

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

ANTONIO ZANI

**SINCRONIZAÇÃO DE SISTEMAS LUR'E
COM CONTROLE AMOSTRADO**

Porto Alegre
2018

ANTONIO ZANI

**SINCRONIZAÇÃO DE SISTEMAS LUR'E
COM CONTROLE AMOSTRADO**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Controle e Automação

ORIENTADOR: Prof. Dr. Jeferson Vieira Flores

CO-ORIENTADOR: Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr.

Porto Alegre
2018

ANTONIO ZANI

**SINCRONIZAÇÃO DE SISTEMAS LUR'E
COM CONTROLE AMOSTRADO**

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Orientador: _____

Prof. Dr. Jeferson Vieira Flores, UFRGS

Doutor pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul –
Porto Alegre, Brasil

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Ubirajara Franco Moreno, UFSC

Doutor pela Universidade Estadual de Campinas – Campinas, Brasil

Prof. Dr. Alexandre Sanfelice Bazanella, UFRGS

Doutor pela Universidade Federal de Santa Catarina – Florianópolis, Brasil

Prof. Dr. Diego Eckhard, UFRGS

Doutor pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Porto Alegre, Brasil

Coordenador do PPGEE: _____

Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr.

Porto Alegre, outubro de 2018.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à Laura, Marina, Luísa e Roberta.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador professor Jeferson pela disponibilidade e pelas contribuições a este trabalho.

Agradeço ao meu coorientador professor João Manoel pela oportunidade e pelo aprendizado na realização deste mestrado.

Agradeço aos meus colegas Emerson e Virgínia pelo convívio neste período. Agradeço também aos demais colegas e passageiros da baia um.

Agradeço à minha família pela compreensão e apoio incondicional.

RESUMO

Este trabalho apresenta soluções para o problema de sincronização de sistemas Lur'e mestre-escravo através de uma lei de controle. Inicialmente, o caso de sistemas em tempo discreto é formulado com um controle saturante. Em seguida, no caso de sistemas em tempo contínuo, considera-se um controle a partir de dados amostrados (*sampled-data control*). A sincronização é abordada como um problema de estabilização do erro entre os estados dos sistemas mestre e escravo, e o controle projetado através de um problema de otimização.

No caso de sistemas em tempo discreto, a partir de uma função de Lyapunov quadrática e condições de setor, desigualdades matriciais lineares (LMI) são obtidas com o objetivo de garantir que a diferença entre os estados mestre e escravo convirja assintoticamente para zero na ocorrência da saturação do sinal de controle. Condições de estabilidade seguindo uma modelagem por funções zona-morta também são obtidas, no caso particular onde a não linearidade Lur'e é descrita por uma função linear por partes. Um problema de otimização para o projeto do controlador é proposto com o objetivo de maximizar um conjunto de erros iniciais admissíveis, para os quais a sincronização é garantida.

Na abordagem via controle amostrado são considerados uma função de Lyapunov do tipo Lur'e e um funcional *looped* para a obtenção de condições LMI que garantam a sincronização de sistemas mestre-escravo sempre que o intervalo entre duas amostras respeitar um determinado limite. Um problema de otimização que visa maximizar o intervalo admissível entre duas amostras consecutivas é apresentado. Os resultados das metodologias propostas são avaliados através de exemplos numéricos.

Palavras-chave: Sincronização, saturação do atuador, controle amostrado, amostragem aperiódica, sistemas Lur'e, funcional *looped*, LMI.

ABSTRACT

This work presents solutions to the synchronization problem of master-slave Lur'e systems via a control law. Initially, the discrete-time systems case is formulated under a saturating control. Then, in the continuous-time systems case, a sampled-data control is considered. Synchronization is addressed as a problem of stabilization of the error between the states of the master and slave systems and the control is designed via an optimization problem.

In the discrete-time systems case, from a quadratic Lyapunov function and sector conditions, linear matrix inequalities (LMI) are derived with the objective of ensuring that the difference between the master and slave states converges asymptotically to zero under the saturation of the control signal. Stability conditions based on a dead zone function modeling are also obtained, in the particular case where the Lur'e nonlinearity is described by a piecewise-linear function. An optimization problem for the controller design is proposed in order to maximize a set of admissible initial errors for which the synchronization is guaranteed.

In the sampled-data control approach, a Lur'e-type Lyapunov function and a looped-functional are considered to derive LMI conditions that guarantee the synchronization of master-slave systems whenever the interval between two samples respects some bounds. An optimization problem that aims to maximize the allowable interval between two consecutive samples is presented. The results of the proposed methodologies are evaluated with numerical examples.

Keywords: Synchronization, actuator saturation, sampled-data control, aperiodic sampling, Lur'e systems, looped-functional, LMI.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1	Exemplo de uma função não linear conforme Definição 2.1.	28
2	Função linear por partes com 3 inclinações	30
3	Sistema tipo Lur'e.	31
4	Função não linear limitada em setor $\psi_{b_l}(f)$ para $m = 1$	34
5	Relação entre a função de Lyapunov $V(x(t))$ e o funcional $\mathcal{W}(\tau, \chi_k, T_k)$ no método do funcional <i>looped</i> (SEURET, 2012).	37
6	Trajetória caótica do sistema (57) com a função não linear (58) no plano $x_{(1)} \times x_{(2)}$	44
7	Função não linear $\sigma(Cx)$	44
8	Trajetórias dos sistemas mestre e escravo no plano $x_{(1)} \times x_{(2)}$: (a) Teorema 3.1 e (b) Teorema 3.2.	45
9	Trajetórias dos sistemas mestre (linhas sólidas) e escravo pelo Teorema 3.2 (linhas tracejadas) no instante k	46
10	Sinais de entrada de controle u : (a) Teorema 3.1 e (b) Teorema 3.2.	46
11	Cortes da região de estabilidade garantida \mathcal{Z} para Teorema 3.1 (linha vermelha tracejada) e Teorema 3.2 (linha azul contínua), e trajetórias simuladas para diferentes condições iniciais a partir do Teorema 3.1 (amarelo) e Teorema 3.2 (verde).	47
12	Trajetórias mestre e escravo no plano $x_{(1)} \times x_{(2)}$ para $T_k \in [0.1000, 0.5404]$	60
13	Erro de sincronização mestre-escravo: em tempo contínuo (linha vermelha contínua) e nos instantes de amostragem (pontos azuis) para $T_k \in [0.1000, 0.5404]$	61
14	Erro de sincronização mestre-escravo: em tempo contínuo (linha vermelha contínua) e nos instantes de amostragem (pontos azuis).	62
15	Sinal de entrada de controle u para $T_k \in [0.1000, 0.5404]$	63
16	Trajetórias mestre e escravo no plano $x_{(1)} \times x_{(2)}$ para $T_k = 0.5765$	63
17	Sinal de entrada de controle u para $T_k = 0.5765$	64
18	Em cinza, a região onde a sincronização é obtida.	64
19	Períodos máximos admissíveis em função de ϵ_1 e ϵ_2	65
20	Máximo período de amostragem admissível por iteração.	65
21	Relação entre o intervalo máximo de amostragem periódica e a resposta do erro de sincronização.	66
22	Trajetórias mestre e escravo no plano $x_{(1)} \times x_{(2)}$ para as soluções da Tabela 1.	67
23	Períodos máximos admissíveis em função de ϵ_1 e ϵ_2	68

24	Trajétórias mestre e escravo no plano $x_{(1)} \times x_{(2)}$ para as soluções da Tabela 2.	69
25	Relação entre o intervalo máximo de amostragem periódica e a resposta do erro de sincronização.	70
26	Máximo período de amostragem admissível por iteração.	71
27	Trajétórias mestre e escravo no plano $x_{(1)} \times x_{(2)}$ conforme resultados da Tabela 3.	72
28	Relação entre o intervalo máximo de amostragem periódica e a resposta do erro de sincronização.	73

LISTA DE TABELAS

1	Intervalo máximo de amostragem periódica e ganho K por iteração. .	66
2	Intervalo máximo de amostragem periódica e ganho K em função de ϵ_1 e ϵ_2	68
3	Intervalo máximo de amostragem periódica e ganho K por iteração. .	71

LISTA DE ABREVIATURAS

BMI	<i>Bilinear Matrix Inequality</i> ou Desigualdade Matricial Bilinear
LKF	<i>Lyapunov-Krasovskii Functional</i> ou Funcional de Lyapunov-Krasovskii
LMI	<i>Linear Matrix Inequality</i> ou Desigualdade Matricial Linear
PWL	<i>Piecewise linear</i> ou função linear por partes
ZOH	<i>Zero-Order Hold</i> ou Retentor de Ordem Zero

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathbb{R}^+	conjunto dos números reais positivos
\mathbb{R}^n	conjunto dos vetores reais de dimensão n
$\mathbb{R}^{n \times m}$	espaço das matrizes de números reais de dimensão $n \times m$
\mathbb{S}^n	espaço das matrizes simétricas em $\mathbb{R}^{n \times n}$
A^\top	transposta da matriz A
$A_{(i)}$	i -ésima linha da matriz A
$A_{(i,j)}$	elemento da i -ésima linha e j -ésima coluna da matriz A
$x_{(i)}$	i -ésimo elemento do vetor x
\star	elemento simétrico da matriz
$\text{diag}\{A, B\}$	matriz bloco diagonal formada pelas matrizes A e B
$\text{He}\{A\}$	$A + A^\top$
I	matriz identidade de dimensão apropriada
0	matriz de elementos nulos de dimensão apropriada
x^+	valor de x no instante seguinte no tempo discreto
$\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m$	conjuntos das funções contínuas em um intervalo $[0, T]$ em \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m , respectivamente, para escalares positivos $0 < T_1 \leq T_2$, onde T é um escalar positivo em $[T_1, T_2]$
$ \cdot $	valor absoluto
$\ \cdot\ $	norma vetorial Euclideana
$\text{sign}(f)$	$\frac{f}{ f }$

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	23
2	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA E CONCEITOS BÁSICOS	27
2.1	Osciladores e tipos de sincronização	27
2.2	Problema de sincronização de sistemas Lur'e	28
2.3	Revisão bibliográfica	31
2.3.1	Sincronização em tempo discreto com saturação	31
2.3.2	Sincronização sob controle amostrado	32
2.4	Conceitos e ferramentas de base	33
2.4.1	Condições de setor	33
2.4.2	Saturação do controle	35
2.4.3	Controle amostrado	36
2.5	Considerações finais	38
3	SINCRONIZAÇÃO EM TEMPO DISCRETO COM SATURAÇÃO	39
3.1	Descrição do problema	39
3.2	Projeto do controlador	40
3.2.1	Funções não lineares genéricas	40
3.2.2	Funções lineares por partes	42
3.2.3	Problema de otimização	43
3.3	Exemplo	43
3.4	Considerações finais	48
4	SINCRONIZAÇÃO SOB CONTROLE AMOSTRADO	49
4.1	Descrição do problema	49
4.2	Análise de estabilidade	52
4.2.1	Funções lineares por partes	52
4.2.2	Funções não lineares genéricas	55
4.2.3	Problema de otimização	57
4.3	Projeto do controlador	57
4.4	Exemplos	60
4.5	Considerações finais	73
5	CONCLUSÃO	75
	REFERÊNCIAS	77

1 INTRODUÇÃO

A sincronização de um sistema dinâmico mestre-escravo é obtida quando o estado do sistema escravo segue o estado do sistema mestre, de tal forma que o erro entre estes converge para zero. Em alguns casos como na sincronização parcial ou na sincronização de fase, este fenômeno pode estar restrito a um conjunto parcial das variáveis de estado do sistema dinâmico ou então à diferença de fase de uma trajetória periódica entre os sistemas mestre e escravo.

Nos últimos anos, tem sido grande o interesse quanto ao tópico de sincronização, devido à sua aplicação em diversos campos, como no problema de consenso, em comunicação segura, no reconhecimento de padrões (HOPPENSTEADT; IZHIKEVICH, 2000), em lasers e em diversos fenômenos naturais, físicos, biológicos e sociais. A sincronização pode ser compreendida como um caso específico do problema de consenso, onde uma rede de agentes é representada por osciladores acoplados que, ao trocarem informações entre si, seguem um objetivo comum através da sincronização (LIN; FRANCIS; MAGGIORE, 2007). Em comunicação segura, a decodificação é processada de acordo com os estados de um oscilador caótico ou de uma rede neural, onde a sincronização somente é atingida quando os parâmetros do sistema mestre são conhecidos (YANG; CHUA, 1997). Em modelos dinâmicos não lineares, a sincronização pode ser utilizada para estimar os parâmetros de um sistema caótico. Pode também ser utilizada para prever fenômenos naturais como a convecção atmosférica ou fenômenos biológicos como os batimentos cardíacos (SCHÄFER et al., 1998) e algumas doenças cerebrais, dentre as quais Parkinson e epilepsia (EROGLU; LAMB; PEREIRA, 2017). A sincronização também pode ser aplicada na utilização de lasers (EROGLU; LAMB; PEREIRA, 2017). A estabilidade de um laser diminui a medida que a sua potência aumenta. Uma solução deste problema consiste em combinar diversos lasers de menor potência. Neste sentido, a sincronização de cada um é importante de forma a evitar que uma interferência destrutiva entre estes diminua a potência do conjunto. Outro objetivo consiste na sincronização de fase de redes complexas de osciladores, com aplicações em controle e monitoramento na transmissão de energia elétrica (WANG; GREBOGI; BAPTISTA, 2015).

O avanço dos estudos em relação a sistemas não lineares abriu espaço para a teoria do caos, com o problema dos n -corpos de Henri Poincaré no século XIX (STROGATZ, 2014). Um tópico de interesse na teoria do caos são os osciladores não lineares ou osciladores caóticos. Um exemplo bastante conhecido é o atrator de Lorenz, descoberto em 1963 por Edward Lorenz ao propor um modelo simplificado dos movimentos de convecção na atmosfera com o propósito de prever o tempo meteorológico. Outro exemplo bastante utilizado nos estudos de sincronização é o circuito de Chua (MATSUMOTO; CHUA; KOMURO, 1985), onde um resistor ativo e uma função não linear combinados formam um dispositivo chamado de diodo de Chua, que confere uma característica caó-

tica ao sistema. A principal característica apresentada por um sistema caótico é o fato de que, embora determinístico, pequenas variações nos estados podem ocasionar trajetórias completamente distintas com a evolução do tempo. Além disso, estas trajetórias possuem características oscilatórias e aperiódicas. Portanto, embora à época houvesse dúvida quanto a possibilidade de se obter a sincronização de sistemas com estas características, o trabalho de (PECORA; CARROLL, 1990) demonstrou ser possível a sincronização de dois circuitos caóticos idênticos que possuem estados em comum através de uma análise de estabilidade exponencial da diferença entre os estados destes circuitos. Desde então, este assunto tornou-se importante para a comunidade de controle. Em publicações científicas, diversas técnicas tem sido aplicadas com o objetivo de garantir a sincronização de sistemas mestre-escravo, tais como o método de estabilização impulsiva (YANG; CHUA, 1997), o controle \mathcal{H}_∞ robusto (CAMPOS et al., 2007) e o controle adaptativo (FENG; CHEN, 2005).

A dinâmica não linear de alguns sistemas, como o circuito de Chua, o *n-scroll* e os atratores hiper-caóticos (ZHANG; LU; ZHENG, 2011), pode ser descrita por uma função de Lur'e. O modelo destes sistemas pode ser representado através da conexão de um sistema linear com uma função não linear limitada por uma condição de setor. A sincronização desta classe de sistemas pode ser analisada no contexto da estabilidade absoluta (CURRAN; CHUA, 1997) e expressa em termos de desigualdades matriciais lineares (LMI) (CAMPOS et al., 2007).

Este trabalho tem o objetivo de assegurar a sincronização de sistemas Lur'e mestre-escravo através de uma lei de controle que garante a estabilidade do erro de sincronização do sistema em malha fechada. Desta forma, os seguintes problemas de sincronização são abordados:

- Sincronização de sistemas Lur'e mestre-escravo em tempo discreto, onde a análise de estabilidade e o projeto do controlador são investigados considerando os efeitos da saturação do sinal de controle. Em particular, um controlador de realimentação do erro é considerado para garantir que o erro de sincronização entre os estados mestre e escravo convirja assintoticamente para zero. Condições de estabilidade local são obtidas a partir de uma função candidata de Lyapunov quadrática, de uma condição de setor clássica para a não linearidade Lur'e e de uma condição de setor modificada ao considerar o efeito da saturação. Sob estas condições, o projeto do controlador é desenvolvido a partir da solução de um problema de otimização convexo com o objetivo de maximizar o conjunto de erros iniciais admissíveis entre os sistemas mestre e escravo, para os quais a sincronização é garantida. Além disso, inspirado pela formulação apresentada em (HU; HUANG; LIN, 2004), condições menos conservadoras são derivadas para o caso particular onde a não linearidade da função Lur'e do sistema é descrita por uma função linear por partes.
- Sincronização de sistemas Lur'e mestre-escravo contínuos no tempo sob controle de realimentação do erro amostrado, através da análise de estabilidade da dinâmica do erro de sincronização entre os estados mestre e escravo. Em particular, considera-se uma classe de sistemas Lur'e onde a não linearidade é representada por uma função linear por partes. De forma a abordar problemas de amostragens periódicas e aperiódicas, uma representação da dinâmica do sistema em malha fechada entre dois instantes consecutivos de amostragem é proposta em conjunto com a utilização de um funcional *looped* e de uma função de Lyapunov do tipo Lur'e. Suportado pelos resultados de (SEURET; GOUAISBAUT, 2013), a desigualdade

integral de Wirtinger é utilizada para reduzir o conservadorismo quando comparada à desigualdade de Jensen, usualmente empregada na literatura. Com estas ferramentas, condições LMI são formuladas para estimar os limites de uma amostragem aperiódica, que garantem a estabilidade assintótica da origem do sistema em malha fechada e, portanto, a sincronização do sistema mestre-escravo. Quando o objetivo é o projeto do controlador, uma substituição de variáveis proposta no método descritor (FRIDMAN, 2014) conduz a um problema quasi-convexo.

Na sequência, este trabalho é organizado como segue. No Capítulo 2, uma breve revisão bibliográfica é apresentada e o problema de sincronização é definido, abordando as principais técnicas empregadas no problema de sincronização de sistemas Lur'e. Também são descritos os problemas de saturação do controle e de controle amostrado, e apresentadas diversas relações de setor para as funções não lineares que serão empregadas nas análises de estabilidade. O Capítulo 3 apresenta condições de análise de estabilidade e síntese de controle para sistemas Lur'e mestre-escravo em tempo discreto sob saturação do controlador, obtidas através da teoria de Lyapunov na forma de relações LMI. O Capítulo 4 aborda o caso em tempo contínuo com controle amostrado, através da técnica do funcional *looped* e condições estabelecidas no capítulo 2. O Capítulo 5 apresenta as conclusões e os possíveis trabalhos futuros.

2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA E CONCEITOS BÁSICOS

Neste capítulo, uma breve descrição sobre osciladores e tipos de sincronização é apresentada e, em seguida, o problema de sincronização é definido utilizando uma abordagem de controle através de uma análise de estabilidade do erro de sincronização de sistemas Lur'e mestre-escravo. Inicialmente, o problema de sincronização é definido de uma forma genérica, com o objetivo de caracterizar ambos os problemas em tempo contínuo e discreto, através de um operador δ . Logo após, uma breve revisão bibliográfica é apresentada. Em seguida, o problema de saturação do controle é apresentado. A partir destas definições, são apresentadas condições de setor para lidar com as não linearidades da função Lur'e do sistema e da saturação. Finalmente, o problema de controle amostrado é formulado através de um funcional *looped* e a desigualdade integral de Wirtinger é apresentada.

2.1 Osciladores e tipos de sincronização

Osciladores são sistemas periódicos ou aperiódicos que podem ser representados por sistemas lineares, como os osciladores harmônicos, ou não lineares, como os osciladores periódicos que apresentam um ciclo limite estável (KHALIL, 2002), e.g. oscilador de Van der Pol, e os osciladores caóticos que apresentam oscilações aperiódicas, aparentemente aleatórias, mas que no entanto possuem uma característica determinística, e.g. circuito de Chua, redes neurais e atrator de Lorenz.

O problema de sincronização geralmente é aplicado na literatura a osciladores caóticos, uma vez que as trajetórias destes sistemas não convergem para um ponto de equilíbrio. Portanto, a garantia de sincronização pode ser avaliada independentemente do tempo ou das condições iniciais, desde que estas sejam diferentes para os sistemas mestre e escravo.

Este trabalho aborda a sincronização de sistemas mestre e escravo idênticos, garantindo que o estado do sistema escravo siga o estado do sistema mestre, de forma que o erro de sincronização entre estes convirja para zero. A sincronização também pode ser aplicada em sistemas mestre e escravo de parâmetros distintos ou com incerteza nos parâmetros (NIJMEIJER; MAREELS, 1997; SUYKENS; CURRAN; CHUA, 1999). Por outro lado, a sincronização parcial ocorre quando uma parte das variáveis de estado do sistema escravo segue as variáveis de estado correspondentes do sistema mestre. Outro exemplo de sincronização, bastante aplicado a osciladores periódicos, é a sincronização de fase, quando as frequências dos sistemas mestre e escravo são similares ou iguais.

2.2 Problema de sincronização de sistemas Lur'e

Considere o seguinte sistema mestre-escravo:

$$\mathcal{M} : \begin{cases} \delta x_M = Ax_M + B\sigma(Cx_M) \\ y_M = Hx_M \end{cases} \quad (1)$$

$$\mathcal{S} : \begin{cases} \delta x_S = Ax_S + B\sigma(Cx_S) + Eu \\ y_S = Hx_S \end{cases} \quad (2)$$

onde x_M e $x_S \in \mathbb{R}^n$ são os estados dos sistemas mestre e escravo, respectivamente, y_M e $y_S \in \mathbb{R}^q$ as saídas destes sistemas, $u \in \mathbb{R}^n$ a entrada de controle e $\sigma(\cdot) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função não linear vetorial descentralizada. A, B, C e H são matrizes reais de dimensões apropriadas. O operador δ representa o valor da variável no instante seguinte, no caso de sistemas em tempo discreto, ou a derivada desta variável em relação ao tempo, no caso de sistemas em tempo contínuo. $E \in \mathbb{S}^{n \times n}$ é uma matriz diagonal utilizada no sistema mestre-escravo em tempo discreto.

Considere, agora, a seguinte definição em relação à função não linear:

Definição 2.1. Cada componente de $\sigma(\cdot)$ deve satisfazer as seguintes afirmações:

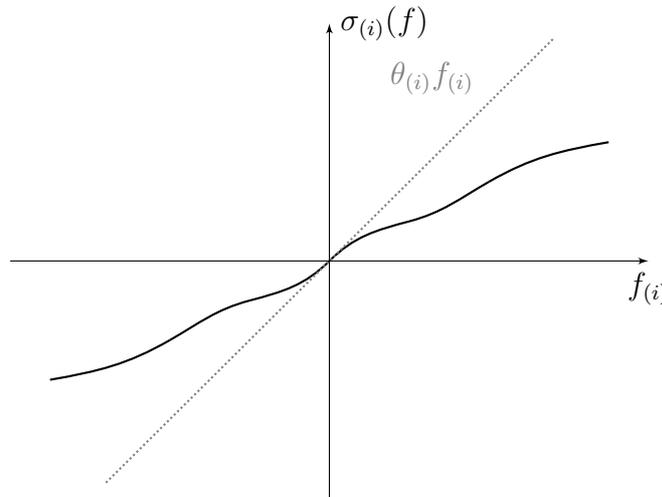
(i) $\sigma_{(i)}(0) = 0$;

(ii) possui a seguinte restrição por partes

$$0 \leq \frac{\sigma_{(i)}(f) - \sigma_{(i)}(\hat{f})}{f - \hat{f}} \leq \theta_{(i)}, \quad \forall f, \hat{f}, f \neq \hat{f}; \quad (3)$$

(iii) pertence globalmente ao setor $[0, \theta_{(i)}]$, $\theta_{(i)} > 0$, i.e. $\sigma_{(i)}(f)(\sigma_{(i)}(f) - \theta_{(i)}f_{(i)}) \leq 0, \forall f$ (KHALIL, 2002), conforme ilustrado na Figura 1.

Figura 1: Exemplo de uma função não linear conforme Definição 2.1.



Definindo os erros de sincronização e e y_e como a diferença entre os estados e as saídas dos sistemas mestre e escravo, respectivamente, i.e. $e = x_M - x_S$ e $y_e = y_M - y_S = He$, a partir de (1) e (2) segue que a dinâmica do erro de sincronização é definida por

$$\delta e = Ae + B\rho(Ce, Cx_S) - Eu \quad (4)$$

onde $\rho(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função não linear vetorial descentralizada definida por

$$\begin{aligned}\rho(Ce, Cx_S) &= \sigma(Cx_M) - \sigma(Cx_S) \\ &= \sigma(Ce + Cx_S) - \sigma(Cx_S).\end{aligned}\quad (5)$$

Portanto, a partir de (4), percebe-se que a sincronização pode ser tratada como um problema de estabilização, i.e. se $\lim_{t \rightarrow \infty} e = 0$, no caso contínuo, ou $\lim_{k \rightarrow \infty} e = 0$, no caso discreto, então $x_S \rightarrow x_M$.

Desta forma, o seguinte problema de sincronização pode ser enunciado:

Problema 2.1. *Encontrar uma lei de controle tal que todas as trajetórias de (4) convirjam assintoticamente para a origem, garantindo, desta forma, a sincronização do sistema mestre-escravo.*

Importante observar que a estabilidade pode ser analisada tanto para uma realimentação de estado como para uma realimentação de saída. Para sistemas em tempo discreto será considerada uma realimentação de estado e para sistemas em tempo contínuo será utilizada uma realimentação de saída.

Este problema de estabilização pode ser examinado como um caso particular do problema de regulação, onde deseja-se regular a diferença entre os estados mestre e escravo no valor zero. O problema dual de controle corresponde ao observador de estado. Em (NIJMEIJER; MAREELS, 1997) a sincronização de sistemas não lineares é investigada considerando o problema do observador de estado, onde o sinal de saída do sistema mestre com condições iniciais desconhecidas é medido e modificado de acordo com um termo que depende da diferença entre a medição da saída do sistema mestre e a predição do observador. A diferença entre a metodologia do problema do observador de estado e o problema de controle considerado neste trabalho corresponde à caracterização da função não linear $\rho(\cdot, \cdot)$, que depende dos estados dos sistemas mestre e escravo e que permite a aplicação de uma condição de setor na análise de estabilidade do sistema em malha fechada.

Uma classe particular de sistemas Lur'e com grande aplicação no problema de sincronização corresponde à descrição da não linearidade $\sigma(\cdot)$ por um função linear por partes. Empregando uma formulação similar a (HU; HUANG; LIN, 2004) de uma representação por funções saturação, é possível obter uma formulação diferenciada para o problema de sincronização, com o objetivo de obter condições menos conservadoras em termos de estabilidade.

Considere que cada componente de $\sigma(\cdot)$ representa uma função não linear simétrica ímpar, conforme Figura 2, que pode ser descrita por uma função linear por partes

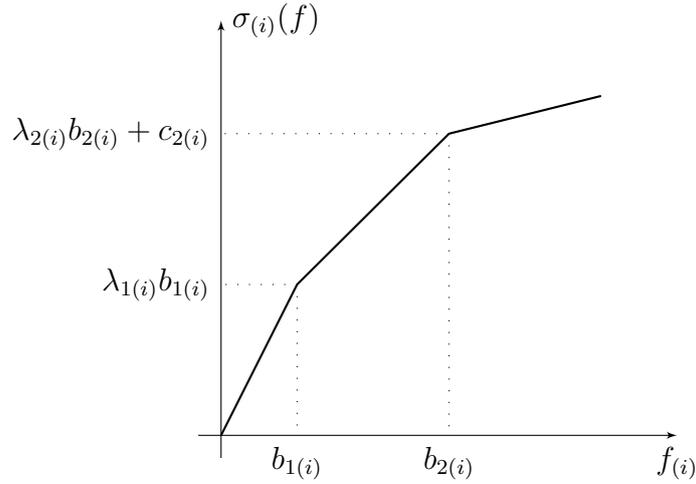
$$\sigma_{(i)}(f) = \begin{cases} \lambda_{1(i)}f(i), & f(i) \in [0, b_{1(i)}] \\ \lambda_{2(i)}f(i) + c_{2(i)}, & f(i) \in (b_{1(i)}, b_{2(i)}] \\ \vdots & \\ \lambda_{N(i)}f(i) + c_{N(i)}, & f(i) \in (b_{N-1(i)}, \infty) \end{cases}\quad (6)$$

onde $c_{l+1(i)} \triangleq b_{l(i)}(\lambda_{l(i)} - \lambda_{l+1(i)}) + c_{l(i)}$, $l = 1, \dots, N-1$, $i = 1, \dots, m$, e $c_{1(i)} \triangleq 0$. Os valores de $\sigma_{(i)}(f)$ para $f(i) < 0$ podem ser determinados por simetria.

Definindo $\psi_{b_l}(\cdot)$ como uma função zona-morta descentralizada

$$\psi_{b_l}(f) = f - \text{sat}_{b_l}(f)\quad (7)$$

Figura 2: Função linear por partes com 3 inclinações



onde $\text{sat}_{b_l}(\cdot) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função saturação vetorial clássica simétrica definida como

$$\text{sat}_{b_l}(f)_{(i)} \triangleq \text{sign}(f_{(i)}) \min(|f_{(i)}|, b_{l(i)}), \quad i = 1, \dots, m. \quad (8)$$

Desta forma, é possível representar cada segmento linear de (6), para $f_{(i)} \geq b_{1(i)}$, por uma função zona-morta (FISCHMANN; FLORES; GOMES DA SILVA JR., 2017a), de tal forma que a soma destas funções seja igual à função não linear, i.e.

$$\sigma_{(i)}(f) = \lambda_{1(i)}f_{(i)} + (\lambda_{2(i)} - \lambda_{1(i)})\psi_{b_1}(f)_{(i)} + \dots \quad (9)$$

Assim sendo, para N inclinações (ou $N - 1$ quebras), $\sigma(f)$ pode ser descrita por uma função linear e uma soma de funções zona-morta como

$$\sigma(f) = \Lambda_1 f - \sum_{l=1}^{N-1} \bar{\Lambda}_l \psi_{b_l}(f) \quad (10)$$

onde $\bar{\Lambda}_l = \Lambda_l - \Lambda_{l+1}$, $\Lambda_l = \text{diag}\{\lambda_{l(1)}, \dots, \lambda_{l(m)}\}$.

Neste caso, (5) pode ser representada através de (10) como

$$\rho(Ce, Cx_S) = \Lambda_1 Ce - \sum_{l=1}^{N-1} \bar{\Lambda}_l [\psi_{b_l}(Ce + Cx_S) - \psi_{b_l}(Cx_S)]. \quad (11)$$

Assim, a dinâmica do erro de sincronização é dada por

$$\delta e = \tilde{A}e - B \sum_{l=1}^{N-1} \bar{\Lambda}_l \Phi_l(Ce, Cx_S) - Eu \quad (12)$$

onde $\tilde{A} = A + B\Lambda_1 C$ e $\Phi_l(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função não linear vetorial descentralizada definida por:

$$\Phi_l(Ce, Cx_S) \triangleq \psi_{b_l}(Ce + Cx_S) - \psi_{b_l}(Cx_S). \quad (13)$$

Observação 2.1. Assim como definido em (HU; HUANG; LIN, 2004), serão consideradas neste trabalho somente funções lineares por parte côncavas, i.e. $\lambda_{l(i)} \geq \lambda_{l+1(i)}$. Essa definição garante a convexidade desta formulação para as condições de estabilidade que serão estabelecidas nos próximos capítulos.

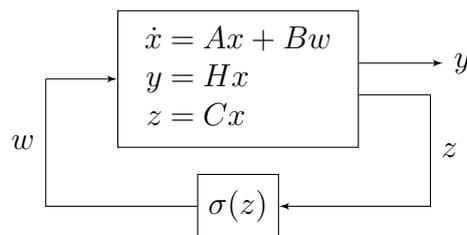
2.3 Revisão bibliográfica

Nesta seção, publicações sobre os casos nos tempos discreto e contínuo são abordadas com o objetivo de contextualizar as aplicações propostas neste trabalho em relação à literatura corrente sobre sincronização de sistemas Lur'e mestre-escravo.

Desde que (PECORA; CARROLL, 1990) demonstrou ser possível a sincronização de dois circuitos caóticos, diversas técnicas de controle tem sido aplicadas com o objetivo de garantir a sincronização de sistemas mestre-escravo como o método de estabilização impulsiva (YANG; CHUA, 1997), o controle \mathcal{H}_∞ robusto (CAMPOS et al., 2007) e o controle adaptativo (FENG; CHEN, 2005).

Sistemas caóticos são inerentemente não lineares, usualmente racionais, bilineares ou do tipo Lur'e (STROGATZ, 2014). A classe de sistemas Lur'e, representada pela conexão de um sistema linear com uma função não linear na realimentação, conforme Figura 3, pode ser utilizada para descrever uma série de osciladores caóticos como o circuito de Chua, o *n-scroll* e os atratores hiper-caóticos, sendo, portanto, de interesse da comunidade científica.

Figura 3: Sistema tipo Lur'e.



Caracterizando a não linearidade como uma função Lur'e, é possível aplicar a teoria da estabilidade absoluta (CURRAN; CHUA, 1997), através do critério do círculo, que considera uma função candidata de Lyapunov quadrática, e do critério de Popov, que, além da função quadrática, considera um termo integral na função não linear, sendo chamada de função de Lyapunov do tipo Lur'e (KHALIL, 2002). As condições de estabilidade resultantes desta análise podem ser expressas em termos de desigualdades matriciais lineares (LMI) como em (CAMPOS et al., 2007), com uma proposta de projeto de controlador \mathcal{H}_∞ robusto para sincronização de sistemas Lur'e mestre-escravo em tempo discreto com base em condições LMI e em (SUYKENS; CURRAN; CHUA, 1997), onde o projeto de um controlador dinâmico de realimentação de saída é proposto para a sincronização de um sistema Lur'e mestre-escravo. A formulação por LMI permite que as condições de estabilidade e a síntese de controladores sejam determinadas através de um problema de otimização convexo, cuja solução pode ser obtida por pacotes computacionais padronizados (GRANT; BOYD, 2014).

2.3.1 Sincronização em tempo discreto com saturação

A maioria dos artigos na literatura trata de sistemas em tempo contínuo, de forma que poucas publicações tratam a sincronização de sistemas Lur'e em tempo discreto. Em (CAMPOS et al., 2007) considera-se um controle \mathcal{H}_∞ e (FENG; CHEN, 2005) propõe uma estratégia de controle adaptativo considerando técnicas *fuzzy*. Em ambos artigos, a estabilidade é provada sem considerar restrições no sinal de controle.

Por outro lado, a saturação do sinal de controle é uma não linearidade que deve ser considerada ao lidar com a maioria das aplicações práticas, pois os atuadores dos sistemas não são capazes de manipular sinais com amplitude arbitrariamente elevadas. Desta forma, a saturação do atuador pode causar diversos efeitos no sistema em malha fechada, como a degradação do desempenho transiente ou mesmo a instabilidade (TARBOURIECH et al., 2011). Particularmente, sob saturação do controle, a estabilidade global da origem pode não ser atingível mesmo se a dinâmica da planta é linear. Se a dinâmica em malha aberta é instável (SUSSMANN; SONTAG; YANG, 1994), somente a estabilidade local pode ser garantida. Neste caso, a convergência das trajetórias para o ponto de equilíbrio são garantidas somente quando as condições iniciais pertencem à sua região de atração. Ao lidar com sincronização de sistemas mestre-escravo, garantias de que a sincronização será obtida podem ser fornecidas pela análise de estabilidade da dinâmica do erro entre os estados dos sistemas mestre e escravo. Portanto, na presença da saturação do controle, a sincronização pode não ser obtida se o erro inicial entre os estados mestre e escravo estiver fora da região de atração da origem para o erro igual a zero (FISCHMANN; FLORES; GOMES DA SILVA JR., 2017a). Este problema tem sido abordado na literatura considerando sistemas em tempo contínuo em (FISCHMANN; FLORES; GOMES DA SILVA JR., 2017a; HAO; YANG, 2013; MA; JING, 2014). Em (FISCHMANN; FLORES; GOMES DA SILVA JR., 2017a), um controlador não linear de realimentação de saída é proposto a partir de condições LMI que garantem a estabilidade assintótica do erro de sincronização. Em (HAO; YANG, 2013), um controlador adaptativo tolerante a falhas é projetado a partir de relações LMI e um método para estimar a região de estabilidade independente da informação da falha é apresentado. Em (MA; JING, 2014), os autores fornecem condições LMI que asseguram uma estabilidade assintótica robusta e uma atenuação a perturbações com controle \mathcal{H}_∞ para sincronização local de sistemas com atraso. É importante destacar que todas estas referências consideram a abordagem da condição de setor clássica (KHALIL, 2002) ao lidar com os efeitos da não linearidade da função Lur'e.

Com o objetivo de apresentar uma solução até então não desenvolvida, o Capítulo 3 deste trabalho aborda a sincronização de sistemas mestre-escravo discretos, onde a análise de estabilidade e o projeto do controlador são investigados considerando os efeitos da saturação do controle.

2.3.2 Sincronização sob controle amostrado

Devido às muitas vantagens de uma implementação digital (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997), a sincronização de sistemas contínuos no tempo é, em geral, implementada através de um controlador com base em dados amostrados periodicamente. Desta forma, o erro de sincronização entre o mestre e o escravo é medido a cada amostra e o sinal do controle é atualizado somente nos instantes de amostragem. No entanto, com a disseminação de sistemas controlados em rede, deve-se considerar os efeitos de limitação de banda de transmissão, atraso de comunicação e perda de dados. Estes problemas podem levar a variações no período de amostragem, podendo afetar a estabilidade ou o desempenho do sistema em malha fechada. Neste caso, é importante lidar com o problema de amostragem aperiódica.

Considerando o problema de sincronização através do controle amostrado, o método de atraso na entrada (FRIDMAN; SEURET; RICHARD, 2004) foi aplicado em (ZHANG; HE; WU, 2009), onde um funcional de Lyapunov aumentado e condições de setor foram consideradas no projeto de um controlador amostrado que garante a sincronização de

sistemas mestre-escravo. Em (WU et al., 2014), a sincronização local de redes neurais caóticas é obtida por um controlador amostrado e condições de estabilidade são derivadas de um funcional de Lyapunov. Resultados aprimorados foram obtidos quando a definição de positividade em um funcional de Lyapunov-Krasovskii (LKF) foi relaxada apenas para os instantes de amostragem em (CHEN; WANG; LU, 2012) e (ZHANG; ZENG; ZHONG, 2017). Esta última referência propôs um método de projeto de controle a partir de um novo LKF, apresentando uma comparação extensiva com métodos similares. Recentemente, em (ZENG et al., 2017), os autores aperfeiçoaram esta metodologia através da técnica de particionamento do atraso, também considerada em (LEE; PARK, 2017).

Outro método para lidar com controle amostrado, ainda não aplicado ao problema de sincronização, consiste na utilização de um funcional *looped*, conforme proposto por (SEURET, 2012). Este método deriva da abordagem por LKF e da representação da dinâmica do sistema entre os instantes de amostragem, onde as dinâmicas em tempo contínuo e discreto são relacionadas através de um funcional *looped*. Uma das vantagens deste método é a possibilidade de lidar com sistemas contínuos sem a necessidade de discretização da dinâmica para fins de análise. A estabilidade é avaliada somente nos instantes de amostragem, resultando em uma condição menos conservadora a ser satisfeita quando comparada aos funcionais em tempo contínuo. A característica assíncrona da representação da dinâmica entre os instantes de amostragem permite a análise periódica ou aperiódica. Busca-se através deste método condições menos conservadoras na análise de estabilidade e síntese de controle com dados amostrados quando comparadas aos métodos baseados em LKF.

2.4 Conceitos e ferramentas de base

Nesta seção serão apresentados os conceitos e ferramentas que serão utilizadas nos próximos capítulos para estabelecer as condições de estabilidade que levam à solução dos problemas de sincronização de sistemas Lur'e mestre-escravo.

2.4.1 Condições de setor

Uma técnica comumente utilizada na análise de estabilidade envolvendo funções Lur'e são as condições de setor. Nesta seção serão apresentadas condições de setor para as funções não lineares $\sigma(\cdot)$, $\psi_{b_l}(\cdot)$, $\rho(Ce, Cx_S)$ e $\Phi_l(Ce, Cx_S)$. Estas relações serão utilizadas na elaboração de condições de estabilidade nos próximos capítulos.

A função não linear $\sigma(\cdot)$ atende a uma condição de setor (KHALIL, 2002) e, portanto, o lema a seguir pode ser definido.

Lema 1. *Se $\sigma(f)$ satisfaz a Definição 2.1, então a relação*

$$\sigma(f)^\top J_3(\sigma(f) - \Theta f) \leq 0 \quad (14)$$

com $\Theta = \text{diag}\{\theta_{(1)}, \theta_{(2)}, \dots, \theta_{(m)}\}$ é verificada globalmente para qualquer matriz diagonal definida positiva J_3 .

A função zona-morta $\psi_{b_l}(\cdot)$ atende a uma condição de setor (KHALIL, 2002) e, portanto, o lema a seguir pode ser estabelecido.

Lema 2. *A função zona-morta $\psi_{b_l}(f)$ satisfaz uma condição de setor tal que a relação*

$$\psi_{b_l}(f)^\top J_4(\psi_{b_l}(f) - f) \leq 0 \quad (15)$$

é verificada globalmente para qualquer matriz diagonal definida positiva J_4 .

Tal como estabelecido em (FISCHMANN; FLORES; GOMES DA SILVA JR., 2017a), considerando que $\sigma(\cdot)$ é uma função não linear limitada em setor satisfazendo a Definição 2.1, o seguinte lema pode ser enunciado:

Lema 3. Se $\sigma(\cdot)$ satisfaz a Definição 2.1, então a função não linear $\rho(f_1, f_0) = \sigma(f_1 + f_0) - \sigma(f_0)$ é tal que a relação

$$\rho(f_1, f_0)^\top J_1 (\rho(f_1, f_0) - \Theta f_1) \leq 0, \forall f_1, f_0 \quad (16)$$

é verificada globalmente para qualquer matriz diagonal definida positiva J_1 .

Prova. Conforme Definição 2.1, $\sigma_{(i)}(\cdot)$ é uma função monotonicamente crescente e com taxa de crescimento limitada. Considerando $f_{0(i)} = (Cx_S)_{(i)}$ e $f_{1(i)} = (Ce)_{(i)} \geq 0$, tem-se que $(Cx_M)_{(i)} \geq (Cx_S)_{(i)}$ e portanto $\sigma_{(i)}(Cx_M) \geq \sigma_{(i)}(Cx_S)$, logo $\sigma_{(i)}(Cx_M) - \sigma_{(i)}(Cx_S) \geq 0$ e assim $\rho_{(i)}(Ce, Cx_S) \geq 0$. Além disso, como $(Cx_M)_{(i)} \geq (Cx_S)_{(i)}$, tem-se que $\theta_{(i)}(Cx_M)_{(i)} - \sigma_{(i)}(Cx_M) \geq \theta_{(i)}(Cx_S)_{(i)} - \sigma_{(i)}(Cx_S)$, portanto $\sigma_{(i)}(Cx_M) - \sigma_{(i)}(Cx_S) \leq \theta_{(i)}(Cx_M)_{(i)} - \theta_{(i)}(Cx_S)_{(i)}$ e assim $\rho_{(i)}(Ce, Cx_S) \leq \theta_{(i)}(Ce)_{(i)}$. Como $\sigma(\cdot)$ é uma função descentralizada, este resultado é válido para qualquer elemento $\sigma_{(i)}(\cdot)$, e como $\sigma_{(i)}(\cdot)$ pertence globalmente ao setor, a relação $0 \leq \rho_{(i)}(Ce, Cx_S) \leq \theta_{(i)}(Ce)_{(i)}$ para $f_{1(i)} = (Ce)_{(i)} \geq 0$ pode ser reescrita como $0 \geq \rho_{(i)}(Ce, Cx_S) \geq \theta_{(i)}(Ce)_{(i)}$ para $f_{1(i)} = (Ce)_{(i)} \leq 0$, de tal forma que $\rho_{(i)}(f_1, f_0)(\rho_{(i)}(f_1, f_0) - \theta_{(i)}(Ce)_{(i)}) \leq 0$ se mantém por simetria. Agrupando-se os elementos $\sigma_{(i)}(\cdot)$ e adicionando-se uma matriz J_1 , obtém-se (16). \square

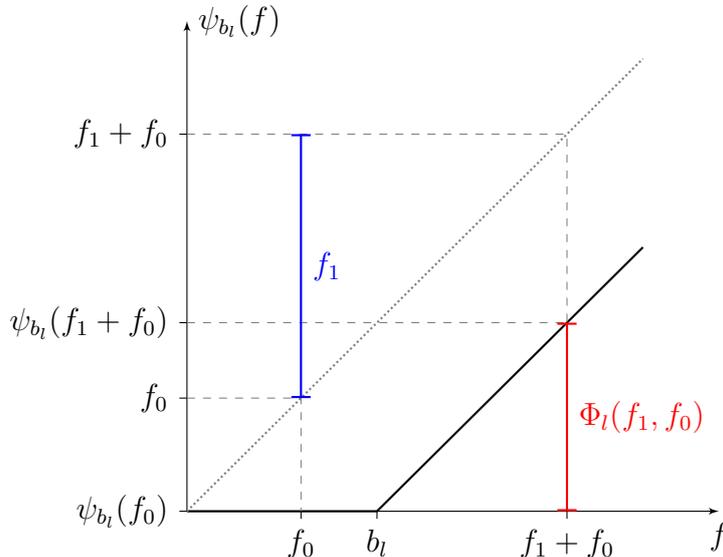
Semelhantemente ao Lema 3, o seguinte lema (FISCHMANN; FLORES; GOMES DA SILVA JR., 2017b) em relação a $\Phi_l(Ce, Cx_S)$ pode ser enunciado:

Lema 4. A função não linear $\Phi_l(f_1, f_0) = \psi_{b_l}(f_1 + f_0) - \psi_{b_l}(f_0)$ é tal que a relação

$$\Phi_l(f_1, f_0)^\top U_l (\Phi_l(f_1, f_0) - f_1) \leq 0, \forall f_1, f_0 \quad (17)$$

é verificada globalmente para qualquer matriz U_l diagonal definida positiva.

Figura 4: Função não linear limitada em setor $\psi_{b_l}(f)$ para $m = 1$.



Prova. Como a função zona-morta $\psi_{b_l}(\cdot)$ é um caso particular da não linearidade $\sigma(\cdot)$ com $\theta_{(i)} = 1$, a função não linear $\Phi_l(\cdot, \cdot)$ (Figura 4) pode ser observada como um caso particular da função $\rho(\cdot, \cdot)$, onde cada componente pertence ao setor $[0, 1]$. Logo, a mesma prova do Lema 3 pode ser aplicada neste caso e portanto (17) é satisfeita. \square

Somente uma função $\Phi_l(\cdot, \cdot)$ para um determinado $l = 1, \dots, N - 1$ permanece ativa a cada instante em função do erro de sincronização, permitindo que esta relação seja avaliada como o somatório das condições de cada função $\Phi_l(\cdot, \cdot)$.

2.4.2 Saturação do controle

Uma restrição importante a ser considerada no controle de sistemas consiste na saturação da entrada de controle. Seguindo uma formulação de (TARBOURIECH et al., 2011), na qual a estabilidade do sistema em malha fechada é analisada através de um condição de setor modificada, a saturação do controle é representada por uma função zona-morta.

Considere um sistema linear

$$\delta x = Ax - u \quad (18)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ representa o estado do sistema e $u \in \mathbb{R}^n$ é a entrada de controle. A é uma matriz real de dimensão apropriada.

O sinal de controle é limitado conforme:

$$|u_{(j)}| \leq \bar{u}_{(j)}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (19)$$

A limitação de amplitude (19) pode ser reescrita na forma de um sinal de controle saturado

$$u = \text{sat}_{\bar{u}}(v) \quad (20)$$

onde v representa o sinal obtido pelo controlador e $\text{sat}_{\bar{u}}(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função saturação clássica vetorial simétrica descrita por:

$$\text{sat}_{\bar{u}}(v)_{(j)} \triangleq \text{sign}(v_{(j)}) \min(|v_{(j)}|, \bar{u}_{(j)}), \quad j = 1, \dots, n. \quad (21)$$

Considerando um controle por realimentação de estado

$$v = Kx \quad (22)$$

então, a partir de uma função zona-morta, tal como em (7), a dinâmica do sistema (18) em malha fechada é dada por

$$\delta x = (A - K)x + \psi_{\bar{u}}(v). \quad (23)$$

A estabilidade da dinâmica não linear deste sistema em malha fechada pode ser analisada através de uma condição de setor modificada, preferida em relação à condição de setor clássica pois possibilita que sejam obtidas relações de estabilidade menos conservadoras (TARBOURIECH et al., 2011). As condições de setor estabelecidas na Seção 2.4.1, são definidas globalmente através de uma condição de setor clássica. A condição de setor modificada atribui a uma matriz de variáveis um grau de liberdade adicional que permite diminuir o domínio de validade desta condição de setor, levando a condições de estabilidade menos conservadoras. Em função deste domínio, obtém-se condições de estabilidade local. Portanto é importante definir um conjunto de condições iniciais para os quais o sistema em malha fechada é assintoticamente estável. Este conjunto é comumente chamado de região de atração (KHALIL, 2002).

A saturação da entrada de controle será analisada através de uma condição de setor modificada, válida para a função zona-morta correspondente, conforme o seguinte lema (TARBOURIECH et al., 2011).

Lema 5. *Se v e w pertencem ao conjunto $\mathcal{W}(v, w)$ com $\mathcal{W}(v, w) = \{v, w \in \mathbb{R}^n \mid |v_{(j)} - w_{(j)}| \leq \bar{u}_{(j)}, j = 1, \dots, n\}$, então a relação*

$$\psi_{\bar{u}}(v)^\top J_2(\psi_{\bar{u}}(v) - w) \leq 0 \quad (24)$$

é verificada para qualquer matriz diagonal definida positiva J_2 .

Para um controle por realimentação de estado (22), $v = Kx$, segundo o método da condição de setor modificada, $w = Gx$, onde G representa uma matriz de variáveis livres que contribui com o aumento do grau de liberdade do problema de análise de estabilidade em relação à condição de setor clássica. O resultado da matriz G determina o domínio de validade da condição de setor.

2.4.3 Controle amostrado

Seja um sistema linear

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - u(t) \quad (25)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ representa o estado do sistema e $u(t) \in \mathbb{R}^n$ é a entrada de controle. A é uma matriz real de dimensão apropriada.

Em uma abordagem de controle amostrado, o estado $x(t)$ é medido nos instantes de amostragem, sujeito a intervalos aperiódicos, e o valor do controle $u(t)$ é mantido constante, através de um retentor de ordem zero, entre instantes consecutivos de amostragem. Portanto, considerando uma realimentação de estado, obtém-se o seguinte sinal de controle:

$$u(t) = Kx(t_k), \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \forall k \quad (26)$$

onde $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\{t_k\}_{k \geq 0}$ é uma sequência crescente de instantes positivos de amostragem, tal que $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} [t_k, t_{k+1}) = [0, +\infty)$. Assume-se que existem dois escalares positivos $T_1 \leq T_2$, tal que a diferença entre duas amostragens sucessivas $T_k = t_{k+1} - t_k$ satisfaz

$$0 < T_1 \leq T_k \leq T_2, \forall k \in \mathbb{N}. \quad (27)$$

A dinâmica do sistema (25) em malha fechada com o controle amostrado (26) pode ser representada por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - Kx(t_k). \quad (28)$$

Para analisar a estabilidade do sistema em malha fechada (28) será aplicada a técnica do funcional *looped* (SEURET, 2012). Para tanto, se faz necessário modelar a dinâmica do sistema entre duas amostras. Neste sentido, é definida a função do estado $\chi_k(\tau) = x(t_k + \tau)$. Utilizando esta representação, a dinâmica entre duas amostras consecutivas de (28) resulta em:

$$\dot{\chi}_k(\tau) = A\chi_k(\tau) - K\chi_k(0), \forall \tau \in [0, T_k], T_k \in [T_1, T_2], \forall k. \quad (29)$$

O lema a seguir (SEURET, 2012) estabelece condições para a utilização de um funcional *looped* para analisar a estabilidade assintótica do sistema (28).

Lema 6. Considerando o sistema (29), definindo dois escalares positivos $0 < T_1 \leq T_2$ e uma função $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ para a qual existem escalares reais $0 < \mu_1 < \mu_2$ e $p > 0$, tais que

$$\mu_1 \|x\|^p \leq V(x) \leq \mu_2 \|x\|^p, \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (30)$$

Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) Para qualquer $k \in \mathbb{N}$ e $T_k \in [T_1, T_2]$, a equação da diferença da função V satisfaz

$$\Delta V(k) = V(\chi_k(T_k)) - V(\chi_k(0)) < 0.$$

(ii) Existe um funcional contínuo $\mathcal{V} : [0, T_2] \times \mathbb{K}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, que satisfaz, para qualquer $z \in \mathbb{K}^n$ e para qualquer $T_k \in [T_1, T_2]$

$$\mathcal{V}(T_k, z, T_k) = \mathcal{V}(0, z, T_k) \quad (31)$$

e tal que, para qualquer $k \in \mathbb{N}$, $T_k \in [T_1, T_2]$ e $\tau \in [0, T_k]$

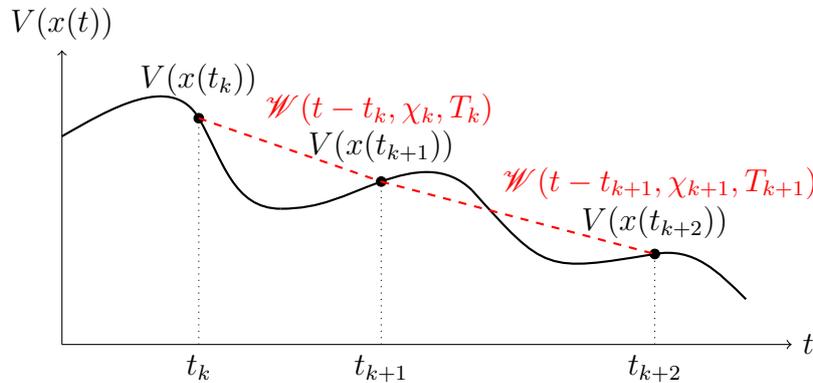
$$\dot{\mathcal{W}}(\tau, \chi_k, T_k) = \frac{d}{d\tau} V(\chi_k(\tau)) + \frac{d}{d\tau} \mathcal{V}(\tau, \chi_k, T_k) < 0. \quad (32)$$

Além disto, se um destes argumentos é verdadeiro, então todas as trajetórias do sistema em malha fechada (28) convergem assintoticamente para a origem, desde que $T_k \in [T_1, T_2], \forall k$.

Prova. Considere um número inteiro positivo k e $\tau \in [0, T_k]$, e assuma que o item (ii) é válido. Integrando $\dot{\mathcal{W}}(\tau, e_k, T_k)$ no intervalo $[0, T_k]$ e assumindo que as relações (31) e (32) são atendidas, implica em $\Delta V(k) < 0$ e, portanto, o item (i) também é válido.

Assuma agora que o item (i) é verdadeiro e considere o funcional $\mathcal{V}(\tau, e_k, T_k) = -V(e_k(\tau)) + \tau \Delta V(k)/T_k$ do Lema 2 de (PEET; PAPACHRISTODOULOU; LALL, 2009). Pode se verificar que este funcional satisfaz (31) a partir do resultado deste cálculo. Da mesma forma, (32) é satisfeita com $\dot{\mathcal{W}}(\tau, e_k, T_k) = \Delta V(k)/T_k < 0$ e, portanto, o item (ii) também é verdadeiro. Está provada, portanto, a equivalência entre os itens (i) e (ii). \square

Figura 5: Relação entre a função de Lyapunov $V(x(t))$ e o funcional $\mathcal{W}(\tau, \chi_k, T_k)$ no método do funcional *looped* (SEURET, 2012).



Uma vantagem importante do presente método, em relação aos métodos com base nos funcionais de Lyapunov-Krasovskii em tempo contínuo, é que o funcional \mathcal{V} não

precisa ser positivo definido. A Figura 5 ilustra a relação do funcional \mathcal{W} com a função de Lyapunov $V(x(t))$. O segundo item do Lema 6 permite avaliar a estabilidade sem a necessidade de discretização do sistema, através da derivada do funcional \mathcal{W} . A garantia da estabilidade do sistema em malha fechada é obtida provando-se que a derivada do funcional \mathcal{W} é estritamente negativa, que implica em afirmar que $V(\chi_k(\tau))$ é estritamente decrescente nos instantes de amostragem, pois, conforme o primeiro item do Lema 6, $V(\chi_k(T_k)) < V(\chi_k(0))$ para $T_k \in [T_1, T_2], \forall k$.

Um termo geralmente presente no método do funcional *looped*, assim como nos métodos de LKF, consiste em uma integral quadrática, em função da estrutura definida no funcional \mathcal{V} . Em muitos casos, como em (SEURET, 2012), este termo é limitado por uma aproximação da integral de Jensen. Entretanto, em (SEURET; GOUAISBAUT, 2013), obtém-se um resultado menos conservador quando aplicada a desigualdade integral de Wirtinger, definida no lema a seguir (SEURET et al., 2015).

Lema 7. *Seja $\omega : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função diferenciável sobre (a, b) e que possui uma derivada de primeira ordem em um termo integral quadrático. Então, para qualquer matriz positiva definida $R \in \mathbb{S}^n$ e qualquer matriz $Z \in \mathbb{R}^{3n \times 2n}$, a desigualdade*

$$\int_a^b \dot{\omega}(s)^\top R \dot{\omega}(s) ds \geq \Omega^\top \left[\text{He}\{ZM\} - (b-a)Z \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 3R \end{bmatrix}^{-1} Z^\top \right] \Omega \quad (33)$$

é válida, onde

$$\Omega^\top = \left[\omega(b)^\top \quad \omega(a)^\top \quad \frac{1}{b-a} \int_a^b \omega(s)^\top ds \right]$$

$$M = \begin{bmatrix} I & -I & 0 \\ I & I & -2I \end{bmatrix}.$$

2.5 Considerações finais

Neste capítulo foram apresentadas as ferramentas que serão utilizadas para estabelecer as condições de estabilidade e de síntese de controle para a sincronização de sistemas Lur'e mestre-escravo nos próximos capítulos.

Na sincronização em tempo discreto serão utilizadas as condições de setor para a não linearidade da função Lur'e e a condição de setor modificada para a saturação. Uma lei de controle por realimentação de estado será considerada com o objetivo de obter relações LMI. Na sincronização em tempo contínuo com controle amostrado, além da aplicação das condições de setor, o método do funcional *looped* será adaptado para um sistema não linear do tipo Lur'e. Inicialmente a análise de estabilidade será abordada para um ganho K dado. Em seguida, uma metodologia para o projeto de uma lei de controle de realimentação de saída será apresentada através de relações quasi-LMI.

Nos problemas abordados de sincronização foram considerados sistemas mestre e escravo de parâmetros idênticos. Sendo estes sistemas contínuos no tempo, no caso amostrado, é importante verificar os efeitos da variação dos valores dos parâmetros entre os sistemas mestre e o escravo. Embora não tenha sido abordado neste trabalho, existe um artigo publicado neste sentido (SUYKENS; CURRAN; CHUA, 1999) que mostra que é possível obter a sincronização de sistemas mestre-escravo caóticos com variação nos parâmetros dentro de um conjunto onde o erro de sincronização é limitado.

3 SINCRONIZAÇÃO EM TEMPO DISCRETO COM SATURAÇÃO

Este capítulo aborda o caso discreto do problema de sincronização de sistemas Lur'e mestre-escravo sob saturação do controlador. A partir da formulação generalizada do problema de sincronização, apresentada na Seção 2.2, substituindo-se o operador δ pelo valor da variável no instante seguinte, serão estabelecidas definições para o desenvolvimento do problema. Será considerada uma realimentação de estado como solução ao projeto do controlador. Inicialmente, será abordado o caso de uma função não linear genérica e, em seguida, o caso particular em que esta é precisamente representada por uma função linear por partes.

3.1 Descrição do problema

Considere o seguinte sistema mestre-escravo discreto no tempo:

$$\mathcal{M} : x_M^+ = Ax_M + B\sigma(Cx_M) \quad (34)$$

$$\mathcal{S} : x_S^+ = Ax_S + B\sigma(Cx_S) + Eu \quad (35)$$

onde $x_M, x_S \in \mathbb{R}^n$ representam os estados dos sistemas mestre e escravo, respectivamente, $u \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle, x_M^+ e x_S^+ são os estados sucessores de x_M e x_S , respectivamente, e $\sigma(\cdot) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função não linear vetorial descentralizada que satisfaz as suposições da Definição 2.1. A, B, C e E são matrizes reais de dimensões apropriadas.

Considere que o sinal de controle é limitado tal como (19). Definindo o erro de sincronização e como a diferença entre os estados mestre e escravo, i.e. $e = x_M - x_S$, então, a partir de (34) e (35), segue que a dinâmica do sistema é dada por

$$e^+ = Ae + B\rho(Ce, Cx_S) - E\text{sat}_{\bar{u}}(v) \quad (36)$$

com $\rho(Ce, Cx_S)$ definido em (5).

Considerando um controle de realimentação de estado

$$v = Ke \quad (37)$$

então, a partir de uma função zona-morta, tal como em (7), a dinâmica do sistema (36) em malha fechada é dada por:

$$e^+ = (A - EK)e + B\rho(Ce, Cx_S) + E\psi_{\bar{u}}(Ke). \quad (38)$$

Portanto, a partir de (38), percebe-se que a sincronização pode ser tratada como um problema de estabilização, conforme Problema 2.1. No entanto, devido à natureza não linear deste sistema, em geral, a estabilidade global da origem não pode ser garantida. Neste caso, a sincronização será obtida somente se o erro inicial pertencer ao conjunto admissível \mathcal{Z} incluído na região de atração da origem. Assim, o seguinte problema pode ser enunciado:

Problema 3.1. *Encontrar uma matriz de ganhos K tal que todas as trajetórias de (38) começando em um conjunto admissível \mathcal{Z} convirjam assintoticamente para a origem.*

Em particular, um objetivo implícito consiste em calcular o ganho K que maximiza o conjunto \mathcal{Z} para o qual a sincronização é garantida.

3.2 Projeto do controlador

O projeto do controlador que resolve o Problema 3.1 será desenvolvido através de duas abordagens. Primeiro, será considerada uma função não linear genérica e, segundo, uma função linear por partes como descrito na seção 2.2.

3.2.1 Funções não lineares genéricas

A partir de uma função quadrática de Lyapunov e condições de setor apresentadas no capítulo anterior, serão estabelecidas no próximo teorema relações que garantem a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada (38).

Teorema 3.1. *Se existe uma matriz simétrica positiva definida $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes diagonais positivas definidas $F_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $F_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes Y e $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfazendo as relações*

$$\begin{bmatrix} W & \star & \star & \star \\ -\Theta CW & 2F_1 & \star & \star \\ -Z & 0 & 2F_2 & \star \\ AW - EY & BF_1 & EF_2 & W \end{bmatrix} > 0 \quad (39)$$

$$\begin{bmatrix} W & \star \\ Y_{(j)} - Z_{(j)} & \bar{u}_{(j)}^2 \end{bmatrix} > 0, j = 1, \dots, n \quad (40)$$

então para $K = YW^{-1}$ todas as trajetórias do sistema (38) começando no conjunto

$$\mathcal{Z} = \{e \in \mathbb{R}^n \mid e^\top P e \leq 1\} \quad (41)$$

com $P = W^{-1}$ convergem assintoticamente para a origem.

Prova. Escolhendo uma função candidata de Lyapunov quadrática $V(e) = e^\top P e$ e calculando a equação da diferença $\Delta V = V(e^+) - V(e)$ resulta em:

$$\Delta V = e^{+\top} P e^+ - e^\top P e. \quad (42)$$

Supondo que $\sigma(\cdot)$ satisfaz a Definição 2.1, então, o Lema 3 garante que

$$\Upsilon_1 = \rho(Ce, Cx_S)^\top J_1 [\rho(Ce, Cx_S) - \Theta Ce] \leq 0 \quad (43)$$

para qualquer matriz diagonal $J_1 > 0$.

Além disso, considerando a realimentação de estado (37) e assumindo $w = Ge$, onde G é uma matriz livre a ser determinada, tal que

$$\mathcal{W}(v, w) = \mathcal{W}(e) = \{e \in \mathbb{R}^n \mid |(K_{(j)} - G_{(j)})e| \leq \bar{u}_{(j)}, j = 1, \dots, n\}$$

então, a partir do Lema 5, segue que a relação

$$\Upsilon_2 = \psi_{\bar{u}}^\top J_2 (\psi_{\bar{u}} - Ge) \leq 0 \quad (44)$$

é satisfeita com qualquer matriz diagonal $J_2 > 0$, desde que $e \in \mathcal{W}(e)$. Portanto, a partir de (38), (43) e (44) obtém-se a relação

$$\begin{aligned} \Delta V \leq & [(A - EK)e + B\rho(Ce, Cx_S) + E\psi_{\bar{u}}(v)]^\top P [(A - EK)e \\ & + B\rho(Ce, Cx_S) + E\psi_{\bar{u}}(v))] - e^\top Pe - 2\Upsilon_1 - 2\Upsilon_2 \quad (45) \end{aligned}$$

válida para todo $e \in \mathcal{W}(e)$.

Definindo agora $\zeta^\top = [e^\top \ \rho^\top \ \psi_{\bar{u}}^\top]$, então (45) pode ser reescrita como $\Delta V \leq -\zeta^\top \mathcal{M} \zeta$, com

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} P & \star & \star \\ -J_1 \Theta C & 2J_1 & \star \\ -J_2 G & 0 & 2J_2 \end{bmatrix} - [A - EK \ B \ E]^\top P [A - EK \ B \ E]. \quad (46)$$

Desta forma, a garantia de $\mathcal{M} > 0$ implica que $\Delta V < 0$ se $e \in \mathcal{W}(e)$.

Aplicando o complemento de Schur, multiplicando \mathcal{M} pela esquerda e pela direita pela matriz $\text{diag}\{W, F_1, F_2, I\}$ e sua transposta, e realizando a substituição de variáveis $F_1 = J_1^{-1}$, $F_2 = J_2^{-1}$ e $Z = GW$, então pode-se concluir que (39) implica em $\mathcal{M} > 0$.

A LMI (40) garante que o conjunto elipsoidal (41) está incluído em $\mathcal{W}(e)$ (TARBOURIECH et al., 2011). Consequentemente, satisfazendo-se simultaneamente (39) e (40) implica efetivamente em $\Delta V < 0$ para todas as trajetórias do sistema em malha fechada (38) começando em \mathcal{Z} . □

Observação 3.1. *No caso particular de funções não lineares com declividade mínima diferente de zero, em relação às restrições dos itens (ii) e (iii) da Definição 2.1, condições de estabilidade menos conservadoras podem ser obtidas através de uma transformação de malha (KHALIL, 2002). Considere que cada componente de $\sigma(\cdot)$ possui a seguinte restrição por partes*

$$\theta_{1(i)} \leq \frac{\sigma_{(i)}(f) - \sigma_{(i)}(\hat{f})}{f - \hat{f}} \leq \theta_{2(i)}, \forall f, \hat{f}, f \neq \hat{f}; \quad (47)$$

e pertence globalmente ao setor $[\theta_{1(i)}, \theta_{2(i)}]$, $\theta_{2(i)} > \theta_{1(i)} > 0$.

Então, aplicando uma transformação de malha implica que o sistema

$$x^+ = Ax + B\sigma(Cx) \quad (48)$$

é equivalente a

$$x^+ = (A + B\Theta_1 C)x + B\bar{\sigma}(Cx) \quad (49)$$

onde a função

$$\bar{\sigma}(Cx) = \sigma(Cx) - \Theta_1 Cx \quad (50)$$

pertence ao setor $[0, \Theta_2 - \Theta_1]$, com $\Theta_1 = \text{diag}\{\theta_{1(1)}, \theta_{1(2)}, \dots, \theta_{1(m)}\}$ e $\Theta_2 = \text{diag}\{\theta_{2(1)}, \theta_{2(2)}, \dots, \theta_{2(m)}\}$.

Este procedimento pode ser aplicado diretamente ao sistema em malha fechada (38), resultando em

$$e^+ = (A + B\Theta_1 C - EK)e + B\bar{\rho}(Ce, Cx_S) + E\psi_{\bar{u}}(Ke) \quad (51)$$

com $\bar{\rho}(Ce, Cx_S) \triangleq \bar{\sigma}(Ce + Cx_S) - \bar{\sigma}(Cx_S)$.

3.2.2 Funções lineares por partes

Nesta seção, os resultados de estabilidade obtidos no Teorema 3.1 serão estendidos para o caso onde a não linearidade $\sigma(\cdot)$ é descrita por uma função linear por partes, tal como (6).

Desta forma, a dinâmica do erro de sincronização (38) pode ser representada, como em (12), por:

$$e^+ = (\tilde{A} - EK)e - B \sum_{l=1}^{N-1} \bar{\Lambda}_l \Phi_l(Ce, Cx_S) + E\psi_{\bar{u}}(Ke) \quad (52)$$

onde $\tilde{A} = A + B\Lambda_1 C$.

O seguinte teorema aborda a estabilidade do sistema em malha fechada (52):

Teorema 3.2. *Se existe uma matriz simétrica positiva definida $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes diagonais positivas definidas $F_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $R_l \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $l = 1, \dots, N - 1$, matrizes Y e $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfazendo as relações (40) e*

$$\begin{bmatrix} W & \star & \star & \star & \star & \star \\ -CW & 2R_1 & \star & \star & \star & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \star & \star & \star \\ -CW & 0 & \cdots & 2R_{N-1} & \star & \star \\ -Z & 0 & \cdots & 0 & 2F_2 & \star \\ \Omega & \Xi_1 & \cdots & \Xi_{N-1} & EF_2 & W \end{bmatrix} > 0 \quad (53)$$

onde $\Omega = AW + B\Lambda_1 CW - EY$, $\Xi_l = -B\bar{\Lambda}_l R_l$, $l = 1, \dots, N - 1$, então para $K = YW^{-1}$ todas as trajetórias do sistema (52) começando no conjunto \mathcal{Z} definido por (41), com $P = W^{-1}$, convergem assintoticamente para a origem.

Prova. A prova deste teorema segue o mesmo desenvolvimento apresentado na prova do Teorema 3.1, onde Υ_1 é substituído pela condição de setor do Lema 4. Como a relação (17) é válida para cada $\Phi_l(\cdot, \cdot)$ individualmente, então

$$\Upsilon_3 = \sum_{l=1}^{N-1} \Phi_l(Ce, Cx_S)^T U_l [\Phi_l(Ce, Cx_S) - Ce] \leq 0 \quad (54)$$

com $R_l = U_l^{-1}$, $l = 1, \dots, N - 1$, também é verificado.

Então, de (44), (52) e (54) segue que

$$\begin{aligned} \Delta V \leq & [(A + B\Lambda_1 C - EK)e - B \sum_{l=1}^{N-1} \bar{\Lambda}_l \Phi_l(Ce, Cx_S) + E\psi_{\bar{u}}(v)]^T P [(A + B\Lambda_1 C \\ & - EK)e - B \sum_{l=1}^{N-1} \bar{\Lambda}_l \Phi_l(Ce, Cx_S) + E\psi_{\bar{u}}(v)] - e^T P e - 2\Upsilon_2 - 2\Upsilon_3. \end{aligned} \quad (55)$$

Definindo $\nu^\top = [e^\top \ \Phi_1^\top \ \dots \ \Phi_l^\top \ \dots \ \Phi_{N-1}^\top \ \psi_{\bar{u}}^\top]$, então (55) pode ser reescrita como $\Delta V \leq -\nu^\top \mathcal{Q} \nu$, com \mathcal{Q} resultando de transformações similares às aplicadas na prova do Teorema 3.1. Desta forma, $\mathcal{Q} > 0$ implica em $\Delta V < 0$ se $e \in \mathcal{W}(e)$.

Aplicando o complemento de Schur, multiplicando \mathcal{Q} pela esquerda e pela direita pela matriz $\text{diag}\{W, R_1, \dots, R_l, \dots, R_{N-1}, F_2, I\}$ e sua transposta, e realizando a substituição de variáveis $R_l = U_l^{-1}, l = 1, \dots, N-1, F_2 = J_2^{-1}$ e $Z = GW$, então pode-se concluir que (53) implica em $\mathcal{Q} > 0$.

Portanto, satisfazendo-se simultaneamente (53) e (40) implica efetivamente em $\Delta V < 0$ para todas as trajetórias do sistema em malha fechada (52) começando em \mathcal{Z} . \square

3.2.3 Problema de otimização

A partir dos Teoremas 3.1 e 3.2, o ganho K do controlador pode ser determinado pela solução de um problema de otimização a partir das LMIs (39) e (40) (ou (40) e (53)). Em particular, é interessante encontrar uma matriz K que leva à maximização do tamanho do conjunto elipsoidal \mathcal{Z} , pois, desta forma, garante-se a estabilização, i.e. a sincronização, do sistema em malha fechada para um conjunto mais abrangente de condições iniciais. A maximização homogênea do elipsóide em todas as direções (TARBOURIECH et al., 2011) é obtida indiretamente através da solução do problema de otimização

$$\begin{aligned} & \max \text{traço}(W) \\ & \text{sujeito a (39) e (40) (ou (40) e (53)).} \end{aligned} \quad (56)$$

Como as condições de estabilidade são LMIs, este problema é convexo e pode ser resolvido por pacotes computacionais padronizados.

3.3 Exemplo

Considere um sistema discreto no tempo representado no espaço de estados por

$$x^+ = Ax + B\sigma(Cx) + Eu \quad (57)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0.91 & 0.09 & 0 \\ 0.01 & 0.99 & 0.01 \\ 0 & -0.14 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.09 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E = 0.01I$$

e $\sigma(Cx) = -\phi(x_{(1)})$, com $\phi(x_{(1)})$ descrita pela seguinte função linear por partes:

$$\phi(x_{(1)}) = \begin{cases} -g_2(x_{(1)} + 1) + g_1, & \text{se } x_{(1)} < -1 \\ -g_1 x_{(1)}, & \text{se } |x_{(1)}| \leq 1 \\ -g_2(x_{(1)} - 1) - g_1, & \text{se } x_{(1)} > 1 \end{cases} \quad (58)$$

Os parâmetros $g_1 = 1.15$ e $g_2 = 0.7$ foram escolhidos de forma a obter uma trajetória caótica similar à do circuito de Chua (MATSUMOTO; CHUA; KOMURO, 1985), conforme Figura 6. Ressalta-se que esta função não linear pode ser descrita como em (6), conforme ilustrado na Figura 7, com $N = 2, b_1 = 1, \Lambda_1 = g_1$ e $\Lambda_2 = g_2$. Os níveis de saturação do sinal de controle são dados por $\bar{u}_{(j)} = 2, j = 1, 2, 3$.

Figura 6: Trajetória caótica do sistema (57) com a função não linear (58) no plano $x_{(1)} \times x_{(2)}$.

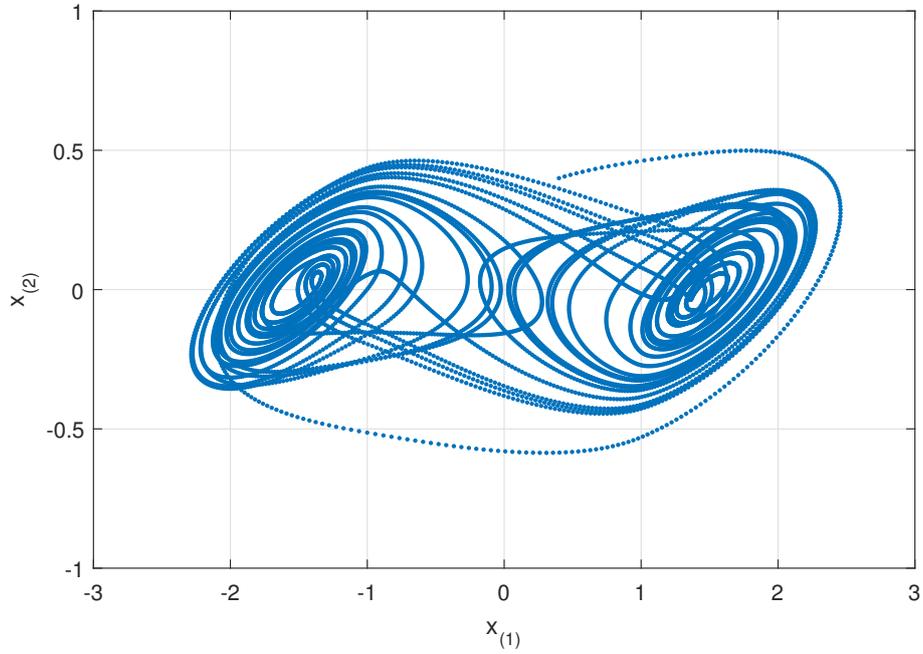
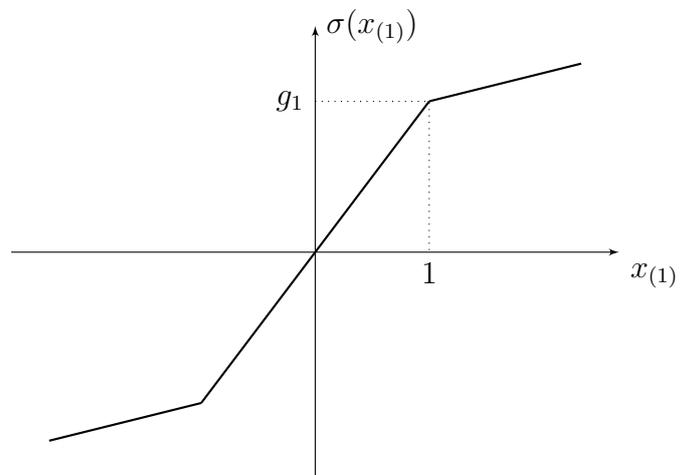


Figura 7: Função não linear $\sigma(Cx)$.



Resolvendo¹ o problema de otimização (56) com as condições do Teorema 3.1 obtém-se $\text{traço}(W) = 20.27$ e as seguintes matrizes:

$$P = \begin{bmatrix} 0.2993 & 0.3607 & 0.08664 \\ 0.3607 & 1.215 & 0.04416 \\ 0.08664 & 0.04416 & 0.1133 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 1.369 & 1.888 & 0.4663 \\ 1.379 & 2.932 & 0.4185 \\ 0.9183 & 1.199 & 0.7122 \end{bmatrix}.$$

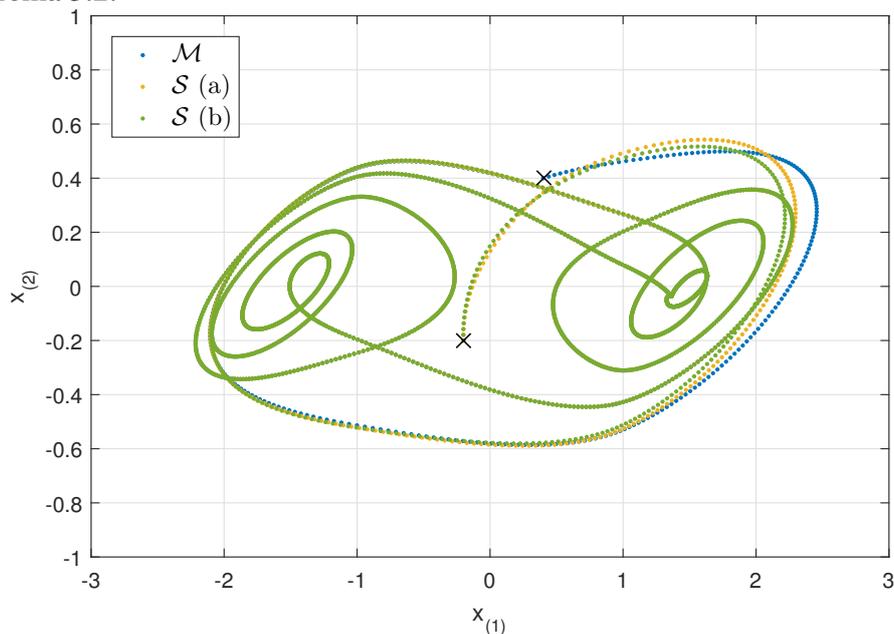
Em seguida, resolvendo o problema de otimização (56) com as condições do Teorema 3.2 obtém-se $\text{traço}(W) = 49.13$ e

$$P = \begin{bmatrix} 0.3037 & 0.2515 & 0.1456 \\ 0.2515 & 0.6824 & 0.05045 \\ 0.1456 & 0.05045 & 0.1130 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 1.419 & 1.277 & 0.6818 \\ 1.259 & 2.121 & 0.4822 \\ 1.196 & 0.8831 & 0.7410 \end{bmatrix}.$$

As Figuras 8 e 10 ilustram o comportamento caótico das trajetórias dos estados e o sinal de controle resultante, respectivamente. Foram selecionados os seguintes estados mestre e escravo iniciais: $x_M(0) = [0.4 \ 0.4 \ 0.6]^\top$ e $x_S(0) = [-0.2 \ -0.2 \ 0.1]^\top$ tal que $e(0)^\top P e(0) \leq 1$, i.e. o erro inicial pertence ao conjunto \mathcal{Z} em ambos os casos. Pode-se observar que a sincronização é obtida com os estados do sistema escravo convergindo assintoticamente para os estados mestre. Também é possível perceber o efeito da saturação no sinal de controle em ambos os controladores.

Figura 8: Trajetórias dos sistemas mestre e escravo no plano $x_{(1)} \times x_{(2)}$: (a) Teorema 3.1 e (b) Teorema 3.2.



¹Foi utilizado o pacote CVX (GRANT; BOYD, 2014) para Matlab com o *solver* SDPT3.

Figura 9: Trajetórias dos sistemas mestre (linhas sólidas) e escravo pelo Teorema 3.2 (linhas tracejadas) no instante k .

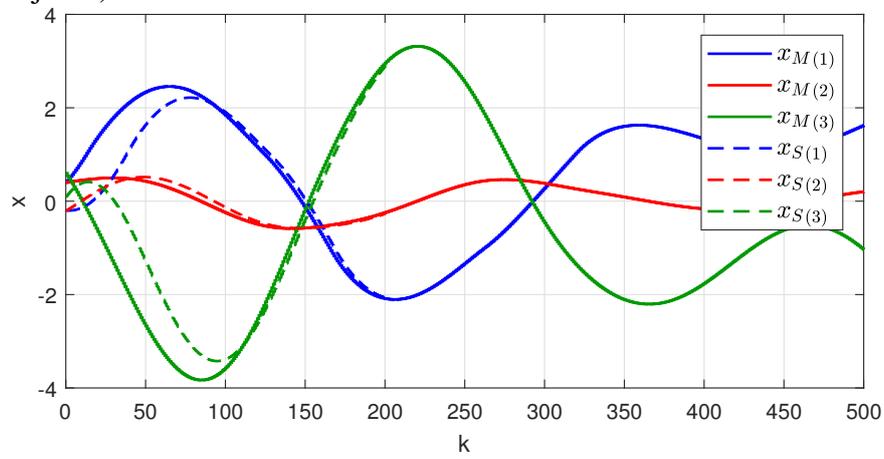


Figura 10: Sinais de entrada de controle u : (a) Teorema 3.1 e (b) Teorema 3.2.

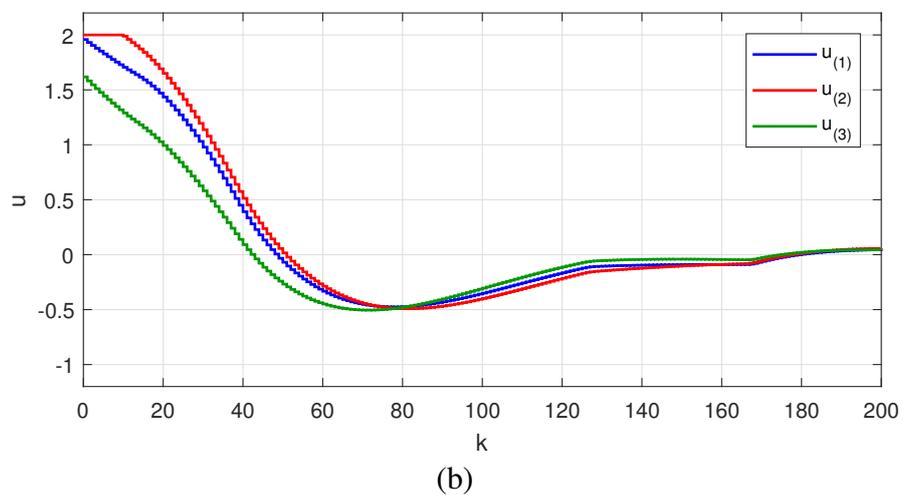
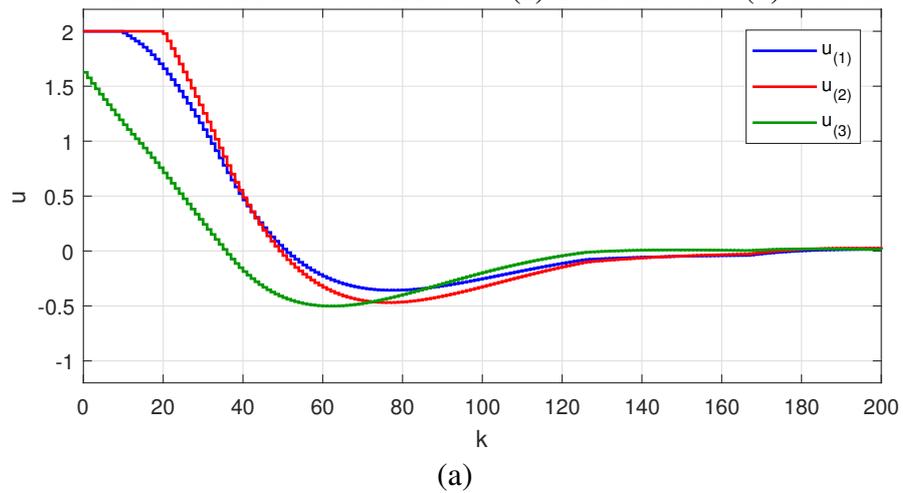
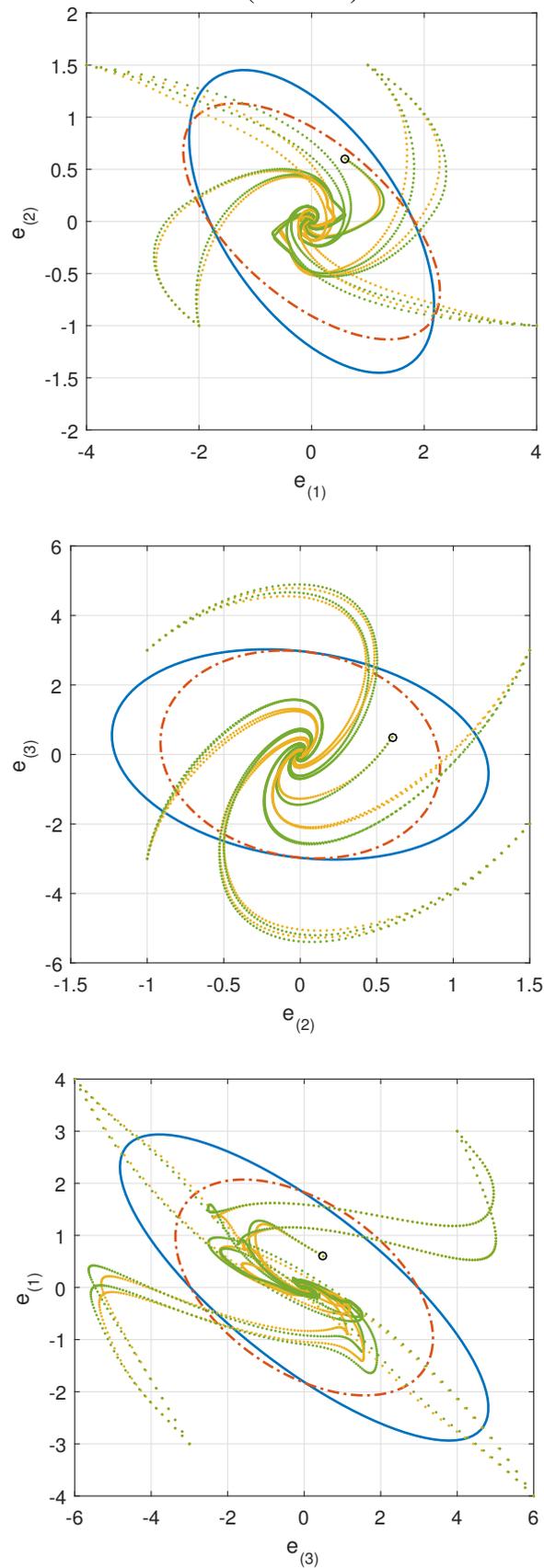


Figura 11: Cortes da região de estabilidade garantida \mathcal{Z} para Teorema 3.1 (linha vermelha tracejada) e Teorema 3.2 (linha azul contínua), e trajetórias simuladas para diferentes condições iniciais a partir do Teorema 3.1 (amarelo) e Teorema 3.2 (verde).



A Figura 11 mostra os cortes, nos planos $e_1 \times e_2$, $e_2 \times e_3$ e $e_1 \times e_3$, da região \mathcal{Z} . É possível observar que o Teorema 3.2 resulta em um maior conjunto \mathcal{Z} quando comparado ao Teorema 3.1, i.e. maior o valor do traço(W), ou, equivalentemente, menor o valor do traço(P). Isto demonstra que, explorando a estrutura particular de $\sigma(\cdot)$ de um função linear por partes, resultados menos conservadores para o problema de otimização são obtidos. No entanto, em função das trajetórias dos erros de sincronização simulados para diferentes condições iniciais na Figura 11, ainda é possível verificar que estes resultados são conservadores para este modelo discreto, uma vez que mesmo as trajetórias iniciadas fora da região \mathcal{Z} convergem para a origem.

3.4 Considerações finais

Neste capítulo foi apresentado um método de projeto de controladores de realimentação de estado como solução ao problema de sincronização de sistemas Lur'e mestre-escravo em tempo discreto, sob saturação da entrada de controle. A partir de uma função candidata de Lyapunov quadrática, condições LMI que garantem a estabilidade regional do erro entre os estados mestre e escravo foram obtidas. Além disso, uma formulação a partir de funções zona-morta foi utilizada para obter condições particulares de estabilidade quando a não linearidade da função Lur'e é descrita por uma função linear por partes. Através de um exemplo numérico de um oscilador caótico discreto, ficou demonstrado que as condições de estabilidade derivadas desta formulação linear por partes são menos conservadoras, levando a uma estimativa maior do conjunto de condições iniciais admissíveis. Os resultados deste capítulo foram publicados no artigo (ZANI et al., 2018).

4 SINCRONIZAÇÃO SOB CONTROLE AMOSTRADO

Neste capítulo são avaliadas condições de estabilidade para o caso de sistemas Lur'e em tempo contínuo com controle amostrado aperiódico. Em sistemas lineares amostrados periodicamente é possível obter-se um modelo em tempo discreto exato, i.e. com os valores dos estados dos sistemas contínuo e discreto coincidindo nos instantes de amostragem. Entretanto, na amostragem aperiódica, não é viável obter-se uma discretização exata devido à incerteza do tempo entre duas amostras. Por outro lado, técnicas de discretização usando aproximações numéricas, como o método de Euler, podem levar a resultados aproximados que dependem do período de amostragem. No caso de sistemas não lineares, não é possível garantir comportamento idêntico através da discretização (NESIC; TEEL, 2004). Embora possa observar-se em alguns casos que, com a diminuição do período de amostragem, o comportamento do sistema discreto aproxima-se ao modelo em tempo contínuo, o mesmo não pode ser afirmado quando o período de amostragem é suficientemente grande ou nos casos em que a amostragem é aperiódica.

Desta forma, é importante considerar a dinâmica em tempo contínuo do sistema em conjunto com a atualização do controle em tempo discreto. Portanto, a partir de uma descrição da dinâmica do erro de sincronização entre dois instantes consecutivos de amostragem, análoga à (29), e de um funcional *looped*, serão abordadas as soluções dos problemas de análise de estabilidade e de síntese de uma realimentação estática do erro de saída entre os sistemas mestre e escravo.

4.1 Descrição do problema

Considere o seguinte sistema mestre-escravo contínuo no tempo:

$$\mathcal{M} : \begin{cases} \dot{x}_M(t) = Ax_M(t) + B\sigma(Cx_M(t)) \\ y_M(t) = Hx_M(t) \end{cases} \quad (59)$$

$$\mathcal{S} : \begin{cases} \dot{x}_S(t) = Ax_S(t) + B\sigma(Cx_S(t)) + u(t) \\ y_S(t) = Hx_S(t) \end{cases} \quad (60)$$

onde $x_M(t)$ e $x_S(t) \in \mathbb{R}^n$ são os estados dos sistemas mestre e escravo, respectivamente, $y_M(t)$ e $y_S(t) \in \mathbb{R}^q$ as saídas dos sistemas mestre e escravo, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle e $\sigma(\cdot) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ a função não linear vetorial descentralizada. A, B, C e H são matrizes reais de dimensões apropriadas.

De forma similar à Definição 2.1, agora contínua no tempo, a restrição (ii) de inclinação pode também ser observada como uma restrição de derivada, onde cada componente

de $\sigma(\cdot)$ é diferenciável por partes com

$$0 \leq \frac{d}{df} \sigma_{(i)}(f) \leq \theta_{(i)}, \forall f. \quad (61)$$

A partir de (59) e (60) segue que a dinâmica do erro de sincronização é definida por

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + B\rho(Ce(t), Cx_S(t)) - u(t) \quad (62)$$

Assume-se que o erro de sincronização da saída $y_e(t)$ é amostrado e o valor de $u(t)$ é mantido constante, através de um retentor de ordem zero, entre instantes consecutivos de amostragem. Portanto, considerando uma realimentação estática do erro de sincronização da saída dos sistemas mestre e escravo, obtém-se o seguinte sinal de controle:

$$u(t) = Ky_e(t_k) = KHe(t_k), \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \forall k \quad (63)$$

onde $K \in \mathbb{R}^{n \times q}$ e $\{t_k\}_{k \geq 0}$ é uma sequência crescente de instantes positivos de amostragem, tal como definido em (27). Ressalta-se que o intervalo entre duas amostras consecutivas T_k pode variar com o tempo, permitindo a modelagem de uma característica de amostragem aperiódica. O caso particular de amostragem periódica corresponde a $T_k = T_1 = T_2 = \bar{T}, \forall k \in \mathbb{N}$.

A partir de (62) obtém-se a seguinte dinâmica em malha fechada com o controle amostrado (63):

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + B\rho(Ce(t), Cx_S(t)) - KHe(t_k). \quad (64)$$

Definindo as funções dos estados $e_k(\tau) = e(t_k + \tau)$ e $x_{Sk}(\tau) = x_S(t_k + \tau)$, a dinâmica entre duas amostras consecutivas de (64) pode ser representada da seguinte forma (SEURET, 2012):

$$\begin{aligned} \dot{e}_k(\tau) &= Ae_k(\tau) + B\rho(Ce_k(\tau), Cx_{Sk}(\tau)) - KHe_k(0) \\ &\forall \tau \in [0, T_k], T_k \in [T_1, T_2], \forall k. \end{aligned} \quad (65)$$

A seguir, o Lema 6 referente ao funcional *looped* será estendido para o erro de sincronização, considerando a função não linear $\rho(\cdot, \cdot)$ presente em (64).

Lema 8. *Considerando o sistema (65), definindo dois escalares positivos $0 < T_1 \leq T_2$ e uma função $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ para a qual existem escalares reais $0 < \mu_1 < \mu_2$ e $p > 0$, tais que*

$$\mu_1 \|e\|^p \leq V(e) \leq \mu_2 \|e\|^p, \forall e \in \mathbb{R}^n. \quad (66)$$

Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) *Para qualquer $k \in \mathbb{N}$ e $T_k \in [T_1, T_2]$, a equação*

$$\Delta V(k) = V(e_k(T_k)) - V(e_k(0)) < 0.$$

é satisfeita.

(ii) *Existe um funcional contínuo $\mathcal{V} : [0, T_2] \times \mathbb{K}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, que satisfaz, para qualquer $z \in \mathbb{K}^n$ e para qualquer $T_k \in [T_1, T_2]$*

$$\mathcal{V}(T_k, z, T_k) = \mathcal{V}(0, z, T_k) \quad (67)$$

e tal que, para qualquer $k \in \mathbb{N}$, $T_k \in [T_1, T_2]$ e $\tau \in [0, T_k]$

$$\dot{\mathcal{V}}(\tau, e_k, T_k) = \frac{d}{d\tau} V(e_k(\tau)) + \frac{d}{d\tau} \mathcal{V}(\tau, e_k, T_k) < 0. \quad (68)$$

Além disto, se um destes argumentos é verdadeiro, então todas as trajetórias do sistema em malha fechada (64) convergem assintoticamente para a origem, desde que $T_k \in [T_1, T_2], \forall k$.

Prova. A equivalência entre os itens (i) e (ii) foi provada no Lema 6. Neste caso, devido à função não linear ainda é necessário provar que as trajetórias do sistema de fato convergem para a origem.

Define-se o vetor de funções admissíveis $\xi(t)^\top = [\xi_{(1)}(t) \ \cdots \ \xi_{(m)}(t)]$, tal que $\Xi(t) = \text{diag}\{\xi_{(1)}(t), \dots, \xi_{(m)}(t)\}$ e $0 \leq \xi_{(i)}(t) \leq \theta_{(i)}$. Como (16) é verificada, existe um conjunto de funções admissíveis que satisfaz a relação

$$\rho_{(i)}(Ce(t), Cx_S(t)) = \xi_{(i)}(t)(Ce(t))_{(i)}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (69)$$

Então, a solução do sistema em malha fechada (64) está incluída no conjunto de soluções de

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + B\Xi(t)Ce(t) - KHe(t_k). \quad (70)$$

Todavia, como (70) é um sistema linear variante no tempo, este admite uma matriz de transição de estados $\Psi(t, t_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (KHALIL, 2002). Definindo agora $\Psi_k(\tau, 0) = \Psi(t_k + \tau, t_k) : [0, T_2] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ como a função $\Psi(t, t_0)$ restrita ao intervalo $[t_k, t_k + T_2]$, segue que

$$e_k(\tau) = \Psi_k(\tau, 0)e_k(0) + \int_0^\tau \Psi_k(s, 0)dsKH e_k(0). \quad (71)$$

Portanto, para qualquer τ em $[0, T_2]$, as trajetórias de (64) podem ser limitadas por

$$\|e_k(\tau)\| \leq \left(\|\Psi_k(\tau, 0)\| + \left\| \int_0^\tau \Psi_k(s, 0)ds \right\| \|KH\| \right) \|e_k(0)\|. \quad (72)$$

Neste caso, a função $\xi_{(i)}(t)$ é limitada e contínua sobre $[0, T_2]$, tal que existe um escalar

$$\mu_3 = \sup_{\xi \in \mathbb{K}^m} \left\{ \|\Psi_k(\tau, 0)\| + \left\| \int_0^\tau \Psi_k(s, 0)ds \right\| \|KH\| \right\}, \quad \forall k. \quad (73)$$

Desta forma, dentro de um período de amostragem, tem-se um função de Lyapunov $V(e_k(\tau))$ que é limitada conforme (66). Isso garante que $V(e_k(\tau)) \leq \mu_2 \mu_3^p \|e_k(0)\|^p$, para qualquer τ em $[0, T_k], \forall k$, e, conseqüentemente, prova que a função contínua de Lyapunov converge uniformemente e assintoticamente para zero, tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$. □

Assim sendo, propõe-se o seguinte problema de análise de estabilidade para um dado controlador amostrado para a sincronização de um sistema mestre-escravo:

Problema 4.1. *Dada uma matriz de ganhos K e um intervalo mínimo T_1 , encontrar o máximo intervalo T_2 entre duas amostras consecutivas para o qual a estabilidade assintótica da dinâmica do erro de sincronização é garantida, i.e. a sincronização do sistema mestre-escravo é obtida.*

De outra forma, considerando o projeto do controlador, é possível enunciar o seguinte problema:

Problema 4.2. *Dado um intervalo mínimo T_1 , determinar uma matriz de ganhos K de forma a maximizar o tempo limitante superior T_2 entre duas amostras consecutivas para o qual a estabilidade assintótica da dinâmica do erro de sincronização é garantida, i.e. a sincronização do sistema mestre-escravo é obtida.*

Em função das condições de estabilidade menos conservadoras obtidas na sincronização de sistemas em tempo discreto, será considerada a representação linear por partes (6) na formulação deste problema, além da formulação para funções não lineares genéricas.

4.2 Análise de estabilidade

Nesta seção serão apresentadas condições de estabilidade para a solução do problema 4.1 a partir dos resultados do Lema 8 para o caso onde a não linearidade Lur'e pode ser representada por uma função linear por partes e para o caso genérico.

4.2.1 Funções lineares por partes

Considerando que a dinâmica do erro de sincronização (64) pode ser representada através de funções zona-morta por

$$\dot{e}(t) = \tilde{A}e(t) - B \sum_{l=1}^{N-1} \bar{\Lambda}_l \Phi_l(Ce(t), Cx_S(t)) - KHe(t_k) \quad (74)$$

então, de acordo com as funções dos estados $e_k(\tau)$ e $x_{S_k}(\tau)$ definidas em (65), a dinâmica entre duas amostras consecutivas de (74) pode ser representada da seguinte forma:

$$\dot{e}_k(\tau) = \tilde{A}e_k(\tau) - B \sum_{l=1}^{N-1} \bar{\Lambda}_l \Phi_l(Ce_k(\tau), Cx_{S_k}(\tau)) - KHe_k(0) \quad (75)$$

$$\forall \tau \in [0, T_k], T_k \in [T_1, T_2], \forall k.$$

Desta forma, o seguinte teorema apresenta condições para a solução do problema 4.1 para uma função Lur'e linear por partes.

Teorema 4.1. *Sejam dois escalares positivos $0 < T_1 \leq T_2$ e uma matriz de ganhos $K \in \mathbb{R}^{n \times q}$ conhecida. Se existem matrizes definidas positivas $P, R \in \mathbb{S}^n$, matrizes diagonais definidas positivas $U_l \in \mathbb{S}^m$, matrizes diagonais positivas $\Gamma_l \in \mathbb{S}^m$, matrizes $S_1, Q_1, X \in \mathbb{S}^n$, $Z \in \mathbb{R}^{[4n+(N-1)m] \times 2n}$, $S_2, Q_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Y \in \mathbb{R}^{n \times [4n+(N-1)m]}$, que satisfaçam, para $r = 1, 2$ e $l = 1, \dots, N-1$*

$$F_1 + T_r(-F_2 + F_3 + F_4) < 0 \quad (76)$$

$$\begin{bmatrix} F_1 - T_r(F_2 + F_4 + F_5) & Z \\ \star & -\frac{1}{T_r} \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 3R \end{bmatrix} \end{bmatrix} < 0 \quad (77)$$

com

$$F_1 = \mathbf{He} \left\{ Y^\top (-M_4 + \tilde{A}M_1 - B \sum_{l=1}^{N-1} \tilde{\Lambda}_l L_l - KHM_2) + M_1^\top PM_4 - ZM_6 \right. \\ \left. - M_{12}^\top S_2 M_2 + \sum_{l=1}^{N-1} L_l^\top \Gamma_l CM_4 - \sum_{l=1}^{N-1} L_l^\top U_l (L_l - CM_1) \right\} - M_{12}^\top S_1 M_{12}$$

$$F_2 = M_3^\top Q_1 M_3$$

$$F_3 = \mathbf{He} \{ M_4^\top (S_1 M_{12} + S_2 M_2) + M_1^\top (Q_1 M_3 + Q_2 M_2) \} + M_4^\top RM_4$$

$$F_4 = M_2^\top XM_2$$

$$F_5 = \mathbf{He} \{ M_3^\top Q_2 M_2 \}$$

onde

$$\begin{aligned} M_1 &= \begin{bmatrix} I_{n \times n} & 0_{n \times [3n + (N-1)m]} \end{bmatrix} & M_2 &= \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} & 0_{n \times [2n + (N-1)m]} \end{bmatrix} \\ M_3 &= \begin{bmatrix} 0_{n \times 2n} & I_{n \times n} & 0_{n \times [n + (N-1)m]} \end{bmatrix} & M_4 &= \begin{bmatrix} 0_{n \times 3n} & I_{n \times n} & 0_{n \times (N-1)m} \end{bmatrix} \\ L_l &= \begin{bmatrix} 0_{m \times [4n + (l-1)m]} & I_{m \times m} & 0_{m \times (N-1-l)m} \end{bmatrix} & (78) \\ M_6 &= \begin{bmatrix} I_{n \times n} & -I_{n \times n} & 0_{n \times n} & 0_{n \times [n + (N-1)m]} \\ I_{n \times n} & I_{n \times n} & -2I_{n \times n} & 0_{n \times [n + (N-1)m]} \end{bmatrix} \\ M_{12} &= M_1 - M_2. \end{aligned}$$

Então, todas as trajetórias do sistema em malha fechada (74) convergem assintoticamente para a origem para qualquer amostragem assíncrona com $T_k \in [T_1, T_2], \forall k$.

Prova. Defina uma função candidata Lyapunov do tipo Lur'e (KHALIL, 2002)

$$V(e) = e^\top Pe + 2 \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{i=1}^m \gamma_{l(i)} \int_0^{z(i)} \Phi_{l(i)}(s, Cx_s) ds \quad (79)$$

onde $z = Ce$ e P é uma matriz simétrica definida positiva. Considere agora um funcional \mathcal{V} definido para qualquer $\tau \in [0, T_k]$, tal que:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\tau, e_k, T_k) &= (T_k - \tau) \zeta_k(\tau)^\top [S_1 \zeta_k(\tau) + 2S_2 e_k(0)] \\ &\quad + (T_k - \tau) \tau \nu_k(\tau)^\top [Q_1 \nu_k(\tau) + 2Q_2 e_k(0)] \\ &\quad + (T_k - \tau) \tau e_k(0)^\top X e_k(0) \\ &\quad + (T_k - \tau) \int_0^\tau \dot{e}_k(s)^\top R \dot{e}_k(s) ds \end{aligned} \quad (80)$$

onde $\zeta_k(\tau) = e_k(\tau) - e_k(0)$ e

$$\nu_k(\tau) \triangleq \frac{1}{\tau} \int_0^\tau e_k(s) ds.$$

A equação (80) satisfaz a condição (67) com $\mathcal{V}(\tau, e_k, T_k) = 0$ em $\tau = 0$ e $\tau = T_k$. Este funcional foi extraído de (SEURET et al., 2015) e introduz o termo $\nu_k(\tau)$ necessário à desigualdade integral de Wirtinger.

A partir do Lema 8, é necessário mostrar que $\dot{\mathcal{W}}(\tau, e_k, T_k) < 0$ ao longo das trajetórias do sistema (75) e que $\Delta V(k) < 0$, de forma a garantir que todas as trajetórias deste sistema convergem assintoticamente para a origem.

A partir do Lema 4, segue que

$$\Upsilon_4 = \sum_{l=1}^{N-1} \Phi_l(Ce_k(\tau), Cx_{Sk}(\tau))^T U_l [\Phi_l(Ce_k(\tau), Cx_{Sk}(\tau)) - Ce_k(\tau)] \leq 0 \quad (81)$$

para quaisquer matrizes diagonais $U_l > 0$, $l = 1, \dots, N - 1$.

Inspirado pelo método descritor de (FRIDMAN, 2014) e também com base no Lema de Finsler (FINSLER, 1936), para acoplar os sinais do vetor aumentado de estados

$$\xi_k(\tau)^T = \begin{bmatrix} e_k(\tau)^T & e_k(0)^T & \nu_k(\tau) & \dot{e}_k(\tau)^T & \Phi_1(Ce_k(\tau), Cx_{Sk}(\tau))^T \\ \dots & \Phi_l(Ce_k(\tau), Cx_{Sk}(\tau))^T & \dots & \Phi_{N-1}(Ce_k(\tau), Cx_{Sk}(\tau))^T \end{bmatrix}$$

utiliza-se a seguinte relação com a matriz Y e (75):

$$\Upsilon_5 = \xi_k(\tau)^T Y^T \left[-\dot{e}_k(\tau) + \tilde{A}e_k(\tau) - B \sum_{l=1}^{N-1} \bar{\Lambda}_l \Phi_l(Ce_k(\tau), Cx_{Sk}(\tau)) - KH e_k(0) \right] = 0. \quad (82)$$

Portanto, combinando (68) com (81) e (82) obtém-se:

$$\dot{\mathcal{W}}(\tau, e_k, T_k) - 2\Upsilon_4 + 2\Upsilon_5 < 0. \quad (83)$$

Garantindo-se (83), segue que $\dot{\mathcal{W}}(\tau, e_k, T_k) < 0$, para qualquer $e_k(0)$, pois a condição de setor (17) é válida globalmente. Então, pode-se reescrever (83) como

$$\dot{\mathcal{W}}(\tau, e_k, T_k) + \xi_k(\tau)^T \text{He} \left\{ - \sum_{l=1}^{N-1} L_l^T U_l (L_l - CM_1) + Y^T (-M_4 + \tilde{A}M_1 - B \sum_{l=1}^{N-1} \bar{\Lambda}_l L_l - KHM_2) \right\} \xi_k(\tau) < 0. \quad (84)$$

Pode-se agora calcular cada termo de $\dot{\mathcal{W}}$ (68) separadamente. Note que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} V(e_k(\tau)) &= \text{He} \left\{ e_k(\tau)^T P \dot{e}_k(\tau) + \sum_{l=1}^{N-1} \Phi_l(Ce_k(\tau), Cx_{Sk}(\tau))^T \Gamma_l C \dot{e}_k(\tau) \right\} \\ &= \xi_k(\tau)^T \text{He} \left\{ M_1^T P M_4 + \sum_{l=1}^{N-1} L_l^T \Gamma_l C M_4 \right\} \xi_k(\tau) \end{aligned} \quad (85)$$

onde $\Gamma_l = \text{diag}\{\gamma_{l(1)}, \dots, \gamma_{l(m)}\}$. Em seguida, a partir do segundo termo de $\dot{\mathcal{W}}$ (68), examina-se cada linha da derivada do funcional \mathcal{V} (80). A partir da primeira linha, obtém-se:

$$\begin{aligned} (T_k - \tau) [\dot{e}_k(\tau)^T (S_1 \zeta_k(\tau) + 2S_2 e_k(0)) + \zeta_k(\tau)^T S_1 \dot{e}_k(\tau)] - \zeta_k(\tau)^T (S_1 \zeta_k(\tau) + 2S_2 e_k(0)) \\ = \xi_k(\tau)^T [(T_k - \tau) \text{He} \{ M_4^T (S_1 M_{12} + S_2 M_2) \} - M_{12}^T S_1 M_{12} - \text{He} \{ M_{12}^T S_2 M_2 \}] \xi_k(\tau). \end{aligned} \quad (86)$$

Posteriormente, a derivada da segunda linha de \mathcal{V} (80) resulta em:

$$\begin{aligned} (T_k - \tau)\mathbf{He}\{e_k(\tau)^\top(Q_1\nu_k(\tau) + Q_2e_k(0))\} - T_k\nu_k(\tau)^\top Q_1\nu_k(\tau) - \tau\mathbf{He}\{\nu_k(\tau)^\top Q_2e_k(0)\} \\ = (T_k - \tau)\mathbf{He}\{M_1^\top(Q_1M_3 + Q_2M_2)\} - T_kM_3^\top Q_1M_3 - \tau\mathbf{He}\{M_3^\top Q_2M_2\}. \end{aligned} \quad (87)$$

A derivada da terceira linha produz:

$$\begin{aligned} (T_k - 2\tau)e_k(0)^\top X e_k(0) &= (T_k - 2\tau)\xi_k(\tau)^\top M_2^\top X M_2 \xi_k(\tau) \\ &= (T_k - 2\tau)\xi_k(\tau)^\top F_4 \xi_k(\tau). \end{aligned} \quad (88)$$

Finalmente, a derivada da última linha de \mathcal{V} em (80) é limitada através do Lema 7 da desigualdade integral de Wirtinger, resultando em

$$\begin{aligned} - \int_0^\tau \dot{e}_k(s)^\top R \dot{e}_k(s) ds + (T_k - \tau)\dot{e}_k(\tau)^\top R \dot{e}_k(\tau) \leq \\ \xi_k(\tau)^\top \left[-\mathbf{He}\{ZM_6\} + \tau Z \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 3R \end{bmatrix}^{-1} Z^\top + (T_k - \tau)M_4^\top R M_4 \right] \xi_k(\tau). \end{aligned} \quad (89)$$

Agora, a partir de (85)–(89), o lado esquerdo de (84) pode ser limitado superiormente por:

$$\begin{aligned} \xi_k(\tau)^\top \mathcal{M} \xi_k(\tau) \leq \xi_k(\tau)^\top \left[F_1 - T_k F_2 + (T_k - \tau) F_3 \right. \\ \left. + (T_k - 2\tau) F_4 - \tau F_5 + \tau Z \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 3R \end{bmatrix}^{-1} Z^\top \right] \xi_k(\tau). \end{aligned} \quad (90)$$

Portanto, o sistema (74) é assintoticamente estável se a matriz \mathcal{M} é negativa definida para $\tau \in (0, T_k)$. Como (90) é afim em τ , é necessário e suficiente verificar esta condição para $\tau = 0$ e para $\tau = T_k$, conforme segue:

$$F_1 + T_k(-F_2 + F_3 + F_4) < 0 \quad (91)$$

$$F_1 - T_k(F_2 + F_4 + F_5) + T_k Z \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 3R \end{bmatrix}^{-1} Z^\top < 0. \quad (92)$$

Além disso, como (91) e (92) são afins em T_k , (76) garante a validade de (91), e aplicando o complemento de Schur em (77) obtém-se (92), para $T_k \in [T_1, T_2], \forall k$, concluindo-se a prova. \square

4.2.2 Funções não lineares genéricas

No caso de uma não linearidade Lur'e genérica, considerando a dinâmica do erro de sincronização em malha fechada (64) e as funções dos estados $e_k(\tau)$ e $x_{S_k}(\tau)$ definidas em (65), a dinâmica entre duas amostras consecutivas pode ser representada por:

$$\begin{aligned} \dot{e}_k(\tau) &= A e_k(\tau) + B \rho(C e_k(\tau), C x_{S_k}(\tau)) - K H e_k(0) \\ &\forall \tau \in [0, T_k], T_k \in [T_1, T_2], \forall k. \end{aligned}$$

Desta forma, as condições de estabilidade podem ser modificadas considerando-se as relações em $\rho(\cdot, \cdot)$ através do seguinte teorema.

Teorema 4.2. *Sejam dois escalares positivos $0 < T_1 \leq T_2$ e uma matriz de ganhos $K \in \mathbb{R}^{n \times q}$ conhecida. Se existem matrizes definidas positivas $P, R \in \mathbb{S}^n$, uma matriz diagonal definida positiva $J_1 \in \mathbb{S}^m$, uma matriz diagonal positiva $\Gamma \in \mathbb{S}^m$, matrizes $S_1, Q_1, X \in \mathbb{S}^n$, $Z \in \mathbb{R}^{(4n+m) \times 2n}$, $S_2, Q_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\tilde{Y} \in \mathbb{R}^{n \times (4n+m)}$, que satisfaçam (76) e (77), para $r = 1, 2$, com*

$$\begin{aligned} F_1 &= He \left\{ \tilde{Y}^\top (-M_4 + AM_1 + BM_5 - KHM_2) + M_1^\top PM_4 - ZM_6 \right. \\ &\quad \left. - M_{12}^\top S_2 M_2 + M_5^\top \Gamma C M_4 - M_5^\top J_1 (M_5 - \Theta C M_1) \right\} - M_{12}^\top S_1 M_{12} \\ F_2 &= M_3^\top Q_1 M_3 \\ F_3 &= He \{ M_4^\top (S_1 M_{12} + S_2 M_2) + M_1^\top (Q_1 M_3 + Q_2 M_2) \} + M_4^\top R M_4 \\ F_4 &= M_2^\top X M_2 \\ F_5 &= He \{ M_3^\top Q_2 M_2 \} \end{aligned} \quad (93)$$

onde

$$\begin{aligned} M_1 &= \begin{bmatrix} I_{n \times n} & 0_{n \times (3n+m)} \end{bmatrix} & M_2 &= \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} & 0_{n \times (2n+m)} \end{bmatrix} \\ M_3 &= \begin{bmatrix} 0_{n \times 2n} & I_{n \times n} & 0_{n \times (n+m)} \end{bmatrix} & M_4 &= \begin{bmatrix} 0_{n \times 3n} & I_{n \times n} & 0_{n \times m} \end{bmatrix} \\ M_5 &= \begin{bmatrix} 0_{m \times 4n} & I_{m \times m} \end{bmatrix} & & & (94) \\ M_6 &= \begin{bmatrix} I_{n \times n} & -I_{n \times n} & 0_{n \times n} & 0_{n \times (n+m)} \\ I_{n \times n} & I_{n \times n} & -2I_{n \times n} & 0_{n \times (n+m)} \end{bmatrix} \\ M_{12} &= M_1 - M_2. \end{aligned}$$

Então, todas as trajetórias do sistema em malha fechada (64) convergem assintoticamente para a origem para qualquer amostragem assíncrona com $T_k \in [T_1, T_2], \forall k$.

Prova. Defina uma função candidata Lyapunov do tipo Lur'e (KHALIL, 2002)

$$V(e) = e^\top P e + 2 \sum_{i=1}^m \gamma_{(i)} \int_0^{z_{(i)}} \rho_{(i)}(s, Cx_S) ds \quad (95)$$

onde $z = Ce$ e P é uma matriz simétrica definida positiva.

Considerando-se o funcional (80) e substituindo-se as relações com base na condição de setor e no Lema de Finsler, a prova é similar à apresentada no Teorema 4.1. Desta forma, no caso de uma função não linear genérica, substitui-se (81) pela condição de setor do Lema 3:

$$\Upsilon_6 = \rho(Ce, Cx_S)^\top J_1 [\rho(Ce, Cx_S) - \Theta Ce] \leq 0 \quad (96)$$

para qualquer matriz diagonal $J_1 > 0$.

A partir do vetor aumentado de estados

$$\xi_k(\tau)^\top = [e_k(\tau)^\top \quad e_k(0)^\top \quad \nu_k(\tau)^\top \quad \dot{e}_k(\tau)^\top \quad \rho(Ce_k(\tau), Cx_{Sk}(\tau))^\top]$$

a seguinte relação substitui (82):

$$\Upsilon_7 = \xi_k(\tau)^\top \tilde{Y}^\top [-\dot{e}_k(\tau) + Ae_k(\tau) + B\rho(Ce_k(\tau), Cx_{Sk}(\tau)) - KHe_k(0)] = 0. \quad (97)$$

Portanto, combinando (68) com (96) e (97) obtém-se:

$$\dot{\mathcal{W}}(\tau, e_k, T_k) - 2\Upsilon_6 + 2\Upsilon_7 < 0. \quad (98)$$

Garantindo-se (98), segue que $\dot{\mathcal{W}}(\tau, e_k, T_k) < 0$, para qualquer $e_k(0)$, pois a condição de setor (16) é válida globalmente. Então, pode-se reescrever (98) como

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{W}}(\tau, e_k, T_k) + \xi_k(\tau)^\top \text{He} \{ -M_5^\top J_1 (M_5 - \Theta C M_1) \\ + \tilde{Y}^\top (-M_4 + A M_1 + B M_5 - K H M_2) \} \xi_k(\tau) < 0. \end{aligned} \quad (99)$$

Pode-se agora calcular cada termo de $\dot{\mathcal{W}}$ (68) separadamente. Começando por

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} V(e_k(\tau)) &= \text{He} \{ e_k(\tau)^\top P \dot{e}_k(\tau) + \rho(C e_k(\tau), C x_{S_k}(\tau))^\top \Gamma C \dot{e}_k(\tau) \} \\ &= \xi_k(\tau)^\top \text{He} \{ M_1^\top P M_4 + M_5^\top \Gamma C M_4 \} \xi_k(\tau) \end{aligned} \quad (100)$$

onde $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_{(1)}, \dots, \gamma_{(m)}\}$. Em seguida, os demais termos de $\dot{\mathcal{W}}$ (68) podem ser obtidos como na prova do Teorema 4.1, resultando nas LMIs (76) e (77) com as variáveis (93) e (94). Desta forma, se as LMIs (76) e (77) são satisfeitas, o sistema (64) é assintoticamente estável, para $T_k \in [T_1, T_2], \forall k$. \square

4.2.3 Problema de otimização

Com base nas condições estabelecidas nos Teoremas 4.1 e 4.2, é possível enunciar um problema de otimização para a maximização do intervalo de amostragem como solução ao Problema 4.1:

$$\begin{aligned} \max T_2 \\ \text{sujeito a (76) e (77)}. \end{aligned} \quad (101)$$

Este problema de otimização pode ser implementado através de um algoritmo de busca na variável T_2 , testando-se a factibilidade do problema convexo nas relações LMI (76) e (77). No caso particular de amostragem periódica, o máximo intervalo pode ser encontrado fazendo-se $\bar{T} = T_1 = T_2$. Ressalta-se que, embora as LMIs (76) e (77) sejam as mesmas para os Teoremas 4.1 e 4.2, as matrizes F_1 a F_5 variam conforme as relações empregadas.

4.3 Projeto do controlador

Nesta seção, as condições de estabilidade obtidas nos Teoremas 4.1 e 4.2 são estendidas para a solução do Problema 4.2. A lei de controle é baseada na realimentação de saída, ou seja, $u(t) = K y_e(t_k)$, onde o erro $y_e(t_k)$ corresponde à diferença entre as saídas dos sistemas mestre e escravo nos instantes t_k . Portanto, o projeto do controlador consiste na síntese da matriz de ganhos K .

Ao tomar-se a matriz de ganhos K como variável no Teorema 4.1 verifica-se que as condições deixam de ser LMI, em função da multiplicação das matrizes K e Y . No método descritor (FRIDMAN, 2014), $\dot{e}(t)$ é considerada como uma variável de estado adicional. Inspirado neste método, propõe-se a seguinte transformação genérica similar à relação (82):

$$\begin{aligned} [Y_1 e_k(\tau) + Y_{12} e_k(0) + Y_{13} \dot{e}_k(\tau)]^\top \left[-\dot{e}_k(\tau) + \tilde{A} e_k(\tau) \right. \\ \left. - B \sum_{l=1}^{N-1} \tilde{\Lambda}_l \Phi_l(C e_k(\tau), C x_{S_k}(\tau)) - K H e_k(0) \right] = 0 \end{aligned} \quad (102)$$

onde $Y_1, Y_{12}, Y_{13} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Desta forma, assume-se uma forma particular onde a matriz $Y \in \mathbb{R}^{n \times [4n+(N-1)m]}$ é substituída por

$$\begin{bmatrix} Y_1 & Y_{12} & 0 & Y_{13} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (103)$$

A partir das matrizes auxiliares (78), (103) pode ser representada por

$$Y_1 M_1 + Y_{12} M_2 + Y_{13} M_4. \quad (104)$$

O método descritor propõe as transformações de variáveis $Y_{12} = \epsilon_1 Y_1$ e $Y_{13} = \epsilon_2 Y_1$ com o objetivo de obter-se condições quasi-LMI, através de escalares ϵ_1 e ϵ_2 . Fixando-se os valores de ϵ_1 e ϵ_2 , as relações obtidas são LMIs, levando a solução de um problema convexo. Desta forma, (104) pode ser reescrita como

$$Y_1 (M_1 + \epsilon_1 M_2 + \epsilon_2 M_4). \quad (105)$$

Então, é possível enunciar o seguinte teorema:

Teorema 4.3. *Sejam dois escalares positivos $0 < T_1 \leq T_2$ e dois escalares reais ϵ_1 e ϵ_2 . Se existem matrizes definidas positivas $P, R \in \mathbb{S}^n$, matrizes diagonais definidas positivas $U_l \in \mathbb{S}^m$, matrizes diagonais positivas $\Gamma_l \in \mathbb{S}^m$, matrizes $S_1, Q_1, X \in \mathbb{S}^n$, $Z \in \mathbb{R}^{[4n+(N-1)m] \times 2n}$, S_2, Q_2, Y_1 e $\tilde{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, que satisfaçam, para $r = 1, 2$ e $l = 1, \dots, N-1$*

$$F_1 + T_r(-F_2 + F_3 + F_4) < 0 \quad (106)$$

$$\begin{bmatrix} F_1 - T_r(F_2 + F_4 + F_5) & Z \\ \star & -\frac{1}{T_r} \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 3R \end{bmatrix} \end{bmatrix} < 0 \quad (107)$$

com

$$F_1 = \text{He} \left\{ (M_1 + \epsilon_1 M_2 + \epsilon_2 M_4)^T Y_1^T \left(-M_4 + \tilde{A} M_1 - B \sum_{l=1}^{N-1} \tilde{\Lambda}_l L_l \right) - (M_1 + \epsilon_1 M_2 + \epsilon_2 M_4)^T \tilde{K} H M_2 + M_1^T P M_4 - Z M_6 - M_{12}^T S_2 M_2 + \sum_{l=1}^{N-1} L_l^T \Gamma_l C M_4 - \sum_{l=1}^{N-1} L_l^T U_l (L_l - C M_1) \right\} - M_{12}^T S_1 M_{12}$$

$$F_2 = M_3^T Q_1 M_3$$

$$F_3 = \text{He} \{ M_4^T (S_1 M_{12} + S_2 M_2) + M_1^T (Q_1 M_3 + Q_2 M_2) \} + M_4^T R M_4$$

$$F_4 = M_2^T X M_2$$

$$F_5 = \text{He} \{ M_3^T Q_2 M_2 \}$$

e matrizes auxiliares (78), então todas as trajetórias do sistema (74), com ganho de realimentação de estado $K = Y_1^{-1} \tilde{K}$, convergem assintoticamente para a origem para qualquer amostragem assíncrona satisfazendo $T_k \in [T_1, T_2], \forall k$.

Prova. A demonstração é similar à prova do Teorema 4.1, com a substituição de $\tilde{K} = Y_1^T K$ e Y por (105), i.e. a seguinte relação no lugar de (82)

$$\begin{aligned} & [e_k(\tau) + \epsilon_1 e_k(0) + \epsilon_2 \dot{e}_k(\tau)]^T Y_1^T \left[-\dot{e}_k(\tau) + \tilde{A} e_k(\tau) \right. \\ & \left. - B \sum_{l=1}^{N-1} \tilde{\Lambda}_l \Phi_l(C e_k(\tau), C x_{S_k}(\tau)) - K H e_k(0) \right] = 0 \quad (108) \end{aligned}$$

que pode ser reescrita com as matrizes auxiliares (78) como

$$(M_1 + \epsilon_1 M_2 + \epsilon_2 M_4)^T Y_1^T \left(-M_4 + \tilde{A}M_1 - B \sum_{l=1}^{N-1} \tilde{\Lambda}_l L_l \right) - (M_1 + \epsilon_1 M_2 + \epsilon_2 M_4)^T \tilde{K} H M_2. \quad (109)$$

□

Observação 4.1. *A seguinte substituição à matriz \tilde{Y} pode ser aplicada quando a função Lur'e assume uma não linearidade genérica:*

$$[\tilde{Y}_1 \quad \tilde{Y}_{12} \quad 0 \quad \tilde{Y}_{13} \quad 0] \quad (110)$$

onde $\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_{12}, \tilde{Y}_{13} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Desta forma, utilizando a aproximação do método descritor, tal como em (105), obtém-se a seguinte relação através das matrizes auxiliares (94):

$$\tilde{Y}_1 (M_1 + \epsilon_1 M_2 + \epsilon_2 M_4). \quad (111)$$

Com base nas condições estabelecidas no Teorema 4.3, também é possível enunciar um problema de otimização para a maximização do intervalo de amostragem como solução ao Problema 4.2:

$$\begin{aligned} & \max T_2 \\ & \text{sujeito a (106) e (107).} \end{aligned} \quad (112)$$

Este problema de otimização pode ser implementado através de um algoritmo de busca nas variáveis ϵ_1 e ϵ_2 , testando-se a factibilidade do problema quasi-convexo nas relações LMI (106) e (107) em $T_r, r = 1, 2$. No caso particular de amostragem periódica, o máximo intervalo pode ser encontrado fazendo-se $\bar{T} = T_1 = T_2$.

Em função da forma particular da matriz Y , quando comparada à relação (82), obtém-se condições de síntese do ganho K de realimentação mais conservadoras que as condições de estabilidade dos Teoremas 4.1 e 4.2. Portanto, de forma a diminuir-se o conservadorismo introduzido pela aproximação da matriz Y , o Problema 4.2 pode ser resolvido iterativamente, da seguinte forma:

1. Calcula-se o ganho K através do problema de otimização (112) a partir das variáveis ϵ_1 e ϵ_2 ;
2. Com o ganho K calculado no passo anterior, resolve-se o problema de otimização (101), determinando novos valores para T_2 e Y ;
3. Fixando a matriz Y no valor obtido no passo anterior e assumindo o ganho K como variável, resolve-se novamente o problema de otimização (101), determinando novos valores para T_2 e K ;
4. Repetem-se os passos 2 e 3 até que o incremento no tempo T_2 seja menor que uma dada tolerância.

4.4 Exemplos

Problema de análise da estabilidade

O método proposto será testado com um circuito de Chua (MATSUMOTO; CHUA; KOMURO, 1985), que faz parte de uma classe de circuitos não lineares que apresentam comportamento caótico. Este sistema em tempo contínuo pode ser representado no espaço de estados por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B\sigma(Cx) \\ y &= Hx \end{aligned} \quad (113)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -b & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H = [1 \quad 0 \quad 0]$$

e $\sigma(Cx) = -\phi(x_{(1)})$, com a função não linear $\phi(x_{(1)})$ representando o diodo de Chua, descrito pela função linear por partes (58).

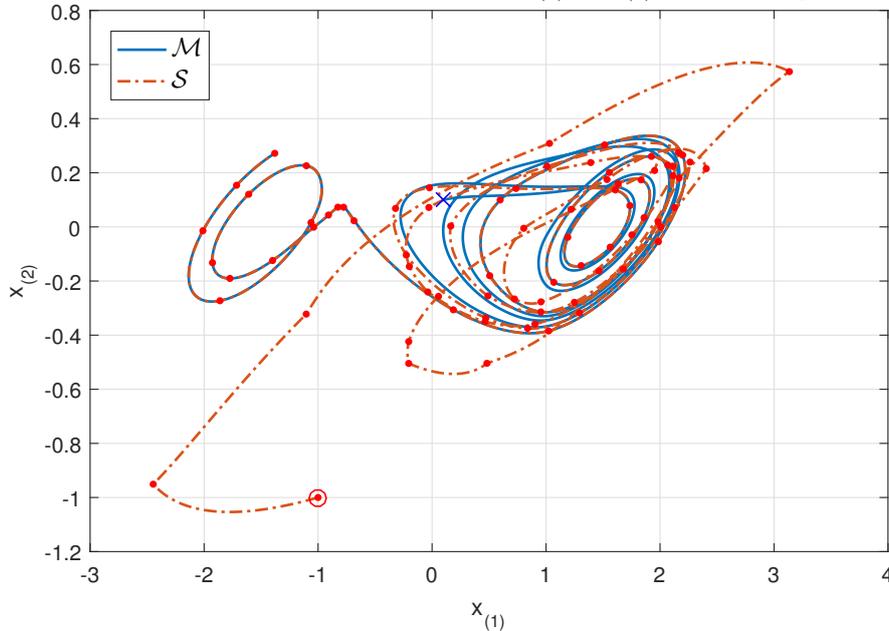
O sistema descrito é equivalente ao exemplo 1 em (ZENG et al., 2017), com $a = 9$, $b = 14.28$, $g_1 = 8/7$ e $g_2 = 5/7$. Note que esta função não linear pode ser descrita como em (6) com $N = 2$, $b_1 = 1$, $\Lambda_1 = g_1$ e $\Lambda_2 = g_2$.

Considerando o mesmo ganho K de realimentação de saída de (ZENG et al., 2017)

$$K = [3.2987 \quad 0.1932 \quad -2.9360]^T \quad (114)$$

para $T_1 = 0.1000$, no caso aperiódico, o problema de otimização (101) resulta¹ em $T_2 = 0.5404$.

Figura 12: Trajetórias mestre e escravo no plano $x_{(1)} \times x_{(2)}$ para $T_k \in [0.1000, 0.5404]$.



A Figura 12 mostra que, para uma condição inicial $x_M(0) = [0.1 \quad 0.1 \quad 0.1]^T$ e $x_S(0) = [-1 \quad -1 \quad -1]^T$, mesmo para uma trajetória caótica, o sistema escravo é capaz de seguir o mestre com um controle amostrado assíncrono, atingindo assim a sincronização. Na simulação, T_k foi obtido aleatoriamente de uma distribuição uniforme em

¹Foi utilizado o pacote CVX (GRANT; BOYD, 2014) para Matlab com o *solver* SDPT3.

$[T_1, T_2]$. As Figuras 13 e 15 ilustram o erro de sincronização mestre-escravo e o sinal de controle, respectivamente.

No caso periódico, o problema de otimização (101) resulta em $\bar{T} = 0.5765$. Quando comparado ao período de 0.5582 obtido através do Teorema 1 de (ZENG et al., 2017), o período máximo de amostragem é melhorado em 3.28%. Estes resultados mostram que o Teorema 4.1 apresenta uma condição menos conservadora a ser satisfeita em termos de estabilidade do que a referência, para o caso periódico avaliado.

A partir da Figura 14 é possível avaliar simulações de tentativas de sincronização pra diferentes períodos de amostragem para as mesmas condições iniciais aplicadas anteriormente. Quando simulado com períodos de amostragem periódica $\bar{T} \leq 0.59$, a sincronização mestre-escravo é obtida. Para $\bar{T} = 0.62$, percebe-se que o sistema escravo não sincroniza com o mestre. Isso demonstra que, embora as condições do Teorema 4.1 representem apenas uma condição suficiente e não necessária, em função da escolha do funcional *looped*, o resultado obtido se aproxima do máximo período de amostragem periódica observado. A Figura 16 ilustra o comportamento caótico e a sincronização das trajetórias mestre e escravo, e a Figura 17 mostra a entrada de controle amostrado para $T_k = 0.5765$.

Resolvendo o problema de otimização (101) para diferentes intervalos de amostragem aperiódica é possível determinar a região de intervalos admissíveis onde a sincronização é garantida, conforme Figura 18. A região na cor cinza delimita os intervalos dos períodos de amostragem T_1 e T_2 , demonstrando a relação destes com o máximo período de amostragem admissível. É possível observar que o máximo período de amostragem culmina para $T_1 = T_2$, i.e. uma amostragem periódica.

Figura 13: Erro de sincronização mestre-escravo: em tempo contínuo (linha vermelha contínua) e nos instantes de amostragem (pontos azuis) para $T_k \in [0.1000, 0.5404]$.

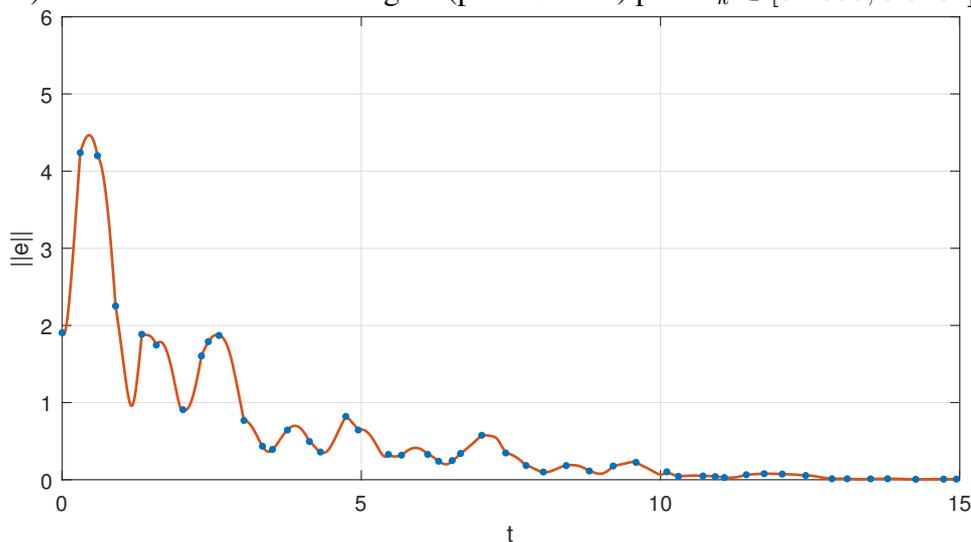
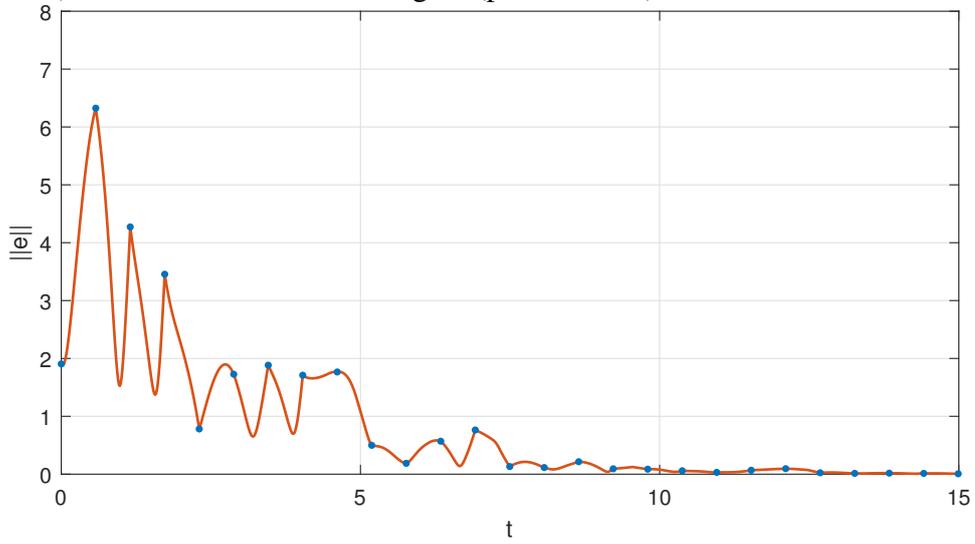
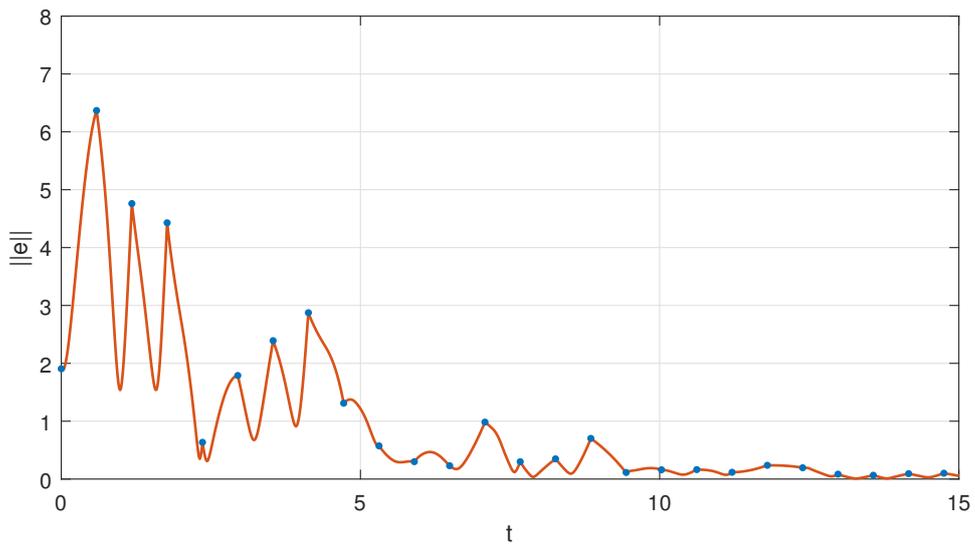


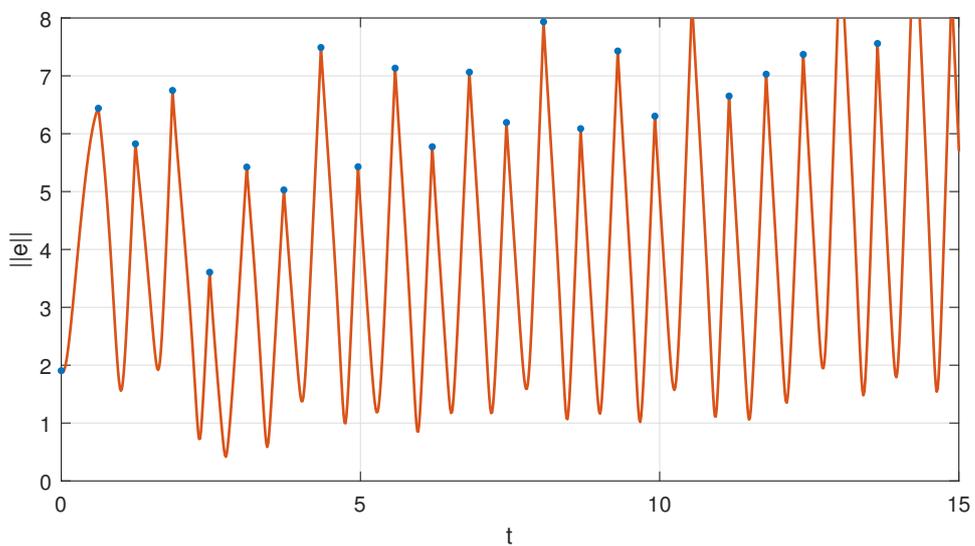
Figura 14: Erro de sincronização mestre-escravo: em tempo contínuo (linha vermelha contínua) e nos instantes de amostragem (pontos azuis).



(a) $T_k = 0.5765$



(b) $T_k = 0.59$



(c) $T_k = 0.62$

Figura 15: Sinal de entrada de controle u para $T_k \in [0.1000, 0.5404]$.

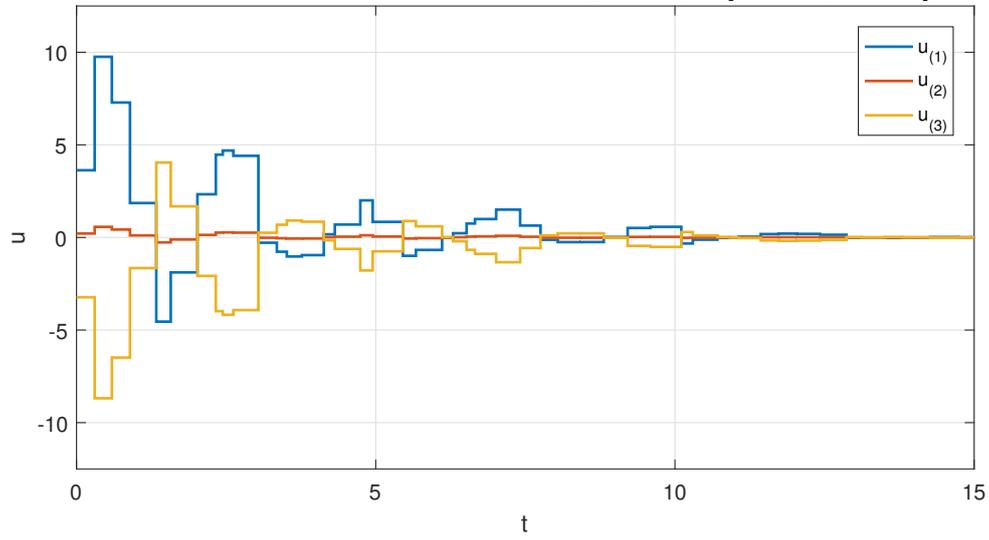


Figura 16: Trajetórias mestre e escravo no plano $x_{(1)} \times x_{(2)}$ para $T_k = 0.5765$.

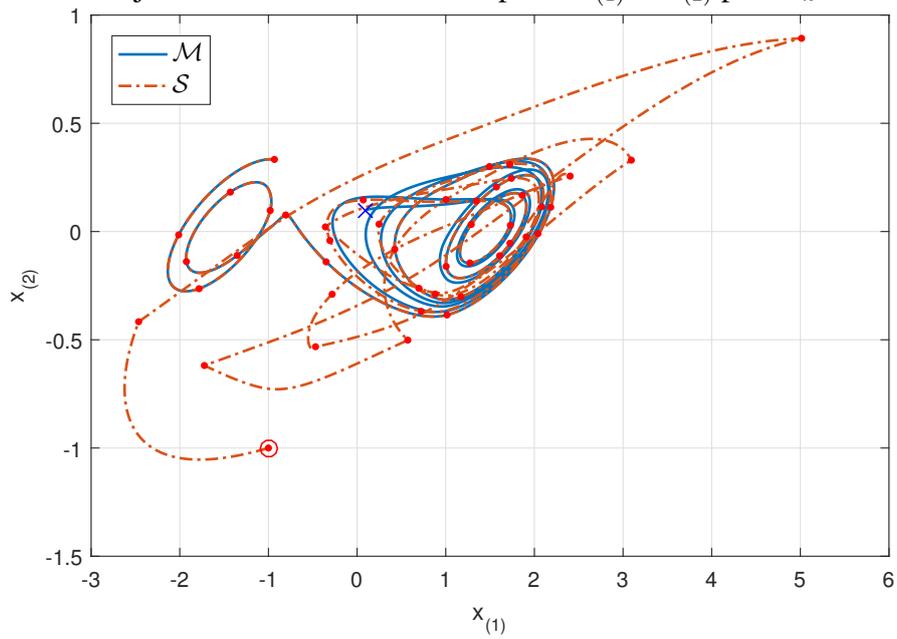


Figura 17: Sinal de entrada de controle u para $T_k = 0.5765$.

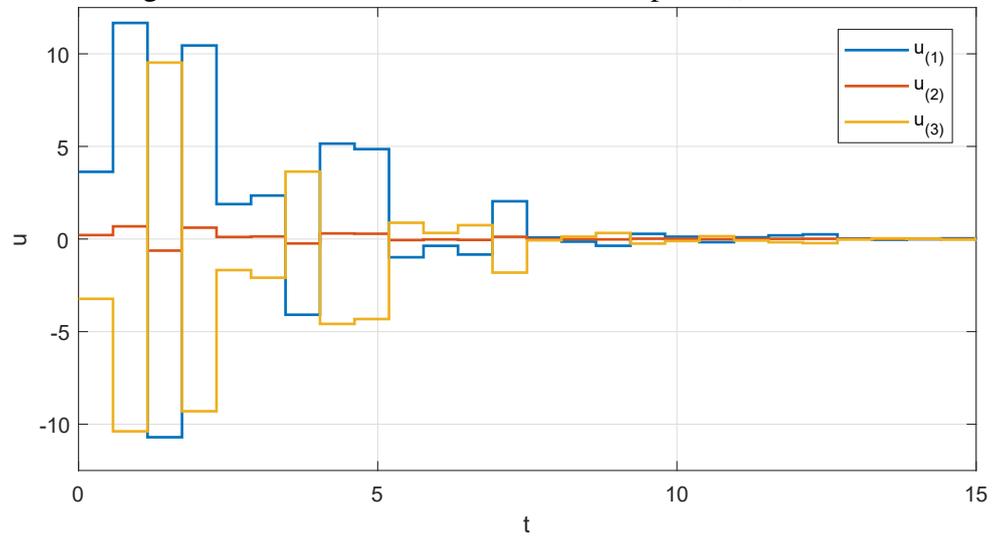
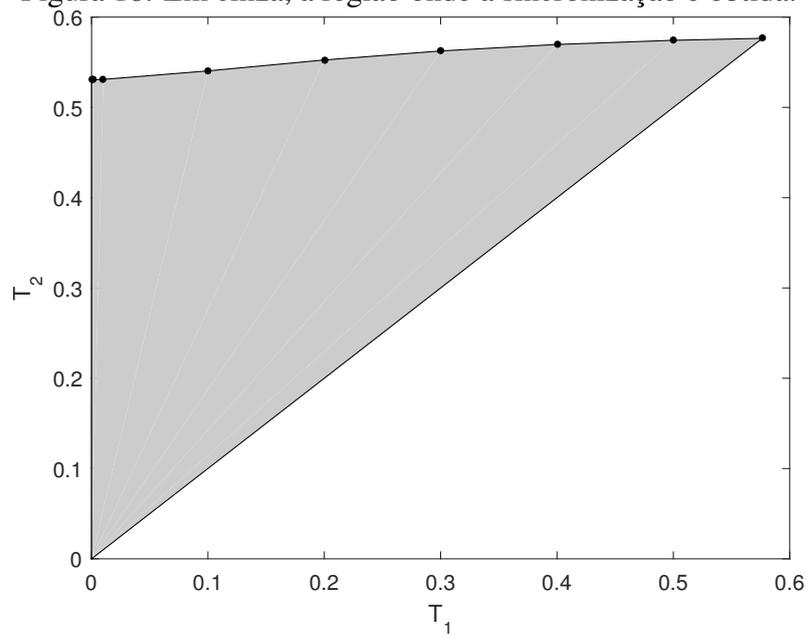


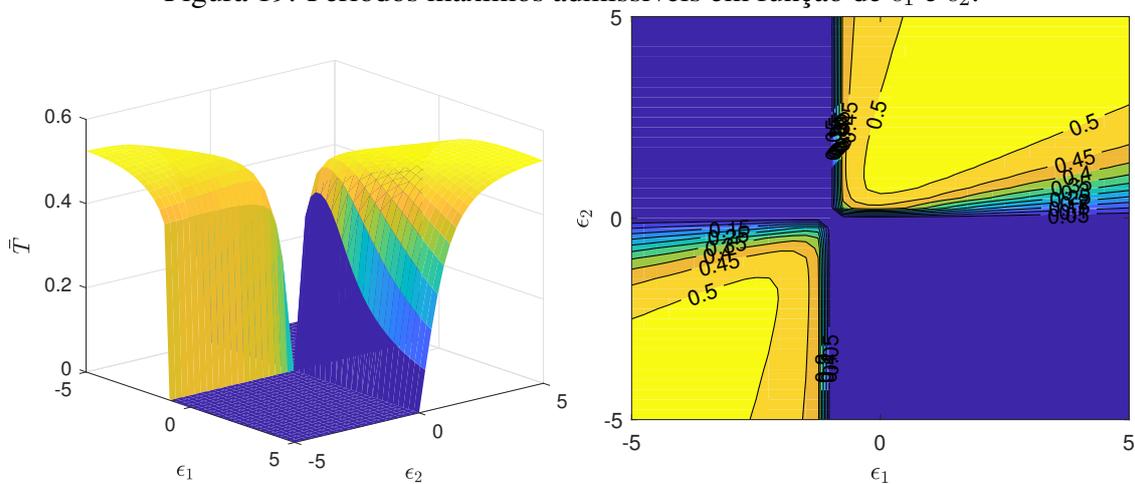
Figura 18: Em cinza, a região onde a sincronização é obtida.



Problema de projeto do controlador pelo método iterativo

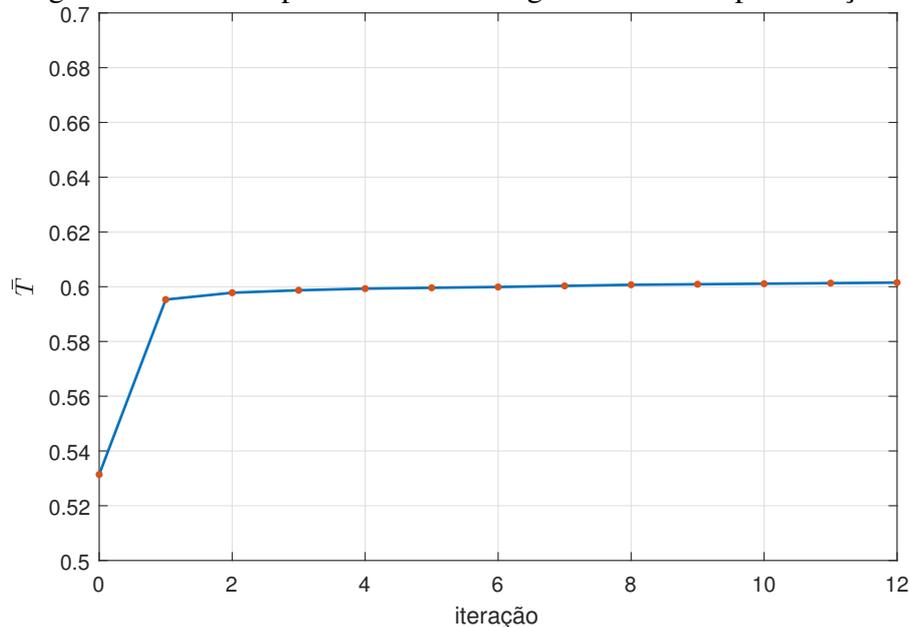
Ao resolver o problema de síntese do ganho de realimentação para o caso periódico do circuito de Chua a partir do problema de otimização (112), são obtidos os períodos máximos admissíveis ilustrados na Figura 19. O período máximo admissível encontrado, na faixa dos valores testados, corresponde a 0.5314 para $\epsilon_1 = 3$ e $\epsilon_2 = 4.25$. Observa-se que este período é menor do que o encontrado anteriormente através do problema de otimização (101) para o ganho de realimentação (114). Isto se deve ao conservadorismo introduzido pela aproximação do método descritor na elaboração das condições quasi-LMI para a síntese do ganho do controlador.

Figura 19: Períodos máximos admissíveis em função de ϵ_1 e ϵ_2 .



Utilizando o método iterativo indicado na seção anterior, ao aplicar-se consecutivamente os problemas de análise de estabilidade e síntese do ganho K , o máximo período de amostragem admissível evolui conforme Figura 20.

Figura 20: Máximo período de amostragem admissível por iteração.



A partir dos resultados obtidos, sintetizados na Tabela 1, verifica-se a consequência deste método iterativo sobre o máximo período de amostragem admissível e o respectivo ganho de realimentação K .

Tabela 1: Intervalo máximo de amostragem periódica e ganho K por iteração.

iteração	\bar{T}	K
0	0.5314	$[3.111 \ 0.1422 \ -2.791]^\top$
1	0.5953	$[3.060 \ 0.1311 \ -2.771]^\top$
\vdots		
12	0.6015	$[3.007 \ 0.1035 \ -2.727]^\top$

As Figuras 22 e 21 ilustram as trajetórias para os resultados indicados na Tabela 1, no plano $x_{(1)} \times x_{(2)}$ para uma condição inicial $x_M(0) = [0.1 \ 0.1 \ 0.1]^\top$ e $x_S(0) = [-1 \ -1 \ -1]^\top$, e a convergência do erro de sincronização para zero, resultando na sincronização dos sistemas mestre e escravo.

Desta forma, é possível perceber uma vantagem ao projetar o controlador a partir deste método iterativo, permitindo para uma nova matriz de ganhos K um período de amostragem 4.34% maior, quando comparado ao máximo período de amostragem periódica $\bar{T} = 0.5765$, obtido para o ganho de realimentação (114).

Figura 21: Relação entre o intervalo máximo de amostragem periódica e a resposta do erro de sincronização.

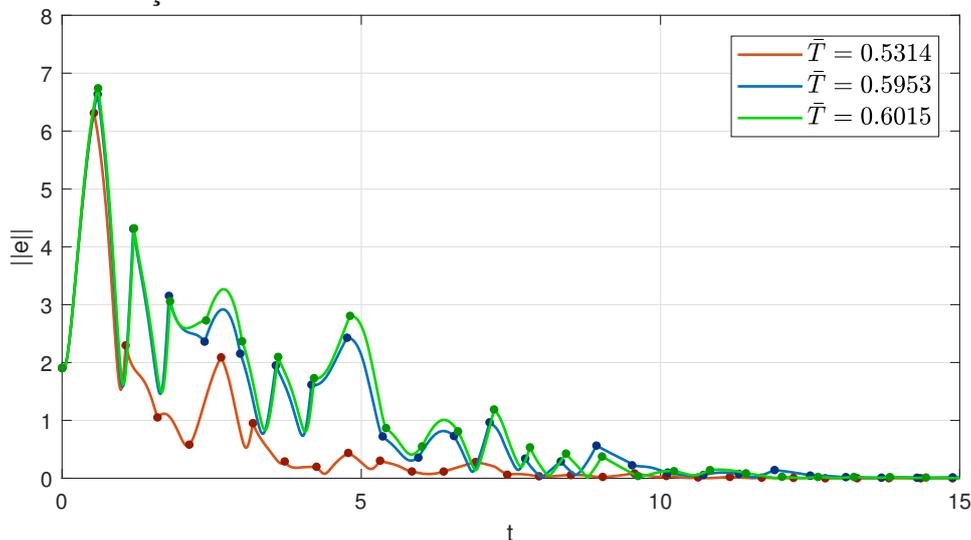
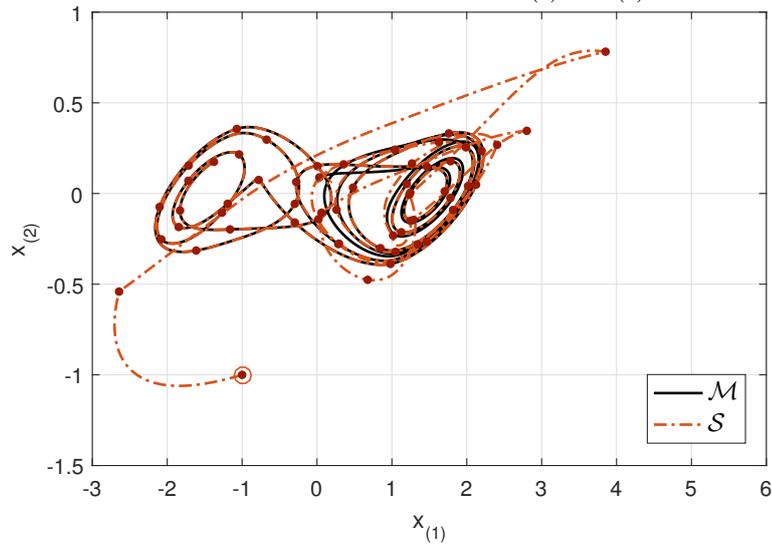
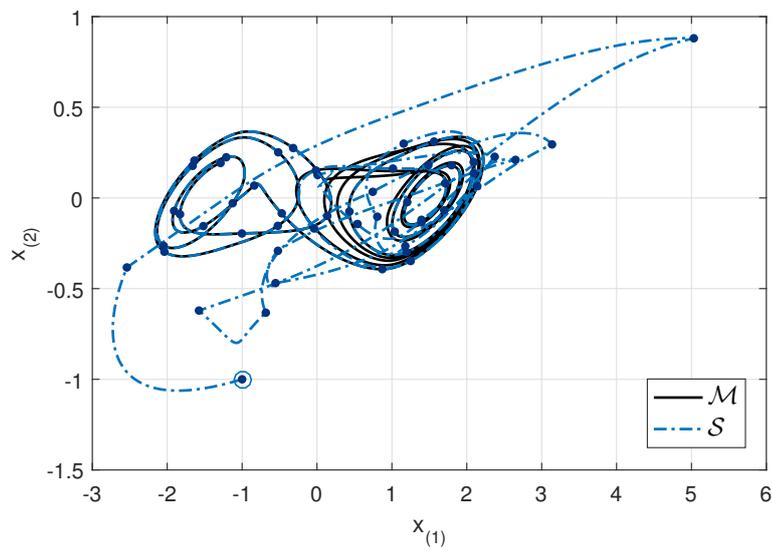


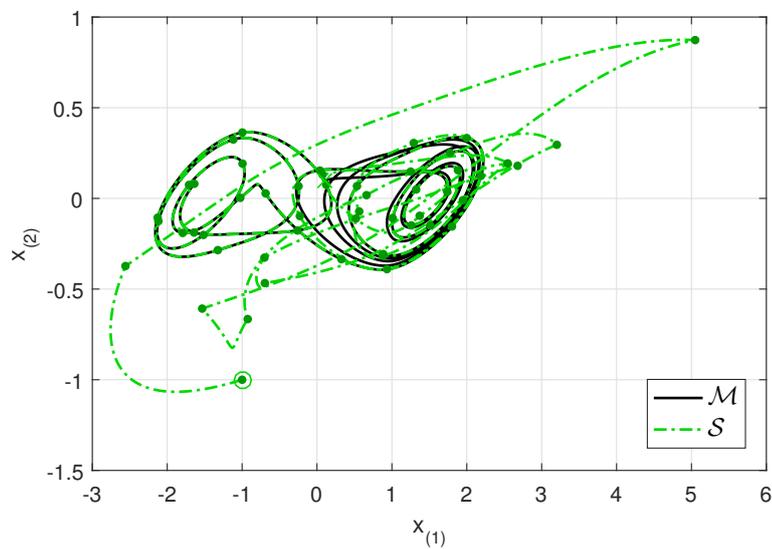
Figura 22: Trajetórias mestre e escravo no plano $x_{(1)} \times x_{(2)}$ para as soluções da Tabela 1.



(a) $\bar{T} = 0.5314$



(b) $\bar{T} = 0.5953$

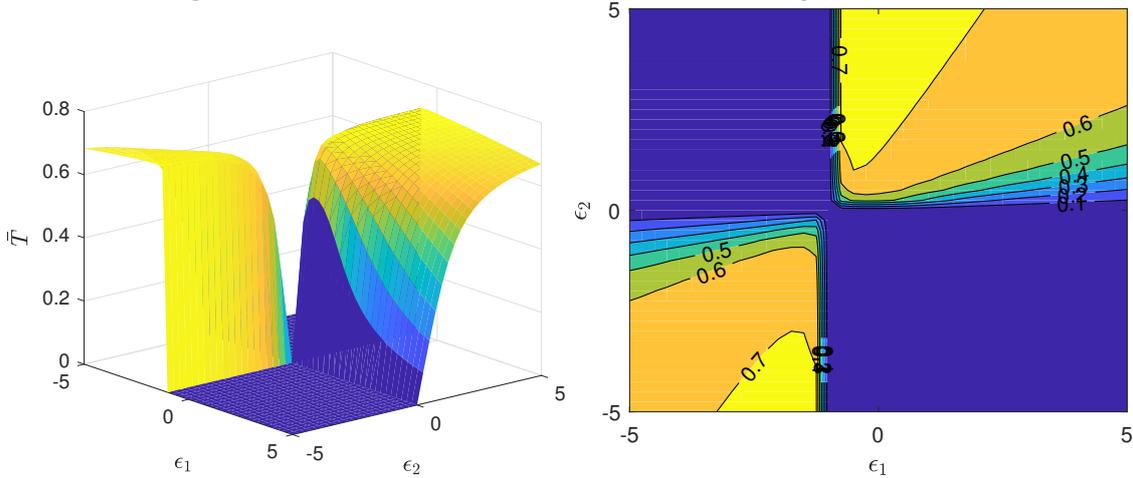


(c) $\bar{T} = 0.6015$

Problema de projeto de realimentação de estado

Utilizando novamente o circuito de Chua (113) e considerando desta vez uma realimentação de estado, a partir do problema de otimização (112) para o caso periódico, aplicando uma varredura em ϵ_1 e ϵ_2 , obtém-se os máximos períodos admissíveis ilustrados na Figura 23. Observa-se que os valores máximos ficam próximos ao patamar de valor 0.7, sendo o máximo período obtido igual a 0.7205 para $\epsilon_1 = -0.5$ e $\epsilon_2 = 5$. Na Tabela 2 foram relacionadas algumas soluções obtidas.

Figura 23: Períodos máximos admissíveis em função de ϵ_1 e ϵ_2 .

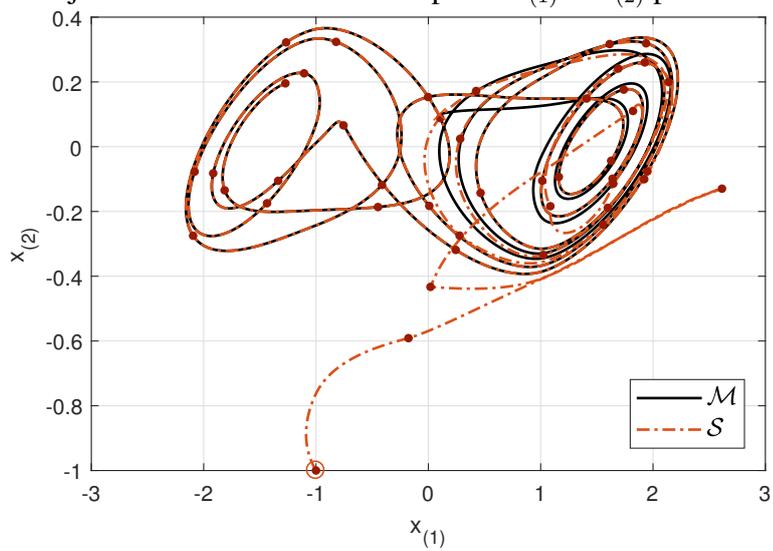
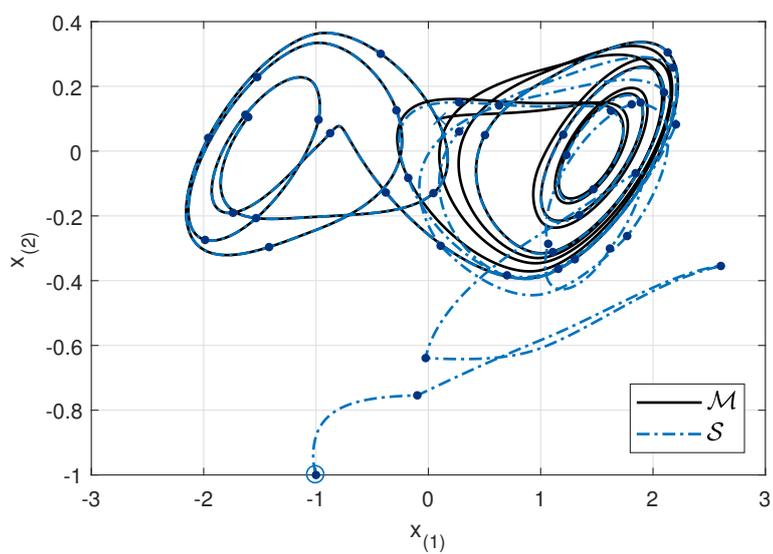
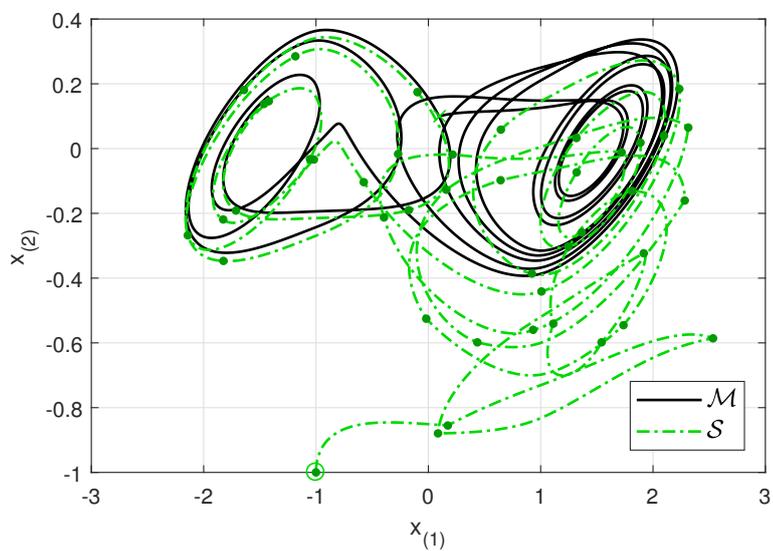


A Figura 25 ilustra o efeito dos parâmetros ϵ_1 e ϵ_2 na resposta do erro de sincronização para cada intervalo máximo de amostragem da Tabela 2 e a Figura 24 mostra a sincronização dos sistemas escravos com os respectivos mestres de cada solução, conforme as trajetórias no plano $x_{(1)} \times x_{(2)}$, para uma condição inicial $x_M(0) = [0.1 \ 0.1 \ 0.1]^T$ e $x_S(0) = [-1 \ -1 \ -1]^T$.

Tabela 2: Intervalo máximo de amostragem periódica e ganho K em função de ϵ_1 e ϵ_2 .

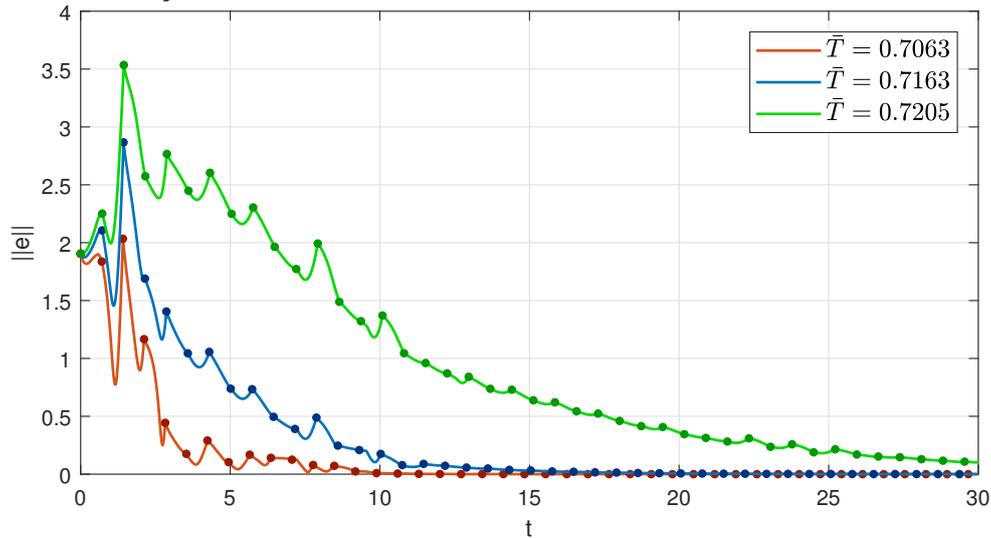
ϵ_1	ϵ_2	\bar{T}	K
1	4	0.7063	$\begin{bmatrix} 2.102 & 5.786 & 0.3337 \\ 0.6245 & 0.2338 & 0.7193 \\ -0.5588 & -10.57 & 0.0992 \end{bmatrix}$
0	4	0.7163	$\begin{bmatrix} 1.912 & 6.604 & 0.2841 \\ 0.6656 & 0.1323 & 0.7744 \\ -0.3306 & -12.21 & 0.02930 \end{bmatrix}$
-0.5	5	0.7205	$\begin{bmatrix} 1.708 & 7.442 & 0.2096 \\ 0.7164 & -0.027 & 0.8242 \\ -0.0877 & -13.6 & 0.0395 \end{bmatrix}$

Neste caso, uma realimentação de estado completa possibilitou garantir a sincronização do sistema mestre-escravo através de valores maiores de período de amostragem do que os obtidos anteriormente. De outra forma, uma busca nos valores dos parâmetros ϵ_1 e

Figura 24: Trajetórias mestre e escravo no plano $x_{(1)} \times x_{(2)}$ para as soluções da Tabela 2.(a) $\bar{T} = 0.7063$ (b) $\bar{T} = 0.7163$ (c) $\bar{T} = 0.7205$

ϵ_2 levaram a uma maximização do intervalo admissível entre amostras. No entanto, cabe ressaltar que os problemas propostos de otimização (101) e (112) não consideram como critério a qualidade da resposta transitória, podendo resultar em intervalos admissíveis entre amostras e ganhos de realimentação que podem apresentar uma resposta transitória lenta. Neste caso, períodos maiores de amostragem resultaram em um tempo maior necessário para a sincronização, como pode se observar nas Figuras 24 e 25.

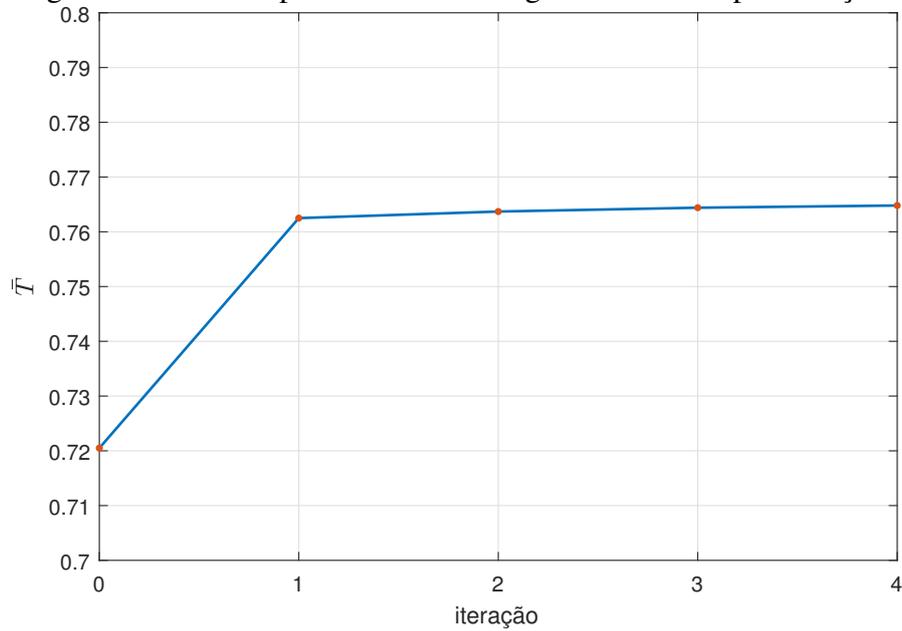
Figura 25: Relação entre o intervalo máximo de amostragem periódica e a resposta do erro de sincronização.



A partir do resultado ótimo encontrado através do problema de otimização (112), aplicou-se o método iterativo. Os períodos máximos admissíveis obtidos por iteração estão ilustrados na Figura 26 e relacionados na Tabela 3. As Figuras 27 e 28 demonstram a sincronização dos sistemas mestre e escravo através do gráfico das trajetórias no plano $x_{(1)} \times x_{(2)}$ e através do gráfico do erro de sincronização, para uma condição inicial $x_M(0) = [0.1 \ 0.1 \ 0.1]^T$ e $x_S(0) = [-1 \ -1 \ -1]^T$.

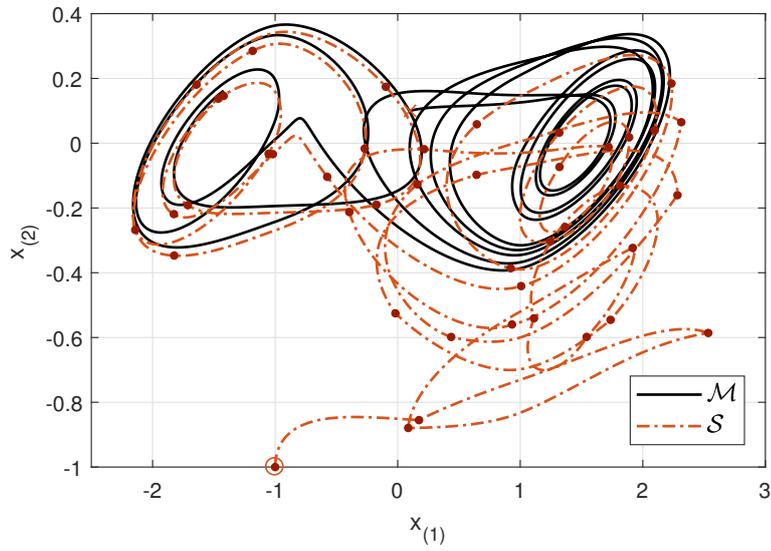
Novamente é possível perceber a vantagem de aplicar o método iterativo que, ao diminuir o conservadorismo das relações de síntese do ganho K de realimentação, permite explorar um período admissível de amostragem maior. Além disso, diferentemente do observado na aplicação do problema de otimização (112), neste caso, a resposta transitória melhorou com o método iterativo, resultando em tempos menores para a sincronização dos sistemas mestre e escravo para períodos maiores de amostragem, conforme pode-se verificar nas Figuras 27 e 28.

Figura 26: Máximo período de amostragem admissível por iteração.

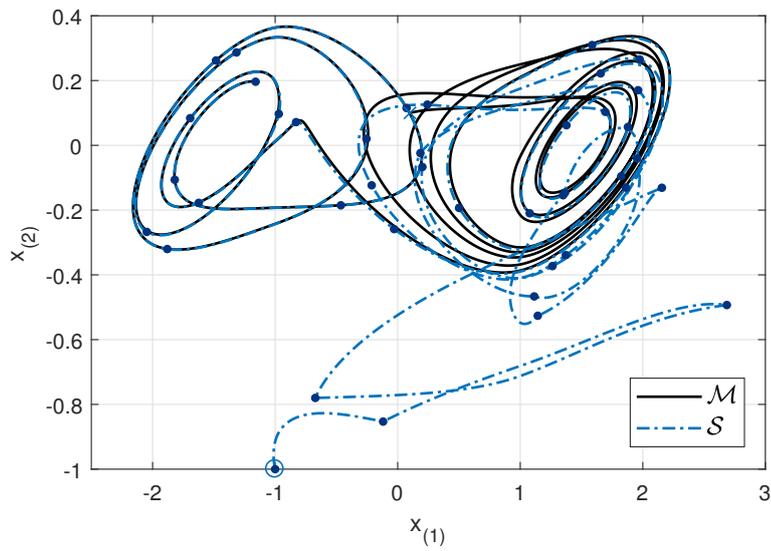
Tabela 3: Intervalo máximo de amostragem periódica e ganho K por iteração.

iteração	\bar{T}	K
0	0.7205	$\begin{bmatrix} 1.708 & 7.442 & 0.2096 \\ 0.7164 & -0.027 & 0.8242 \\ -0.0877 & -13.6 & 0.0395 \end{bmatrix}$
1	0.7625	$\begin{bmatrix} 1.721 & 7.085 & 0.159 \\ 0.7174 & 0.0103 & 0.8366 \\ -0.1074 & -13.17 & 0.106 \end{bmatrix}$
2	0.7637	$\begin{bmatrix} 1.716 & 7.094 & 0.1551 \\ 0.7237 & -0.0314 & 0.8373 \\ -0.1085 & -13.17 & 0.1055 \end{bmatrix}$
3	0.7644	$\begin{bmatrix} 1.896 & 6.13 & 0.185 \\ 0.6883 & 0.1601 & 0.8326 \\ -0.3854 & -11.74 & 0.0502 \end{bmatrix}$
4	0.7648	$\begin{bmatrix} 1.895 & 6.124 & 0.1832 \\ 0.689 & 0.1547 & 0.8326 \\ -0.3801 & -11.76 & 0.0524 \end{bmatrix}$

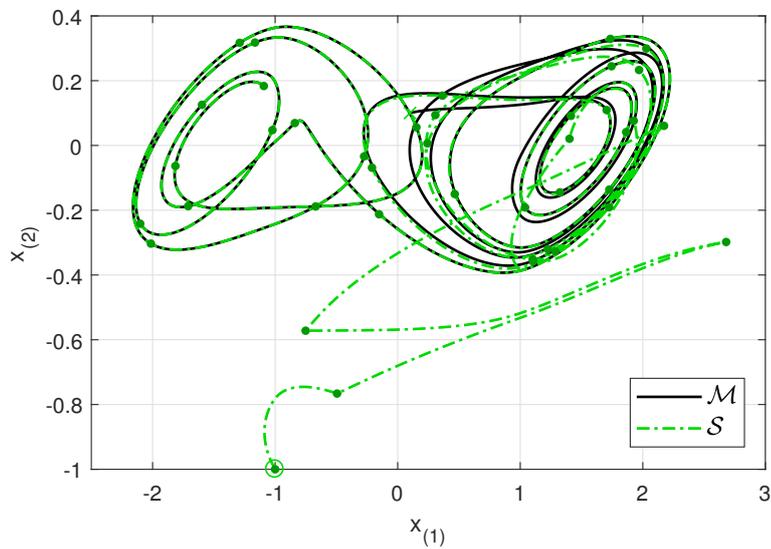
Figura 27: Trajetórias mestre e escravo no plano $x_{(1)} \times x_{(2)}$ conforme resultados da Tabela 3.



(a) $\bar{T} = 0.7205$

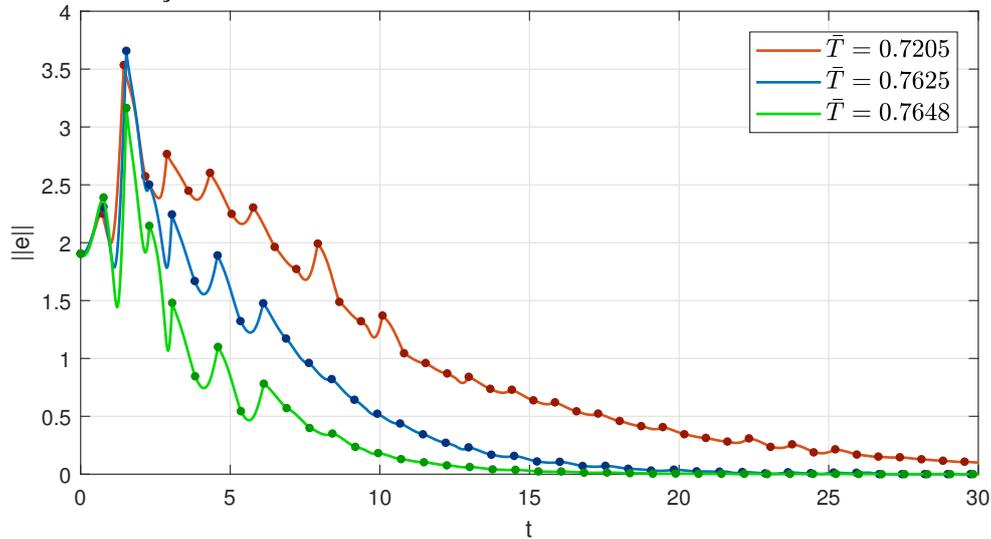


(b) $\bar{T} = 0.7625$



(c) $\bar{T} = 0.7648$

Figura 28: Relação entre o intervalo máximo de amostragem periódica e a resposta do erro de sincronização.



4.5 Considerações finais

Neste capítulo foram apresentadas condições que asseguram a sincronização de sistemas Lur'e mestre-escravo sob controle de realimentação do erro amostrado. Particularmente, o problema de sincronização foi reescrito como uma análise de estabilidade da dinâmica do erro entre os estados mestre e escravo. Através de um funcional *looped* e uma função candidata de Lyapunov do tipo Lur'e foram obtidas condições LMI para um problema de amostragem aperiódica. Além disso, uma desigualdade integral de Wirtinger foi considerada para reduzir o conservadorismo das condições propostas quando comparada com a desigualdade clássica de Jensen. Um problema de otimização com o objetivo de maximizar o tempo admissível entre duas amostras sucessivas para as quais a sincronização é garantida foi então proposto. Em seguida, a partir de uma aproximação relacionada ao método descritor, condições quasi-LMI voltadas para o projeto do controlador foram obtidas. Os métodos de análise de estabilidade e de síntese de controle foram avaliados através de exemplos numéricos para um circuito de Chua. Resultados menos conservadores que os da literatura foram obtidos, possibilitando o projeto de um controlador com um período maior de amostragem. Os resultados da análise de estabilidade deste capítulo foram parcialmente publicados no artigo (ZANI; FLORES; GOMES DA SILVA JR., 2018).

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho foram propostos métodos de sincronização de sistemas Lur'e mestre-escravo. A sincronização foi abordada como um problema de estabilização do erro entre os estados dos sistemas mestre e escravo.

Inicialmente, foram apresentadas soluções para o problema de sincronização de sistemas mestre-escravo em tempo discreto sob saturação do sinal de controle do atuador. Uma lei de controle do tipo realimentação estática do erro entre os estados mestre e escravo foi utilizada para garantir a sincronização. A estabilidade do sistema em malha fechada foi avaliada através de uma função candidata de Lyapunov quadrática e de condições de setor para incorporar os efeitos das funções não lineares. Assim, a estabilidade foi analisada através de uma condição de setor clássica para a não linearidade do sistema Lur'e e uma condição de setor modificada para o efeito da saturação. Uma formulação a partir de funções zona-morta foi utilizada nos casos em que a não linearidade do sistema Lur'e pudesse ser descrita por uma função linear por partes. A partir destas condições, relações do tipo LMI foram obtidas para a garantia da estabilidade regional do erro de sincronização. Neste sentido, um problema de otimização foi elaborado com o objetivo de maximizar um conjunto de condições iniciais admissíveis para as quais a sincronização é garantida. Através de um exemplo numérico, as relações de estabilidade obtidas através da formulação para funções lineares por partes mostrou-se menos conservadora, levando a uma estimativa mais ampla do conjunto de estados iniciais admissíveis. Desta forma, é possível obter condições menos conservadoras para a sincronização de sistemas discretos, explorando características da não linearidade, como a representação linear por partes.

No problema de sistemas mestre-escravo em tempo contínuo a sincronização foi investigada através de um controle amostrado. Uma lei de controle do tipo realimentação estática do erro de saída de sincronização foi utilizada. Além disso, uma amostragem aperiódica foi considerada com o objetivo de aplicar este método no âmbito do controle de sistemas em rede. Neste sentido, através de uma representação da dinâmica entre dois instantes consecutivos de amostragem, um funcional *looped* foi aplicado. Considerando os resultados obtidos no problema em tempo discreto, foi explorado o caso em que a não linearidade da função Lur'e é definida por uma função linear por partes e descrita por funções zona-morta. Além disso, a desigualdade integral de Wirtinger foi aplicada com o objetivo de obter condições de estabilidade menos conservadoras quando comparada à desigualdade clássica de Jensen. A estabilidade foi avaliada através de uma função candidata de Lyapunov do tipo Lur'e. Condições LMI foram obtidas na análise de estabilidade do sistema em malha fechada para um ganho de realimentação conhecido, enquanto uma substituição através do método descritor levou a condições quasi-LMI para o projeto do controlador. Problemas de otimização para a análise de estabilidade e para a síntese de uma lei de controle para a sincronização de sistemas mestre-escravo foram formula-

dos com o objetivo de maximizar o intervalo admissível entre duas amostras sucessivas, para o qual a sincronização do sistema mestre-escravo é garantida. Resultados numéricos provaram que o método proposto mostrou uma redução no conservadorismo quando comparado com a literatura. Desta forma, é possível garantir a sincronização de sistemas mestre-escravo através de um controle amostrado em uma faixa ampla de intervalos entre amostragens, próxima ao limite observado através de simulações. Especificamente, este método pode ser aplicado nos problemas de sistemas controlados em rede, permitindo avaliar os intervalos de tempo entre amostras para um determinado ganho de realimentação conhecido ou projetar um controlador que maximiza um limite superior de tempo entre amostras consecutivas considerando um intervalo mínimo ou para uma amostragem periódica. Em função das características da rede de dados ou dos sistemas associados a esta, esta modelagem aperiódica permite avaliar o compromisso entre os intervalos mínimo e máximo entre amostragens.

Possíveis trabalhos futuros consistem em:

- Estabelecer condições de estabilidade e síntese de controle para realimentação dinâmica de saída, avaliando o emprego da não linearidade Lur'e no controlador;
- Estabelecer condições de estabilidade e síntese de controle considerando a saturação do sinal de controle no caso do controle amostrado;
- Avaliar funções candidatas de Lyapunov alternativas com o objetivo de abranger uma quantidade maior de sistemas, polinomiais ou racionais, como por exemplo o atrator de Lorenz;
- Pesquisar relações menos conservadoras com o objetivo de obter condições LMI para a síntese do controlador no caso do controle amostrado;
- Estabelecer condições de estabilidade e síntese de controle para um conjunto de incertezas nos parâmetros dos sistemas Lur'e;
- Estabelecer condições de setor locais para a função não linear, flexibilizando as condições de estabilidade para um conjunto menor de estados iniciais admissíveis do erro de sincronização;
- Aplicar a metodologia proposta a uma rede de osciladores, como no problema de consenso.

REFERÊNCIAS

- ÅSTRÖM, K. J.; WITTENMARK, B. **Computer-controlled systems: theory and design**. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 1997.
- CAMPOS, C. D. et al. Experimental results on Chua's circuit robust synchronization via LMIs. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, Singapore, v.17, n.9, p.3199–3209, Sept. 2007.
- CHEN, W.-H.; WANG, Z.; LU, X. On sampled-data control for master-slave synchronization of chaotic Lur'e systems. **IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs**, New York, v.59, n.8, p.515–519, Aug. 2012.
- CURRAN, P. F.; CHUA, L. O. Absolute stability theory and the synchronization problem. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, Singapore, v.7, n.6, p.1375–1382, June 1997.
- EROGLU, D.; LAMB, J. S. W.; PEREIRA, T. Synchronisation of chaos and its applications. **Contemporary Physics**, Colchester, v.58, n.3, p.207–243, July 2017.
- FENG, G.; CHEN, G. Adaptive control of discrete-time chaotic systems: a fuzzy control approach. **Chaos, Solitons & Fractals**, Amsterdam, v.23, n.2, p.459–467, Jan. 2005.
- FINSLER, P. Über das vorkommen definitiver und semidefiniter formen in scharen quadratischer formen. **Commentarii Mathematici Helvetici**, Zürich, v.9, n.1, p.188–192, Dec. 1936.
- FISCHMANN, M.; FLORES, J. V.; GOMES DA SILVA JR., J. M. Dynamic controller design for synchronization of Lur'e type systems subject to control saturation. In: IFAC WORLD CONGRESS, 20., 2017, Toulouse, France. **Proceedings...** Amsterdam: Elsevier, 2017. v.50, n.1, p.11853–11858.
- FISCHMANN, M.; FLORES, J. V.; GOMES DA SILVA JR., J. M. Sincronização de uma classe de sistemas Lur'e sob controle saturante. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE, 13., 2017, Porto Alegre, Brasil. **Anais...** Campinas: SBA, 2017.
- FRIDMAN, E. **Introduction to time-delay systems**. Switzerland: Springer, 2014.
- FRIDMAN, E.; SEURET, A.; RICHARD, J.-P. Robust sampled-data stabilization of linear systems: an input delay approach. **Automatica**, Amsterdam, v.40, n.8, p.1441–1446, Aug. 2004.

GRANT, M.; BOYD, S. **CVX**: matlab software for disciplined convex programming, version 2.1. 2014.

HAO, L.-Y.; YANG, G.-H. Fault tolerant control for a class of uncertain chaotic systems with actuator saturation. **Nonlinear Dynamics**, Switzerland, v.73, n.4, p.2133–2147, May 2013.

HOPPENSTEADT, F.; IZHIKEVICH, E. Pattern recognition via synchronization in phase-locked loop neural networks. **IEEE Transactions on Neural Networks**, New York, v.11, n.3, p.734–738, May 2000.

HU, T.; HUANG, B.; LIN, Z. Absolute stability with a generalized sector condition. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.49, n.4, p.535–548, Apr. 2004.

KHALIL, H. K. **Nonlinear systems**. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002.

LEE, T. H.; PARK, J. H. Improved criteria for sampled-data synchronization of chaotic Lur'e systems using two new approaches. **Nonlinear Analysis: Hybrid Systems**, Amsterdam, v.24, p.132–145, May 2017.

LIN, Z.; FRANCIS, B.; MAGGIORE, M. State agreement for continuous-time coupled nonlinear systems. **SIAM Journal on Control and Optimization**, Philadelphia, v.46, n.1, p.288–307, Jan. 2007.

MA, Y.; JING, Y. Robust H_∞ synchronization of chaotic systems with input saturation and time-varying delay. **Advances in Difference Equations**, Berlin, v.2014, n.1, p.124, May 2014.

MATSUMOTO, T.; CHUA, L.; KOMURO, M. The double scroll. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, New York, v.32, n.8, p.797–818, Aug. 1985.

NESIC, D.; TEEL, A. A framework for stabilization of nonlinear sampled-data systems based on their approximate discrete-time models. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.49, n.7, p.1103–1122, July 2004.

NIJMEIJER, H.; MAREELS, I. An observer looks at synchronization. **IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications**, New York, v.44, n.10, p.882–890, Oct. 1997.

PECORA, L. M.; CARROLL, T. L. Synchronization in chaotic systems. **Physical Review Letters**, College Park, v.64, n.8, p.821–824, Feb. 1990.

PEET, M. M.; PAPACHRISTODOULOU, A.; LALL, S. Positive forms and stability of linear time-delay systems. **SIAM Journal on Control and Optimization**, Philadelphia, v.47, n.6, p.3237–3258, Jan. 2009.

SCHÄFER, C. et al. Heartbeat synchronized with ventilation. **Nature**, Switzerland, v.392, n.6673, p.239–240, Mar. 1998.

SEURET, A. A novel stability analysis of linear systems under asynchronous samplings. **Automatica**, Amsterdam, v.48, n.1, p.177 – 182, 2012.

- SEURET, A. et al. Improved stability criteria for sampled-data systems with input saturation. In: KARAFYLLIS, I. et al. (Ed.). **Recent Results on Nonlinear Delay Control Systems**. Cham: Springer, 2015. p.311–325.
- SEURET, A.; GOUAISBAUT, F. Wirtinger-based integral inequality: application to time-delay systems. **Automatica**, Amsterdam, v.49, n.9, p.2860–2866, Sept. 2013.
- STROGATZ, S. H. **Nonlinear dynamics and chaos**. Boulder: Westview Press, 2014.
- SUSSMANN, H. J.; SONTAG, E. D.; YANG, Y. A general result on the stabilization of linear systems using bounded controls. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.39, n.12, p.2411–2425, Dec. 1994.
- SUYKENS, J. A. K.; CURRAN, P. F.; CHUA, L. O. Master-slave synchronization using dynamic output feedback. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, Singapore, v.07, n.03, p.671–679, Mar. 1997.
- SUYKENS, J.; CURRAN, P.; CHUA, L. Robust synthesis for master-slave synchronization of Lur'e systems. **IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications**, New York, v.46, n.7, p.841–850, July 1999.
- TARBOURIECH, S. et al. **Stability and stabilization of linear systems with saturating actuators**. London: Springer, 2011.
- WANG, C.; GREBOGI, C.; BAPTISTA, M. S. One node driving synchronisation. **Scientific Reports**, Switzerland, v.5, n.1, Dec. 2015.
- WU, Z. G. et al. Local synchronization of chaotic neural networks with sampled-data and saturating actuators. **IEEE Transactions on Cybernetics**, New York, v.44, n.12, p.2635–2645, Dec. 2014.
- YANG, T.; CHUA, L. O. Impulsive stabilization for control and synchronization of chaotic systems: theory and application to secure communication. **IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications**, New York, v.44, n.10, p.976–988, Oct. 1997.
- ZANI, A. et al. Synchronization of discrete-time Lur'e systems under saturating control. In: EUROPEAN CONTROL CONFERENCE, 2018, Limassol, Cyprus. **Proceedings...** New York: IEEE, 2018.
- ZANI, A.; FLORES, J. V.; GOMES DA SILVA JR., J. M. Synchronization analysis of piecewise-linear Lur'e systems under sampled-data control. In: IFAC SYMPOSIUM ON ROBUST CONTROL DESIGN, 9., 2018, Florianópolis, Brazil. **Proceedings...** Amsterdam: Elsevier, 2018.
- ZENG, D. et al. Sampled-data synchronization of chaotic Lur'e systems via input-delay-dependent-free-matrix zero equality approach. **Applied Mathematics and Computation**, Amsterdam, v.315, p.34–46, Dec. 2017.
- ZHANG, C.-K.; HE, Y.; WU, M. Improved global asymptotical synchronization of chaotic Lur'e systems with sampled-data control. **IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs**, New York, v.56, n.4, p.320–324, Apr. 2009.

ZHANG, R.; ZENG, D.; ZHONG, S. Novel master–slave synchronization criteria of chaotic Lur’e systems with time delays using sampled-data control. **Journal of the Franklin Institute**, Colchester, v.354, n.12, p.4930–4954, Aug. 2017.

ZHANG, X.; LU, G.; ZHENG, Y. Synchronization for time-delay Lur’e systems with sector and slope restricted nonlinearities under communication constraints. **Circuits, Systems, and Signal Processing**, Switzerland, v.30, n.6, p.1573–1593, May 2011.