.

-Lógica do programa:

Esta sub-rotina percorre o diagrama  $\sigma$ - $\epsilon$  do concreto, analisando se a faixa está sob carga ou descarga.

-Fluxograma:



e) -Nome: DIGACO

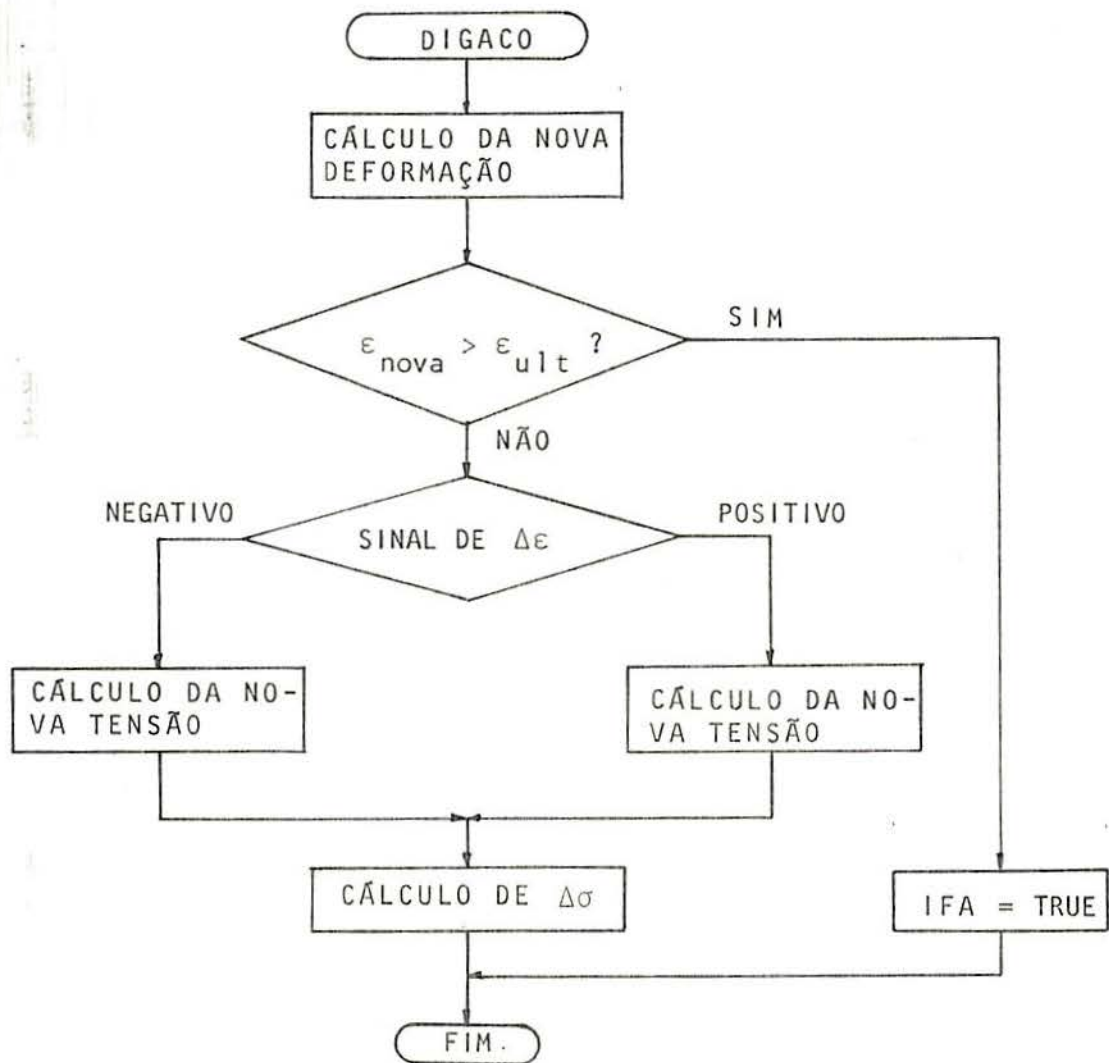
-Descrição:

A sub-rotina calcula tensões e incremento de tensões para cada faixa que representa o aço para armadura ordinária, sendo dados o incremento de deformação e a tensão e deformação da etapa anterior.

-Lógica do programa:

Esta sub-rotina percorre o diagrama  $\sigma$ - $\epsilon$ , bilinear, do aço, analisando situação de carga ou descarga.

-Fluxograma:



f) -Nome: DIGAP

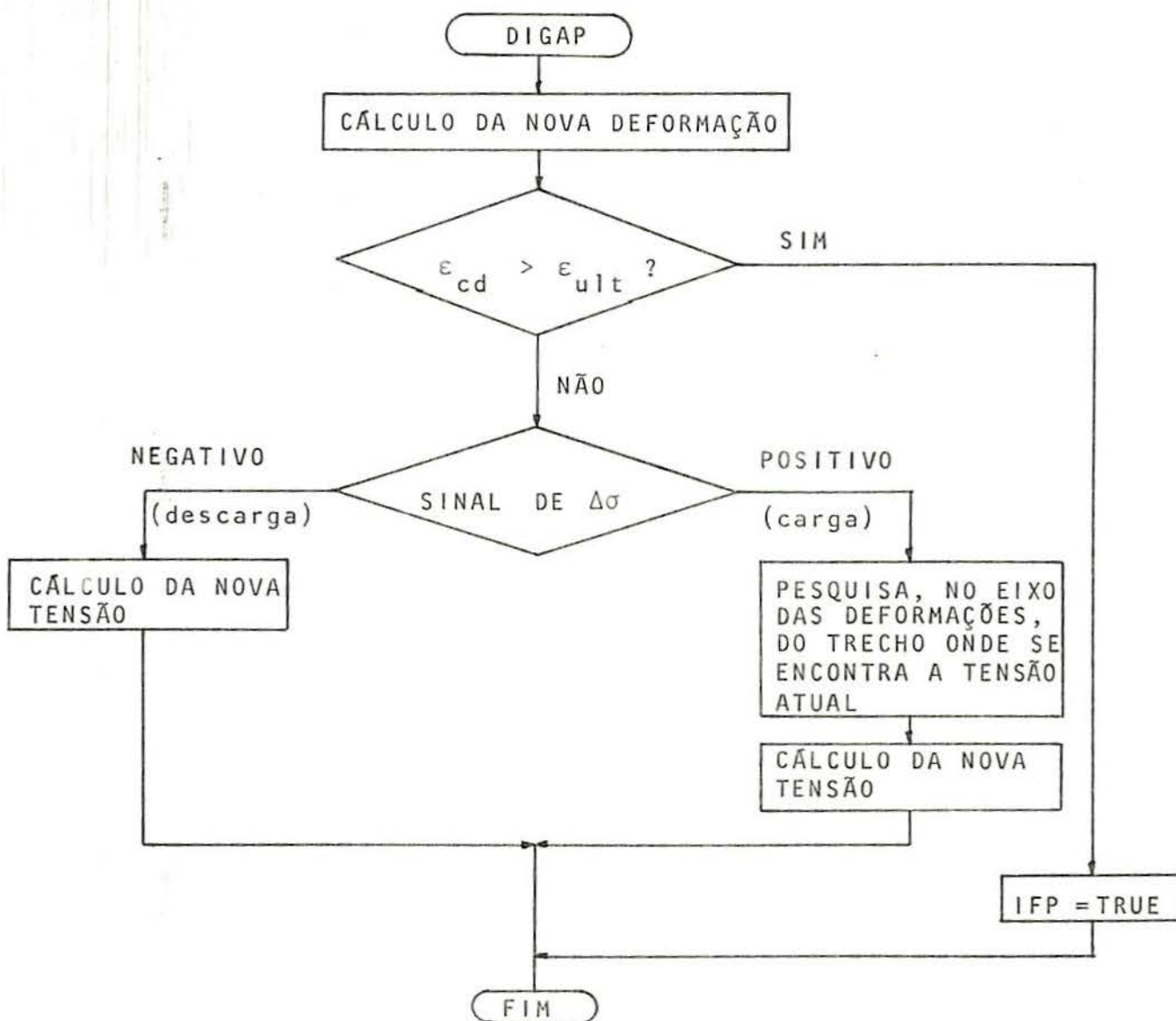
-Descrição:

Calcula a nova tensão, o incremento de tensão e a nova deformação, para o aço de protensão.

-Lógica do programa:

A sub-rotina percorre o diagrama tetralinear da relação  $\sigma$ - $\epsilon$  do aço para protensão.

-Fluxograma:





g) -Nome: INTEGR

-Descrição:

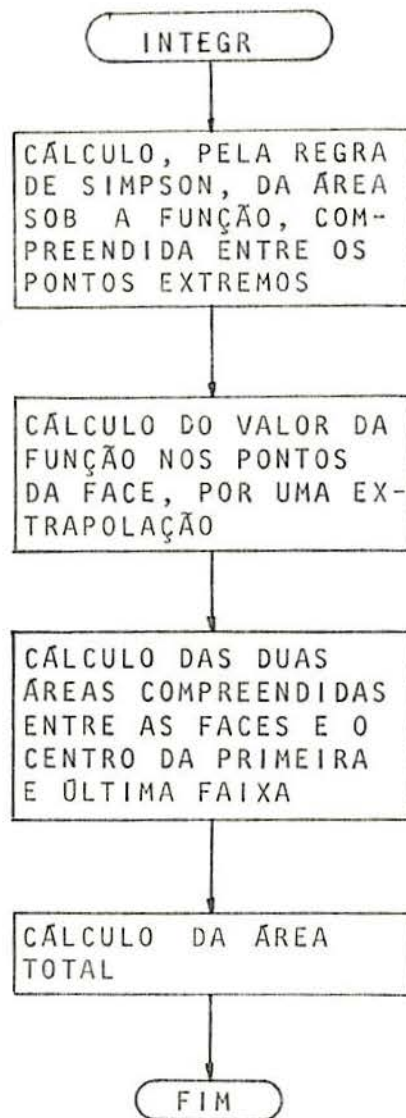
A sub-rotina faz a integração ao longo da altura da seção, pelas regras de Simpson e trapézio, sendo dados o número de pontos, suas ordenadas e o valor, em cada ponto, da função a ser integrada. Como a regra de Simpson exige um número par de intervalos de integração, o número de pontos, que equivalem às faixas de concreto, deve ser ímpar.

-Lógica do programa:

Os pontos são os centros das faixas. A regra de Simpson dá a área sob a função, entre os dois pontos extremos. A área entre o ponto da face e o centro da primeira e última faixa, é calculada pela regra dos trapézios. O valor da função para o ponto da face é extrapolado a partir dos dois pontos anteriores. A expressão da regra de Simpson composta é

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6n} \left[ f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{n} i\right) + 4 \sum_{\substack{i=1 \\ \Delta i=2}}^{2n-1} f\left(a + \frac{b-a}{2n} i\right) \right].$$

-Fluxograma:



As sub-rotinas restantes são do tipo convencional, quase sempre usadas na resolução de estruturas, e serão feitas apenas as suas descrições. Algumas são próprias do programa PROTENDE, mas são sub-rotinas auxiliares e extremamente simples. São elas:

-Sub-rotina CONECT

Conecta as matrizes de rigidez e vetores de carga elementares, nos arranjos globais correspondentes.

-Sub-rotina NODEQ

Calcula as cargas nodais equivalentes devidas às cargas distribuídas e concentradas, aplicadas no elemento.

-Sub-rotina CONTOR

Introduz as condições de contorno da estrutura, de forma opcional, nos casos seguintes

- na matriz global;
- no vetor de termos independentes;
- na matriz e no vetor.

-Sub-rotina LINEAR

Calcula a matriz de rigidez linear e o vetor de cargas à nível de elemento.

-Sub-rotina SPARC

Sub-rotina de solução do sistema algébrico de equações lineares esparsas, pelo algoritmo proposto por BATHE e WILSON<sup>5</sup>. Segundo a chave KEX, ela efetua

- triangularização da matriz, para KEX = 1;
- retrossubstituição, para KEX = 2;
- triangularização e retrossubstituição, para

KEX=3.

-Sub-rotina MAVE

Efetua o produto de uma matriz por um vetor.

-Sub-rotina PEV

Efetua o produto de dois vetores.

-Sub-rotina CTXC

Calcula a matriz produto  $\underline{C}^T \underline{C}$ .

-Sub-rotina ROTGL

Executa a rotação de um vetor, de coordenadas globais para locais.

-Sub-rotina ROTLG

Executa a rotação de um vetor, de coordenadas locais para globais.



## 4. UM PROCESSO DE CÁLCULO PARA ESTRUTURAS EM CONCRETO ARMADO

### 4.1 - Definições e Hipóteses

Um pórtico plano em concreto armado é mostrado na figura 4.1, consistido de elementos prismáticos, conectados por nós.

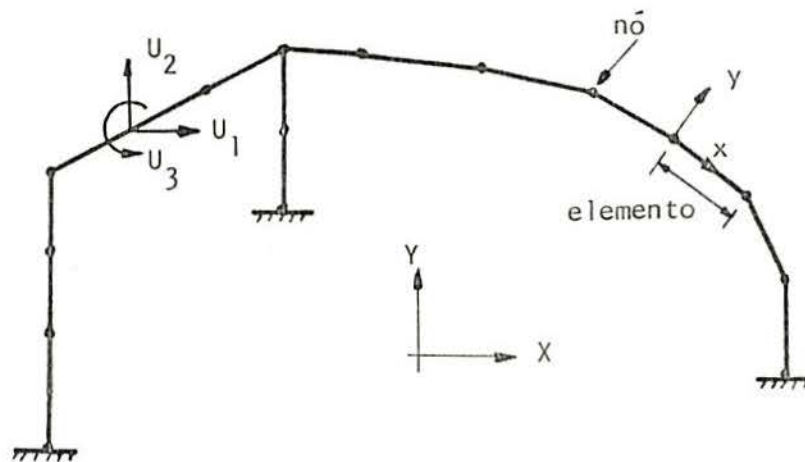


FIGURA 4.1 - Um pórtico plano em concreto armado.

Assume-se que cada elemento tem seção transversal simétrica em relação ao eixo do plano de atuação das cargas exteriores, mas a forma da seção pode mudar de um elemento para outro.

O sistema local de coordenadas,  $x$  e  $y$ , para cada elemento, é definido a partir do nó inicial do mesmo. O eixo  $x$ , das abscissas, liga os nós do elemento e o eixo perpendicular a ele, no plano da seção transversal, é o  $y$ , das ordenadas. A origem do sistema local é o nó inicial, e não é necessário que ele coincida com o baricentro da seção, mas  $y$  deve ser o eixo de simetria dessa última.

A seção transversal de cada elemento é dividida em

faixas de concreto e aço.

Cada nó tem três graus de liberdade, isto é, duas translações e uma rotação. Os deslocamentos do nó podem ser de finidos tanto em coordenadas locais, quanto em globais. O sis tema global de coordenadas, X e Y, é fixado no espaço e é comum a todos os elementos.

As equações de equilíbrio da estrutura são estabelecidas e resolvidas no sistema global de coordenadas, mas as propriedades dos elementos, tais como matriz de rigidez e ações de extremo de membro, são montadas para cada um deles separadamente.

Admite-se que as seções planas e normais ao eixo antes da deformação permaneçam planas e normais ao eixo deformado, o que implica em negligenciar a deformação por corte, e considera-se que todos os pontos de uma mesma seção normal experimentam o mesmo deslocamento na direção transversal. Assume-se também haver perfeita aderência entre o aço e o concreto adjacente. Esta hipótese assegura que o campo de deslocamentos de um elemento de pórtico seja contínuo.

#### 4.2 - Equações de Equilíbrio do Elemento. Cálculo das Ações de Extremo de Membro

Na figura 4.2.a, estão definidas as seis componentes dos deslocamentos nodais de um elemento de uma estrutura de barras, em seu sistema local de coordenadas. No diagrama de corpo livre do elemento, que se mostra na figura 4.2.b, as solicitações  $R_1, R_2, \dots, R_6$ , que os nós exercem sobre o elemento, serão consideradas como as únicas ações externas que atuam sobre ele.

Define-se os vetores

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}; \quad \underline{v} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix}; \quad \underline{\theta} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}; \quad \underline{U} = \begin{Bmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \\ \underline{\theta} \end{Bmatrix}; \quad \underline{R} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_6 \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

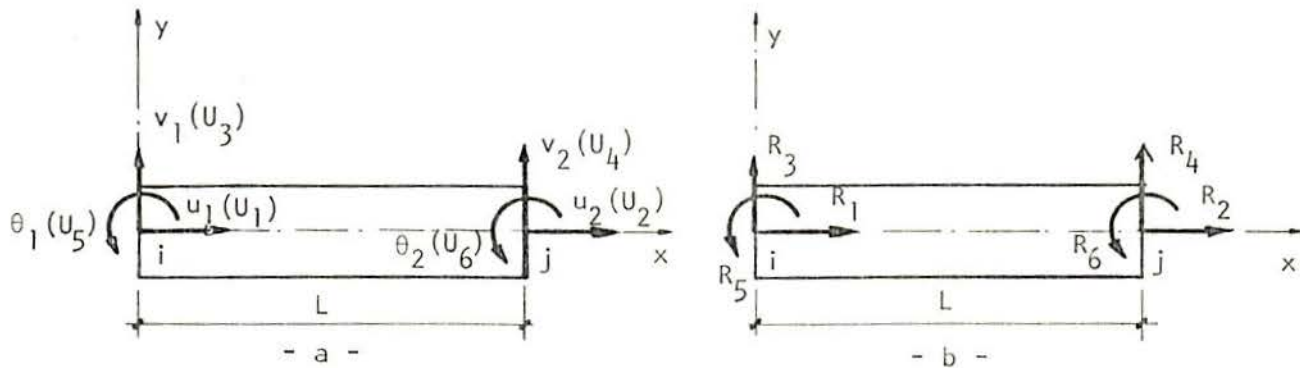


FIGURA 4.2. a) Deslocamentos nodais;  
b) ações de extremo de membro.

e o parâmetro adimensional  $p$ , que representa a posição no eixo do elemento, sendo

$$p = \frac{x}{L} . \quad (4.2)$$

Para representar os deslocamentos  $u_0(x)$  e  $v(x)$ , de qualquer ponto do eixo da peça nas direções  $x$  e  $y$ , em termos dos valores nodais, adota-se a solução exata na hipótese elástica-linear, ou seja, uma interpolação linear para o deslocamento axial e uma variação cúbica, através dos polinômios de l'Hermite, para os deslocamentos transversais. Analiticamente

$$u_0(x) = \underline{\phi} \underline{u} ,$$

onde

$$\underline{\phi} = \{(1-p), p\} ; \quad (4.3)$$

$$v(x) = \underline{\psi} \left\{ \begin{array}{c} \underline{v} \\ \underline{\theta} \end{array} \right\} ,$$

sendo

$$\underline{\psi} = \{(1-3p^2+2p^3), (3p^2-2p^3), \\ L(p-2p^2+p^3), L(-p^2+p^3)\} ;$$

nas quais,  $\underline{\phi}$  e  $\underline{\psi}$  são as chamadas funções de forma para  $u_0(x)$  e  $v(x)$ , respectivamente.

Se  $u(x,y)$  é o deslocamento, na direção  $x$ , de qualquer ponto do elemento, então, pela hipótese das seções planas, pode-se expressar  $u(x,y)$  em função dos deslocamentos nodais, ou seja

$$u(x,y) = u_0(x) - y \frac{dv(x)}{dx} \quad (4.4)$$

$$u(x,y) = \underline{\phi} \underline{u} - y \underline{\psi},_x \left\{ \begin{array}{c} \underline{v} \\ \underline{\theta} \end{array} \right\} \quad (4.5)$$

Em termos de  $\underline{U}$ , pode-se escrever

$$u(x,y) = \{ \underline{\phi}, -y \underline{\psi},_x \} \underline{U} \quad (4.6)$$

e

$$v(x) = \{ 0, \underline{\psi} \} \underline{U} .$$

Já que a formulação é orientada para estruturas de concreto armado, considera-se suficiente adotar uma teoria de pequenas deformações e moderadas rotações, onde resulta indiferente referenciar as tensões à configuração original ou à configuração deformada, e onde a componente na direção  $x$  do tensor de deformações finitas possa ser aproximado na forma<sup>7,24</sup>

$$\varepsilon(x,y) = \frac{du(x,y)}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dv(x)}{dx} \right)^2 \quad (4.7)$$

O segundo termo do segundo membro da equação (4.7), introduz a não-linearidade geométrica no problema.

Em função de  $\underline{\phi}$  e  $\underline{\psi}$ , tem-se

$$\frac{du(x,y)}{dx} = \{ \underline{\phi},_x, -y \underline{\psi},_{xx} \} \underline{U} \quad (4.8)$$

e

$$\frac{dv(x)}{dx} = \{ 0, \underline{\psi},_x \} \underline{U} .$$



Portanto, a expressão de  $\varepsilon$  pode ser reescrita

$$\begin{aligned} \varepsilon(x, y) &= \{\underline{\phi},_{x}, -y \underline{\psi},_{xx}\} \underline{U} + \\ &+ \frac{1}{2} \underline{U}^T \{\underline{0}, \underline{\psi},_{x}\}^T \{\underline{0}, \underline{\psi},_{x}\} \underline{U}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

ou ainda

$$\varepsilon(x, y) = \underline{B} \underline{U} + \frac{1}{2} \underline{U}^T \underline{C}^T \underline{C} \underline{U}; \quad (4.10)$$

onde

$$\underline{B} = \{\underline{\phi},_{x}, -y \underline{\psi},_{xx}\} \quad (4.11)$$

e

$$\underline{C} = \{\underline{0}, \underline{\psi},_{x}\}$$

Efetuada as derivadas, fica

$$\begin{aligned} \underline{B} &= \left\{ -\frac{1}{L}, \frac{1}{L}, \frac{6}{L^2} y(1-2p), \frac{6}{L^2} (-1+2p), \right. \\ &\left. \frac{2}{L} y(2-3p), \frac{2}{L} y(1-3p) \right\}; \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \underline{C} &= \left\{ 0, 0, \frac{6}{L} (-p + p^2), \frac{6}{L} (p - p^2), \right. \\ &\left. (1-4p + 3p^2), (-2p + 3p^2) \right\}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Ocorrendo uma mudança nos deslocamentos nodais, com um acréscimo  $\Delta \underline{U}$ , a nova deformação é

$$(\varepsilon + \Delta \varepsilon) = \underline{B} (\underline{U} + \Delta \underline{U}) + \frac{1}{2} \left[ (\underline{U}^T + \Delta \underline{U}^T) \underline{C}^T \underline{C} (\underline{U} + \Delta \underline{U}) \right] \quad (4.14)$$

Subtraindo (4.10) de (4.14), resulta o acréscimo de deformação

$$\Delta \varepsilon = \underline{B} \Delta \underline{U} + \underline{U}^T \underline{C}^T \underline{C} \Delta \underline{U} + \frac{1}{2} \Delta \underline{U}^T \underline{C}^T \underline{C} \Delta \underline{U}. \quad (4.15)$$

Assumindo que a única componente de tensões que realiza trabalho virtual não nulo é a tensão normal paralela ao eixo  $x$ ,  $\sigma_x = \sigma$ , uma expressão do princípio dos trabalhos virtuais consistente com as hipóteses adotadas ao se introduzir a não-linearidade geométrica, é

$$\delta \underline{U}^T \underline{R} = \int_{V_0} \delta \epsilon \sigma dV_0, \quad (4.16)$$

onde  $\underline{R}$  é o vetor das cargas externas nodais definido em (4.1),  $\delta \underline{U}$  é o vetor de deslocamentos virtuais nodais,  $\delta \epsilon$  é a deformação virtual e  $V_0$  é o volume do elemento indeformado. Efetuando a variação da equação (4.10), substituindo em (4.16) e reordenando, fica

$$\delta \underline{U}^T \left[ \underline{R} - \int_{V_0} (\underline{B}^T + \underline{C}^T \underline{C} \underline{U}) \sigma dV_0 \right] = 0. \quad (4.17)$$

Já que  $\delta \underline{U}$  é arbitrário, resulta finalmente

$$\underline{R} = \int_{V_0} \sigma (\underline{B}^T + \underline{C}^T \underline{C} \underline{U}) dV_0; \quad (4.18)$$

que é a equação de equilíbrio do elemento, em termos dos deslocamentos nodais totais.

No estado de deformação correspondente aos deslocamentos  $(\underline{U} + \Delta \underline{U})$ , a tensão muda para  $(\sigma + \Delta \sigma)$  e, para manter o equilíbrio, o vetor de cargas nodais experimenta um acréscimo, tal que

$$\underline{R} + \Delta \underline{R} = \int_{V_0} (\sigma + \Delta \sigma) (\underline{B}^T + \underline{C}^T \underline{C} (\underline{U} + \Delta \underline{U})) dV_0. \quad (4.19)$$

Subtraindo (4.18) de (4.19), obtém-se, finalmente, uma forma incremental das equações de equilíbrio do elemento

$$\Delta \underline{R} = \int_{V_0} [\Delta \sigma (\underline{B}^T + \underline{C}^T \underline{C} \underline{U}) + \sigma \underline{C}^T \underline{C} \Delta \underline{U}] dV_0. \quad (4.20)$$

O incremento de tensões  $\Delta \sigma$  da equação (4.20) é determinado tanto para o concreto, quanto para o aço, pela relação tensão-deformação



$$\Delta \underline{\varepsilon} = \underline{B} \Delta \underline{U} + \frac{1}{2} \Delta \underline{U}^T \underline{C}^T \underline{C} \Delta \underline{U} + \underline{U}^T \underline{C}^T \underline{C} \Delta \underline{U}. \quad (4.24)$$

A deformação total  $\underline{\varepsilon}$  é obtida por adições consecutivas dos incrementos  $\Delta \underline{\varepsilon}$ , em cada etapa.

c) A deformação mecânica  $\underline{\varepsilon}^m$  é dada pela diferença  $(\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^{nm})$ , onde  $\underline{\varepsilon}^{nm}$  é a deformação não-mecânica devida aos efeitos combinados da fluência, retração, envelhecimento do concreto e, ainda, aos efeitos da mudança de temperatura.

d) A tensão  $\underline{\sigma}$  é então calculada pelas relações já estudadas. Para o concreto, usa-se as equações (2.10), (2.11) e (2.12); e para o aço as equações (2.15), (2.16) e (2.17).

#### 4.4 - Cálculo do Vetor das Forças Internas Resistentes

O vetor das forças internas resistentes pode ser interpretado como aquele que contém as ações de extremo de membro em equilíbrio compatível, para um dado estado de deformação atingido, levando em conta todas as não-linearidades presentes. Assumindo conhecido um conjunto de deslocamentos nodais  $\underline{U}$ , este vetor é calculado, a nível de elemento, pela equação de equilíbrio (4.18).

$$\underline{R} = \int_{V_0} \underline{\sigma} (\underline{B}^T + \underline{C}^T \underline{C} \underline{U}) dV_0; \quad (4.25)$$

onde  $\underline{B}$  e  $\underline{C}$  são dados pelas equações (4.12) e (4.13), respectivamente. A tensão  $\underline{\sigma}$  é calculada pelas relações tensão-deformação vistas no capítulo 2, empregando-se as equações (2.10), (2.11) e (2.12) para o concreto e (2.15), (2.16) e (2.17) para o aço.

O vetor  $\underline{R}$  deve ser avaliado na forma mais acurada possível porque ele influi, de maneira decisiva, na precisão dos deslocamentos determinados pelo algoritmo empregado.

Para a determinação de  $\underline{R}$ , considera-se que a seção transversal do elemento seja constituída de faixas de concreto, e a área de aço de cada camada é concentrada no eixo de simetria da mesma, conforme a figura 4.3.



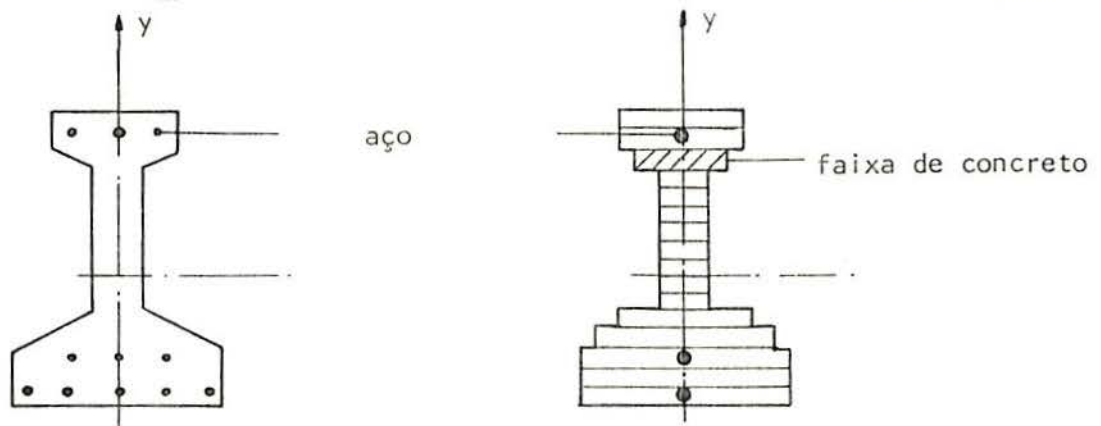


FIGURA 4.3 - Seção transversal: a) real;  
b) idealizada.

Assume-se que cada faixa de concreto ou aço está submetida a um estado uniaxial de tensão  $e$ , para cada uma delas, a largura e a distância ao eixo de referência são propriedades que devem ser especificadas.

O vetor  $\underline{R}$  é avaliado por meio de uma dupla integração, sendo uma sobre as faixas, pela regra de Simpson, e outra ao longo do eixo do elemento, através de uma quadratura de Gauss com três pontos de integração.

Cada componente de  $\underline{R}$  contém duas funções: uma  $f(x)$  e uma  $g(x,y)$ , que devem ser integradas no volume do elemento. A integração pode ser feita como se segue.

$$\int_0^L f(x) \int_A g(x,y) dA dx = \frac{L}{2} \int_{-1}^1 f(p) \int_A g(p,y) dA dp . \quad (4.26)$$

O termo  $L/2$  é o jacobiano, que aparece devido às mudanças de variável e do intervalo de integração. E daí, da teoria da integração de Gauss, vem

$$\int_0^L f(x) \int_A g(x,y) dA dx = \sum_{k=1}^3 w_k f(p_k) h(p_k) ,$$

sendo

$$h(p_k) = \int_A g(p_k, y) dA ;$$

(4.27)

executada separadamente.  $p_k$  são as abscissas dos pontos de integração e  $w_k$  os pesos correspondentes.

As seis componentes do vetor  $\underline{R}$  do elemento estão mostradas na figura 4.4.

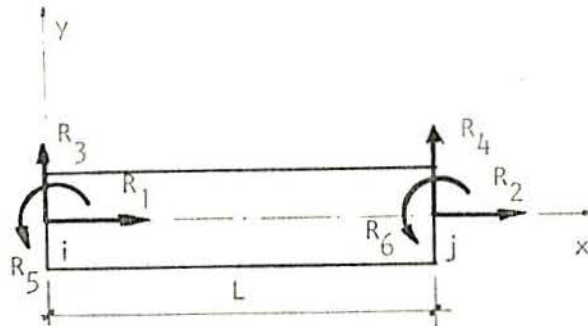


FIGURA 4.4 - Componentes do vetor  $\underline{R}$  para o elemento.

O vetor de forças internas resistentes, uma vez determinado pela equação (4.25) em coordenadas locais, é transformado para o sistema global de coordenadas, através da relação

$$\underline{R}^G = \beta^T \underline{R}^L ; \quad (4.28)$$

onde  $\beta^T$  é a transposta da matriz  $\beta$ , equação (4.23). Após a transformação, é montado o vetor de esforços resistentes,  $\underline{P}_{NL}(\underline{U})$ , para toda a estrutura, para ser aplicado à equação de equilíbrio global (3.5), ou no cálculo do incremento  $\Delta \underline{P}_{NL}(\underline{U})$ , da equação (3.9).

## 5. EXTENSÃO DO PROCESSO DE CÁLCULO PARA ESTRUTURAS EM CONCRETO PROTENDIDO

### 5.1 - Generalidades

A protensão é um processo que consiste em introduzir numa estrutura, um estado prévio de tensões capaz de melhorar sua resistência ou seu comportamento, sob diversas condições de carga. Em peças de concreto, a protensão desenvolve esforços que anulam drasticamente as tensões de tração no concreto, de modo a eliminar a abertura de fissuras como condição determinante do dimensionamento. Conseqüentemente, com uma maior proteção frente à corrosão, podem ser aproveitados os aços de elevada resistência que a indústria atualmente produz em condições econômicas.

A técnica utilizada, na prática, para a realização da protensão do concreto, é através de cabos de aço tracionados e ancorados no próprio concreto. As ancoragens dos cabos garantem a permanência dos esforços introduzidos.

A protensão faz com que a faixa de trabalho do concreto se desloque para o lado da compressão, onde ele é mais eficiente. Usando armadura na forma de cabos de aço tracionados e ancorados, pode-se empregar aços de alta resistência e trabalhar com tensões elevadas. Dessa forma, compatibiliza-se o desempenho simultâneo dos dois materiais e tira-se proveito das suas características.

Dependendo do método de aplicação da protensão, as estruturas em concreto protendido são classificadas em

#### a) Pré-tracionadas.

Os fios de aço da armadura são esticados e ancorados em suportes provisórios. O concreto é lançado diretamente sobre os fios, estabelecendo-se aderência. Após o endurecimento do concreto, os fios do suporte provisório são cortados. A



ancoragem se faz por aderência entre os fios e o concreto. Na figura 5.1, apresenta-se um esquema de duas vigas com armadura pré-tracionada<sup>37</sup>. Este processo é empregado principalmente em peças pré-moldadas.

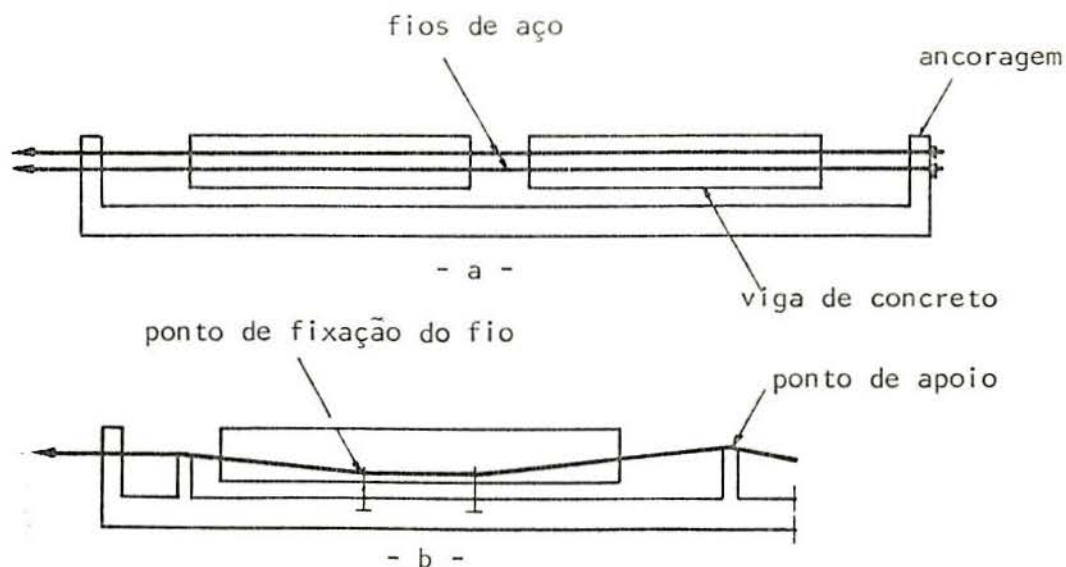


FIGURA 5.1 - Sistema com armaduras pré-tracionadas:  
a) armadura retilínea;  
b) armadura poligonal.

b) Pós-tracionadas.

Os cabos, colocados dentro de bainhas metálicas corrugadas, são tracionados após o endurecimento do concreto. A protensão é transferida gradualmente, e a própria peça é utilizada como apoio definitivo para a ancoragem dos fios. A operação de tração do cabo é feita, em geral, por meios mecânicos, sendo mais usuais os macacos hidráulicos. A figura 5.2 mostra o esquema de uma viga com armadura pós-tracionada. Os macacos atuam nos pontos A, onde prendem os cabos, e se apoiam na própria peça.

Depois de esticados, os cabos são ancorados definitivamente, através de dispositivos de ancoragem, ficando sob tensão. Os macacos são então retirados.

As estruturas protendidas com armaduras pós-tracionadas podem ainda ser com ou sem aderência, dependendo se é feita, ou não, a injeção de nata de cimento nas bainhas, após a proten



são dos cabos.

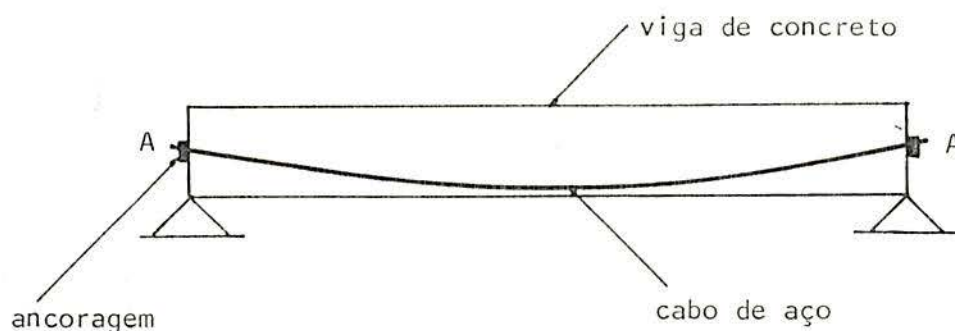


FIGURA 5.2 - Sistema com armadura pós-tensionada.

O presente trabalho é voltado para o estudo das estruturas pós-tensionadas com aderência, que são empregadas principalmente em obras executadas "in loco".

Na análise das peças em concreto protendido, a variação de tensão do aço, nos vários estágios de carregamento, é um fator importante porque o comportamento das mesmas depende da tensão efetiva no aço. Nas estruturas pós-tensionadas, ocorrem perdas de protensão durante a operação de tração e depois da transferência da protensão. As primeiras são devidas ao atrito entre o cabo e a bainha, e também ao escorregamento da ancoragem. As outras se devem à fluência e retração do concreto, à relaxação do aço para protensão e aos efeitos das histórias de carga e de temperatura.

No presente estudo, para o procedimento da análise de estruturas em concreto protendido, emprega-se aquele desenvolvido para o concreto armado, com algumas modificações que são devidas às características próprias do concreto protendido. Neste capítulo, discutir-se-á principalmente essas últimas.

## 5.2 - Definições e Hipóteses

Na figura 5.3, mostrá-se um pórtico típico em concreto protendido e uma discretização do mesmo.

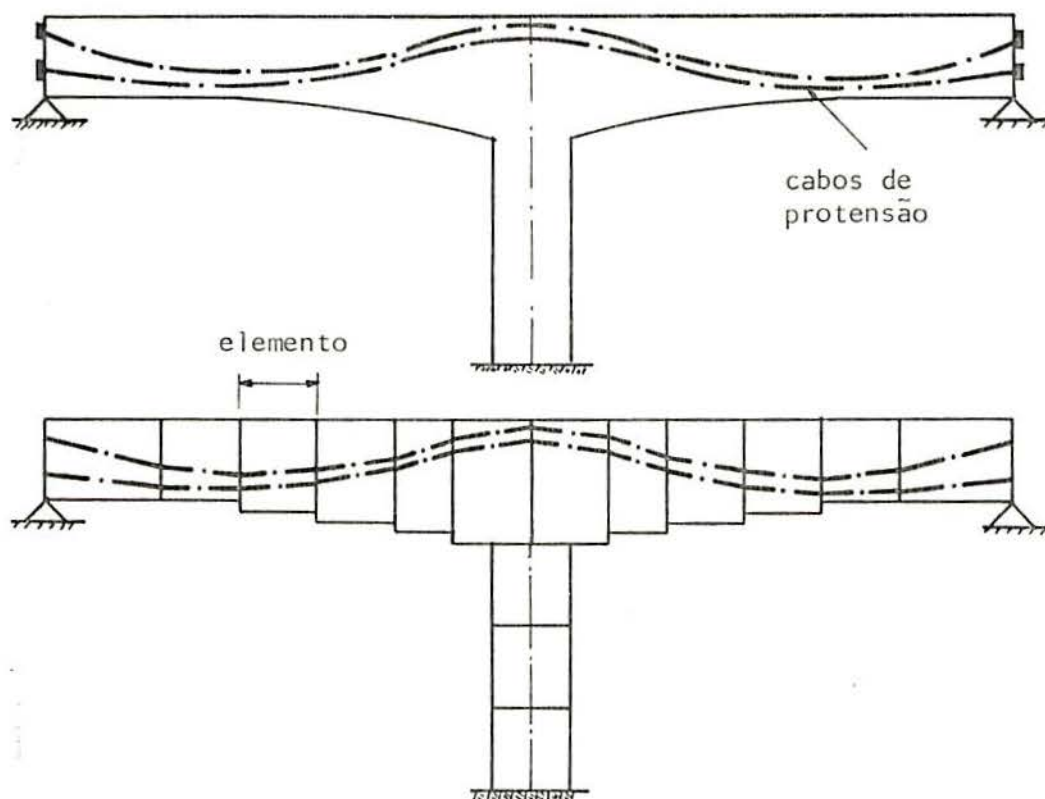


FIGURA 5.3 - Estrutura em concreto protendido:  
a) real; b) idealizada.

Além das definições e hipóteses com relação à geometria e deformação das peças em concreto armado, vistas na seção 4.1, devem ser feitas ainda algumas considerações para o concreto protendido.

Devem ser dados o número de cabos de protensão, o perfil, a força de tração inicial e a área da seção transversal de cada cabo, sendo que essa última deve ser constante ao longo do comprimento. A geometria do cabo é aproximada por um número discreto de segmentos retos, cada um deles correspondente a um elemento da estrutura. A localização dos pontos extremos do segmento do cabo fica definida pelas excentricidades  $e_i$  e  $e_j$ , que são as distâncias dos extremos do segmento até o nó  $i$  e  $j$ , respectivamente, como se vê na figura 5.4.

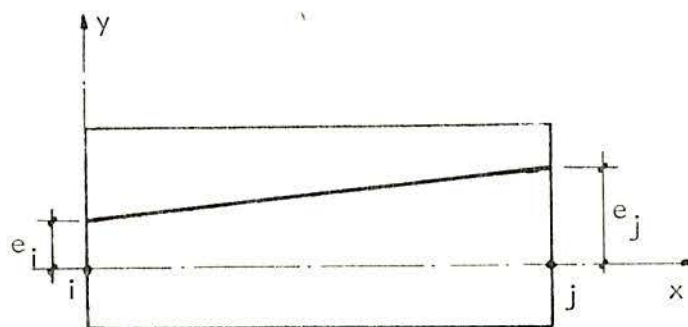


FIGURA 5.4 - Excentricidades de um segmento de cabo num elemento de concreto.

Assume-se que exista perfeita aderência entre o concreto e o cabo, o que faz com que o campo de deslocamentos de um elemento seja contínuo.

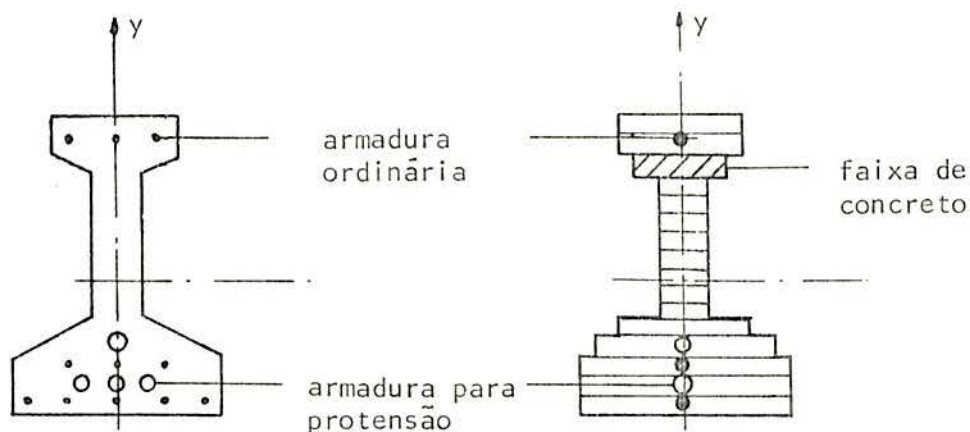


FIGURA 5.5 - Seção transversal de uma peça em concreto protendido: a) real; b) idealizada.

Na figura 5.5, mostra-se uma seção transversal real e a sua discretização em faixas de concreto. Para a armadura ordinária e para a armadura de protensão, concentra-se a área de cada camada no eixo de simetria da seção transversal.

### 5.3 - Análise de Estruturas Pós-Tracionadas

#### 5.3.1 - Análise na transferência da protensão

Para estruturas em concreto protendido com armadura pós-tracionada, a protensão é transferida gradualmente, durante a operação de tração. Nessa fase, os cabos, ao se deslocarem em relação à viga, sofrem perdas no esforço de protensão por atrito nos pontos de contato entre a armadura e a bainha. Se a força de protensão, de valor inicial  $P_0$ , é aplicada em uma das extremidades, como se mostra na figura 5.6, as perdas ocorrem na forma de um decréscimo gradual na força de protensão ao longo do cabo, a partir da extremidade tracionada. Tal decréscimo pode ser calculado na maneira como se segue.

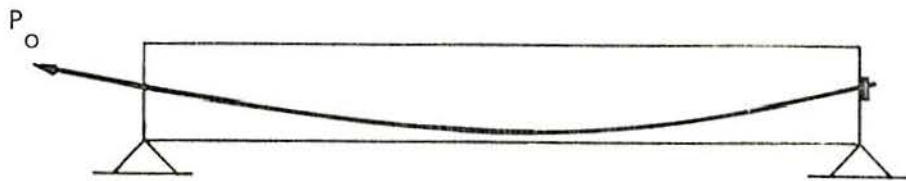


FIGURA 5.6 - Viga pós-tracionada com a força inicial  $P_0$ .

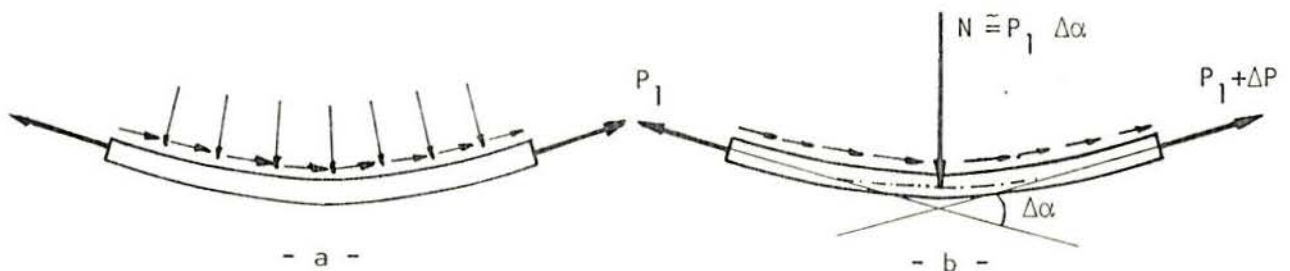


FIGURA 5.7 - a) Diagrama de corpo livre de um trecho de cabo com deflexão  $\Delta\alpha$ ;  
b) resultante  $N$ .



Na figura 5.7.a, está mostrado o diagrama de corpo livre de um segmento de cabo, tracionado com a força  $P_1$ , na zona onde se produz uma deflexão  $\Delta\alpha$ . As forças distribuídas, que exerce a bainha sobre o cabo, podem ser substituídas por uma resultante  $N$ , cujo valor, na hipótese de atrito reduzido e de que  $\Delta\alpha$  é pequeno, é  $N \approx P_1 \Delta\alpha$ . Como consequência do alongamento do cabo, se produz um deslocamento relativo, originando uma força de atrito que pode ser estimada, aproximadamente na forma

$$f_r = \mu N = \mu P_1 \Delta\alpha, \quad (5.1)$$

sendo  $\mu$  o coeficiente de atrito entre o cabo e a bainha, e significando um decréscimo  $\Delta P$ , no esforço no cabo, sendo

$$\Delta P = -\mu P_1 \Delta\alpha. \quad (5.2)$$

Expressando a equação (5.2) em forma diferencial e integrando entre o ponto de aplicação da protensão e um ponto a uma distância  $s$ , medida sobre o arco, do primeiro<sup>37</sup>, obtém-se

$$P_s = P_0 e^{-\mu\alpha}; \quad (5.3)$$

onde  $\alpha$  é a deflexão total no trecho considerado.

Além do atrito causado pelas curvaturas do eixo do cabo, existe um outro, produzido por desvios da bainha em relação à sua posição teórica, principalmente pequenos afastamentos do plano em que deveria ela estar contida. Esses desvios parasitários são construtivos e se manifestam tanto nos trechos retos como nos curvos. Para efeito de cálculo, eles podem ser assimilados a variações angulares,  $k_\ell$ , por metro linear de cabo<sup>37</sup>. Na figura 5.8, tem-se um trecho de cabo de comprimento  $s$  e deflexão  $\alpha$ . O ângulo de deflexão total é tomado como a deflexão geométrica real  $\alpha$ , mais a fictícia  $k_\ell s$ , representativa dos desvios parasitários da bainha.

sendo  $E_p$  o módulo de deformação longitudinal do aço de protensão, e  $A_p$  a área da seção transversal do cabo.

### 5.3.2 - Determinação das ações nodais equivalentes à protensão

Na figura 5.9, mostra-se um segmento elementar da discretização indicada em 4.1, atravessado por um segmento de cabo de protensão, considerado reto pela aproximação da geometria, como dado em 5.2.

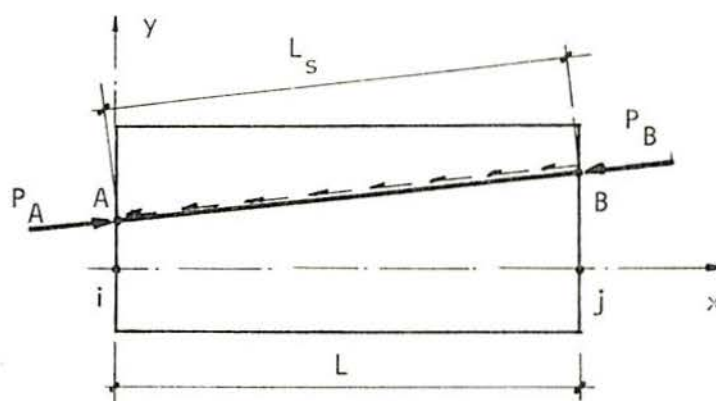


FIGURA 5.9 - Ações do cabo sobre o concreto.

O sistema de forças distribuídas indicado corresponde às ações do cabo sobre o concreto, que serão tratadas como ações exteriores. Ele é constituído por duas forças concentradas atuantes nos pontos extremos do segmento do cabo e uma carga distribuída representando as perdas ao longo do mesmo, como se verá a seguir.

As ações nodais equivalentes serão reduzidas aos nós  $i$  e  $j$ , o que será realizado em duas etapas. Primeiramente, será construído um sistema nodal equivalente à carga distribuída que representa as perdas, para logo ser adicionado à contribuição das cargas concentradas, cujo cálculo é imediato.

Assumindo que a perda no esforço de protensão devido ao escorregamento de ancoragem, para todo o cabo, seja aquela dada pela expressão (5.6), o decréscimo na força de cada segmento  $i$ , é

$$\Delta P_c^i = \frac{\Delta P_c L_s}{L_t}; \quad (5.7)$$

sendo  $L_s$ , o comprimento do segmento. Considera-se que as forças concentradas atuantes no segmento da figura 5.9, valem

$$P_A = P_1 - \Delta P_c^i$$

e

$$P_B = P_2 - \Delta P_c^i; \quad (5.8)$$

onde  $P_1$  e  $P_2$  são as forças no segmento, após se descontar as perdas por atrito.

Dentro das hipóteses assumidas, os efeitos dissipativos de atrito e ancoragem podem ser representados pela carga uniformemente distribuída  $p_m$  ao longo do segmento, calculada por

$$p_m = \frac{P_A - P_B}{L_s}. \quad (5.9)$$

Para introduzir essa perda no modelo empregado, de maneira consistente, essa carga necessita ser transformada em ações nodais, a serem adicionadas às forças exteriores restantes. Uma forma de efetuar tal transformação, é construir um sistema estaticamente equivalente às perdas, de forma que o trabalho externo realizado pelos dois sistemas, ao longo de deslocamentos nodais arbitrários, seja o mesmo.

A partir da figura 5.10, primeiramente calcula-se o trabalho externo  $W_p$ , realizado pela força distribuída  $p_m$ . Na hipótese de que os nós  $i$  e  $j$  experimentam deslocamentos nodais arbitrários  $u_{oi}$ ,  $u_{oj}$ ,  $v_i$ ,  $v_j$ ,  $\theta_i$  e  $\theta_j$ , tem-se

$$W_p = \int_0^{L_s} (u p_m \cos \alpha + v p_m \sin \alpha) dx_s. \quad (5.10)$$

Pela hipótese das seções planas, o deslocamento na direção do eixo  $x$  local,  $u$ , resulta

$$u = u_o - y \frac{dv}{dx}; \quad (5.11)$$



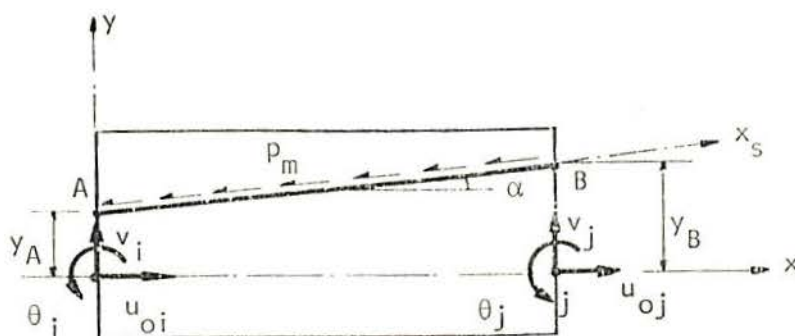


FIGURA 5.10 - Perdas distribuídas e deslocamentos nodais.

e como

$$dx_s = \frac{dx}{\cos \alpha} \quad (5.12)$$

e

$$y = y_A + x \operatorname{tg} \alpha;$$

substituindo em (5.10) e reordenando, fica

$$W_p = p_m \int_0^L \left[ u_o - (y_A + x \operatorname{tg} \alpha) \frac{dv}{dx} + v \operatorname{tg} \alpha \right] dx. \quad (5.13)$$

Representando os deslocamentos  $u_o$  e  $v$  em termos dos valores nodais, através da solução exata do problema elástico-linear, ou seja, por meio de uma interpolação linear para  $u_o$ , e pelos polinômios cúbicos de l'Hermite para os deslocamentos  $v$ , tal como se fez em 4.1.2, substituindo em (5.13) e integrando, finalmente resulta

$$W_p = p_m \left[ \frac{L}{2} (u_{oi} + u_{oj}) + y_A v_i - y_B v_j + L \operatorname{tg} \alpha (v_i + v_j) + \frac{L^2 \operatorname{tg} \alpha}{6} (\theta_i - \theta_j) \right]. \quad (5.14)$$

A rigor, no desenvolvimento efetuado, implicitamente intervêm uma hipótese adicional, na qual assume-se que o campo de deslocamentos associados com a carga  $p_m$  é o mesmo que aquele do



concreto que envolve a bainha. Isso não está rigorosamente certo, já que essas perdas ocorrem antes da injeção da nata de cimento na bainha.

A equação (5.14) será empregada como controle na determinação das ações equivalentes às perdas, que será feita através do cálculo das reações de apoio originadas da solução do problema de equilíbrio elástico do segmento, suposto engastado nos dois extremos, e tendo  $p_m$  como a única carga externa.

Efetuada uma redução do carregamento ao eixo local, resultam duas cargas distribuídas  $p_v$ ,  $p_h$  e um binário distribuído  $m$ , como se vê na figura 5.11.

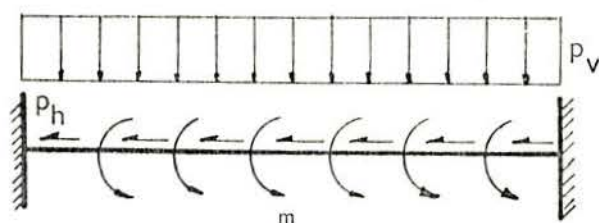


FIGURA 5.11 - Redução da perda distribuída ao eixo do elemento.

Resolvendo o problema da figura 5.11 pelo método das forças e trocando o sinal das reações, o sistema das ações nodais equivalentes à perda distribuída  $p_m$  está representado na figura 5.12.



FIGURA 5.12 - Ações nodais equivalentes à perda  $p_m$ .

Tais ações são expressas por

$$H_i = H_j = p_m \frac{L}{2} ; \quad (5.15)$$

$$R_i = p_m \gamma_B ; \quad (5.16)$$

$$R_j = p_m \gamma_A ; \quad (5.17)$$

e

$$X_i = X_j = \frac{p_m L^2 \operatorname{tg} \alpha}{6} . \quad (5.18)$$

Para verificar a consistência dos resultados obtidos, calcula-se o trabalho realizado pelas ações equivalentes, ao longo dos deslocamentos arbitrários  $u_{oi}$ ,  $u_{oj}$ ,  $v_i$ ,  $v_j$ ,  $\theta_i$  e  $\theta_j$ , que é

$$\begin{aligned} W_a = & u_{oi} p_m \frac{L}{2} + u_{oj} p_m \frac{L}{2} + p_m \gamma_B v_i - p_m \gamma_A v_j + \\ & + \theta_i p_m \frac{L^2 \operatorname{tg} \alpha}{6} - \theta_j p_m \frac{L^2 \operatorname{tg} \alpha}{6} ; \end{aligned} \quad (5.19)$$

ou

$$\begin{aligned} W_a = & p_m \left[ \frac{L}{2} (u_{oi} + u_{oj}) + \gamma_A v_i - \gamma_B v_j + L \operatorname{tg} \alpha (v_i + v_j) + \right. \\ & \left. + \frac{L^2 \operatorname{tg} \alpha}{6} (\theta_i - \theta_j) \right] . \end{aligned} \quad (5.20)$$

Pode-se verificar que a expressão (5.20) é idêntica àquela obtida em (5.14), o que era de se esperar, já que a interpolação assumida para os deslocamentos coincide com a solução elástica respectiva.

Construindo nos nós  $i, j$  sistemas equivalentes às forças concentradas  $P_A, P_B$ , respectivamente, e adicionando as contribuições das perdas, o vetor das forças nodais equivalentes à protensão,  $\underline{P}_p$ , para o elemento,

$$\underline{P}_p^T = \{N_1, N_2, Q_1, Q_2, M_1, M_2\} ; \quad (5.21)$$

resulta

$$\begin{aligned}
 N_1 &= -H_i + P_A \cos \alpha = -p_m \frac{L}{2} + P_A \cos \alpha ; \\
 N_2 &= -H_j - P_B \cos \alpha = -p_m \frac{L}{2} - P_B \cos \alpha ; \\
 Q_1 &= -R_i + P_A \sin \alpha = -p_m y_B + P_A \sin \alpha ; \\
 Q_2 &= R_j - P_B \sin \alpha = p_m y_A - P_B \sin \alpha ; \\
 M_1 &= -X_i - P_A y_A \cos \alpha = -\frac{1}{6} p_m L^2 \operatorname{tg} \alpha - P_A y_A \cos \alpha ; \\
 M_2 &= X_j + P_B y_B \cos \alpha = \frac{1}{6} p_m L^2 \operatorname{tg} \alpha + P_B y_B \cos \alpha .
 \end{aligned}
 \tag{5.22}$$

Na figura 5.13.a, estão representadas as forças concentradas  $P_A$  e  $P_B$ , dadas por (5.8), e o sistema equivalente à perda  $p_m$ , enquanto na figura 5.13.b, vê-se as componentes do vetor  $\vec{P}$ .

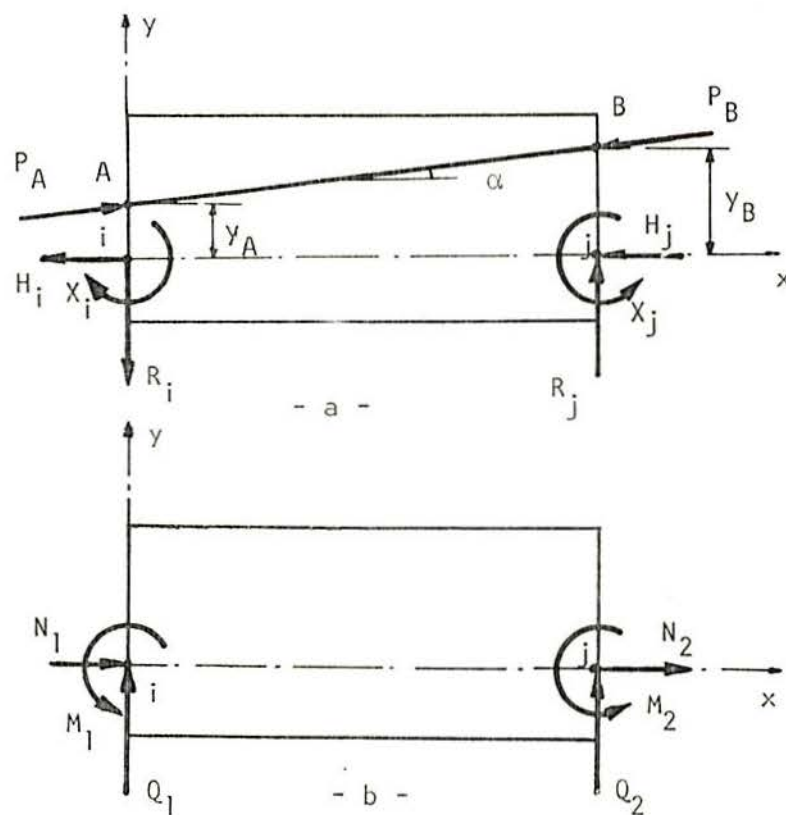


FIGURA 5.13. a) Forças concentradas nos extremos do segmento. Sistema equivalente à perda  $p_m$ ;  
 b) componentes do vetor  $\vec{P}$ .

Pode acontecer, especialmente em estruturas de inércia variável como a mostrada na figura 5.14, ser conveniente estabelecer um eixo comum a todos os elementos, o que implicaria na necessidade de uma redução das ações nodais a pontos nele contidos.

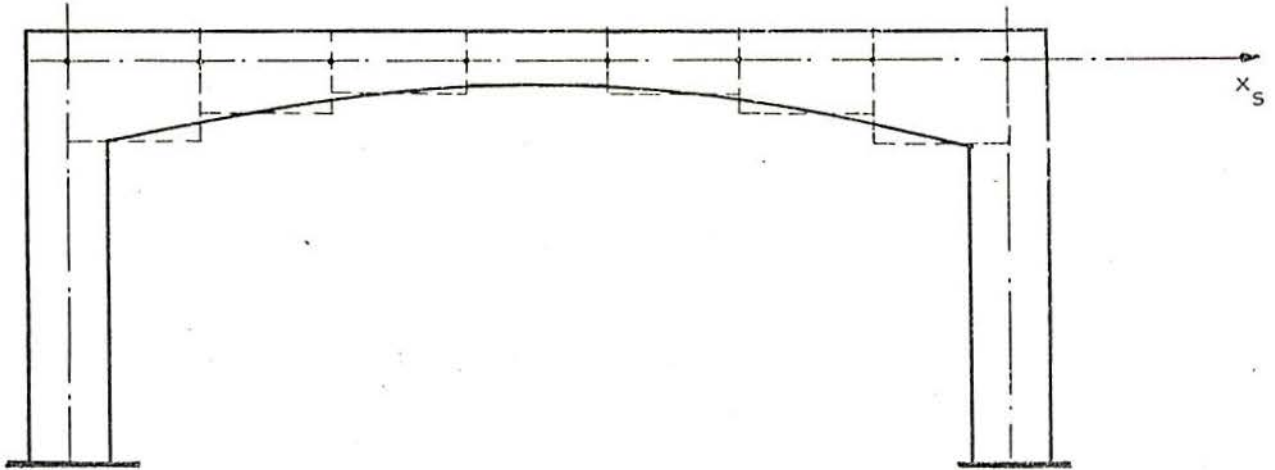


FIGURA 5.14 - Estrutura de inércia variável.

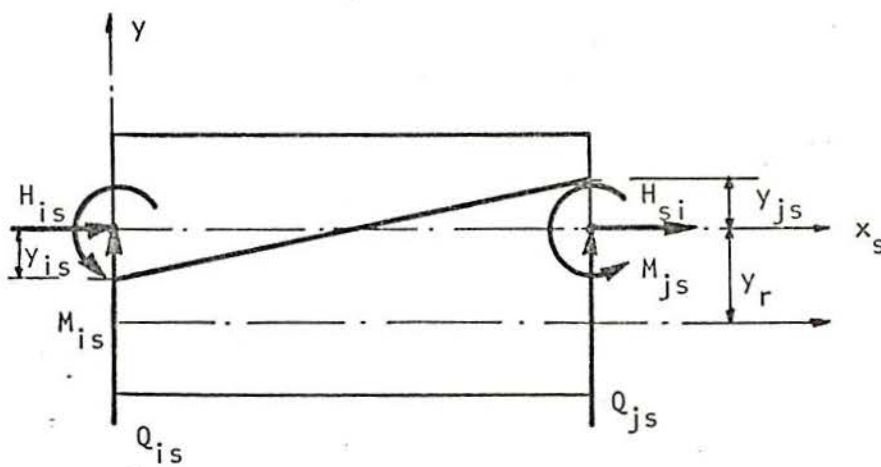


FIGURA 5.15 - Ações reduzidas ao eixo de referência  $x_s$ .

Tomando-se como eixo de referência para a estrutura da figura 5.14, o eixo local do elemento central, e destacando-se, por exemplo, o primeiro elemento, mostrado na figura 5.15, o sistema das ações nodais seria



$$\begin{aligned} H_{si} &= H_1 ; & H_{sj} &= H_2 ; \\ Q_{si} &= Q_1 ; & Q_{sj} &= Q_2 ; \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$M_{si} = M_1 + N_1 y_r$$

e

$$M_{sj} = M_2 + N_2 y_r ;$$

onde  $y_r$  é a distância entre o eixo de referência da estrutura e o eixo local do elemento.

### 5.3.3 - Síntese da análise durante a transferência da protensão

O procedimento de análise na transferência da protensão, pode ser resumido da seguinte forma:

a) A partir da força de protensão inicial em cada cabo,  $P_o$ , calcular as forças nos extremos de cada segmento de aço, pela equação (5.5), começando pela extremidade tracionada.

b) Subtrair das forças nos extremos do segmento, as perdas devidas ao escorregamento de ancoragem, dadas pelas equações (5.8).

c) Construir o sistema equivalente à perda distribuída  $p_m$ , pelas equações (5.15) a (5.18).

d) Calcular o vetor das cargas nodais equivalentes à protensão, pelas equações (5.22).

e) Analisar a estrutura para as cargas nodais devidas à protensão, considerada como uma ação externa, e ao peso próprio, para se determinar o estado de deformação antes de ser injetada a nata de cimento na bainha.

### 5.3.4 - Análise depois da transferência

Uma vez injetada a nata e adquirida a aderência entre o concreto e o aço de protensão, o cabo fica incorporado monoliticamente no interior da peça, acompanhando as deforma-

ções da mesma. Conseqüentemente, na análise correspondente às cargas de serviço impostas à estrutura, é necessário avaliar uma contribuição adicional do aço de protensão nas ações de extremo de membro.

A determinação dessa contribuição, é feita como se segue, baseando-se na figura 5.16.

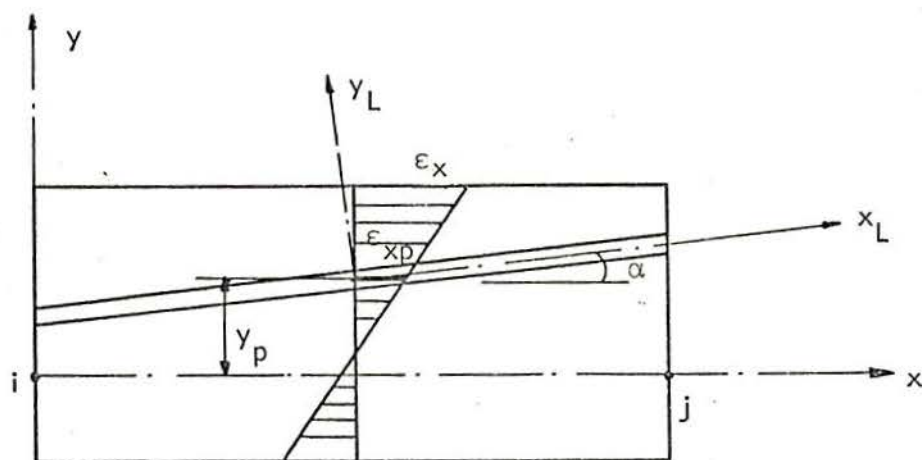


FIGURA 5.16 - Distribuição das deformações em uma seção do elemento.

Os incrementos de deformações e de tensões no concreto, considerados os mesmos do aço, têm como direções principais os eixos  $x$  e  $y$ . O incremento de deformação na direção do eixo do cabo, é obtido por uma transformação tensorial, onde é assumido que  $\Delta\epsilon_y = \Delta\epsilon_{xy} = 0$ . Assim, a partir do incremento de deformação na faixa de concreto situada à distância  $y_p$ ,  $\Delta\epsilon_{xp}$ , o incremento de deformação  $\Delta\epsilon_x^L$ , associado com o eixo local  $x^L$  do cabo, é dado por

$$\Delta\epsilon_x^L = \cos^2 \alpha \Delta\epsilon_x ; \quad (5.34)$$

onde

$$\cos \alpha = \cos (x^L; x) . \quad (5.35)$$

Dado um conjunto de incrementos de deslocamentos e rotações nodais, em cada seção, com o auxílio das funções de interpolação, pode-se calcular os incrementos de deformação pela fórmula (5.34), que adicionada à deformação prévia do aço de pro-

tensão, permite entrar no diagrama característico do mesmo, e obter o incremento de tensão e a tensão total na direção do cabo,  $\sigma_x^L$ .

Descontando a tensão inicial no cabo, tem-se  $\bar{\sigma}_x^L$  que é a tensão no cabo, acumulada a partir do início do carregamento externo. Aplicando a transformação tensorial inversa, obtém-se a tensão na direção do eixo x do elemento  $\bar{\sigma}_x$ , na forma

$$\bar{\sigma}_x = \frac{\bar{\sigma}_x^L}{\cos^2 \alpha} \quad (5.36)$$

As ações de membro associadas,  $\underline{R}_p$ , calculam-se por uma expressão similar à (4.18), integrando no volume do segmento de cabo

$$\underline{R}_p = \int_0^L \bar{\sigma}_x (\underline{B}^T + \underline{C}^T \underline{C} \underline{U}) A_x dx. \quad (5.37)$$

Mas,

$$A_x = \frac{A}{\cos \alpha}; \quad (5.38)$$

sendo A a área da seção transversal da armadura. Substituindo (5.36) e (5.38) na (5.37), a expressão para o vetor das forças internas devidas à protensão, fica

$$\underline{R}_p = \frac{1}{\cos^3 \alpha} \int_0^L \bar{\sigma}_x^L (\underline{B}^T + \underline{C}^T \underline{C} \underline{U}) A dx. \quad (5.40)$$

O vetor  $\underline{B}$ , dado pela equação (4.12), depende somente de x, enquanto  $\underline{C}$ , equação (4.13), é dependente de x e y. Para cada abscissa x, equivalente ao ponto de integração ao longo do eixo do elemento, y vale

$$y = y_i + x \operatorname{tg} \alpha; \quad (5.41)$$

sendo  $y_i$ , a ordenada do cabo no nó i.

Obtido o vetor  $\underline{R}_p$  para cada elemento, ele é transformado para as coordenadas globais da estrutura e adicionado

ao vetor de forças internas resistentes devidas ao concreto e aço para armadura ordinária. Essas contribuições elementares, montadas para toda a estrutura em concreto protendido, formam o vetor das forças resistentes  $\underline{P}_{-NL}(\underline{U})$ , que permite a aplicação do algoritmo descrito em 3.2.



## 6. APLICAÇÕES NUMÉRICAS

### 6.1 - Generalidades

Com o programa PROTENDE, descrito no capítulo 3, foram analisadas uma viga e duas vigas-colunas em concreto armado, quatro vigas em concreto protendido, uma peça composta pela união entre uma viga e um pilar, em concreto armado, e outras duas peças com as características dessa última, porém sendo a viga em concreto protendido. Com esses exemplos, procura-se verificar a validade do desenvolvimento teórico deste estudo para estruturas em concreto armado ou protendido, submetidas a cargas de curta duração; e deseja-se também demonstrar a capacidade do programa PROTENDE para determinar a resposta de tais estruturas.

### 6.2 - Estruturas em Concreto Armado

#### 6.2.1 - Viga ensaiada por SCHEGG e DECANINI - isostática, seção constante

Neste primeiro exemplo, estuda-se uma viga simplesmente apoiada, ensaiada por SCHEGG e DECANINI<sup>41</sup> e mostrada na figura 6.1.a, e compara-se os resultados obtidos com outras soluções numéricas devidas a BIGNON<sup>8</sup> e SARAGOSA<sup>14</sup>.

A discretização adotada, oito elementos para a metade da viga, se encontra na figura 6.1.b. A seção transversal foi dividida em quinze faixas de concreto e está mostrada na figura 6.1.c.

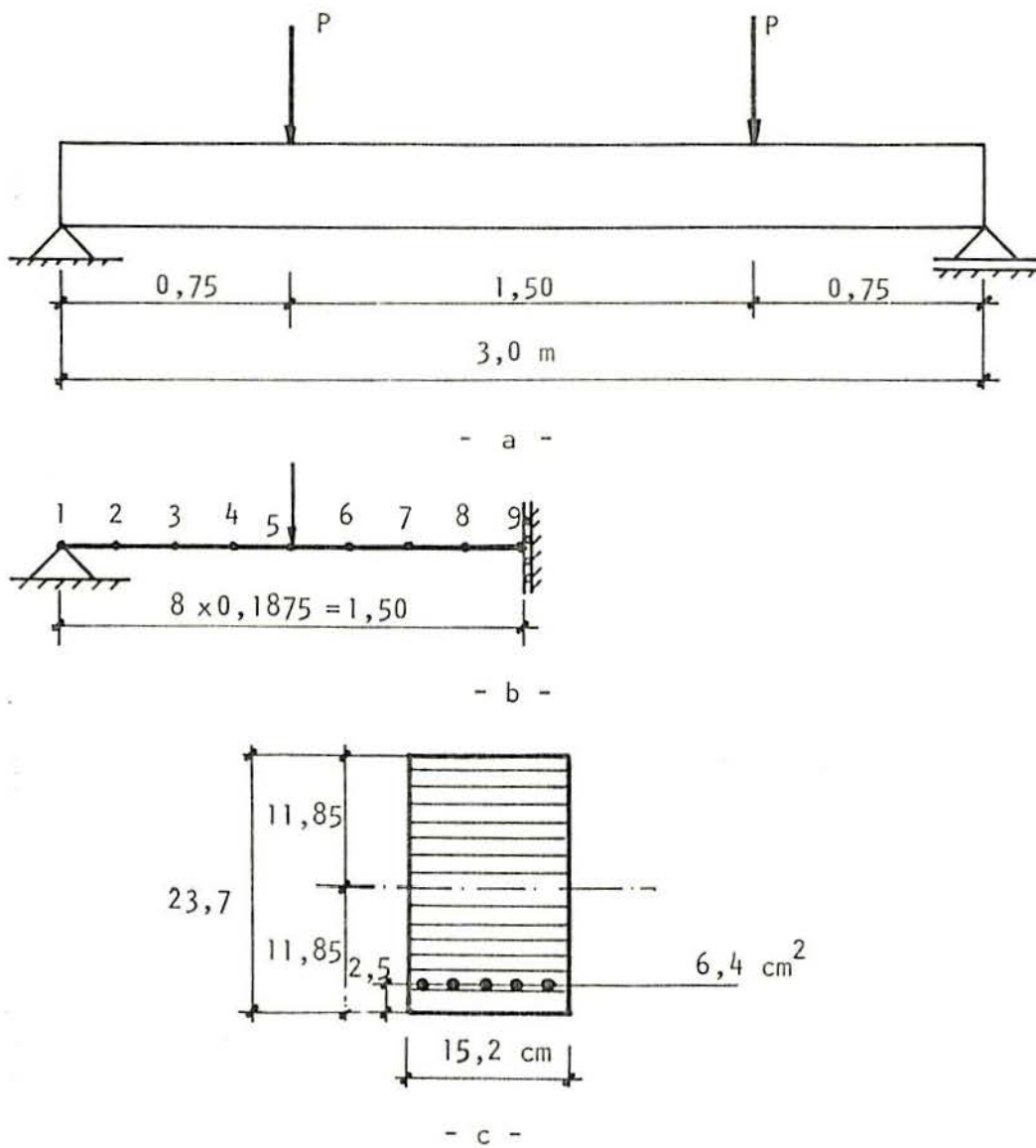


FIGURA 6.1. a) Estrutura real; b) idealizada;  
c) seção transversal.

As características dos materiais são relacionadas a seguir:

a) Concreto

$$f'_c = 24 \text{ MPa} ;$$

$$E_c = 2,5 \times 10^4 \text{ MPa} ;$$

b) Aço

$$f_y = 480 \text{ MPa} ;$$

$$E_1 = 2,1 \times 10^5 \text{ MPa} ;$$

$$E_2 = 1,05 \times 10^4 \text{ MPa} .$$

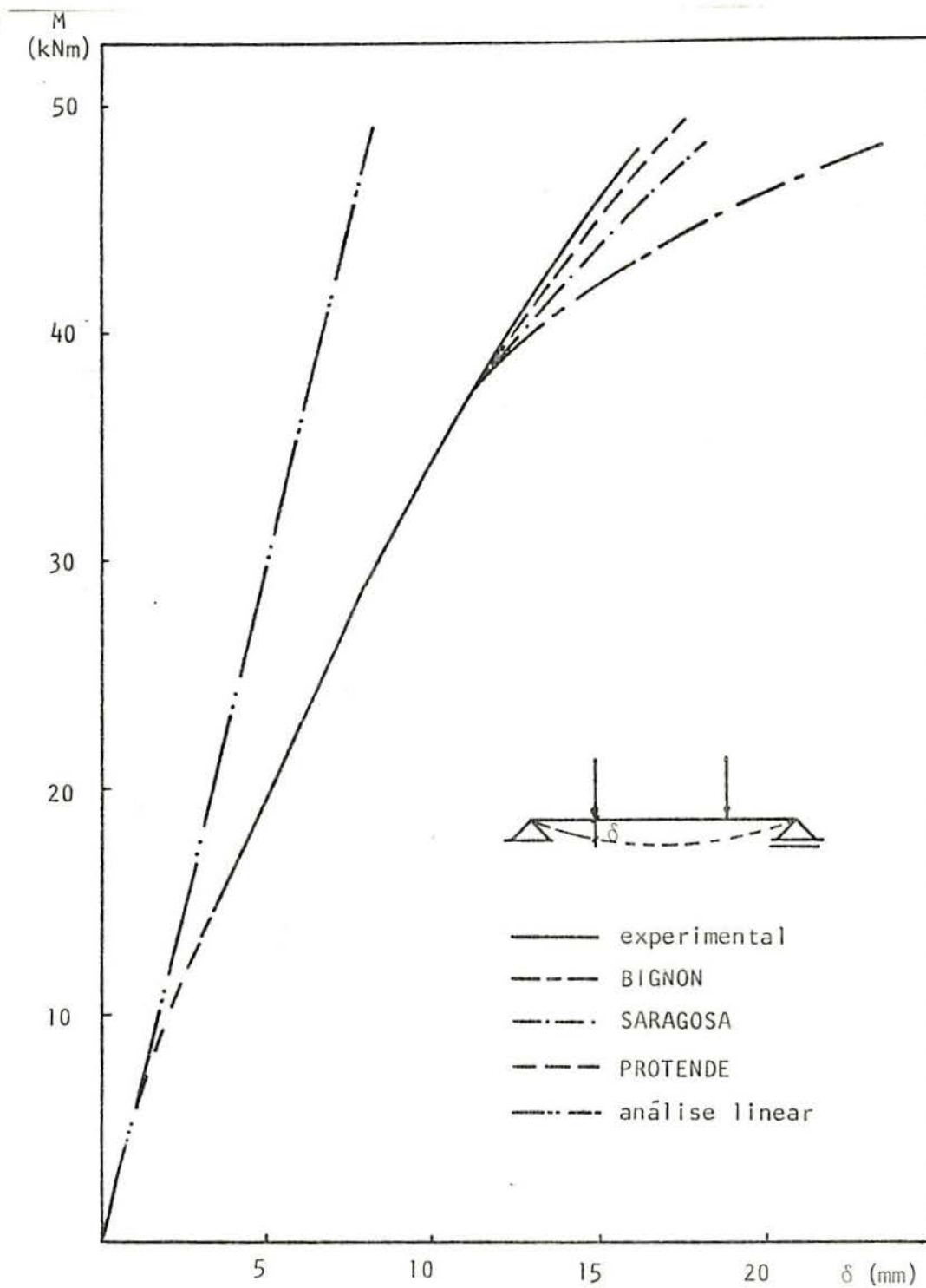


FIGURA 6.2 - Respostas da estrutura.

A resposta obtida para o carregamento indicado está traçada no gráfico da figura 6.2, assim como as soluções apresentadas por BIGNON e SARAGOSA e a curva experimental. O deslocamento  $\delta$  corresponde ao ponto de aplicação da carga.

A solução foi obtida através da aplicação da carga de forma incremental, e foram levadas em conta as não-linearidades física e geométrica.

Pelos gráficos plotados, percebe-se uma boa concordância entre a resposta obtida e os resultados experimentais. A diferença observada nas vizinhanças do momento de ruptura pode ser devida ao fato de que, na consideração da tração do concreto, não se leve em conta, de forma efetiva, a colaboração do concreto entre fissuras. Na resposta apresentada por BIGNON, a discrepância observada é explicada, já que não se levou em conta a colaboração do concreto na resistência aos esforços de tração.

#### 6.2.2 - Viga-coluna submetida à flexo-compressão com pequena excentricidade - isostática, seção constante

A viga-coluna em balanço da figura 6.3, submetida à flexo-compressão, foi discretizada em oito elementos e a seção transversal, mostrada na figura 6.3.c, está dividida em quinze faixas de concreto.

As características dos materiais são as que se seguem:

a) Concreto

$$f'_c = 24 \text{ MPa} ;$$

$$E_c = 2,12 \times 10^4 \text{ MPa} ;$$

b) Aço

$$f_y = 480 \text{ MPa} ;$$

$$E_l = 2,10 \times 10^5 \text{ MPa} ;$$



$$E_2 = 1,05 \times 10^4 \text{ MPa} .$$

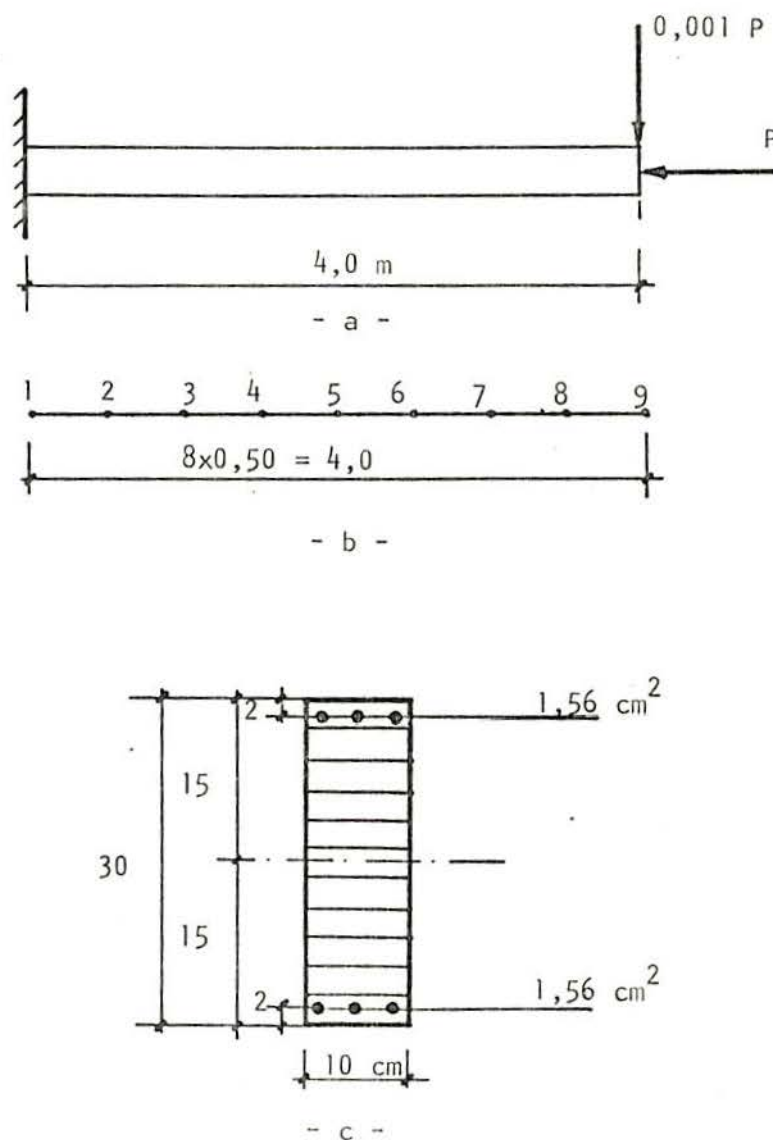


FIGURA 6.3. a) Estrutura real; b) modelo discreto;  
c) seção transversal.

No gráfico da figura 6.4, estão traçadas a curva obtida pelo algoritmo apresentado e a resposta alcançada por BIGNON<sup>8</sup>.

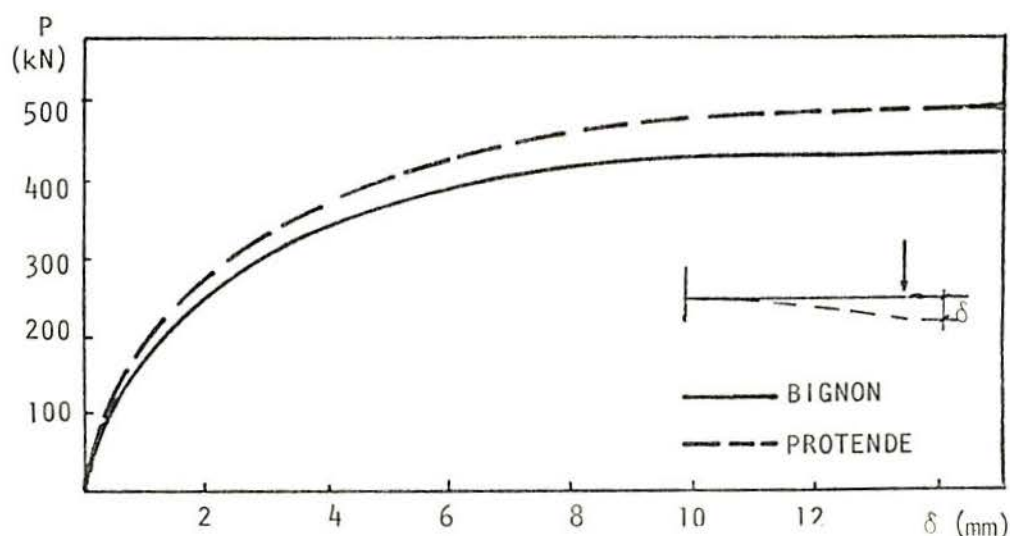


FIGURA 6.4 - Respostas da viga-coluna.

Nota-se que a primeira denota uma maior rigidez da estrutura, devida à consideração da contribuição do concreto na resistência à tração, o que não foi levado em conta por aquele autor. O aspecto da curva se mostra bastante concorde. A solução foi obtida considerando-se as não-linearidades física e geométrica.

### 6.2.3 - Viga-coluna ensaiada no laboratório de Zurich - isostática, seção constante

Através deste exemplo, compara-se a resposta obtida pelo programa desenvolvido no presente estudo com os resultados de ensaios realizados no laboratório de Zurich<sup>45</sup>, na viga-coluna indicada na figura 6.5, submetida à flexo-compressão com pequena excentricidade.

A seção é duplamente armada, foi dividida em quinze faixas de concreto e está mostrada na figura 6.5.c.

O modelo discreto adotado é o da figura 6.5.b, com dez elementos.

As características dos materiais são as seguintes:

a) Concreto

$$f'_c = 28 \text{ MPa} ;$$

$$E_c = 2,35 \times 10^4 \text{ MPa} .$$

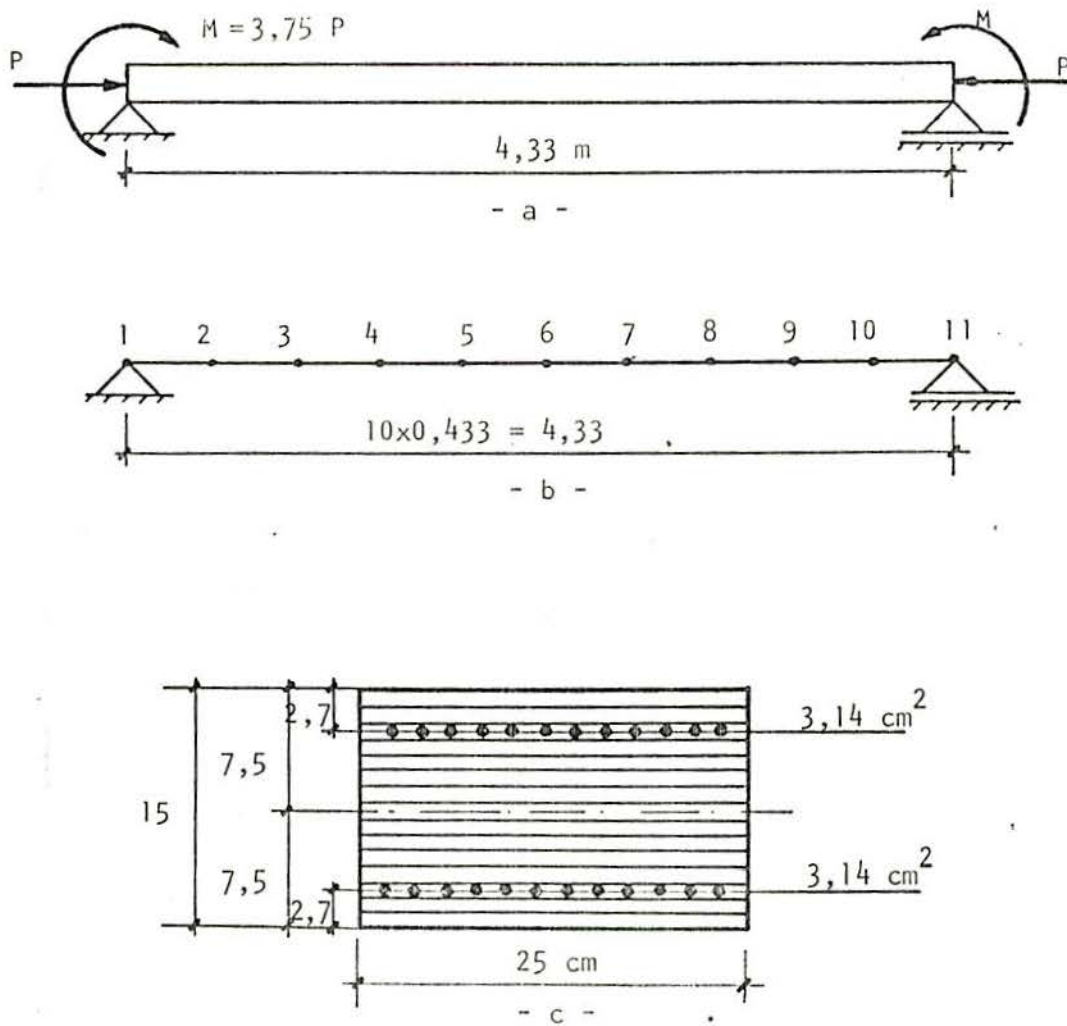


FIGURA 6.5. a) Viga-coluna; b) discretização; c) seção transversal.

b) Aço

$$f_y = 450 \text{ MPa} ;$$

$$E_1 = 2,10 \times 10^5 \text{ MPa} ;$$

$$E_2 = 1,05 \times 10^4 \text{ MPa} .$$

Apresenta-se na figura 6.6, as curvas das respostas obtidas pelo método proposto, pelo ensaio realizado e por SARAGOSA<sup>14</sup>. O deslocamento tomado é aquele correspondente ao

centro da peça. A análise foi feita considerando-se as não-linearidades física e geométrica.

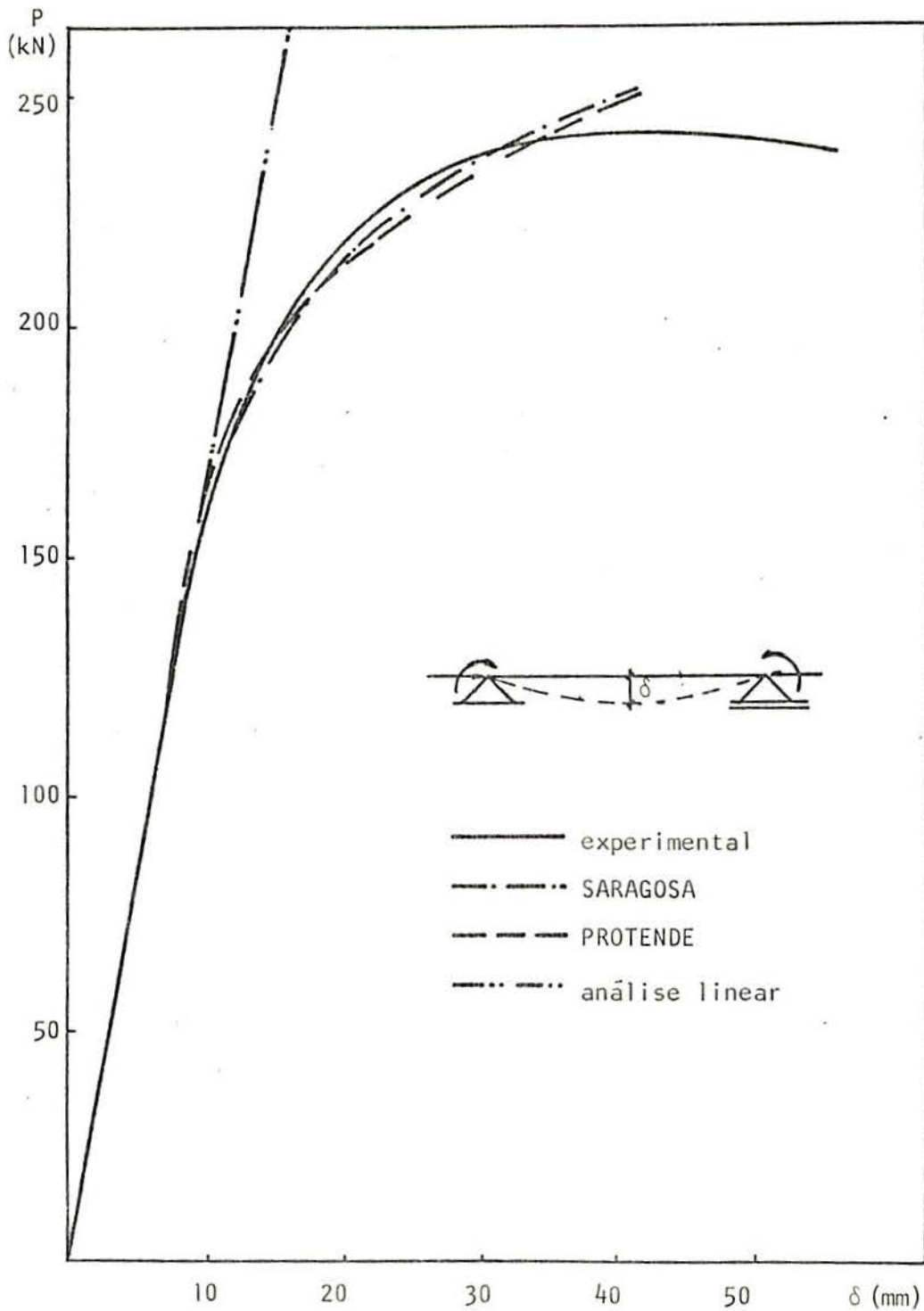


FIGURA 6.6 - Respostas da estrutura.



Nota-se um pequeno enrijecimento próximo ao momento de fissuração e, a partir daí, os deslocamentos são maiores que aqueles medidos experimentalmente. Isso provavelmente se deve ao fato de que apesar de se considerar a resistência do concreto à tração, não é levada em conta a colaboração do concreto entre fissuras.

Observa-se pela curva experimental que, neste caso, o estado limite último de ruína da peça foi atingido por instabilidade do equilíbrio. Como o algoritmo utilizado é de rigidez constante, e devido ao fato do processo de análise teórica ser de controle de cargas, pois são impostas cargas e obtidos os deslocamentos, tem-se dificuldade em acompanhar a resposta real da estrutura nas vizinhanças da ruptura.

#### 6.2.4 - Estrutura em cruz ensaiada por THOMPSON e PARK

A estrutura em cruz da figura 6.7.a com o carregamento da figura 6.7.c, pode ser considerada extraída como parte de um pórtico plano submetido a uma ação lateral, vento ou solicitação sísmica, que determina um estado de deformação mostrado na figura 6.7.b. A carga vertical representa as ações gravitacionais e sobrecargas transmitidas pelo pilar, e os pares antagônicos substituem os esforços cortantes que solicitariam a estrutura original nos pontos de momento nulo.

Nas figuras 6.8.a e 6.8.b, estão a seção transversal do pilar e da viga, respectivamente. As armaduras são constantes ao longo do comprimento das peças.

Neste exemplo, compara-se a resposta determinada pelo algoritmo proposto com os resultados experimentais obtidos por THOMPSON e PARK<sup>46</sup>.

As características dos materiais são:

a) Concreto

$$f'_c = 37 \text{ MPa} ;$$

$$E_c = 1,61 \times 10^4 \text{ MPa} .$$

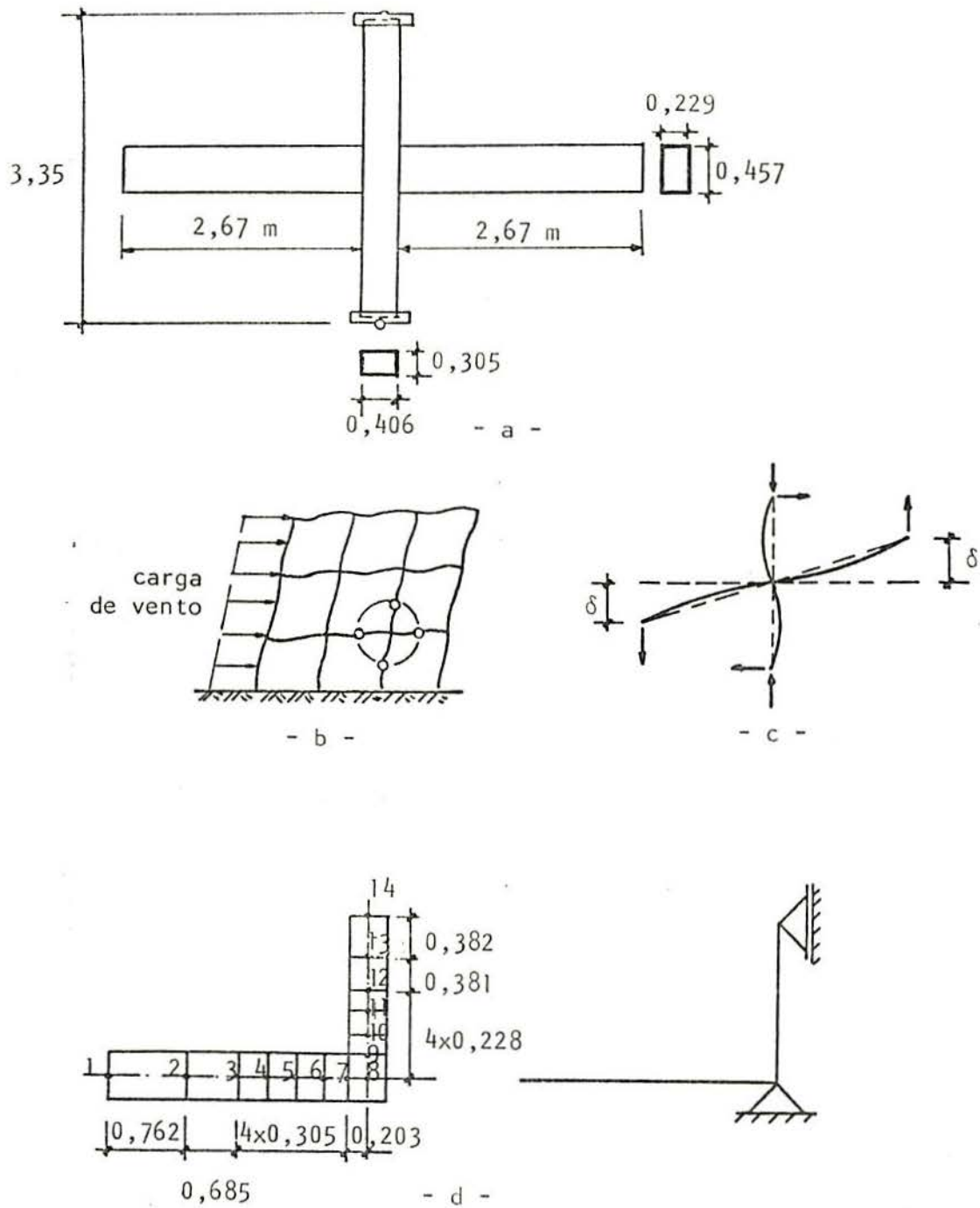
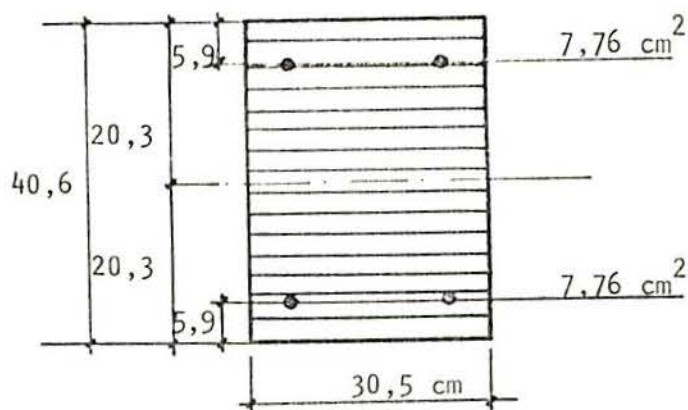
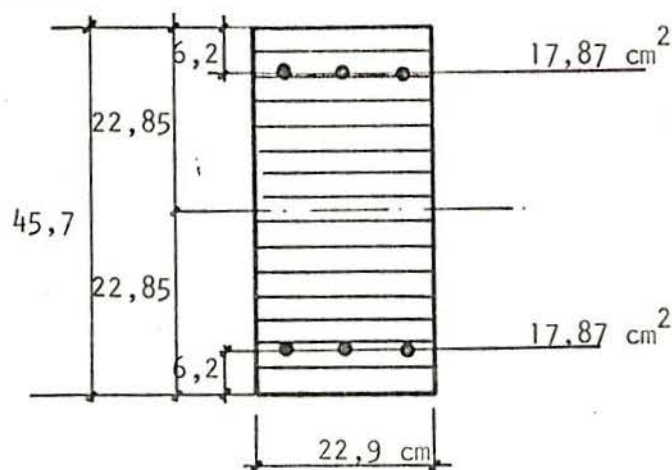


FIGURA 6.7. a) Estrutura; b) estado de deformação de um pórtico sob a ação da carga lateral aplicada; c) carregamento; d) discretização.



- a -



- b -

FIGURA 6.8. a) Seção transversal do pilar;  
b) seção transversal da viga.

b) Aço

$$f_y = 325 \text{ MPa} ;$$

$$E_1 = 2,10 \times 10^5 \text{ MPa} ;$$

$$E_2 = 1,05 \times 10^4 \text{ MPa} .$$

Para o emprego do algoritmo estudado, a estrutura foi discretizada em treze elementos, sete para a viga e seis para o pilar, como se mostra na figura 6.7.d, aproveitando-se a simetria geométrica e a antimetria das cargas de flexão. A seção transversal, tanto da viga quanto do pilar, foi dividida em quinze faixas de concreto.

A carga foi aplicada em 40 etapas, começando pela compressão do pilar. Uma vez atingida a carga de 996 kN, foi imposto, incrementalmente, o carregamento de flexão.

Na figura 6.9 e 6.10, traça-se os diagramas momento na face do pilar - deflexão na extremidade da viga, e momento na face do pilar - curvatura na viga a 6 cm da face do pilar, respectivamente.

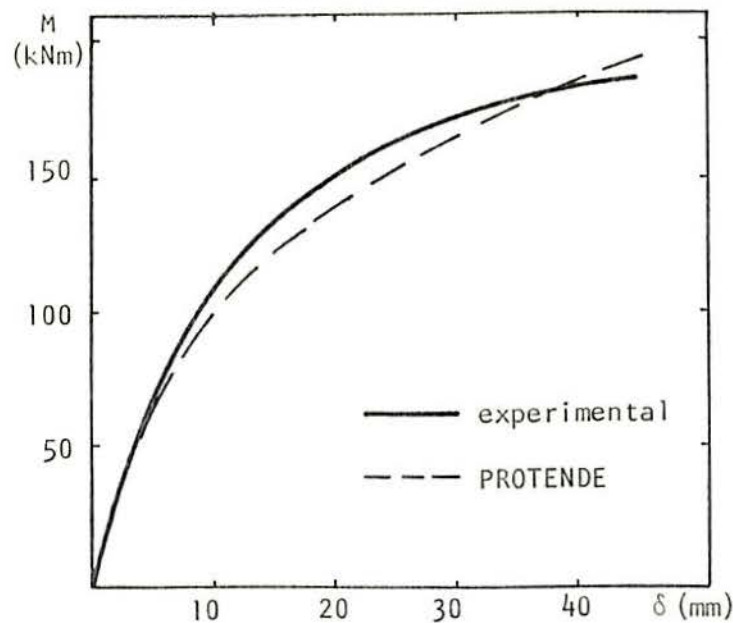


FIGURA 6.9 - Relação momento na face do pilar - deflexão na extremidade da viga.

Nota-se uma boa concordância entre os resultados, exceto no final da resposta, onde o algoritmo proposto apresenta dificuldades em acompanhar a curva experimental, sobreavaliando a rigidez da estrutura. Um maior número de etapas de carga e uma avaliação da rigidez do nó seriam necessários para melhorar a resposta.



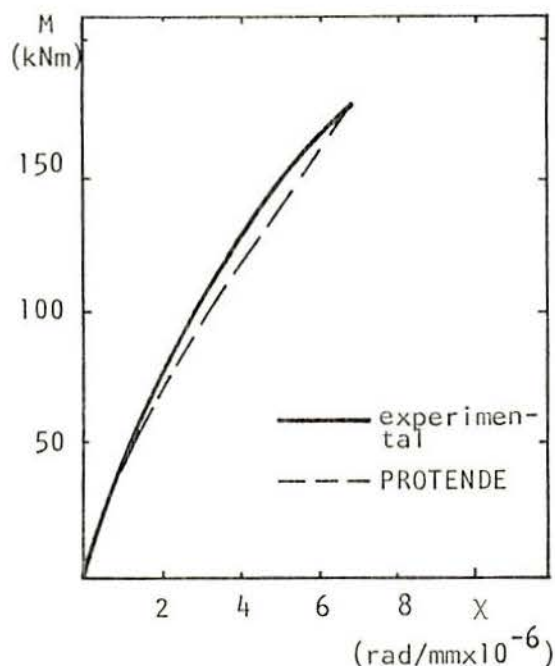


FIGURA 6.10 - Relação momento na face do pilar-curvatura na viga a 6 cm da face do pilar.

### 6.3 - Estruturas em Concreto Protendido

#### 6.3.1 - Vigas contínuas ensaiadas por Lin - 2 vãos, seção constante, um cabo de protensão

Na figura 6.11.a, mostra-se uma viga simétrica em relação ao apoio central, que foi testada por LIN<sup>33</sup>, sob cargas estáticas e dinâmicas, até a ruptura. O cabo de protensão é constituído de um trecho reto, da extremidade até o ponto de aplicação da carga, e uma parte curva sobre o apoio central.

Na realidade, na figura 6.11 estão duas vigas distintas: a viga B tem as armaduras ordinárias mostradas na figura 6.11.b e a viga A não as tem. Para os dois casos, analisou-se a metade da viga, com dez elementos, e a seção transversal foi dividida em onze faixas de concreto. O cabo de protensão foi fracionado em dez segmentos de número correspondente ao elemento de concreto que o contém.

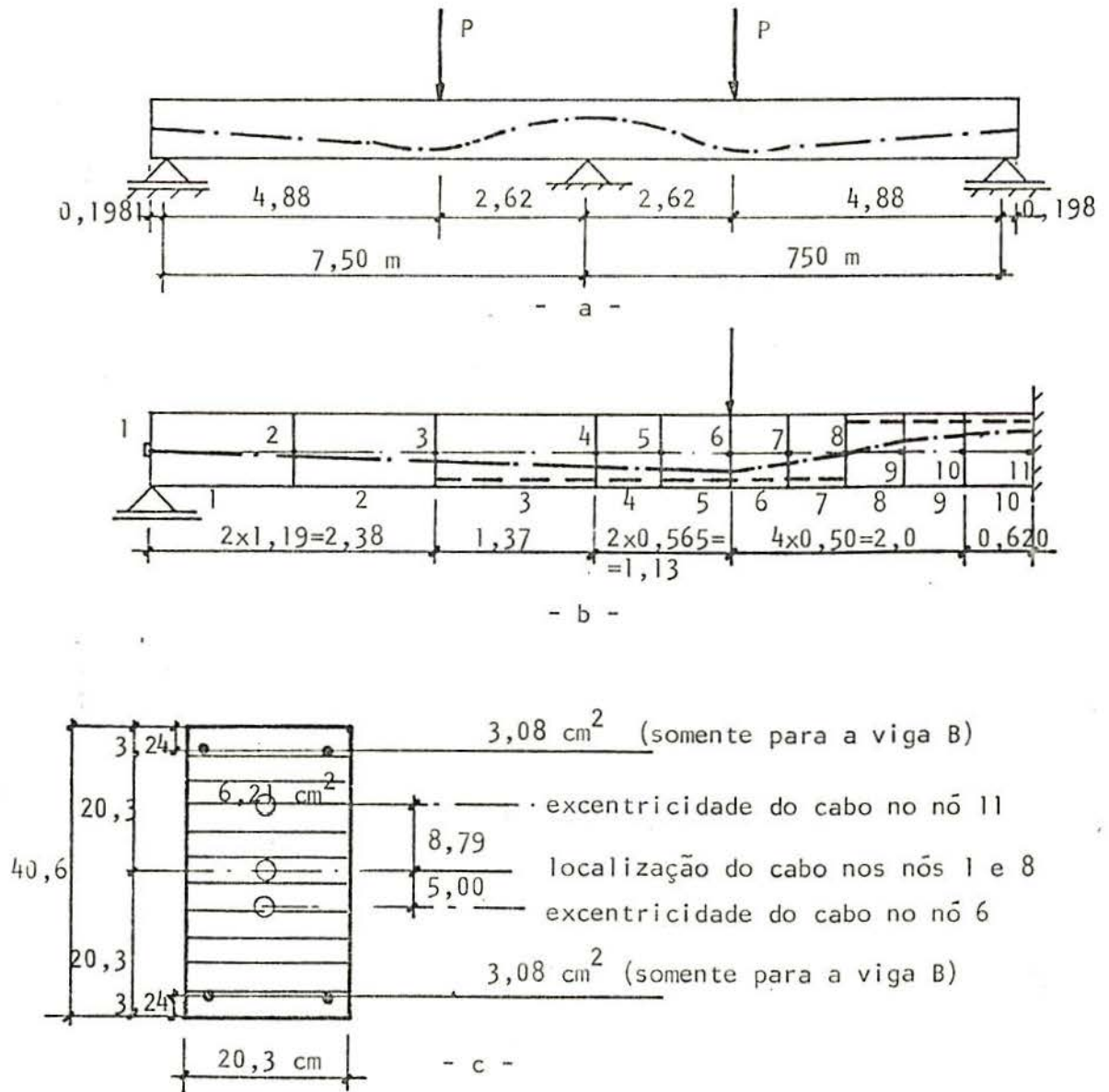


FIGURA 6.11. a) Estrutura real; b) discretização; c) seção transversal.

As características dos materiais são relacionadas a seguir:

a) Concreto

$$f'_c = 38 \text{ MPa} ;$$

$$E_c = 4,30 \times 10^4 \text{ MPa} .$$

## b) Aço para armadura ordinária

$$f_y = 320 \text{ MPa} ;$$

$$E_1 = 2,0 \times 10^5 \text{ MPa} ;$$

$$E_2 = 730 \text{ MPa} .$$

## c) Aço para protensão

$$f_{yp} = 1,6 \times 10^3 \text{ MPa} ;$$

$$E_p = 2,04 \times 10^5 \text{ MPa} ;$$

$$E_4 = 3,9 \times 10^3 \text{ MPa} ;$$

$$\mu = 0,3 ;$$

$$k = 1,64 \times 10^{-3} \text{ rad/m} .$$

A força inicial de protensão aplicada vale 609 kN e a área do cabo é  $6,21 \text{ cm}^2$ . Ocorreu um escorregamento de ancoragem de 5,1 cm.

As perdas de protensão devidas ao atrito e ao escorregamento de ancoragem, calculadas pelo algoritmo proposto, correspondem a 15% do valor inicial da força de protensão. KANG<sup>30</sup> avaliou tais perdas em 14%.

Na primeira análise realizada, a estrutura foi submetida à força de protensão e ao seu peso próprio. Com tal carregamento, a viga assume uma contraflecha e os deslocamentos do nó central do vão discretizado, obtidos pelo presente estudo e por KANG, estão mostrados no quadro 6.1.

Duas semanas após a operação de tração, as cargas concentradas P foram aplicadas até a ruptura da peça, e o comportamento da mesma durante o carregamento está graficado, em linha cheia, na figura 6.12.a para a viga A e figura 6.12.b para a viga B. Nos mesmos gráficos, estão os resultados analíticos obtidos por KANG e a resposta determinada pelo programa PROTENDE, para as duas vigas.

	Viga A		Viga B	
	KANG	PROTENDE	KANG	PROTENDE
$\delta$ (cm)	1,50	1,46	1,32	1,30

QUADRO 6.1 - Resultados analíticos antes da aplicação da carga P.

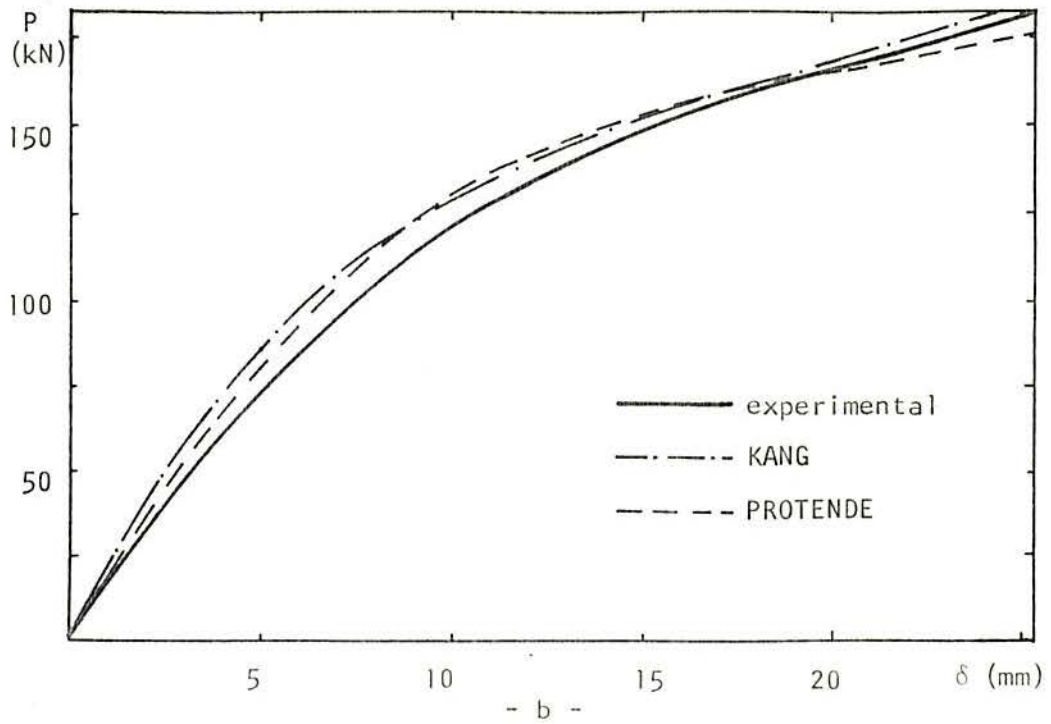
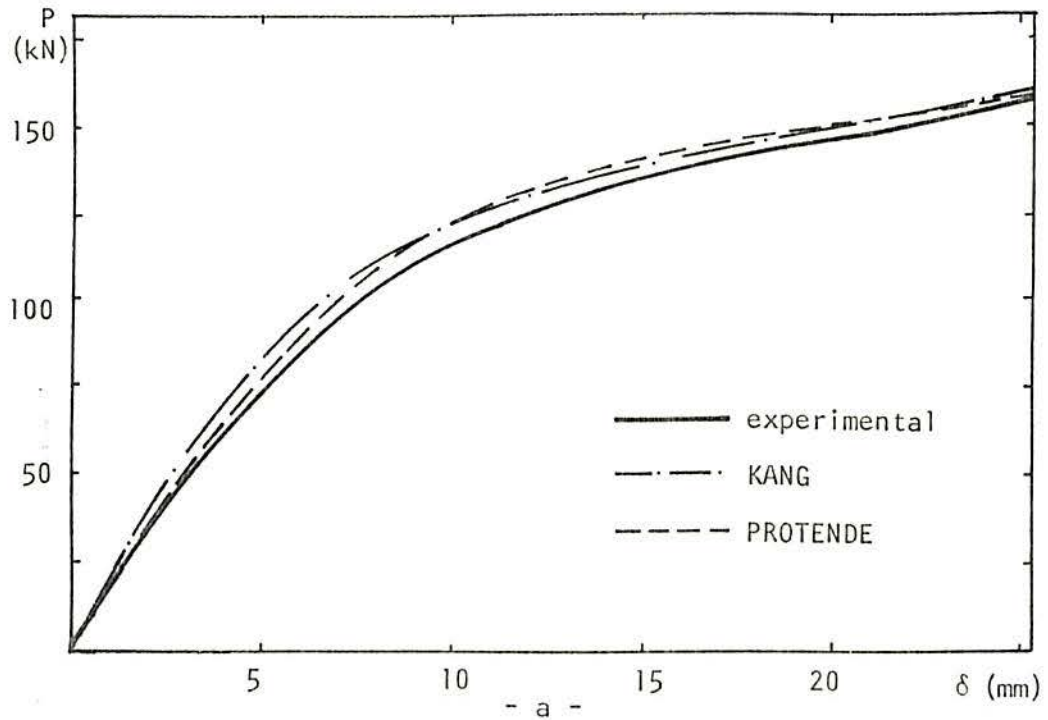


FIGURA 6.12. a) Respostas da viga A; b) respostas da viga B.



O deslocamento  $\delta$  corresponde ao nó 4, centro do vão.

Comparando-se os resultados das duas vigas, nota-se que a viga B é mais rígida do que a viga A, devido à presença da armadura frouxa, que também aumentou a capacidade resistente da peça.

Em relação a resposta obtida pelo modelo proposto, nos dois casos, nota-se uma pequena sobreavaliação da rigidez no começo do diagrama, cujas causas poderiam ser pesquisadas através da variação das perdas das armaduras de protensão e da diminuição da colaboração das mesmas à rigidez da peça, para simular os efeitos de uma imperfeita aderência no interior das bainhas. No entanto, o aspecto das curvas concorda com a experimental e obteve-se bons resultados em relação à carga última, como se vê no quadro 6.2.

	Viga A			Viga B		
	Exper.	KANG	PROTENDE	Exper.	KANG	PROTENDE
P ult (kN)	178	181	177	206	204	195

QUADRO 6.2 - Resultados experimentais e analíticos para a carga de ruptura.

A fim de verificar a influência da não-linearidade geométrica na resposta da estrutura, as vigas A e B foram analisadas levando em conta somente a não-linearidade física. Na figura 6.13.a estão traçadas as respostas com consideração da não-linearidade geométrica e sem ela, para a viga A, enquanto na figura 6.13.b se encontram graficados os resultados para a viga B. Observa-se que não é grande a diferença, atingindo no máximo a ordem de 10%, o que era de se esperar em virtude da força de protensão representar uma parcela reduzida da capacidade portante axial da viga.

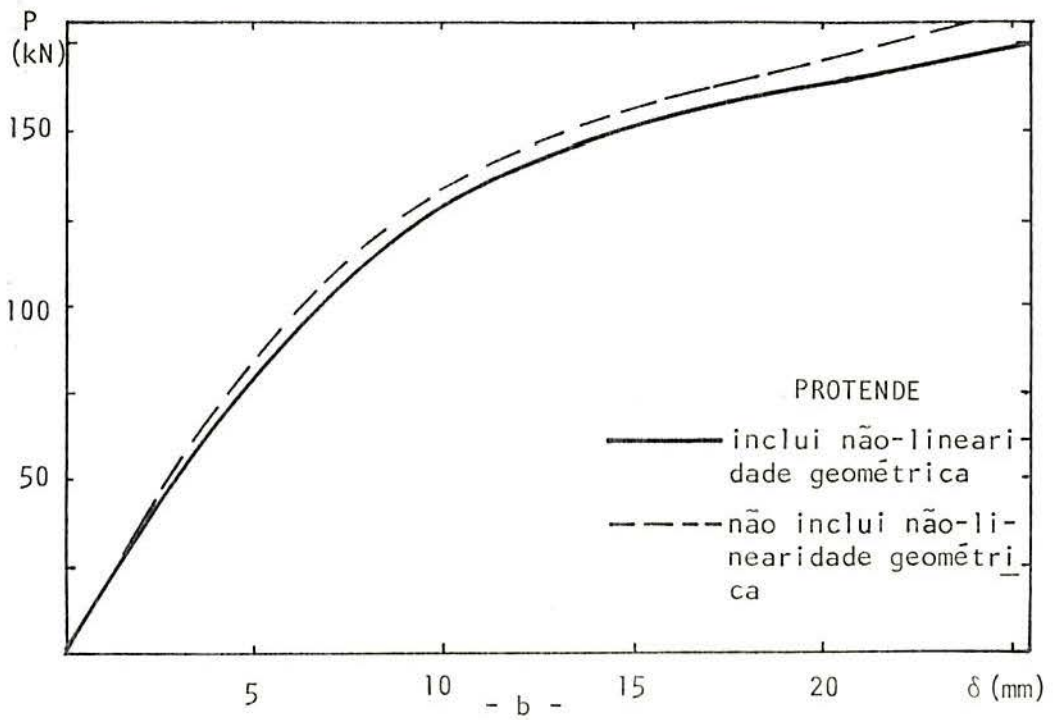
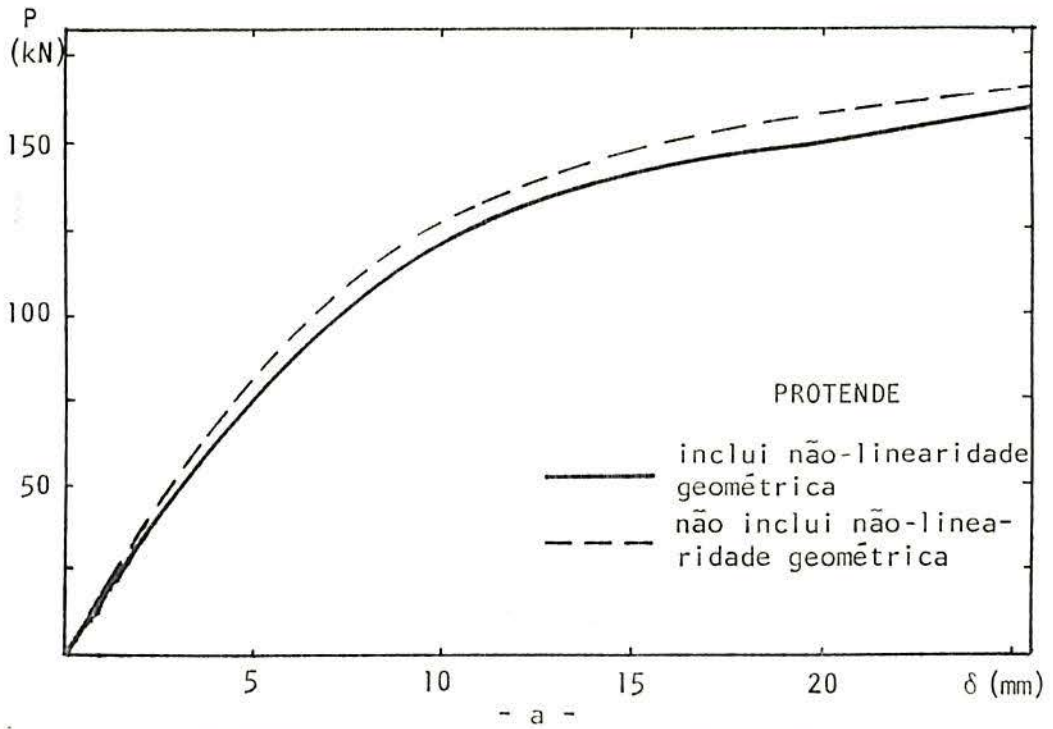


FIGURA 6.13 - Influência da não-linearidade geométrica: a) viga A; b) viga B.

As figuras 6.14 e 6.15 mostram a distribuição de tensões, calculadas analiticamente pelo programa PROTENDE e pelo algoritmo desenvolvido por KANG, para os elementos 5 e 10, correspondentes aos máximos momentos positivo e negativo,

respectivamente, para valores de  $P = 0$  e  $P = 156$  kN. As tensões no aço para armadura ordinária e para protensão estão em escala diferente daquela usada para as tensões no concreto. Ainda nessas figuras, estão graficadas as tensões para  $P = 156$  kN, sem a consideração da não-linearidade geométrica.

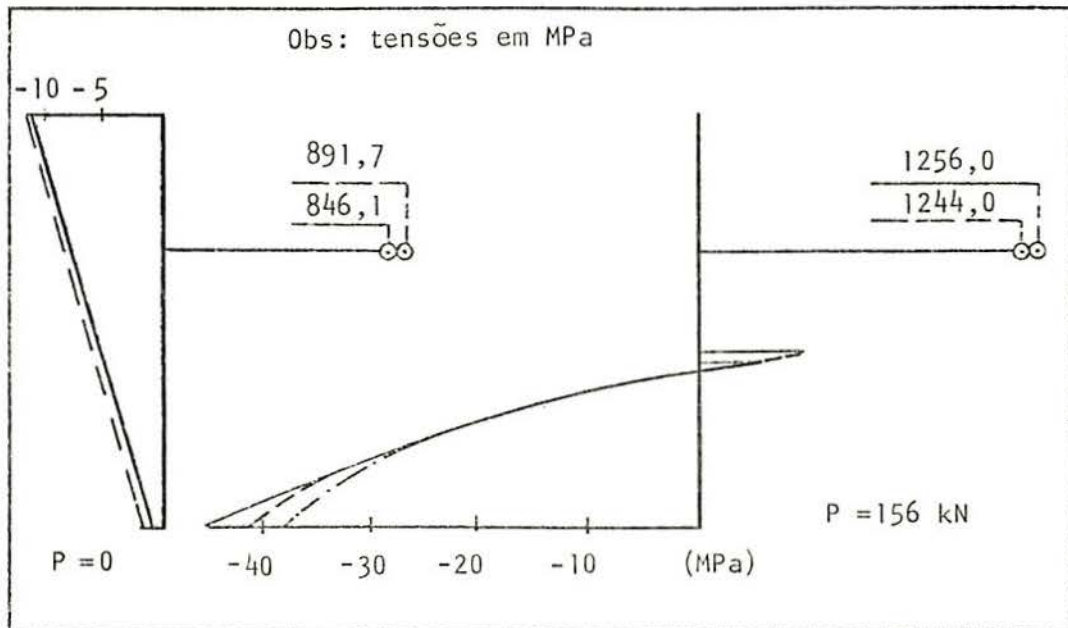
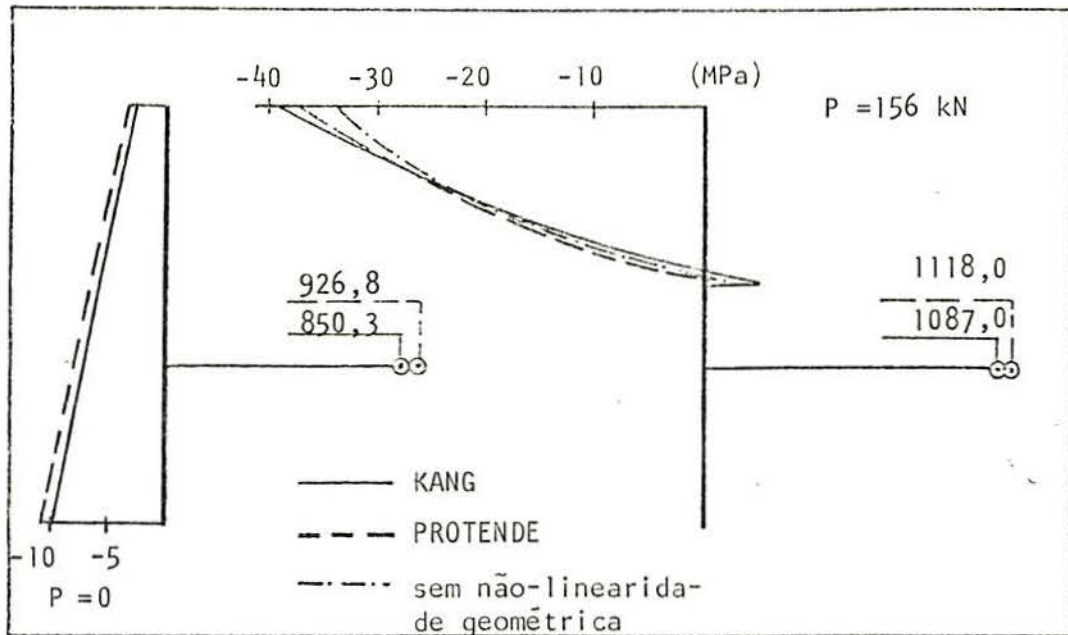
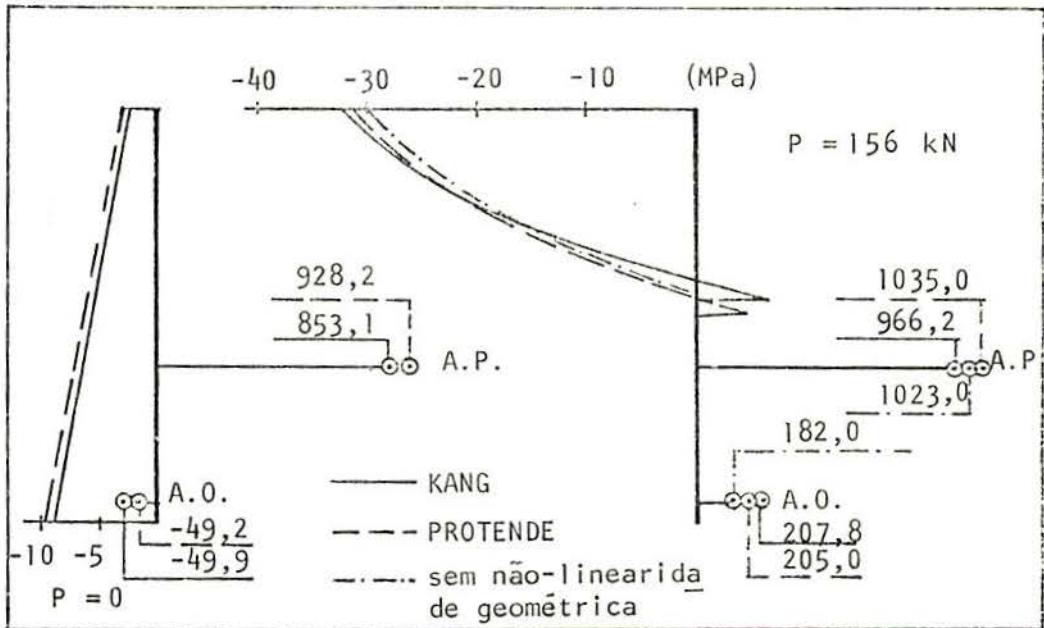
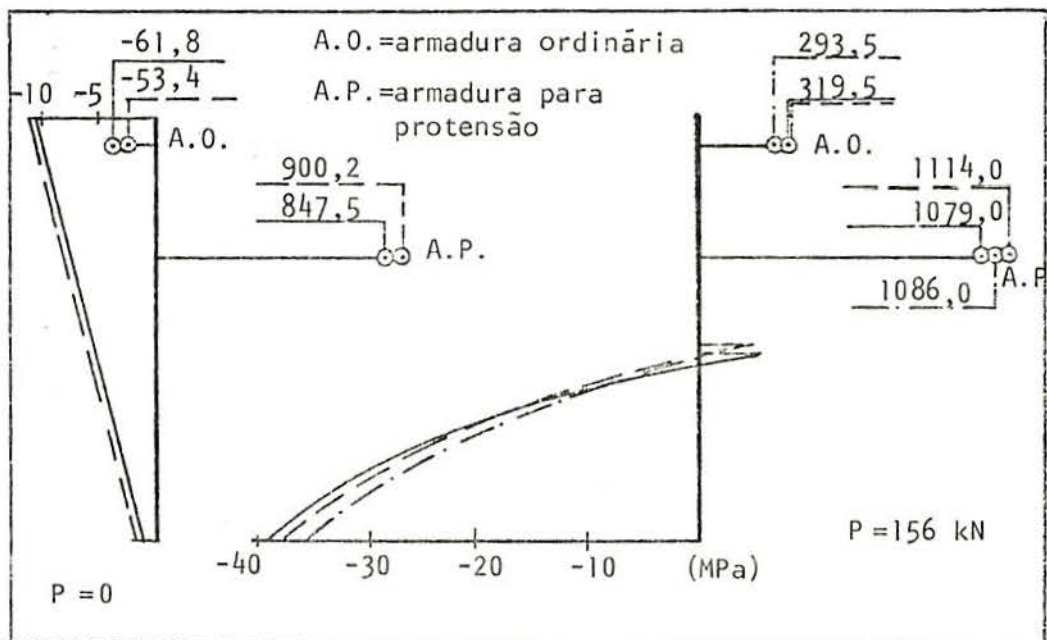


FIGURA 6.14 - Distribuição de tensões para a viga A: a) centro do elemento 5; b) centro do elemento 10.



- a -



- b -

FIGURA 6.15 - Distribuição de tensões para a viga B: a) centro do elemento 5; b) centro do elemento 10.

Para  $P=0$ , pode-se notar que, na região do momento negativo, as tensões no concreto são maiores que para o momento positivo. Isso é devido à maior excentricidade do cabo no elemento 10 em relação ao elemento 5.



Para  $P = 156 \text{ kN}$ , as tensões da viga B, tanto no concreto quanto no aço para protensão são menores, se comparadas com as da viga A, devido à presença da armadura frouxa.

Quanto às perdas imediatas, a viga B foi analisada ainda:

- desprezando-se as perdas por atrito e por escorregamento de ancoragem;
- desprezando-se somente a perda por atrito;
- desprezando-se somente a perda por escorregamento de ancoragem.

As perdas por escorregamento de ancoragem correspondem a 11,1% do valor inicial da carga aplicada, e a perda por atrito representa 3,9% do mesmo valor.

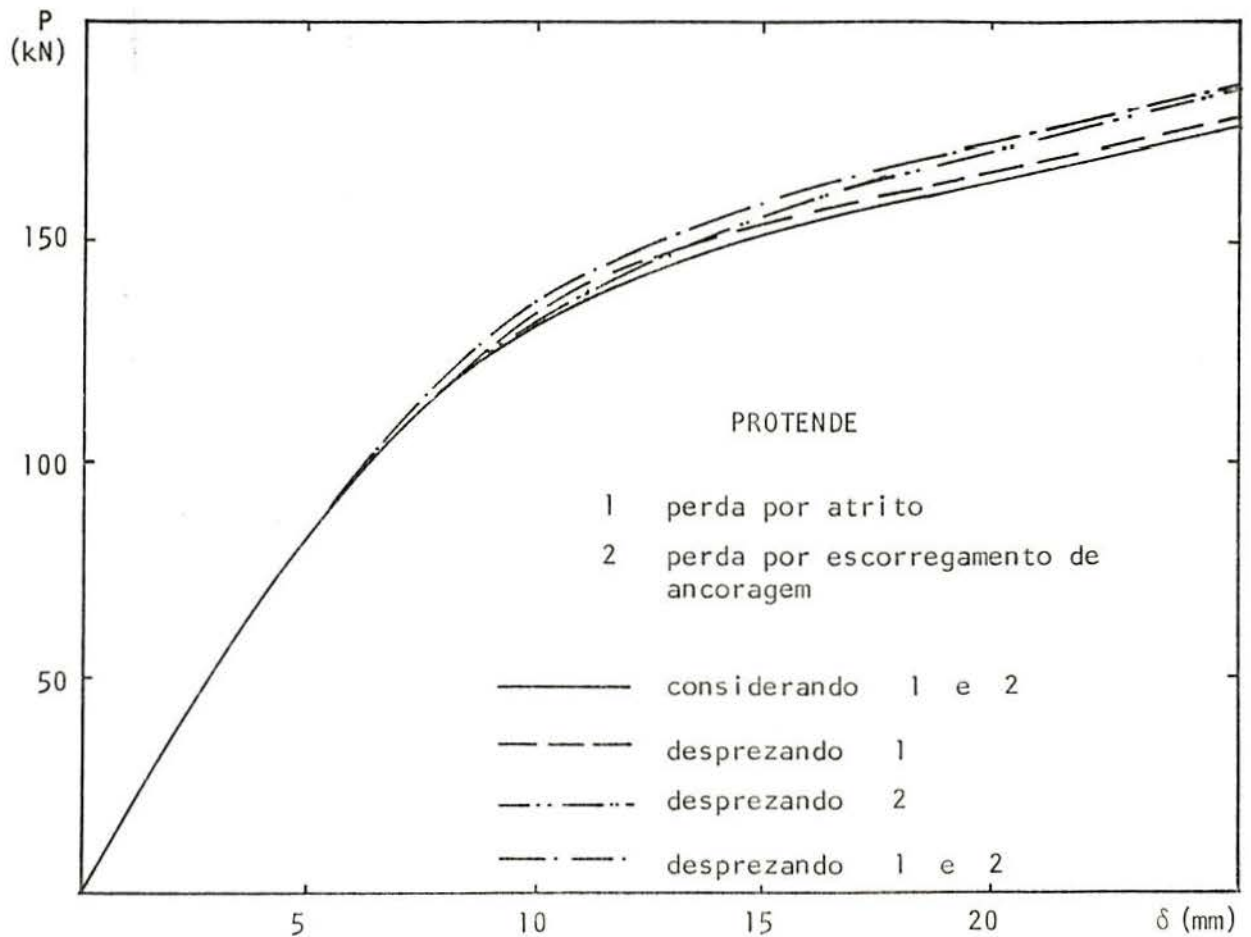


FIGURA 6.16.a - Influência das perdas por atrito e por escorregamento de ancoragem, em termos de deslocamentos.

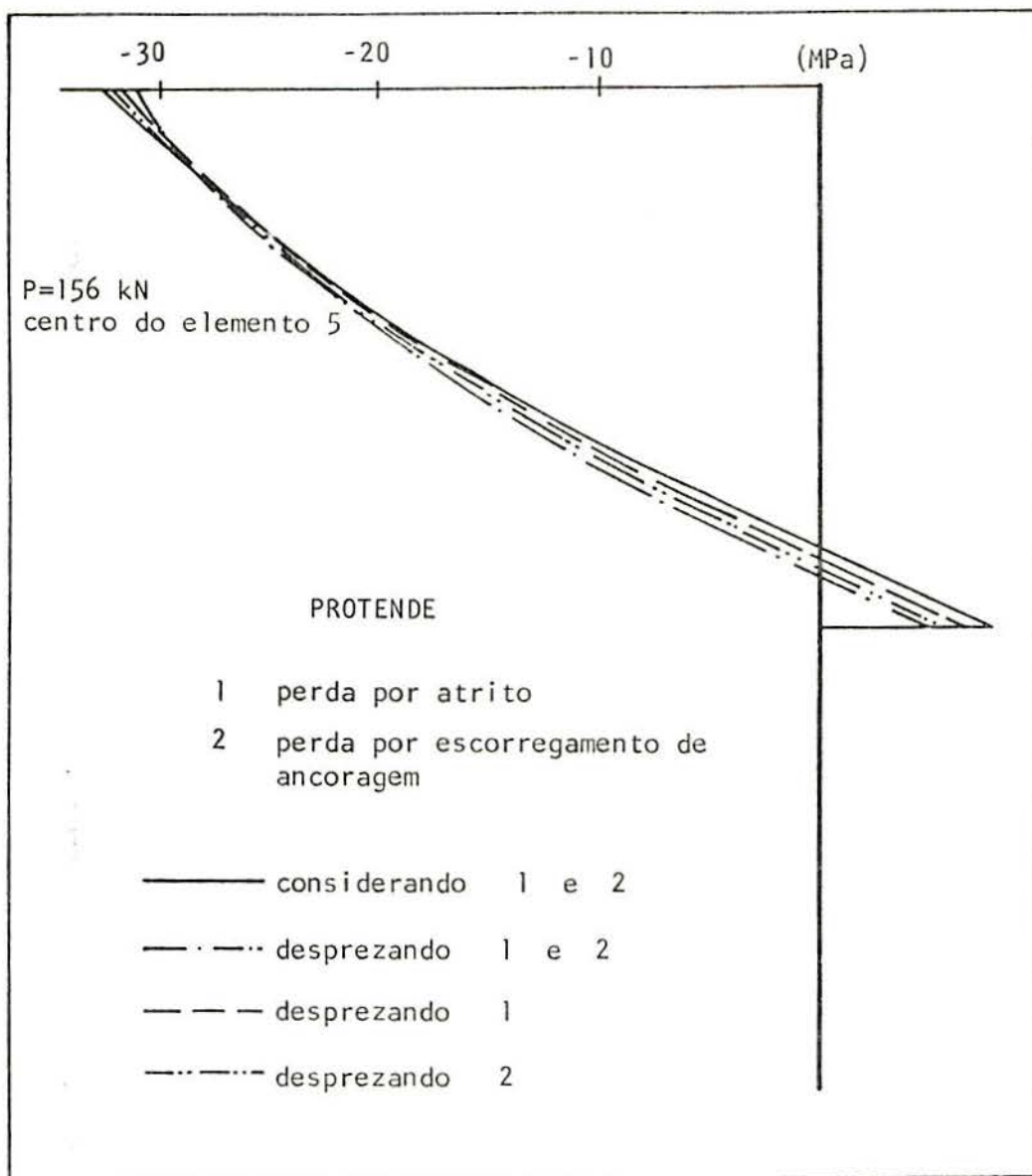


FIGURA 6.16.b - Influência das perdas por atrito e por escorregamento de ancoragem, em termos de tensões.

As curvas carga-deslocamento da figura 6.16.a são as respostas da estrutura para as três hipóteses citadas e para o caso de se considerar as duas perdas simultaneamente. Observa-se a coerência dos resultados, já que quanto menor a perda, maior é a rigidez da peça e menores são os deslocamentos. Na figura 6.16.b, estão as distribuições de tensões considerando as hipóteses citadas.

As mudanças nos parâmetros das perdas não parecem afetar significativamente os resultados, quer em termos de des

locamentos, quer em termos de tensões.

### 6.3.2 - Viga ensaiada por WARWARUK, SOZEN e SIESS - isostática, seção constante, um cabo de protensão

A viga da figura 6.17.a foi testada na Universidade de Illinois por WARWARUK, SOZEN e SIESS<sup>50</sup>. A armadura consiste num único cabo reto com excentricidade de 8,2 cm, como se vê na figura. Aproveitando-se a simetria, analisou-se meia viga, discretizada em dez elementos, conforme a figura 6.17.b. A seção transversal, mostrada na figura 6.17.c, está dividida em onze faixas de concreto. Para o emprego dos modelos representativos das relações tensão-deformação dos materiais, os dados são:

a) Concreto

$$f'_c = 44 \text{ MPa} ;$$

$$E_c = 2,8 \times 10^4 \text{ MPa} .$$

b) Aço para protensão

$$f_{yp} = 1,46 \times 10^3 \text{ MPa} ;$$

$$E_p = 2,1 \times 10^5 \text{ MPa} ;$$

$$E_4 = 5,6 \times 10^3 \text{ MPa} .$$

As perdas por atrito e por escorregamento de ancoragem foram consideradas nulas. A força de protensão inicial vale 20,2 kN, e a área do cabo é 1,51 cm<sup>2</sup>.

As curvas carga-deslocamento para a estrutura estão graficadas na figura 6.18.

Em linha cheia, a resposta experimental exhibe essencialmente três estágios. No primeiro, nota-se um trecho linear que representa o comportamento da peça antes da fissuração do concreto. O segundo estágio caracteriza-se por uma mudança permanente na razão entre os acréscimos de deslocamentos e de carga aplicada, e representa o comportamento da viga depois da

fissuração do concreto e enquanto o aço ainda permanece na fase elástica.

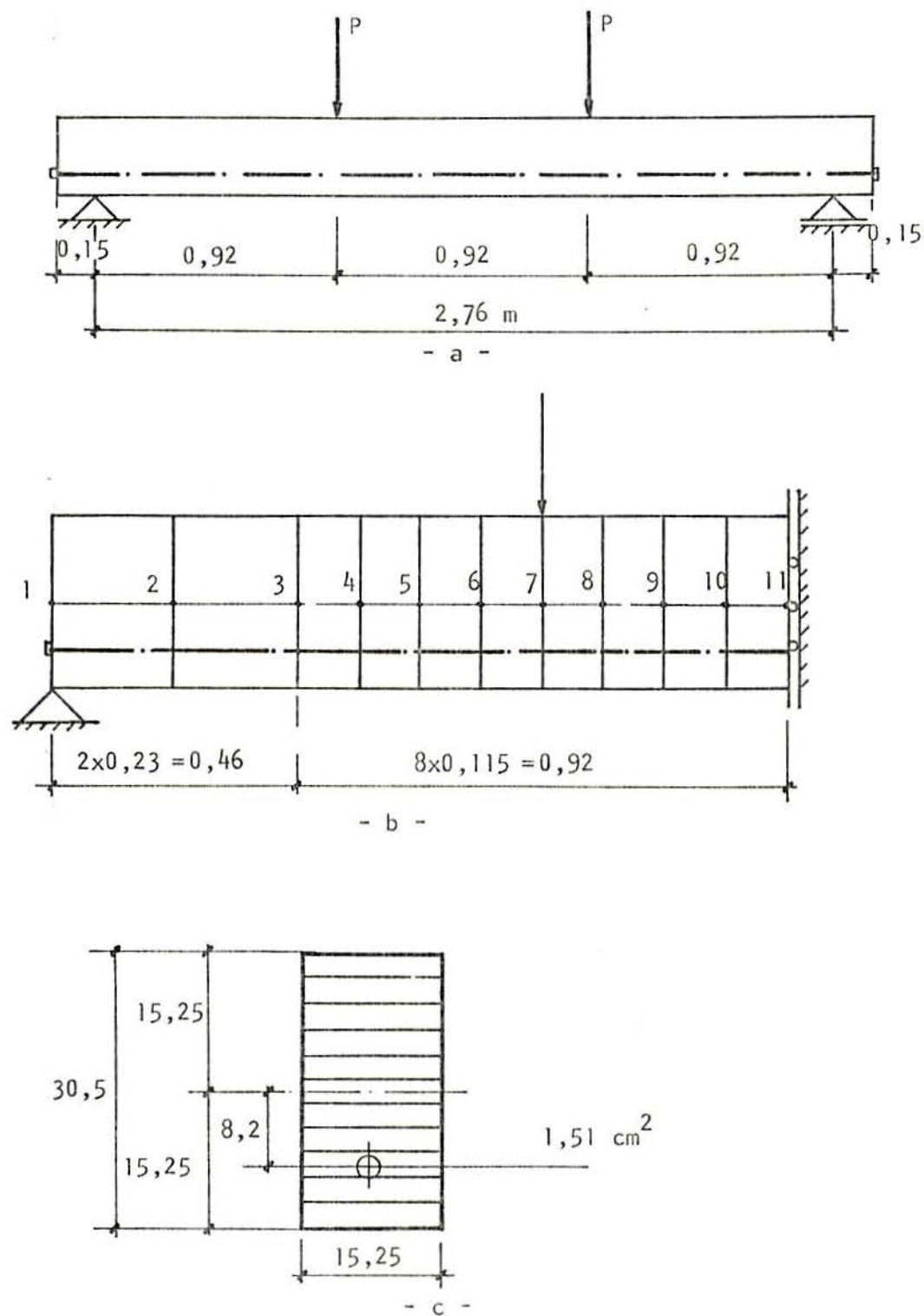


FIGURA 6.17. a) Estrutura real; b) modelo discreto; c) seção transversal.



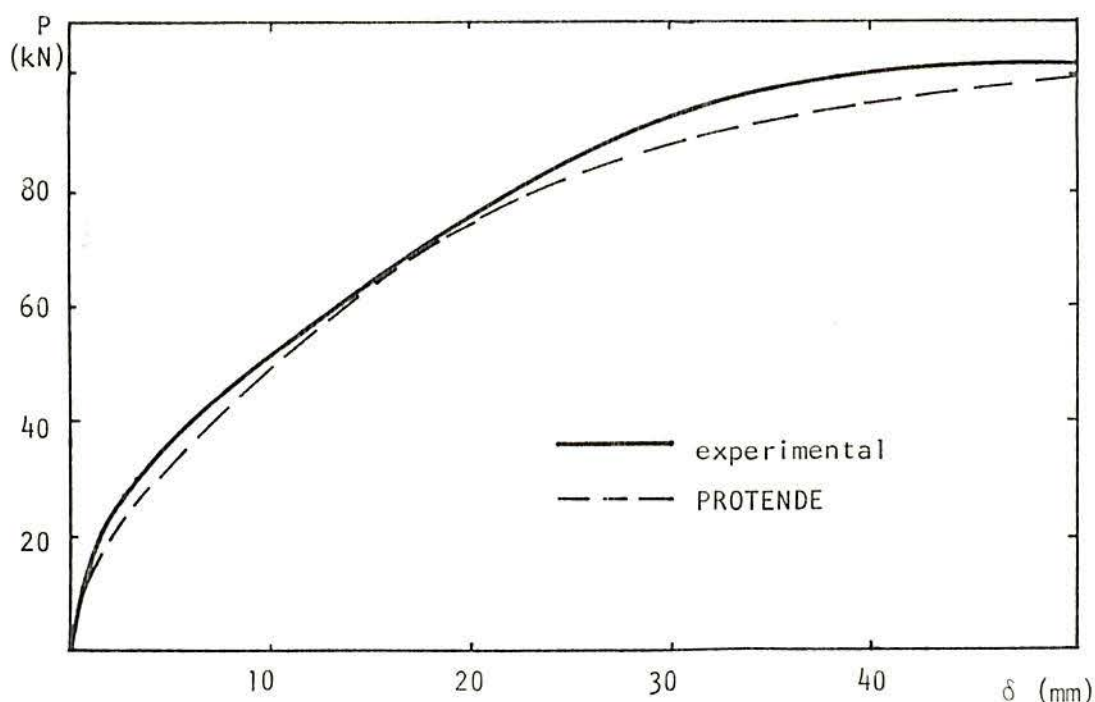


FIGURA 6.18 - Resposta da estrutura.

O terceiro estágio está caracterizado por uma pequena mudança na declividade da curva, indicando que o aço alcançou a fase inelástica.

Na resposta obtida pelo programa PROTENDE, observa-se uma pequena discrepância em relação à curva experimental, no início e no final do carregamento. Essa diferença pode ser devida ao fato do modelo não ser capaz de considerar a real colaboração do concreto entre fissuras, para absorver esforços de tração. No entanto, obteve-se uma boa conformidade durante todo o desenvolvimento da curva e uma boa proximidade em relação à carga última.

### 6.3.3 - Viga ensaiada por BRECKENRIDGE e BUGG - isostática, seção variável, 2 cabos de protensão

Na figura 6.19.a, está mostrada uma viga que foi ensaiada por BRECKENRIDGE e BUGG<sup>10</sup> e analisada por KANG<sup>30</sup> e pelo algoritmo apresentado neste trabalho. Estudou-se a metade da estrutura que foi discretizada em dez elementos, sendo os dois primeiros de seção retangular e os demais de seção I. As seções transversais de todos os elementos foram divididas

em onze faixas de concreto, têm três camadas de aço para armadura ordinária e dois cabos de protensão. Os cabos têm perfil curvo na região próxima ao apoio e são retos nos seis últimos elementos. Eles foram divididos em dez segmentos, cada um deles correspondente ao elemento de concreto que ele atravessa.

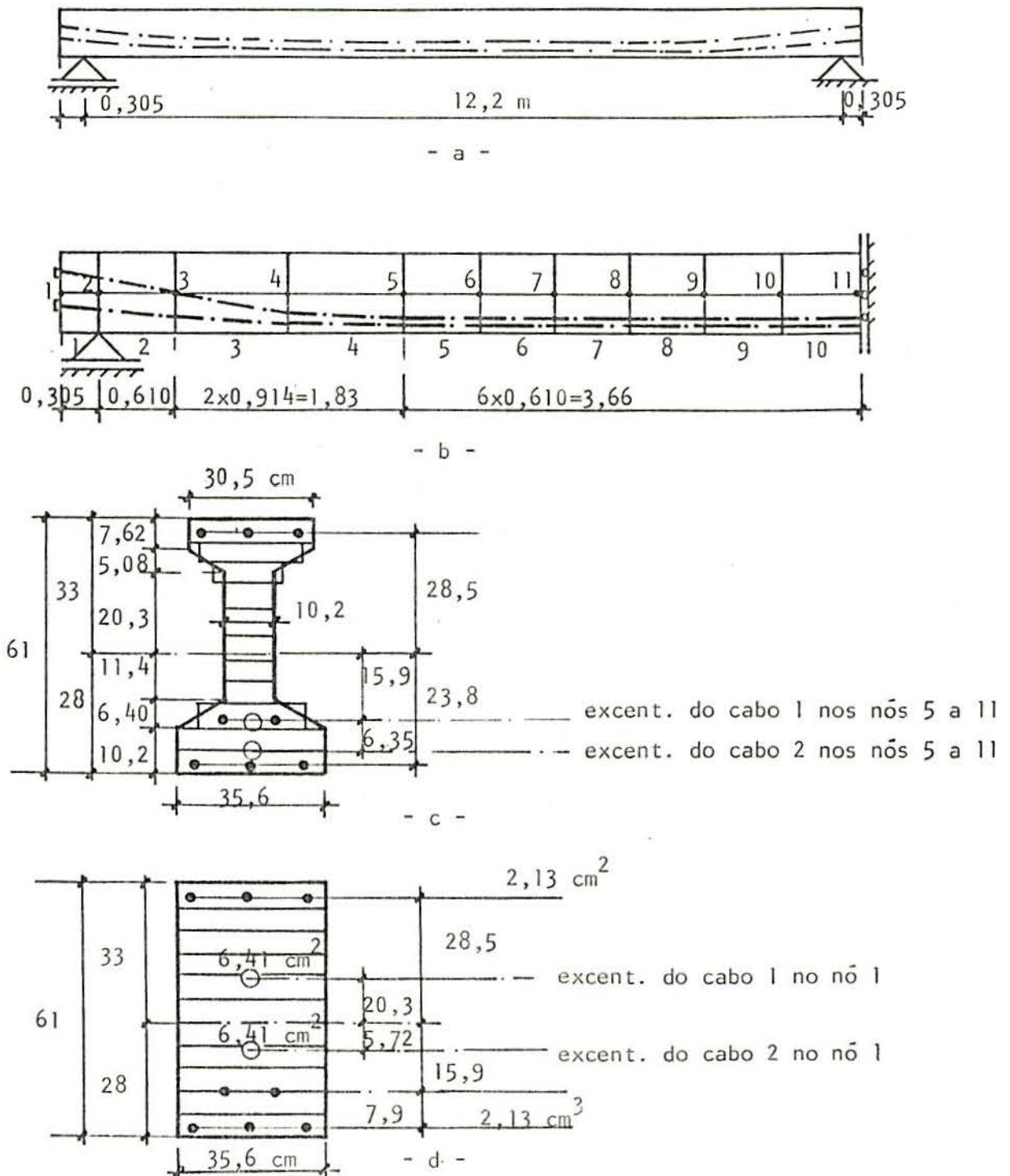


FIGURA 6.19. a) Estrutura; b) modelo discreto; c) seção transversal dos elementos 3 a 10; d) seção transversal dos elementos 1 e 2.

A força inicial aplicada em cada cabo é 438 kN e a área de cada um deles é  $6,41 \text{ cm}^2$ . As camadas de aço para armadura ordinária têm as áreas indicadas na figura 6.19. As características dos materiais são:

a) Concreto

$$f'_c = 36 \text{ MPa} ;$$

$$E_c = 2,65 \times 10^4 \text{ MPa} .$$

b) Aço para armadura ordinária

$$f_y = 316 \text{ MPa} ;$$

$$E_1 = 2,0 \times 10^5 \text{ MPa} ;$$

$$E_2 = 705 \text{ MPa} .$$

c) Aço para protensão

$$f_{yp} = 915 \text{ MPa} ;$$

$$E_p = 1,72 \times 10^5 \text{ MPa} ;$$

$$E_4 = 4,60 \times 10^3 \text{ MPa} ;$$

$$\mu = 0,2 ;$$

$$k = 9,84 \times 10^{-4} \text{ rad/m} .$$

Para esta peça, comparou-se a flecha inicial do nó 11, meio do vão, sofrida pela estrutura sob a aplicação da força de protensão e do peso próprio. O valor obtido no ensaio é de 1,78 cm, enquanto o presente estudo avalia tal deslocamento em 1,82 cm. Não houve escorregamento de ancoragem.

#### 6.3.4 - Estruturas em cruz, com a viga em concreto protendido, testadas por THOMPSON e PARK

Várias peças com as mesmas dimensões daquela do exemplo da seção 6.2.4, foram também executadas e testadas por THOMPSON e PARK<sup>46</sup> com concreto protendido na viga. Duas delas foram analisadas através do programa PROTENDE.

A primeira tem três cabos de protensão de  $2,43 \text{ cm}^2$ , e sua seção transversal está mostrada na figura 6.20. A força de protensão aplicada em cada cabo é 284 kN, e as características dos materiais são:

a) Concreto

$$f'_c = 33 \text{ MPa} ;$$

$$E_c = 2,6 \times 10^4 \text{ MPa} .$$

b) Aço para armadura ordinária

$$f_y = 290 \text{ MPa} ;$$

$$E_1 = 2,1 \times 10^5 \text{ MPa} ;$$

$$E_2 = 1,05 \times 10^4 \text{ MPa} .$$

c) Aço para protensão

$$f_{yp} = 1,5 \times 10^3 \text{ MPa} ;$$

$$E_p = 2,1 \times 10^5 \text{ MPa} ;$$

$$E_4 = 5,6 \times 10^3 \text{ MPa} .$$

Considerou-se nulas as perdas por atrito e por escorregamento de ancoragem.



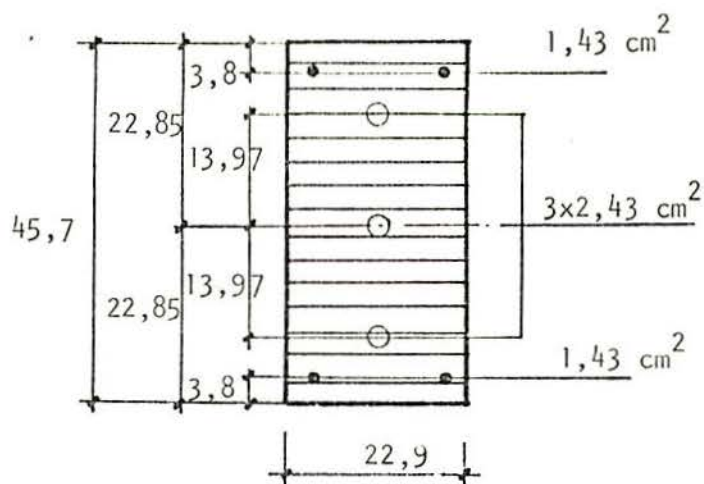


FIGURA 6.20 - Seção transversal da viga da estrutura em cruz, com 3 cabos de protensão.

A curva momento na face do pilar-deflexão na extremidade da viga, obtida pelo algoritmo proposto está graficada na figura 6.21, assim como a curva experimental. Nota-se que o algoritmo não acompanha a mudança de rigidez na última fase do diagrama.

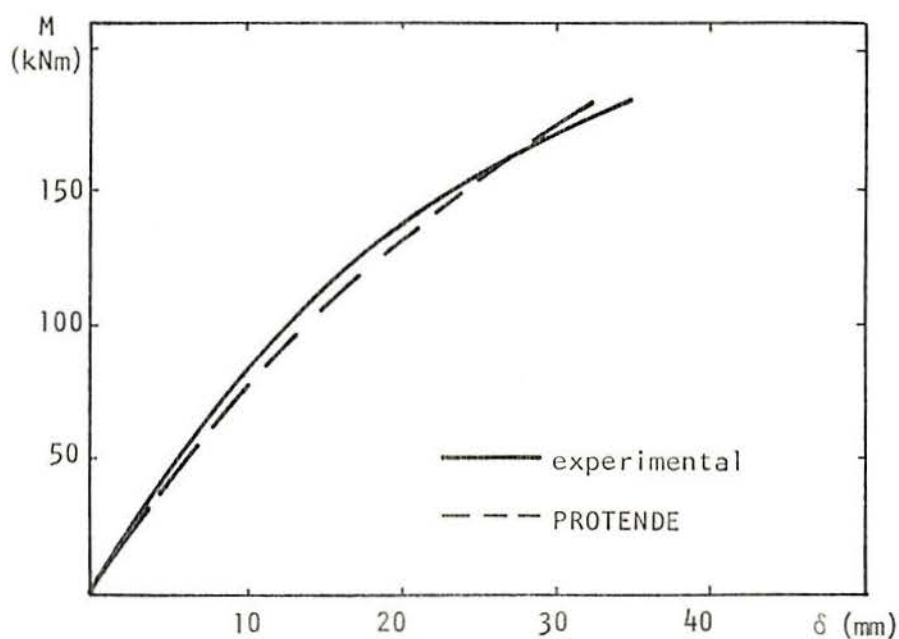


FIGURA 6.21 - Relação momento na face do pilar-deflexão na extremidade da viga.

A segunda peça em concreto protendido tem a seção transversal da figura 6.22, com dois cabos de protensão de  $3,86 \text{ cm}^2$  e a armadura frouxa indicada. A força inicial aplicada em cada cabo vale 440 kN. Para este caso, as características dos materiais são:

a) Concreto

$$f'_c = 37 \text{ MPa} ;$$

$$E_c = 2,7 \times 10^4 \text{ MPa} .$$

b) Aço para armadura ordinária

$$f_y = 330 \text{ MPa} ;$$

$$E_1 = 2,10 \times 10^5 \text{ MPa} ;$$

$$E_2 = 1,05 \times 10^4 \text{ MPa} .$$

c) Aço para protensão

$$f_{yp} = 1,5 \times 10^3 \text{ MPa} ;$$

$$E_p = 2,1 \times 10^5 \text{ MPa} ;$$

$$E_4 = 5,6 \times 10^3 \text{ MPa} .$$

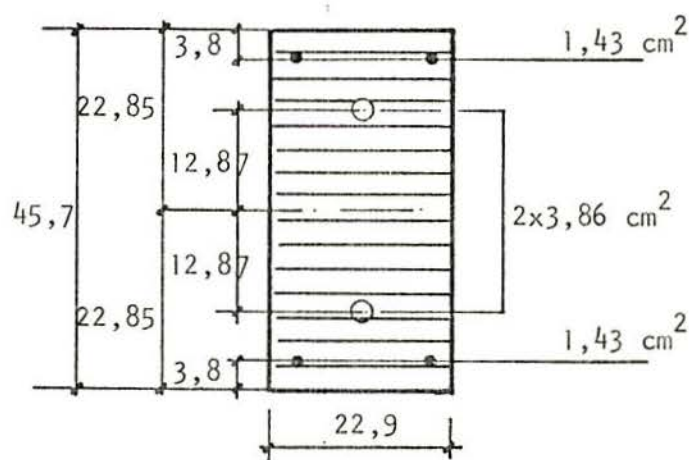


FIGURA 6.22 - Seção transversal da viga da estrutura em cruz, com 2 cabos de protensão.

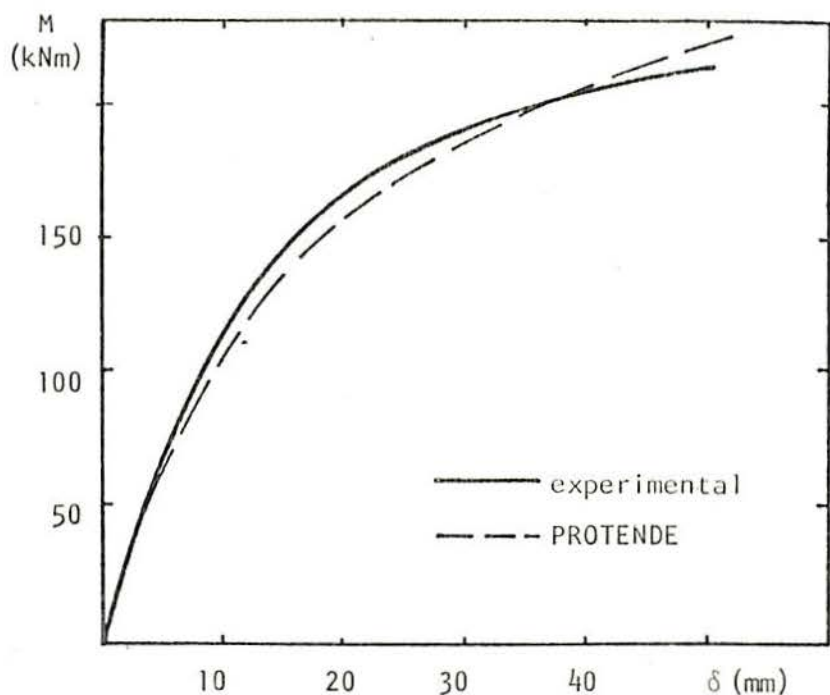


FIGURA 6.23 - Relação momento na face do pilar-deflexão na extremidade da viga.

As curvas momento-deflexão estão na figura 6.23 e apresentam as mesmas características da peça estudada anteriormente, e inclusive é semelhante àquela do exemplo 6.2.4, sem aço para protensão, valendo as mesmas considerações feitas.

## 7. CONCLUSÕES E SUGESTÕES

### 7.1 - Generalidades

As conclusões a que se chegou no final deste trabalho, podem ser colocadas em dois grupos, onde o primeiro engloba as considerações do ponto de vista teórico, com relação ao modelo empregado para a análise das estruturas em concreto armado ou protendido, e o segundo se refere àquelas que dizem respeito ao ponto de vista computacional da implementação do algoritmo desenvolvido. Finalmente, faz-se algumas sugestões que proporcionariam o aperfeiçoamento do estudo apresentado.

### 7.2 - Conclusões

#### 7.2.1 - Ponto de vista teórico

Comparando-se os resultados obtidos pelo método e algoritmo empregados, com os dados experimentais e as respostas apresentadas por outros pesquisadores, uma das primeiras conclusões a que se chega é que é possível analisar as estruturas em concreto armado e em concreto protendido, a partir do conhecimento das propriedades dos materiais componentes do conjunto, desde que sejam incluídas as não-linearidades física e geométrica simultaneamente. Fica em evidência a impossibilidade de sequer aproximar a resposta em deslocamentos ou tensões de uma estrutura em concreto armado ou protendido, com um modelo linear.

Com fundamento nas mesmas comparações observa-se, dentro da ordem de precisão alcançada, a tendência de se confirmar as hipóteses das seções planas e da união monolítica entre o concreto e o aço, pelo menos até as vizinhanças do estado último.

A consideração da colaboração do concreto na resis-



tência aos esforços de tração, mostra que, apesar de ser a fissuração um fenômeno discreto, é admissível considerar uma distribuição uniforme da microfissuração, para obter-se uma primeira aproximação à solução do problema, principalmente para concreto protendido.

Quanto aos modelos empregados para representar as relações tensão-deformação dos materiais, pode-se dizer que, para cargas de curta duração com carregamento crescente, os modelos mostraram-se eficientes. Mas, é fato conhecido que, para carregamentos cíclicos, o modelo do aço tem influência decisiva na resposta da estrutura e deve ter um esquema de descarga e recarga mais refinado.

Os modelos empregados para representar as perdas imediatas mostraram-se suficientes, em vista dos resultados obtidos e as mesmas não resultaram ter grande influência nas respostas das estruturas.

A retificação parcial dos segmentos dos cabos de protensão é admissível desde que as peças sejam discretizadas num número suficiente de elementos, sete a dez por vão no mínimo. Um estudo paramétrico será necessário para permitir a fixação de regras mais elaboradas.

A influência da não-linearidade geométrica em problemas de flexão de vigas protendidas pode alcançar a ordem de 10% dos deslocamentos, sendo portanto comparável à contribuição devida às perdas imediatas.

Desde que as armaduras não sejam interrompidas nos nós dos pórticos, uma primeira aproximação da resposta dessas estruturas é admissível, através da hipótese dos nós rígidos, embora a consideração da flexibilidade do nó e da presença de fissuras localizadas próximas às faces dos pilares deve melhorar os resultados, sobretudo nas vizinhanças do estado último.

#### 7.2.2 - Ponto de vista computacional

Quanto ao desempenho do algoritmo computacional utilizado no presente trabalho, pode-se dizer que o mesmo é capaz de prever as respostas de pórticos planos em concreto armado

ou protendido, submetidos a cargas de curta duração.

Como são usadas matrizes de rigidez constantes e sem se fazer iterações, na proximidade da ruptura, às vezes, o processo apresenta dificuldades em acompanhar a resposta real da estrutura, principalmente quando a ruína se dá por instabilidade do equilíbrio, onde se tem patamares pronunciados com tangente horizontal.

Em relação à discretização da estrutura, para peças em concreto armado, deve-se empregar um mínimo de três a cinco elementos, número que deve ser aumentado para estruturas em concreto protendido, dependendo do número de cabos existentes e da sua geometria. Quanto ao número de faixas em que se deve dividir a seção transversal, segundo os exemplos estudados, foi necessário um mínimo de onze faixas de concreto.

Para se determinar as respostas das estruturas apresentadas no capítulo 6, utilizou-se o algoritmo em termos de deslocamentos acumulados. No entanto, as equações em termos de incrementos de deslocamentos foram desenvolvidas e parcialmente implementadas, visando a continuidade do estudo das estruturas em concreto protendido quanto a sua história de carga no tempo, introduzindo as deformações dele dependentes. Para a consideração dessas deformações, resulta mais operativo trabalhar com incrementos de deslocamentos.

Uma alternativa existente seria incluir um esquema com rigidez tangente, inclusive com iterações, mas este processo pode ser oneroso, segundo sejam as capacidades do equipamento disponível.

### 7.3 - Sugestões

A fim de aprimorar e complementar o trabalho realizado, aponta-se aqui aspectos que poderiam ser considerados em estudos posteriores.

- Incluir as deformações dependentes do tempo, ou seja, a fluência, retração e envelhecimento do concreto e a relaxação do aço. Em termos computacionais, a introdução dessas deformações no algoritmo desenvolvido, pode ser feita de



maneira direta, bastando acrescentar um procedimento numérico que calcule o incremento de deformação não-mecânica.

- Substituir os modelos que representam as relações tensão-deformação dos materiais por outros mais refinados, de maneira a permitir a comparação com respostas obtidas em ensaios dinâmicos. Tais modelos podem ser, por exemplo, o de BLAKELEY e PARK, para o concreto, e o de AGRAWAL para o aço, apresentados nas seções 2.2.2 e 2.3, respectivamente.

- A fim de melhorar os resultados do algoritmo na região da carga crítica das estruturas em concreto armado e protendido, e para que se possa detectar a ruína por instabilidade do equilíbrio, seria conveniente incluir a possibilidade de se fazer iterações.

- Incluir um procedimento que considere a fissuração localizada do concreto nos nós de pórticos, que gera aí uma rotação adicional, para que seja possível analisar tais estruturas com qualquer detalhamento de armadura.

- Em relação às estruturas em concreto protendido, dando continuidade a esta linha de pesquisa, pode-se analisar aquelas com armaduras pré-tracionadas, empregadas principalmente em peças pré-moldadas, e ainda as estruturas em concreto protendido sem aderência. Poucas modificações seriam necessárias para efetuar tais procedimentos.

- Uma vez concluída a fase de implementação do modelo e do algoritmo, o programa PROTENDE pode ser empregado como ferramenta para efetuar estudos paramétricos, como por exemplo, variar o número de elementos para avaliar a influência da retificação dos segmentos de cabos; analisar a influência das perdas devidas à fluência, retração do concreto e relaxação do aço separadamente e, ainda, variar a resistência à tração do concreto.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. Building code requirements for reinforced concrete. Detroit, 1977. (ACI Standard, 318-77).
2. ARONI, S. Slender prestressed concrete columns. Journal of The Structural Division, New York, ASCE, 94(4):875-904, Apr. 1968.
3. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Cálculo e execução de obras de concreto protendido: P-NB-116. Rio de Janeiro, 1970.
4. \_\_\_\_\_. Projeto e execução de obras de concreto armado: NB-1. Rio de Janeiro, 1978.
5. BATHE, K-J & WILSON, E.L. Numerical methods in finite element analysis. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1976.
6. BERGAN, P.G. & HOLAND, I. Nonlinear finite element analysis of concrete structures. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Amsterdam, (17/18):443-67, Feb. 1979.
7. BIGNON, P.G. Análise dinâmica não-linear de cascas de concreto armado para centrais nucleares. Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, 1982. Tese dout.
8. \_\_\_\_\_. Análisis no-lineal en pórticos de hormigón armado. In: JORNADAS SUDAMERICANAS DE INGENIERIA ESTRUCTURAL, 16., Buenos Aires, 22-27 abr. 1974. Buenos Aires, Sociedad Argentina de Ensayo de Materiales, 1974. v.1, p.209-36.



9. BLAKELEY, R.W.G. & PARK, R. Prestressed concrete sections with cyclic flexure. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 99(8):1717-42, Aug. 1973.
10. BRECKENRIDGE, R.A. & BUGG, S.L. Effects of long-time loads on prestressed concrete beams. Journal of the Prestressed Concrete Institute, Chicago, 9(6):75-89, Nov. 1964.
11. BRESLER, B., ed. Reinforced concrete engineering. New York, John Wiley, 1974. v.1.
12. CAMPOS FILHO, Américo. Análise de pilares de concreto armado submetidos a flexo-compressão oblíqua. Porto Alegre, UFRGS, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 1982. Diss. maestr.
13. CARDOZO, J.L. Curso de concreto protendido. Estrutura, Rio de Janeiro, 1(1):89, out. 1957.
14. CENDES SARAGOSA, Gerson. Análise não-linear de pórticos planos de concreto armado. Porto Alegre, UFRGS, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 1981, Diss. maestr.
15. CHAGAS FILHO, Eurico. Um enfoque integrado para a implementação de elementos isoparamétricos. Porto Alegre, UFRGS, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 1974. Diss. maestr.
16. COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. Code-modèle CEB-FIP pour les structures en béton. Paris, 1978. (Bulletin d'Information, 124/125 F).
17. COMPANHIA SIDERÚRGICA BELGO-MINEIRA. Catálogo de fios e cordoalhas para concreto protendido. Belo Horizonte, s.d.
18. CONNOR, J.J.; LOGCHER, R.D.; CHAN, S.C. Nonlinear analysis of elastic framed structures. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 94(6):1525-47, June 1968.

19. CONNOR, J.J. & SARNE, Y. Nonlinear analysis of prestressed concrete reactor pressure vessels. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON STRUCTURAL MECHANICS IN REACTOR TECHNOLOGY, 3., London, 1-5 Sept. 1975. Papers. Amsterdam, North-Holland, 1975. v.3, Paper H2/2.
20. DAVIS, R.E. & DAVIS, H.E. Flow of concrete under sustained compressive stress. ASTM Proceedings. 30(pt.2), 1930.
21. DAVIS, R.E.; DAVIS, H.E.; BROWN, E.H. Plastic flow and volume changes in concrete. ASTM Proceedings, 37(pt.2), 1937.
22. DESAI, Chandrakant S. & ABEL, John F. Introduction to the finite element method: a numerical methods for engineering analysis. New York, Van Nostrand Reinhold, 1972.
23. FERRAZ, J.C.F. Curso de concreto protendido. Estrutura, Rio de Janeiro, 2(8):562-70, 1958.
24. FUNG, Y.C. Foundations of solid mechanics. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1965.
25. GLANVILLE, W.H. The creep of flow of concrete under load. Department of Scientific and Structural Research, 1930. (Building Research Technical Paper, 12).
26. GUYON, Yves. Construcciones en béton précontraint: classes-états limites. Paris, Eyrolles, 1966-68. 2v.
27. \_\_\_\_\_. Hormigón pretensado: estudio teórico y experimental. Madrid, Dossat, s.d.
28. HOFFMANN, J.R. Pilares esbeltos de concreto armado. Porto Alegre, UFRGS, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 1979. Diss. maestr.
29. HOGNESTAD, E. A study of combined bending and axial load in reinforced concrete members. Urbana, University of Illinois, Engineering Experiment Station, 1951. (Bulletin, 399).

30. KANG, Young-Jin & SCORDELLIS, A.C. Nonlinear geometric, material and time dependent analysis of reinforced and prestressed concrete. Bekerley, University of California, 1977. Tese dout.
31. KROENKE, W.C.; GUTZWILLER, M.J.; LEE, R.H. Finite element for reinforced concrete frame study. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 99(7):1371-90, July 1973.
32. LEONHARDT, F. Concreto protendido. In: \_\_\_\_\_. Construções de concreto. Rio de Janeiro, Interciência, 1983. v.5.
33. LIN, T.Y. Strength of continuous prestressed concrete beams under static and repeated loads. Journal of the American Concrete Institute, Detroit, 53(10), June 1955.
34. NEVILLE, Adam M. Propriedades do concreto. São Paulo, Pini, 1982.
35. NGO, D. & SCORDELLIS, A.C. Finite element analysis of reinforced concrete beams. Journal of the American Concrete Institute, Detroit, 64(3):152-63, Mar. 1967.
36. NILSON, A.H. Nonlinear analysis of reinforced concrete by the finite element method. Journal of the American Concrete Institute, Detroit, 65(9):757-66, Sept. 1968.
37. PFEIL, W. Concreto protendido. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1980.
38. RIDHA, R.A. & LEE, L.H.N. Inelastic finite deformation of planar frames. Journal of the Engineering Mechanics Division, New York, ASCE, 97(3):773-89, June 1971.
39. RUSCH, H. Concreto armado e protendido. Rio de Janeiro, Ed. Campus, 1981.
40. \_\_\_\_\_. Researches toward a general flexural theory for structural concrete. Journal of the American Concrete Institute, Detroit, 57:1-28, July 1960.



41. SCHEGG, A. & DECANINI, L. Sobre las deformaciones en elementos de hormigón armado. In: JORNADAS SUDAMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL, 15., Porto Alegre, 28 nov - 4 dez. 1971. Anais. Porto Alegre, UFRGS, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 1971. v.2, p.1069-1120.
42. SCHIRMBECK, F.R.G. & BIGNON, P.G. Modelos histeréticos degradativos para concreto armado. Trabalho apresentado no 5º Congresso Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia, Salvador, out./nov. 1984.
43. SOZEN, M.A.; SWOYER, E.M.; SIESS, C.P. Strength in shear of beams without web reinforcement. Urbana, University of Illinois, Engineering Experiment Station, 1959. (Bulletin, 45).
44. SPERANDIO NETO, Ernesto. Pilares esbeltos de concreto armado com seção retangular sujeitos à flexo-compressão oblíqua. Porto Alegre, UFRGS, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 1982. Diss. maestr.
45. TELLES, J.C.F. & GARCIA, L.F.T. Análise do comportamento não-linear geométrico e físico de pórticos planos de concreto armado. Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, 1976.
46. THOMPSON, K.J. & PARK, R. Cyclic load tests on prestressed and partially prestressed beam-column joints. Journal of the Prestressed Concrete Institute, Chigaco, 22(5): 84-110, 1977.
47. TILLERSON, J.R.; STRICKLIN, J.A.; HAISLER, W.E. Numerical methods for the solution of nonlinear problems in structural analysis. In: MEETING OF THE AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS, Detroit, Nov. 11-15, 1973. Numerical solution of nonlinear structural problems. New York, ASME, 1973. p.67-101.



48. TROXELL, G.E.; RAPHAEL, J.M.; DAVIS, R.E. Long-time creep and shrinkage tests of plain and reinforced concrete. ASTM Proceedings, 58, 1958.
49. WAHL, H.W. & KOSIBA, R.J. Design and construction aspects of large prestressed concrete (PWR) containment vessels. Journal of the American Concrete Institute, Detroit, 66(5):400-12, May 1969.
50. WARWARUK, J.; SOZEN, M.A.; SIESS, C.P. Strength and behavior in flexure of prestressed concrete beams. Urbana, University of Illinois, Engineering Experiment Station, 1962. (Bulletin, 464).
51. WILHELM, W.J. & ZIA, P. Effects of creep and shrinkage on prestressed concrete columns. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 96(10):2103-23, Oct. 1970.
52. ZIENKIEWICZ, O.C. The finite element method in engineering science. 2.ed. New York, McGraw-Hill, 1971.
53. ZIENKIEWICZ, O.C.; VALLIAPPAN, S.; KING, I.P. Elasto-plastic solutions of engineering problems 'initial stress', finite element approach. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Sussex, 1:75-100, 1969.