



**Análise numérica bi-dimensional para  
harmônicos eletrostáticos de ondas de  
Langmuir**

(Two dimensional numerical analysis of electrostatic  
harmonics of Langmuir waves)

por

Eber Camilo Fonseca Pongutá

Orientador

Dr. Luiz Fernando Ziebell

Coorientador

Dr. Rudi Gaelzer

como requisito  
do Doutorado em Ciências

Instituto de Física

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Porto Alegre

30 de novembro de 2018

# Agradecimentos

Primeiramente a Deus, pela permissão de alcançar este importante objetivo na minha vida. Aos meus pais e a minha família que sempre me apoiaram neste processo constante de formação. Também gostaria de agradecer ao professor *Luiz Fernando Ziebell* e ao professor *Rudi Gaelzer* pela dedicação e ótima orientação. Ao *CNPq* e à *CAPES*, pelo apoio financeiro, e ao *Instituto de Física da UFRGS* pela formação acadêmica. Aos colegas colombianos, do grupo de plasma e da sala *M204*, pela ajuda e grata companhia. A todas as pessoas que sempre me apoiaram nesta caminhada da minha formação integral como pessoa.

# Resumo

Neste trabalho estudamos os harmônicos eletrostáticos de ondas de Langmuir em um plasma não magnetizado e sem colisões usando a teoria de turbulência fraca (TTF). Primeiramente fazemos uma introdução à teoria de turbulência fraca utilizando o formalismo de Klimontovich, mostrando e estudando aspectos fundamentais, como a obtenção da bem conhecida equação de difusão para as partículas, a partir da função perturbada de Klimontovich, e o procedimento para obtenção da equação de balanço espectral. A partir da parte real desta equação, mostramos como encontrar a relação de dispersão dos modos normais eletrostáticos (ondas de Langmuir e ondas íon-acústicas) e dos harmônicos de ondas de Langmuir (ondas não lineares). Por outro lado, da parte imaginária da equação de balanço, obtemos as equações de onda tanto para modos normais como para harmônicos, que levam em conta efeitos de emissão espontânea, quase-linear (emissão induzida) e não-lineares (decaimento e espalhamento). Em seguida apresentamos um tratamento matemático para as equações de ondas e partículas, que são escritas em termos de variáveis adimensionais e normalizadas, e então fazemos uso da aproximação bi-dimensional (2D) e para esse caso escrevemos as equações usando coordenadas cartesianas. Usamos então propriedades de simetria e identidades matemáticas, obtendo equações adequadas para análise numérica. Consideramos como condições iniciais um plasma com elétrons descritos por uma função de distribuição Maxwelliana com um feixe tênue e íons descritos por uma função de distribuição Maxwelliana, e introduzimos expressões para os espectros iniciais de ondas de Langmuir ( $L$ ), ondas íon-acústicas ( $S$ ), e harmônicos de ondas de Langmuir ( $Ln$ ). Para a análise numérica, usamos um código numérico desenvolvido anteriormente por integrantes do grupo de Plasmas do Instituto de Física da UFRGS, escrito em linguagem *Fortran*. Adaptamos e expandimos esse código para incluir harmônicos de ondas de Langmuir, e o utilizamos para abordar o problema da instabilidade feixe-plasma na presença de harmônicos, estudando numericamente a evolução temporal de ondas e partículas. Na sequência, comparamos nossos resultados obtidos usando a abordagem bidimensional (2D) com resultados obtidos em trabalhos anteriores que usavam uma aproximação unidimensional (1D). Por último apresentamos as conclusões e perspectivas para a sequência do trabalho.

# Abstract

In this work we study the electrostatic harmonics of Langmuir waves in unmagnetized and collisionless plasma using the weak turbulence theory (WTT). Initially, we present an introduction to the weak turbulence theory using the Klimontovich formalism, discussing fundamental aspects such as the derivation of the usual diffusion equation for particles, from the perturbed Klimontovich's function, and the procedure to obtain the spectral balance equation. Moreover, from the real part of the balance equation we show how to find the dispersion relation for electrostatic normal modes (Langmuir and ion-acoustic waves) and for Langmuir wave harmonics (non-linear waves). On the other hand, from the imaginary part of the balance equation, we obtain the kinetic wave equation for normal and harmonic modes, which take into account spontaneous effects, quasi-linear effects (induced emission), and non-linear effects (three-wave decay and scattering). Next, we present a mathematical treatment for waves and particles equations, which are written in terms of normalized and non-dimensional variables, and after that we simplify the equations using a two dimensional approximation (2D), and write the equations explicitly using cartesian coordinates. We utilize symmetry properties, and mathematical identities, and obtain equations which are suitable for numerical analysis. We consider as initial conditions a plasma with electrons described by a maxwellian distribution with a tenuous beam, and ions described by a maxwellian distribution, and introduce the initial spectra for the Langmuir waves ( $L$ ), ion-acoustic waves ( $S$ ), and Langmuir harmonics ( $Ln$ ). For the numerical analysis, we have used a numerical code written in the Fortran language, which had been previously developed and utilized by members of the group of plasmas of the Physics Institute at UFRGS; We have upgraded the code in order to take into account the occurrence of harmonics of Langmuir waves, and used it in the analysis of the beam-plasma instability in the presence of these electrostatic harmonics, numerically studying the time evolution of waves and particles. Afterward, we compare our results obtained using the two dimensional approach (2D), with results obtained in previous works which used a one dimensional approach (1D). Finally, we present some conclusions, and discuss the perspectives for further research on the subject.

# Sumário

<b>List of Figures</b>	<b>6</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>7</b>
<b>2 Introdução à teoria da turbulência fraca</b>	<b>11</b>
2.1 Teoria de turbulência fraca	13
2.2 Equações convencionais da teoria de turbulência fraca	17
2.2.1 Emissões espontâneas e induzidas	20
2.2.2 Processo de decaimento espontâneo e induzido	21
2.2.3 Processo de espalhamento espontâneo e induzido	22
2.3 Modos não lineares de alta frequência	24
2.3.1 Relação de dispersão para os modos harmônicos	27
2.4 Equação cinética para harmônicos de ondas de Langmuir	31
2.4.1 Processo de emissão e espalhamento induzido para harmônicos de ondas de Langmuir	31
2.5 Equação cinética para as partículas	34
<b>3 Tratamento matemático das equações da teoria de turbulência fraca generalizada</b>	<b>36</b>
3.1 Equações para harmônicos de ondas $L$ em coordenadas cartesianas 2D	40
3.1.1 Termo de emissão induzida em coordenadas cartesianas	40
3.1.2 Termo de espalhamento em coordenadas cartesianas 2D	42
3.2 Equações para ondas $L$ em coordenadas cartesianas 2D	46
3.2.1 Termo de emissão espontânea e induzida	46
3.2.2 Termo de decaimento envolvendo duas ondas $L$ e uma $S$	47
3.2.3 Termo de espalhamento de duas ondas $L$	48
3.3 Equações para ondas $S$ em coordenadas cartesianas 2D	49
3.3.1 Termo de emissão espontânea e induzida	49
3.3.2 Termo de decaimento envolvendo duas ondas $L$ e uma $S$	49
3.4 Equação para as partículas	51
<b>4 Condições iniciais</b>	<b>53</b>
4.1 Forma inicial da função de distribuição das partículas	53
4.2 Espectro inicial para ondas de Langmuir ( $L$ )	55
4.3 Espectro inicial para ondas íon-acústicas ( $S$ )	56
4.4 Espectro inicial para modos harmônicos eletrostáticos ( $Ln$ )	58
4.4.1 Espectro inicial arbitrário para os harmônicos eletrostáticos	58
4.4.2 Espectro inicial baseado em flutuações espontâneas	59

---

<b>5 Resultados</b>	<b>61</b>
5.1 Análise incluindo o harmônico $n = 2$ . . . . .	63
5.2 Análise incluindo harmônicos $L_n$ de ordem mais alta . . . . .	74
5.2.1 Nível inicial arbitrário . . . . .	75
5.2.2 Nível inicial espontâneo . . . . .	81
<b>6 Conclusões</b>	<b>87</b>
<b>A Equação para harmônicos de ondas de Langmuir (<math>L_n</math>)</b>	<b>90</b>
<b>B Integrais no espaço de velocidades</b>	<b>98</b>
<b>C Equação para as partículas em diferenças finitas</b>	<b>100</b>
<b>D Relação de dispersão aproximada para harmônicos eletrostáticos</b>	<b>105</b>

# Lista de Figuras

2.1	Diagrama de dispersão para harmônicos de ondas de Langmuir . . . . .	30
5.1	Espectro de ondas $L$ para $\tau = \{500, 1000, 2000, 4000\}$ (Emis.) . . . . .	64
5.2	Espectro de ondas $N$ para $\tau = \{500, 1000, 2000, 4000\}$ (Emis. ind.) . . . . .	65
5.3	Espectro de ondas $L$ para $\tau = \{500, 1000, 2000, 4000\}$ (Emis. e esp.) . . . . .	66
5.4	Espectro de ondas $N$ para $\tau = \{500, 1000, 2000, 4000\}$ (Emis. ind. e esp.) . . . . .	67
5.5	Projeção espectro de ondas $L$ e $N$ para $\tau = 4000$ . (Emis. vs. esp.) . . . . .	69
5.6	Espectros de ondas $L$ e $N$ para $100 \geq \tau \geq 6000$ (1D) (Emis., esp. e dec.) . . . . .	70
5.7	Coefficientes $\gamma_{\mathbf{q}}^N$ , $\nu_{\mathbf{q}}^N$ e $\eta_{\mathbf{q}}^N$ entre $100 \geq \tau \geq 6000$ . . . . .	72
5.8	Distribuição para elétrons para $\tau = 0$ e $\tau = 2000$ . . . . .	76
5.9	Intensidade modos HL para $\tau = 500$ e $\tau = 1000$ (Arb.) . . . . .	78
5.10	Intensidade modos HL para $\tau = 1500$ e $\tau = 2000$ (Arb.) . . . . .	79
5.11	Projeção da intensidade dos modos HL para $\tau = 2000$ (Arb.) . . . . .	80
5.12	Intensidade máxima dos modos HL entre $100 \geq \tau \geq 2000$ (Arb.) . . . . .	81
5.13	Intensidade modos HL para $\tau = 500$ e $\tau = 1000$ (Esp.) . . . . .	82
5.14	Intensidade modos HL para $\tau = 1500$ e $\tau = 2000$ (Esp.) . . . . .	84
5.15	Projeção da intensidade dos modos HL para $\tau = 2000$ (Esp.) . . . . .	85
5.16	Intensidade máxima dos modos HL entre $100 \geq \tau \geq 2000$ (Esp.) . . . . .	86

# Capítulo 1

## Introdução

O estudo do plasma é muito importante na física. O plasma é um estado da matéria que representa aproximadamente 99% da matéria “convencional” no universo, embora em nosso planeta a quantidade de plasma seja muito pequena comparada aos outros estados da matéria (sólido, líquido e gasoso). O plasma na Terra está localizado nas camadas superiores da atmosfera e é produzido pela radiação cósmica, em particular pelo Sol. A camada da atmosfera em estado de plasma é chamada *ionosfera*. Ocorre plasma também em descargas elétricas na atmosfera, mas é de curtíssima duração. Existem também plasmas artificiais gerados em laboratório, com diferentes características de pressão, ionização e densidade. Fisicamente um plasma pode ser definido como “um gás ionizado onde predominam as interações coletivas de longo alcance”, com interações tanto elétricas quanto magnéticas. A abordagem deste tipo de sistema é de muita complexidade, já que é um sistema físico com grande quantidade e diversidade de partículas. Devido a esta complexidade, as abordagens no plasma tem sido realizadas usando procedimentos estatísticos, tanto macroscópicos como microscópicos. As abordagens macroscópicas são a *magneto-hidrodinâmica* (MHD) e a *teoria de fluidos* (TF), enquanto a *teoria cinética* pode ser classificada como uma abordagem microscópica. As primeiras são baseadas na teoria clássica de fluidos (hidrodinâmica) e a terceira é uma teoria construída estatisticamente, compatível com a teoria de fluidos e com a MHD.

O interesse em nosso trabalho se centra no estudo da *instabilidade feixe-plasma*, a qual envolve sistemas de partículas descritos por funções de distribuição não maxwellianas (sistemas fora do equilíbrio termodinâmico). Portanto é conveniente trabalhar com uma teoria que nos permita estudar estes sistemas, de modo que a teoria mais apropriada é a teoria cinética. Na teoria cinética, quando são desprezadas as colisões, os plasmas podem ser descritos pelas equações de Maxwell e por equações de Vlasov para funções de distribuição dos diferentes tipos de partículas do plasma. O sistema de equações



Vlasov-Maxwell é complexo e normalmente é tratado com uso de aproximações, como a aproximação linear e a quase-linear. Por meio da aproximação linear podem ser obtidas relações de dispersão que levam à identificação dos diversos modos de oscilação que podem existir e se propagar no plasma. Como exemplo, podemos mencionar as ondas eletrostáticas de alta frequência associadas a oscilações dos elétrons relativamente aos íons, muito mais massivos, conhecidas como *ondas de Langmuir*. Em uma faixa de frequências mais baixas, em que tanto os íons como os elétrons podem exibir movimento oscilatório, ocorrem as ondas eletrostáticas conhecidas como *ondas íon-acústicas*. Ondas eletromagnéticas de diferentes tipos e denominações podem também ocorrer como as bem conhecidas *ondas de Alfvén*, por exemplo. As relações de dispersão obtidas com a aproximação linear informam não somente as frequências reais de oscilação associadas aos diferentes tipos de ondas, mas também suas partes imaginárias, associadas a amortecimento e amplificação de ondas devido a ressonâncias entre ondas e partículas. Entretanto, a aproximação linear não pode fornecer informação acerca da evolução das ondas. Esta informação pode ser obtida na abordagem quase-linear, que nos informa sobre a evolução no tempo da função de distribuição, em uma escala de tempo bem mais lenta que aquela associada às oscilações descritas pela relação de dispersão.

O próximo passo na incorporação de efeitos não lineares é dado pela chamada *teoria de turbulência fraca* (TTF). A formulação da teoria de turbulência fraca foi em grande parte desenvolvida entre o final dos anos 50 e o início dos anos 70 do século 20, com papel destacado de cientistas da antiga União Soviética [1–10]. Na TTF desenvolvida por Kadomtsev [1], Sagdeev e Galeev [2], Akhiezer et. al. [4] e Sitenko [11], foi usada a teoria de perturbações na equação não linear de Vlasov incorporando efeitos não lineares de baixa ordem, descrevendo diferentes interações onda-partícula e interação entre modos lineares onda-onda, e também descrevendo a evolução das partículas por meio de uma equação de difusão no espaço das velocidades. No entanto, Davidson [7] deduziu a TTF de uma forma mais rigorosa na base de múltiplas escalas de tempo (na aproximação de dois tempos), com a diferença de uma equação de difusão para partículas com mais um termo de alta ordem. Mesmo assim, todas as formulações mencionadas chegam num conjunto equivalente de equações acopladas para a evolução das funções de distribuição de velocidades das partículas e para a evolução das intensidades dos diferentes tipos de ondas, cujas frequências são obtidas como solução de equações de dispersão que dependem das funções de distribuição das partículas.

Em período relativamente recente, a TTF foi retomada e abordada a partir de primeiros princípios, de forma sistemática. No ano 2000 Peter Yoon publica um artigo denominado "*Generalized weak turbulence theory*" [12], incluindo apenas oscilações eletrostáticas, considerando efeitos de emissão induzida nos termos quase-linear, decaimento e espalhamento, e levando em conta a existência de harmônicos de ondas de Langmuir, como modos

não lineares do plasma. Posteriormente foram incorporados ao formalismos efeitos de emissão espontânea [13, 14] tanto para o decaimento quanto para o espalhamento, e depois generalizando o formalismo para incluir efeito de interações eletromagnéticas [15, 16]. No grupo de Física de Plasmas do IF-UFRGS o formalismo desenvolvido nos trabalhos [12, 13], tem sido utilizado para estudo da interação entre um feixe de elétrons e um plasma, interação que tem muitas aplicações em plasmas espaciais e de laboratório. Os primeiros estudos numéricos da interação feixe-plasma foram feitos na aproximação unidimensional [17, 18] tanto para o espectro de ondas (Langmuir e íon-acústicas) como para a distribuição de velocidade das partículas. Posteriormente foi feita uma aproximação em duas dimensões [19, 20] incluindo termos relacionados aos efeitos de emissão induzida (quase-linear), flutuações espontâneas, decaimento e espalhamento de ondas. Os resultados obtidos nas primeiras análises considerando duas dimensões mostraram o aparecimento de uma estrutura tipo anel no espectro de ondas de Langmuir, como resultado dos processos de decaimento e espalhamento em 2D, aspecto que não poderia ser predito por uma análise em 1D.

Nesse ponto é interessante notar que na formulação da teoria da turbulência fraca apresentada no artigo de Yoon [12] uma das motivações é explicar a presença de harmônicos de ondas de Langmuir (HL). A importância desta generalização é que a presença destes harmônicos tem sido observada em vários experimentos de laboratório desde os anos 1960's [21–26], e também em simulações [27]. Mais adiante foram encontrados por Klimas em simulações de Vlasov [28, 29] e logo confirmados em simulações de partículas [30], e mais recentemente também em novas simulações tipo *particle-in-cell* e novamente em simulações de Vlasov [31–34]. Outra motivação importante foi a existência de observações espaciais que mostravam emissões em múltiplos da frequência do plasma de elétrons (harmônicos). Estas emissões foram frequentemente vistas na região do *bow shock* da magnetosfera terrestre, e também procedentes das regiões solares, junto com emissões de rádio do tipo III [32, 35–37]. Embora existem outras possíveis interpretações para a ocorrência dessas emissões, estudos recentes de simulação confirmam as excitações do modo harmônico  $L$  durante o processo da instabilidade feixe-plasma [38–40].

Em anos subsequentes, harmônicos de ordens mais altas foram também discutidos na aproximação uni-dimensional [13, 18, 41–44], tanto do ponto de vista das relações de dispersão não-lineares envolvidas quanto do ponto de vista da sua evolução turbulenta. É neste ponto onde o nosso trabalho se enquadra, tendo como objetivo abordar harmônicos de ondas de Langmuir na aproximação bi-dimensional para fazer uma análise da evolução destes, fazendo uso da experiência do grupo do plasmas da UFRGS, permitindo-nos comparar com análises anteriores uni-dimensionais [12, 13, 18, 41–44] e contribuir no desenvolvimento da TTF.

Para isto, estudamos a teoria de turbulência fraca, desde primeiros princípios com a teoria cinética, estudando o sistema Vlasov-Maxwell, a hierarquia BBGKY e as aproximações linear e quase-linear, fazendo somente um breve resumo. No primeiro capítulo fazemos uma introdução em maior detalhe da TTF generalizada, tentando descrever de maneira completa e compacta especialmente na parte onde desenvolve-se as equações não lineares que descrevem a dinâmica dos modos harmônicos ou modos não lineares. No desenvolvimento dos cálculos para HL implementamos algumas melhoras nas aproximações, em relação às encontradas nos artigos [13, 41, 42]. Finalmente descrevemos os termos e as interações envolvidas nas equações para ondas íon-acústicas, ondas de Langmuir, ondas de harmônicos de Langmuir e equação de difusão para a distribuição de partículas. No segundo capítulo apresentamos o tratamento analítico das equações da TTF incluindo a presença de harmônicos. Normalizamos e escrevemos estas equações em termos dos parâmetros do plasma, logo fazemos a aproximação de duas dimensões (simetria azimutal) e usamos propriedades de simetria, obtendo um conjunto compacto de equações. Por último fazemos o tratamento matemático para escrever as equações na forma de equações diferenças finitas, compatíveis para desenvolver numericamente. No capítulo final apresentamos nossos resultados, obtidos numericamente da aproximação bi-dimensional, com a adaptação de um código consistente já usado anteriormente nesta aproximação [19, 20]. Discutimos as características na dinâmica da evolução de ondas e partículas, e sua concordância com a teoria [12, 13, 41] e com soluções numéricas unidimensionais [18, 42, 44]. Finalmente apresentamos as conclusões obtidas e perspectivas do trabalho para desenvolvimentos futuros.

## Capítulo 2

# Introdução à teoria da turbulência fraca

No presente capítulo vamos fazer uma introdução à teoria de turbulência fraca tentando falar de seus aspectos fundamentais e do contexto no qual foi desenvolvida, facilitando o entendimento do trabalho. Para isto falaremos dos inícios da TTF com origem na teoria cinética.

A teoria cinética é uma teoria estatística microscópica que permite estudar o plasma com uma abordagem mais rigorosa do que a teoria de fluidos e a MHD, permitindo estudar uma faixa maior de fenômenos, principalmente instabilidades e plasmas com distribuições de partículas não maxwellianas. Esta teoria se desenvolve ao redor da solução do sistema de equações de Vlasov-Maxwell, chegando a uma cadeia de equações acopladas chamada hierarquia BBGKY (Bogolyubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon) bem conhecida na literatura. A hierarquia dá conta da probabilidade de encontrar uma partícula depender da probabilidade de encontrar duas, a probabilidade de encontrar duas depender da probabilidade de encontrar três e assim sucessivamente, sendo o tamanho da cadeia de equações proporcional à quantidade de partículas.

Isto leva a simplificar o problema considerando plasmas onde as colisões são desprezíveis. Neste caminho é preciso definir quantidades que caracterizam o plasma, como o comprimento de Debye  $\lambda_{De}$  e o parâmetro do plasma  $g$ . O comprimento de Debye é definido como

$$\lambda_{De} = \sqrt{\frac{T_e}{4\pi\hat{n}e^2}}, \quad (2.1)$$

sendo  $e$  o módulo da carga dos elétrons e  $T_e$  a temperatura da distribuição de elétrons, medida em unidades de energia. O comprimento de Debye pode ser entendido como a

distância na qual um elétron não sente a presença de outras partículas devido a blindagem feita pelos íons que estão perto dele. O parâmetro de plasma é definido nesta tese como

$$g = \frac{1}{2^{3/2}(4\pi)^2 \hat{n} \lambda_{De}^3}, \quad (2.2)$$

onde  $\hat{n}$  a densidade ambiente. O parâmetro do plasma  $g$  é proporcional ao inverso do número de elétrons dentro de uma esfera de raio  $\lambda_{De}$ .

O tratamento matemático do sistema Vlasov-Maxwell é feito por teoria de perturbações, sendo a primeira abordagem conhecida como "teoria linear", onde se considera um plasma com uma perturbação no campo elétrico onde as correlações entre partículas são muito pequenas. Porém, o tempo das colisões é muito maior do que o tempo de oscilação no plasma. Nesta abordagem se chega a integrais complexas que são calculadas pelo método de Landau [45], encontrando os modos normais de oscilação do plasma. Nos limites de ondas eletrostáticas de baixa e alta frequência encontramos ondas de Langmuir e ondas íon-acústicas, além de encontrar o amortecimento de Landau.

A abordagem seguinte é a teoria "quase-linear", que permite estudar o plasma depois da perturbação inicial, encontrando a equação quase-linear de difusão no espaço das velocidades e dando conta do efeito que as ondas têm sobre a distribuição de partículas. Esta teoria cumpre propriedades importantes como a conservação do número de partículas, conservação do momento e conservação de energia. Alguns dos exemplos abordados com esta teoria são o amortecimento de Landau e a instabilidade feixe plasma. O exemplo mais simples é uma distribuição maxwelliana isotrópica com um feixe quente na cauda para elétrons, permitindo estudar a dinâmica de troca de energia entre ondas e partículas. Neste exemplo se observa o crescimento de ondas de alta frequência na faixa onde a derivada da função distribuição é positiva, até saturar, enquanto na função distribuição vai se formando o bem conhecido *plateau* [45].

A abordagem que se segue em complexidade é a teoria de turbulência fraca, e nela a denominação ao termo turbulência no plasma se refere à situação onde um grande número de oscilações no plasma são excitadas por uma instabilidade. A classificação está relacionada com a razão entre a energia das flutuações e a energia cinética das partículas por unidade de volume. No caso da turbulência fraca a energia das flutuações é muito menor do que a energia cinética das partículas por unidade de volume, basicamente a mesma consideração das teorias linear e quase-linear, mas aplicada a um plasma com uma perturbação eletrostática levando em conta termos não lineares.

## 2.1 Teoria de turbulência fraca

Para nosso interesse do estudo de harmônicos de ondas de Langmuir vamos nos basear no formalismo apresentado nos artigos [12, 13, 18, 41]. Devido à quantidade e complexidade dos cálculos somente vamos apresentar as equações mais relevantes, citando algumas fontes onde os cálculos também são discutidos.

Estamos interessados num plasma não magnetizado onde predominam as interações eletrostáticas. Para isso é apropriado o formalismo de Klimontovich [46, 47], usando a notação  $x \equiv (\mathbf{r}, \mathbf{v})$  (onde  $x$  corresponde a um ponto no espaço de fase com posição  $\mathbf{r}$  e velocidade  $\mathbf{v}$ ), definimos a função de Klimontovich para partículas da espécie  $a$  num instante de tempo  $t$ ,  $N_a(x, t) = \sum_{i=1} \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_i^a(t)] \delta[\mathbf{v} - \mathbf{v}_i^a(t)]$  (onde  $a = i$  para íons e  $a = e$  para elétrons). Esta função dá conta das propriedades de um sistema de partículas que obedecem a equação de movimento

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla + \frac{e_a}{m_a} \mathbf{E}^M \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right] N_a = 0. \quad (2.3)$$

As quantidades  $e_a$ ,  $m_a$  e  $\mathbf{E}^M(\mathbf{r}, t)$  representam a carga elétrica, a massa das partículas de tipo  $a$  e o vetor de campo elétrico microscópico. Este último satisfaz a lei de Gauss,

$$\nabla \cdot \mathbf{E}^M = 4\pi \sum_b e_b \int d\mathbf{v} N_b. \quad (2.4)$$

As equações (2.3) e (2.4), correspondem ao sistema Vlasov-Maxwell no caso eletrostático. Agora continuamos com o tratamento padrão das teorias anteriores fazendo a média de ensemble da função de Klimontovich  $f_a(x, t) = \langle N_a(x, t) \rangle$ .<sup>1</sup> A flutuação da função de Klimontovich pode ser escrita como  $\delta N_a(x, t) = N_a(x, t) - \langle N_a(x, t) \rangle$ . Agora podemos calcular as médias nas equações (2.3) e (2.4), e fazendo uso das transformadas de Fourier-Laplace<sup>2</sup> [1, 2, 4], encontramos equações para a função de distribuição, para as flutuações da função de Klimontovich e para o campo elétrico. Desta forma, é obtida uma hierarquia

<sup>1</sup>Onde  $\langle \dots \rangle$  denota a média estatística de ensemble.

<sup>2</sup>Procedimento feito na teoria quase-linear.

de equações na representação espectral

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_a}{\partial t} &= \frac{ie_a}{m_a} \int dq \hat{\mathbf{k}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \langle \delta E_q \delta N_{-q}^a \rangle, \\
 \left( \frac{\partial}{\partial t} - i(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \right) (\delta N_q^a - \delta N_q^{a0}) &= \frac{ie_a}{m_a} \delta E_q \hat{\mathbf{k}} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}} \\
 &\quad + \frac{ie_a}{m_a} \int dq' \hat{\mathbf{k}}' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (\delta E_{q'} \delta N_{q-q'}^a - \langle \delta E_{q'} \delta N_{q-q'}^a \rangle), \\
 &\quad \dots, \\
 \delta E_q &= - \sum_a \frac{4\pi i e_a}{k} \int d\mathbf{v} \delta N_q^a, \tag{2.5}
 \end{aligned}$$

onde  $q \equiv (\mathbf{k}, \omega)$ , e  $dq = d\mathbf{k} d\omega$ . Nesta notação  $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$  é um vetor unitário. O termo  $\delta N_q^0(\mathbf{v}, t)$  é responsável pela emissão espontânea. Se ignoramos este termo obtemos a hierarquia de Vlasov ou hierarquia BBGKY [4, 7] dando conta da correlação entre partículas, onde a solução de  $\delta N_q^a$  depende do conhecimento de  $\langle \delta N_q^\alpha \delta N_{q'}^\beta \rangle$  e esta depende de  $\langle \delta N_q^\alpha \delta N_{q'}^\beta \delta N_{q''}^\gamma \rangle$ , e assim sucessivamente.

Os cálculos destas médias na função de Klimontovich estão bem detalhados na referência [13], na qual vamos nos basear fortemente. A quantidade  $\delta N_q^{a0}$  representa a perturbação da função de Klimontovich no espaço de fase devida somente ao efeito de partícula única. Esta quantidade ainda não foi calculada, somente sua média de ensemble

$$\begin{aligned}
 &\langle \delta N_a^0(\mathbf{v}, t) \delta N_b^0(\mathbf{v}', t) \rangle_q \\
 &= (2\pi)^{-3} \delta_{ab} \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a(\mathbf{v}, t), \\
 &\langle \delta N_a^0(\mathbf{v}, t) \delta N_b^0(\mathbf{v}', t) \delta N_c^0(\mathbf{v}'', t) \rangle_{q,q'} \\
 &= (2\pi)^{-6} \delta_{ab} \delta_{bc} \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \delta(\mathbf{v}' - \mathbf{v}'') \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \delta(\omega' - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v}') f_a(\mathbf{v}, t),
 \end{aligned}$$

e assim por diante.

Redefinindo  $\omega$  como  $\omega \rightarrow \omega + i\partial/\partial t$ , e introduzindo a quantidade

$$\mathbf{g}_q^a = - \frac{e_a}{m_a} \frac{1}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + i0} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}},$$

a equação para a flutuação pode ser escrita em forma compacta como

$$\delta N_q^a = \delta N_q^{a0} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{g}_q^a f_a \delta E_q + \int dq' \hat{\mathbf{k}}' \cdot \mathbf{g}_q^a (\delta E_{q'} \delta N_{q-q'}^a - \langle \delta E_{q'} \delta N_{q-q'}^a \rangle). \tag{2.6}$$

Por simplicidade vamos tirar  $\delta$  da frente das quantidades perturbadas. Então a solução iterativa é

$$\begin{aligned} N_q^a = & N_q^{a0} + \eta_a(q) f_a E_q + \sum_{q_1+q_2=q} \eta_a^{(2)}(q_1|q_2) f_a [E_{q_1} E_{q_2} - \langle E_{q_1} E_{q_2} \rangle] \\ & + \sum_{q_1+q_2+q_3=q} \eta_a^{(3)}(q_1|q_2|q_3) f_a [E_{q_1} E_{q_2} E_{q_3} - E_{q_1} \langle E_{q_2} E_{q_3} \rangle - \langle E_{q_1} E_{q_2} E_{q_3} \rangle], \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde

$$\begin{aligned} \eta_a(q) &= \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{g}_q^a, \\ \eta_a^{(2)}(q_1|q_2) &= \frac{1}{2} [(\hat{\mathbf{k}}_1 \cdot \mathbf{g}_{q_1+q_2}^a)(\hat{\mathbf{k}}_2 \cdot \mathbf{g}_{q_2}^a) + (\hat{\mathbf{k}}_2 \cdot \mathbf{g}_{q_1+q_2}^a)(\hat{\mathbf{k}}_1 \cdot \mathbf{g}_{q_1}^a)], \\ \eta_a^{(3)}(q_1|q_2|q_3) &= \frac{1}{2} (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{g}_{q_1+q_2+q_3}^a) [(\hat{\mathbf{k}}_3 \cdot \mathbf{g}_{q_2+q_3}^a)(\hat{\mathbf{k}}_3 \cdot \mathbf{g}_{q_3}^a) + (\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{g}_{q_2+q_3}^a)(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{g}_{q_2}^a)]. \end{aligned}$$

Agora combinamos (2.7) com a equação para a perturbação do campo elétrico que aparece na equação (2.5), e expressamos os resultados em termos de funções resposta (susceptibilidade elétrica) [12]

$$\begin{aligned} \epsilon(q) &= 1 + \chi(q), \\ \chi(q) &= - \sum_a \frac{4\pi e_a}{k^2} \int d\mathbf{v} \eta_a(q) f_a, \\ \chi^{(2)}(q_1|q_2) &= - \sum_a \frac{4\pi i e_a}{k_1 k_2 |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|} \int d\mathbf{v} \eta_a^{(2)}(q_1|q_2) f_a, \\ \bar{\chi}^{(3)}(q_1|q_2|q_3) &= \sum_a \frac{4\pi e_a}{k_1 k_2 k_3 |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3|} \int d\mathbf{v} \eta_a^{(3)}(q_1|q_2|q_3) f_a. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Em seguida multiplicamos o resultado por  $E_{-q}$  e tomamos a média de ensemble. O resultado é

$$\begin{aligned} \epsilon(q) \langle E^2 \rangle_q - i \sum_{q'} \chi^{(2)}(q'|q - q') \langle E_{q'} E_{q-q'} E_{-q} \rangle - 2 \sum_{q'} \bar{\chi}^{(3)}(q'| - q'|q) \langle E^2 \rangle_{q'} \langle E \rangle_q \\ = \sum_a \frac{4\pi e_a}{k} \int d\mathbf{v} \langle E_{-q} N_q^{a0} \rangle. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Na anterior equação o termo da direita contém a fonte das flutuações espontâneas, a qual pode ser calculada multiplicando a expressão para o campo elétrico perturbado por



$N_q^{a0}(\mathbf{v})$  e fazendo a média de ensemble

$$\begin{aligned} \langle E_{-q} N_q^{a0} \rangle = & \frac{4\pi e_a}{(2\pi)^3 k \epsilon^*(q)} \left( 1 + \sum_{q'} \frac{2\bar{\chi}^{(3)*}(q'| - q'|q)}{\epsilon^*(q)} \langle E^2 \rangle_{q'} \right) \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a \\ & - \frac{i}{\epsilon^*(q)} \sum_{q'} \chi^{(2)*}(q'|q - q') \langle E_{-q'} E_{-q+q'} N_q^{a0} \rangle. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Multiplicando (2.9) e (2.10) pelas quantidades apropriadas podemos obter os cumulantes de terceira ordem,

$$\begin{aligned} \langle E_{q'} E_{q-q'} E_{-q} \rangle = & 2i \left( \frac{\chi^{(2)}(q| - q + q')}{\epsilon(q')} \langle E^2 \rangle_{q-q'} \langle E^2 \rangle_q + \frac{\chi^{(2)}(q| - q')}{\epsilon(q - q')} \langle E^2 \rangle_{q'} \langle E^2 \rangle_q \right. \\ & \left. - \frac{\chi^{(2)*}(q'|q - q')}{\epsilon^*(q)} \langle E^2 \rangle_{q'} \langle E^2 \rangle_{q-q'} \right) \quad (2.11) \\ & + \sum_a 4\pi e_a \int d\mathbf{v} \left( \frac{\langle E_{q-q'} E_{-q} N_{q'}^{a0} \rangle}{k' \epsilon(q')} + \frac{\langle E_{q'} E_{-q} N_{q-q'}^{a0} \rangle}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'| \epsilon(q - q')} + \frac{\langle E_{q'} E_{q-q'} N_{-q}^{a0} \rangle}{k \epsilon^*(q)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle E_{q_1} E_{-q_1+q_2} N_{-q_2}^{a0} \rangle = & \frac{i}{\epsilon(q_1)} \sum_{q'} \chi^{(2)}(q'|q_1 - q') \quad (2.12) \\ & \times [\langle E_{q'} E_{q_1-q'} E_{-q_1+q_2} N_{-q_2}^{a0} \rangle - \langle E_{q'} E_{q_1-q'} \rangle \langle E_{-q_1+q_2} N_{-q_2}^{a0} \rangle] \\ & + \frac{i}{\epsilon(-q_1 + q_2)} \sum_{q'} \chi^{(2)}(q'| - q_1 + q_2 - q') \\ & \times [\langle E_{q'} E_{-q_1+q_2-q'} E_{q_1} N_{-q_2}^{a0} \rangle] - \langle E_{q'} E_{-q_1+q_2-q'} \rangle \langle E_{q_1} N_{-q_2}^{a0} \rangle \end{aligned}$$

Aparentemente, a equação (2.12) mostra uma hierarquia que se estende até o infinito, mas neste momento truncamos a cadeia na correlação de quarta ordem e expressamos os cumulantes de quarta ordem em termos dos cumulantes de segunda ordem

$$\begin{aligned} \langle E_{q_1} E_{q_2} E_{q_3} N_{q_4}^0 \rangle = & \delta(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) [\langle E^2 \rangle_{q_1} \langle E_{q_2} N_{q_3} \rangle \delta(q_1 + q_2) \\ & + \langle E^2 \rangle_{q_1} \langle E_{q_2} N_{q_4} \rangle \delta(q_1 + q_3) + \langle \phi_{q_1} N_{q_4} \rangle \langle E^2 \rangle_{q_2} \delta(q_1 + q_3)]. \end{aligned}$$

Como resultado, chegamos ao resultado desejado, encontrando uma equação não linear de balanço espectral, que inclui efeitos de emissão espontânea (ver equação (9) de [13])

$$\begin{aligned} & \left[ \epsilon(q) + 2 \int dq' T(q, q') \right] \langle E^2 \rangle_q - 2 \int dq' \frac{|\chi^{(2)}(q'|q - q')|^2}{\epsilon^*(q)} \langle E^2 \rangle_{q'} \langle E^2 \rangle_{q-q'} \\ = & 2 \sum_a \frac{e_a^2}{\pi} \int d\mathbf{v} \left[ \frac{\delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})}{k^2 \epsilon^*(q)} \quad (2.13) \right. \\ & \left. - 2 \int dq' \left( \frac{\delta(\omega' - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v})}{k'^2 |\epsilon(q')|^2} M(q, q') + \frac{\delta[\omega - \omega' - (\mathbf{k} - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v})]}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2 |\epsilon(q - q')|^2} M(q, q - q') \right) \right] f_a(\mathbf{v}), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 T(q, q') &= \{\chi^{(2)}(q'|q - q')\}^2 \left( \frac{\langle E^2 \rangle_{q-q'}}{\epsilon(q')} + \frac{\langle E^2 \rangle_{q'}}{\epsilon(q - q')} \right) - \bar{\chi}^{(3)}(q'| - q'|q) \langle E^2 \rangle_{q'}, \\
 M(q, q') &= \frac{\chi^{(2)}(q'|q - q')}{\epsilon(q - q')} \langle E^2 \rangle_q - \frac{|\chi^{(2)}(q'|q - q')|^2}{\epsilon^*(q)} \langle E^2 \rangle_{q-q'}. \quad (2.14)
 \end{aligned}$$

Se fazemos iguais a zero os termos da direita da equação (2.13), obtemos a equação de balanço correspondente ao caso sem colisões (ver equação (3) de [12]). A parte real desta equação leva à relação de dispersão de onda (modos próprios), enquanto a parte imaginária leva à equação cinética das ondas. A parte real contém o termo de acoplamento de onda e também o termo de resposta linear. Fazendo a análise incluindo os termos não lineares chegamos numa solução não-linear para harmônicos eletrostáticos.

## 2.2 Equações convencionais da teoria de turbulência fraca

A equação não linear de balanço espectral (2.13), fornece uma base sobre a qual pode ser formulada a teoria de turbulência fraca, incluindo os modos lineares (ondas de Langmuir e ondas íon-acústicas) assim como os modos não lineares. Primeiro consideremos o caso linear, que deriva nas equações habituais da teoria de turbulência fraca. Se mantemos os termos principais, chegamos à equação de balanço espectral para modos lineares,

$$\text{Re } \epsilon(q) \left( \langle E^2 \rangle_q - \sum_a \frac{2e_a^2}{\pi k^2 |\epsilon(q)|^2} \int d\mathbf{v} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a \right) = 0. \quad (2.15)$$

Se estamos interessados na região do espaço onde  $q$  satisfaz  $\text{Re } \epsilon(q) \neq 0$ , então obtemos a já bem conhecida relação para flutuações espontâneas encontrada na literatura [11]

$$\langle E^2 \rangle_q^0 = \sum_a \frac{2e_a^2}{\pi k^2 |\epsilon(q)|^2} \int d\mathbf{v} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a. \quad (2.16)$$

Por outro lado se estamos interessados na região de  $q$  para  $\text{Re } \epsilon(q) = 0$ , isto é, os modos próprios, podemos obter as relações de dispersão fazendo as integrais de contorno de Landau nos limites de alta frequência (ondas Langmuir  $L$ ) e baixa frequência (ondas íon acústicas  $S$ )

$$\omega_{\mathbf{k}}^L = \omega_{pe} \left( 1 + \frac{3}{2} k^2 \lambda_{De}^2 \right), \quad \omega_{\mathbf{k}}^S = k^2 c_s^2 \left( \frac{1 + 3T_i/T_e}{1 + k^2 \lambda_{De}^2} \right), \quad (2.17)$$

onde  $\omega_{pe} = (4\pi \hat{n} e^2 / m_e)^{1/2}$  é a frequência de plasma dos elétrons e  $c_s$  é chamada velocidade íon-acústica, definida como  $c_s = \sqrt{T_e / m_i}$ , sendo  $T_e$  a temperatura dos elétrons, em unidades de energia, e  $m_i$  e  $m_e$  as massas dos íons e dos elétrons, respectivamente.

Neste caso as raízes da equação  $\text{Re } \epsilon(q) = 0$  podem ser representadas por  $\omega = \omega_{\mathbf{k}}^\alpha$ , com  $\alpha = L, S$ . Portanto,  $\psi_q \equiv \langle E^2 \rangle_q - \langle E^2 \rangle_q^0$  é diferente de zero. Esta é uma autofunção, que de maneira geral pode ser representada como

$$\psi_q = \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{\alpha=L,S} I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha} \delta(\omega - \sigma\omega_{\mathbf{k}}^\alpha),$$

onde o parâmetro  $\sigma$  dá conta do sentido de propagação de  $\mathbf{k}$ . Se ignoramos as flutuações térmicas devidas ao efeito de partícula única dadas pelo termo  $\langle E^2 \rangle_q^0$ , (tendo em conta que  $\langle E^2 \rangle_q^0$  fornece um nível finito de campo elétrico fora da faixa da solução para modos normais ( $\mathbf{k}, \omega \neq \pm\omega_{\mathbf{k}}^\alpha$ )), então  $\psi_q \approx \langle E^2 \rangle_q$ . A intensidade de onda pode ser aproximada por

$$\langle E^2 \rangle_q = \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{\alpha=L,S} I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha} \delta(\omega - \sigma\omega_{\mathbf{k}}^\alpha). \quad (2.18)$$

Agora, para encontrar a equação das ondas, lembramos que  $\omega \rightarrow \tilde{\omega} + i\frac{\partial}{\partial t}$ . Expandindo a quantidade  $\epsilon(q)$  em série de Taylor, obtemos

$$\epsilon(q) \rightarrow \epsilon\left(\mathbf{k}, \omega + i\frac{\partial}{\partial t}\right) \rightarrow \left(\epsilon(q) + \frac{i}{2} \frac{\partial \epsilon(q)}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial t}\right) \quad (2.19)$$

Introduzindo (2.18) e (2.19) na parte imaginária da equação de balanço (2.13), usando propriedades das susceptibilidades, e fazendo muitas manipulações, pode-se obter a equação para os modos normais

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}}{\partial t} &= \gamma_{\mathbf{k}}^\alpha I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha} + S_{\mathbf{k}}^\alpha - \sum_{\sigma'=\pm 1} \sum_{\beta=L,S} \int d\mathbf{k}' A_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{\alpha\beta} I_{\mathbf{k}'}^{\sigma'\beta} I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha} \\ &- \sum_{\sigma'=\pm 1} \sum_{\beta=L,S} \int d\mathbf{k}' B_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{\alpha\beta} \left( \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}}{\epsilon(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^\beta)} - \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\sigma'\beta}}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^\alpha)} \right) \\ &- \sum_{\sigma',\sigma''} \sum_{\beta\gamma=L,S} \int d\mathbf{k}' M_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{\alpha\beta\gamma} \left( \frac{I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma''\gamma} I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}}{\epsilon'(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^\beta)} + \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\sigma'} I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}}{\epsilon'(\mathbf{k}-\mathbf{k}', \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^\gamma)} - \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\sigma'\beta} I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma''\gamma}}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^\alpha)} \right) \\ &\times \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^\alpha - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^\beta - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^\gamma) \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde

$$\begin{aligned} \epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^\sigma) &= \frac{\partial \epsilon(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^\sigma)}{\partial(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^\sigma)}, \\ \gamma_{\mathbf{k}}^\alpha &= -2 \frac{\text{Im } \epsilon(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^\alpha)}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^\alpha)} \\ S_{\mathbf{k}}^\alpha &= \sum_a \frac{4e_a^2}{k^2 [\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^\alpha)]^2} \int d\mathbf{v} \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^\alpha - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a(\mathbf{v}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{\alpha\beta} &= \frac{4}{\epsilon'(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})} \text{Im} \left( \mathcal{P} \frac{2\{\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta})\}^2}{\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta})} \right. \\
 &\quad \left. - \bar{\chi}^{(3)}(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} | -\mathbf{k}', -\sigma\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} | \mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) \right) \\
 B_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{\alpha\beta} &= \sum_a \frac{16e_a^2}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})} \frac{|\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta})|^2}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2 |\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta})|^2} \\
 &\quad \times \int d\mathbf{v} \delta[\sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}] f_a(\mathbf{v}), \\
 M_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{\alpha\beta\gamma} &= \frac{4\pi}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})} \int d\mathbf{k}' |\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\gamma})|^2, \tag{2.21}
 \end{aligned}$$

onde  $\mathcal{P}$  representa a parte principal da função.

A equação (2.20), usada em muitas abordagens, é a equação formal de onda da teoria convencional de turbulência fraca que envolve somente modos eletrostáticos lineares ( $\alpha = L, S$ ). No entanto sem um tratamento adequado das funções resposta elétrica  $\chi^{(n)}$ , a equação (2.21) não nos dá muita informação.

Na literatura, estes termos já foram calculados e sabemos que o primeiro e segundo termo do lado direito de (2.20) são designados como termos de emissão induzida e espontânea, enquanto o terceiro e quarto são chamados os termos de espalhamento induzido e espontâneo, respectivamente. O termo final descreve os processos de decaimento, sendo que os dois primeiros termos dentro do parênteses grande são responsáveis pelo processo de decaimento induzido, enquanto que o termo final corresponde ao decaimento espontâneo. A razão para estas terminologias se torna eminentemente auto-evidente se partimos do princípio de balanço detalhado. Não obstante, no contexto do método estatístico presente, não há uma razão *a priori* por que devemos chamar esses termos como tal.

Acontece que os processos de emissão induzida e espontânea são ditados pela interação linear onda-partícula associada à condição  $\sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = 0$ , os processos de espalhamento espontâneo e induzido são regidos pela interação não linear onda-partícula associados à condição  $\sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = 0$ , e o processo de decaimento espontâneo e induzido é ditado pela interação não linear de ondas  $\sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\gamma} = 0$ . Examinando os diferentes termos em (2.20) e (2.21), pode-se perceber que essas condições de ressonância não são evidentes em todos os casos. A razão é que algumas das condições de ressonância estão escondidas dentro das definições das diferentes susceptibilidades e apenas revelam-se depois que estas funções são calculadas explicitamente.

### 2.2.1 Emissões espontâneas e induzidas

Por conveniência vamos introduzir a função de distribuição no espaço de velocidade com o fator densidade de ambiente  $\hat{n}$  tirado explicitamente da definição  $f_a(\mathbf{v}) = \hat{n}F_a(\mathbf{v})$  para um tipo de partícula  $a$ . Agora precisamos encontrar uma expressão de primeira ordem para  $\chi(q)$ , portanto calculamos a integral primeiramente no limite de ondas de alta frequência  $\omega_{\mathbf{k}}^L$ ,

$$\omega_{\mathbf{k}}^L/kv_e \gg 1 \text{ e } \omega_{\mathbf{k}}^L/kv_i \ll 1,$$

obtendo

$$\chi_a(\mathbf{k}, \omega) \approx -\frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \left( 1 + \frac{3k^2 T_a}{m_a \omega^2} \right) - i\pi \frac{\omega_{pa}^2}{k^2} \int d\mathbf{v} \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{v}} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}), \quad (2.22)$$

sendo esta aproximação válida tanto para íons como para elétrons. Nessa expressão  $v_i$  e  $v_e$  são as velocidades térmicas dos íons e dos elétrons, respectivamente,  $\omega_{pa}$  é a frequência de plasma de partículas do tipo  $a$ , e  $T_a$  é a temperatura da população de partículas do tipo  $a$ , em unidades de energia. A velocidade térmica e a frequência de plasma das partículas do tipo  $a$  são definidas como  $v_a = (2T_a/m_a)^{1/2}$  e  $\omega_{pa} = (4\pi\hat{n}q_a^2/m_a)^{1/2}$ , onde  $q_a$  é a carga dessas partículas.

A outra aproximação é para ondas de baixa frequência  $\omega_{\mathbf{k}}^S$  nos limites

$$\omega_{\mathbf{k}}^S/kv_e \ll 1 \text{ e } \omega_{\mathbf{k}}^S/kv_i \geq 1,$$

e nesse caso  $\chi(q)$  pode ser aproximado como

$$\chi_e \approx \frac{2\omega_{pe}^2}{k^2 v_e^2} - i\pi \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int d\mathbf{v} \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{v}} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}). \quad (2.23)$$

Das aproximações (2.22) e (2.23) obtemos o primeiro termo de (2.20), conhecido como termo de “emissão induzida”, “quase-linear” ou “amortecimento de Landau” para modos  $L$  e  $S$ ,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\partial t} \right|_{ind.emiss} &= \pi \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int d\mathbf{v} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{v}} I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}, \\ \left. \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}{\partial t} \right|_{ind.emiss} &= \pi \mu_{\mathbf{k}} \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int d\mathbf{v} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^S - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left( F_e + \frac{m_e}{m_i} F_i \right) I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

onde foram usadas as propriedades aproximadas da função dielétrica,

$$\frac{1}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L)} = \frac{1}{2} \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L, \quad \frac{1}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma \omega_{\mathbf{k}}^S)} = \frac{1}{2} \mu_{\mathbf{k}} \sigma \omega_{\mathbf{k}}^S,$$

e onde

$$\mu_{\mathbf{k}} = k^3 \lambda_{De}^3 \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \left( 1 + 3 \frac{T_i}{T_e} \right).$$

Os termos de emissão espontânea podem ser calculados a partir do segundo termo da equação (2.20),

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\partial t} \right|_{spont.emiss} &= \frac{\hat{n} e^2 \omega_{pe}^2}{k^2} \int d\mathbf{v} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) F_e, \\ \left. \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}{\partial t} \right|_{spont.emiss} &= \frac{\mu_{\mathbf{k}}^2 \hat{n} e^2 \omega_{pe}^2}{k^2} \int d\mathbf{v} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^S - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) (F_e + F_i). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Os primeiros usos dessa formulação para a emissão espontânea foram tanto em trabalhos usando a aproximação uni-dimensional [44] quanto em trabalhos usando a aproximação bi-dimensional [19, 20], em ambos os casos permitindo a determinação do nível inicial para as ondas de Langmuir e íon-acústicas e a manutenção de um espectro “de fundo” (*background*) ao longo da evolução temporal do sistema, o qual permanece em equilíbrio no caso de distribuições Maxwellianas de velocidades para as partículas.

### 2.2.2 Processo de decaimento espontâneo e induzido

O processo de decaimento é dado pelo último termo de (2.20), o qual contém a condição  $\delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^\alpha - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^\beta - \sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^\gamma)$ , que expressa a conservação de energia. Essa condição somente pode ser satisfeita na interação de duas ondas  $L$  e uma  $S$ . A condição não pode ser satisfeita no caso de duas ondas  $S$  e uma onda  $L$  porque a diferença de energia entre uma onda  $L$  e uma onda  $S$  é muito maior do que a energia da outra onda  $S$ . Portanto,  $|\chi^{(2)}|$  aproxima-se como [12],

$$\begin{aligned} |\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^S | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \omega_{\mathbf{k}'}^L)|^2 &\approx \frac{e^2}{4T_e^2} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2}, \\ |\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma \omega_{\mathbf{k}}^S - \omega_{\mathbf{k}'}^L)|^2 &\approx \frac{e^2}{4T_e^2} \frac{[\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}')]^2}{k^2 k'^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Dessa forma, os termos correspondentes ao decaimento podem ser escritos como

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\partial t} \right|_{decay} &= 2 \sum_{\sigma', \sigma''} \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \int d\mathbf{k}' V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^L \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L - \sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^S) \\
 &\quad \times (\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma'' S} - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma'' S} I_{\mathbf{k}}^{\sigma L} - \sigma'' \mu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}) \\
 \left. \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}{\partial t} \right|_{decay} &= \sum_{\sigma', \sigma''} \sigma \mu_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}^L \int d\mathbf{k}' V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^S \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L - \sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L) \\
 &\quad \times (\sigma \mu_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma'' L} - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma'' L} I_{\mathbf{k}}^{\sigma S} - \sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}), \quad (2.27)
 \end{aligned}$$

onde os coeficientes  $V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^L$  e  $V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^S$  estão dados pela aproximação de  $\chi^{(2)}$

$$\begin{aligned}
 V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^L &= \frac{\pi}{4} \frac{e^2}{T_e^2} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2}, \\
 V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^S &= \frac{\pi}{4} \frac{e^2}{T_e^2} \frac{[\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}')]^2}{k^2 k'^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2}. \quad (2.28)
 \end{aligned}$$

Estes resultados são equivalentes aos encontrados na análise de *plasmons* e decaimento de três ondas em livros como Davidson [8], Sitenko [11], Akhiezer et. al. [4], entre outros.

### 2.2.3 Processo de espalhamento espontâneo e induzido

O termo de espalhamento dado pelo terceiro termo da equação (2.20) corresponde a uma interação não linear, onde aparece o espalhamento de duas ondas de Langmuir  $L$ ,  $A_{LL}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ . Usando as relações de dispersão vemos que  $|\omega_{\mathbf{k}}^L - \omega_{\mathbf{k}'}^L| \neq |\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^S|$ , porém a situação de interesse é  $|\omega_{\mathbf{k}}^L - \omega_{\mathbf{k}'}^L| \sim |(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}|$ . Para elétrons, estamos interessados em frequências  $\omega_{\mathbf{k}}^L \gg kv_e$ ,  $\omega_{\mathbf{k}'}^L \gg k'v_e$  e  $|\omega_{\mathbf{k}}^L - \omega_{\mathbf{k}'}^L| \ll |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|v_e$ . Esta interação é importante depois da saturação da instabilidade, onde são relevantes as velocidades acessíveis no espalhamento  $v_{res} \sim \pm(3\omega_{pe}/2)(k^2 - k'^2)\lambda_{De}^2/|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|$ , menores do que as velocidades da interação linear  $v_{res} \sim \pm\omega_{pe}/k$ . Para íons, temos que  $\omega_{\mathbf{k}}^L \gg kv_i$ ,  $\omega_{\mathbf{k}'}^L \gg k'v_i$  e  $|\omega_{\mathbf{k}}^L - \omega_{\mathbf{k}'}^L| \gg |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|v_i$ . A resposta dos íons pode chegar a ser mais importante do que a resposta dos elétrons [12, 48], portanto mantemos somente a contribuição devida aos íons

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\partial t} \right|_{ind.scatt} &= \frac{\pi}{\omega_{pe}^2} \frac{e^2}{m_e m_i} (\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L) \sum_{\sigma'} \int d\mathbf{k}' \int d\mathbf{v} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2} (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{v}} I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} I_{\mathbf{k}}^{\sigma L} \\
 &\quad \times \delta[\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}]. \quad (2.29)
 \end{aligned}$$

As interações entre ondas de Langmuir e íon-acústicas são representadas pelos termos  $A_{LS}$  e  $A_{SL}$ . Esses são termos de correção de mais alta ordem, os quais levam a uma

evolução muito lenta, e são discutidos em maior detalhe em [12]. O termo de espalhamento induzido de duas ondas íon-acústicas  $S$  também é discutido em [12], mas para nosso trabalho não é relevante.

O termo de espalhamento espontâneo é dado pelo quarto termo de (2.20),

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}}{\partial t} \right|_{spon.scatt} &= - \sum_a \frac{16\hat{n}e_a^2}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^\alpha)} \sum_{\sigma'} \sum_{\beta=L,S} \int d\mathbf{k}' \frac{|\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^\beta | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma\omega_{\mathbf{k}}^\alpha - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^\beta)|^2}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2 |\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma\omega_{\mathbf{k}}^\alpha - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^\beta)|^2} \\ &\times \left( \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}}{\epsilon(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^\beta)} - \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\sigma'\beta}}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^\alpha)} \right) \int d\mathbf{v} \delta[\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}] F_a(\mathbf{v}). \end{aligned} \quad (2.30)$$

O caso mais relevante<sup>3</sup> é o caso de duas ondas de Langmuir ( $\alpha = L, \beta = L$ ) interagindo entre si. Usando a propriedade aproximada para  $\chi^{(2)}$  (ver referência [13]) dada por

$$\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L) \approx \frac{e^2}{4T_e^2} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2},$$

assim obtemos

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\partial t} \right|_{spon.scatt} &= - (\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L) \frac{\hat{n}e^4}{T_e} \lambda_{De}^4 \sum_{\sigma'} \int d\mathbf{k}' \int d\mathbf{v} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2} \left( \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}}^{\sigma L} - \sigma\omega_{\mathbf{k}}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} \right) \\ &\times \delta[\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}] F_a(\mathbf{v}). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Coletando os termos de emissão espontânea e induzida (2.24) e os de decaimento (2.27) e de espalhamento (2.31), reescrevemos a equação para ondas de Langmuir

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\partial t} &= \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int d\mathbf{v} \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \left[ \hat{n}e^2 F_e + \pi\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{v}} I_{\mathbf{k}}^{\sigma L} \right] \\ &+ 2 \sum_{\sigma', \sigma''} \sigma\omega_{\mathbf{k}}^L \int d\mathbf{k}' V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^L \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^S) \\ &\times (\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma'' S} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma'' S} I_{\mathbf{k}}^{\sigma L} - \sigma''\mu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}) \\ &- (\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L) \frac{e^2}{\omega_{pe}^2} \sum_{\sigma'} \int d\mathbf{k}' \int d\mathbf{v} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2} \delta[\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}] \\ &\times \left[ \frac{v_e^2}{8\pi} \left( \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}}^{\sigma L} - \sigma\omega_{\mathbf{k}}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} \right) (F_e + F_i) - \frac{\pi}{m_e m_i} (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{v}} I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} I_{\mathbf{k}}^{\sigma L} \right]. \end{aligned} \quad (2.32)$$

<sup>3</sup>Consideração da referência [13].



Para ondas íon-acústicas coletamos os termos de emissão espontânea e induzida (2.24) e o termo de decaimento (2.27), obtendo

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}{\partial t} &= \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int d\mathbf{v} \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^S - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \left[ \mu_{\mathbf{k}}^2 \hat{n} e^2 (F_e + F_i) + \pi \mu_{\mathbf{k}} \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left( F_e + \frac{m_e}{m_i} F_i \right) I_{\mathbf{k}}^{\sigma S} \right] \\
 &+ \sum_{\sigma', \sigma''} \sigma \mu_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}^L \int d\mathbf{k}' V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^S \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L - \sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L) \\
 &\times (\sigma \mu_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma'' L} - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma'' L} I_{\mathbf{k}}^{\sigma S} - \sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}).
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Neste ponto, chegamos a um conjunto de equações que têm sido estudadas em detalhe para ondas de Langmuir e íon-acústicas, tendo em conta os termos mais relevantes na dinâmica de um plasma com perturbações eletrostáticas. Agora faremos uma abordagem do estudo da generalização da teoria de turbulência fraca a qual inclui modos não lineares, baseando-nos fortemente nos artigos [12, 13, 41, 44].

## 2.3 Modos não lineares de alta frequência

Agora para harmônicos de alta frequência supomos uma solução da forma de (2.18)

$$\langle E^2 \rangle_q = \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{n=2,3,\dots} I_{\mathbf{k}}^{\sigma Ln} \delta(\omega - \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{Ln}), \tag{2.34}$$

onde  $n$  indica o número do modo harmônico.

Nesta abordagem vamos focar-nos somente na parte real com acoplamento linear  $T(q, q')$  <sup>4</sup> da equação de balanço espectral (2.13), onde a solução linear correspondente ao modo fundamental é

$$\omega^{L1} = \omega_{pe} \left( 1 + \frac{3}{2} k^2 \lambda_{De}^2 \right). \tag{2.35}$$

Ignorando a resposta de baixa frequência, usamos as equações (2.19) e (2.13), considerando que o termo de terceira ordem da susceptibilidade contribui muito pouco na relação de dispersão, usamos a propriedade de simetria  $\chi^{(2)}(q_1 | -q_2) = \chi^{(2)}(-q_1 | q_2)$ ,

<sup>4</sup>Na referência [18] considera-se termos de mais alta ordem, obtendo uma equação com um termo a mais envolvendo decaimento do harmônico ( $n = 2$ ) e o fundamental.

obtendo

$$\begin{aligned}
 0 = & \sum_n \sum_\sigma \operatorname{Re} \epsilon(\mathbf{k}, \sigma \omega_{\mathbf{k}}^{Ln}) I^{\sigma Ln}(\mathbf{k}) \delta(\omega - \sigma \omega_{\mathbf{k}}^{Ln}) \\
 & + 2 \operatorname{Re} \int d\mathbf{k}' \left[ \sum_{n, n'} \sum_{\sigma, \sigma'} \frac{2 \left\{ \chi^{(2)}(\mathbf{k}', \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^{Ln'} | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma \omega_{\mathbf{k}}^{Ln} - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^{Ln'}) \right\}^2}{\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma \omega_{\mathbf{k}}^{Ln} - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^{Ln'})} \right. \\
 & \times I^{\sigma' Ln'}(\mathbf{k}') I^{\sigma Ln}(\mathbf{k}) \delta(\omega - \sigma \omega_{\mathbf{k}}^{Ln}) \\
 & \left. - \sum_{n', n''} \sum_{\sigma', \sigma''} \frac{\left| \chi^{(2)}(\mathbf{k}', \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^{Ln'} | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{Ln''}) \right|^2}{\epsilon^*(\mathbf{k}, \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^{Ln'} + \sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{Ln''})} \right. \\
 & \left. \times I^{\sigma' Ln'}(\mathbf{k}') I^{\sigma'' Ln''}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\omega - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^{Ln'} - \sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{Ln''}) \right].
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Vemos que na equação (2.36) para HL, o termo  $I_{\mathbf{k}}^{Ln}$  depende do parâmetro  $n$ . Para  $n \geq 2$  o primeiro termo é pequeno, mas diferente de zero. A parte não linear deve manter o balanço, portanto o inverso da resposta linear tem a forma

$$\frac{1}{\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}}^{Ln} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)})}.$$

Assim a diferença deve ser de ordem  $\omega^{Ln} - \omega^{L(n-1)} \sim \omega_{pe}$

$$\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}}^{Ln} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}) \approx \epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega_{pe}) \sim 0.$$

Os termos onde  $n' \neq n - 1$  podem ser ignorados, já que contém no denominador

$$\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}}^{Ln} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-2)}) \approx \epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', 2\omega_{pe}),$$

quantidades que são finitas.

Para a mais baixa ordem ( $n = 1$ ), obtemos a relação de dispersão linear para  $L1$

$$0 = \operatorname{Re} \epsilon(\mathbf{k}, \sigma \omega_{\mathbf{k}}^{L1}) I^{\sigma L1}(\mathbf{k}),$$

já discutida na seção anterior. Na ordem seguinte ( $n = 2$ ), mantendo a parte não linear para uma diferença entre frequências perto de  $\omega_{pe}$  no denominador, obtemos

$$\begin{aligned}
 0 = & \operatorname{Re} \epsilon(\mathbf{k}, \sigma \omega_{\mathbf{k}}^{L2}) I^{\sigma L2}(\mathbf{k}) \\
 & + 4 \operatorname{Re} \int d\mathbf{k}' \sum_{\sigma'} \frac{\left\{ \chi^{(2)}(\mathbf{k}', \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^{L1} | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}}^{L2} - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^{L1}) \right\}^2}{\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma \omega_{\mathbf{k}}^{L2} - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^{L1})} I^{\sigma' L1}(\mathbf{k}') I^{\sigma L2}(\mathbf{k}).
 \end{aligned}$$

Vemos que o último termo de (2.36) não satisfaz a condição da função delta. Para ordem ( $n = 3$ ), temos

$$0 = \text{Re } \epsilon(\mathbf{k}, \sigma \omega_{\mathbf{k}}^{L3}) I^{\sigma L3}(\mathbf{k}) + 4 \text{Re } \int d\mathbf{k}' \sum_{\sigma'} \frac{\left\{ \chi^{(2)}(\mathbf{k}', \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^{L2} | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}}^{L3} - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^{L2}) \right\}^2}{\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma \omega_{\mathbf{k}}^{L3} - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^{L2})} I^{\sigma' L2}(\mathbf{k}') I^{\sigma L3}(\mathbf{k}),$$

que é um caso particular da expressão

$$0 = \text{Re } \epsilon(\mathbf{k}, \sigma \omega_{\mathbf{k}}^n) I^{\sigma Ln}(\mathbf{k}) + 4 \text{Re } \int d\mathbf{k}' \sum_{\sigma'} \frac{\left\{ \chi^{(2)}(\mathbf{k}', \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}}^{Ln} - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}) \right\}^2}{\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma \omega_{\mathbf{k}}^{Ln} - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)})} I^{\sigma' L(n-1)}(\mathbf{k}') I^{\sigma Ln}(\mathbf{k}), \quad (2.37)$$

válida para ( $n \geq 2$ ).

A susceptibilidade de segunda ordem pode ser aproximada (Ver [12]),

$$\left\{ \chi^{(2)}(\mathbf{k}', \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma \omega_{\mathbf{k}}^{Ln} - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}) \right\}^2 = -\frac{1}{4\omega_{pe}^4} \frac{e^2}{m_e^2} a_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^n, \quad (2.38)$$

com

$$a_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^n = \frac{\left\{ (n-1)k^2[\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}')] + nk'^2[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}')] + n(n-1)|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}') \right\}^2}{[n^2(n-1)kk'|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2]}. \quad (2.39)$$

Fazendo o caso  $\sigma, \sigma' = 1$ <sup>5</sup> na equação (2.37), chegamos na seguinte expressão para a parte real de  $\epsilon(\mathbf{k}, \omega)$ ,

$$\text{Re } \epsilon(\mathbf{k}, \omega) = \frac{e^2}{m_e \omega_{pe}^4} \text{Re } \int d\mathbf{k}' \frac{a_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^n I^{L(n-1)}(\mathbf{k}')}{\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)})}, \quad (2.40)$$

cujas solução é  $\omega = \omega_{\mathbf{k}}^{Ln}$ .

Seguindo a abordagem padrão, a faixa espectral sobre a qual um modo próprio é levemente amortecido ou fracamente crescente é aquela em que vale a suposição

$$|\text{Im } \epsilon(\mathbf{k}, \omega)| \ll |\text{Re } \epsilon(\mathbf{k}, \omega)|. \quad (2.41)$$

<sup>5</sup>Esta generalização é feita na literatura devido ao fato que em dados experimentais e simulações [34] somente são observados HL propagando-se para a frente

Expandindo em série de Taylor a expressão de  $\epsilon(\mathbf{k}, \omega)$ , e usando (2.41), podemos ver que a taxa de crescimento ou amortecimento é muito menor do que a frequência real [3]

$$|\gamma| \equiv \left| \frac{\text{Im } \epsilon(\mathbf{k}, \omega)}{\partial_\omega \text{Re } \epsilon(\mathbf{k}, \omega)} \right| \ll |\omega|.$$

Fazendo esta suposição, a função dielétrica pode ser aproximada como

$$\epsilon(\mathbf{k}, \omega) \approx 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left( 1 + 3k^2 \lambda_{De}^2 \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right). \quad (2.42)$$

Usando a equação (2.42) e fazendo a aproximação (A.6) podemos obter

$$1 \approx \frac{n^2}{2(n^2 - 1)} \frac{e^2}{m_e^2 \omega_{pe}^3} \int d\mathbf{k}' \frac{a_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{(n)} I^{L(n-1)}(\mathbf{k}')}{\omega - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} - \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{L1}}, \quad (2.43)$$

onde  $\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{L1}$  é a relação de dispersão do modo fundamental. Para o primeiro harmônico  $\omega_{\mathbf{k}'}^{L1} \sim \omega_{pe}$ , então  $\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{L1} \sim \omega_{\mathbf{k}}^{L1}$ , e portanto para  $n = 2$  o denominador da equação (2.43) pode ser aproximado como

$$\omega - \omega_{\mathbf{k}'}^{L1} - \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{L1} \approx \omega - 2\omega_{pe} - \frac{3}{2}\omega_{pe} k^2 \lambda_{De}^2,$$

sendo a frequência da ordem de  $\omega \sim 2\omega_{pe}$ .

### 2.3.1 Relação de dispersão para os modos harmônicos

Podemos encontrar a relação de dispersão para harmônicos de maneira dedutiva, usando (2.43), começando para o primeiro harmônico ( $n = 2$ ), e fazendo a aproximação de plasma frio  $T_e \rightarrow 0$ , de modo que  $\lambda_{De} \rightarrow 0$ . Obtemos então

$$1 = \frac{2e^2}{3m_e^2 \omega_{pe}^3} \frac{1}{\omega - 2\omega_{pe}} \int d\mathbf{k}' a_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{(2)} I^{L(n-1)}(\mathbf{k}'),$$

que leva à relação de dispersão para o primeiro harmônico

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbf{k}}^{(L2)} &\approx \omega_{pe} (2 + \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(2)}), \\ \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(2)} &= \frac{2}{3} \frac{e^2}{m_e^2 \omega_{pe}^4} \int d\mathbf{k}' a_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{(2)} I^{L1}(\mathbf{k}'). \end{aligned}$$

Vemos que  $\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(2)}$  é uma pequena correção da frequência<sup>6</sup> que podemos ignorar na ordem seguinte. Agora, para ( $n = 3$ ), temos

$$1 \approx \frac{9}{16} \frac{e^2}{m_e^2 \omega_{pe}^3} \frac{1}{\omega - 3\omega_{pe}} \int d\mathbf{k}' a_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{(3)} I^{L2}(\mathbf{k}'),$$

obtendo

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbf{k}}^{L3} &\approx \omega_{pe}(3 + \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(3)}) \\ \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(3)} &= \frac{9}{16} \frac{e^2}{m_e^2 \omega_{pe}^4} \int d\mathbf{k}' a_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{(3)} I^{L2}(\mathbf{k}'). \end{aligned}$$

Em geral para um  $n$  arbitrário e  $T_e = 0$ , a equação (2.43) se reduz a

$$1 \approx \frac{n^2}{2(n^2 - 1)} \frac{e^2}{m_e^2 \omega_{pe}^3} \frac{1}{\omega - n\omega_{pe}} \int d\mathbf{k}' a_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{(n)} I^{L(n-1)}(\mathbf{k}'),$$

da qual obtemos  $\omega^{Ln}$

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbf{k}}^{Ln} &= \omega_{pe}(n + \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(n)}), \text{ com} \\ \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(n)} &= \frac{n^2}{2(n^2 - 1)} \frac{e^2}{m_e^2 \omega_{pe}^4} \int d\mathbf{k}' a_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{(n)} I^{L(n-1)}(\mathbf{k}'). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Para obter as correções não lineares da relação de dispersão, expandimos em série de Taylor para pequenos valores de  $\lambda_{De}^2$ ,

$$\omega_{\mathbf{k}}^{Ln} \Big|_{\lambda_{De}^2=0} = \omega_{\mathbf{k}}^{Ln} \Big|_{\lambda_{De}^2=0} + \lambda_{De}^2 \frac{\partial \omega_{\mathbf{k}}^{Ln}}{\partial \lambda_{De}^2} \Big|_{\lambda_{De}^2=0} + \dots, \quad (2.45)$$

onde

$$\omega_{\mathbf{k}}^{Ln} \Big|_{\lambda_{De}^2=0} = \omega_{pe}(n + \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(n)}).$$

Podemos obter os coeficientes de alta ordem derivando sucessivamente a relação de dispersão, sendo que somente estamos interessados no primeiro termo da correção. Para ( $n = 2$ ), ignoramos a possível dependência que  $I_{\mathbf{k}'}^{L1}$  tem em  $\lambda_{De}$ , e derivamos com respeito a  $\lambda_{De}$

$$0 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m_e^2 \omega_{pe}^3} \int d\mathbf{k}' \frac{a_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{(2)} I^{L1}(\mathbf{k}')}{(\omega - \omega_{\mathbf{k}'}^{L1} - \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{L1})^2} \left( \frac{\partial \omega}{\partial \lambda_{De}^2} - \frac{3}{2} \omega_{pe} k'^2 - \frac{3}{2} \omega_{pe} |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2 \right).$$

<sup>6</sup>Sabemos que os HL têm frequências da ordem de  $\omega^{Ln} \sim n\omega_{pe}$ , então  $\varepsilon_{\mathbf{k}}$  deve ser uma pequena correção que dependente da energia inicial (emissão espontânea) onde  $I^L(\mathbf{k}, 0)$  também é pequeno e depende do parâmetro do plasma  $g$ .

Avaliando para  $\lambda_{De}^2 = 0$ , temos

$$0 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m_e^2 \omega_{pe}^3} \int d\mathbf{k}' \frac{a_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{(2)} I^{L1}(\mathbf{k}')}{(\omega - 2\omega_{pe})^2} \left( \left. \frac{\partial \omega}{\partial \lambda_{De}^2} \right|_{\lambda_{De}^2=0} - \frac{3}{2} \omega_{pe} k'^2 - 3\omega_{pe} (k'^2 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}') \right).$$

O fator  $(\omega - 2\omega_{pe})^2$  pode sair da integral, e chega-se então a

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \omega_{\mathbf{k}}^{L2}}{\partial \lambda_{De}^2} \right|_{\lambda_{De}^2=0} &= \frac{3}{2} \omega_{pe} \left( k^2 + 2 \frac{\theta_{\mathbf{k}}^{(2)}}{\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(2)}} \right) \\ \theta_{\mathbf{k}}^{(2)} &= \frac{2}{3} \frac{e^2}{m_e^2 \omega_{pe}^4} \int d\mathbf{k}' (k'^2 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}') a_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{(2)} I^{L1}(\mathbf{k}'). \end{aligned}$$

Usando os resultados obtidos acima na equação (2.45), obtemos a seguinte expressão

$$\omega_{\mathbf{k}}^{L2} = \omega_{pe} \left( 2 + \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(2)} + \frac{3}{2} k^2 \lambda_{De}^2 + 3 \frac{\theta_{\mathbf{k}}^{(2)}}{\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(2)} \lambda_{De}^2} \right).$$

Agora, para  $(n = 3)$ ,

$$0 = \frac{9}{16} \frac{e^2}{m_e^2 \omega_{pe}^3} \int d\mathbf{k}' a_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{(3)} I^{L2}(\mathbf{k}') \left[ \left. \frac{\partial \omega}{\partial \lambda_{De}^2} \right|_{\lambda_{De}^2=0} - \frac{3}{2} \omega_{pe} \left( k'^2 + 2 \frac{\theta_{\mathbf{k}}^{(n)}}{\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(2)}} + |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2 \right) \right],$$

obtendo

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \omega_{\mathbf{k}}^{L3}}{\partial \lambda_{De}^2} \right|_{\lambda_{De}^2=0} &= \frac{3}{2} \omega_{pe} \left( k^2 + 2 \frac{\theta_{\mathbf{k}}^{(3)}}{\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(3)}} \right) \\ \theta_{\mathbf{k}}^{(3)} &= \frac{9}{16} \frac{e^2}{m_e^2 \omega_{pe}^4} \int d\mathbf{k}' a_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{(2)} I^{L2}(\mathbf{k}') \left( k'^2 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' + \frac{\theta_{\mathbf{k}'}^{(2)}}{\varepsilon_{\mathbf{k}'}^{(2)}} \right). \end{aligned}$$

Em geral, obtemos uma relação de dispersão para os modos harmônicos de ondas de Langmuir ( $n \geq 2$ ),

$$\omega_{\mathbf{k}}^{Ln} = \omega_{pe} \left( n + \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(n)} + \frac{3}{2} k^2 \lambda_{De}^2 + 3 \frac{\theta_{\mathbf{k}}^{(n)}}{\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(n)} \lambda_{De}^2} \right) \quad (2.46)$$

onde  $\varepsilon_{\mathbf{k}}^n$  definido em (2.44) e

$$\theta_{\mathbf{k}}^{(n)} = \frac{n^2}{2(n^2 - 1)} \frac{e^2}{m_e^2 \omega_{pe}^4} \int d\mathbf{k}' a_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^n I^{L(n-1)}(\mathbf{k}') \left( k'^2 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' + \frac{\theta_{\mathbf{k}'}^{(n-1)}}{\varepsilon_{\mathbf{k}'}^{(n-1)}} \right).$$

Vemos que, para  $n = 1$ , a equação (2.46) se reduz à relação de dispersão para o modo linear de Langmuir, equação (2.17).

A relação de dispersão para os modos HL (equação (2.46)), pode ser aproximada calculando as quantidades  $\varepsilon_{\mathbf{q}}^{(n)}$  e  $\theta_{\mathbf{q}}^{(n)}$ . Na abordagem unidimensional feita no artigo [41][eq. (18)], os autores chegam na equação

$$\frac{\omega^{Ln}}{\omega_{pe}} = n + \frac{3}{2}k^2\lambda_{De}^2 - \frac{3(n-1)}{2} \left( \frac{k}{k_0} - \frac{n}{2} \right) \frac{k_0^2 v_e^2}{\omega_{pe}^2} + \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(n)}, \quad (2.47)$$

onde  $k_0 \approx \omega_{pe}/V_0$  e  $V_0$  é a velocidade do feixe.

Os resultados obtidos na referência [41] mostram a boa correlação da aproximação teórica (equação (2.47)) com os resultados obtidos da simulação de Vlasov. Pode se ver na figura 2.1 correspondente a figura [4] do artigo citado anteriormente.

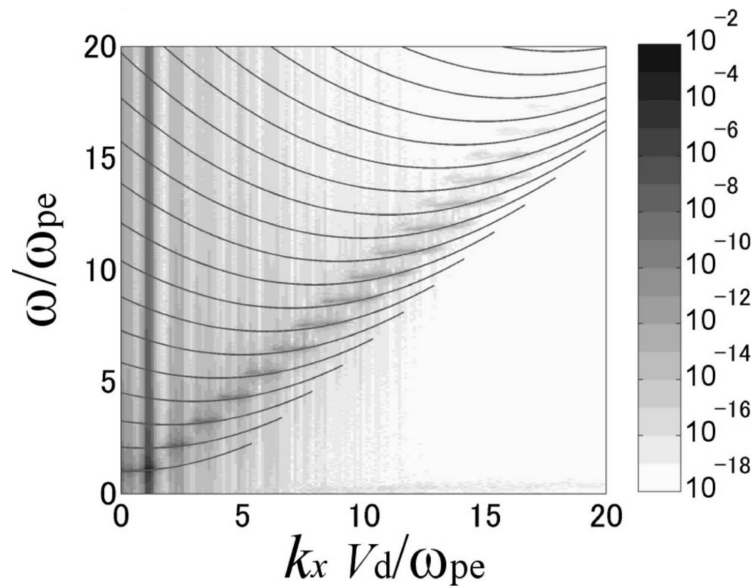


FIGURA 2.1: Diagrama de dispersão para ondas de HL obtido a partir da simulação de Vlasov (escala cinza) mostrando a intensidade das ondas dos HL junto com a solução teórica (2.47) (linhas) para diferentes valores de  $n$ . *Reprinted from [41], with the permission of AIP Publishing.*

Na figura 2.1 é plotado tanto a relação de dispersão analítica na abordagem uni-dimensional (equação (2.47)), como a intensidades dos modos de HL obtidos da simulação de Vlasov. Baseados nos resultados obtidos no artigo [41], propomos uma aproximação na abordagem bi-dimensional para a relação de dispersão dos modos HL (equação (2.46)), obtendo a relação de dispersão (equação (D.13))

$$\begin{aligned} \frac{\omega^{Ln}}{\omega_{pe}} &= n + \frac{3}{2}k^2\lambda_{De}^2 - 3(n-1)\lambda_{De}^2 k_0 k_z + \frac{3}{2}n(n-1)\lambda_{De}^2 k_0^2 + \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(n)} \\ &= n + \frac{3}{2}\lambda_{De}^2 \{k_{\perp}^2 + [k_z - (n-1)k_0]^2\} + \frac{3}{2}(n-1)\lambda_{De}^2 k_0^2 + \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(n)}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

similar à equação (2.47). Ver cálculo em detalhe no apêndice D.

## 2.4 Equação cinética para harmônicos de ondas de Langmuir

No que diz respeito a equação cinética de onda para harmônicos, a resposta não linear pode ser ignorada em uma primeira aproximação, sendo o crescimento determinado em grande parte pela resposta linear. Nesta abordagem e sem perder a generalidade, somente consideramos  $\sigma = 1$  (modos propagando-se para frente). Inserindo a equação (2.34) na equação (2.13), e seguindo o procedimento empregado nos artigos [12, 41], obtemos

$$\sum_n D(q) I_{\mathbf{k}}^{Ln} \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}^{Ln}) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{k^2 \epsilon^*(q)} \sum_a \hat{n} e_a^2 \int d\mathbf{v} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) F_a(\mathbf{v}), \quad (2.49)$$

onde

$$D(q) = \epsilon(q) - \frac{e^2}{m_e^2 \omega_{pe}^4} \int d\mathbf{k}' \frac{a_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} I_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}}{\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)})}, \quad (2.50)$$

A equação (2.49) tem a mesma forma que a equação (2.15) para modos lineares, de modo que o termo  $D(q)$  pode ser chamado de função dielétrica não linear, enquanto o termo da direita (já mencionado, (2.16)) dá origem ao efeito espontâneo. Portanto a solução para a equação de dispersão não linear  $\text{Re } D(q) = 0$  é a equação (2.46), já obtida.

### 2.4.1 Processo de emissão e espalhamento induzido para harmônicos de ondas de Langmuir

Podemos obter a equação cinética de onda para modos harmônicos inserindo (2.34) na parte imaginária do termo quase-linear de (2.13), chegando na equação [13]

$$\frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{Ln}}{\partial t} = - \frac{2 \text{Im } D(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^{Ln})}{\partial \text{Re } D(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^{Ln}) / \partial \omega_{\mathbf{k}}^{Ln}} I_{\mathbf{k}}^{Ln}, \quad (2.51)$$

Calculamos o numerador e o denominador da (2.51) (ver detalhes desse cálculo no apêndice A), obtendo para o denominador (ver equação (A.14))

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \omega_{\mathbf{k}}^{Ln}} \text{Re } D(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^{Ln}) &\approx \frac{2}{n^2 \omega_{\mathbf{k}}^{Ln}} \\ &+ \frac{2e^2}{m_e^2 \omega_{pe}^5} \int d\mathbf{k}' a_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^n I_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} \text{Re } \epsilon^{-2}(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}}^{Ln} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}), \end{aligned} \quad (2.52)$$



enquanto o numerador fica da forma, ver (A.16),

$$\begin{aligned} \text{Im } D(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^{Ln}) &= -\pi \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int d\mathbf{v} \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{v}} \delta(\omega_{\mathbf{k}}^{Ln} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \\ &\quad - \frac{\pi e^2}{m_e^2 \omega_{pe}^2} \int d\mathbf{k}' \frac{a_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^n I_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}}{\left| \epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}}^{Ln} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}) \right|^2} \\ &\quad \times \int d\mathbf{v} \frac{\mathbf{k} - \mathbf{k}'}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} \cdot \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{v}} \delta[\omega_{\mathbf{k}}^{Ln} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}]. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Em nossa abordagem também temos em conta a parte imaginária de

$$\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}}^{Ln} - \omega_{\mathbf{k} - \mathbf{k}'}^{L(n-1)}).$$

Se ignoramos esta parte imaginária chegamos na equação (30) do artigo [13].

Usando (2.52) e (2.53) na equação (2.51), obtemos a equação para os modos harmônicos

$$\frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{Ln}}{\partial t} = \frac{\gamma_{\mathbf{k}}^{Ln} + \nu_{\mathbf{k}}^{Ln}}{1 + \eta_{\mathbf{k}}^{Ln}} I_{\mathbf{k}}^{Ln}, \quad (2.54)$$

onde

$$\gamma_{\mathbf{k}}^{Ln} = n^2 \pi \omega_{\mathbf{k}}^{Ln} \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int d\mathbf{v} \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{v}} \delta(\omega_{\mathbf{k}}^{Ln} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}), \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} \nu_{\mathbf{k}}^{Ln} &= \frac{\pi n^2 e^2 \omega_{\mathbf{k}}^{Ln}}{m_e^2 \omega_{pe}^2} \int d\mathbf{k}' \frac{a_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^n I_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}}{\left| \epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}}^{Ln} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}) \right|^2} \\ &\quad \times \int d\mathbf{v} \frac{\mathbf{k} - \mathbf{k}'}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} \cdot \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{v}} \delta[\omega_{\mathbf{k}}^{Ln} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}] \\ &\approx \frac{\pi n^3 e^2}{m_e^2 \omega_{pe}^2} \int d\mathbf{k}' \frac{a_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^n I_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}}{\left| \epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}}^{Ln} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}) \right|^2} \\ &\quad \times \frac{\omega_{\mathbf{k}}^{Ln} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} \int d\mathbf{v} (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{v}} \delta[\omega_{\mathbf{k}}^{Ln} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}], \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} \eta_{\mathbf{k}}^{Ln} &= \frac{n^2 e^2 \omega_{\mathbf{k}}^{Ln}}{m_e^2 \omega_{pe}^5} \int d\mathbf{k}' a_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^n I_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} \text{Re} \epsilon^{-2}(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}}^{Ln} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}) \\ &\approx \frac{n^3 e^2}{m_e^2 \omega_{pe}^4} \int d\mathbf{k}' a_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^n I_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} \text{Re} \epsilon^{-2}(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}}^{Ln} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}). \end{aligned} \quad (2.57)$$

De (A.9) e (A.8) temos

$$\left| \epsilon \left( \mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}}^{Ln} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} \right) \right|^2 = \frac{4}{\omega_{pe}} \left( \omega_{\mathbf{k}}^{Ln} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} - \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{L1} \right)^2 + 4\pi \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^6 e^{-2\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}} \quad (2.58)$$

$$\text{Re } \epsilon^{-2} \left( \mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}}^{Ln} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} \right) = \left[ \frac{\frac{1}{2} \left( \omega_{\mathbf{k}}^{Ln} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} - \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{L1} \right) \omega_{pe}}{\left( \omega_{\mathbf{k}}^{Ln} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} - \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{L1} \right)^2 + \pi \omega_{pe}^2 \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^6 e^{-2\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}}} \right]^2,$$

onde

$$\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} = \frac{\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{L1}}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'| v_{Tec}}.$$

No limite onde  $\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} \gg 1$ , obtemos as equações (33) e (7) dos artigos [13, 44]

$$\gamma_{\mathbf{k}}^{Ln} = n^2 \pi \omega_{\mathbf{k}}^{Ln} \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int d\mathbf{v} \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{v}} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^{Ln} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}), \quad (2.59)$$

$$\eta_{\mathbf{k}}^{Ln} = \frac{e^2 n^3}{4m_e^2 \omega_{pe}^2} \int d\mathbf{k}' \frac{a_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^n I_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}}{\left( \omega_{\mathbf{k}}^{Ln} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} - \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{L1} \right)^2}, \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} \nu_{\mathbf{k}}^{Ln} &= \frac{\pi e^2 n^3}{4m_e^2} \int d\mathbf{k}' \frac{a_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^n I_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}}{\left( \omega_{\mathbf{k}}^{Ln} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} - \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{L1} \right)^2} \frac{\omega_{\mathbf{k}}^{Ln} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2} \\ &\times \int d\mathbf{v} (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{v}} \delta[\omega_{\mathbf{k}}^{Ln} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}]. \end{aligned} \quad (2.61)$$

De acordo com o trabalho desenvolvido no artigo [13], no sistema de equações (2.54), (2.59), (2.60) e (2.61), para um tempo suficientemente pequeno, em que a intensidade do harmônico satisfaça a condição  $I_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} \ll (\omega_{\mathbf{k}}^{Ln} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} - \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{L1})^2$ , a parte linear  $\gamma_{\mathbf{k}}^{Ln}$  deveria ser dominante (isto é  $\eta_{\mathbf{k}}^{Ln} \ll 1$ ). Nesse caso a equação cinética pode ser aproximada da forma seguinte

$$\frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{Ln}}{\partial t} \sim \gamma_{\mathbf{k}}^{Ln} I_{\mathbf{k}}^{Ln}. \quad (2.62)$$

Por outro lado, se a intensidade cresce o suficiente para satisfazer a condição

$$I_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} \gg \left( \omega_{\mathbf{k}}^{Ln} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} - \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{L1} \right)^2,$$

ou seja,  $\eta_{\mathbf{k}}^{Ln} \gg 1$ , o termo de espalhamento deveria ser dominante. Pode-se então chegar à seguinte forma de equação aproximada [13],

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{Ln}}{\partial t} &\approx \frac{\nu_{\mathbf{k}}^{Ln}}{\eta_{\mathbf{k}}^{Ln}} I_{\mathbf{k}}^{Ln} \\ &\propto \pi \omega_{pe}^2 \int d\mathbf{v} \frac{\omega_{\mathbf{k}}^{Ln} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2} (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{v}} \\ &\times \delta[\omega_{\mathbf{k}}^{Ln} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}] I_{\mathbf{k}}^{Ln}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

As hipóteses (2.62) e (2.63) serão investigadas para verificar se são de fato satisfeitas.

## 2.5 Equação cinética para as partículas

Com respeito à equação cinética de partículas, simplesmente vamos recorrer à equação habitual quase-linear de difusão. Isto equivale a ignorar os termos não lineares na função perturbada de Klimontovich, o que resulta em

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_a}{\partial t} &= \frac{\pi e_a^2}{m_a^2} \frac{\partial}{\partial v_i} \int dq \frac{k_i k_j}{k^2} \langle E^2 \rangle_q \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \frac{\partial f_a}{\partial v_j} \\ &+ \text{Im} \frac{e_a^2}{2\pi^2 m_a} \frac{\partial}{\partial v_i} \int dq \frac{k_i}{k^2 \epsilon^*(q)} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Usando

$$\frac{1}{\epsilon^*(\mathbf{k}, \omega)} = \mathcal{P} \frac{1}{\epsilon^*(\mathbf{k}, \omega)} + \sum_{\alpha} \sum_{\sigma=\pm 1} \frac{i\pi \delta(\omega - \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})}{\partial \text{Re} \epsilon(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) / \partial \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}},$$

para  $\omega = \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}$ , onde  $\alpha$  identifica o modo normal da onda, reescrevemos (2.64)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_a}{\partial t} &= \frac{\pi e_a^2}{m_a^2} \frac{\partial}{\partial v_i} \int dq \frac{k_i k_j}{k^2} \langle E^2 \rangle_q \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \frac{\partial f_a}{\partial v_j} \\ &+ \frac{e_a^2}{2\pi^2 m_a} \frac{\partial}{\partial v_i} \int dq \frac{k_i}{k^2} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a \left[ \sum_{\alpha} \sum_{\sigma=\pm 1} \frac{\pi \delta(\omega - \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})}{\partial \text{Re} \epsilon(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) / \partial \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}} \right] \\ &= \sum_{\alpha} \sum_{\sigma=\pm 1} \frac{\pi e_a^2}{m_a^2} \frac{\partial}{\partial v_i} \int dq \frac{k_i k_j}{k^2} \langle E^2 \rangle_q \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \frac{\partial f_a}{\partial v_j} \\ &+ \frac{e_a^2}{2\pi^2 m_a} \frac{\partial}{\partial v_i} \int dq \frac{k_i}{k^2} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a \left[ \frac{\pi \delta(\omega - \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})}{\partial \text{Re} \epsilon(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) / \partial \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}} \right]. \end{aligned}$$

Integrando em  $\omega$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_a}{\partial t} = & \sum_{\alpha} \sum_{\sigma=\pm 1} \frac{\pi e_a^2}{m_a^2} \frac{\partial}{\partial v_i} \int d\mathbf{k} \frac{k_i k_j}{k^2} \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \frac{\partial f_a}{\partial v_j} \\ & + \frac{e_a^2}{2\pi m_a} \frac{\partial}{\partial v_i} \int d\mathbf{k} \frac{k_i}{k^2} \frac{\delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})}{\partial \text{Re} \epsilon(\mathbf{k}, \sigma \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) / \partial \sigma \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}} f_a. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Esta equação é equivalente à equação (10) do artigo [14].

Finalmente, obtivemos o conjunto de equações que descrevem em detalhe a dinâmica de ondas e partículas, no caso particular de um plasma com uma perturbação eletrostática. O passo seguinte envolve a preparação do conjunto de equações para uma abordagem numérica, o que será feito no seguinte capítulo considerando um sistema com simetria azimutal e utilizando uma abordagem em duas dimensões (2D).

## Capítulo 3

# Tratamento matemático das equações da teoria de turbulência fraca generalizada

Neste capítulo seguiremos o tratamento padrão usado em anteriores trabalhos em aproximações uni-dimensional e bi-dimensional desenvolvidos por Ziebell, Gaelzer, Yoon e outros [17–20, 42, 44].

Para fazer o cálculo numérico é conveniente escrever as equações em termos de variáveis adimensionais. Portanto, normalizamos na frequência do plasma e na velocidade térmica dos elétrons

$$z \equiv \frac{\omega}{\omega_{pe}}, \quad \tau \equiv t\omega_{pe}, \quad \mathbf{q} \equiv \frac{\mathbf{k}v_e}{\omega_{pe}}, \quad \mathbf{u} \equiv \frac{\mathbf{v}}{v_e}. \quad (3.1)$$

Também definimos a função de distribuição  $\Phi_a$  e a intensidade de onda  $\mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma\alpha}$ , normalizadas como

$$\Phi_a(\mathbf{u}) = v_e^3 F_a(\mathbf{u}), \quad \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma\alpha} = \frac{(2\pi)^2 g I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}}{m_e v_e^2 \mu_{\mathbf{k}}^\alpha}, \quad (3.2)$$

onde o parâmetro do plasma  $g$  e o comprimento de Debye  $\lambda_{De}$  estão definidos como

$$g = \frac{1}{2^{3/2} (4\pi)^2 \hat{n} \lambda_{De}^3}, \quad \lambda_{De}^2 = \frac{T_e}{4\pi \hat{n} e^2} = \frac{v_e^2}{2\omega_{pe}^2}. \quad (3.3)$$

Podemos escrever as propriedades de simetria da relação de dispersão para modos normais da forma,

$$z_{-\mathbf{q}} = -z_{\mathbf{q}}.$$

Se temos um sistema com simetria azimutal, podemos escrever essa relação de simetria em termos da componente perpendicular  $q_{\perp}$  e a componente paralela  $q_{\parallel}$  do número de onda

$$z_{q_{\perp}, -q_z} = -z_{q_{\perp}, q_z}. \quad (3.4)$$

No caso das ondas, sua amplitude é independente do sentido de propagação  $\mathbf{q}$ , porém podemos reescrever a condição de simetria em termos de  $q_{\perp}$  e  $q_{\parallel}$ ,

$$\mathcal{E}_{-\mathbf{q}} = \mathcal{E}_{\mathbf{q}}, \quad \mathcal{E}_{q_{\perp}, -q_{\parallel}} = \mathcal{E}_{q_{\perp}, q_{\parallel}} = \mathcal{E}_{\mathbf{q}}, \quad \mathcal{E}_{-q_{\perp}, q_{\parallel}} = \mathcal{E}_{q_{\perp}, q_{\parallel}} = \mathcal{E}_{\mathbf{q}}. \quad (3.5)$$

Usando as novas variáveis (3.1) e (3.2), obtemos formas normalizadas das equações a serem utilizadas.

Para ondas  $L$ , reescrevemos a equação (2.32)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L}}{\partial \tau} = & \frac{\pi}{q^2} \int d\mathbf{u} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}) \left( g \Phi_e(\mathbf{u}) + (\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \mathbf{q} \cdot \frac{\partial \Phi_e(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \right) \\ & - 2\sigma z_{\mathbf{q}}^L \sum_{\sigma', \sigma''} \int d\mathbf{q}' \frac{\mu_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}')^2}{q^2 q'^2 |\mathbf{q} - \mathbf{q}'|^2} \left( \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^{\sigma'' S} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \right. \\ & \left. + \sigma'' z_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^{\sigma'' S} \right) \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L - \sigma'' z_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^L) \\ & + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \sum_{\sigma'} \int d\mathbf{q}' \int d\mathbf{u} \frac{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}')^2}{q^2 q'^2} \delta[\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L - (\mathbf{q} - \mathbf{q}') \cdot \mathbf{u}] \\ & \times \left[ g \left( \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \right) [\Phi_e(\mathbf{u}) + \Phi_i(\mathbf{u})] + \frac{m_e}{m_i} \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (\mathbf{q} - \mathbf{q}') \cdot \frac{\partial \Phi_i(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Para ondas  $S$ , reescrevemos a equação (2.33)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S}}{\partial \tau} = & \mu_{\mathbf{q}} \frac{\pi}{q^2} \int d\mathbf{u} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^S - \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}) \left[ g[\Phi_e(\mathbf{u}) + \Phi_i(\mathbf{u})] \right. \\
 & + (\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \left( \mathbf{q} \cdot \frac{\partial \Phi_e(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} + \frac{m_e}{m_i} \mathbf{q} \cdot \frac{\partial \Phi_i(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right) \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S} \left. \right] \\
 & - \sigma z_{\mathbf{q}}^L \sum_{\sigma', \sigma''} \int d\mathbf{q}' \frac{\mu_{\mathbf{q}}^S \mu_{\mathbf{q}'}^L \mu_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^L [\mathbf{q}' \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}')]^2}{q^2 q'^2 |\mathbf{q} - \mathbf{q}'|^2} \left( \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^{\sigma'' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S} \right. \\
 & \left. + \sigma'' z_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S} - \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^{\sigma'' L} \right) \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^S - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L - \sigma'' z_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^L).
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Nessas expressões aparecem as relações de dispersão para os modos normais, dadas em forma normalizada por

$$\begin{aligned}
 z_{\mathbf{q}}^L &= \left( 1 + \frac{3}{2} q^2 \right)^{1/2}, \\
 z_{\mathbf{q}}^S &= \frac{qA}{(1 + q^2/2)},
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

com

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \left( 1 + \frac{3T_i}{T_e} \right)^{1/2}.$$

Finalmente, para harmônicos de ondas  $L$  reescrevemos a equação (2.54)

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{Ln}}{\partial \tau} = \frac{\gamma_{\mathbf{q}}^{Ln} + \nu_{\mathbf{q}}^{Ln}}{1 + \eta_{\mathbf{q}}^{Ln}} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{Ln} \tag{3.9}$$

com

$$\gamma_{\mathbf{q}}^{Ln} = n^2 \frac{\pi}{q^2} \int d\mathbf{u} z_{\mathbf{q}}^{Ln} \mathbf{q} \cdot \frac{\partial \Phi(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \delta(z_{\mathbf{q}}^{Ln} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}), \quad (3.10)$$

$$\eta_{\mathbf{q}}^{Ln} = \frac{n^3}{\pi} \int d\mathbf{q}' \frac{a_{\mathbf{q},\mathbf{q}'}^n \mu_{\mathbf{q}'}^{L(n-1)} \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{L(n-1)}}{[\text{Re} \epsilon(\mathbf{q} - \mathbf{q}', z_{\mathbf{q}}^{Ln} - z_{\mathbf{q}'}^{L(n-1)})]^2} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \nu_{\mathbf{q}}^{Ln} = n^3 \int d\mathbf{q}' & \frac{a_{\mathbf{q},\mathbf{q}'}^n \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{L(n-1)}}{|\epsilon(\mathbf{q} - \mathbf{q}', z_{\mathbf{q}}^{Ln} - z_{\mathbf{q}'}^{L(n-1)})|^2} \frac{z_{\mathbf{q}}^L - z_{\mathbf{q}'}^{L(n-1)}}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|^2} \\ & \times \int d\mathbf{u} (\mathbf{q} - \mathbf{q}') \cdot \frac{\partial \Phi_e}{\partial \mathbf{u}} \delta[z_{\mathbf{q}}^{Ln} - z_{\mathbf{q}'}^{L(n-1)} - (\mathbf{q} - \mathbf{q}') \cdot \mathbf{u}]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

A relação de dispersão para harmônicos, em forma normalizada, é dada por

$$z_{\mathbf{q}}^{Ln} = n + \varepsilon_{\mathbf{q}}^n + \frac{3}{4} q^2 + \frac{3\theta_{\mathbf{q}}^n}{\varepsilon_{\mathbf{q}}^n} \lambda_{De}^2,$$

com

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mathbf{q}}^n &= \frac{1}{8\pi} \frac{n^2}{(n-1)} \int d^3\mathbf{q}' a_{\mathbf{q},\mathbf{q}'}^n \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{L(n-1)}, \\ \theta_{\mathbf{q}}^n &= \frac{1}{16\pi \lambda_{De}^2} \frac{n^2}{(n-1)} \int d^3\mathbf{q}' a_{\mathbf{q},\mathbf{q}'}^n \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{L(n-1)} \left( q'^2 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}' + \frac{1}{2\lambda_{De}^2} \frac{\theta_{\mathbf{q}'}^{n-1}}{\varepsilon_{\mathbf{q}'}^{n-1}} \right), \end{aligned}$$

onde  $\varepsilon_{\mathbf{q}}^{(1)} = 0$ , e onde

$$a_{\mathbf{q},\mathbf{q}'}^n = \frac{\{(n-1)q^2[\mathbf{q}' \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}')] + nq'^2[\mathbf{q} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}')] + n(n-1)|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|^2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}')\}^2}{\{n^2(n-1)^2 qq' |\mathbf{q} - \mathbf{q}'|\}^2}.$$

Em forma aproximada (equação (D.13))

$$z_{\mathbf{q}}^{Ln} = n + \frac{3}{4} \{q_{\perp}^2 + [q_z - (n-1)q_0]^2 + (n-1)q_0^2\} + \varepsilon_k^{(n)}, \quad (3.13)$$

onde  $q_0 = v_e/V_0$ , e  $\varepsilon_k^{(n)}$  é dada pela equação (D.8).

Para os denominadores das equações (3.11) e (3.12), temos

$$\text{Re} \frac{1}{\epsilon(\mathbf{q} - \mathbf{q}', z_{\mathbf{q}}^{Ln} - z_{\mathbf{q}'}^{L(n-1)})} = \frac{1}{2} \frac{\left( z_{\mathbf{q}}^{Ln} - z_{\mathbf{q}'}^{L(n-1)} - z_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^{L1} \right)}{\left( z_{\mathbf{q}}^{Ln} - z_{\mathbf{q}'}^{L(n-1)} - z_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^{L1} \right)^2 + \pi \xi_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^6 e^{-2\xi_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^2}}$$

$$\left| \epsilon(\mathbf{q} - \mathbf{q}', z_{\mathbf{q}}^{Ln} - z_{\mathbf{q}'}^{L(n-1)}) \right|^2 = 4 \left( z_{\mathbf{q}}^{Ln} - z_{\mathbf{q}'}^{L(n-1)} - z_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^{L1} \right)^2 + 4\pi \xi_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^6 e^{-2\xi_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^2},$$



com

$$\xi = \frac{z_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^{L1}}{|\mathbf{q}-\mathbf{q}'|}.$$

Para as partículas reescrevemos (2.65), obtendo a seguinte equação

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_a(\mathbf{u})}{\partial \tau} = & \frac{e_a^2 m_e^2}{e^2 m_a^2} \sum_{\sigma} \sum_{\alpha=L,S} \int d\mathbf{q} \left( \frac{\mathbf{q}}{q} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \right) \mu_{\mathbf{q}}^{\alpha} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^{\alpha} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}) \\ & \times \left( g \frac{m_a}{m_e} \frac{\sigma z_{\mathbf{q}}^L}{q} \Phi_a(\mathbf{v}) + \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma\alpha} \frac{\mathbf{q}}{q} \cdot \frac{\partial \Phi_a(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Agora, com o conjunto de equações (3.6), (3.7), (3.9) e (3.14), normalizadas, procedemos de modo a fazer a aproximação bidimensional considerando um sistema com simetria azimutal, e escrevemos nossas equações em coordenadas cartesianas, baseados em trabalhos anteriores [19, 20]. Na seção seguinte mostraremos o procedimento de adaptar as equações somente dos modos harmônicos. Tendo em conta que para ondas  $L$  e  $S$  o procedimento é muito parecido, para esses tipos de ondas vamos omitir os detalhes.

### 3.1 Equações para harmônicos de ondas $L$ em coordenadas cartesianas 2D

#### 3.1.1 Termo de emissão induzida em coordenadas cartesianas

Podemos supor uma distribuição Maxwelliana com um feixe tênue numa direção, portanto podemos considerar um sistema no qual vamos ter simetria azimutal fazendo com que a direção do feixe seja  $\hat{z}$ . Consideramos um sistema bidimensional (2D), com uma componente paralela  $\hat{z}$  e outra perpendicular  $\hat{x}$ <sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= u_x \hat{\mathbf{e}}_x + u_z \hat{\mathbf{e}}_z, \\ \mathbf{q} &= q_x \hat{\mathbf{e}}_x + q_z \hat{\mathbf{e}}_z. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Considerando então o termo (3.10)

$$\gamma_{\mathbf{q}}^{Ln} = n^2 \frac{\pi}{q^2} \int d\mathbf{u} \delta(z_{\mathbf{q}}^{Ln} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}) z_{\mathbf{q}}^{Ln} \mathbf{q} \cdot \frac{\partial \Phi(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{Ln}.$$

<sup>1</sup>Onde  $\hat{\mathbf{e}}_x$  e  $\hat{\mathbf{e}}_z$  são os correspondentes vetores unitários de  $\hat{x}$  e  $\hat{z}$ .

Usando coordenadas cartesianas, em 2D

$$\begin{aligned}\gamma_{\mathbf{q}}^{Ln} &= n^2 \frac{\pi}{q^2} \int_{-\infty}^{\infty} du_x \int_{-\infty}^{\infty} du_z \delta(z_{\mathbf{q}}^{Ln} - q_x u_x - q_z u_z) \left[ z_{\mathbf{q}}^{Ln} \left( q_x \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} + q_z \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right) \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{Ln} \right] \\ &= n^2 \frac{\pi}{q^2} \int_{-\infty}^{\infty} du_x \int_{-\infty}^{\infty} du_z \delta(z_{\mathbf{q}}^{Ln} - q_x u_x - q_z u_z) \left[ z_{\mathbf{q}}^{Ln} q_x \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{Ln} \right] \\ &\quad + n^2 \frac{\pi}{q^2} \int_{-\infty}^{\infty} du_x \int_{-\infty}^{\infty} du_z \delta(z_{\mathbf{q}}^{Ln} - q_x u_x - q_z u_z) \left[ z_{\mathbf{q}}^{Ln} q_z \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{Ln} \right],\end{aligned}$$

podemos reescrever a integral

$$\begin{aligned}\gamma_{\mathbf{q}}^{Ln} &= n^2 \frac{\pi}{q^2} \int_{-\infty}^0 du_x \int_{-\infty}^{\infty} du_z \delta(z_{\mathbf{q}}^{Ln} - q_x u_x - q_z u_z) \left[ z_{\mathbf{q}}^{Ln} q_x \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{Ln} \right] \\ &\quad + n^2 \frac{\pi}{q^2} \int_0^{\infty} du_x \int_{-\infty}^{\infty} du_z \delta(z_{\mathbf{q}}^{Ln} - q_x u_x - q_z u_z) \left[ z_{\mathbf{q}}^{Ln} q_x \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{Ln} \right] \\ &\quad + n^2 \frac{\pi}{q^2} \int_{-\infty}^0 du_x \int_{-\infty}^{\infty} du_z \delta(z_{\mathbf{q}}^{Ln} - q_x u_x - q_z u_z) \left[ z_{\mathbf{q}}^{Ln} q_z \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{Ln} \right] \\ &\quad + n^2 \frac{\pi}{q^2} \int_0^{\infty} du_x \int_{-\infty}^{\infty} du_z \delta(z_{\mathbf{q}}^{Ln} - q_x u_x - q_z u_z) \left[ z_{\mathbf{q}}^{Ln} q_z \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{Ln} \right].\end{aligned}$$

Trocando  $u_x$  por  $-u_x$  no primeiro e terceiro termo, e tendo em conta que  $\Phi_e(u_x, u_z)$  é simétrica  $\Phi_e(u_x, u_z) = \Phi_e(-u_x, u_z)$

$$\begin{aligned}\gamma_{\mathbf{q}}^{Ln} &= n^2 \frac{\pi}{q^2} \int_0^{\infty} du_x \int_{-\infty}^{\infty} du_z \delta(z_{\mathbf{q}}^{Ln} + q_x u_x - q_z u_z) \left[ -z_{\mathbf{q}}^{Ln} q_x \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{Ln} \right] \\ &\quad + n^2 \frac{\pi}{q^2} \int_0^{\infty} du_x \int_{-\infty}^{\infty} du_z \delta(z_{\mathbf{q}}^{Ln} - q_x u_x - q_z u_z) \left[ z_{\mathbf{q}}^{Ln} q_x \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{Ln} \right] \\ &\quad + n^2 \frac{\pi}{q^2} \int_0^{\infty} du_x \int_{-\infty}^{\infty} du_z \delta(z_{\mathbf{q}}^{Ln} + q_x u_x - q_z u_z) \left[ z_{\mathbf{q}}^{Ln} q_z \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{Ln} \right] \\ &\quad + n^2 \frac{\pi}{q^2} \int_0^{\infty} du_x \int_{-\infty}^{\infty} du_z \delta(z_{\mathbf{q}}^{Ln} - q_x u_x - q_z u_z) \left[ z_{\mathbf{q}}^{Ln} q_z \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{Ln} \right].\end{aligned}$$

Vemos que avaliando a integral na função delta obtemos uma expressão da forma  $f(q_i, q_j)/|q_j|$ . Se  $q_j$  for muito pequeno vamos ter problema na integração numérica, portanto é conveniente dividir a integral em  $q_x > q_z$  e  $q_x < q_z$ , evitando a singularidade.

Para  $q_z > q_x$ , procuramos  $u_z$  ressonante e deixamos em termos de somente uma integral

$$\begin{aligned}\gamma_{\mathbf{q}}^{Ln} &= n^2 \frac{\pi}{q^2 |q_z|} \int_0^{\infty} du_x \left[ z_{\mathbf{q}}^{Ln} \left( q_x \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} - q_z \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right) \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{Ln} \right]_{u_z = \frac{z_{\mathbf{q}}^{Ln} + q_x u_x}{q_z}} \\ &\quad + n^2 \frac{\pi}{q^2 |q_z|} \int_0^{\infty} du_x \left[ z_{\mathbf{q}}^{Ln} \left( q_x \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} + q_z \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right) \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{Ln} \right]_{u_z = \frac{z_{\mathbf{q}}^{Ln} - q_x u_x}{q_z}}.\end{aligned}$$

Para  $q_x > q_z$ , fazemos o mesmo procedimento anterior

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathbf{q}}^{Ln} = & n^2 \frac{\pi}{q^2 |q_x|} \int_{-\infty}^{\infty} du_z \left[ z_{\mathbf{q}}^{Ln} \left( q_x \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} - q_z \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right) \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{Ln} \right]_{u_x = \frac{-z_{\mathbf{q}}^{Ln} + q_z u_x}{q_x}} \\ & + n^2 \frac{\pi}{q^2 |q_x|} \int_{-\infty}^{\infty} du_z \left[ z_{\mathbf{q}}^{Ln} \left( q_x \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} + q_z \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right) \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{Ln} \right]_{u_x = \frac{z_{\mathbf{q}}^{Ln} - q_z u_x}{q_x}} \end{aligned}$$

Dessa forma, ficamos com

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathbf{q}}^{Ln} = & \pi n^2 \Theta(q_z - q_x) \left\{ \int_0^{\infty} du_x \left[ \frac{z_{\mathbf{q}}^{Ln}}{q^2 |q_z|} \left( q_x \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} - q_z \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right) \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{Ln} \right]_{u_z = \frac{z_{\mathbf{q}}^{Ln} + q_x u_x}{q_z}} \right. \\ & \left. + \int_0^{\infty} du_x \left[ \frac{z_{\mathbf{q}}^{Ln}}{q^2 |q_z|} \left( q_x \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} + q_z \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right) \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{Ln} \right]_{u_z = \frac{z_{\mathbf{q}}^{Ln} - q_x u_x}{q_z}} \right\} \\ & + \pi n^2 \Theta(q_x - q_z) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} du_z \left[ \frac{z_{\mathbf{q}}^{Ln}}{q^2 |q_x|} \left( q_x \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} - q_z \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right) \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{Ln} \right]_{u_x = \frac{-z_{\mathbf{q}}^{Ln} + q_z u_x}{q_x}} \right. \\ & \left. + \int_{-\infty}^{\infty} du_z \left[ \frac{z_{\mathbf{q}}^{Ln}}{q^2 |q_x|} \left( q_x \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} + q_z \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right) \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{Ln} \right]_{u_x = \frac{z_{\mathbf{q}}^{Ln} - q_z u_x}{q_x}} \right\}, \quad (3.16) \end{aligned}$$

onde a função  $\Theta(x)$  é a função de Heaviside ( $\Theta(x) = 1$  para  $x \geq 0$  e  $\Theta(x) = 0$  para  $x < 0$ ).

### 3.1.2 Termo de espalhamento em coordenadas cartesianas 2D

Tomando o coeficiente  $\nu_{\mathbf{q}}^{Ln}$  de (3.12)

$$\begin{aligned} \nu_{\mathbf{q}}^{Ln} = & n^3 \int d\mathbf{q}' \frac{a_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'}^n \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{L(n-1)} \frac{z_{\mathbf{q}}^{Ln} - z_{\mathbf{q}'}^{L(n-1)}}{(\mathbf{q} - \mathbf{q}')^2}}{\left| \epsilon \left( \mathbf{q} - \mathbf{q}', z_{\mathbf{q}}^{Ln} - z_{\mathbf{q}'}^{L(n-1)} \right) \right|^2} \\ & \times \int d\mathbf{u} (\mathbf{q} - \mathbf{q}') \cdot \frac{\partial \Phi_e}{\partial \mathbf{u}} \delta[z_{\mathbf{q}}^{Ln} - z_{\mathbf{q}'}^{L(n-1)} - (\mathbf{q} - \mathbf{q}') \cdot \mathbf{u}], \end{aligned}$$

e reescrevendo em coordenadas cartesianas, ficamos com

$$\begin{aligned} \nu_{\mathbf{q}}^{Ln} &= n^3 \int_{-\infty}^{\infty} dq'_x \int_{-\infty}^{\infty} dq'_z \frac{a_{\mathbf{q},\mathbf{q}'}^n \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{L(n-1)}}{\left| \epsilon \left( q_x - q'_x, q_z - q'_z, z_{q_x, q_z}^{Ln} - z_{q'_x, q'_z}^{L(n-1)} \right) \right|^2} \frac{z_{\mathbf{q}}^{Ln} - z_{\mathbf{q}'}^{L(n-1)}}{(q_x - q'_x)^2 + (q_z - q'_z)^2} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} du_x \int_{-\infty}^{\infty} du_z \left[ (q_x - q'_x) \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} + (q_z - q'_z) \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right] \\ &\quad \times \delta[z_{\mathbf{q}}^{Ln} - z_{\mathbf{q}'}^{L(n-1)} - (q_x - q'_x)u_x - (q_z - q'_z)u_z]. \end{aligned}$$

Dividindo o intervalo de integração de  $q'_z$

$$\begin{aligned} \nu_{\mathbf{q}}^{Ln} &= n^3 \int_{-\infty}^{\infty} dq'_x \int_{-\infty}^0 dq'_z \frac{a_{\mathbf{q},\mathbf{q}'}^n \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{L(n-1)}}{\left| \epsilon \left( q_x - q'_x, q_z - q'_z, z_{q_x, q_z}^{Ln} - z_{q'_x, q'_z}^{L(n-1)} \right) \right|^2} \frac{z_{\mathbf{q}}^{Ln} - z_{\mathbf{q}'}^{L(n-1)}}{(q_x - q'_x)^2 + (q_z - q'_z)^2} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} du_x \int_{-\infty}^{\infty} du_z \left[ (q_x - q'_x) \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} + (q_z - q'_z) \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right] \\ &\quad \times \delta[z_{\mathbf{q}}^{Ln} - z_{\mathbf{q}'}^{L(n-1)} - (q_x - q'_x)u_x - (q_z - q'_z)u_z] \\ &+ n^3 \int_{-\infty}^{\infty} dq'_x \int_0^{\infty} dq'_z \frac{a_{\mathbf{q},\mathbf{q}'}^n \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{L(n-1)}}{\left| \epsilon \left( q_x - q'_x, q_z - q'_z, z_{q_x, q_z}^{Ln} - z_{q'_x, q'_z}^{L(n-1)} \right) \right|^2} \frac{z_{\mathbf{q}}^{Ln} - z_{\mathbf{q}'}^{L(n-1)}}{(q_x - q'_x)^2 + (q_z - q'_z)^2} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} du_x \int_{-\infty}^{\infty} du_z \left[ (q_x - q'_x) \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} + (q_z - q'_z) \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right] \\ &\quad \times \delta[z_{\mathbf{q}}^{Ln} - z_{\mathbf{q}'}^{L(n-1)} - (q_x - q'_x)u_x - (q_z - q'_z)u_z]. \end{aligned}$$

Podemos trocar na primeira integral  $q'_z \rightarrow -q'_z$

$$\begin{aligned} \nu_{\mathbf{q}}^{Ln} &= n^3 \int_{-\infty}^{\infty} dq'_x \int_0^{\infty} dq'_z \frac{a_{\mathbf{q}, q_x, -q_z}^n \mathcal{E}_{q'_x, -q'_z}^{L(n-1)}}{\left| \epsilon \left( q_x - q'_x, q_z + q'_z, z_{q_x, q_z}^{Ln} - z_{q'_x, -q'_z}^{L(n-1)} \right) \right|^2} \frac{z_{\mathbf{q}}^{Ln} - z_{q'_x, -q'_z}^{L(n-1)}}{(q_x - q'_x)^2 + (q_z + q'_z)^2} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} du_x \int_{-\infty}^{\infty} du_z \left[ (q_x - q'_x) \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} + (q_z + q'_z) \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right] \\ &\quad \times \delta[z_{\mathbf{q}}^{Ln} - z_{q'_x, -q'_z}^{L(n-1)} - (q_x - q'_x)u_x - (q_z + q'_z)u_z] \\ &+ n^3 \int_{-\infty}^{\infty} dq'_x \int_0^{\infty} dq'_z \frac{a_{\mathbf{q},\mathbf{q}'}^n \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{L(n-1)}}{\left| \epsilon \left( q_x - q'_x, q_z - q'_z, z_{q_x, q_z}^{Ln} - z_{q'_x, q'_z}^{L(n-1)} \right) \right|^2} \frac{z_{\mathbf{q}}^{Ln} - z_{\mathbf{q}'}^{L(n-1)}}{(q_x - q'_x)^2 + (q_z - q'_z)^2} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} du_x \int_{-\infty}^{\infty} du_z \left[ (q_x - q'_x) \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} + (q_z - q'_z) \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right] \\ &\quad \times \delta[z_{\mathbf{q}}^{Ln} - z_{\mathbf{q}'}^{L(n-1)} - (q_x - q'_x)u_x - (q_z - q'_z)u_z]. \end{aligned}$$

Usando as propriedades de simetria para  $z_{\mathbf{q}}$  (3.4) e  $\mathcal{E}_{\mathbf{q}}$  (3.5),

$$\begin{aligned}
 \nu_{\mathbf{q}}^{Ln} &= n^3 \int_{-\infty}^{\infty} dq'_x \int_0^{\infty} dq'_z \frac{a_{\mathbf{q},q'_x,-q'_z}^n \mathcal{E}_{q'_x,q'_z}^{L(n-1)}}{\left| \epsilon \left( q_x - q'_x, q_z + q'_z, z_{q_x,q_z}^{Ln} + z_{q'_x,q'_z}^{L(n-1)} \right) \right|^2} \frac{z_{\mathbf{q}}^{Ln} + z_{q'_x,q'_z}^{L(n-1)}}{(q_x - q'_x)^2 + (q_z + q'_z)^2} \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} du_x \int_{-\infty}^{\infty} du_z \left[ (q_x - q'_x) \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} + (q_z + q'_z) \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right] \\
 &\quad \times \delta[z_{\mathbf{q}}^{Ln} + z_{q'_x,q'_z}^{L(n-1)} - (q_x - q'_x)u_x - (q_z + q'_z)u_z] \\
 &+ n^3 \int_{-\infty}^{\infty} dq'_x \int_0^{\infty} dq'_z \frac{a_{\mathbf{q},q'_x,q'_z}^n \mathcal{E}_{q'_x,q'_z}^{L(n-1)}}{\left| \epsilon \left( q_x - q'_x, q_z - q'_z, z_{q_x,q_z}^{Ln} - z_{q'_x,q'_z}^{L(n-1)} \right) \right|^2} \frac{z_{\mathbf{q}}^{Ln} - z_{q'_x,q'_z}^{L(n-1)}}{(q_x - q'_x)^2 + (q_z - q'_z)^2} \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} du_x \int_{-\infty}^{\infty} du_z \left[ (q_x - q'_x) \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} + (q_z - q'_z) \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right] \\
 &\quad \times \delta[z_{\mathbf{q}}^{Ln} - z_{q'_x,q'_z}^{L(n-1)} - (q_x - q'_x)u_x - (q_z - q'_z)u_z].
 \end{aligned}$$

Introduzindo o sinal  $s_2$ , podemos escrever em forma mais compacta,

$$\begin{aligned}
 \nu_{\mathbf{q}}^{Ln} &= n^3 \sum_{s_2} \int_{-\infty}^{\infty} dq'_x \int_0^{\infty} dq'_z \frac{a_{\mathbf{q},q'_x,s_2q'_z}^n \mathcal{E}_{q'_x,q'_z}^{L(n-1)}}{\left| \epsilon \left( q_x - q'_x, q_z - s_2q'_z, z_{q_x,q_z}^{Ln} - s_2z_{q'_x,q'_z}^{L(n-1)} \right) \right|^2} \\
 &\quad \times \frac{z_{\mathbf{q}}^{Ln} - s_2z_{q'_x,q'_z}^{L(n-1)}}{(q_x - q'_x)^2 + (q_z - s_2q'_z)^2} \int_{-\infty}^{\infty} du_x \int_{-\infty}^{\infty} du_z \left[ (q_x - q'_x) \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} + (q_z - s_2q'_z) \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right] \\
 &\quad \times \delta[z_{\mathbf{q}}^{Ln} - s_2z_{q'_x,q'_z}^{L(n-1)} - (q_x - q'_x)u_x - (q_z - s_2q'_z)u_z].
 \end{aligned}$$

Agora dividimos o intervalo de integração de  $q_x$ ,

$$\begin{aligned}
 \nu_{\mathbf{q}}^{Ln} &= n^3 \sum_{s_2} \int_{-\infty}^0 dq'_x \int_0^{\infty} dq'_z \frac{a_{\mathbf{q},q'_x,s_2q'_z}^n \mathcal{E}_{q'_x,q'_z}^{L(n-1)}}{\left| \epsilon \left( q_x - q'_x, q_z - s_2q'_z, z_{q_x,q_z}^{Ln} - s_2z_{q'_x,q'_z}^{L(n-1)} \right) \right|^2} \\
 &\quad \times \frac{z_{\mathbf{q}}^{Ln} - s_2z_{q'_x,q'_z}^{L(n-1)}}{(q_x - q'_x)^2 + (q_z - s_2q'_z)^2} \int_{-\infty}^{\infty} du_x \int_{-\infty}^{\infty} du_z \left[ (q_x - q'_x) \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} + (q_z - s_2q'_z) \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right] \\
 &\quad \times \delta[z_{\mathbf{q}}^{Ln} - s_2z_{q'_x,q'_z}^{L(n-1)} - (q_x - q'_x)u_x - (q_z - s_2q'_z)u_z] \\
 &+ n^3 \sum_{s_2} \int_0^{\infty} dq'_x \int_0^{\infty} dq'_z \frac{a_{\mathbf{q},q'_x,s_2q'_z}^n \mathcal{E}_{q'_x,q'_z}^{L(n-1)}}{\left| \epsilon \left( q_x - q'_x, q_z - s_2q'_z, z_{q_x,q_z}^{Ln} - s_2z_{q'_x,q'_z}^{L(n-1)} \right) \right|^2} \\
 &\quad \times \frac{z_{\mathbf{q}}^{Ln} - s_2z_{q'_x,q'_z}^{L(n-1)}}{(q_x - q'_x)^2 + (q_z - s_2q'_z)^2} \int_{-\infty}^{\infty} du_x \int_{-\infty}^{\infty} du_z \left[ (q_x - q'_x) \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} + (q_z - s_2q'_z) \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right] \\
 &\quad \times \delta[z_{\mathbf{q}}^{Ln} - s_2z_{q'_x,q'_z}^{L(n-1)} - (q_x - q'_x)u_x - (q_z - s_2q'_z)u_z].
 \end{aligned}$$

Trocando a primeira integral  $q'_x \rightarrow -q'_x$  e usando as propriedades de simetria para  $z_{\mathbf{q}}$  e  $\mathcal{E}_q$  (3.4) (3.5), introduzimos um segundo sinal  $s_1$ ,

$$\begin{aligned} \nu_{\mathbf{q}}^{Ln} &= n^3 \sum_{s_1, s_2} \int_0^\infty dq'_x \int_0^\infty dq'_z \frac{a_{\mathbf{q}, s_1 q'_x, s_2 q'_z}^n \mathcal{E}_{q'_x, q'_z}^{L(n-1)}}{\left| \epsilon \left( q_x - s_1 q'_x, q_z - s_2 q'_z, z_{q_x, q_z}^{Ln} - s_2 z_{q'_x, q'_z}^{L(n-1)} \right) \right|^2} \\ &\quad \times \frac{z_{\mathbf{q}}^{Ln} - s_2 z_{q'_x, q'_z}^{L(n-1)}}{(q_x - s_1 q'_x)^2 + (q_z - s_2 q'_z)^2} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^\infty du_x \int_{-\infty}^\infty du_z \left[ (q_x - s_1 q'_x) \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} + (q_z - s_2 q'_z) \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right] \\ &\quad \times \delta [z_{\mathbf{q}}^{Ln} - s_2 z_{q'_x, q'_z}^{L(n-1)} - (q_x - s_1 q'_x) u_x - (q_z - s_2 q'_z) u_z]. \end{aligned}$$

Avaliando as derivadas de  $\Phi_e$  para uma função Maxwelliana da forma (4.9) e ignorando a contribuição dos feixes,

$$\begin{aligned} \nu_{\mathbf{q}}^{Ln} &= -2n^3 \frac{T^*}{T_\alpha} \sum_{s_1, s_2} \int_0^\infty dq'_x \int_0^\infty dq'_z \frac{a_{\mathbf{q}, s_1 q'_x, s_2 q'_z}^n \mathcal{E}_{q'_x, q'_z}^{L(n-1)}}{\left| \epsilon \left( q_x - s_1 q'_x, q_z - s_2 q'_z, z_{q_x, q_z}^{Ln} - s_2 z_{q'_x, q'_z}^{L(n-1)} \right) \right|^2} \\ &\quad \times \frac{z_{\mathbf{q}}^{Ln} - s_2 z_{q'_x, q'_z}^{L(n-1)}}{(q_x - s_1 q'_x)^2 + (q_z - s_2 q'_z)^2} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^\infty du_x \int_{-\infty}^\infty du_z [(q_x - s_1 q'_x) u_x + (q_z - s_2 q'_z) u_z] \Phi_e \\ &\quad \times \delta [z_{\mathbf{q}}^{Ln} - s_2 z_{q'_x, q'_z}^{L(n-1)} - (q_x - s_1 q'_x) u_x - (q_z - s_2 q'_z) u_z]. \end{aligned}$$

Usando a condição de ressonância,

$$\begin{aligned} \nu_{\mathbf{q}}^{Ln} &= -2n^3 \frac{T^*}{T_\alpha} \sum_{s_1, s_2} \int_0^\infty dq'_x \int_0^\infty dq'_z \frac{a_{\mathbf{q}, s_1 q'_x, s_2 q'_z}^n \mathcal{E}_{q'_x, q'_z}^{L(n-1)}}{\left| \epsilon \left( q_x - s_1 q'_x, q_z - s_2 q'_z, z_{q_x, q_z}^{Ln} - s_2 z_{q'_x, q'_z}^{L(n-1)} \right) \right|^2} \\ &\quad \times \frac{\left[ z_{\mathbf{q}}^{Ln} - s_2 z_{q'_x, q'_z}^{L(n-1)} \right]^2}{(q_x - s_1 q'_x)^2 + (q_z - s_2 q'_z)^2} \tag{3.17} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^\infty du_x \int_{-\infty}^\infty du_z \Phi_e \delta [z_{\mathbf{q}}^{Ln} - s_2 z_{q'_x, q'_z}^{L(n-1)} - (q_x - s_1 q'_x) u_x - (q_z - s_2 q'_z) u_z]. \end{aligned}$$

As integrais a resolver são as seguintes (ver o cálculo detalhado da integral no apêndice B),

$$\int_{-\infty}^\infty du_x \int_{-\infty}^\infty du_z \Phi_\alpha \delta \left[ z_{\mathbf{q}}^{Ln} - s_2 z_{q'_x, q'_z}^{L(n-1)} - (q_x - s_1 q'_x) u_x - (q_z - s_2 q'_z) u_z \right].$$

Usando (B.3) com  $\beta = N$ ,  $\gamma = L$ , e  $\alpha = e$ ,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} du_x \int_{-\infty}^{\infty} du_z \Phi_e \delta \left[ z_{\mathbf{q}}^{Ln} - s_2 z_{q'_x, q'_z}^{L(n-1)} - (q_x - s_1 q'_x) u_x - (q_z - s_2 q'_z) u_z \right] \\ &= \left( \frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{(q_x - s_1 q'_x)^2 + (q_z - s_2 q'_z)^2}} \exp \left( - \frac{T_*}{T_e} \frac{(z_{\mathbf{q}}^{Ln} - s_2 z_{q'_x, q'_z}^{L(n-1)})^2}{(q_x - s_1 q'_x)^2 + (q_z - s_2 q'_z)^2} \right). \end{aligned}$$

O coeficiente  $\nu_{\mathbf{q}}^{Ln}$  (3.17) e o coeficiente  $\eta_{\mathbf{q}}^{Ln}$  (3.11) (segundo o mesmo procedimento usado para  $\nu_{\mathbf{q}}^{Ln}$ ), ficam da forma

$$\begin{aligned} \nu_{\mathbf{q}}^{Ln} &= - 2n^3 \frac{T_*}{T_e} \sum_{s_1, s_2} \int_0^{\infty} dq'_x \int_0^{\infty} dq'_z \frac{a_{\mathbf{q}, s_1 q'_x, s_2 q'_z}^n \mathcal{E}_{q'_x, q'_z}^{L(n-1)}}{\left| \epsilon \left( q_x - s_1 q'_x, q_z - s_2 q'_z, z_{q_x, q_z}^{Ln} - s_2 z_{q'_x, q'_z}^{L(n-1)} \right) \right|^2} \quad (3.18) \\ &\quad \times \left( \frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \frac{\left[ z_{\mathbf{q}}^{Ln} - s_2 z_{q'_x, q'_z}^{L(n-1)} \right]^2}{\left( (q_x - s_1 q'_x)^2 + (q_z - s_2 q'_z)^2 \right)^{3/2}} \exp \left( - \frac{T_*}{T_e} \frac{(z_{\mathbf{q}}^{Ln} - s_2 z_{q'_x, q'_z}^{L(n-1)})^2}{(q_x - s_1 q'_x)^2 + (q_z - s_2 q'_z)^2} \right). \\ \eta_{\mathbf{q}}^{Ln} &= \frac{n^3}{\pi} \sum_{s_1, s_2} \int_0^{\infty} q'_x \int_0^{\infty} q'_z \frac{a_{q_x, q_z, s_1 q'_x, s_2 q'_z}^n \mathcal{E}_{q'_x, q'_z}^{L(n-1)}}{\left[ \text{Re} \epsilon \left( q_x - s_1 q'_x, q_z - s_2 q'_z, z_{q_x, q_z}^{Ln} - s_2 z_{q'_x, q'_z}^{L(n-1)} \right) \right]^2} \quad (3.19) \end{aligned}$$

## 3.2 Equações para ondas $L$ em coordenadas cartesianas 2D

Para as equações em coordenadas cartesianas de ondas  $L$  procedemos de forma parecida com aquela usada na equação dos modos harmônicos, obtendo então as equações para os diferentes termos.

### 3.2.1 Termo de emissão espontânea e induzida

Reescrevendo em coordenadas cartesianas o primeiro termo de (2.32), correspondente a emissão espontânea e induzida de ondas  $L$ ,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{E}_q^{\sigma L}}{\partial \tau} = & \Theta(q_z - q_x) \left\{ \frac{\pi}{q^2 |q_z|} \int_0^\infty du_x \left[ g \Phi_e + \sigma z_q^L \mathcal{E}_q^{\sigma L} \left( -q_x \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} + q_z \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right) \right]_{u_x(1)} \right. \\
 & \left. + \frac{\pi}{q^2 |q_z|} \int_0^\infty du_x \left[ g \Phi_e + \sigma z_q^L \mathcal{E}_q^{\sigma L} \left( q_x \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} + q_z \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right) \right]_{u_x(2)} \right\} \\
 + & \Theta(q_x - q_z) \left\{ \frac{\pi}{q^2 |q_x|} \int_{-\infty}^\infty du_z \Theta(u_x) \left[ g \Phi_e + \sigma z_q^L \mathcal{E}_q^{\sigma L} \left( -q_x \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} + q_z \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right) \right]_{u_x(1)} \right. \\
 & \left. + \frac{\pi}{q^2 |q_x|} \int_{-\infty}^\infty du_z \Theta(u_x) \left[ g \Phi_e + \sigma z_q^L \mathcal{E}_q^{\sigma L} \left( q_x \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} + q_z \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right) \right]_{u_x(2)} \right\}, \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

com  $u_x(1) = -(\sigma z_q^L - q_z u_z)/q_x$ ,  $u_x(2) = (\sigma z_q^L - q_z u_z)/q_x$ ,  $u_z(1) = (\sigma z_q^L + q_x u_x)/q_z$  e  $u_z(2) = (\sigma z_q^L + q_x u_x)/q_z$

### 3.2.2 Termo de decaimento envolvendo duas ondas $L$ e uma $S$

Reescrevendo em coordenadas cartesianas o segundo termo de (2.32), correspondente ao decaimento de duas ondas  $L$  e uma onda  $S$ ,

$$\begin{aligned}
 & \Theta(q_z - q_x) A(\sigma z_q^L) \frac{1}{q^2} \sum_{\sigma', \sigma'', s_1, s_2 = \pm 1} \Theta(\sigma \sigma' s_2) \int_0^\infty dq'_x \frac{\Theta(q_1)}{|d_1|} \\
 & \times \left\{ [(q_x - s_1 q'_x)^2 + (q_z - s_2 q'_z)^2]^{1/2} \frac{(s_1 q_x q'_x + s_2 q_z q'_z)^2}{(q_x'^2 + q_z'^2)} \right. \\
 & \quad \times \left( \sigma z_q^L \mathcal{E}_{q'_x, q'_z}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{|q_x - s_1 q'_x|, |q_z - s_2 q'_z|}^{\sigma'' S} \right. \\
 & \quad \left. \left. - \left( s_2 \sigma' z_{q'_x, q'_z}^L \mathcal{E}_{|q_x - s_1 q'_x|, |q_z - s_2 q'_z|}^{\sigma'' S} + s_3 \sigma'' z_{|q_x - s_1 q'_x|, |q_z - s_2 q'_z|}^L \mathcal{E}_{q'_x, q'_z}^{\sigma' L} \right) \mathcal{E}_q^{\sigma L} \right) \right\}_{q'_z = q_1} \\
 & + \Theta(q_x - q_z) A(\sigma z_q^L) \frac{1}{q^2} \sum_{\sigma', \sigma'', s_1, s_2 = \pm 1} \Theta(\sigma \sigma' s_2) \int_0^\infty dq'_z \frac{\Theta(q_1)}{|d_1|} \\
 & \times \left\{ [(q_x - s_1 q'_x)^2 + (q_z - s_2 q'_z)^2]^{1/2} \frac{(s_1 q_x q'_x + s_2 q_z q'_z)^2}{(q_x'^2 + q_z'^2)} \right. \\
 & \quad \times \left( \sigma z_q^L \mathcal{E}_{q'_x, q'_z}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{|q_x - s_1 q'_x|, |q_z - s_2 q'_z|}^{\sigma'' S} \right. \\
 & \quad \left. \left. - \left( s_2 \sigma' z_{q'_x, q'_z}^L \mathcal{E}_{|q_x - s_1 q'_x|, |q_z - s_2 q'_z|}^{\sigma'' S} + s_3 \sigma'' z_{|q_x - s_1 q'_x|, |q_z - s_2 q'_z|}^L \mathcal{E}_{q'_x, q'_z}^{\sigma' L} \right) \mathcal{E}_q^{\sigma L} \right) \right\}_{q'_x = q_1}. \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

com



$$\begin{aligned}
 q_1 &= (q^2 - q_x'^2)^{1/2}, \\
 d_1 &= \left[ -s_2 \sigma' \frac{3}{2} q_z' \left( 1 + \frac{3}{2} (q_x'^2 + q_z'^2) \right)^{-1/2} \right. \\
 &\quad \left. + s_2 s_3 \sigma'' A \frac{(q_z - s_2 q_z')}{((q_x - s_1 q_x')^2 + (q_z - s_2 q_z')^2)^{1/2}} \right]_{q_1}.
 \end{aligned}$$

Na derivação desta expressão foi utilizada a propriedade  $\delta[g(x)] = \frac{\delta(x-x_0)}{|g'(x)|}$ , e as aproximações  $z_{\mathbf{q}}^S \ll z_{\mathbf{q}}^L$ , e  $q \ll 1$  para a relação de dispersão das ondas  $L$ .

### 3.2.3 Termo de espalhamento de duas ondas $L$

Reescrevendo em coordenadas cartesianas o terceiro termo de (2.32), correspondente ao espalhamento de duas ondas  $L$ ,

$$\begin{aligned}
 &+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} (z_{\mathbf{q}}^L) \frac{1}{q^2} \sum_{\sigma', s_1 = \pm 1} \int_0^\infty dq_x' \int_0^\infty dq_z' \frac{(s_1 q_x q_x' + \sigma \sigma' q_z q_z')^2}{(q_x'^2 + q_z'^2)} \frac{1}{\sqrt{(q_x - s_1 q_x')^2 + (q_z - \sigma \sigma' q_z')^2}} \\
 &\quad \times \left( g(z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} - z_{\mathbf{q}'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L}) \right) \exp \left( -\frac{T_*}{T_e} \frac{(z_{\mathbf{q}}^L - z_{\mathbf{q}'}^L)^2}{(q_x - s_1 q_x')^2 + (q_z - \sigma \sigma' q_z')^2} \right) \\
 &\quad + \frac{4}{3} (z_{\mathbf{q}}^L)^2 \sum_{\sigma' = \pm 1} \int_0^{\pi/2} d\phi' \cos^2 \phi' \left[ g_*(z_{\mathbf{q}}^L) \left( \mathcal{E}_{q_m \sin \phi', q_m \cos \phi'}^{\sigma' L} - \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \right) \right. \\
 &\quad \left. + 2 \left( \frac{T_e}{T_i} \frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}} (q^2 + q_m^2 - 2\sigma \sigma' q q_m \cos \phi')^{1/2} \left( \sum_{s=\pm 1} s \frac{q_s}{q_m} \mathcal{E}_{q_s \sin \phi', q_s \cos \phi'}^{\sigma' L} \right) \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \right].
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Nessa expressão foram introduzidas coordenadas polares para  $\mathbf{q}'$  no segundo termo, considerando o ângulo  $\phi'$  com o eixo  $z$ , onde  $z$  tem a mesma direção de  $\mathbf{q}$ . Estas novas coordenadas obedecem

$$\begin{aligned}
 q' &= \sqrt{q_x'^2 + q_z'^2}, \\
 q_z' &= q' \cos \phi', \quad q_x' = q' \sin \phi'.
 \end{aligned}$$

### 3.3 Equações para ondas $S$ em coordenadas cartesianas 2D

Para as equações em coordenadas cartesianas de ondas  $S$  procedemos de forma parecida com aquela usada na equação dos harmônicos, obtendo assim os diferentes termos.

#### 3.3.1 Termo de emissão espontânea e induzida

Reescrevendo em coordenadas cartesianas o primeiro termo de (2.33), correspondente a emissão espontânea e induzida de ondas  $S$ ,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S}}{\partial \tau} &= \Theta(q_z - q_x) \frac{\pi A}{2} \frac{q}{|q_z|} \\
 &\left\{ \int_0^\infty du_x \left[ g(\Phi_e) + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S} \left( -q_x \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} + q_z \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right) \right]_{u_z(1)} \right. \\
 &\left. + \int_0^\infty du_x \left[ g(\Phi_e) + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S} \left( q_x \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} + q_z \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right) \right]_{u_z(2)} \right\} \\
 &\quad + \Theta(q_x - q_z) \frac{\pi A}{2} \frac{q}{|q_x|} \\
 &\left\{ \int_{-\infty}^\infty du_z \Theta(u_x) \left[ g(\Phi_e) + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S} \left( -q_x \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} + q_z \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right) \right]_{u_x(1)} \right. \\
 &\left. + \int_{-\infty}^\infty du_z \Theta(u_x) \left[ g(\Phi_e) + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S} \left( q_x \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} + q_z \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right) \right]_{u_x(2)} \right\} \\
 &+ \frac{\sqrt{\pi} \mu_{\mathbf{q}}^S}{q^3} \left( \frac{m_i T_e}{m_e T_i} \right)^{1/2} \left( g - 2 \frac{T_e}{T_i} \sigma^2 z_{\mathbf{q}}^L z_{\mathbf{q}}^S \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S} \right) \exp \left( -\frac{m_i T_e}{m_e T_i} \frac{(z_{\mathbf{q}}^S)^2}{q^2} \right),
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

onde  $u_z(1) = (\sigma z_{\mathbf{q}}^S + q_x u_x)/q_z$ ,  $u_z(2) = (\sigma z_{\mathbf{q}}^S - q_x u_x)/q_z$ ,  $u_x(1) = -(\sigma z_{\mathbf{q}}^S - q_z u_z)/q_x$  e  $u_x(2) = (\sigma z_{\mathbf{q}}^S - q_z u_z)/q_x$ .

#### 3.3.2 Termo de decaimento envolvendo duas ondas $L$ e uma $S$

Reescrevendo em coordenadas cartesianas o segundo termo de (2.33), correspondente ao decaimento de duas ondas  $L$  e uma  $S$ ,

$$\begin{aligned}
 & \Theta(q_z - q_x) \frac{A}{2} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L) q \sum_{\sigma', \sigma'', s_1, s_2 = \pm 1} \Theta(-\sigma' \sigma'' s_2 s_3) \int_0^\infty dq'_x \frac{\Theta(q_{z1})}{|d_1|} \\
 & \quad \times \left\{ \frac{[q'_x(q_x - s_1 q'_x) + q'_z(q_z - s_2 q'_z)]^2}{(q_x'^2 + q_z'^2)[(q_x - s_1 q'_x)^2 + (q_z - s_2 q'_z)^2]} \right. \\
 & \quad \quad \times \left( \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{q'_x, q'_z}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{q_x - s_1 q'_x, |q_z - s_2 q'_z|}^{\sigma'' L} \right. \\
 & \quad \quad \left. \left. - \left( s_2 \sigma' z_{q'_x, q'_z}^L \mathcal{E}_{|q_x - s_1 q'_x|, |q_z - s_2 q'_z|}^{\sigma'' L} + s_3 \sigma'' z_{|q_x - s_1 q'_x|, |q_z - s_2 q'_z|}^L \mathcal{E}_{q'_x, q'_z}^{\sigma' L} \right) \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S} \right) \right\}_{q'_z = q_{z1}}. \\
 & + \Theta(q_x - q_z) \frac{A}{2} q (\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \sum_{\sigma', \sigma'', s_1, s_2 = \pm 1} \Theta(-\sigma' \sigma'' s_2 s_3) \int_0^\infty dq'_z \frac{\Theta(q_{x1})}{|d_1|} \\
 & \quad \times \left\{ \frac{[q'_x(q_x - s_1 q'_x) + q'_z(q_z - s_2 q'_z)]^2}{(q_x'^2 + q_z'^2)[(q_x - s_1 q'_x)^2 + (q_z - s_2 q'_z)^2]} \right. \\
 & \quad \quad \times \left( \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{q'_x, q'_z}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{q_x - s_1 q'_x, |q_z - s_2 q'_z|}^{\sigma'' L} \right. \\
 & \quad \quad \left. \left. - \left( s_2 \sigma' z_{q'_x, q'_z}^L \mathcal{E}_{|q_x - s_1 q'_x|, |q_z - s_2 q'_z|}^{\sigma'' L} + s_3 \sigma'' z_{|q_x - s_1 q'_x|, |q_z - s_2 q'_z|}^L \mathcal{E}_{q'_x, q'_z}^{\sigma' L} \right) \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S} \right) \right\}_{q'_x = q_{x1}},
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

com

$$\begin{aligned}
 & q_1 = (q^2 - q_x'^2)^{1/2}, \\
 & d_1 = \left[ -s_2 \sigma' \frac{3}{2} \left( \frac{n_*}{n_e} \right)^{1/2} q'_z \left( 1 + \frac{3}{2} (q_x'^2 + q_z'^2) \right)^{-1/2} \right. \\
 & \quad \left. + s_2 s_3 \sigma'' A \frac{(q_z - s_2 q'_z)}{((q_x - s_1 q'_x)^2 + (q_z - s_2 q'_z)^2)^{1/2}} \right]_{q_1}
 \end{aligned}$$

Nessa derivação foi utilizada a propriedade  $\delta[g(x)] = \frac{\delta(x-x_0)}{|g'(x)|}$ , e as aproximações  $z_{\mathbf{q}}^S \ll z_{\mathbf{q}}^L$ , e  $q \ll 1$  para ondas  $L$ .

### 3.4 Equação para as partículas

Usando (3.15), escrevemos (2.65) em coordenadas cartesianas

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial u_x} (A_x^e \Phi_e) + \frac{\partial}{\partial u_z} (A_z^e \Phi_e) + \frac{\partial}{\partial u_x} \left( D_{xx}^e \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} + D_{xz}^e \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial u_z} \left( D_{zx}^e \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} + D_{zz}^e \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right), \\ A_i^e &= g \int_{-\infty}^{\infty} dq_x \int_{-\infty}^{\infty} dq_z \frac{q_i}{q_x^2 + q_z^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma \sum_{\alpha=L,S} \mu_{\mathbf{q}}^{\alpha} z_{\mathbf{q}}^{\alpha} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^{\alpha} - q_x u_x - q_z u_z), \\ D_{ij}^e &= \int_{-\infty}^{\infty} dq_x \int_{-\infty}^{\infty} dq_z \frac{q_i q_j}{q_x^2 + q_z^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{\alpha=L,S} \mu_{\mathbf{q}}^{\alpha} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma\alpha} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^{\alpha} - q_x u_x - q_z u_z). \end{aligned}$$

Fazendo uso da condição de ressonância e aproximando  $z_{\mathbf{q}}^{\alpha} \approx \sigma$ , podemos escrever os coeficientes dessa equação na forma seguinte

Para  $u_z > u_x$ ,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_x^e \\ A_z^e \end{pmatrix} &= \frac{2g}{|u_z|} \sum_{\sigma} \int_0^{\infty} dq_x \left[ \Theta(q_1) \frac{q_x u_x + q_1 u_z}{q_x^2 + q_1^2} \begin{pmatrix} q_x \\ q_1 \end{pmatrix} + \Theta(q_2) \frac{-q_x u_x + q_2 u_z}{q_x^2 + q_2^2} \begin{pmatrix} -q_x \\ q_2 \end{pmatrix} \right] \\ q_1 &= \frac{\sigma - q_x u_x}{u_z}, \quad q_2 = \frac{\sigma + q_x u_x}{u_z}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Para  $u_z < u_x$ ,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_x^e \\ A_z^e \end{pmatrix} &= \frac{2g}{|u_x|} \sum_{\sigma} \int_0^{\infty} dq_z \left[ \Theta(q_1) \frac{q_1 u_x + q_z u_z}{q_1^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_z \end{pmatrix} + \Theta(q_2) \frac{-q_2 u_x + q_z u_z}{q_2^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} -q_2 \\ q_z \end{pmatrix} \right], \\ q_1 &= \frac{\sigma - q_z u_z}{u_x}, \quad q_2 = \frac{-\sigma + q_z u_z}{u_x}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Para  $u_z > u_x$ ,

$$\begin{pmatrix} D_{xx}^e \\ D_{xz}^e \\ D_{zz}^e \end{pmatrix} = \frac{2}{|u_z|} \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{i=1,2} \int_0^\infty dq_x \left[ \Theta(q_i) \frac{1}{q_x^2 + q_i^2} \begin{pmatrix} q_x^2 \\ q_x q_i \\ q_i^2 \end{pmatrix} \mathcal{E}_{q_x, q_i}^{\sigma L} \right],$$

$$q_1 = \frac{\sigma - q_x u_x}{u_z}, \quad q_2 = \frac{\sigma + q_x u_x}{u_z}. \quad (3.27)$$

Para  $u_z < u_x$ ,

$$\begin{pmatrix} D_{xx}^e \\ D_{xz}^e \\ D_{zz}^e \end{pmatrix} = \frac{2}{|u_x|} \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{i=1,2} \int_0^\infty dq_z \left[ \Theta(q_i) \frac{1}{q_i^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} q_i^2 \\ q_i q_z \\ q_z^2 \end{pmatrix} \mathcal{E}_{q_i, q_z}^{\sigma L} \right].$$

$$q_1 = \frac{\sigma - q_z u_z}{u_x}, \quad q_2 = \frac{-\sigma + q_z u_z}{u_x}. \quad (3.28)$$

Uma vez que temos a equação em forma bi-dimensional, e seus coeficientes calculados, precisamos escrever a equação das partículas na forma de uma equação em diferenças finitas. Os detalhes dessa transformação são mostrados no apêndice C.

No próximo capítulo vamos apresentar as condições iniciais a serem utilizadas para as distribuições de velocidade das partículas e para os espectros das ondas, em nossa abordagem numérica.

## Capítulo 4

# Condições iniciais

Neste capítulo mostraremos as condições iniciais utilizadas para a distribuição de partículas  $\Phi^\alpha(u, 0)$ , bem como as expressões usadas para descrever a forma inicial dos espectros de ondas íon-acústicas  $\mathcal{E}^S(q, 0)$ , ondas de Langmuir  $\mathcal{E}^L(q, 0)$  e harmônicos de ondas de Langmuir  $\mathcal{E}^{Ln}(q, 0)$ .

### 4.1 Forma inicial da função de distribuição das partículas

Tendo em vista que a inércia dos íons é bem maior do que a inércia dos elétrons, supomos que a função de distribuição de velocidades dos íons pode ser considerada estacionária, na escala de tempo utilizada para descrever a evolução de processos envolvendo a função de distribuição dos elétrons. Portanto, por simplicidade, propomos para os íons uma função de distribuição maxwelliana e estacionária, da forma

$$F_i = \left( \frac{1}{2\pi} \frac{m_i}{T_i} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{m_i}{2T_i} v^2 \right), \quad (4.1)$$

a qual está normalizada, ( $\int d\mathbf{v} F_i = 1$ ). Usando  $v_* = (2T_*/m_e)^{1/2}$  para normalizar a velocidade, obtemos

$$F_i = \left( \frac{1}{2\pi} \frac{m_i}{T_i} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{m_i}{m_e} \frac{T_*}{T_i} u^2 \right). \quad (4.2)$$

Portanto, podemos definir  $\Phi_i(\mathbf{u})$ , normalizada de forma que  $\int d\mathbf{u} \Phi_i = 1$ .

$$\Phi_i = v_*^3 F_i = \frac{1}{(\pi)^{3/2}} \left( \frac{m_i}{m_e} \frac{T_*}{T_i} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{m_i}{m_e} \frac{T_*}{T_i} u^2 \right). \quad (4.3)$$

Além disso,

$$\frac{m_e}{m_i} \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_k} = -\frac{m_e}{m_i} (2u_k) \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \frac{1}{(\pi)^{3/2}} \left( \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{m_i T_*}{m_e T_i} u^2 \right) = -2u_k \frac{T_*}{T_i} \Phi_i, \quad (4.4)$$

onde  $k$  pode ser  $x$  ou  $z$ .

Para a função de distribuição de elétrons, adequada a um estudo da instabilidade feixe-plasma, tomamos como estado inicial uma função maxwelliana somada a duas maxwellianas com velocidade de deriva, para frente e para trás

$$F_e = \left( 1 - \frac{n_f}{n_e} - \frac{n_b}{n_e} \right) \left( \frac{1}{2\pi} \frac{m_e}{T_e} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{m_e}{2T_e} (v - v_0)^2 \right) \\ + \frac{n_f}{n_e} \left( \frac{1}{2\pi} \frac{m_e}{T_f} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{m_e}{2T_f} (v_\perp^2 + (v_\parallel - v_f)^2) \right) \\ + \frac{n_b}{n_e} \left( \frac{1}{2\pi} \frac{m_e}{T_b} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{m_e}{2T_b} (v_\perp^2 + (v_\parallel - v_b)^2) \right),$$

a qual está normalizada,  $\int d\mathbf{v} F_e = 1$ . Usando  $v_* = (2T_*/m_e)^{1/2}$  para velocidade de normalização, obtemos

$$F_e = \left( 1 - \frac{n_f}{n_e} - \frac{n_b}{n_e} \right) \left( \frac{1}{2\pi} \frac{m_e}{T_e} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{T_*}{T_e} (u - u_0)^2 \right) \\ + \frac{n_f}{n_e} \left( \frac{1}{2\pi} \frac{m_e}{T_f} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{T_*}{T_f} (u_\perp^2 + (u_\parallel - u_f)^2) \right) \\ + \frac{n_b}{n_e} \left( \frac{1}{2\pi} \frac{m_e}{T_b} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{T_*}{T_b} (u_\perp^2 + (u_\parallel - u_b)^2) \right).$$

Portanto,

$$\Phi_e = v_*^3 F_e = \left( 1 - \frac{n_f}{n_e} - \frac{n_b}{n_e} \right) \frac{1}{\pi^{3/2}} \left( \frac{T_*}{T_e} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{T_*}{T_e} (u - u_0)^2 \right) \\ + \frac{n_f}{n_e} \frac{1}{\pi^{3/2}} \left( \frac{T_*}{T_f} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{T_*}{T_f} (u_\perp^2 + (u_\parallel - u_f)^2) \right) \\ + \frac{n_b}{n_e} \frac{1}{\pi^{3/2}} \left( \frac{T_*}{T_b} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{T_*}{T_b} (u_\perp^2 + (u_\parallel - u_b)^2) \right), \quad (4.5)$$

onde está suposto que  $u_f > 0$  e  $u_b < 0$ . A quantidade  $u_0$  foi introduzida para termos uma função de distribuição sem deriva média. Em outras palavras, usando  $u_0$  trabalhamos em um sistema de referência onde a função de distribuição está em repouso. A velocidade

de deriva  $u_0$  é portanto obtida de

$$u_0 = - \left( \frac{n_f}{n_e} u_f + \frac{n_b}{n_e} u_b \right) \left( 1 - \frac{n_f}{n_e} - \frac{n_b}{n_e} \right)^{-1},$$

e pode ser facilmente ignorada, se for conveniente, uma vez que é muito pequena no caso de feixes pouco densos.

Coletando as funções de distribuição para aplicações 3D,

$$\Phi_i = v_*^3 F_i = \frac{1}{(\pi)^{3/2}} \left( \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{3/2} \exp \left( - \frac{m_i T_*}{m_e T_i} u^2 \right), \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \Phi_e(0) = v_*^3 F_e(0) &= \left( 1 - \frac{n_f}{n_e} - \frac{n_b}{n_e} \right) \frac{1}{\pi^{3/2}} \left( \frac{T_*}{T_e} \right)^{3/2} \exp \left( - \frac{T_*}{T_e} (u - u_0)^2 \right) \\ &+ \frac{n_f}{n_e} \frac{1}{\pi^{3/2}} \left( \frac{T_*}{T_f} \right)^{3/2} \exp \left( - \frac{T_*}{T_f} (u_{\perp}^2 + (u_{\parallel} - u_f)^2) \right) \\ &+ \frac{n_b}{n_e} \frac{1}{\pi^{3/2}} \left( \frac{T_*}{T_b} \right)^{3/2} \exp \left( - \frac{T_*}{T_b} (u_{\perp}^2 + (u_{\parallel} - u_b)^2) \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

No caso de aplicação 2D, temos que modificar a constante de normalização,

$$\Phi_i = v_*^2 F_i = \frac{1}{\pi} \left( \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right) \exp \left( - \frac{m_i T_*}{m_e T_i} u^2 \right), \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \Phi_e = v_*^2 F_e &= \left( 1 - \frac{n_f}{n_e} - \frac{n_b}{n_e} \right) \frac{1}{\pi} \left( \frac{T_*}{T_e} \right) \exp \left( - \frac{T_*}{T_e} (u - u_0)^2 \right) \\ &+ \frac{n_f}{n_e} \frac{1}{\pi} \left( \frac{T_*}{T_f} \right) \exp \left( - \frac{T_*}{T_f} (u_{\perp}^2 + (u_{\parallel} - u_f)^2) \right) \\ &+ \frac{n_b}{n_e} \frac{1}{\pi} \left( \frac{T_*}{T_b} \right) \exp \left( - \frac{T_*}{T_b} (u_{\perp}^2 + (u_{\parallel} - u_b)^2) \right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

## 4.2 Espectro inicial para ondas de Langmuir ( $L$ )

Podemos encontrar os níveis iniciais de onda equilibrando a emissão espontânea e induzida tendo em conta apenas as populações de fundo.



Para ondas  $L$ , considerando apenas os termos de emissão espontânea e induzida na forma normalizada da equação (2.32),

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L}}{\partial \tau} = \frac{\pi}{q^2} \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_{-\infty}^{\infty} du_x \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z) \left[ g \Phi_e + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \left( q_x \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} + q_z \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right) \right]$$

Considerando agora apenas a contribuição das distribuições de fundo, sem a presença do feixe.

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L}}{\partial \tau} = \frac{\pi}{q^2} \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_{-\infty}^{\infty} du_x \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z) \left[ g \Phi_e + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (-2q_x u_x - 2q_z u_z) \Phi_e \right]$$

Portanto, o espectro de equilíbrio pode ser encontrado usando a condição seguinte:

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L}}{\partial \tau} = \frac{\pi}{q^2} \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_{-\infty}^{\infty} du_x \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z) \Phi_e \left[ g - 2(\sigma z_{\mathbf{q}}^L)^2 \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \right] \simeq 0,$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L}(0) = \frac{g}{2(z_{\mathbf{q}}^L)^2} \simeq \frac{g}{2 + 3q^2}. \quad (4.10)$$

### 4.3 Espectro inicial para ondas íon-acústicas ( $S$ )

Para ondas  $S$ , considerando apenas os termos de emissão espontânea e induzida na equação (2.33), e levando em conta apenas as distribuições de fundo, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S}}{\partial \tau} &= \frac{\pi \mu_{\mathbf{q}}^S}{q^2} \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_{-\infty}^{\infty} du_x \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^S - q_x u_x - q_z u_z) \\ &\quad \times \left[ g (\Phi_e + \Phi_i) + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S} \left( q_x \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} + \frac{m_e}{m_i} q_x \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_x} + q_z \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} + \frac{m_e}{m_i} q_z \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_z} \right) \right] \\ &= \frac{\pi \mu_{\mathbf{q}}^S}{q^2} \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_{-\infty}^{\infty} du_x \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^S - q_x u_x - q_z u_z) \\ &\quad \times \left[ g (\Phi_e + \Phi_i) - 2\sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S} \left( (q_x u_x + q_z u_z) \Phi_e + \frac{m_e}{m_i} \frac{m_i}{m_e} \frac{T_e}{T_i} \Phi_i (q_x u_x + q_z u_z) \right) \right] \end{aligned}$$

Portanto o espectro de equilíbrio pode ser obtido fazendo essa expressão igual a zero,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S}}{\partial \tau} &= \frac{\pi \mu_{\mathbf{q}}^S}{q^2} \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_{-\infty}^{\infty} du_x \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^S - q_x u_x - q_z u_z) \\ &\quad \times \left[ g (\Phi_e + \Phi_i) - 2\sigma^2 z_{\mathbf{q}}^L z_{\mathbf{q}}^S \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S} \left( \Phi_e + \frac{T_e}{T_i} \Phi_i \right) \right] \simeq 0. \end{aligned}$$

Se  $T_e = T_i$ , pode-se fatorar a quantidade  $\Phi_e + \Phi_i$ , portanto temos

$$\mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S}(0) = \frac{g}{2\sigma^2 z_{\mathbf{q}}^L z_{\mathbf{q}}^S} = \frac{g}{2 z_{\mathbf{q}}^L z_{\mathbf{q}}^S} = \frac{g}{2qA} \frac{(1+q^2/2)^{1/2}}{(1+3q^2/2)^{1/2}}. \quad (4.11)$$

Essa expressão permite a obtenção de uma relação bastante simples que mostra a relação entre os níveis iniciais das ondas  $L$  e  $S$ ,

$$\frac{\mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L}(0)}{\mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S}(0)} = \frac{g}{2(\sigma z_{\mathbf{q}}^L)^2} \frac{2\sigma^2 z_{\mathbf{q}}^L z_{\mathbf{q}}^S}{g} = \frac{z_{\mathbf{q}}^S}{z_{\mathbf{q}}^L} \ll 1.$$

No caso de  $T_e \neq T_i$ , podemos integrar sobre as velocidades, usando (B.3), com  $\beta = s$  e  $s_1 = s_2 = 0$ . Obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} du_x \int_{-\infty}^{\infty} du_z (\Phi_i) \delta[\sigma z_{\mathbf{q}}^S - q_x u_x - q_z u_z] \\ &= \left( \frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \frac{1}{q} \exp\left(-\frac{m_i T_* (z_{\mathbf{q}}^S)^2}{m_e T_i q^2}\right) \Rightarrow \left( \frac{1}{\pi} \frac{m_i T_e}{m_e T_i} \right)^{1/2} \frac{1}{q} \exp\left(-\frac{m_i T_e (z_{\mathbf{q}}^S)^2}{m_e T_i q^2}\right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_{-\infty}^{\infty} du_x (\Phi_e) \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^S - q_x u_x - q_z u_z) \\ &= \left( \frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \frac{1}{q} \exp\left(-\frac{T_* (z_{\mathbf{q}}^S)^2}{T_e q^2}\right) \Rightarrow \left( \frac{1}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{q} \exp\left(-\frac{(z_{\mathbf{q}}^S)^2}{q^2}\right). \end{aligned}$$

Portanto, a condição para o equilíbrio fica dada por

$$\begin{aligned} & \frac{\pi \mu_{\mathbf{q}}^S}{q^2} \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_{-\infty}^{\infty} du_x \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^S - q_x u_x - q_z u_z) \left[ g (\Phi_e + \Phi_i) - 2\sigma^2 z_{\mathbf{q}}^L z_{\mathbf{q}}^S \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S} \left( \Phi_e + \frac{T_e}{T_i} \Phi_i \right) \right] = 0, \\ & \Rightarrow g \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{q} e^{-(z_{\mathbf{q}}^S)^2/q^2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{q} \left( \frac{m_i T_e}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp\left[-\frac{m_i T_e (z_{\mathbf{q}}^S)^2}{m_e T_i q^2}\right] \right) \\ & - 2\sigma^2 z_{\mathbf{q}}^L z_{\mathbf{q}}^S \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S} \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{q} e^{-(z_{\mathbf{q}}^S)^2/q^2} + \frac{T_e}{T_i} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{q} \left( \frac{m_i T_e}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp\left[-\frac{m_i T_e (z_{\mathbf{q}}^S)^2}{m_e T_i q^2}\right] \right) = 0, \end{aligned}$$

Isolando o espectro inicial das ondas, obtemos

$$\mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S}(0) = \frac{g}{2z_{\mathbf{q}}^L z_{\mathbf{q}}^S} \frac{\left[ \exp\left(-\frac{(z_{\mathbf{q}}^S)^2}{q^2}\right) + \left(\frac{m_i T_e}{m_e T_i}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m_i T_e}{m_e T_i} \frac{(z_{\mathbf{q}}^S)^2}{q^2}\right) \right]}{\left[ \exp\left(-\frac{(z_{\mathbf{q}}^S)^2}{q^2}\right) + \frac{T_e}{T_i} \left(\frac{m_i T_e}{m_e T_i}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m_i T_e}{m_e T_i} \frac{(z_{\mathbf{q}}^S)^2}{q^2}\right) \right]}. \quad (4.12)$$

## 4.4 Espectro inicial para modos harmônicos eletrostáticos ( $Ln$ )

Nas primeiras abordagens numéricas feitas com a teoria de turbulência fraca levando em conta a presença de harmônicos eletrostáticos, desenvolvidas usando uma aproximação uni-dimensional, foi utilizado um nível arbitrário para a intensidade inicial dos modos harmônicos [18, 42]. Posteriormente, quando a teoria passou a incluir o efeito de flutuações espontâneas [13, 14], Yoon fez uso desses efeitos para calcular o nível máximo inicial para os modos harmônicos. Posteriormente, essa formulação e essa forma de obtenção dos níveis iniciais foram utilizadas para discutir a evolução temporal do sistema, ainda usando uma abordagem uni-dimensional [44].

Para nosso estudo, que faz uso de uma abordagem bi-dimensional, é portanto interessante fazer a análise numérica levando em conta essas duas diferentes formas de atribuição dos níveis iniciais dos harmônicos eletrostáticos. Vamos então apresentar brevemente alguns detalhes referentes à formulação empregada em [42], e também alguns detalhes relativos à formulação empregada em [44].

### 4.4.1 Espectro inicial arbitrário para os harmônicos eletrostáticos

Como já mencionado, Refs. [18] e [42] fizeram uso de formas arbitrárias para o espectro inicial dos harmônicos. No caso de [18], que discutia apenas o harmônico  $n = 2$ , em adição aos modos normais  $L$  e  $S$ , foi simplesmente utilizado um valor inicial, uniforme em todo o espaço de números de onda. Em [42], que levava em conta a presença de diversos harmônicos, foi utilizado um modelo com dependência no número de onda, e diferente para diferentes valores do índice  $n$  que caracteriza o harmônico.

Vamos então apresentar aspectos básicos a respeito da forma de introdução dos níveis iniciais dos harmônicos, conforme o procedimento de Gaelzer *et al.* (2003), Ref. [42]. Nesse artigo foi proposto para os harmônicos um espectro inicial de forma gaussiana

(ver equação (13) de [42]), dado por

$$I^{Ln}(q) = \frac{I^n}{\sqrt{\pi}\Delta} e^{\left(-\frac{[q-nq^{L1}]^2}{\Delta^2}\right)}, \quad (4.13)$$

sendo que o harmônico deveria crescer na vizinhança de  $q \sim nq^{L1}$ , com uma largura  $\Delta$ . A quantidade  $I$  é determinada pela expressão

$$I^n = I^1 e^{-\beta(n-1)} n^{-\alpha}, \quad (4.14)$$

onde  $I^1$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes que podem ser escolhidas de forma arbitrária. A escolha da combinação de uma função exponencial e uma lei de potências nos fornece diferentes relações entre os espectros iniciais dos modos harmônicos.

#### 4.4.2 Espectro inicial baseado em flutuações espontâneas

No início do processo de interação do feixe de plasma  $t = 0$ , a correção não-linear da quantidade  $D(q)$  deve ser insignificante. Portanto, podemos simplesmente substituir esta quantidade pela resposta linear. Também deve haver um nível inicial finito de harmônicos eletrostáticos, obtido da equação (2.49) para  $t = 0$ , que pode ser reescrita como

$$\langle E^2 \rangle_q(0) = \sum_a \frac{2\hat{n}e_a^2}{\pi k^2 |\epsilon(q)|^2} \int d\mathbf{v} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) F_a(0). \quad (4.15)$$

Se nós somente escolhermos a contribuição dos zeros do denominador que satisfazem  $\epsilon(q) = 0$ , em seguida obtemos a fórmula de emissão espontânea para os modos próprios lineares, que não é da nossa preocupação. No entanto, a fórmula geral que aparece acima indica que modos diferentes aos modos próprios podem existir em  $t = 0$ , para números de onda que satisfazem  $[\epsilon(q) \neq 0]$ . A maioria destas flutuações térmicas ou modos não próprios se desvanece uma vez que o sistema começa a evoluir, portanto, inicialmente, eles são ignorados. No entanto, para os modos harmônicos, que não são modos próprios, é importante que as contribuições diferentes daquelas dos polos sejam mantidas. Desta forma, a equação (4.15) para emissão espontânea pode ser aplicada para determinar o nível inicial destes harmônicos eletrostáticos. De forma aproximada a função dielétrica pode ser escrita como

$$\epsilon(q) \approx 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{3}{2\zeta}\right) + 2i\sqrt{\pi} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \zeta^3 e^{-\zeta^2},$$

onde  $\zeta = \omega/kv_{th}^e$ . Para os modos harmônicos excitados por um feixe energético de elétrons com velocidade média  $V_0$ , é esperado que  $\omega \sim n\omega_{pe}$  e  $k \sim n\omega_{pe}/V_0$ . Fazendo uso desta estimativa, podemos obter a razão entre o nível inicial da intensidade do  $n$ -ésimo harmônico e a intensidade do modo fundamental, como se pode ver na equação (27) de [13], que é reproduzida aqui,

$$\frac{I_{\mathbf{k}}^{Ln}(0)}{I_{\mathbf{k}}^{L1}(0)} = \frac{n(9/4 + \Gamma)}{[(n^2 - 1)U^2 - 3/2]^2 + \Gamma}, \quad (4.16)$$

onde

$$\Gamma = 4\pi U^{10} e^{-2U^2}, \quad U = V_0/v_{th}^e,$$

onde  $I_{\mathbf{k}}^{L1}(0)$ , está dada por (4.10).

Uma outra abordagem para o espectro inicial dos harmônicos é aquela utilizada no caso de uma abordagem uni-dimensional apresentada no artigo [44]. Nesse artigo, Yoon propôs uma outra abordagem para determinação dos níveis iniciais dos harmônicos, com menor intensidade do que aquela obtida diretamente a partir da equação (4.15), considerando a região  $\epsilon(q) \neq 0$ . Conforme a formulação em que o nível inicial dos harmônicos eletrostáticos é artificialmente reduzido, a intensidade inicial do harmônico de índice  $n$  é dada por [44]

$$I^n(\mathbf{k}, 0) = \frac{I_{max}^n}{I_{max}^1} \frac{g}{[2\pi(1 + 3k^2/2)]^n}, \quad (4.17)$$

onde  $I_{max}^n/I_{max}^1$  é dado pela equação (4.16). Essa formulação com intensidade inicial reduzida foi proposta de modo a se adequar aos níveis iniciais reduzidos utilizados em *simulações de Vlasov* [44].

Tendo obtido expressões para os níveis iniciais dos espectros dos modos normais e dos harmônicos, tendo definido expressões para as distribuições de velocidade das partículas do plasma, e tendo o conjunto completo de equações para a evolução de ondas e partículas, em formulação bi-dimensional, procedemos de modo a adaptar o código numérico escrito na linguagem Fortran 90, desenvolvido no âmbito do grupo de Física de Plasmas da UFRGS, e que vem sendo utilizado para análises numéricas bi-dimensionais envolvendo o uso da teoria de turbulência fraca. No caso, adaptamos o código e o expandimos no sentido da incorporação de efeitos envolvendo os harmônicos eletrostáticos.

No próximo capítulo mostramos em detalhe e analisamos os resultados obtidos com o uso desse código numérico. Em seguida, apresentamos as conclusões obtidas e perspectivas de continuidade do trabalho.

## Capítulo 5

# Resultados

Usamos as equações da teoria de turbulência fraca já mencionadas no capítulo 3, que são as equações para ondas  $L$  eq. (3.6), ondas  $S$  eq. (3.7) e ondas  $Ln$  eq. (3.9), e a equação para a distribuição de velocidades das partículas eq. (3.14). A solução numérica foi feita pelo método *splitting*<sup>1</sup> para a equação das partículas e pelo método *Runge-Kutta* de quarta ordem para as equações das ondas, iterando para fazer evoluir o sistema no tempo. Nossos primeiros cálculos incluem o primeiro harmônico, que chamaremos de  $N$ . Posteriormente apresentamos os resultados obtidos incluindo harmônicos de mais alta ordem  $Ln$ .

Para obtenção dos resultados numéricos, é necessário o uso de condições iniciais. Para os elétrons, adotamos como condição inicial uma distribuição Maxwelliana com um feixe de baixa densidade, dada pela equação (4.9). Embora a equação (4.9) permita a existência de feixes contra-propagantes, em nossa análise apenas levamos em conta a existência de um único feixe. Para os íons, adotamos uma distribuição Maxwelliana dada pela equação (4.8). Para o espectro inicial das ondas  $L$  usamos a equação (4.10), e para o espectro inicial das ondas  $S$  a equação (4.12). No que se refere aos harmônicos de ondas de Langmuir  $N$ , adotamos dois procedimentos para o estabelecimento do espectro inicial. Fazemos análises supondo forma e intensidade iniciais arbitrárias para os espectros dos harmônicos, usando a equação (4.13), e também análises que partem de espectros iniciais dos harmônicos obtidos segundo um procedimento que faz uso das flutuações espontâneas do plasma, com duas variantes. Em uma destas variantes usamos diretamente uma expressão aproximada obtida a partir do termo que descreve as flutuações espontâneas, equação (4.16). Na outra variante, utilizamos uma abordagem que faz uso de uma expressão relacionada com as flutuações espontâneas, mas com intensidade artificialmente reduzida, equação (4.17).

---

<sup>1</sup>Usado para resolver equações com derivadas parciais (ver Apêndice C).

A solução numérica envolve equações de diferenças finitas, nos espaços de números de onda e de velocidades. Escolhemos o número de pontos nas grades e o passo de tempo de forma que os gráficos dos resultados tivessem suavidade e boa resolução e que o tempo de simulação não ficasse longo demais. Fizemos diversos testes, mudando tanto a quantidade de pontos quanto o passo de tempo, e verificamos que os resultados eram praticamente indistinguíveis uns dos outros, o que nos deu confiança sobre a estabilidade dos resultados.

Usamos um conjunto de parâmetros fixos usados em todas as análises apresentadas neste capítulo e outros dois conjuntos específicos para as duas situações investigadas (cabe destacar que a escolha dos parâmetros é baseado em plasmas espaciais). A primeira destas situações envolve a presença apenas do harmônico  $n = 2$  (ondas  $N$ ), além dos modos normais  $L$  e  $S$ . A segunda situação envolve a presença dos modos normais e de harmônicos desde  $n = 2$  até  $n = 5$ .

$$\text{Parâmetros usados em em todos os casos} \left\{ \begin{array}{ll} \text{Parâmetro do plasma } g & 5 \times 10^{-3} \\ \text{Razão de temperaturas } T_e/T_i & 7,0 \\ \text{Velocidade do feixe para frente } v_f/v_e & 5 \\ \text{Temperatura do feixe } T_f/T_e & 1 \\ \text{Intervalo de velocidades } u_{\perp} & [0, 12] \\ \text{Intervalo de velocidades } u_{\parallel} & [-12, 12] \end{array} \right.$$

$$\text{Parâmetros específicos do caso incluindo apenas o harmônico } N \left\{ \begin{array}{ll} \text{Grades de velocidades} & 51 \times 101 \\ \text{Grades de números de onda} & 51 \times 51 \\ \text{Números de onda } q_{\perp}, q_{\parallel} & [0,0,0,6] \\ \text{Densidade do feixe } n_f/n_0 & \left\{ \begin{array}{l} 2 \times 10^{-4} \\ 6 \times 10^{-4} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Os resultados obtidos com o programa para diferentes instantes de tempo são representados em gráficos feitos com o *software* “Gnuplot” (figuras 5.6, 5.7, 5.8, 5.9, 5.10, 5.11, 5.12, 5.13, 5.14, 5.15 e 5.16) e com o *software* “MATLAB” (figuras 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 e 5.5). Usamos escala logarítmica no eixo  $z$  para mostrar com mais detalhe os resultados da interação entre partículas e ondas. Parte dos resultados apresentados neste trabalho já foram publicados, no artigo [49].

## 5.1 Análise incluindo o harmônico $n = 2$

Inicialmente vamos começar investigando a evolução temporal do sistema levando em conta a existência de ondas  $S$ ,  $L$  e  $N$ . Nessa primeira análise levamos em conta apenas os efeitos de emissão espontânea e induzida para as ondas  $S$  e  $L$ , e de emissão induzida para as ondas  $N$ . Como espectro inicial para o harmônico, usamos a equação (4.16).

As equações utilizadas nessa análise, para ondas  $L$  e  $S$ , podem ser sintetizadas da seguinte forma

$$\begin{aligned}\partial_\tau \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^L &= \partial_\tau \left[ \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^L|_{emiss}^{esp} + \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^L|_{emiss}^{ind} \right], \\ \partial_\tau \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^N &= \partial_\tau \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^N|_{emiss}^{ind}.\end{aligned}$$

Na figura 5.1 se mostra a intensidade normalizada do espectro de ondas  $L$ , em escala logarítmica, como função das componentes do número de onda normalizado  $q_\perp = k_\perp v_{te}/\omega_{pe}$  e  $q_\parallel = k_\parallel v_{te}/\omega_{pe}$ . A densidade do feixe usada é  $n_f/n_0 = 2,0 \times 10^{-4}$ . Como já mencionado, os resultados mostrados nesta figura levam em conta somente a emissão espontânea e induzida, na equação (3.6).

A figura 5.1(a) mostra o espectro de ondas em  $\tau = 500$ , a figura 5.1(b) em  $\tau = 1000$ , a figura 5.1(c) em  $\tau = 2000$  e a figura 5.1(d) em  $\tau = 4000$ . A sequência de figuras mostra o crescimento do pico principal de ondas de Langmuir, em  $q \simeq 0.2$ , correspondente à posição de ressonância onda-partícula (região do feixe). O pico cresce rapidamente entre  $\tau = 500$  e  $\tau = 1000$ , e logo parece estabilizar-se, depois de  $\tau = 1000$ .

Na figura 5.2 se mostra a correspondente intensidade normalizada do espectro de ondas  $N$ , em escala logarítmica, como função das componentes do número de onda normalizado  $q_\perp$  e  $q_\parallel$ . Para a evolução das ondas  $N$  na figura 5.2, temos em conta somente o termo de emissão induzida da equação (3.9).

A figura 5.2(a) mostra o espectro de ondas  $N$  em  $\tau = 500$ , a figura 5.2(b) em  $\tau = 1000$ , a figura 5.2(c) em  $\tau = 2000$  e a figura 5.2(d) em  $\tau = 4000$ . A sequência de figuras mostra o crescimento do pico principal do primeiro harmônico, em  $q \simeq 0.5$ , correspondente à posição de ressonância das partículas na região de derivada positiva do feixe com ondas cuja velocidade de fase é  $z_{\mathbf{q}}^N/q$ . A sequência de figuras também mostra o decaimento do espectro inicial na região adjacente ao pico, devido ao amortecimento de Landau.

É de notar que a região com  $q_\parallel < 0$  permanece inalterada, o que ocorre porque a teoria não inclui a possibilidade da evolução de harmônicos propagando-se para trás. Isso se baseia no fato de que harmônicos propagando-se no sentido oposto ao feixe não são



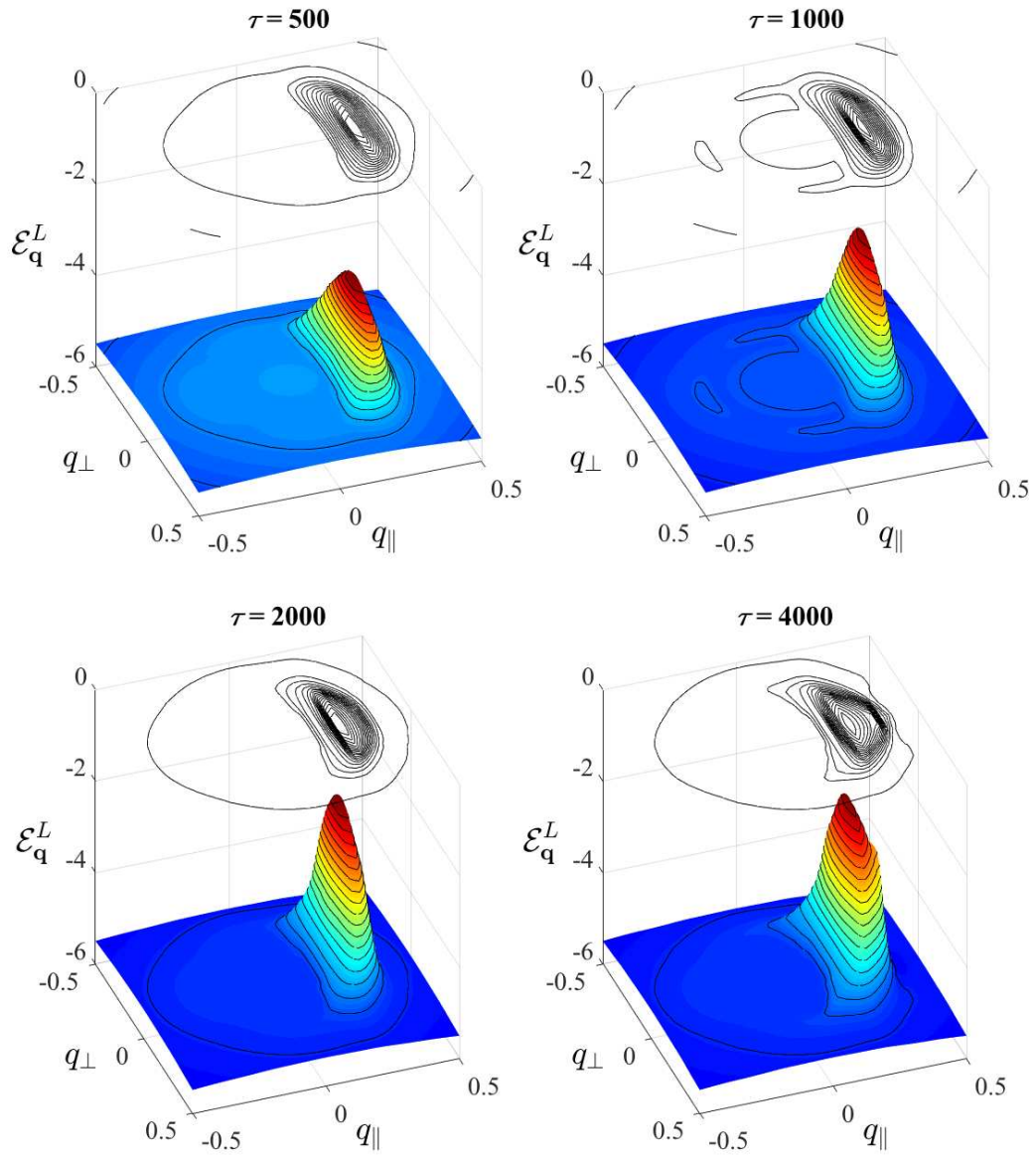


FIGURA 5.1: Intensidade normalizada de ondas  $L$ , vs.  $q_\perp = k_\perp v_{te}/\omega_{pe}$  e  $q_\parallel = k_\parallel v_{te}/\omega_{pe}$ . Resultados obtidos tendo em conta somente emissão espontânea e induzida, para  $\tau = 500$ ,  $\tau = 1000$ ,  $\tau = 2000$  e  $\tau = 4000$ . Reprinted from [20], with the permission of AIP Publishing.

observados em simulações numéricas, [32, 50], ou pelo menos, são muito mais fracos em comparação com ondas propagando-se para a frente. Como o espectro de ondas  $N$  para  $q_\parallel$  negativo não muda em relação aos níveis iniciais, optamos por plotar os resultados somente sobre a parte positiva de  $q_\parallel$ , entre  $0, 2 < q_\parallel < 1, 0$ . Nas figuras 5.2(b) e 5.2(c)

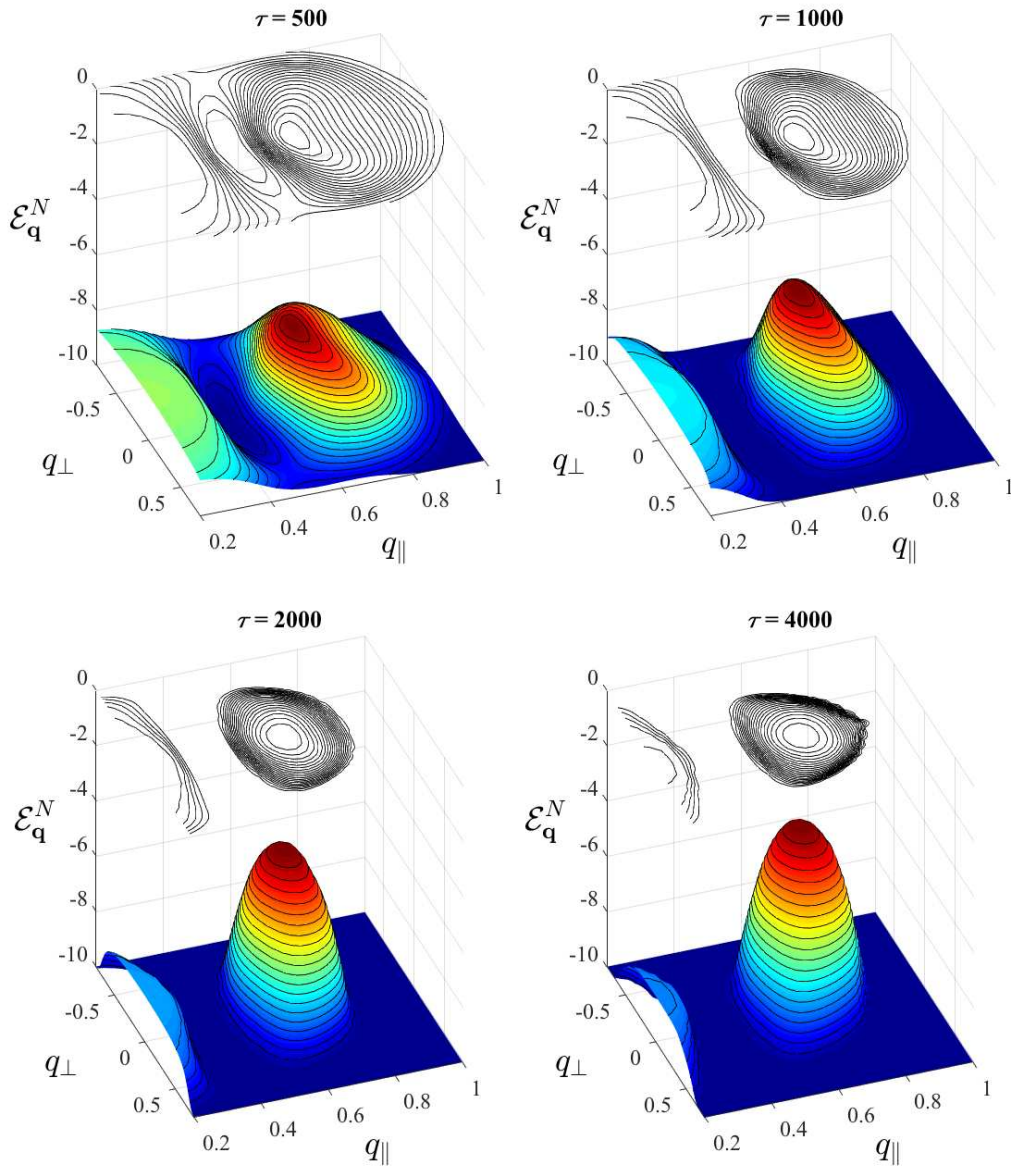


FIGURA 5.2: Intensidade normalizada de ondas  $N$ , vs.  $q_{\perp}$  e  $q_{\parallel}$ . Resultados obtidos tendo em conta somente a emissão induzida, para  $\tau = 500$ ,  $\tau = 1000$ ,  $\tau = 2000$  e  $\tau = 4000$ . Reprinted from [20], with the permission of AIP Publishing.

o pico de ondas  $N$  parece atingir a altura máxima entre  $\tau = 1000$  e  $\tau = 2000$ , enquanto o amortecimento continua ocorrendo, com uma considerável evolução entre as figuras 5.2(c) e 5.2(d).

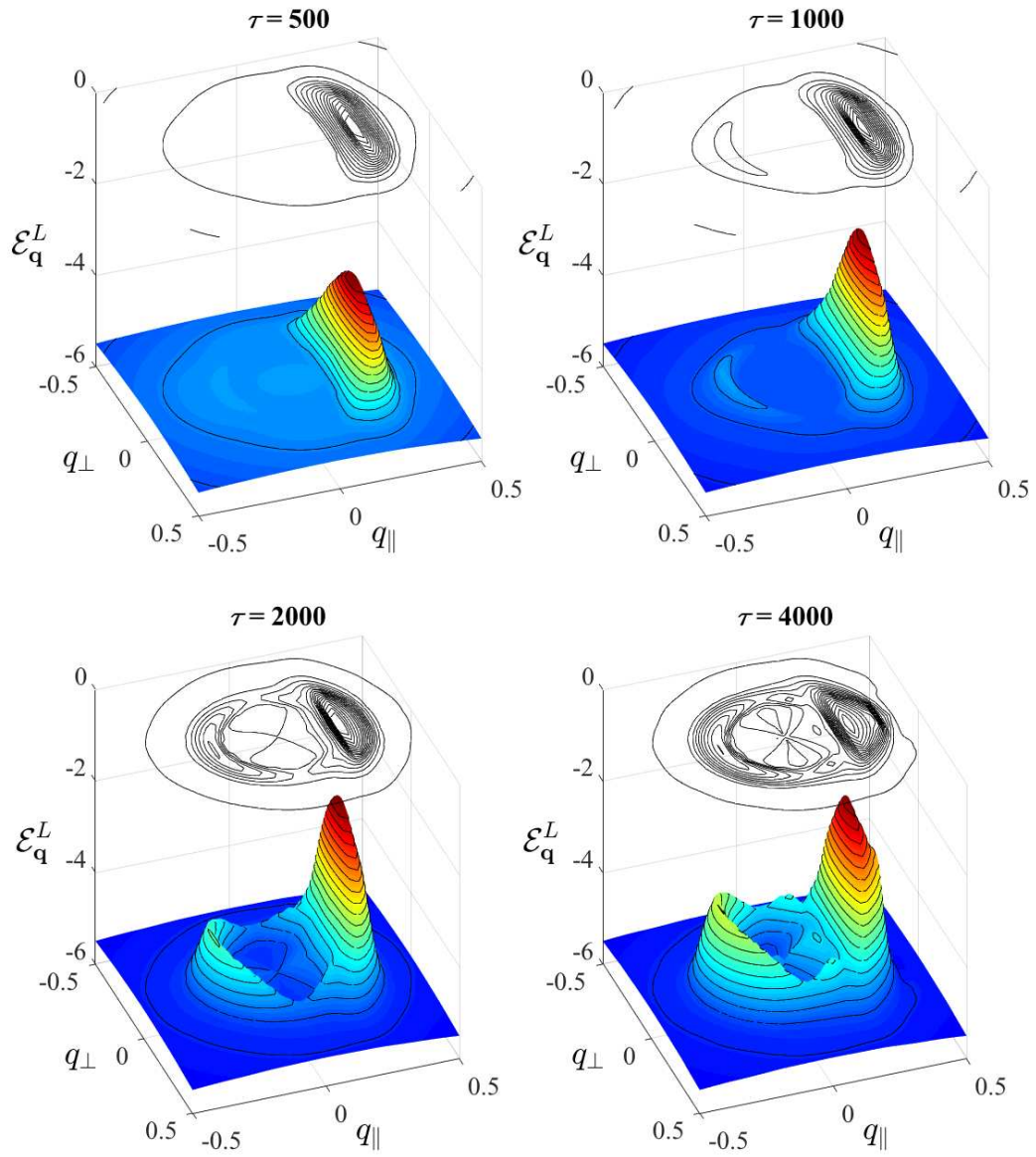


FIGURA 5.3: Intensidade normalizada de ondas  $L$ , vs.  $q_{\perp}$  e  $q_{\parallel}$ . Resultados obtidos tendo em conta emissão espontânea e induzida, e também o efeito de espalhamento, para  $\tau = 500$ ,  $\tau = 1000$ ,  $\tau = 2000$  e  $\tau = 4000$ . Reprinted from [20], with the permission of AIP Publishing.

Em prosseguimento da análise, incluiremos um efeito não linear (espalhamento) na descrição da evolução temporal das ondas  $L$  e das ondas  $N$ . Esquemáticamente, as equações

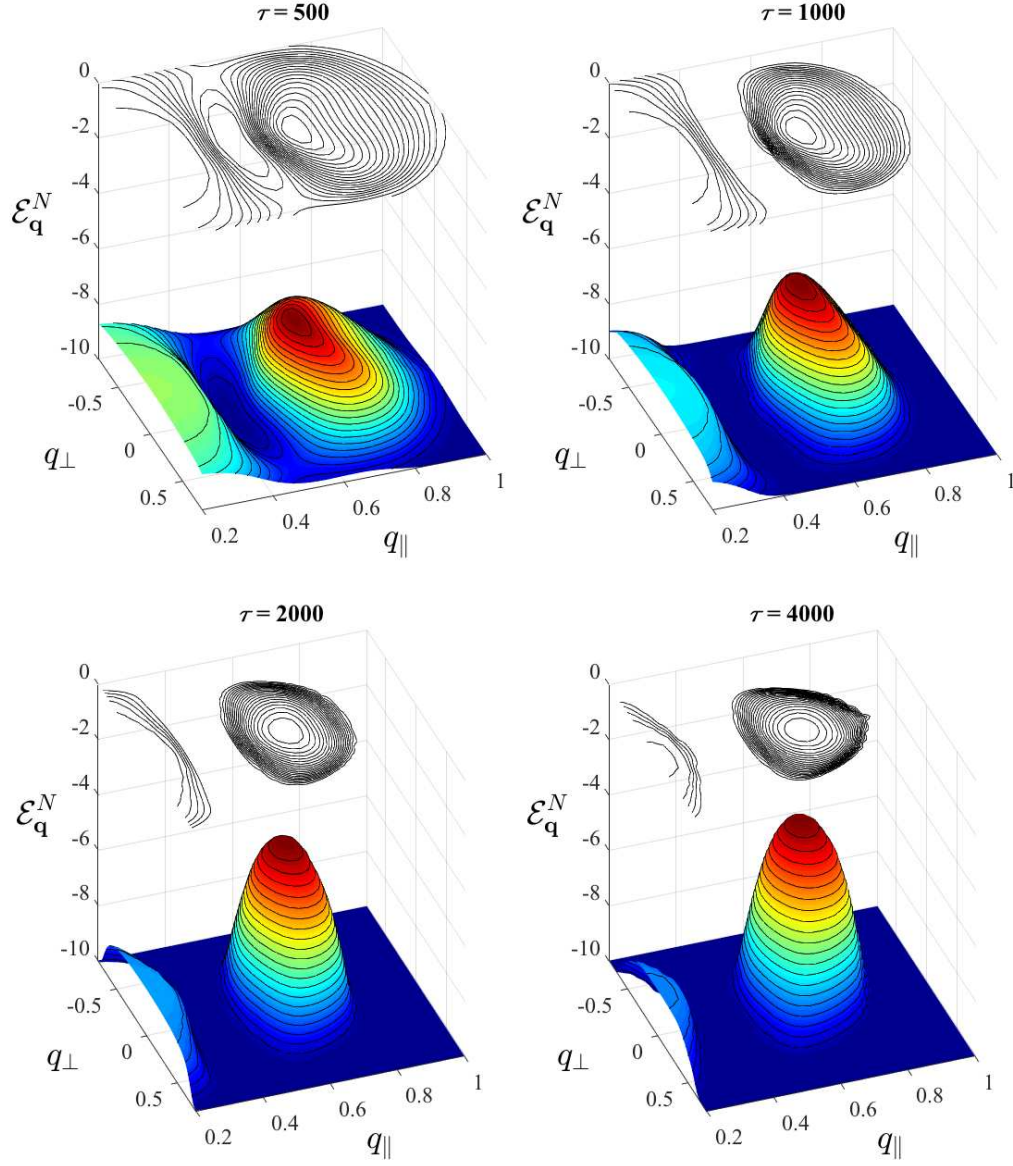


FIGURA 5.4: Intensidade normalizada de ondas  $N$ , vs.  $q_{\perp}$  e  $q_{||}$ . Resultados obtidos tendo em conta emissão induzida e o efeito de espalhamento, para  $\tau = 500$ ,  $\tau = 1000$ ,  $\tau = 2000$  e  $\tau = 4000$ . Reprinted from [20], with the permission of AIP Publishing.

utilizadas nessa análise podem ser descritas na forma seguinte

$$\begin{aligned} \partial_{\tau} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^L &= \partial_{\tau} \left[ \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^L|_{emiss}^{esp} + \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^L|_{emiss}^{ind} + \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^L|_{scat}^{esp} + \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^L|_{scat}^{ind} \right], \\ \partial_{\tau} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^N &= \partial_{\tau} \left[ \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^N|_{emiss}^{ind} + \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^L|_{scat}^{ind} \right]. \end{aligned}$$



Nas figuras 5.3 e 5.4 se mostram resultados similares aos apresentados nas figuras 5.1 e 5.2, com a diferença que no caso das figuras 5.3 e 5.4 incluímos o efeito do espalhamento (não-linear) nas equações para a evolução das ondas (usamos a mesma densidade de feixe que foi usada nas figuras 5.1 e 5.2). Nessas figuras, 5.3 e 5.4, mostramos resultados para valores de  $\tau = 500, 1000, 2000$ , e  $\tau = 4000$ , correspondentes aos painéis (a), (b), (c) e (d), respectivamente.

Na figura 5.3 vemos a evolução das ondas  $L$ . A figura 5.3(a) mostra o espectro em  $\tau = 500$ , com o pico principal de ondas  $L$  bem definido, similar ao que vemos na figura 5.1(a). Em  $\tau = 1000$ , na figura 5.3(b), notamos a presença de ondas com propagação para trás e a formação de uma estrutura em forma de anel no espaço do número de onda, efeito que foi encontrado anteriormente em estudos sem a presença de harmônicos de ondas  $L$  [20]. Estas características são mais evidentes ao longo da evolução do sistema, sendo completamente desenvolvidas em  $\tau = 4000$ , tempo normalizado correspondente à figura 5.3(d).

A evolução dos harmônicos de ondas  $L$  incluindo emissão induzida e espalhamento pode ser vista na figura 5.4. Os quatro gráficos da figura 5.4 são bem similares aos gráficos correspondentes à figura 5.2. O espalhamento não produz efeitos notáveis na evolução de harmônicos, mesmo depois do transcorrer um intervalo de tempo de  $\tau = 0$  até  $\tau = 4000$ , no qual os efeitos do espalhamento são significativos para as ondas  $L$ .

Na figura 5.5, fazendo uso de curvas de nível, mostramos resultados obtidos considerando um feixe de maior densidade, com  $n_f/n_e = 6,0 \times 10^{-4}$ . Na figura 5.5(a) se mostra o espectro de ondas  $L$  em  $\tau = 4000$ , obtido tomando em conta somente processos de emissão espontâneos e induzidos, da equação (3.6). Apesar de que a evolução temporal do pico principal de ondas  $L$  da figura 5.5(a) não é mostrada, pode-se verificar que a altura do pico é similar à altura do pico da figura 5.1(d), sendo a evolução mais rápida e de altura levemente maior no caso do feixe de maior densidade.

Na figura 5.5(b) é mostrado o espectro de ondas  $L$  em  $\tau = 4000$ , obtido tendo em conta os efeitos de emissão espontânea e induzida e de espalhamento, na equação (3.9). O espectro obtido é similar ao obtido no caso do feixe de menor densidade da figura 5.3(d). Na figura 5.5(b), características como o pico de ondas para trás e o anel são mais pronunciadas no espaço de número de onda, em comparação como que foi obtido no caso de feixe com menor densidade, mostrado na figura 5.3(d). Os espectros de ondas  $N$  mostrados nas figuras 5.5(a) e 5.5(b), correspondem aos casos sem espalhamento e com espalhamento, respectivamente, obtidos no caso de feixe com maior densidade. Notamos que, da mesma forma que nos casos correspondentes obtidos com feixe de menor densidade, mostrado nas figuras 5.2(d) e 5.4(d), a presença do termo de espalhamento não tem efeitos muito significativos sobre a evolução do harmônico  $N$ .

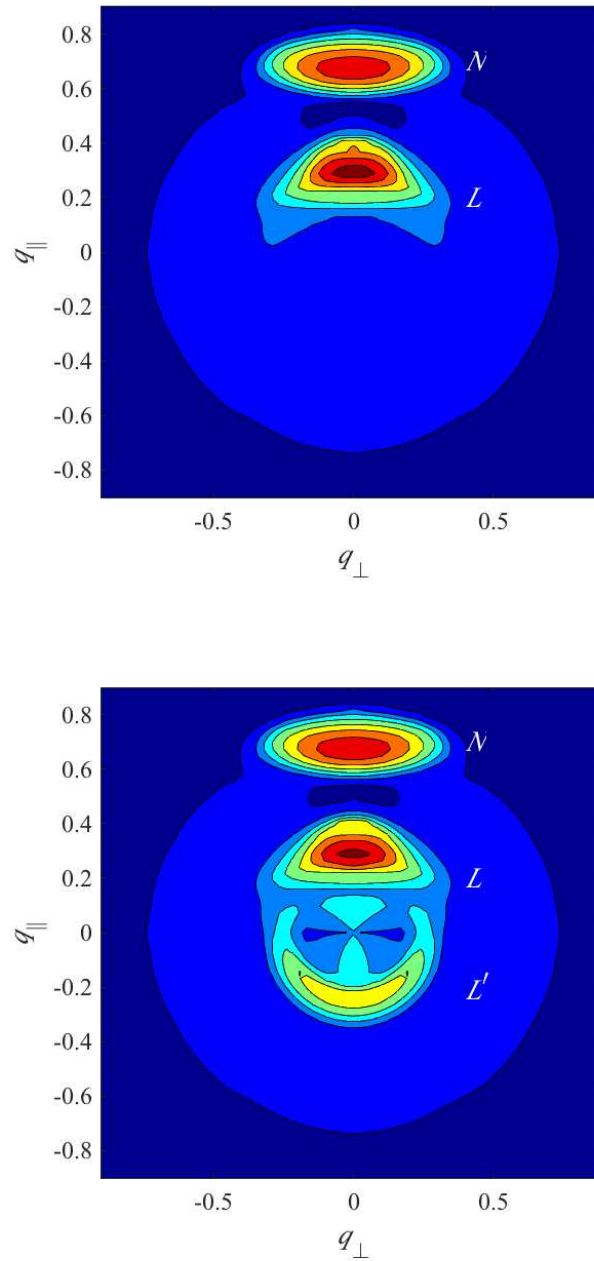


FIGURA 5.5: Intensidade normalizada de ondas  $L$  e  $N$ , vs.  $q_{\perp}$  e  $q_{\parallel}$  para um tempo de  $\tau = 4000$ . A primeira figura tem em conta a emissão espontânea para ondas  $L$  e emissão induzida para ondas  $L$  e  $N$ . A segunda figura tem em conta emissão espontânea para ondas  $L$  e emissão induzida para ondas  $L$  e  $N$ , também tem em conta o espalhamento de ondas  $L$  e  $N$ . Reprinted from [20], with the permission of AIP Publishing.

Na Figura 5.6 se mostra o espectro de ondas  $L$  e  $N$  como função do valor absoluto do número de onda normalizado  $q$ , obtido depois de integrar na variável angular no espaço do número de onda. Nos quatro gráficos da figura 5.6 encontramos as linhas

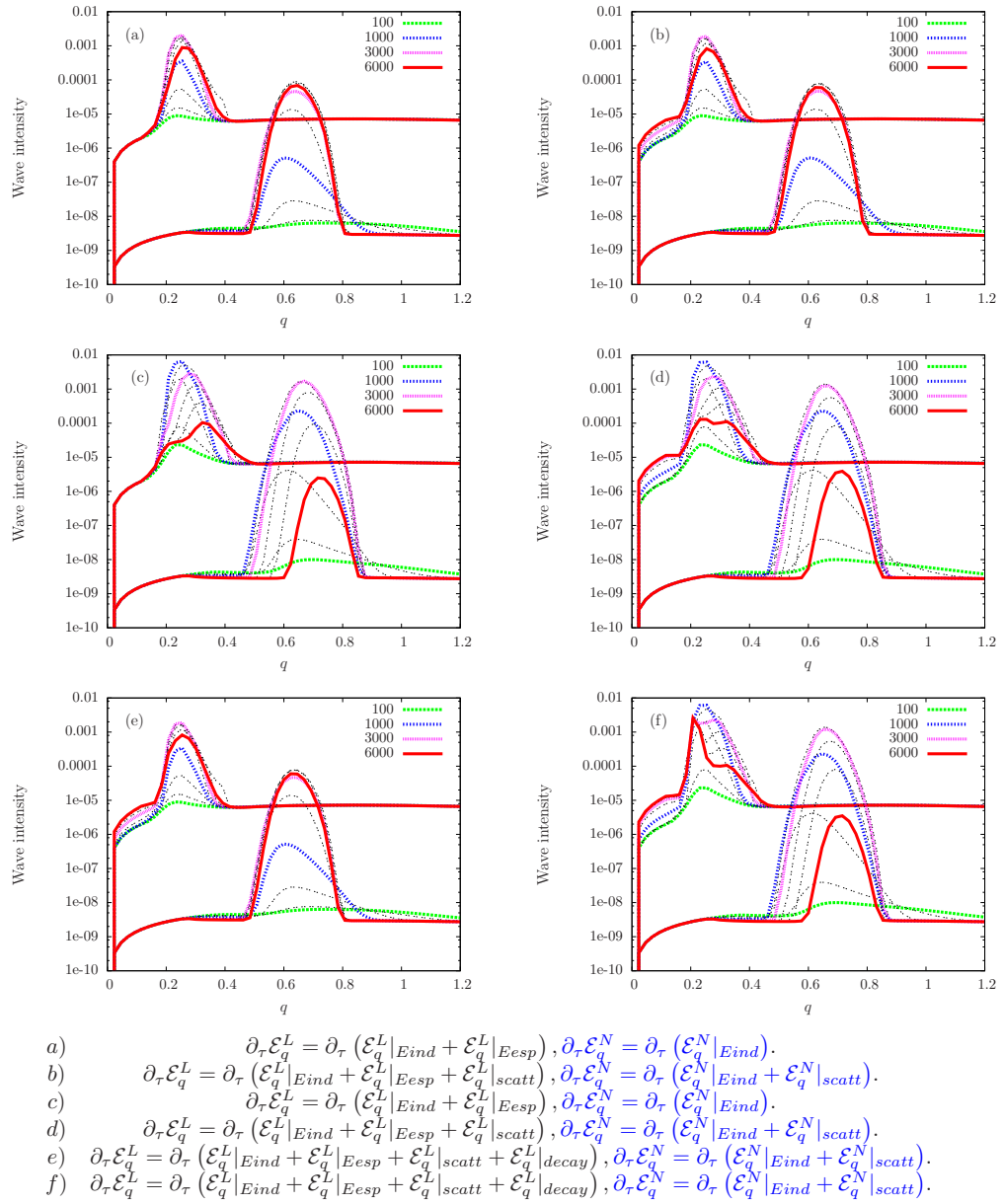


FIGURA 5.6: Intensidade normalizada da ondas  $L$  e  $N$ , vs.  $q$ , para diversos valores de  $\tau = \{100, 200, 500, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000\}$ . Os resultados mostrados nos painéis (c), (d) e (f) são obtidos com densidade de feixe  $n_f/n_e = 6,0 \times 10^{-4}$ , e os resultados mostrados nos painéis (a), (b) e (e) são obtidos considerando um feixe com densidade  $n_f/n_e = 2,0 \times 10^{-4}$ . Reprinted from [20], with the permission of AIP Publishing.

correspondentes a  $\tau = 100, 200, 500, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000$ , e  $\tau = 6000$ . A linha para  $\tau = 100$  é de cor verde, a linha para  $\tau = 1000$  é de cor azul, a linha para  $\tau = 3000$  é de cor magenta, e para  $\tau = 6000$  a linha é de cor vermelha. As outras linhas correspondentes a  $\tau = 200, 500, 2000, 4000$ , e  $\tau = 5000$ , são de cor preta.

A figura 5.6(a) mostra os resultados obtidos para o caso de um feixe de densidade

$n_f/n_e = 2,0 \times 10^{-4}$ , tendo em conta os efeitos de emissão espontânea e induzida na equação (3.6), para ondas  $L$ , e somente efeito de emissão induzido na equação (3.9), para ondas  $N$ .

Como podemos ver na figura 5.6(a), o pico no espectro de ondas  $L$  começa a crescer na região perto de  $q = 0,2$ ; cresce regularmente até chegar ao valor máximo perto de  $\tau = 3000$ , depois começa um lento decrescimento, enquanto sofre um pequeno processo de alargamento. O pico de ondas  $N$  aparece como uma pequena perturbação para  $\tau = 100$ , logo cresce ao redor do valor  $q \simeq 0,65$ , chegando ao valor máximo perto de  $\tau = 4000$ , e logo começa a decrescer lentamente. A altura máxima do pico de ondas  $N$  é aproximadamente  $1/20$  do máximo do pico da onda  $L$ .

Na figura 5.6(b) podemos ver os resultados obtidos para  $n_f/n_e = 2,0 \times 10^{-4}$  quando temos em conta também os efeitos de espalhamento. Os resultados obtidos são similares aos obtidos quando se ignoram os efeitos de espalhamento, que aparecem na figura 5.6(a).

Verifica-se na comparação entre as figuras 5.6(a) e (b) que os espectros de ondas  $N$  obtidos nos dois casos praticamente não podem ser distinguidos, na escala da figura. No caso das ondas  $L$ , o efeito do espalhamento leva ao aparecimento de uma estrutura tipo anel no espaço de número de onda, que aparece como um aumento na intensidade na região de  $q \leq 0,2$ , como se pode ver na figura 5.6(b) e não se vê na figura 5.6(a).

Nas figuras 5.6(c) e 5.6(d) mostramos os resultados obtidos tendo em conta um feixe de maior densidade,  $n_f/n_e = 6,0 \times 10^{-4}$ . Na figura 5.6(c) os resultados foram obtidos sem espalhamento, enquanto na figura 5.6(d) os resultados foram obtidos tendo em conta o efeito de espalhamento. A comparação entre os resultados que aparecem nos gráficos (c) e (d) e os gráficos (a) e (b) mostra que a evolução no tempo é mais rápida no caso de maior densidade de feixe, de modo que a evolução tardia no sistema acumula uma considerável diferença entre os dois casos. A Figura 5.6(c) mostra que o máximo no espectro de ondas  $L$  é para  $\tau$  perto do valor  $\tau = 1000$ , e que o pico decresce consideravelmente até o tempo de  $\tau = 6000$ , que é o máximo valor de tempo mostrado na figura.

A comparação entre a figura 5.6(c) e a figura 5.6(d) mostra que a presença do espalhamento causa uma deformação considerável no espectro de ondas  $L$  para tempos maiores, além da formação de um anel na região de pequeno número de onda. Por outro lado, as figuras 5.6(c) e 5.6(d) mostram que o crescimento das ondas  $N$  é tal que atingem a altura máxima para  $\tau$  entre 2000 e 3000. É interessante ver que, para  $\tau \leq 1000$ , as curvas obtidas para ondas  $N$  com e sem efeito de espalhamento são similares. A partir dos gráficos (c) e (d) da figura 5.6 para  $\tau$  na faixa de  $2000 \leq \tau \leq 5000$ , vemos que o pico de ondas  $N$  obtido com espalhamento é ligeiramente menor do que o pico obtido sem efeito de espalhamento. No entanto, para  $\tau = 6000$ , vemos que o pico obtido com



espalhamento, na figura 5.6(d), é algo maior do que o pico que aparece na figura 5.6(c), obtido sem espalhamento. Esta característica tem que ser investigada com mais cuidado, para ver se deve-se a um processo físico real, ou se é devida à instabilidade numérica aparecendo em fases avançadas da evolução no tempo.

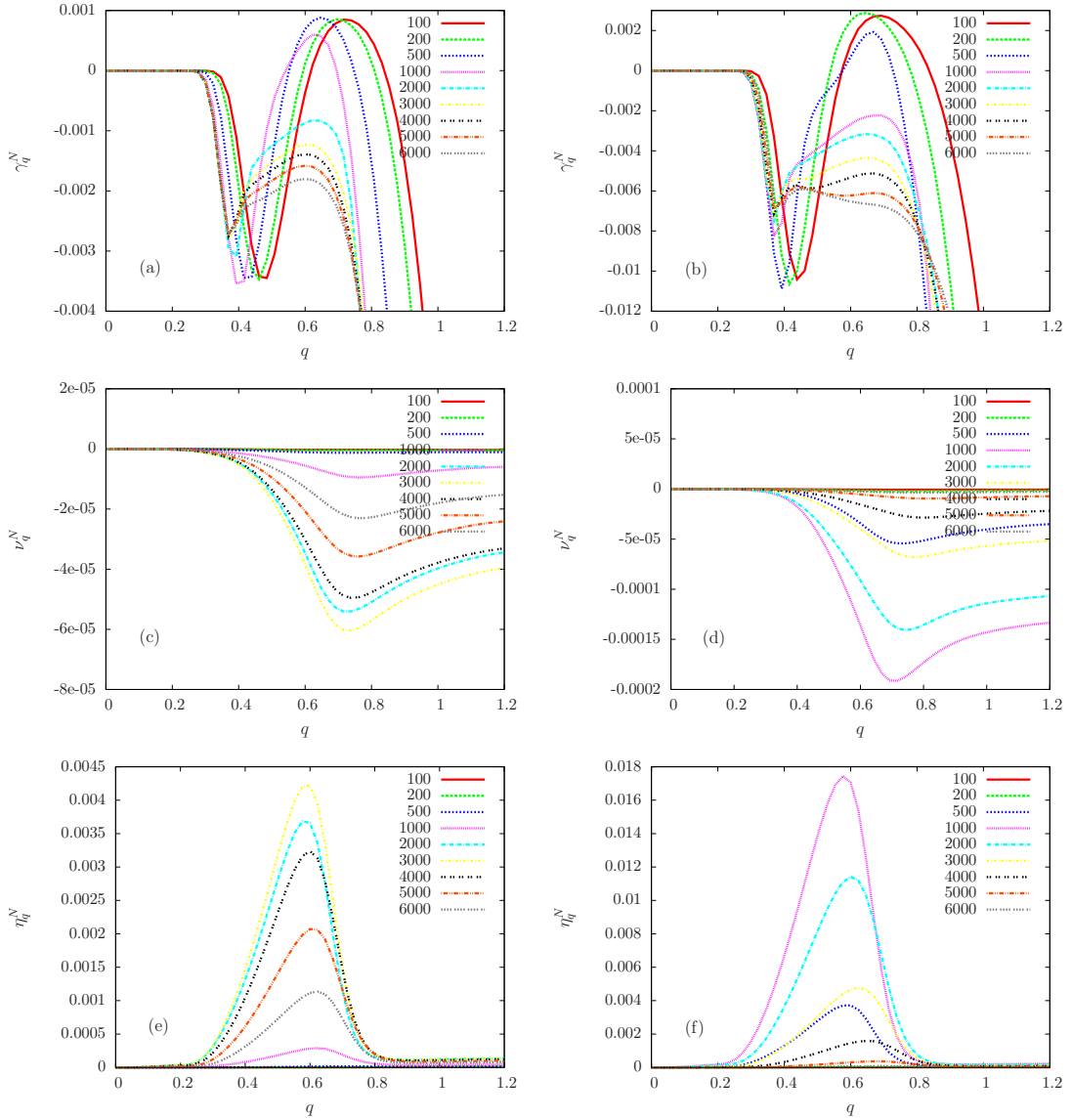


FIGURA 5.7: Coeficientes da equação para harmônicos vs.  $q$  para diversos valores de  $\tau$  (100, 200, 500, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000 e 6000). Os resultados em (a), (c) e (e) foram obtidos usando  $n_f/n_e = 2,0 \times 10^{-4}$ , e os resultados que aparecem em (b), (d) e (f) foram obtidos usando  $n_f/n_e = 6,0 \times 10^{-4}$ . Reprinted from [20], with the permission of AIP Publishing.

Finalmente, na figura 5.7 são apresentados alguns resultados relativos à evolução temporal dos coeficientes associados à evolução dos harmônicos. Apresentamos estes coeficientes como uma função do valor absoluto do número de onda normalizado, depois da integração sobre a variável angular no espaço do número de onda.

O coeficiente associado ao amortecimento ou crescimento por processos quase-lineares é chamado  $\gamma_{\mathbf{q}}^N$ , o coeficiente associado ao espalhamento não linear é  $\nu_{\mathbf{q}}^N$ , e o coeficiente que aparece no denominador tanto do termo quase-linear como do termo de espalhamento na equação (3.9) chamamos de  $\eta_{\mathbf{q}}^N$ . Na figura 5.7 os coeficientes são plotados para diferentes tempos  $\tau$ ,  $\tau = 100$ ,  $\tau = 200$ ,  $\tau = 500$ ,  $\tau = 1000$ ,  $\tau = 2000$ ,  $\tau = 3000$ ,  $\tau = 4000$ ,  $\tau = 5000$ , e  $\tau = 6000$ . Os gráficos foram obtidos considerando dois valores da densidade do feixe, com os outros parâmetros iguais àqueles usados na figura 5.1.

A figura 5.7(a) mostra  $\gamma_{\mathbf{q}}^N$  vs.  $q$ , para o caso de  $n_f/n_e = 2,0 \times 10^{-4}$ . A curva para  $\tau = 100$  representa a fase inicial da evolução do espectro de onda. Vemos que para pequenos valores de  $q$  o amortecimento é desprezível, uma vez que para esses valores de número de onda a ressonância é com uma pequena população, na cauda da distribuição. Para  $0,3 \leq q \leq 0,6$  o amortecimento é bem mais significativo, na extremidade do feixe, e para  $0,6 \leq q \leq 0,9$  o valor positivo de  $\gamma_{\mathbf{q}}^N$  dá conta do crescimento das ondas. Para grandes valores de  $q$ , o amortecimento é muito significativo, devido à derivada negativa na cauda da distribuição de velocidades.

A figura 5.7(a) mostra que ao longo da evolução no tempo o pico de crescimento das ondas se desloca para valores menores de  $q$ . Entre  $\tau = 500$  e  $\tau = 1000$  começa a diminuir a taxa de crescimento das ondas, como podemos ver nas linhas azuis e magenta, respectivamente. Isto ocorre devido à formação do *plateau* na função de distribuição, que leva para zero a taxa de crescimento, com a consequente cessação do crescimento da amplitude das ondas. Em tempos posteriores o pico do harmônico inicia a ser reabsorvido pela distribuição das partículas, como indicam os valores negativos de  $\gamma$  para todo  $q$ , vistos nas curvas obtidas para  $\tau \geq 2000$ . Esses valores negativos de  $\gamma$  se explicam porque o *plateau* ocorre na função de distribuição ao longo da direção paralela, mas no espaço 2D sempre temos regiões com derivadas negativas ao redor do feixe no espaço de velocidades, que dominam a evolução depois do desaparecimento das derivadas positivas da região onde ocorre o achatamento do feixe.

Na figura 5.7(b), usamos uma densidade do feixe maior  $n_f/n_e = 6,0 \times 10^{-4}$ , para analisar a evolução temporal de  $\gamma_{\mathbf{q}}^N$  vs  $q$ . Vemos que qualitativamente os resultados obtidos são similares aos resultados apresentados na figura 5.7(a), exceto que o crescimento é maior, as taxas de amortecimento são maiores, e a evolução no tempo é mais rápida. O máximo coeficiente de crescimento ocorre para  $\tau \simeq 200$ , como vemos na linha verde da figura 5.7(b), com uma redução significativa do crescimento vista em  $\tau = 500$ , representado pela linha azul.

A evolução de  $\nu_{\mathbf{q}}^N$ , coeficiente associado à dispersão não-linear, pode ver-se nas figuras 5.7(c) e 5.7(d). Vemos que o coeficiente de espalhamento é negativo para todos os valores de  $q$ , indicando que o efeito de espalhamento contribui para reduzir o pico dos

harmônicos, ocorrendo uma difusão da intensidade das ondas. No entanto, observamos que o efeito é fraco, comparado com o efeito quase-linear. No caso de menor densidade do feixe, na figura 5.7(c), vemos que o máximo valor absoluto de  $\nu_{\mathbf{q}}^N$  é alcançado para  $\tau \simeq 3000$ , aproximadamente o tempo do máximo no espectro de ondas  $N$  ( $\mathcal{E}_{\mathbf{q}}^N$ ) visto na figura 5.6(c), e que este valor máximo absoluto é menor do que o valor máximo absoluto de  $\gamma_{\mathbf{q}}^N$  no mesmo instante de tempo, visto na figura 5.7(a). Uma análise similar pode-se fazer sobre os resultados obtidos no caso de um feixe de maior densidade, como se mostra na figura 5.7(d).

Os valores do coeficiente  $\eta_{\mathbf{q}}^n$ , vs.  $q$ , para diferentes valores de  $\tau$ , aparecem nas figuras 5.7(e) e 5.7(f). Para o caso de  $n_f/n_e = 2,0 \times 10^{-4}$ , na figura 5.7(e), vemos que a quantidade  $\eta$  apresenta um pico que corresponde com a posição do pico de ondas  $N$  no espaço de número de onda, e que o valor máximo se alcança para  $\tau \simeq 3000$ , aproximadamente o tempo em que ocorre o valor máximo no espectro de ondas  $N$ .

Para  $\tau \leq 500$ , vemos que o valor absoluto de  $\eta_{\mathbf{q}}^N$  de fato é muito pequeno, correspondendo com um valor pequeno de  $|\nu_{\mathbf{q}}^N|$ , confirmando a conjectura apresentada na equação (2.62) (conjectura apresentada em [13] na equação (34)). No entanto, a figura 5.7(e) mostra que o valor máximo de  $\eta_{\mathbf{q}}^N$  não ultrapassa o valor de  $4,5 \times 10^{-3}$ , o que significa que a análise numérica realizada em duas dimensões não confirma a conjectura feita na equação (2.63) (conjectura feita inicialmente em [13] na equação (35)).

Comentários qualitativamente similares podem ser feitos para um feixe de maior densidade, exceto que a evolução é bem mais rápida e que o máximo alcançado por  $\eta_{\mathbf{q}}^N$  é maior, sendo de  $1,8 \times 10^{-2}$  no caso de  $n_f/n_e = 6,0 \times 10^{-4}$ , como se mostra na figura 5.7(f).

## 5.2 Análise incluindo harmônicos $Ln$ de ordem mais alta

O seguinte passo é incluir harmônicos de Langmuir (HL) de ordem mais alta, para isto é conveniente fazer aproximações e considerações na abordagem das equações. Sabemos que a relação de dispersão (2.46) depende das quantidades  $\varepsilon_{\mathbf{q}}^n$  e  $\theta_{\mathbf{q}}^n$ , sendo estas quantidades integrais dependentes da intensidade espectral do HL anterior  $\mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{L(n-1)}$  e do tempo. As formas adotadas para as relações de dispersão dos modos HL são dadas por

$$\frac{\omega^{Ln}}{\omega_{pe}} = n + \frac{3}{2}\lambda_{De}^2\{k_{\perp}^2 + [k_z - (n-1)k_0]^2\} + \frac{3}{2}(n-1)\lambda_{De}^2k_0^2. \quad (5.1)$$

Essa equação é obtida, a partir da relação de dispersão (2.46) (Ver cálculo em detalhe no apêndice D, obtenção da equação (D.13)).

Por outro lado, a escolha do nível inicial tem diferença na evolução temporal dos HL, na nossa solução utilizamos dois níveis diferentes propostos em trabalhos anteriores que usaram uma abordagem uni-dimensional [42,44]. A primeira forma utilizada para o nível inicial é arbitrária, dada pela equação (4.13), e a segunda forma é obtida a partir do termo das flutuações espontâneas, com redução artificial da intensidade, e é dada pela equação (4.17).

Para obtenção dos resultados envolvendo os HL de alta ordem usamos parâmetros específicos levemente diferentes dos usados no estudo que somente envolvia o primeiro HL,  $n = 2$ . Nos números de onda usamos uma faixa maior, conseguindo visualizar os modos HL de ordem mais alta,

$$\text{Parâmetros específicos para} \left\{ \begin{array}{ll} \text{Grades de velocidades} & 53 \times 107 \\ \text{Grades de número de onda} & 41 \times 41 \\ \text{Intervalo de número de onda } q_{\perp}, q_{\parallel} & [-2, 2] \\ \text{Densidade do feixe } n_f/n_0 & 2 \times 10^{-4}. \end{array} \right.$$

Para todos os resultados mostrados nesta seção (figuras 5.8, 5.9, 5.10, 5.11, 5.12, 5.13, 5.14, 5.15 e 5.16), utilizaremos as seguintes equações para o modo fundamental  $L$ , e para os HL de alta ordem  $Ln$ ,

$$\begin{aligned} \partial_{\tau} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^L &= \partial_{\tau} \left[ \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^L|_{emiss}^{esp} + \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^L|_{emiss}^{ind} + \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^L|_{scat}^{esp} + \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^L|_{scat}^{ind} \right], \\ \partial_{\tau} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{Ln} &= \partial_{\tau} \left[ \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{Ln}|_{emiss}^{ind} \right]. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Nestas equações levamos em conta os efeitos de espalhamento, emissão espontânea e induzida, para o modo fundamental. No caso dos HL de alta ordem somente levamos em conta o efeito quase-linear, uma vez que o efeito de espalhamento é pequeno comparado com o efeito de emissão induzida, como foi observado na análise da seção anterior.

### 5.2.1 Nível inicial arbitrário

Para a definição do nível arbitrário dado pela equação (4.13) usamos os seguintes parâmetros

$$\text{Parâmetros} \left\{ \begin{array}{ll} \alpha & 4 \\ \beta & 5 \\ \Delta & 0.2 \\ I^1 & 2.0 \times 10^{-5} \end{array} \right.$$

A expressão matemática que define o nível inicial dos harmônicos é a mesma utilizada na Ref. [42]. Entretanto, os valores dos parâmetros que definimos acima são diferentes

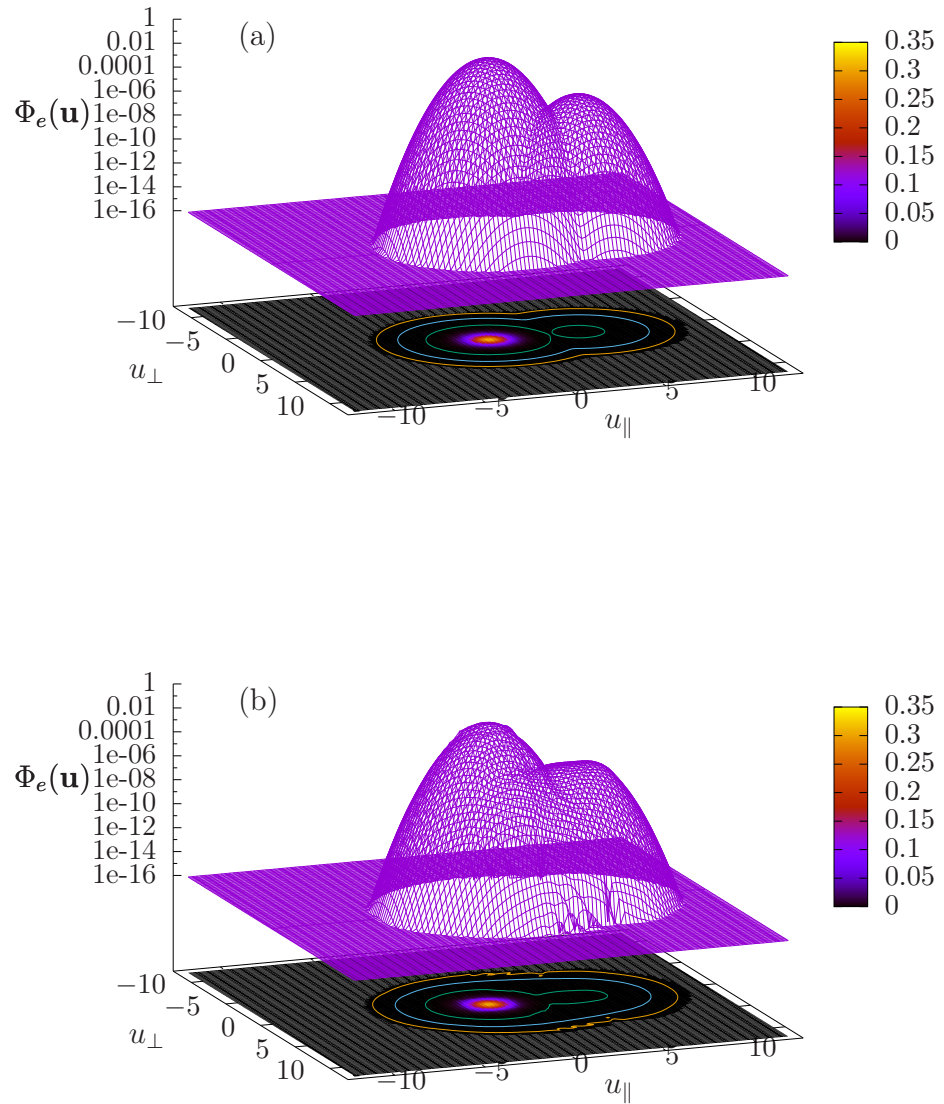


FIGURA 5.8: Função distribuição de elétrons normalizada vs.  $u_{\perp} = v_{\perp}/v_e$  e  $u_{\parallel} = u_{\parallel}/v_e$ , obtida levando em conta a evolução do modo fundamental e dos primeiros 4 HL.  
 (a) Distribuição inicial ( $\tau = 0$ ); (b) Distribuição em  $\tau = 2000$ .

dos valores usados em [42]. Os valores que usamos para os parâmetros foram escolhidos

de forma que a evolução dos harmônicos em 2D ocorra de forma similar à que ocorre em simulações e em soluções obtidas na abordagem 1D [42–44].

Na análise numérica que levou aos resultados mostrados nas figuras a seguir (figuras 5.8, 5.9, 5.10, 5.11 e 5.12) foram levados em conta os efeitos de emissão espontânea, induzida e espalhamento para o modo fundamental, enquanto que para os modos harmônicos levamos em conta apenas o efeito de emissão induzida. As equações utilizadas são aquelas dadas pelo conjunto de equações (5.2).

A figura 5.8 mostra a distribuição de elétrons em função das velocidades normalizadas paralela  $u_{\parallel}$  e perpendicular  $u_{\perp}$ . A figura 5.8(a) mostra a distribuição no instante inicial  $\tau = 0$ , mostrando o plasma de fundo e o feixe. A figura 5.8(b) mostra a distribuição evoluída, no instante  $\tau = 2000$ . Nesta figura observamos que o *plateau* está completamente formado, portanto para um tempo  $\tau > 2000$  o modo fundamental e os modos HL não vão crescer mais, chegando rapidamente à saturação.

Na figura 5.9 se mostra a intensidade normalizada do espectro de ondas  $L_n$  em escala logarítmica, em função das componentes do número de onda normalizado  $q_{\perp} = k_{\perp} v_{te} / \omega_{pe}$  e  $q_{\parallel} = k_{\parallel} v_{te} / \omega_{pe}$ . A figura 5.9(a) mostra o espectro de ondas para um tempo  $\tau = 500$ , e nessa figura se observa o crescimento do modo fundamental  $L$  perto  $q_{\parallel} \simeq 0.2$ . Na figura 5.9(b) se mostra o espectro de ondas para um tempo  $\tau = 1000$ , e nesta figura observamos o crescimento do modo fundamental  $L$  e também o crescimento do primeiro harmônico  $L^{(2)}$ , perto de  $q_{\parallel} \simeq 0.4$ .

A figura 5.10(a) mostra o espectro de ondas para um tempo  $\tau = 1500$ . Nesta figura já podemos observar a presença do modo fundamental e de todos os harmônicos considerados, ou seja, os picos correspondentes a  $n = \{2, 3, 4, 5\}$ . Vemos também o aparecimento do pico  $L'$  (*backward*), que ocorre devido ao efeito de espalhamento do modo fundamental. Na figura 5.10(b) se mostra o espectro de ondas para um tempo  $\tau = 2000$ , e nesta figura igualmente observamos os picos para o modo fundamental e todos os modos HL  $n = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , já em um nível de saturação, junto com pico que representa  $L'$  e a estrutura tipo anel, devidos ao efeito de espalhamento no modo fundamental. Os picos dos modos HL estão centrados nos seguintes valores das coordenadas  $q_{\perp}$  e  $q_{\parallel}$ ,

$$\text{Picos dos HL } (q_{\perp}, q_{\parallel}) \left\{ \begin{array}{l} L^1 \quad (0; \quad 0, 25) \\ L' \quad (0; \quad -0, 25) \\ L^2 \quad (0; \quad 0, 5) \\ L^3 \quad (0; \quad 0, 7) \\ L^4 \quad (0; \quad 0, 95) \\ L^5 \quad (0 : \quad 1, 15) \end{array} \right. .$$

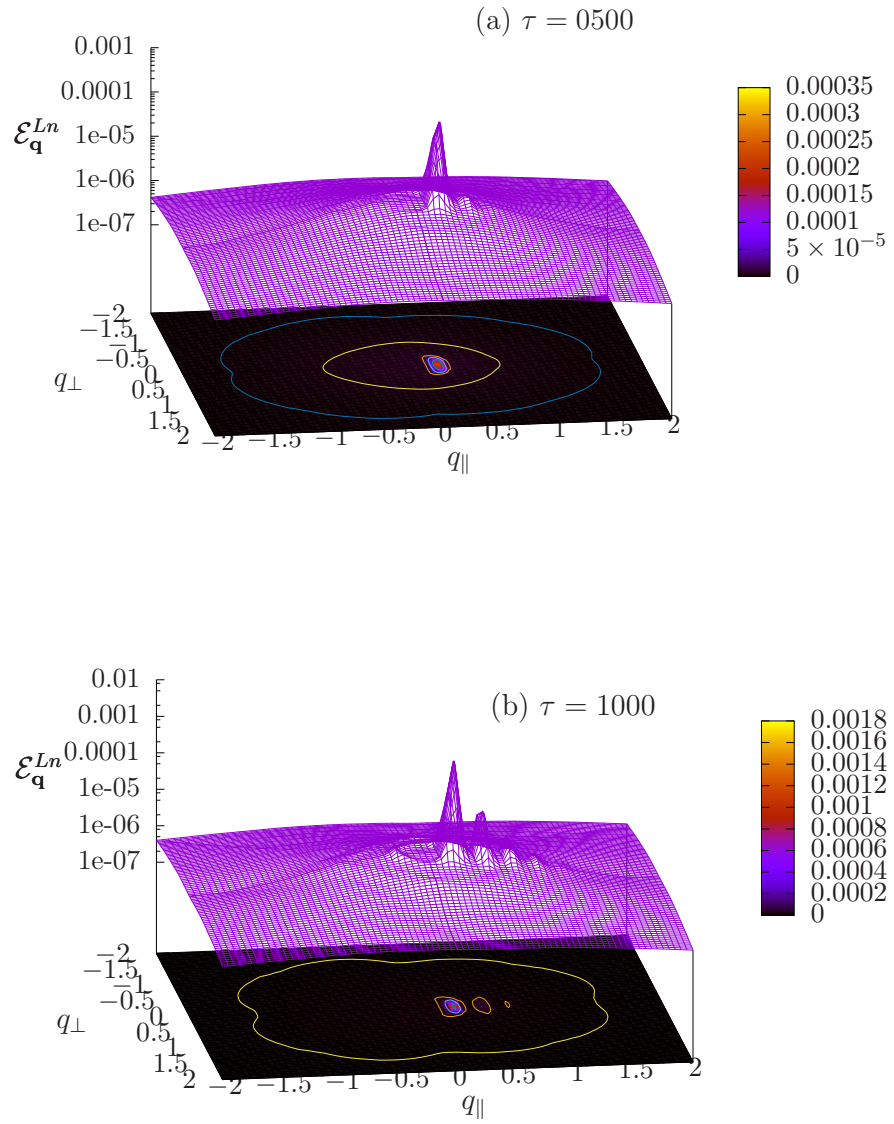


FIGURA 5.9: Intensidade normalizada de ondas  $\mathcal{E}^{Ln}$ , vs.  $q_{\perp} = k_{\perp}v_{te}/\omega_{pe}$  e  $q_{\parallel} = k_{\parallel}v_{te}/\omega_{pe}$ , para tempos normalizados  $\tau = 500$  e  $\tau = 1000$ . Resultados obtidos levando em conta os efeitos de espalhamento, emissão espontânea e induzida para  $n = 1$ , e o efeito de emissão induzida para harmônicos  $n \geq 2$ .

A figura 5.11 mostra o espectro de ondas para um tempo  $\tau = 2000$ , projetado no



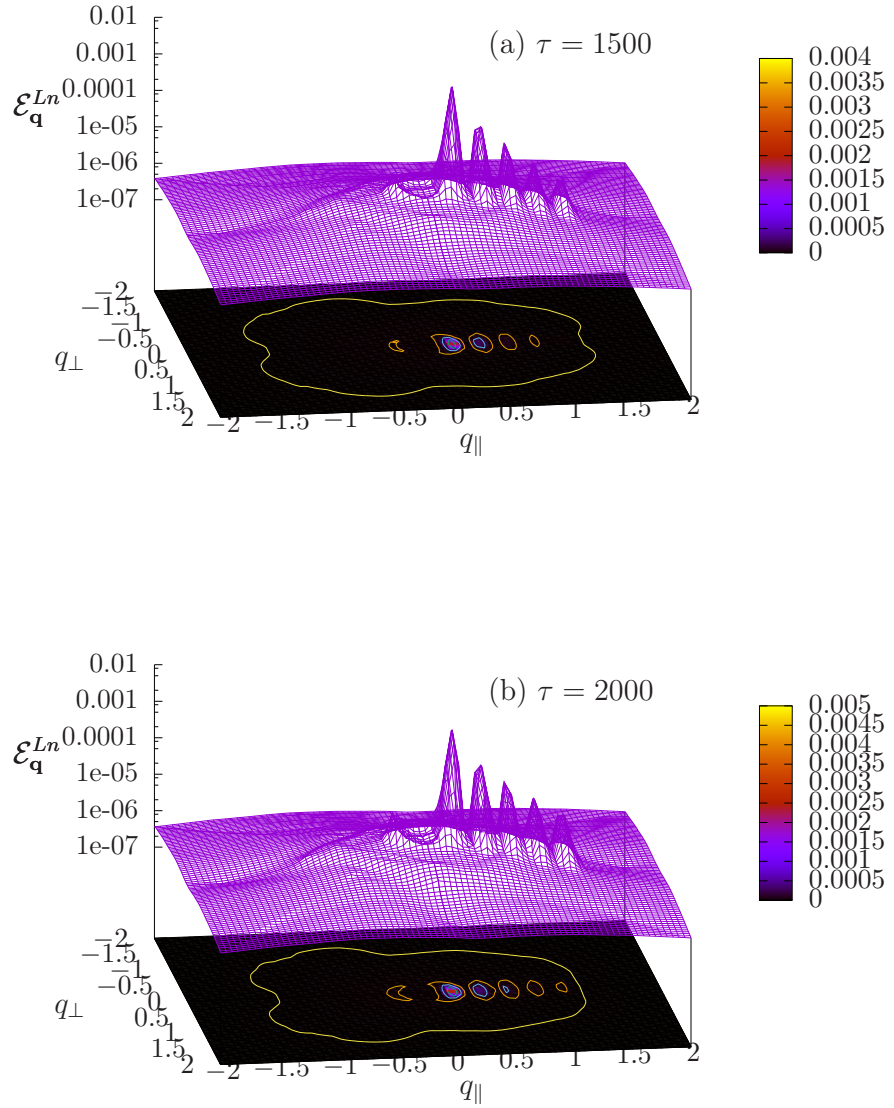


FIGURA 5.10: Intensidade normalizada de ondas  $\mathcal{E}^{Ln}$ , vs.  $q_\perp = k_\perp v_{te}/\omega_{pe}$  e  $q_\parallel = k_\parallel v_{te}/\omega_{pe}$ , para tempos  $\tau = 1500$  e  $\tau = 2000$ . Resultados obtidos levando em conta efeitos de emissão espontânea e induzida e de espalhamento, para  $n = 1$ , e efeitos de emissão induzida para harmônicos  $n \geq 2$ .

plano formado pelas coordenadas  $q_\perp$  e  $q_\parallel$ . Esta figura representa a projeção da figura 5.10(b), e nela podemos ver o modo fundamental e todos os modos harmônicos  $L^n$  ( $n = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ), junto com a intensidade de  $L'$  (*backward*). Para  $\tau = 2000$  observamos que os picos que formam o espectro já se encontram na amplitude de saturação, e as



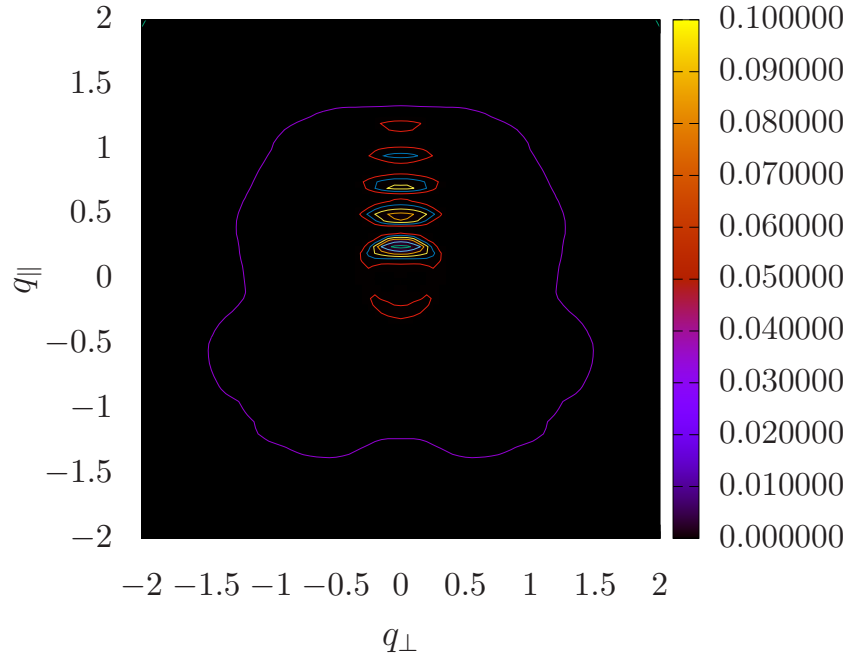


FIGURA 5.11: Projeção da intensidade normalizada de ondas  $\mathcal{E}^{Ln}$ , no plano formado pelas coordenadas  $q_{\perp} = k_{\perp} v_{te}/\omega_{pe}$  e  $q_{\parallel} = k_{\parallel} v_{te}/\omega_{pe}$ , para um tempo  $\tau = 2000$ . Resultados obtidos levando em conta os efeitos de espalhamento, emissão espontânea e induzida, para  $n = 1$ , e o efeito de emissão induzida para harmônicos  $n \geq 2$ .

curvas de nível nos indicam que as intensidades  $\mathcal{E}^{Ln}$  são decrescentes com o valor  $n$ , tendo um comportamento similar ao comportamento observado nas análises 1D que apareceram nos artigos [42, 44]. Também observamos que a largura em  $q_{\perp}$  de cada HL também é decrescente com  $n$ .

A figura 5.12 mostra a intensidade máxima dos picos correspondentes a cada harmônico,  $\mathcal{E}_{max}^{Ln}(\tau)$ , em escala logarítmica para o modo fundamental e para os modos harmônicos  $n = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , como função do tempo normalizado, na faixa de  $0 \leq \tau \leq 2000$ . Nesta figura 5.12 observamos o rápido crescimento inicial dos modos HL, que ocorre devido à ressonância na região do espaço de velocidades em que ocorre a derivada positiva da distribuição do feixe. Para todos os modos o crescimento fica mais lento com o passar do tempo, tendo em vista a formação do *plateau* na função distribuição de elétrons, e vemos que para  $\tau = 2000$  os modos harmônicos já estão perto da saturação. Observamos que a taxa de crescimento inicial é crescente com  $n$ , o que é compatível com a dependência em  $n$  da expressão da taxa de crescimento, equação (3.10). Se comparamos os nossos resultados com os resultados mostrados na figura 1 do artigo [42], vemos que o comportamento é similar para as intensidades máximas dos modos HL, com a diferença de que em nossa análise 2D usamos para os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  da equação (4.13) valores

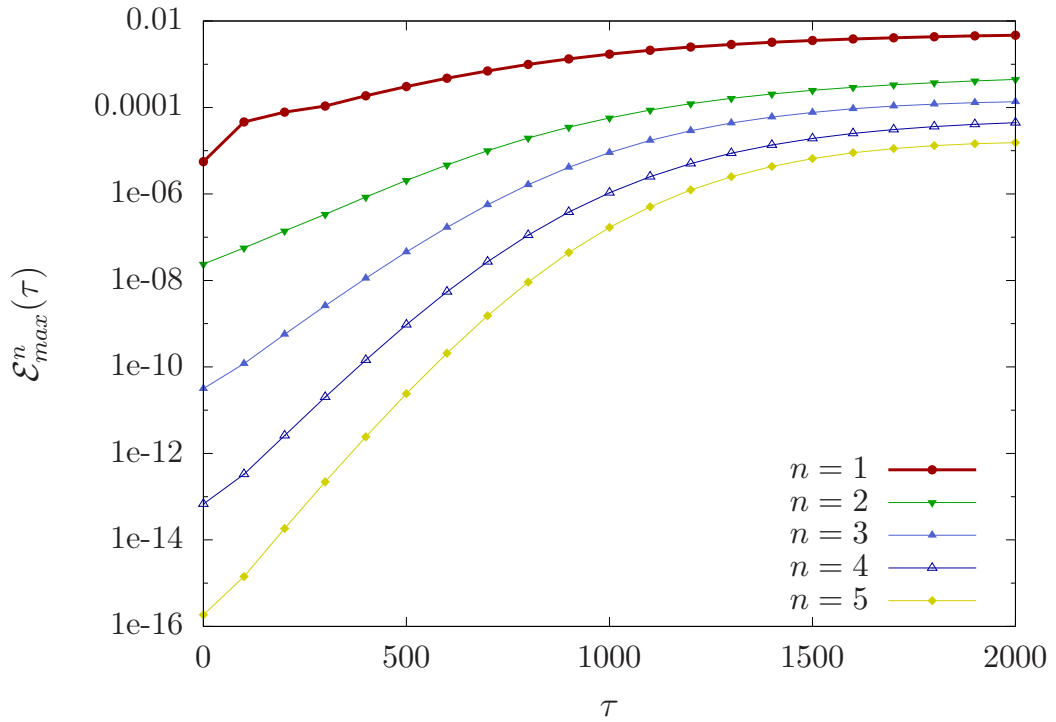


FIGURA 5.12: Intensidade máxima das ondas  $\mathcal{E}_{max}^{Ln}(\tau)$ , para os modos caracterizados por  $n = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , como função do tempo normalizado  $\tau$ , no intervalo  $0 \leq \tau \leq 2000$ . As intensidades iniciais são determinadas pela equação (4.13).

maiores do que os usados na aproximação 1D da Ref. [42], e um valor menor para o parâmetro  $I^1$ .

### 5.2.2 Nível inicial espontâneo

Para esta análise, usamos para os harmônicos o o nível inicial espontâneo dado pela equação (4.17), sendo que para evolução do modo fundamental e dos modos harmônicos usamos o conjunto de equações (5.2). Essas equações levam em conta os efeitos de emissão espontânea, induzida e espalhamento para o modo fundamental, enquanto para os modos HL ( $n \geq 2$ ) levam em conta o efeito de emissão induzida.

Como resultado da análise numérica, obtivemos a evolução da função de distribuição dos elétrons e dos espectros das ondas. Não consideramos necessário mostrar a evolução da função distribuição dos elétrons, pois a forma diferente de obter os espectros iniciais dos harmônicos não chega a afetar de forma significativa a evolução da distribuição eletrônica. Os resultados numéricos obtidos na presente sub-seção são indistinguíveis daqueles mostrados na figura 5.8, de modo que não precisam ser mostrados.

Na figura 5.13, que é a primeira figura desta sub-seção, mostra-se a intensidade normalizada do espectro de ondas  $Ln$ , em escala logarítmica, como função das componentes do

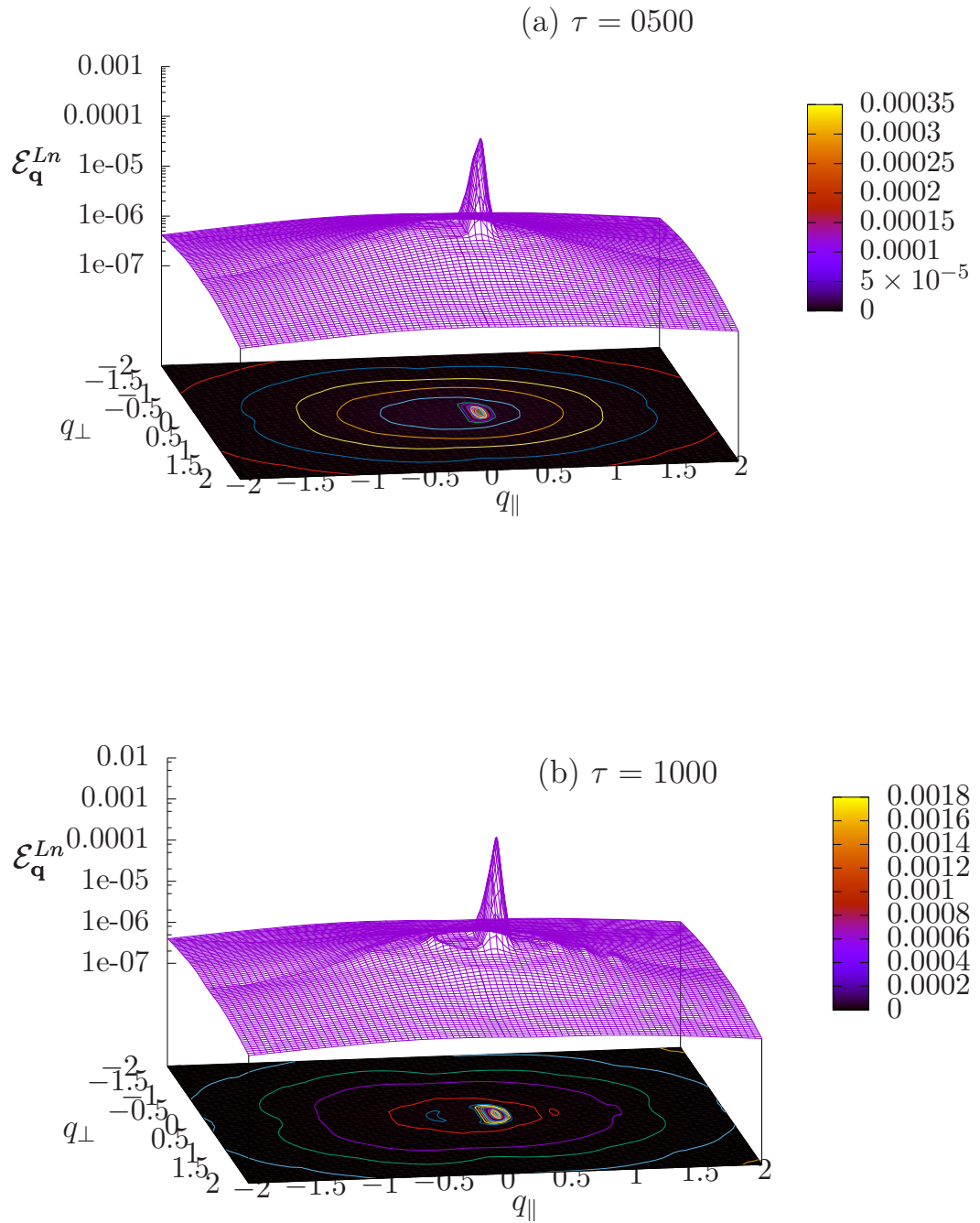


FIGURA 5.13: Intensidade normalizada de ondas  $\mathcal{E}^{Ln}$ , vs.  $q_{\perp} = k_{\perp} v_{te} / \omega_{pe}$  e  $q_{\parallel} = k_{\parallel} v_{te} / \omega_{pe}$ , para tempos  $\tau = 500$  e  $\tau = 1000$ . Esses resultados levam em conta o efeito de espalhamento, emissão espontânea e induzida, para  $n = 1$ , e o efeito de emissão induzida para harmônicos com  $n \geq 2$ .

número de onda normalizado  $q_{\perp} = k_{\perp} v_{te} / \omega_{pe}$  e  $q_{\parallel} = k_{\parallel} v_{te} / \omega_{pe}$ . A figura 5.13(a) mostra o espectro de ondas para um tempo  $\tau = 500$ , e nela se pode ver um pico correspondente ao modo fundamental  $L$ , perto de  $q_{\parallel} \simeq 0.2$ . Picos correspondentes aos harmônicos não aparecem, na escala da figura. A figura 5.13(b) mostra o espectro de ondas para um tempo  $\tau = 1000$ , e nela podemos ver que os picos correspondendo aos quatro primeiros HL começam a aparecer, além do pico que corresponde ao modo fundamental.

A figura 5.14 mostra o espectro de ondas para tempos  $\tau = 1500$  e  $\tau = 2000$ . Na figura 5.14(a) observamos que os picos correspondentes aos harmônicos estão localizados em torno das seguintes posições, no espaço de número de onda,

$$\text{Picos dos HL } (q_{\perp}, q_{\parallel}) \left\{ \begin{array}{l} L^1 \quad (0; \quad 0,25) \\ L^2 \quad (0; \quad 0,5) \\ L^3 \quad (0; \quad 0,7) \\ L^4 \quad (0; \quad 0,95) \\ L^5 \quad (0; \quad 1,15) \end{array} \right. ,$$

e vemos também o aparecimento da estrutura em forma de anel e o pico *backward*  $L'$  causados pelo espalhamento de ondas  $L$ . Um aspecto importante é que os picos correspondentes aos harmônicos tem altura crescente com o valor de  $n$ , para  $n \geq 2$ , o que representa um comportamento bem diferente daquele obtido na seção anterior, figura 5.10(a), que mostrava resultados obtidos supondo uma forma arbitrária para os níveis iniciais, convenientemente escolhida. A utilização da expressão para as flutuações espontâneas como forma de obter os níveis iniciais, com as aproximações utilizadas no presente trabalho, não parece capaz de descrever o comportamento esperado, que seria uma diminuição da intensidade das ondas, com o crescimento de  $n$ .

Comparando a figura 5.14(b) com a figura 5.14(a), vemos ainda algum crescimento na amplitude dos picos correspondendo aos harmônicos e a  $L'$ , sem mudança qualitativa. Uma análise mais detalhada mostra que em  $\tau \simeq 2000$  os picos dos harmônicos já se encontram próximos da saturação.

A figura 5.15 mostra uma outra visão do espectro de ondas para um tempo  $\tau = 2000$ , mostrando a projeção da figura 5.14(b) no plano formado pelos números de onda. Podemos ver curvas de nível representando todos os modos harmônicos  $n = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , incluindo o fundamental, juntamente com as curvas representando o pico das ondas  $L'$ , retro-espalhadas. As curvas de nível mostram com clareza como a largura dos picos referentes aos harmônicos cresce com o número  $n$ .

A figura 5.16 mostra o valor da intensidade  $\mathcal{E}_{max}^{Ln}(\tau)$  no ponto máximo dos picos correspondentes aos diferentes modos harmônicos ( $n = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ), como função do tempo normalizado. Na figura 5.16 observamos o rápido crescimento inicial dos modos HL,

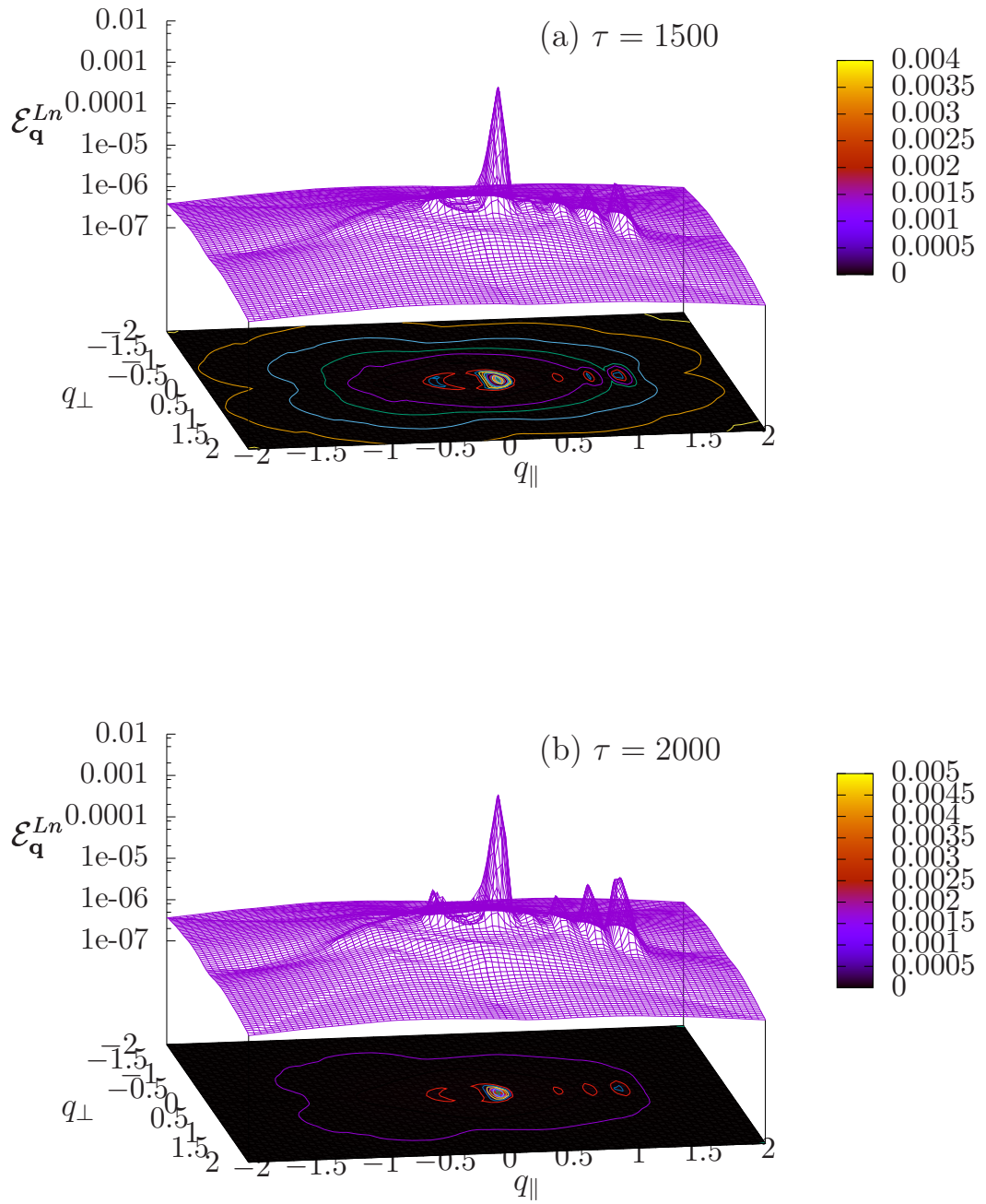


FIGURA 5.14: Intensidade normalizada de ondas  $\mathcal{E}^{Ln}$ , vs.  $q_{\perp} = k_{\perp}v_{te}/\omega_{pe}$  e  $q_{\parallel} = k_{\parallel}v_{te}/\omega_{pe}$ , para tempos  $\tau = 1500$  e  $\tau = 2000$ . Resultados obtidos levando em conta os efeitos de espalhamento, emissão espontânea e induzida para  $n = 1$ , e o efeito de emissão induzida para harmônicos  $n \geq 2$ .

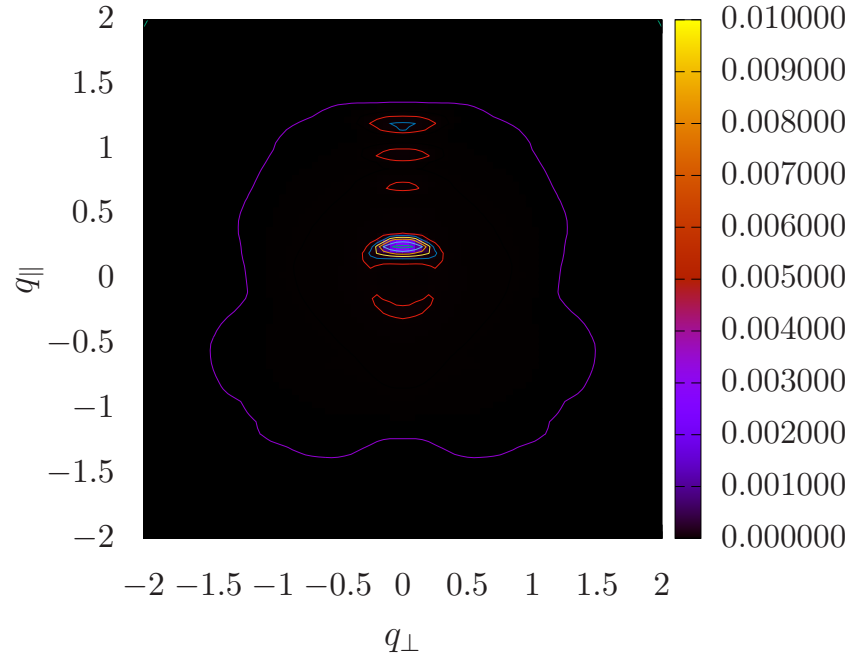


FIGURA 5.15: Projeção da intensidade normalizada de ondas  $\mathcal{E}^{Ln}$ , no plano formado pelas coordenadas  $q_{\perp} = k_{\perp} v_{te}/\omega_{pe}$  e  $q_{\parallel} = k_{\parallel} v_{te}/\omega_{pe}$ , para um tempo  $\tau = 2000$ . Resultados obtidos levando em conta os efeitos de espalhamento, emissão espontânea e induzida, para  $n = 1$ , e o efeito de emissão induzida para harmônicos  $n \geq 2$ .

seguido da fase em que o crescimento da intensidade se torna mais lento, e depois a tendência à saturação. O comportamento é similar àquele obtido na seção anterior, onde era usada uma outra forma de atribuição dos níveis iniciais. Entretanto, há uma diferença significativa. Na figura 5.16 vemos um cruzamento das curvas representando as intensidades dos modos harmônicos, com  $n \geq 2$ , o que não ocorria no caso da figura 5.15, na seção anterior. Este comportamento dos HL visto na figura 5.16 é similar ao observado nas figuras 4 e 6 do artigo [44], com diferença de que naqueles casos nem todas as intensidades máximas dos espectros de ondas para os modos HL se interceptam.

No artigo [44], figura 7, Yoon compara os comportamentos obtidos na evolução temporal dos harmônicos, considerando como estado inicial o nível espontâneo, dado pela equação (4.16), e um valor reduzido em relação a esse nível, dado pela equação (4.17). Foi observado que no caso de espectro inicial dado pelo nível diminuído, o cruzamento das curvas representando a intensidade máxima não ocorre para todos os modos HL. Em nossa análise 2D, por outro lado, mesmo usando o nível diminuído, dado pela equação (4.17), todas as curvas representando o valor máximo dos picos se interceptam ao longo da evolução temporal, conforme se vê na figura 5.16.

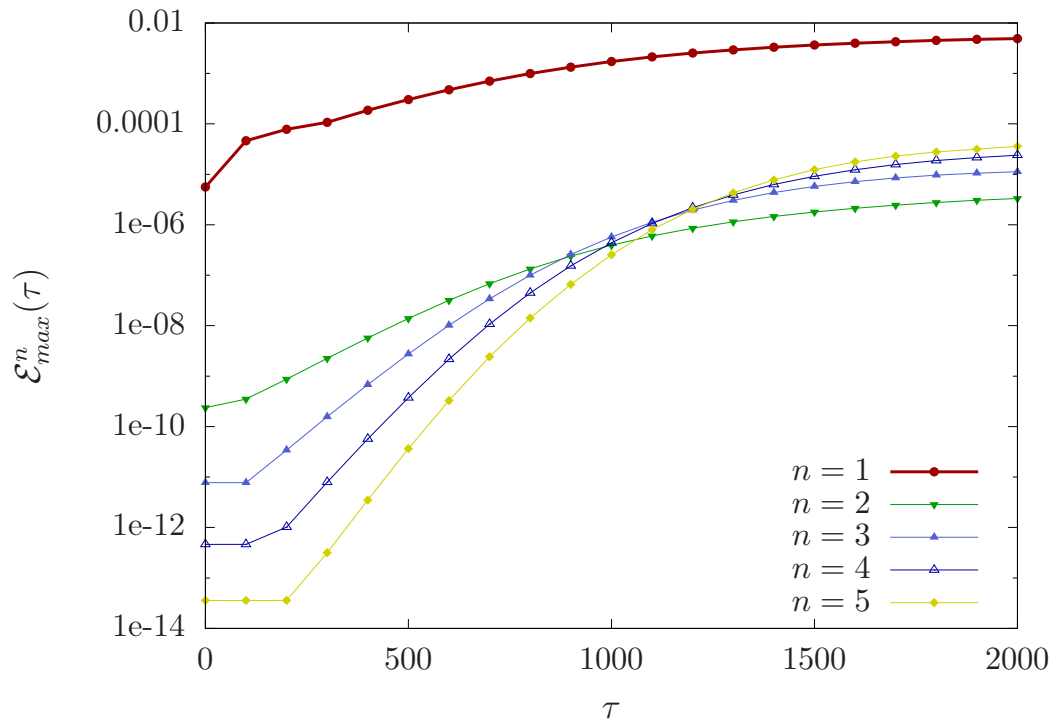


FIGURA 5.16: Intensidade máxima  $\mathcal{E}_{max}^{Ln}(\tau)$  dos modos harmônicos  $n = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  como função do tempo normalizado, na faixa  $0 \leq \tau \leq 2000$ . As intensidades iniciais são determinadas pela equação (4.17).

Cabe mencionar que, no caso de forma inicial arbitrária para os espectros dos harmônicos, caso tivéssemos utilizado os mesmos valores de  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $I^1$  que foram utilizados na abordagem 1D da Ref. [42], teríamos obtido curvas que se cruzariam ao longo da evolução temporal, ao invés de curvas como aquelas da figura 5.12. Ou seja, teríamos obtido resultados com intensidades máximas dos harmônicos crescentes com  $n$ , ao invés de decrescentes com  $n$ , como obtivemos na seção anterior. Esses resultados mostram que a questão relativa ao nível inicial dos harmônicos ainda é uma questão não completamente resolvida, que merece continuação da investigação.

## Capítulo 6

# Conclusões

Para concluir este trabalho é conveniente falar tanto das motivações do desenvolvimento da teoria quando do objetivo da tese. A motivação da generalização na teoria de turbulência fraca foi estudar em maior detalhe a solução do sistema de equações Vlasov-Maxwell, incluindo correlações de mais alta ordem, dando lugar ao aparecimento de outras interações entre ondas e partículas e ao aparecimento de novos modos que podem ocorrer na interação feixe-plasma, como é o caso dos modos harmônicos de ondas de Langmuir, que surgem da solução de uma relação de dispersão não linear, entendendo estes como uma resposta não linear do plasma. A importância da generalização da TTF reside, dentre outros aspectos, na abordagem autoconsistente que a mesma realiza acerca do fenômeno da emissão de harmônicos das ondas de Langmuir, fenômeno que é observado em plasmas de laboratório, simulações de partículas, simulações de Vlasov, observações espaciais do vento solar, das explosões solares do tipo III, dentre outras. Neste ponto é onde se desenvolveu nossa tese aproveitando a experiência do grupo de física de plasmas do Instituto de Física da UFRGS na linha de turbulência em plasmas, fazendo a análise dos modos harmônicos de ondas de Langmuir na abordagem bidimensional (2D), obtendo uma solução auto-consistente, fornecendo-nos novas informações sobre a evolução de ondas e partículas e permitindo-nos comparar os nossos resultados com trabalhos anteriores do grupo e com trabalhos de outros autores que fizeram uma abordagem unidimensional (1D).

O trabalho seguiu o cronograma planejado no início do doutorado. Foi feito o estudo do formalismo da teoria de turbulência fraca, mostrando com algum detalhe a obtenção das equações para modos normais, a relação de dispersão para modos harmônicos de Langmuir, a equação cinética para os modos harmônicos de ondas de Langmuir e a equação para a função distribuição de velocidades das partículas. Essa apresentação do formalismo foi feita no segundo capítulo desta tese (capítulo 2). Em seguida, no capítulo 3, foi



feito o tratamento matemático do conjunto de equações para ondas e partículas, usando uma abordagem bidimensional. Na sequência, no capítulo 4, apresentamos as condições iniciais tanto da distribuição de partículas para íons e elétrons quanto para os espectros de ondas de Langmuir ( $L$ ), ondas íon-acústicas ( $S$ ), e para os modos harmônicos de ondas de Langmuir (HL). No último capítulo apresentamos uma análise dos resultados obtidos com a solução numérica do conjunto de equações.

Na primeira análise feita, apresentada na primeira seção do capítulo de resultados (capítulo 4), a qual envolvia a evolução dos modos normais eletrostáticos  $L$  e  $S$  e a evolução do primeiro harmônico (harmônico  $n = 2$ , denotado como  $N$ ), observamos que o efeito de emissão induzida é responsável pelo rápido crescimento do espectro  $\mathcal{E}_{\mathbf{q}}^N$ . O efeito desse termo é especialmente perceptível na fase inicial da evolução do sistema, quando a derivada positiva na função distribuição, na região do feixe, é mais pronunciada. A topologia resultante para o espectro das ondas harmônicas é semelhante à estrutura do modo fundamental  $L$ , sendo que este comportamento é consistente com o mencionado nos artigos [13,44]. Quando incluímos o efeito de espalhamento na evolução do modo fundamental e do primeiro harmônico, vemos que a contribuição deste termo no modo harmônico é negativa e pequena, comparada com o efeito de emissão induzida  $|\nu_{\mathbf{q}}^N| \ll \gamma_{\mathbf{q}}^N$ , de modo que aumenta levemente a velocidade de saturação do modo harmônico. Também observamos que o efeito de espalhamento não muda a estrutura do espectro do modo  $N$ , diferente do que acontece no modo fundamental  $L$ , para o qual ocorre a formação de um pico de ondas retro-espalhadas, junto com uma estrutura tipo anel no espaço de número de onda. A pouca relevância do termo de espalhamento para a evolução do modo harmônico, tanto na fase inicial como na fase perto da saturação onde o *plateau* está completamente formado, é diferente da predita nos artigos [13,44], nos quais foi conjecturado que o termo de espalhamento  $\nu_{\mathbf{q}}^{Ln}$  deveria tornar-se dominante comparado com o efeito de emissão induzida  $\gamma_{\mathbf{q}}^{Ln}$ . Os resultados obtidos nesta primeira seção foram publicados no artigo *Two dimensional kinetic analysis of electrostatic harmonic plasma waves* [49].

Na análise de harmônicos de ondas de Langmuir de ordem mais alta, feita na segunda seção do capítulo 5, descrevemos a evolução dos modos HL levando em conta apenas o efeito de emissão induzida, e a evolução do modo normal  $L$  incluindo emissão induzida e espontânea, e também o efeito do espalhamento. Observamos rápido crescimento para todos os harmônicos HL incluídos na análise, com as taxas de crescimento na fase inicial para os modos HL aumentando com o parâmetro  $n$ . A análise também mostrou que quando o nível inicial dos modos harmônicos é suficientemente elevado, os valores de de intensidade máxima dos modos HL com  $n$  maior podem tornar-se maiores do que os valores de intensidade máxima com  $n$  menor, no transcorrer da evolução temporal. Esse é um comportamento diferente do obtido em estudos anteriores que usavam uma

abordagem 1D [42, 44]. No caso em que foi suposto um nível inicial arbitrário para os harmônicos, o ajuste dos parâmetros nos permite obter os resultados com o mesmo tipo de comportamento observado no artigo [42]. No entanto, para o nível espontâneo estes parâmetros são fixos, e mesmo usando um nível inicial suprimido obtemos alturas maiores para os picos do espectro de ondas dos HL com  $n$  maior. Devemos ter em conta que as alturas dos picos para os HL nunca passam a altura do modo fundamental. Esta análise nos leva a concluir que a determinação do nível inicial dos modos HL é uma questão que ainda tem que ser investigada em detalhe, em uma pesquisa futura.

Outras das perspectivas do trabalho são incluir na teoria a possibilidade de ocorrência de ondas harmônicas propagando-se no sentido retrógrado, e incluir outros efeitos não lineares, como o decaimento envolvendo três ondas.

## Apêndice A

# Equação para harmônicos de ondas de Langmuir ( $L_n$ )

A evolução dos modos HL é dada pela equação (2.51)

$$\frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{Ln}}{\partial t} = -\frac{2\text{Im} D(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^{Ln})}{\partial \text{Re} D(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^{Ln}) / \partial \omega_{\mathbf{k}}^{Ln}} I_{\mathbf{k}}^{Ln},$$

onde

$$D(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^{Ln}) = \epsilon(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^{Ln}) - \frac{e^2}{m_e^2 \omega_{pe}^4} \int d\mathbf{k}' \frac{a_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} I_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}}{\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}}^{Ln} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)})}.$$

Para calcular os termos da equação (2.51), escrevemos a função dielétrica do plasma  $\epsilon(\mathbf{k}, \omega)$  em termos da susceptibilidade elétrica de primeira ordem dada pela equação (2.8)

$$\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \sum_a \frac{4\pi q_a^2}{m_a^2} \int dv \frac{\mathbf{k} \cdot \partial f_a(v) / \partial v}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}. \quad (\text{A.1})$$

Geralmente na instabilidade feixe plasma a distribuição de elétrons se compõe de um plasma de fundo e um feixe. Orientando o sistema de referência, tal que a direção do feixe seja a mesma que o eixo  $\hat{z}$ , podemos escrever

$$f_e(v) = n_e F_e(v) + n_{eb} F_{eb}(v),$$

onde  $n_*$  e  $F_*$  são a densidade e distribuição do feixe ( $* = eb$ ) *plasma de fundo* ( $* = e$ ). Usando uma distribuição Maxwelliana para o plasma de fundo e para o feixe (vamos

focar-nos no plasma de fundo, por enquanto ignorarmos a distribuição do feixe),

$$F_e(v) = \frac{e^{-v^2/v_e^2}}{\pi^{3/2}v_e^3}. \quad (\text{A.2})$$

Também podemos escrever a equação (A.2) da forma

$$f_e(v) = \hat{n}[(1 - \delta)F_e(v) + \delta F_{eb}(v)], \quad \left(\delta = \frac{n_{eb}}{\hat{n}}\right).$$

Para avaliar  $\text{Re}\epsilon(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^{L_n})$ ,  $\text{Re}D(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^{L_n})$  e as derivadas, somente consideramos a contribuição do plasma de fundo, escrevendo a equação (A.1) da forma,

$$\epsilon(\mathbf{k}, \omega) \approx 1 + (1 - \delta) \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int d\mathbf{v} \frac{\mathbf{k} \cdot \partial F_e(v)/\partial v}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}.$$

O eixo  $\hat{z}$  está orientado na direção do feixe, mas a integral pode se fazer usando propriedades de rotação dos eixos. Assim, se definimos  $kv_k = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$ , então o novo eixo  $z$  rotado é paralelo a  $\mathbf{k}$ , e obtemos

$$\frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{v}} = -\frac{2e^{-v^2/v_e^2}}{\pi^{3/2}v_e^5}(\mathbf{v}_{\mathbf{k}} + \mathbf{v}'_{\perp}),$$

e

$$\begin{aligned} \epsilon(\mathbf{k}, \omega) &\approx 1 - \frac{4(1 - \delta)}{\pi^{1/2}v_e^3} \frac{\omega_{pe}^2}{v_e^2 k^2} \int_0^{\infty} dv'_{\perp} v'_{\perp} e^{-v'^2_{\perp}/v_e^2} \int_{-\infty}^{\infty} dv_k \frac{kv_k e^{-v_k^2/v_e^2}}{\omega - kv_k} \\ &= 1 + \frac{2(1 - \delta)}{\pi^{1/2}} \frac{\omega_{pe}^2}{v_e^2 k^2} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{ue^{-u^2}}{u - \zeta}, \end{aligned}$$

$$\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 - (1 - \delta) \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \zeta^2 Z'(\zeta)$$

onde

$$\zeta = \frac{\omega}{kv_e}.$$

Se as ondas Langmuir são rápidas ( $|\omega_r| \gg kv_e$ ), temos

$$Z'(\zeta) \simeq \frac{1}{\zeta^2} \left( 1 + \frac{3!!}{2\zeta^2} + \frac{5!!}{(2\zeta^2)^2} + \frac{7!!}{(2\zeta^2)^3} + \dots \right) - \sigma 2i\sqrt{\pi}\zeta e^{-\zeta^2}, \quad (\text{A.3})$$

onde

$$\sigma = \begin{cases} 0, & \text{Im } \zeta > 0 \\ 1, & \text{Im } \zeta = 0 \\ 2, & \text{Im } \zeta < 0 \end{cases}$$

Então

$$\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 - (1 - \delta) \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left( 1 + \frac{3!!}{2\zeta^2} + \frac{5!!}{(2\zeta^2)^2} + \frac{7!!}{(2\zeta^2)^3} + \dots \right) + \sigma 2i\sqrt{\pi}(1 - \delta) \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \zeta^3 e^{-\zeta^2}. \quad (\text{A.4})$$

Portanto, a parte real de  $\epsilon(\mathbf{k}, \omega)$  pode se aproximar

$$\text{Re } \epsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 - (1 - \delta) \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{k^2 v_e^2}{\omega_r^2} \right).$$

Assim,

$$\left. \frac{\partial}{\partial \omega_r} \text{Re } \epsilon(\mathbf{k}, \omega) \right|_{\omega_r = \omega_{\mathbf{k}}^{L_n}} \approx -(1 - \delta) \frac{\partial}{\partial \omega_r} \left( \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right) \Big|_{\omega_r = \omega_{\mathbf{k}}^{L_n}} = 2(1 - \delta) \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega_{\mathbf{k}}^{L_n})^3} \approx \frac{2(1 - \delta)}{n^2 \omega_{\mathbf{k}}^{L_n}}.$$

Por outro lado, para  $\text{Re } D(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^{L_n})$  temos

$$\text{Re } D(\mathbf{k}, \omega_r) \approx \text{Re } \epsilon(\mathbf{k}, \omega_r) - \frac{e^2}{m_e^2 \omega_{pe}^4} \int d\mathbf{k}' \text{Re } \frac{a_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^n I_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}}{\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega_r - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)})}, \quad \text{com } \omega_r = \omega_{\mathbf{k}}^{L_n}.$$

Se escrevermos simplesmente

$$\text{Re } D(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^{L_n}) \approx \text{Re } \epsilon(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^{L_n}) - \frac{e^2}{m_e^2 \omega_{pe}^4} \int d\mathbf{k}' \frac{a_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^n I_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}}{\text{Re } \epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega_r - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)})}, \quad (\text{A.5})$$

podemos avaliar o denominador do segundo termo da equação (A.5) usando  $\omega^{L_n} \approx n\omega_{pe}$ , e o fato de que a densidade do feixe é muito pequena comparada com o plasma de fundo  $\delta \ll 1$ .

$$\begin{aligned} \text{Re } \epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}}^{L_n} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}) & \\ & \approx 1 - \frac{(1 - \delta)\omega_{pe}^2}{(\omega_{\mathbf{k}}^{L_n} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)})^2} = \frac{(\omega_{\mathbf{k}}^{L_n} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)})^2 - (1 - \delta)\omega_{pe}^2}{(\omega_{\mathbf{k}}^{L_n} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)})^2} \\ & \approx \frac{(\omega_{\mathbf{k}}^{L_n} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)})^2 - (1 - \delta)\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{L_1}}{(\omega_{\mathbf{k}}^{L_n} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)})^2} \\ & = \frac{[\omega_{\mathbf{k}}^{L_n} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} + \sqrt{1 - \delta}\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{L_1}][\omega_{\mathbf{k}}^{L_n} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} - \sqrt{1 - \delta}\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{L_1}]}{(\omega_{\mathbf{k}}^{L_n} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)})^2} \\ & \approx \frac{2}{\omega_{pe}} \left( \omega_{\mathbf{k}}^{L_n} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} - \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{L_1} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

encontrando a equação (31) de [13]. O problema nessa forma de avaliação de  $\text{Re } D(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^{L_n})$  é a integral

$$\int d\mathbf{k}' \frac{a_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^n I_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}}{\omega_{\mathbf{k}}^{L_n} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} - \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{L_1}},$$

uma vez que ao longo da integração o integrando passa pelos pontos singulares correspondentes aos zeros do denominador, dados por

$$\omega_{\mathbf{k}}^{L_n} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} - \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{L_1} = 0.$$

Portanto, vamos procurar uma forma alternativa para avaliar  $\text{Re } D(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^{L_n})$ , evitando a singularidade na integral da equação (A.5) quando o denominador está perto de zero.

Buscando evitar estas singularidades, voltamos à equação inicial (2.50) (cuja parte real é a equação (A.5)),

$$\text{Re } D(\mathbf{k}, \omega) = \text{Re } \epsilon(\mathbf{k}, \omega) - \frac{e^2}{m_e^2 \omega_{pe}^4} \int d\mathbf{k}' a_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^n I_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} \text{Re} \frac{1}{\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega_r - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)})},$$

onde podemos escrever a parte real de  $1/\epsilon$  como

$$\text{Re} \frac{1}{\epsilon} = \frac{\text{Re } \epsilon}{|\epsilon|^2}.$$

Com as aproximações (A.4) e (A.6), reescrevemos  $\epsilon$

$$\begin{aligned} & \epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}}^{L_n} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}) \\ & \approx 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega_{\mathbf{k}}^{L_n} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)})^2} \\ & + 2i\sqrt{\pi} \left( \frac{\omega_{pe}}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|} \right)^2 \frac{\omega_{\mathbf{k}}^{L_n} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|v_e} \exp \left[ \left( -\frac{\omega_{\mathbf{k}}^{L_n} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|v_e} \right) \right], \\ & \approx \frac{2}{\omega_{pe}} \left( \omega_{\mathbf{k}}^{L_n} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} - \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{L_1} \right) + 2i\sqrt{\pi} \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^3 e^{-\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^2}, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

onde

$$\xi = \frac{\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{L_1}}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|v_e}.$$

Então  $\text{Re } \epsilon^{-1}$ , pode-se escrever

$$\begin{aligned} \text{Re} \frac{1}{\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}}^{L_n} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)})} &\approx \frac{2}{\omega_{pe}} \frac{\omega_{\mathbf{k}}^{L_n} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} - \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{L_1}}{\left| \epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}}^{L_n} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}) \right|^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(\omega_{\mathbf{k}}^{L_n} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} - \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{L_1}) \omega_{pe}}{(\omega_{\mathbf{k}}^{L_n} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} - \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{L_1})^2 + \pi \omega_{pe}^2 \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^6 e^{-2\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^2}} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

onde

$$\left| \epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}}^{L_n} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}) \right|^2 = \frac{4}{\omega_{pe}^2} (\omega_{\mathbf{k}}^{L_n} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} - \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{L_1})^2 + 4\pi \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^6 e^{-2\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^2}. \quad (\text{A.9})$$

Se a expressão (A.8) não tem singularidades, pode ser usada em lugar de (A.6) para avaliar  $\text{Re } D(\mathbf{k}, \omega_r)$ . Além disso, se a função é finita e contínua em  $(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ , também pode demonstrar-se que sua derivada é finita. Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \omega_r} \text{Re } D(\mathbf{k}, \omega_r) &= \frac{\partial}{\partial \omega_r} \text{Re } \epsilon(\mathbf{k}, \omega_r) \\ &\quad - \frac{e^2}{m_e^2 \omega_{pe}^4} \int d\mathbf{k}' a_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^n I_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} \frac{\partial}{\partial \omega_r} \text{Re} \frac{1}{\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega_r - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)})}, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

avaliado em  $\omega_r = \omega_{\mathbf{k}}^{L_n}$ .

Mas, dada uma função analítica  $f(x, y) = f_r(x) + i f_i(y)$  de variáveis reais  $x$  e  $y$ , temos que

$$\frac{\partial}{\partial x} \text{Re } f = \text{Re} \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Assim, se  $f = \epsilon^{-1}$ ,

$$\frac{\partial \epsilon^{-1}}{\partial \omega_r} = -\epsilon^{-2} \frac{\partial \epsilon}{\partial \omega_r} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \omega_r} \text{Re } \epsilon^{-1} = -\frac{2}{\omega_{pe}} \text{Re } \epsilon^{-2} = -\frac{2 \text{Re}(\epsilon^2)}{\omega_{pe} |\epsilon^2|^2} = -\frac{2}{\omega_{pe}} \frac{\epsilon_r^2 - \epsilon_i^2}{|\epsilon|^4}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \omega_r} \operatorname{Re} \frac{1}{\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega_r - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)})} & \quad (\text{A.11}) \\
 &= -\frac{2}{\omega_{pe}} \frac{\left[ \operatorname{Re} \epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega_r - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}) \right]^2 - \left[ \operatorname{Im} \epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega_r - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}) \right]^2}{\left| \epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega_r - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}) \right|^4} \\
 &= -\frac{\omega_{pe}}{2} \frac{\left( \omega_{\mathbf{k}}^{Ln} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} - \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{L1} \right)^2 - 4\pi\omega_{pe}^2 \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^6 e^{-2\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}}}{\left[ \left( \omega_{\mathbf{k}}^{Ln} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} - \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{L1} \right)^2 + 4\pi\omega_{pe}^2 \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^6 e^{-2\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}} \right]^2},
 \end{aligned}$$

escrevendo de forma compacta

$$\frac{\partial}{\partial \omega_r} \operatorname{Re} \frac{1}{\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega_r - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)})} = -\frac{2}{\omega_{pe}} \operatorname{Re} \left[ \epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega_r - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}) \right]^{-2} \quad (\text{A.12})$$

onde

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} \left[ \epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega_r - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}) \right]^{-2} & \quad (\text{A.13}) \\
 &= \frac{\left[ \operatorname{Re} \epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega_r - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}) \right]^2 - \left[ \operatorname{Im} \epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega_r - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}) \right]^2}{\left| \epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega_r - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}) \right|^4}.
 \end{aligned}$$

Portanto, podemos reescrever (A.10) em duas formas aproximadas diferentes

$$\frac{\partial}{\partial \omega_{\mathbf{k}}^{Ln}} \operatorname{Re} D(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^{Ln}) \approx \frac{2}{n^2 \omega_{\mathbf{k}}^{Ln}} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned}
 &+ \frac{2e^2}{m_e^2 \omega_{pe}^5} \int d\mathbf{k}' a_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^n I_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} \operatorname{Re} \epsilon^{-2}(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}}^{Ln} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}) \\
 &\approx \frac{2}{n^2 \omega_{\mathbf{k}}^{Ln}} \quad (\text{A.15})
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{2e^2}{m_e^2 \omega_{pe}^4} \int d\mathbf{k}' a_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^n I_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} \frac{\operatorname{Re} \epsilon^{-2}(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}}^{Ln} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)})}{\omega_{\mathbf{k}}^{Ln} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}}.$$

A equação (A.15) corresponde à equação (29) do artigo [13], enquanto que a equação (A.14) foi a forma utilizada para obtenção da equação (32) do artigo [13], com coeficientes dados pela equação (33) do citado artigo.

No caso da parte imaginária de  $\operatorname{Im} D(\mathbf{k}, \omega_r)$ , podemos obter uma forma alternativa à equação [30] encontrada no artigo [13]. De acordo com a equação (2.50)  $\operatorname{Im} D(\mathbf{k}, \omega_r)$  é



da forma

$$\text{Im } D(\mathbf{k}, \omega_r) = \text{Im } \epsilon(\mathbf{k}, \omega_r) - \frac{e^2}{m_e^2 \omega_{pe}^4} \int d\mathbf{k}' a_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} I_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} \text{Im } \epsilon^{-1}(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega_r - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}),$$

inserindo em (A.1), e aproximando podemos usar a fórmula de *Sokhotski–Plemelj* escrita como

$$\frac{1}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \stackrel{\omega_i \rightarrow 0^+}{=} P \frac{1}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} - i\pi \delta(\omega_r - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}).$$

Assim, reescrevemos (2.8)

$$\epsilon(\mathbf{k}, \omega) \approx 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int d\mathbf{v} \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{v}} \left[ P \frac{1}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} - i\pi \delta(\omega_r - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \right].$$

Portanto,

$$\text{Im } \epsilon(\mathbf{k}, \omega) \approx -\pi \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int d\mathbf{v} \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{v}} \delta(\omega_r - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}).$$

Por outro lado,

$$\text{Im } \frac{1}{\epsilon} = -\frac{\text{Im } \epsilon}{|\epsilon|^2}.$$

Portanto, usamos (A.9).

$$\begin{aligned} \text{Im } \epsilon^{-1}(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}}^{L_n} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}) &= \frac{\pi \omega_{pe}^2}{\left| \epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}}^{L_n} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}) \right|^2} \\ &\times \int d\mathbf{v} \frac{\mathbf{k} - \mathbf{k}'}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} \cdot \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{v}} \delta \left[ \omega_{\mathbf{k}}^{L_n} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v} \right]. \end{aligned}$$

consequentemente,

$$\begin{aligned} \text{Im } D(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^{L_n}) &= -\pi \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int d\mathbf{v} \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{v}} \delta(\omega_{\mathbf{k}}^{L_n}) \\ &- \frac{\pi e^2}{m_e^2 \omega_{pe}^2} \int d\mathbf{k}' \frac{a_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^n I_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}}{\left| \epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}}^{L_n} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}) \right|^2} \\ &\times \int d\mathbf{v} \frac{\mathbf{k} - \mathbf{k}'}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} \cdot \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{v}} \delta \left[ \omega_{\mathbf{k}}^{L_n} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Se ignoramos a parte imaginária de  $\epsilon(\omega, \mathbf{k})$  da equação (A.16), chegamos na equação (30) de [13].

Usando as equações (A.14) e (A.16), na equação para os modos harmônicos (2.51),

obtemos

$$\frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{L_n}}{\partial t} = \frac{\gamma_{\mathbf{k}}^{L_n} + \nu_{\mathbf{k}}^{L_n}}{1 + \eta_{\mathbf{k}}^{L_n}} I_{\mathbf{k}}^{L_n}. \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (\text{A.17})$$

onde

$$\gamma_{\mathbf{k}}^{L_n} = n^2 \pi \omega_{\mathbf{k}}^{L_n} \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int d\mathbf{v} \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{v}} \delta(\omega_{\mathbf{k}}^{L_n} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}), \quad (\text{A.18})$$

$$\begin{aligned} \nu_{\mathbf{k}}^{L_n} &= \frac{\pi n^2 e^2 \omega_{\mathbf{k}}^{L_n}}{m_e^2 \omega_{pe}^2} \int d\mathbf{k}' \frac{a_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^n I_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}}{|\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}}^{L_n} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)})|^2} \\ &\quad \times \int d\mathbf{v} \frac{\mathbf{k} - \mathbf{k}'}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} \cdot \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{v}} \delta[\omega_{\mathbf{k}}^{L_n} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}] \\ &\approx \frac{\pi n^3 e^2}{m_e^2 \omega_{pe}^2} \int d\mathbf{k}' \frac{a_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^n I_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}}{|\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}}^{L_n} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)})|^2} \\ &\quad \times \frac{\omega_{\mathbf{k}}^{L_n} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} \int d\mathbf{v} (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{v}} \delta[\omega_{\mathbf{k}}^{L_n} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}] \quad (\text{A.19}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_{\mathbf{k}}^{L_n} &= \frac{n^2 e^2 \omega_{\mathbf{k}}^{L_n}}{m_e^2 \omega_{pe}^5} \int d\mathbf{k}' a_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^n I_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} \text{Re} \epsilon^{-2}(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}}^{L_n} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}), \\ &\approx \frac{n^3 e^2}{m_e^2 \omega_{pe}^4} \int d\mathbf{k}' a_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^n I_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} \text{Re} \epsilon^{-2}(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}}^{L_n} - \omega_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}). \quad (\text{A.20}) \end{aligned}$$

## Apêndice B

# Integrais no espaço de velocidades

A integral a calcular é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} du_x \int_{-\infty}^{\infty} du_z \Phi_\alpha \delta \left[ \sigma z_{\mathbf{q}}^\beta - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^\gamma - (q_x - q'_x)u_x - (q_z - q'_z)u_z \right],$$

onde  $\beta, \gamma$  são índices que se referem aos tipos de ondas e  $\alpha$  se refere ao tipo de partícula.

Agora integramos em uma das variáveis, neste caso  $u_z$ ,

$$\frac{1}{|q_z - q'_z|} \int_{-\infty}^{\infty} du_x \left[ \Phi_\alpha \right]_{u_z = (\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^\gamma - (q_x - q'_x)u_x) / (q_z - q'_z)}.$$

A integral na outra variável,  $u_x$ , pode-se fazer da seguinte forma,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} du_x \left[ \Phi_\alpha \right]_{u_z = (\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^\gamma - (q_x - q'_x)u_x) / (q_z - q'_z)} \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{m_\alpha T_*}{m_e T_\alpha} \right) \int_{-\infty}^{\infty} du_x \left[ \exp \left( -\alpha(u_x^2 + u_z^2) \right) \right]_{u_z = au_x + b} \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{m_\alpha T_*}{m_e T_\alpha} \right) \left[ \int_{-\infty}^0 du_x \left[ \exp \left( -\alpha(u_x^2 + u_z^2) \right) \right]_{u_z = au_x + b} \right. \\ & \quad \left. + \int_0^{\infty} du_x \left[ \exp \left( -\alpha(u_x^2 + u_z^2) \right) \right]_{u_z = au_x + b} \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{m_\alpha T_*}{m_e T_\alpha} \right) \left[ \int_0^{\infty} du_x \left[ \exp \left( -\alpha(u_x^2 + u_z^2) \right) \right]_{u_z = -au_x + b} \right. \\ & \quad \left. + \int_0^{\infty} du_x \left[ \exp \left( -\alpha(u_x^2 + u_z^2) \right) \right]_{u_z = au_x + b} \right] \end{aligned}$$

onde

$$\alpha = \frac{m_\alpha T_*}{m_e T_\alpha}, \quad a = -\frac{q_x - q'_x}{q_z - q'_z}, \quad b = \frac{\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^\gamma}{q_z - q'_z}$$

Usando o valor de  $u_z$ ,

$$\int_0^\infty du_x \exp\left[-\alpha\left((1+a^2)u_x^2 \pm 2ab u_x + b^2\right)\right].$$

Para  $b = 0$ , o valor da integral é

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}, \quad (\text{B.1})$$

e para  $b \neq 0$ ,

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \exp\left(-\frac{\alpha b^2}{a^2+1}\right) \left[1 - \operatorname{erf}\left(\pm \frac{ab\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a^2+1}}\right)\right]. \quad (\text{B.2})$$

Consideramos o caso de  $b \neq 0$ , então usamos (B.2) e integramos em  $u_x$

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty du_x \exp\left[-\frac{m_\alpha T_*}{m_e T_\alpha} \left[\frac{((q_z - q'_z)^2 + (q_x - q'_x)^2) u_x^2 - 2(q_x - q'_x)(\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^\gamma) u_x + (\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^\gamma)^2}{(q_z - q'_z)^2}\right]\right] \\ & + \int_0^\infty du_x \exp\left[-\frac{m_\alpha T_*}{m_e T_\alpha} \left[\frac{((q_z - q'_z)^2 + (q_x - q'_x)^2) u_x^2 + 2(q_x - q'_x)(\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^\gamma) u_x + (\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^\gamma)^2}{(q_z - q'_z)^2}\right]\right] \\ & = \frac{1}{2} \left(\pi \frac{m_e T_\alpha}{m_\alpha T_*}\right)^{1/2} \frac{|q_z - q'_z|}{\sqrt{(q_x - q'_x)^2 + (q_z - q'_z)^2}} \exp\left(-\frac{m_\alpha T_*}{m_e T_\alpha} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^\gamma)^2}{(q_x - q'_x)^2 + (q_z - q'_z)^2}\right) \\ & \times \left[1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{m_\alpha T_*}{m_e T_\alpha}} \frac{(q_x - q'_x) |q_z - q'_z|}{q_z - q'_z} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^\gamma)}{\sqrt{(q_x - q'_x)^2 + (q_z - q'_z)^2}}\right)\right] \\ & + \frac{1}{2} \left(\pi \frac{m_e T_\alpha}{m_\alpha T_*}\right)^{1/2} \frac{|q_z - q'_z|}{\sqrt{(q_x - q'_x)^2 + (q_z - q'_z)^2}} \exp\left(-\frac{m_i T_*}{m_e T_i} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^\gamma)^2}{(q_x - q'_x)^2 + (q_z - q'_z)^2}\right) \\ & \times \left[1 - \operatorname{erf}\left(-\sqrt{\frac{m_\alpha T_*}{m_e T_\alpha}} \frac{(q_x - q'_x) |q_z - q'_z|}{q_z - q'_z} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^\gamma)}{\sqrt{(q_x - q'_x)^2 + (q_z - q'_z)^2}}\right)\right] \end{aligned}$$

Usando  $\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x)$ , obtemos,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \left(\frac{m_\alpha T_*}{m_e T_\alpha}\right) \left(\pi \frac{m_e T_\alpha}{m_\alpha T_*}\right)^{1/2} \frac{|q_z - q'_z|}{\sqrt{(q_x - q'_x)^2 + (q_z - q'_z)^2}} \exp\left(-\frac{m_\alpha T_*}{m_e T_\alpha} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^\gamma)^2}{(q_x - q'_x)^2 + (q_z - q'_z)^2}\right) \\ & = \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_\alpha T_*}{m_e T_\alpha}\right)^{1/2} \frac{|q_z - q'_z|}{\sqrt{(q_x - q'_x)^2 + (q_z - q'_z)^2}} \exp\left(-\frac{m_\alpha T_*}{m_e T_\alpha} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^\gamma)^2}{(q_x - q'_x)^2 + (q_z - q'_z)^2}\right). \end{aligned}$$

Além disso, dividimos por  $|q_z - q'_z|$ , o que nos leva à seguinte expressão

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^\infty du_x \int_{-\infty}^\infty du_z \Phi_\alpha \delta\left[\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^\gamma - (q_x - q'_x)u_x - (q_z - q'_z)u_z\right] \quad (\text{B.3}) \\ & = \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_\alpha T_*}{m_e T_\alpha}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{(q_x - q'_x)^2 + (q_z - q'_z)^2}} \exp\left(-\frac{m_\alpha T_*}{m_e T_\alpha} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^\gamma)^2}{(q_x - q'_x)^2 + (q_z - q'_z)^2}\right). \end{aligned}$$

## Apêndice C

# Equação para as partículas em diferenças finitas

Temos a equação (3.4), que descreve a evolução da função de distribuição de velocidades das partículas,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial u_x} (A_x^{\text{el}} \Phi_e) + \frac{\partial}{\partial u_z} (A_z^{\text{el}} \Phi_e) \\ &+ \frac{\partial}{\partial u_x} \left( D_{xx}^{\text{el}} \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} + D_{xz}^{\text{el}} \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right) + \frac{\partial}{\partial u_z} \left( D_{zx}^{\text{el}} \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} + D_{zz}^{\text{el}} \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right). \end{aligned}$$

Podemos coletar as derivadas da forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial u_x} (A_x \Phi) + \frac{\partial}{\partial u_x} \left( D_{xx} \frac{\partial \Phi}{\partial u_x} \right) + \frac{\partial}{\partial u_x} \left( D_{xz} \frac{\partial \Phi}{\partial u_z} \right)}_{\mathcal{L}_x} \\ &+ \underbrace{\frac{\partial}{\partial u_z} (A_z \Phi) + \frac{\partial}{\partial u_z} \left( D_{zx} \frac{\partial \Phi}{\partial u_x} \right) + \frac{\partial}{\partial u_z} \left( D_{zz} \frac{\partial \Phi}{\partial u_z} \right)}_{\mathcal{L}_z}. \end{aligned}$$

Usamos o índice  $i$  para a coordenada  $u_x$ , com  $1 \leq i \leq n_i$ , e  $k$  para a coordenada  $u_z$ , com  $1 \leq k \leq n_k$ . Para o tempo normalizado  $\tau$ , usamos o índice  $n$ , e o intervalo de tempo  $\Delta\tau$ . Para a solução numérica usaremos o método conhecido como *splitting*, que é aplicado da seguinte forma:

- para todo intervalo aplicamos  $\mathcal{L}_x$  e  $\mathcal{L}_z$  sobre  $\phi^n$ , gerando funções  $\Phi_x$  e  $\Phi_z$ ;
- então escrevemos  $\Phi^{n+1} = \Phi_x + \Phi_z - \Phi^n$ ;
- finalmente aplicamos as condições de fronteira sobre a função  $\Phi^{n+1}$ .

Iniciamos pela aplicação de  $\mathcal{L}_x$ ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} &= \frac{\partial A_x}{\partial u_x} \Phi + \left( A_x + \frac{\partial D_{xx}}{\partial u_x} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial u_x} + D_{xx} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_x^2} + \frac{\partial D_{xz}}{\partial u_x} \frac{\partial \Phi}{\partial u_z} + D_{xz} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_x \partial u_z}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} - \frac{\partial A_x}{\partial u_x} \Phi - \left( A_x + \frac{\partial D_{xx}}{\partial u_x} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial u_x} - D_{xx} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_x^2} &= \frac{\partial D_{xz}}{\partial u_x} \frac{\partial \Phi}{\partial u_z} + D_{xz} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_x \partial u_z}.\end{aligned}$$

Aplicamos o operador de forma parcialmente explícita e parcialmente implícita. Para todo  $1 \leq k \leq n_k$  e  $2 \leq i \leq n_i - 1$ , podemos aplicar as derivadas centradas em  $u_x$ , e derivada avançada em  $\tau$ ,

$$\begin{aligned}& \left( \frac{\Phi_{i,k}^{n+1} - \Phi_{i,k}^n}{\Delta \tau} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial A_x}{\partial u_x} \Phi_{i,k}^{n+1} - \frac{1}{2} \left( A_x + \frac{\partial D_{xx}}{\partial u_x} \right)_{i,k} \left( \frac{\Phi_{i+1,k}^{n+1} - \Phi_{i-1,k}^{n+1}}{2\Delta u_x} \right) \\ & - \frac{1}{2} D_{xx} \left( \frac{\Phi_{i+1,k}^{n+1} - 2\Phi_{i,k}^{n+1} + \Phi_{i-1,k}^{n+1}}{(\Delta u_x)^2} \right) \\ & = \frac{1}{2} \left( A_x + \frac{\partial D_{xx}}{\partial u_x} \right)_{i,k} \left( \frac{\Phi_{i+1,k}^n - \Phi_{i-1,k}^n}{2\Delta u_x} \right) + \frac{1}{2} D_{xx} \left( \frac{\Phi_{i+1,k}^n - 2\Phi_{i,k}^n + \Phi_{i-1,k}^n}{(\Delta u_x)^2} \right) \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial A_x}{\partial u_x} \Phi_{i,k}^n + \frac{\partial D_{xz}}{\partial u_x} \frac{\partial \Phi^n}{\partial u_z} + D_{xz} \frac{\partial^2 \Phi^n}{\partial u_x \partial u_z}.\end{aligned}$$

Multiplicando por  $\Delta \tau$ ,

$$\begin{aligned}& \left( \Phi_{i,k}^{n+1} - \Phi_{i,k}^n \right) - \frac{\partial A_x}{\partial u_x} \Phi_{i,k}^{n+1} \frac{\Delta \tau}{2} - \left( A_x + \frac{\partial D_{xx}}{\partial u_x} \right)_{i,k} \frac{\Delta \tau}{4\Delta u_x} \left( \Phi_{i+1,k}^{n+1} - \Phi_{i-1,k}^{n+1} \right) \\ & - D_{xx} \frac{\Delta \tau}{2(\Delta u_x)^2} \left( \Phi_{i+1,k}^{n+1} - 2\Phi_{i,k}^{n+1} + \Phi_{i-1,k}^{n+1} \right) \\ & = \left( A_x + \frac{\partial D_{xx}}{\partial u_x} \right)_{i,k} \frac{\Delta \tau}{4\Delta u_x} \left( \Phi_{i+1,k}^n - \Phi_{i-1,k}^n \right) + D_{xx} \frac{\Delta \tau}{2(\Delta u_x)^2} \left( \Phi_{i+1,k}^n - 2\Phi_{i,k}^n + \Phi_{i-1,k}^n \right) \\ & + \frac{\partial A_x}{\partial u_x} \Phi_{i,k}^n \frac{\Delta \tau}{2} + \left[ \frac{\partial D_{xz}}{\partial u_x} \frac{\partial \Phi^n}{\partial u_z} + D_{xz} \frac{\partial^2 \Phi^n}{\partial u_x \partial u_z} \right] (\Delta \tau).\end{aligned}$$

Podemos definir

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \left( A_x + \frac{\partial D_{xx}}{\partial u_x} \right)_{i,k} \frac{\Delta\tau}{4\Delta u_x} - D_{xx} \frac{\Delta\tau}{2(\Delta u_x)^2} , \\
\beta_1 &= 1 - \frac{\partial A_x}{\partial u_x} \frac{\Delta\tau}{2} + 2D_{xx} \frac{\Delta\tau}{2(\Delta u_x)^2} , \\
\gamma_1 &= - \left( A_x + \frac{\partial D_{xx}}{\partial u_x} \right)_{i,k} \frac{\Delta\tau}{4\Delta u_x} - D_{xx} \frac{\Delta\tau}{2(\Delta u_x)^2} , \\
\psi_1 &= \Phi_{i,k}^n + \frac{\partial A_x}{\partial u_x} \Phi_{i,k}^n \frac{\Delta\tau}{2} + \left( \frac{\partial D_{xz}}{\partial u_x} \frac{\partial \Phi^n}{\partial u_z} + D_{xz} \frac{\partial^2 \Phi^n}{\partial u_x \partial u_z} \right)_{i,k} (\Delta\tau) \\
&\quad + \left( A_x + \frac{\partial D_{xx}}{\partial u_x} \right)_{i,k} \frac{\Delta\tau}{4\Delta u_x} (\Phi_{i+1,k}^n - \Phi_{i-1,k}^n) \\
&\quad + D_{xx} \frac{\Delta\tau}{2(\Delta u_x)^2} (\Phi_{i+1,k}^n - 2\Phi_{i,k}^n + \Phi_{i-1,k}^n) ,
\end{aligned} \tag{C.1}$$

obtendo

$$\alpha_1 \Phi_{i-1,k}^{n+1} + \beta_1 \Phi_{i,k}^{n+1} + \gamma_1 \Phi_{i+1,k}^{n+1} = \psi_1 , \tag{C.2}$$

para  $2 \leq i \leq n_i - 1$  e  $1 \leq k \leq n_k$ . As derivadas explícitas são avaliadas usando um esquema apropriado. Por exemplo, derivada de 5-pontos, com aproximações de derivada centrada de 3-pontos para frente ou para trás perto das bordas. Com este procedimento, a Equação (C.2) é válida para todos os valores de  $k$ . Como condições de fronteira, para qualquer  $k$ , usamos

$$\frac{\partial \Phi_{1,k}}{\partial u_x} = 0 , \quad \frac{\partial \Phi_{n_i,k}}{\partial u_x} = \text{constant} . \tag{C.3}$$

A motivação para escolher a condição de contorno em  $u_{x,lim}$  ( $i = n_i$ ) é a seguinte: Supomos que a fronteira é suficientemente distante da região mais povoada do espaço de velocidades, de forma que ali a distribuição não deve mudar muito. Portanto, as derivadas permanecem como a inicial. Com esta escolha podem ocorrer algumas mudanças na função de distribuição, que acontecem se não supusermos os valores da função de distribuição na fronteira como constantes.

Uma alternativa para usar estas condições de fronteira é desenvolver uma equação de diferenças finitas para os pontos de fronteira. Quanto a  $\mathcal{L}_x$ , a condição proposta para  $i = 1$  ainda pode ser utilizada. Para  $i = n_i$ , podemos desenvolver equações de diferenças finitas usando derivadas “para trás” (*backward derivatives*), tanto para primeira quanto para segunda ordem. As derivadas de segunda ordem podem ser escritas na forma explícita, para manter o sistema de equações na forma tri-diagonal.

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\Phi_{i,k}^{n+1} - \Phi_{i,k}^n}{\Delta\tau} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial A_x}{\partial u_x} \Phi_{i,k}^{n+1} - \frac{1}{2} \left( A_x + \frac{\partial D_{xx}}{\partial u_x} \right)_{i,k} \left( \frac{\Phi_{i,k}^{n+1} - \Phi_{i-1,k}^{n+1}}{\Delta u_x} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( A_x + \frac{\partial D_{xx}}{\partial u_x} \right)_{i,k} \left( \frac{\Phi_{i,k}^n - \Phi_{i-1,k}^n}{\Delta u_x} \right) + D_{xx} \left( \frac{\Phi_{i,k}^n - 2\Phi_{i-1,k}^n + \Phi_{i-2,k}^n}{(\Delta u_x)^2} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial A_x}{\partial u_x} \Phi_{i,k}^n + \frac{\partial D_{xz}}{\partial u_x} \frac{\partial \Phi^n}{\partial u_z} + D_{xz} \frac{\partial^2 \Phi^n}{\partial u_x \partial u_z}. \end{aligned}$$

Multiplicando por  $\Delta\tau$ ,

$$\begin{aligned} & \left( \Phi_{i,k}^{n+1} - \Phi_{i,k}^n \right) - \frac{\Delta\tau}{2} \frac{\partial A_x}{\partial u_x} \Phi_{i,k}^{n+1} - \frac{\Delta\tau}{2\Delta u_x} \left( A_x + \frac{\partial D_{xx}}{\partial u_x} \right)_{i,k} \left( \Phi_{i,k}^{n+1} - \Phi_{i-1,k}^{n+1} \right) \\ &= \frac{\Delta\tau}{2\Delta u_x} \left( A_x + \frac{\partial D_{xx}}{\partial u_x} \right)_{i,k} \left( \Phi_{i,k}^n - \Phi_{i-1,k}^n \right) + D_{xx} \frac{\Delta\tau}{(\Delta u_x)^2} \left( \Phi_{i,k}^n - 2\Phi_{i-1,k}^n + \Phi_{i-2,k}^n \right) \\ &+ \frac{\Delta\tau}{2} \frac{\partial A_x}{\partial u_x} \Phi_{i,k}^n + \left[ \frac{\partial D_{xz}}{\partial u_x} \frac{\partial \Phi^n}{\partial u_z} + D_{xz} \frac{\partial^2 \Phi^n}{\partial u_x \partial u_z} \right] (\Delta\tau). \end{aligned}$$

Podemos definir para  $i = n_i$ ,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \left( A_x + \frac{\partial D_{xx}}{\partial u_x} \right)_{i,k} \frac{\Delta\tau}{2\Delta u_x}, \\ \beta_1 &= 1 - \left( A_x + \frac{\partial D_{xx}}{\partial u_x} \right)_{i,k} \frac{\Delta\tau}{2\Delta u_x} - \frac{\partial A_x}{\partial u_x} \frac{\Delta\tau}{2}, \\ \gamma_1 &= 0, \\ \psi_1 &= \Phi_{i,k}^n + \frac{\partial A_x}{\partial u_x} \Phi_{i,k}^n \frac{\Delta\tau}{2} + \left( \frac{\partial D_{xz}}{\partial u_x} \frac{\partial \Phi^n}{\partial u_z} + D_{xz} \frac{\partial^2 \Phi^n}{\partial u_x \partial u_z} \right)_{i,k} (\Delta\tau) \\ &+ \left( A_x + \frac{\partial D_{xx}}{\partial u_x} \right)_{i,k} \frac{\Delta\tau}{2\Delta u_x} \left( \Phi_{i,k}^n - \Phi_{i-1,k}^n \right) \\ &+ D_{xx} \frac{\Delta\tau}{(\Delta u_x)^2} \left( \Phi_{i,k}^n - 2\Phi_{i-1,k}^n + \Phi_{i-2,k}^n \right). \end{aligned} \tag{C.4}$$



---

Usando as equações (C.1) e (C.4), podemos usar a equação (C.2) para  $2 \leq i \leq n_i$  e  $1 \leq k \leq n_k$ . A solução em  $i = 1$  se obtém usando as condições de contorno (C.3).

Para o outro operador,  $\mathcal{L}_z$ , obtemos equações similares.

## Apêndice D

# Relação de dispersão aproximada para harmônicos eletrostáticos

A relação de dispersão para os modos HL é dada pela equação (2.46), definida da forma

$$\omega_{\mathbf{k}}^{Ln} = \omega_{pe} \left( n + \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(n)} + \frac{2}{3} k^2 \lambda_{De}^2 + 3 \frac{\theta_{\mathbf{k}}^{(n)}}{\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(n)}} \lambda_{De}^2 \right), \quad (\text{D.1})$$

onde

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(n)} &= \frac{n^2}{2(n^2 - 1)} \frac{e^2}{m_e^2 \omega_{pe}^4} \int d\mathbf{k}' a_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{(n)} I^{L(n-1)}(\mathbf{k}'), \\ \theta_{\mathbf{k}}^{(n)} &= \frac{n^2}{2(n^2 - 1)} \frac{e^2}{m_e^2 \omega_{pe}^4} \int d\mathbf{k}' a_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^n I^{L(n-1)}(\mathbf{k}') \left( k'^2 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' + \frac{\theta_{\mathbf{k}'}^{(n-1)}}{\varepsilon_{\mathbf{k}'}^{(n-1)}} \right). \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Podemos fazer uma aproximação na relação de dispersão calculando as integrais de  $\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(n)}$  e  $\theta_{\mathbf{k}}^{(n)}$ . Para avaliar as integrais da equação (D.2) precisamos da quantidade  $a_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$  dada pela equação (2.39)

$$a_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^n = \frac{\{(n-1)k^2[\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}')] + nk'^2[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}')] + n(n-1)|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')\}^2}{[n^2(n-1)kk'|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2]},$$

e o espectro das ondas  $I_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)}$ .

Sabemos que as quantidades  $\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(n)}$  e  $\theta_{\mathbf{k}}^{(n)}$  são correções de segunda ordem na relação de dispersão, portanto podemos fazer as integrais usando o espectro de equilíbrio  $I^{L,eq}(\mathbf{k})$ .

Para o modo fundamental o espectro de equilíbrio definido na equação (4.10), em termos de  $\mathbf{k}$  pode ser escrito da forma

$$I_{\mathbf{k}}^{L,eq} = I_{\mathbf{k}}^{L1} \approx \frac{m_e v_e^2}{8\pi^2} \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega_{\mathbf{k}}^L)^2} \approx \frac{m_e v_e^2}{8\pi^2} \frac{1}{1 + 3\lambda_{De}^2 k^2},$$

sendo  $I_{\mathbf{k}}^{L,eq}$  isotrópico em  $\mathbf{k}$  e convergente para valores grandes de  $\mathbf{k}$ .

Para  $n = 2$  o coeficiente  $a_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^n$  é

$$a_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{(2)} = \left( \frac{k^2[kk'_z - k'^2] + 2k'^2[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}') + 2|\mathbf{k} - \mathbf{k}'||\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}]}{4kk'|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|} \right)^2.$$

As integrais que devem ser avaliadas para obtenção de  $\varepsilon_{\mathbf{k}}^{Ln}$  e  $\theta_{\mathbf{k}}^{Ln}$  (ver equação (D.2)) estão em função de  $\mathbf{k}'$ . Podemos escrever  $\mathbf{k}'$  em função das componentes paralela e perpendicular a  $\mathbf{k}$

$$\mathbf{k}' = k'_{\parallel} \hat{\mathbf{k}} + \mathbf{k}'_{\perp k} = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'}{k} \hat{\mathbf{k}} + \frac{\mathbf{k} \times (\mathbf{k}' \times \mathbf{k})}{k^2}. \quad (\text{D.3})$$

Usando a equação (D.3), reescrevemos  $a_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{(n)}$ ,

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{(n)} &= \frac{\left\{ k^2 k'^2 + [(n^2 - 1)k^2 + n(n - 2)k'^2 - 2n(n - 1)kk'_{\parallel}]kk'_{\parallel} \right\}^2}{n^4(n - 1)^4 (k^2 - k'^2 - 2kk'_{\parallel}) k^2 k'^2} \\ &= \frac{\left\{ kk'^2 + [(n^2 - 1)k^2 + n(n - 2)k'^2 - 2n(n - 1)kk'_{\parallel}]k'_{\parallel} \right\}^2}{n^4(n - 1)^4 (k^2 - k'^2 - 2kk'_{\parallel}) k'^2}, \end{aligned}$$

de modo que para  $n = 2$ , temos a expressão seguinte,

$$a_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{(2)} = \frac{\left[ kk'^2 + (3k^2 - 4kk'_{\parallel})k'_{\parallel} \right]^2}{16(k^2 + k'^2 - 2kk'_{\parallel})k'^2}.$$

De acordo com [42], no estudo da instabilidade feixe-plasma vemos que o modo Langmuir cresce na região perto de  $k_0 \approx \omega_{pe}/V_0$ , onde  $k_0$  é o comprimento de onda ressonante com a velocidade de fase para um feixe com velocidade  $V_0$ . Neste caso a intensidade do feixe pode ser escrita da forma

$$I_{\mathbf{k}}^L = \frac{I^L}{\pi^{3/2} \delta^3} e^{-(k_z - k_0)^2 / \delta^2} e^{-k_{\perp}^2 / \delta^2}, \quad (\text{D.4})$$

onde  $I^L$  é a intensidade de onda por unidade de volume, e  $\delta$  a largura do espectro. Assim, para avaliar a integral de  $\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(n)}$ , equação (D.2), para  $n = 2$ ,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(2)} &= \frac{2}{3} \frac{e^2}{m_e^2 \omega_{pe}^4} \int d\mathbf{k}' a_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{(2)} I_{\mathbf{k}'}^L \\ &= \frac{1\pi}{24} \frac{e^2 k^2}{m_e^2 \omega_{pe}^4} \frac{I^L}{\pi^{3/2} \delta^3} \int d\mathbf{k}' \frac{\left[ k k'^2 + (3k^2 - 4k k'_{\parallel}) k'_{\parallel} \right]^2}{(k^2 + k'^2 - 2k k'_{\parallel}) k'^2} e^{-(k'_z - k_0)^2 / \delta^2} e^{-k'^2_{\perp} / \delta^2}.\end{aligned}$$

As integrais a fazer são complicadas, mas as podemos aproximar

$$\begin{aligned}\frac{e^{-(k_z - k_0)^2 / \delta^2}}{\pi^{1/2} \delta} &\simeq \delta(k_z - k_0), \\ k_{\perp} \frac{e^{-k_{\perp}^2 / \delta}}{\pi \delta^2} &\simeq \delta(k_{\perp});\end{aligned}$$

obtendo

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(2)} \approx \frac{\pi}{12} \frac{I^L e^2}{m_e^2 \omega_{pe}^4} \int_{-\infty}^{\infty} dk'_z \int_0^{\infty} dk'_{\perp} \frac{\left[ k k'^2 + (3k^2 - 4k k'_{\parallel}) k'_{\parallel} \right]^2}{(k^2 + k'^2 - 2k k'_{\parallel}) k'^2} \delta(k'_z - k_0) \delta(k'_{\perp}). \quad (\text{D.5})$$

Para avaliar as integrais reescrevemos  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{k}'$  em termos das componentes paralela e perpendicular

$$\begin{aligned}\mathbf{k} &= k_{\perp} (\cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi \hat{\mathbf{y}}) + k_z \hat{\mathbf{z}}, \\ \mathbf{k}' &= k'_{\perp} (\cos \phi' \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi' \hat{\mathbf{y}}) + k'_z \hat{\mathbf{z}} \\ k'_{\parallel} &= \frac{k_{\perp} k'_{\perp}}{k} \cos(\phi - \phi') + \frac{k_z k'_z}{k},\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}k^2 \mathbf{k}'_{\perp k} &= [k_z (k_z k'_{\perp} \cos \phi' - k_{\perp} k'_z \cos \phi) + k_{\perp}^2 k'_{\perp} \sin(\phi - \phi') \sin \phi] \hat{\mathbf{x}} \\ &\quad + [k_z (k_z k'_{\perp} \sin \phi' - k_{\perp} k'_z \sin \phi) - k_{\perp}^2 k'_{\perp} \sin(\phi - \phi') \cos \phi] \hat{\mathbf{y}} \\ &\quad + k_{\perp} [k_{\perp} k'_z - k_z k'_{\perp} \cos(\phi - \phi')] \hat{\mathbf{z}}.\end{aligned}$$

Quando  $\delta(k'_z - k_0) \delta(k'_{\perp})$ , temos que

$$\begin{aligned}k'^2 &\rightarrow k_0^2, \\ k'_{\parallel} &\rightarrow \frac{k_z}{k} k_0, \\ \mathbf{k}'_{\perp k} &\rightarrow -\frac{k_z k_{\perp} k_0}{k^2} (\cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi \hat{\mathbf{y}}) + \frac{k_{\perp}^2 k_0}{k^2} \hat{\mathbf{z}},\end{aligned}$$

avaliando a integral de (D.5), obtemos

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(2)} &\approx \frac{\pi}{12} \frac{e^2 I^L}{m_e^2 \omega_{pe}^4} \frac{[kk_0 + (3k^2 - 4k_z k_0) \frac{k_z}{k}]^2}{k^2 + k_0^2 - 2k_z k_0} \\ &= \frac{\pi}{12} \frac{e^2 I^L}{m_e^2 \omega_{pe}^4} \frac{[k^2 k_0 + (3k^2 - 4k_z k_0)k]^2}{k^2 (k^2 + k_0^2 - 2k_z k_0)}.\end{aligned}\quad (\text{D.6})$$

Agora, para calcular  $\theta_{\mathbf{k}}^{(2)}$  usamos a equação (D.2), onde  $\theta^{(1)} = 0$

$$\begin{aligned}\theta_{\mathbf{k}}^{(2)} &= \frac{2}{3} \frac{e^2}{m_e^2 \omega_{pe}^4} \int d\mathbf{k}' a_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{(2)} \left( k'^2 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' \right) I_{\mathbf{k}'}^L \\ &= \frac{\pi}{12} \frac{e^2}{m_e^2 \omega_{pe}^4} \int_{-\infty}^{\infty} dk'_z \int_0^{\infty} dk'_\perp k'_\perp \left[ \frac{[kk'^2 + (3k^2 - 4kk'_\parallel)k'_\parallel]^2}{(k^2 + k'^2 - 2kk'_\parallel)k'^2} (k'^2 - kk'_\parallel) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{I^L}{\pi^{3/2} \delta^3} e^{-(k'_z - k_0)^2 / \delta^2} e^{-k'^2_\perp / \delta^2} \right] \\ &\approx \frac{\pi}{12} \frac{e^2 I^L}{m_e^2 \omega_{pe}^4} \int_{-\infty}^{\infty} dk'_z \int_0^{\infty} dk'_\perp \frac{[kk'^2 + (3k^2 - 4kk'_\parallel)k'_\parallel]^2}{(k^2 + k'^2 - 2kk'_\parallel)k'^2} (k'^2 - kk'_\parallel) \delta(k'_z - k_0) \delta(k'_\perp) \\ \theta_{\mathbf{k}}^{(2)} &= \frac{\pi}{12} \frac{e^2 I^L}{m_e^2 \omega_{pe}^4} \frac{[k^2 k_0 + (3k^2 - 4k_z k_0)k]^2}{k^2 (k^2 + k_0^2 - 2k_z k_0)} (k_0^2 - k_z k_0).\end{aligned}\quad (\text{D.7})$$

Usando as equações (D.6) e (D.7), vemos que

$$\theta_{\mathbf{k}}^2 = \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(2)} (k_0^2 - k_z k_0).$$

Agora a relação de dispersão para  $n = 2$ , equação (D.1), pode ser escrita da forma

$$\begin{aligned}\frac{\omega^{L2}}{\omega_{pe}} &= 2 + \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(2)} + \frac{3}{2} k^2 \lambda_{De}^2 + 3 \frac{\theta_{\mathbf{k}}^{(2)}}{\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(2)}} \lambda_{De}^2 \\ &= 2 + \frac{3}{2} k^2 \lambda_{De}^2 + 3(k_0^2 - k_z k_0) \lambda_{De}^2 + \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(2)} \\ &= 2 + \frac{3}{2} \lambda_{De}^2 [k_\perp^2 + (k_z - k_0)^2 + k_0^2] + \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(2)}.\end{aligned}$$

Podemos escrever a equação (D.6) em termos do parâmetro do plasma  $g$ , o volume da esfera de Debye  $V_{De}$  e a temperatura dos elétrons  $T_e$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(2)} &= \frac{\pi}{12} \frac{e^2 I^L}{m_e^2 \omega_{pe}^4} \frac{[k^2 k_0 + (3k^2 - 4k_z k_0)k]^2}{k^2 (k^2 + k_0^2 - 2k_z k_0)} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} g \frac{V_{De} I^L}{T_e} \lambda_{De}^2 \frac{[k^2 k_0 + (3k^2 - 4k_z k_0)k]^2}{k^2 (k^2 + k_0^2 - 2k_z k_0)},\end{aligned}$$

onde  $V_{De} = \frac{4\pi}{3} \lambda_{De}^3$ . Se  $g \ll 1$  e  $I^L V_{De} \ll T_e$ ,  $\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(2)}$  é muito pequeno.

A análise feita para  $n = 2$ , pode-se aplicar para os modos harmônicos de Langmuir de ordem mais alta, escrevendo as intensidades da forma

$$I_{\mathbf{k}}^{Ln} = \frac{I^{Ln}}{\pi^{3/2} \delta^3} e^{-(k_z - nk_0)^2 / \delta^2} e^{-\mathbf{k}_{\perp}^2 / \delta^2},$$

então

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(n)} &= \frac{n^2}{2(n^2 - 1)} \frac{e^2}{m_e^2 \omega_{pe}^4} \int d\mathbf{k}' a_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^n I_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} \\ &= \frac{(n^2 - 1)^{-1}}{\pi n^2 (n^2 - 1)^4} \frac{e^2}{m_e^2 \omega_{pe}^4} \int_{-\infty}^{\infty} dk'_z \int_0^{\infty} dk'_{\perp} k'_{\perp} \left[ \frac{I^{L(n-1)} e^{-(k'_z - k_0)^2 / \delta^2} e^{-k'^2_{\perp} / \delta^2}}{\pi^{3/2} \delta^3} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\left\{ k k'^2 + [(n^2 - 1)k^2 + n(n-2)k'^2 - 2n(n-1)k k'_{\parallel}] k'_{\parallel} \right\}^2}{n^4 (n-1)^4 (k^2 - k'^2 - 2k k'_{\parallel}) k'^2} \right] \\ &\approx \frac{(n^2 - 1)^{-1}}{\pi n^2 (n^2 - 1)} \frac{e^2 I^{Ln}}{m_e^2 \omega_{pe}^4} \int_{-\infty}^{\infty} dk'_z \int_0^{\infty} dk'_{\perp} \left[ \delta(k'_z - (n-1)k_0) \delta(k'_{\perp}) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\left\{ k k'^2 + [(n^2 - 1)k^2 + n(n-2)k'^2 - 2n(n-1)k k'_{\parallel}] k'_{\parallel} \right\}^2}{n^4 (n-1)^4 (k^2 - k'^2 - 2k k'_{\parallel}) k'^2} \right].\end{aligned}$$

Agora, avaliando as quantidades  $k'^2$  e  $k'_{\parallel}$  em  $\delta(k'_z - (n-1)k_0) \delta(k'_{\perp})$ , obtemos

$$\begin{aligned}k'^2 &\rightarrow (n-1)^2 k_0^2, \\ k'_{\parallel} &\rightarrow (n-1) \frac{k_z}{k} k_0,\end{aligned}$$

e reescrevemos  $\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(n)}$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(n)} &= \frac{(n^2 - 1)^{-1} I^{L(n-1)} e^2}{\pi n^2 (n-1)^2 m_e^2 \omega_{pe}^4} \\
 &\quad \times \frac{\{k^2 k_0 + [(n+1)k^2 + n(n-2)(n-1)k_0^2 - 2n(n-1)k_z k_0]k_z\}^2}{[k^2 + (n-1)^2 k_0^2 - 2(n-1)k_z k_0]k^2} \\
 &= \frac{6\sqrt{2} (n^2 - 1)^{-1} I^{L(n-1)} V_{De}}{\pi n^2 (n-1)^2 g T_e} \lambda_{De}^2 \\
 &\quad \times \frac{\{k^2 k_0 + [(n+1)k^2 + n(n-2)(n-1)k_0^2 - 2n(n-1)k_z k_0]k_z\}^2}{[k^2 + (n-1)^2 k_0^2 - 2(n-1)k_z k_0]k^2}, \tag{D.8}
 \end{aligned}$$

onde

$$g \frac{I^{L(n-1)} V_{De}}{T_e} \ll 1,$$

de modo que  $\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(n)}$  deve ser uma quantidade pequena.

Agora,

$$\begin{aligned}
 \theta_{\mathbf{k}}^{(n)} &= \frac{n^2}{2(n^2 - 1)} \frac{e^2}{m_e^2 \omega_{pe}^4} \int d\mathbf{k}' a_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{(n)} I_{\mathbf{k}'}^{L(n-1)} \left( k'^2 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' + \frac{\theta_{\mathbf{k}'}^{(n-1)}}{\varepsilon_{\mathbf{k}'}^{(n-1)}} \right) \\
 &= \frac{(n^2 - 1)^{-1}}{\pi n^2 (n^2 - 1)^4} \frac{e^2}{m_e^2 \omega_{pe}^4} \int_{-\infty}^{\infty} dk'_z \int_0^{\infty} dk'_\perp k'_\perp \left[ \frac{I^{L(n-1)} e^{-(k'_z - k_0)^2 / \delta^2} e^{-k'^2_\perp / \delta^2}}{\pi^{3/2} \delta^3} \right. \\
 &\quad \times \left. \left( k'^2 - k k'_\parallel + \frac{\theta_{\mathbf{k}'}^{(n-1)}}{\varepsilon_{\mathbf{k}'}^{(n-1)}} \right) \frac{\{k k'^2 + [(n^2 - 1)k^2 + n(n-2)k'^2 - 2n(n-1)k k'_\parallel]k'_\parallel\}^2}{n^4 (n-1)^4 (k^2 - k'^2 - 2k k'_\parallel) k'^2} \right] \\
 &\approx \frac{(n^2 - 1)^{-1}}{\pi n^2 (n^2 - 1)} \frac{e^2 I^{Ln}}{m_e^2 \omega_{pe}^4} \frac{\{k^2 k_0 + [(n+1)k^2 + n(n-2)(n-1)k_0^2 - 2n(n-1)k_z k_0]k_z\}^2}{[k^2 + (n-1)^2 k_0^2 - 2(n-1)k_z k_0]k^2} \\
 &\quad \left( (n-1)k_0^2 - (n-1)k_z k_0 + \frac{\theta_{\mathbf{k}'}^{(n-1)}}{\varepsilon_{\mathbf{k}'}^{(n-1)}} \Big|_{k'_z = (n-1)k_0} \right), \tag{D.9}
 \end{aligned}$$

de modo que, usando (D.8) e (D.9), se chega a

$$\frac{\theta_{\mathbf{k}}^{(n)}}{\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(n)}} = (n-1)[(n-1)k_0^2 - k_z k_0] + \frac{\theta_{\mathbf{k}'}^{(n-1)}}{\varepsilon_{\mathbf{k}'}^{(n-1)}} \Big|_{k'_z = (n-1)k_0}, \tag{D.10}$$

com

$$\begin{aligned}
\frac{\theta_{\mathbf{k}}^{(3)}}{\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(3)}} &= 2[2k_0^2 - k_z k_0] + \frac{\theta_{\mathbf{k}'}^{(2)}}{\varepsilon_{\mathbf{k}'}^{(2)}} \Big|_{k'_z=2k_0}, & \frac{\theta_{\mathbf{k}}^{(2)}}{\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(2)}} &= -k_0^2 \rightarrow \frac{\theta_{\mathbf{k}}^{(3)}}{\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(3)}} = 3k_0^2 - 2k_z k_0 \\
\frac{\theta_{\mathbf{k}}^{(4)}}{\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(4)}} &= 3[3k_0^2 - k_z k_0] + \frac{\theta_{\mathbf{k}'}^{(3)}}{\varepsilon_{\mathbf{k}'}^{(3)}} \Big|_{k'_z=3k_0}, & \frac{\theta_{\mathbf{k}}^{(3)}}{\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(3)}} &= -3k_0^2 \rightarrow \frac{\theta_{\mathbf{k}}^{(4)}}{\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(4)}} = 6k_0^2 - 3k_z k_0 \\
\frac{\theta_{\mathbf{k}}^{(5)}}{\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(5)}} &= 4[4k_0^2 - k_z k_0] + \frac{\theta_{\mathbf{k}'}^{(4)}}{\varepsilon_{\mathbf{k}'}^{(4)}} \Big|_{k'_z=4k_0}, & \frac{\theta_{\mathbf{k}}^{(4)}}{\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(4)}} &= -6k_0^2 \rightarrow \frac{\theta_{\mathbf{k}}^{(5)}}{\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(5)}} = 10k_0^2 - 4k_z k_0 \\
\frac{\theta_{\mathbf{k}}^{(6)}}{\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(6)}} &= 5[5k_0^2 - k_z k_0] + \frac{\theta_{\mathbf{k}'}^{(5)}}{\varepsilon_{\mathbf{k}'}^{(5)}} \Big|_{k'_z=5k_0}, & \frac{\theta_{\mathbf{k}}^{(5)}}{\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(5)}} &= -10k_0^2 \rightarrow \frac{\theta_{\mathbf{k}}^{(6)}}{\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(6)}} = 15k_0^2 - 5k_z k_0 \dots
\end{aligned}$$

Por indução, temos que

$$\frac{\theta_{\mathbf{k}'}^{(n)}}{\varepsilon_{\mathbf{k}'}^{(n)}} \Big|_{k'_z=nk_0} = -\frac{n(n-1)}{2} k_0^2, \quad (\text{D.11})$$

agora reescrevemos (D.10)

$$\frac{\theta_{\mathbf{k}}^{(n)}}{\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(n)}} = \frac{1}{2} n(n-1) k_0^2 - (n-1) k_z k_0. \quad (\text{D.12})$$

Dessa forma, chega-se a uma relação de dispersão da forma

$$\begin{aligned}
\frac{\omega^{Ln}}{\omega_{pe}} &= n + \frac{3}{2} k^2 \lambda_{De}^2 - 3(n-1) \lambda_{De}^2 k_0 k_z + \frac{3}{2} n(n-1) \lambda_{De}^2 k_0^2 + \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(n)} \\
&= n + \frac{3}{2} \lambda_{De}^2 \{k_{\perp}^2 + [k_z - (n-1)k_0]^2\} + \frac{3}{2} (n-1) \lambda_{De}^2 k_0^2 + \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(n)}, \quad (\text{D.13})
\end{aligned}$$

onde  $\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(n)}$  está dado por (D.8). Como se trata de uma quantidade pequena, pode ser desprezada no cálculo numérico da relação de dispersão.



# Referências Bibliográficas

- [1] B. B. Kadomtsev. *Plasma Turbulence*. Academic Press, New York, 1965.
- [2] R. Z. Sagdeev and A. A. Galeev. *Nonlinear Plasma Theory*. Benjamin, New York, 1969.
- [3] V. N. Tsytovich. *Nonlinear Effects in a Plasma*. Plenum, New York, 1970.
- [4] A. I. Akhiezer, I. A. Akhiezer, R. V. Polovin, A. G. Sitenko, and K. N. Stepanov. *Plasma Electrodynamics: Non-Linear Theory and Fluctuations*. Pergamon Press, New York, 1975.
- [5] V. N. Tsytovich. *An Introduction to the Theory of Plasma Turbulence*. Pergamon, New York, 1977.
- [6] V. N. Tsytovich. *Lectures on Nonlinear Plasma Kinetics*. Springer, New York, 1995.
- [7] Ronald C. Davidson. *Methods in Nonlinear Plasma Theory*. Academic Press, New York, 1972.
- [8] R. C. Davidson. *Methods in Nonlinear Plasma Theory*. Elsevier Science, 2012.
- [9] D. B. Melrose. *Plasma Astrophysics: Nonthermal Processes in Diffuse Magnetized Plasmas*. New York ; London ; Paris : Gordon and Breach Science Publishing, 1980.
- [10] A. G. Sitenko and D. ter Haar. *Fluctuations and Non-Linear Wave Interactions in Plasmas: International Series in Natural Philosophy*. International Series in Natural Philosophy. Elsevier Science, 2016.
- [11] A.G. Sitenko. *Electromagnetic Fluctuations in Plasma*. Academic Press, New York, 1967.
- [12] Peter H. Yoon. Generalized weak turbulence theory. *Physics of Plasmas*, 7(12):4858–4871, 2000.

- 
- [13] Peter H. Yoon. Effects of spontaneous fluctuations on the generalized weak turbulence theory. *Physics of Plasmas*, 12(4):042306, 2005.
- [14] Peter H. Yoon, Tongnyeol Rhee, and Chang-Mo Ryu. Effects of spontaneous thermal fluctuations on nonlinear beam-plasma interaction. *Physics of Plasmas*, 12(6):062310, 2005.
- [15] Peter H. Yoon. Statistical theory of electromagnetic weak turbulence. *Physics of Plasmas*, 13:022302, 15p., 2006.
- [16] P. H. Yoon, L. F. Ziebell, R. Gaelzer, and J. Pavan. Electromagnetic weak turbulence theory revisited. *Physics of Plasmas*, 19(10):102303, Oct. 2012.
- [17] L. F. Ziebell, R. Gaelzer, and Peter H. Yoon. Nonlinear development of weak beam-plasma instability. *Physics of Plasmas*, 8(9):3982–3995, 2001.
- [18] R. Gaelzer, L. F. Ziebell, and Peter H. Yoon. Generation of harmonic Langmuir mode by beam plasma instability. *Physics of Plasmas*, 9(1):96–110, Jan. 2002.
- [19] L. F. Ziebell, R. Gaelzer, and P. H. Yoon. Dynamics of Langmuir wave decay in two dimensions. *Physics of Plasmas*, 15(3):032303, 2008.
- [20] L. F. Ziebell, R. Gaelzer, J. Pavan, and P. H. Yoon. Two-dimensional nonlinear dynamics of beam-plasma instability. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 50(8):085011, 2008.
- [21] J. R. Apel. Harmonic generation and turbulencelike spectrum in a beam-plasma interaction. *Physical Review Letters*, 19:744–746, Sep 1967.
- [22] J. R. Apel. Nonlinear effects and turbulent behavior in a beamplasma instability. *The Physics of Fluids*, 12(3):640–648, 1969.
- [23] Katsuhiko Mizuno and Shigetoshi Tanaka. Experimental observation of nonlinear wave-particle interactions in a weak cold beam-plasma system. *Physical Review Letters*, 29:45–48, Jul 1972.
- [24] K. W. Gentle and J. Lohr. Phase-space evolution of a trapped electron beam. *Physical Review Letters*, 30:75–77, Jan 1973.
- [25] J. H. Malmberg and C. B. Wharton. Spatial growth of waves in a beamplasma system. *The Physics of Fluids*, 12(12):2600–2606, 1969.
- [26] Hiroyuki Mori. Nonlinear saturation and harmonic generation of an electron plasma wave. *Journal of the Physical Society of Japan*, 35(2):592–599, 1973.

- [27] Glenn Joyce, Georg Knorr, and Thomas Burns. Nonlinear behavior of the one-dimensional weak beam plasma system. *The Physics of Fluids*, 14(4):797–801, 1971.
- [28] Alexander J. Klimas. A mechanism for plasma waves at the harmonics of the plasma frequency in the electron foreshock boundary. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 88(A11):9081–9091, 1983.
- [29] Alexander J. Klimas. Trapping saturation of the bump-on-tail instability and electrostatic harmonic excitation in Earth’s foreshock. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 95(A9):14905–14924, 1990.
- [30] K.-I. Nishikawa and I. H. Cairns. Simulation of the nonlinear evolution of electron plasma waves. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 96(A11):19343–19351, 1991.
- [31] D. Schriver, M. Ashour-Abdalla, V. Sotnikov, P. Hellinger, V. Fiala, R. Bingham, and A. Mangeney. Excitation of electron acoustic waves near the electron plasma frequency and at twice the plasma frequency. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 105(A6):12919–12927, 2000.
- [32] Y. Kasaba, H. Matsumoto, and Y. Omura. One- and two-dimensional simulations of electron beam instability: Generation of electrostatic and electromagnetic  $2f_p$  waves. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 106(A9):18693–18711, 2001.
- [33] P. Trávníček, P. Hellinger, D. Schriver, and M. G. G. T. Taylor. Excitation of waves at  $2\omega_{p,e}$  and back propagating waves at  $\omega_{p,e}$ : a parametric study. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 10(4/5):345–349, 2003.
- [34] F. J. R. Simões, Jr., M. V. Alves, and R. Gaelzer. One-dimensional electromagnetic simulation of multiple electron beams propagating in space plasmas. *Journal of Geophysical Research-Space Physics*, 115:A06105, Jun 18 2010.
- [35] I. H. Cairns. New waves at multiples of the plasma frequency upstream of the earth’s bow shock. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 91(A3):2975–2988, 1986.
- [36] David M. Malaspina, Daniel B. Graham, Robert E. Ergun, and Iver H. Cairns. Langmuir wave harmonics due to driven nonlinear currents. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 118(11):6880–6888, 2013.
- [37] D. B. Graham, Iver H. Cairns, and D. M. Malaspina. Harmonic waves and sheath rectification in type iii solar radio bursts. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 119(2):723–741, 2014.

- [38] Y. Nariyuki and T. Umeda. On the nonlinearity of the Langmuir turbulence excited by a weak electron beam-plasma interaction. *Physics of Plasmas*, 17(5):054506, 2010.
- [39] M. A. Diaz, M. Zettergren, J. L. Semeter, and M. Oppenheim. Plasma parameter analysis of the Langmuir decay process via particle-in-cell simulations. *Annales Geophysicae*, 30(8):1169–1183, 2012.
- [40] J. O. Thurgood and D. Tsiklauri. Self-consistent particle-in-cell simulations of fundamental and harmonic plasma radio emission mechanisms. *Astronomy and Astrophysics*, 584:A83, 2015.
- [41] P. H. Yoon, R. Gaelzer, T. Umeda, Y. Omura, and H. Matsumoto. Harmonic Langmuir waves. I. nonlinear dispersion relation. *Physics of Plasmas*, 10(2):364–372, 2003.
- [42] R. Gaelzer, P. H. Yoon, T. Umeda, Y. Omura, and H. Matsumoto. Harmonic Langmuir waves. II. turbulence spectrum. *Physics of Plasmas*, 10(2):373–381, 2003.
- [43] T. Umeda, Y. Omura, P. H. Yoon, R. Gaelzer, and H. Matsumoto. Harmonic Langmuir waves. III. vlasov simulation. *Physics of Plasmas*, 10(2):382–391, 2003.
- [44] Peter H. Yoon. Progress in the kinetic theory of electrostatic harmonics of plasma waves. *Physics of Plasmas*, 12(5):052313, 2005.
- [45] N. A. Krall and A. W. Trivelpiece. *Principles of Plasma Physics*. International series in pure and applied physics. San Francisco Press, 1986.
- [46] I. U. L. Klimontovich. *The Statistical Theory of Non-Equilibrium Processes in a Plasma*. International series of monographs in natural philosophy. M.I.T. Press, 1967.
- [47] I. U. L. Klimontovich. *Kinetic Theory of Nonideal Gases and Nonideal Plasmas*. International series in natural philosophy. Pergamon Press, 1982.
- [48] L. Muschietti and C. T. Dum. Nonlinear wave scattering and electron beam relaxation. *Physics of Fluids B: Plasma Physics*, 3(8):1968–1982, 1991.
- [49] E. C. Fonseca-Pongutá, L. F. Ziebell, R. Gaelzer, and P. H. Yoon. Two dimensional kinetic analysis of electrostatic harmonic plasma waves. *Physics of Plasmas*, 23(6):062310, 2016.
- [50] Catherine Lacombe, André Mangeney, Christopher C. Harvey, and Jack D. Scudder. Electron plasma waves upstream of the Earth’s bow shock. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 90(A1):73–94, 1985.