

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE INFORMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM COMPUTAÇÃO

Solução de Equações Intervalares

por

GUILHERME LUÍS ROËHE VACCARO

Tese de Doutorado
submetida à avaliação, como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Doutor em Ciência da Computação.

Prof. Dr. Flávio Rech Wagner
Orientador

Prof^a. Dr^a. Beatriz Regina Tavares Franciosi
Co-Orientadora

Porto Alegre, novembro de 2001.

CIP – Catalogação na Publicação

Vaccaro, Guilherme Luís Roëhe

Solução de Equações Intervalares / por Guilherme Luís Roëhe Vaccaro. – Porto Alegre: PPGC da UFRGS, 2001.

241 f.: il.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Programa de Pós-Graduação em Computação, Porto Alegre, BR – RS, 2001. Orientador: Wagner, Flávio Rech; Co-Orientadora: Franciosi, Beatriz Regina Tavares.

1. Teoria dos Intervalos. 2. Número-Intervalo. 3. Equações Intervalares. 4. Solução Analítica. I. Wagner, Flávio Rech II. Franciosi, Beatriz Regina Tavares III. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

Reitora: Prof^a. Wrana Panizzi

Pró-Reitor de Ensino: Prof. José Carlos Ferraz Hennemann

Pró-Reitor Adjunto de Pós-Graduação: Prof. Jaime Evaldo Fensterseifer

Diretor do Instituto de Informática: Prof. Philippe Olivier Alexandre Navauxx

Coordenador do PPGC: Prof. Carlos Alberto Heuser

Bibliotecária-chefe do Instituto de Informática: Beatriz Regina Bastos Haro

Agradecimentos

A Construção

Mário Quintana

*Eles ergueram a torre de Babel
para escalar o Céu.
Mas Deus não estava lá!
Estava ali mesmo, entre eles,
ajudando a construir a torre...*

Em primeiro lugar agradeço a Deus, sem O qual nada tem propósito. Obrigado por eu existir, por ser capaz de raciocinar, pelo discernimento entre o que é justo e o que não é e, mais especificamente, pela oportunidade de completar mais este empreendimento;

A meus pais, Augusto e Hilda, obrigado pelo esforço e carinho altruístas, e pelas tantas privações para que eu pudesse chegar até aqui. Esta conquista também é de vocês;

A minha querida esposa, Ana Laura, obrigado pelo companheirismo, pela paciência em escutar-me nos momentos de angústia e de mau-humor, pelo afago e pelo carinho nas horas necessárias;

A meu irmão, Fernando, minha cunhada, Simone, e meus sobrinhos, Matheus e Juliana, aos meus sogros e cunhado, obrigado pelas palavras sempre renovadas de incentivo e pelos momentos de descontração, sem os quais esse trabalho teria sido bem mais angustiante. Obrigado pela perspectiva de tê-los ao meu lado;

A meu orientador Prof. Flávio Wagner, obrigado pelo exemplo de disponibilidade, lealdade, justiça, parceria e humanidade, e por demonstrar como se mantém um compromisso em tempos onde esses valores andam tão esquecidos;

A minha co-orientadora e amiga, Profa. Beatriz Franciosi, obrigado pelo contraponto necessário à construção de idéias e pela parceria no desenvolvimento do trabalho;

Aos professores membros da banca obrigado por sua disponibilidade, atenção e comprometimento com o desenvolvimento de um trabalho de qualidade. Em especial, obrigado à Profa. Laira Toscani, sempre atenciosa e disponível para sugerir melhorias;

Aos amigos da Produzzare Consultores Associados, obrigado pela parceria, pelo incentivo e pelos ensinamentos de como reunir pessoas em prol de um ideal. Em especial ao Luís Henrique, obrigado pela orientação e pela paciência de simplesmente trocar idéias, mesmo com uma agenda lotada!

Aos amigos e colegas da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, obrigado pelas tantas formas de apoio manifestadas, em âmbito profissional e pessoal. Em especial, a todos os amigos da Faculdade de Matemática e, mais ainda, à Eliane (sempre disponível e disposta a ajudar), à Helena, à Liara e ao Lorí: obrigado pelas idéias e pela participação ativa nesse quatro anos de estudos; à Direção da FAMAT, pelo apoio constante, e às secretárias, pela disposição em “quebrar sempre um milhão de galhos”. Obrigado também aos amigos da Faculdade de Informática da PUCRS, Bernardo, Ricardo e Pinho, pela atenção e pela disponibilidade;

Por fim, mas não menos importante, obrigado aos amigos Alexandre e Letícia, Cajinho e Márcia, Eduardo e Patrícia, Malu e Beto, Raul, Hércules, Marcelo, Daniel, entre tantos outros, correndo o risco de ser injusto... Conviver com vocês é muito importante.

Sumário

Lista de Símbolos	9
Lista de Figuras	10
Lista de Quadros	17
Resumo	18
Abstract	19
1 Introdução	20
1.1 Tema e Justificativa	20
1.2 Tese e Objetivos	22
1.3 Delimitações	22
1.4 Método de Trabalho	24
1.5 Estrutura do Trabalho	25
1.6 Comentários Finais	26
2 Fundamentos Teóricos da Álgebra Intervalar	28
2.1 Definições Básicas da Álgebra Intervalar	28
2.2 Aspectos Topológicos da Aritmética Intervalar	32
2.3 Comentários Finais	33
3 Aspectos Históricos e Semânticos do Conceito de Intervalo	35
3.1 Breve Histórico da Aritmética Intervalar	35
3.1.1 Solução de Sistemas de Equações Lineares.....	36
3.1.2 Solução de Sistemas de Equações Não Lineares	38
3.1.3 Outras Abordagens.....	39
3.2 Semânticas Associadas a Intervalos	40
3.2.1 Envoltória Intervalar de Números Reais	41
3.2.2 Número-Intervalo.....	43
3.3 Dificuldades Associadas à Interpretação de Intervalo como Envoltória de Reais	45
3.4 Semântica Associada à Definição de Intervalo no Presente Trabalho	52
3.5 Comentários Finais	53
4 Algoritmização da Multiplicação Intervalar	54

4.1 Definição e Visualização da Cobertura de \mathbb{R}	54
4.2 Classificação e Cálculo da Multiplicação Intervalar	57
4.3 Comentários Sobre a Classificação e a Formulação Propostas	59
4.3.1 Aspectos Qualitativos do Teorema 4.1 Sobre a Classificação de Números-Intervalo	59
4.3.2 Aspectos Associados à Complexidade do Teorema 4.1	60
4.4 Corolários para o Cálculo do Diâmetro e do Ponto Médio da Multiplicação de Números-Intervalo	62
4.5 Corolário: Expressões Algébricas da Multiplicação de um Intervalo por um Real	66
4.6 Comentários Finais	68
5 Algoritmização de Potências Intervalares	69
5.1 Classificação e Cálculo de Potências Inteiras Positivas de Intervalos	69
5.2 Corolários para o Cálculo do Diâmetro e do Ponto Médio de Potências Inteiras Positivas de Números-Intervalo	71
5.3 Versão Alternativa: Cálculo de Potências Positivas Inteiras de Envoltórias de Reais	73
5.4 Análise Comparativa do Efeito da Semântica Sobre as Potências de Intervalos	75
5.5 Comentários Finais	79
6 Soluções Próprias de Sistemas de Equações Intervalares	80
6.1 Soluções Intervalares	80
6.2 Soluções Próprias Intervalares	83
6.3 Discussão: Solução Intervalar versus Solução Própria Intervalar	90
6.4 Algoritmo 1: Determinação de Soluções Próprias de Equações Polinomiais Intervalares	93
6.5 Análise da Complexidade do Algoritmo 1	95
6.5.1 Cálculo da Complexidade de Pior Caso do Algoritmo 1	96
6.5.2 Cálculo da Complexidade Média do Algoritmo 1	97
6.5.3 Considerações Adicionais Sobre a Complexidade do Algoritmo 1	98
6.6 Exemplos de Soluções Próprias Obtidas com Algoritmo 1	100
6.7 Análise dos Exemplos Apresentados	120
6.8 Algoritmo 2: Determinação de Soluções Próprias de Sistemas de Equações Lineares Intervalares	121
6.9 Análise de Complexidade do Algoritmo 2	123
6.9.1 Cálculo da Complexidade de Pior Caso do Algoritmo 2.....	124
6.9.2 Cálculo da Complexidade Média do Algoritmo 2	125
6.9.3 Considerações Adicionais Sobre a Complexidade do Algoritmo 2.....	126
6.10 Exemplos de Soluções Próprias Obtidas com Algoritmo 2	127
6.11 Análise dos Exemplos Apresentados	131
6.12 Comentários Finais	132
7 Envoltória Intervalar do Conjunto de Soluções de Equações Intervalares de Variável Real	134
7.1 Envoltórias Intervalares das Soluções de Equações Polinomiais Intervalares de Variável Real	134
7.2 Determinação das Envoltórias das Soluções Reais de Equações Polinomiais de Coeficientes Intervalares e Variável Real	139
7.3 Algoritmo 3: Determinação das Envoltórias Intervalares de Soluções de Equações Polinomiais de Coeficientes Intervalares e Variável Real	147

7.4 Análise da Complexidade do Algoritmo 3	148
7.5 Exemplos de Envoltórias Intervalares Obtidas com o Algoritmo 3	148
7.6 Análise dos Exemplos Apresentados	173
7.7 Discussão: Envoltória Intervalar de Reais versus Solução Própria Intervalar	176
7.8 Considerações Sobre a Eficácia da Implementação do Algoritmo 3	186
7.9 Comentários Finais	190
8 Conclusão	191
8.1 Resultados Obtidos	191
8.1.1 Distinção entre Semânticas Associadas ao Conceito de Intervalo de Números Reais	191
8.1.2 Mapeamento de \mathbb{R} Segundo Características Numéricas	192
8.1.3 Identificação das Expressões Algébricas que Definem a Multiplicação Intervalar tanto na Representação pelos Extremos como por Ponto Médio e Diâmetro	192
8.1.4 Identificação das Expressões Algébricas que Definem as Potências Inteiras Positivas de Intervalos tanto na Representação pelos Extremos como por Ponto Médio e Diâmetro	193
8.1.5 Distinção entre Tipos de Solução para Equações Intervalares	193
8.1.6 Dedução de Algoritmo para a Determinação de Soluções Próprias de Equações Polinomiais Intervalares	194
8.1.7 Dedução de Algoritmo para a Determinação de Soluções Próprias de Sistemas de Equações Lineares Intervalares	194
8.1.8 Dedução de Algoritmo para a Determinação da Envoltória Intervalar das Soluções Reais de Equações Polinomiais com Coeficientes Intervalares e Variável Real	194
8.1.9 Dedução de Resultados Envolvendo a Determinação das Limitantes de Envoltórias Intervalares de Soluções Reais	194
8.1.10 Identificação da Não Validade da Propriedade de Enumeração de Soluções para Equações Polinomiais Intervalares	194
8.2 Proseguimento do Trabalho	195
8.2.1 Revisão Crítica da Literatura de Intervalos Segundo as Semânticas Associadas a Intervalos	195
8.2.2 Redefinição das Operações entre Envoltórias de Números Reais	195
8.2.3 Estudo de Formas Simplificadas para a Representação Gráfica de Soluções Próprias Intervalares	195
8.2.4 Refinamento dos Algoritmos Apresentados	196
8.2.5 Dedução de Algoritmos para a Resolução de Sistemas de Equações Polinomiais Intervalares	196
8.2.6 Dedução de Algoritmos Genericistas Para a Determinação de Soluções Próprias Intervalares e de Envoltórias Intervalares de Soluções Reais	196
8.2.7 Publicação de uma Biblioteca de Aritmética Intervalar Fundamentada nos Algoritmos Apresentados	196
8.2.8 Estudo das Características dos Números-Intervalo Complexos	197
8.2.9 Análise de Problemas de Estabilidade de Parâmetros	197
Anexos	198
Anexo 1 Provas de Proposições e de Teoremas	199
1.1 Prova da Proposição 3.7	199
1.2 Prova da Proposição 3.8	199
1.3 Prova do Teorema 4.1	199
1.4 Prova do Teorema 4.2	204

1.5 Prova do Teorema 5.1	204
1.6 Prova do Teorema 5.2	208
1.7 Prova do Teorema 6.1	212
1.8 Prova do Lema 6.1	213
1.9 Prova do Lema 6.2	213
1.10 Prova do Teorema 6.2	214
1.11 Prova do Teorema 6.3	214
1.12 Prova da Proposição 6.2	214
1.13 Prova do Lema 6.6	215
1.14 Prova do Lema 6.7	216
1.15 Prova do Teorema 6.4	216
1.16 Prova do Teorema 6.5	216
1.17 Prova do Teorema 7.2	217
1.18 Prova do Teorema 7.3	218
1.19 Prova do Teorema 7.4	218
1.20 Prova do Lema 7.1	218
1.21 Prova do Lema 7.2	221
1.22 Prova do Teorema 7.6	226
1.23 Prova do Teorema 7.7	226
Anexo 2 Complexidade das Etapas do Algoritmo 1.....	227
Anexo 3 Complexidade das Etapas do Algoritmo 2.....	228
Anexo 4 Instruções de Uso da Ferramenta de Apoio à Visualização de Equações	
Intervalares.....	229
Anexo 5 Resenha de Artigos e Livros.....	230
Bibliografia.....	238

Lista de Símbolos

N	Conjunto dos números naturais.
Z	Conjunto dos números inteiros.
\mathfrak{R}	Conjunto dos números reais.
$\mathfrak{I}\mathfrak{R}$	Conjunto dos intervalos de reais.
$[x] = [\underline{x}; \bar{x}]$	Variável intervalar, com extremo inferior \underline{x} e extremo superior \bar{x} .
$ [x] $	Valor absoluto do intervalo $[x]$.
$m([x])$	Ponto médio do intervalo $[x]$.
$w([x])$	Diâmetro do intervalo $[x]$.
$[x^*]$	Solução intervalar.
$[x^p]$	Solução própria intervalar.
$\overline{([x], [y])}$	Classe de equivalência associada à soma $[x] + [y]$.
$\overline{[a]}$	Representação simplificada da classe de equivalência associada à soma $[a] \in \mathfrak{I}\mathfrak{R}$. Isto é, $\overline{[a]} = \overline{([a], [0])}$.
\overline{k}	Representação simplificada da classe de equivalência associada à soma $k \in \mathfrak{R}$. Isto é, $\overline{k} = \overline{[k]} = \overline{([k], [0])}$.
$\left\{ \begin{array}{ll} [x] \in \text{O} & , \underline{x} = \bar{x} = 0 \\ [x] \in \text{I} & , 0 < \underline{x} \leq \bar{x} \\ [x] \in \text{BI} & , 0 = \underline{x} < \bar{x} \\ [x] \in \text{II} & , (\underline{x} < 0 < \bar{x}) \wedge (\underline{x} < \bar{x}) \\ [x] \in \text{BII} & , (\underline{x} < 0 < \bar{x}) \wedge (\underline{x} = \bar{x}) \\ [x] \in \text{III} & , (\underline{x} < 0 < \bar{x}) \wedge (\underline{x} > \bar{x}) \\ [x] \in \text{BIII} & , \underline{x} < \bar{x} = 0 \\ [x] \in \text{IV} & , \underline{x} \leq \bar{x} < 0 \end{array} \right.$	Mapeamento de $\mathfrak{I}\mathfrak{R}$.
x^+	Representação alternativa para o extremo superior \bar{x} de um intervalo, utilizada em gráficos por restrições computacionais.
x^-	Representação alternativa para o extremo inferior \underline{x} de um intervalo, utilizada em gráficos por restrições computacionais.

Lista de Figuras

FIGURA 2.1 – Representação cartesiana de $\mathcal{I}\mathfrak{R}$.	29
FIGURA 2.2 – Representação cartesiana dos intervalos $[2;3]$, $[-1;1]$ e $[-4;2]$.	29
FIGURA 2.3 – Ilustração dos relacionamentos $[1;2] \subseteq [0;3]$ e $[-1;2] \not\subseteq [0;3]$.	30
FIGURA 3.1 – Avaliação intervalar da função definida por $f(x) = x^2$ para $-1 \leq x \leq 2$.	43
FIGURA 3.2 – Avaliação intervalar da função definida por $f(x) = x * (x - 1)$ para $-1 \leq x \leq 2$.	49
FIGURA 4.1 – Representação gráfica de $\mathcal{I}\mathfrak{R}$ segundo Franciosi [FRA 99].	54
FIGURA 4.2 – Representação da cobertura de $\mathcal{I}\mathfrak{R}$ utilizada neste trabalho.	55
FIGURA 6.1 – Representação gráfica esquemática de uma solução intervalar.	81
FIGURA 6.2 – Representação da solução intervalar de $[1;2] * [x] + [-4;-3] = [-8;-1]$.	82
FIGURA 6.3 – Representação da solução intervalar de $[x] + [-7;-2] = [1;4]$.	82
FIGURA 6.4 – Representação de uma solução própria intervalar utilizando os recursos gráficos do ambiente Maple V em 3D (a) e em 2D (b), e do ambiente desenvolvido com base no VTK (c).	85
FIGURA 6.5 – Representação gráfica da solução própria da equação $[1;2] * [x] + [-4;-3] = [-8;-1]$ no Maple V em 3D (a) e em 2D (b), e no ambiente desenvolvido com base no VTK (c). Os pontos de vista das imagens (a) e (c) são diferentes.	87
FIGURA 6.6 – Representação gráfica da não existência de solução própria para $[x] + [-7;-2] = [1;4]$. no Maple V em 3D (a) e em 2D (b), e no ambiente desenvolvido com base no VTK (c). Os pontos de vista das imagens (a) e (c) são diferentes.	89
FIGURA 6.7 – Representação da solução intervalar da equação $[1;3] * [x] = [1;6]$.	90
FIGURA 6.8 – Representação da solução própria da equação $[1;3] * [x] = [1;6]$ no Maple V em 3D (a) e em 2D (b), e no ambiente desenvolvido com base no VTK (c). Os pontos de vista das imagens (a) e (c) são diferentes.	91
FIGURA 6.9 – Representação da transformação vetorial associada à solução gráfica da equação $[1;3] * [x] = [1;6]$, conforme Franciosi [FRA 99].	93
FIGURA 6.10 – Comparação entre a complexidade de pior caso (círculos) e a complexidade média (quadrados) do Algoritmo 1.	98
FIGURA 6.11 – Representação gráfica da solução própria da equação $[2;3] * [x] + [-7;-5] = [-13;-2]$ no Maple V em 3D (a) e em 2D (b), e no ambiente desenvolvido com base no VTK (c). Os pontos de vista das imagens (a) e (c) são diferentes.	101
FIGURA 6.12 – Representação gráfica das soluções próprias da equação $[-1;2] * [x] = [-2;4]$ no Maple V em 3D (a) e em 2D (b), e no ambiente desenvolvido com base no VTK (c). Os pontos de vista das imagens (a) e (c) são diferentes.	106

- FIGURA 6.13 – Representação gráfica das soluções próprias da equação $[-1;2] * [x] + [-3;4] = [-5;8]$ no Maple V em 3D (a) e em 2D (b), e no ambiente desenvolvido com base no VTK (c). Os pontos de vista das imagens (a) e (c) são diferentes.....107
- FIGURA 6.14 – Representação gráfica da ausência de soluções próprias da equação $[-1;3] * [x] + [-1;0] = [1;12]$ no Maple V em 3D (a) e em 2D (b), e no ambiente desenvolvido com base no VTK (c). Os pontos de vista das imagens (a) e (c) são diferentes.108
- FIGURA 6.15 – Representação gráfica das soluções próprias da equação $[1;2] * [x]^2 = [2;4]$ no Maple V em 3D (a) e em 2D (b), e no ambiente desenvolvido com base no VTK (c). Os pontos de vista das imagens (a) e (c) são diferentes.....109
- FIGURA 6.16 – Representação gráfica das soluções próprias da equação $[5;6] * [x]^2 + [-4;-3] * [x] = [-11;93]$ no Maple V em 3D (a) e em 2D (b), e no ambiente desenvolvido com base no VTK (c). Os pontos de vista das imagens (a) e (c) são diferentes.110
- FIGURA 6.17 – Representação gráfica da solução própria da equação $[1;3] * [x]^2 + [5;6] * [x] = [6;72]$ no Maple V em 3D (a) e em 2D (b), e no ambiente desenvolvido com base no VTK (c). Os pontos de vista das imagens (a) e (c) são diferentes.....111
- FIGURA 6.18 – Representação gráfica da solução própria da equação $[-6;6] * [x]^3 + [-2;2] * [x]^2 + [-3;1] * [x] + [7;8] = [-1;15]$ no Maple V em 3D (a) e em 2D (b), e no ambiente desenvolvido com base no VTK (c). Os pontos de vista das imagens (a) e (c) são diferentes.112
- FIGURA 6.19 – Representação gráfica das soluções próprias da equação $[-5;2] * [x]^2 + [-4;3] * [x] = [-140;70]$ no Maple V em 3D (a) e em 2D (b), e no ambiente desenvolvido com base no VTK (c). Os pontos de vista das imagens (a) e (c) são diferentes.113
- FIGURA 6.20 – Representação gráfica da solução própria da equação $[-1;5] * [x]^4 + [-4;3] * [x]^3 + [-5;3] * [x]^2 + [1;4] * [x] + [3;5] = [-10;20]$ no Maple V em 3D (a) e em 2D (b), e no ambiente desenvolvido com base no VTK (c). Os pontos de vista das imagens (a) e (c) são diferentes.114
- FIGURA 6.21 – Representação gráfica da solução própria da equação $[-0.1;0.1] * [x]^4 + [3;4] * [x]^3 + [1;3] * [x]^2 + [5;8] * [x] + [3;5] = [-27;65]$ no Maple V em 3D (a) e em 2D (b), e no ambiente desenvolvido com base no VTK (c). Os pontos de vista das imagens (a) e (c) são diferentes.115
- FIGURA 6.22 – Representação gráfica das soluções próprias da equação $[-1;1] * [x]^5 = [-32;32]$ no Maple V em 3D (a) e em 2D (b), e no ambiente desenvolvido com base no VTK (c). Os pontos de vista das imagens (a) e (c) são diferentes.....116
- FIGURA 6.23 – Representação gráfica das soluções próprias da equação $[-1;2] * [x]^6 + [-1;2] * [x]^5 + [-1;2] * [x]^4 + [-1;2] * [x]^3 + [-1;2] * [x]^2 + [-1;2] * [x] + [-1;2] = [-127;254]$ no Maple V em 3D (a) e em 2D (b), e no ambiente desenvolvido com base no VTK (c). Os pontos de vista das imagens (a) e (c) são diferentes.....117
- FIGURA 6.24 – Representação gráfica das soluções próprias da equação $[0;1] * [x]^{10} + [0;1] * [x]^8 + [0;1] * [x]^6 + [0;1] * [x]^4 + [0;1] * [x]^2 + [0;1] = [0;6]$ no Maple V em 3D (a) e em 2D (b), e no ambiente desenvolvido com base no VTK (c). Os pontos de vista das imagens (a) e (c) são diferentes.118

- FIGURA 6.25 – Representação gráfica da solução própria da equação $[-1.2;-1.1] * [x]^9 + [0.9;1.0] * [x]^7 + [-0.8;-0.7] * [x]^5 + [0.5;0.6] * [x]^3 + [-0.4;-0.3] * [x] + [0.1;0.2] = [-1;2]$ no Maple V em 3D (a) e em 2D (b), e no ambiente desenvolvido com base no VTK (c). Os pontos de vista das imagens (a) e (c) são diferentes.....119
- FIGURA 6.26 – Comparação entre a complexidade de pior caso (círculos) e a complexidade média (quadrados) do Algoritmo 2.....126
- FIGURA 7.1 – Representação da envoltória intervalar das soluções reais da equação $[1;1] * x + [1;5] = [0;0]$135
- FIGURA 7.2 – Representação gráfica do número-intervalo $[x] = [-5;-1]$ e da envoltória intervalar $x \in [-5;-1]$, $x \in \mathfrak{R}$, ambos avaliados na função $f([x]) = [x]+[1;5]$. Outputs gerados pelo Maple (a e b) e pelo VTK (c). Os pontos de vista das imagens (a) e (c) são diferentes.137
- FIGURA 7.3 – Vista superior das soluções próprias da equação $[1;2] * [x]^2 = [2;4]$, $[x^p]_1 = [-\sqrt{2};-\sqrt{2}]$ e $[x^p]_2 = [\sqrt{2};\sqrt{2}]$ (retângulos) e da envoltória intervalar das soluções reais da equação $[1;2] * x^2 = [2;4]$, $x \in [-2;-1] \cup [1;2]$ (linhas em negrito).138
- FIGURA 7.4 – Representação gráfica da equação $[1;1] * x + [-7;-2] = [1;4]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [3;11]$142
- FIGURA 7.5 – Representação gráfica da equação $[-1;1] * x^2 + [1;1] * x + [1;1] = [1;3]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in (-\infty;-1] \cup [0;+\infty)$146
- FIGURA 7.6 – Representação gráfica da equação $[1;3] * x^2 + [5;6] * x = [0;0]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [-6;-5/3] \cup [0;0]$150
- FIGURA 7.7 – Representação gráfica da equação $[-4;-1] * x + [2;7] = [-6;9]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [-7;13]$151
- FIGURA 7.8 – Representação gráfica da equação $[1;2] * x^2 + [3;5] * x + [0;1] = [0;0]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [-5;-1] \cup [-0.5;0]$151
- FIGURA 7.9 – Representação gráfica da equação $[3;7] * x^2 + [8;12] * x + [-7;-2] = [0;0]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [-4.516611478;-1.353889368] \cup [0.1530096869;0.694254177]$152
- FIGURA 7.10 – Representação gráfica da equação $[1;2] * x^2 + [-9;-6] * x + [1;3] = [0;0]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [0.112517806;0.6339745960] \cup [2.366025404;8.887482194]$. .153
- FIGURA 7.11 – Representação gráfica da equação $[-3;-1] * x^2 + [-12;-9] * x + [-6;-5] = [0;0]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [-11.56776436;-2.] \cup [-1.;-0.432235637]$153
- FIGURA 7.12 – Representação gráfica da equação $[1;1] * x^2 + [-9;-8] * x + [-4;-2] = [0;0]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [-0.472135956;-0.216990566] \cup [8.242640686;9.424428901]$154
- FIGURA 7.13 – Representação gráfica da equação $[-3;-1] * x^2 + [4;6] * x + [4;9] = [0;0]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [-1.605551275;-0.527525232] \cup [2.;7.242640686]$155

- FIGURA 7.14 – Representação gráfica da equação $[1;7] * x^2 + [0.5;1] * x + [-3;9] = [0;0]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [-2.302775638;1.5]$155
- FIGURA 7.15 – Representação gráfica da equação $[-1;-0.5] * x^2 + [4;7] * x + [-2;5] = [0;0]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais,
 $x \in [-1.099019514;0.585786438] \cup [3.414213562;14.68114575]$156
- FIGURA 7.16 – Representação gráfica da equação $[1;1] * x^2 + [3;4] * x + [0.5;1] = [0;0]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais,
 $x \in [-3.870828693;-2.618033989] \cup [-0.381966011;-0.1291713066]$157
- FIGURA 7.17 – Representação gráfica da equação $[-1;0] * x^2 + [0;1] * x = [0;0]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais,
 $x \in \mathfrak{R}$157
- FIGURA 7.18 – Representação gráfica da equação $[0;1] * x^2 + [-1;0] * x + [0;1] = [2;3]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in (-\infty;-0.6180339890) \cup [1.;;+\infty)$158
- FIGURA 7.19 – Representação gráfica da equação $[-1;1] * x^2 + [1;1] * x + [1;1] = [-1;3]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in \mathfrak{R}$158
- FIGURA 7.20 – Representação gráfica da equação $[1;1] * x^2 + [-4;2] = [0;0]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [-2.;;2.]$159
- FIGURA 7.21 – Representação gráfica da equação $[1;1] * x^2 + [-4;0] = [0;0]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais,
 $x \in [-2.;;2.]$159
- FIGURA 7.22 – Representação gráfica da equação $[1;1] * x^2 + [-4;-1] = [0;0]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais,
 $x \in [-2.;;-1.] \cup [1.;;2.]$160
- FIGURA 7.23 – Representação gráfica da equação $[-1;0] * x^3 = [0;0]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in \mathfrak{R}$160
- FIGURA 7.24 – Representação gráfica da equação $[1;1] * x^3 + [-4;-2] * x^2 + [-7;-5] * x + [-2;-1] = [0;0]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais,
 $x \in [-1.723956490;-0.1497434128] \cup [3.507018645;5.372281324]$161
- FIGURA 7.25 – Representação gráfica da equação $[1;1] * x^3 + [-5;-5] * x^2 + [8;8] * x + [-4;-4] = [0;0]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [1;1] \cup [2;2]$162
- FIGURA 7.26 – Representação gráfica da equação $[-1;-1] * x^3 + [-1;1] * x^2 + [1;1] * x + [1;1] = [0;0]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [-1.;;-1.] \cup [1.;;1.839286755]$163
- FIGURA 7.27 – Representação gráfica da equação $[-1;-1] * x^3 + [-1;1] * x^2 + [1;1] * x + [1;1] = [-1;1]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [-1.618033989;0] \cup [0.6180339890;2.]$163
- FIGURA 7.28 – Representação gráfica da equação $[-1;-1] * x^3 + [-1;1] * x^2 + [1;1] * x + [1;1] = [0.5;1.5]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [-1.739907874;1.739907874]$164

- FIGURA 7.29 – Representação gráfica da equação $[0;1] * x^3 + [0;1] * x^2 + [0;1] * x + [0;1] = [2;3]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in (-\infty; -1.] \cup [0.5436890125; +\infty)$ 164
- FIGURA 7.30 – Representação gráfica da equação $[0;1] * x^3 + [-1;0] * x^2 + [0;1] * x + [0;1] = [2;3]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [0.6823278040; +\infty)$ 165
- FIGURA 7.31 – Representação gráfica da equação $[0;1] * x^3 + [0;1] * x^2 + [0;0.5] * x + [-1;0] = [-4; -2]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in (-\infty; -0.8351223485]$ 165
- FIGURA 7.32 – Representação gráfica da equação $[0;1] * x^3 + [-1;0] * x^2 + [1;1] * x + [0;1] = [-3; -2]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [-4.; -0.8105357137] \cup [2.; +\infty)$ 166
- FIGURA 7.33 – Representação gráfica da equação $[-1;1] * x^3 + [2;2] * x^2 + [3;3] * x + [-4;4] = [0;0]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in (-\infty; 1.] \cup [2.561552813; +\infty)$ 166
- FIGURA 7.34 – Representação gráfica da equação $[-1;1] * x^3 + [1;1] * x^2 + [1;1] * x + [1;1] = [0;0]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in (-\infty; -1.] \cup [1.839286755; +\infty)$ 167
- FIGURA 7.35 – Representação gráfica da equação $[1;1] * x^4 + [4;5] * x^3 + [-3; -2] * x^2 + [-2;0] * x + [0;1] = [0;0]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [-5.541381265; -4.342302325] \cup [-0.750643807; 1.]$ 167
- FIGURA 7.36 – Representação gráfica da equação $[-1; -1] * x^4 + [4;5] * x^3 + [-3; -2] * x^2 + [0;1] * x + [-2;0] = [0;0]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [0; 1.568045828] \cup [2.870184728; 4.613470269]$ 168
- FIGURA 7.37 – Representação gráfica da equação $[0;1] * x^{10} + [0;1] * x^8 + [0;1] * x^6 + [0;1] * x^4 + [0;1] * x^2 + [0;1] = [-1;2]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in \mathfrak{R}$ 168
- FIGURA 7.38 – Representação gráfica da equação $[0;1] * x^{10} + [0;1] * x^8 + [0;1] * x^6 + [0;1] * x^4 + [0;1] * x^2 + [0;1] = [2;3]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in (-\infty; -0.7132043127] \cup [0.7132043127; +\infty)$ 169
- FIGURA 7.39 – Representação gráfica da equação $[0;1] * x^{10} + [-1;1] * x^8 + [0;1] * x^6 + [0;1] * x^4 + [0;1] * x^2 + [0;1] = [2;3]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in (-\infty; -0.7132043127] \cup [0.7132043127; +\infty)$ 170
- FIGURA 7.40 – Representação gráfica da equação $[0.1;0.1] * x^{15} + [-0.1;0.1] * x^{14} + [-0.1; -0.1] * x^{13} + [-0.2;0.2] * x^{12} + [-0.1;0.1] * x^{11} + [0.1;0.1] * x^{10} + [0.1;0.1] * x^9 + [0.1;0.1] * x^8 + [0.1;0.1] * x^7 + [0.1;0.1] * x^6 + [0.1;0.1] * x^5 + [0.1;0.1] * x^4 + [0.1;0.1] * x^3 + [0.1;0.1] * x^2 + [0.1;0.1] * x + [0.1;0.1] = [-1;2]$, de forma ampla (a) e detalhando as soluções (b). A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [-2.085591614; 2.000784485]$ 170
- FIGURA 7.41 – Representação gráfica da equação $[0.1;0.1] * x^{15} + [-0.1;0.1] * x^{14} + [-0.1; -0.1] * x^{13} + [-0.2;0.2] * x^{12} + [-0.1;0.1] * x^{11} + [0.1;0.1] * x^{10} + [0.1;0.1] * x^9 + [0.1;0.1] * x^8 + [0.1;0.1] * x^7 + [0.1;0.1] * x^6 + [0.1;0.1] * x^5 + [0.1;0.1] * x^4 + [0.1;0.1] * x^3 + [0.1;0.1] * x^2 + [0.1;0.1] * x + [0.1;0.2] = [0;0]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das

- soluções reais,
 $x \in [-2.085430203; -0.9361163338] \cup [1.190578454; 2.000037549]$ 171
- FIGURA 7.42 – Representação gráfica da equação $[0.0;0.1] * x^{20} + [0.1;0.1] * x^{19} + [0.1; 0.1] * x^{18} + [0.1;0.1] * x^{17} + [0.1;0.1] * x^{16} + [0.1;0.1] * x^{15} + [0.1;0.1] * x^{14} + [0.1;0.1] * x^{13} + [0.1;0.1] * x^{12} + [0.1;0.1] * x^{11} + [0.1;0.1] * x^{10} + [0.1;0.1] * x^9 + [0.1;0.1] * x^8 + [0.1;0.1] * x^7 + [0.1;0.1] * x^6 + [-0.1;0.0] * x^5 + [0.1;0.1] * x^4 + [0.1;0.1] * x^3 + [0.1;0.1] * x^2 + [0.1;0.1] * x + [0.0;0.1] = [0.5;1.5]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais,
 $x \in (-\infty; -1.064117755] \cup [0.8161192995; 0.9938875868]$ 172
- FIGURA 7.43 – Representação gráfica da equação $[0;1] * x^{20} + [1;1] * x^{15} + [0;1] * x^{10} + [-1;0] * x^5 + [0;1] = [1.5;2]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais,
 $x \in (-\infty; -0.8267291760] \cup [0.8795900783; 1.087545721]$ 172
- FIGURA 7.44 – Representação gráfica da equação $[0.0;0.1] * x^{20} + [0.1;0.1] * x^{19} + [0.1; 0.1] * x^{18} + [0.1;0.1] * x^{17} + [0.1;0.1] * x^{16} + [0.1;0.1] * x^{15} + [0.1;0.1] * x^{14} + [0.1;0.1] * x^{13} + [0.1;0.1] * x^{12} + [0.1;0.1] * x^{11} + [0.1;0.1] * x^{10} + [0.1;0.1] * x^9 + [0.1;0.1] * x^8 + [0.1;0.1] * x^7 + [0.1;0.1] * x^6 + [-0.1;0.0] * x^5 + [0.1;0.1] * x^4 + [0.1;0.1] * x^3 + [0.1;0.1] * x^2 + [0.1;0.1] * x + [0.0;0.1] = [0.0;0.0]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in (-\infty;0]$ 173
- FIGURA 7.45 – Representação gráfica da função polinomial $p(x) = [1;1] * x^2 + [-4; \overline{a_0}]$, $-4 \leq \overline{a_0} \leq 2$. A região inferior é a associada às soluções reais que compõem a envoltória intervalar. 175
- FIGURA 7.46 – Representação gráfica da equação $[2;3] * x + [-7;-5] = [-13;-2]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais,
 $x \in [-4.0;2.5]$ 176
- FIGURA 7.47 – Representação gráfica da equação $[-1;2] * x = [-2;4]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in \mathfrak{R}$ 177
- FIGURA 7.48 – Representação gráfica da equação $[-1;2] * x + [-3;4] = [-5;8]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais,
 $x \in \mathfrak{R}$ 177
- FIGURA 7.49 – Representação gráfica da equação $[-1;3] * x + [-1;0] = [1;12]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais,
 $x \in (-\infty; -1.] \cup [0.3333333333; +\infty)$ 178
- FIGURA 7.50 – Representação gráfica da equação $[1;2] * x^2 = [2;4]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais,
 $x \in [-2.; -1.] \cup [1.;2.]$ 178
- FIGURA 7.51 – Representação gráfica da equação $[5;6] * x^2 + [-4;-3] * x = [-11;93]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [-4.023193264; 4.731281566]$ 179
- FIGURA 7.52 – Representação gráfica da equação $[1;3] * x^2 + [5;6] * x = [6;72]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [-12.; -2.474809634] \cup [0.732050808; 6.345903005]$ 179
- FIGURA 7.53 – Representação gráfica da equação $[-6;6] * x^3 + [-2;2] * x^2 + [-3;1] * x + [7;8] = [-1;15]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in \mathfrak{R}$ 180

- FIGURA 7.54 – Representação gráfica da equação $[-5;2] * x^2 + [-4;3]*x = [-140;70]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in \mathfrak{R}$180
- FIGURA 7.55 – Representação gráfica da equação $[-0.1;0.1] * x^4 + [3;4] * x^3 + [1;3] * x^2 + [5;8] * x + [3;5] = [-27;65]$ de forma ampla (a) e detalhando a envoltória intervalar (b). A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in (-\infty;-29.01225291] \cup [-2.376080548;2.504680286] \cup [30.36145309;+\infty)$181
- FIGURA 7.56 – Representação gráfica da equação $[-1;5] * x^4 + [-4;3] * x^3 + [-5;3] * x^2 + [1;4] * x + [3;5] = [-10;20]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in \mathfrak{R}$182
- FIGURA 7.57 – Representação gráfica da equação $[-1;1] * x^5 = [-32;32]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in \mathfrak{R}$182
- FIGURA 7.58 – Representação gráfica da equação $[-1;2] * x^6 + [-1;2] * x^5 + [-1;2] * x^4 + [-1;2] * x^3 + [-1;2] * x^2 + [-1;2] * x + [-1;2] = [-127;254]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in \mathfrak{R}$183
- FIGURA 7.59 – Representação gráfica da equação $[0;1] * x^{10} + [0;1] * x^8 + [0;1] * x^6 + [0;1] * x^4 + [0;1] * x^2 + [0;1] = [0;6]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in \mathfrak{R}$183
- FIGURA 7.60 – Representação gráfica da equação $[-1.2;-1.1] * x^9 + [0.9;1.0] * x^7 + [-0.8;-0.7] * x^5 + [0.5;0.6] * x^3 + [-0.4;-0.3] * x + [0.1;0.2] = [-1;2]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [-1.141440315;1.091071623]$184
- FIGURA 7.61 – Representação gráfica de $[1;2] * [x]^2 = [2;4]$ (a e c) e $[1;2] * x^2 = [2;4]$ (b) do mesmo ponto de vista, evidenciando que a segunda equação é resultado da intersecção dos volumes intervalares da primeira equação com o plano real $y = x$187
- FIGURA 7.62 – Representação gráfica da equação $[-1;-1] * x^3 + [-1;2] * x^2 + [-2;2] * x + [1;1] = [0;0]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [-1.801937736;-0.4450418680] \cup [0.3926467817;2.831177208]$188
- FIGURA 7.63 – Representação gráfica da função definida por $p(x) = -x^3 - x^2 + 2 * x + 1$189

Lista de Quadros

QUADRO 1.1 – Cronograma de desenvolvimento do trabalho.	25
QUADRO 2.1 – Cálculo da multiplicação intervalar usando os sinais dos extremos dos intervalos.	31
QUADRO 4.1 – Regiões opostas segundo o mapeamento de $\mathfrak{I}\mathfrak{R}$ apresentado na Definição 4.1.	56
QUADRO 4.2 – Regras operacionais para o cálculo do produto $[x]*[y]$	58
QUADRO 4.3 – Regras para a determinação da região do intervalo $[x]*[y]$	59
QUADRO 4.4 – Regras operacionais para o cálculo do diâmetro do produto $[x]*[y]$	63
QUADRO 4.5 – Regras operacionais para o cálculo do ponto médio do produto $[x]*[y]$	65
QUADRO 4.6 – Regras operacionais para o cálculo do produto $[x]*r$	67
QUADRO 4.7 – Regras para a determinação da região do intervalo $[x]*r$	67
QUADRO 5.1 – Regras operacionais para o cálculo das potências inteiras positivas de um número-intervalo.	70
QUADRO 5.2 – Classificação das potências inteiras positivas de um número-intervalo.	70
QUADRO 5.3 – Expressões analíticas para o cálculo do diâmetro das potências inteiras positivas de um número-intervalo.	72
QUADRO 5.4 – Expressões analíticas para o cálculo do ponto médio das potências inteiras positivas de um número-intervalo.	73
QUADRO 5.5 – Regras operacionais para o cálculo das potências inteiras positivas de um intervalo segundo a versão de produto da Definição 3.4.	74
QUADRO 5.6 – Classificação das potências inteiras positivas de um intervalo segundo a versão de produto da Definição 3.4.	75
QUADRO 5.7 – Cálculo de potências de intervalos segundo o Teorema 5.1.	76
QUADRO 5.8 – Cálculo de potências de intervalos segundo o Teorema 5.2.	76
QUADRO 6.1 – Comparação entre as complexidades de pior caso e de caso médio do Algoritmo 1.	99
QUADRO 6.2 – Análise comparativa do tamanho de problema equivalente considerando-se, para o Algoritmo 1, um tempo de solução fixo e diferentes velocidades de processamento.	99
QUADRO 6.3 – Comparação entre as complexidades de pior caso e de caso médio do Algoritmo 2.	126
QUADRO 7.1 – Caracterização dos extremos da envoltória intervalar de uma equação polinomial intervalar de variável real conforme as características de seus coeficientes.	145
QUADRO 7.2 – Etapas do algoritmo de determinação de envoltórias intervalares para soluções reais.	149
QUADRO 7.3 – Comparação entre soluções próprias e envoltórias intervalares das equações apresentadas nos exemplos do Capítulo 6.	185

Resumo

Este trabalho trata do tipo de dado intervalar e da importância da especificação de uma semântica para garantir a correção e a interpretação coerente de resultados gerados, tais como de soluções de equações envolvendo este tipo de dado. Para tanto, realiza um estudo comparativo das semânticas de envoltória intervalar de reais e de número-intervalo, procurando identificar a influência de cada uma sobre definições fundamentais, tais como as das operações aritméticas e a do tipo de solução encontrado.

Uma vez caracterizadas as semânticas associadas ao tipo de dado intervalar, o trabalho apresenta resultados que permitem mapear algebricamente a operação de multiplicação de números-intervalo tanto na representação de extremo inferior e extremo superior como na representação por ponto médio e diâmetro. Com base nesses resultados apresenta os mapeamentos das expressões algébricas que definem as potências positivas inteiras tanto para a semântica de número-intervalo como para a de envoltória de reais.

Conjugando os resultados obtidos com a semântica de número-intervalo, o trabalho apresenta procedimentos algorítmicos para a determinação de dois tipos de soluções de equações intervalares: solução própria, a obtida diretamente a partir da relação de igualdade estrutural algébrica entre intervalos, e envoltória intervalar de soluções reais, normalmente referenciada como a solução intervalar usual. Exemplos são apresentados para a validação dos procedimentos, bem como para a discussão do significado de cada tipo de solução sob o enfoque semântico.

Palavras-Chave: Teoria dos Intervalos, Número-Intervalo, Equações Intervalares, Solução Analítica.

TITLE: “SOLUTION OF INTERVAL EQUATIONS”**Abstract**

This work is about the interval data-type and the importance of the specification of a semantic in order to warrant correction and coherent reasoning of generated results, such as the calculation of solutions of equation involving this kind of data-type. To reach this objective, the work performs a comparative study between the semantics of interval-number and interval-bound of real numbers, aiming to identify the influence of each semantic over fundamental definitions, such as the ones of arithmetic operations, and of the kind of solution found.

Once characterized the semantics associated to the interval data-type, this work presents some results that allow the algebraic mapping of the operation of multiplication of interval-numbers by using either lower-upper syntax or medium point-diameter syntax. Based on these results the work presents the mappings of the algebraic expressions which define the positive integer powers by using either the interval-number semantic or the interval-bound of real numbers semantic.

Joining these results with the interval-number semantic, this work presents algorithmic procedures to determine two different kinds of interval equations solutions: proper solution, the one obtained directly from the algebraic structural equality relation, and interval-bound of real solutions, normally referred as the usual interval solution. Examples are presented in order to validate the procedures and to discuss the meaning of each of these solutions under a semantic view.

Keywords: *Interval Theory, Interval-Number, Interval Equations, Analytic Solution.*

1 Introdução

Este trabalho insere-se na área de pesquisa da Matemática da Computação; em especial, estuda os intervalos de números reais. O trabalho discute os significados associados ao conceito de intervalo de números reais, os impactos desses significados na forma de estruturação das operações aritméticas entre intervalos de reais, e sua influência na definição de solução de equações intervalares. Mais especificamente, os resultados dessa discussão permitem não apenas elucidar questões conceituais como também definir procedimentos operacionais para a determinação de soluções de equações polinomiais intervalares e de sistemas de equações lineares intervalares.

O trabalho é composto por oito capítulos, sendo este primeiro destinado à apresentação do tema da tese e dos aspectos estruturais deste volume. A próxima seção apresenta o tema e as justificativas de sua escolha. A seção seguinte apresenta a formulação da tese e os objetivos propostos. Finalmente são apresentadas as delimitações deste trabalho, o método de trabalho e a descrição da estrutura dos demais capítulos.

1.1 Tema e Justificativa

O uso de intervalos remonta dos primórdios da humanidade, sendo seu conceito utilizado por muitos matemáticos, mesmo antes da era cristã [DEN 98]. No entanto, os primeiros relatos de desenvolvimento de uma aritmética entre intervalos são referidos a partir do trabalho de Burkill, em 1924, e Young, em 1931, e mais efetivamente a partir dos trabalhos de Sunaga, em 1958, e de Moore, em 1964 [KEA 96, ALE 2000]. A Teoria dos Intervalos surge a partir da extensão do conceito de número de ponto flutuante para um novo tipo de dado, o intervalo, com o objetivo inicial de identificar e controlar a propagação de erros de arredondamento em procedimentos numéricos computacionais. Ao longo do tempo diversos exemplos ressaltando a utilidade da aritmética associada aos intervalos – aritmética intervalar – têm sido apresentados na literatura [MOO 66, MOO 79, KUL 81, KUL 92, FRA 99], dentre os quais pode-se citar: análise de erros, verificação de condições suficientes para a existência de soluções, identificação de limitantes para o conjunto de soluções, definição de critérios naturais de parada para métodos iterativos.

Infelizmente, aspectos referentes à estrutura algébrica das operações entre intervalos impediram sua utilização sistemática na substituição da aritmética de ponto flutuante usual. De fato, a não validade de propriedades matemáticas elementares – tais como a propriedade distributiva da adição em relação à multiplicação – levou ao estudo de estruturas algébricas alternativas, tais como as baseadas na redefinição da relação de igualdade entre intervalos [KOR 94]. Tais iniciativas apresentaram avanços no sentido da utilização da aritmética

intervalar em combinação com outras técnicas e ferramentas baseadas em aritmética usual [FRA 99].

A solução de equações intervalares é um problema ainda em aberto do ponto de vista de sua aplicação sistemática. Diversos resultados têm sido encontrados no sentido da obtenção de soluções para classes particulares de equações, mas este processo evolutivo tem sido bastante lento. No entanto, apesar das limitações existentes, a aritmética intervalar constitui uma alternativa viável de implementação de aritmética real em precisão finita, o que, por si só, justifica os esforços envolvidos na compreensão de sua lógica e na superação de suas restrições naturais [FRA 99]. Tal fato pode também ser comprovado na bibliografia de referência desta área de pesquisa. Por exemplo, Sunaga [SUN 58] afirma que

“o conceito de intervalo encontra-se na fronteira que liga a matemática com a realidade e a análise pura com a análise aplicada”,

enquanto Markov & Okumura [MAR 99a] afirmam

“É um ponto de vista comum que a análise intervalar continuará a ocupar um lugar significativa em matemática aplicada, especialmente na modelagem matemática e na computação científica. (...) Indubitavelmente o desenvolvimento da análise intervalar tornar-se-á de interesse para a história da matemática e mais geralmente para a história da ciência”,

e Alefeld & Mayer [ALE 2000] definem

“A importância prática da análise intervalar depende substancialmente de sua realização em um computador. Combinando a aritmética de máquina existente com arredondamentos dirigidos é possível implementar uma aritmética intervalar de tal forma que todos os algoritmos intervalares mantenham suas – comprovadas teoricamente – propriedades de existência, unicidade e contenção de uma solução quando executados (...) Nos últimos 20 anos tanto os componentes algorítmicos da aritmética intervalar como suas implementações em computadores (...) foram desenvolvidos. Hoje, o entendimento da teoria e o uso de linguagens de programação adequadas são ferramentas indispensáveis para uma computação científica avançada e confiável”.

O presente trabalho justifica-se por apresentar uma discussão diferenciada sobre o tema em questão. A discussão propõe-se a identificar a semântica associada ao conceito de intervalo para compreender sua influência na definição das operações e soluções de equações intervalares. Neste texto, a palavra **semântica** é utilizada em seu sentido mais amplo, ou seja, um significado unicamente determinado através do uso de uma linguagem adequada. Isto é, o trabalho difere dos demais por tratar de questões desconsideradas pela grande maioria dos textos acadêmicos da área como pontos fundamentais para a realização de avanços em questões ainda em aberto em Matemática Intervalar. Em particular, parte do questionamento da efetiva congruência entre a forma como as operações entre intervalos são realizadas e a interpretação que é dada aos resultados obtidos. Tal discussão é oportuna, uma vez que impacta fundamentalmente o processo de busca e interpretação de soluções:

- sem a interpretação adequada, um resultado matematicamente correto pode levar a conclusões inadequadas;

- sem o respaldo de uma semântica, não há critérios para definir se uma solução é mais adequada que outra.

Enfim, as contribuições que justificam este trabalho buscam demonstrar que uma melhor compreensão da semântica associada ao tipo de dado intervalar e dos conceitos fundamentais a ela associados, além de necessários, podem ser suficientes para o desenvolvimento de resultados amplamente aplicáveis, tais como a obtenção de soluções de equações polinomiais intervalares.

1.2 Tese e Objetivos

A tese proposta é a seguinte:

“A efetiva compreensão da semântica associada ao conceito de intervalo de números reais viabiliza o cálculo sistemático de soluções de sistemas de equações polinomiais intervalares sem a necessidade de redefinição da estrutura algébrica intervalar”.

Além de validar a tese, o trabalho desenvolvido e consolidado neste volume visa a realização dos seguintes objetivos:

- Distinguir diferentes semânticas associadas ao conceito de intervalo de números reais: “número-intervalo” e “envoltória de reais”;
- Determinar as expressões algébricas que definem univocamente a multiplicação de números-intervalo;
- Determinar as expressões algébricas que definem univocamente as potências inteiras positivas de números-intervalo;
- Identificar o conceito de solução para uma equação intervalar;
- Operacionalizar a obtenção da solução de:
 - ♦ Equações polinomiais intervalares;
 - ♦ Sistemas de equações lineares intervalares;
 - ♦ Equações polinomiais com coeficientes intervalares e variável real.

Finalmente é objetivo contribuir sistemicamente para o entendimento dos intervalos e da aritmética intervalar como **extensões** efetivas do tipo de dado real e de suas respectivas operações aritméticas.

1.3 Delimitações

O trabalho visa apresentar uma discussão ampla sobre o tema e os objetivos propostos. O escopo do trabalho, com respeito às semânticas consideradas para o conceito de intervalo, foi restrito às duas mais usuais:

- Intervalo como envoltória de reais, ou envoltória intervalar de reais; e

- Número-intervalo.

A palavra semântica é utilizada neste trabalho significando uma interpretação única para o tipo de dado intervalar, obtida através do uso de uma linguagem adequada. Em particular, a linguagem utilizada é a linguagem algébrica clássica da ciência Matemática. Não são tratadas abordagens usualmente associadas ao jargão de “semântica” em Computação Científica, tais como Teoria de Domínios e Teoria de Categorias. Para resultados envolvendo este tipo de abordagem sugere-se a consulta aos trabalhos dessa subárea específica, tais como [GIE 80, SCO 82, ABR 91, DIM 92, CLA 92a, CLA 92b].

No que tange à operacionalização da determinação de soluções, o trabalho ficou restrito aos seguintes tipos:

- Equações polinomiais intervalares;
- Sistemas de equações lineares intervalares;
- Equações polinomiais com coeficientes intervalares e variável real.

As referências a demais trabalhos na área de pesquisa da aritmética intervalar não têm por objetivo exaurir tais fontes ou apresentar todos os resultados conhecidos sobre o assunto, mas apenas referir àqueles considerados relevantes para o desenvolvimento e a compreensão deste trabalho. Ainda, por considerar a língua inglesa como padrão internacional de publicação científica, textos em outras línguas não foram priorizados, sendo apresentados na medida das restrições técnicas do autor deste trabalho. Para uma visão mais ampla da área sugere-se a consulta ao *site Interval Computations*, www.cs.utep.edu/interval-comp/main.html, bem como aos índices bibliográficos de Kearfott [KEA 96] e de Bohlender [BOH 96], ou ainda aos excelentes *surveys* de Alefeld & Mayer [ALE 2000] e de Wolfe [WOL 2000].

Apenas uma parte dos exemplos coletados nas referências foram apresentados neste volume, de modo a evitar que o texto ficasse demasiadamente longo. Em particular, a quantidade de exemplos apresentados em cada um dos tipos de solução estudados (soluções próprias intervalares e envoltórias intervalares de soluções reais) reflete a quantidade de informações disponíveis dentre as fontes pesquisadas. Por este motivo, exemplos associados à determinação de soluções próprias de equações intervalares (Capítulo 6) são apresentados em número muito mais reduzido que exemplos associados à determinação de envoltórias intervalares de soluções reais (Capítulo 7).

Para fins de validação e geração de exemplos os algoritmos propostos foram implementados no ambiente de matemática simbólica Maple V Release 5.00, da Waterloo Maple Inc. Os procedimentos de manipulação de expressões intervalares foram totalmente implementados pelo autor, não fazendo uso do tipo de dado intervalar, INTERVAL, fornecido pelo software em questão. Estes procedimentos incluem a execução das operações aritméticas entre intervalos, representação gráfica de funções e equações intervalares, assim como os algoritmos expostos nos capítulos seguintes. Tal restrição deve-se ao fato de não ser possível controlar a forma de execução das operações aritméticas originalmente fornecidas pelo software sobre este tipo de dado, o que se constitui em fator fundamental para a implementação das idéias discutidas ao longo deste volume. Por outro lado, o suporte fornecido pelo software foi utilizado no que concerne a procedimentos de cálculo e

manipulação de expressões envolvendo números reais e na obtenção de soluções algébricas de sistemas de equações reais. Os procedimentos desenvolvidos foram implementados em uma biblioteca padrão Maple V, com intuito de teste. Assim, o autor não se responsabiliza por eventuais problemas causados pelo uso indevido dessa biblioteca, bem como de conclusões puramente baseadas nos resultados por ela fornecidos, visto que os algoritmos implementados são dependentes de resultados intermediários provenientes de algoritmos fornecidos pelo Maple, os quais podem apresentar falhas.

Finalmente, não são realizadas comparações de eficiência computacional com outros algoritmos, visto que o enfoque utilizado é bastante diverso do usual e, na grande maioria dos casos, a comparação entre soluções não se aplica.

1.4 Método de Trabalho

O trabalho foi desenvolvido através das seguintes etapas:

1. Revisão da literatura;
2. Identificação de aspectos semânticos associados ao conceito de intervalo;
3. Determinação de resultados associados à estrutura da aritmética de números-intervalo;
4. Identificação dos aspectos semânticos associados ao conceito de solução intervalar;
5. Determinação de algoritmos para a obtenção e a representação de soluções de equações intervalares;
6. Teste e validação dos algoritmos, e comparação com resultados da literatura;
7. Elaboração do documento final.

Durante a fase de revisão da literatura, foram consultados *sites* da Internet, bem como revistas e livros de referência na área da Aritmética Intervalar. No que se refere à busca virtual de informações, os principais mecanismos de busca foram *sites* de alcance mundial (www.yahoo.com, www.lycos.com, www.altavista.com) e *sites* de editoras de periódicos especializados. As principais palavras-chave procuradas foram “*interval*”, “*interval arithmetic*”, “*interval analysis*” e “*interval solution*”. Em particular, o portal de periódicos mantido pela CAPES (www.periódicos.capes.gov.br) foi de grande auxílio na pesquisa bibliográfica.

Somente as fontes acessadas e que apresentaram informações consideradas relevantes para o desenvolvimento deste trabalho foram referidas. Por se tratar de uma discussão essencialmente conceitual e semântica sobre o tipo de dado intervalar não foi estabelecida uma data limite para o ano inicial das referências selecionadas. A data limite para a seleção de referências foi abril de 2001.

As referências consultadas também serviram de fonte para a seleção dos exemplos utilizados nos testes dos algoritmos propostos. O critério de seleção dos exemplos visou identificar a influência da magnitude e das características dos coeficientes, tanto no caso de sistemas de

equações lineares intervalares como no de equações polinomiais intervalares. Na ausência de exemplos específicos dentre as referências bibliográficas consultadas, para a demonstração de características consideradas relevantes, o procedimento adotado foi o de confecção dos mesmos.

As etapas acima foram desenvolvidas conforme o cronograma apresentado no Quadro 1.1:

Etapa	2000								2001							
	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago
1																
2																
3																
4																
5																
6																
7																

QUADRO 1.1 – Cronograma de desenvolvimento do trabalho.

1.5 Estrutura do Trabalho

Os demais capítulos deste trabalho observam a seguinte estrutura:

- O Capítulo 2 apresenta os fundamentos e os conceitos necessários para o desenvolvimento dos demais capítulos, bem como a nomenclatura e a notação utilizadas;
- O Capítulo 3 apresenta uma breve discussão histórica sobre o estado da arte na área de inserção deste trabalho, visando conjugar referências para esforços alternativos aos apresentados neste volume. Juntamente com esse relato é apresentada uma discussão fundamental sobre as distinções entre as semânticas associadas ao conceito de intervalo e sua influência sobre a definição da estrutura das operações aritméticas. A apresentação do histórico posteriormente às definições básicas deve-se principalmente à necessidade de utilização dessas últimas ao longo do texto;
- O Capítulo 4 apresenta um teorema que permite obter algorítmicamente as expressões analíticas que definem a multiplicação de números-intervalo. Este teorema constitui-se em uma contribuição relevante, pois fundamenta o desenvolvimento dos demais resultados para a determinação das soluções de equações e sistemas intervalares. São apresentados também três corolários desse teorema, os quais permitem a identificação das expressões analíticas para o diâmetro e o ponto médio de produtos de números-intervalo, bem como das expressões analíticas para a multiplicação de um intervalo com um número real;
- O Capítulo 5 apresenta um teorema que permite a determinação da expressão analítica de potências inteiras positivas de números-intervalo, juntamente com corolários que

permitem a determinação das expressões analíticas do diâmetro e do ponto médio dos intervalos resultantes. Uma versão desse teorema é também apresentada para o caso da semântica de intervalo como envoltória de números reais, a título de conexão com a interpretação usual. Finalmente, é retomada a discussão referente aos impactos da semântica de intervalo sobre a definição e interpretação das operações realizadas;

- O Capítulo 6 apresenta inicialmente uma discussão com respeito aos diferentes tipos de solução associados a uma equação intervalar. Em seguida apresenta os algoritmos propostos para a determinação de soluções próprias de equações polinomiais e de sistemas de equações lineares intervalares. Também apresenta uma análise da complexidade desses algoritmos e exemplos de sua aplicação;
- O Capítulo 7 discute o caso específico das equações polinomiais de coeficientes intervalares e variável real, apresentando um algoritmo para a determinação de envoltórias intervalares para as soluções reais deste tipo de equação. A complexidade do algoritmo é determinada e exemplos da literatura são apresentados e comparados;
- O Capítulo 8 apresenta as conclusões do trabalho, juntamente com indicações de desenvolvimentos futuros.

Os anexos em texto contêm ainda informações auxiliares e provas dos resultados de maior volume, isto é, aqueles cuja prova excede seis linhas de texto. Esse critério foi adotado de modo a manter a fluidez do texto, permitindo que o leitor analise inicialmente o conjunto de resultados e, posteriormente, detenha-se nos detalhes de validade de resultados de particular interesse.

O volume encerra-se com a apresentação das referências bibliográficas utilizadas para o desenvolvimento deste trabalho.

Foi também desenvolvido um anexo eletrônico para este volume, o qual pode ser acessado pelo endereço www.mat.pucrs.br/~vaccaro/sei/. Nesse anexo podem ser encontrados:

- uma ferramenta para a visualização das soluções próprias das equações polinomiais intervalares apresentadas nos exemplos dos capítulos 6 e 7; e
- as saídas dos algoritmos implementados, referentes aos exemplos apresentados neste texto, em formato HTML.

O anexo eletrônico foi desenvolvido para prover ao leitor melhores condições de visualização e, principalmente, manipulação das imagens apresentadas neste volume. Espera-se, desse modo, facilitar a compreensão do texto e, conseqüentemente, das contribuições trazidas por este trabalho.

1.6 Comentários Finais

Este capítulo apresentou o tema sobre o qual é formulada a tese proposta, bem como aspectos gerais da estruturação e do desenvolvimento deste trabalho. Estes envolvem a descrição dos objetivos propostos, das delimitações do trabalho, do método de trabalho utilizado e da estrutura deste documento.

O próximo capítulo apresentará os fundamentos deste trabalho, servindo de partida para a discussão técnica dos aspectos considerados relevantes para o desenvolvimento dessa tese.

2 Fundamentos Teóricos da Álgebra Intervalar

O propósito deste capítulo é elencar resultados classicamente conhecidos e que formam um conjunto mínimo de informações necessárias para os desenvolvimentos apresentados nos capítulos seguintes. Tal apresentação será relevante para a efetiva compreensão dos aspectos semânticos associados à definição do tipo de dado intervalar.

2.1 Definições Básicas da Álgebra Intervalar

Esta seção apresenta algumas definições e resultados associados ao tipo de dado intervalar e às formas de operação com este tipo de dado. Também é apresentada a forma de representação gráfica preferencialmente utilizada.

Considera-se como tipo básico de dado o intervalo de reais, conforme a Definição 2.1:

Definição 2.1 (Intervalo de Reais): um intervalo de números reais, ou simplesmente intervalo, é denotado pelo par ordenado de números reais, $[a;b]$, com $a \leq b$, e representa o conjunto de todos os números reais x tais que $a \leq x \leq b$. Em notação algébrica,

$$[a;b] = \{ x \in \mathfrak{R} \mid a \leq x \leq b \}.$$

Neste trabalho, variáveis associadas a este tipo de dado serão representadas através de colchetes, $[\bullet]$, e seus extremos através da seguinte notação¹:

$$[x] = [\underline{x}; \bar{x}] = \{ x \in \mathfrak{R} \mid \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \}.$$

Em particular, um número real r é diretamente associado, na aritmética intervalar, ao intervalo $[r;r]$. Um intervalo desta natureza é denominado degenerado.

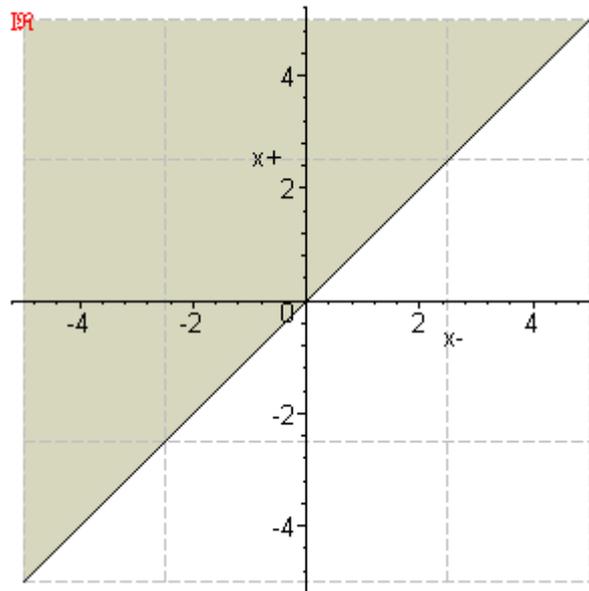
O conjunto dos números intervalo será denotado por $I\mathfrak{R}$, sendo representado graficamente pelo semiplano não inferior à reta identidade (Figura 2.1).

Com base na Definição 2.1, pode-se obter o resultado apresentado na Proposição 2.1:

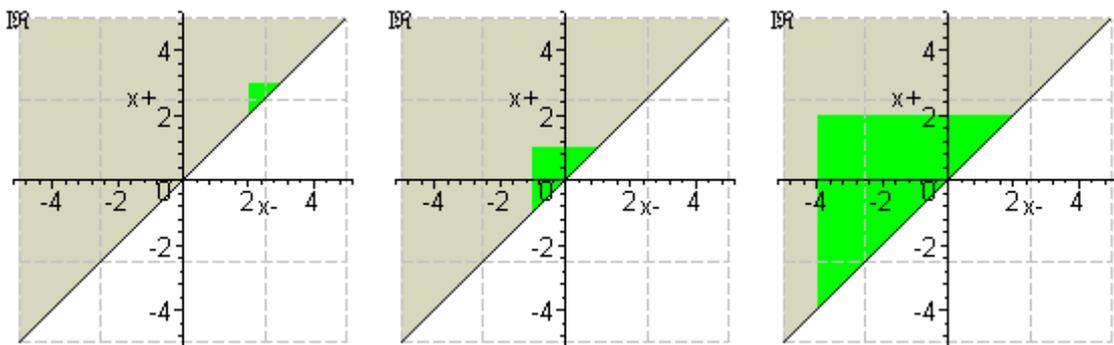
Proposição 2.1: $\mathfrak{R} \subset I\mathfrak{R}$.

Prova: Ver [MOO 66]. ■

¹ Eventualmente, por restrições computacionais, nos gráficos os extremos de um intervalo poderão ser referidos por x^- e x^+ .

FIGURA 2.1 – Representação cartesiana de $I\mathbb{R}$.

A forma de representação gráfica de um intervalo $[x]$ segue a geometria apresentada na Figura 2.1, isto é, triângulos isósceles representando a região formada por todos os intervalos inclusos em $[x]$. Esta forma de representação foi primeiramente sugerida por Sunaga [SUN 58], utilizada por Moore [MOO 66, MOO 79] e explorada por Franciosi [FRA 99]. Como ilustração, os intervalos $[2;3]$, $[-1;1]$ e $[-4;2]$ são representados na Figura 2.2.

FIGURA 2.2 – Representação cartesiana dos intervalos $[2;3]$, $[-1;1]$ e $[-4;2]$.

Este tipo de dado pode ser operado aritmeticamente e logicamente, conforme as definições a seguir [MOO 66, MOO 79, ALE 98]:

Definição 2.2 (Relações Algébricas Usuais entre Intervalos): Dados $[x] \in I\mathbb{R}$ e $[y] \in I\mathbb{R}$, então:

$$[x] \subseteq [y] \Leftrightarrow \underline{y} \leq \underline{x} \leq \bar{x} \leq \bar{y},$$

$$[x] = [y] \Leftrightarrow (\underline{x} = \underline{y}) \wedge (\bar{x} = \bar{y}).$$

Assim, por exemplo, é verdadeiro que $[1;2] \subseteq [0;3]$, mas $[-1;2] \not\subseteq [0;3]$ (Figura 2.3).

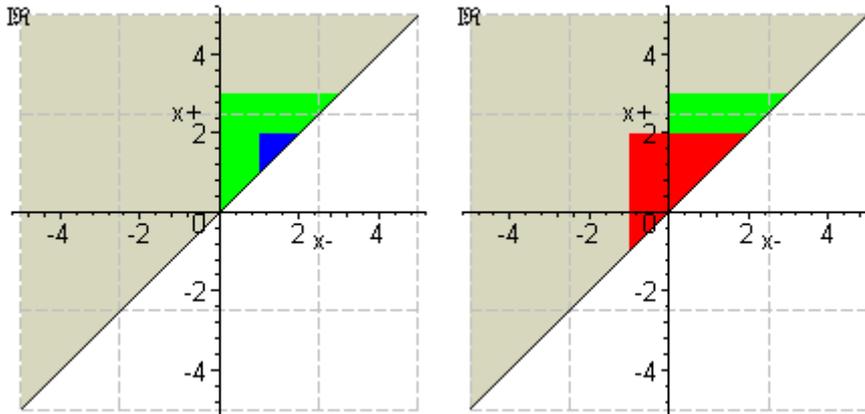


FIGURA 2.3 – Ilustração dos relacionamentos $[1;2] \subseteq [0;3]$ e $[-1;2] \not\subseteq [0;3]$.

As relações usuais ilustradas pela Figura 2.3 têm propriedades conhecidas, já que são particularizações de resultados da Teoria de Conjuntos para o caso de conjuntos compactos. Em particular, a Proposição 2.2 refere-se a sua classificação algébrica:

Proposição 2.2 (Classificação Algébrica das Relações Usuais entre Intervalos): \subseteq é relação de ordem parcial em $\mathcal{I}\mathfrak{R}$. $=$ é relação de equivalência em $\mathcal{I}\mathfrak{R}$.

Prova: Ver [KUL 81]. ■

Além das operações lógicas, intervalos também podem ser relacionados aritmeticamente. Esta característica dual – número e conjunto – é uma das principais diferenças de um intervalo para um número real ordinário, conforme apresenta a Definição 2.3:

Definição 2.3 (Operações Aritméticas entre Intervalos): Dados $[x] \in \mathcal{I}\mathfrak{R}$ e $[y] \in \mathcal{I}\mathfrak{R}$, então

$$[x] \bullet [y] = \{a \bullet b \in \mathfrak{R} \mid a \in [x] \wedge b \in [y]\}, \text{ onde } \bullet \in \{+, -, *, /\},$$

com a hipótese adicional de que $0 \notin [y]$ para o caso da divisão.

As operações aritméticas entre intervalos podem ser algoritmicamente definidas da seguinte forma:

Proposição 2.3 (Algoritmos de Cálculo Aritmético para Intervalos): Sejam $[x] \in \mathcal{I}\mathfrak{R}$ e $[y] \in \mathcal{I}\mathfrak{R}$. Então:

$$[x] + [y] = [\underline{x} + \underline{y}; \bar{x} + \bar{y}],$$

$$[x] - [y] = [\underline{x} - \bar{y}; \bar{x} - \underline{y}],$$

$$[x] * [y] = [\min\{\underline{x} * \underline{y}, \underline{x} * \bar{y}, \bar{x} * \underline{y}, \bar{x} * \bar{y}\}; \max\{\underline{x} * \underline{y}, \underline{x} * \bar{y}, \bar{x} * \underline{y}, \bar{x} * \bar{y}\}],$$

$$0 \notin [y] \Rightarrow \frac{[x]}{[y]} = [\underline{x}; \bar{x}] * \left[\frac{1}{\bar{y}}; \frac{1}{\underline{y}}\right].$$

Alternativamente, a multiplicação de intervalos pode ser definida algoritmicamente através do Quadro 2.1:

[x]*[y]		[y]		
		$\underline{y} \leq \bar{y} < 0$	$\underline{y} \leq 0 \leq \bar{y}$	$0 < \underline{y} \leq \bar{y}$
[x]	$\underline{x} \leq \bar{x} < 0$	$[\bar{x} * \bar{y}; \underline{x} * \underline{y}]$	$[\underline{x} * \bar{y}; \underline{x} * \underline{y}]$	$[\underline{x} * \bar{y}; \bar{x} * \underline{y}]$
	$\underline{x} \leq 0 \leq \bar{x}$	$[\bar{x} * \underline{y}; \underline{x} * \underline{y}]$	$[\min\{\underline{x} * \bar{y}, \bar{x} * \underline{y}\}; \max\{\underline{x} * \underline{y}, \bar{x} * \bar{y}\}]$	$[\underline{x} * \bar{y}; \bar{x} * \bar{y}]$
	$0 < \underline{x} \leq \bar{x}$	$[\bar{x} * \underline{y}; \underline{x} * \bar{y}]$	$[\bar{x} * \underline{y}; \bar{x} * \bar{y}]$	$[\underline{x} * \underline{y}; \bar{x} * \bar{y}]$

QUADRO 2.1 – Cálculo da multiplicação intervalar usando os sinais dos extremos dos intervalos.

Prova: Ver [SUN 58, MOO 79, KUL 81]. ■

A forma de cálculo apresentada no Quadro 2.1 apresenta 9 casos. O custo de determinação do caso a ser utilizado exige, no pior caso, 4 e, em média, cerca de 2.6 comparações de sinal². Já o cálculo da multiplicação necessita em média cerca de 2.2 multiplicações de reais, pois dentre os casos apresentados apenas um necessita de mais de duas operações dessa natureza. Portanto, considerada a proporção de custo entre comparações e multiplicações, o procedimento do Quadro 2.1 é computacionalmente mais eficiente que a forma algébrica apresentada na Proposição 2.3.

Proposição 2.4 (Propriedades das Operações Aritméticas entre Intervalos): Dados $[x] \in \mathcal{IR}$, $[y] \in \mathcal{IR}$, $[z] \in \mathcal{IR}$ e $r \in \mathcal{R}$, então são válidas as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}
[x] + [y] &= [y] + [x], && \text{(comutatividade)} \\
[x] * [y] &= [y] * [x], \\
[x] + ([y] + [z]) &= ([x] + [y]) + [z], && \text{(associatividade)} \\
[x] * ([y] * [z]) &= ([x] * [y]) * [z], \\
[x] + [0] &= [x], && \text{(elemento neutro)} \\
[x] * [1] &= [x], \\
[x] * ([y] + [z]) &\subseteq ([x] * [y]) + ([x] * [z]), && \text{(subdistributividade)} \\
[y] * [z] > 0 &\Rightarrow [x] * ([y] + [z]) = ([x] * [y]) + ([x] * [z]), && \text{(distributividade)} \\
r * ([x] + [y]) &= r * [x] + r * [y], \\
[x] \text{ não é degenerado} &\Rightarrow [x] - [x] \neq 0, \\
[x] \text{ não é degenerado} \wedge 0 \notin [x] &\Rightarrow \frac{[x]}{[x]} \neq 1.
\end{aligned}$$

Prova: Ver [MOO 79, KUL 81, ALE 83]. ■

Proposição 2.5 (Propriedades da Inclusão de Intervalos): A aritmética de intervalos é monotônica com relação à inclusão. Isto é, dados $[x] \in \mathcal{IR}$, $[y] \in \mathcal{IR}$, $[z] \in \mathcal{IR}$ e $[t] \in \mathcal{IR}$ tais que $[x] \subseteq [z]$ e $[y] \subseteq [t]$, então:

² Em quatro casos são necessárias duas comparações, em outros quatro casos, três comparações e no caso restante, quatro comparações, totalizando 24 comparações em 9 casos, ou seja, $\frac{24}{9} = 2.\bar{6}$ comparações, em média.

$$\begin{aligned}
[x] + [y] &\subseteq [z] + [t], \\
[x] - [y] &\subseteq [z] - [t], \\
[x] * [y] &\subseteq [z] * [t], \\
\frac{[x]}{[y]} &\subseteq \frac{[z]}{[t]} \quad (\text{se } 0 \notin [t]).
\end{aligned}$$

Prova: Ver [KUL 81, ALE 83]. ■

Em particular, os resultados acima apresentam claramente a natureza dual do tipo de dado intervalar, podendo este ser operado como um “número” ou como um conjunto, conforme necessário.

2.2 Aspectos Topológicos da Aritmética Intervalar

Esta seção apresenta os principais resultados associados aos aspectos topológicos da aritmética intervalar. Os resultados ora apresentados fazem-se necessários por seu caráter auxiliar à discussão apresentada nos capítulos posteriores.

Definição 2.4 (Distância entre Intervalos): A distância entre $[x] \in \mathfrak{I}\mathfrak{R}$ e $[y] \in \mathfrak{I}\mathfrak{R}$ é calculada através da função

$$\begin{aligned}
d: \mathfrak{I}\mathfrak{R}^2 &\rightarrow \mathfrak{R} \\
([x], [y]) &\mapsto d([x], [y]) = \max\{\overline{x} - \underline{y}, \underline{x} - \overline{y}\}.
\end{aligned}$$

Definição 2.5 (Valor Absoluto de um Intervalo): O valor absoluto de $[x] \in \mathfrak{I}\mathfrak{R}$ é calculado como sua distância de 0, ou seja, $|[x]| = d([x], 0) = \max\{\underline{x}, \overline{x}\}$.

Esta definição de métrica é a sugerida por Moore [MOO 66] em lugar da métrica euclidiana usual,

$$\begin{aligned}
d_2: \mathfrak{I}\mathfrak{R}^2 &\rightarrow \mathfrak{R} \\
([x], [y]) &\mapsto d_2([x], [y]) = \sqrt{(\overline{x} - \underline{y})^2 + (\underline{x} - \overline{y})^2},
\end{aligned}$$

uma vez que d_2 não possui uma extensão tão natural para a situação extrema dos números reais. De fato, nesta situação específica,

$$|[1,1]|_2 = d_2([1;1], [0;0]) = |1| * \sqrt{2} = \sqrt{2},$$

por exemplo, enquanto que

$$|[1,1]| = d([1;1], 0) = \max\{|1|, |1|\} = 1,$$

que é mais desejável do ponto de vista da associação de intervalos degenerados com números reais.

Proposição 2.6 (Propriedades da Distância e do Módulo): Sejam $[x] \in \mathfrak{I}\mathfrak{R}$, $[y] \in \mathfrak{I}\mathfrak{R}$, $[z] \in \mathfrak{I}\mathfrak{R}$ e $r \in \mathfrak{R}$. Então:

$$\begin{aligned}
d([x] + [y], [x] + [z]) &= d([y], [z]) \\
d(r * [x], r * [y]) &= |r| * d([x], [y]) \\
d([x] * [y], [x] * [z]) &\leq |x| * d([y], [z])
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d([x],[y]) &\leq d([x],[z]) + d([y],[z]) && \text{(desigualdade triangular)} \\
|[x]| &= \max\{|x| \mid x \in [x]\} \\
|[x] \pm [y]| &\leq |[x]| + |[y]|
\end{aligned}$$

Prova: Ver [MOO 66, ALE 83]. ■

Completando as definições operacionais fundamentais para a realização da discussão apresentada neste trabalho, as seguintes definições e propriedades são agregadas:

Definição 2.6 (Ponto Médio de um Intervalo): Seja $[x] \in I\mathfrak{R}$. Então o ponto médio de $[x]$ é calculado a partir da função

$$\begin{aligned}
m: I\mathfrak{R} &\rightarrow \mathfrak{R} \\
[x] &\mapsto m([x]) = \frac{1}{2}(\underline{x} + \bar{x}).
\end{aligned}$$

Definição 2.7 (Diâmetro de um Intervalo): Dado $[x] \in I\mathfrak{R}$, seu diâmetro é calculado através da função

$$\begin{aligned}
w: I\mathfrak{R} &\rightarrow \mathfrak{R} \\
[x] &\mapsto w([x]) = \bar{x} - \underline{x}.
\end{aligned}$$

Proposição 2.7 (Propriedades do Diâmetro Intervalar): Sejam $[x] \in I\mathfrak{R}$ e $r \in \mathfrak{R}$. Então:

$$\begin{aligned}
w([x]) &\geq 0 \\
w([x] \pm [y]) &= w([x]) + w([y]) \\
w(r * [x]) &= |r| * w([x]) \\
w([x] * [y]) &\leq w([x]) * |[y]| + |[x]| * w([y]) \\
w([x] * [y]) &\geq \max\{w([x]) * |[y]|, |[x]| * w([y])\}
\end{aligned}$$

Prova: Ver [ALE 83]. ■

Definição 2.8 (Raio de um Intervalo): Seja $[x] \in I\mathfrak{R}$. Então o raio de $[x]$ é calculado a partir da função

$$\begin{aligned}
r: I\mathfrak{R} &\rightarrow \mathfrak{R} \\
[x] &\mapsto r([x]) = \frac{1}{2}(\bar{x} - \underline{x}).
\end{aligned}$$

De posse das informações apresentadas, pode-se proceder às discussões que compõem o corpo deste trabalho.

2.3 Comentários Finais

Muitos outros resultados poderiam ter sido abordados neste capítulo. No entanto, optou-se pela apresentação daqueles que efetivamente pudessem contribuir para o entendimento dos capítulos seguintes. Para uma lista mais completa de resultados sugere-se a consulta a [ALE 83, ALE 98, KUL 81, MOO 66, MOO 79], entre outros.

O próximo capítulo apresentará um breve relato da evolução da aritmética intervalar, bem como introduzirá a questão fundamental deste trabalho, que é a contribuição da consideração de uma semântica adequada associada ao tipo de dado intervalar.

3 Aspectos Históricos e Semânticos do Conceito de Intervalo

Este capítulo apresenta uma breve discussão histórica da evolução da aritmética intervalar, buscando evidenciar aspectos que fundamentam este trabalho. O capítulo também apresenta uma discussão sobre a relevância da consideração de uma semântica para o conceito de intervalo de reais. Esta discussão busca estabelecer a diferença entre duas interpretações existentes para o conceito de intervalo de números reais, a saber:

- Número-intervalo, ou seja, intervalo como um ente matemático que carrega uma unidade consolidada e minimal de informação; e
- Envoltória intervalar de reais, isto é, intervalo como um conjunto de números reais, representante de um número real indeterminado devido à inclusão de erros de arredondamento ou truncamento.

A compreensão das diferenças entre essas interpretações é crucial para o entendimento das contribuições apresentadas no decorrer deste trabalho, bem como dos resultados encontrados através da execução das operações aritméticas entre intervalos.

3.1 Breve Histórico da Aritmética Intervalar

Um dos primeiros relatos de amplo conhecimento da utilização de intervalos como estimadores formais de uma grandeza é o algoritmo de Archimedes para a estimação de π . Através de uma sucessão de polígonos – inscritos e circunscritos – com número de lados crescente, Archimedes conseguiu gerar uma seqüência convergente de intervalos para estimar essa constante. Por outro lado, as primeiras menções do estudo da aritmética intervalar como ramo da Computação Científica remontam da década de 1950, através de alguns estudos isolados e que, conforme Alefeld e Mayer [ALE 2000], pouco a pouco passam a requisitar a atenção de um número maior de pesquisadores. É nesse contexto que se apresenta o trabalho fundamental de Sunaga [SUN 58], no qual são investigadas as regras que definem as operações aritméticas entre intervalos, são definidos vetores e matrizes intervalares, juntamente com as operações correspondentes, e são esboçados exemplos de aplicações da aritmética intervalar para a determinação de envoltórias para raízes de funções e para integrais. Porém, somente com o primeiro livro sobre análise intervalar, publicado por Moore [MOO 66], tais resultados passaram a receber mais atenção da comunidade científica.

Durante as décadas de 1950 a 1980, diversos grupos de pesquisa em Matemática Intervalar surgiram ao redor do mundo, desenvolvendo pesquisas sistemáticas nessa área. Uma das

principais referências que consolidam o trabalho neste período é o livro de Kulish [KUL 83] (conforme [ALE 2000]). Neste contexto, diversas propriedades algébricas foram derivadas, bem como métodos de solução de problemas específicos [BER 72, JAH 74, ALE 83, OPP 88, BOH 96, KEA 96, ALE 2000].

Um dos fundamentos que motivaram o desenvolvimento da aritmética intervalar foi o desenvolvimento de algoritmos numéricos para Computação Científica. Neste contexto, a compreensão dos efeitos da existência de uma aritmética de ponto flutuante de precisão finita (associada à noção de erro de arredondamento) aliada à necessidade de truncamento de certos métodos iterativos impulsionou o desenvolvimento de algoritmos cujo output fosse capaz de garantir a proximidade entre a solução exata e as respostas produzidas. Nesse sentido Rump [RUM 88] apresenta uma interessante análise comparativa do lugar da abordagem intervalar frente a outras abordagens de solução de problemas do ponto de vista computacional, tais como algoritmos algébricos e algoritmos numéricos. Em particular, Rump conclui que há poucos campos de aplicação em que essas abordagens podem competir, sendo mais comum a existência de campos em que uma delas domine ou então que sejam complementares. Mais ainda, classifica a obtenção de inclusões de soluções através de métodos intervalares

“em algum lugar entre a computação algébrica e a computação numérica pura”
[RUM 88].

Durante as últimas três décadas o lugar dos intervalos compactos como objetos independentes tem crescido continuamente na análise numérica, na verificação ou determinação de envoltórias para as soluções de vários problemas matemáticos ou na prova de que tais problemas não possuem solução em um domínio particular. Diversas áreas de aplicação foram exploradas através da abordagem intervalar: problemas em engenharia (estrutural, química, mecânica, elétrica), robótica, controle, economia, etc. Do ponto de vista matemático pode-se citar problemas associados à solução de sistemas lineares ou não lineares, otimização (restrita ou global), determinação de valores e vetores próprios, solução de problemas de contorno e de equações diferenciais, entre outros. Isto foi possível através da compreensão de intervalos como extensões de números reais ou complexos, da introdução de funções intervalares e de aritméticas intervalares e da aplicação de teoremas de ponto fixo apropriados [ALE 2000].

As próximas seções apresentam brevemente alguns dos resultados da literatura referentes a abordagens de solução de sistemas de equações intervalares, de modo a contextualizar a discussão dos capítulos seguintes. Informações sobre aplicações científicas da Matemática Intervalar em diversas áreas podem ser encontradas em [OPP 88, KEA 96, ALE 2000, WOL 2000], entre outros.

3.1.1 Solução de Sistemas de Equações Lineares

A solução de sistemas lineares intervalares está associada à determinação de respostas de equações e sistemas lineares reais cujos dados de input foram afetados por tolerâncias. Este é o caso quando as matrizes de coeficientes e termos independentes são perturbadas, por exemplo, por erros de medição ou conversão de bases de numeração. Sob essas condições parece ser razoável aceitar uma solução como correta se esta é solução de algum sistema formado a partir desses limites de especificação [ALE 2000]. O problema da determinação de intervalos que contenham as soluções reais de um sistema nessas condições é descrito usualmente como na Definição 3.1 [WOL 2000]:

Definição 3.1 (Solução de um Sistema Intervalar Linear): Um sistema linear de equações algébricas (sistema intervalar linear) $[A] * x = [b]$, onde $[A] \in (\mathfrak{IR})^{n \times n}$ e $[b] \in (\mathfrak{IR})^n$ é o conjunto de sistemas de equações algébricas lineares reais (sistemas lineares reais)

$$\{ A * x = b \mid \exists A \in [A] \wedge \exists b \in [b] \}.$$

Nessas condições, o conjunto solução $\Sigma([A],[b])$ de $[A] * x = [b]$ é definido por

$$\Sigma([A],[b]) = \{ x \in \mathfrak{R}^n \mid \exists A \in [A] \wedge \exists b \in [b] \wedge A * x = b \}.$$

Ao longo dos anos pôde-se demonstrar que, em geral, o conjunto solução $\Sigma([A],[b])$ não é convexo. Além disso, as seguintes proposições são verdadeiras:

Proposição 3.1: O conjunto solução $\Sigma([A],[b])$ é um politopo.

Prova: Ver [KRE 93, KRE 96, ROH 96] *apud* [WOL 2000]. ■

Proposição 3.2: A determinação algorítmica do conjunto solução $\Sigma([A],[b])$ é um problema NP-Difícil.

Prova: Ver [KRE 93, KRE 96, ROH 96] *apud* [WOL 2000], e [COX 99]. ■

Referências à grande maioria das contribuições realizadas nesse contexto podem ser encontradas em [ALE 2000, ALE 83, WOL 2000]. Métodos iterativos para a determinação de envoltórias para o conjunto solução $\Sigma([A],[b])$ são as estratégias mais comuns. De fato, o próprio Moore apresenta resultados referentes a este tipo de abordagem em suas publicações [MOO 66, MOO 79]. Em particular, uma classe de métodos comumente referida [ALE 2000, WOL 2000, KEA 96, MAR 96, MAR 99b] é a dos baseados na iteração de Gauss-Jacobi, cuja forma original é apresentada na Proposição 3.3:

Proposição 3.3: Seja o problema $[A] * x = [b]$ tal que $0 \notin [a_{ii}]$, $1 \leq i \leq n$. Então a envoltória das soluções desse problema, $[x]$, pode ser dada pelo método intervalar de Gauss-Jacobi, que consiste do processo iterativo

$$[x_i]^{(k+1)} = \frac{1}{[a_{ii}]} \left([b_i] - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n [a_{ij}] * [x_j]^{(k)} \right).$$

Prova: Ver [ALE 83, ALE 2000]. ■

Outro método bastante eficiente é o algoritmo intervalar de Gauss-Seidel (*Interval Gaussian Algorithm* – IGA) [ALE 83, ALE 2000]. De fato, este algoritmo pode ser aplicado também para sistemas não lineares algébricos, tendo sido estudado e modificado por diversos pesquisadores, tais como Rohn, Kearfott, Shary e Rump. Uma forma simplificada desse algoritmo é dada na Proposição 3.4:

Proposição 3.4: Seja o problema $[A] * x = [b]$ tal que $0 \notin [a_{ii}]$, $1 \leq i \leq n$. Então a envoltória das soluções desse problema, $[x]$, pode ser dada pelo método intervalar de Gauss-Seidel, que consiste do processo iterativo

$$[x_i]^{(k+1)} = \frac{1}{[a_{ii}]} \left([b_i] - \sum_{j=1}^{i-1} [a_{ij}] * [x_j]^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n [a_{ij}] * [x_j]^{(k)} \right).$$

Prova: Ver [ALE 83]. ■

Rump [RUM 94] apresenta um texto bastante completo e repleto de referências com respeito a métodos de validação de zeros de sistemas densos ou esparsos de equações não lineares existentes até aquela época. Em particular, um método iterativo desenvolvido por este autor permite a obtenção de envoltórias para as soluções reais de sistemas de equações lineares reais através do uso da aritmética intervalar, conforme mostram as proposições a seguir:

Proposição 3.5: Seja o sistema de equações lineares $A * x = b$, com $A \in \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^n$. Então, para uma matriz arbitrária não singular $R \in \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^n$ e para um vetor arbitrário $x_0 \in \mathfrak{R}^n$,

$$x - x_0 = (I - R * A) * (x - x_0) + R * (b - A * x_0).$$

Chamando

$$\begin{aligned} G &= I - R * A, \\ g &= R * (b - A * x_0). \end{aligned}$$

Então

$$x = x_0 + x^\diamond,$$

onde x^\diamond é solução da equação de ponto fixo

$$x^\diamond = G * x^\diamond + g.$$

Prova: Ver [RUM 94, ROH 98]. ■

Proposição 3.6: Na notação da Proposição 3.5, seja um vetor intervalar $[x]$ satisfazendo

$$G * [x] + g \subseteq \text{Int}([x]),$$

Onde $\text{Int}([x]) = \{x \mid \underline{x} < x < \bar{x}\}$ é o interior de $[x]$. Então a equação

$$x^\diamond = G * x^\diamond + g$$

possui somente uma solução $x^\diamond \subseteq \text{Int}([x])$.

Prova: Ver [RUM 94]. ■

Em seu trabalho, Rump apresenta também condições que garantem a convergência do método acima descrito. Heindl [HEI 95] apresenta uma breve discussão a respeito de modificações sobre o algoritmo proposto por Rump, de modo a obter soluções de sistemas lineares e de sistemas não lineares com maior eficiência e mesma qualidade. Recentemente Rohn e Rex [ROH 98] apresentaram uma versão não intervalar do método proposto e desenvolvido por Rump [RUM 94]. Esse resultado, fundamentado em teoremas da aritmética real, consegue garantir as mesmas características de validação das soluções da versão originalmente intervalar sugerida por Rump.

Maiores informações com respeito à determinação de soluções de sistemas lineares de equações intervalares podem ser obtidas, por exemplo, em [ALE 2000, WOL 2000] que apresentam discussões detalhadas com respeito a condições de aplicabilidade e garantia de convergência para esses e outros resultados.

3.1.2 Solução de Sistemas de Equações Não Lineares

A solução de sistemas de equações não lineares foi também estudada durante o desenvolvimento da aritmética intervalar. Novamente, os métodos iterativos compõem uma classe que ocupa quase a totalidade das iniciativas existentes.

Sunaga [SUN 58] já apresenta idéias para o desenvolvimento de um método similar ao hoje denominado Método de Newton Intervalar, posteriormente estudado por diversos pesquisadores e sobre o qual Alefeld apresenta um estudo bastante completo em seu livro co-escrito por Herzberger [ALE 83]. Também no *survey* de Alefeld e Mayer [ALE 2000] é possível encontrar uma extensa discussão sobre o uso do algoritmo de Gauss-Seidel intervalar (IGA) para a solução de sistemas não lineares de equações, bem como sobre modificações desse algoritmo, tais como a introdução de operadores como o de Krawczyk para a correção de certos problemas de singularidade. Danqing e Weiguo [DAN 99] apresentam um operador desta natureza que permite a solução de sistemas indeterminados através de um algoritmo intervalar. Kolev [KOL 99] compara o resultado do operador de Krawczyk ao de um método modificado que permite a determinação de soluções reais globais isoladas de sistemas não lineares. Ainda, Yamamura [YAM 2000] apresenta um teste de não existência de soluções para sistemas não lineares baseado na combinação linear de equações e que, acoplado ao algoritmo Krawczyk-Moore, produz, segundo esses autores, um método de solução bastante eficiente em comparação ao algoritmo Krawczyk-Moore original.

Recentemente o trabalho de Claudio, Ferreira, Oliveira e Patrício [CLA 9-b] apresenta uma abordagem diferenciada para a determinação das soluções de equações polinomiais intervalares de segundo grau, através da determinação de fórmulas baseadas na de Bhaskara. Em particular, o trabalho define o *kernel* de uma equação dessa natureza e determina soluções a partir de diferentes comportamentos dos coeficientes, permitindo a obtenção de envoltórias intervalares para soluções reais e para soluções complexas desse tipo de equações.

Outras informações referentes à determinação de soluções de sistemas não lineares de equações através de análise intervalar podem ser encontradas nas referências deste trabalho; em particular, em [ALE 83, ALE 2000, WOL 2000, RUM 94].

3.1.3 Outras Abordagens

Uma classe de pesquisa bastante explorada na aritmética intervalar é a da redefinição das operações e relações realizadas sobre estes entes. Esta linha congrega esforços algébricos e numéricos na busca de uma estrutura algébrica mais adequada à realização de operações entre intervalos de tal forma que os algoritmos gerados sejam menos suscetíveis a problemas como o de inflação de diâmetros. O desenvolvimento de iniciativas nessa linha confunde-se com o próprio desenvolvimento da aritmética intervalar, fundamentado na redefinição do significado do conceito e das operações de intervalo: até os trabalhos de Sunaga e Moore, entre outros, o conceito de intervalo era apenas associado ao de um conjunto compacto.

Uma das principais iniciativas nesse sentido são os trabalhos de Markov [MAR 95, MAR 96, MAR 99b], Popova [POP 2000] e Dimitrova [DIM 92]. Em particular, a aritmética dirigida estudada por Markov mostra-se bastante adequada na modelagem e interpretação de problemas intervalares e no desenvolvimento de algoritmos capazes de determinar o conjunto das soluções reais de sistemas de equações lineares. Isto porque a redefinição do tipo de dado intervalar sugerida por Markov [MAR 99b]:

- unifica a aritmética estendida desenvolvida por Kaucher e a aritmética estendida para intervalos normalizados que usa operações internas;
- fornece um *framework* geral que permite passar de intervalos próprios para intervalos impróprios (com extremo inferior **maior** que o extremo superior) e vice-versa;

- contém um conjunto de novas relações e regras computacionais necessárias para a transformação simbólica adequada de expressões e equações algébricas;
- acrescenta variáveis binárias para identificar o direcionamento dos intervalos.

Através do uso dessa aritmética dirigida, Markov apresentou, por exemplo, um algoritmo baseado na iteração de Gauss-Jacobi e capaz de determinar as soluções algébricas de um sistema intervalar linear. Infelizmente, a necessidade de uso de uma notação extremamente “pesada” do ponto de vista usual dificulta a compreensão das idéias propostas por Markov e a utilização ampla de sua abordagem. Maiores detalhes podem ser encontrados em [MAR 95, MAR 96, MAR 99b, DIM 92].

Outra abordagem encontrada é a de Claudio e Oliveira [CLA 96, CLA 9-a] e Korzenowski [KOR 94], na qual a relação de igualdade estrutural usual é substituída por outra relação de equivalência, a de aproximação intervalar. Esta relação dá origem a uma estrutura denominada corpo dinâmico, que, segundo esses autores, possui essencialmente as mesmas propriedades de um corpo no que se refere às propriedades das operações de soma e multiplicação e que permite a interpretação de \mathbb{R} como um “domínio de erros” de um campo. Em particular são analisadas formas fechadas de solução de equações polinomiais de primeiro e segundo graus através da estrutura acima definida [KOR 94, CLA 9-a].

Claudio e Franciosi [CLA 92a] e Claudio, Escardó e Franciosi [CLA 92b] também propuseram a utilização de uma abordagem diferenciada para a análise intervalar através da teoria dos domínios contínuos, agregando a lógica de Scott de tal forma que um número real seja identificado ao supremo de uma ordenação de informação. Essa estrutura, denominada Espaço de Informação permite que a Teoria dos Intervalos seja vista não apenas como uma extensão da análise real, mas com as vantagens de ser uma lógica construtiva e computacional [CLA 92a, CLA 92b].

3.2 Semânticas Associadas a Intervalos

Nesta seção são apresentadas duas diferentes interpretações para o conceito de intervalo. Inicialmente é apresentada a interpretação usual, associada à utilização de uma envoltória para a representação de um número real, e, em seguida, a interpretação de número-intervalo. Finalmente, uma discussão é realizada, objetivando a compreensão dos pressupostos associados a cada interpretação.

A existência de diferentes interpretações para um mesmo ente não é incomum no domínio das aplicações científicas. Com efeito, citam-se, entre outros exemplos:

- Números reais, que podem representar:
 - ♦ Quantidades; ou
 - ♦ Classes de elementos idênticos;
- Pares ordenados, que podem representar, em um plano:
 - ♦ Pontos;
 - ♦ Vetores de base fixa;
 - ♦ Vetores de base móvel;

- ◆ Números complexos; ou
- ◆ Intervalos de números reais, como sugerido por Sunaga [SUN 58] e posteriormente por Moore [MOO 66];
- Vetores, que podem ser considerados como:
 - ◆ Entes matemáticos propriamente ditos; ou
 - ◆ Listas ordenadas de elementos.

Da mesma forma, não raramente a mesma notação é utilizada para representar entes com diferentes significações. A questão que diferencia a interpretação de cada um destes entes é o tipo de uso pretendido no contexto de aplicação científica. Por exemplo, se um vetor for considerado apenas como uma lista ordenada de elementos, esta pode ser concatenada com outra, ou mesmo reordenada; no entanto, se considerado como um ente matemático puro, a operação de concatenação não estaria propriamente definida, pois excederia o espaço ao qual o vetor pertence, e a reordenação geraria um vetor possivelmente diferente do original, modificando a informação nele contida. Ainda assim, vetores e listas ordenadas são comumente representados através da mesma notação.

Outro exemplo semelhante é o caso da realização de operações com números inteiros. Na aritmética decimal usual, a adição dos números 1 e 2 resultaria

$$1 + 2 = 3.$$

No entanto, se os mesmos números fossem operados considerando-se a aritmética do anel \mathbf{Z}_2 , ter-se-ia

$$1 + 2 = 3 = 1,$$

visto que neste anel de equivalência os elementos pares são equivalentes entre si e, da mesma forma, o são os elementos ímpares. Em ambos casos a operação de adição resultou 3 como resposta. Estas respostas, porém, foram diferentes, pois **a interpretação dada aos elementos dos anéis é diferente**. No primeiro caso o número 3 representa a quantidade física 3; já no segundo caso, o numeral 3 está associado à propriedade de não paridade dos números que formam essa classe de equivalência, por exemplo.

Os exemplos acima têm por objetivo único validar e ilustrar o pressuposto fundamental de que **diferentes interpretações para um mesmo ente podem alterar significativamente a forma de operação com este ente, bem como a interpretação dos resultados das operações efetuadas**. A clareza de tal argumento torna-se ainda mais importante se a notação utilizada para a representação dos entes é a mesma para diferentes interpretações. Esta é a discussão que será trazida nas seções seguintes deste trabalho, especificamente no contexto de intervalos.

Será evitada, sempre que possível, a utilização da expressão “conjunto de números reais” para qualquer das interpretações, visto que esta característica é comum e inerente à definição de intervalo, não servindo como diferenciador entre as semânticas consideradas.

3.2.1 Envoltória Intervalar de Números Reais

A interpretação usualmente aceita para um intervalo no contexto da Aritmética Intervalar é a de envoltória intervalar de um número real. Esta interpretação pode ser definida como segue:

Definição 3.2 (Envoltória Intervalar de Reais): Segundo a semântica de envoltória intervalar de reais, um intervalo de reais representa um número real sujeito a incertezas, isto é,

$$\forall x \in \mathfrak{R}, x \in [a;b] \Leftrightarrow [a;b] \text{ representa } x.$$

Assim, por exemplo, o intervalo $[3.1;3.2]$ é capaz de representar o número real π , considerando-se uma aritmética de ponto flutuante com precisão 2 e número de ponto flutuante normalizado.

Uma das origens da definição da aritmética intervalar foi a necessidade do desenvolvimento de mecanismos capazes de modelar e representar cenários como o descrito acima. De fato, esta é a semântica sugerida, por exemplo, por Sunaga [SUN 58] e, posteriormente, por outros autores [MAR 99a, MAR 99b]. Sunaga e Markov, inclusive, sugerem a representação dos intervalos na forma

$$m([x]) \pm r([x]),$$

aludindo à idéia de que o ponto médio seria o número real “medido” e o raio indicaria a incerteza gerada pelas restrições de precisão e ambientais existentes. Dessa forma, o valor exato estaria limitado pelo intervalo apresentado, conforme apresenta a Definição 3.2.

À interpretação de envoltória intervalar são associados os seguintes pressupostos:

- Qualquer real pertencente à envoltória intervalar de reais é um possível representante do valor real exato associado ao intervalo: como o valor exato do número real que se deseja representar não é explicitamente conhecido, então todos os números reais contidos na envoltória intervalar são possíveis representantes deste valor real. Isto é, o valor real exato continua indeterminado, porém restrito ao domínio dos valores reais que compõem a envoltória intervalar;
- Com a utilização de envoltórias intervalares espera-se modelar e determinar o efeito da propagação de erros em procedimentos de cálculo numérico em ponto flutuante.

A compreensão desses pressupostos é importante, pois se reflete diretamente na estruturação das operações definidas sobre o ente intervalar. Por exemplo, segundo essa interpretação a avaliação de uma função real através do uso de argumentos intervalares tem por objetivo determinar a propagação do erro de arredondamento na presença de incertezas.

Uma situação bastante ilustrativa é a da multiplicação de envoltórias intervalares:

Conforme apresentado na Definição 2.3, para $[x] \in \mathfrak{IR}$ e $[y] \in \mathfrak{IR}$,

$$[x] * [y] = \{ a * b \in \mathfrak{R} \mid a \in [x] \wedge b \in [y] \}.$$

No entanto, segundo a discussão apresentada seria razoável esperar que o produto de uma envoltória intervalar por si própria resultasse em

$$[x]^2 = \{ a^2 \in \mathfrak{R} \mid a \in [x] \}.$$

Por exemplo, para $[x] = [-1;2]$, a Definição 2.3 implica que

$$[x]*[x] = [-1;2]*[-1;2] = \{ a * b \in \mathfrak{R} \mid a \in [-1;2] \wedge b \in [-1;2] \} = [-2;4].$$

No entanto, pela linha de interpretação de envoltória intervalar, o resultado da operação $[x]*[x]$ não pode conter elementos negativos, uma vez que cada intervalo $[x]$ representa uma ocorrência do mesmo número real; isto é, o produto $[x]*[x]$ deve representar o produto de dois números reais idênticos – e sujeitos a incertezas –, ou seja, um número real não negativo. Assim, espera-se que

$$[x]^2 = [-1;2]^2 = [0;4].$$

Esse resultado não é coerente com a Definição 2.3, mas o é com a interpretação de avaliação intervalar de uma função real, na qual o intervalo resultante deve ser o formado pela avaliação mínima e máxima da função real equivalente no intervalo de origem, como se pode observar pela Figura 3.1.

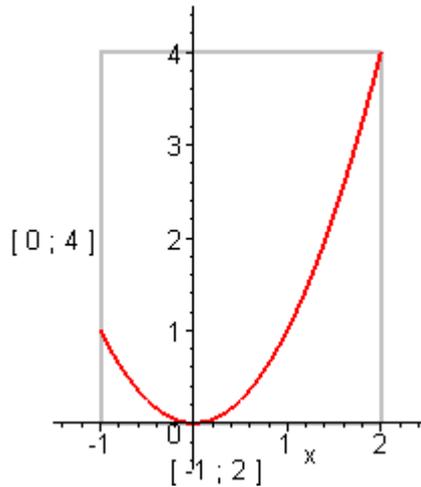


FIGURA 3.1 – Avaliação intervalar da função definida por $f(x) = x^2$ para $-1 \leq x \leq 2$.

Ora, a imposição de que o produto de intervalos iguais possua exatamente as mesmas propriedades de um número real gera uma ruptura com a definição usual da operação de multiplicação, de tal sorte que, algebricamente, fica imposto que

$$[x]^2 \neq [x] * [x],$$

em geral. De fato, segundo a Definição 2.3 a igualdade ocorrerá se e somente se $\underline{x} * \bar{x} \geq 0$, ou seja, se $[x]$ não contiver simultaneamente elementos positivos e negativos [MOO 66]. Para intervalos envolvendo elementos positivos e negativos haverá diferença entre as partes negativas dos intervalos gerados pela multiplicação e pela potência de intervalos.

Uma análise mais acurada dessas características será apresentada ao longo deste capítulo e retomada nos capítulos 4 e 5.

3.2.2 Número-Intervalo

Segundo a interpretação de número-intervalo, um intervalo é um ente matemático que representa todos os números reais e as inclusões nele contidas. Como tal, constitui um tipo de dado diferenciado com relação ao tipo de informação que carrega [FRA 99], ou seja, é um novo tipo de número [MOO 79]. Formalmente, a interpretação de número-intervalo pode ser enunciada como segue:

Definição 3.3 (Número-Intervalo): Segundo a semântica de número-intervalo, um intervalo representa todos os intervalos de reais que contém, ou seja,

$$\forall [x] \in \mathcal{IR}, [x] \subseteq [a;b] \Leftrightarrow [a;b] \text{ representa } [x].$$

Apenas com o sentido de facilitar o entendimento da Definição 3.3, a seguinte metáfora pode ser estabelecida entre um número-intervalo e um vetor³:

³ De fato, esta associação apresenta diversas vantagens para a compreensão das operações aritméticas entre intervalos, conforme mostra o trabalho de Franciosi [FRA 99].

O intervalo $[2;3]$ pode ser associado ao vetor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. No entanto, não se pode dizer que este vetor representa a componente 3 em seu sentido estrito. Da mesma forma, o intervalo $[2;3]$ não representa apenas o número 3, mas todos os números reais e inclusões de intervalos entre 2 e 3. Obviamente que é possível projetar o vetor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ de modo a extrair deste o elemento 3, assim como é possível dizer que o número 3 faz parte do intervalo $[2;3]$. De toda forma, tanto a projeção do vetor como a identificação da inclusão de 3 no intervalo operam modificações no tipo de dado em uso, ou seja, provocam perda de informação sobre o ente em si, ou então mudança de domínio.

Segundo essa interpretação as operações aritméticas entre intervalos podem ser obtidas de forma bastante similar às operações entre vetores. Em particular, Franciosi [FRA 99] apresenta, por exemplo, a interpretação gráfica da adição de intervalos como a adição de vetores de duas componentes reais, e a multiplicação de intervalos como multiplicações de vetores por escalares. De fato, do ponto de vista algébrico as operações aritméticas entre números-intervalo são exatamente as apresentadas na Definição 2.3.

Por exemplo, considerando-se novamente o produto dos intervalos $[x] \in \mathfrak{I}\mathfrak{R}$ e $[y] \in \mathfrak{I}\mathfrak{R}$, como na Definição 2.3,

$$[x] * [y] = \{a * b \in \mathfrak{R} \mid a \in [x] \wedge b \in [y]\},$$

a interpretação de número-intervalo é mais coerente do ponto de vista da garantia das propriedades algébricas, principalmente ao se considerar o caso particular do produto $[x]*[x]$, que ficaria definido como

$$[x] * [x] = \{a * b \in \mathfrak{R} \mid a \in [x] \wedge b \in [x]\},$$

sem a necessidade de imposições adicionais. Para a ilustração dessa discussão, remonta-se ao exemplo apresentado anteriormente:

$$[x] = [-1;2] \Rightarrow [x]^2 = [x] * [x] = [-1;2] * [-1;2] = [-2;4].$$

Nesse caso, o produto de um intervalo por si próprio resultou em outro intervalo que contém componentes positivos e componentes negativos. Este é um fato diferente do esperado com números reais. No entanto, nenhuma contradição existe neste fato, uma vez que:

- Um número-intervalo representa todos os reais e as inclusões nele contidas (e não apenas números reais individualmente selecionados dentro de um domínio de incerteza);
- Não existe equivalente, no conjunto dos números reais, para um intervalo que contenha **simultaneamente** componentes negativos e componentes positivos: a partir da propriedade de tricotomia⁴ dos números reais pode-se derivar que um número real somente pode assumir um dentre os seguintes comportamentos: negativo, nulo (sem sinal) ou positivo. No entanto, o conceito de intervalo excede esta lei, uma vez que permite a existência de intervalos contendo simultaneamente elementos positivos e elementos negativos. Assim, não há comportamento equivalente conhecido nos números reais para o resultado da operação apresentada no exemplo em questão;

⁴ Dados $x \in \mathfrak{R}$ e $y \in \mathfrak{R}$, somente uma das opções a seguir é verdadeira: $x = y$, $x > y$ ou $x < y$. [LIM 89]

- Segundo a Definição 2.3, a operação de multiplicação entre intervalos determina que o intervalo resultante deve ser aquele limitado pelos valores mínimo e máximo de todos os produtos entre os números reais contidos no primeiro intervalo com os contidos no segundo intervalo; não há menção sobre diferentes procedimentos para o caso específico da operação com intervalos iguais.

Essa interpretação segue a mesma linha de raciocínio proposta inicialmente por Moore [MOO 66], segundo a qual um intervalo é uma fonte de incerteza e deve ser tratada como tal. De fato, Moore apresenta, no capítulo 5 de seu livro, outro exemplo, coerente com os argumentos ora expostos, e no qual a avaliação da função definida por

$$f([x]) = \frac{[x]}{[x] - 2}$$

para $[x] = [10;12]$ deveria ser dada como

$$f([x]) = \frac{[x]}{[x] - 2} = \left\{ \frac{x}{y - 2} \mid (x \in [10;12]) \wedge (y \in [10;12]) \right\},$$

ou seja, a “avaliação da imagem de uma função com duas variáveis independentes” [MOO 66], resultando o intervalo $[1; \frac{3}{2}]$.

Enfim, a interpretação de número-intervalo traz diversas vantagens estruturais por tratar o intervalo como um tipo de dado que estende o conceito de número real do ponto de vista matemático, ou seja, efetivamente opera o intervalo com o conceito de número, em seu sentido mais amplo. Esse tratamento permite identificar a presença das características apresentadas acima, bem como sua coerência estrutural com as operações definidas originalmente para o tipo intervalar, e mostra-se mais abrangente que a semântica de envoltória intervalar de reais por permitir a efetiva operação com domínios compactos.

3.3 Dificuldades Associadas à Interpretação de Intervalo como Envoltória de Reais

O objetivo desta seção é apresentar as dificuldades associadas à inadequação das operações aritméticas clássicas entre intervalos com relação à interpretação de intervalo como envoltória de números reais. Para tanto, será necessário percorrer sucintamente o processo de construção das estruturas que regem as operações entre intervalos.

Assume-se momentaneamente que somente a operação de adição de intervalos seja conhecida conforme a Definição 2.3 e a Proposição 2.3, ou seja:

Sejam $[x] \in \mathcal{IR}$ e $[y] \in \mathcal{IR}$. Define-se a adição de intervalos através da função $+$: $\mathcal{IR} \times \mathcal{IR} \rightarrow \mathcal{IR}$, onde $[x] + [y] = [\underline{x}; \bar{x}] + [\underline{y}; \bar{y}] = [\underline{x} + \underline{y}; \bar{x} + \bar{y}]$.
 $([x], [y]) \mapsto [x] + [y]$

Então, a seguinte proposição é provada verdadeira:

Proposição 3.7: Sejam $[x] \in \mathcal{IR}$, $[y] \in \mathcal{IR}$, $[z] \in \mathcal{IR}$ e $[w] \in \mathcal{IR}$. A relação definida por $R \subseteq (\mathcal{IR} \times \mathcal{IR}) \times (\mathcal{IR} \times \mathcal{IR})$, $([x], [y])R([z], [w]) \Leftrightarrow [x] + [y] = [z] + [w]$ é de equivalência.

Prova: A idéia central da prova é demonstrar que a relação acima definida é reflexiva, transitiva e simétrica. Isto é feito diretamente, conforme apresentado no Anexo 1.1. ■

As classes de equivalência geradas por R permitem identificar os pares de intervalos cuja soma resulta igual. Neste sentido, como $[a] + [0] = [a]$, a classe de equivalência $\overline{([a], [0])}$ que reúne todos os pares cuja adição dos intervalos componentes é $[a]$ será denotada simplesmente por $\overline{[a]}$. Isto é:

$$\overline{[a]} = \overline{([a], [0])} = \{([x], [y]) \in \mathfrak{I}\mathfrak{R} \times \mathfrak{I}\mathfrak{R} \mid [x] + [y] = [a]\}.$$

Em particular, se considerado $k \in \mathfrak{R}$, pela resultado anterior pode-se escrever

$$\overline{k} = \overline{[k]} = \overline{([k], [0])} = \{([x], [y]) \in \mathfrak{I}\mathfrak{R} \times \mathfrak{I}\mathfrak{R} \mid [x] + [y] = k\},$$

representando a classe de equivalência associada às somas intervalares que resultam no valor real k .

A partir das informações acima apresentadas, a seguinte proposição pode ser facilmente demonstrada:

Proposição 3.8: $\forall k \in \mathfrak{R}, \forall ([x], [y]) \in \mathfrak{I}\mathfrak{R} \times \mathfrak{I}\mathfrak{R}, ([x], [y]) \in \overline{k} \Leftrightarrow w([x]) = 0 \wedge w([y]) = 0$.

Prova: Para demonstrar essa afirmação, basta observar que o diâmetro de um intervalo é linear com respeito à soma de intervalos, conforme apresentado no Anexo 1.2. ■

De fato, este resultado já é conhecido, mas o objetivo da discussão ora apresentada não é propriamente o de apresentar resultados novos sobre a operação de adição e sim o de salientar que a tal operação é a única que está propriamente definida sob o ponto de vista da extensão intervalar de um número real. Tal vantagem cai por terra, no entanto, pela evidência da não existência de um elemento simétrico definido através desta operação, visto que

$$[x] + (-[x]) = 0 \Leftrightarrow w([x] + (-[x])) = 0 \Leftrightarrow w([x]) + w(-[x]) = 0 \Leftrightarrow w([x]) = 0 \wedge w(-[x]) = 0,$$

fato que também não é novidade, mas que interpretado à luz da relação de equivalência apresentada na Proposição 3.7 torna evidente a impossibilidade de definição de uma estrutura algébrica que conserve amplamente as mesmas propriedades das operações entre números reais e seguindo a Definição 2.3.

Ao analisar o problema da falta de um elemento simétrico para definir a operação de subtração de intervalos, um argumento tipicamente referido seria o de aceitar – ou impor – que todos os intervalos simétricos fossem aproximações de zero. No entanto, uma análise mais acurada das classes de equivalência geradas pela relação acima demonstra que tais intervalos geram classes de equivalência distintas, o que inviabiliza esta estratégia.

Da mesma forma, poder-se-ia sugerir, por exemplo, a imposição da seguinte restrição:

$$\forall [x] \in \mathfrak{I}\mathfrak{R}, [x] - [x] = 0,$$

a qual é justificada a partir da extensão intervalar da avaliação da função real

$$y = x - x = 0,$$

para $x \in \mathfrak{R}$ e $y \in \mathfrak{R}$. Ora, esta imposição aparenta ser bastante razoável e restabelece uma propriedade importante da representação dos números reais, mas, infelizmente, contraria as conclusões da discussão apresentada nos parágrafos anteriores. Tal fato pode ser evidenciado pelo seguinte raciocínio:

Admitindo-se a validade da imposição acima formulada, isto é, $\forall [x] \in \mathcal{IR}, [x] - [x] = 0$, então uma contradição é gerada, por exemplo, na avaliação da expressão

$$[x] + [4;5] - [x].$$

Dada a associatividade da operação de adição, a expressão pode ser calculada diretamente por

$$[x] + [4;5] - [x] = [\underline{x} + 4; \bar{x} + 5] - [\underline{x}; \bar{x}] = [\underline{x} + 4 - \bar{x}; \bar{x} + 5 - \underline{x}] = [4 - (\bar{x} - \underline{x}); 5 + (\bar{x} - \underline{x})] = [4 - w([x]); 5 + w([x])].$$

Mas a operação de adição também é comutativa, de modo que

$$[x] + [4;5] - [x] = [4;5] + [x] - [x] = [4;5]$$

Ora, então

$$[4;5] = [4 - w([x]); 5 + w([x])],$$

o que é obviamente falso a menos que $w([x]) = 0$ ou a operação de adição perca uma de suas propriedades. Estas certamente não são alternativas viáveis, de modo geral, uma vez que provocam uma ruptura com relação à representação das operações de números reais por intervalos.

Considerações adicionais podem ser realizadas relativamente ao panorama ora apresentado. Primeiramente, essa discussão não é regalia da operação de subtração. Pelo contrário, também pode ser realizada sobre a operação de multiplicação de intervalos. Conforme descrito na seção anterior, assumindo-se a operação de multiplicação conforme a Definição 2.3, é gerado um conflito entre os resultados fornecidos pelas expressões $[x] * [x]$ e $[x]^2$. Retomando o exemplo apresentado para o caso do produto do número-intervalo $[x] = [-1;2]$ por si próprio, obtém-se

$$[x] * [x] = [-1;2] * [-1;2] = [-2;4]$$

enquanto que é desejável – e usualmente aceito – que

$$[x]^2 = [-1;2]^2 = [0;4].$$

Conforme referido anteriormente, uma análise pouco acurada desse conflito poderia levar ao questionamento da veracidade da igualdade

$$[x]^2 = [x] * [x],$$

fundamentada no argumento de que o resultado dessa expressão devesse ser obtido a partir da extensão intervalar da lei

$$y = x * x = x^2$$

para $x \in \mathcal{R}$ e $y \in \mathcal{R}$, raciocínio que replica o apresentado na imposição da proposição sobre a subtração entre intervalos iguais. De fato, conforme será apresentado nos próximos parágrafos, o problema remete a uma questão ainda mais básica sobre a definição da operação de multiplicação de intervalos.

O argumento fundamental do ponto de vista da abordagem usual, de envoltória intervalar, pode ser explicado através do seguinte exemplo, ainda considerando $[x] = [-1;2]$:

No contexto de envoltória intervalar de reais, o intervalo $[x]$ é utilizado para representar um certo número real⁵ limitado inferiormente por -1 e superiormente por 2 . Ora, este número é inicialmente indeterminado, mas, a partir do momento em que um valor real lhe é atribuído, esse valor deverá ser utilizado em todas as referências a essa variável, visto que elas representam o mesmo número real. Sob esta ótica, as seguintes inferências podem ser realizadas com relação ao resultado da expressão $[x] * [x]$:

⁵ possivelmente sujeito a imprecisões devidas a limitações de um ambiente computacional de ponto flutuante.

- se o valor assumido no intervalo $[x] = [-1;2]$ for -1 , então $[x]*[x]$ resultará $(-1)*(-1) = 1$;
- se o valor assumido no intervalo $[x] = [-1;2]$ for 0 , então $[x]*[x]$ resultará $(0)*(0) = 0$;
- se o valor assumido no intervalo $[x] = [-1;2]$ for 1 , então $[x]*[x]$ resultará $(1)*(1) = 1$;
- se o valor assumido no intervalo $[x] = [-1;2]$ for 2 , então $[x]*[x]$ resultará $(2)*(2) = 4$;

e, procedendo sempre da mesma forma, os demais valores são obtidos. Mais geralmente, se considerada oportunamente a notação de conjuntos, o resultado dessa operação seria dado por

$$[x]*[x] = \{x * x \mid x \in [-1;2]\} = [-1;2]*[-1;2] = [0;4].$$

Por outro lado, se considerada neste momento a expressão $[-1;2]*[x]$, ainda para $[x] = [-1;2]$, pela mesma linha de raciocínio, a identificação da variável intervalar $[x]$ com um valor real não tem o mesmo poder de determinação sobre os valores assumidos pelo coeficiente $[-1;2]$ dessa expressão. Assim,

- se o valor assumido em $[x] = [-1;2]$ for -1 , então $[-1;2]*[x]$ resultará $[-1;2]*(-1) = [-2;1]$;
- se o valor assumido em $[x] = [-1;2]$ for 0 , então $[-1;2]*[x]$ resultará $[-1;2]*(0) = [0;0]$;
- se o valor assumido em $[x] = [-1;2]$ for 1 , então $[-1;2]*[x]$ resultará $[-1;2]*(1) = [-1;2]$;
- se o valor assumido em $[x] = [-1;2]$ for 2 , então $[-1;2]*[x]$ resultará $[-1;2]*(2) = [-2;4]$;

e, da mesma forma, outros valores podem resultar. Generalizando, tem-se

$$[-1;2]*[x] = \{y * x \mid y \in [-1;2] \wedge x \in [-1;2]\} = [-1;2]*[-1;2] = [-2;4].$$

Neste ponto, dois conflitos são identificados:

1. Em ambos casos, a expressão algébrica avaliada é $[-1;2]*[-1;2]$, mas os resultados obtidos são diferentes!
2. A Definição 2.3, usual de multiplicação de intervalos, não contempla a situação do produto $[x]*[x]$ na forma como foi apresentada sob a semântica de envoltória intervalar.

Considerados os conflitos acima, uma solução simples e aparentemente eficaz é a redefinição da operação de multiplicação intervalar de tal sorte que a multiplicação de intervalos idênticos seja calculada conforme a situação exposta anteriormente. Essa alternativa é apresentada na Definição 3.4:

Definição 3.4 (Multiplicação de Intervalos Segundo a Interpretação de Envoltória Intervalar de Reais): Sejam $[x] \in I\mathfrak{R}$ e $[y] \in I\mathfrak{R}$. A multiplicação destes intervalos é definida por

$$[x]*[y] = \begin{cases} \{a * b \in \mathfrak{R} \mid a \in [x] \wedge b \in [y]\} & , \text{ se } [x] \neq [y] \\ \{a^2 \in \mathfrak{R} \mid a \in [x]\} & , \text{ se } [x] = [y] \end{cases}$$

No entanto, é relativamente simples verificar que essa definição não resolve os conflitos em questão, mas apenas os torna menos evidentes. Com efeito, ainda considerando-se $[x] = [-1;2]$, pelo mesmo raciocínio dos parágrafos anteriores, o resultado esperado para a avaliação da expressão

$$[x] * ([x] - [1;1])$$

segundo a interpretação de envoltória intervalar deveria ser

$$[x] * ([x] - [1;1]) = \{x * (x - 1) \mid x \in [-1;2]\} = [-\frac{1}{4}; 2],$$

visto que, por exemplo:

- se o valor assumido no intervalo $[x] = [-1;2]$ for -1 , então $[x] * ([x] - [1;1])$ resultará $(-1) * (-1 - 1) = 2$;
- se o valor assumido no intervalo $[x] = [-1;2]$ for 0 , então $[x] * ([x] - [1;1])$ resultará $(0) * (0 - 1) = 0$;
- se o valor assumido no intervalo $[x] = [-1;2]$ for $\frac{1}{2}$, então $[x] * ([x] - [1;1])$ resultará $(\frac{1}{2}) * (\frac{1}{2} - 1) = -\frac{1}{4}$;
- se o valor assumido no intervalo $[x] = [-1;2]$ for 2 , então $[x] * ([x] - [1;1])$ resultará $(2) * (2 - 1) = 2$.

Em particular, observa-se que, sob o ponto de vista meramente algébrico, a expressão analítica associada a este raciocínio é

$$[x] * ([x] - [1;1]) = [-1;2] * ([-1;2] - [1;1]) = [-1;2] * [-2;1],$$

o que significa que segundo a interpretação de envoltória de reais para a expressão acima

$$[-1;2] * [-2;1] = [-\frac{1}{4}; 2].$$

A Figura 3.2 ilustra o raciocínio apresentado.

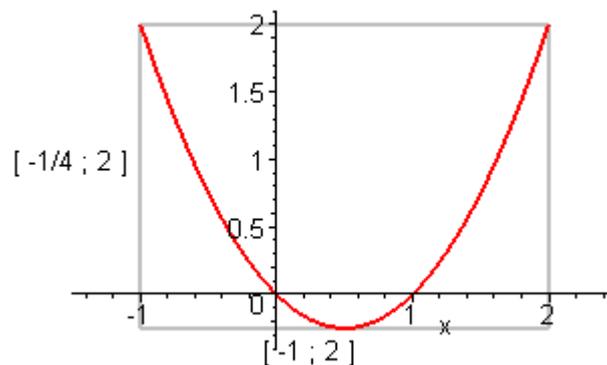


FIGURA 3.2 – Avaliação intervalar da função definida por $f(x) = x * (x - 1)$ para $-1 \leq x \leq 2$.

No entanto, se aplicada a Definição 3.4 obtém-se

$$[x] * ([x] - [1;1]) = [-1;2] * [-2;1] = [-4;2],$$

que não resulta na envoltória intervalar esperada.

À consideração anterior acresce-se a observação de que a avaliação da expressão

$$[-1;2] * ([x] - [1;1])$$

resulta em

$$[-1;2] * ([x] - [1;1]) = \{y * (x - 1) \mid y \in [-1;2] \wedge x \in [-1;2]\} = [-1;2] * [-2;1] = [-4;2],$$

enfatizando o fato de que a Definição 3.4 é inadequada para o intuito da representação da operação de multiplicação de intervalos como envoltória de números reais.

Os argumentos expostos nos parágrafos precedentes demonstram de forma suficiente que não é efetivamente o produto de um intervalo por si mesmo que necessita de redefinição, mas sim o de intervalos que sejam originariamente dependentes da mesma fonte de imprecisão. Mais que isso, esses argumentos pontuam o fato de que a discussão sobre a definição da multiplicação de intervalos é muito mais **semântica** que meramente algébrica. Com efeito, sumariando os exemplos apresentados, as seguintes observações fundamentais podem ser relacionadas:

- No primeiro caso, a expressão $[x]*[x]$ representa o produto de um intervalo por outro intervalo gerado a partir de si próprio – de fato, ele mesmo. Ou seja, a expressão representa tipicamente o produto de dois intervalos de mesma **origem**;
- Já no caso da expressão $[-1;2]*[x]$, o coeficiente $[-1;2]$ é resultado de um processo de medição ou modelagem que tem **origem diferente** do valor assumido pela variável $[x]$. O que efetivamente ocorre no exemplo é a coincidência de domínio entre o coeficiente e a variável intervalar;
- Para a expressão $[x]*([x]-[1;1])$, o resultado desejado é o obtido quando a segunda ocorrência da variável $[x]$ é subordinada a cada valor real assumido para a primeira ocorrência dessa variável. No entanto, esse fato – ou desejo – independe dos efetivos valores dos intervalos envolvidos. De fato, no exemplo em questão a expressão puramente algébrica do produto realizado é $[-1;2]*[-2;1]$. No entanto, estes intervalos são correlacionados, pois ambos são dependentes da imprecisão de $[x]$.

A questão da **origem** dos intervalos é fundamental para a compreensão da dimensão semântica dessa discussão. Assim, neste texto assume-se a seguinte definição:

Definição 3.5 (Origem de um Intervalo): Sejam $[x] \in \mathfrak{I}\mathfrak{R}$ e $[y] \in \mathfrak{I}\mathfrak{R}$. Diz-se que $[y]$ tem a mesma origem de $[x]$ se e somente se, no modelo que representa o sistema em estudo, $[y]$ é obtido funcionalmente a partir de $[x]$.

A Definição 3.5 implica não apenas a existência de uma função capaz de mapear o intervalo $[x]$ no intervalo $[y]$, mas também a necessidade de conhecimento sobre o modelo matemático utilizado para a representação do sistema em estudo. Tal definição é coerente, em particular, com o resultado esperado para o exemplo da avaliação da expressão $[x]*([x]-[1;1])$, na qual o fator entre parênteses é totalmente determinado a partir do valor do intervalo $[x]$ (e, portanto, possui mesma origem que $[x]$).

Dos exemplos anteriormente apresentados observa-se ainda que em momento algum a veracidade da igualdade

$$[x]^2 = [x] * [x]$$

é questionada. A real causa do aparecimento da divergência de resultados é a imposição da manutenção de uma propriedade válida para números reais sobre a operação de multiplicação entre intervalos, entes que são formados por números reais, mas que **excedem** os números

reais. Isto é, a exigência de que o produto de um intervalo por si próprio resulte em um intervalo contendo apenas elementos não negativos implica na não validade da Definição 2.3 – ou da Definição 3.4 – e impele ao debate ora apresentado. Em particular, essa interpretação de intervalo com uma forte associação a números reais impõe restrições de tal sorte que a multiplicação intervalar deveria ser apresentada, por exemplo, conforme a Definição 3.6, a seguir:

Definição 3.6 (Multiplicação de Envoltórias Intervalares de Reais): Sejam $[x] \in \mathcal{IR}$ e $[y] \in \mathcal{IR}$. A multiplicação destes intervalos é definida por

$$[x] * [y] = \begin{cases} \{a * b \in \mathcal{R} \mid a \in [x] \wedge b \in [y]\} & , \text{ se } [x] \text{ tem origem diferente de } [y] \\ \{a * f(a) \in \mathcal{R} \mid a \in [x]\} & , \text{ se } [x] \text{ tem mesma origem que } [y] \end{cases}$$

onde a definição da origem dos intervalos $[x]$ e $[y]$ é função unicamente do problema modelado conforme a Definição 3.5, e f é a função definida pela semelhança de origem entre $[x]$ e $[y]$ de tal forma que $[y] = f([x])$.

Na Definição 3.6, a referência à origem dos intervalos é a discutida nos exemplos precedentes. Esta situação impõe a exigência pouco prática da manutenção da ciência da origem de cada intervalo em um modelo computacional. No entanto, a definição é perfeitamente coerente com as idéias propostas por Moore [MOO 66] ao referir os benefícios de se operar com expressões intervalares nas quais “*cada variável é avaliada somente uma vez*”; em particular, Moore refere o benefício de ser gerado o intervalo de menor diâmetro possível, associado à avaliação da imagem mínima e máxima de uma função real contínua de argumento real. Ora, tais benefícios são fruto da interpretação estrita de um intervalo como uma envoltória de números reais, respeitando as restrições que tal semântica exige, tais como a redefinição da operação clássica de multiplicação de modo a rastrear a origem dos intervalos.

Similarmente às discussões anteriormente apresentadas, o mesmo expediente poderia ser desenvolvido sobre a operação de divisão de intervalos, pela imposição do seguinte resultado:

$$\forall [x] \in \mathcal{IR}, 0 \notin [x] \rightarrow \frac{[x]}{[x]} = 1.$$

Em verdade, esta imposição seria decorrente da própria redefinição da operação de multiplicação conforme a Definição 3.6. Particularmente, se considerado o exemplo apresentado por Moore [MOO 66] e referido anteriormente, ter-se-ia que

$$\frac{[x]}{[x] - 2} = \left\{ \frac{x}{x - 2} \mid x \in [10;12] \right\} = \left[\frac{6}{5}; \frac{5}{4} \right] = [1.20; 1.25].$$

Pragmaticamente, observa-se que desprovida da questão semântica, a discussão acima torna-se inviável, visto que o significado das operações torna-se vago. Ademais, do ponto de vista estritamente algébrico, a discussão mostra que a introdução das imposições apresentadas para as operações de subtração, multiplicação e divisão intervalar diretamente sobre a Definição 2.3 são incoerentes, à exceção do caso de intervalos degenerados, isto é, números reais. Enfim, fica evidente que a solução desse impasse encontra-se:

- na compreensão de que as operações apresentadas na Definição 2.3 destinam-se à manipulação algébrica de números-intervalo, mas **não** se prestam à manipulação de intervalos segundo a interpretação de envoltória de números reais; ou

- na redefinição dessas operações aritméticas, de modo a garantir a validade das imposições acima, observando-se que nenhuma delas tem menor importância e que, portanto, não é razoável exigir que

$$\forall [x] \in \mathfrak{I}, [x] * [x] \geq 0$$

sem exigir que

$$\forall [x] \in \mathfrak{I}, [x] - [x] = 0$$

e que

$$\forall [x] \in \mathfrak{I}, 0 \notin [x] \rightarrow \frac{[x]}{[x]} = 1.$$

De toda forma, os expedientes descritos acima são muito mais coerentes do que o simples questionamento da veracidade de igualdades tais como

$$[x]^2 = [x] * [x].$$

Este fato é verdadeiro porque permite a manutenção da coerência estrutural com o significado algébrico de intervalo conforme é usualmente conhecido na ciência Matemática, o que é muito mais razoável que a imposição arbitrária de resultados locais e cujos efeitos se contrapõem às definições das operações entre intervalos na sua forma clássica.

Concluindo, as operações de subtração, de multiplicação e de divisão de intervalos estão bem definidas se considerada a interpretação de **número-intervalo**, mas **não se aplicam para a interpretação de envoltória intervalar de reais**, uma vez que não comungam das propriedades básicas das operações entre números reais. Conforme a argumentação acima, qualquer iniciativa no sentido de impor restrições sobre as operações e que não envolvam a modificação das definições destas operações resultará sem fundamentação algébrica. Se for desejo representar o comportamento de números reais por intermédio de intervalos, esta representação deverá passar pela utilização de números-intervalo ou pela redefinição das operações algébricas entre intervalos, à exceção da adição, única operação aritmética bem definida para a extensão de números reais através da semântica de envoltória intervalar. Em particular, cabe observar que essas conclusões são coerentes com a base de argumentação de Markov [MAR 95, MAR 96, MAR 99b].

3.4 Semântica Associada à Definição de Intervalo no Presente Trabalho

Considerados os argumentos apresentados nas seções anteriores e, principalmente, o critério de manutenção de propriedades estruturais algébricas, a opção pela semântica de número-intervalo mostra-se mais coerente, sendo esta a forma escolhida de abordagem na maior parte deste trabalho. De fato, as operações apresentadas na Definição 2.3 – isto é, as definições clássicas para as operações entre intervalos – consideram um intervalo como um ente único, isto é, um conjunto de valores que carrega uma unidade de informação. Essa semântica será a utilizada nos capítulos 4, 5 e 6.

Pelos mesmos motivos, o restante do trabalho não considerará questões como a redefinição das operações entre intervalos do ponto de vista de envoltórias intervalares. Ainda assim, o Capítulo 7 apresentará resultados coerentes com a semântica de número-intervalo e que permitem o cálculo da envoltória intervalar de equações polinomiais que envolvam argumentos reais.

3.5 Comentários Finais

O capítulo apresentou uma breve visão do ambiente de inserção deste trabalho, juntamente com uma discussão objetivando a compreensão das diferentes semânticas associadas à definição de intervalo. As possíveis interpretações para este ente matemático, naturalmente dual (conjunto e número), pontuam diferenças fundamentais que não são claras na literatura de referência. Em particular, a discussão contribui no sentido de elucidar os seguintes aspectos:

- As operações entre intervalos são definidas classicamente a partir da interpretação de número-intervalo;
- A interpretação desejada para intervalo em Computação Científica é a de envoltória de reais.

A discussão realizada demonstra a existência do seguinte conflito:

- As operações definidas a partir da interpretação de número-intervalo são assumidas como aplicáveis para a interpretação como envoltória de um número real;
- No entanto, as propriedades exigidas para as operações entre envoltórias de números reais não se verificam segundo a definição de número-intervalo, indicando que as operações não são aplicáveis na forma desejada.

A solução do conflito acima é complexa, mas parte da identificação de sua existência, de sua compreensão e da seleção de interpretação e operações **únicas e coerentes** para o conceito de intervalo. Em particular, a opção realizada neste trabalho é pela interpretação de número-intervalo, coerente com as operações aritméticas usuais entre intervalos.

O próximo capítulo apresenta outra contribuição deste trabalho, baseada no conceito de número-intervalo e que permite determinar univocamente a expressão algébrica que define a multiplicação de dois intervalos. Esse resultado fundamental, aliado à discussão semântica ora apresentada, servirá de base para o desenvolvimento dos demais resultados deste trabalho.

4 Algoritmização da Multiplicação Intervalar

Este capítulo apresenta como contribuições um mapeamento de \mathcal{IR} que permite a identificação dos diferentes comportamentos associados a elementos desse conjunto, e um teorema fundamental, através do qual as expressões algébricas que representam o resultado de uma multiplicação de números-intervalo são determinadas e classificadas. Esse teorema servirá de base para todos os demais resultados deste trabalho.

4.1 Definição e Visualização da Cobertura de \mathcal{IR}

Uma das primeiras partições de \mathcal{IR} conhecidas é a sugerida por Moore [MOO 66], baseada nos sinais dos extremos dos intervalos: ++, +- e --. Conforme anteriormente apresentado no Quadro 2.1, esta partição permitiu-lhe definir expressões otimizadas para o cálculo da multiplicação de intervalos, sendo que apenas um de nove casos apresentados necessita de mais de dois produtos de reais para ser obtido.

Franciosi [FRA 99] estendeu o mapeamento sugerido por Moore através da partição de \mathcal{IR} em quatro octantes, numerados de I a IV no sentido anti-horário, conforme mostrado na Figura 4.1. Esta divisão mostrou-se interessante do ponto de vista gráfico, uma vez que permitiu a identificação de diferentes comportamentos associados aos números-intervalo de cada região, e auxiliou na visualização e compreensão das operações de adição e de multiplicação de intervalos. A principal diferença desse mapeamento em relação ao apresentado por Moore é a consideração da relação entre os valores do ponto médio e do diâmetro do intervalo.

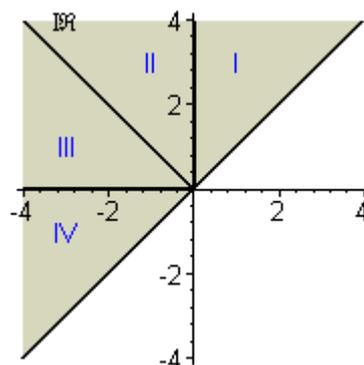


FIGURA 4.1 – Representação gráfica de \mathcal{IR} segundo Franciosi [FRA 99].

No presente trabalho a cobertura proposta para \mathcal{IR} é bastante similar à apresentada na Figura 4.1, mas destaca quatro regiões adicionais, conforme a Definição 4.1:

Definição 4.1 (Cobertura de \mathbb{R} com Separação de Fronteiras): Seja $[x] \in \mathbb{R}$. Então $[x]$ pertence a somente uma das oito regiões, denominadas O, I, BI, II, BII, III, BIII e IV, conforme especificado a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{l} [x] \in O \quad , \quad \underline{x} = \bar{x} = 0 \\ [x] \in I \quad , \quad 0 < \underline{x} \leq \bar{x} \\ [x] \in BI \quad , \quad 0 = \underline{x} < \bar{x} \\ [x] \in II \quad , \quad (\underline{x} < 0 < \bar{x}) \wedge (|\underline{x}| < \bar{x}) \\ [x] \in BII \quad , \quad (\underline{x} < 0 < \bar{x}) \wedge (|\underline{x}| = \bar{x}) \\ [x] \in III \quad , \quad (\underline{x} < 0 < \bar{x}) \wedge (|\underline{x}| > \bar{x}) \\ [x] \in BIII \quad , \quad \underline{x} < \bar{x} = 0 \\ [x] \in IV \quad , \quad \underline{x} \leq \bar{x} < 0 \end{array} \right. \text{ ou, } \left\{ \begin{array}{l} [x] \in O \quad , \quad \underline{x} = \bar{x} = 0 \\ [x] \in I \quad , \quad m([x]) > 0 \wedge \underline{x} > 0 \\ [x] \in BI \quad , \quad m([x]) > 0 \wedge \underline{x} = 0 \\ [x] \in II \quad , \quad m([x]) > 0 \wedge \underline{x} < 0 \\ [x] \in BII \quad , \quad m([x]) = 0 \wedge \bar{x} > 0 \\ [x] \in III \quad , \quad m([x]) < 0 \wedge \bar{x} > 0 \\ [x] \in BIII \quad , \quad m([x]) < 0 \wedge \bar{x} = 0 \\ [x] \in IV \quad , \quad m([x]) < 0 \wedge \bar{x} < 0 \end{array} \right.$$

A representação gráfica dessa cobertura de \mathbb{R} é mostrada na Figura 4.2.

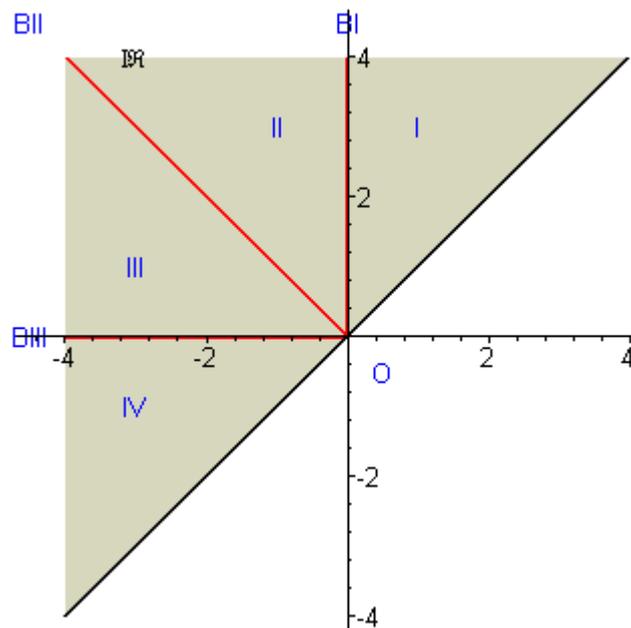


FIGURA 4.2 – Representação da cobertura de \mathbb{R} utilizada neste trabalho.

A partição proposta mantém as referências às regiões sugeridas por Franciosi, exceto pela separação dos elementos de fronteira em regiões próprias (BI, BII e BIII). Mesmo assim, a denominação é mantida de modo a simplificar a conexão dos resultados deste trabalho com os da autora e com o sentido usual de numeração anti-horário adotado na geometria cartesiana. Observe-se ainda que $[0]$ é considerado como uma região distinta (O). A justificativa para a identificação dessas quatro novas destas regiões é a introdução de informações unívocas sobre a composição do intervalo. Por exemplo, um intervalo da região BI será necessariamente da forma $[0; \bar{x}]$, com $\bar{x} > 0$. Informações dessa natureza são extremamente interessantes do ponto de vista algorítmico, pois reduzem a incerteza sobre a informação representada e permitem a validação e a correção de certas operações, contribuindo para a geração de resultados mais exatos.

Partindo-se de um elemento da região I e seguindo até um elemento da região IV tem-se uma varredura de intervalos com relação ao volume de contribuição de seus componentes positivos e negativos e que é coerente com as coberturas anteriormente referidas. Por este motivo, a seguinte nomenclatura é adotada:

Definição 4.2 (Nomenclatura para a Cobertura de $\mathcal{I}\mathfrak{R}$ pela Contribuição de Sinais): Seja $[x] \in \mathcal{I}\mathfrak{R}$. Então:

- $[x] \in O \Rightarrow [x]$ é dito nulo;
- $[x] \in I \Rightarrow [x]$ é dito estritamente positivo;
- $[x] \in BI \Rightarrow [x]$ é dito não negativo;
- $[x] \in II \Rightarrow [x]$ é dito assimétrico positivo;
- $[x] \in BII \Rightarrow [x]$ é dito simétrico;
- $[x] \in III \Rightarrow [x]$ é dito assimétrico negativo;
- $[x] \in BIII \Rightarrow [x]$ é dito não positivo;
- $[x] \in IV \Rightarrow [x]$ é dito estritamente negativo.

Adicionalmente:

- um intervalo pertencente à região I ou à região BI é referido como positivo;
- um intervalo pertencente à região II, à região BII ou à região III é dito bivalente;
- um intervalo pertencente à região BIII ou à região IV é referido como negativo.

Essa nomenclatura permite facilmente identificar o comportamento associado a cada número-intervalo. Ela será utilizada quando necessária, no decorrer deste trabalho.

Da mesma forma, agrega-se a seguinte definição relativa ao mapeamento ora apresentado:

Definição 4.3 (Região Oposta): Uma região do mapeamento apresentado na Definição 4.1 é dita oposta de outra conforme o Quadro 4.1:

Região de $\mathcal{I}\mathfrak{R}$	Região Oposta
O	O
I	IV
BI	BIII
II	III
BII	BII
III	II
BIII	BI
IV	I

QUADRO 4.1 – Regiões opostas segundo o mapeamento de $\mathcal{I}\mathfrak{R}$ apresentado na Definição 4.1.

Coerente com o resultado apresentado por Franciosi [FRA 99], a Definição 4.3 sugere a presença de um eixo de simetria sobre o segmento de reta de lei $y = -x$, $x \leq 0$, que percorre as regiões O e BII.

O relacionamento entre intervalos de uma região com intervalos de sua região oposta pode ser realizado através do seguinte resultado:

Proposição 4.1 (Relação entre Números-Intervalo de Regiões Opostas): Seja $[x] \in \mathcal{IR}$. Então $-[x] = [-1; -1] * [x]$ pertence à região oposta de $[x]$.

Prova: É imediata das definições 3.1 e 4.3. ■

A cobertura apresentada na Definição 4.1 permite a identificação de um resultado fundamental, descrito na seção seguinte. Através desse resultado é possível determinar a expressão algébrica resultante da multiplicação de dois intervalos. Tais expressões algébricas tornam possível a geração de algoritmos para o cálculo de soluções de equações intervalares, conforme será visto nos capítulos seguintes.

4.2 Classificação e Cálculo da Multiplicação Intervalar

Esta seção apresenta um teorema pelo qual a multiplicação intervalar é definida com base na partição de \mathcal{IR} apresentada na Definição 4.1. A forma de cálculo da multiplicação intervalar é representada de maneira algorítmica, através da combinação de casos, permitindo o efetivo mapeamento das expressões que definem os intervalos resultantes e das regiões a que estes pertencerão.

Teorema 4.1 (Classificação e Cálculo da Multiplicação Intervalar): Sejam $[x] \in \mathcal{IR}$ e $[y] \in \mathcal{IR}$. Então o produto $[x] * [y]$ é calculado conforme o Quadro 4.2 e pertence à região especificada no Quadro 4.3.

[x]*[y]		[y]							
		O	I	BI	II	BII	III	BIII	IV
[x]	O	[0;0]							
	I	$[\underline{x} * \underline{y}; \bar{x} * \bar{y}]$	$[\bar{x} * \underline{y}; \bar{x} * \bar{y}]$					$[\bar{x} * \underline{y}; \underline{x} * \bar{y}]$	
	BI	$[0; \bar{x} * \bar{y}]$					$[\bar{x} * \underline{y}; 0]$		
	II			$[\min\{\underline{x} * \bar{y}, \bar{x} * \underline{y}\}; \bar{x} * \bar{y}]$		$[\bar{x} * \underline{y}; \max\{\underline{x} * \underline{y}, \bar{x} * \bar{y}\}]$			
	BII	$[\underline{x} * \bar{y}; \bar{x} * \bar{y}]$				$[\underline{x} * \bar{y}; \bar{x} * \bar{y}] =$ $[\bar{x} * \underline{y}; \bar{x} * \bar{y}] =$ $[\underline{x} * \bar{y}; \underline{x} * \underline{y}] =$ $[\bar{x} * \underline{y}; \underline{x} * \underline{y}]$		$[\bar{x} * \underline{y}; \underline{x} * \underline{y}]$	
	III			$[\underline{x} * \bar{y}; \max\{\underline{x} * \underline{y}, \bar{x} * \bar{y}\}]$		$[\min\{\underline{x} * \bar{y}, \bar{x} * \underline{y}\}; \underline{x} * \underline{y}]$			
	BIII	$[\underline{x} * \bar{y}; 0]$					$[0; \underline{x} * \underline{y}]$		
	IV	$[\underline{x} * \bar{y}; \bar{x} * \underline{y}]$					$[\underline{x} * \bar{y}; \underline{x} * \underline{y}]$		$[\bar{x} * \bar{y}; \underline{x} * \underline{y}]$

QUADRO 4.2 – Regras operacionais para o cálculo do produto [x]*[y].

[x]*[y]		[y]							
		O	I	BI	II	BII	III	BIII	IV
[x]	O	O							
	I		I						IV
	BI			BI				BIII	
	II				II		III		
	BII					BII			
	III						II		
	BIII							BI	
	IV		IV						I

QUADRO 4.3 – Regras para a determinação da região do intervalo $[x]*[y]$.

Prova do Teorema 4.1: A prova é gerada exaustivamente, pela análise algébrica de todas as combinações, individualmente. Este resultado é descrito no Anexo 1.3. ■

Em seguida serão apresentados comentários pertinentes a este resultado e relevantes para o desenvolvimento do restante deste trabalho.

4.3 Comentários Sobre a Classificação e a Formulação Propostas

Esta seção apresenta alguns comentários relevantes sobre a contribuição fornecida pelo Teorema 4.1. Em particular são consideradas questões como a identificação de regras de sinais e apresentados resultados associados ao custo computacional de aplicação desse teorema.

4.3.1 Aspectos Qualitativos do Teorema 4.1 Sobre a Classificação de Números-Intervalo

O Teorema 4.1 garante unicidade e controle sobre a execução e a classificação de multiplicações de números-intervalo. A análise dos quadros 4.2 e 4.3 revela diversos tipos de simetrias, indicando uma estrutura estável no que se refere aos resultados gerados pela operação de multiplicação intervalar. Parte das simetrias identificadas é resultado da comutatividade da operação de multiplicação, de tal sorte que, fazendo uso de uma comparação livre, pode-se dizer que os quadros 4.2 e 4.3 equivalem a “matrizes” simétricas, no que se refere à forma das expressões a partir dos intervalos componentes. Assim, a informação contida na parte triangular superior é idêntica à contida abaixo da “diagonal principal”, bastando que sejam comutadas as variáveis. As simetrias mais relevantes, porém, são identificadas ao longo da “diagonal principal” dessas “matrizes”: A análise permite evidenciar – e garantir algebricamente, através das provas apresentadas neste capítulo – regras lógicas similares às regras de sinais entre números reais. Do Quadro 4.3 observa-se, por exemplo, que a região associada à multiplicação de $[x] \in I$ com $[y] \in I$, $[\underline{x} * \underline{y}; \bar{x} * \bar{y}]$, é a mesma da associada à multiplicação de elementos da região IV, $[\bar{x} * \bar{y}; \underline{x} * \underline{y}]$. Da mesma forma essa similaridade pode ser verificada entre o produto de elementos da região II e o de elementos da região III; tornando-se mais fraca conforme é observada alguma outra diagonal paralela à principal. Como resultado de tais observações, pode-se gerar regras de classificação dos produtos obtidos nas regiões designadas. Em particular:

- A multiplicação de um intervalo qualquer por $[0]$ reduz-se a $[0]$;
- A multiplicação de dois intervalos estritamente positivos gera um novo intervalo estritamente positivo;
- A multiplicação de dois intervalos não negativos gera um novo intervalo não negativo;
- A multiplicação de dois intervalos assimétricos positivos gera um novo intervalo assimétrico positivo;
- A multiplicação de um intervalo simétrico com qualquer intervalo gera um novo intervalo simétrico;
- A multiplicação de dois intervalos assimétricos negativos gera um novo intervalo assimétrico positivo;
- A multiplicação de dois intervalos não positivos gera um novo intervalo não negativo;
- A multiplicação de dois intervalos estritamente negativos gera um novo intervalo estritamente positivo;
- A multiplicação de um intervalo positivo com um intervalo negativo gera um intervalo negativo.

Outras regras similares podem ser derivadas da mesma maneira a partir dos quadros 4.2 e 4.3.

Os resultados apresentados são coerentes com os já classicamente conhecidos, conforme esperado. No entanto, apresentam a vantagem de uma visão mais detalhada de propriedades e simetrias, permitindo a identificação de regras auxiliares como as acima. Tais regras podem ser extremamente úteis no desenvolvimento de algoritmos eficientes para o cálculo do produto de intervalos, dentre outras aplicações.

4.3.2 Aspectos Associados à Complexidade do Teorema 4.1

Do ponto de vista computacional, considerações de complexidade em termos de número de comparações e de multiplicações de reais podem ser realizadas. A determinação do caso a ser computado exige, no pior caso, 6, e em média, 4.25 comparações de sinal⁶. No entanto, para o cálculo do produto resultante:

- 15 casos não requerem multiplicações de números reais;
- 12 casos requerem 1 multiplicação de números reais;
- 33 casos requerem 2 multiplicações de números reais;
- 04 casos requerem 3 multiplicações de números reais.

Assim, no pior caso, são necessárias 3 multiplicações de reais e, em média, 1.4, aproximadamente.

Comparado à forma apresentada no Quadro 2.1, o cálculo da multiplicação de intervalos do Teorema 4.1 gera um maior número de comparações, mas reduz o número de multiplicações de reais, principalmente no caso médio. Tal redução pode ser interpretada como uma vantagem computacional se considerado o fato de que o custo de uma multiplicação seja maior que o de uma comparação. Além disso, dentre os 9 casos descritos por Moore [MOO 66, MOO 79], os 8 que requerem somente 2 multiplicações de números reais compõem apenas 16 dos 64 casos descritos no Teorema 4.1, ou seja, 25% do total. Se desconsiderados os casos triviais, o resultado de Moore cobre cerca de 50% dos casos apresentados e, ainda

⁶ 272 comparações em 64 casos.

assim, não traz informação que identifique a região a que o intervalo resultante da multiplicação pertencerá.

Os quatro casos que ainda demandam a escolha entre máximos ou mínimos de multiplicações alternativas são fruto da comutatividade da operação de multiplicação. Estes casos ocorrem pontualmente no caso da operação de intervalos das regiões II e III, ou seja, intervalos que incluem troca de sinal entre os extremos, mas cujo ponto médio é diferente de 0. O efeito prático da presença destes casos é a necessidade de imposição de hipóteses adicionais para a determinação da expressão analítica do produto. A título de ilustração, seja $[x] \in \text{II}$; então, o produto $[-5;3]*[x]$ poderá resultar

$$[-5;3]*[x] = \begin{cases} [-5*\bar{x};3*\bar{x}] & \text{se } -5*\underline{x} < 3*\bar{x} \\ [-5*\bar{x};-5*\underline{x}] & \text{se } -5*\underline{x} \geq 3*\bar{x} \end{cases}$$

o que implica a divisão do raciocínio em duas partes, conforme as hipóteses indicadas acima. Então, por exemplo, se $[x] = [-1;2]$, o produto resultará

$$[-5;3]*[x] = [-5;3]*[-1;2] = [-5*2;3*2] = [-10;6],$$

pois $-5*(-1) < 3*2$. No entanto, se $[x] = [-1.5;2]$, o produto resultará

$$[-5;3]*[x] = [-5;3]*[-1.5;2] = [-5*2;-5*(-1.5)] = [-10;7.5],$$

pois $-5*(-1.5) \geq 3*2$.

Essa necessidade de divisão do raciocínio é mais fortemente sentida se considerada uma expressão analítica de maior porte. Por exemplo, se considerada uma expressão polinomial, cada monômio que apresente o produto de números-intervalo das regiões II ou III será responsável pela subdivisão do raciocínio em dois casos possíveis. Dessa observação, o seguinte teorema pode ser enunciado:

Teorema 4.2: Sejam $\forall i \in \mathbf{N}, [a_i] \in \text{II} \vee [a_i] \in \text{III}, [x_i] \in \mathcal{IR}$. Se $k \in \mathbf{N}$ é o número de intervalos dentre $[x_i]$ pertencentes às regiões II ou III, então a expressão $\sum_{i=1}^n [a_i]*[x_i]$ é analiticamente determinada pela análise de 2^k casos.

Prova do Teorema 4.2: A prova apresentada é indutiva, explorando o efeito da inclusão de um termo com as características enunciadas no polinômio em questão. Os detalhes são apresentados no Anexo 1.4. ■

O resultado apresentado no Teorema 4.2 será necessário posteriormente, para a análise da complexidade dos algoritmos apresentados no Capítulo 6.

Até o presente não foi possível vislumbrar como a modificação da partição das regiões II ou III poderia solucionar o problema da geração exponencial de casos a verificar. Possivelmente a solução dependa de outras hipóteses não diretamente associadas à forma de cobertura proposta – ou efetivamente não exista –, visto que os esforços realizados no sentido da obtenção de uma solução resultaram infrutíferos. Convém enfatizar que a forma sugerida no Quadro 2.1 apresenta o mesmo problema para o caso da multiplicação de intervalos incluindo zero, com a desvantagem de não apresentar a classificação do intervalo resultante.

Finalmente, cabe observar que a informação trazida pelo Teorema 4.1 é fundamental para diversos desenvolvimentos teóricos e aplicados na pesquisa da aritmética intervalar. Em particular, ao permitir a determinação e a classificação das expressões algébricas que compõem o intervalo resultante de um produto $[x]*[y]$, este teorema abre a possibilidade de

obtenção de outros resultados algébricos para números-intervalo, bem como permite o desenvolvimento de algoritmos que calculem a solução de equações intervalares. Tais resultados serão comentados nos capítulos seguintes.

4.4 Corolários para o Cálculo do Diâmetro e do Ponto Médio da Multiplicação de Números-Intervalo

Dois resultados imediatos obtidos a partir do Teorema 4.1 são os apresentados a seguir. Através desses resultados é possível determinar a expressão algébrica do diâmetro e do ponto médio de uma multiplicação de números-intervalo, complementando as desigualdades já conhecidas e apresentadas, por exemplo, na Proposição 2.7.

Corolário 4.1 (Cálculo do Diâmetro do Produto de Números-Intervalo): Sejam $[x] \in \mathcal{IR}$ e $[y] \in \mathcal{IR}$. Então o diâmetro do produto $[x]*[y]$ é calculado conforme o Quadro 4.4.

$w([x]*[y])$		[y]							
		O	I	BI	II	BII	III	BIII	IV
[x]	O	0							
	I	$\bar{x} * w([y]) + \underline{y} * w([x])$ = $\underline{x} * w([y]) + \bar{y} * w([x])$	$\bar{x} * w([y])$					$\underline{x} * w([y]) - \underline{y} * w([x])$ = $\bar{x} * w([y]) - \bar{y} * w([x])$	
	BI		$w([x]) * w([y])$				$w([x]) * w([y])$		
	II			$\max\{\bar{x} * w([y]), \bar{y} * w([x])\}$		$\max\{\bar{x} * w([y]), -\underline{y} * w([x])\}$			
	BII	$\bar{y} * w([x])$			$[x] * w([y])$ = $[y] * w([x])$			$-\underline{y} * w([x])$	
	III			$\max\{-\underline{x} * w([y]), \bar{y} * w([x])\}$		$\max\{-\underline{x} * w([y]), -\underline{y} * w([x])\}$			
	BIII		$w([x]) * w([y])$				$w([x]) * w([y])$		
	IV	$-\underline{x} * w([y]) + \underline{y} * w([x])$ = $-\bar{x} * w([y]) + \bar{y} * w([x])$				$-\underline{x} * w([y])$		$-\bar{x} * w([y]) - \underline{y} * w([x])$ = $-\underline{x} * w([y]) - \bar{y} * w([x])$	

QUADRO 4.4 – Regras operacionais para o cálculo do diâmetro do produto $[x]*[y]$.

Prova: A prova deste corolário decorre da aplicação da Definição 2.7 sobre o Quadro 4.2. Apesar de simples, ela é omitida com o objetivo de não tornar o volume excessivamente longo. ■

Pela análise do Quadro 4.4, observa-se a manutenção do mesmo tipo de simetrias evidenciadas no Teorema 4.1. Em particular, as expressões associadas aos casos dos produtos entre elementos das regiões I e IV com elementos das regiões BI e BIII são as mesmas das expressões envolvendo produtos de elementos da região BII.

Corolário 4.2 (Cálculo do Ponto Médio do Produto de Números-Intervalo): Sejam $[x] \in \mathfrak{I}\mathfrak{R}$ e $[y] \in \mathfrak{I}\mathfrak{R}$. Então o ponto médio do produto $[x]*[y]$ é calculado conforme o Quadro 4.5.

$m([x]*[y])$		[y]							
		O	I	BI	II	BII	III	BIII	IV
[x]	O	0							
	I	$\frac{\underline{x} * \underline{y} + \bar{x} * \bar{y}}{2}$		$\bar{x} * m([y])$					$\frac{\bar{x} * \underline{y} + \underline{x} * \bar{y}}{2}$
	BI	$\frac{\bar{x} * \bar{y}}{2} = 2 * m([x]) * m([y])$					$\frac{\bar{x} * \underline{y}}{2} = 2 * m([x]) * m([y])$		
	II			$\min\{\bar{y} * m([x]), \bar{x} * m([y])\}$				$\max\{\underline{y} * m([x]), \bar{x} * m([y])\}$	
	BII	$\bar{y} * m([x])$				0			$\underline{y} * m([x])$
	III			$\max\{\underline{x} * m([y]), \bar{y} * m([x])\}$				$\min\{\underline{x} * m([y]), \underline{y} * m([x])\}$	
	BIII			$\frac{\underline{x} * \bar{y}}{2} = 2 * m([x]) * m([y])$					$\frac{\underline{x} * \underline{y}}{2} = 2 * m([x]) * m([y])$
	IV	$\frac{\underline{x} * \bar{y} + \bar{x} * \underline{y}}{2}$		$\underline{x} * m([y])$					$\frac{\bar{x} * \bar{y} + \underline{x} * \underline{y}}{2}$

QUADRO 4.5 – Regras operacionais para o cálculo do ponto médio do produto $[x]*[y]$.

Prova: A prova deste corolário decorre da aplicação da Definição 2.6 sobre o Quadro 4.2. Apesar de simples, ela é omitida com o objetivo de não tornar o volume excessivamente longo. ■

Novamente são observadas no Quadro 4.5 as mesmas características de simetria identificadas nos quadros anteriormente apresentados. Finalmente, deve-se observar que os pontos médios de produtos entre números-intervalo das regiões I e/ou IV podem também ser dados através de expressões envolvendo o ponto médio e o diâmetro dos intervalos originais. Isto é:

- Para $[x] \in I$ e $[y] \in I$, ou $[x] \in IV$ e $[y] \in IV$,

$$\begin{aligned} & \frac{\underline{x} * \underline{y} + \bar{x} * \bar{y}}{2} = \\ & = \underline{x} * m([y]) + \bar{y} * \frac{w([x])}{2} = \\ & = \bar{x} * m([y]) - \underline{y} * \frac{w([x])}{2} = \\ & = \underline{y} * m([x]) + \bar{x} * \frac{w([y])}{2} = \\ & = \bar{y} * m([x]) - \underline{x} * \frac{w([y])}{2} \end{aligned}$$

- Para $[x] \in I$ e $[y] \in IV$, ou $[x] \in IV$ e $[y] \in I$,

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{x} * \underline{y} + \underline{x} * \bar{y}}{2} = \\ & = \underline{x} * m([y]) + \underline{y} * \frac{w([x])}{2} = \\ & = \bar{x} * m([y]) - \bar{y} * \frac{w([x])}{2} = \\ & = \underline{y} * m([x]) + \underline{x} * \frac{w([y])}{2} = \\ & = \bar{y} * m([x]) - \bar{x} * \frac{w([y])}{2} \end{aligned}$$

Essas expressões são derivadas das definições 2.6 e 2.7 e não foram apresentadas no Quadro 4.5 por restrições de espaço. Ressalta-se sua simetria, visto que o ponto médio do produto resultante é expresso a partir da adição – ou subtração – do produto do ponto médio de um dos intervalos originais por um dos extremos do outro intervalo original, com o produto do raio do segundo intervalo por um dos extremos do primeiro.

4.5 Corolário: Expressões Algébricas da Multiplicação de um Intervalo por um Real

O resultado ora apresentado também é fundamentado no Teorema 4.1 e permite a obtenção das expressões algébricas da multiplicação de um intervalo por um número real:

Corolário 4.3 (Expressão Algébrica da Multiplicação de um Intervalo por um Real): Sejam $[x] \in \mathcal{I}\mathfrak{R}$ e $r \in \mathfrak{R}$. Então, o produto $[x]*r$ é calculado conforme o Quadro 4.6 e pertence à região especificada no Quadro 4.7.

$[x]*r$		r		
		<0	0	>0
$[x]$	O	0	0	0
	I	$[\bar{x}*r; \underline{x}*r]$		$[\underline{x}*r; \bar{x}*r]$
	BI	$[\bar{x}*r; 0]$		$[0; \bar{x}*r]$
	II	$[\bar{x}*r; \underline{x}*r]$		$[\underline{x}*r; \bar{x}*r]$
	BII			
	III	$[0; \underline{x}*r]$		$[\underline{x}*r; 0]$
	BIII			
	IV	$[\bar{x}*r; \underline{x}*r]$		$[\underline{x}*r; \bar{x}*r]$

QUADRO 4.6 – Regras operacionais para o cálculo do produto $[x]*r$.

$[x]*r$		r		
		<0	0	>0
$[x]$	O	O	O	O
	I	IV		I
	BI	BIII		BI
	II	III		II
	BII	BII		BII
	III	II		III
	BIII	BI		BIII
	IV	I		IV

QUADRO 4.7 – Regras para a determinação da região do intervalo $[x]*r$.

Prova: A prova desse resultado decorre da prova do Teorema 4.1, observando-se que:

- um número real negativo pode ser associado a um intervalo degenerado da região IV;
- um número real positivo pode ser associado a um intervalo degenerado da região I;
- o número real zero pode ser associado ao elemento da região O.

Logo, é válido o Corolário 4.3. ■

A análise do Quadro 4.7 permite complementar a informação referida por Franciosi [FRA 99] de que a multiplicação de um intervalo por um número real assemelha-se à multiplicação de um vetor por um número real. Em particular, observa-se que a multiplicação por um número real positivo produz um intervalo da mesma região, enquanto que a multiplicação por um intervalo negativo produz um intervalo da região oposta, do ponto de vista da cobertura de $\mathcal{I}\mathfrak{R}$ apresentada no início deste capítulo.

A partir do resultado desse teorema abre-se a possibilidade de desenvolvimento de algoritmos capazes de determinar a envoltória intervalar das soluções reais de equações envolvendo variáveis reais e coeficientes intervalares. Este resultado será apresentado no Capítulo 7.

4.6 Comentários Finais

O capítulo apresentou um resultado que fundamenta o restante deste trabalho e que permite a identificação das expressões algébricas do produto de números-intervalo, a partir de uma cobertura para \mathbb{R} constituída de 8 regiões. O resultado foi apresentado e demonstrado na forma de um teorema. Três resultados decorrentes desse teorema foram igualmente apresentados, permitindo identificar expressões representativas do diâmetro e do ponto médio do produto de números-intervalo e expressões representativas do produto de um intervalo por um número real. Em particular, o primeiro resultado estende a Proposição 2.7, uma vez que permite a obtenção das expressões exatas que representam o comprimento de um produto de intervalos ao invés de majorantes e minorantes.

O custo de obtenção dos produtos na forma apresentada no Teorema 4.1 foi calculado e comparado com a forma sugerida por Moore [MOO 66], mostrando-se mais vantajoso, apesar da elevação relativa do número de comparações. Paralelamente, o Teorema 4.2 permitiu evidenciar a necessidade de um custo exponencial para a determinação de todas as expressões algébricas alternativas no caso da avaliação de uma expressão analítica polinomial em que todos os coeficientes e variáveis pertençam às regiões II ou III do mapeamento utilizado.

As simetrias observadas a partir do resultado fundamental do mapeamento das expressões algébricas que definem a multiplicação de números-intervalo (Teorema 4.1) permeiam os demais resultados obtidos. Em particular, a presença de tais simetrias é útil do ponto de vista analítico, servindo de subsídio adicional para a validação de resultados e podendo servir como fonte de geração de simplificações do ponto de vista do desenvolvimento de algoritmos.

A partir da compreensão dos resultados apresentados nesse capítulo é possível obter resultados que determinem as expressões associadas às potências positivas inteiras de intervalos. Estas expressões são de extrema importância para a geração de algoritmos destinados à determinação de soluções de equações polinomiais intervalares. Estes resultados requerem, no entanto, a continuação da discussão associada à semântica de intervalo, objetivando a determinação do significado das soluções encontradas. Esta é a discussão apresentada nos capítulos seguintes.

5 Algoritmização de Potências Intervalares

Este capítulo apresenta uma discussão sobre a determinação das expressões algébricas que mapeiam o cálculo de potências inteiras positivas de intervalos. Os resultados são essencialmente um corolário do Teorema 4.1, mas são apresentados em separado objetivando retomar a discussão sobre a semântica associada à definição do tipo de dado intervalar.

Inicialmente será apresentado o Teorema 5.1, que define as expressões analíticas para o cálculo de potências inteiras positivas segundo a interpretação de número-intervalo. Uma versão deste teorema segundo a interpretação de produtos de envoltórias intervalares segundo a Definição 3.4 é apresentada no Teorema 5.2. Os objetivos da apresentação das duas versões são demonstrar a validade dessa operação de qualquer uma das semânticas abordadas neste trabalho e estabelecer uma base de comparação entre os resultados obtidos. Tal base de comparação servirá para a introdução de novos argumentos sobre a discussão iniciada no Capítulo 2, com respeito à semântica do conceito de intervalo.

5.1 Classificação e Cálculo de Potências Inteiras Positivas de Intervalos

Esta seção apresenta dois teoremas que se destinam ao cálculo das potências inteiras positivas de intervalos e se fundamentam nos resultados do Teorema 4.1. A diferença entre os teoremas reside na semântica assumida para a realização das operações entre intervalos. Se assumida a semântica de número-intervalo, que segue estritamente o Teorema 4.1, então o Teorema 5.1 deverá ser o utilizado; por outro lado, se assumida a interpretação de multiplicação de intervalos como envoltória de números reais conforme apresentado na Definição 3.4, então o Teorema 5.2 deverá ser o adotado. Em particular, a forma apresentada no Teorema 5.2 é parcialmente descrita por Moore como fruto da monotonicidade da avaliação intervalar de certas funções [MOO 79].

Teorema 5.1 (Classificação e Cálculo de Potências Positivas Inteiras de Números-Intervalo): Sejam $[x] \in \mathcal{I}\mathbb{R}$ e $n \in \mathbf{N}^*$. Então o intervalo que representa a n -ésima potência inteira positiva de $[x]$, denotado por $[x]^n$, é calculado segundo o Quadro 5.1 e pertence à região especificada no Quadro 5.2.

$[x]^n$		n	
		Ímpar	Par
[x]	O	[0;0]	
	I	$[\underline{x}^n; \bar{x}^n]$	
	BI	$[0; \bar{x}^n]$	
	II	$[\underline{x} * \bar{x}^{n-1}; \bar{x}^n]$	
	BII	$ x ^{n-1} * [\underline{x}; \bar{x}]$, onde $ x = -\underline{x} = \bar{x}$	
	III	$[\underline{x}^n; \underline{x}^{n-1} * \bar{x}]$	$[\underline{x}^{n-1} * \bar{x}; \underline{x}^n]$
	BIII	$[\underline{x}^n; 0]$	$[0; \underline{x}^n]$
	IV	$[\underline{x}^n; \bar{x}^n]$	$[\bar{x}^n; \underline{x}^n]$

QUADRO 5.1 – Regras operacionais para o cálculo das potências inteiras positivas de um número-intervalo.

$[x]^n$		n	
		Ímpar	Par
[x]	O	O	
	I	I	
	BI	BI	
	II	II	
	BII	BII	
	III	III	II
	BIII	BIII	BI
	IV	IV	I

QUADRO 5.2 – Classificação das potências inteiras positivas de um número-intervalo.

Os quadros 5.1 e 5.2 demonstram simetrias interessantes se considerados os casos de expoente par e ímpar. Em particular, observa-se que para números-intervalo associados às regiões O, I, BI – isto é o número-intervalo nulo e números-intervalo positivos – o comportamento das potências é essencialmente o mesmo identificado nas regras de sinais de potências de números reais positivos. Já para números-intervalo das regiões BIII e IV – ou seja, negativos – o comportamento replica o das potências de números reais negativos. Assim, potências pares resultam um número-intervalo positivo, enquanto que potências ímpares resultam um número-intervalo negativo.

Os casos específicos de números-intervalo das regiões II, BII e III – isto é, os denominados bivalentes – não possuem equivalente no conjunto dos números reais. No entanto, pode-se observar a ação da simetria sob outro ponto de vista: a potência de um intervalo simétrico gera sempre outro intervalo simétrico, sendo este comportamento uma fronteira entre os descritos no parágrafo anterior. Assim, o comportamento de um número-intervalo assimétrico positivo é similar ao de um número-intervalo positivo, enquanto que o de um número-intervalo assimétrico negativo assemelha-se ao de um número-intervalo negativo.

A presença de tais fontes de simetria é decorrente do Teorema 4.1 e contribui para a compreensão do resultado estabelecido nos quadros 5.1 e 5.2, além de evidenciar mais claramente a estabilidade da estrutura das operações entre números-intervalo.

Prova do Teorema 5.1: A prova apresentada é derivada indutivamente do Teorema 4.1, considerando-se intervalos iguais. Os detalhes são apresentados no Anexo 1.5. ■

5.2 Corolários para o Cálculo do Diâmetro e do Ponto Médio de Potências Inteiras Positivas de Números-Intervalo

Dois resultados obtidos diretamente do Teorema 5.1 são apresentados nos corolários a seguir. Eles permitem determinar as expressões algébricas do diâmetro e do ponto médio de potências inteiras positivas de números-intervalo. Quando possível as expressões obtidas foram escritas em termos dessas mesmas características dos números-intervalo originais:

Corolário 5.1 (Cálculo do Diâmetro de Potências Inteiras Positivas de Números-Intervalo): Sejam $[x] \in \mathfrak{I}\mathfrak{R}$ e $n \in \mathbf{N}^*$. Então o diâmetro do intervalo que representa a n -ésima potência inteira positiva de $[x]$, denotado por $w([x]^n)$, é calculado segundo o Quadro 5.3.

$w([x]^n)$		n	
		Ímpar	Par
[x]	O	0	
	I	$\bar{x}^n - \underline{x}^n$	
	BI	$\bar{x}^n = (w([x]))^n$	
	II	$\bar{x}^{n-1} * (\bar{x} - \underline{x}) = \bar{x}^{n-1} * w([x])$	
	BII	$ x ^{n-1} * (\bar{x} - \underline{x}) = x ^{n-1} * w([x])$, onde $ x = -\underline{x} = \bar{x}$	
	III	$\underline{x}^{n-1} * (\bar{x} - \underline{x}) = \underline{x}^{n-1} * w([x])$	$\underline{x}^{n-1} * (\underline{x} - \bar{x}) = -\underline{x}^{n-1} * w([x])$
	BIII	$-\underline{x}^n = (w([x]))^n$	$\underline{x}^n = (w([x]))^n$
	IV	$\bar{x}^n - \underline{x}^n$	$\underline{x}^n - \bar{x}^n$

QUADRO 5.3 – Expressões analíticas para o cálculo do diâmetro das potências inteiras positivas de um número-intervalo.

Prova: Pode ser obtida pela aplicação da Definição 2.7, de diâmetro intervalar, sobre o Quadro 5.1. ■

Corolário 5.2 (Cálculo do Ponto Médio de Potências Inteiras Positivas de Números-Intervalo): Sejam $[x] \in \mathcal{I}\mathfrak{R}$ e $n \in \mathbf{N}^*$. Então o ponto médio do intervalo que representa a n -ésima potência inteira positiva de $[x]$, denotado por $m([x]^n)$, é calculado conforme o Quadro 5.4.

$m([x]^n)$		n	
		Ímpar	Par
[x]	O	0	
	I	$\frac{\underline{x}^n + \bar{x}^n}{2}$	
	BI	$\frac{\bar{x}^n}{2} = 2^{n-1} * (m([x]))^n$	
	II	$\bar{x}^{n-1} * \left(\frac{\underline{x} + \bar{x}}{2}\right) = \bar{x}^{n-1} * m([x])$	
	BII	$ \underline{x} ^{n-1} * \left(\frac{\underline{x} + \bar{x}}{2}\right) = \underline{x} ^{n-1} * m([x])$	
	III	$\underline{x}^{n-1} * \left(\frac{\underline{x} + \bar{x}}{2}\right) = \underline{x}^{n-1} * m([x])$	
	BIII	$\frac{\underline{x}^n}{2} = 2^{n-1} * (m([x]))^n$	
	IV	$\frac{\underline{x}^n + \bar{x}^n}{2}$	

QUADRO 5.4 – Expressões analíticas para o cálculo do ponto médio das potências inteiras positivas de um número-intervalo.

Prova: Pode ser obtida pela aplicação da Definição 2.6, de ponto médio intervalar, sobre o Quadro 5.1. ■

5.3 Versão Alternativa: Cálculo de Potências Positivas Inteiras de Envoltórias de Reais

A seguir será apresentada uma versão para o cálculo de potências intervalares positivas com a restrição imposta na Definição 3.4, ou seja, de que intervalos iguais, quando multiplicados, devem resultar em um intervalo não negativo. De fato, Moore [MOO 79] apresenta parcialmente este resultado no capítulo 3 de seu livro, mesmo contradizendo a definição de produto intervalar por ele estabelecida no capítulo anterior do mesmo livro.

A apresentação desta versão de cálculo de potências tem por objetivo único demonstrar a viabilidade de determinação das expressões analíticas que definem as potências positivas inteiras de intervalos de reais se desconsideradas as inconsistências discutidas no Capítulo 2 deste volume: o Teorema 5.2 é apresentado meramente como complemento da teoria ora

vigente, não sendo utilizado efetivamente neste trabalho. Por esse motivo não serão apresentados resultados similares aos dos Corolários 5.1 e 5.2, apesar de serem de fácil obtenção, através da aplicação das definições de diâmetro e de ponto médio sobre os resultados do referido teorema. É conveniente observar ainda que os resultados obtidos serão diferentes dos apresentados no Teorema 5.1.

Teorema 5.2 (Classificação e Cálculo de Potências Positivas Inteiras de Envoltórias de Reais Subordinados à Definição 3.4): Sejam $[x] \in \mathfrak{R}$ e $n \in \mathbf{N}^*$. Então o intervalo que representa a n -ésima potência inteira de $[x]$, denotado por $[x]^n$, é calculado segundo o Quadro 5.5 e pertence à região especificada no Quadro 5.6.

$[x]^n$		n	
		Ímpar	Par
[x]	O	[0;0]	
	I	$[\underline{x}^n; \bar{x}^n]$	
	BI	$[0; \bar{x}^n]$	
	II	$[\underline{x} * \bar{x}^{n-1}; \bar{x}^n]$	$[0; \bar{x}^n]$
	BII	$\underline{x}^{n-1} * [\underline{x}; \bar{x}] = \bar{x}^{n-1} * [\underline{x}; \bar{x}]$	$[0; \underline{x}]^{n-1} * \bar{x} = [0; \bar{x}^n]$
	III	$[\underline{x}^n; \underline{x}^{n-1} * \bar{x}]$	$[0; \underline{x}^n]$
	BIII	$[\underline{x}^n; 0]$	$[0; \underline{x}^n]$
	IV	$[\underline{x}^n; \bar{x}^n]$	$[\bar{x}^n; \underline{x}^n]$

QUADRO 5.5 – Regras operacionais para o cálculo das potências inteiras positivas de um intervalo segundo a versão de produto da Definição 3.4.

$[x]^n$		n	
		Ímpar	Par
[x]	O	O	
	I	I	
	BI	BI	
	II	II	BI
	BII	BII	BI
	III	III	BI
	BIII	BIII	BI
	IV	IV	I

QUADRO 5.6 – Classificação das potências inteiras positivas de um intervalo segundo a versão de produto da Definição 3.4.

Em particular, observa-se que este resultado não permite o estabelecimento de uma regra de sinais e simetrias similar à apresentada para o Teorema 5.1. Ainda assim, a seguir será apresentada a prova da validade do resultado do Teorema 5.2 nas condições especificadas.

Prova do Teorema 5.2: A prova é indutiva e similar à apresentada para o Teorema 5.1. Os detalhes encontram-se no Anexo 1.6. ■

5.4 Análise Comparativa do Efeito da Semântica Sobre as Potências de Intervalos

Os teoremas 5.1 e 5.2 revelam a estrutura do cálculo das potências intervalares desde o ponto de vista do intervalo original. Essa informação não é apenas operacionalmente útil, mas contribui também para a identificação de alguns dos efeitos sobre os resultados gerados pela opção entre a semântica de número-intervalo e a de envoltória de números reais. Nesse sentido, a análise dos resultados dos teoremas 5.1 e 5.2 gera o seguinte corolário:

Corolário 5.3: Considerado o cálculo de uma potência positiva inteira do intervalo $[x] \in \mathcal{IR}$, $[x]^n$, onde $n \in \mathbf{N}^*$ segundo as interpretações de número-intervalo e de envoltória de números reais, o relacionamento entre os resultados obtidos é dado da seguinte forma:

- n é ímpar \Rightarrow os resultados são idênticos;
- n é par e $[x]$ é positivo (I, BI) ou nulo (O) ou negativo (BIII, IV) \Rightarrow os resultados são idênticos;

- n é par e $[x]$ é bivalente (II, BII, III) \Rightarrow o resultado gerado via envoltória de números reais (Teorema 5.2) é a projeção do número-intervalo calculado (Teorema 5.1) sobre a região BI. Este resultado é obtido pelo descarte da parte negativa do intervalo gerado pelo Teorema 5.1.

Prova: É obtida diretamente da inspeção dos quadros 5.1 e 5.5. ■

O resultado do Corolário 5.3 pode ser melhor assimilado através dos quadros 5.7 e 5.8. Nesses quadros são apresentados exemplos de cálculos de potências de intervalos segundo as formulações dos teoremas 5.1 e 5.2, respectivamente. Em particular, as células em destaque apresentam os resultados divergentes do ponto de vista comparativo. Esses exemplos são apresentados também com o objetivo de facilitar a compreensão das idéias apresentadas nos parágrafos seguintes.

Região		I	BI	II	BII	III	BIII	IV
n = 1	$[x]$	[1;2]	[0;2]	[-1;2]	[-2;2]	[-2;1]	[-2;0]	[-2;-1]
	$w([x])$	1	2	3	4	3	2	1
n = 2	$[x]^2$	[1;4]	[0;4]	[-2;4]	[-4;4]	[-2;4]	[0;4]	[1;4]
	$w([x]^2)$	3	4	6	8	6	4	3
n = 3	$[x]^3$	[1;8]	[0;8]	[-4;8]	[-8;8]	[-8;4]	[-8;0]	[-8;-1]
	$w([x]^3)$	7	8	12	16	12	8	7
n = 4	$[x]^4$	[1;16]	[0;16]	[-8;16]	[-16;16]	[-8;16]	[0;16]	[1;16]
	$w([x]^4)$	15	16	24	32	24	16	15
n = 5	$[x]^5$	[1;32]	[0;32]	[-16;32]	[-32;32]	[-32;16]	[-32;0]	[-32;-1]
	$w([x]^5)$	31	32	48	64	48	32	31

QUADRO 5.7 – Cálculo de potências de intervalos segundo o Teorema 5.1.

Região		I	BI	II	BII	III	BIII	IV
n = 1	$[x]$	[1;2]	[0;2]	[-1;2]	[-2;2]	[-2;1]	[-2;0]	[-2;-1]
	$w([x])$	1	2	3	4	3	2	1
n = 2	$[x]^2$	[1;4]	[0;4]	[0;4]	[0;4]	[0;4]	[0;4]	[1;4]
	$w([x]^2)$	3	4	4	4	4	4	3
n = 3	$[x]^3$	[1;8]	[0;8]	[-4;8]	[-8;8]	[-8;4]	[-8;0]	[-8;-1]
	$w([x]^3)$	7	8	12	16	12	8	7
n = 4	$[x]^4$	[1;16]	[0;16]	[0;16]	[0;16]	[0;16]	[0;16]	[1;16]
	$w([x]^4)$	15	16	16	16	16	16	15
n = 5	$[x]^5$	[1;32]	[0;32]	[-16;32]	[-32;32]	[-32;16]	[-32;0]	[-32;-1]
	$w([x]^5)$	31	32	48	64	48	32	31

QUADRO 5.8 – Cálculo de potências de intervalos segundo o Teorema 5.2.

Sob a luz da classificação de intervalos apresentada nas definições 4.1 a 4.3, os resultados apresentados neste capítulo permitem a identificação dos seguintes comportamentos:

- Intervalos positivos – regiões I e BI – representam a extensão direta dos números reais positivos e mantêm mesmas as características percebidas com respeito à potenciação;
- Intervalos negativos – regiões BIII e IV – representam a extensão direta dos números reais negativos e mantêm mesmas as características percebidas com respeito à potenciação. Em particular potências pares dão origem a intervalos positivos e potências ímpares dão origem a intervalos negativos;
- Intervalos bivalentes – regiões II, BII e III – não possuem representação correspondente no conjunto dos números reais. Tal fato se deve à **impossibilidade de existência de um número real simultaneamente positivo e negativo**: esta característica dual é nova e é incorporada pela noção de intervalo de números reais.

Com base nas considerações acima, o seguinte questionamento se faz relevante: “Considerando $I\mathfrak{R}$ como uma extensão de \mathfrak{R} , o que se pode esperar em termos das operações sobre os elementos das regiões II, BII e III, visto que estes não possuem representação em \mathfrak{R} ?”.

Do ponto de vista do objeto matemático em questão e considerada a argumentação apresentada no Capítulo 2, a semântica que se revela mais coerente é a de número-intervalo, identificada com o Teorema 5.1 e com o Quadro 5.7. Tal afirmação fundamenta-se nos seguintes argumentos:

- Em ambas interpretações os resultados obtidos são coerentes com os associados a números reais para intervalos nulos, positivos e negativos;
- Não há representação, dentre os números reais, para intervalos bivalentes (regiões II, BII e III); conseqüentemente não há como prever o resultado da operação de potenciação nestes casos meramente com base nos resultados conhecidos para números reais, muito menos limitar seu comportamento por resultados dessa natureza;
- A operação de potência de um número real de módulo maior que 1 resulta em um novo número de módulo ainda maior que o do original. Ademais, o que se deseja é a manutenção do comportamento observado entre números ao se operar com intervalos. No entanto ao se exigir que intervalos bivalentes gerem potências pares que possuam estritamente elementos não negativos o diâmetro dos intervalos não é aumentado na mesma proporção que nos demais casos, o que traz novamente à tona a discussão apresentada no Capítulo 2;
- Se desconsiderada a definição de número-intervalo e levada em conta somente a interpretação de intervalo como envoltória de números reais, bem como da operação de multiplicação intervalar segundo essa interpretação, então a solução de maior diâmetro possível para a equação

$$[-1;2]*[x]=[-2;4]$$

seria $[x] = [-1;2]$. No entanto, segundo a aplicação clássica,

$$[-1;2]*[x] = [-1;2]*[-1;2] = [-1;2]^2 = [0;4] \neq [-2;4].$$

Isto significaria, basicamente, que a solução encontrada **não** é uma solução do ponto de vista da igualdade usual?

Tais considerações dificilmente poderiam ser percebidas sem o mapeamento e os resultados apresentados neste trabalho. Em particular, com relação ao último argumento apresentado, poder-se-ia contra-argumentar que outra solução possível seria $[x] = [2;2]$ e que esta solução teria menor diâmetro e que, portanto, seria uma solução melhor que $[x]=[-1;2]$. No entanto, três reflexões devem ser feitas:

1. O fato de se escolher a solução $[x]=[2;2]$ não elimina a contradição estrutural evidenciada pela existência da solução $[x]=[-1;2]$;
2. Mesmo se considerada a natureza de inflação do diâmetro do resultado das operações intervalares, o que levaria à preferência por resultados de menor diâmetro – se uma escolha dessa natureza fosse possível –, ainda assim a solução de uma equação intervalar deveria ser a de maior diâmetro, visto que esta deve englobar todas as demais soluções e, portanto, gerar um resultado qualitativamente melhor – por exemplo, do ponto de vista da análise de estabilidade de modelos;
3. Não há garantias, por exemplo, de que esta equação “linear” deva possuir apenas uma solução intervalar. Isto é, a propriedade matemática que garante que uma equação linear de constantes e variáveis reais possui uma e somente uma solução real não necessariamente precisa manter-se inalterada ao se operar com constantes ou variáveis intervalares. Pressupor que esta propriedade deva continuar válida no âmbito intervalar é tão arbitrário quanto permitir as imposições discutidas no Capítulo 2.

De fato com relação à reflexão 3 acima, assumindo-se a interpretação de número-intervalo, a equação $[-1;2]*[x]=[-2;4]$ possui infinitas soluções, dadas por

$$[x] = [\underline{x};2], \forall \underline{x} \in [-1;2].$$

Com efeito,

$$\forall \underline{x} \in [-1;2], [-1;2]*[x] = [-1;2]*[\underline{x};2],$$

mas $[-1;2]*[\underline{x};2]$ é o produto de um número-intervalo da região II por outro que pode pertencer às regiões I, BI ou II. Então, pelo Teorema 4.1:

- $-1 \leq \underline{x} < 0 \Rightarrow [\underline{x};2] \in \text{II} \Rightarrow [-1;2]*[\underline{x};2] = [\min\{-1*2, 2*\underline{x}\}; 2*2] = [-2;4]$
- $\underline{x} = 0 \Rightarrow [\underline{x};2] \in \text{BI} \Rightarrow [-1;2]*[\underline{x};2] = [-1;2]*[0;2] = [-1*2; 2*2] = [-2;4]$
- $0 < \underline{x} \leq 2 \Rightarrow [\underline{x};2] \in \text{I} \Rightarrow [-1;2]*[\underline{x};2] = [-1*2; 2*2] = [-2;4]$

Da verificação acima observa-se que $[x] = [\underline{x};2], \forall \underline{x} \in [-1;2]$ efetivamente são soluções algébricas⁷ da equação $[-1;2]*[x]=[-2;4]$. Como

$$\forall \underline{x}_1, \underline{x}_2 \in [-1;2], \underline{x}_1 \neq \underline{x}_2 \Rightarrow [\underline{x}_1;2] \neq [\underline{x}_2;2],$$

então esta equação linear possui infinitas soluções algébricas distintas, conforme afirmado na reflexão 3. Em particular, observe-se que o argumento acima impede que mesmo $[x] = [-1;2]$ seja considerado com “a” solução da equação em questão. Essa discussão sobre a enumeração de raízes em equações intervalares será retomada nos capítulos seguintes.

⁷ A forma de obtenção dessas soluções será demonstrada no capítulo seguinte.

Enfim, apesar das aplicações da teoria de intervalos segundo a interpretação de envoltória de números reais serem conhecidas [MOO 66, MOO 79, KUL 81], inconsistências como as apontadas nos parágrafos anteriores serão prováveis, graças à inexistência de uma estrutura estável do ponto de vista matemático e, principalmente, pela falta de definição de uma semântica clara associada à definição de intervalo.

5.5 Comentários Finais

Neste capítulo foram apresentados dois teoremas similares para o cálculo de potências positivas inteiras de intervalos. Os resultados diferem segundo a interpretação do significado da potência de intervalos: se uma operação matematicamente derivada da multiplicação de números-intervalo, ou se uma extensão da avaliação intervalar de funções reais. Os teoremas foram demonstrados válidos, cabendo a identificação de qual o mais adequado para o tipo de desenvolvimento desejado em intervalos. Um corolário que faz a conexão destes teoremas foi também apresentado, juntamente com uma discussão sobre o efeito da escolha de uma ou outra semântica sobre a execução dessas operações. Novamente, a semântica associada a número-intervalo mostrou-se mais coerente do ponto de vista algébrico. Para este caso foram também apresentados dois corolários para o cálculo do diâmetro e do ponto médio de potências inteiras positivas.

Fazendo uso dos resultados e da discussão com respeito aos aspectos semânticos da definição de intervalo discutidos até este ponto, os próximos capítulos demonstrarão como é possível a obtenção das soluções de equações intervalares a partir da semântica de números-intervalo. Tais resultados constituem a contribuição final deste trabalho.

6 Soluções Próprias de Sistemas de Equações Intervalares

Este capítulo apresenta algoritmos que permitem a obtenção de soluções próprias de equações polinomiais intervalares e sistemas de equações lineares intervalares. Por solução própria entende-se aquela que satisfaz a equação ou o sistema do ponto de vista da igualdade usual. Os algoritmos foram desenvolvidos a partir das contribuições trazidas pelos teoremas 4.1 e 5.1.

Inicialmente serão apresentados aspectos referentes à definição de solução própria e de sua representação gráfica. Em seguida será apresentada uma discussão sobre a interpretação associada às soluções próprias, bem como sua associação com as semânticas de intervalo como envoltória de números reais e de número-intervalo. Na sequência será apresentado o algoritmo que permite o cálculo de soluções próprias de equações polinomiais com coeficientes e variáveis intervalares. Considerações sobre sua complexidade e exemplos de aplicação também serão apresentados. Finalmente, o algoritmo que se destina ao cálculo de soluções próprias de sistemas de equações lineares com coeficientes e variáveis intervalares será apresentado, recebendo a mesma deferência que o primeiro algoritmo.

6.1 Soluções Intervalares

O objetivo desta seção é o de referir brevemente o conceito de solução intervalar para futura comparação, visto que este é largamente aceito na literatura de referência como solução de equações intervalares [ALE 2000, WOL 2000]. Questões relativas à forma de representação gráfica desse tipo de solução também são brevemente discutidas, com o objetivo de simplificar a compreensão e a comparação dos resultados apresentados neste capítulo e nos seguintes. Para tanto, a Definição 6.1 apresenta o que se entende por solução intervalar:

Definição 6.1 (Solução Intervalar): A solução intervalar da equação $f([x]) = [y]$, onde $[x] \in \mathcal{IR}$ e $[y] \in \mathcal{IR}$ é dada pelo menor intervalo $[x^*] \in \mathcal{IR}$ que contenha todas as soluções reais de $f([x]) = [y]$, isto é,

$$\begin{aligned} [x^*] \in \mathcal{IR} \text{ é solução intervalar de } f([x]) = [y] &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \forall y \in [y], \exists x \in [x^*], f(x) = y \wedge \forall x \in [x^*], \exists y \in [y], f(x) = y. \end{aligned}$$

Em particular, dado o sistema de equações

$$\begin{cases} f_1([x_1], \dots, [x_n]) = [y_1] \\ f_2([x_1], \dots, [x_n]) = [y_2] \\ \dots \\ f_n([x_1], \dots, [x_n]) = [y_n] \end{cases}$$

onde $[x_i] \in \mathfrak{R}$, $1 \leq i \leq n$, $[y_j] \in \mathfrak{R}$, $1 \leq j \leq n$, sua solução intervalar é o vetor contendo os intervalos $[x_i^*] \in \mathfrak{R}$, $1 \leq i \leq n$, de menor diâmetro e que contenham todas as soluções reais do referido sistema.

A representação gráfica de soluções intervalares pode ser realizada de diferentes formas, desde baseadas na representação proposta por Sunaga [SUN 58, MOO 66, MOO 79, FRA 99], conforme apresentado na Figura 2.2, até baseadas em representações cartesianas [KOR 94]. Neste trabalho optou-se por uma representação cartesiana, coerente com a orientação da tese proposta, ou seja, a manutenção dos fundamentos matemáticos no estudo do tipo de dado intervalar. Seguindo essa orientação as soluções intervalares são apresentadas em gráficos bidimensionais como o apresentado na Figura 6.1. Nessa representação esquemática a função intervalar associada ao membro esquerdo da equação cuja solução se quer descrever é representado por uma faixa demarcada solidamente; já o membro direito da equação, associado sempre a um intervalo constante neste trabalho, é representado por uma faixa horizontal limitada por linhas pontilhadas. O intervalo de valores $x \in \mathfrak{R}$ associados à região formada pela intersecção dessas duas faixas demarca a solução intervalar da equação em questão. É essa a interpretação utilizada para a leitura das figuras similares apresentadas subsequentemente neste volume.

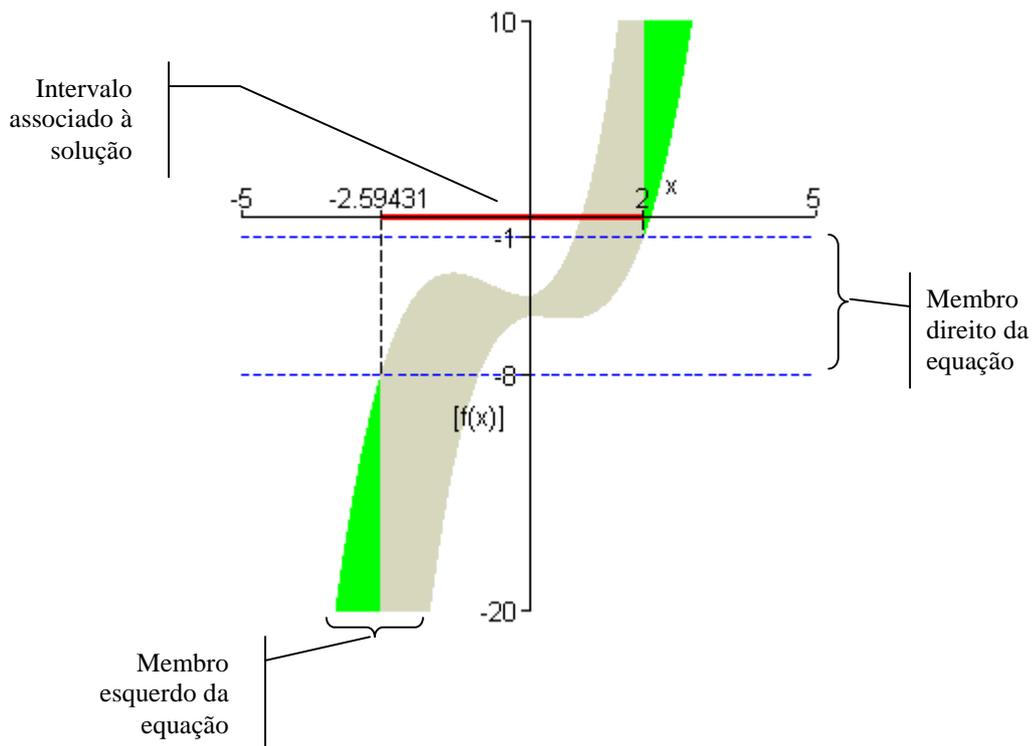


FIGURA 6.1 – Representação gráfica esquemática de uma solução intervalar.

Em seguida serão apresentados exemplos ilustrativos da Definição 6.1. Cabe observar que essa definição de solução intervalar é coerente com a Definição 3.1, de solução de um sistema intervalar, conforme apresentado anteriormente.

Exemplo 6.1: A equação $[1;2] * [x] + [-4;-3] = [-8;-1]$ tem como solução intervalar $[x] = [-5;3]$.

Esse resultado é representado na Figura 6.2.

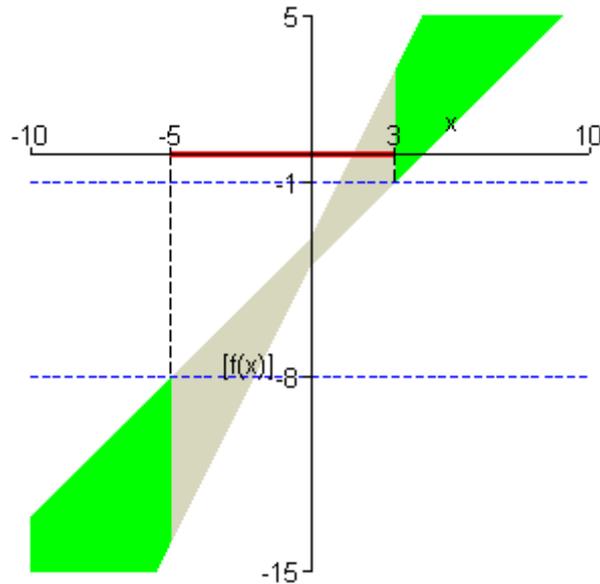


FIGURA 6.2 – Representação da solução intervalar de $[1;2] * [x] + [-4;-3] = [-8;-1]$.

Exemplo 6.2: A equação $[x] + [-7;-2] = [1;4]$ tem como solução intervalar $[x] = [3;11]$.

Este exemplo é originário do trabalho de Korzenowski [KOR 94] e é representado graficamente na Figura 6.3, seguindo a mesma orientação da Figura 6.1.

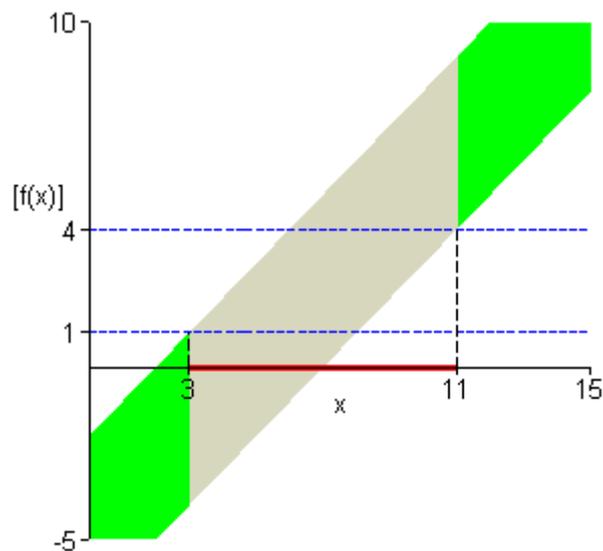


FIGURA 6.3 – Representação da solução intervalar de $[x] + [-7;-2] = [1;4]$.

6.2 Soluções Próprias Intervalares

Esta seção apresenta aspectos relativos ao conceito de solução própria intervalar. Pretende-se estabelecer a distinção entre esse tipo de solução e a solução intervalar usual, apresentada na seção anterior, além de verificar a adequação do conceito de solução própria relativamente às semânticas de intervalos discutidas nos capítulos anteriores.

Definição 6.2 (Solução Própria Intervalar): A solução própria intervalar da equação $f([x]) = [y]$, onde $[x] \in \mathcal{IR}$ e $[y] \in \mathcal{IR}$ é dada pelo intervalo $[x^p] \in \mathcal{IR}$ que satisfaz a igualdade no sentido usual. Isto é,

$$[x^p] \in \mathcal{IR} \text{ é solução própria intervalar de } f([x]) = [y] \Leftrightarrow \underline{f([x^p])}, \overline{f([x^p])} = [\underline{y}, \overline{y}].$$

Em particular, dado o sistema de equações intervalares

$$\begin{cases} f_1([x_1], \dots, [x_n]) = [y_1] \\ f_2([x_1], \dots, [x_n]) = [y_2] \\ \dots \\ f_n([x_1], \dots, [x_n]) = [y_n] \end{cases}$$

onde $[x_i] \in \mathcal{IR}$, $1 \leq i \leq n$, $[y_j] \in \mathcal{IR}$, $1 \leq j \leq n$, sua solução própria é o vetor contendo os intervalos $[x_i^p] \in \mathcal{IR}$, $1 \leq i \leq n$, que satisfazem simultaneamente todas as equações no sentido da igualdade estrutural usual.

A partir da Definição 6.2 deriva-se a seguinte condição de existência de soluções próprias:

Proposição 6.1 (Condição de Existência de Solução Própria Intervalar): Se $[x^p] \in \mathcal{IR}$ é solução própria da equação intervalar $f([x]) = [y]$, então $w(f([x^p])) = w([y])$.

Prova: Ver [FRA 99]. ■

Essa condição introduz uma característica extremamente importante do ponto de vista da semântica de intervalos, uma vez que implica que somente pode existir solução própria para uma equação intervalar se a “imprecisão” associada aos dados de entrada for igual à “imprecisão” esperada para os resultados. Tal característica converte-se em uma forte imposição sobre o diâmetro da solução própria intervalar, que, por sua vez, se transforma em imposição sobre os extremos que definem o intervalo como solução. Em particular, a condição implica que uma equação polinomial de coeficientes e variáveis intervalares jamais terá solução própria intervalar não degenerada se o lado direito representar um número real e pelo menos um dos coeficientes não for degenerado. Isto é, que não existem soluções próprias para equações da forma $f([x]) = y$, onde $[x] \in \mathcal{IR}$, $w([x]) > 0$, $f([x]) \in \mathcal{IR}$ e $y \in \mathcal{R}$. Esse resultado é coerente com a Proposição 3.8, apresentada anteriormente.

Uma solução própria efetivamente inclui o menor conjunto de soluções reais de uma equação, pois somente considera aquelas soluções reais cujas imagens encontram-se inclusas no intervalo que representa o membro direito da equação. Isto significa que para qualquer subconjunto $[s]$ de uma solução própria $[x^p]$, $[s] \subseteq [x^p]$, será gerado um intervalo que satisfará a condição de inclusão monotônica, ou seja, $f([s]) \subseteq f([x^p])$. Este resultado pode ser facilmente demonstrado através das propriedades definidas pela relação de ordem \subseteq e pela

propriedade subdistributiva dos intervalos reais. Em particular, esse resultado é interessante para a conexão com o domínio dos números reais, na forma apresentada a seguir:

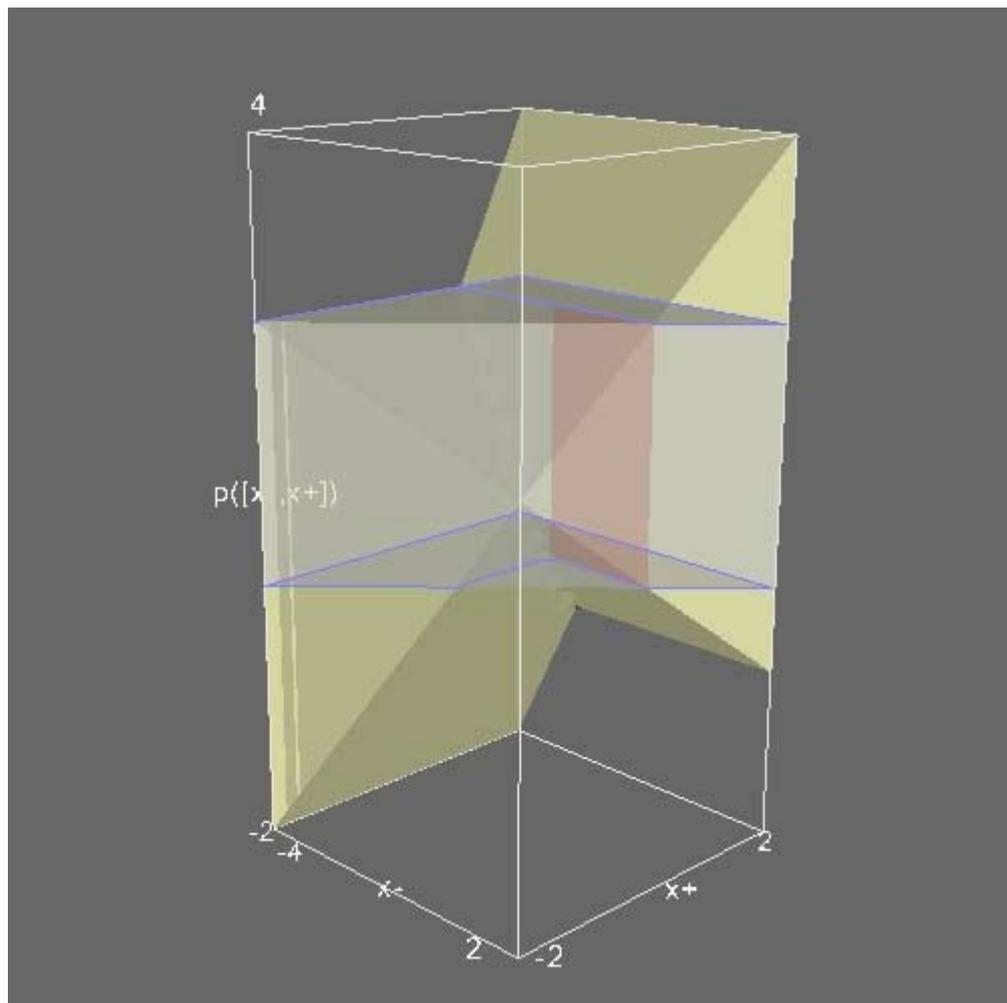
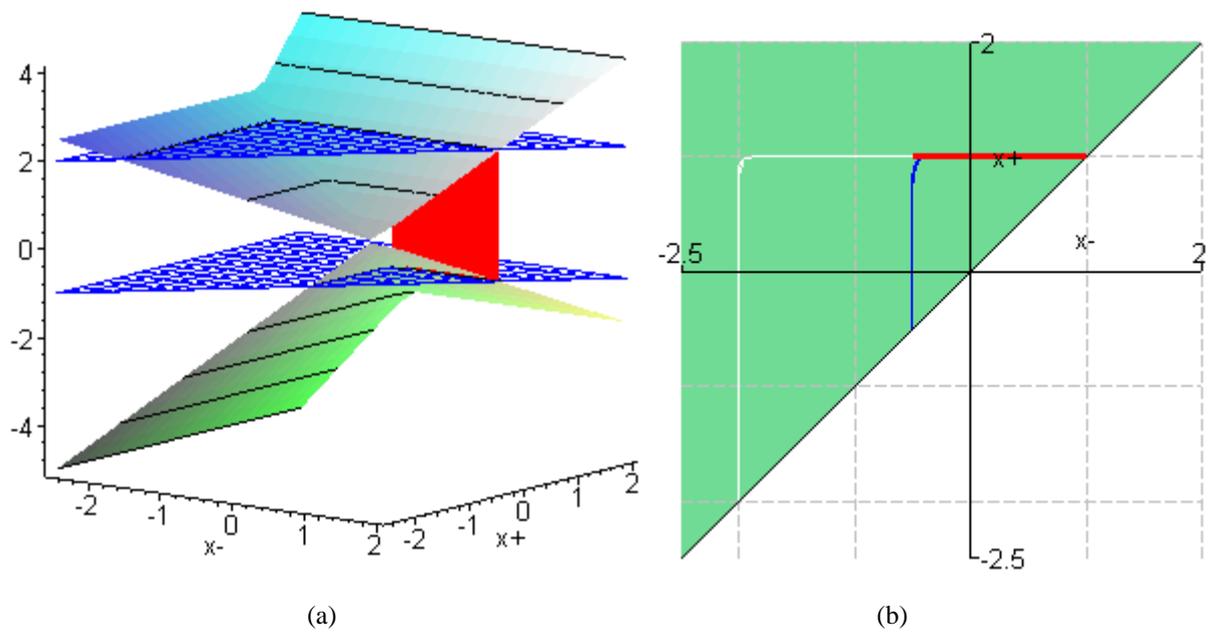
Teorema 6.1: Seja $[x^p] \in \mathfrak{I}\mathfrak{R}$ solução própria intervalar da equação $f([x]) = [y]$. Então $\forall x \in [x^p], f(x) \subseteq [y]$.

Prova do Teorema 6.1: O fundamento desta prova é a exploração da monotonicidade da inclusão na avaliação intervalar. Os detalhes são apresentados no Anexo 1.7. ■

A questão da representação gráfica de soluções próprias intervalares é bastante delicada, graças à dificuldade de compreensão e de interpretação desse tipo de solução. Com efeito, o problema da identificação de uma solução própria intervalar é similar ao da determinação das coordenadas dos cortes gerados pela intersecção de volumes tridimensionais. Problemas dessa natureza dependem mais fortemente da capacidade de manipulação de sólidos tridimensionais do que de sua mera visualização estática. Essa dificuldade, associada às conceituais já identificadas ao longo deste texto, traduz-se em um problema relativamente complexo e que implica a necessidade de uso de algum aplicativo dotado de câmera sintética como suporte.

Na busca de um ambiente adequado para a representação gráfica das soluções próprias de equações intervalares diversas fontes foram pesquisadas e testadas, dentre as quais citam-se ambientes baseados em CAD (Autodesk Autocad), ambientes baseados na linguagem VRML, ambientes de suporte a OpenGL e ambientes proprietários diversos. Dadas as restrições de tempo de aprendizagem, disponibilidade e portabilidade encontradas e, principalmente, dada a ausência de ferramentas de visualização de propósito geral com as capacidades necessárias, optou-se neste trabalho pelo desenvolvimento de uma ferramenta baseada na biblioteca de visualização científica Kitware *Visualization Toolkit* (VTK) sobre o ambiente de programação Java. Essa ferramenta encontra-se disponível em mídia digital no endereço www.mat.pucrs.br/~vaccaro/sei/, com objetivo de auxiliar o leitor na compreensão dos resultados apresentados neste capítulo. Convida-se o leitor a utilizá-la. As instruções para a utilização dessa ferramenta encontram-se no Anexo 4.

No decorrer deste capítulo também são apresentadas figuras obtidas na ferramenta desenvolvida, as quais foram exportadas para TIFF (*Tag Independent File Format*) e posteriormente convertidas para o formato JPEG (*Joint Photographic Experts Group compressed file*), para maior portabilidade. Figuras geradas no ambiente Maple V também são apresentadas, em caráter auxiliar, buscando fornecer o máximo de informação possível de modo estático. A título de ilustração, a Figura 6.4 apresenta um exemplo das imagens que serão encontradas neste texto, relativamente a soluções intervalares. Nessa figura são apresentadas três imagens da mesma equação intervalar, seguindo diferentes orientações.



(c)

FIGURA 6.4 – Representação de uma solução própria intervalar utilizando os recursos gráficos do ambiente Maple V em 3D (a) e em 2D (b), e do ambiente desenvolvido com base no VTK (c).

O padrão utilizado para a interpretação das imagens da Figura 6.4 é descrito a seguir:

- Nas figuras tridimensionais geradas na versão disponível do Maple V, como na Figura 6.4(a), que não possui recursos de transparência, os volumes associados aos membros da equação foram representados apenas por suas superfícies limitantes inferior e superior. Seguindo a mesma orientação, os planos em aramado representam o membro direito da equação, um intervalo constante, e as linhas ou planos verticais e solidamente demarcados representam as soluções próprias encontradas;
- Nas figuras bidimensionais geradas no Maple V, similares à Figura 6.4(b), são mostradas as curvas geradas pelas interseções superior e inferior dos volumes que representam os membros da equação. A projeção é ortogonal sobre \mathbb{R}^2 . A linha clara demarca a intersecção das limitantes superiores dos volumes e a linha escura, a intersecção das limitantes inferiores. As regiões destacadas, pontos ou linhas demarcadas em negrito, representam as soluções próprias encontradas, segundo a interpretação sugerida por Sunaga e explorada por Franciosi [FRA 99];
- Nas figuras tridimensionais geradas com auxílio do VTK, similares à Figura 6.4(c), é adotado essencialmente o mesmo padrão da Figura 6.4(a). No entanto, a possibilidade de utilização de transparências permite a representação dos volumes de forma mais adequada.

Infelizmente, como se pode observar, as imagens apresentadas na Figura 6.4 não traduzem toda a informação contida na visualização de equações e soluções dessa natureza. De fato, o trabalho realizado permitiu concluir que a manipulação das figuras é essencial para a melhor compreensão do significado de solução própria intervalar. Por este motivo, reitera-se o convite ao leitor para que faça uso da ferramenta fornecida em anexo, de modo a melhor compreender os resultados obtidos e os exemplos apresentados.

De modo a ilustrar comparativamente o conceito de solução própria, a seguir serão considerados os mesmos exemplos apresentados para o conceito de solução intervalar.

Exemplo 6.3: A equação $[1;2] * [x] + [-4;-3] = [-8;-1]$ tem como solução própria intervalar $[x^p] = [-2;1]$.

Com efeito,

$$[1;2] * [x^p] + [-4;-3] = [1;2] * [-2;1] + [-4;-3] = [-4;2] + [-4;-3] = [-8;-1].$$

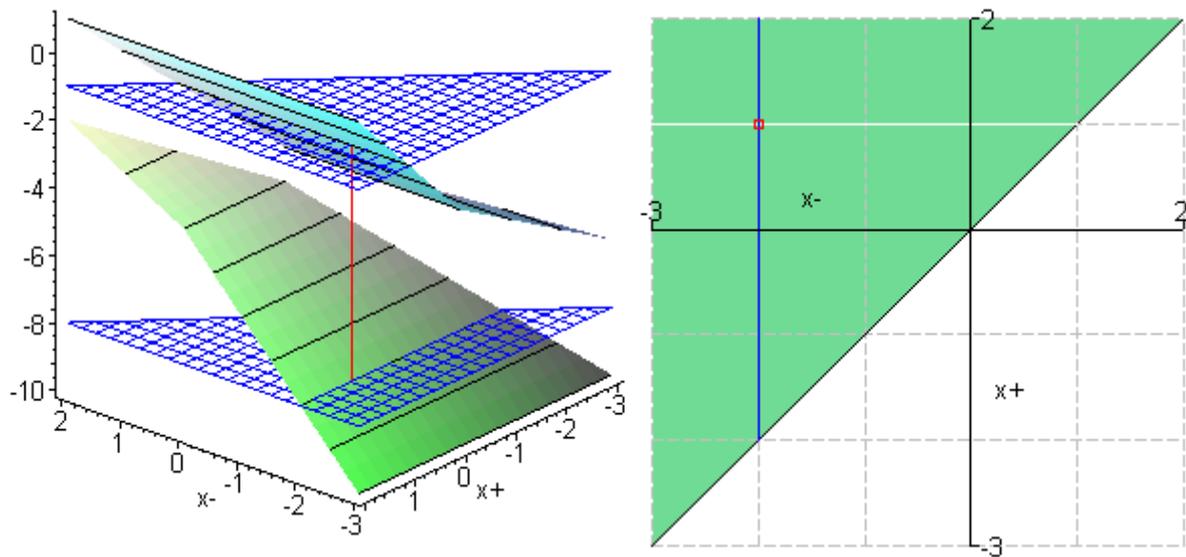
Da mesma forma, a condição de existência de solução própria exige que

$$\begin{aligned} w([1;2] * [x^p] + [-4;-3]) &= w([-8;-1]) \Leftrightarrow \\ w([1;2] * [x^p]) + w([-4;-3]) &= w([-8;-1]) \Leftrightarrow \\ w([1;2] * [x^p]) + 1 &= 7 \Leftrightarrow \\ w([1;2] * [x^p]) &= 6 \end{aligned}$$

e, para $[x^p] = [-2;1]$ tem-se

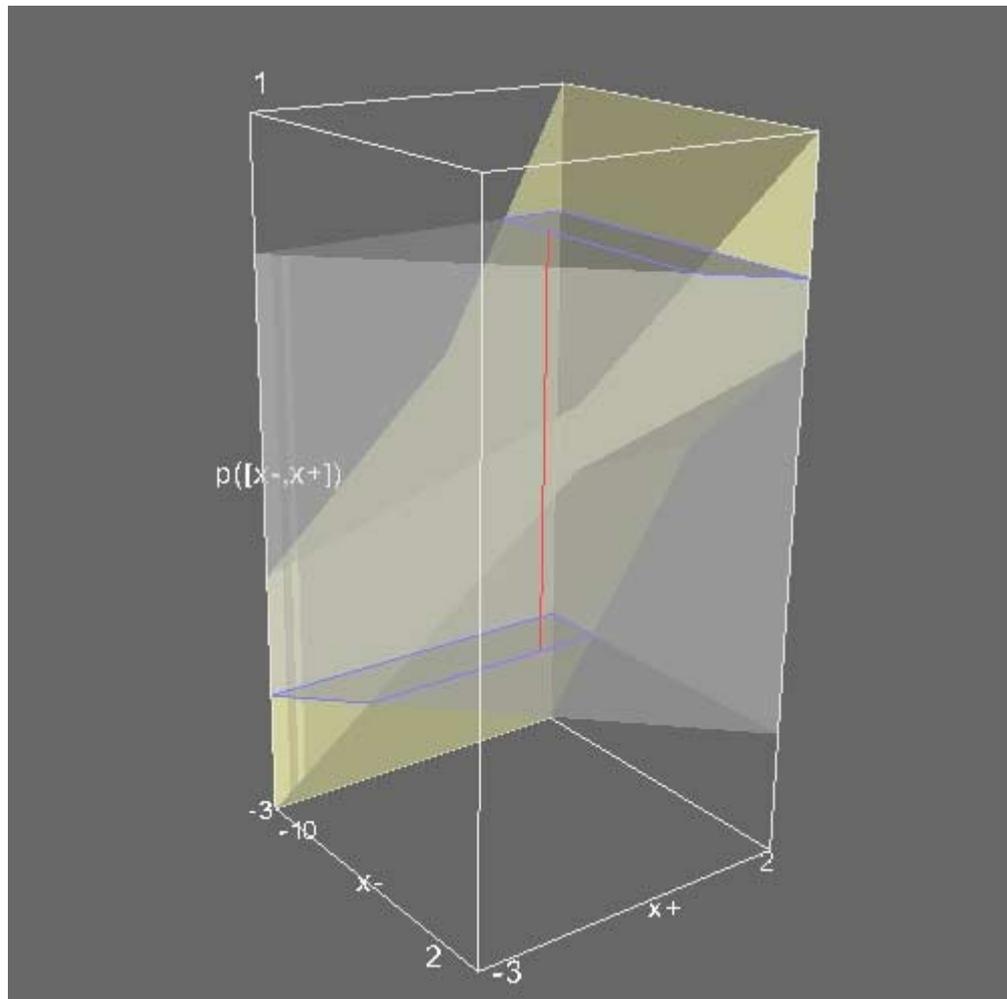
$$w([1;2] * [x^p]) = w([1;2] * [-2;1]) = w([-4;2]) = 6.$$

A representação gráfica desta solução própria pode ser vista na Figura 6.5.



(a)

(b)



(c)

FIGURA 6.5 – Representação gráfica da solução própria da equação $[1;2] * [x] + [-4;-3] = [-8;-1]$ no Maple V em 3D (a) e em 2D (b), e no ambiente desenvolvido com base no VTK (c). Os pontos de vista das imagens (a) e (c) são diferentes.

A análise das imagens acima permite identificar que as soluções próprias intervalares são encontradas justamente nas coordenadas que apresentam a intersecção simultânea dos limitantes superiores e inferiores dos membros da equação. Esta interpretação visual é coerente com o significado usual de solução utilizado para equações de variável real. Além disso, o fato de sua identificação no contexto ora proposto é bastante desejável tanto visando a garantia da coerência algébrica como a compreensão do conceito de solução própria.

Exemplo 6.4: Para a equação

$$[x] + [-7;-2] = [1;4],$$

a condição básica dos comprimentos dos intervalos implica que

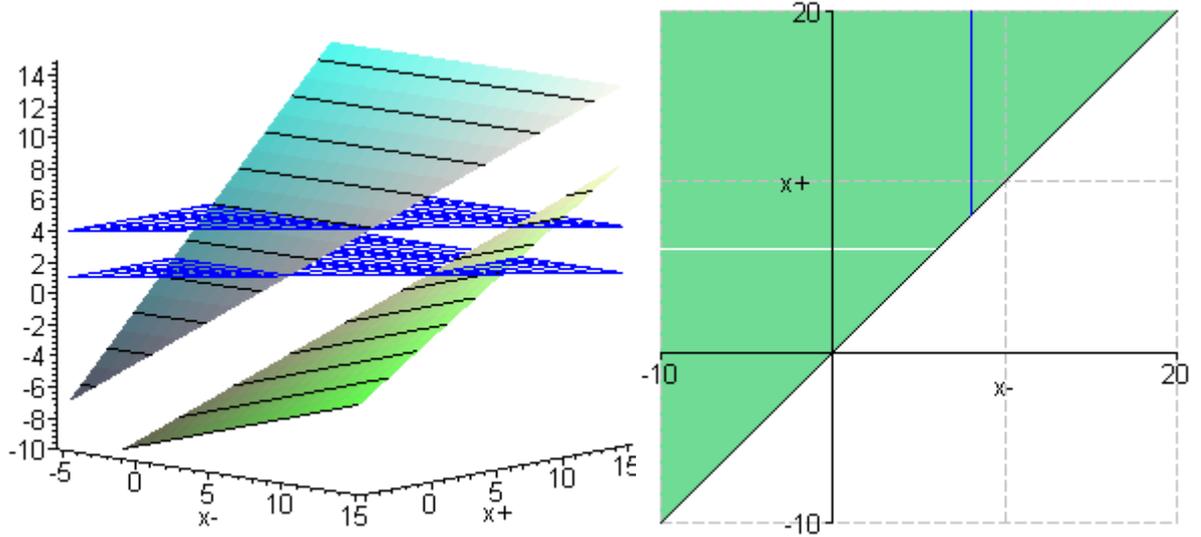
$$w([x]+[-7;-2]) = w([1;4]) \Leftrightarrow w([x]) + 5 = 3 \Leftrightarrow w([x]) = -2.$$

Segundo esse resultado, a equação **não** possui solução própria intervalar, pois contraria a primeira das propriedades fundamentais do diâmetro,

$$\forall [x] \in \mathfrak{I}\mathfrak{R}, w([x]) \geq 0,$$

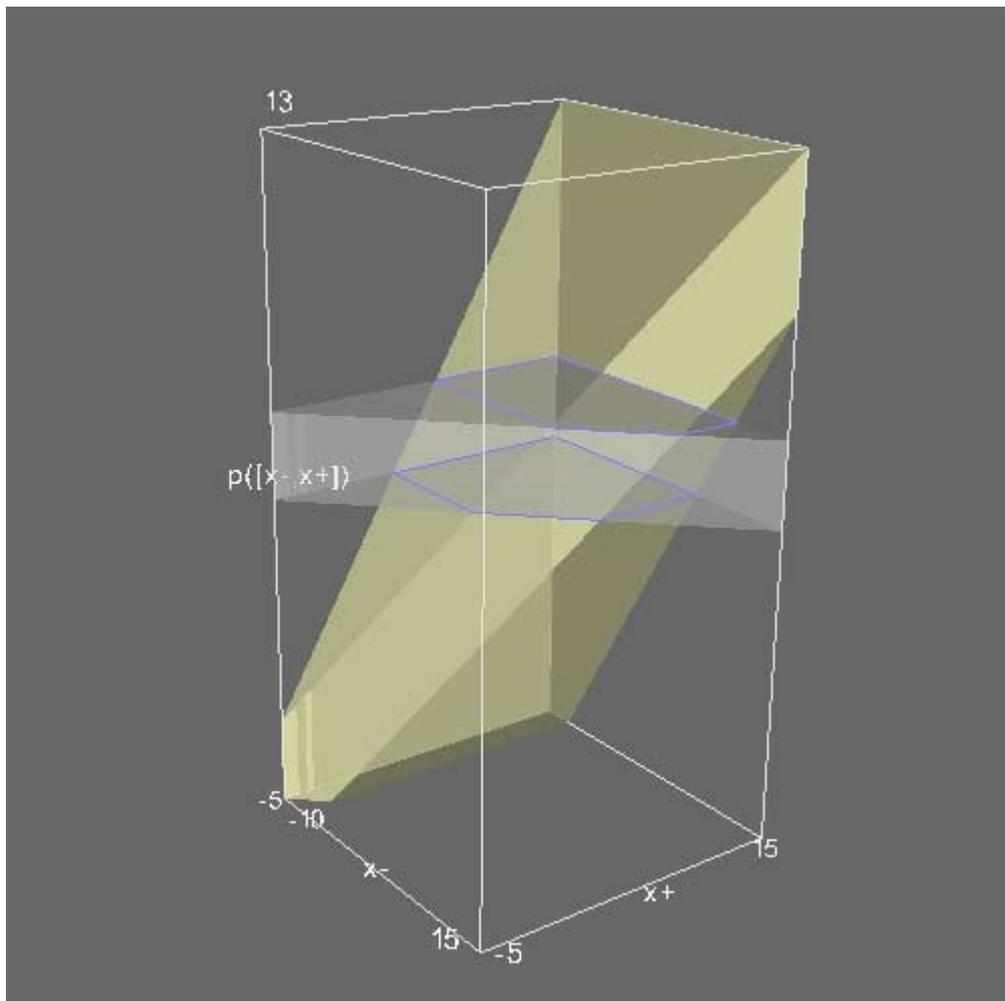
conforme apresentado na Proposição 2.7.

De fato, o resultado é bastante razoável, se considerado do ponto de vista da semântica de número-intervalo: a adição de duas imprecisões, sendo uma de “tamanho” 5, não poderá resultar em uma imprecisão de tamanho 3 (menor que 5). Esse fato não é novidade já que é largamente conhecido de diversos resultados estatísticos, tais como: “a variância de uma subtração é igual à adição das variâncias”. Não obstante, a Figura 6.6 pode auxiliar sua compreensão, pois demonstra a não existência de intersecção comum entre as superfícies limitantes da função – lado esquerdo da equação – e do lado direito da equação.



(a)

(b)



(c)

FIGURA 6.6 – Representação gráfica da não existência de solução própria para $[x] + [-7;-2] = [1;4]$.
 no Maple V em 3D (a) e em 2D (b), e no ambiente desenvolvido com base no VTK (c).
 Os pontos de vista das imagens (a) e (c) são diferentes.

A discussão a seguir apresenta maiores considerações a respeito das implicações associadas aos tipos de solução definidos previamente.

6.3 Discussão: Solução Intervalar versus Solução Própria Intervalar

Um dos principais objetivos da determinação de soluções intervalares é a identificação do efeito da propagação de erros de arredondamento sobre formulações envolvendo valores reais [ALE 2000, WOL 2000, FRA 99, ALE 98, MOO 66]. Por outro lado, a determinação de soluções próprias pode ser particularmente interessante em problemas de estabilidade e determinação de ajustes ótimos sujeitos a limites de segurança. Por exemplo:

“Seja um sistema sujeito a erros de medição de tal forma que o único parâmetro de ajuste, x , seja amplificado por um coeficiente que assume valores entre 1 e 3, e cujos limites de erro aceitáveis para o sinal resultante devam ser limitados entre 1 e 6. Que valores seriam aceitáveis para x com a devida segurança de que, pelo fato de não ser conhecidos os valores exatos que representem o modelo do sistema, o sistema operasse dentro dos limites de especificação considerados seguros? Existe algum tipo de solução desta natureza?”

O exemplo acima remete à equação intervalar

$$[1;3] * [x] = [1;6],$$

com solução intervalar

$$[x^*] = \left[\frac{1}{3}; 6\right]$$

e solução própria

$$[x^p] = [1;2],$$

conforme apresentado nas figuras 6.7 e 6.8, respectivamente.

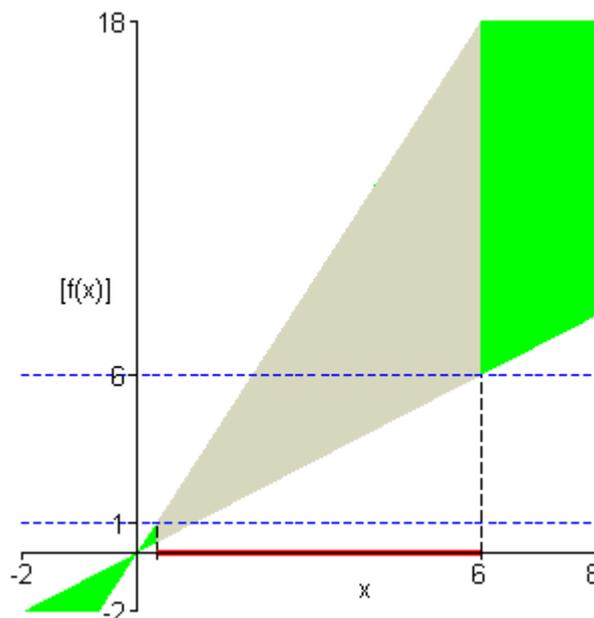


FIGURA 6.7 – Representação da solução intervalar da equação $[1;3] * [x] = [1;6]$.

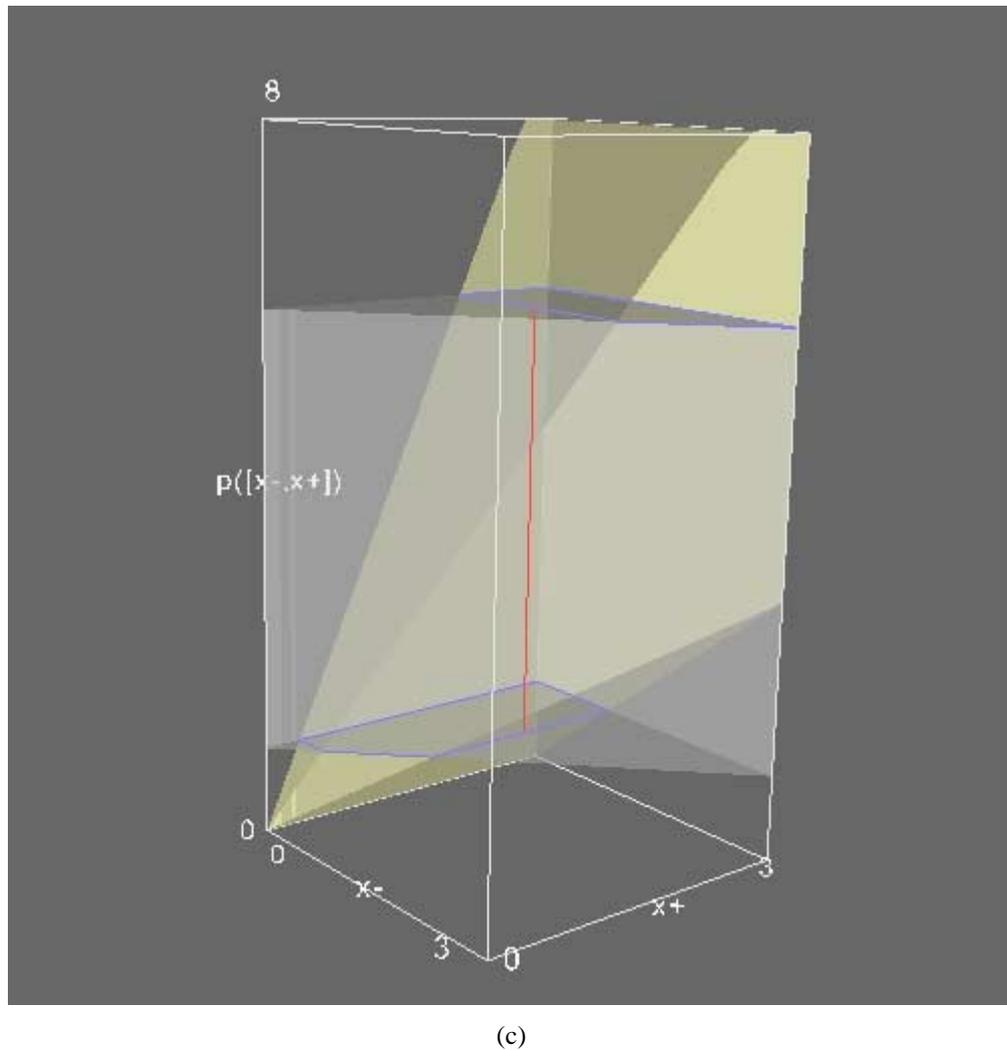
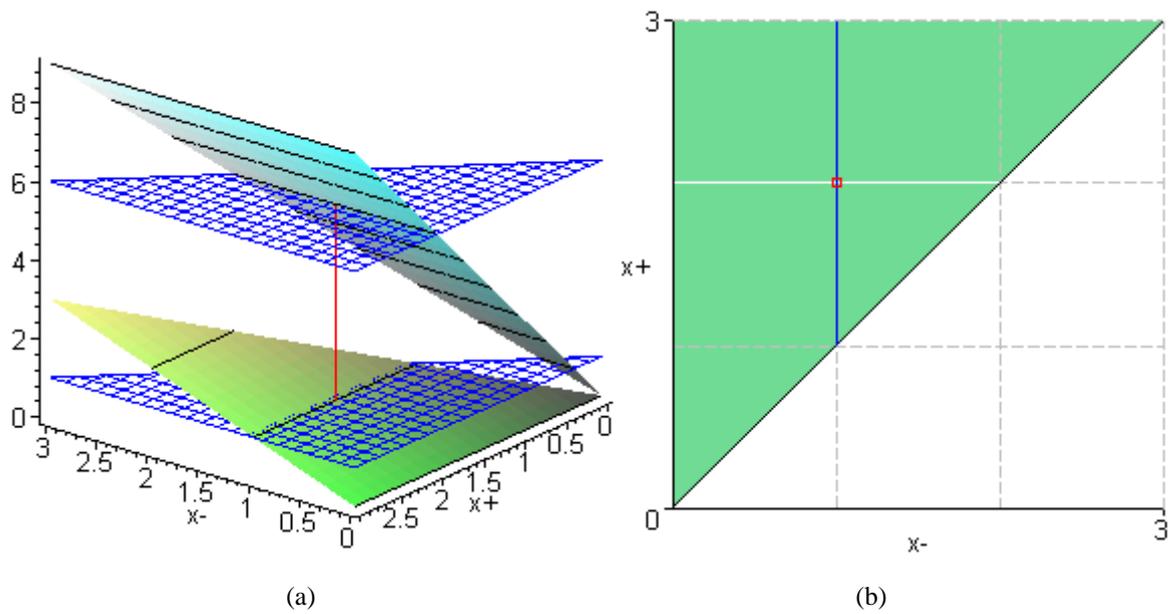


FIGURA 6.8 – Representação da solução própria da equação $[1;3] * [x] = [1;6]$ no Maple V em 3D (a) e em 2D (b), e no ambiente desenvolvido com base no VTK (c). Os pontos de vista das imagens (a) e (c) são diferentes.

A diferença entre as soluções encontradas, isto é o fato de que $[\frac{1}{3};6] \neq [1;2]$, suscita duas considerações importantes:

1. O conceito de solução própria não é o usual na aritmética intervalar clássica, uma vez que somente considera como solução o intervalo que representa a igualdade estrutural de intervalos. Em termos dos componentes reais que fazem parte da solução própria, estes devem ser tais que a avaliação da função no membro esquerdo resulte inclusa no membro direito da equação ou seja igual a este, conforme orienta o Teorema 6.1;
2. No exemplo em questão, conforme a interpretação de solução própria, valores menores que 1 ou maiores que 2 não devem fazer parte da solução própria, pois, por exemplo, algumas das equações reais geradas **não** possuiriam **solução real** com tais valores. Por exemplo, $x = 3$ excede os limites de especificação se o coeficiente de x for efetivamente 3.

Ainda, considerando-se $[x] = [1;2]$,

$$w([1;3]*[x]) = w([1;6]) = 5,$$

mas

$$w\left(\left[\frac{1}{3};6\right]\right) = \frac{17}{3} > 5.$$

Franciosi [FRA 99] apresenta ainda uma forma gráfica de obtenção da solução de equações lineares, que novamente levaria à solução $[x^p] = [1;2]$. Com efeito, segundo essa autora, a equação

$$[1;3]*[x] = [1;6]$$

implica que:

- a solução do produto $[1;3]*[x]$ seja um elemento do octante I^8 , se existir;
- cumpra-se a condição $w([1;3]*[x]) = w([1;6]) = 5$, com $w([x]) \geq 0$.

Considerando a primeira implicação, um produto de intervalos estará no octante I se e somente se ambos intervalos forem do octante I ou ambos intervalos forem do octante IV⁹. Mas $[1;3] \in I$ implica que $[x] \in I$. A partir dessas informações, obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} w([1;3]*[x]) = 5 \\ [x] \in I \\ w([x]) \geq 0 \end{cases}$$

Conforme a associação da multiplicação intervalar com a multiplicação de vetores por escalares proposta por Franciosi, tem-se graficamente que o vetor $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ deve ser transformado de modo a gerar o vetor $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ (Figura 6.9). Como não há alteração de escala em uma das

⁸ Na notação da autora, equivalendo neste trabalho, às regiões I e BI.

⁹ Na notação da autora, equivalendo neste trabalho, às regiões BIII e IV.

dimensões, o menor escalar a multiplicar o vetor $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ deve ser 1. A maior alteração de escala é de 3 para 6, indicando que o maior escalar a multiplicar o vetor $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ deve ser 2. Assim, a solução encontrada é dada pelo intervalo $[x] = [1;2]$.

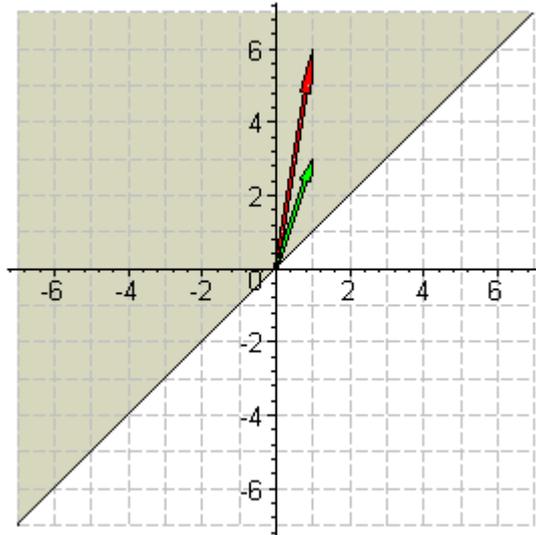


FIGURA 6.9 – Representação da transformação vetorial associada à solução gráfica da equação $[1;3] * [x] = [1;6]$, conforme Franciosi [FRA 99].

Os argumentos acima levam a concluir que no exemplo em questão, a resposta mais adequada para as questões formuladas seria

“tal solução existe e é $\forall x \in [1;2]$ (ou $[x] = [1;2]$)”.

Em tempo, tal solução não poderia ser $[\frac{1}{3};6]$, uma vez que haveria a possibilidade de extrapolação dos limites de segurança impostos na definição do problema. Com efeito,

$$[1;3] * [\frac{1}{3};6] = [\frac{1}{3};18] \not\subset [1;6].$$

Assim, justificada a importância do cálculo de soluções próprias para equações intervalares, torna-se necessária a descrição de algoritmos para a obtenção desse tipo de solução. Esse é o tópico que será abordado nas seções seguintes deste capítulo.

6.4 Algoritmo 1: Determinação de Soluções Próprias de Equações Polinomiais Intervalares

O algoritmo ora apresentado, e denominado neste volume por Algoritmo 1, é baseado na exaustão de casos. Os casos a serem analisados são gerados pela imposição seqüencial de hipóteses de que existam soluções em cada uma das oito regiões da cobertura de $I\mathfrak{R}$, conforme a Definição 4.1.

O problema solucionado pelo Algoritmo 1 pode ser enunciado da seguinte forma:

“Dada a equação

$$\sum_{i=0}^n [a_i] * [x]^i = [b]$$

onde $n \in \mathbf{N}^*$, $\forall i \in \mathbf{N}$, $i \leq n$, $[a_i] \in \mathcal{IR}$, $[b] \in \mathcal{IR}$, $[x] \in \mathcal{IR}$, deseja-se encontrar suas soluções próprias $[x_j^p] \in \mathcal{IR}$, $1 \leq j \leq k$, $k \in \mathbf{N}$, se existir alguma”.

E o Algoritmo 1 pode ser descrito na forma que segue:

Inputs:

$[a_i] \in \mathcal{IR}$, $\forall i \in \mathbf{N}$, $i \leq n$, os coeficientes do polinômio que compõe o membro esquerdo da equação;

$[b] \in \mathcal{IR}$, o membro direito da equação.

Outputs:

$\{[x_j^p] \in \mathcal{IR}\}$, $1 \leq j \leq k$, $k \in \mathbf{N}$, a lista de soluções próprias da equação intervalar.

Descrição do Algoritmo 1:

1. Início;
2. Para cada região R da cobertura de \mathcal{IR} apresentada na Definição 4.1 faça:
 - 2.1. Assuma que $[x] \in R$, supondo adequadamente as restrições apresentadas a seguir:

$[x] \in O$	\Rightarrow	$\underline{x} = \bar{x} = 0$
$[x] \in I$	\Rightarrow	$0 < \underline{x} \leq \bar{x}$
$[x] \in BI$	\Rightarrow	$0 = \underline{x} < \bar{x}$
$[x] \in II$	\Rightarrow	$(\underline{x} < 0 < \bar{x}) \wedge (\underline{x} < \bar{x})$
$[x] \in BII$	\Rightarrow	$(\underline{x} < 0 < \bar{x}) \wedge (\underline{x} = \bar{x})$
$[x] \in III$	\Rightarrow	$(\underline{x} < 0 < \bar{x}) \wedge (\underline{x} > \bar{x})$
$[x] \in BIII$	\Rightarrow	$\underline{x} < \bar{x} = 0$
$[x] \in IV$	\Rightarrow	$\underline{x} \leq \bar{x} < 0$
 - 2.2. Para $i = 1..n$ faça:
 - 2.2.1. A partir do Teorema 5.1, armazene a região e a expressão analítica da potência $[x]^i \in \mathcal{IR}$;
 - 2.3. Fim-Para;
 - 2.4. Armazene **expressão**[1] := $[a_0]$;
 - 2.5. Armazene **hipótese**[1] := $\{[x] \in R\}$;
 - 2.6. Para $i = 1..n$ faça:
 - 2.6.1. $k :=$ número de entradas da lista **expressão**;
 - 2.6.2. Se $([a_i] \in II \vee [a_i] \in III) \wedge ([x]^i \in II \vee [x]^i \in III)$, então:
 - 2.6.2.1. Duplique as entradas da lista **expressão**, copiando-as nas posições $k+1$ até $2*k$;
 - 2.6.2.2. Duplique as entradas da lista **hipótese**, copiando-as nas posições $k+1$ até $2*k$;
 - 2.6.2.3. Para $j := 1..k$ faça:
 - 2.6.2.3.1. Adicione à **expressão**[j] as expressões analíticas do monômio $[a_i] * [x]^i$ no primeiro caso alternativo;

- 2.6.2.3.2. Adicione à **hipótese**[j] as hipóteses adicionais necessárias para a determinação do primeiro caso alternativo;
- 2.6.2.4. Fim-Para;
- 2.6.2.5. Para $j := k+1..2*k$ faça:
- 2.6.2.5.1. Adicione à **expressão**[j] as expressões analíticas do monômio $[a_i]*[x]^i$ no segundo caso alternativo;
- 2.6.2.5.2. Adicione à **hipótese**[j] as hipóteses adicionais necessárias para a determinação do segundo caso alternativo;
- 2.6.2.6. Fim-Para;
- 2.6.3. Senão
- 2.6.3.1. Para $j := 1..k$ faça:
- 2.6.3.1.1. Adicione à **expressão**[j] as expressões analíticas do monômio $[a_i]*[x]^i$;
- 2.6.3.2. Fim-Para;
- 2.6.4. Fim-Se;
- 2.7. Fim-Para;
- 2.8. Para cada combinação de casos gerada faça:
- 2.8.1. Resolva o sistema real de grau n e dimensão 2 armazenado na entrada da lista **expressão**,
- $$\begin{cases} \sum_{i=0}^n [a_i] * [x]^i = \underline{b} \\ \sum_{i=0}^n [a_i] * [x]^i = \bar{b} \end{cases}$$
- representando a equação intervalar a ser resolvida, $\sum_{i=0}^n [a_i] * [x]^i = [b]$;
- 2.8.2. Elimine as soluções que não representem intervalos reais ou que não satisfaçam às hipóteses armazenadas na entrada correspondente da lista **hipótese**;
- 2.8.3. Apresente as soluções;
- 2.9. Fim-Para;
3. Fim-Para;
4. Fim.

Na próxima seção encontra-se uma discussão sobre a complexidade do Algoritmo 1. Em seguida, exemplos de aplicação do algoritmo serão apresentados.

6.5 Análise da Complexidade do Algoritmo 1

Esta seção apresenta a avaliação da complexidade do algoritmo proposto, tendo como referência de desenvolvimento o livro de Toscani e Veloso [TOS 2001]. Para facilitar a compreensão do raciocínio analítico realizado os seguintes fatos são observados:

- o algoritmo é exaustivo do ponto de vista da análise de casos, cobrindo a possibilidade de existência de soluções em cada uma das oito regiões da cobertura de \mathbb{R} ;
- o algoritmo é essencialmente algébrico, havendo poucas partes dotadas de cálculos numéricos: das etapas 1 a 2.7, o algoritmo simplesmente gera um conjunto de listas

contendo os polinômios reais a serem analisados e as informações necessárias para a validação das soluções encontradas; a parte numérica do algoritmo restringe-se à determinação das soluções dos sistemas que representam os polinômios obtidos;

- a principal contribuição sobre a complexidade do algoritmo vem do custo de avaliação do produto de números-intervalo, conforme enunciado no Teorema 4.2, e ocorre quando tanto os coeficientes quanto a solução forem assumidos nas regiões II ou III.

A descrição detalhada das complexidades em cada etapa do Algoritmo 1 é apresentada no Anexo 2. De modo a tornar a análise mais geral, é adotada a Definição 6.3:

Definição 6.3: Para efeitos de análise do Algoritmo 1, a complexidade associada à resolução de um sistema polinomial, em geral não linear, real de ordem 2 e potência n é denotada por $snl(n)$.

6.5.1 Cálculo da Complexidade de Pior Caso do Algoritmo 1

O pior caso de análise é o de uma equação polinomial na qual todos os coeficientes pertençam às regiões II ou III. Assumindo-se que o grau dessa equação polinomial seja n , os seguintes resultados auxiliares são obtidos:

Lema 6.1 (Complexidade Mínima de uma Iteração do Algoritmo 1): Seja uma equação polinomial intervalar de grau n . A complexidade mínima de pior caso para uma iteração do Algoritmo 1 é dada quando é suposto que a solução pertence a uma das seguintes regiões: O, I, BI, BII, BIII ou IV. Nesse caso, a complexidade resultante é dada pelas seguintes expressões:

- Número de comparações: $14 * n$;
- Número de atribuições: $4 * n + 3$;
- Número de sistemas a resolver numericamente: $snl(n)$.

Prova: A essência da prova é a exploração das complexidades das linhas do algoritmo à luz dos teoremas 4.1 e 4.2. Os detalhes são apresentados no Anexo 1.8. ■

Lema 6.2 (Complexidade Máxima de uma Iteração do Algoritmo 1): Seja uma equação polinomial intervalar de grau n . A complexidade máxima de pior caso para uma iteração do Algoritmo 1 é dada quando é suposto que a solução pertence à região II ou III. Nesse caso, a complexidade resultante é dada pelas seguintes expressões:

- Número de comparações: $14 * n$;
- Número de atribuições: $(2^{n+3} - 4) * n + 3$;
- Número de sistemas a resolver numericamente: $2^n * snl(n)$.

Prova: Similarmente ao lema anterior, a essência da prova é a análise das complexidades das linhas do algoritmo à luz dos teoremas 4.1 e 4.2. O detalhamento encontra-se no Anexo 1.9. ■

Os resultados apresentados nos lemas 6.1 e 6.2 permitem a determinação da complexidade de pior caso do Algoritmo 1, conforme o Teorema 6.2:

Teorema 6.2 (Complexidade de Pior Caso do Algoritmo 1): A complexidade de pior caso, denotada por $C_p(n)$, para a aplicação do Algoritmo 1 sobre uma equação polinomial intervalar de grau n é

$$C_p(n) \sim O((2^{n+1} + 6) * \text{snl}(n)).$$

Prova do Teorema 6.2: A prova é realizada diretamente, explorando os resultados dos lemas 6.1 e 6.2, conforme apresenta o Anexo 1.10. ■

O resultado do Teorema 6.2 demonstra que o algoritmo gerado é de complexidade exponencial, não possuindo qualidades de eficiência em termos computacionais. No entanto, cabe observar que essa característica é devida às condições expostas no Teorema 4.2, sendo, portanto, herdada da operação de multiplicação intervalar. Ainda, as seções seguintes demonstrarão que a complexidade média do Algoritmo 1 apresenta uma sensível vantagem sobre a complexidade de pior caso.

6.5.2 Cálculo da Complexidade Média do Algoritmo 1

A complexidade de caso médio do Algoritmo 1 depende da observação de quantos coeficientes são geralmente encontrados nas regiões II ou III, de modo a gerar complexidades exponenciais. Para tanto, o Lema 6.3 é enunciado:

Lema 6.3 (Complexidade Associada a uma Equação Polinomial Intervalar com c Coeficientes nas Regiões II ou III): Considerando uma equação polinomial intervalar de grau n com exatamente c coeficientes pertencendo às regiões II ou III, a complexidade gerada pelo Algoritmo 1 será

$$O((2^{c+1} + 6) * \text{snl}(n)).$$

Prova: A ordem de complexidade gerada pela aplicação do Algoritmo 1 sobre uma equação polinomial intervalar de grau n com exatamente c coeficientes pertencendo às regiões II ou III será igual à complexidade gerada para uma equação polinomial intervalar de grau c e com todos os coeficientes nessas regiões. Isso porque pelo Teorema 6.2 a ordem de complexidade depende estritamente do número de sistemas alternativos a serem resolvidos. Logo, é válido o Lema 6.3. ■

O Lema 6.4 também é relevante para o cálculo da complexidade média da aplicação do Algoritmo 1:

Lema 6.4 (Distribuição de Frequências dos Casos de Aplicação do Algoritmo 1): Dada uma equação polinomial intervalar de grau n . Então:

- O número de diferentes possibilidades de geração de equações com exatamente c coeficientes nas regiões II ou III é dado por $\binom{n}{c}$;

- O número total de possibilidades, considerando $0 \leq c \leq n$, é dado por $\sum_{c=0}^n \binom{n}{c} = 2^n$.

Prova: Estes são resultados elementares de análise combinatória, podendo ser encontrados genericamente em [GER 99]. ■

A partir dos resultados dos lemas 6.3 e 6.4 pode-se obter a complexidade média do Algoritmo 1:

Teorema 6.3 (Complexidade Média do Algoritmo 1): A aplicação do Algoritmo 1 sobre uma equação polinomial intervalar de grau n tem complexidade média de ordem dada por

$$\bar{C}(n) \sim O\left(2 * \left(\frac{3}{2}\right)^n + 6\right) * \text{snl}(n).$$

Prova do Teorema 6.3: Conforme mostra o Anexo 1.11, a essência da prova deste teorema é a exploração dos resultados dos lemas 6.3 e 6.4 sobre a definição de complexidade média de um algoritmo. ■

A próxima seção complementa os resultados ora apresentados, comparando-os em algumas situações típicas.

6.5.3 Considerações Adicionais Sobre a Complexidade do Algoritmo 1

A primeira consideração relevante é a comparação entre as complexidades de pior caso e média. A mudança da base exponencial de 2 para 1.5 na expressão da complexidade média indica uma grande diferenciação quanto maior o grau do problema. A Figura 6.10 apresenta uma comparação entre as magnitudes das complexidades obtidas, com o intuito de facilitar a compreensão das expressões calculadas. Os valores utilizados para a geração dessa figura são apresentados no Quadro 6.1.

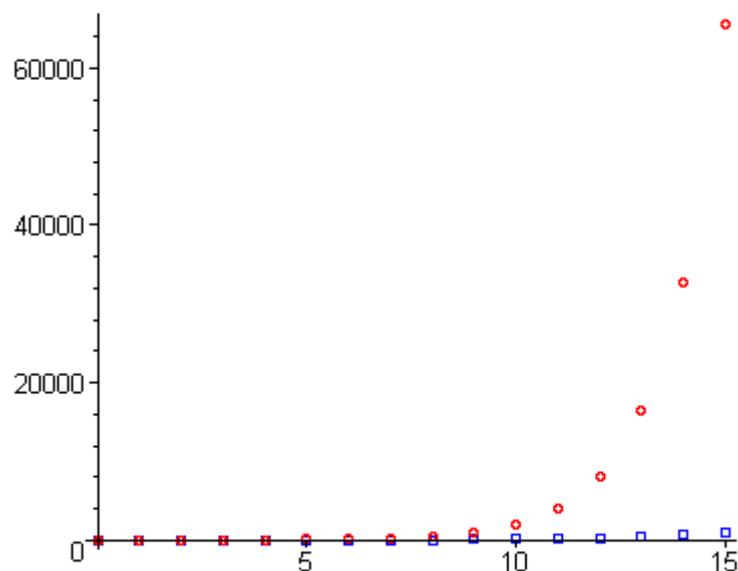


FIGURA 6.10 – Comparação entre a complexidade de pior caso (círculos) e a complexidade média (quadrados) do Algoritmo 1.

n	$C_p(n)$ (* snl(n))	$\bar{C}(n)$ (* snl(n))
1	1.00×10^1	9.00×10^0
2	1.40×10^1	1.05×10^1
3	2.20×10^1	1.28×10^1
4	3.80×10^1	1.61×10^1
5	7.00×10^1	2.12×10^1
6	1.34×10^2	2.88×10^1
7	2.62×10^2	4.02×10^1
8	5.18×10^2	5.73×10^1
9	1.03×10^3	8.29×10^1
10	2.05×10^3	1.21×10^2
11	4.10×10^3	1.79×10^2
12	8.20×10^3	2.65×10^2
13	1.64×10^4	3.95×10^2
14	3.28×10^4	5.90×10^2
15	6.55×10^4	8.82×10^2

QUADRO 6.1 – Comparação entre as complexidades de pior caso e de caso médio do Algoritmo 1.

A seguir, o Quadro 6.2 apresenta uma comparação considerando a execução do Algoritmo 1 em três computadores hipotéticos, com capacidades de processamento x , $10x$ e $100x$. Nessas condições, considerando-se como base de comparação o tempo necessário para a resolução de um problema de tamanho n no computador de menor capacidade, os tamanhos equivalentes de problemas que poderiam ser resolvidos nos computadores mais potentes, no mesmo tempo seriam acrescidos por constantes logarítmicas.

Complexidade	Capacidade de Processamento		
	x	10x	100x
C_p	n	$n + \log_2(10) \cong n + 3.32$	$n + 2 * \log_2(10) \cong n + 6.64$
\bar{C}	n	$n + \log_{1.5}(10) \cong n + 5.68$	$n + 2 * \log_{1.5}(10) \cong n + 11.36$

QUADRO 6.2 – Análise comparativa do tamanho de problema equivalente considerando-se, para o Algoritmo 1, um tempo de solução fixo e diferentes velocidades de processamento.

Conforme observado anteriormente, a complexidade exponencial obtida não é dependente propriamente da forma do algoritmo apresentado, mas sim da necessidade de subdivisão do processo de solução causada pela não unicidade das expressões algébricas que determinam a multiplicação entre intervalos das regiões II ou III, conforme explicitado na Seção 4.3. Se for possível a resolução deste problema de modo que tais expressões sejam definidas univocamente, a componente exponencial da ordem de complexidade será reduzida a uma constante e a complexidade geral do algoritmo reduzir-se-ia à determinada pelo segundo

parênteses, sendo muito provavelmente dominada pela complexidade associada à resolução dos sistemas não lineares de ordem 2 e grau n , ou seja, $\text{snl}(n)$. Infelizmente, no entanto, sabe-se que a determinação de soluções de sistemas intervalares é um problema NP-Completo [KRE 93, KRE 96, ROH 96, KEA 96, COX 99], o que remete essa discussão à conjectura $P = NP$. Como essa discussão excede o horizonte proposto por esse trabalho, não serão referidas outras considerações sobre este tópico ou sobre a otimização do Algoritmo 1.

6.6 Exemplos de Soluções Próprias Obtidas com Algoritmo 1

O objetivo desta seção é apresentar alguns exemplos de aplicação do Algoritmo 1. Em particular, será apresentado um exemplo detalhado de sua execução, com o objetivo de facilitar sua compreensão. Os exemplos apresentados foram gerados com o suporte de implementações no ambiente de matemática simbólica Maple V, Release 5.00. Conforme dito no Capítulo 1, não foram implementados algoritmos adicionais para a solução dos sistemas de equações reais gerados, sendo utilizados os fornecidos pelo ambiente do Maple V. Os algoritmos foram desenvolvidos de modo a operar simbolicamente com o objetivo de evitar a inclusão de erros de arredondamento nas soluções encontradas, coerentemente com o cunho analítico deste trabalho. No entanto os resultados finais são apresentados em notação de ponto flutuante, de modo a simplificar a compreensão e a comparação das soluções.

Os exemplos apresentados buscam caracterizar diferentes aspectos da obtenção de soluções próprias de equações intervalares. Será apresentada apenas uma pequena quantidade de exemplos, visto que soluções próprias não são usualmente consideradas na literatura de referência. Devido a essa escassez, a maioria dos exemplos a seguir foi gerada pelo autor, não possuindo, portanto, resultado comparativo no conjunto de referências bibliográficas. Conforme referido anteriormente, as saídas das execuções dos algoritmos implementados, bem como os gráficos tridimensionais encontram-se em mídia digital, no endereço www.mat.pucrs.br/~vaccaro/sei/. Espera-se que o aporte gráfico facilite a compreensão do significado de solução própria e auxilie na validação destes exemplos.

Exemplo 6.5: A equação linear $[2;3] * [x] + [-7;-5] = [-13;-2]$ possui somente uma solução própria, dada por

$$[x^p] = [-2;1],$$

como ilustra a Figura 6.11.

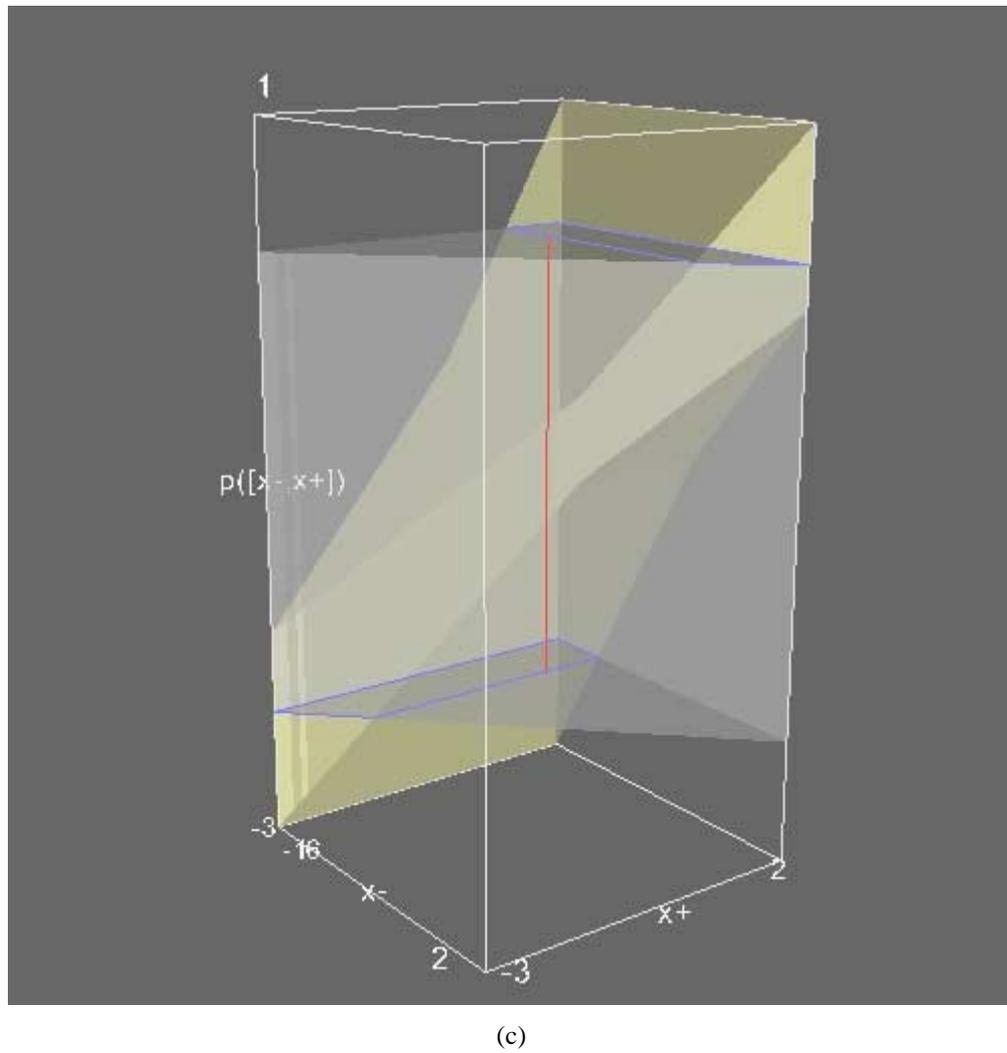
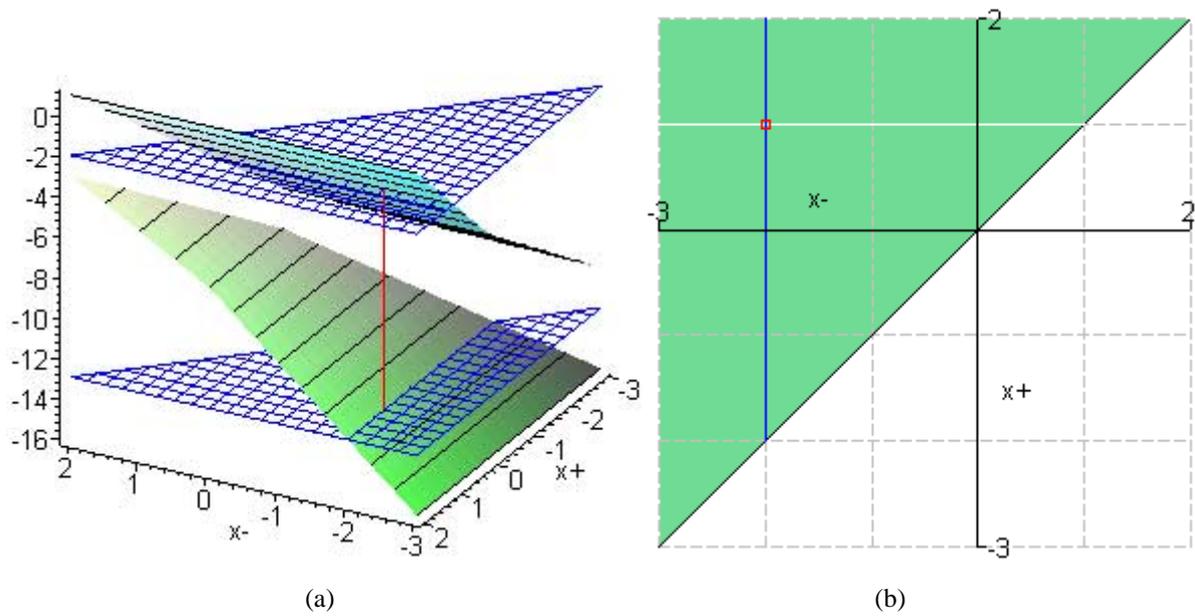


FIGURA 6.11 – Representação gráfica da solução própria da equação $[2;3] * [x] + [-7;-5] = [-13;-2]$ no Maple V em 3D (a) e em 2D (b), e no ambiente desenvolvido com base no VTK (c). Os pontos de vista das imagens (a) e (c) são diferentes.

A seguir são apresentadas as principais etapas do fluxo lógico executado para a determinação dessa solução:

Hipótese: $[x] \in O \Rightarrow \underline{x} = 0 \wedge \bar{x} = 0$

Nesse caso,

$[2;3]^*[x] = [0;0]$ e $[2;3]^*[x] \in O$.

Então:

$$[2;3]^*[x] + [-7; -5] = [-13; -2] \Leftrightarrow [0;0] + [-7; -5] = [-13; -2] \Leftrightarrow \begin{cases} 0 - 7 = -13 \\ 0 - 5 = -2 \end{cases}$$

Conclusão: não há solução na região O.

Hipótese: $[x] \in I \Rightarrow 0 < \underline{x} \leq \bar{x}$

Nesse caso,

$[2;3]^*[x] = [2 * \underline{x}; 3 * \bar{x}]$, $[2;3]^*[x] \in I$

Então:

$$[2;3]^*[x] + [-7; -5] = [-13; -2] \Leftrightarrow$$

$$[2 * \underline{x}; 3 * \bar{x}] + [-7; -5] = [-13; -2] \Rightarrow \begin{cases} 2 * \underline{x} - 7 = -13 \\ 3 * \bar{x} - 5 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{x} = -3 \\ \bar{x} = 1 \end{cases} \Rightarrow [x] = [-3; 1]$$

Conclusão: como $[-3; 1] \notin I$, não há solução na região I.

Hipótese: $[x] \in BI \Rightarrow 0 = \underline{x} < \bar{x}$

Nesse caso,

$[2;3]^*[x] = [0; 3 * \bar{x}]$, $[2;3]^*[x] \in BI$

Então:

$$[2;3]^*[x] + [-7; -5] = [-13; -2] \Leftrightarrow$$

$$[0; 3 * \bar{x}] + [-7; -5] = [-13; -2] \Rightarrow \begin{cases} 0 - 7 = -13 \\ 3 * \bar{x} - 5 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7 = -13 \\ 3 * \bar{x} = 3 \end{cases}$$

Conclusão: não há solução na região BI.

Hipótese: $[x] \in II \Rightarrow (\underline{x} < 0 < \bar{x}) \wedge (\underline{x} < \bar{x})$

Nesse caso,

$[2;3]^*[x] = [3 * \underline{x}; 3 * \bar{x}]$, $[2;3]^*[x] \in II$

Então:

$$[2;3] * [x] + [-7;-5] = [-13;-2] \Leftrightarrow$$

$$[3 * \underline{x}; 3 * \bar{x}] + [-7;-5] = [-13;-2] \Rightarrow \begin{cases} 3 * \underline{x} - 7 = -13 \\ 3 * \bar{x} - 5 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{x} = -2 \\ \bar{x} = 1 \end{cases} \Rightarrow [x] = [-2;1]$$

Conclusão: como $[-2;1] \notin \text{II}$, não há solução na região II.

Hipótese: $[x] \in \text{BII} \Rightarrow (\underline{x} < 0 < \bar{x}) \wedge (|\underline{x}| = \bar{x} = x)$

Nesse caso,

$$[2;3] * [x] = [3 * x; 3 * x], [2;3] * [x] \in \text{BII}$$

Então:

$$[2;3] * [x] + [-7;-5] = [-13;-2] \Leftrightarrow$$

$$[3 * x; 3 * x] + [-7;-5] = [-13;-2] \Rightarrow \begin{cases} 3 * x - 7 = -13 \\ 3 * x - 5 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 * x = -6 \\ 3 * x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Conclusão: não há solução na região BII.

Hipótese: $[x] \in \text{III} \Rightarrow (\underline{x} < 0 < \bar{x}) \wedge (|\underline{x}| > \bar{x})$

Nesse caso,

$$[2;3] * [x] = [3 * \underline{x}; 3 * \bar{x}], [2;3] * [x] \in \text{III}$$

Então:

$$[2;3] * [x] + [-7;-5] = [-13;-2] \Leftrightarrow$$

$$[3 * \underline{x}; 3 * \bar{x}] + [-7;-5] = [-13;-2] \Rightarrow \begin{cases} 3 * \underline{x} - 7 = -13 \\ 3 * \bar{x} - 5 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 * \underline{x} = -6 \\ 3 * \bar{x} = 3 \end{cases} \Rightarrow [x] = [-2;1]$$

Conclusão: solução encontrada na região III: $[x] = [-2;1]$.

Hipótese: $[x] \in \text{BIII} \Rightarrow \underline{x} < \bar{x} \leq 0$

Nesse caso,

$$[2;3] * [x] = [3 * \underline{x}; 0], [2;3] * [x] \in \text{BIII}$$

Então:

$$[2;3] * [x] + [-7;-5] = [-13;-2] \Leftrightarrow$$

$$[3 * \underline{x}; 0] + [-7;-5] = [-13;-2] \Rightarrow \begin{cases} 3 * \underline{x} - 7 = -13 \\ 0 - 5 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 * \underline{x} = -6 \\ -5 = -2 \end{cases}$$

Conclusão: não há solução na região BIII.

Hipótese: $[x] \in \text{IV} \Rightarrow \underline{x} \leq \bar{x} < 0$

Nesse caso,

$$[2;3]*[x] = [3*\underline{x}; 2*\overline{x}], [2;3]*[x] \in IV$$

Então:

$$[2;3]*[x] + [-7;-5] = [-13;-2] \Leftrightarrow$$

$$[3*\underline{x}; 2*\overline{x}] + [-7;-5] = [-13;-2] \Rightarrow \begin{cases} 3*\underline{x} - 7 = -13 \\ 2*\overline{x} - 5 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3*\underline{x} = -6 \\ 2*\overline{x} = 3 \end{cases} \Rightarrow [x] = [-2; \frac{3}{2}]$$

Conclusão: como $[-2; \frac{3}{2}] \notin IV$, não há solução na região IV.

Isto encerra a execução do Algoritmo 1 para o Exemplo 6.5.

Exemplo 6.6: Conforme apresentado na Seção 5.4, a equação $[-1;2] * [x] = [-2;4]$ possui infinitas soluções próprias, dadas por

$$[x^p] = [\underline{x}; 2], \forall \underline{x} \in [-1;2].$$

Este resultado pode ser verificado com o auxílio da Figura 6.12, apresentada adiante.

Exemplo 6.7: A equação linear $[-1;2] * [x] + [-3;4] = [-5;8]$ também apresenta infinitas soluções próprias, dadas por

$$[x^p] = [\underline{x}; 2], \forall \underline{x} \in [-1;2],$$

conforme ilustra a Figura 6.13.

Exemplo 6.8: A equação linear $[-1;3] * [x] + [-1;0] = [1;12]$ não possui soluções próprias. Este fato pode ser observado na Figura 6.14, atentando-se para a ausência de intersecção das limitantes inferiores entre os volumes que representam os membros da equação.

Exemplo 6.9: A equação de segundo grau $[1;2] * [x]^2 = [2;4]$ possui duas soluções próprias degeneradas,

$$[x^p] = [-\sqrt{2}; -\sqrt{2}] \text{ e } [x^p] = [\sqrt{2}; \sqrt{2}].$$

A Figura 6.15 apresenta ambas soluções.

Exemplo 6.10: Para a equação $[5;6] * [x]^2 + [-4;-3] * [x] = [-11;93]$ são determinadas duas soluções próprias distintas,

$$[x^p] = [1;4] \text{ e } [x^p] = [-3.617756530; 0.4279066864].$$

A Figura 6.16 apresenta ambas soluções.

Exemplo 6.11: Apesar de ser uma equação de segundo grau, $[1;3] * [x]^2 + [5;6] * [x] = [6;72]$ apresenta somente uma solução própria, dada por

$$[x^p] = [1;4].$$

A Figura 6.17(b) permite compreender melhor este fato, visto que apresenta somente uma intersecção simultânea entre as limitantes superiores e inferiores. Pela análise dessa imagem, pode-se extrapolar que a segunda intersecção seria obtida no terceiro quadrante do plano cartesiano, porém fora de $\mathbb{I}\mathfrak{R}$. De toda forma, essa solução não representaria um intervalo próprio de $\mathbb{I}\mathfrak{R}$.

Exemplo 6.12: A equação $[-1;6]*[x]^3 + [-1;2]*[x]^2 + [-3;1]*[x] + [7;8] = [-1;15]$ apresenta como solução própria

$$[x^p] = \left[-1; \frac{1}{3}\right],$$

conforme mostra a Figura 6.18. Esta é a única solução própria encontrada para esta equação de terceiro grau, conforme pode ser evidenciado pela Figura 6.18(b).

Exemplo 6.13: A equação de segundo grau $[-5;2]*[x]^2 + [-4;3]*[x] = [-140;70]$ possui infinitas soluções próprias, dadas por

$$[x^p] = [-5; \bar{x}], \forall \bar{x} \in [-5;2] \text{ e } [x^p] = [-2.253299832; 4.906599664].$$

Este resultado é apresentado na Figura 6.19. Em particular, observe-se pela Figura 6.19(b) a efetiva presença de uma solução própria isolada das demais.

Exemplo 6.14: A Figura 6.20 apresenta a única solução própria encontrada para a equação de quarto grau $[-1;5]*[x]^4 + [-4;3]*[x]^3 + [-5;3]*[x]^2 + [1;4]*[x] + [3;5] = [-10;20]$, dada por

$$[x^p] = [-0.444444444444; 1].$$

Exemplo 6.15: Conforme mostra a Figura 6.21, somente uma solução própria é determinada para a equação $[-0.1;0.1]*[x]^4 + [3;4]*[x]^3 + [1;3]*[x]^2 + [5;8]*[x] + [3;5] = [-27;65]$. Essa solução é dada por

$$[x^p] = [-0.9628113533; 1.977316410].$$

Exemplo 6.16: A equação de quinto grau $[-1;1]*[x]^5 = [-32;32]$ apresenta um conjunto interessante de soluções próprias das por

$$[x^p] = [\underline{x}; 2], \forall \underline{x} \in [-2;2] \text{ e } [x^p] = [2; \bar{x}], \forall \bar{x} \in [-2;2].$$

A Figura 6.22 ilustra essas soluções.

Exemplo 6.17: Para a equação de sexto grau $[-1;2]*[x]^6 + [-1;2]*[x]^5 + [-1;2]*[x]^4 + [-1;2]*[x]^3 + [-1;2]*[x]^2 + [-1;2]*[x] + [-1;2] = [-127;254]$ são determinadas infinitas soluções próprias, dadas por

$$[x^p] = [\underline{x}; 2], \forall \underline{x} \in [-1;2],$$

conforme apresentado na Figura 6.23.

Exemplo 6.18: A Figura 6.24 apresenta as soluções próprias encontradas para a equação de grau 10 $[0;1]*[x]^{10} + [0;1]*[x]^8 + [0;1]*[x]^6 + [0;1]*[x]^4 + [0;1]*[x]^2 + [0;1] = [0;6]$, dadas por

$$[x^p] = [-1; \bar{x}], \forall \bar{x} \in [-1;0] \text{ e } [x^p] = [\underline{x}; 1], \forall \underline{x} \in [0;1].$$

Em particular observe-se que a intersecção das limitantes inferiores ocupa totalmente as regiões I, BI, BIII e IV, mas não ocupa as regiões relacionadas a intervalos bivalentes, coerentemente com a discussão realizada no Capítulo 3.

Exemplo 6.19: Conforme mostra a Figura 6.25, a equação de nono grau $[-1.2; -1.1]*[x]^9 + [0.9; 1.0]*[x]^7 + [-0.8; -0.7]*[x]^5 + [0.5; 0.6]*[x]^3 + [-0.4; -0.3]*[x] + [0.1; 0.2] = [-1; 2]$ possui somente uma solução própria, dada por

$$[x^p] = [-0.9617235073; -0.5342597021].$$

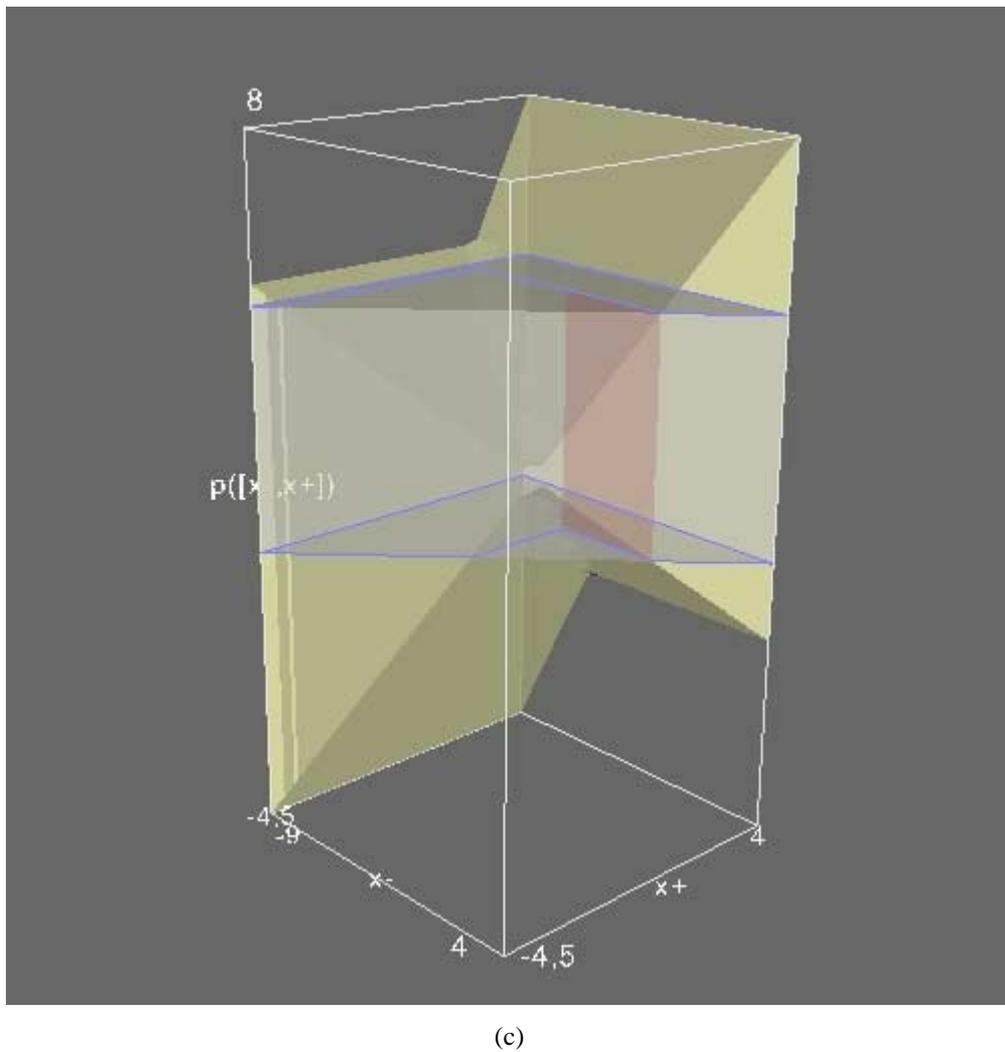
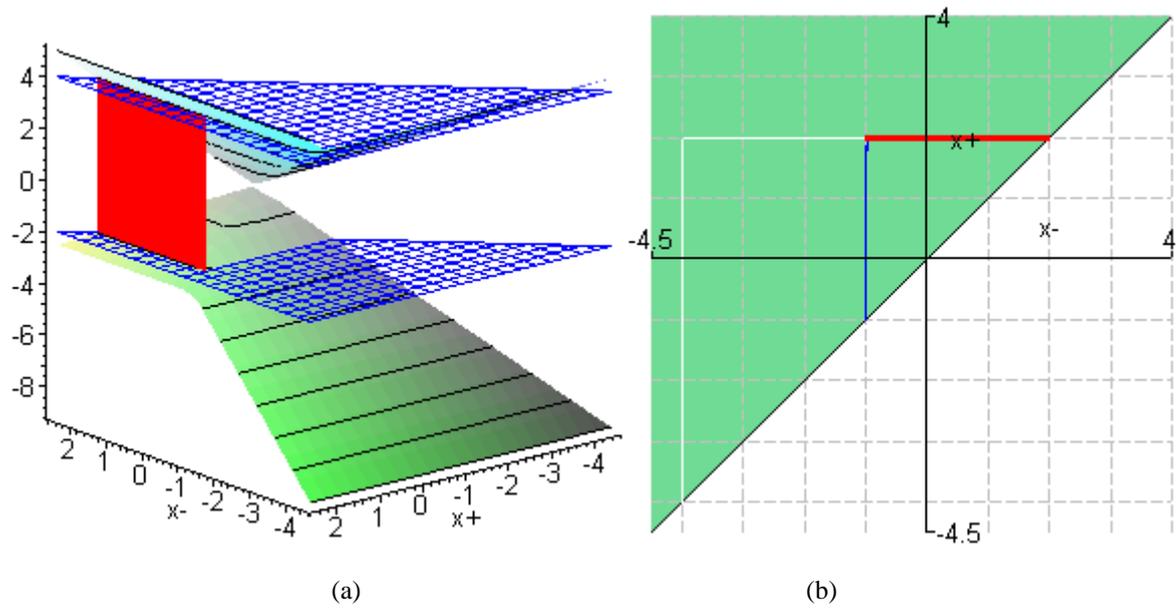


FIGURA 6.12 – Representação gráfica das soluções próprias da equação $[-1;2] * [x] = [-2;4]$ no Maple V em 3D (a) e em 2D (b), e no ambiente desenvolvido com base no VTK (c). Os pontos de vista das imagens (a) e (c) são diferentes.

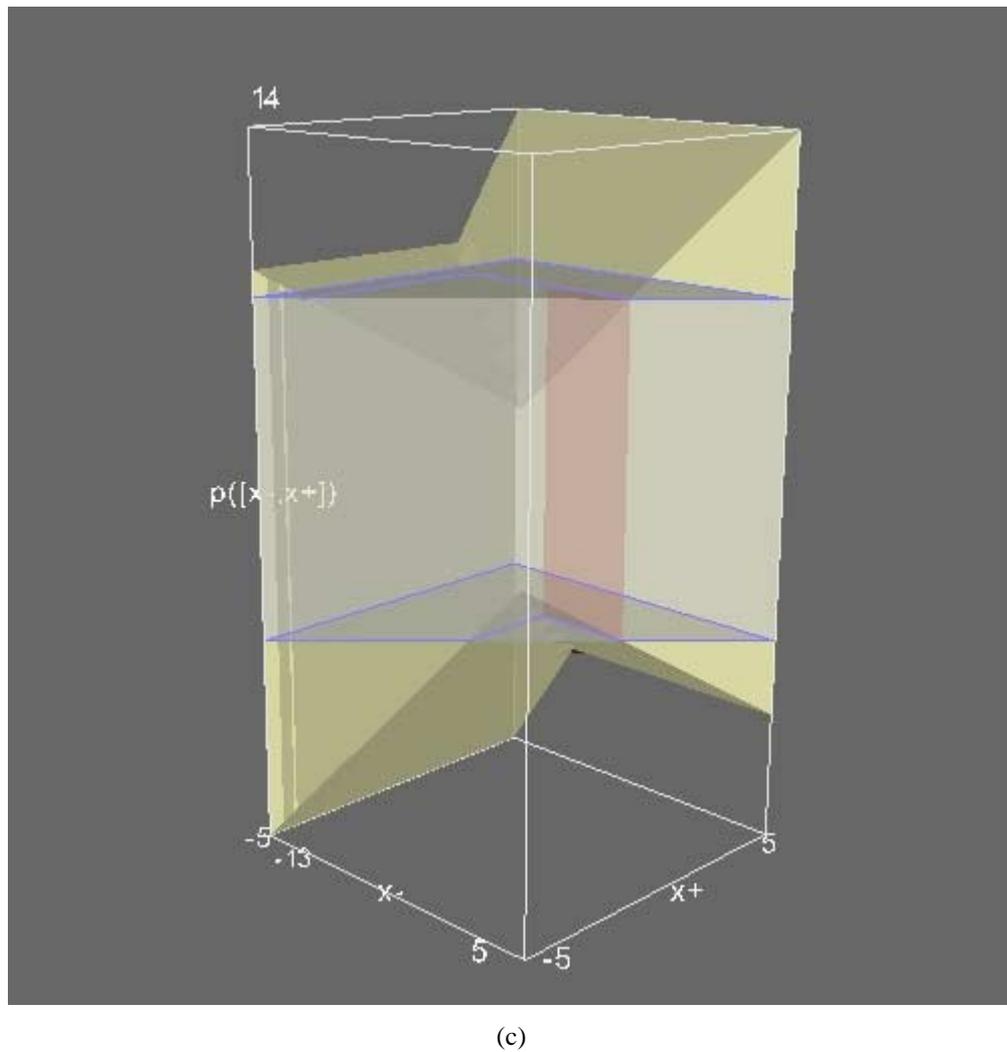
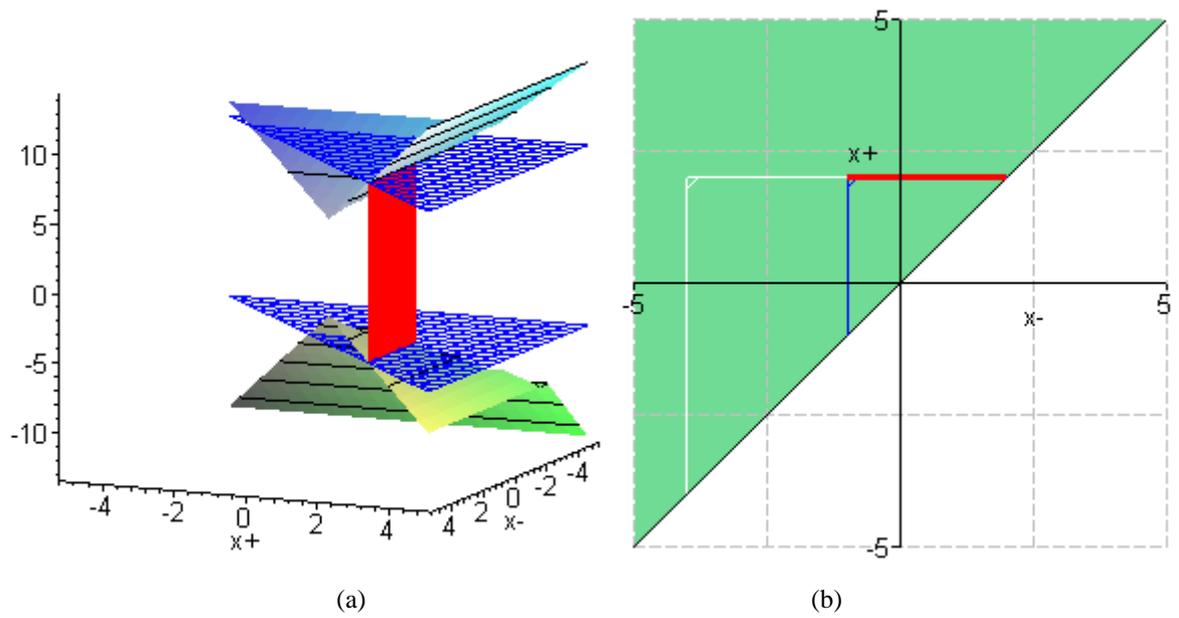
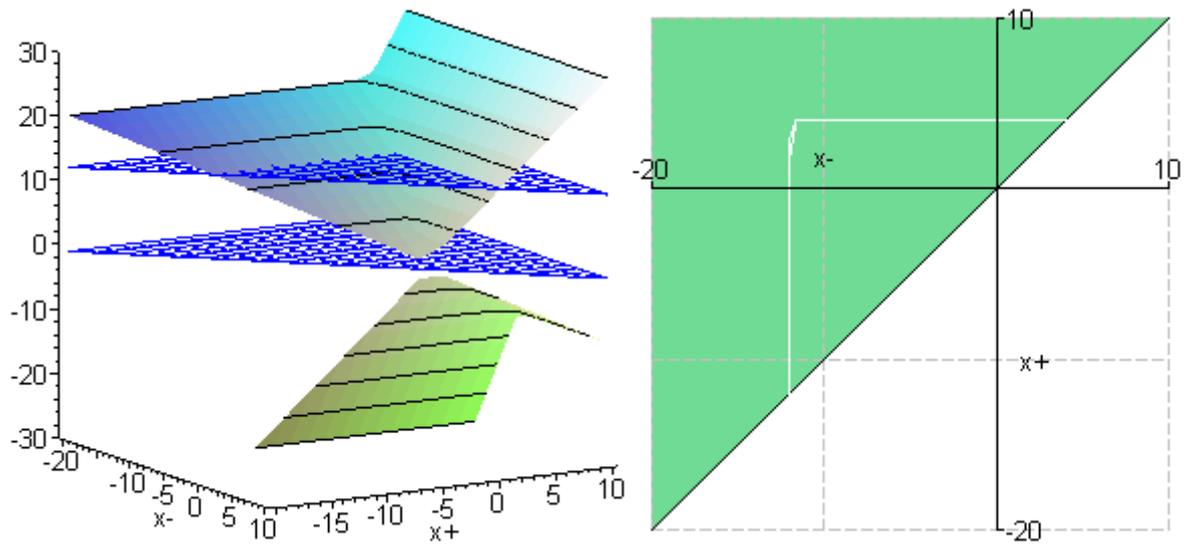
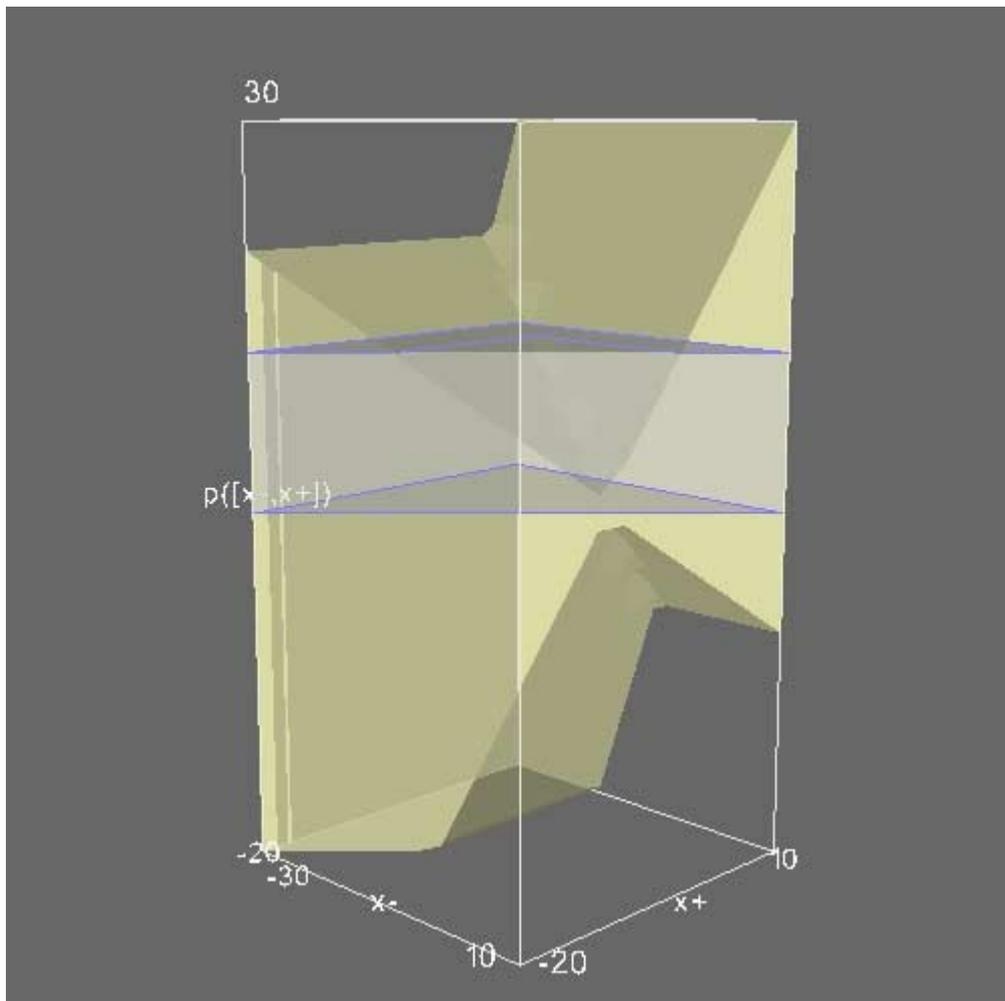


FIGURA 6.13 – Representação gráfica das soluções próprias da equação $[-1;2] * [x] + [-3;4] = [-5;8]$ no Maple V em 3D (a) e em 2D (b), e no ambiente desenvolvido com base no VTK (c). Os pontos de vista das imagens (a) e (c) são diferentes.



(a)

(b)



(c)

FIGURA 6.14 – Representação gráfica da ausência de soluções próprias da equação $[-1;3] * [x] + [-1;0] = [1;12]$ no Maple V em 3D (a) e em 2D (b), e no ambiente desenvolvido com base no VTK (c). Os pontos de vista das imagens (a) e (c) são diferentes.

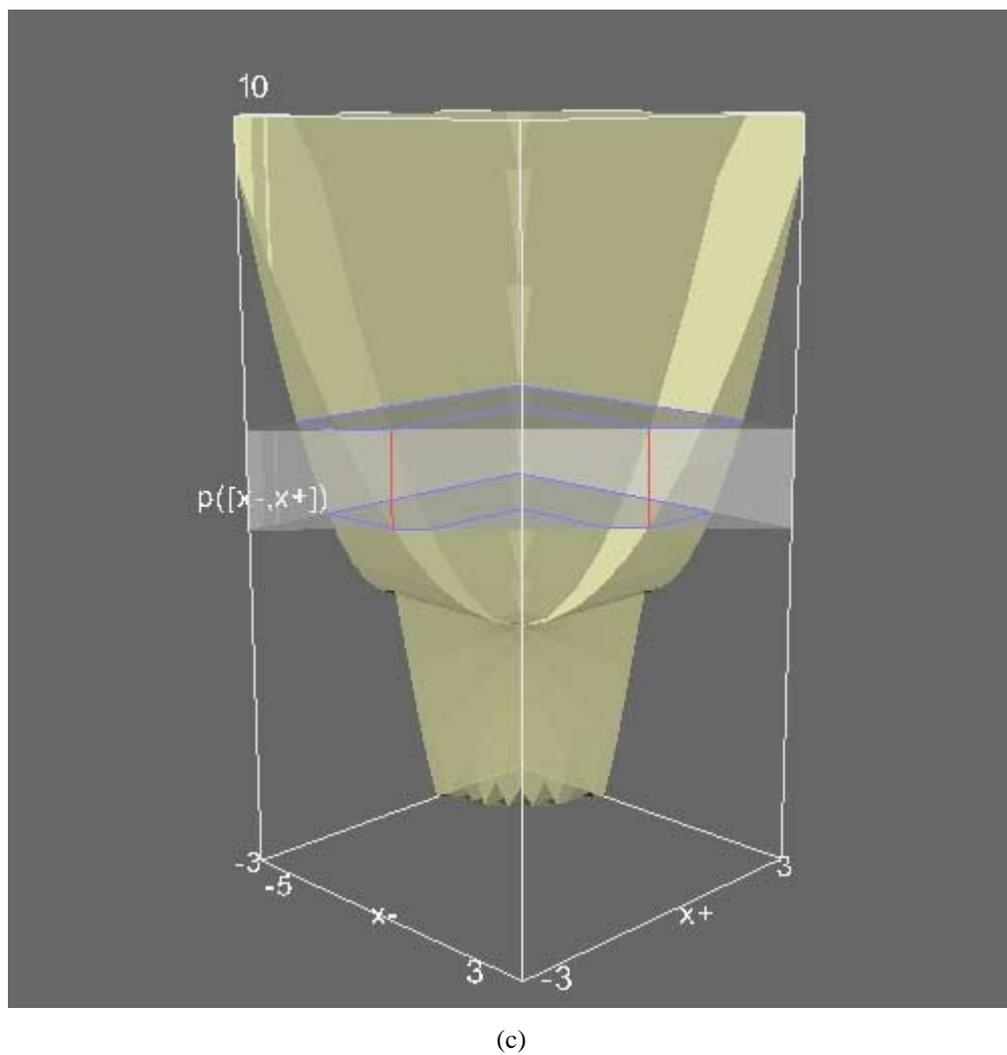
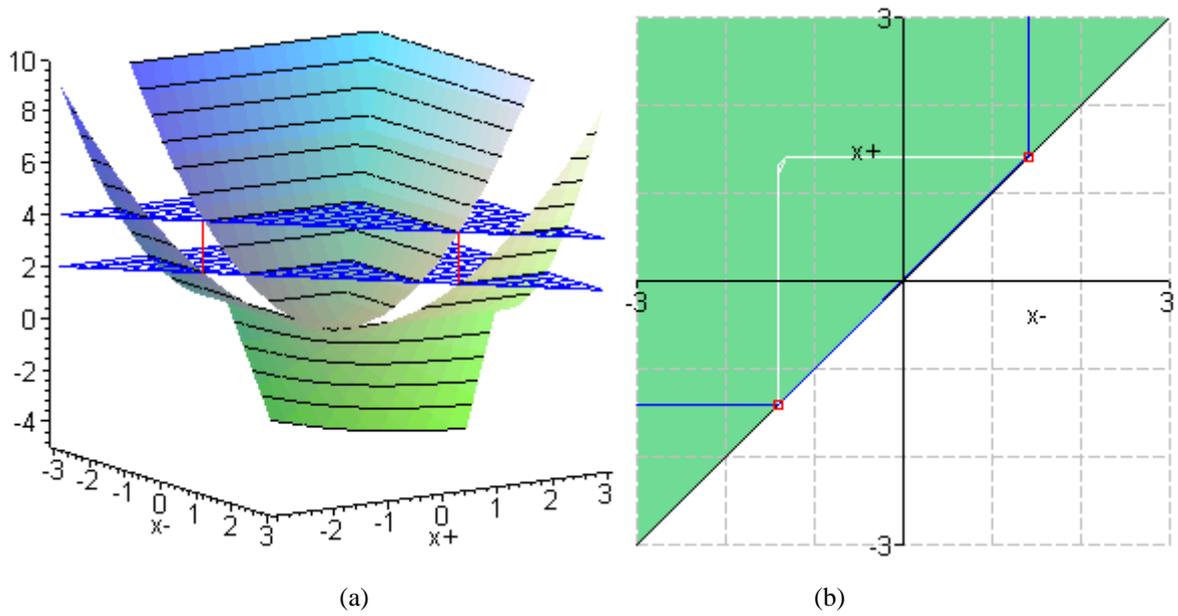


FIGURA 6.15 – Representação gráfica das soluções próprias da equação $[1;2] * [x]^2 = [2;4]$ no Maple V em 3D (a) e em 2D (b), e no ambiente desenvolvido com base no VTK (c). Os pontos de vista das imagens (a) e (c) são diferentes.

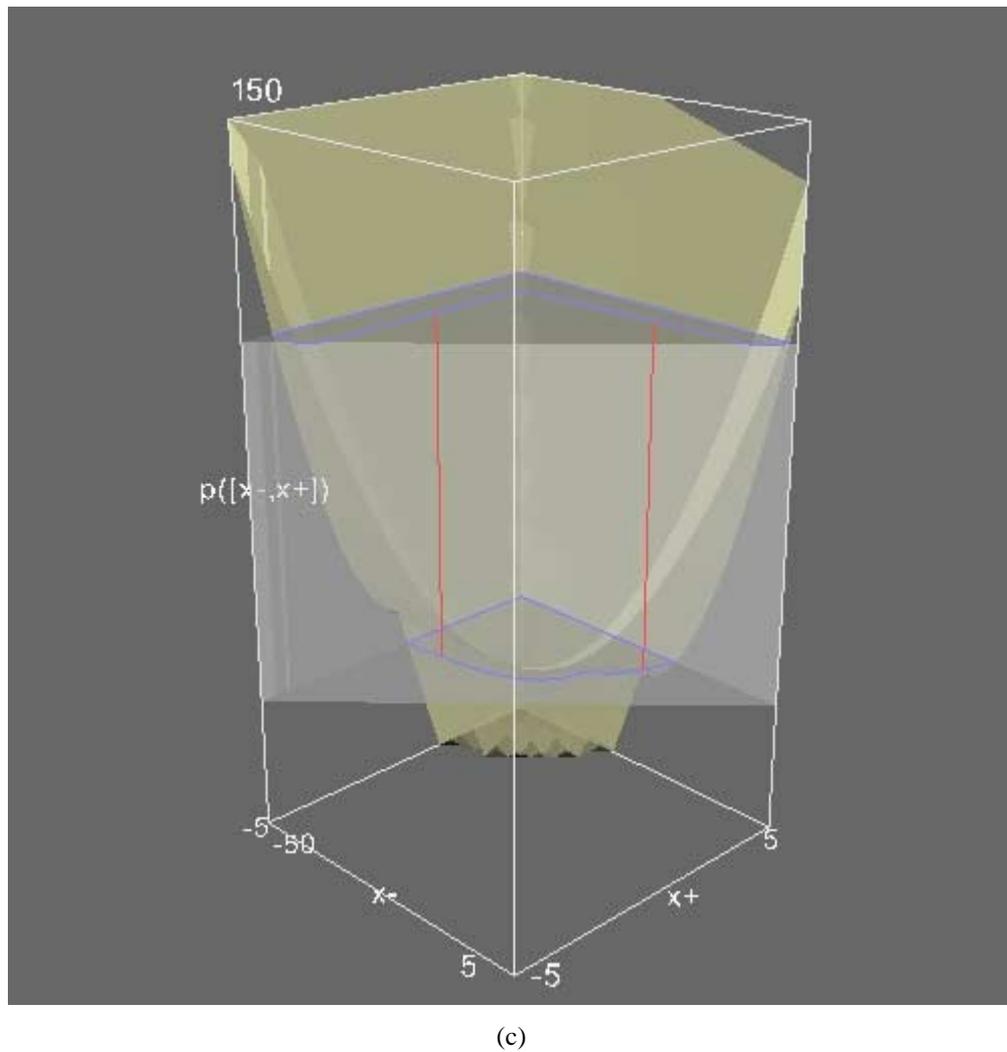
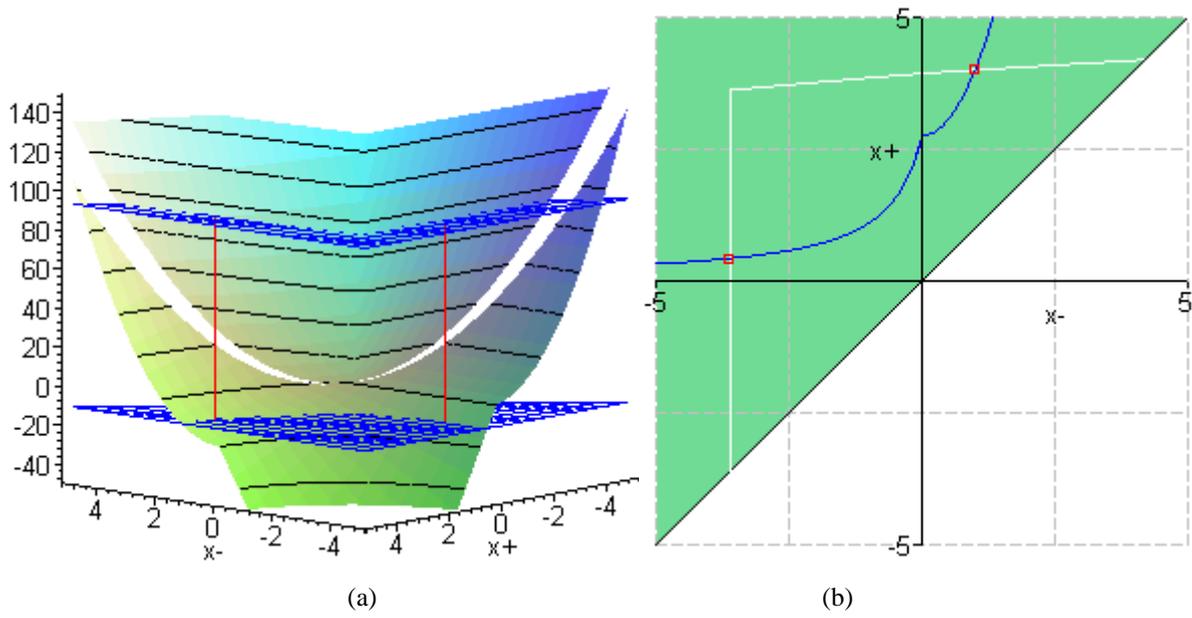
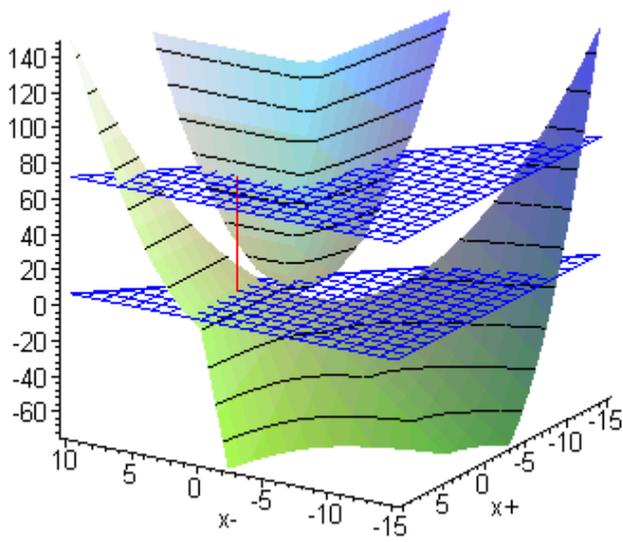
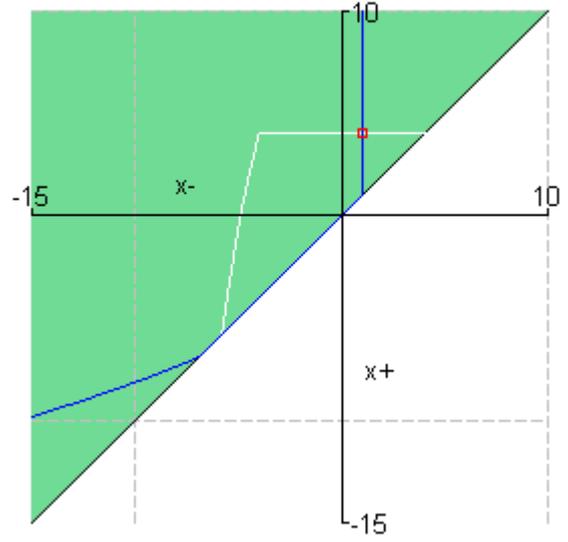


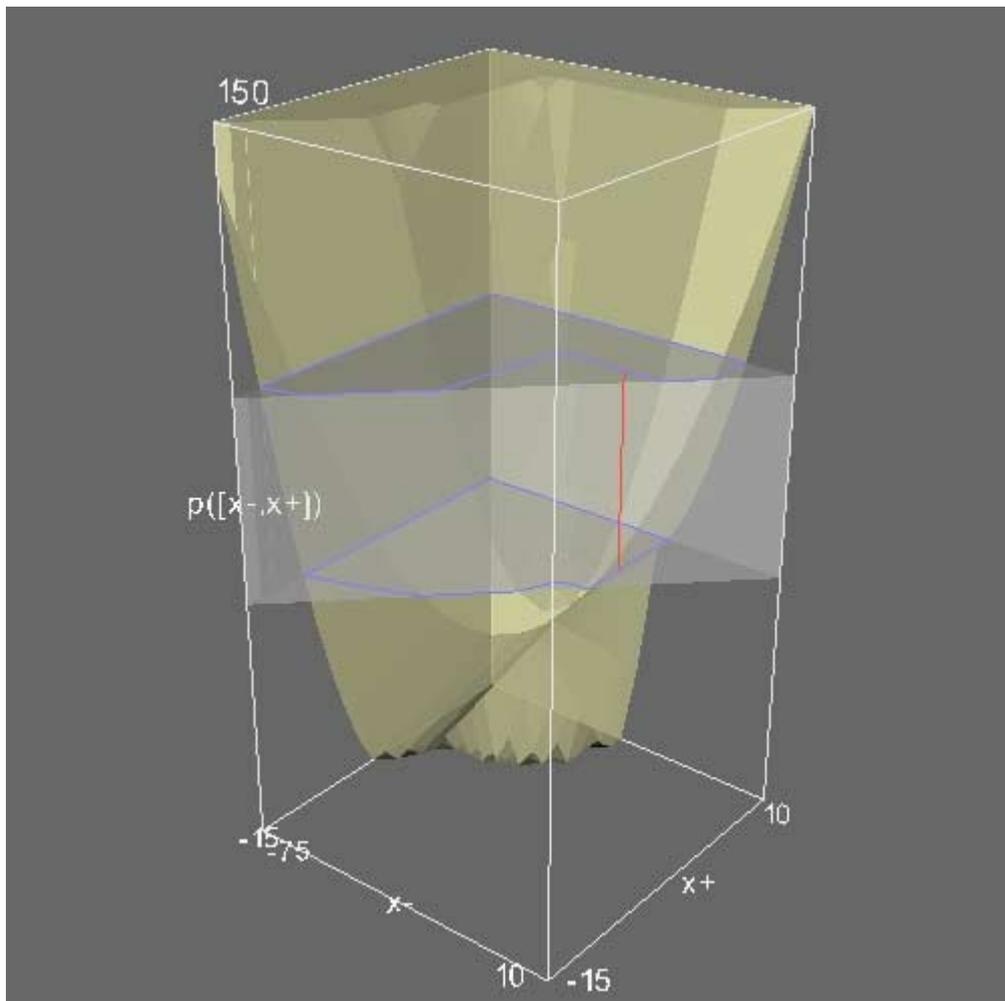
FIGURA 6.16 – Representação gráfica das soluções próprias da equação $[5;6] * [x]^2 + [-4;-3] * [x] = [-11;93]$ no Maple V em 3D (a) e em 2D (b), e no ambiente desenvolvido com base no VTK (c). Os pontos de vista das imagens (a) e (c) são diferentes.



(a)



(b)



(c)

FIGURA 6.17 – Representação gráfica da solução própria da equação $[1;3] * [x]^2 + [5;6] * [x] = [6;72]$ no Maple V em 3D (a) e em 2D (b), e no ambiente desenvolvido com base no VTK (c). Os pontos de vista das imagens (a) e (c) são diferentes.

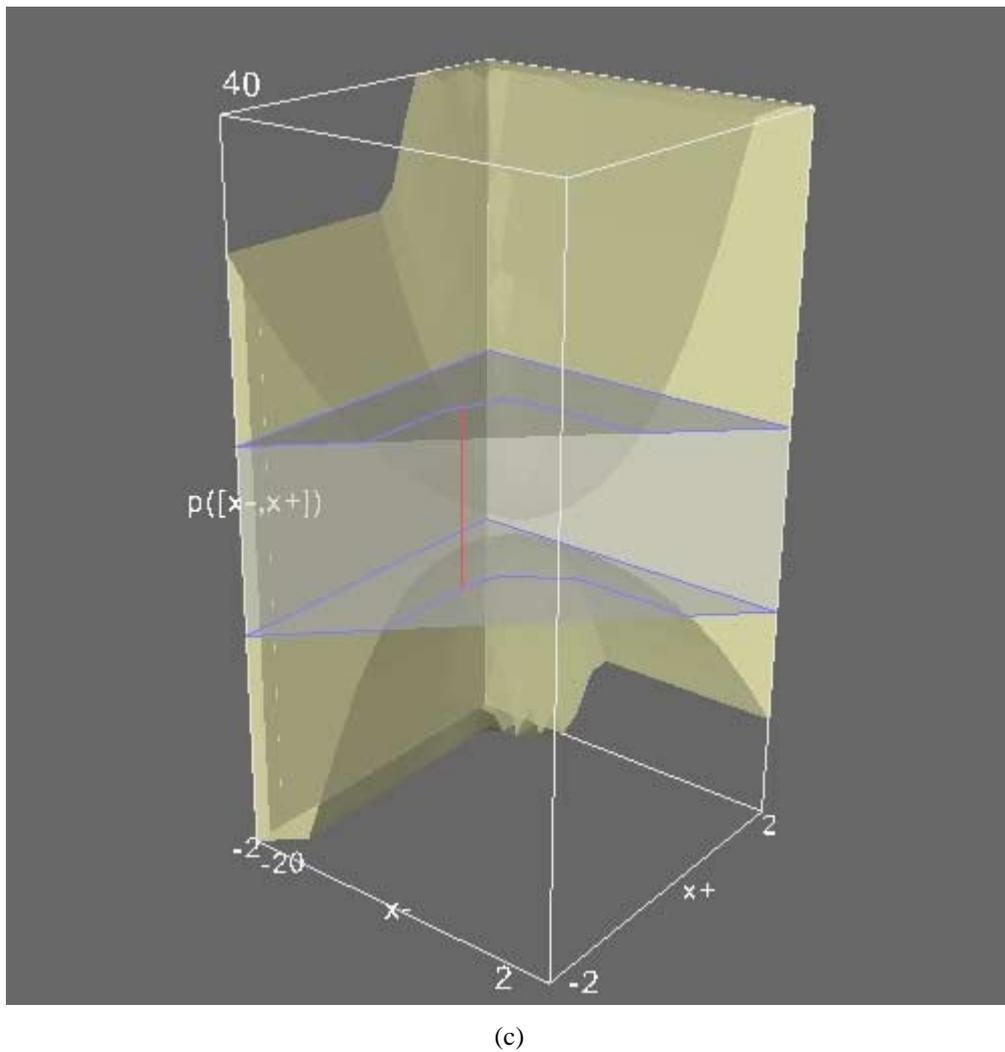
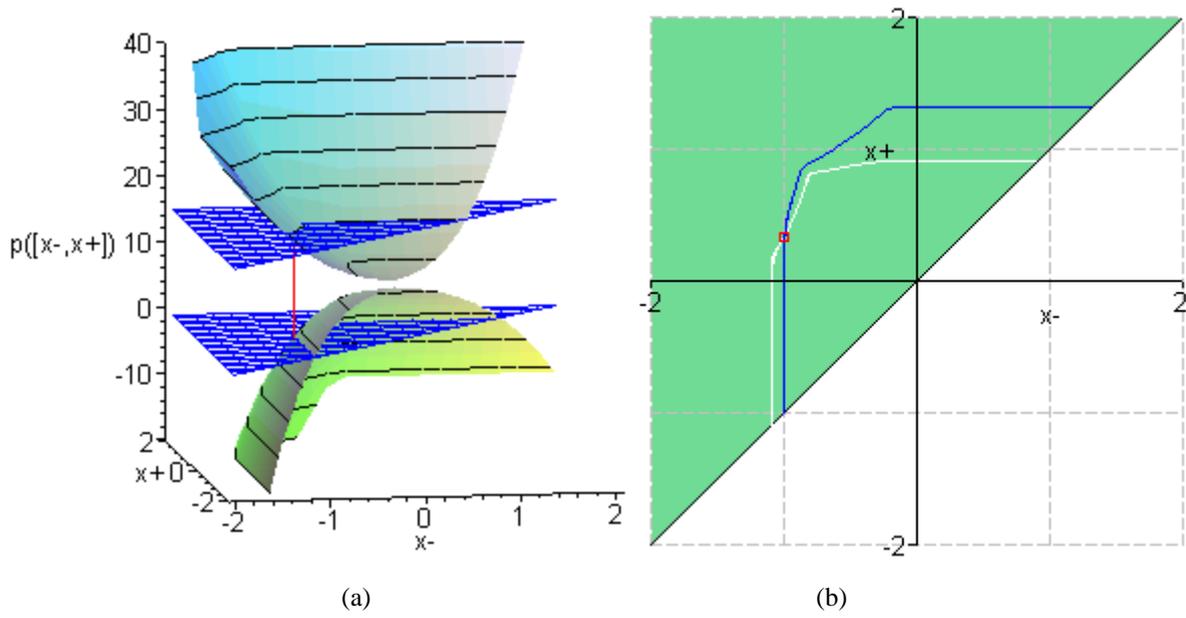
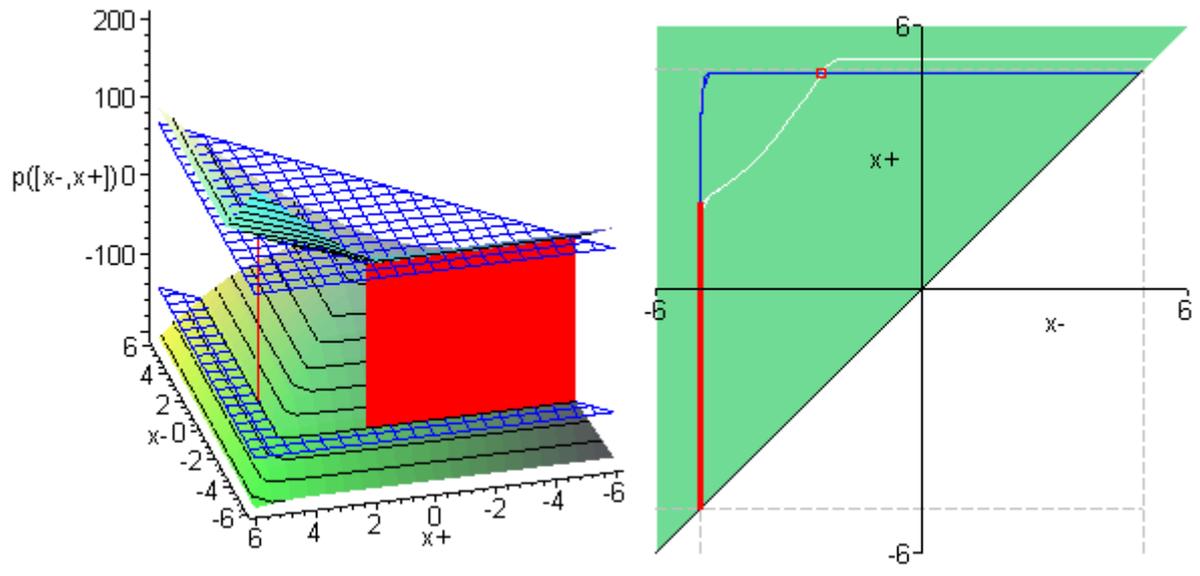
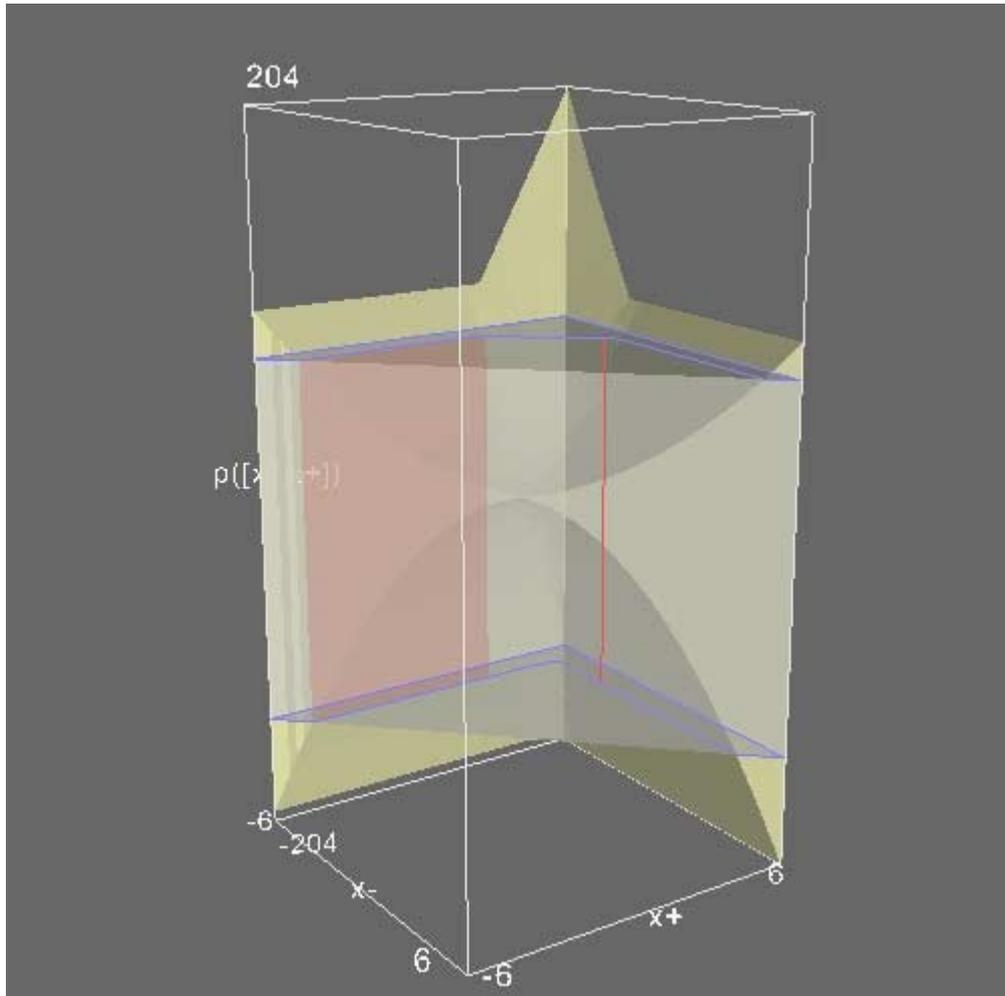


FIGURA 6.18 – Representação gráfica da solução própria da equação $[-6;6] * [x]^3 + [-2;2] * [x]^2 + [-3;1] * [x] + [7;8] = [-1;15]$ no Maple V em 3D (a) e em 2D (b), e no ambiente desenvolvido com base no VTK (c). Os pontos de vista das imagens (a) e (c) são diferentes.



(a) (b)



(c)

FIGURA 6.19 – Representação gráfica das soluções próprias da equação $[-5;2] * [x]^2 + [-4;3] * [x] = [-140;70]$ no Maple V em 3D (a) e em 2D (b), e no ambiente desenvolvido com base no VTK (c). Os pontos de vista das imagens (a) e (c) são diferentes.

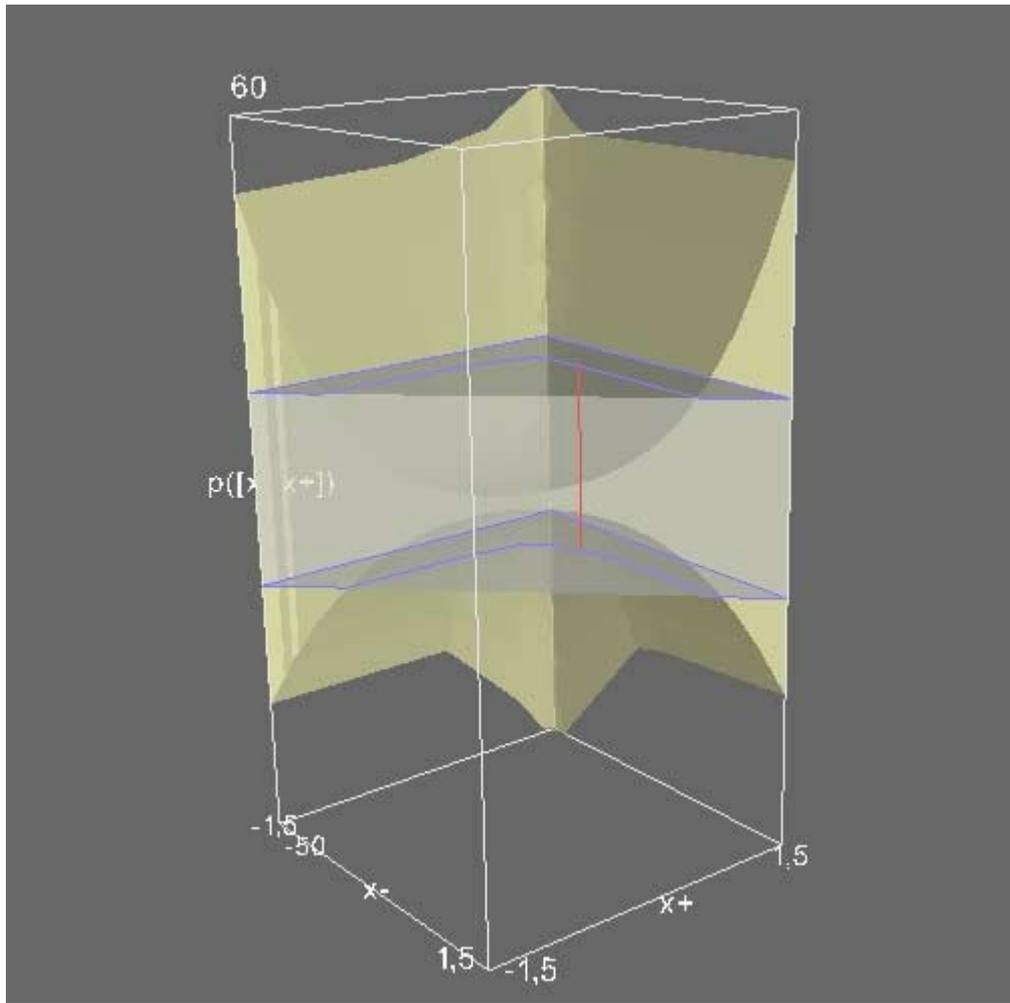
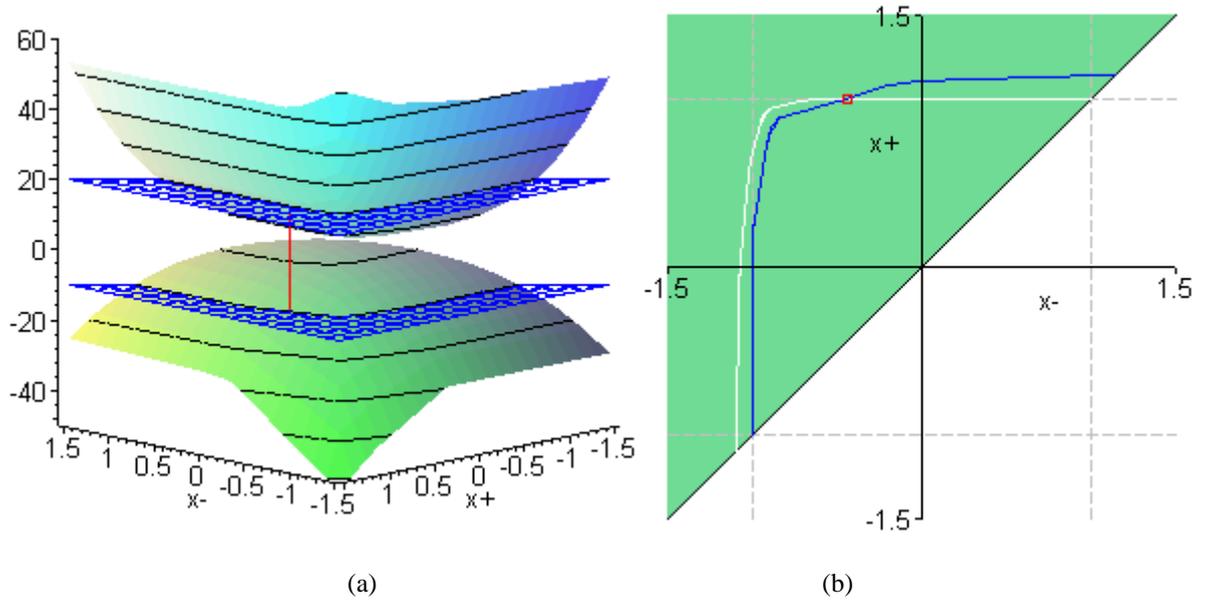
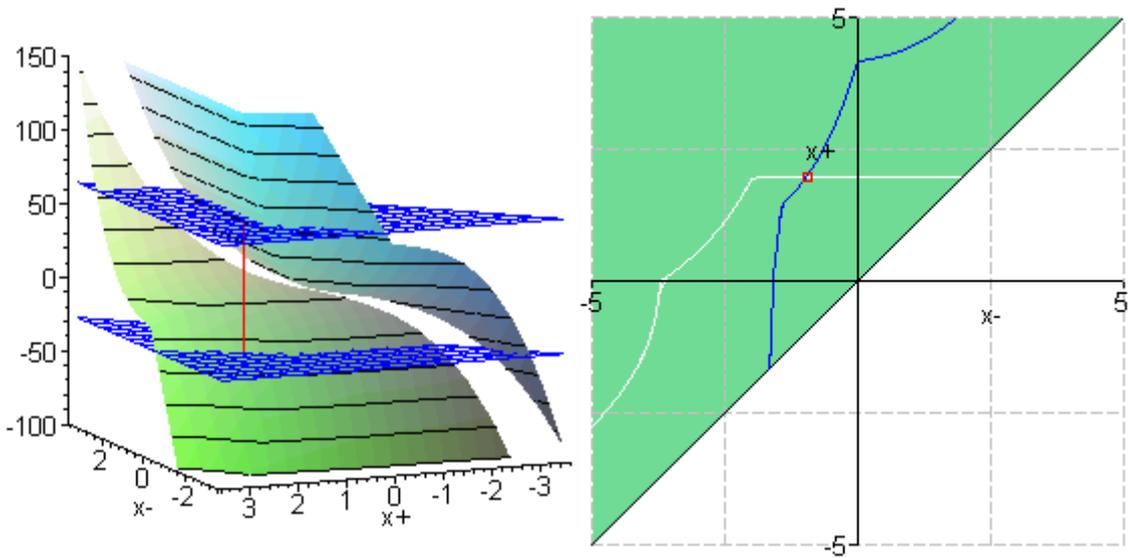
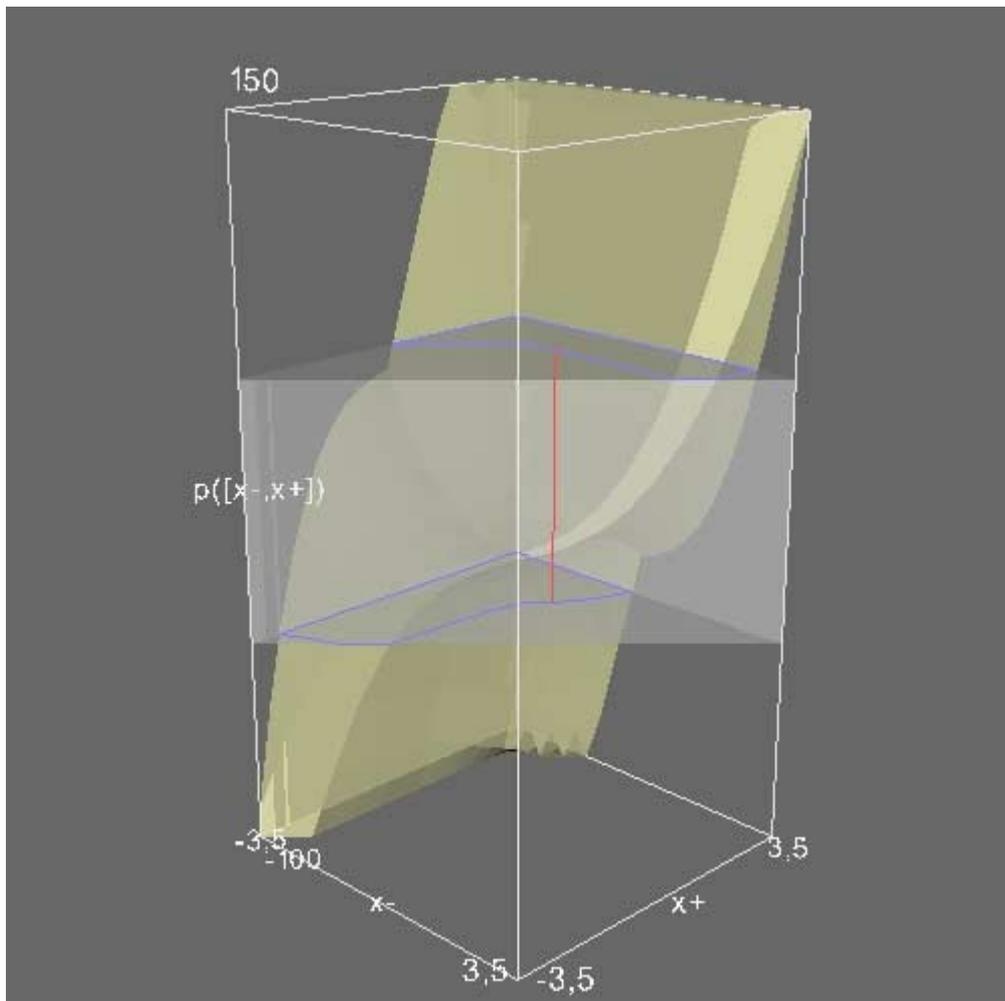


FIGURA 6.20 – Representação gráfica da solução própria da equação $[-1;5] * [x]^4 + [-4;3] * [x]^3 + [-5;3] * [x]^2 + [1;4] * [x] + [3;5] = [-10;20]$ no Maple V em 3D (a) e em 2D (b), e no ambiente desenvolvido com base no VTK (c). Os pontos de vista das imagens (a) e (c) são diferentes.



(a)

(b)



(c)

FIGURA 6.21 – Representação gráfica da solução própria da equação $[-0.1;0.1] * [x]^4 + [3;4] * [x]^3 + [1;3] * [x]^2 + [5;8] * [x] + [3;5] = [-27;65]$ no Maple V em 3D (a) e em 2D (b), e no ambiente desenvolvido com base no VTK (c). Os pontos de vista das imagens (a) e (c) são diferentes.

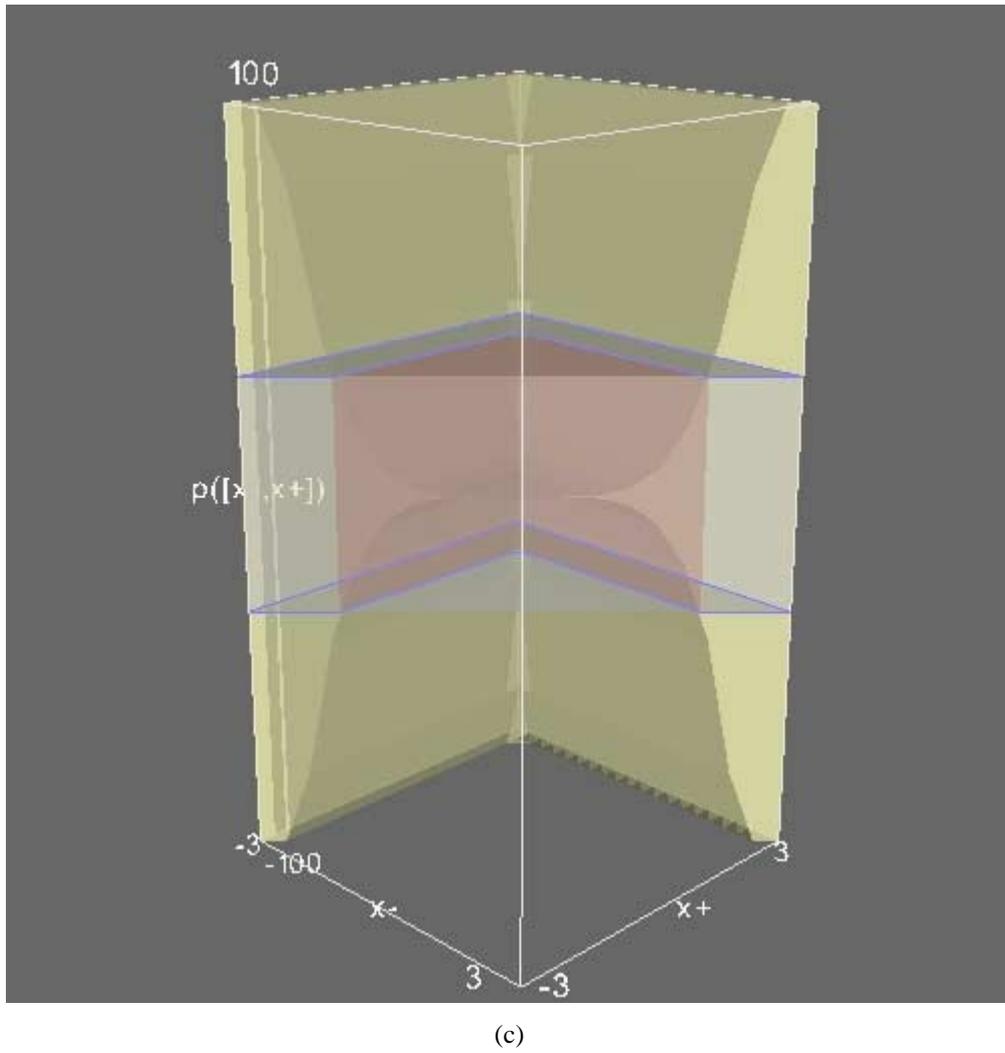
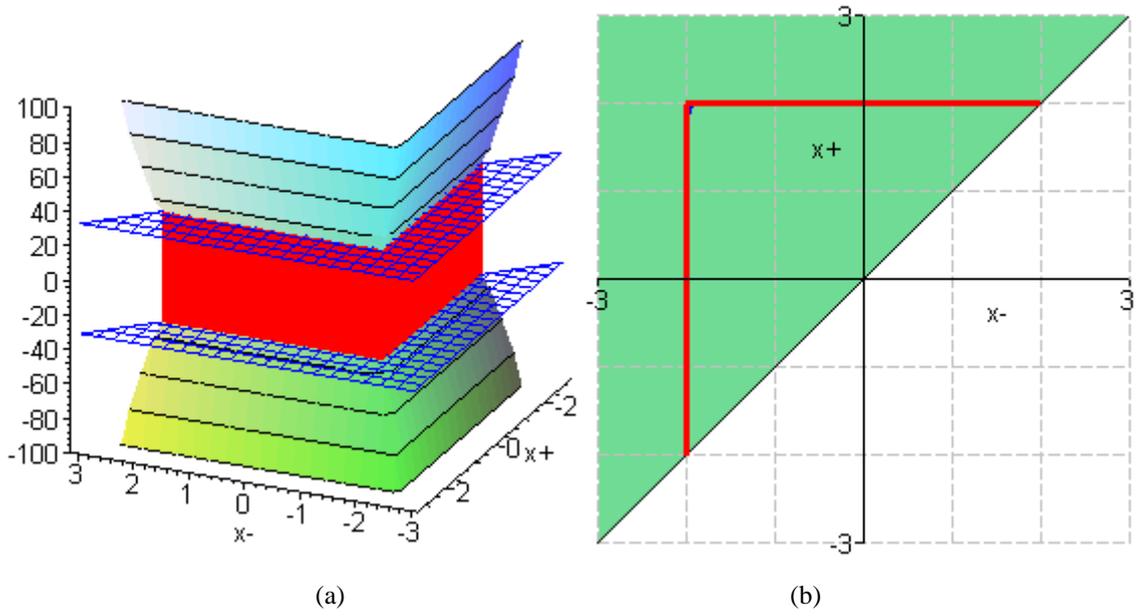


FIGURA 6.22 – Representação gráfica das soluções próprias da equação $[-1;1] * [x]^\delta = [-32;32]$ no Maple V em 3D (a) e em 2D (b), e no ambiente desenvolvido com base no VTK (c). Os pontos de vista das imagens (a) e (c) são diferentes.

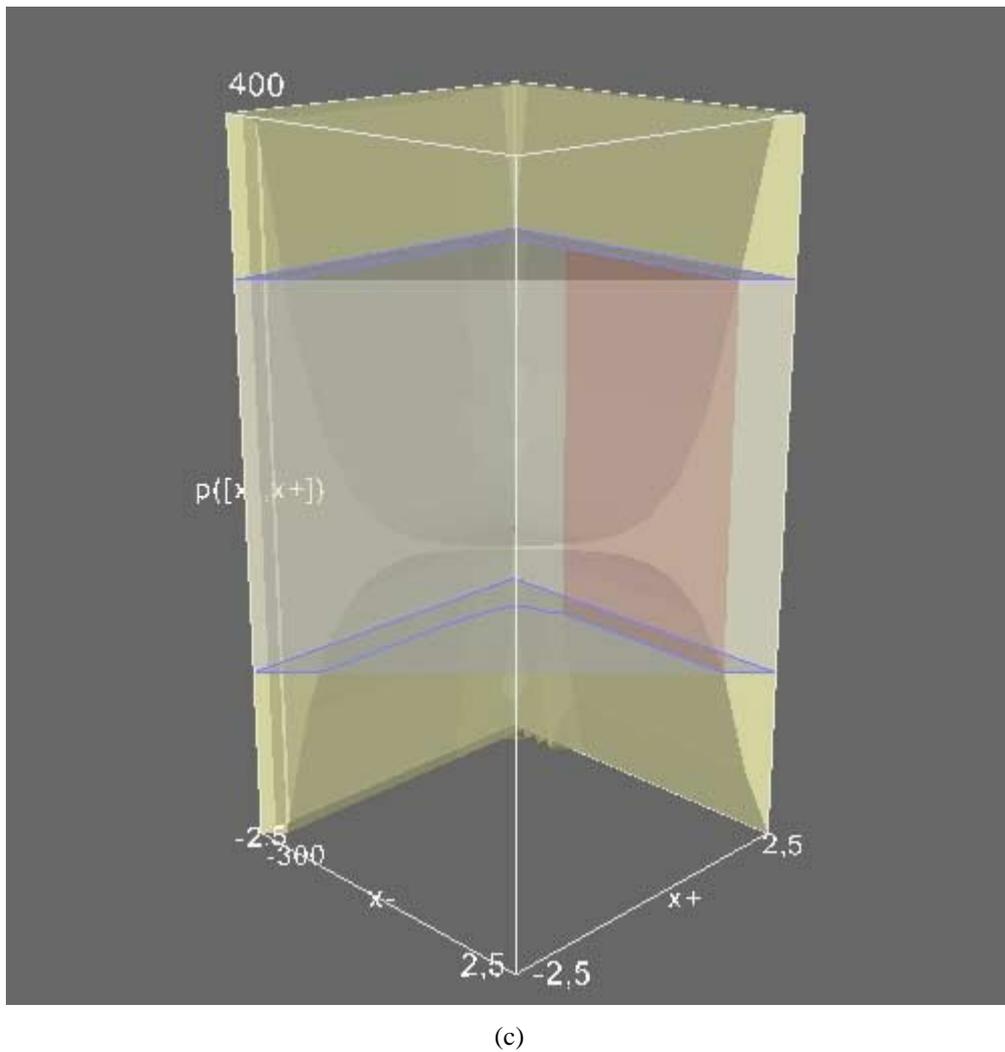
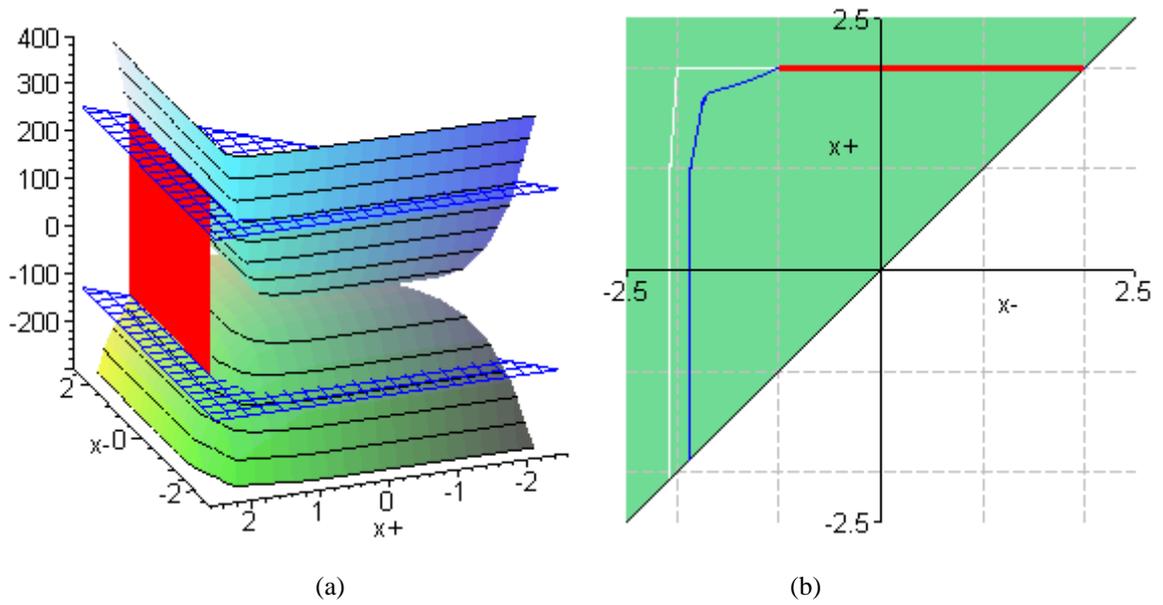


FIGURA 6.23 – Representação gráfica das soluções próprias da equação $[-1;2] * [x]^6 + [-1;2] * [x]^5 + [-1;2] * [x]^4 + [-1;2] * [x]^3 + [-1;2] * [x]^2 + [-1;2] * [x] + [-1;2] = [-127;254]$ no Maple V em 3D (a) e em 2D (b), e no ambiente desenvolvido com base no VTK (c). Os pontos de vista das imagens (a) e (c) são diferentes.

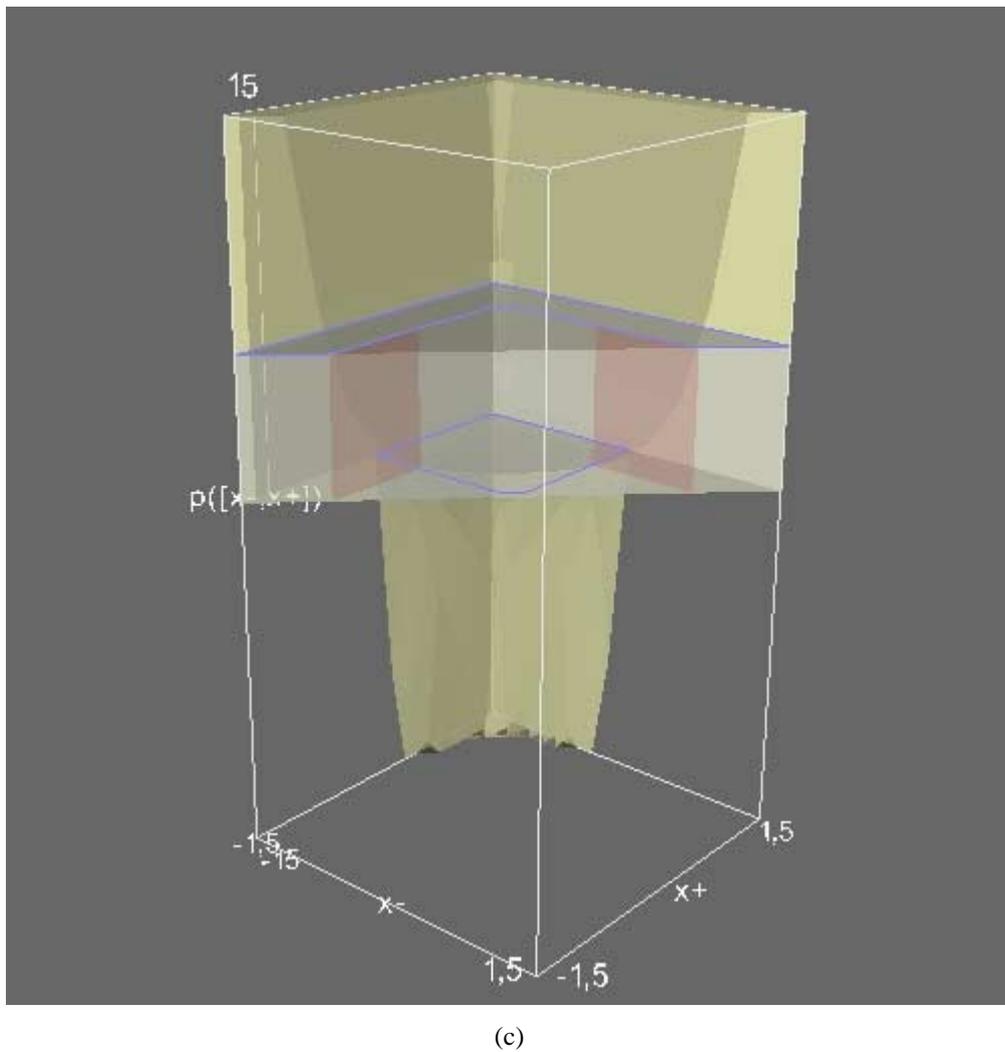
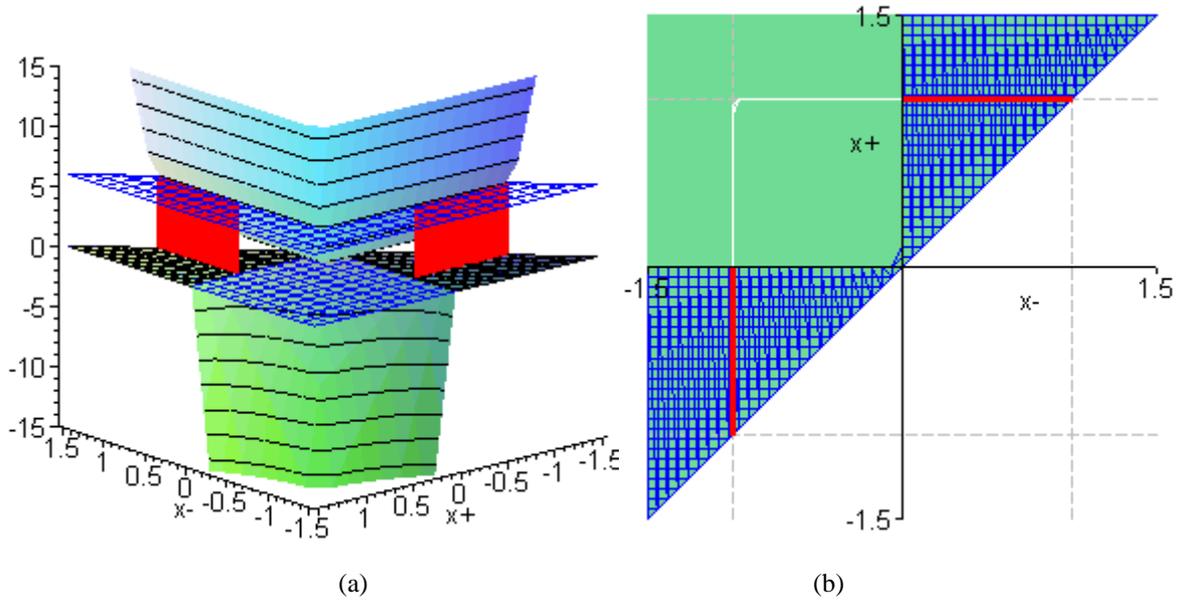
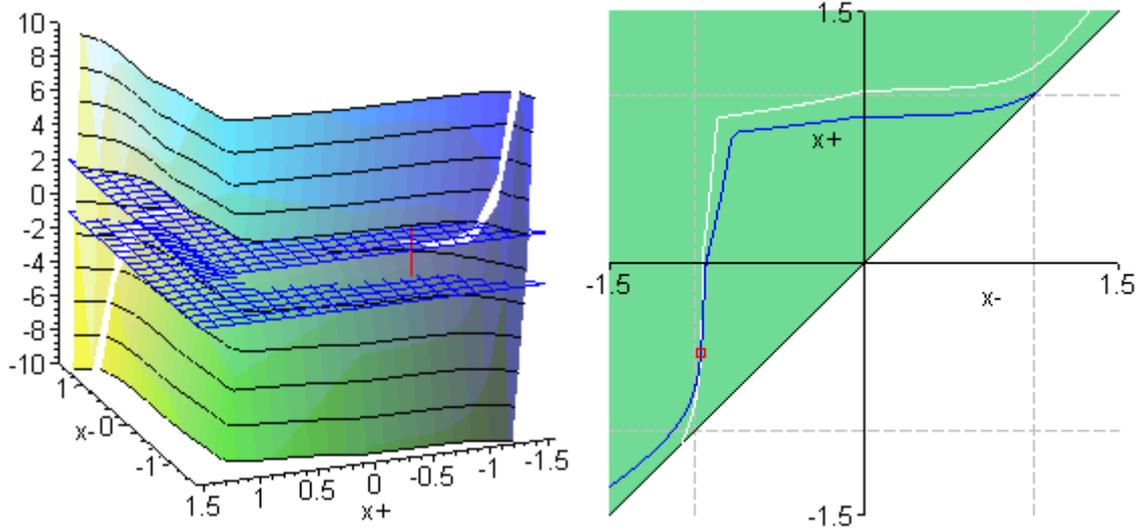
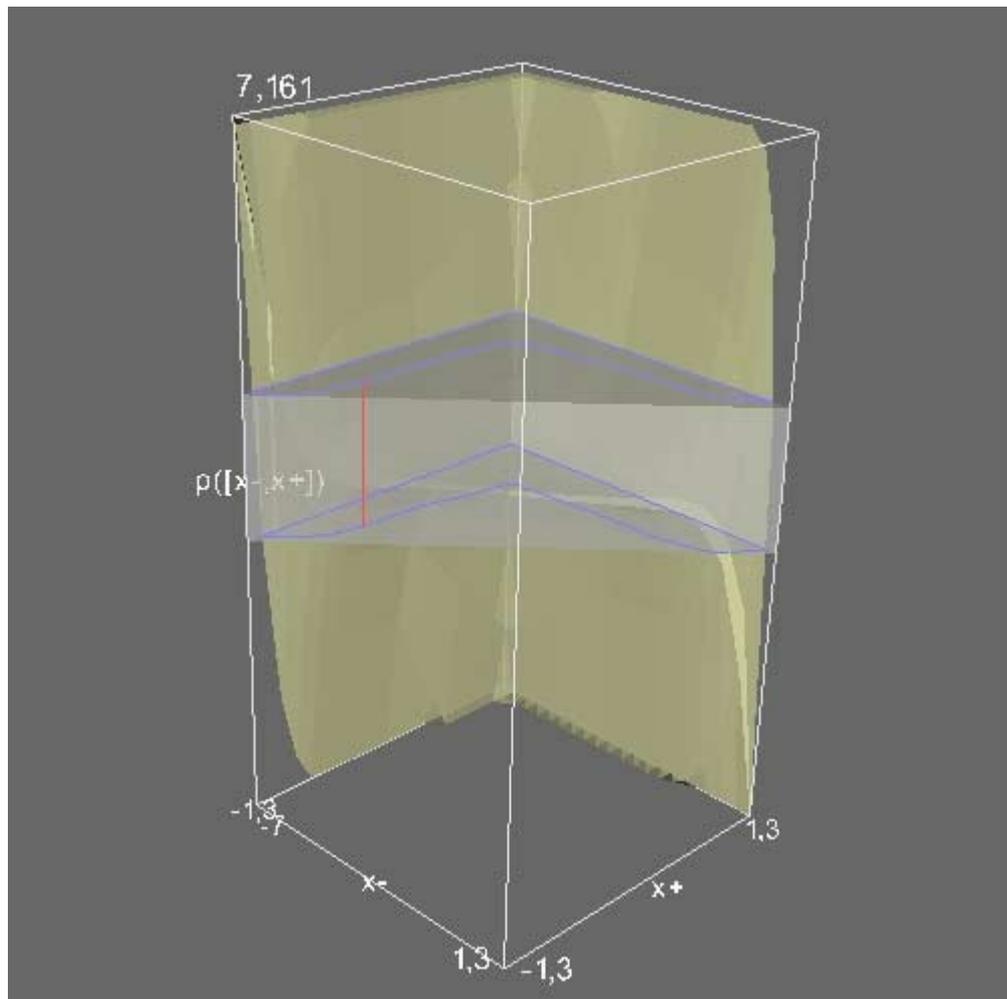


FIGURA 6.24 – Representação gráfica das soluções próprias da equação $[0;1] * [x]^{10} + [0;1] * [x]^8 + [0;1] * [x]^6 + [0;1] * [x]^4 + [0;1] * [x]^2 + [0;1] = [0;6]$ no Maple V em 3D (a) e em 2D (b), e no ambiente desenvolvido com base no VTK (c). Os pontos de vista das imagens (a) e (c) são diferentes.



(a)

(b)



(c)

FIGURA 6.25 – Representação gráfica da solução própria da equação $[-1.2;-1.1] * [x]^9 + [0.9;1.0] * [x]^7 + [-0.8;-0.7] * [x]^5 + [0.5;0.6] * [x]^3 + [-0.4;-0.3] * [x] + [0.1;0.2] = [-1;2]$ no Maple V em 3D (a) e em 2D (b), e no ambiente desenvolvido com base no VTK (c). Os pontos de vista das imagens (a) e (c) são diferentes.

A próxima seção realiza uma análise qualitativa conjunta dos exemplos ora apresentados, procurando enfatizar a identificação de características associadas ao conceito de solução própria intervalar e sua inter-relação com as interpretações estudadas para o tipo de dado intervalar.

6.7 Análise dos Exemplos Apresentados

Os exemplos apresentados na seção anterior sugerem diferentes aspectos associados ao conceito de solução própria. Com base na manipulação das representações gráficas que acompanham os exemplos pode-se identificar a veracidade da característica de solução “segundo a igualdade usual”, associada ao conceito de solução própria. Da análise conjunta dos exemplos, as seguintes observações são dignas de nota:

- A cardinalidade do conjunto de soluções próprias não necessariamente é limitada pelo grau da equação polinomial intervalar: os exemplos 6.6, 6.7, 6.13, 6.16, 6.17 e 6.18 apresentam equações polinomiais com infinitas soluções próprias, incluindo os casos de equações lineares e não lineares; os exemplos 6.12 e 6.19 apresentam equações polinomiais com grau ímpar e apenas uma solução própria; finalmente, os exemplos 6.11, 6.14 e 6.15 apresentam equações polinomiais de grau par e com apenas uma solução própria. Em particular, equações lineares de coeficientes intervalares reais não necessariamente possuem solução própria, ou mesmo possuem solução própria única¹⁰;
- Equações intervalares podem apresentar um conjunto conexo infinito de soluções, conforme evidenciado nos exemplos 6.6, 6.7, 6.13, 6.16, 6.17 e 6.18. Tal característica é semelhante à situação de existência de raízes para funções reais de duas ou mais variáveis e, por este motivo, é coerente com a semântica de número-intervalo, uma vez que segundo essa semântica uma função intervalar pode ser representada como uma função de várias variáveis reais, cada variável com domínio definido pela ocorrência de um intervalo. Em particular, o Exemplo 6.13 apresenta uma situação peculiar, com a presença de soluções próprias isoladas e soluções próprias não isoladas, demonstrando a não exclusão desses comportamentos no conjunto de soluções próprias de uma equação intervalar.

Uma consideração adicional deve ser realizada no que se refere à última observação acima: além de ser um resultado que não possui similar no contexto real, a identificação de infinitas soluções próprias apresenta-se associada a uma relativa independência do intervalo solução obtido em relação ao valor de pelo menos um de seus limitantes. Tal característica pode ser útil no que se refere à identificação de domínios otimais de segurança, por exemplo, pois permite certa flexibilidade na determinação **dos limites** de segurança a que um determinado parâmetro deverá atender. Sob o ponto de vista de análise de estabilidade, uma possibilidade que se abre é a da identificação de associações entre modelos com soluções dessa natureza e sistemas dotados de forte estabilidade.

Os resultados ora apresentados foram fundamentais para a compreensão da representatividade de uma solução própria, bem como do significado de número-intervalo no contexto da análise intervalar. Na próxima seção estes resultados serão estendidos para a determinação de soluções próprias para sistemas de equações lineares intervalares. No capítulo seguinte, uma

¹⁰ Note-se que o conceito de solução própria utilizado neste trabalho trata somente de intervalos de números reais. Desenvolvimentos sobre a validação de soluções próprias complexas não fazem parte do escopo deste trabalho.

discussão comparativa entre soluções próprias e envoltórias intervalares de soluções reais será apresentada, complementando as idéias propostas nessa seção.

6.8 Algoritmo 2: Determinação de Soluções Próprias de Sistemas de Equações Lineares Intervalares

Semelhante ao Algoritmo 1, o algoritmo ora apresentado baseia-se na análise exaustiva de casos. Ele será doravante denominado Algoritmo 2. Os casos gerados no Algoritmo 2 são combinações n -dimensionais das possibilidades de existência de solução para cada uma das n variáveis do sistema em cada uma das regiões da partição proposta de \mathfrak{R} . As combinações lineares formadas geram, cada uma, um sistema real de dimensão $2*n$, o qual pode ser resolvido simbolicamente ou através de algoritmos numéricos em ambientes de arredondamento dirigido.

Este resultado é um subproduto direto do Teorema 4.1, pois somente considera sistemas intervalares lineares. No entanto optou-se por sua apresentação após o Algoritmo 1 de modo a tirar benefício da compreensão do significado de solução própria proporcionado pelos exemplos discutidos na seção anterior.

O problema solucionado pelo Algoritmo 2 pode ser enunciado da seguinte forma:

“Dado o sistema de equações

$$\sum_{i=1}^n [a_{ij}] * [x_i] + [a_{0j}] = [b_j]$$

onde $n \in \mathbf{N}^*$, $\forall i \in \mathbf{N}$, $i \leq n$, $\forall j \in \mathbf{N}$, $j \leq n$, $[a_{ij}] \in \mathfrak{R}$, $[b_j] \in \mathfrak{R}$, $[x_i] \in \mathfrak{R}$, deseja-se encontrar o conjunto de vetores de soluções próprias $\{ \{ [x_{ik}^p] \} \mid [x_{ik}^p] \in \mathfrak{R} \}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq k \leq t$, $t \in \mathbf{N}$, se este existir”.

A descrição do Algoritmo 2 é apresentada a seguir:

Inputs:

$[a_{ij}] \in \mathfrak{R}$, $\forall i \in \mathbf{N}$, $i \leq n$, $\forall j \in \mathbf{N}$, $j \leq n$, os coeficientes do polinômio que compõe o membro esquerdo da j -ésima equação;

$[b_j] \in \mathfrak{R}$, o membro direito da j -ésima equação.

Outputs:

$\{ \{ [x_{ik}^p] \} \mid [x_{ik}^p] \in \mathfrak{R} \}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq k \leq t$, $t \in \mathbf{N}$, a lista de soluções próprias do sistema de equações lineares intervalares.

Descrição do Algoritmo 2:

1. Início;
2. Gere todas as combinações $\{ [x_i] \in R_v \}_{i \leq n}$, $R_v \in \{O, I, BI, II, BII, III, BIII, IV\}$;
3. Para cada combinação gerada faça:
 - 3.1. Armazene em **hipótese**[1] as hipóteses associadas à combinação estudada;
 - 3.2. Para $j := 1..n$ faça:
 - 3.2.1. Armazene **sistema**[1][j] := $[a_{0j}]$;

- 3.2.2. Para $i = 1..n$ faça:
- 3.2.2.1. $k :=$ número de entradas na lista **sistema**;
- 3.2.2.2. Se $([a_{ij}] \in \text{II} \vee [a_{ij}] \in \text{III}) \wedge ([x_i] \in \text{II} \vee [x_i] \in \text{III})$, então:
- 3.2.2.2.1. Duplique as entradas da lista **sistema**, copiando os sistemas de equações nas posições $k+1$ até $2*k$;
- 3.2.2.2.2. Duplique as entradas da lista **hipótese**, copiando-as nas posições $k+1$ até $2*k$;
- 3.2.2.2.3. Para $m := 1..k$ faça:
- 3.2.2.2.3.1. Adicione à **sistema**[m][j] as expressões analíticas do monômio $[a_{ij}] * [x_i]$ no primeiro caso alternativo;
- 3.2.2.2.3.2. Adicione à **hipótese**[m] as hipóteses adicionais necessárias para a determinação do primeiro caso alternativo;
- 3.2.2.2.4. Fim-Para;
- 3.2.2.2.5. Para $m := k+1..2*k$ faça:
- 3.2.2.2.5.1. Adicione à **sistema**[m][j] as expressões analíticas do monômio $[a_{ij}] * [x_i]$ no segundo caso alternativo;
- 3.2.2.2.5.2. Adicione à **hipótese**[m] as hipóteses adicionais necessárias para a determinação do segundo caso alternativo;
- 3.2.2.2.6. Fim-Para;
- 3.2.2.3. Senão
- 3.2.2.3.1. Para $m := 1..k$ faça:
- 3.2.2.3.1.1. Adicione à **sistema**[m][j] as expressões analíticas do monômio $[a_{ij}] * [x_i]$;
- 3.2.2.3.2. Fim-Para;
- 3.2.2.4. Fim-Se;
- 3.2.3. Fim-Para;
- 3.3. Fim-Para;
- 3.4. Para cada sistema alternativo gerado faça:
- 3.4.1. Resolva o sistema linear real de dimensão $2*n$,
- $$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n [a_{ij}] * [x_i] + \underline{a_{0j}} = \underline{b_j} \\ \sum_{i=1}^n [a_{ij}] * [x_i] + \overline{a_{0j}} = \overline{b_j} \end{array} \right., 1 \leq j \leq n$$
- representando o sistema de equações intervalares a ser resolvido,
- $$\sum_{i=1}^n [a_{ij}] * [x_i] + [a_{0j}] = [b_j], 1 \leq j \leq n ;$$
- 3.4.2. Elimine soluções que não envolvam intervalos reais ou que não satisfaçam às hipóteses formuladas;
- 3.4.3. Apresente as soluções;
- 3.5. Fim-Para;
4. Fim-Para;
5. Fim.

6.9 Análise de Complexidade do Algoritmo 2

Tendo como referência de desenvolvimento o livro de Toscani e Veloso [TOS 2001], esta seção apresenta o cálculo da complexidade do Algoritmo 2. Para facilitar a análise da complexidade desse algoritmo, os seguintes fatos são previamente observados:

- o algoritmo é exaustivo do ponto de vista da análise de casos, cobrindo a possibilidade de existência de soluções em cada uma das oito regiões da cobertura de \mathfrak{IR} e para cada uma das variáveis envolvidas;
- o algoritmo é essencialmente algébrico até a etapa 3.3, havendo necessidade de computação numérica, possivelmente, para a resolução dos sistemas, no laço iniciado na etapa 3.4;
- a principal contribuição sobre a complexidade do algoritmo vem do custo de avaliação do produto de números-intervalo, conforme enunciado no Teorema 4.2, e ocorre quando tanto os coeficientes quanto os componentes da solução forem assumidos nas regiões II ou III.

Ainda, com o intuito de tornar a análise mais geral, é adotada a Definição 6.4:

Definição 6.4: Para efeitos de análise do Algoritmo 2, a complexidade associada à resolução de um sistema linear real de ordem $2*n$ é denotada por $sl(2*n)$.

A complexidade do Algoritmo 2 depende da observação de quantos coeficientes são geralmente encontrados nas regiões II ou III. Mais que isso, depende da forma como estes coeficientes estão dispostos na matriz. Se coeficientes associados a uma mesma variável forem dessas regiões, o custo gerado será comparativamente maior que se os coeficientes forem associados a variáveis distintas. Isso porque o número de sistemas alternativos gerados será, em geral, maior na primeira situação. De fato, a seguinte proposição pode ser enunciada:

Proposição 6.2: Seja $\sum_{i=1}^n [a_{ij}] * [x_i] + [a_{0j}] = [b_j]$ um sistema linear intervalar de ordem n e de variáveis intervalares. Considerando a cobertura de \mathfrak{IR} apresentada na Definição 4.1, seja $c(j)$ o número de coeficientes das regiões II ou III associados à variável $[x_j]$, $j=1..n$. Então, o número de sistemas lineares alternativos gerados por contribuição da variável $[x_j]$ é dado por

$$ts(j) = 6 + 2^{c(j)+1}.$$

Prova: Conforme apresentado no Anexo 1.12, a prova em questão é realizada indutivamente, explorando as características algébricas dos coeficientes pertencentes às regiões II e III, segundo o Teorema 4.1. ■

O resultado da Proposição 6.2 pode ser estendido para contabilizar a contribuição de diversas variáveis simultaneamente, conforme a Proposição 6.3, a seguir:

Proposição 6.3: Seja $\sum_{i=1}^n [a_{ij}] * [x_i] + [a_{0j}] = [b_j]$ um sistema linear intervalar de ordem n e de variáveis intervalares. Considerando a cobertura de \mathfrak{IR} apresentada na Definição 4.1, seja $c(j)$

o número de coeficientes das regiões II ou III associados à variável $[x_j], j=1..n$. Seja c o número total de coeficientes destas regiões, de tal forma que $c = \sum_{j=1}^n c(j)$. Então, o número total de sistemas lineares alternativos gerados nesse caso é dado por

$$\text{tsl}(c) = \prod_{j=1}^n \text{ts}(j) = \prod_{j=1}^n (6 + 2^{c(j)+1}).$$

Prova: A prova desta proposição é elementar se considerado o fato de que cada variável contribui independentemente para a geração de um certo número de sistemas a serem resolvidos. Assim, o total de sistemas a resolver é dado pelo produto dos números de sistemas gerados pelas diferentes variáveis. ■

De posse dos resultados enunciados nas proposições 6.2 e 6.3, as seções seguintes apresentam o cálculo das complexidades de pior caso e média.

6.9.1 Cálculo da Complexidade de Pior Caso do Algoritmo 2

O caso de pior complexidade é o da aplicação do Algoritmo 2 sobre um sistema linear intervalar de ordem n no qual todos os coeficientes pertençam às regiões II ou III. Nessas condições, e considerando o auxílio da descrição detalhada das complexidades de pior caso das diversas etapas do Algoritmo 2 apresentada no Anexo 3, os seguintes resultados podem ser enunciados:

Lema 6.5 (Número Total de Sistemas para o Pior Caso de Aplicação do Algoritmo 2): No pior caso, o número total de sistemas alternativos gerados na aplicação do Algoritmo 2 sobre um sistema linear de ordem n é

$$(6 + 2^{n+1})^n.$$

Prova: No pior caso, todos os coeficientes pertencem às regiões II ou III, Nessas condições, conforme a Proposição 6.3, o número total de sistemas alternativos gerados será dado por

$$\text{tsl}(n^2) = \prod_{j=1}^n \text{ts}(j) = \prod_{j=1}^n (6 + 2^{n+1}) = (6 + 2^{n+1})^n.$$

Logo, é válido o Lema 6.5. ■

Lema 6.6 (Custo de Comparações para o Pior Caso de Aplicação do Algoritmo 2): No pior caso, o número de comparações necessárias para a aplicação do Algoritmo 2 a um sistema linear de ordem n é

$$O(2^{3*n+1} * n * (2 * n + 1)).$$

Prova: Este lema é provado através da análise das complexidades das diversas etapas do Algoritmo 2, conforme apresentado no Anexo 1.13. ■

Lema 6.7 (Custo de Atribuições para o Pior Caso de Aplicação do Algoritmo 2): No pior caso, o número de atribuições necessárias para a aplicação do Algoritmo 2 a um sistema linear de ordem n é

$$O(10^n * (n^4 + 8 * n^2) - 8^n * (n^4 + 7 * n^2 - 3 * n)).$$

Prova: Também este lema é provado através da análise das complexidades das diversas etapas do Algoritmo 2, conforme apresentado no Anexo 1.14. ■

A seguir, o Teorema 6.4 apresenta a modelagem da ordem de complexidade de pior caso do Algoritmo 2, fundamentada nos resultados dos lemas 6.5 a 6.7:

Teorema 6.4 (Complexidade de Pior Caso do Algoritmo 2): A complexidade de pior caso, denotada por $C_p(n)$, para a aplicação do Algoritmo 2 sobre um sistema linear intervalar de ordem n é

$$C_p(n) \sim O\left(\left(6 + 2^{n+1}\right)^n * sl(2 * n)\right).$$

Prova do Teorema 6.4: A prova, apresentada no Anexo 1.15, é obtida pela exploração dos resultados apresentados nos lemas 6.5 a 6.7. ■

6.9.2 Cálculo da Complexidade Média do Algoritmo 2

Conforme evidenciado no calculo anterior, a realização de operações aritméticas domina a complexidade no Algoritmo 2. Por este motivo e também pela dificuldade de formulação das expressões, somente o cálculo relativo à complexidade de geração e resolução dos sistemas reais será apresentado para o caso médio.

A partir dos resultados enunciados nas proposições 6.2 e 6.3, o Teorema 6.5 pode ser enunciado:

Teorema 6.5 (Expressão da Complexidade Média do Algoritmo 2): A complexidade média do Algoritmo 2 para a aplicação sobre um sistema linear intervalar de ordem n é dada pela expressão

$$\bar{C}(n) \sim O\left(\frac{1}{2^{n^2}} * \sum_{c=0}^n \left(\prod_{j=1}^n \binom{n}{c(j)} * (6 + 2^{c(j)+1}) \right) * sl(2 * n)\right),$$

onde $c = \sum_{j=1}^n c(j)$.

Prova do Teorema 6.5: A prova explora o resultado da Proposição 6.2 para identificar a complexidade associada a cada possibilidade de sistema a ser resolvido. Então esse resultado é utilizado na definição de complexidade média de um algoritmo para gerar a expressão não fechada acima. O detalhamento pode ser encontrado no Anexo 1.16. ■

A solução fechada para a expressão do Teorema 6.5 é de difícil obtenção. No entanto, esta pode ser estimada através do ajuste de uma expressão exponencial quadrática, obtendo-se por Mínimos Quadrados, aproximadamente,

$$\bar{C}(n) \approx O\left(e^{0.4781897+1.473988*n+0.2995666*n^2}\right).$$

Não obstante o fato de que este modelo pode não ser o mais adequado para valores elevados de n , o ajuste acima mostrou-se adequado para a complexidade média calculada para problemas de tamanho até 6. Além disso, com base nessa estratégia tornou-se possível inferir que a complexidade média do Algoritmo 2 resulta igualmente exponencial.

6.9.3 Considerações Adicionais Sobre a Complexidade do Algoritmo 2

A análise comparativa das expressões para a complexidade de pior caso e para a complexidade média do Algoritmo 2 remetem às mesmas considerações apresentadas na análise do Algoritmo 1. A Figura 6.26 ilustra o comportamento dessas expressões, enquanto o Quadro 6.3 apresenta as complexidades de pior caso e média para as seis primeiras ordens de sistemas lineares¹¹. Em particular, os resultados tornam-se de difícil análise gráfica frente à forte tendência de crescimento apresentada nas complexidades calculadas.

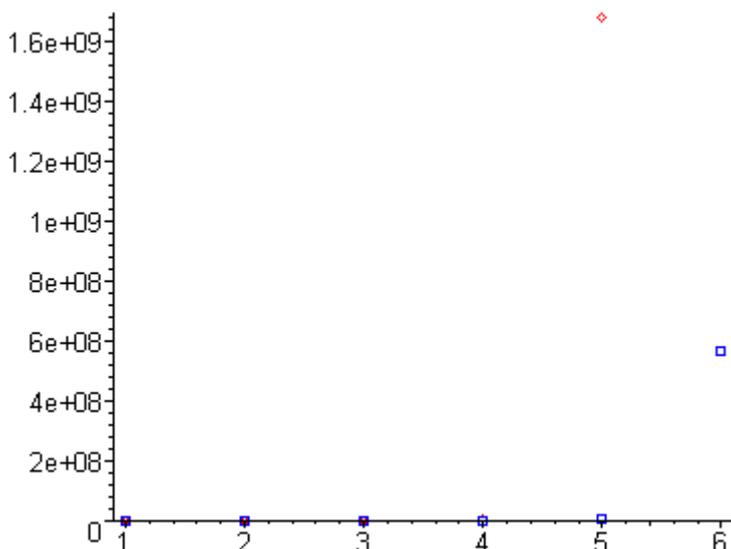


FIGURA 6.26 – Comparação entre a complexidade de pior caso (círculos) e a complexidade média (quadrados) do Algoritmo 2.

n	$C_p(n)$ (* sl(2*n))	$\bar{C}(n)$ (* sl(2*n))
1	1.00×10^1	9.00×10^0
2	1.96×10^2	1.10×10^2
3	1.06×10^4	2.07×10^3
4	2.09×10^6	6.76×10^4
5	1.68×10^9	4.27×10^6
6	5.79×10^{12}	5.68×10^8

QUADRO 6.3 – Comparação entre as complexidades de pior caso e de caso médio do Algoritmo 2.

Infelizmente, dada a complexidade das expressões obtidas, não foi possível apresentar um quadro comparativo de complexidades similar ao Quadro 6.2. No entanto, pode-se inferir dessas mesmas expressões que o Algoritmo 2 seja bem mais sensível à alterações no tamanho do problema a ser resolvido.

A seção seguinte apresenta alguns exemplos de aplicação do Algoritmo 2 sobre sistemas lineares de diferentes ordens. Estes exemplos serão posteriormente analisados e comentados.

¹¹ Estas complexidades foram obtidas efetivamente a partir da modelagem apresentada nos teoremas 6.4 e 6.5, e não pelo ajuste apresentado na seção anterior.

6.10 Exemplos de Soluções Próprias Obtidas com Algoritmo 2

Parte dos exemplos ora apresentados foram selecionados da literatura de intervalos [MOO 66, KOR 94, MAR 99b, FRA 99]. O objetivo foi o de comparar as soluções próprias obtidas – isto é, considerando o ponto de vista números-intervalo – com as soluções apresentadas nas referências. No entanto, graças à baixa densidade de exemplos envolvendo sistemas de maior porte que satisfizessem a condição de existência de soluções próprias, alguns dos exemplos encontrados acabaram sendo omitidos do texto final por repetirem situações já mostradas. Em alguns casos, os exemplos foram modificados a partir de suas formas originais de modo a apresentar soluções próprias.

A implementação dos procedimentos seguiu a mesma linha do Algoritmo 1, através da confecção de procedimentos em uma biblioteca no ambiente Maple V Release 5.00 e da exploração das capacidades de cálculo simbólico deste ambiente. De modo a simplificar a compreensão das soluções, os resultados finais foram apresentados em notação de ponto flutuante.

Infelizmente, para o caso das soluções próprias de sistemas intervalares não foi possível conceber uma forma gráfica similar à apresentada para os exemplos de determinação de soluções próprias de equações polinomiais intervalares. Por este motivo, somente os resultados algébricos serão apresentados. Ainda, com o intuito de não tornar enfadonha a apresentação dos exemplos, a execução do algoritmo não será apresentada em detalhes, mas as saídas geradas por sua execução encontram-se em mídia digital, no endereço www.mat.pucrs.br/~vaccaro/sei/.

Exemplo 6.20: O sistema 2 x 2

$$\begin{pmatrix} [2;4] & [-1;1] \\ [-1;1] & [2;4] \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} [x] \\ [y] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-3;3] \\ [0;0] \end{pmatrix}$$

não apresenta solução própria.

Exemplo 6.21: A solução encontrada pelo Algoritmo 2 para o sistema 2 x 2

$$\begin{pmatrix} [10;15] & [1;3] \\ [2;7] & [12;14] \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} [x] \\ [y] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [19;42] \\ [110;133] \end{pmatrix}$$

é dada pelo vetor

$$\begin{pmatrix} [x^p] \\ [y^p] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1;1] \\ [9;9] \end{pmatrix}.$$

Exemplo 6.22: O sistema 2 x 2

$$\begin{pmatrix} [2;4] & [-1;1] \\ [-1;1] & [2;4] \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} [x] \\ [y] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-3;3] \\ [-3;3] \end{pmatrix}$$

apresenta como solução própria o vetor intervalar

$$\begin{pmatrix} [x^p] \\ [y^p] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-0.6;0.6] \\ [-0.6;0.6] \end{pmatrix}.$$

Exemplo 6.23: Para o sistema 2 x 2

$$\begin{pmatrix} [2;3] & [0;1] \\ [1;2] & [2;3] \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} [x] \\ [y] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0;120] \\ [60;240] \end{pmatrix}$$

a solução própria encontrada pelo Algoritmo 2 é

$$\begin{pmatrix} [x^p] \\ [y^p] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0;17.14285714] \\ [30;68.57142857] \end{pmatrix}.$$

O resultado obtido acima é similar ao encontrado por Markov [MAR 99b], que propõe um algoritmo baseado na abordagem de aritmética intervalar dirigida. Conforme Markov, este exemplo foi descrito inicialmente por Hansen¹², que propõe como solução o intervalo

$$\begin{pmatrix} [-120;180] \\ [-60;360] \end{pmatrix}.$$

Korzenowski [KOR 94] também apresenta este exemplo, mas indica como solução o vetor intervalar

$$\begin{pmatrix} [-120;90] \\ [-60;240] \end{pmatrix}.$$

Nenhum dos dois últimos resultados sugeridos representa uma solução própria. No entanto, comparando resultado de Korzenowski com a solução própria encontrada verifica-se que a solução própria está contida na solução intervalar e, portanto, apresenta menor diâmetro. Porém, mais que apenas uma discussão sobre o fato da imprecisão encontrada ser maior ou menor do que a esperada, a discussão ressalta o fato de a solução própria garantir condições de igualdade estrutural. Além disso, pela monotonicidade tem-se que

$$\forall \begin{pmatrix} [x] \\ [y] \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} [0;17.14285714] \\ [30;68.57142857] \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} [2;3]*[x]+[0;1]*[y] \\ [1;2]*[x]+[2;3]*[y] \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} [0;120] \\ [60;240] \end{pmatrix},$$

onde a inclusão é assumida componente a componente.

Exemplo 6.24: O sistema 2 x 2

$$\begin{pmatrix} [-1;1] & [0;1] \\ [-1;0] & [2;3] \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} [x] \\ [y] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-2;2] \\ [0;2] \end{pmatrix}$$

apresenta infinitas soluções, dadas por

$$\begin{pmatrix} [x^p] \\ [y^p] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-2; \bar{x}] \\ [0;0] \end{pmatrix}, \forall \bar{x} \in [-2;0].$$

Exemplo 6.25: Conforme a abordagem de aritmética dirigida utilizada por Markov [MAR 99b], o sistema de ordem 3

$$\begin{pmatrix} [0.7;1.3] & [-0.3;0.3] & [-0.3;0.3] \\ [-0.3;0.3] & [0.7;1.3] & [-0.3;0.3] \\ [-0.3;0.3] & [-0.3;0.3] & [0.7;1.3] \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} [x] \\ [y] \\ [z] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-14;7] \\ [9;12] \\ [-3;3] \end{pmatrix}$$

apresenta como solução, após 10 iterações do algoritmo ele proposto,

$$\begin{pmatrix} [x] \\ [y] \\ [z] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-9.125;-13.0536] \\ [16.7679;7.125] \\ [11.25;-2.67857] \end{pmatrix}.$$

¹² HANSEN, E. Bounding the solution of interval equations. *SIAM J. Numer. Anal.* 29 (5), 1992. p. 1493-1503.

Observe-se, no entanto, que nenhuma das componentes é um intervalo de \mathbb{IR} , visto que seus extremos “inferiores” são maiores que os “superiores”. Ocorre que a aritmética utilizada por Markov possui interpretação para intervalos dessa natureza. De fato, o Algoritmo 2 apresenta algumas soluções similares, mas estas são descartadas por extrapolarem o escopo e os objetivos a que este algoritmo se propõe. Assim, sendo, a resposta gerada pelo Algoritmo 2 é de que este sistema não possui solução própria.

Exemplo 6.26: O sistema 3 x 3

$$\begin{pmatrix} [0.7;1.3] & [-0.3;0.3] & [-0.3;0.3] \\ [-0.3;0.3] & [0.7;1.3] & [-0.3;0.3] \\ [-0.3;0.3] & [-0.3;0.3] & [0.7;1.3] \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} [x] \\ [y] \\ [z] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-188.0;149.0] \\ [-76.8;186.0] \\ [-177.0;177.0] \end{pmatrix}$$

é uma variante do sistema apresentado no exemplo anterior e possui como solução própria o vetor

$$\begin{pmatrix} [x^p] \\ [y^p] \\ [z^p] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-101.0;71.0] \\ [-15.0;99.0] \\ [-90.0;90.0] \end{pmatrix}.$$

Exemplo 6.27: Markov [MAR 99b] apresenta também o seguinte sistema de ordem 3, originário de um artigo de Ning e Kearfott¹³:

$$\begin{pmatrix} [3.7;4.3] & [-1.5;-0.5] & [0;0] \\ [-1.5;-0.5] & [3.7;4.3] & [-1.5;-0.5] \\ [0;0] & [-1.5;-0.5] & [3.7;4.3] \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} [x] \\ [y] \\ [z] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-14;14] \\ [-9;9] \\ [-3;3] \end{pmatrix}$$

Para este sistema o Algoritmo 2 apresenta como solução o vetor

$$\begin{pmatrix} [x^p] \\ [y^p] \\ [z^p] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-2.926675200;2.926675200] \\ [-0.9435310936;0.9435310936] \\ [-0.3685356650;0.3685356650] \end{pmatrix},$$

que é coerente com a encontrada pelo algoritmo proposto por Markov.

Exemplo 6.28: Markov [MAR 99b] apresenta uma variação do exemplo anterior, trocando apenas os termos independentes das equações:

$$\begin{pmatrix} [3.7;4.3] & [-1.5;-0.5] & [0;0] \\ [-1.5;-0.5] & [3.7;4.3] & [-1.5;-0.5] \\ [0;0] & [-1.5;-0.5] & [3.7;4.3] \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} [x] \\ [y] \\ [z] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-14;0] \\ [-9;0] \\ [-3;0] \end{pmatrix}$$

e indica como solução, após 10 iterações, o vetor

$$\begin{pmatrix} [x] \\ [y] \\ [z] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-3.46158;-0.936849] \\ [-2.3109;-1.7696] \\ [-0.903442;-0.936889] \end{pmatrix}.$$

Similarmente ao exemplo 6.25, a aplicação do Algoritmo 2 sobre este problema indica a inexistência de soluções próprias. Isto porque a solução proposta por Markov apresenta, na terceira componente, um intervalo não próprio de \mathbb{IR} .

¹³ NING, S.; KEARFOTT, R. B. A comparison of some methods for solving interval equations. *SIAM J. Numer. Anal.* 34 (4), 1997. p. 1289-1305.

Exemplo 6.29: Outra variação proposta por Markov [MAR 99b] sobre o Exemplo 6.27 é o sistema

$$\begin{pmatrix} [3.7;4.3] & [-1.5;-0.5] & [0;0] \\ [-1.5;-0.5] & [3.7;4.3] & [-1.5;-0.5] \\ [0;0] & [-1.5;-0.5] & [3.7;4.3] \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} [x] \\ [y] \\ [z] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [2;14] \\ [-9;-3] \\ [-3;1] \end{pmatrix}$$

Para este sistema o Algoritmo 2 apresenta como solução o vetor

$$\begin{pmatrix} [x^p] \\ [y^p] \\ [z^p] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0.3929694458;2.867242319] \\ [-1.113905351;-1.092026101] \\ [-0.8246541978;-0.1813129803] \end{pmatrix}.$$

Esta solução é similar à apresentada por Markov.

Exemplo 6.30: O sistema a seguir é uma modificação de um exemplo proposto por Rump [RUM 94], no qual apenas os termos independentes foram alterados:

$$\begin{pmatrix} [3;3] & [1;2] \\ [1;2] & [3;3] \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} [x] \\ [y] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-0.5;10.5] \\ [5.5;12.0] \end{pmatrix}$$

Este sistema possui como solução própria

$$\begin{pmatrix} [x^p] \\ [y^p] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-1.0;1.5] \\ [2.5;3.0] \end{pmatrix}.$$

Exemplo 6.31: Para o sistema de ordem 3

$$\begin{pmatrix} [0.8;1.5] & [-0.5;0.4] & [-0.5;0.4] \\ [-0.5;0.4] & [0.8;1.5] & [-0.5;0.4] \\ [-0.5;0.4] & [-0.5;0.4] & [0.8;1.5] \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} [x] \\ [y] \\ [z] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [0.2;0.5] \\ [-0.5;-0.2] \\ [0.2;0.5] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-6.3;7.6] \\ [-9.0;9.1] \\ [-10.3;11.9] \end{pmatrix}$$

o Algoritmo 2 apresenta como solução própria o vetor

$$\begin{pmatrix} [x^p] \\ [y^p] \\ [z^p] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-1.0;2.0] \\ [-3.0;4.0] \\ [-5.0;6.0] \end{pmatrix}.$$

Em particular observe-se a presença de termos independentes em ambos os membros das equações. Também é digno de nota que este sistema, por possuir 6 coeficientes pertencendo à região III, gera ao todo 516 sistemas alternativos para a determinação da solução.

Exemplo 6.32: A aplicação do Algoritmo 2 sobre o sistema

$$\begin{pmatrix} [-1.1;0.9] & [-0.1;0.1] & [-0.1;0.1] & [-0.1;0.1] \\ [-0.1;0.1] & [-1.1;0.9] & [-0.1;0.1] & [-0.1;0.1] \\ [-0.1;0.1] & [-0.1;0.1] & [-1.1;0.9] & [-0.1;0.1] \\ [-0.1;0.1] & [-0.1;0.1] & [-0.1;0.1] & [-1.1;0.9] \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} [x] \\ [y] \\ [z] \\ [w] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-0.33;0.33] \\ [-0.83;-0.19] \\ [0.19;0.83] \\ [-1.23;0.77] \end{pmatrix}$$

revela a solução própria

$$\begin{pmatrix} [x^p] \\ [y^p] \\ [z^p] \\ [w^p] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-0.1;0.1] \\ [0.4;0.6] \\ [-0.6;0.4] \\ [1.0;1.0] \end{pmatrix}.$$

Infelizmente a aplicação do Algoritmo 3 implica resolver 65.536 sistemas alternativos para determinar essa solução.

Exemplo 6.33: O sistema de ordem 3

$$\begin{pmatrix} [-1.5;1.5] & [-1.5;-0.5] & [0;0] \\ [-1.5;-0.5] & [-1.5;1.5] & [-1.5;-0.5] \\ [0;0] & [-1.5;-0.5] & [-1.5;1.5] \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} [x] \\ [y] \\ [z] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-6;6] \\ [-6;6] \\ [-6;6] \end{pmatrix}$$

apresenta um interessante conjunto de infinitas soluções próprias dado por

$$\begin{pmatrix} [x^p] \\ [y^p] \\ [z^p] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0;-\bar{y}+4] \\ [-\bar{y};\bar{y}] \\ [\bar{y}-4;0] \end{pmatrix}, \forall \bar{y} \in [0;4] \text{ e } \begin{pmatrix} [x^p] \\ [y^p] \\ [z^p] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\underline{x};0] \\ [-\underline{x}-4;\underline{x}+4] \\ [0;-\underline{x}] \end{pmatrix}, \forall \underline{x} \in [-4;0].$$

Exemplo 6.34: O sistema de ordem 3

$$\begin{pmatrix} [0.9;1.1] & [-0.2;0.1] & [-0.1;0.2] \\ [-0.2;0.1] & [0.9;1.1] & [-0.2;0.1] \\ [-0.1;0.2] & [-0.2;0.1] & [0.9;1.1] \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} [x] \\ [y] \\ [z] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-1.0;2.0] \\ [-0.5;0.5] \\ [-2.0;1.0] \end{pmatrix}$$

apresenta como solução própria o vetor

$$\begin{pmatrix} [x^p] \\ [y^p] \\ [z^p] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-0.6060606061;1.666666667] \\ [0.0;0.0] \\ [-1.666666667;0.6060606061] \end{pmatrix}.$$

Exemplo 6.35: Finalmente, o sistema de ordem 5

$$\begin{pmatrix} [-1.1;1.1] & [-0.5;0.5] & [-0.5;0.5] & [0;0] & [0;0] \\ [-0.5;0.5] & [-1.1;1.1] & [-0.5;0.5] & [-0.5;0.5] & [0;0] \\ [-0.5;0.5] & [-0.5;0.5] & [-1.1;1.1] & [-0.5;0.5] & [-0.5;0.5] \\ [0;0] & [-0.5;0.5] & [-0.5;0.5] & [-1.1;1.1] & [-0.5;0.5] \\ [0;0] & [0;0] & [-0.5;0.5] & [-0.5;0.5] & [-1.1;1.1] \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} [x] \\ [y] \\ [z] \\ [w] \\ [t] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-2.0;2.0] \\ [-4.2;4.2] \\ [-4.2;4.2] \\ [-4.2;4.2] \\ [-2.0;2.0] \end{pmatrix}$$

apresenta como soluções próprias a família infinita de vetores

$$\begin{pmatrix} [x^p] \\ [y^p] \\ [z^p] \\ [w^p] \\ [t^p] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0;0] \\ [\underline{y};\bar{y}] \\ [\underline{z};\bar{z}] \\ [\underline{w};\bar{w}] \\ [0;0] \end{pmatrix}, \text{ onde } \begin{cases} [\underline{y};\bar{y}] \in \mathfrak{IR}, [\underline{y};\bar{y}] \subseteq [-2;2] \\ [\underline{z};\bar{z}] \in \mathfrak{IR}, [\underline{z};\bar{z}] \subseteq [-2;2] \\ [\underline{w};\bar{w}] \in \mathfrak{IR}, [\underline{w};\bar{w}] \subseteq [-2;2] \end{cases}$$

A próxima seção continuará a caracterização do conceito de solução própria intervalar através da análise conjunta dos exemplos ora apresentados.

6.11 Análise dos Exemplos Apresentados

Os exemplos apresentados permitem evidenciar a eficácia do algoritmo no sentido de determinar as soluções próprias de sistemas lineares intervalares. Além disso, são identificadas diferentes características das soluções próprias deste tipo de sistema:

- conforme afirmado anteriormente, a existência da solução própria implica que os diâmetros dos lados esquerdo e direito de cada equação sejam iguais. Por este motivo, a situação mais comum é a de sistemas lineares que não possuam soluções próprias;
- sistemas de equações lineares intervalares podem apresentar diferentes cardinalidades para o conjunto de soluções próprias. A grande maioria dos testes realizados indicou a ausência de solução própria, seguida de casos com presença de uma solução própria. Menos frequentes – mas não menos importantes – foram os casos similares aos dos exemplos 6.24, 6.33 e 6.35, que apresentaram infinitas soluções próprias;
- com relação à presença de infinitas soluções próprias em sistemas lineares intervalares, os testes realizados permitem conjecturar que este fato seja relacionado à presença de coeficientes da região BII – isto é, simétricos – na diagonal principal e nos membros direitos das equações. Esta afirmação é também fundamentada na observação do Teorema 4.1, que indica que o produto de diferentes números-intervalo com coeficientes dessa natureza sempre gera um novo número-intervalo simétrico. Dessa forma, as contribuições de diferentes números-intervalo poderiam ser absorvidas pela natureza dos coeficientes, promovendo a presença de diferentes soluções próprias para um mesmo sistema. Infelizmente, as evidências experimentais encontradas são insuficientes para a geração de uma conclusão formal a esse respeito. Assim, sugere-se que este tópico seja detalhado futuramente.

Particularmente com relação aos exemplos apresentados por Markov [MAR 99b] cabe observar que sempre que os exemplos apresentados por aquele autor possuíam soluções próprias, essas foram identicamente encontradas pelo Algoritmo 2. Nas situações em que o algoritmo de Markov apresentava algum componente da solução externo a \mathcal{IR} , o Algoritmo 2 indicou a não existência de solução própria. Esta observação leva a crer que o Algoritmo 2 é coerente com a solução proposta por Markov no caso particular de operação apenas com intervalos próprios de \mathcal{IR} . Este resultado atende também a certas expectativas teóricas, visto que a aritmética dirigida utilizada por Markov permite estender \mathcal{IR} . Como acréscimo, é pertinente a observação de que os resultados obtidos por Markov são coerentes com a semântica de número-intervalo, fato que não é referido por aquele autor.

Infelizmente, conforme observado nos parágrafos anteriores, os exemplos apresentados na seção anterior não são suficientes para a identificação de propriedades estruturais das soluções próprias de sistemas intervalares. A definição de tais propriedades demandaria considerável esforço além do já imposto neste trabalho, sendo deixada como possibilidade de desenvolvimento futuro. Esta observação abrange também a questão da representação gráfica das soluções encontradas, que exigiria, para um sistema de ordem n , a capacidade de visualização de n soluções simultâneas na forma apresentada na Seção 6.6.

6.12 Comentários Finais

Este capítulo apresentou uma discussão sobre o significado de solução intervalar e o de solução própria intervalar. A primeira efetivamente associa-se ao conceito de envoltória intervalar do conjunto de soluções reais, procurando apresentar o maior conjunto de números reais que podem ser solução para alguma das equações reais formadas a partir dos valores reais encerrados nos intervalos componentes das equações. Por outro lado, soluções próprias

intervalares exigem a satisfação da igualdade algébrica usual, coerente com a orientação de números-intervalo. Não obstante, a solução própria mostrou-se, em geral, mais restritiva que a solução intervalar, uma vez que exige simultaneidade das interseções dos limites dos intervalos que representam os membros da equação.

Foram apresentados dois algoritmos que permitem a determinação exaustiva das soluções próprias de equações polinomiais e de sistemas de equações lineares intervalares. Os algoritmos fundamentam-se nos resultados dos teoremas 4.1 e 5.1. Conforme apresentado e discutido nas seções 4.3, 6.5 e 6.9, esses algoritmos apresentam complexidade exponencial. Ainda assim, os exemplos apresentados permitiram evidenciar sua eficácia frente a resultados encontrados na literatura consultada.

Finalmente, os resultados obtidos tanto no caso de equações polinomiais intervalares como no caso de sistemas de equações lineares intervalares reforçam o fato de que o conceito de número-intervalo excede o conceito de número real no sentido da extrapolação de propriedades associadas ao número e tipo de soluções encontradas. Com efeito, provou-se possível a obtenção de infinitas soluções próprias para equações polinomiais intervalares, bem como a para sistemas de equações lineares intervalares.

O próximo capítulo procurará demonstrar outro benefício da utilização de uma estrutura algébrica mais estável, a dos números-intervalo. Para tanto, apresentará uma discussão de como tal estrutura pode auxiliar na obtenção da envoltória intervalar do conjunto de soluções de uma equação polinomial real.

7 Envoltória Intervalar do Conjunto de Soluções de Equações Intervalares de Variável Real

Este capítulo busca aprofundar a discussão sobre a semântica associada à envoltória do conjunto das soluções de uma equação intervalar de variável real. A discussão é enriquecida com a apresentação de um algoritmo capaz de obter esse tipo de envoltória para equações polinomiais, baseado na interpretação de números-intervalo e no resultado do Corolário 4.3. Os resultados obtidos são ilustrados através de exemplos, de modo a fomentar a compreensão das vantagens da utilização de uma estrutura algebricamente estável.

A primeira seção apresenta considerações com respeito à conexão entre soluções próprias e envoltórias intervalares de soluções reais.

7.1 Envoltórias Intervalares das Soluções de Equações Polinomiais Intervalares de Variável Real

O problema ora proposto pode ser descrito da seguinte forma:

“Dada uma equação polinomial de variável real e coeficientes intervalares

$$\sum_{i=0}^n [a_i] * x^i = [b]$$

deseja-se determinar uma envoltória para o conjunto de todas possíveis soluções dessa equação, se esta existir”.

Cabe observar que a envoltória intervalar descrita no problema acima cumpre o mesmo papel da solução intervalar apresentada na Seção 6.1, mas difere desta por levar em consideração a essência real da variável em todas as instâncias do problema. Ainda assim, a representação gráfica das soluções é idêntica à descrita na Seção 6.1, por ser considerada a forma mais adequada às características do problema em questão.

Exemplo 7.1: A envoltória intervalar das soluções da equação $[1;1] * x + [1;5] = [0;0]$ é dada pelo conjunto de valores reais contidos no intervalo $[-5;-1]$. Este exemplo é apresentado por Korzenowski [KOR 94], que denomina esse tipo de resultado “solução intervalar ótima”. A Figura 7.1 ilustra a solução encontrada.

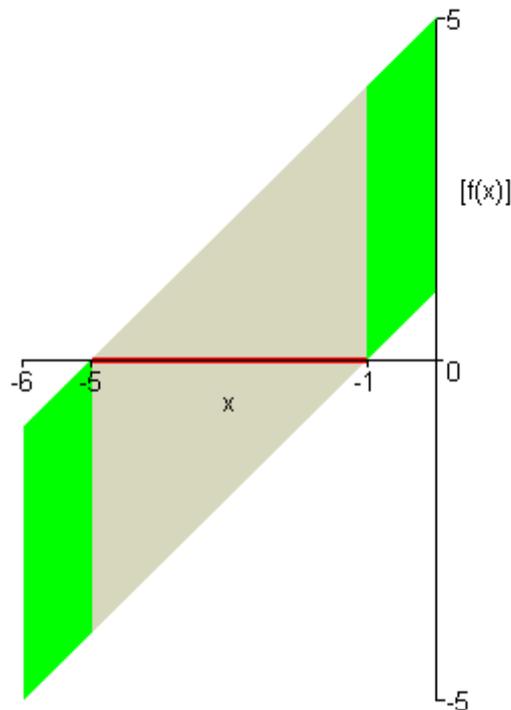


FIGURA 7.1 – Representação da envoltória intervalar das soluções reais da equação $[1;1] * x + [1;5] = [0;0]$.

Da Figura 7.1 observa-se que os valores reais limitados inferiormente por -5 e superiormente por -1 apresentam intersecção com o intervalo $[0;0]$, ou seja, com o eixo horizontal. Assim, conforme descrito anteriormente, é razoável aceitar que estes valores reais sejam soluções da equação em questão [ALE 2000]. No entanto, certa cautela é necessária no que se refere à forma de escrita e referência à solução obtida, principalmente do ponto de vista da consistência com a discussão apresentada nos capítulos anteriores. Do ponto de vista de solução própria, a solução obtida **não é** $[x] = [-5;-1]$. Tal afirmação torna-se mais clara, se observado que:

- $[-5;-1] + [1;5] = [-4;4] \neq [0;0]$, e portanto a solução não é própria, conforme o sentido descrito no Capítulo 6;
- $w([x] + [1;5]) = w([x]) + w([1;5]) = w([x]) + 4 \geq 4$ e $w([0;0]) = 0$ e, portanto, não há solução própria para a equação, conforme a Proposição 6.1;
- a variável x representa um número **real**.

Esta última observação é crucial, pois remete à questão fundamental do tipo de dado associado à variável x . De fato, pela Proposição 2.1, $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{I}\mathfrak{R}$. Ora este resultado informa que o conjunto dos números reais está incluído em $\mathfrak{I}\mathfrak{R}$, mas também implica que o conjunto dos números reais **não é igual** ao conjunto $\mathfrak{I}\mathfrak{R}$. Na prática isto significa que, se x é originalmente do tipo de dado real, então pode ser, no máximo, associado a um intervalo degenerado – de diâmetro nulo –, mas não a um intervalo de diâmetro positivo. Em resumo: as restrições do problema para x variável real são dominantes sobre as associadas a $[x]$, número-intervalo.

Em face aos argumentos acima, a seguinte definição se faz necessária:

Definição 7.1 (Envoltória Intervalar do Conjunto de Soluções Reais de uma Equação Intervalar de Variável Real): A envoltória intervalar do conjunto de soluções reais da equação $f(x) = [y]$, onde $x \in \mathfrak{R}$ e $[y] \in \mathfrak{IR}$ é dada pelo menor intervalo $[x^e] \in \mathfrak{IR}$ que contenha todas as soluções reais de $f(x) = [y]$, isto é,

$$[x^e] \in \mathfrak{IR} \text{ é envoltória intervalar das soluções reais de } f(x) = [y] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \forall y \in [y], \exists x \in [x^e], f(x) = y \wedge \forall x \in [x^e], \exists y \in [y], f(x) = y.$$

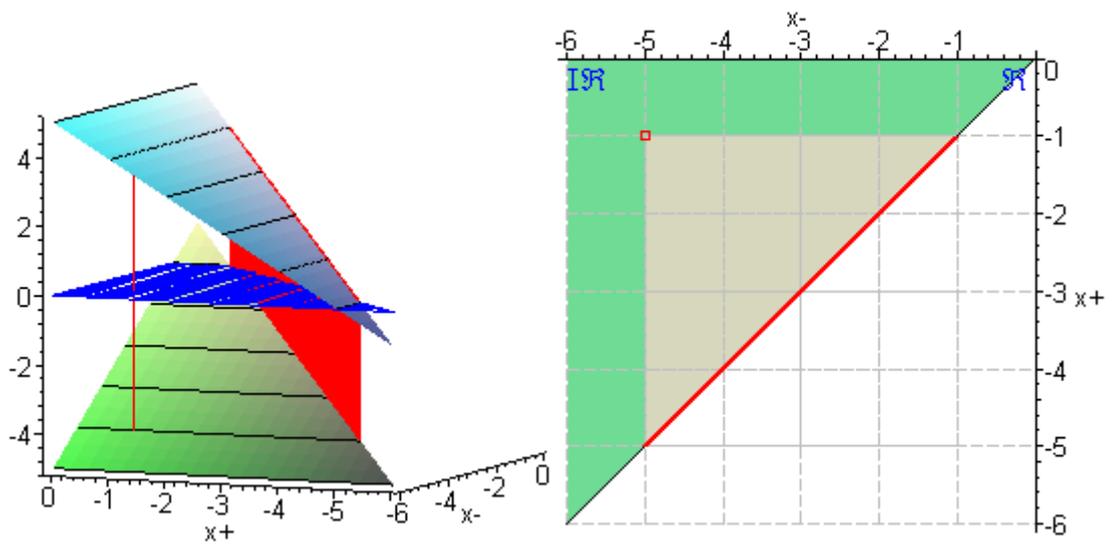
Neste texto, o intervalo encontrado na solução deste tipo de equação será denominado **envoltória intervalar do conjunto das soluções reais** – ou, simplesmente, **envoltória intervalar** – da equação, mantendo a coerência com a discussão apresentada nos capítulos prévios.

A correta denominação do tipo de solução obtido nesse capítulo é importante para evitar a confusão de conceitos fundamentais, graças à proximidade de notação entre um número-intervalo e uma envoltória intervalar de soluções reais. Em particular, da discussão anterior pode-se concluir que a envoltória intervalar das soluções reais **não** é um número-intervalo e, portanto, não deve necessariamente ser operada como tal. Esta observação é também coerente com as representações gráficas destes entes. A Figura 7.2 apresenta o número-intervalo $[x] = [-5; -1]$ e a envoltória intervalar $x \in [-5; -1]$, $x \in \mathfrak{R}$. Ambos são apresentados simultaneamente, associados a um conjunto de coordenadas bidimensionais conforme a avaliação da função definida por $f([x]) = [x] + [1; 5]$ e seguindo o padrão gráfico utilizado no capítulo anterior.

Como se pode observar pelas imagens (a) e (c) da Figura 7.2, a determinação da envoltória intervalar é obtida sobre a intersecção do volume gerado pela avaliação intervalar de uma função com o plano $y = x$, $x \in \mathfrak{R}$, $y \in \mathfrak{R}$. Já a análise da Figura 7.2(b) permite identificar uma sutil, mas importante, diferença entre a envoltória intervalar e o número-intervalo: a envoltória intervalar de reais associada ao número-intervalo $[x] \in \mathfrak{IR}$ é dada estritamente pelos valores reais contidos nesse intervalo, excluindo-se a possibilidade de formação de subconjuntos. Essa observação leva à consideração de que um número-intervalo carrega consigo não apenas a informação dos números reais nele contidos (envoltória intervalar de reais), mas também a informação de todos os intervalos que podem ser dele constituídos. Ainda, a Figura 7.2(b) poderia induzir à idéia de que a projeção das soluções próprias de uma equação intervalar sobre a reta identidade geraria a envoltória intervalar das soluções reais da equação equivalente de variável real. Este fato não é verdadeiro, como se pode ver no Exemplo 7.2, a seguir.

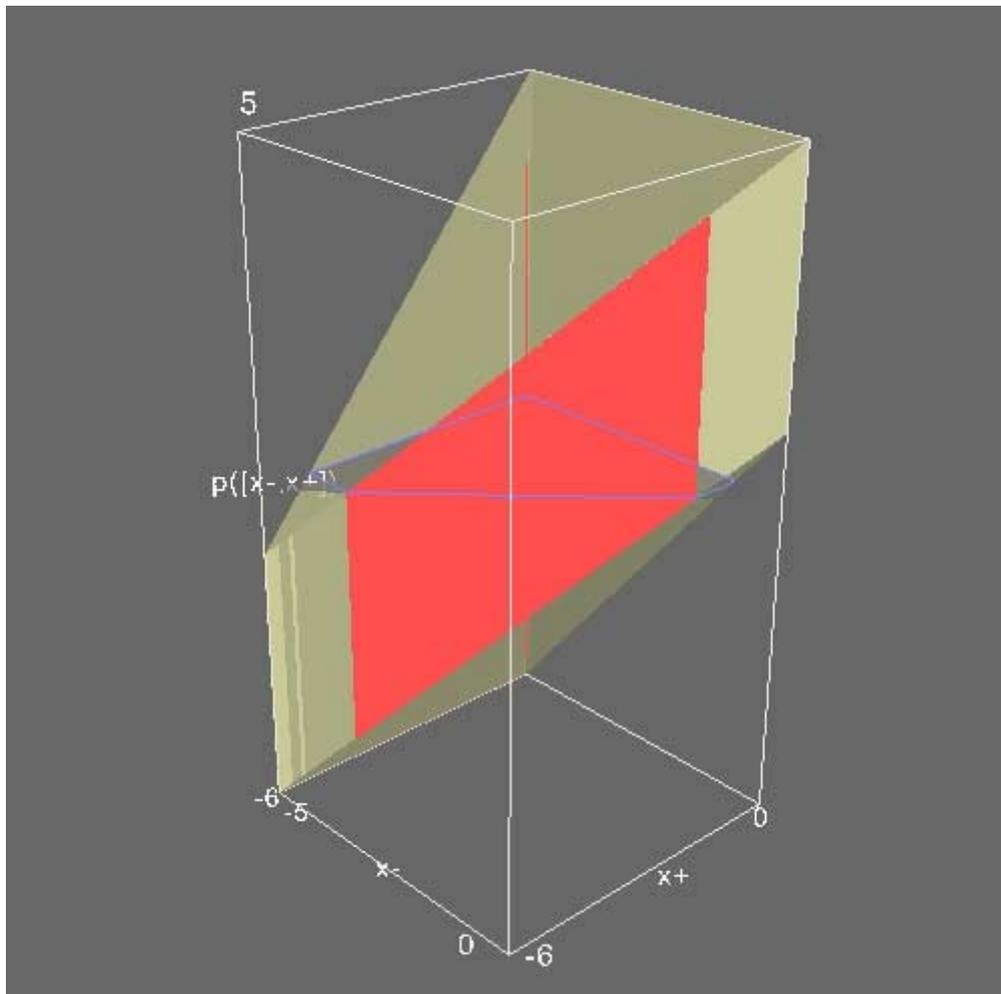
Exemplo 7.2: Sejam as equações $[1; 2] * [x]^2 = [2; 4]$ e $[1; 2] * x^2 = [2; 4]$, distintas apenas pelo tipo de variável considerado. Nessas condições, observa-se que:

- as soluções próprias de $[1; 2] * [x]^2 = [2; 4]$ são $[x^p]_1 = [-\sqrt{2}; -\sqrt{2}]$ e $[x^p]_2 = [\sqrt{2}; \sqrt{2}]$; e
- a envoltória intervalar das soluções reais de $[1; 2] * x^2 = [2; 4]$ é $x \in [-2; -1] \cup [1; 2]$.



(a)

(b)



(c)

FIGURA 7.2 – Representação gráfica do número-intervalo $[x] = [-5; -1]$ e da envoltória intervalar $x \in [-5; -1]$, $x \in \mathfrak{R}$, ambos avaliados na função $f([x]) = [x] + [1; 5]$. Outputs gerados pelo Maple (a e b) e pelo VTK (c). Os pontos de vista das imagens (a) e (c) são diferentes.

Então, conforme apresentado na Figura 7.3, o exemplo demonstra que em geral não será verdadeira a afirmação de que a projeção das soluções próprias sobre a reta identidade gere a envoltória das soluções reais da equação equivalente. Uma das razões deste fato é que as operações definidas usualmente em aritmética intervalar – isto é, sobre números-intervalo – consideram cada intervalo como uma fonte de imprecisão independente, diferentemente da situação da operação com números reais.

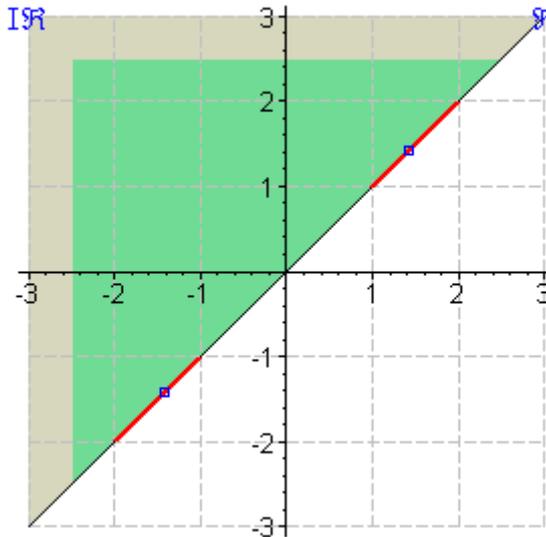


FIGURA 7.3 – Vista superior das soluções próprias da equação $[1;2] * [x]^2 = [2;4]$,
 $[x^p]_1 = [-\sqrt{2}; -\sqrt{2}]$ e $[x^p]_2 = [\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ (retângulos)
e da envoltória intervalar das soluções reais da equação $[1;2] * x^2 = [2;4]$,
 $x \in [-2;-1] \cup [1;2]$ (linhas em negrito).

No entanto, mesmo não sendo verdadeira a identificação entre a projeção das soluções próprias e a determinação das envoltórias intervalares, é válido o seguinte resultado:

Teorema 7.1 (Associação entre Solução Própria e Envoltória Intervalar de Soluções Reais): Sejam $f([x]) = [y]$ uma equação intervalar e $f(x)=[y]$ sua equação equivalente de variável real. Sejam $[x^p] \in \mathfrak{I}\mathfrak{R}$ a solução própria de $f([x]) = [y]$ e $[x^e] \in \mathfrak{I}\mathfrak{R}$ a envoltória intervalar das soluções reais de $f(x) = [y]$. Então

$$\forall x, x \in [x^p] \Rightarrow x \in [x^e],$$

ou seja,

$$[x^p] \subseteq [x^e].$$

Prova do Teorema 7.1: Nas condições enunciadas tem-se, pelo Teorema 6.1, que

$$\forall x \in [x^p], x \in \mathfrak{R} \Rightarrow f(x) \subseteq [y] \Leftrightarrow \exists y \in [y], f(x) = y \Rightarrow x \in [x^e]. \text{ Logo, } [x^p] \subseteq [x^e].$$

Logo, é válido o Teorema 7.1. ■

A compreensão dessas idéias permeia o desenvolvimento do algoritmo apresentado na seção seguinte, através do qual os resultados obtidos para números-intervalo são utilizados para a determinação da envoltória intervalar de soluções para equações polinomiais com coeficientes intervalares e argumento real.

7.2 Determinação das Envoltórias das Soluções Reais de Equações Polinomiais de Coeficientes Intervalares e Variável Real

Nesta seção serão apresentados resultados relevantes para a construção do algoritmo que permite a determinação das envoltórias intervalares das soluções reais de equações polinomiais de coeficientes intervalares e variável real. O conjunto de teoremas apresentado tem por objetivo a identificação da forma e da origem dos valores limitantes das referidas envoltórias. O primeiro resultado apresentado auxilia na identificação de uma característica morfológica relevante para funções polinomiais de coeficientes intervalares e argumento real:

Teorema 7.2 (Avaliação do Diâmetro da Imagem de um Polinômio Intervalar de Variável Real): Seja p um polinômio de coeficientes intervalares e argumento real definido

por $p(x) = \sum_{i=0}^n [a_i] * x^i$. Então:

- $\exists i, 0 \leq i \leq n, w([a_i]) > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathfrak{R}^*, w(p(x)) > 0;$
- $w([a_0]) > 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathfrak{R}, w(p(x)) > 0.$

Prova do Teorema 7.2: A prova apresentada no Anexo 1.17 é direta e essencialmente explora o Corolário 4.3 e as propriedades classicamente conhecidas do diâmetro intervalar. ■

O Teorema 7.2 demonstra essencialmente que é não é possível a existência de uma função polinomial intervalar de argumento real e com pelo menos um coeficiente não degenerado tal que sua avaliação sobre um real não nulo resulte em um intervalo degenerado. Ou seja, coerentemente com a discussão apresentada na Seção 3.3, este teorema dá garantias de que uma equação polinomial intervalar somente poderá resultar um intervalo degenerado se o argumento for igual a zero e o termo independente for um número-intervalo degenerado. Cabe a observação de que uma parte deste teorema foi coincidentemente encontrada no artigo não publicado de Oliveira e Claudio [OLI 99], integrantes do Grupo de Matemática da Computação da PUCRS.

Nesse mesmo artigo é encontrado o seguinte resultado, que, por ser da autoria de Oliveira e Claudio [OLI 99], é referido como Proposição 7.1. Ele é apresentado com o objetivo de facilitar a compreensão das provas dos demais resultados apresentados no decorrer deste capítulo. A notação foi alterada de sua versão original para manter a coerência com a já apresentada ao longo do texto.

Proposição 7.1: Seja p um polinômio de coeficientes intervalares e argumento real definido

por $p(x) = \sum_{i=0}^n [a_i] * x^i$. Então os polinômios limitantes de p são definidos por

$$\forall x \geq 0, \begin{cases} p_{U+}(x) = \sum_{i=0}^n \overline{a_i} * x^i \\ p_{L+}(x) = \sum_{i=0}^n \underline{a_i} * x^i \end{cases}$$

e

$$\forall x \leq 0, \begin{cases} p_{U-}(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2^*i} * x^{2^*i} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2^*i+1} * x^{2^*i+1} \\ p_{L-}(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2^*i} * x^{2^*i} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2^*i+1} * x^{2^*i+1} \end{cases}$$

Prova: Ver [OLI 99]. ■

Com base nos resultados acima apresenta-se a Definição 7.2:

Definição 7.2 (Polinômios Limitantes de um Polinômio Intervalar de Variável Real): Seja p um polinômio intervalar de variável real. Então:

- o polinômio limitante inferior de p , denotado por \underline{p} , é $\underline{p}(x) = \begin{cases} p_{L-}(x), & x < 0 \\ p_{L+}(x), & x \geq 0 \end{cases}$
- o polinômio limitante superior de p , denotado por \bar{p} , é $\bar{p}(x) = \begin{cases} p_{U-}(x), & x < 0 \\ p_{U+}(x), & x \geq 0 \end{cases}$

A partir da Definição 7.2 pode-se enunciar um resultado particular e decorrente do Teorema 7.2:

Corolário 7.1 (Inexistência de Troca de Comportamento dos Limitantes de uma Função Intervalar de Argumento Real para Valores Não Nulos): Seja p um polinômio de

coeficientes intervalares e argumento real definido por $p(x) = \sum_{i=0}^n [a_i] * x^i$ e tal que

$\exists i, 0 \leq i \leq n, w([a_i]) > 0$. Sejam \underline{p} e \bar{p} os polinômios limitantes de $p(x)$, na forma da Definição 7.2. Então $\forall x \in \mathfrak{R}^*, \underline{p}(x) \neq \bar{p}(x)$.

Prova: Pelo Teorema 7.2, $\forall x \in \mathfrak{R}^*, w(p(x)) > 0 \Leftrightarrow \bar{p}(x) - \underline{p}(x) > 0 \Leftrightarrow \underline{p}(x) \neq \bar{p}(x)$. ■

O Corolário 7.1 garante que não há intersecção entre as limitantes superior e inferior da imagem que representa a função intervalar para argumentos de mesmo sinal, o que implica que, nessas condições, uma mesma função real não poderá ser simultaneamente limitante superior e inferior dessa imagem. Esse resultado é relevante no sentido de simplificar a identificação dos pontos de início e de término das envoltórias intervalares para as soluções reais. De fato, a partir desse resultado observa-se que são equações de extremos opostos, ou seja,

$$\underline{p}(x) = \bar{b} \quad \text{e} \quad \bar{p}(x) = \underline{b},$$

que permitem identificar a envoltória que compreende todas as soluções reais possíveis. Com efeito, nessas condições o seguinte par de teoremas é apresentado:

Teorema 7.3 (Imagem de Extremos de Envoltórias Intervalares): Sejam $x_0 \in \mathfrak{R}$, $c \in \mathfrak{R}$ e f função intervalar localmente monótona não constante na vizinhança de x_0 . Então, se $x_0 \in \mathfrak{R}$ é extremo da envoltória intervalar da equação $f(x) = c$, então

$$\exists a, b \in \mathfrak{R}, a \leq c \leq b, f(x_0) = [c;b] \vee f(x_0) = [a;c].$$

Prova do Teorema 7.3: A prova apresentada para esse teorema explora a contradição gerada pela existência de um extremo para uma envoltória intervalar e que não possua imagem extrema na avaliação da função intervalar associada, conforme enunciado. Os detalhes podem ser encontrados no Anexo 1.18. ■

Teorema 7.4 (Identificação dos Extremos Limitantes de uma Envoltória Intervalar):

Seja p um polinômio de coeficientes intervalares e argumento real definido por

$$p(x) = \sum_{i=0}^n [a_i] * x^i. \text{ Seja } [b] \in \mathbb{IR}. \text{ Então os extremos das envoltórias intervalares do conjunto}$$

de soluções reais da equação $p(x) = [b]$:

- são dados pela solução das equações reais $\underline{p}(x) = \bar{b}$ e $\bar{p}(x) = \underline{b}$; ou
- são infinitos.

Prova do Teorema 7.4: A prova desse teorema é realizada explorando o resultado do Teorema 7.3 para demonstrar a existência de uma contradição caso as condições enunciadas sejam cumpridas e as conclusões, não. A descrição dos detalhes pode ser encontrada no Anexo 1.19. ■

Esse resultado pode ser melhor evidenciado através do Exemplo 7.3, no qual se observa que a maior envoltória é determinada justamente pela solução de igualdades como as apresentadas no Teorema 7.4. Os teoremas 7.3 e 7.4 também serão úteis na validação dos resultados dos exemplos apresentados nas seções seguintes.

Exemplo 7.3: A equação $[1;1] * x + [-7;-2] = [1;4]$ apresenta, como envoltória intervalar de suas soluções reais,

$$[x^e] = [3;11].$$

Alternativamente este resultado pode ser referido como

$$x \in [3;11],$$

para enfatizar o caráter real do tipo de dado da variável.

Esse resultado é coerente com o apresentado como solução ótima por Korzenowski [KOR 94, p.28]. Adicionalmente, observe-se que, conforme o Teorema 7.4,

$$\underline{p}(x) = \begin{cases} p_{L-}(x) = x - 7, & x < 0 \\ p_{L+}(x) = x - 7, & x \geq 0 \end{cases}$$

e

$$\bar{p}(x) = \begin{cases} p_{U-}(x) = x - 2, & x < 0 \\ p_{U+}(x) = x - 2, & x \geq 0 \end{cases}$$

e que

$$x = 3 \text{ é solução da equação } x - 2 = 1, \text{ ou seja, de } \bar{p}(x) = \underline{b},$$

e

$$x = 11 \text{ é solução da equação } x - 7 = 4, \text{ ou seja, de } \underline{p}(x) = \bar{b}.$$

A Figura 7.4 ilustra a equação, sendo os extremos da envoltória intervalar obtidos pelo menor e pelo maior valor das interseções da função faixa com as linhas horizontais que representam o membro $[1;4]$.

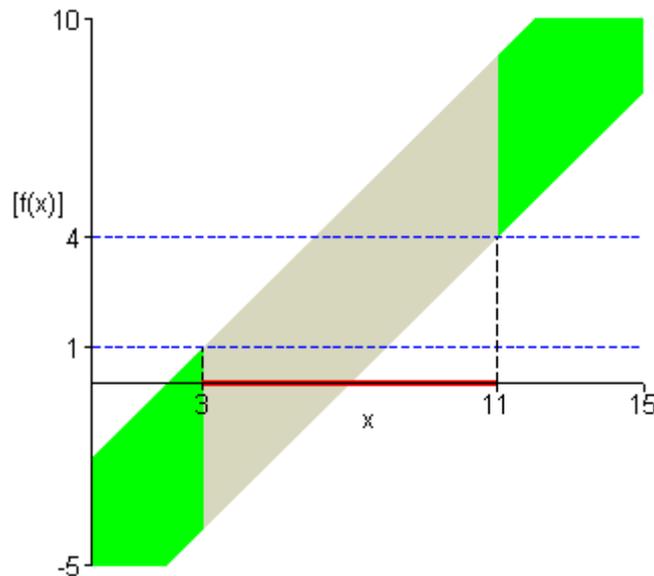


FIGURA 7.4 – Representação gráfica da equação $[1;1] * x + [-7;-2] = [1;4]$.
A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [3;11]$.

Em particular, a caracterização qualitativa das limitantes das envoltórias intervalares do conjunto de soluções reais de uma equação polinomial intervalar de variável real pode ser complementada pelos resultados dos lemas 7.1 e 7.2, a seguir. Esses resultados, apesar de um pouco complexos à primeira vista, tornam-se elementares se considerada a utilização de uma ferramenta gráfica de análise como apoio. Eles serão úteis para a composição do Teorema 7.5, apresentado mais adiante.

Lema 7.1: Seja $p(x) = [b]$ uma equação polinomial intervalar de variável real na qual $p(x) = \sum_{i=0}^n [a_i] * x^i$ e que possua envoltória intervalar não vazia. Seja $x > 0$. Nessas condições, a caracterização da presença de $+\infty$ como extremo de envoltória intervalar é dada conforme os casos abaixo:

- $[a_n] \in I \vee [a_n] \in IV \Rightarrow$ o maior extremo da envoltória intervalar é finito;
- $[a_n] \in II \vee [a_n] \in BII \vee [a_n] \in III \Rightarrow$ o maior extremo da envoltória intervalar é $+\infty$;
- $[a_n] \in BI \Rightarrow$ Nesse caso:
 - ♦ $\exists k > 0, \forall j > k, ([a_j] \in O \vee [a_j] \in BI) \wedge ([a_k] \notin O \wedge [a_k] \notin BI) \Rightarrow$ Nesse caso:
 - $[a_k] \in I \Rightarrow$ o maior extremo da envoltória intervalar é finito;
 - $[a_k] \in II \vee [a_k] \in BII \vee [a_k] \in III \vee [a_k] \in BIII \vee [a_k] \in IV \Rightarrow$ o maior extremo da envoltória intervalar é $+\infty$;

- ♦ $\forall j > 0, [a_j] \in O \vee [a_j] \in BI \Rightarrow$ Nesse caso:
 - $\underline{a_0} \leq \bar{b} \Rightarrow$ o maior extremo da envoltória intervalar é $+\infty$;
 - $\underline{a_0} > \bar{b} \Rightarrow$ a equação não possui maior extremo para a envoltória intervalar;
- $[a_n] \in BIII \Rightarrow$ Nesse caso:
 - ♦ $\exists k > 0, \forall j > k, ([a_j] \in O \vee [a_j] \in BIII) \wedge ([a_k] \notin O \wedge [a_k] \notin BIII) \Rightarrow$ Nesse caso:
 - $[a_k] \in I \vee [a_k] \in BI \vee [a_k] \in II \vee [a_k] \in BII \vee [a_k] \in III \Rightarrow$ o maior extremo da envoltória intervalar é $+\infty$;
 - $[a_k] \in IV \Rightarrow$ o maior extremo da envoltória intervalar é finito;
 - ♦ $\forall j > 0, [a_j] \in O \vee [a_j] \in BIII \Rightarrow$ Nesse caso:
 - $\bar{a_0} \geq \underline{b} \Rightarrow$ o maior extremo da envoltória intervalar é $+\infty$;
 - $\bar{a_0} < \underline{b} \Rightarrow$ a equação não possui maior extremo para a envoltória intervalar.

Prova: A prova do Lema 7.1 é realizada pela análise exaustiva dos casos acima descritos, explorando a Definição 7.2. O detalhamento pode ser encontrado no Anexo 1.20. ■

Lema 7.2: Seja $p(x) = [b]$ uma equação polinomial intervalar de variável real na qual $p(x) = \sum_{i=0}^n [a_i] * x^i$ e que possua envoltória intervalar não vazia. Seja $x < 0$. Nessas condições, a caracterização da presença de $-\infty$ como extremo de envoltória intervalar é dada conforme os casos abaixo:

- $[a_n] \in I \vee [a_n] \in IV \Rightarrow$ o menor extremo da envoltória intervalar é finito;
- $[a_n] \in II \vee [a_n] \in BII \vee [a_n] \in III \Rightarrow$ o menor extremo da envoltória intervalar é $-\infty$;
- $([a_n] \in BI \wedge n \text{ é ímpar}) \vee ([a_n] \in BIII \wedge n \text{ é par}) \Rightarrow$ Nesse caso:
 - ♦ $\exists k > 0, \forall j > k, ([a_j] \in O \vee \begin{cases} j \text{ é ímpar} & \rightarrow [a_j] \in BI \\ j \text{ é par} & \rightarrow [a_j] \in BIII \end{cases}) \wedge [a_k] \notin O \Rightarrow$ Nesse caso:
 - $k \text{ é ímpar} \wedge [a_k] \notin BI \Rightarrow$ Nesse caso:
 - ▲ $[a_k] \in I \Rightarrow$ o menor extremo da envoltória intervalar é finito;
 - ▲ $[a_k] \in II \vee [a_k] \in BII \vee [a_k] \in III \vee [a_k] \in BIII \vee [a_k] \in IV \Rightarrow$ o menor extremo da envoltória intervalar é $-\infty$;
 - $k \text{ é par} \wedge [a_k] \notin BIII \Rightarrow$ Nesse caso:
 - ▲ $[a_k] \in I \vee [a_k] \in BI \vee [a_k] \in II \vee [a_k] \in BII \vee [a_k] \in III \Rightarrow$ o menor extremo da envoltória intervalar é $-\infty$;
 - ▲ $[a_k] \in IV \Rightarrow$ o menor extremo da envoltória intervalar é finito;
 - ♦ $\forall j > 0, ([a_j] \in O \vee \begin{cases} j \text{ é ímpar} & \rightarrow [a_j] \in BI \\ j \text{ é par} & \rightarrow [a_j] \in BIII \end{cases}) \Rightarrow$ Nesse caso:
 - $\bar{a_0} \geq \underline{b} \Rightarrow$ o menor extremo da envoltória intervalar é $-\infty$;

- $\overline{a_0} < \underline{b} \Rightarrow$ a equação não possui extremo negativo para a envoltória intervalar;
- $([a_n] \in \text{BI} \wedge n \text{ é par}) \vee ([a_n] \in \text{BIII} \wedge n \text{ é ímpar}) \Rightarrow$ Nesse caso:
 - ♦ $\exists k > 0, \forall j > k, ([a_j] \in \text{O} \vee \begin{cases} j \text{ é ímpar} & \rightarrow [a_j] \in \text{BIII} \\ j \text{ é par} & \rightarrow [a_j] \in \text{BI} \end{cases}) \wedge [a_k] \notin \text{O} \Rightarrow$ Nesse caso:
 - $k \text{ é ímpar} \wedge [a_k] \notin \text{BIII} \Rightarrow$ Nesse caso:
 - ▲ $[a_k] \in \text{I} \vee [a_k] \in \text{BI} \vee [a_k] \in \text{II} \vee [a_k] \in \text{BII} \vee [a_k] \in \text{III} \Rightarrow$ o menor extremo da envoltória intervalar é $-\infty$;
 - ▲ $[a_k] \in \text{IV} \Rightarrow$ o menor extremo da envoltória intervalar é finito;
 - $k \text{ é par} \wedge [a_k] \notin \text{BI} \Rightarrow$ Nesse caso:
 - ▲ $[a_k] \in \text{I} \Rightarrow$ o menor extremo da envoltória intervalar é finito;
 - ▲ $[a_k] \in \text{II} \vee [a_k] \in \text{BII} \vee [a_k] \in \text{III} \vee [a_k] \in \text{BIII} \vee [a_k] \in \text{IV} \Rightarrow$ o menor extremo da envoltória intervalar é $-\infty$;
 - ♦ $\forall j > 0, ([a_j] \in \text{O} \vee \begin{cases} j \text{ é ímpar} & \rightarrow [a_j] \in \text{BIII} \\ j \text{ é par} & \rightarrow [a_j] \in \text{BI} \end{cases}) \Rightarrow$ Nesse caso:
 - $\underline{a_0} \leq \overline{b} \Rightarrow$ o menor extremo da envoltória intervalar é $-\infty$;
 - $\underline{a_0} > \overline{b} \Rightarrow$ a equação não possui extremo negativo para a envoltória intervalar.

Prova: A prova do Lema 7.2 também explora exaustivamente os casos enunciados à luz da Definição 7.2. O detalhamento encontra-se no Anexo 1.21. ■

Com base na informação qualitativa trazida pelos lemas 7.1 e 7.2, o Teorema 7.5 é apresentado:

Teorema 7.5 (Caracterização dos Extremos da Envoltória das Soluções Reais de uma Equação Polinomial Intervalar de Argumento Real): Seja a equação polinomial intervalar

de variável real definida por $p(x) = [b]$, onde $p(x) = \sum_{i=0}^n [a_i] * x^i$, tal que exista envoltória intervalar não vazia para suas soluções reais. Sejam as condições

$$C_1(k): \exists k > 0, \forall j > k, ([a_j] \in \text{O} \vee \begin{cases} j \text{ é ímpar} & \rightarrow [a_j] \in \text{BI} \\ j \text{ é par} & \rightarrow [a_j] \in \text{BIII} \end{cases}) \wedge [a_k] \notin \text{O}$$

$$C_2(k): \exists k > 0, \forall j > k, ([a_j] \in \text{O} \vee \begin{cases} j \text{ é ímpar} & \rightarrow [a_j] \in \text{BIII} \\ j \text{ é par} & \rightarrow [a_j] \in \text{BI} \end{cases}) \wedge [a_k] \notin \text{O}$$

$$C_3(k): \exists k > 0, \forall j > k, ([a_j] \in \text{O} \vee [a_j] \in \text{BI}) \wedge [a_k] \notin \text{O} \wedge [a_k] \notin \text{BI}$$

$$C_4(k): \exists k > 0, \forall j > k, ([a_j] \in \text{O} \vee [a_j] \in \text{BIII}) \wedge [a_k] \notin \text{O} \wedge [a_k] \notin \text{BIII}$$

Então a caracterização dos extremos da envoltória intervalar é dada conforme o Quadro 7.1:

	Menor extremo inferior	Maior extremo superior
$[a_n] \in I$	Real	Real
$[a_n] \in BI$	<p>N ímpar \Rightarrow</p> <ul style="list-style-type: none"> • $C_1(k) \Rightarrow$ <ul style="list-style-type: none"> ♦ k é ímpar $\wedge [a_k] \notin BI \Rightarrow$ <ul style="list-style-type: none"> ▪ $[a_k] \in I \Rightarrow \text{Real};$ ▪ $[a_k] \in S, S \in \{ II, BII, III, BIII, IV \} \Rightarrow -\infty;$ ♦ k é par $\wedge [a_k] \notin BIII \Rightarrow$ <ul style="list-style-type: none"> ▪ $[a_k] \in S, S \in \{ I, BI, II, BII, III \} \Rightarrow -\infty;$ ▪ $[a_k] \in IV \Rightarrow \text{Real};$ • $\neg C_1(k) \Rightarrow$ <ul style="list-style-type: none"> ♦ $\overline{a_0} \geq \underline{b} \Rightarrow -\infty;$ ♦ $\overline{a_0} < \underline{b} \Rightarrow$ não há extremo negativo; <p>n par \Rightarrow</p> <ul style="list-style-type: none"> • $C_2(k) \Rightarrow$ <ul style="list-style-type: none"> ♦ k é ímpar $\wedge [a_k] \notin BIII \Rightarrow$ <ul style="list-style-type: none"> ▪ $[a_k] \in S, S \in \{ I, BI, II, BII, III \} \Rightarrow -\infty;$ ▪ $[a_k] \in IV \Rightarrow \text{Real};$ ♦ k é par $\wedge [a_k] \notin BI \Rightarrow$ <ul style="list-style-type: none"> ▪ $[a_k] \in I \Rightarrow \text{Real};$ ▪ $[a_k] \in S, S \in \{ II, BII, III, BIII, IV \} \Rightarrow -\infty;$ • $\neg C_2(k) \Rightarrow$ <ul style="list-style-type: none"> ♦ $\underline{a_0} \leq \overline{b} \Rightarrow -\infty;$ ♦ $\underline{a_0} > \overline{b} \Rightarrow$ não há extremo negativo; 	<p>$C_3(k) \Rightarrow$</p> <ul style="list-style-type: none"> • $[a_k] \in I \Rightarrow \text{Real};$ • $[a_k] \in S, S \in \{ II, BII, III, BIII, IV \} \Rightarrow +\infty;$ <p>$\neg C_3(k) \Rightarrow$</p> <ul style="list-style-type: none"> • $\underline{a_0} \leq \overline{b} \Rightarrow +\infty;$ • $\underline{a_0} > \overline{b} \Rightarrow$ não há extremo positivo;
$[a_n] \in II$	$-\infty$	$+\infty$
$[a_n] \in BII$	$-\infty$	$+\infty$
$[a_n] \in III$	$-\infty$	$+\infty$
$[a_n] \in BIII$	<p>n ímpar \Rightarrow</p> <ul style="list-style-type: none"> • $C_2(k) \Rightarrow$ <ul style="list-style-type: none"> ♦ k é ímpar $\wedge [a_k] \notin BIII \Rightarrow$ <ul style="list-style-type: none"> ▪ $[a_k] \in S, S \in \{ I, BI, II, BII, III \} \Rightarrow -\infty;$ ▪ $[a_k] \in IV \Rightarrow \text{Real};$ ♦ k é par $\wedge [a_k] \notin BI \Rightarrow$ <ul style="list-style-type: none"> ▪ $[a_k] \in I \Rightarrow \text{Real};$ ▪ $[a_k] \in S, S \in \{ II, BII, III, BIII, IV \} \Rightarrow -\infty;$ • $\neg C_2(k) \Rightarrow$ <ul style="list-style-type: none"> ♦ $\underline{a_0} \leq \overline{b} \Rightarrow -\infty;$ ♦ $\underline{a_0} > \overline{b} \Rightarrow$ não há extremo negativo; <p>n par \Rightarrow</p> <ul style="list-style-type: none"> • $C_1(k) \Rightarrow$ <ul style="list-style-type: none"> ♦ k é ímpar $\wedge [a_k] \notin BI \Rightarrow$ <ul style="list-style-type: none"> ▪ $[a_k] \in I \Rightarrow \text{Real};$ ▪ $[a_k] \in S, S \in \{ II, BII, III, BIII, IV \} \Rightarrow -\infty;$ ♦ k é par $\wedge [a_k] \notin BIII \Rightarrow$ <ul style="list-style-type: none"> ▪ $[a_k] \in S, S \in \{ I, BI, II, BII, III \} \Rightarrow -\infty;$ ▪ $[a_k] \in IV \Rightarrow \text{Real};$ • $\neg C_1(k) \Rightarrow$ <ul style="list-style-type: none"> ♦ $\overline{a_0} \geq \underline{b} \Rightarrow -\infty;$ ♦ $\overline{a_0} < \underline{b} \Rightarrow$ não há extremo negativo; 	<p>$C_4(k) \Rightarrow$</p> <ul style="list-style-type: none"> • $[a_k] \in S, S \in \{ I, BI, II, BII, III \} \Rightarrow +\infty;$ • $[a_k] \in IV \Rightarrow \text{Real};$ <p>$\neg C_4(k) \Rightarrow$</p> <ul style="list-style-type: none"> • $\overline{a_0} \geq \underline{b} \Rightarrow +\infty;$ • $\overline{a_0} < \underline{b} \Rightarrow$ não há extremo positivo;
$[a_n] \in IV$	Real	Real

QUADRO 7.1 – Caracterização dos extremos da envoltória intervalar de uma equação polinomial intervalar de variável real conforme as características de seus coeficientes.

Prova do Teorema 7.5: É imediata dos lemas 7.1 e 7.2. ■

Os teoremas apresentados até este momento são fundamentais para a construção do algoritmo para determinação de envoltórias intervalares que será apresentado na seção seguinte. Para ilustrar a importância dos resultados por ele trazidos, o seguinte exemplo é apresentado:

Exemplo 7.4: Conforme o Teorema 7.5, a equação $[-1;1] * x^2 + [1;1] * x + [1;1] = [1;3]$ deverá apresentar uma envoltória intervalar com extremos infinitos. De fato, a envoltória encontrada para suas soluções reais é

$$x \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty).$$

Este resultado é ilustrado na Figura 7.5.

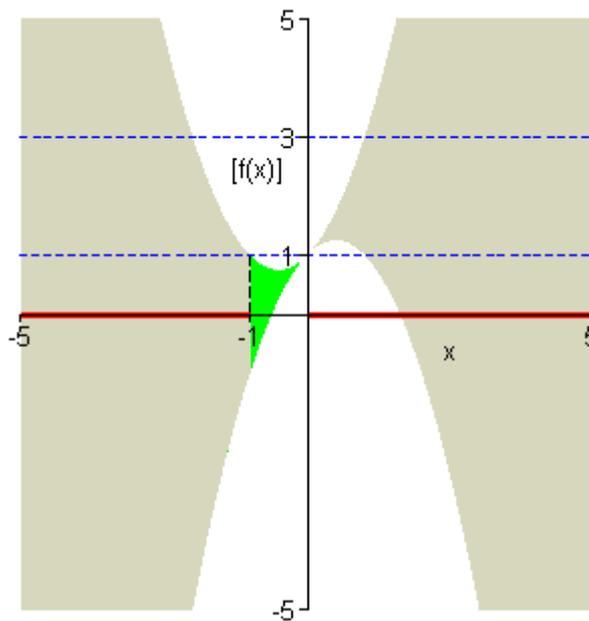


FIGURA 7.5 – Representação gráfica da equação $[-1;1] * x^2 + [1;1] * x + [1;1] = [1;3]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$.

Em particular, conforme a Definição 7.2, observe-se que

$$\underline{p}(x) = \begin{cases} p_{L-}(x) = -x^2 + x + 1, & x < 0 \\ p_{L+}(x) = -x^2 + x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

e

$$\bar{p}(x) = \begin{cases} p_{U-}(x) = x^2 + x + 1, & x < 0 \\ p_{U+}(x) = x^2 + x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

e, conforme o Teorema 7.4,

$$x = -1 \text{ é solução da equação } \bar{p}(x) = \underline{b},$$

e

$$x = 0 \text{ é solução da equação } \bar{p}(x) = \underline{b}.$$

Finalmente, conforme o Teorema 7.5,

$$\forall x \leq -1, p(x) \cap [1;3] \neq \emptyset \wedge \forall x \geq 0, p(x) \cap [1;3] \neq \emptyset.$$

7.3 Algoritmo 3: Determinação das Envoltórias Intervalares de Soluções de Equações Polinomiais de Coeficientes Intervalares e Variável Real

O algoritmo apresentado a seguir utiliza a informação dos teoremas apresentados nas seções anteriores para determinar as envoltórias intervalares das soluções de equações polinomiais de variável real. Ele será denominado Algoritmo 3 no decorrer deste texto. O problema solucionado pelo Algoritmo 3 pode ser enunciado da seguinte forma:

“Dada a equação

$$\sum_{i=0}^n [a_i] * x^i = [b]$$

onde $n \in \mathbf{N}^*$, $\forall i \in \mathbf{N}$, $i \leq n$, $[a_i] \in \mathcal{IR}$, $[b] \in \mathcal{IR}$, $x \in \mathcal{R}$, deseja-se encontrar as envoltórias intervalares de suas soluções reais $[x_j^e] \in \mathcal{IR}$, $1 \leq j \leq k$, $k \in \mathbf{N}$, se existir alguma”.

E o algoritmo proposto pode ser descrito na forma que segue:

Inputs:

$[a_i] \in \mathcal{IR}$, $\forall i \in \mathbf{N}$, $i \leq n$, os coeficientes do polinômio que compõe o membro esquerdo da equação;
 $[b] \in \mathcal{IR}$, o membro direito da equação.

Outputs:

$\{[x_j^*] \in \mathcal{IR}\}$, $1 \leq j \leq k$, $k \in \mathbf{N}$, a lista de envoltórias intervalares para as soluções reais da equação.

Descrição:

1. Início;
2. Para cada hipótese associada ao sinal de $x \in \mathcal{R}$ (isto é, $x < 0$, $x = 0$ e $x > 0$) faça:
 - 2.1. A partir do Corolário 4.3, determine a região e a expressão analítica para cada produto $[a_i] * x^i$, $1 \leq i \leq n$;
 - 2.2. Gere as expressões analíticas dos polinômios limitantes do polinômio que representa o membro esquerdo da equação, ou seja,

$$[\underline{p}(x); \overline{p}(x)],$$
 para $p(x) = \sum_{i=0}^n [a_i] * x^i$;
 - 2.3. Para cada equação real dentre

$$\underline{p}(x) = \underline{b} \quad \text{e} \quad \overline{p}(x) = \underline{b}$$
 faça:
 - 2.3.1. Resolva a equação;
 - 2.3.2. Descarte as soluções que não corresponderem à região de sinal de x ;
 - 2.3.3. Descarte as soluções complexas;
 - 2.3.4. Ordene as soluções reais restantes de forma crescente;
 - 2.3.5. Agrupe as soluções encontradas para $\overline{p}(x) = \underline{b}$ na lista ordenada L_{inf} ;
 - 2.3.6. Agrupe as soluções encontradas para $\underline{p}(x) = \underline{b}$ na lista ordenada L_{sup} ;
 - 2.4. Fim-Para;
3. Fim-Para;

4. Gere as envoltórias para as soluções reais, considerando a caracterização fornecida pelo Teorema 7.5 e observando que uma envoltória:
 - inicia com a menor solução não utilizada de L_{inf} ou de L_{sup} , ou com $-\infty$;
 - termina com a menor solução seguinte de L_{inf} ou de L_{sup} , ou com $+\infty$;
5. Apresente as soluções;
6. Fim.

A próxima seção apresenta uma breve discussão sobre a complexidade do Algoritmo 3. Em seguida, exemplos de aplicação desse algoritmo serão apresentados e discutidos.

7.4 Análise da Complexidade do Algoritmo 3

O Algoritmo 3 é bastante simples. O laço iniciado na etapa 2 determina a separação das soluções segundo o sinal da variável real x , de modo a tirar proveito do Corolário 4.3. Por esse motivo justifica-se a etapa 2.3.2, pela qual eventuais soluções que não pertençam à região de sinal considerada são sumariamente descartadas. O laço iniciado na etapa 2.3 implica a solução efetiva de 4 equações polinomiais reais (2 para cada sinal de x), e mais 2 equações triviais para o caso de $x = 0$.

As seguintes definições são adicionadas:

Definição 7.3: Para efeitos de análise do Algoritmo 3, a complexidade associada à resolução de uma equação polinomial real de ordem n será denotada por $s(n)$.

Definição 7.4: Para efeitos de análise do Algoritmo 3, assume-se que o custo de ordenação de uma lista de soluções reais seja dado por $r(n)$.

Com base nas observações apresentadas acima, pode-se enunciar o Teorema 7.6:

Teorema 7.6 (Complexidade de Pior Caso do Algoritmo 3): A complexidade do Algoritmo 3, associada à determinação das envoltórias intervalares das soluções de uma equação polinomial intervalar de variável real de grau n é, no pior caso, dada por

$$C_p(n) \sim O(4*s(n)+2*r(n)).$$

Prova do Teorema 7.6: A prova apresentada para esse teorema é realizada pela análise das complexidades individuais das etapas do Algoritmo 3. O detalhamento pode ser encontrado no Anexo 1.22. ■

7.5 Exemplos de Envoltórias Intervalares Obtidas com o Algoritmo 3

Nesta seção são apresentados diversos exemplos, objetivando evidenciar a validade do algoritmo proposto. Grande parte dos exemplos é retirada da literatura [KOR 94, MOO 66] e a restante é introduzida a título de complementação. Exemplos muito similares encontrados nas referências consultadas foram omitidos, de modo a privilegiar aspectos qualitativamente diferentes: equações polinomiais de diferentes graus, características das envoltórias intervalares ou comportamentos dos polinômios limitantes na equação. Quando pertinente os resultados encontrados são confrontados com os publicados nas referências ou considerações

são apresentadas. Inicialmente, um exemplo comentado da operação do algoritmo é descrito de modo a auxiliar na compreensão de sua execução.

Exemplo 7.5: Para a equação $[1;3]*x^2 + [5;6]*x = [0;0]$ a envoltória intervalar encontrada pelo algoritmo proposto é dada por

$$x \in \left[-6; -\frac{5}{3}\right] \cup [0;0].$$

A obtenção dessa solução será detalhada no parágrafo a seguir.

Como o lado direito da equação é um número real, somente 5 equações necessitarão ser resolvidas: duas para o caso de $x < 0$, uma para o caso de $x = 0$ e duas para o caso de $x > 0$. As etapas seguidas em cada caso são apresentadas nas colunas do Quadro 7.2:

Sinal de x	x < 0				x = 0	x > 0			
	$\underline{p}(x) = \bar{b}$		$\bar{p}(x) = \underline{b}$			Único	$\underline{p}(x) = \bar{b}$		$\bar{p}(x) = \underline{b}$
Extremo	$\underline{p}(x) = \bar{b}$		$\bar{p}(x) = \underline{b}$		Único	$\underline{p}(x) = \bar{b}$		$\bar{p}(x) = \underline{b}$	
Equação	$1*x^2 + 6*x = 0$		$3*x^2 + 5*x = 0$		$0 = 0$	$1*x^2 + 5*x = 0$		$3*x^2 + 6*x = 0$	
Soluções	$x = 0 \vee x = -6$		$x = 0 \vee x = -\frac{5}{3}$		$x \in \mathfrak{R}$	$x = 0 \vee x = -5$		$x = 0 \vee x = -2$	
Ordenação	1 ^a	2 ^a	1 ^a	2 ^a	1 ^a	1 ^a	2 ^a	1 ^a	2 ^a
	$x = -6$	$x = 0$	$x = -\frac{5}{3}$	$x = 0$	$x = 0$	$x = -5$	$x = 0$	$x = -2$	$x = 0$
Validação	$x = -6$	–	$x = -\frac{5}{3}$	–	$x = 0$	–	–	–	–
Resultado	$x \in \left[-6; -\frac{5}{3}\right]$				$x \in [0;0]$	Não há solução			

QUADRO 7.2 – Etapas do algoritmo de determinação de envoltórias intervalares para soluções reais.

Ainda, o Teorema 7.5 garante que os extremos limitantes da envoltória obtida deverão ser reais, o que confirma que as soluções podem ser expressas por

$$x \in \left[-6; -\frac{5}{3}\right] \cup [0;0].$$

Conforme dito anteriormente, essa envoltória não é um número-intervalo – nem a união de números-intervalo – visto que a variável x é um número estritamente real e assume apenas **um** dos valores dentre os delimitados pelos extremos -6 , $-\frac{5}{3}$, 0 e 0 , e não **todos** os valores simultaneamente. Da forma apresentada, não há garantias de que o valor assumido seja uma solução verdadeira em uma situação particular de avaliação real; apenas há garantias de que o valor real assumido por x seja solução para alguma combinação de valores reais dos coeficientes. De toda forma, a análise da Figura 7.5 permite verificar a validade dos resultados e dos argumentos ora apresentados.

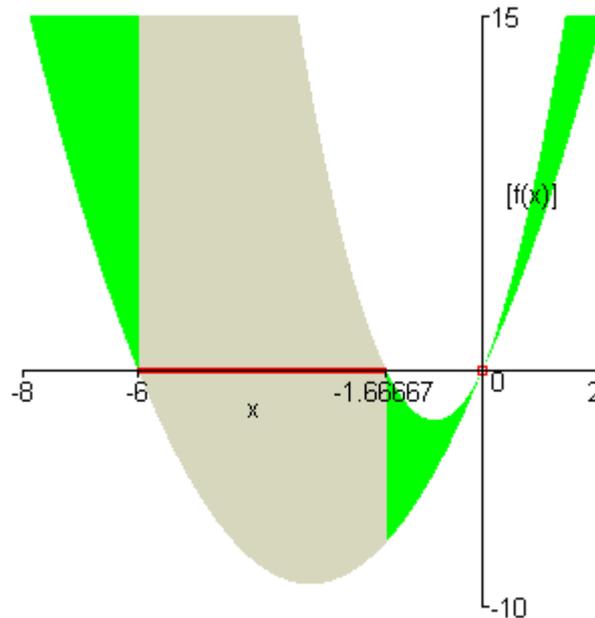


FIGURA 7.6 – Representação gráfica da equação $[1;3] * x^2 + [5;6] * x = [0;0]$.
A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [-6; -5/3] \cup [0;0]$.

Como validação adicional, observe-se que, sendo $p(x) = [1;3] * x^2 + [5;6] * x$,

$$p(-6) = [1;3] * (-6)^2 + [5;6] * (-6) = [0;78],$$

$$p\left(-\frac{5}{3}\right) = [1;3] * \left(-\frac{5}{3}\right)^2 + [5;6] * \left(-\frac{5}{3}\right) = \left[-\frac{65}{9}; 0\right]$$

e

$$p(0) = [1;3] * (0)^2 + [5;6] * (0) = [0;0],$$

conforme indicado pelo Teorema 7.3.

Exemplo 7.6: A equação $[-4;-1] * x + [2;7] = [-6;9]$ tem como envoltória intervalar
 $x \in [-7;13]$,

que é o mesmo resultado apresentado por Korzenowski [KOR 94, p.57].

A Figura 7.7 ilustra esse resultado, cabendo observar que, conforme o Teorema 7.5, os extremos da envoltória são finitos e, conforme indica o Teorema 7.3 e a notação previamente definida,

$$\underline{p}(x) = \begin{cases} p_{L-}(x) = -x + 2, & x < 0 \\ p_{L+}(x) = -4 * x + 2, & x \geq 0 \end{cases}$$

e

$$\bar{p}(x) = \begin{cases} p_{U-}(x) = -4 * x + 7, & x < 0 \\ p_{U+}(x) = -x + 7, & x \geq 0 \end{cases}$$

e

$x = -7$ é solução da equação $-x + 2 = 9$, ou seja, $\underline{p}(x) = \bar{b}$,
 $x = 13$ é solução da equação $-x + 7 = -6$, ou seja, $\bar{p}(x) = \underline{b}$.

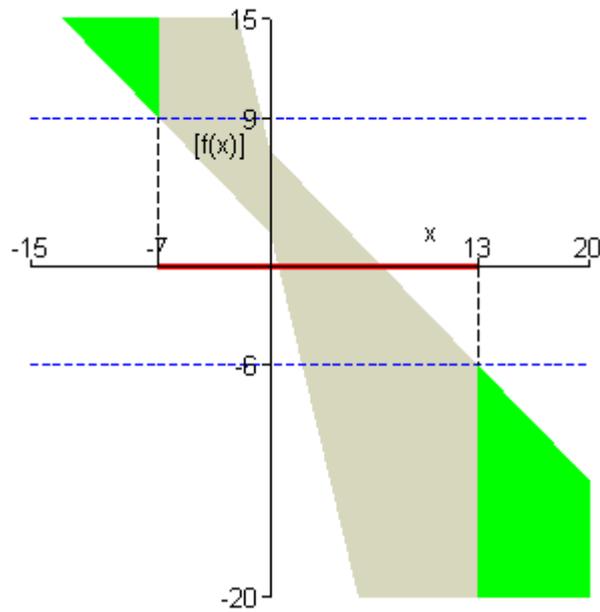


FIGURA 7.7 – Representação gráfica da equação $[-4;-1] * x + [2;7] = [-6;9]$.
A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [-7;13]$.

Exemplo 7.7: A equação $[1;2] * x^2 + [3;5] * x + [0;1] = [0;0]$ possui, como envoltória intervalar para suas soluções reais,

$$x \in [-5; -1] \cup [-0.5; 0],$$

conforme mostra a Figura 7.8.

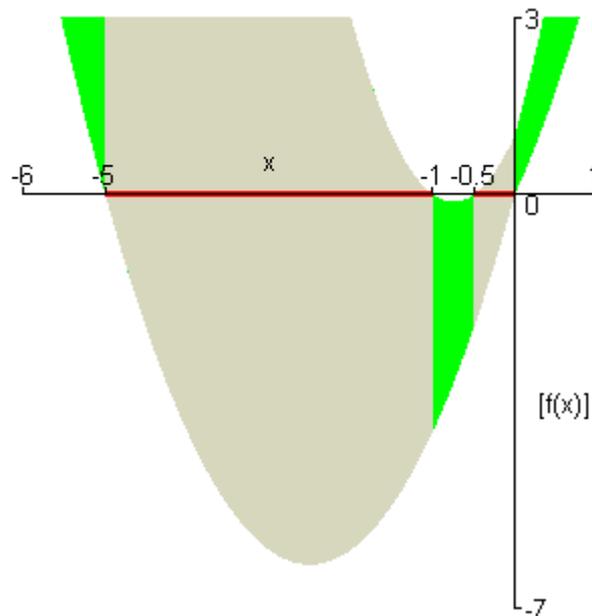


FIGURA 7.8 – Representação gráfica da equação $[1;2] * x^2 + [3;5] * x + [0;1] = [0;0]$.
A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [-5; -1] \cup [-0.5; 0]$.

Esse resultado é coerente com o indicado pelo Teorema 7.5 e coincide com o apresentado por Korzenowski [KOR 94, p.64] através de uma modificação na fórmula de Bhaskara intervalar.

Exemplo 7.8: Similarmente ao exemplo anterior, a aplicação do Algoritmo 3 sobre a equação $[3;7] * x^2 + [8;12] * x + [-7;-2] = [0;0]$ resulta na envoltória intervalar

$$x \in [-4.516611478; -1.353889368] \cup [0.1530096869; 0.694254177],$$

conforme ilustra a Figura 7.9. Note-se que a presença de um intervalo da região I como coeficiente de maior grau do membro esquerdo indica a finitude dos extremos da envoltória, coerentemente com o resultado encontrado.

Os intervalos componentes dessa envoltória são considerados soluções intervalares ótimas por Korzenowski [KOR 94, p. 65]. Para registro, essa autora indica que a aplicação da fórmula de Bhaskara intervalar resulta nas soluções

$$[x_1] = [-5.0822; -1.2415] \text{ e } [x_2] = [0.1314; 0.8055],$$

soluções intervalares não ótimas.

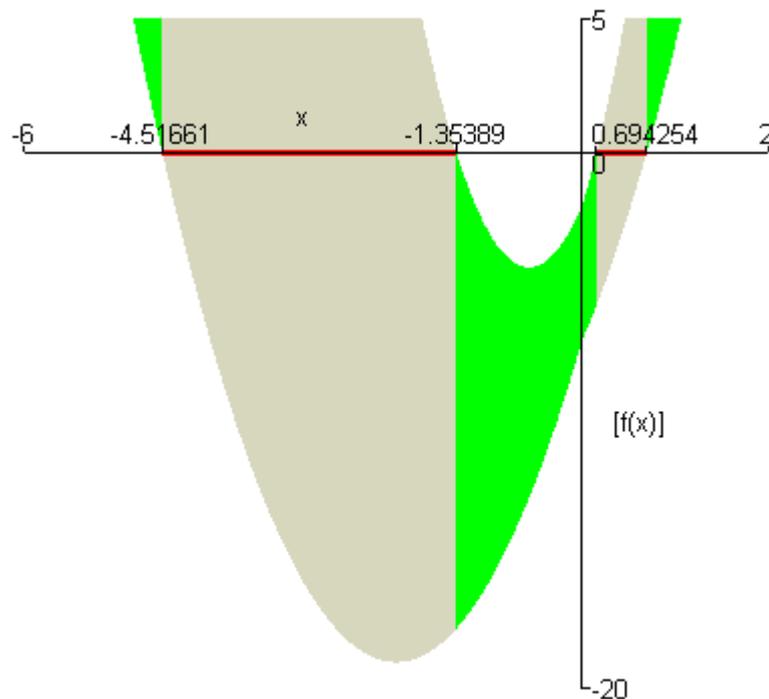


FIGURA 7.9 – Representação gráfica da equação $[3;7] * x^2 + [8;12] * x + [-7;-2] = [0;0]$.
A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais,
 $x \in [-4.516611478; -1.353889368] \cup [0.1530096869; 0.694254177]$.

Exemplo 7.9: Para a equação $[1;2] * x^2 + [-9;-6] * x + [1;3] = [0;0]$ o Algoritmo 3 apresenta como envoltória intervalar

$$x \in [0.112517806; 0.6339745960] \cup [2.366025404; 8.887482194].$$

Da mesma forma que no caso anterior, o resultado é coerente com as indicações dos teoremas 7.3, 7.4 e 7.5. Ainda, esse resultado é similar à solução intervalar ótima apresentada por Korzenowski [KOR 94, p. 71]. A Figura 7.10 representa graficamente esse resultado.

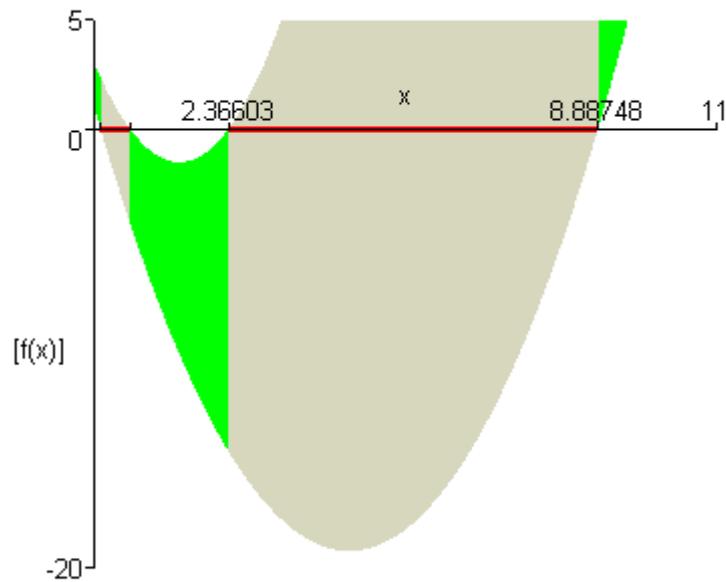


FIGURA 7.10 – Representação gráfica da equação $[1;2] * x^2 + [-9;-6] * x + [1;3] = [0;0]$.
A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais,
 $x \in [0.112517806;0.6339745960] \cup [2.366025404;8.887482194]$.

Exemplo 7.10: A envoltória intervalar da equação $[-3;-1] * x^2 + [-12;-9] * x + [-6;-5] = [0;0]$ é dada por

$$x \in [-11.56776436;-2.] \cup [-1.;-0.432235637],$$

identicamente à solução intervalar ótima sugerida por Korzenowski [KOR 94, p. 72]. Esse resultado é apresentado na Figura 7.11.

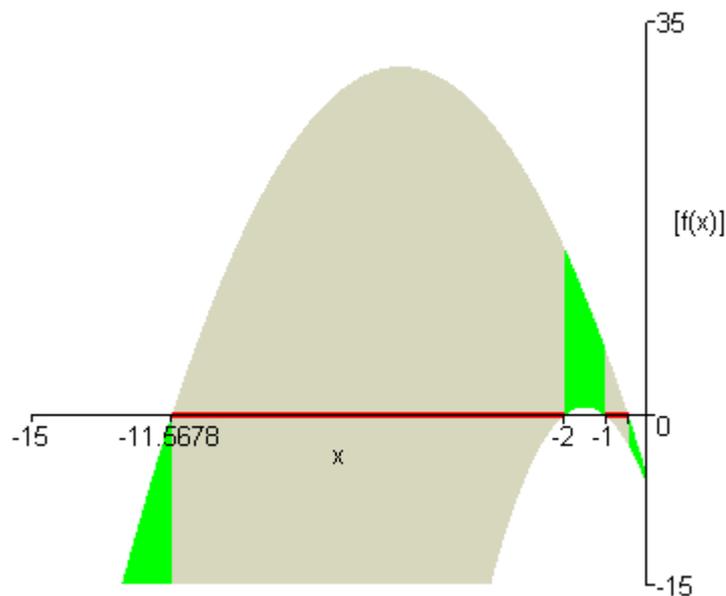


FIGURA 7.11 – Representação gráfica da equação $[-3;-1] * x^2 + [-12;-9] * x + [-6;-5] = [0;0]$.
A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais,
 $x \in [-11.56776436;-2.] \cup [-1.;-0.432235637]$.

Exemplo 7.11: Para a equação $[1;1]*x^2 + [-9;-8]*x + [-4;-2] = [0;0]$, a aplicação do algoritmo resulta na envoltória intervalar

$$x \in [-0.472135956; -0.216990566] \cup [8.242640686; 9.424428901].$$

Já a solução apresentada por Korzenowski [KOR 94, p. 75] indica como soluções os intervalos $[x_1] = [8.24264; 9.42442]$ e $[x_2] = [-0.48528; -0.212214]$. Comparados os resultados, verifica-se que a solução denominada $[x_1]$ é similar à determinada pelo Algoritmo 3, enquanto que a solução denominada $[x_2]$ diverge daquela. No entanto, conforme a notação previamente definida no Teorema 7.3,

$$\begin{aligned} p(-0.472135956) &= [1;1]*(-0.472135956)^2 + [-9;-8]*(-0.472135956) + [-4;-2] = \\ &= [0.000000009; 2.472135965], \end{aligned}$$

cujo extremo inferior é virtualmente zero, a despeito dos erros de truncamento e arredondamento da representação em precisão finita da resposta final, enquanto que

$$\begin{aligned} p(-0.48528) &= [1;1]*(-0.48528)^2 + [-9;-8]*(-0.48528) + [-4;-2] = \\ &= [0.117736678; 2.603016678], \end{aligned}$$

que é um intervalo que sequer contém zero. Logo, o valor -0.472135956 deve aproximar um extremo da envoltória intervalar dessa equação. Através de um raciocínio similar pode-se verificar a adequação do extremo superior -0.216990566 , conforme sugerido pelo Algoritmo 3. Logo, a envoltória intervalar mais adequada é a dada pelo algoritmo proposto neste trabalho,

$$x \in [-0.472135956; -0.216990566] \cup [8.242640686; 9.424428901],$$

como pode ser visto na Figura 7.12.

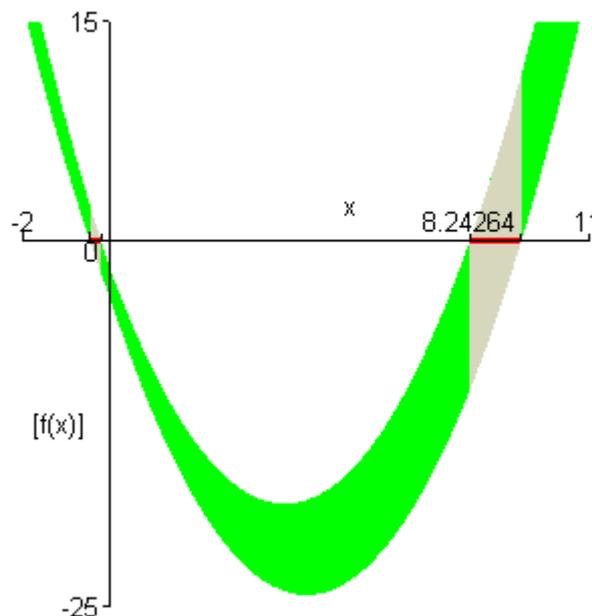


FIGURA 7.12 – Representação gráfica da equação $[1;1]*x^2 + [-9;-8]*x + [-4;-2] = [0;0]$.

A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais,

$$x \in [-0.472135956; -0.216990566] \cup [8.242640686; 9.424428901].$$

Exemplo 7.12: A envoltória intervalar sugerida pelo algoritmo proposto para a equação $[-3;-1]*x^2 + [4;6]*x + [4;9] = [0;0]$ é dada por

$$x \in [-1.605551275; -0.527525232] \cup [2.; 7.242640686],$$

conforme apresenta a Figura 7.13. Novamente esse resultado coincide com a solução intervalar ótima sugerida por Korzenowski [KOR 94, p. 78].

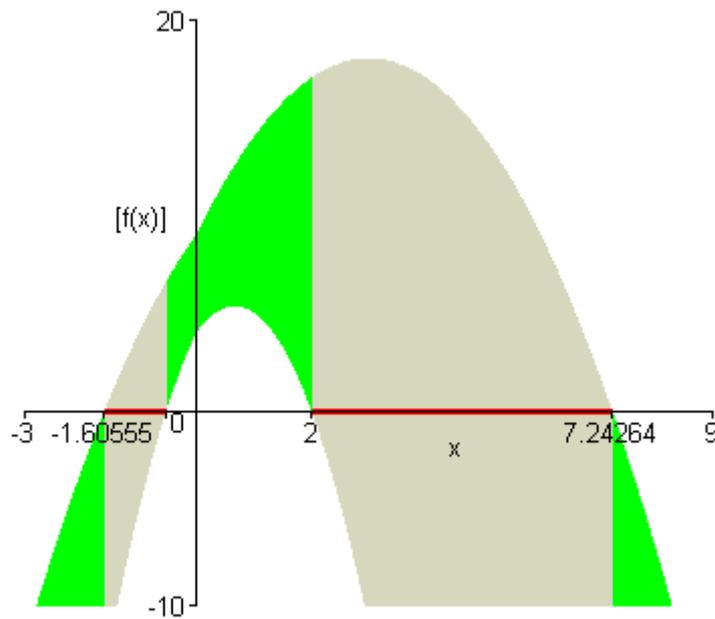


FIGURA 7.13 – Representação gráfica da equação $[-3;-1] * x^2 + [4;6] * x + [4;9] = [0;0]$.
A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais,
 $x \in [-1.605551275;-0.527525232] \cup [2.;7.242640686]$.

Exemplo 7.13: Para a equação $[1;7] * x^2 + [0.5;1] * x + [-3;9] = [0;0]$ o Algoritmo 3 obtém a envoltória intervalar

$$x \in [-2.302775638;1.5],$$

como ilustra a Figura 7.14.

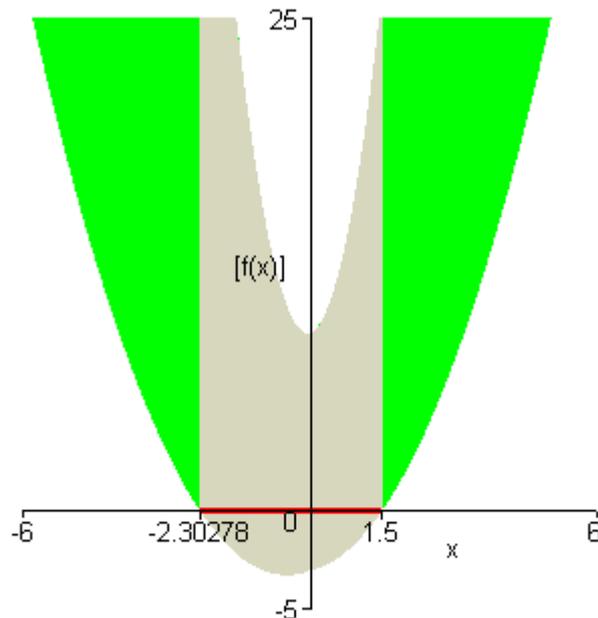


FIGURA 7.14 – Representação gráfica da equação $[1;7] * x^2 + [0.5;1] * x + [-3;9] = [0;0]$.
A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [-2.302775638;1.5]$.

Esse exemplo é apresentado por Korzenowski [KOR 94, p.82] como uma situação de ineficácia do procedimento proposto naquele trabalho. Quanto à solução apresentada pelo Algoritmo 3, tem-se que

$$\begin{aligned} p(-2.302775638) &= [1;7]*(-2.302775638)^2 + [0.5;1]*(-2.302775638) + [-3;9] = \\ &= [0.000000001;44.96804165] \end{aligned}$$

e

$$p(1.5) = [1;7]*(1.5)^2 + [0.5;1]*(1.5) + [-3;9] = [0;26.25],$$

garantindo a correção das estimativas, segundo o Teorema 7.3.

Exemplo 7.14: Para a equação $[-1;-0.5]*x^2 + [4;7]*x + [-2;5] = [0;0]$ a envoltória intervalar obtida pelo Algoritmo 3 é dada por

$$x \in [-1.099019514;0.585786438] \cup [3.414213562;14.68114575],$$

que é similar ao resultado ótimo apresentado por Korzenowski [KOR 94, p. 86].

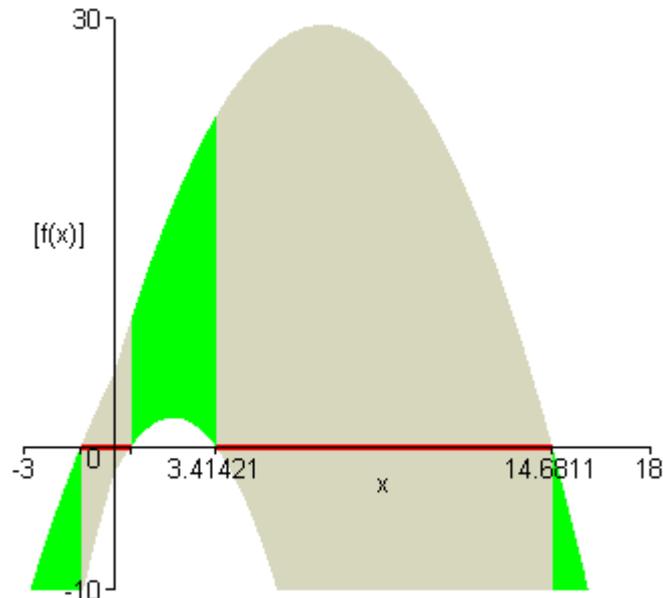


FIGURA 7.15 – Representação gráfica da equação $[-1;-0.5]*x^2 + [4;7]*x + [-2;5] = [0;0]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [-1.099019514;0.585786438] \cup [3.414213562;14.68114575]$.

Exemplo 7.15: Para a equação $[1;1]*x^2 + [3;4]*x + [0.5;1] = [0;0]$, Korzenowski [KOR 94, p. 100] indica como solução ótima o intervalo $[-0.381966;-0.1771243]$, obtido através do Método de Newton Intervalar. Por outro lado, a aplicação do Algoritmo 3 resulta na envoltória intervalar

$$x \in [-3.870828693;-2.618033989] \cup [-0.381966011;-0.1291713066].$$

Ora, o extremo inferior do segundo intervalo componente da envoltória coincide com o apresentado por Korzenowski, mas o extremo superior desse mesmo intervalo não coincide com o obtido pelo algoritmo proposto. Uma análise mais acurada, sob a ótica do Teorema 7.3, revela que

$$\begin{aligned} p(-0.1771243) &= [1;1]*(-0.1771243)^2 + [3;4]*(-0.1771243) + [0.5;1] = \\ &= [-0.1771241823;0.500000118]. \end{aligned}$$

Então deve existir algum valor superior a -0.1771241823 que seja extremo da envoltória intervalar. Com efeito, se analisado o valor sugerido pelo Algoritmo 3, tem-se

$$p(-0.1291713066) = [1;1] * (-0.1291713066)^2 + [3;4] * (-0.1291713066) + [0.5;1] = [0.0000000001; 0.6291713062].$$

Em face a estas observações, a envoltória intervalar mais adequada é dada pelo resultado apresentado pelo Algoritmo 3, como mostra a Figura 7.16.

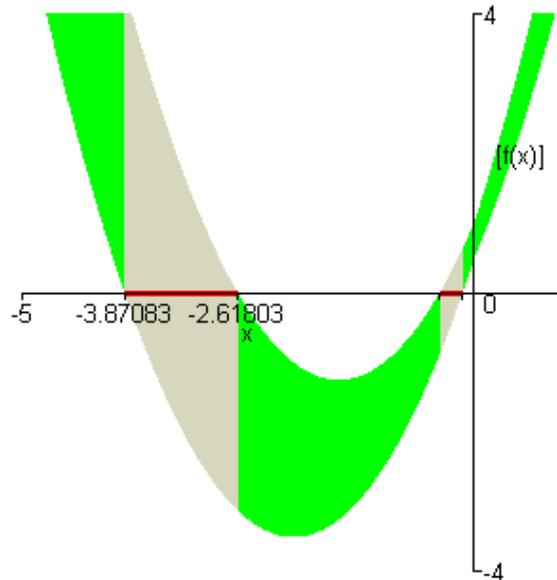


FIGURA 7.16 – Representação gráfica da equação $[1;1] * x^2 + [3;4] * x + [0.5;1] = [0;0]$.
A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais,
 $x \in [-3.870828693; -2.618033989] \cup [-0.381966011; -0.1291713066]$.

Exemplo 7.16: A equação de segundo grau $[-1;0] * x^2 + [0;1] * x = [0;0]$ explora outra combinação de condições do Teorema 7.5, o qual indica a presença de extremos infinitos na envoltória intervalar. De fato, como mostra a Figura 7.17, a envoltória intervalar obtida é $x \in \mathfrak{R}$.

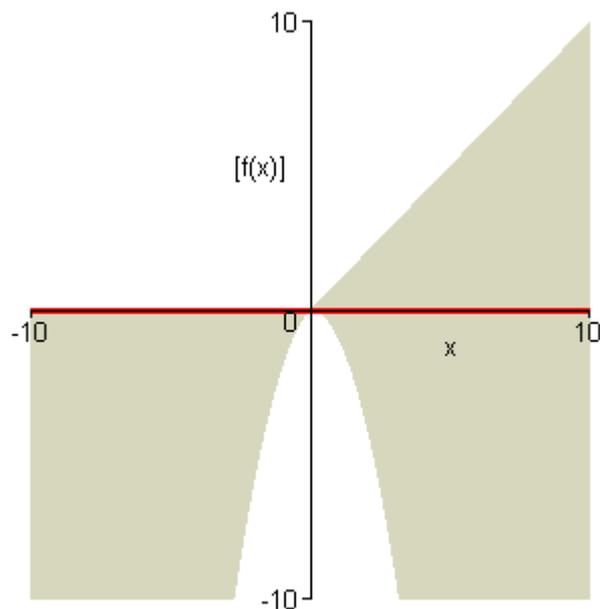


FIGURA 7.17 – Representação gráfica da equação $[-1;0] * x^2 + [0;1] * x = [0;0]$.
A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in \mathfrak{R}$.

Exemplo 7.17: Também a equação de segundo grau $[0;1] * x^2 + [-1;0] * x + [0;1] = [2;3]$ explora uma diferente combinação de condições do Teorema 7.5, que novamente indica a presença de extremos infinitos para a envoltória intervalar das soluções reais,

$$x \in (-\infty; -0.6180339890] \cup [1.; +\infty).$$

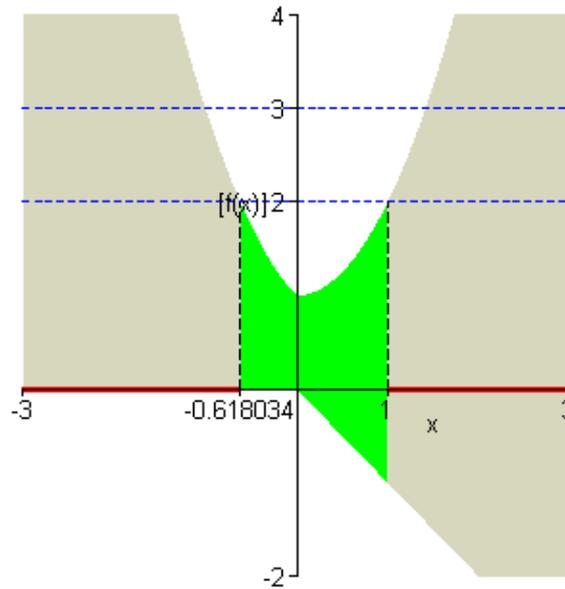


FIGURA 7.18 – Representação gráfica da equação $[0;1] * x^2 + [-1;0] * x + [0;1] = [2;3]$.
A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais,
 $x \in (-\infty; -0.6180339890] \cup [1.; +\infty)$.

Exemplo 7.18: A envoltória intervalar da equação $[-1;1] * x^2 + [1;1] * x + [1;1] = [-1;3]$ é

$$x \in \mathfrak{R},$$

conforme apresentado na Figura 7.19.

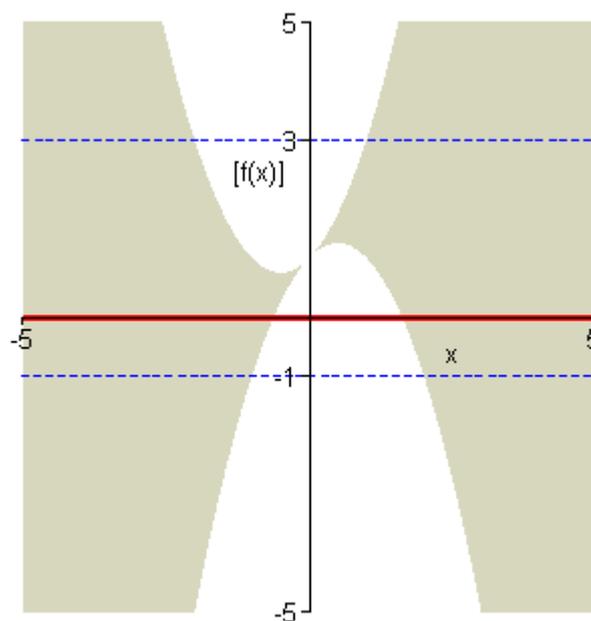


FIGURA 7.19 – Representação gráfica da equação $[-1;1] * x^2 + [1;1] * x + [1;1] = [-1;3]$.
A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in \mathfrak{R}$.

Exemplo 7.19: A equação $[1;1] * x^2 + [-4;2] = [0;0]$ apresenta como envoltória intervalar $x \in [-2.;2.]$, conforme mostra a Figura 7.20.

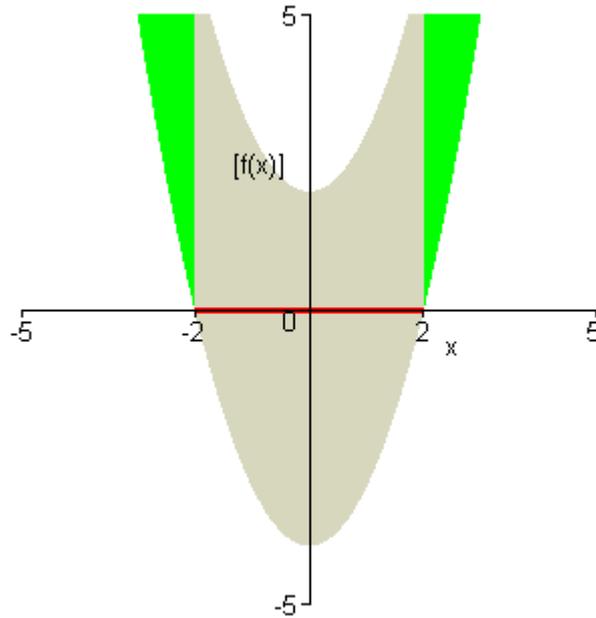


FIGURA 7.20 – Representação gráfica da equação $[1;1] * x^2 + [-4;2] = [0;0]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [-2.;2.]$.

Exemplo 7.20: A equação $[1;1] * x^2 + [-4;0] = [0;0]$ apresenta como envoltória intervalar $x \in [-2.;2.]$, conforme mostra a Figura 7.21.

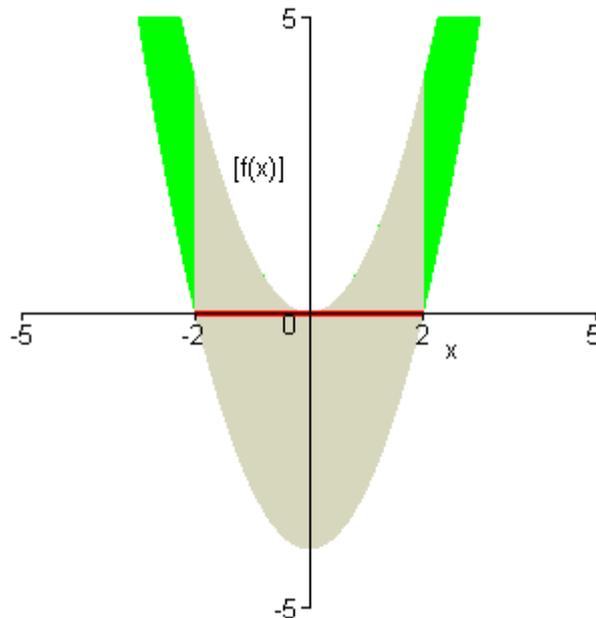


FIGURA 7.21 – Representação gráfica da equação $[1;1] * x^2 + [-4;0] = [0;0]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [-2.;2.]$.

Exemplo 7.21: A equação $[1;1] * x^2 + [-4;-1] = [0;0]$ apresenta como envoltória intervalar $x \in [-2.;-1.] \cup [1.;2.]$, conforme mostra a Figura 7.22.

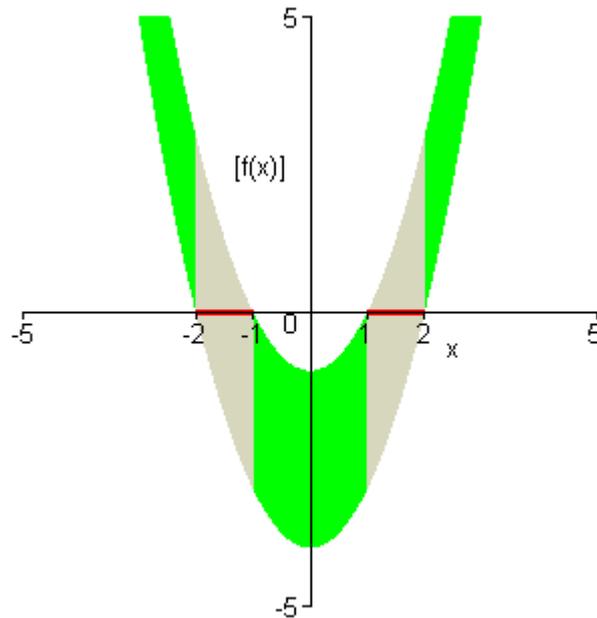


FIGURA 7.22 – Representação gráfica da equação $[1;1] * x^2 + [-4;-1] = [0;0]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [-2.;-1.] \cup [1.;2.]$.

Exemplo 7.22: A equação $[-1;0] * x^3 = [0;0]$ apresenta como envoltória intervalar $x \in \mathfrak{R}$, conforme mostra a Figura 7.23.

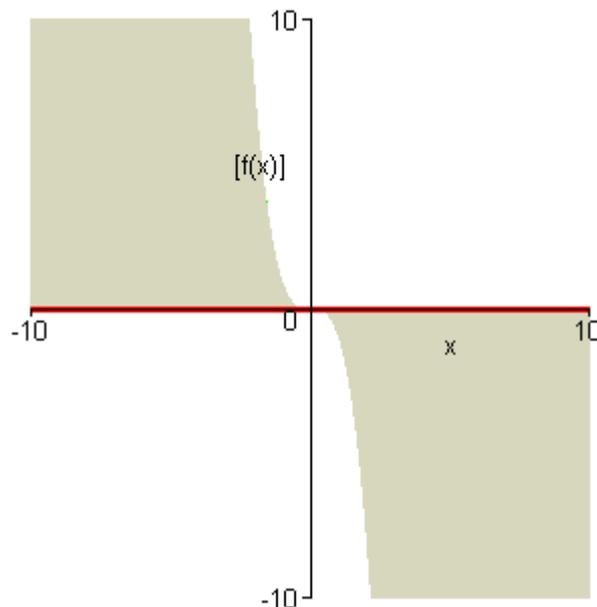


FIGURA 7.23 – Representação gráfica da equação $[-1;0] * x^3 = [0;0]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in \mathfrak{R}$.

Este resultado pode ser confirmado pelo Teorema 7.5, observando-se que o grau da equação é ímpar, o coeficiente do termo de maior grau no membro esquerdo da equação pertence à região BIII e que os demais coeficientes pertencem à região O. Nessas condições, tem-se que

- para $x < 0$,

$$\forall j > 0, ([a_j] \in O \vee \begin{cases} j \text{ é ímpar} & \rightarrow [a_j] \in \text{BIII} \\ j \text{ é par} & \rightarrow [a_j] \in \text{BI} \end{cases})$$

e

$$\underline{a}_0 = 0 \leq 0 = \bar{b},$$

indicando que o menor extremo da envoltória intervalar é $-\infty$;

- para $x > 0$,

$$\forall j > 0, [a_j] \in O \vee [a_j] \in \text{BIII}$$

e

$$\bar{a}_0 = 0 \geq 0 = \underline{b},$$

indicando que o maior extremo da envoltória intervalar é $+\infty$.

Como $x = 0$ é a única solução real explicitamente determinada pelo algoritmo, então confirma-se a solução indicada para envoltória intervalar desta equação.

Exemplo 7.23: A equação de 3^o grau $[1;1] * x^3 + [-4;-2] * x^2 + [-7;-5] * x + [-2;-1] = [0;0]$ é resolvida por Korzenowski [KOR 94, p. 98] através do Método de Newton Intervalar, encontrando o intervalo solução $[3.507;5.3722]$. No entanto, a partir da representação gráfica dessa função (Figura 7.24) percebe-se a existência de outra região na composição da envoltória intervalar da equação. De fato, o Algoritmo 3 revela a envoltória intervalar $x \in [-1.723956490;-0.1497434128] \cup [3.507018645;5.372281324]$.

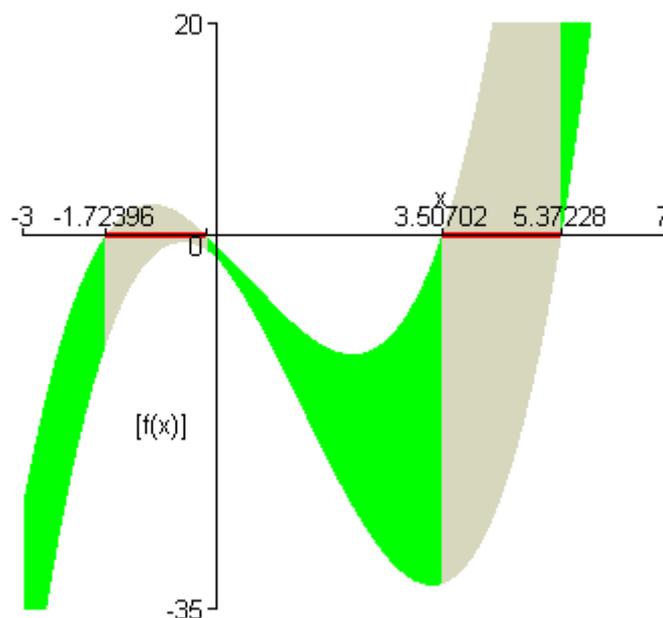


FIGURA 7.24 – Representação gráfica da equação $[1;1] * x^3 + [-4;-2] * x^2 + [-7;-5] * x + [-2;-1] = [0;0]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [-1.723956490;-0.1497434128] \cup [3.507018645;5.372281324]$.

O teste dos extremos da envoltória pelo Teorema 7.3 demonstra a validade do resultado obtido. Com efeito,

$$p(-1.723956490) = [-10.39196495; 0],$$

$$p(-0.1497434128) = [-1.344333005; 0.00000001],$$

$$p(3.507018645) = [-32.61239685; 0] \text{ e}$$

$$p(5.372281324) = [0.00000003; 69.46737594].$$

Exemplo 7.24: Este exemplo é retirado do livro de Moore [MOO 66]. Dada a equação real $[1;1] * x^3 + [-5;-5] * x^2 + [8;8] * x + [-4;-4] = [0;0]$, a aplicação do algoritmo proposto resulta na envoltória intervalar

$$x \in [1;1] \cup [2;2] \cup [2;2],$$

ou, simplesmente,

$$x \in [1;1] \cup [2;2],$$

conforme ilustra a Figura 7.25. Esse resultado é correto do ponto de vista numérico, visto que a equação acima pode ser reduzida a uma equação real.

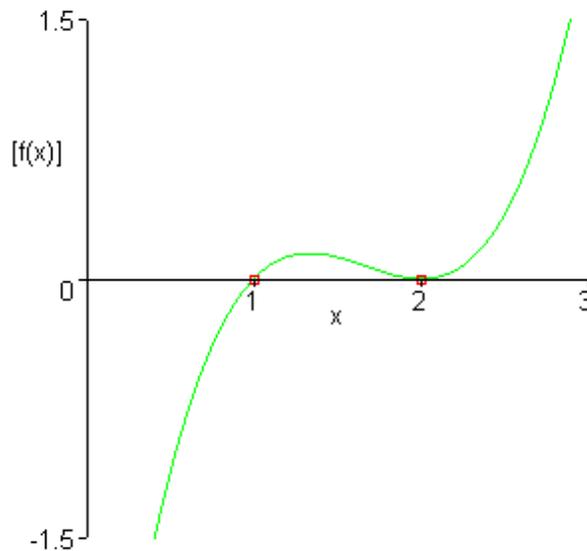


FIGURA 7.25 – Representação gráfica da equação $[1;1] * x^3 + [-5;-5] * x^2 + [8;8] * x + [-4;-4] = [0;0]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [1;1] \cup [2;2]$.

Exemplo 7.25: Para a equação de 3º grau $[-1;-1] * x^3 + [-1;1] * x^2 + [1;1] * x + [1;1] = [0;0]$ a envoltória intervalar calculada pelo Algoritmo 3 é

$$x \in [-1.;-1.] \cup [1.;1.839286755],$$

conforme pode ser visualizado na Figura 7.26.

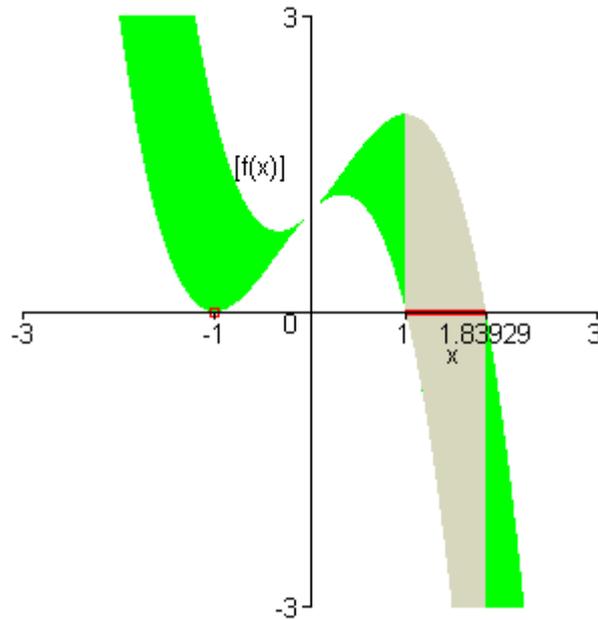


FIGURA 7.26 – Representação gráfica da equação $[-1;-1] * x^3 + [-1;1] * x^2 + [1;1] * x + [1;1] = [0;0]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [-1.;-1.] \cup [1.;1.839286755]$.

Exemplo 7.26: Modificando-se o membro direito da equação do exemplo anterior obtém-se $[-1;-1] * x^3 + [-1;1] * x^2 + [1;1] * x + [1;1] = [-1;1]$, cuja envoltória intervalar das soluções reais é $x \in [-1.618033989;0] \cup [0.6180339890;2.]$.

A Figura 7.27 ilustra esse resultado.

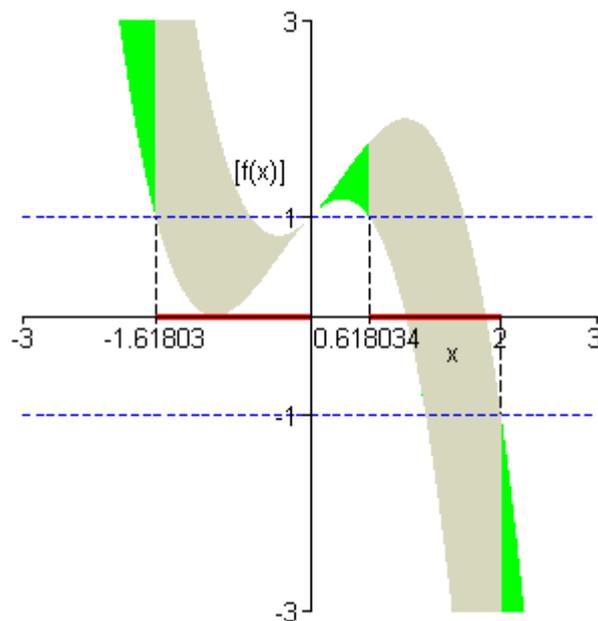


FIGURA 7.27 – Representação gráfica da equação $[-1;-1] * x^3 + [-1;1] * x^2 + [1;1] * x + [1;1] = [-1;1]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [-1.618033989;0] \cup [0.6180339890;2.]$.

Exemplo 7.27: Modificando-se novamente o membro direito da equação do exemplo anterior obtém-se $[-1;-1] * x^3 + [-1;1] * x^2 + [1;1] * x + [1;1] = [0.5;1.5]$, com envoltória intervalar $x \in [-1.739907874;1.739907874]$.

A Figura 7.28 apresenta este resultado.

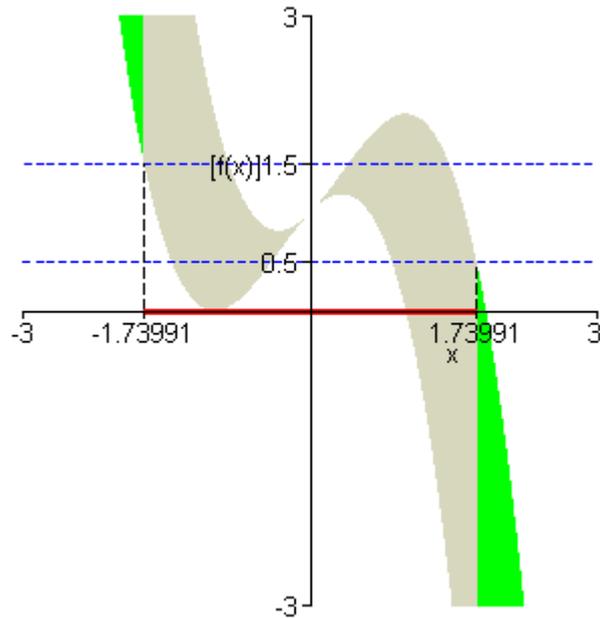


FIGURA 7.28 – Representação gráfica da equação $[-1;-1] * x^3 + [-1;1] * x^2 + [1;1] * x + [1;1] = [0.5;1.5]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [-1.739907874;1.739907874]$.

Exemplo 7.28: A Figura 7.29 apresenta a envoltória intervalar da equação de terceiro grau $[0;1] * x^3 + [0;1] * x^2 + [0;1] * x + [0;1] = [2;3]$, calculada pelo Algoritmo 3 como

$$x \in (-\infty;-1.] \cup [0.5436890125;+\infty).$$

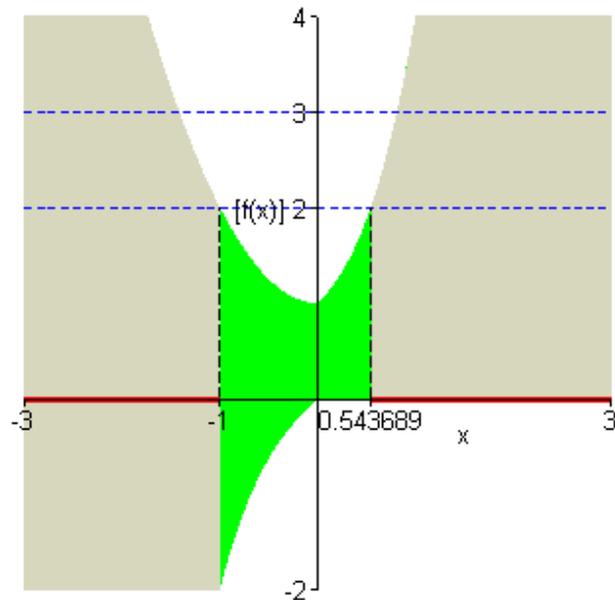


FIGURA 7.29 – Representação gráfica da equação $[0;1] * x^3 + [0;1] * x^2 + [0;1] * x + [0;1] = [2;3]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in (-\infty;-1.] \cup [0.5436890125;+\infty)$.

Exemplo 7.29: Similar à equação apresentada no exemplo anterior, a equação de terceiro grau $[0;1] * x^3 + [-1;0] * x^2 + [0;1] * x + [0;1] = [2;3]$ apresenta uma envoltória intervalar bastante interessante, dada por

$$x \in [0.6823278040; +\infty).$$

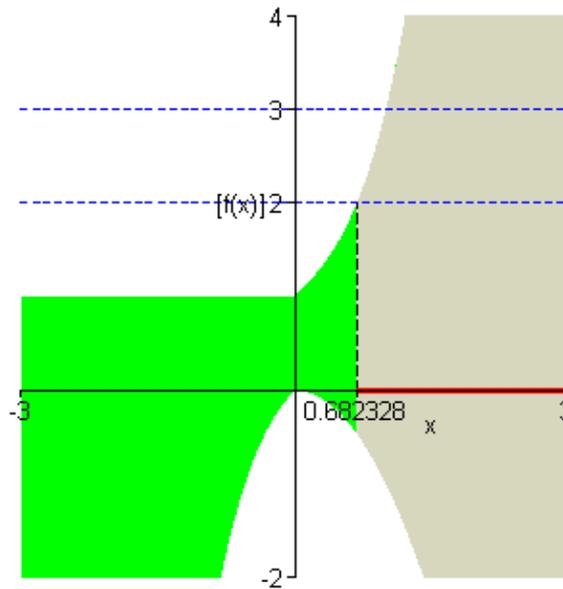


FIGURA 7.30 – Representação gráfica da equação $[0;1] * x^3 + [-1;0] * x^2 + [0;1] * x + [0;1] = [2;3]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [0.6823278040; +\infty)$.

Exemplo 7.30: A equação definida por $[0;1] * x^3 + [0;1] * x^2 + [0;0.5] * x + [-1;0] = [-4;-2]$, a envoltória intervalar encontrada é

$$x \in (-\infty; -0.8351223485],$$

conforme ilustra a Figura 7.31.

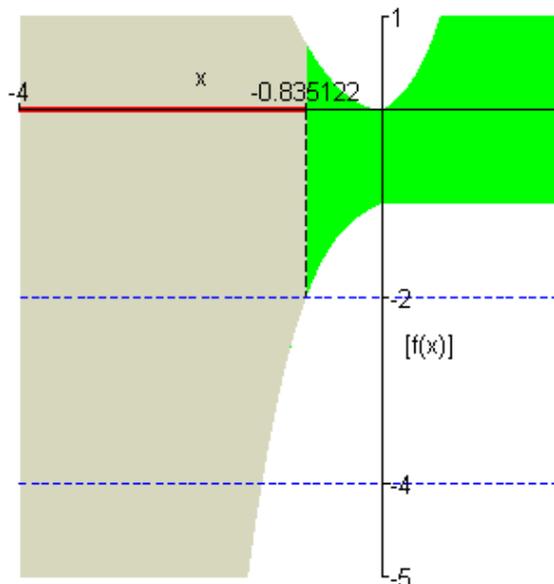


FIGURA 7.31 – Representação gráfica da equação $[0;1] * x^3 + [0;1] * x^2 + [0;0.5] * x + [-1;0] = [-4;-2]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in (-\infty; -0.8351223485]$.

Exemplo 7.31: A equação $[0;1] * x^3 + [-1;0] * x^2 + [1;1] * x + [0;1] = [-3;-2]$ apresenta um comportamento diferenciado dos anteriores, tendo, como envoltória intervalar, $x \in [-4.;-0.8105357137] \cup [2.;+\infty)$, conforme ilustra a Figura 7.32.

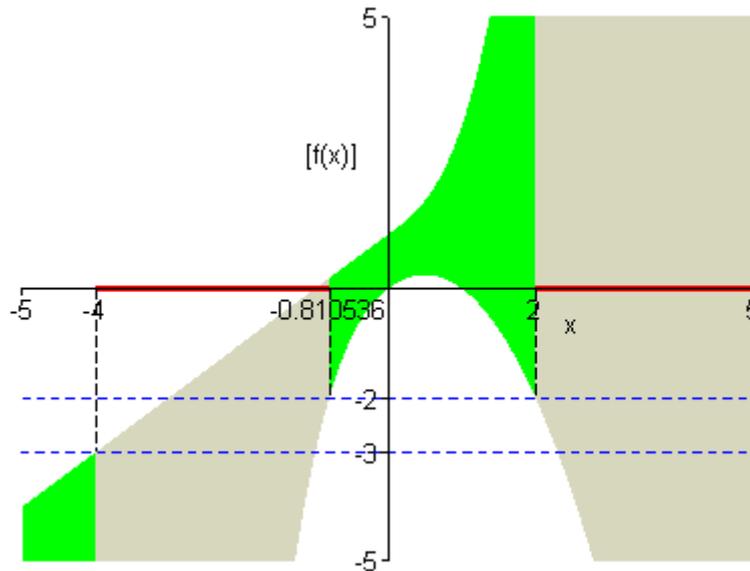


FIGURA 7.32 – Representação gráfica da equação $[0;1] * x^3 + [-1;0] * x^2 + [1;1] * x + [0;1] = [-3; -2]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [-4.;-0.8105357137] \cup [2.;+\infty)$.

Exemplo 7.32: Para a equação de 3º grau $[-1;1] * x^3 + [2;2] * x^2 + [3;3] * x + [-4;4] = [0;0]$ a presença de um coeficiente da região BII no termo de maior grau indica a presença de extremos infinitos na envoltória intervalar. De fato, a resposta encontrada pelo Algoritmo 3 é $x \in (-\infty;1.] \cup [2.561552813;+\infty)$.

conforme apresentado na Figura 7.33.

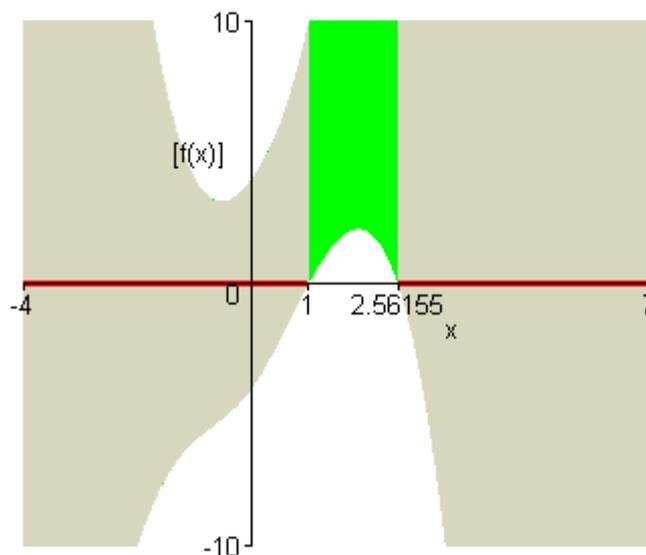


FIGURA 7.33 – Representação gráfica da equação $[-1;1] * x^3 + [2;2] * x^2 + [3;3] * x + [-4;4] = [0;0]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in (-\infty;1.] \cup [2.561552813;+\infty)$.

Exemplo 7.33: Conforme apresentado na Figura 7.34, a envoltória intervalar calculada pelo Algoritmo 3 para a equação de 3º grau $[-1;1] * x^3 + [1;1] * x^2 + [1;1] * x + [1;1] = [0;0]$ é dada por $x \in (-\infty; -1.] \cup [1.839286755; +\infty)$.

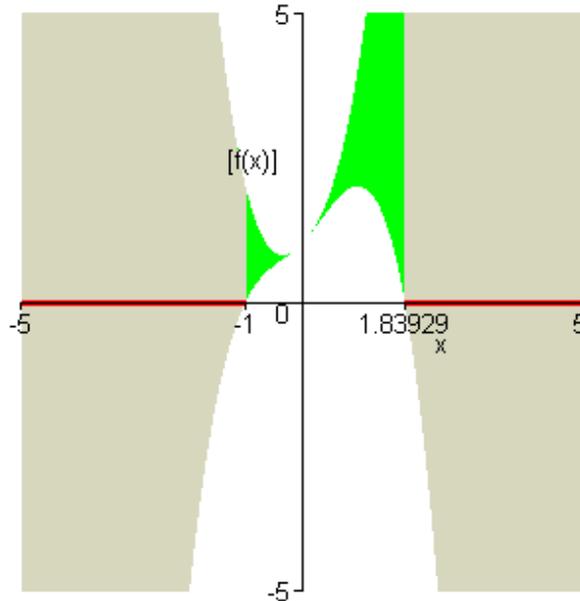


FIGURA 7.34 – Representação gráfica da equação $[-1;1] * x^3 + [1;1] * x^2 + [1;1] * x + [1;1] = [0;0]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in (-\infty; -1.] \cup [1.839286755; +\infty)$.

Exemplo 7.34: A envoltória intervalar obtida pelo algoritmo proposto para a equação de 4º grau $[1;1] * x^4 + [4;5] * x^3 + [-3;-2] * x^2 + [-2;0] * x + [0;1] = [0;0]$ é dada por $x \in [-5.541381265; -4.342302325] \cup [-0.750643807; 1.]$, conforme ilustra a Figura 7.35.

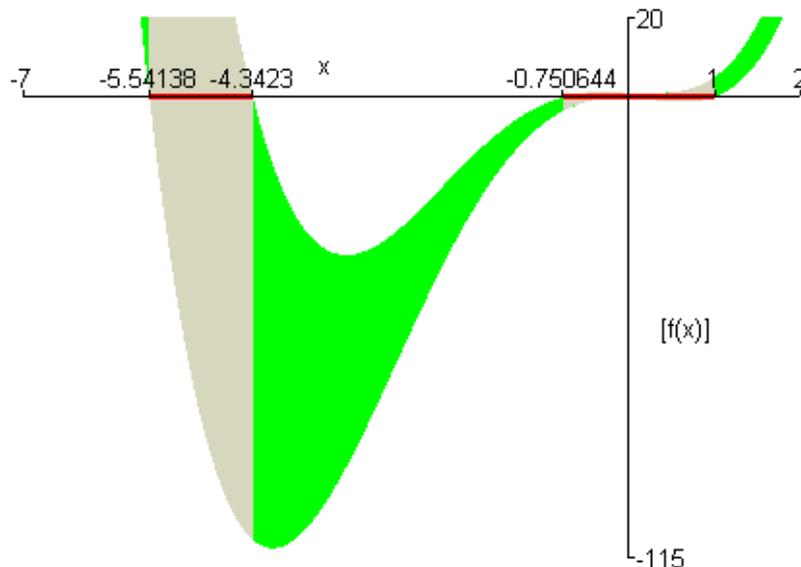


FIGURA 7.35 – Representação gráfica da equação $[1;1] * x^4 + [4;5] * x^3 + [-3;-2] * x^2 + [-2;0] * x + [0;1] = [0;0]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [-5.541381265; -4.342302325] \cup [-0.750643807; 1.]$.

Exemplo 7.35: Para a equação $[-1;-1]*x^4 + [4;5]*x^3 + [-3;-2]*x^2 + [0;1]*x + [-2;0] = [0;0]$, a envoltória intervalar obtida é

$$x \in [0;1.568045828] \cup [2.870184728;4.613470269],$$

conforme pode ser visualizado na Figura 7.36.

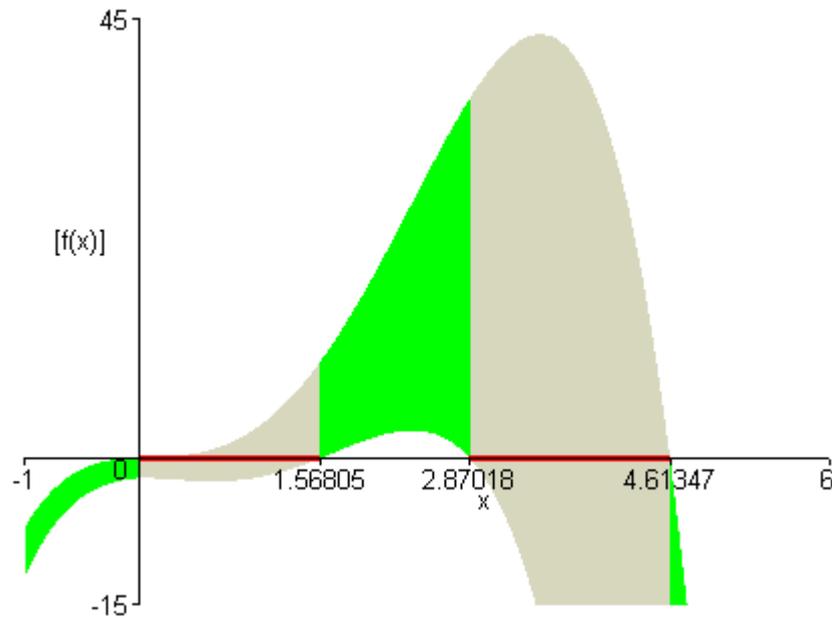


FIGURA 7.36 – Representação gráfica da equação $[-1;-1]*x^4 + [4;5]*x^3 + [-3;-2]*x^2 + [0;1]*x + [-2;0] = [0;0]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [0;1.568045828] \cup [2.870184728;4.613470269]$.

Exemplo 7.36: A Figura 7.37 apresenta o gráfico da equação de décimo grau definida por $[0;1]*x^{10} + [0;1]*x^8 + [0;1]*x^6 + [0;1]*x^4 + [0;1]*x^2 + [0;1] = [-1;2]$. Esta equação possui como envoltória intervalar

$$x \in \mathfrak{R}.$$

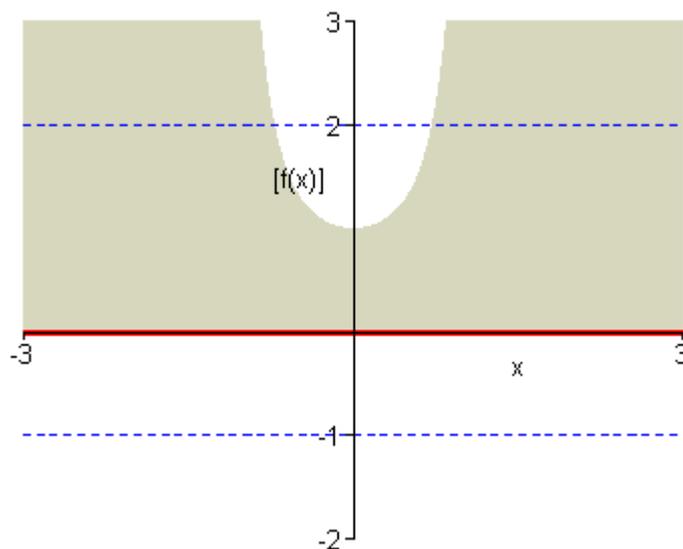


FIGURA 7.37 – Representação gráfica da equação $[0;1]*x^{10} + [0;1]*x^8 + [0;1]*x^6 + [0;1]*x^4 + [0;1]*x^2 + [0;1] = [-1;2]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in \mathfrak{R}$.

Em particular, observe-se que esta equação apresenta todos coeficientes pertencendo às regiões O ou BI e em tal disposição que a classificação dos extremos limitantes é definida pelos termos independentes de seus membros. A análise desses termos nas condições do Teorema 7.5 garante as limitantes da envoltória intervalar deverão ser infinitas, coerentemente com o resultado apresentado.

Exemplo 7.37: A alteração do membro direito da equação apresentada no exemplo anterior gera a equação $[0;1] * x^{10} + [0;1] * x^8 + [0;1] * x^6 + [0;1] * x^4 + [0;1] * x^2 + [0;1] = [2;3]$, que apresenta como envoltória intervalar

$$x \in (-\infty; -0.7132043127] \cup [0.7132043127; +\infty).$$

Cabe notar que as condições de aplicação do Teorema 7.5 não se alteram. A Figura 7.38 ilustra esse resultado.

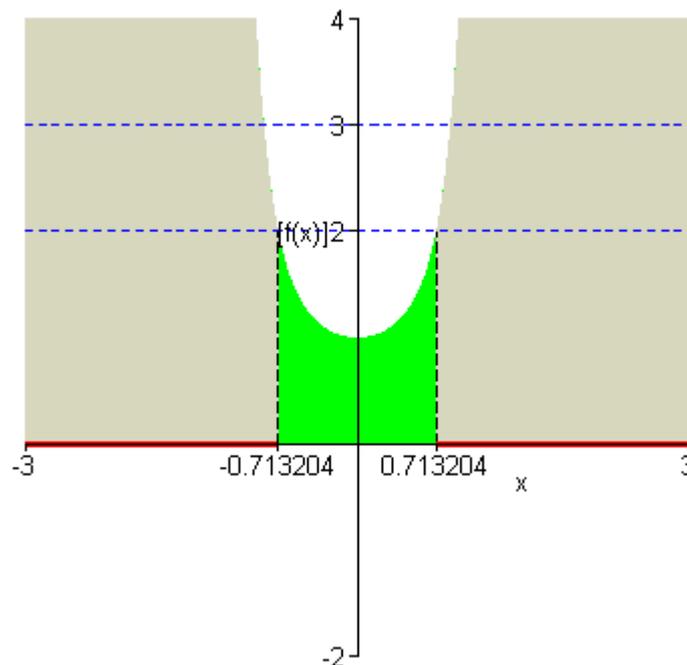


FIGURA 7.38 – Representação gráfica da equação $[0;1] * x^{10} + [0;1] * x^8 + [0;1] * x^6 + [0;1] * x^4 + [0;1] * x^2 + [0;1] = [2;3]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in (-\infty; -0.7132043127] \cup [0.7132043127; +\infty)$.

Exemplo 7.38: Conforme mostra a Figura 7.39, a envoltória intervalar da equação de décimo grau definida por $[0;1] * x^{10} + [-1;1] * x^8 + [0;1] * x^6 + [0;1] * x^4 + [0;1] * x^2 + [0;1] = [2;3]$ é

$$x \in (-\infty; -0.7132043127] \cup [0.7132043127; +\infty).$$

Este exemplo é similar ao anterior, apenas com a alteração do coeficiente de grau 8 da equação lá apresentada. Essa alteração modifica o comportamento da equação e as condições de aplicabilidade do Teorema 7.5, sem alterar seu resultado específico.

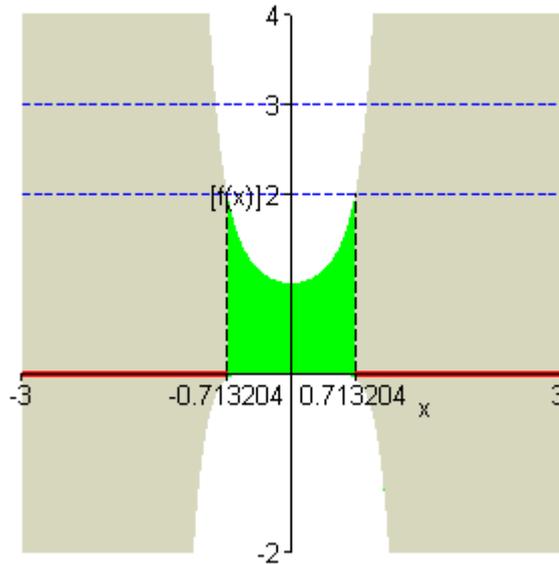


FIGURA 7.39 – Representação gráfica da equação $[0;1] * x^{10} + [-1;1] * x^8 + [0;1] * x^6 + [0;1] * x^4 + [0;1] * x^2 + [0;1] = [2;3]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in (-\infty; -0.7132043127] \cup [0.7132043127; +\infty)$.

Exemplo 7.39: A envoltória intervalar da equação de grau 15 definida por $[0.1;0.1] * x^{15} + [-0.1;0.1] * x^{14} + [-0.1;-0.1] * x^{13} + [-0.2;0.2] * x^{12} + [-0.1;-0.1] * x^{11} + [0.1;0.1] * x^{10} + [0.1;0.1] * x^9 + [0.1;0.1] * x^8 + [0.1;0.1] * x^7 + [0.1;0.1] * x^6 + [0.1;0.1] * x^5 + [0.1;0.1] * x^4 + [0.1;0.1] * x^3 + [0.1;0.1] * x^2 + [0.1;0.1] * x + [0.1;0.1] = [-1;2]$ é dada por $x \in [-2.085591614; 2.000784485]$.

A Figura 7.40 ilustra esse resultado.

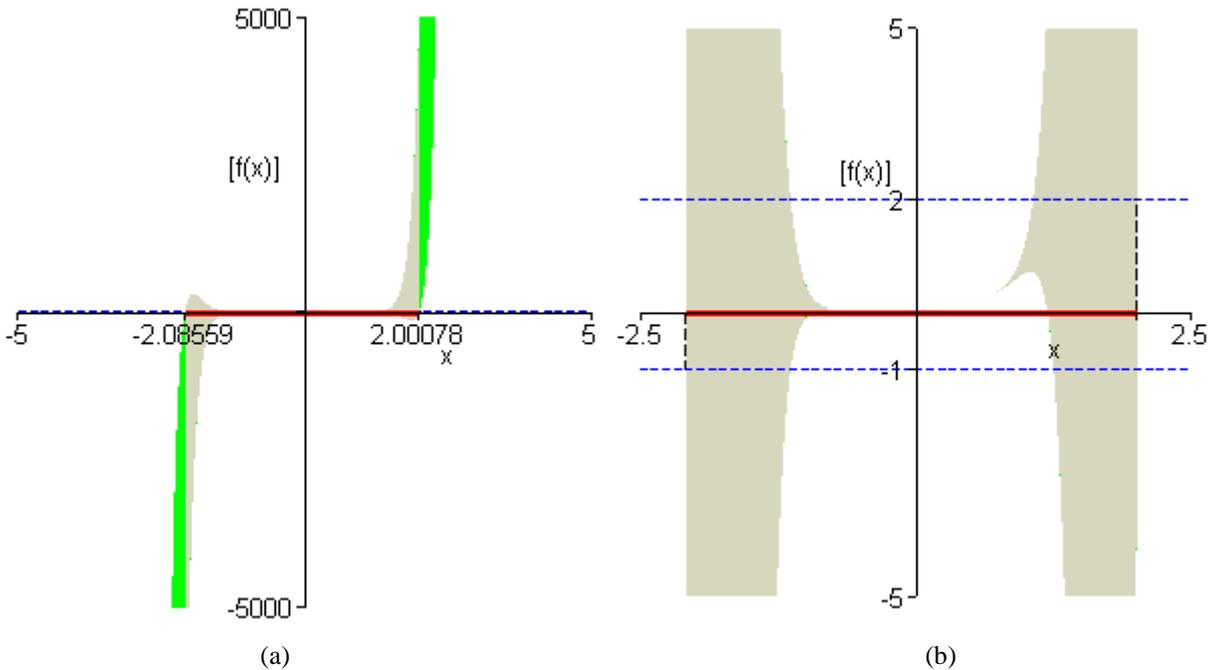


FIGURA 7.40 – Representação gráfica da equação $[0.1;0.1] * x^{15} + [-0.1;0.1] * x^{14} + [-0.1;-0.1] * x^{13} + [-0.2;0.2] * x^{12} + [-0.1;0.1] * x^{11} + [0.1;0.1] * x^{10} + [0.1;0.1] * x^9 + [0.1;0.1] * x^8 + [0.1;0.1] * x^7 + [0.1;0.1] * x^6 + [0.1;0.1] * x^5 + [0.1;0.1] * x^4 + [0.1;0.1] * x^3 + [0.1;0.1] * x^2 + [0.1;0.1] * x + [0.1;0.1] = [-1;2]$, de forma ampla (a) e detalhando as soluções (b). A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [-2.085591614; 2.000784485]$.

Exemplo 7.40: Modificando-se o termo independente do membro esquerdo e o valor do membro direito do exemplo anterior, obtém-se a equação de grau 15 $[0.1;0.1] * x^{15} + [-0.1;0.1] * x^{14} + [-0.1;-0.1] * x^{13} + [-0.2;0.2] * x^{12} + [-0.1;-0.1] * x^{11} + [0.1;0.1] * x^{10} + [0.1;0.1] * x^9 + [0.1;0.1] * x^8 + [0.1;0.1] * x^7 + [0.1;0.1] * x^6 + [0.1;0.1] * x^5 + [0.1;0.1] * x^4 + [0.1;0.1] * x^3 + [0.1;0.1] * x^2 + [0.1;0.1] * x + [0.1;0.2] = [0;0]$, cuja envoltória intervalar é dada por

$$x \in [-2.085430203; -0.9361163338] \cup [1.190578454; 2.000037549].$$

A Figura 7.41 ilustra esse resultado.

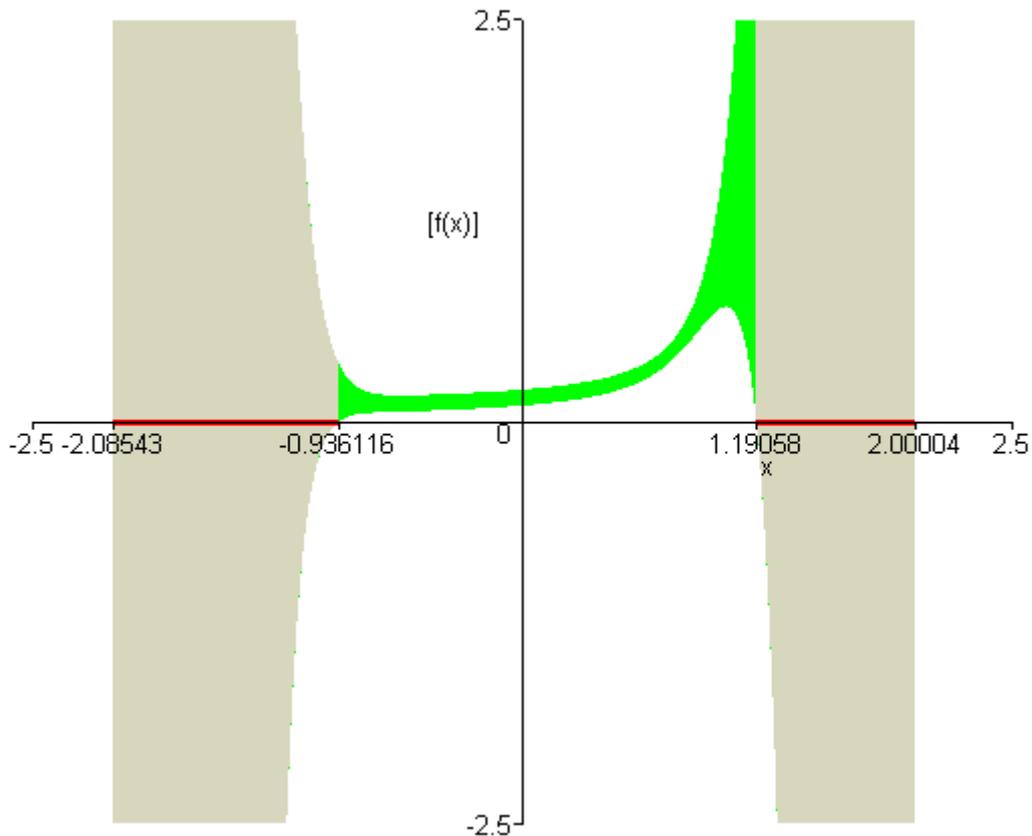


FIGURA 7.41 – Representação gráfica da equação

$$[0.1;0.1] * x^{15} + [-0.1;0.1] * x^{14} + [-0.1; -0.1] * x^{13} + [-0.2;0.2] * x^{12} + [-0.1;0.1] * x^{11} + [0.1;0.1] * x^{10} + [0.1;0.1] * x^9 + [0.1;0.1] * x^8 + [0.1;0.1] * x^7 + [0.1;0.1] * x^6 + [0.1;0.1] * x^5 + [0.1;0.1] * x^4 + [0.1;0.1] * x^3 + [0.1;0.1] * x^2 + [0.1;0.1] * x + [0.1;0.2] = [0;0].$$

A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais,

$$x \in [-2.085430203; -0.9361163338] \cup [1.190578454; 2.000037549].$$

Exemplo 7.41: Conforme mostra a Figura 7.42, a envoltória intervalar da equação de grau 20 $[0.0;0.1] * x^{20} + [0.1;0.1] * x^{19} + [0.1;0.1] * x^{18} + [0.1;0.1] * x^{17} + [0.1;0.1] * x^{16} + [0.1;0.1] * x^{15} + [0.1;0.1] * x^{14} + [0.1;0.1] * x^{13} + [0.1;0.1] * x^{12} + [0.1;0.1] * x^{11} + [0.1;0.1] * x^{10} + [0.1;0.1] * x^9 + [0.1;0.1] * x^8 + [0.1;0.1] * x^7 + [0.1;0.1] * x^6 + [-0.1;0.0] * x^5 + [0.1;0.1] * x^4 + [0.1;0.1] * x^3 + [0.1;0.1] * x^2 + [0.1;0.1] * x + [0.0;0.1] = [0.5;1.5]$ é dada por

$$x \in (-\infty; -1.064117755] \cup [0.8161192995; 0.9938875868].$$

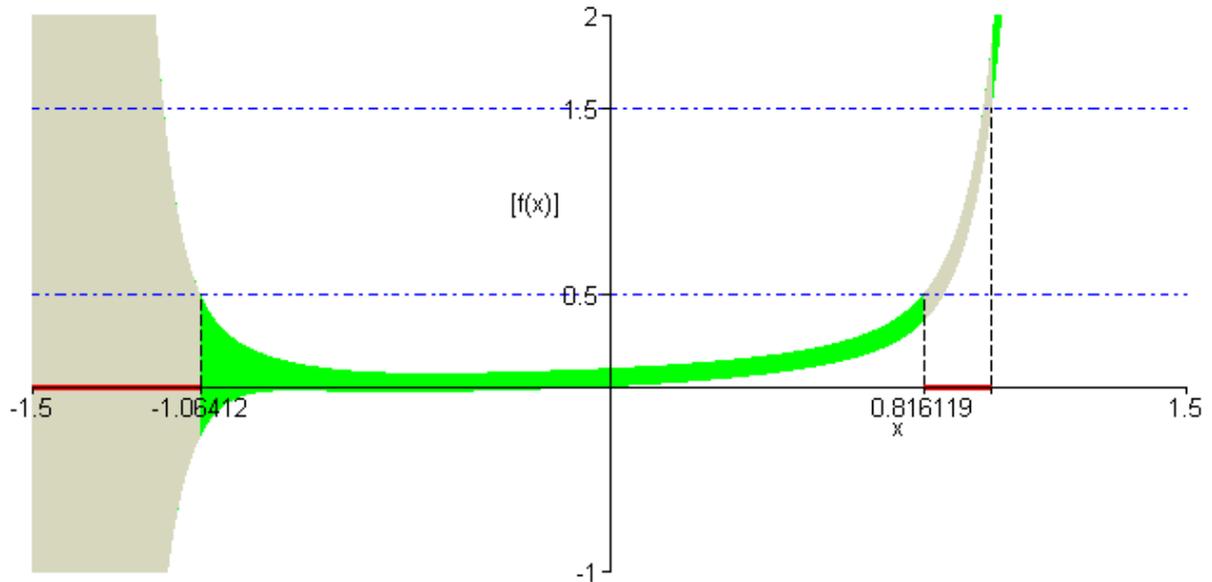


FIGURA 7.42 – Representação gráfica da equação
 $[0.0;0.1] * x^{20} + [0.1;0.1] * x^{19} + [0.1; 0.1] * x^{18} + [0.1;0.1] * x^{17} + [0.1;0.1] * x^{16} +$
 $[0.1;0.1] * x^{15} + [0.1;0.1] * x^{14} + [0.1;0.1] * x^{13} + [0.1;0.1] * x^{12} + [0.1;0.1] * x^{11} +$
 $[0.1;0.1] * x^{10} + [0.1;0.1] * x^9 + [0.1;0.1] * x^8 + [0.1;0.1] * x^7 + [0.1;0.1] * x^6 +$
 $[-0.1;0.0] * x^5 + [0.1;0.1] * x^4 + [0.1;0.1] * x^3 + [0.1;0.1] * x^2 + [0.1;0.1] * x + [0.0;0.1] = [0.5;1.5].$
 A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais,
 $x \in (-\infty; -1.064117755] \cup [0.8161192995; 0.9938875868].$

Exemplo 7.42: Conforme mostra a Figura 7.43, a envoltória intervalar da equação de vigésimo grau definida por $[0;1] * x^{20} + [1;1] * x^{15} + [0;1] * x^{10} + [-1;0] * x^5 + [0;1] = [1.5;2]$ é dada por

$$x \in (-\infty; -0.8267291760] \cup [0.8795900783; 1.087545721].$$

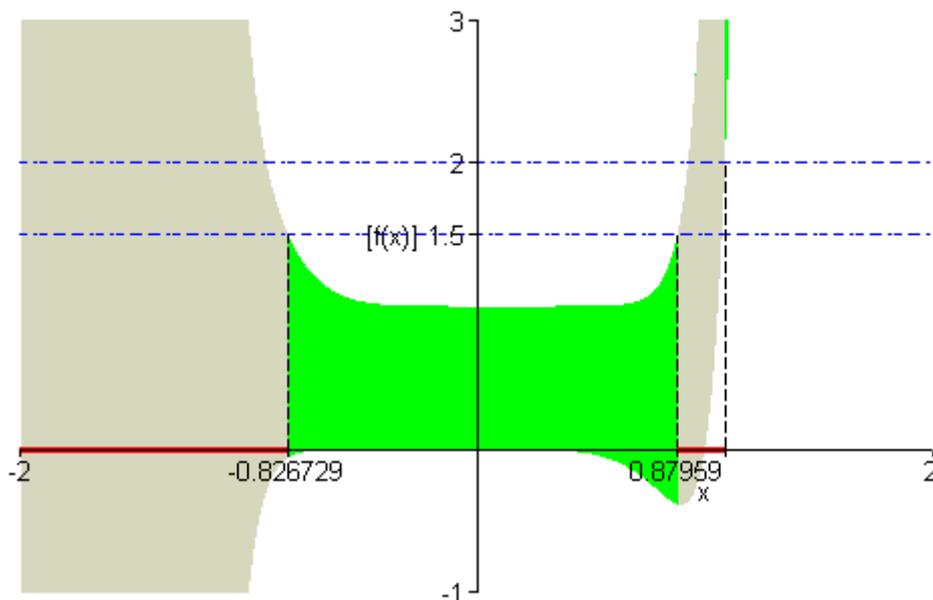


FIGURA 7.43 – Representação gráfica da equação
 $[0;1] * x^{20} + [1;1] * x^{15} + [0;1] * x^{10} + [-1;0] * x^5 + [0;1] = [1.5;2].$
 A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais,
 $x \in (-\infty; -0.8267291760] \cup [0.8795900783; 1.087545721].$

Exemplo 7.43: A envoltória intervalar das soluções reais da equação de grau 20 definida por $[0.0;0.1] * x^{20} + [0.1;0.1] * x^{19} + [0.1;0.1] * x^{18} + [0.1;0.1] * x^{17} + [0.1;0.1] * x^{16} + [0.1;0.1] * x^{15} + [0.1;0.1] * x^{14} + [0.1;0.1] * x^{13} + [0.1;0.1] * x^{12} + [0.1;0.1] * x^{11} + [0.1;0.1] * x^{10} + [0.1;0.1] * x^9 + [0.1;0.1] * x^8 + [0.1;0.1] * x^7 + [0.1;0.1] * x^6 + [-0.1;0.0] * x^5 + [0.1;0.1] * x^4 + [0.1;0.1] * x^3 + [0.1;0.1] * x^2 + [0.1;0.1] * x + [0.0;0.1] = [0.0;0.0]$ é dada por $x \in (-\infty;0]$.

A Figura 7.44 ilustra esse resultado.

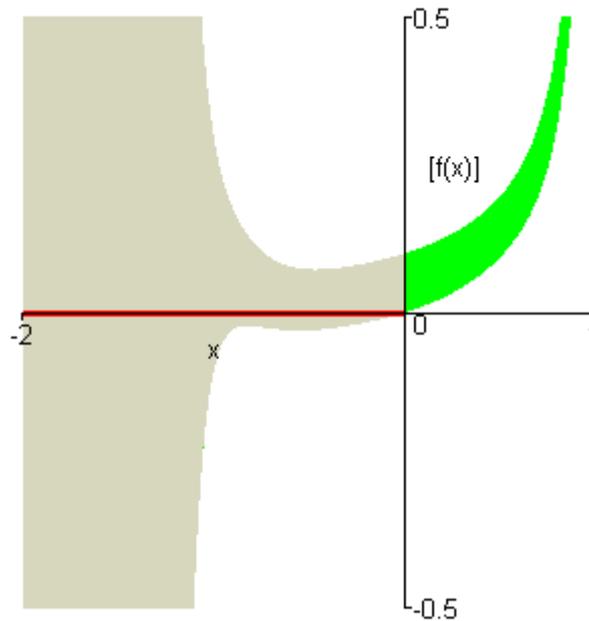


FIGURA 7.44 – Representação gráfica da equação $[0.0;0.1] * x^{20} + [0.1;0.1] * x^{19} + [0.1;0.1] * x^{18} + [0.1;0.1] * x^{17} + [0.1;0.1] * x^{16} + [0.1;0.1] * x^{15} + [0.1;0.1] * x^{14} + [0.1;0.1] * x^{13} + [0.1;0.1] * x^{12} + [0.1;0.1] * x^{11} + [0.1;0.1] * x^{10} + [0.1;0.1] * x^9 + [0.1;0.1] * x^8 + [0.1;0.1] * x^7 + [0.1;0.1] * x^6 + [-0.1;0.0] * x^5 + [0.1;0.1] * x^4 + [0.1;0.1] * x^3 + [0.1;0.1] * x^2 + [0.1;0.1] * x + [0.0;0.1] = [0.0;0.0]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in (-\infty;0]$.

A próxima seção realizará uma análise genérica dos exemplos ora apresentados.

7.6 Análise dos Exemplos Apresentados

Os exemplos apresentados na seção anterior permitem observar a eficácia do algoritmo proposto quanto à determinação das envoltórias intervalares para as soluções de equações polinomiais intervalares de variável real. Permitem também verificar a importância dos resultados apresentados nos Teoremas 7.2 a 7.5 para a realização desse objetivo. Em particular, esses exemplos foram selecionados de modo a ilustrar diferentes comportamentos para as envoltórias intervalares, considerando equações de graus diversos.

Como características qualitativas interessantes pode-se observar a dependência estrutural das soluções na forma apresentada no Teorema 7.5, que traz a informação da presença de resultados positivos ou negativos e de extremos limitantes finitos ou infinitos. Em particular, os exemplos 7.16 a 7.18, 7.22, 7.28 a 7.33, 7.36 a 7.38 e 7.41 a 7.43 demonstram a presença

de envoltórias intervalares que se estendem a extremos infinitos. Este fato traz diversas informações dignas de nota:

- do ponto de vista da obtenção de soluções reais pode-se associar essa característica ao significado de que a quantidade de informação trazida pela envoltória é nula. A existência de uma envoltória intervalar com extremos infinitos traduz uma situação bastante distinta da discutida na Seção 6.7, na qual a presença de infinitas soluções próprias para uma equação intervalar pode significar uma informação relevante em termos de estabilidade do sistema sob análise. Por exemplo, se considerada a envoltória obtida no Exemplo 7.19, a indicação de que $x \in \mathfrak{R}$ significa que sob certas condições (desconhecidas ou incontroláveis) qualquer valor real pode ser solução da equação intervalar $[-1;1] * x^2 + [1;1] * x + [1;1] = [-1;3]$. Ora, essa informação é relevante do ponto de vista da análise do tipo de restrição computacional necessária para o armazenamento da solução real obtida, por exemplo, mas é pouco relevante em termos da informação sobre o domínio das efetivas soluções reais;
- a não obrigatoriedade de “simetria” no que se refere à presença de extremos limitantes infinitos na envoltória intervalar modifica a percepção do significado de solução, visto que este não é um comportamento possível em termos de equações polinomiais reais. Como demonstram os exemplos 7.29 a 7.31 e 7.41 a 7.43, essas situações são associadas à presença de coeficientes das regiões BI e BIII, justificando a necessidade analítica de utilização da partição de \mathfrak{R} na forma apresentada neste trabalho.

No que concerne à enumeração dos intervalos compactos que compõem a envoltória intervalar, pouco se pode afirmar, exceto que o número máximo de regiões dessa natureza é dado pelo grau da equação polinomial. Cabe observar que é perfeitamente possível a presença de uma equação de grau n com um número menor de regiões compactas formando sua envoltória intervalar de soluções reais, como mostram os exemplos 7.19, 7.20, 7.23, 7.25, 7.26, 7.28 e 7.31 a 7.33. No entanto, até o momento da escrita deste volume, não foi possível comprovar analiticamente se o motivo de tal configuração é devido à presença de raízes complexas ou de raízes reais duplas. Ou seja, a questão da determinação da multiplicidade das raízes reais que pertencem à envoltória intervalar perde parte de sua significação, visto que a presença de um número menor de intervalos compactos que o grau da equação pode-se dever à combinação das influências da existência de raízes complexas e da existência de raízes reais com multiplicidade maior que um. Em particular, a situação apresentada nos exemplos 7.19 a 7.21 é bastante elucidativa:

- nos exemplos 7.19 e 7.20 as envoltórias intervalares determinadas para as equações $[1;1] * x^2 + [-4;2] = [0;0]$ e $[1;1] * x^2 + [-4;0] = [0;0]$ são exatamente iguais: $x \in [-2.;2.]$;
- no entanto, o exemplo 7.21 ilustra uma situação do tipo $[1;1] * x^2 + [-4;\overline{a_0}] = [0;0]$, com $\overline{a_0} < 0$, e que apresenta um comportamento diferente dos anteriores, com duas regiões compactas distintas compondo a envoltória intervalar: $x \in [-2.;-1.] \cup [1.;2.]$.

A semelhança entre os limitantes externos da envoltória intervalar, $x = -2$ e $x = 2$, permite observar que, de fato, são as funções reais obtidas a partir do polinômio $p(x) = [1;1] * x^2 + [-4;\overline{a_0}]$, $\overline{a_0} \leq 0$, as responsáveis pela presença de soluções reais para as equações em questão. Em particular, tais funções podem apresentar raízes reais com

multiplicidade igual **ou maior** que 1. Ainda, cabe observar que as funções reais obtidas a partir de $p(x) = [1;1] * x^2 + [-4; \overline{a_0}]$, com $\overline{a_0} > 0$, somente podem contribuir com soluções complexas para a envoltória intervalar. A Figura 7.45 permite compreender melhor essas observações.

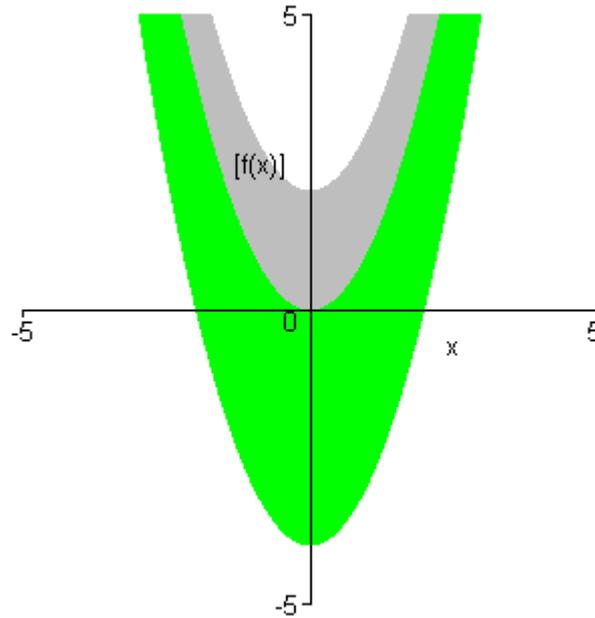


FIGURA 7.45 – Representação gráfica da função polinomial $p(x) = [1;1] * x^2 + [-4; \overline{a_0}]$, $-4 \leq \overline{a_0} \leq 2$.
A região inferior é a associada às soluções reais que compõem a envoltória intervalar.

A observação da Figura 7.45 permite, por exemplo, conjecturar sobre a efetiva utilidade prática, do ponto de vista da determinação de soluções de equações intervalares de variável **real**, de se operar com uma equação como $[1;1] * x^2 + [-4;2] = [0;0]$, se efetivamente o conjunto de soluções reais será dado pela família $[1;1] * x^2 + [-4;0] = [0;0]$. Ou seja, leva à questionar quais as implicações da redução da imprecisão nas entradas desse problema específico visto que a informação quantitativa mantém-se inalterada. Essa certamente não é uma questão de solução única, principalmente se desprovida de um contexto de aplicação. No entanto, com base nas observações acima, o seguinte resultado pode ser enunciado:

Teorema 7.7 (Enumeração de Regiões Compactas Componentes da Envoltória Intervalar de uma Equação Polinomial): Seja $[x^e]$ a envoltória intervalar das soluções reais

da equação polinomial de grau n definida por $p(x) = [b]$, onde $p(x) = \sum_{i=0}^n [a_i] * x^i$. Nessas condições,

$\underline{p}(x) = \underline{b}$ e $\overline{p}(x) = \overline{b}$ possuem exatamente n soluções reais de multiplicidade 1 \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow \exists \{[x_i^e]\}_{i=1..n}, \forall j, k, [x_j^e] \cap [x_k^e] = \emptyset \wedge [x^e] = \bigcup_{i=1}^n [x_i^e].$$

Prova do Teorema 7.7: A prova apresentada no Anexo 1.23 explora diretamente a informação de multiplicidade das soluções das equações reais enunciadas, estabelecendo uma similaridade entre essas soluções e os intervalos que compõem a envoltória intervalar de soluções reais. ■

A próxima seção retoma a análise comparativa entre soluções próprias e envoltórias intervalares iniciada nos capítulos anteriores.

7.7 Discussão: Envoltória Intervalar de Reais versus Solução Própria Intervalar

Soluções próprias e envoltórias intervalares apresentam naturezas diferentes, não sendo exatamente comparáveis. No entanto, essa afirmação deve ser melhor fundamentada, de modo a complementar os resultados apresentados nos capítulos e seções anteriores, tais como o Teorema 7.1. De modo a auxiliar na compreensão dessa discussão, os exemplos apresentados no Capítulo 6 são revisitados nesta seção, com a alteração do tipo de variável para real. Posteriormente esses resultados são analisados e comparados com os apresentados no capítulo anterior.

Exemplo 7.44: Conforme ilustra a Figura 7.46, a equação $[2;3] * x + [-7;-5] = [-13;-2]$ possui envoltória intervalar dada por

$$x \in [-4.0;2.5].$$

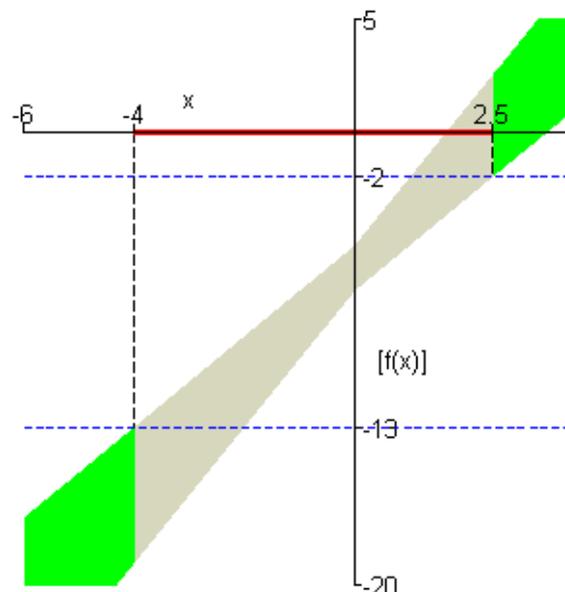


FIGURA 7.46 – Representação gráfica da equação $[2;3] * x + [-7;-5] = [-13;-2]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [-4.0;2.5]$.

Exemplo 7.45: A equação $[-1;2] * x = [-2;4]$ tem envoltória intervalar dada por

$$x \in \mathfrak{R}.$$

Este resultado pode ser verificado com o auxílio da Figura 7.47.

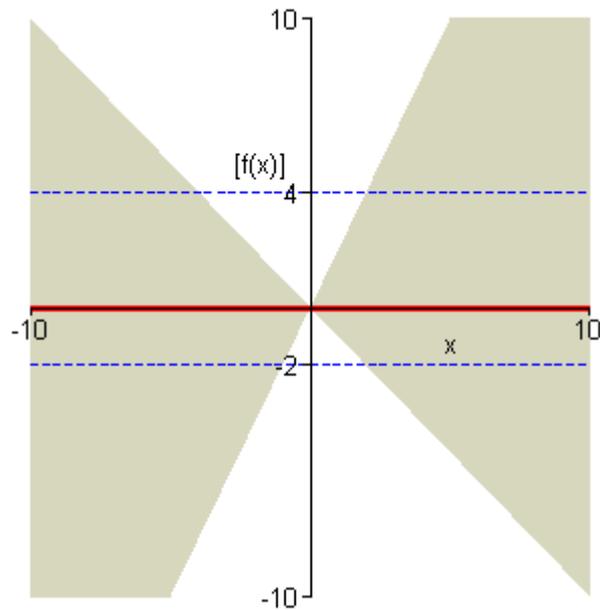


FIGURA 7.47 – Representação gráfica da equação $[-1;2] * x = [-2;4]$.
A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in \mathfrak{R}$.

Exemplo 7.46: A equação linear $[-1;2] * x + [-3;4] = [-5;8]$ apresenta como envoltória intervalar

$$x \in \mathfrak{R},$$

conforme ilustra a Figura 7.48.

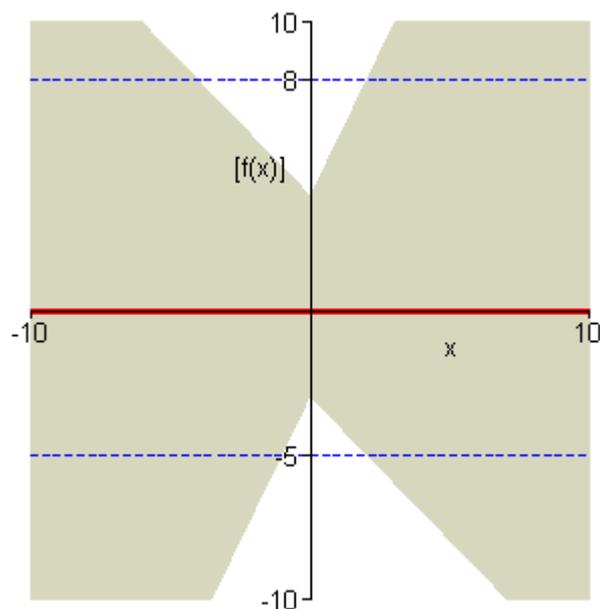


FIGURA 7.48 – Representação gráfica da equação $[-1;2] * x + [-3;4] = [-5;8]$.
A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in \mathfrak{R}$.

Exemplo 7.47: A equação linear $[-1;3] * x + [-1;0] = [1;12]$ apresenta como envoltória intervalar

$$x \in (-\infty; -1.] \cup [0.3333333333; +\infty).$$

Este fato pode ser observado na Figura 7.49.

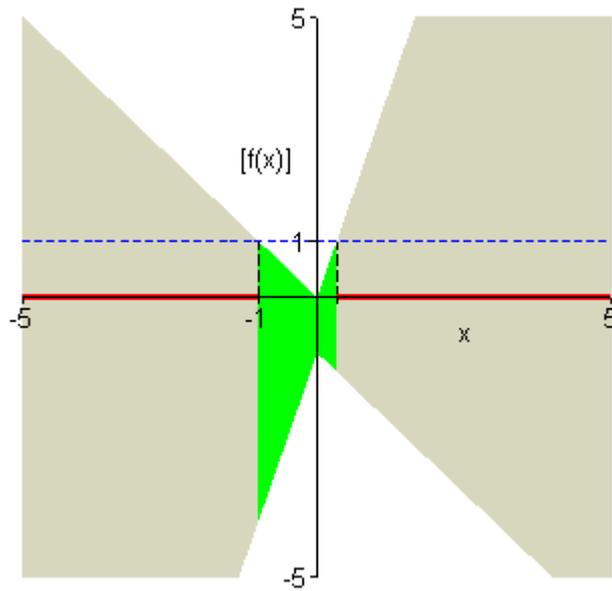


FIGURA 7.49 – Representação gráfica da equação $[-1;3] * x + [-1;0] = [1;12]$.
 A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais,
 $x \in (-\infty;-1.] \cup [0.3333333333;+\infty)$.

Exemplo 7.48: Conforme mostra a Figura 7.50, a equação de segundo grau $[1;2] * x^2 = [2;4]$ possui como envoltória intervalar

$$x \in [-2.;-1.] \cup [1.;2.].$$

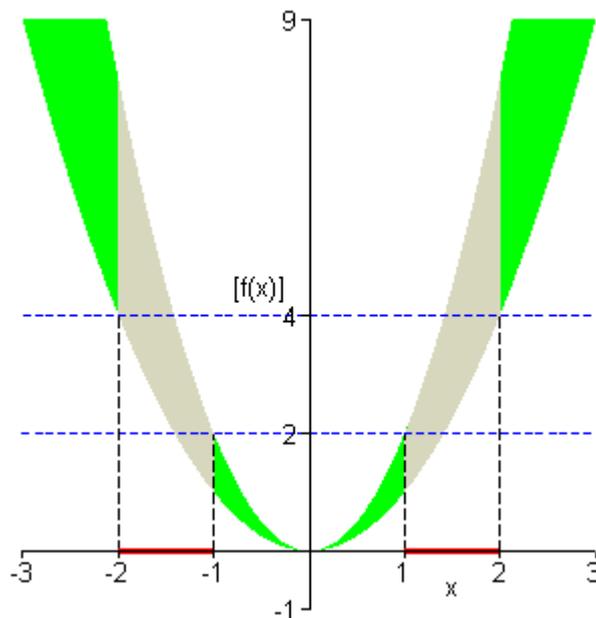


FIGURA 7.50 – Representação gráfica da equação $[1;2] * x^2 = [2;4]$.
 A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [-2.;-1.] \cup [1.;2.].$

Exemplo 7.49: Para a equação $[5;6] * x^2 + [-4; -3] * x = [-11;93]$ a envoltória intervalar encontrada é dada por

$$x \in [-4.023193264;4.731281566].$$

A Figura 7.51 ilustra esse fato.

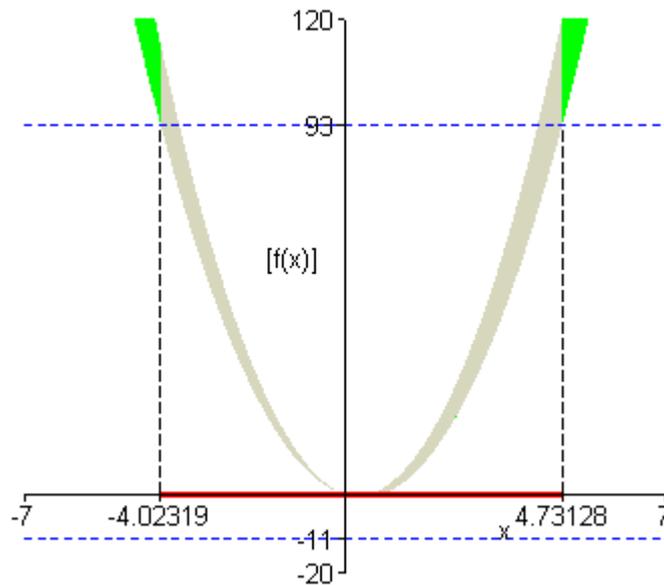


FIGURA 7.51 – Representação gráfica da equação $[5;6] * x^2 + [-4;-3] * x = [-11;93]$.
A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [-4.023193264;4.731281566]$.

Exemplo 7.50: Conforme ilustrado na Figura 7.52, a equação $[1;3] * x^2 + [5;6] * x = [6;72]$ possui envoltória intervalar dada por

$$x \in [-12.;-2.474809634] \cup [0.732050808;6.345903005].$$

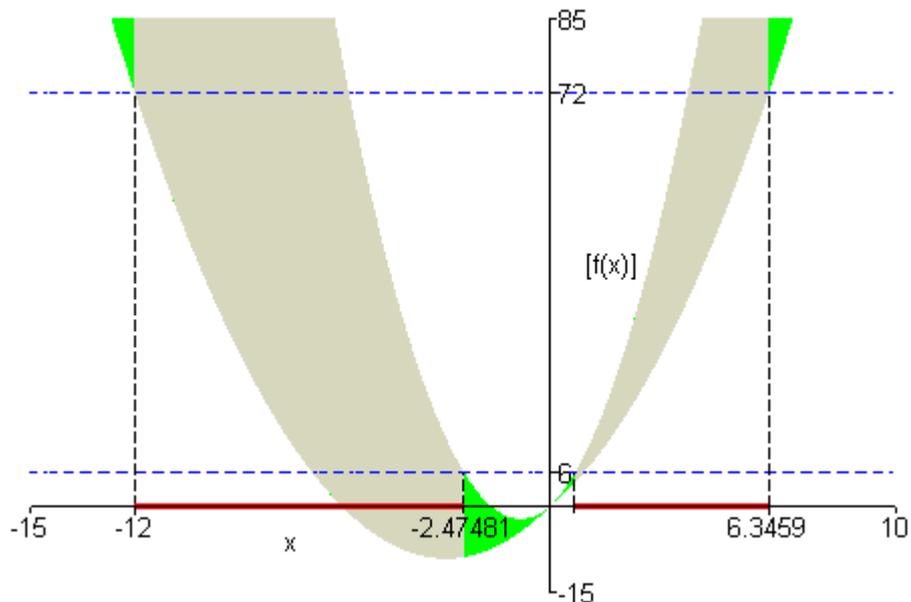


FIGURA 7.52 – Representação gráfica da equação $[1;3] * x^2 + [5;6] * x = [6;72]$.
A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais,
 $x \in [-12.;-2.474809634] \cup [0.732050808;6.345903005]$.

Exemplo 7.51: A equação $[-1;6] * x^3 + [-1;2] * x^2 + [-3;1] * x + [7;8] = [-1;15]$ apresenta como envoltória intervalar

$$x \in \mathfrak{R},$$

conforme mostra a Figura 7.53.

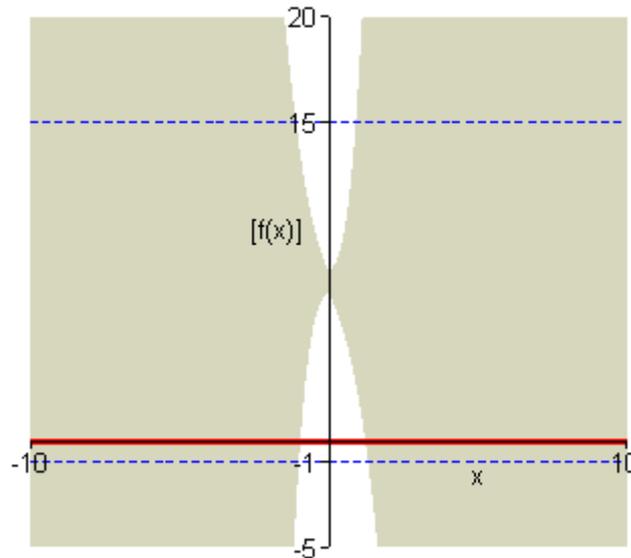


FIGURA 7.53 – Representação gráfica da equação $[-6;6] * x^3 + [-2;2] * x^2 + [-3;1] * x + [7;8] = [-1;15]$.

A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in \mathfrak{R}$.

Exemplo 7.52: A equação de segundo grau $[-5;2] * x^2 + [-4;3] * x = [-140;70]$ possui envoltória intervalar dada por

$$x \in \mathfrak{R}.$$

Este resultado é apresentado na Figura 7.54.

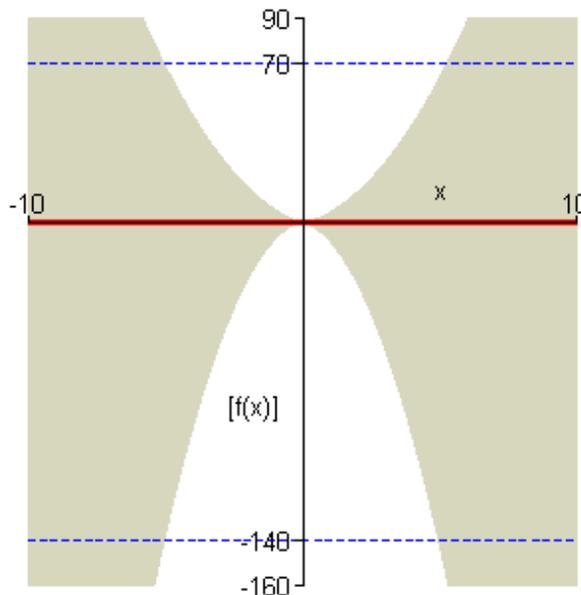
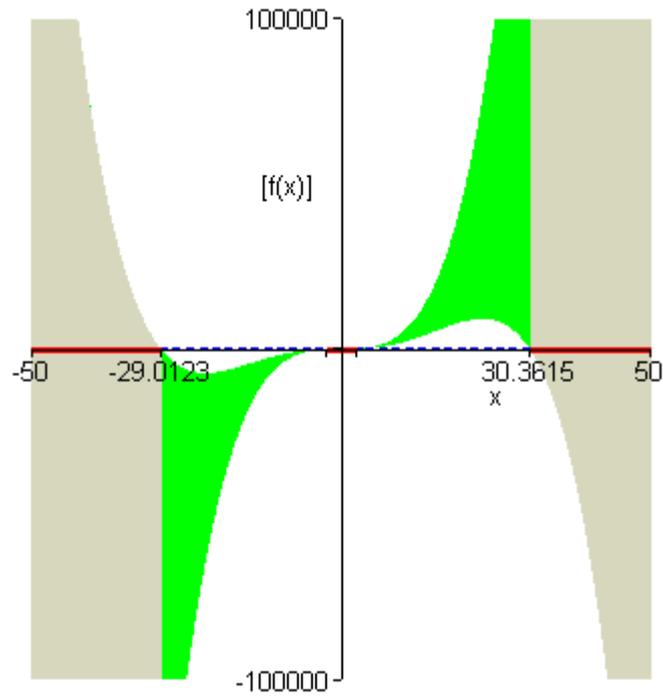


FIGURA 7.54 – Representação gráfica da equação $[-5;2] * x^2 + [-4;3] * x = [-140;70]$.

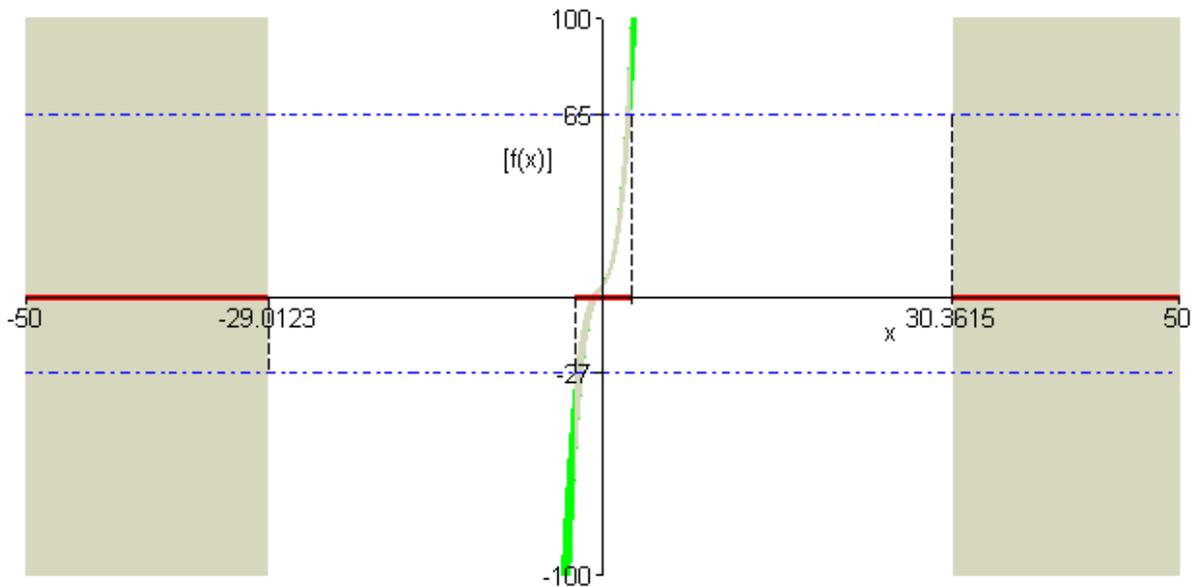
A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in \mathfrak{R}$.

Exemplo 7.53: Conforme mostra a Figura 7.55, a envoltória intervalar determinada para a equação $[-0.1;0.1] * x^4 + [3;4] * x^3 + [1;3] * x^2 + [5;8] * x + [3;5] = [-27;65]$ é dada por

$$x \in (-\infty; -29.01225291] \cup [-2.376080548; 2.504680286] \cup [30.36145309; +\infty).$$



(a)



(b)

FIGURA 7.55 – Representação gráfica da equação $[-0.1;0.1] * x^4 + [3;4] * x^3 + [1;3] * x^2 + [5;8] * x + [3;5] = [-27;65]$ de forma ampla (a) e detalhando a envoltória intervalar (b).
A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in (-\infty; -29.01225291] \cup [-2.376080548; 2.504680286] \cup [30.36145309; +\infty)$.

Exemplo 7.54: A Figura 7.56 apresenta a envoltória intervalar da equação de quarto grau $[-1;5] * x^4 + [-4;3] * x^3 + [-5;3] * x^2 + [1;4] * x + [3;5] = [-10;20]$, dada por $x \in \mathfrak{R}$.

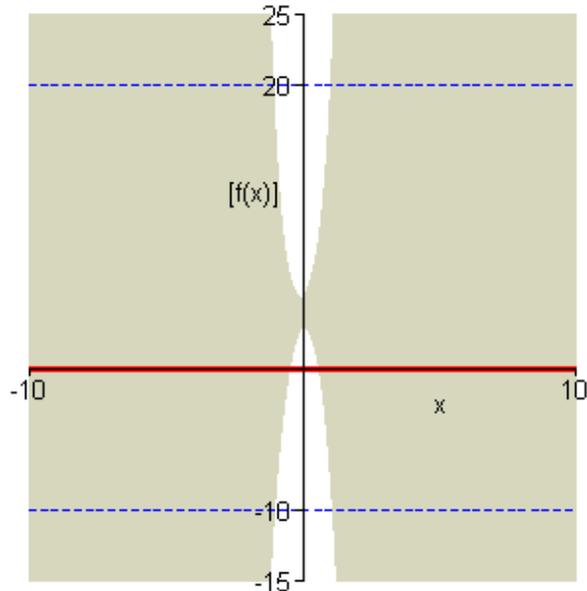


FIGURA 7.56 – Representação gráfica da equação $[-1;5] * x^4 + [-4;3] * x^3 + [-5;3] * x^2 + [1;4] * x + [3;5] = [-10;20]$.
A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in \mathfrak{R}$.

Exemplo 7.55: A equação de quinto grau $[-1;1] * x^5 = [-32;32]$ apresenta a envoltória intervalar

$$x \in \mathfrak{R}.$$

A Figura 7.57 esse resultado.

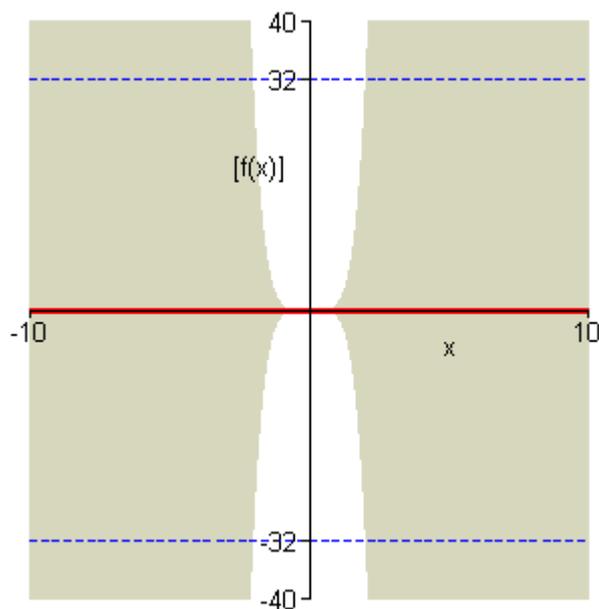


FIGURA 7.57 – Representação gráfica da equação $[-1;1] * x^5 = [-32;32]$.
A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in \mathfrak{R}$.

Exemplo 7.56: Conforme apresenta a Figura 7.58, a equação de sexto grau $[-1;2] * [x]^6 + [-1;2] * [x]^5 + [-1;2] * [x]^4 + [-1;2] * [x]^3 + [-1;2] * [x]^2 + [-1;2] * [x] + [-1;2] = [-127;254]$ possui envoltória intervalar dada por

$$x \in \mathfrak{R}.$$

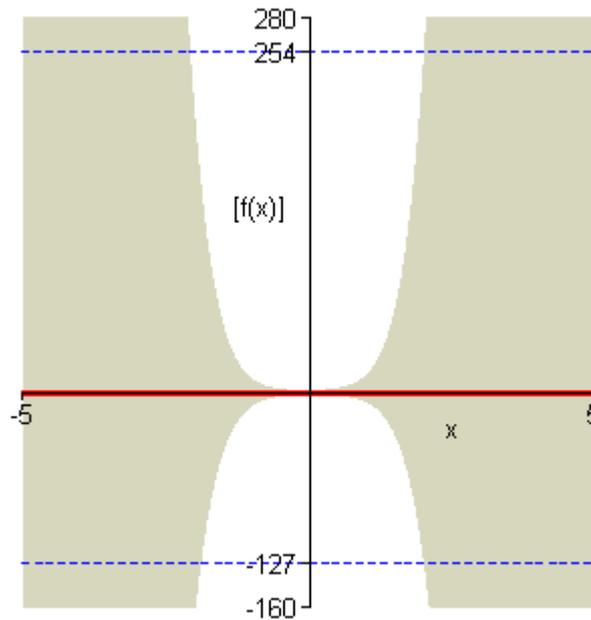


FIGURA 7.58 – Representação gráfica da equação $[-1;2] * x^6 + [-1;2] * x^5 + [-1;2] * x^4 + [-1;2] * x^3 + [-1;2] * x^2 + [-1;2] * x + [-1;2] = [-127;254]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in \mathfrak{R}$.

Exemplo 7.57: A Figura 7.59 apresenta a envoltória intervalar encontrada para a equação de grau 10 $[0;1] * x^{10} + [0;1] * x^8 + [0;1] * x^6 + [0;1] * x^4 + [0;1] * x^2 + [0;1] = [0;6]$, dada por

$$x \in \mathfrak{R}.$$

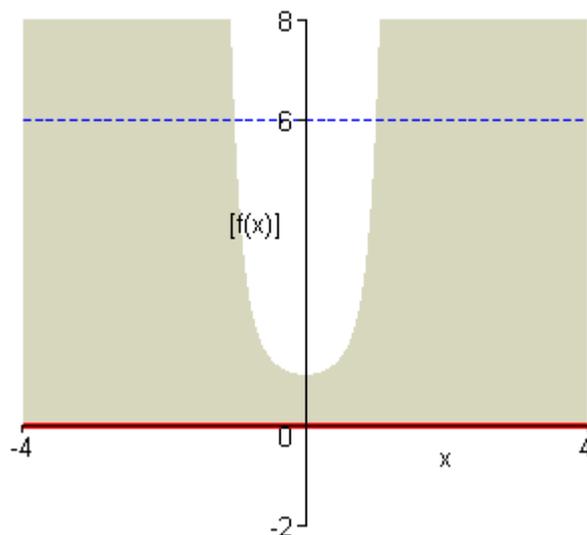


FIGURA 7.59 – Representação gráfica da equação $[0;1] * x^{10} + [0;1] * x^8 + [0;1] * x^6 + [0;1] * x^4 + [0;1] * x^2 + [0;1] = [0;6]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in \mathfrak{R}$.

Exemplo 7.58: Conforme mostra a Figura 7.60, a equação de nono grau $[-1.2;-1.1] * [x]^9 + [0.9;1.0] * [x]^7 + [-0.8;-0.7] * [x]^5 + [0.5;0.6] * [x]^3 + [-0.4;-0.3] * [x] + [0.1;0.2] = [-1;2]$ possui como envoltória intervalar

$$x \in [-1.141440315;1.091071623].$$

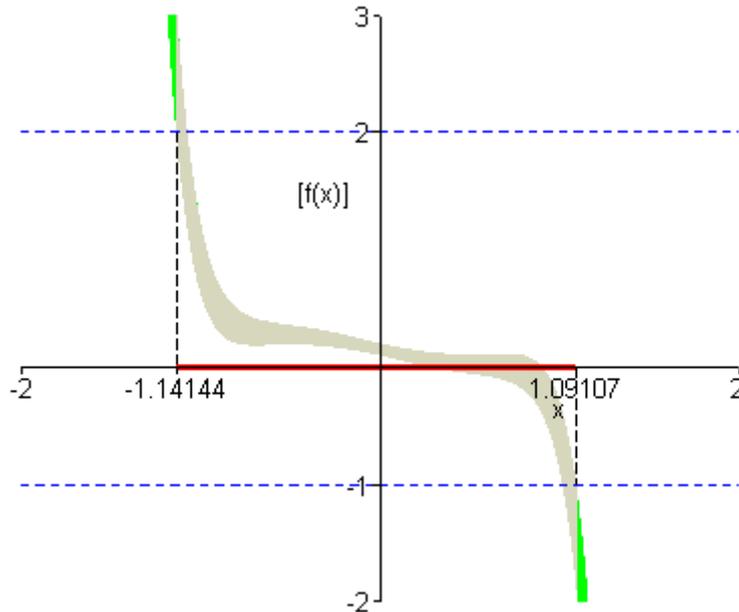


FIGURA 7.60 – Representação gráfica da equação $[-1.2;-1.1] * x^9 + [0.9;1.0] * x^7 + [-0.8;-0.7] * x^5 + [0.5;0.6] * x^3 + [-0.4;-0.3] * x + [0.1;0.2] = [-1;2]$. A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais, $x \in [-1.141440315;1.091071623]$.

O Quadro 7.3 apresenta os resultados obtidos no Capítulo 6 e os ora apresentados, lado a lado, juntamente com a equação de referência associada. De modo a respeitar a discussão anteriormente apresentada, deve-se observar que a variável apresentada nas equações devem ser consideradas como do tipo de dado número-intervalo ou número real, de acordo com a coluna de soluções analisada. De fato, essas equações são apresentadas apenas para a manutenção de uma referência aos exemplos anteriormente apresentados.

Da análise do Quadro 7.3 a primeira observação relevante é a da validade do Teorema 7.1, anteriormente apresentado, segundo o qual todo o número real que pode ser extraído da solução própria será parte da envoltória intervalar das soluções reais da equação de variável real equivalente. Excetuando-se esse fato, pouco mais pode ser observado. Pode-se ainda conjecturar que a presença de infinitas soluções próprias implique que a envoltória intervalar de soluções reais seja igual a \mathfrak{R} , mas não foi possível encontrar evidências teóricas que garantam esse resultado, ainda que os testes realizados indiquem essa tendência.

Equação de Referência[♦]	Solução Própria	Envoltória Intervalar
$[2;3] * x + [-7;-5] = [-13;-2]$	$[x^p] = [-2;1]$	$x \in [-4.0;2.5]$
$[-1;2] * x = [-2;4]$	$[x^p] = [\underline{x};2], \forall \underline{x} \in [-1;2]$	$x \in \mathfrak{R}$
$[-1;2] * x + [-3;4] = [-5;8]$	$[x^p] = [\underline{x};2], \forall \underline{x} \in [-1;2]$	$x \in \mathfrak{R}$
$[-1;3] * x + [-1;0] = [1;12]$	–	$x \in (-\infty;-1.] \cup [0.333333333333;+\infty)$
$[1;2] * x^2 = [2;4]$	$[x^p] = [-\sqrt{2};-\sqrt{2}]$ e $[x^p] = [\sqrt{2};\sqrt{2}]$	$x \in [-2.;;-1.] \cup [1.;;2.]$
$[5;6] * x^2 + [-4;3] * x = [-11;93]$	$[x^p] = [-3.617756530;0.4279066864]$ e $[x^p] = [1;4]$	$x \in [-4.023193264;4.731281566]$
$[1;3] * x^2 + [5;6] * x = [6;72]$	$[x^p] = [1;4]$	$x \in [-12.;;-2.474809634] \cup [0.732050808;6.345903005]$
$[-6;6] * x^3 + [-2;2] * x^2 + [-3;1] * x + [7;8] = [-1;15]$	$[x^p] = [-1; \frac{1}{3}]$	$x \in \mathfrak{R}$
$[-5;2] * x^2 + [-4;3] * x = [-140;70]$	$[x^p] = [-5; \bar{x}], \forall \bar{x} \in [-5;2]$ e $[x^p] = [-2.253299832;4.906599664]$	$x \in \mathfrak{R}$
$[-0.1;0.1] * x^4 + [3;4] * x^3 + [1;3] * x^2 + [5;8] * x + [3;5] = [-27;65]$	$[x^p] = [-0.9628113533;1.977316410]$	$x \in (-\infty;-29.01225291] \cup [-2.376080548;2.504680286] \cup [30.36145309;+\infty)$
$[-1;5] * x^4 + [-4;3] * x^3 + [-5;3] * x^2 + [1;4] * x + [3;5] = [-10;20]$	$[x^p] = [-0.444444444444;1]$	$x \in \mathfrak{R}$
$[-1;1] * x^5 = [-32;32]$	$[x^p] = [\underline{x};2], \forall \underline{x} \in [-2;2]$ e $[x^p] = [2; \bar{x}], \forall \bar{x} \in [-2;2]$	$x \in \mathfrak{R}$
$[-1;2] * x^6 + [-1;2] * x^5 + [-1;2] * x^4 + [-1;2] * x^3 + [-1;2] * x^2 + [-1;2] * x + [-1;2] = [-127;254]$	$[x^p] = [\underline{x};2], \forall \underline{x} \in [-1;2]$	$x \in \mathfrak{R}$
$[0;1] * x^{10} + [0;1] * x^8 + [0;1] * x^6 + [0;1] * x^4 + [0;1] * x^2 + [0;1] = [0;6]$	$[x^p] = [-1; \bar{x}], \forall \bar{x} \in [-1;0]$ e $[x^p] = [\underline{x};1], \forall \underline{x} \in [0;1]$	$x \in \mathfrak{R}$
$[-1.2;-1.1] * x^9 + [0.9;1.0] * x^7 + [-0.8;-0.7] * x^5 + [0.5;0.6] * x^3 + [-0.4;-0.3] * x + [0.1;0.2] = [-1;2]$	$[x^p] = [-0.9617235073;-0.5342597021]$	$x \in [-1.141440315;1.091071623]$

[♦] A variável “x” simboliza um número-intervalo para a coluna das soluções próprias e um número real para a coluna das envoltórias intervalares.

QUADRO 7.3 – Comparação entre soluções próprias e envoltórias intervalares das equações apresentadas nos exemplos do Capítulo 6.

Também é possível observar do Quadro 7.3 que as envoltórias intervalares apresentam, do ponto de vista dos números reais, uma densidade maior de soluções que as soluções próprias. Esse fato é coerente com a discussão apresentada anteriormente, visto que a solução própria é determinada levando em consideração as operações entre números-intervalo, ou seja, levando em consideração a informação de incerteza que a variável intervalar – como uma unidade indivisível – carrega. Ao se considerar uma variável estritamente real, a informação de imprecisão do intervalo não é considerada, já que segundo esta representação os valores reais são tomados individualmente. Tal restrição efetivamente **subestima** a influência da incerteza de uma solução intervalar no sentido da avaliação da função sob a semântica de número-intervalo, ampliando o conjunto de soluções possíveis.

Adicionalmente ao argumento do parágrafo anterior, cabe observar que a análise gráfica conjunta das equações envolvendo variável intervalar e variável real permite compreender que:

- uma função intervalar de variável real é o resultado da intersecção do volume tridimensional que representa a função intervalar pura com o plano associado aos números reais, isto é, $y = x$, para $x, y \in \mathfrak{R}$;
- no entanto, mesmo existindo essa associação morfológica, o conceito de solução própria não é o mesmo de envoltória intervalar de soluções reais do ponto de vista semântico.

Assim, não é possível obter a envoltória intervalar de soluções reais simplesmente através da projeção das soluções próprias da equação intervalar pura equivalente, conforme já afirmado na Seção 7.1. A Figura 7.61 permite ilustrar melhor esse fato, tomando como exemplo as equações $[1;2] * [x]^2 = [2;4]$ e $[1;2] * x^2 = [2;4]$.

Como dito no início desta seção, equações intervalares puras possuem natureza diferente de equações intervalares envolvendo variável real, não sendo portanto, comparáveis. Enfim, a análise das informações do Quadro 7.3 permite concluir que a troca simples de um tipo de equação por outro gera perdas ou mudança de significação dos resultados, coerentemente com a discussão apresentada nos capítulos anteriores.

7.8 Considerações Sobre a Eficácia da Implementação do Algoritmo 3

O conjunto de exemplos apresentado permite evidenciar que o algoritmo proposto é eficaz não apenas na determinação da envoltória intervalar das soluções reais de tipos de equações polinomiais extensivamente estudadas na literatura de intervalos, como também para equações de grau mais elevado ou com coeficiente dominante com inclusão de zero. Associada aos resultados do Algoritmo 3, vêm a contribuição da identificação de uma semântica para o tipo de solução encontrada e teoremas que fundamentam sua eficácia. O algoritmo proposto não necessita impor certas restrições a que métodos iterativos reais e intervalares são obrigados, tais como a dependência da determinação de soluções a partir de valores iniciais arbitrários. A isenção de restrições como essa é bastante desejável do ponto de vista da aplicabilidade de algoritmos em Computação Científica e fundamenta-se nos resultados algébricos apresentados neste capítulo.

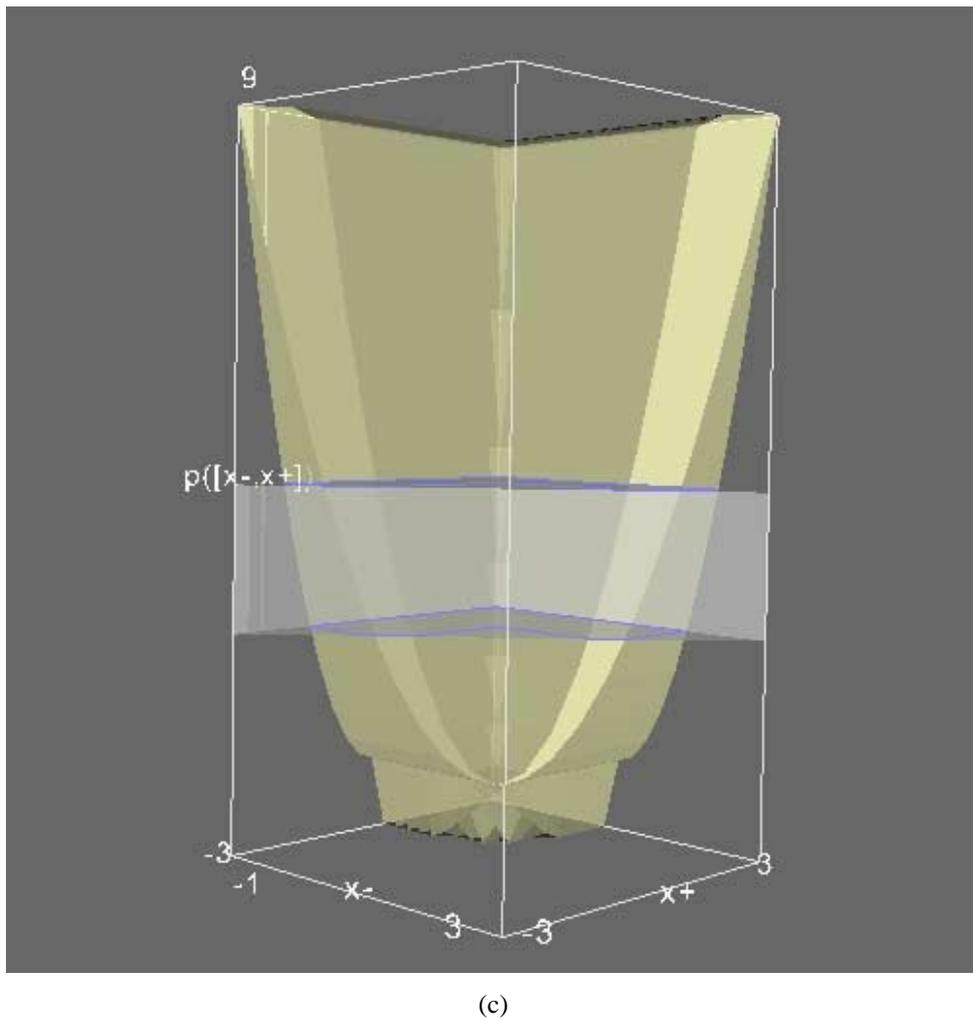
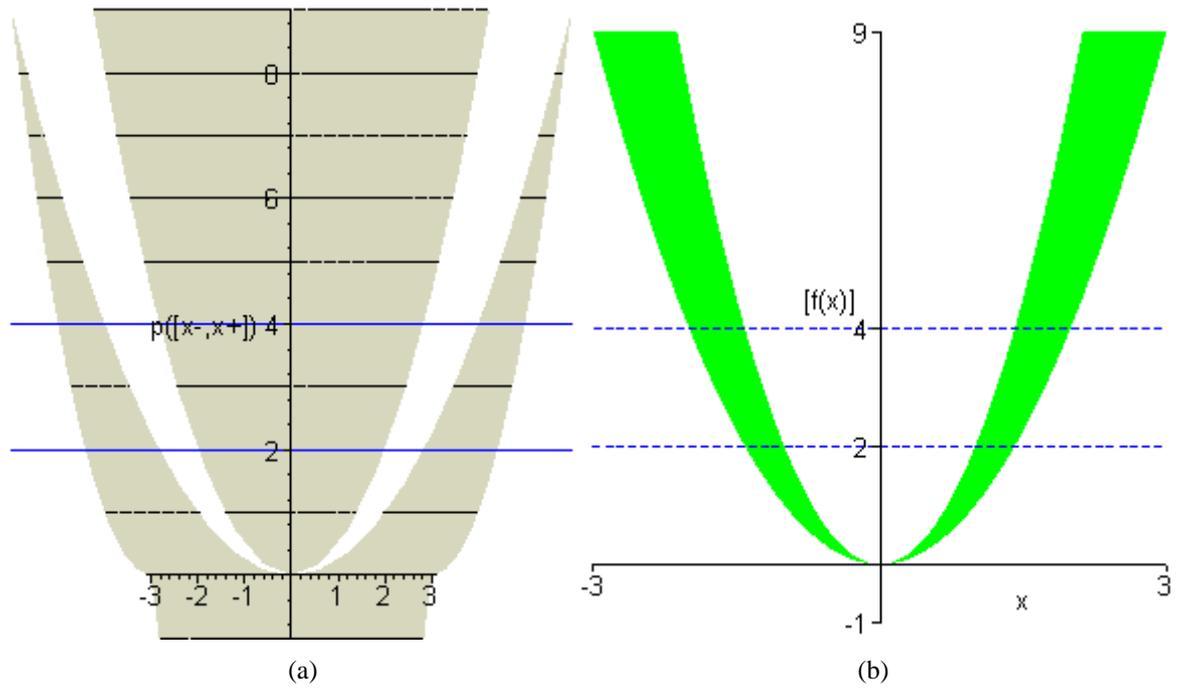


FIGURA 7.61 – Representação gráfica de $[1;2] * [x]^2 = [2;4]$ (a e c) e $[1;2] * x^2 = [2;4]$ (b) do mesmo ponto de vista, evidenciando que a segunda equação é resultado da intersecção dos volumes intervalares da primeira equação com o plano real $y = x$.

Com relação à versão implementada do algoritmo, é imprescindível a análise do exemplo apresentado a seguir. Ele demonstra a existência de um erro de processamento, ocasionado pelas camadas de suporte do Maple V Release 5.00 e que influencia diretamente na eficácia da versão de teste do algoritmo proposto:

Exemplo 7.59: A análise da equação $[-1;-1]*x^3 + [-1;2]*x^2 + [-2;2]*x + [1;1] = [0;0]$ revela uma envoltória intervalar de soluções reais dada por

$$x \in [-1.801937736; -0.4450418680] \cup [0.3926467817; 2.831177208].$$

A Figura 7.62 ilustra essa situação.

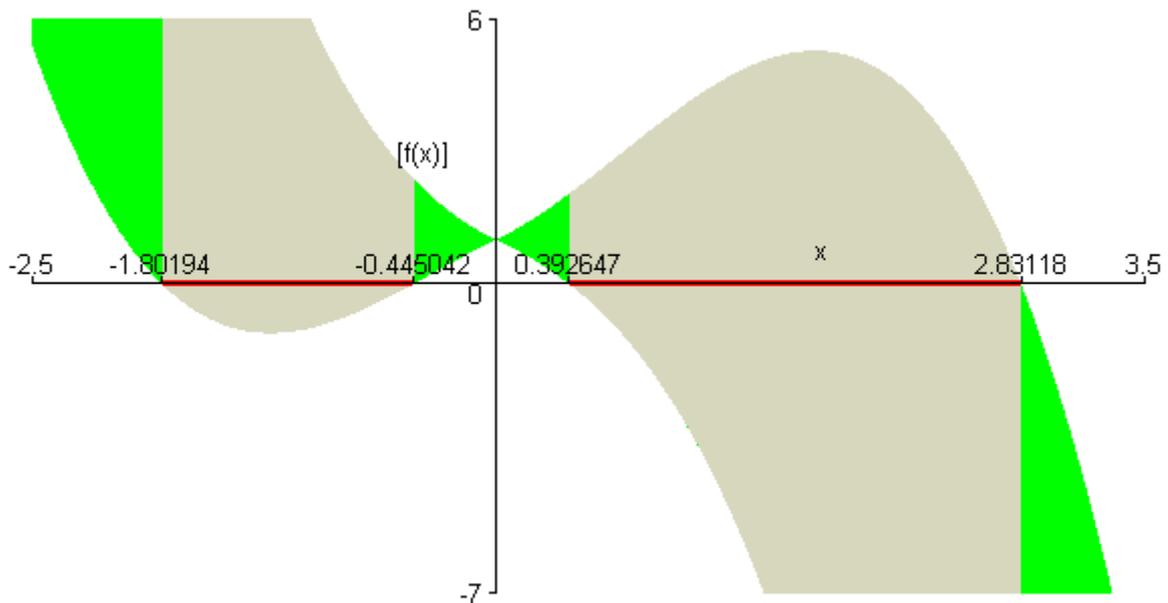


FIGURA 7.62 – Representação gráfica da equação $[-1;-1] * x^3 + [-1;2] * x^2 + [-2;2] * x + [1;1] = [0;0]$.
A região em destaque é a associada à envoltória intervalar das soluções reais,
 $x \in [-1.801937736; -0.4450418680] \cup [0.3926467817; 2.831177208]$.

No entanto, a execução da implementação em Maple V resulta apenas na envoltória

$$x \in [0.3926467817; 2.831177208],$$

obviamente incompleta.

Uma análise mais acurada do procedimento revelou que o Maple V é incapaz de calcular corretamente as raízes da equação real

$$-x^3 - x^2 + 2 * x + 1 = 0,$$

responsável pela envoltória inferior da faixa na região de valores negativos da variável x . Com efeito, o algoritmo **algébrico** do Maple V retorna como solução para esta equação real a terna de valores

$$\frac{1}{6}(28 + 84I\sqrt{3})^{\left(\frac{1}{3}\right)} + \frac{14}{3} \frac{1}{(28 + 84I\sqrt{3})^{\left(\frac{1}{3}\right)}} - \frac{1}{3},$$

$$-\frac{1}{12}(28 + 84I\sqrt{3})^{\left(\frac{1}{3}\right)} - \frac{7}{3} \frac{1}{(28 + 84I\sqrt{3})^{\left(\frac{1}{3}\right)}} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}I\sqrt{3} \left(\frac{1}{6}(28 + 84I\sqrt{3})^{\left(\frac{1}{3}\right)} - \frac{14}{3} \frac{1}{(28 + 84I\sqrt{3})^{\left(\frac{1}{3}\right)}} \right),$$

$$-\frac{1}{12}(28 + 84I\sqrt{3})^{\left(\frac{1}{3}\right)} - \frac{7}{3} \frac{1}{(28 + 84I\sqrt{3})^{\left(\frac{1}{3}\right)}} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}I\sqrt{3} \left(\frac{1}{6}(28 + 84I\sqrt{3})^{\left(\frac{1}{3}\right)} - \frac{14}{3} \frac{1}{(28 + 84I\sqrt{3})^{\left(\frac{1}{3}\right)}} \right)$$

que o Maple V é incapaz de simplificar algebricamente. Se considerada a possibilidade de simplificação em aritmética de ponto flutuante, os resultados deveriam ser, aproximadamente, -1.801937736 e -0.4450418680 , e 1.246979604 , conforme pode ser visualizado através da Figura 7.63.

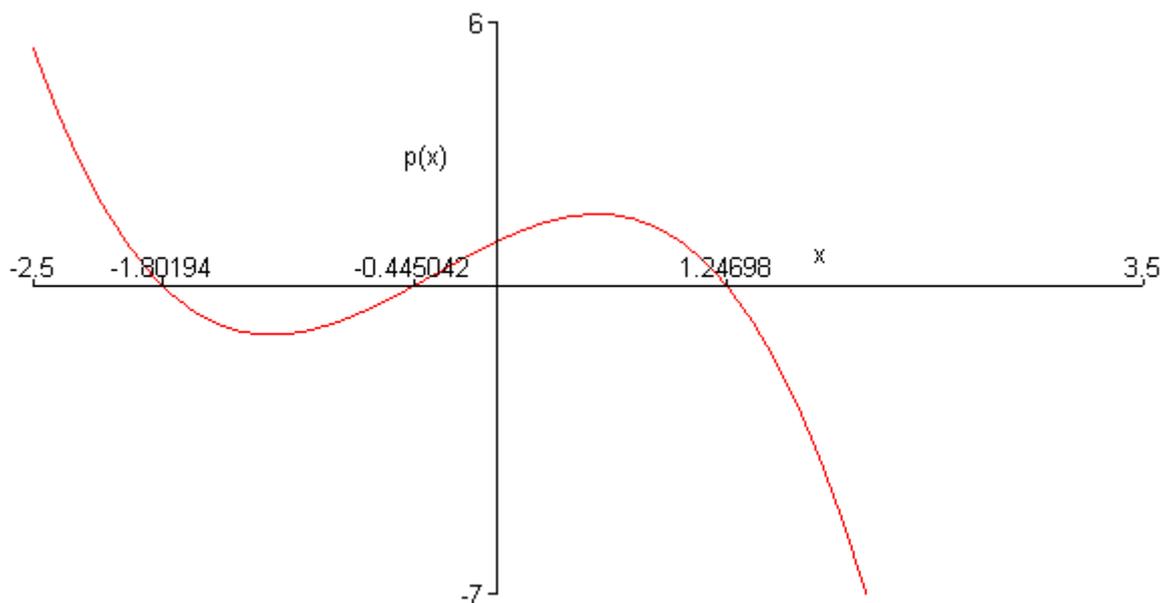


FIGURA 7.63 – Representação gráfica da função definida por $p(x) = -x^3 - x^2 + 2x + 1$.

No entanto, o algoritmo de simplificação do Maple V retorna como resultado a **terna** de valores complexos

$$-1.801937736 + 3 \cdot 10^{-10} * I, -0.4450418680 - 5 \cdot 10^{-10} * I \text{ e } 1.246979604 + 1 \cdot 10^{-10} * I,$$

onde $I = \sqrt{-1}$. Neste caso, o problema é claramente identificado, pois:

- os valores formam uma **terna** de supostas raízes complexas para um polinômio cúbico e de coeficientes inteiros;
- as raízes não são conjugadas; e

- a execução do algoritmo de simplificação com maior precisão reduz proporcionalmente a magnitude da parte imaginária. Por exemplo, se executado com 100 dígitos de precisão a parte imaginária reduz-se a $10^{-99} * I$.

Como consequência, o algoritmo descarta as soluções erroneamente calculadas como complexas e deixa de encontrar parte da envoltória.

Cabe observar que:

- se alimentado com os valores corretos das soluções das equações reais, o algoritmo proposto encontra corretamente a envoltória intervalar para a equação proposta;
- o procedimento de simplificação é necessário do ponto de vista de implementação para a correta ordenação das soluções reais encontradas. A opção pela redução a aritmética de ponto flutuante é devida às restrições do Maple V Release 5.00. Como paliativo para este problema a versão implementada permite a visualização das soluções encontradas e descartadas, detalhadamente.

7.9 Comentários Finais

O capítulo apresentou diversos resultados fundamentados na estrutura proporcionada pela semântica de número-intervalo, agregando-se a restrição do domínio das variáveis para o conjunto Real. A argumentação e os exemplos apresentados com base nestes resultados permitiu observar que o significado de “solução” no domínio intervalar depende fundamentalmente da semântica adotada para o conceito de intervalo e do tipo de variável considerado. A discussão apresentada demonstra que uma equação de variável real e que envolva componentes intervalares não possui propriamente uma “solução intervalar”, mas sim uma “envoltória intervalar para as possíveis soluções reais”. Mais que uma simples troca de nomes, essa observação é relevante do ponto de vista semântico que norteia este trabalho, uma vez que mantém a coerência estrutural entre a natureza da variável, das operações e das soluções encontradas.

Com base nesses fundamentos e nos resultados do Capítulo 4 foi apresentado um algoritmo capaz de determinar as envoltórias de equações polinomiais intervalares de variável real. A complexidade do algoritmo foi calculada e exemplos foram apresentados, comentados e comparados com resultados da literatura, visando verificar sua validade. Juntamente com esse algoritmo foram apresentados resultados que permitem identificar características qualitativas das envoltórias desse tipo específico de equação com base apenas nas características de seus coeficientes.

O próximo capítulo encerra este trabalho, apresentando um sumário dos resultados obtidos e indicando possibilidades de desenvolvimentos futuros.

8 Conclusão

Este capítulo finaliza o relato do trabalho desenvolvido, apresentando, na primeira seção, um sumário das principais contribuições trazidas. Na segunda e última seção indica tópicos que poderiam ser abordados, em longo prazo, como continuação deste trabalho.

8.1 Resultados Obtidos

O trabalho apresentou uma discussão sobre pressupostos e semânticas associadas ao conceito de intervalo, bem como sua influência na definição de operações aritméticas e tipos de soluções para equações ordinárias. Em particular, foram enfatizadas as semânticas de envoltória de reais e de número-intervalo. A discussão apresentada mostrou-se contributiva, no sentido de esclarecer questões de cunho teórico sobre a natureza do tipo de dado intervalar, além de apresentar procedimentos práticos para a obtenção de soluções efetivas de tipos particulares de equações intervalares.

A quantidade escassa de material referente à discussão da **natureza** do tipo de dado intervalar, considerada fundamental para a obtenção de todos os demais resultados apresentados neste trabalho, implicou em um desafio não apenas do ponto de vista do levantamento bibliográfico, mas principalmente de fundamentação lógica. Como resultado final, espera-se ter proporcionado um enfoque analítico mais estruturado sobre este tipo de dado, fundamentado em propriedades algébricas e orientado segundo a natureza da informação desejada sobre o problema modelado.

De forma mais sistemática, as contribuições trazidas por este trabalho podem ser apresentadas conforme a relação que se segue.

8.1.1 Distinção entre Semânticas Associadas ao Conceito de Intervalo de Números Reais

O conceito de intervalo, isto é, o ente matemático que representa um conjunto de números reais limitado inferiormente e superiormente, pode ter diversas interpretações, dependendo do tipo de aplicação a que se destina. Particularmente,

- um número-intervalo associa ao conceito de intervalo a idéia de indivisibilidade do ponto de vista da informação por ele trazida, ou seja, identifica o conjunto de valores como um único ente matemático;
- uma envoltória intervalar de reais associa ao conceito de intervalo a idéia de um número real desconhecido graças a imprecisões e que, por esse motivo, necessita de limitantes

reais para a identificação do domínio de seu valor exato. Ainda assim, a semântica associa o intervalo a um único valor real de interesse.

A questão da distinção entre essas semânticas é fundamental, pois interfere diretamente na forma de definição das operações entre os dados, conforme discutido nos capítulos 3 a 5, e no tipo de solução obtida, conforme apresentado nos capítulos 6 e 7. Essa distinção mostrou-se ser fundamental no que se refere à modelagem de problemas envolvendo intervalos de números reais, visto que uma mesma equação pode ou não ter solução, conforme a semântica adotada.

8.1.2 Mapeamento de I \mathfrak{R} Segundo Características Numéricas

O mapeamento apresentado no Capítulo 4 mostrou-se fundamental para a compreensão das propriedades geométricas – principalmente das simetrias – que culminaram na elaboração dos teoremas apresentados nos capítulos 4 e 5. A separação em 8 regiões, ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{ll} [x] \in O & , \underline{x} = \bar{x} = 0 \\ [x] \in I & , 0 < \underline{x} \leq \bar{x} \\ [x] \in BI & , 0 = \underline{x} < \bar{x} \\ [x] \in II & , (\underline{x} < 0 < \bar{x}) \wedge (|\underline{x}| < \bar{x}) \\ [x] \in BII & , (\underline{x} < 0 < \bar{x}) \wedge (|\underline{x}| = \bar{x}) \\ [x] \in III & , (\underline{x} < 0 < \bar{x}) \wedge (|\underline{x}| > \bar{x}) \\ [x] \in BIII & , \underline{x} < \bar{x} = 0 \\ [x] \in IV & , \underline{x} \leq \bar{x} < 0 \end{array} \right.$$

permitiu identificar classes de simetria não apenas entre os elementos das regiões, mas entre os resultados das operações de multiplicação e potência de intervalos.

Da mesma forma que no trabalho de Franciosi [FRA 99] a compreensão geométrica das operações e relações entre intervalos constitui um dos pilares do desenvolvimento das contribuições ora apresentadas. Em particular, em relação ao mapeamento proposto por Franciosi, a separação das fronteiras em regiões distintas mostrou-se não apenas interessante do ponto de vista computacional numérico (pela introdução de certeza sobre a presença de extremos nulos nos intervalos componentes), mas fundamental para a identificação de resultados específicos como o Teorema 7.5.

8.1.3 Identificação das Expressões Algébricas que Definem a Multiplicação Intervalar tanto na Representação pelos Extremos como por Ponto Médio e Diâmetro

O mapeamento utilizado permitiu a elaboração do Teorema 4.2 através do qual as expressões algébricas que representam o intervalo resultante da multiplicação de números-intervalo foram univocamente determinadas. Diversas fontes de simetria foram identificadas, sugerindo uma estrutura bastante estável, e resultados determinando o ponto médio e o diâmetro do intervalo resultante puderam ser derivados.

8.1.4 Identificação das Expressões Algébricas que Definem as Potências Inteiras Positivas de Intervalos tanto na Representação pelos Extremos como por Ponto Médio e Diâmetro

Com base no mapeamento utilizado e no Teorema 4.2 foi possível demonstrar os teoremas e corolários apresentados no Capítulo 5, através dos quais foram determinadas as expressões que definem as potências inteiras positivas tanto no caso de números-intervalo e como de intervalos como envoltórias de reais. Em particular, um resultado conectando os resultados obtidos através das diferentes semânticas foi apresentado. Também foram identificados aspectos de simetria a partir dessa operação.

8.1.5 Distinção entre Tipos de Solução para Equações Intervalares

O processo de geração de equações intervalares para a modelagem de sistemas sujeitos a incertezas é essencialmente idêntico para qualquer das semânticas. No entanto, conforme evidenciado nos capítulos 5 a 7, uma equação intervalar pode apresentar diferentes tipos de solução, conforme a semântica associada ao conceito de intervalo e o tipo de dado associado às variáveis. Em particular:

- uma solução própria intervalar é aquela considerada sob o ponto de vista estrito da relação de igualdade usual, sendo mais adequada à semântica de números-intervalo, visto que permite operar com as unidades de imprecisão dos modelos;
- uma envoltória intervalar para as soluções reais de uma equação que contém componentes intervalares é muito mais um repositório de soluções reais, cujo significado difere dos pressupostos da semântica de número-intervalo, visto que os valores inclusos nessa representação “podem” ser soluções sob “certa combinação” de valores.

A diferença entre esses tipos de solução torna-se mais evidente se abordada do ponto de vista gráfico, visto que:

- uma solução própria representa a intersecção simultânea das envoltórias superior e inferior dos membros esquerdo e direito da equação sob análise, o que pode ser representado graficamente através da intersecção de volumes em três dimensões;
- já uma envoltória intervalar de soluções reais pode ser melhor visualizada através do gráfico bidimensional de um feixe de funções reais, que nada mais é do que a representação do volume tridimensional restrita ao plano $\pi: y = x, \forall x, y \in \mathfrak{R}$. Assim, a envoltória intervalar é definida para aqueles valores da variável cuja avaliação permite algum tipo de intersecção entre as áreas que representam o membro esquerdo e o membro direito da equação.

Em particular, a discussão apresentada no Capítulo 7 indica que a envoltória intervalar de soluções reais não é a mera projeção da solução própria intervalar sobre o domínio real. Pela mesma razão, essa envoltória não pode ser considerada um número-intervalo, visto que não mantém as mesmas características semânticas deste tipo de dado, devendo ser considerada como uma mera união de conjuntos conexos de reais. Ainda assim, a notação permanece a mesma, o que novamente demonstra a importância da discussão apresentada nos capítulos 3 a 6.

8.1.6 Dedução de Algoritmo para a Determinação de Soluções Próprias de Equações Polinomiais Intervalares

A construção teórica desenvolvida permitiu a obtenção de um procedimento estruturado e constituído de um conjunto finito de regras capaz de especificar uma seqüência finita de operações e cuja execução possibilita a determinação de soluções próprias de equações polinomiais intervalares. Este, denominado Algoritmo 1, é baseado na combinação e análise de casos alternativos, por herança do mapeamento proposto na Definição 4.1. Apesar de computacionalmente custoso, a possibilidade de construir tal tipo de solução constitui-se individualmente como contribuição, visto que permite a verificação de propriedades algébricas e abre a possibilidade de refinamentos posteriores. Adicionalmente, a questão da grande complexidade gerada foi estudada, sendo identificada sua associação com questões estruturais da determinação das expressões analíticas das multiplicações de números-intervalo.

8.1.7 Dedução de Algoritmo para a Determinação de Soluções Próprias de Sistemas de Equações Lineares Intervalares

A identificação da presença de soluções próprias de equações intervalares abriu a possibilidade de desenvolvimento do Algoritmo 2, capaz de determinar soluções de mesma natureza para sistemas de equações lineares. Esse algoritmo foi apresentado no Capítulo 6.

8.1.8 Dedução de Algoritmo para a Determinação da Envoltória Intervalar das Soluções Reais de Equações Polinomiais com Coeficientes Intervalares e Variável Real

Com base na estrutura de números-intervalo e na restrição da variável para o caso específico de números reais pode-se deduzir o Algoritmo 3, apresentado no Capítulo 7 e capaz de identificar a envoltória intervalar de equações polinomiais de coeficientes intervalares. O algoritmo mostrou-se bastante simples e de complexidade reduzida, se comparado aos algoritmos para a determinação de soluções próprias, anteriormente comentados. O Algoritmo 3 foi validado através de teoremas e da comparação com resultados da literatura e mostrou-se eficaz na determinação de envoltórias desconexas.

8.1.9 Dedução de Resultados Envolvendo a Determinação das Limitantes de Envoltórias Intervalares de Soluções Reais

No Capítulo 7 foram apresentados teoremas que auxiliam na determinação e validação de limitantes para envoltórias intervalares. Esses teoremas serviram também de fundamento para o desenvolvimento do algoritmo de determinação de envoltórias intervalares de soluções reais.

8.1.10 Identificação da Não Validade da Propriedade de Enumeração de Soluções para Equações Polinomiais Intervalares

Os exemplos apresentados nos capítulos 6 e 7 permitiram evidenciar a não validade da propriedade de enumeração de soluções no caso de equações polinomiais envolvendo coeficientes ou variáveis intervalares não degeneradas. Com efeito:

- no caso da solução de equações polinomiais intervalares mostrou-se possível que equações polinomiais apresentem um número diverso de soluções próprias, não necessariamente vinculado a seu grau. Por exemplo, foram identificadas situações em que:

- ♦ uma equação linear apresenta infinitas soluções próprias;
- ♦ uma equação quadrática apresenta nenhuma, uma, duas ou infinitas soluções próprias;
- no caso da solução de sistemas de equações lineares intervalares mostrou-se possível que um sistema dessa natureza apresente um número infinito de soluções, sem, no entanto, esgotar \mathbb{R} ;
- no caso da consideração de envoltórias intervalares de soluções reais de equações polinomiais, foi possível observar que o número de envoltórias conexas geradas nem sempre é igual à potência dominante na equação, apesar de ser limitado por este valor.

Essas foram as contribuições consideradas mais relevantes e trazidas por este trabalho. A seguir serão apresentadas possibilidades de desdobramentos futuros dos resultados ora apresentados.

8.2 Prosseguimento do Trabalho

A discussão apresentada neste trabalho não é exaurida, mas apenas iniciada. De fato, sua continuação é necessária uma vez que remete ao cerne da estrutura da Teoria de Intervalos, sendo imprescindível para o correto inter-relacionamento dos resultados dessa teoria. Em particular, durante o desenvolvimento desse trabalho surgiram diversas idéias de aprofundamento dessa discussão, as quais foram deixadas como sugestões de investigação científica para após a conclusão dessa tese.

8.2.1 Revisão Crítica da Literatura de Intervalos Segundo as Semânticas Associadas a Intervalos

A natureza intervalar é tipicamente dual e a forma de tratamento desses entes depende da semântica adotada. O esclarecimento da influência da semântica adotada sobre os diversos resultados da Teoria de Intervalos apresenta um desafio interessante e enriquecedor, visto que permitirá a identificação de relações lógicas apropriadas e a eliminação de eventuais ambigüidades.

8.2.2 Redefinição das Operações entre Envoltórias de Números Reais

Apesar de incluso na sugestão 8.2.1, este tópico merece destaque, à luz da discussão apresentada no Capítulo 4. A utilização de uma multiplicação de envoltórias intervalares como a apresentada na Definição 3.4 apresenta uma série de implicações de complexidade do ponto de vista computacional, mas também abre inúmeras possibilidades de desenvolvimento de resultados consistentes com essa semântica.

8.2.3 Estudo de Formas Simplificadas para a Representação Gráfica de Soluções Próprias Intervalares

A representação gráfica de soluções próprias intervalares mostrou-se, por um lado, um desafio, e por outro, uma necessidade. Através da representação tridimensional utilizada neste trabalho foi possível a compreensão de diversas características importantes deste tipo de solução. No entanto, essa forma de representação mostrou-se ineficaz quando utilizada estaticamente (em meio impresso, por exemplo), gerando a necessidade de inclusão do devido suporte computacional. No entanto, formas simplificadas de representação de soluções

próprias poderiam ser obtidas. O estudo de formas alternativas de representação destas soluções seria, portanto, extremamente enriquecedor na forma de uma dissertação de mestrado ou de um trabalho de conclusão.

8.2.4 Refinamento dos Algoritmos Apresentados

Os algoritmos apresentados nos capítulos 6 e 7 não têm como primeiro objetivo a eficiência computacional, mas sim a facilitação de sua compreensão. Por este motivo, o desenvolvimento de versões otimizadas pode ser um exercício interessante para um trabalho de conclusão de curso de graduação.

8.2.5 Dedução de Algoritmos para a Resolução de Sistemas de Equações Polinomiais Intervalares

O desenvolvimento de um algoritmo capaz de determinar as soluções próprias de sistemas de equações polinomiais intervalares e que usasse como base os algoritmos apresentados no Capítulo 6 poderia acrescentar certa flexibilidade do ponto de vista analítico e aplicado. Nesse sentido, é considerado um desenvolvimento digno de menção.

8.2.6 Dedução de Algoritmos Genericistas Para a Determinação de Soluções Próprias Intervalares e de Envoltórias Intervalares de Soluções Reais

A extensão de funções em séries de potências pode ser uma abordagem interessante do ponto de vista da determinação de soluções para equações intervalares. No entanto, mais interessante seria o estudo das características das operações algébricas e de funções transcendentais do ponto de vista de números-intervalo, de modo a identificar algoritmos genericistas para a solução de equações envolvendo funções dessa natureza.

8.2.7 Publicação de uma Biblioteca de Aritmética Intervalar Fundamentada nos Algoritmos Apresentados

Os algoritmos apresentados ao longo do trabalho foram implementados em uma biblioteca padrão Maple V Release 5.00 com o propósito puro de teste. Conforme referido anteriormente neste texto, optou-se pela não utilização de referências ao tipo intervalar nativo INTERVAL deste software¹⁴. Isto porque o Maple utiliza operações intervalares que seguem a semântica de envoltória intervalar de reais e – pelas óbvias dificuldades já discutidas – não leva em consideração a origem dos intervalos na expressão. Tal configuração implica que, por exemplo, para $[x] = [-1;2]$, o produto $[-1;2]*[x]$ resultará $[0;4]$ e não $[-2;4]$. Assim, os resultados fornecidos pelo Maple são incoerentes com os requeridos pela semântica adotada, conforme apresentado no Capítulo 3.

Neste trabalho, a biblioteca desenvolvida para os testes não possui o propósito específico de distribuição. Para destinar-se a esse fim, necessitará de esforços no sentido da verificação de tolerância a falhas, da otimização do código implementado e da confecção de páginas de ajuda. Ainda, a inclusão de camadas de suporte capazes de garantir o arredondamento dirigido das soluções e questões sobre a portabilidade da biblioteca para outros ambientes e plataformas também são possibilidades vislumbradas para a continuação de seu desenvolvimento.

¹⁴ Informações podem ser encontradas, por exemplo, no próprio sistema de auxílio do Maple, buscando-se pelo comando `evalr`, que destina-se a avaliar expressões utilizando aritmética intervalar.

8.2.8 Estudo das Características dos Números-Intervalo Complexos

O desenvolvimento de teoremas similares aos ora apresentados, e associados à aritmética intervalar complexa são fundamentais para o desenvolvimento de algoritmos igualmente eficazes para a determinação e a compreensão da natureza de soluções intervalares complexas.

8.2.9 Análise de Problemas de Estabilidade de Parâmetros

Conforme indicado no Capítulo 6, a semântica de números-intervalo permite a análise de problemas do ponto de vista da estabilidade de parâmetros. Os algoritmos apresentados permitem a solução desses problemas para o caso de modelos polinomiais de uma variável e lineares de várias variáveis. O desenvolvimento de métodos que façam uso desses resultados pode ser extremamente contributivo em aplicações práticas.

Anexos

A seguir serão apresentados os anexos descritos no texto deste volume. O Anexo 1 apresenta as provas de lemas, proposições e teoremas que foram omitidos do fluxo do texto para facilitar a compreensão sistêmica dos resultados. Algumas das provas apresentadas necessitarão das informações encontradas nos anexos 2 e 3, que trazem tabelas auxiliares para o cálculo da complexidade dos algoritmos 1 e 2. O Anexo 4 fornece informações para a instalação e a utilização da ferramenta que permite a visualização das equações intervalares apresentadas nos exemplos dos capítulos 6 e 7. Essa ferramenta pode ser encontrada em www.mat.pucrs.br/~vaccaro/sei/. Finalmente, o Anexo 5 apresenta uma breve resenha das principais fontes de pesquisa utilizadas na realização deste trabalho.

Informações também podem ser obtidas através de contato com o autor, pelo endereço eletrônico vaccaro@mat.pucrs.br

Anexo 1 Provas de Proposições e de Teoremas

No presente anexo são apresentadas as provas de alguns lemas, proposições e teoremas enunciados no texto deste volume. Conforme descrito anteriormente, resultados cuja prova fosse suficientemente curta – seis linhas ou menos – foram mantidos no texto. Os demais encontram-se a seguir.

1.1 Prova da Proposição 3.7

Inicialmente verifica-se que:

R é relação reflexiva, pois dado $([x],[y]) \subseteq \mathfrak{I}\mathfrak{R} \times \mathfrak{I}\mathfrak{R}$, então

$$([x],[y])R([x],[y]) \Leftrightarrow [x] + [y] = [x] + [y].$$

R é relação transitiva, pois dados $([x],[y]) \subseteq \mathfrak{I}\mathfrak{R} \times \mathfrak{I}\mathfrak{R}$, $([z],[w]) \subseteq \mathfrak{I}\mathfrak{R} \times \mathfrak{I}\mathfrak{R}$ e $([v],[t]) \subseteq \mathfrak{I}\mathfrak{R} \times \mathfrak{I}\mathfrak{R}$ tais que $([x],[y])R([z],[w])$ e $([z],[w])R([v],[t])$, tem-se:

$$([x],[y])R([z],[w]) \Leftrightarrow [x] + [y] = [z] + [w] \text{ e } ([z],[w])R([v],[t]) \Leftrightarrow [z] + [w] = [v] + [t].$$

Então

$$\begin{aligned} ([x],[y])R([z],[w]) \wedge ([z],[w])R([v],[t]) &\Leftrightarrow [x] + [y] = [z] + [w] \wedge [z] + [w] = [v] + [t] \Rightarrow \\ &\Rightarrow [x] + [y] = [v] + [t] \Rightarrow ([x],[y])R([v],[t]). \end{aligned}$$

R é relação simétrica, pois dados $([x],[y]) \subseteq \mathfrak{I}\mathfrak{R} \times \mathfrak{I}\mathfrak{R}$ e $([z],[w]) \subseteq \mathfrak{I}\mathfrak{R} \times \mathfrak{I}\mathfrak{R}$ tais que $([x],[y])R([z],[w])$, tem-se:

$$([x],[y])R([z],[w]) \Leftrightarrow [x] + [y] = [z] + [w] \Leftrightarrow [z] + [w] = [x] + [y] \Leftrightarrow ([z],[w])R([x],[y]).$$

Logo R é relação de equivalência. ■

1.2 Prova da Proposição 3.8

Sejam $k \in \mathfrak{R}$ e $([x],[y]) \in \mathfrak{I}\mathfrak{R} \times \mathfrak{I}\mathfrak{R}$. Então

$$\begin{aligned} ([x],[y]) \in \bar{k} &\Leftrightarrow [x] + [y] = k \Leftrightarrow w([x] + [y]) = 0 \Leftrightarrow w([x]) + w([y]) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow w([x]) = 0 \wedge w([y]) = 0, \end{aligned}$$

pois $w(\bullet) \geq 0$. Isto significa que um número real somente poderá ser gerado a partir da adição de dois outros números reais. Em particular, para $k = 0$,

$$([x],[y]) \in \bar{0} \Leftrightarrow w([x]) = 0 \wedge w([y]) = 0. \blacksquare$$

1.3 Prova do Teorema 4.1

A prova aqui apresentada é baseada na exaustão de casos. Através do uso da propriedade de comutatividade da multiplicação os 64 casos originais podem ser reduzidos para 36. Além disso, 8 destes casos restantes são associados à multiplicação com [0] e podem ser resumidos em um único caso. Assim, restam 29 casos, que serão demonstrados a seguir:

Caso 1: Sejam $[x] \in O$ e $[y] \in \mathfrak{I}\mathfrak{R}$.

Então $[x] = [x; \bar{x}] = [0; 0]$ e

$$[x]^*[y] = [\min\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* \bar{y}, \bar{x}^* \bar{y}\}; \max\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* \bar{y}, \bar{x}^* \bar{y}\}] = \\ = [\min\{0^* \underline{y}, 0^* \underline{y}, 0^* \bar{y}, 0^* \bar{y}\}; \max\{0^* \underline{y}, 0^* \underline{y}, 0^* \bar{y}, 0^* \bar{y}\}] = [0; 0].$$

Logo, o intervalo resultante será necessariamente $[0; 0]$ e $[x]^*[y] \in O$.

Caso 2: Sejam $[x] \in I$ e $[y] \in I$.

Neste caso, como $0 < \underline{x} \leq \bar{x}$ e $0 < \underline{y} \leq \bar{y}$, o intervalo resultante terá todos os componentes positivos, garantindo que $[x]^*[y] \in I$. Além disso, graças às informações com respeito ao módulo dos extremos dos intervalos, vale que

$$[x]^*[y] = [\min\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* \bar{y}, \bar{x}^* \bar{y}\}; \max\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* \bar{y}, \bar{x}^* \bar{y}\}] = [\underline{x}^* \underline{y}; \bar{x}^* \bar{y}].$$

Caso 3: Sejam $[x] \in I$ e $[y] \in BI$.

Neste caso, $0 < \underline{x} \leq \bar{x}$ e $0 = \underline{y} \leq \bar{y}$. Então

$$[x]^*[y] = [\min\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* \bar{y}, \bar{x}^* \bar{y}\}; \max\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* \bar{y}, \bar{x}^* \bar{y}\}] = \\ = [\min\{\underline{x}^* 0, \bar{x}^* 0, \underline{x}^* \bar{y}, \bar{x}^* \bar{y}\}; \max\{\underline{x}^* 0, \bar{x}^* 0, \underline{x}^* \bar{y}, \bar{x}^* \bar{y}\}] = [0; \bar{x}^* \bar{y}],$$

significando que $[x]^*[y] \in BI$.

Caso 4: Sejam $[x] \in I$ e $[y] \in II$.

Neste caso, $0 < \underline{x} \leq \bar{x}$ e $\underline{y} < 0 < \bar{y}$, com $|\underline{y}| < \bar{y}$. Então

$$[x]^*[y] = [\min\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* \bar{y}, \bar{x}^* \bar{y}\}; \max\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* \bar{y}, \bar{x}^* \bar{y}\}] = [\bar{x}^* \underline{y}; \bar{x}^* \bar{y}].$$

Como $\bar{x}^* \underline{y} < 0$ e $|\bar{x}^* \underline{y}| < \bar{x}^* \bar{y}$, então $[x]^*[y] \in II$.

Caso 5: Sejam $[x] \in I$ e $[y] \in BII$.

Neste caso, $0 < \underline{x} \leq \bar{x}$ e $\underline{y} < 0 < \bar{y}$, com $|\underline{y}| = \bar{y}$. Então

$$[x]^*[y] = [\min\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* \bar{y}, \bar{x}^* \bar{y}\}; \max\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* \bar{y}, \bar{x}^* \bar{y}\}] = [\bar{x}^* \underline{y}; \bar{x}^* \bar{y}].$$

Como $\bar{x}^* \underline{y} < 0$ e $|\bar{x}^* \underline{y}| = \bar{x}^* \bar{y}$, então $[x]^*[y] \in BII$.

Caso 6: Sejam $[x] \in I$ e $[y] \in III$.

Neste caso, $0 < \underline{x} \leq \bar{x}$ e $\underline{y} < 0 < \bar{y}$, com $|\underline{y}| > \bar{y}$. Então

$$[x]^*[y] = [\min\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* \bar{y}, \bar{x}^* \bar{y}\}; \max\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* \bar{y}, \bar{x}^* \bar{y}\}] = [\bar{x}^* \underline{y}; \bar{x}^* \bar{y}].$$

Como $\bar{x}^* \underline{y} < 0$ e $|\bar{x}^* \underline{y}| > \bar{x}^* \bar{y}$, então $[x]^*[y] \in III$.

Caso 7: Sejam $[x] \in I$ e $[y] \in BIII$.

Neste caso, $0 < \underline{x} \leq \bar{x}$ e $\underline{y} < \bar{y} = 0$. Então

$$[x]^*[y] = [\min\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* \bar{y}, \bar{x}^* \bar{y}\}; \max\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* \bar{y}, \bar{x}^* \bar{y}\}] = \\ = [\min\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* 0, \bar{x}^* 0\}; \max\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* 0, \bar{x}^* 0\}] = [\bar{x}^* \underline{y}; 0].$$

Como $\bar{x}^* \underline{y} < 0$, então $[x]^*[y] \in BIII$.

Caso 8: Sejam $[x] \in I$ e $[y] \in IV$.

Neste caso, $0 < \underline{x} \leq \bar{x}$ e $\underline{y} \leq \bar{y} < 0$. Então

$$[x]^*[y] = [\min\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* \bar{y}, \bar{x}^* \bar{y}\}; \max\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* \bar{y}, \bar{x}^* \bar{y}\}] = [\bar{x}^* \underline{y}; \underline{x}^* \bar{y}].$$

Como $\bar{x} * \underline{y} \leq \underline{x} * \bar{y} < 0$, então $[x] * [y] \in \text{IV}$.

Caso 9: Sejam $[x] \in \text{BI}$ e $[y] \in \text{BI}$.

Neste caso, $0 = \underline{x} < \bar{x}$ e $0 = \underline{y} < \bar{y}$. Então

$$\begin{aligned} [x] * [y] &= [\min\{\underline{x} * \underline{y}, \bar{x} * \underline{y}, \underline{x} * \bar{y}, \bar{x} * \bar{y}\}; \max\{\underline{x} * \underline{y}, \bar{x} * \underline{y}, \underline{x} * \bar{y}, \bar{x} * \bar{y}\}] = \\ &= [\min\{0 * 0, \bar{x} * 0, 0 * \bar{y}, \bar{x} * \bar{y}\}; \max\{0 * 0, \bar{x} * 0, 0 * \bar{y}, \bar{x} * \bar{y}\}] = [0; \bar{x} * \bar{y}]. \end{aligned}$$

Como $\bar{x} * \bar{y} > 0$, então $[x] * [y] \in \text{BI}$.

Caso 10: Sejam $[x] \in \text{BI}$ e $[y] \in \text{II}$.

Neste caso, $0 = \underline{x} < \bar{x}$ e $\underline{y} < 0 < \bar{y}$, com $|\underline{y}| < \bar{y}$. Então

$$\begin{aligned} [x] * [y] &= [\min\{\underline{x} * \underline{y}, \bar{x} * \underline{y}, \underline{x} * \bar{y}, \bar{x} * \bar{y}\}; \max\{\underline{x} * \underline{y}, \bar{x} * \underline{y}, \underline{x} * \bar{y}, \bar{x} * \bar{y}\}] = \\ &= [\min\{0 * \underline{y}, \bar{x} * \underline{y}, 0 * \bar{y}, \bar{x} * \bar{y}\}; \max\{0 * \underline{y}, \bar{x} * \underline{y}, 0 * \bar{y}, \bar{x} * \bar{y}\}] = [\bar{x} * \underline{y}; \bar{x} * \bar{y}]. \end{aligned}$$

Como $\bar{x} * \underline{y} < 0 < \bar{x} * \bar{y}$ e $|\bar{x} * \underline{y}| < \bar{x} * \bar{y}$, então $[x] * [y] \in \text{II}$.

Caso 11: Sejam $[x] \in \text{BI}$ e $[y] \in \text{BII}$.

Neste caso, $0 = \underline{x} < \bar{x}$ e $\underline{y} < 0 < \bar{y}$, com $|\underline{y}| = \bar{y}$. Então

$$\begin{aligned} [x] * [y] &= [\min\{\underline{x} * \underline{y}, \bar{x} * \underline{y}, \underline{x} * \bar{y}, \bar{x} * \bar{y}\}; \max\{\underline{x} * \underline{y}, \bar{x} * \underline{y}, \underline{x} * \bar{y}, \bar{x} * \bar{y}\}] = \\ &= [\min\{0 * \underline{y}, \bar{x} * \underline{y}, 0 * \bar{y}, \bar{x} * \bar{y}\}; \max\{0 * \underline{y}, \bar{x} * \underline{y}, 0 * \bar{y}, \bar{x} * \bar{y}\}] = [\bar{x} * \underline{y}; \bar{x} * \bar{y}]. \end{aligned}$$

Como $\bar{x} * \underline{y} < 0 < \bar{x} * \bar{y}$ e $|\bar{x} * \underline{y}| = \bar{x} * \bar{y}$, então $[x] * [y] \in \text{BII}$.

Caso 12: Sejam $[x] \in \text{BI}$ e $[y] \in \text{III}$.

Neste caso, $0 = \underline{x} < \bar{x}$ e $\underline{y} < 0 < \bar{y}$, com $|\underline{y}| > \bar{y}$. Então

$$\begin{aligned} [x] * [y] &= [\min\{\underline{x} * \underline{y}, \bar{x} * \underline{y}, \underline{x} * \bar{y}, \bar{x} * \bar{y}\}; \max\{\underline{x} * \underline{y}, \bar{x} * \underline{y}, \underline{x} * \bar{y}, \bar{x} * \bar{y}\}] = \\ &= [\min\{0 * \underline{y}, \bar{x} * \underline{y}, 0 * \bar{y}, \bar{x} * \bar{y}\}; \max\{0 * \underline{y}, \bar{x} * \underline{y}, 0 * \bar{y}, \bar{x} * \bar{y}\}] = [\bar{x} * \underline{y}; \bar{x} * \bar{y}]. \end{aligned}$$

Como $\bar{x} * \underline{y} < 0 < \bar{x} * \bar{y}$ e $|\bar{x} * \underline{y}| > \bar{x} * \bar{y}$, então $[x] * [y] \in \text{III}$.

Caso 13: Sejam $[x] \in \text{BI}$ e $[y] \in \text{BIII}$.

Neste caso, $0 = \underline{x} < \bar{x}$ e $\underline{y} < \bar{y} = 0$. Então

$$\begin{aligned} [x] * [y] &= [\min\{\underline{x} * \underline{y}, \bar{x} * \underline{y}, \underline{x} * \bar{y}, \bar{x} * \bar{y}\}; \max\{\underline{x} * \underline{y}, \bar{x} * \underline{y}, \underline{x} * \bar{y}, \bar{x} * \bar{y}\}] = \\ &= [\min\{0 * \underline{y}, \bar{x} * \underline{y}, 0 * 0, \bar{x} * 0\}; \max\{0 * \underline{y}, \bar{x} * \underline{y}, 0 * 0, \bar{x} * 0\}] = [\bar{x} * \underline{y}; 0]. \end{aligned}$$

Como $\bar{x} * \underline{y} < 0$, então $[x] * [y] \in \text{BIII}$.

Caso 14: Sejam $[x] \in \text{BI}$ e $[y] \in \text{IV}$.

Neste caso, $0 = \underline{x} < \bar{x}$ e $\underline{y} \leq \bar{y} < 0$. Então

$$\begin{aligned} [x] * [y] &= [\min\{\underline{x} * \underline{y}, \bar{x} * \underline{y}, \underline{x} * \bar{y}, \bar{x} * \bar{y}\}; \max\{\underline{x} * \underline{y}, \bar{x} * \underline{y}, \underline{x} * \bar{y}, \bar{x} * \bar{y}\}] = \\ &= [\min\{0 * \underline{y}, \bar{x} * \underline{y}, 0 * \bar{y}, \bar{x} * \bar{y}\}; \max\{0 * \underline{y}, \bar{x} * \underline{y}, 0 * \bar{y}, \bar{x} * \bar{y}\}] = [\bar{x} * \underline{y}; 0]. \end{aligned}$$

Como $\bar{x} * \underline{y} < 0$, então $[x] * [y] \in \text{BIII}$.

Caso 15: Sejam $[x] \in \text{II}$ e $[y] \in \text{II}$.

Neste caso, $\underline{x} < 0 < \bar{x}$, com $|\underline{x}| < \bar{x}$ e $\underline{y} < 0 < \bar{y}$, com $|\underline{y}| < \bar{y}$. Então

$$[x]^*[y] = [\min\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* \bar{y}, \bar{x}^* \bar{y}\}; \max\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* \bar{y}, \bar{x}^* \bar{y}\}] =$$

$$= [\min\{\bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* \bar{y}\}; \bar{x}^* \bar{y}],$$

pois $|\underline{x}| < \bar{x}$ e $|\underline{y}| < \bar{y}$, implicando que $|\underline{x}|^* \bar{y} < \bar{x}^* \bar{y}$ e $\bar{x}^* |\underline{y}| < \bar{x}^* \bar{y}$, $\bar{x}^* \bar{y} > 0$ e $\min\{\bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* \bar{y}\} < 0$. Logo, $[x]^*[y] \in \text{II}$. No entanto, graças à comutatividade da multiplicação esta expressão do mínimo não pode ser explicitamente determinada.

Caso 16: Sejam $[x] \in \text{II}$ e $[y] \in \text{BII}$.

Neste caso, $\underline{x} < 0 < \bar{x}$, com $|\underline{x}| < \bar{x}$ e $\underline{y} < 0 < \bar{y}$, com $|\underline{y}| = \bar{y}$. Então

$$[x]^*[y] = [\min\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* \bar{y}, \bar{x}^* \bar{y}\}; \max\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* \bar{y}, \bar{x}^* \bar{y}\}] = [\bar{x}^* \underline{y}; \bar{x}^* \bar{y}].$$

Como $\bar{x}^* |\underline{y}| = \bar{x}^* \bar{y}$, então $[x]^*[y] \in \text{BII}$.

Caso 17: Sejam $[x] \in \text{II}$ e $[y] \in \text{III}$.

Neste caso, $\underline{x} < 0 < \bar{x}$, com $|\underline{x}| < \bar{x}$ e $\underline{y} < 0 < \bar{y}$, com $|\underline{y}| > \bar{y}$. Então

$$[x]^*[y] = [\min\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* \bar{y}, \bar{x}^* \bar{y}\}; \max\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* \bar{y}, \bar{x}^* \bar{y}\}] =$$

$$= [\bar{x}^* \underline{y}; \max\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \bar{y}\}],$$

pois $|\underline{x}| < \bar{x}$ e $|\underline{y}| > \bar{y}$, implicando que $\bar{x}^* |\underline{y}| > \bar{x}^* \bar{y}$ e $\bar{x}^* |\underline{y}| > \bar{x}^* \bar{y}$, $\bar{x}^* |\underline{y}| < 0$ e $\max\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \bar{y}\} > 0$. Logo, $[x]^*[y] \in \text{III}$. No entanto, graças à comutatividade da multiplicação a expressão do máximo não pode ser explicitamente determinada.

Caso 18: Sejam $[x] \in \text{II}$ e $[y] \in \text{BIII}$.

Neste caso, $\underline{x} < 0 < \bar{x}$, com $|\underline{x}| < \bar{x}$ e $\underline{y} < \bar{y} = 0$. Então

$$[x]^*[y] = [\min\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* \bar{y}, \bar{x}^* \bar{y}\}; \max\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* \bar{y}, \bar{x}^* \bar{y}\}] =$$

$$= [\min\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* 0, \bar{x}^* 0\}; \max\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* 0, \bar{x}^* 0\}] = [\bar{x}^* \underline{y}; \underline{x}^* \underline{y}].$$

Como $\bar{x}^* |\underline{y}| > \bar{x}^* \underline{y}$ e $\bar{x}^* \underline{y} < 0 < \underline{x}^* \underline{y}$ então $[x]^*[y] \in \text{III}$.

Caso 19: Sejam $[x] \in \text{II}$ e $[y] \in \text{IV}$.

Neste caso, $\underline{x} < 0 < \bar{x}$, com $|\underline{x}| < \bar{x}$ e $\underline{y} \leq \bar{y} < 0$. Então

$$[x]^*[y] = [\min\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* \bar{y}, \bar{x}^* \bar{y}\}; \max\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* \bar{y}, \bar{x}^* \bar{y}\}] = [\bar{x}^* \underline{y}; \underline{x}^* \underline{y}].$$

Como $\bar{x}^* |\underline{y}| > \bar{x}^* \underline{y}$ e $\bar{x}^* \underline{y} < 0 < \underline{x}^* \underline{y}$ então $[x]^*[y] \in \text{III}$.

Caso 20: Sejam $[x] \in \text{BII}$ e $[y] \in \text{BII}$.

Neste caso, $\underline{x} < 0 < \bar{x}$, com $|\underline{x}| = \bar{x}$ e $\underline{y} < 0 < \bar{y}$, com $|\underline{y}| = \bar{y}$. Então

$$[x]^*[y] = [\min\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* \bar{y}, \bar{x}^* \bar{y}\}; \max\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* \bar{y}, \bar{x}^* \bar{y}\}] =$$

$$= [\bar{x}^* \underline{y}; \underline{x}^* \underline{y}] = [\bar{x}^* \underline{y}; \bar{x}^* \bar{y}] = [\underline{x}^* \bar{y}; \underline{x}^* \underline{y}] = [\underline{x}^* \bar{y}; \bar{x}^* \bar{y}],$$

pois $\bar{x}^* \underline{y} = \underline{x}^* \bar{y} < 0$ e $\underline{x}^* \underline{y} = \bar{x}^* \bar{y} > 0$, com $\bar{x}^* |\underline{y}| = \bar{x}^* \bar{y}$. Então $[x]^*[y] \in \text{BII}$.

Caso 21: Sejam $[x] \in \text{BII}$ e $[y] \in \text{III}$.

Neste caso, $\underline{x} < 0 < \bar{x}$, com $|\underline{x}| = \bar{x}$ e $\underline{y} < 0 < \bar{y}$, com $|\underline{y}| > \bar{y}$. Então

$$[x]^*[y] = [\min\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* \bar{y}, \bar{x}^* \bar{y}\}; \max\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* \bar{y}, \bar{x}^* \bar{y}\}] = [\bar{x}^* \underline{y}; \underline{x}^* \underline{y}].$$

Como $\bar{x}^* |\underline{y}| = \underline{x}^* \underline{y}$ e $\bar{x}^* \underline{y} < 0 < \underline{x}^* \underline{y}$, então $[x]^*[y] \in \text{BII}$.

Caso 22: Sejam $[x] \in \text{BII}$ e $[y] \in \text{BIII}$.

Neste caso, $\underline{x} < 0 < \bar{x}$, com $|\underline{x}| = \bar{x}$ e $\underline{y} < \bar{y} = 0$. Então

$$[x]^*[y] = [\min\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* \bar{y}, \bar{x}^* \bar{y}\}; \max\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* \bar{y}, \bar{x}^* \bar{y}\}] = \\ = [\min\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* 0, \bar{x}^* 0\}; \max\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* 0, \bar{x}^* 0\}] = [\bar{x}^* \underline{y}; \underline{x}^* \underline{y}].$$

Como $\bar{x}^* |\underline{y}| = \underline{x}^* \underline{y}$ e $\bar{x}^* \underline{y} < 0 < \underline{x}^* \underline{y}$, então $[x]^*[y] \in \text{BII}$.

Caso 23: Sejam $[x] \in \text{BII}$ e $[y] \in \text{IV}$.

Neste caso, $\underline{x} < 0 < \bar{x}$, com $|\underline{x}| = \bar{x}$ e $\underline{y} \leq \bar{y} < 0$. Então

$$[x]^*[y] = [\min\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* \bar{y}, \bar{x}^* \bar{y}\}; \max\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* \bar{y}, \bar{x}^* \bar{y}\}] = [\bar{x}^* \underline{y}; \underline{x}^* \underline{y}].$$

Como $\bar{x}^* |\underline{y}| = \underline{x}^* \underline{y}$ e $\bar{x}^* \underline{y} < 0 < \underline{x}^* \underline{y}$, então $[x]^*[y] \in \text{BII}$.

Caso 24: Sejam $[x] \in \text{III}$ e $[y] \in \text{III}$.

Neste caso, $\underline{x} < 0 < \bar{x}$, com $|\underline{x}| > \bar{x}$ e $\underline{y} < 0 < \bar{y}$, com $|\underline{y}| > \bar{y}$. Então

$$[x]^*[y] = [\min\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* \bar{y}, \bar{x}^* \bar{y}\}; \max\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* \bar{y}, \bar{x}^* \bar{y}\}] = \\ = [\min\{\bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* \bar{y}\}; \underline{x}^* \underline{y}],$$

pois $|\underline{x}| > \bar{x}$ e $|\underline{y}| > \bar{y}$, implicando que $|\underline{x}|^* \bar{y} < \underline{x}^* \underline{y}$ e $\bar{x}^* |\underline{y}| < \underline{x}^* \underline{y}$, $\underline{x}^* \underline{y} > 0$ e $\min\{\bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* \bar{y}\} < 0$. Logo, $[x]^*[y] \in \text{II}$. No entanto, graças à comutatividade da multiplicação esta expressão do mínimo não pode ser explicitamente determinada.

Caso 25: Sejam $[x] \in \text{III}$ e $[y] \in \text{BIII}$.

Neste caso, $\underline{x} < 0 < \bar{x}$, com $|\underline{x}| > \bar{x}$ e $\underline{y} < \bar{y} = 0$. Então

$$[x]^*[y] = [\min\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* \bar{y}, \bar{x}^* \bar{y}\}; \max\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* \bar{y}, \bar{x}^* \bar{y}\}] = \\ = [\min\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* 0, \bar{x}^* 0\}; \max\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* 0, \bar{x}^* 0\}] = [\bar{x}^* \underline{y}; \underline{x}^* \underline{y}].$$

Como $\bar{x}^* |\underline{y}| < \underline{x}^* \underline{y}$ e $\bar{x}^* \underline{y} < 0 < \underline{x}^* \underline{y}$, então $[x]^*[y] \in \text{II}$.

Caso 26: Sejam $[x] \in \text{III}$ e $[y] \in \text{IV}$.

Neste caso, $\underline{x} < 0 < \bar{x}$, com $|\underline{x}| > \bar{x}$ e $\underline{y} \leq \bar{y} < 0$. Então

$$[x]^*[y] = [\min\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* \bar{y}, \bar{x}^* \bar{y}\}; \max\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* \bar{y}, \bar{x}^* \bar{y}\}] = [\bar{x}^* \underline{y}; \underline{x}^* \underline{y}].$$

Como $\bar{x}^* |\underline{y}| < \underline{x}^* \underline{y}$ e $\bar{x}^* \underline{y} < 0 < \underline{x}^* \underline{y}$, então $[x]^*[y] \in \text{II}$.

Caso 27: Sejam $[x] \in \text{BIII}$ e $[y] \in \text{BIII}$.

Neste caso, $\underline{x} < \bar{x} = 0$ e $\underline{y} < \bar{y} = 0$. Então

$$[x]^*[y] = [\min\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* \bar{y}, \bar{x}^* \bar{y}\}; \max\{\underline{x}^* \underline{y}, \bar{x}^* \underline{y}, \underline{x}^* \bar{y}, \bar{x}^* \bar{y}\}] = \\ = [\min\{\underline{x}^* \underline{y}, 0^* \underline{y}, \underline{x}^* 0, 0^* 0\}; \max\{\underline{x}^* \underline{y}, 0^* \underline{y}, \underline{x}^* 0, 0^* 0\}] = [0; \underline{x}^* \underline{y}].$$

Como $\underline{x} * \underline{y} > 0$, então $[x] * [y] \in \text{BI}$.

Caso 28: Sejam $[x] \in \text{BIII}$ e $[y] \in \text{IV}$.

Neste caso, $\underline{x} < \bar{x} = 0$ e $\underline{y} \leq \bar{y} < 0$. Então

$$\begin{aligned} [x] * [y] &= [\min\{\underline{x} * \underline{y}, \bar{x} * \underline{y}, \underline{x} * \bar{y}, \bar{x} * \bar{y}\}; \max\{\underline{x} * \underline{y}, \bar{x} * \underline{y}, \underline{x} * \bar{y}, \bar{x} * \bar{y}\}] = \\ &= [\min\{\underline{x} * \underline{y}, 0 * \underline{y}, \underline{x} * \bar{y}, 0 * \bar{y}\}; \max\{\underline{x} * \underline{y}, 0 * \underline{y}, \underline{x} * \bar{y}, 0 * \bar{y}\}] = [0; \underline{x} * \underline{y}]. \end{aligned}$$

Como $\underline{x} * \underline{y} > 0$, então $[x] * [y] \in \text{BI}$.

Caso 29: Sejam $[x] \in \text{IV}$ e $[y] \in \text{IV}$.

Neste caso, $\underline{x} \leq \bar{x} < 0$ e $\underline{y} \leq \bar{y} < 0$. Então

$$[x] * [y] = [\min\{\underline{x} * \underline{y}, \bar{x} * \underline{y}, \underline{x} * \bar{y}, \bar{x} * \bar{y}\}; \max\{\underline{x} * \underline{y}, \bar{x} * \underline{y}, \underline{x} * \bar{y}, \bar{x} * \bar{y}\}] = [\bar{x} * \bar{y}; \underline{x} * \underline{y}].$$

Como $\underline{x} * \underline{y} \geq \bar{x} * \bar{y} > 0$, então $[x] * [y] \in \text{I}$.

Isto encerra a prova da validade do Teorema 4.1. ■

1.4 Prova do Teorema 4.2

A prova será apresentada indutivamente, conforme a notação do enunciado.

Base de Indução: Se $k = 0$, todos os monômios $[a_i] * [x_i]$ são previamente determinados pelo Teorema 4.1. Assim, quando somados, os intervalos resultantes dessas multiplicações, somente uma expressão analítica será gerada para cada extremo. O número de casos gerados será $1 = 2^0$.

Passo de Indução: Seja $k > 0$ tal que o número de casos necessários para a determinação analítica da expressão $\sum_{i=1}^n [a_i] * [x_i]$ é 2^k . Nessas condições, deseja-se demonstrar que este resultado se mantém para $k+1$:

Ora, conforme descrito na Base de Indução, a inclusão do monômio $[a_{k+1}] * [x_{k+1}]$ com ambos fatores pertencendo às regiões II ou III implica a geração de dois casos. Da hipótese de indução sabe-se que os demais monômios são responsáveis pela geração de 2^k casos a verificar. Então o número de casos necessários para a determinação da expressão analítica $\sum_{i=1}^{n+1} [a_i] * [x_i]$ é dado por $2 * 2^k = 2^{k+1}$. Logo, vale o Passo de Indução.

Logo, é demonstrado válido o Teorema 4.2. ■

1.5 Prova do Teorema 5.1

A prova apresentada é derivada indutivamente do Teorema 4.1, considerando-se intervalos iguais. De modo a facilitar o entendimento, os resultados serão apresentados seguindo as regiões da cobertura de \mathbb{R} :

Caso 1: Seja $[x] \in \text{O}$.

$\forall n \in \mathbf{N}^*, 0^n = 0 \Rightarrow [x]^n = [0^n; 0^n] = [0; 0]$. Logo $[x]^n \in O$.

Caso 2: Seja $[x] \in I$.

Base de Indução: Seja $n = 1$. Então

$$[x]^n = [x]^1 = [\underline{x}; \bar{x}], \text{ e}$$

$$[\underline{x}^n; \bar{x}^n] = [\underline{x}^1; \bar{x}^1] = [\underline{x}; \bar{x}]$$

e $[x] \in I$. Logo, é válida a base de indução.

Passo de Indução: Seja $n \in \mathbf{N}^*$ tal que $[x]^n = [\underline{x}^n; \bar{x}^n]$ e $[x]^n \in I$. Então

$$[x]^{n+1} = [x]^n * [x] = [\underline{x}^n; \bar{x}^n] * [\underline{x}; \bar{x}].$$

Como $[x]^n \in I$ e $[x] \in I$, segue do Teorema 4.1 que $[x]^{n+1} \in I$ e

$$[\underline{x}^n; \bar{x}^n] * [\underline{x}; \bar{x}] = [\underline{x}^n * \underline{x}; \bar{x}^n * \bar{x}] = [\underline{x}^{n+1}; \bar{x}^{n+1}].$$

Logo é válido o passo de indução.

Logo, $\forall n \in \mathbf{N}^*, [x]^n = [\underline{x}^n; \bar{x}^n]$ e $[x]^n \in I$.

Caso 3: Seja $[x] \in BI$.

Base de Indução: Seja $n = 1$. Então

$$[x]^n = [x]^1 = [0; \bar{x}], \text{ e}$$

$$[0; \bar{x}^n] = [0; \bar{x}^1] = [0; \bar{x}]$$

e $[x] \in BI$. Logo, é válida a base de indução.

Passo de Indução: Seja $n \in \mathbf{N}^*$ tal que $[x]^n = [0; \bar{x}^n]$ e $[x]^n \in BI$. Então

$$[x]^{n+1} = [x]^n * [x] = [0; \bar{x}^n] * [0; \bar{x}].$$

Como $[x]^n \in BI$ e $[x] \in BI$, segue do Teorema 4.1 que $[x]^{n+1} \in BI$ e

$$[0; \bar{x}^n] * [0; \bar{x}] = [0; \bar{x}^n * \bar{x}] = [0; \bar{x}^{n+1}].$$

Logo é válido o passo de indução.

Logo, $\forall n \in \mathbf{N}^*, [x]^n = [0; \bar{x}^n]$ e $[x]^n \in BI$.

Caso 4: Seja $[x] \in II$.

Base de Indução: Seja $n = 1$. Então

$$[x]^n = [x]^1 = [\underline{x}; \bar{x}], \text{ e}$$

$$[\underline{x} * \bar{x}^{n-1}; \bar{x}^n] = [\underline{x} * \bar{x}^0; \bar{x}^1] = [\underline{x}; \bar{x}]$$

e $[x] \in II$. Logo, é válida a base de indução.

Passo de Indução: Seja $n \in \mathbf{N}^*$ tal que $[x]^n = [\underline{x} * \bar{x}^{n-1}; \bar{x}^n]$ e $[x]^n \in II$. Então

$$[x]^{n+1} = [x]^n * [x] = [\underline{x} * \bar{x}^{n-1}; \bar{x}^n] * [\underline{x}; \bar{x}].$$

Como $[x]^n \in II$ e $[x] \in II$, segue do Teorema 4.1 que $[x]^{n+1} \in II$ e

$$[\underline{x} * \bar{x}^{n-1}; \bar{x}^n] * [\underline{x}; \bar{x}] = [\min\{\underline{x}^n * \bar{x}, \underline{x} * \bar{x}^n\}; \bar{x}^n * \bar{x}].$$

Mas $|\underline{x}| < \bar{x}$ e então $|\underline{x}|^n * \bar{x} < |\underline{x}| * \bar{x}^n$. Como ambos produtos são negativos,

$$[\min\{\underline{x}^n * \bar{x}, \underline{x} * \bar{x}^n\}; \bar{x}^n * \bar{x}] = [\underline{x} * \bar{x}^n; \bar{x}^{n+1}].$$

Logo é válido o passo de indução.

Logo, $\forall n \in \mathbf{N}^*, [x]^n = [\underline{x} * \bar{x}^{n-1}; \bar{x}^n]$ e $[x]^n \in \text{II}$.

Caso 5: Seja $[x] \in \text{BII}$.

Como $|\underline{x}| = \bar{x}$, denominando $|x| = |\underline{x}| = \bar{x}$ vem:

Base de Indução: Seja $n = 1$. Então

$$[x]^n = [x]^1 = [\underline{x}; \bar{x}], \text{ e}$$

$$|x|^{n-1} * [\underline{x}; \bar{x}] = |x|^0 * [\underline{x}; \bar{x}] = 1 * [\underline{x}; \bar{x}] = [\underline{x}; \bar{x}]$$

e $[x] \in \text{BII}$. Logo, é válida a base de indução.

Passo de Indução: Seja $n \in \mathbf{N}^*$ tal que $[x]^n = |x|^{n-1} * [\underline{x}; \bar{x}]$ e $[x]^n \in \text{BII}$. Então

$$[x]^{n+1} = [x]^n * [x] = |x|^{n-1} * [\underline{x}; \bar{x}] * [\underline{x}; \bar{x}].$$

Como $[x]^n \in \text{BII}$ e $[x] \in \text{BII}$, segue do Teorema 4.1 que $[x]^{n+1} \in \text{BII}$ e como

$$[\underline{x}; \bar{x}] * [\underline{x}; \bar{x}] = |x| * [\underline{x}; \bar{x}], \text{ então}$$

$$|x|^{n-1} * [\underline{x}; \bar{x}] * [\underline{x}; \bar{x}] = |x|^{n-1} * |x| * [\underline{x}; \bar{x}] = |x|^n * [\underline{x}; \bar{x}]. \text{ Logo é válido o passo de indução.}$$

Logo, $\forall n \in \mathbf{N}^*, [x]^n = |x|^n * [\underline{x}; \bar{x}]$ e $[x]^n \in \text{BII}$.

Para os casos restantes, as provas por indução têm de ser separadas em casos distintos para potências pares e potências ímpares.

Caso 6: Seja $[x] \in \text{III}$.

Caso 6(a): Admitindo que n seja par.

Base de Indução: Seja $n = 2$. Então

$$[x]^n = [x]^2 = [x] * [x] = [\underline{x}; \bar{x}] * [\underline{x}; \bar{x}] = [\min\{\underline{x} * \bar{x}, \underline{x} * \bar{x}\}; \underline{x} * \underline{x}] =$$

$$= [\underline{x} * \bar{x}; \underline{x} * \underline{x}] = [\underline{x} * \bar{x}; \underline{x}^2],$$

conforme o resultado do Teorema 4.1. Por outro lado,

$$[\underline{x}^{n-1} * \bar{x}; \underline{x}^n] = [\underline{x}^{2-1} * \bar{x}; \underline{x}^2] = [\underline{x} * \bar{x}; \underline{x}^2].$$

Como $[\underline{x} * \bar{x}; \underline{x}^2] \in \text{II}$, é válida a base de indução.

Passo de Indução: Seja $n \in \mathbf{N}^*$ par e tal que $[x]^n = [\underline{x}^{n-1} * \bar{x}; \underline{x}^n]$ e $[x]^n \in \text{II}$. Então

$$[x]^{n+2} = [x]^n * [x]^2 = [\underline{x}^{n-1} * \bar{x}; \underline{x}^n] * [\underline{x} * \bar{x}; \underline{x}^2].$$

Como $[x]^n \in \text{II}$ e $[x]^2 \in \text{II}$, segue do Teorema 4.1 que $[x]^{n+2} \in \text{II}$ e

$$[\underline{x}^{n-1} * \bar{x}; \underline{x}^n] * [\underline{x} * \bar{x}; \underline{x}^2] = [\min\{\underline{x}^{n-1} * \bar{x} * \underline{x}^2, \underline{x}^n * \underline{x} * \bar{x}\}; \underline{x}^n * \underline{x}^2] =$$

$$= [\min\{\underline{x}^{n+1} * \bar{x}, \underline{x}^{n+1} * \bar{x}\}; \underline{x}^{n+2}] = [\underline{x}^{n+1} * \bar{x}; \underline{x}^{n+2}].$$

Logo é válido o passo de indução.

Logo, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ par, $[x]^n = [\underline{x}^{n-1} * \bar{x}; \underline{x}^n]$ e $[x]^n \in \text{II}$.

Caso 6(b): Admitindo que n seja ímpar.

Base de Indução: Seja $n = 1$. Então

$$[x]^n = [x]^1 = [x] = [\underline{x}; \bar{x}], \text{ e}$$

$$[\underline{x}^n; \underline{x}^{n-1} * \bar{x}] = [\underline{x}^1; \underline{x}^0 * \bar{x}] = [\underline{x}; \bar{x}].$$

Como $[\underline{x}; \bar{x}] \in \text{III}$, é válida a base de indução.

Passo de Indução: Seja $n \in \mathbf{N}^*$ ímpar e tal que $[x]^n = [\underline{x}^n; \underline{x}^{n-1} * \bar{x}]$ e $[x]^n \in \text{III}$. Então

$$[\underline{x}^{n+2}] = [x]^n * [x]^2 = [\underline{x}^n; \underline{x}^{n-1} * \bar{x}] * [\underline{x} * \bar{x}; \underline{x}^2], \text{ conforme provado no caso anterior.}$$

Como $[x]^n \in \text{III}$ e $[x]^2 \in \text{III}$, segue do Teorema 4.1 que $[x]^{n+2} \in \text{III}$ e

$$\begin{aligned} [\underline{x}^n; \underline{x}^{n-1} * \bar{x}] * [\underline{x} * \bar{x}; \underline{x}^2] &= [\underline{x}^n * \underline{x}^2; \max\{\underline{x}^n * \underline{x} * \bar{x}, \underline{x}^{n-1} * \underline{x}^2 * \bar{x}\}] = \\ &= [\underline{x}^{n+2}; \max\{\underline{x}^{n+1} * \bar{x}, \underline{x}^{n+1} * \bar{x}\}] = [\underline{x}^{n+2}; \underline{x}^{n+1} * \bar{x}]. \end{aligned}$$

Logo é válido o passo de indução.

Logo, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ímpar, $[x]^n = [\underline{x}^n; \underline{x}^{n-1} * \bar{x}]$ e $[x]^n \in \text{III}$.

Caso 7: Seja $[x] \in \text{BIII}$.

Caso 7(a): Admitindo que n seja par.

Base de Indução: Seja $n = 2$. Então

$$[x]^n = [x]^2 = [x] * [x] = [\underline{x}; 0] * [\underline{x}; 0] = [0; \underline{x} * \underline{x}] = [0; \underline{x}^2],$$

conforme o resultado do Teorema 4.1. Por outro lado,

$$[0; \underline{x}^n] = [0; \underline{x}^2].$$

Como $[0; \underline{x}^2] \in \text{BI}$, é válida a base de indução.

Passo de Indução: Seja $n \in \mathbf{N}^*$ par e tal que $[x]^n = [0; \underline{x}^n]$ e $[x]^n \in \text{BI}$. Então

$$[x]^{n+2} = [x]^n * [x]^2 = [0; \underline{x}^n] * [0; \underline{x}^2].$$

Como $[x]^n \in \text{BI}$ e $[x]^2 \in \text{BI}$, segue do Teorema 4.1 que $[x]^{n+2} \in \text{BI}$ e

$$[0; \underline{x}^n] * [0; \underline{x}^2] = [0; \underline{x}^n * \underline{x}^2] = [0; \underline{x}^{n+2}].$$

Logo é válido o passo de indução.

Logo, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ par, $[x]^n = [0; \underline{x}^n]$ e $[x]^n \in \text{BI}$.

Caso 7(b): Admitindo que n seja ímpar.

Base de Indução: Seja $n = 1$. Então

$$[x]^n = [x]^1 = [x] = [\underline{x}; 0], \text{ e}$$

$$[\underline{x}^n; 0] = [\underline{x}^1; 0] = [\underline{x}; 0].$$

Como $[\underline{x}; 0] \in \text{BIII}$, é válida a base de indução.

Passo de Indução: Seja $n \in \mathbf{N}^*$ ímpar e tal que $[x]^n = [\underline{x}^n; 0]$ e $[x]^n \in \text{BIII}$. Então

$$[x]^{n+2} = [x]^n * [x]^2 = [\underline{x}^n; 0] * [0; \underline{x}^2], \text{ conforme provado no caso anterior.}$$

Como $[x]^n \in \text{BIII}$ e $[x]^2 \in \text{BI}$, segue do Teorema 4.1 que $[x]^{n+2} \in \text{BIII}$ e

$$[\underline{x}^n; 0] * [0; \underline{x}^2] = [\underline{x}^n * \underline{x}^2; 0] = [\underline{x}^{n+2}; 0].$$

Logo é válido o passo de indução.

Logo, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ímpar, $[x]^n = [\underline{x}^n; 0]$ e $[x]^n \in \text{BIII}$.

Caso 8: Seja $[x] \in \text{IV}$.

Caso 8(a): Admitindo que n seja par.

Base de Indução: Seja $n = 2$. Então

$$[x]^n = [x]^2 = [x] * [x] = [\underline{x}; \bar{x}] * [\underline{x}; \bar{x}] = [\bar{x} * \bar{x}; \underline{x} * \underline{x}] = [\bar{x}^2; \underline{x}^2],$$

conforme o resultado do Teorema 4.1. Por outro lado,

$$[\bar{x}^n; \underline{x}^n] = [\bar{x}^2; \underline{x}^2].$$

Como $[\bar{x}^2; \underline{x}^2] \in I$, é válida a base de indução.

Passo de Indução: Seja $n \in \mathbf{N}^*$ par e tal que $[x]^n = [\bar{x}^n; \underline{x}^n]$ e $[x]^n \in I$. Então

$$[x]^{n+2} = [x]^n * [x]^2 = [\bar{x}^n; \underline{x}^n] * [\bar{x}^2; \underline{x}^2].$$

Como $[x]^n \in I$ e $[x]^2 \in I$, segue do Teorema 4.1 que $[x]^{n+2} \in I$ e

$$[\bar{x}^n; \underline{x}^n] * [\bar{x}^2; \underline{x}^2] = [\bar{x}^n * \bar{x}^2; \underline{x}^n * \underline{x}^2] = [\bar{x}^{n+2}; \underline{x}^{n+2}].$$

Logo é válido o passo de indução.

Logo, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ par, $[x]^n = [\bar{x}^n; \underline{x}^n]$ e $[x]^n \in I$.

Caso 8(b): Admitindo que n seja ímpar.

Base de Indução: Seja $n = 1$. Então

$$[x]^n = [x]^1 = [x] = [\underline{x}; \bar{x}], \text{ e}$$

$$[\underline{x}^n; \bar{x}^n] = [\underline{x}^1; \bar{x}^1] = [\underline{x}; \bar{x}].$$

Como $[\underline{x}; \bar{x}] \in IV$, é válida a base de indução.

Passo de Indução: Seja $n \in \mathbf{N}^*$ ímpar e tal que $[x]^n = [\underline{x}^n; \bar{x}^n]$ e $[x]^n \in IV$. Então

$$[x]^{n+2} = [x]^n * [x]^2 = [\underline{x}^n; \bar{x}^n] * [\bar{x}^2; \underline{x}^2], \text{ conforme provado no caso anterior.}$$

Como $[x]^n \in IV$ e $[x]^2 \in I$, segue do Teorema 4.1 que $[x]^{n+2} \in IV$ e

$$[\underline{x}^n; \bar{x}^n] * [\bar{x}^2; \underline{x}^2] = [\underline{x}^n * \bar{x}^2; \bar{x}^n * \underline{x}^2] = [\underline{x}^{n+2}; \bar{x}^{n+2}].$$

Logo é válido o passo de indução.

Logo, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ímpar, $[x]^n = [\underline{x}^n; \bar{x}^n]$ e $[x]^n \in IV$.

Logo, é válido o Teorema 5.1. ■

1.6 Prova do Teorema 5.2

Muitos dos resultados apresentados no Teorema 5.2 são idênticos aos apresentados no Teorema 5.1, modificando-se apenas a escrita de algumas expressões. Esse fato ocorre porque segundo a semântica de intervalo como envoltória de números reais a expressão $[x]^2 = [x] * [x]$ deve possuir somente componentes não negativos, conforme a Definição 3.4 ou outra equivalente. Desconsideradas as questões de escrita, a essência do raciocínio dos casos 1, 2, 3, 7 e 8 é preservada conforme apresentado anteriormente. De modo a facilitar o entendimento, os resultados serão apresentados seguindo as regiões da cobertura de \mathcal{IR} :

Caso 1: Seja $[x] \in O$.

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, 0^n = 0 \Rightarrow [x]^n = [0^n; 0^n] = [0; 0]. \text{ Logo } [x]^n \in O.$$

Caso 2: Seja $[x] \in I$.

Base de Indução: Seja $n = 1$. Então

$$[x]^n = [x]^1 = [\underline{x}; \bar{x}], \text{ e}$$

$$[\underline{x}^n; \bar{x}^n] = [\underline{x}^1; \bar{x}^1] = [\underline{x}; \bar{x}]$$

e $[x] \in I$. Logo, é válida a base de indução.

Passo de Indução: Seja $n \in \mathbf{N}^*$ tal que $[x]^n = [\underline{x}^n; \bar{x}^n]$ e $[x]^n \in I$. Então

$$[x]^{n+1} = [x]^n * [x] = [\underline{x}^n; \bar{x}^n] * [\underline{x}; \bar{x}].$$

Como $[x]^n \in I$ e $[x] \in I$, todos os elementos dos intervalos componentes são positivos e então $[x]^{n+1} \in I$, com

$$[\underline{x}^n; \bar{x}^n] * [\underline{x}; \bar{x}] = [\underline{x}^n * \underline{x}; \bar{x}^n * \bar{x}] = [\underline{x}^{n+1}; \bar{x}^{n+1}]. \text{ Logo é válido o passo de indução.}$$

Logo, $\forall n \in \mathbf{N}^*, [x]^n = [\underline{x}^n; \bar{x}^n]$ e $[x]^n \in I$.

Caso 3: Seja $[x] \in BI$.

Base de Indução: Seja $n = 1$. Então

$$[x]^n = [x]^1 = [0; \bar{x}], \text{ e}$$

$$[0; \bar{x}^n] = [0; \bar{x}^1] = [0; \bar{x}]$$

e $[x] \in BI$. Logo, é válida a base de indução.

Passo de Indução: Seja $n \in \mathbf{N}^*$ tal que $[x]^n = [0; \bar{x}^n]$ e $[x]^n \in BI$. Então

$$[x]^{n+1} = [x]^n * [x] = [0; \bar{x}^n] * [0; \bar{x}].$$

Como $[x]^n \in BI$ e $[x] \in BI$, todos os elementos dos intervalos componentes são não negativos e então $[x]^{n+1} \in BI$, com

$$[0; \bar{x}^n] * [0; \bar{x}] = [0; \bar{x}^n * \bar{x}] = [0; \bar{x}^{n+1}]. \text{ Logo é válido o passo de indução.}$$

Logo, $\forall n \in \mathbf{N}^*, [x]^n = [0; \bar{x}^n]$ e $[x]^n \in BI$.

Caso 4: Seja $[x] \in II$.

Caso 4(a): Admitindo que n seja par.

Base de Indução: Seja $n = 2$. Então, assumida a hipótese de que uma potência par deve retornar um intervalo não negativo e observando que $\underline{x} < 0 < \bar{x}$ com $|\underline{x}| < \bar{x}$,

$$[x]^n = [x]^2 = [0; \bar{x} * \bar{x}] = [0; \bar{x}^2],$$

conforme o resultado do Teorema 4.1. Por outro lado,

$$[0; \bar{x}^n] = [0; \bar{x}^2].$$

Como $[0; \bar{x}^2] \in BI$, é válida a base de indução.

Passo de Indução: Seja $n \in \mathbf{N}^*$ par e tal que $[x]^n = [0; \bar{x}^n]$ e $[x]^n \in BI$. Então

$$[x]^{n+2} = [0; \bar{x}^n] * [0; \bar{x}^2].$$

Como $[x]^n \in BI$ e $[x]^2 \in BI$, segue do Teorema 4.1 que $[x]^{n+2} \in BI$ e

$$[0; \bar{x}^n] * [0; \bar{x}^2] = [0; \bar{x}^n * \bar{x}^2] = [0; \bar{x}^{n+2}]. \text{ Logo é válido o passo de indução.}$$

Logo, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ par, $[x]^n = [0; \bar{x}^n]$ e $[x]^n \in BI$.

Caso 4(b): Admitindo que n seja ímpar.

Base de Indução: Seja $n = 1$. Então

$$[x]^n = [x]^1 = [x] = [\underline{x}; \bar{x}], \text{ e } [\underline{x} * \bar{x}^{n-1}; \bar{x}^n] = [\underline{x} * \bar{x}^0; \bar{x}^1] = [\underline{x}; \bar{x}].$$

Como $[\underline{x}; \bar{x}] \in II$, é válida a base de indução.

Passo de Indução: Seja $n \in \mathbf{N}^*$ ímpar e tal que $[x]^n = [\underline{x} * \bar{x}^{n-1}; \bar{x}^n]$ e $[x]^n \in II$. Então

$$[x]^{n+2} = [\underline{x} * \bar{x}^{n-1}; \bar{x}^n] * [0; \bar{x}^2], \text{ conforme provado no caso anterior.}$$

Como $[x]^n \in \text{II}$ e $[x]^2 \in \text{BI}$, segue do Teorema 4.1 que $[x]^{n+2} \in \text{II}$ e $[\underline{x} * \bar{x}^{n-1}; \bar{x}^n] * [0; \bar{x}^2] = [\underline{x} * \bar{x}^{n-1} * \bar{x}^2; \bar{x}^n * \bar{x}^2] = [\underline{x} * \bar{x}^{n+1}; \bar{x}^{n+2}]$.

Logo é válido o passo de indução.

Logo, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ímpar, $[x]^n = [\underline{x} * \bar{x}^{n-1}; \bar{x}^n]$ e $[x]^n \in \text{II}$.

Caso 5: Seja $[x] \in \text{BII}$.

Como $|\underline{x}| = \bar{x}$, denominando $|x| = |\underline{x}| = \bar{x}$ vem:

Caso 5(a): Admitindo que n seja par.

Base de Indução: Seja $n = 2$. Então, assumida a hipótese de que uma potência par deve retornar um intervalo não negativo e observando que $\underline{x} < 0 < \bar{x}$ com $|\underline{x}| = \bar{x} = |x|$,

$$[x]^n = [x]^2 = [0; |x| * |x|] = [0; |x|^2],$$

conforme o resultado do Teorema 4.1. Por outro lado,

$$[0; |x|^n] = [0; |x|^2].$$

Como $[0; |x|^2] \in \text{BI}$, é válida a base de indução.

Passo de Indução: Seja $n \in \mathbf{N}^*$ par e tal que $[x]^n = [0; |x|^n]$ e $[x]^n \in \text{BI}$. Então

$$[x]^{n+2} = [0; |x|^n] * [0; |x|^2].$$

Como $[x]^n \in \text{BI}$ e $[x]^2 \in \text{BI}$, segue do Teorema 4.1 que $[x]^{n+2} \in \text{BI}$ e

$$[0; |x|^n] * [0; |x|^2] = [0; |x|^n * |x|^2] = [0; |x|^{n+2}].$$

Logo, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ par, $[x]^n = [0; |x|^n]$ e $[x]^n \in \text{BI}$.

Caso 5(b): Admitindo que n seja ímpar.

Base de Indução: Seja $n = 1$. Então

$$[x]^n = [x]^1 = [x] = [\underline{x}; \bar{x}], \text{ e } |x|^{n-1} * [\underline{x}; \bar{x}] = |x|^0 * [\underline{x}; \bar{x}] = [\underline{x}; \bar{x}].$$

Como $[\underline{x}; \bar{x}] \in \text{BII}$, é válida a base de indução.

Passo de Indução: Seja $n \in \mathbf{N}^*$ ímpar e tal que $[x]^n = |x|^{n-1} * [\underline{x}; \bar{x}]$ e $[x]^n \in \text{BII}$. Então

$$[x]^{n+2} = |x|^{n-1} * [\underline{x}; \bar{x}] * [0; |x|^2], \text{ conforme provado no caso anterior.}$$

Como $[x]^n \in \text{BII}$ e $[x]^2 \in \text{BI}$, segue do Teorema 4.1 que $[x]^{n+2} \in \text{BII}$ e

$$|x|^{n-1} * [\underline{x}; \bar{x}] * [0; |x|^2] = |x|^{n-1} * [\underline{x} * |x|^2; \bar{x} * |x|^2] = |x|^{n+1} * [\underline{x}; \bar{x}].$$

Logo é válido o passo de indução.

Logo, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ímpar, $[x]^n = |x|^{n-1} * [\underline{x}; \bar{x}]$ e $[x]^n \in \text{BII}$.

Caso 6: Seja $[x] \in \text{III}$.

Caso 6(a): Admitindo que n seja par.

Base de Indução: Seja $n = 2$. Então, assumida a hipótese de que uma potência par deve retornar um intervalo não negativo e observando que $\underline{x} < 0 < \bar{x}$ com $|\underline{x}| > \bar{x}$,

$$[x]^n = [x]^2 = [0; \underline{x} * \underline{x}] = [0; \underline{x}^2],$$

conforme o resultado do Teorema 4.1. Por outro lado,

$$[0; \underline{x}^n] = [0; \underline{x}^2].$$

Como $[0; \underline{x}^2] \in \text{BI}$, é válida a base de indução.

Passo de Indução: Seja $n \in \mathbf{N}^*$ par e tal que $[x]^n = [0; \underline{x}^n]$ e $[x]^n \in \text{BI}$. Então

$$[x]^{n+2} = [0; \underline{x}^n] * [0; \underline{x}^2].$$

Como $[x]^n \in \text{BI}$ e $[x]^2 \in \text{BI}$, segue do Teorema 4.1 que $[x]^{n+2} \in \text{BI}$ e

$$[0; \underline{x}^n] * [0; \underline{x}^2] = [0; \underline{x}^n * \underline{x}^2] = [0; \underline{x}^{n+2}].$$
 Logo é válido o passo de indução.

Logo, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ par, $[x]^n = [0; \underline{x}^n]$ e $[x]^n \in \text{BI}$.

Caso 6(b): Admitindo que n seja ímpar.

Base de Indução: Seja $n = 1$. Então

$$[x]^n = [x]^1 = [x] = [\underline{x}; \bar{x}], \text{ e } [\underline{x}^n; \underline{x}^{n-1} * \bar{x}] = [\underline{x}^1; \underline{x}^0 * \bar{x}] = [\underline{x}; \bar{x}].$$

Como $[\underline{x}; \bar{x}] \in \text{III}$, é válida a base de indução.

Passo de Indução: Seja $n \in \mathbf{N}^*$ ímpar e tal que $[x]^n = [\underline{x}^n; \underline{x}^{n-1} * \bar{x}]$ e $[x]^n \in \text{III}$. Então

$$[x]^{n+2} = [\underline{x}^n; \underline{x}^{n-1} * \bar{x}] * [0; \underline{x}^2], \text{ conforme provado no caso anterior.}$$

Como $[x]^n \in \text{III}$ e $[x]^2 \in \text{BI}$, segue do Teorema 4.1 que $[x]^{n+2} \in \text{II}$ e

$$[\underline{x}^n; \underline{x}^{n-1} * \bar{x}] * [0; \underline{x}^2] = [\underline{x}^n * \underline{x}^2; \underline{x}^{n-1} * \bar{x} * \underline{x}^2] = [\underline{x}^{n+2}; \underline{x}^{n+1} * \bar{x}].$$

Logo é válido o passo de indução.

Logo, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ímpar, $[x]^n = [\underline{x}^n; \underline{x}^{n-1} * \bar{x}]$ e $[x]^n \in \text{III}$.

Caso 7: Seja $[x] \in \text{BIII}$.

Caso 7(a): Admitindo que n seja par.

Base de Indução: Seja $n = 2$. Então, assumida a hipótese de que uma potência par deve retornar um intervalo não negativo

$$[x]^n = [x]^2 = [x] * [x] = [\underline{x}; 0] * [\underline{x}; 0] = [0; \underline{x} * \underline{x}] = [0; \underline{x}^2].$$

Por outro lado,

$$[0; \underline{x}^n] = [0; \underline{x}^2].$$

Como $[0; \underline{x}^2] \in \text{BI}$, é válida a base de indução.

Passo de Indução: Seja $n \in \mathbf{N}^*$ par e tal que $[x]^n = [0; \underline{x}^n]$ e $[x]^n \in \text{BI}$. Então

$$[x]^{n+2} = [x]^n * [x]^2 = [0; \underline{x}^n] * [0; \underline{x}^2].$$

Como $[x]^n \in \text{BI}$ e $[x]^2 \in \text{BI}$, todos os elementos dos intervalos componentes são não negativos e então $[x]^{n+2} \in \text{BI}$, com

$$[0; \underline{x}^n] * [0; \underline{x}^2] = [0; \underline{x}^n * \underline{x}^2] = [0; \underline{x}^{n+2}].$$
 Logo é válido o passo de indução.

Logo, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ par, $[x]^n = [0; \underline{x}^n]$ e $[x]^n \in \text{BI}$.

Caso 7(b): Admitindo que n seja ímpar.

Base de Indução: Seja $n = 1$. Então

$$[x]^n = [x]^1 = [x] = [\underline{x}; 0], \text{ e}$$

$$[\underline{x}^n; 0] = [\underline{x}^1; 0] = [\underline{x}; 0].$$

Como $[\underline{x}; 0] \in \text{BIII}$, é válida a base de indução.

Passo de Indução: Seja $n \in \mathbf{N}^*$ ímpar e tal que $[x]^n = [\underline{x}^n; 0]$ e $[x]^n \in \text{BIII}$. Então

$[x]^{n+2} = [x]^n * [x]^2 = [\underline{x}^n; 0] * [0; \underline{x}^2]$. Conforme provado no caso anterior, como $[x]^n \in \text{BIII}$ e $[x]^2 \in \text{BI}$, então segue do Teorema 4.1 que $[x]^{n+2} \in \text{BIII}$ e

$[\underline{x}^n; 0] * [0; \underline{x}^2] = [\underline{x}^n * \underline{x}^2; 0] = [\underline{x}^{n+2}; 0]$. Logo é válido o passo de indução.

Logo, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ímpar, $[x]^n = [\underline{x}^n; 0]$ e $[x]^n \in \text{BIII}$.

Caso 8: Seja $[x] \in \text{IV}$.

Caso 8(a): Admitindo que n seja par.

Base de Indução: Seja $n = 2$. Então

$$[x]^n = [x]^2 = [x] * [x] = [\underline{x}; \bar{x}] * [\underline{x}; \bar{x}] = [\bar{x} * \bar{x}; \underline{x} * \underline{x}] = [\bar{x}^2; \underline{x}^2],$$

conforme o resultado do Teorema 4.1. Por outro lado,

$$[\bar{x}^n; \underline{x}^n] = [\bar{x}^2; \underline{x}^2].$$

Como $[\bar{x}^2; \underline{x}^2] \in \text{I}$, é válida a base de indução.

Passo de Indução: Seja $n \in \mathbf{N}^*$ par e tal que $[x]^n = [\bar{x}^n; \underline{x}^n]$ e $[x]^n \in \text{I}$. Então

$$[x]^{n+2} = [x]^n * [x]^2 = [\bar{x}^n; \underline{x}^n] * [\bar{x}^2; \underline{x}^2].$$

Como $[x]^n \in \text{I}$ e $[x]^2 \in \text{I}$, e assumida a hipótese de que uma potência par deve retornar um intervalo não negativo, segue do Teorema 4.1 que $[x]^{n+2} \in \text{I}$ e

$$[\bar{x}^n; \underline{x}^n] * [\bar{x}^2; \underline{x}^2] = [\bar{x}^n * \bar{x}^2; \underline{x}^n * \underline{x}^2] = [\bar{x}^{n+2}; \underline{x}^{n+2}].$$

Logo, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ par, $[x]^n = [\bar{x}^n; \underline{x}^n]$ e $[x]^n \in \text{I}$.

Caso 8(b): Admitindo que n seja ímpar.

Base de Indução: Seja $n = 1$. Então

$$[x]^n = [x]^1 = [x] = [\underline{x}; \bar{x}], \text{ e}$$

$$[\underline{x}^n; \bar{x}^n] = [\underline{x}^1; \bar{x}^1] = [\underline{x}; \bar{x}].$$

Como $[\underline{x}; \bar{x}] \in \text{IV}$, é válida a base de indução.

Passo de Indução: Seja $n \in \mathbf{N}^*$ ímpar e tal que $[x]^n = [\underline{x}^n; \bar{x}^n]$ e $[x]^n \in \text{IV}$. Então

$$[x]^{n+2} = [x]^n * [x]^2 = [\underline{x}^n; \bar{x}^n] * [\bar{x}^2; \underline{x}^2], \text{ conforme provado no caso anterior.}$$

Como $[x]^n \in \text{IV}$ e $[x]^2 \in \text{I}$, segue do Teorema 4.1 que $[x]^{n+2} \in \text{IV}$ e

$$[\underline{x}^n; \bar{x}^n] * [\bar{x}^2; \underline{x}^2] = [\underline{x}^n * \bar{x}^2; \bar{x}^n * \underline{x}^2] = [\underline{x}^{n+2}; \bar{x}^{n+2}].$$

Logo, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ímpar, $[x]^n = [\underline{x}^n; \bar{x}^n]$ e $[x]^n \in \text{IV}$.

Estes raciocínios completam a prova da validade do Teorema 5.2. ■

1.7 Prova do Teorema 6.1

Da Definição 6.2,

$$[x^p] \in \mathfrak{IX} \text{ é solução própria intervalar de } f([x]) = [y] \Leftrightarrow \overline{[f([x^p]); f([x^p])]} = [\underline{y}; \bar{y}].$$

Como,

$$\forall x \in [x^p], f(x) \subseteq \overline{[f([x^p]); f([x^p])]},$$

então

$$\forall x \in [x^p], f(x) \subseteq [\underline{y}; \bar{y}]. \blacksquare$$

1.8 Prova do Lema 6.1

Segundo os teoremas 4.1 e 4.2, o número de expressões que geram sistemas alternativos para averiguação somente é maior que um quando no mínimo um dos coeficientes e uma das soluções pertencerem às regiões II ou III. Nas condições do Lema 6.1, no entanto, as soluções são sempre externas a essas regiões, de modo que somente um sistema será gerado. De posse dessa informação, a análise das complexidades apresentadas no Anexo 2 permite identificar as seguintes expressões para o cálculo dos custos associados à resolução de uma iteração dessa natureza:

- Número de comparações:

$$n * 8 + n * 4 + 2 * n = 14 * n ;$$

- Número de atribuições:

$$n * 3 + 2 + 1 + n * 1 = 3 + 4 * n ;$$

- Número de sistemas a resolver numericamente:

$$1 * \text{snl}(n) = \text{snl}(n).$$

Logo, é verdadeiro o Lema 6.1. ■

1.9 Prova do Lema 6.2

Segundo o Teorema 4.2, nas condições enunciadas o número de sistemas alternativos a serem resolvidos será 2^n . Esse número será gerado através da duplicação sucessiva das entradas nas listas geradas pelo Algoritmo 1 de tal sorte que, pela análise das complexidades apresentadas no Anexo 2, as seguintes expressões serão identificadas para o cálculo dos custos associados à resolução de uma iteração dessa natureza:

- Número de comparações:

$$n * 8 + n * 4 + 2 * n = 14 * n ;$$

- Número de atribuições:

$$\begin{aligned} n * 3 + 2 + 1 + n * \left(1 + \sum_{t=0}^{n-1} (2 * 2^t + 2 * 2^t * (2 + 1)) \right) = \\ 3 - 4 * n + 8 * 2^n * n = \\ (2^{n+3} - 4) * n + 3; \end{aligned}$$

- Número de sistemas a resolver numericamente:

$$2^n * \text{snl}(n).$$

Logo, é verdadeiro o Lema 6.2. ■

1.10 Prova do Teorema 6.2

A aplicação do Algoritmo 1 envolve a realização de 6 iterações de complexidade mínima e 2 iterações de complexidade máxima. Então, das informações dos lemas 6.1 e 6.2, a complexidade de pior caso pode ser modelada a partir das seguintes expressões:

- Número de comparações:

$$6 * 14 * n + 2 * 14 * n = 112 * n ;$$

- Número de atribuições:

$$6 * (4 * n + 3) + 2 * ((2^{n+3} - 4) * n + 3) = \\ (2^{n+3} + 16) * n + 24;$$

- Número de sistemas a resolver numericamente:

$$6 * \text{snl}(n) + 2 * 2^n * \text{snl}(n) = (2^{n+1} + 6) * \text{snl}(n).$$

Se considerado aceitável que o custo de uma atribuição e o de uma comparação são desprezíveis em relação ao custo de realização de operações aritméticas, então a complexidade de pior caso do Algoritmo 1 será absorvida pelo custo de resolução dos sistemas reais gerados, ou seja,

$$C_p(n) \sim O((2^{n+1} + 6) * \text{snl}(n)).$$

Logo, é válido o Teorema 6.2. ■

1.11 Prova do Teorema 6.3

A partir dos resultados dos lemas 6.3 e 6.4, vem

$$\begin{aligned} \bar{C}(n) &\sim O\left(\frac{1}{\sum_{c=0}^n \binom{n}{c}} * \sum_{c=0}^n \binom{n}{c} * (2^{c+1} + 6) * \text{snl}(n)\right) = \\ &O\left(\frac{1}{2^n} * \left(2 * \sum_{c=0}^n \binom{n}{c} * 2^c + 6 * 2^n\right) * \text{snl}(n)\right) = \\ &= O\left(\frac{1}{2^n} * (2 * (2+1)^n + 6 * 2^n) * \text{snl}(n)\right) = \\ &O\left(\left(2 * \left(\frac{3}{2}\right)^n + 6\right) * \text{snl}(n)\right). \end{aligned}$$

Logo, é válido o Teorema 6.3. ■

1.12 Prova da Proposição 6.2

Considerando a notação como definida no enunciado da proposição, do resultado do Teorema 4.1 segue que somente uma expressão analítica é necessária para a determinação do produto de dois números-intervalo no caso em que um dos fatores pertence à região O, I, BI, BII, BIII

ou IV. No entanto, para cada produto em que os fatores pertencem às regiões II ou III, duas expressões analíticas devem ser geradas para a determinação algébrica desta operação.

Por indução em $c(j)$, tem-se:

Base de Indução: se $c(j) = 0$, então não há coeficientes nas regiões II ou III. Por consequência, não há necessidade de geração de expressões alternativas para a determinação analítica dos produtos. Então cada região do mapeamento de \mathfrak{R} gera somente um sistema, totalizando 8 sistemas a serem resolvidos.

Por outro lado, $c(j) = 0 \Rightarrow ts(j) = 6 + 2^{c(j)+1} = 6 + 2^{0+1} = 6 + 2 = 8$.

Logo, é verdadeira a base de indução.

Passo de Indução: Supondo-se que na presença de $c(j)$ coeficientes pertencentes às regiões II ou III, o número de sistemas gerados pela contribuição da variável $[x_j]$ seja $ts(j) = 6 + 2^{c(j)+1}$, então deseja-se verificar se a inclusão de outro coeficiente dessa região eleva o número de sistemas gerados para $ts(j) = 6 + 2^{c(j)+2}$.

Ora, se assumido que a solução associada a $[x_j]$ se encontra nas regiões O, I, BI, BII, BIII ou IV, então somente um sistema será gerado em cada região, totalizando 6 sistemas. No entanto, para os casos em que essa solução é assumida nas regiões II ou III tem-se, dos $c(j)$ coeficientes já pertencentes a essas regiões, mais $2^{c(j)+1}$ sistemas. Nessas condições, o coeficiente adicionado gerará duas expressões analíticas para cada sistema, ou seja,

$$2 * 2^{c(j)+1} = 2^{c(j)+2}$$

sistemas. Assim, o número total de sistemas reais gerados será $ts(j) = 6 + 2^{c(j)+2}$.

Logo é verdadeiro o passo de indução.

Logo, é válida a Proposição 6.2. ■

1.13 Prova do Lema 6.6

A partir das complexidades apresentadas no Anexo 3, o número de comparações no pior caso será dado por

$$\begin{aligned} 8^n * 4 * n^2 + \sum_{t=0}^n \left(\binom{n}{t} * 2^t * 6^{n-t} * 2 * n \right) &= \\ 8^n * 4 * n^2 + \sum_{t=0}^n \left(\binom{n}{t} * 2^t * 6^{n-t} \right) * 2 * n &= \\ 8^n * 4 * n^2 + 8^n * 2 * n &= \\ 8^n * (4 * n^2 + 2 * n) &= \\ 2^{3*n+1} * n * (2 * n + 1). & \end{aligned}$$

Logo, é válido o Lema 6.6. ■

1.14 Prova do Lema 6.7

Seja c o número de produtos entre coeficientes e variáveis das regiões II ou III. Então, a partir das complexidades apresentadas no Anexo 3 o número de atribuições será dado por:

$$\begin{aligned} & \sum_{c=0}^n \left(\binom{n}{c} * 2^c * 6^{n-c} * \left(3 * n + n^2 * \left(1 + (n^2 + 8) * \sum_{t=0}^{c-1} 2^t \right) \right) \right) = \\ & (3 * n + n^2) * \sum_{c=0}^n \left(\binom{n}{c} * 2^c * 6^{n-c} \right) + n^2 * (n^2 + 8) * \sum_{c=0}^n \left(\binom{n}{c} * 2^c * 6^{n-c} * (2^c - 1) \right) = \\ & (3 * n + n^2) * (2 + 6)^n + n^2 * (n^2 + 8) * \left(\sum_{c=0}^n \left(\binom{n}{c} * 4^c * 6^{n-c} \right) - \sum_{c=0}^n \left(\binom{n}{c} * 2^c * 6^{n-c} \right) \right) = \\ & (3 * n + n^2) * 8^n + n^2 * (n^2 + 8) * (10^n - 8^n) = \\ & 10^n * (n^4 + 8 * n^2) - 8^n * (n^4 + 7 * n^2 - 3 * n). \end{aligned}$$

Logo, é válido o Lema 6.7. ■

1.15 Prova do Teorema 6.4

Do Lema 6.5, o número total de sistemas que necessitam ser resolvidos para a completa determinação das soluções do sistema analisado é, no pior caso, $(6 + 2^{n+1})^n$, o que produz uma complexidade de

$$(6 + 2^{n+1})^n * sl(2 * n),$$

associada à resolução desses sistemas.

Por outro lado, a análise dos resultados dos lemas 6.6 e 6.7 implica que, mesmo com a presença de termos exponenciais para o custo de realização de comparações e atribuições, estas complexidades são de ordem menor que a apresentada para a resolução dos sistemas gerados. Em particular, a presença de termos envolvendo exponenciais quadráticas nessa última expressão indica um elevado grau de complexidade nas necessidades de realização de operações aritméticas. Assim, pode-se considerar aceitável que o custo do algoritmo seja dominado pelo custo de realização de operações aritméticas. Nesse caso, a complexidade de pior caso do algoritmo em questão será,

$$C_p(n) \sim O\left((6 + 2^{n+1})^n * sl(2 * n)\right).$$

Logo, é válido o Teorema 6.4. ■

1.16 Prova do Teorema 6.5

Nas condições enunciadas, o número de diferentes combinações geradas pela presença de $c(j)$ coeficientes das regiões II ou III dentre os n associados com a variável $[x_j]$, $j = 1..n$ é dado

por $\binom{n}{c(j)}$. Conforme a Proposição 6.2, cada combinação gerará

$$ts(j) = 6 + 2^{c(j)+1}$$

diferentes sistemas a serem resolvidos. Então, o número total de sistemas gerados e combinando $c(j)$ coeficientes dentre os n associados à variável $[x_j]$, $j = 1..n$ será dado por

$$\binom{n}{c(j)} * (6 + 2^{c(j)+1}).$$

Considerando-se que cada coluna poderá contribuir independentemente da mesma forma, o número total de diferentes combinações de sistemas com exatamente c coeficientes,

$c = \sum_{j=1}^n c(j)$, será dado por

$$\prod_{j=1}^n \binom{n}{c(j)} * (6 + 2^{c(j)+1}).$$

Considerando-se ainda que o número de coeficientes c pode variar de 0 até n^2 , então o número total de sistemas consideradas todas as possíveis quantidades e combinações de coeficientes das regiões II ou III é dado por

$$\sum_{c=0}^{n^2} \left(\prod_{j=1}^n \binom{n}{c(j)} * (6 + 2^{c(j)+1}) \right).$$

Como o número de total combinações geradas pela presença de exatamente c coeficientes pertencentes às regiões II ou III é dado por $\binom{n^2}{c}$, tem-se que

$$\binom{n^2}{c} = \sum_{\sum_{j=1}^n c(j)=c} \prod_{j=1}^n \binom{n}{c(j)},$$

e o número total de combinações geradas é dado por

$$\sum_{c=0}^{n^2} \binom{n^2}{c} = \sum_{c=0}^{n^2} \binom{n^2}{c} * 1^c * 1^{n^2-c} = 2^{n^2}.$$

Logo, a complexidade será dada pela média entre o número total de sistemas gerados e o número total de combinações possíveis de sistemas,

$$\bar{C}(n) \sim O \left(\frac{1}{2^{n^2}} * \sum_{c=0}^{n^2} \left(\prod_{j=1}^n \binom{n}{c(j)} * (6 + 2^{c(j)+1}) \right) * \text{sl}(2 * n) \right),$$

onde $c = \sum_{j=1}^n c(j)$. ■

1.17 Prova do Teorema 7.2

Para a primeira parte da conclusão, fazendo uso do Corolário 4.3 e das propriedades enunciadas na Proposição 2.7, tem-se que

$$\exists i, 0 \leq i \leq n, w([a_i]) > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathfrak{R}^*, w([a_i] * x^i) > 0.$$

Como o diâmetro é linear com respeito à adição, então,

$$\forall x \in \mathfrak{R}^*, \exists i, 0 \leq i \leq n, w([a_i] * x^i) > 0 \Leftrightarrow w \left(\sum_{i=0}^n [a_i] * x^i \right) > 0 \Leftrightarrow w(p(x)) > 0.$$

Para a segunda parte da conclusão, tem-se, pelo raciocínio anterior, que

$$w([a_0]) > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathfrak{R}^*, w(p(x)) > 0,$$

e

$$x = 0 \Rightarrow p(0) = [a_0] \Rightarrow w(p(x)) = w([a_0]) > 0.$$

Por outro lado,

$$\forall x \in \mathfrak{R}, w(p(x)) > 0 \Rightarrow w(p(0)) > 0 \Leftrightarrow w([a_0]) > 0.$$

Logo, é válido o Teorema 7.2. ■

1.18 Prova do Teorema 7.3

Por absurdo, seja $x_0 \in \mathfrak{R}$ tal que x_0 é extremo da envoltória intervalar da equação $f(x) = c$, mas $f(x_0) = [a; b]$, $a < c < b$, para $a, b \in \mathfrak{R}$. Então, pela continuidade da avaliação da função intervalar f ,

$$\exists \delta_1 \in \mathfrak{R}^*, \exists \varepsilon_1 \in [c - b; +\infty), f(x_0 + \delta_1) = [c; b + \varepsilon_1]$$

e

$$\exists \delta_2 \in \mathfrak{R}^*, \exists \varepsilon_2 \in (-\infty; c - a], f(x_0 + \delta_2) = [a + \varepsilon_2; c].$$

Mas então $x_0 + \delta_1$ e $x_0 + \delta_2$ são extremos da envoltória intervalar. Logo, x_0 não é extremo da envoltória intervalar, o que contradiz a hipótese.

Logo, se $x_0 \in \mathfrak{R}$ é extremo da envoltória intervalar da equação $f(x) = c$, então $f(x_0) = [c; b] \vee f(x_0) = [a; c]$, com $a \leq c \leq b$ nas condições enunciadas. ■

1.19 Prova do Teorema 7.4

Nas condições acima enunciadas, assume-se por absurdo que $\exists t \in \mathfrak{R}$ tal que t é extremo limitante da envoltória intervalar das soluções reais da equação $p(x) = [b]$ e não é solução das equações reais $\underline{p}(x) = \bar{b}$ e $\bar{p}(x) = \underline{b}$. Nessas condições,

$$\forall c \in \mathfrak{R}, c \leq \bar{b}, p(t) \neq [c; \bar{b}]$$

e

$$\forall c \in \mathfrak{R}, c \geq \underline{b}, p(t) \neq [\underline{b}; c]$$

Mas, pelo Teorema 7.3, sendo t um limitante da envoltória intervalar das soluções reais da equação em questão, então

$$\exists c \in \mathfrak{R}, p(t) = [c; \bar{b}] \vee p(t) = [\underline{b}; c].$$

Então uma das seguintes possibilidades deverá acontecer:

- t não é extremo de envoltória intervalar; ou
- t não assume um valor real, sendo, portanto, infinito.

Ambas possibilidades geram contradição com as hipóteses adicionadas nesta prova. Logo, é válida a afirmação proposta no enunciado. ■

1.20 Prova do Lema 7.1

A prova a seguir é fundamentada na análise dos polinômios limitantes de p , conforme a Definição 7.2. Nas condições enunciadas, tem-se os seguintes casos:

Caso 1: $[a_n] \in I \vee [a_n] \in IV$

Caso 1(a): $[a_n] \in I$

Nesse caso $\overline{a_n} \geq \underline{a_n} > 0$, e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \underline{p}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} p_{L^+}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underline{a_n} * x^n = +\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \overline{p}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} p_{U^+}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \overline{a_n} * x^n = +\infty,$$

indicando que

$$\forall [b] \in I\mathfrak{R}, \exists x_b \in \mathfrak{R}, \forall x \in \mathfrak{R}, x > x_b \Rightarrow p(x) > [b],$$

ou seja, que o maior extremo da envoltória intervalar é finito.

Caso 1(b): $[a_n] \in IV$

Nesse caso $\underline{a_n} \leq \overline{a_n} < 0$, e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \underline{p}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} p_{L^+}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underline{a_n} * x^n = -\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \overline{p}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} p_{U^+}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \overline{a_n} * x^n = -\infty,$$

indicando que

$$\forall [b] \in I\mathfrak{R}, \exists x_b \in \mathfrak{R}, \forall x \in \mathfrak{R}, x > x_b \Rightarrow p(x) < [b],$$

ou seja, que o maior extremo da envoltória intervalar é finito.

Caso 2: $[a_n] \in II \vee [a_n] \in BII \vee [a_n] \in III$

Nesse caso $[a_n] \in II \vee [a_n] \in BII \vee [a_n] \in III \Rightarrow \underline{a_n} < 0 < \overline{a_n}$, e então

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \underline{p}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} p_{L^+}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underline{a_n} * x^n = -\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \overline{p}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} p_{U^+}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \overline{a_n} * x^n = +\infty,$$

o que significa que $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = (-\infty; +\infty)$ e então

$$\forall [b] \in I\mathfrak{R}, \exists x_b \in \mathfrak{R}, \forall x \in \mathfrak{R}, x \geq x_b \Rightarrow p(x) \cap [b] \neq \emptyset,$$

ou seja, que o maior extremo da envoltória intervalar é $+\infty$.

Caso 3: $[a_n] \in BI$

Caso 3(a): $\exists k > 0, \forall j > k, ([a_j] \in O \vee [a_j] \in BI) \wedge ([a_k] \notin O \wedge [a_k] \notin BI)$

Nesse caso é necessário observar que

$$\forall j, n \geq j > k, \underline{a_j} = 0,$$

e então

$$\underline{p}(x) = p_{L^+}(x) = \sum_{i=0}^k \underline{a_i} * x^i.$$

Além disso, $\overline{a_n} > 0$ e então

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \overline{p}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} p_{U^+}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \overline{a_n} * x^n = +\infty.$$

Assim,

- se $[a_k] \in I$, tem-se que $\underline{a}_k > 0$, e então

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \underline{p}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} p_{L^+}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underline{a}_k * x^k = +\infty,$$

indicando que

$$\forall [b] \in \mathcal{I}\mathfrak{R}, \exists x_b \in \mathfrak{R}, \forall x \in \mathfrak{R}, x > x_b \Rightarrow p(x) > [b],$$

ou seja, que o maior extremo da envoltória intervalar é finito;

- se $[a_k] \in II \vee [a_k] \in BII \vee [a_k] \in III \vee [a_k] \in BIII \vee [a_k] \in IV$, tem-se que $\underline{a}_k < 0$, e então

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \underline{p}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} p_{L^+}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underline{a}_k * x^k = -\infty,$$

indicando que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \underline{p}(x) = (-\infty; +\infty)$ e então

$$\forall [b] \in \mathcal{I}\mathfrak{R}, \exists x_b \in \mathfrak{R}, \forall x \in \mathfrak{R}, x \geq x_b \Rightarrow p(x) \cap [b] \neq \emptyset,$$

ou seja, que o maior extremo da envoltória intervalar é $+\infty$.

Caso 3(b): $\forall j > 0, [a_j] \in O \vee [a_j] \in BI$

Nesse caso é necessário observar que

$$\forall j, n \geq j > 0, \underline{a}_j = 0,$$

e então

$$\underline{p}(x) = p_{L^+}(x) = \underline{a}_0.$$

Além disso, $\overline{a}_n > 0$ e então

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \overline{p}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} p_{U^+}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \overline{a}_n * x^n = +\infty.$$

Assim,

- se $\underline{a}_0 \leq \overline{b}$, então

$$\forall [b] \in \mathcal{I}\mathfrak{R}, \forall x \in \mathfrak{R}_*^+, p(x) \cap [b] \neq \emptyset,$$

ou seja, o maior extremo da envoltória intervalar é $+\infty$;

- se $\underline{a}_0 > \overline{b}$, então

$$\forall [b] \in \mathcal{I}\mathfrak{R}, \forall x \in \mathfrak{R}_*^+, p(x) \cap [b] = \emptyset,$$

ou seja, a equação não possui extremo positivo para a envoltória intervalar.

Caso 4: $[a_n] \in BIII$

Caso 4(a): $\exists k > 0, \forall j > k, ([a_j] \in O \vee [a_j] \in BIII) \wedge ([a_k] \notin O \wedge [a_k] \notin BIII)$

Nesse caso é necessário observar que

$$\forall j, n \geq j > k, \overline{a}_j = 0,$$

e então

$$\overline{p}(x) = p_{U^+}(x) = \sum_{i=0}^k \overline{a}_i * x^i.$$

Além disso, $\underline{a}_n < 0$ e então

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \underline{p}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} p_{L^+}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underline{a}_n * x^n = -\infty.$$

Assim,

- se $[a_k] \in I \vee [a_k] \in BI \vee [a_k] \in II \vee [a_k] \in BII \vee [a_k] \in III$, tem-se que $\overline{a_k} > 0$, e então

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \overline{p}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} p_{U^+}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \overline{a_k} * x^k = +\infty,$$

indicando que $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = (-\infty; +\infty)$ e então

$$\forall [b] \in \mathfrak{R}, \exists x_b \in \mathfrak{R}, \forall x \in \mathfrak{R}, x \geq x_b \Rightarrow p(x) \cap [b] \neq \emptyset,$$

ou seja, que o maior extremo da envoltória intervalar é $+\infty$;

- se $[a_k] \in IV$, tem-se que $\overline{a_k} < 0$, e então

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \overline{p}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} p_{U^+}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \overline{a_k} * x^k = -\infty,$$

indicando que

$$\forall [b] \in \mathfrak{R}, \exists x_b \in \mathfrak{R}, \forall x \in \mathfrak{R}, x > x_b \Rightarrow p(x) < [b],$$

ou seja, que o maior extremo da envoltória intervalar é finito.

Caso 4(b): $\forall j > 0, [a_j] \in O \vee [a_j] \in BIII$

Nesse caso é necessário observar que

$$\forall j, n \geq j > 0, \overline{a_j} = 0,$$

e então

$$\overline{p}(x) = p_{U^+}(x) = \overline{a_0}.$$

Além disso, $\underline{a_n} < 0$ e então

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \underline{p}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} p_{L^+}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underline{a_n} * x^n = -\infty.$$

Assim,

- se $\overline{a_0} \geq \underline{b}$, então

$$\forall [b] \in \mathfrak{R}, \forall x \in \mathfrak{R}_*^+, p(x) \cap [b] \neq \emptyset,$$

ou seja, o maior extremo da envoltória intervalar é $+\infty$;

- se $\overline{a_0} < \underline{b}$, então

$$\forall [b] \in \mathfrak{R}, \forall x \in \mathfrak{R}_*^+, p(x) \cap [b] = \emptyset,$$

ou seja, a equação não possui extremo positivo para a envoltória intervalar.

Assim, é provado válido o Lema 7.1. ■

1.21 Prova do Lema 7.2

Da mesma forma que no lema anterior, a prova a seguir é fundamentada na análise dos polinômios limitantes de p , conforme a Definição 7.2. Nas condições enunciadas, tem-se os seguintes casos:

Caso 1: $[a_n] \in I \vee [a_n] \in IV$

Caso 1(a): $[a_n] \in I$

Nesse caso $\overline{a_n} \geq \underline{a_n} > 0$, e

- se n é ímpar, então

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \underline{p}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} p_{L^-}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \overline{a_n} * x^n = -\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \bar{p}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} p_{U^-}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underline{a}_n * x^n = -\infty,$$

indicando que

$$\forall [b] \in \mathcal{I}\mathfrak{R}, \exists x_b \in \mathfrak{R}, \forall x \in \mathfrak{R}, x < x_b \Rightarrow p(x) < [b],$$

ou seja, que o menor extremo da envoltória intervalar é finito;

- se n é par, então

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \underline{p}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} p_{L^-}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underline{a}_n * x^n = +\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \bar{p}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} p_{U^-}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \overline{a}_n * x^n = +\infty,$$

indicando que

$$\forall [b] \in \mathcal{I}\mathfrak{R}, \exists x_b \in \mathfrak{R}, \forall x \in \mathfrak{R}, x < x_b \Rightarrow p(x) > [b],$$

ou seja, que o menor extremo da envoltória intervalar é finito.

Caso 1(b): $[a_n] \in \text{IV}$ Nesse caso $\underline{a}_n \leq \overline{a}_n < 0$, e

- se n é ímpar, então

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \underline{p}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} p_{L^-}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \overline{a}_n * x^n = +\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \bar{p}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} p_{U^-}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underline{a}_n * x^n = +\infty,$$

indicando que

$$\forall [b] \in \mathcal{I}\mathfrak{R}, \exists x_b \in \mathfrak{R}, \forall x \in \mathfrak{R}, x < x_b \Rightarrow p(x) > [b],$$

ou seja, que o menor extremo da envoltória intervalar é finito;

- se n é par, então

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \underline{p}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} p_{L^-}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underline{a}_n * x^n = -\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \bar{p}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} p_{U^-}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \overline{a}_n * x^n = -\infty,$$

indicando que

$$\forall [b] \in \mathcal{I}\mathfrak{R}, \exists x_b \in \mathfrak{R}, \forall x \in \mathfrak{R}, x < x_b \Rightarrow p(x) < [b],$$

ou seja, que o menor extremo da envoltória intervalar é finito.

Caso 2: $[a_n] \in \text{II} \vee [a_n] \in \text{BII} \vee [a_n] \in \text{III}$ Nesse caso $[a_n] \in \text{II} \vee [a_n] \in \text{BII} \vee [a_n] \in \text{III} \Rightarrow \underline{a}_n < 0 < \overline{a}_n$, e então

- se n é ímpar,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \underline{p}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} p_{L^-}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \overline{a}_n * x^n = -\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \bar{p}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} p_{U^-}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underline{a}_n * x^n = +\infty$$

indicando que $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = (-\infty; +\infty)$ e então

$$\forall [b] \in \mathcal{I}\mathfrak{R}, \exists x_b \in \mathfrak{R}, \forall x \in \mathfrak{R}, x \leq x_b \Rightarrow p(x) \cap [b] \neq \emptyset,$$

ou seja, que o menor extremo da envoltória intervalar é $-\infty$;

- se n é par,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \underline{p}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} p_{L-}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underline{a}_n * x^n = -\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \overline{p}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} p_{U-}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \overline{a}_n * x^n = +\infty$$

indicando que $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = (-\infty; +\infty)$ e então

$\forall [b] \in \mathcal{I}\mathfrak{R}, \exists x_b \in \mathfrak{R}, \forall x \in \mathfrak{R}, x \leq x_b \Rightarrow p(x) \cap [b] \neq \emptyset$,
ou seja, que o menor extremo da envoltória intervalar é $-\infty$.

Caso 3: $([a_n] \in \text{BI} \wedge n \text{ é ímpar}) \vee ([a_n] \in \text{BIII} \wedge n \text{ é par})$

Caso 3(a): $\exists k > 0, \forall j > k, ([a_j] \in \text{O} \vee \begin{cases} j \text{ é ímpar} & \rightarrow [a_j] \in \text{BI} \\ j \text{ é par} & \rightarrow [a_j] \in \text{BIII} \end{cases}) \wedge [a_k] \notin \text{O}$

Nesse caso é necessário observar que

$$\forall j, n \geq j > k, \begin{cases} j \text{ é ímpar} & \rightarrow \underline{a}_j = 0 \\ j \text{ é par} & \rightarrow \overline{a}_j = 0 \end{cases},$$

e então

$$\overline{p}(x) = p_{U-}(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \overline{a}_{2^*i} * x^{2^*i} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \underline{a}_{2^*i+1} * x^{2^*i+1}.$$

Além disso,

- se $[a_n] \in \text{BI} \wedge n \text{ é ímpar}$, então $\overline{a}_n > 0$ e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \underline{p}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} p_{L-}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \overline{a}_n * x^n = -\infty;$$

- se $[a_n] \in \text{BIII} \wedge n \text{ é par}$, então $\underline{a}_n < 0$ e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \underline{p}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} p_{L-}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underline{a}_n * x^n = -\infty.$$

Assim,

- se $k \text{ é ímpar} \wedge [a_k] \notin \text{BI}$, tem-se que $\underline{a}_k \neq 0$ e então

- ♦ se $[a_k] \in \text{I}$, então $\underline{a}_k > 0$ e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \overline{p}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} p_{U-}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underline{a}_k * x^k = -\infty$$

indicando que

$$\forall [b] \in \mathcal{I}\mathfrak{R}, \exists x_b \in \mathfrak{R}, \forall x \in \mathfrak{R}, x < x_b \Rightarrow p(x) < [b],$$

ou seja, que o menor extremo da envoltória intervalar é finito;

- ♦ se $[a_k] \in \text{II} \vee [a_k] \in \text{BII} \vee [a_k] \in \text{III} \vee [a_k] \in \text{BIII} \vee [a_k] \in \text{IV}$, então $\underline{a}_k < 0$ e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \overline{p}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} p_{U-}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underline{a}_k * x^k = +\infty$$

indicando que $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = (-\infty; +\infty)$ e então

$$\forall [b] \in \mathcal{I}\mathfrak{R}, \exists x_b \in \mathfrak{R}, \forall x \in \mathfrak{R}, x \leq x_b \Rightarrow p(x) \cap [b] \neq \emptyset,$$

ou seja, que o menor extremo da envoltória intervalar é $-\infty$;

- se $k \text{ é par} \wedge [a_k] \notin \text{BIII}$, tem-se que $\overline{a}_k \neq 0$ e então

- ♦ se $[a_k] \in \text{I} \vee [a_k] \in \text{BI} \vee [a_k] \in \text{II} \vee [a_k] \in \text{BII} \vee [a_k] \in \text{III}$, então $\overline{a}_k > 0$ e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \overline{p}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} p_{U-}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \overline{a}_k * x^k = +\infty$$

indicando que $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = (-\infty; +\infty)$ e então

$\forall [b] \in \mathcal{I}\mathfrak{R}, \exists x_b \in \mathfrak{R}, \forall x \in \mathfrak{R}, x \leq x_b \Rightarrow p(x) \cap [b] \neq \emptyset$,
ou seja, que o menor extremo da envoltória intervalar é $-\infty$;

- ♦ se $[a_k] \in \text{IV}$, então $\overline{a_k} < 0$ e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \overline{p}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} p_{U^-}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \overline{a_k} * x^k = -\infty$$

indicando que

$$\forall [b] \in \mathcal{I}\mathfrak{R}, \exists x_b \in \mathfrak{R}, \forall x \in \mathfrak{R}, x < x_b \Rightarrow p(x) < [b],$$

ou seja, que o menor extremo da envoltória intervalar é finito.

Caso 3(b): $\forall j > 0, [a_j] \in \text{O} \vee (j \text{ é ímpar} \wedge [a_j] \in \text{BI}) \vee (j \text{ é par} \wedge [a_j] \in \text{BIII})$

Nesse caso é necessário observar que

$$\forall j, n \geq j > 0, \begin{cases} j \text{ é ímpar} & \rightarrow a_j = 0 \\ j \text{ é par} & \rightarrow \overline{a_j} = 0 \end{cases},$$

e então

$$\overline{p}(x) = p_{U^-}(x) = \overline{a_0}.$$

Além disso,

- se $[a_n] \in \text{BI} \wedge n$ é ímpar, então $\overline{a_n} > 0$ e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \overline{p}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} p_{L^-}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \overline{a_n} * x^n = -\infty;$$

- se $[a_n] \in \text{BIII} \wedge n$ é par, então $\underline{a_n} < 0$ e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \underline{p}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} p_{L^-}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underline{a_n} * x^n = -\infty.$$

Assim,

- se $\underline{a_0} \geq \underline{b}$, então

$$\forall [b] \in \mathcal{I}\mathfrak{R}, \forall x \in \mathfrak{R}_*, p(x) \cap [b] \neq \emptyset,$$

ou seja, o menor extremo da envoltória intervalar é $-\infty$.

- se $\underline{a_0} < \underline{b}$, então

$$\forall [b] \in \mathcal{I}\mathfrak{R}, \forall x \in \mathfrak{R}_*, p(x) \cap [b] = \emptyset,$$

ou seja, a equação não possui extremo negativo para a envoltória intervalar.

Caso 4: $([a_n] \in \text{BI} \wedge n \text{ é par}) \vee ([a_n] \in \text{BIII} \wedge n \text{ é ímpar})$

Caso 4(a): $\exists k > 0, \forall j > k, ([a_j] \in \text{O} \vee \begin{cases} j \text{ é ímpar} & \rightarrow [a_j] \in \text{BIII} \\ j \text{ é par} & \rightarrow [a_j] \in \text{BI} \end{cases}) \wedge [a_k] \notin \text{O}$

Nesse caso é necessário observar que

$$\forall j, n \geq j > k, \begin{cases} j \text{ é ímpar} & \rightarrow \overline{a_j} = 0 \\ j \text{ é par} & \rightarrow \underline{a_j} = 0 \end{cases},$$

e então

$$\underline{p}(x) = p_{L^-}(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \underline{a_{2^*i}} * x^{2^*i} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \overline{a_{2^*i+1}} * x^{2^*i+1}.$$

Além disso,

- se $[a_n] \in \text{BI} \wedge n$ é par, então $\overline{a_n} > 0$ e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \overline{p}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} p_{U^-}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \overline{a_n} * x^n = +\infty;$$

- se $[a_n] \in \text{BIII} \wedge n$ é ímpar, então $\underline{a_n} < 0$ e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \overline{p}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} p_{U^-}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \overline{a_n} * x^n = +\infty.$$

Assim,

- se k é ímpar $\wedge [a_k] \notin \text{BIII}$, tem-se que $\overline{a_k} \neq 0$ e então
 - ♦ se $[a_k] \in \text{I} \vee [a_k] \in \text{BI} \vee [a_k] \in \text{II} \vee [a_k] \in \text{BII} \vee [a_k] \in \text{III}$, então $\overline{a_k} > 0$ e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \underline{p}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} p_{L^-}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \overline{a_k} * x^k = -\infty$$

indicando que $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = (-\infty; +\infty)$ e então

$$\forall [b] \in \mathfrak{I}\mathfrak{R}, \exists x_b \in \mathfrak{R}, \forall x \in \mathfrak{R}, x \leq x_b \Rightarrow p(x) \cap [b] \neq \emptyset,$$

ou seja, que o menor extremo da envoltória intervalar é $-\infty$;

- ♦ se $[a_k] \in \text{IV}$, então $\overline{a_k} < 0$ e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \underline{p}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} p_{L^-}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \overline{a_k} * x^k = +\infty$$

indicando que

$$\forall [b] \in \mathfrak{I}\mathfrak{R}, \exists x_b \in \mathfrak{R}, \forall x \in \mathfrak{R}, x < x_b \Rightarrow p(x) > [b],$$

ou seja, que o menor extremo da envoltória intervalar é finito;

- se k é par $\wedge [a_k] \notin \text{BI}$, tem-se que $\underline{a_k} \neq 0$ e então

- ♦ se $[a_k] \in \text{I}$, então $\underline{a_k} > 0$ e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \underline{p}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} p_{L^-}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underline{a_k} * x^k = +\infty$$

indicando que

$$\forall [b] \in \mathfrak{I}\mathfrak{R}, \exists x_b \in \mathfrak{R}, \forall x \in \mathfrak{R}, x < x_b \Rightarrow p(x) > [b],$$

ou seja, que o menor extremo da envoltória intervalar é finito;

- ♦ se $[a_k] \in \text{II} \vee [a_k] \in \text{BII} \vee [a_k] \in \text{III} \vee [a_k] \in \text{BIII} \vee [a_k] \in \text{IV}$, então $\underline{a_k} < 0$ e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \underline{p}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} p_{L^-}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underline{a_k} * x^k = -\infty$$

indicando que $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = (-\infty; +\infty)$ e então

$$\forall [b] \in \mathfrak{I}\mathfrak{R}, \exists x_b \in \mathfrak{R}, \forall x \in \mathfrak{R}, x \leq x_b \Rightarrow p(x) \cap [b] \neq \emptyset,$$

ou seja, que o menor extremo da envoltória intervalar é $-\infty$.

Caso 4(b): $\forall j > 0, [a_j] \in \text{O} \vee (j \text{ é ímpar } \wedge [a_j] \in \text{BIII}) \vee (j \text{ é par } \wedge [a_j] \in \text{BI})$

Nesse caso é necessário observar que

$$\forall j, n \geq j > 0, \begin{cases} j \text{ é ímpar} & \rightarrow \overline{a_j} = 0 \\ j \text{ é par} & \rightarrow \underline{a_j} = 0 \end{cases},$$

e então

$$\underline{p}(x) = p_{L^-}(x) = \underline{a_0}.$$

Além disso,

- se $[a_n] \in \text{BI} \wedge n$ é par, então $\overline{a_n} > 0$ e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \overline{p}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} p_{U^-}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \overline{a_n} * x^n = +\infty;$$

- se $[a_n] \in \text{BIII} \wedge n$ é ímpar, então $\underline{a_n} < 0$ e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \bar{p}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} p_{U^-}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underline{a}_n * x^n = +\infty.$$

Assim,

- se $\underline{a}_0 \leq \bar{b}$, então

$$\forall [b] \in \mathcal{I}\mathfrak{R}, \forall x \in \mathfrak{R}_*^-, p(x) \cap [b] \neq \emptyset,$$

ou seja, o menor extremo da envoltória intervalar é $-\infty$;

- se $\underline{a}_0 > \bar{b}$, então

$$\forall [b] \in \mathcal{I}\mathfrak{R}, \forall x \in \mathfrak{R}_*^-, p(x) \cap [b] = \emptyset,$$

ou seja, a equação não possui extremo negativo para a envoltória intervalar.

Assim, é provado válido o Lema 7.2. ■

1.22 Prova do Teorema 7.6

A aplicação do Algoritmo 3 sobre uma equação polinomial de grau n é dominada pelo custo de resolução das equações polinomiais reais apresentadas na etapa 2.3. Estas, no pior caso, serão 4 (duas para $x < 0$ e duas para $x > 0$), já que o caso de $x = 0$ gera equações triviais. A obtenção de tais soluções gera uma complexidade de ordem

$$O(4*s(n)).$$

Adicionalmente, a ordenação das listas L_{inf} e L_{sup} gera um custo de ordem

$$O(2*r(n)).$$

Como todas as demais etapas envolvem essencialmente comparações e assumindo-se que o custo de uma comparação é muito menor que o de uma operação de adição ou de multiplicação, é aceitável afirmar que a complexidade de pior caso do Algoritmo 3 será

$$C_p(n) \sim O(4*s(n) + 2*r(n)).$$

Logo, é válido o Teorema 7.6. ■

1.23 Prova do Teorema 7.7

Nas condições enunciadas:

- se $\underline{p}(x) = \bar{b}$ ou $\bar{p}(x) = \underline{b}$ possuem soluções reais com multiplicidade maior que 1, então como cada solução é associada a um conjunto compacto,

$$\exists j, k, [x_j^e] \cap [x_k^e] \neq \emptyset \Rightarrow \exists t, t < n, \{[x_i^e]\}_{i=1..t}, \forall j, k, [x_j^e] \cap [x_k^e] = \emptyset \wedge [x^e] = \bigcup_{i=1}^t [x_i^e].$$

- se $\exists t, t < n, \{[x_i^e]\}_{i=1..t}, \forall j, k, [x_j^e] \cap [x_k^e] = \emptyset \wedge [x^e] = \bigcup_{i=1}^t [x_i^e]$, então

$\exists x_i, 1 \leq i \leq t, (\underline{p}(x_i) = \bar{b} \vee \bar{p}(x_i) = \underline{b})$ e x_i tem multiplicidade maior que 1, pois cada solução é associada a um conjunto compacto.

Logo, é válido o Teorema 7.7. ■

Anexo 2 Complexidade das Etapas do Algoritmo 1

Neste anexo são detalhados os custos, no pior caso, das diversas etapas do Algoritmo 1, para o cálculo das soluções próprias de equações polinomiais intervalares. A notação assumida, juntamente com a análise da complexidade podem ser encontrados na Seção 6.4.

Etapa	Comparações	Atribuições	Operações Aritméticas
1	-	-	-
2	-	-	-
2.1	-	-	-
2.2	* n	* n	* n
2.2.1	8	3	-
2.3	-	-	-
2.4	-	2	-
2.5	-	1	-
2.6	* n	* n	* n
2.6.1	-	1	-
2.6.2	4	-	-
2.6.2.1	-	$2^t, 0 \leq t \leq n-1$	-
2.6.2.2	-	$2^t, 0 \leq t \leq n-1$	-
2.6.2.3	* $2^t, 0 \leq t \leq n-1$	* $2^t, 0 \leq t \leq n-1$	* $2^t, 0 \leq t \leq n-1$
2.6.2.3.1	-	2	-
2.6.2.3.2	-	1	-
2.6.2.4	-	-	-
2.6.2.5	* $2^t, 0 \leq t \leq n-1$	* $2^t, 0 \leq t \leq n-1$	* $2^t, 0 \leq t \leq n-1$
2.6.2.5.1	-	2	-
2.6.2.5.2	-	1	-
2.6.2.6	-	-	-
2.6.3	-	-	-
2.6.3.1	* $2^t, 0 \leq t \leq n-1$	* $2^t, 0 \leq t \leq n-1$	* $2^t, 0 \leq t \leq n-1$
2.6.3.1.1	-	2	-
2.6.3.2	-	-	-
2.6.4	-	-	-
2.7	-	-	-
2.8	* 2^n	* 2^n	* 2^n
2.8.1	-	-	snl(n)
2.8.2	2*n	-	-
2.8.3	-	-	-
2.9	-	-	-
3	-	-	-
4	-	-	-

Anexo 3 Complexidade das Etapas do Algoritmo 2

Neste anexo são detalhados os custos, no pior caso, das diversas etapas do Algoritmo 2, para o cálculo das soluções próprias de sistemas equações lineares intervalares. A notação assumida, juntamente com a análise da complexidade podem ser encontrados na Seção 6.8.

Etapa	Comparações	Atribuições	Operações Aritméticas
1	-	-	-
2	-	8^n	-
3	$* 8^n$	$* 8^n$	$* 8^n$
3.1	-	n	-
3.2	$* n$	$* n$	$* n$
3.2.1	-	2	-
3.2.2	$* n$	$* n$	$* n$
3.2.2.1	-	1	-
3.2.2.2	4	-	-
3.2.2.2.1	-	$2^t * (n^2 + 1), 0 \leq t \leq n - 1$	-
3.2.2.2.2	-	$2^t, 0 \leq t \leq n - 1$	-
3.2.2.2.3	$* 2^t, 0 \leq t \leq n - 1$	$* 2^t, 0 \leq t \leq n - 1$	$* 2^t, 0 \leq t \leq n - 1$
3.2.2.2.3.1	-	2	-
3.2.2.2.3.2	-	1	-
3.2.2.2.4	-	-	-
3.2.2.2.5	$* 2^t, 0 \leq t \leq n - 1$	$* 2^t, 0 \leq t \leq n - 1$	$* 2^t, 0 \leq t \leq n - 1$
3.2.2.2.5.1	-	2	-
3.2.2.2.5.2	-	1	-
3.2.2.2.6	-	-	-
3.2.2.3	-	-	-
3.2.2.3.1	$* 2^t, 0 \leq t \leq n - 1$	$* 2^t, 0 \leq t \leq n - 1$	$* 2^t, 0 \leq t \leq n - 1$
3.2.2.3.1.1	-	2	-
3.2.2.3.2	-	-	-
3.2.2.4	-	-	-
3.2.3	-	-	-
3.3	-	-	-
3.4	$* \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} * 2^t * 6^{n-t}$	$* \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} * 2^t * 6^{n-t}$	$* \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} * 2^t * 6^{n-t}$
3.4.1	-	-	sl(2*n)
3.4.2	2*n	-	-
3.4.3	-	-	-
3.5	-	-	-
4	-	-	-
5	-	-	-

Anexo 4 Instruções de Uso da Ferramenta de Apoio à Visualização de Equações Intervalares

Este anexo apresenta algumas informações para a instalação e uso da ferramenta desenvolvida para a visualização das soluções próprias de equações intervalares.

Para fazer uso da ferramenta de visualização desenvolvida é necessário:

Instalar o JDK 1.2 ou superior

Para utilizar a ferramenta desenvolvida você necessita primeiramente instalar o suporte para o Java. A ferramenta é compatível com JDK 1.2, mas versões superiores deverão funcionar também.

Instalar o Kitware VTK 3.2-Java ou superior

As referências para os arquivos de suporte utilizados na geração desta ferramenta encontram-se no endereço www.mat.pucrs.br/~vaccaro/sei/. Alternativamente, uma versão mais recente desta biblioteca *freeware* pode ser obtida a partir do endereço <http://www.kitware.com>.

Configurar as variáveis de ambiente

A variável de ambiente CLASSPATH deve conter a referência ao diretório onde se encontra a biblioteca **vtk.jar**.

Instalar a ferramenta desenvolvida

Após a instalação do VTK, você deve descompactar o arquivo **vtk_tool.zip**, que contém a ferramenta desenvolvida e os arquivos de dados em uma árvore de diretórios. É importante a manutenção da árvore de diretórios em questão para o correto funcionamento da ferramenta. Sua execução ocorre através da classe **Principal.class**.

Finalmente, cabe observar que:

- Os arquivos relativos ao VTK são fornecidos com propósitos puramente acadêmicos e segundo as regras de software de código aberto definidas pela Kitware;
- A ferramenta de visualização é fornecida com os mesmos propósitos acadêmicos. Os autores não se responsabilizam por quaisquer eventos desagradáveis decorrentes de sua utilização.

Anexo 5 Resenha de Artigos e Livros

Neste anexo é apresentado um breve sumário das referências consultadas na área de Matemática Intervalar, com comentários julgados pertinentes pelo autor:

- [ALE 83] ALEFELD, G.; HERZBERGER, J. **Introduction to Interval Computation**. New York: Academic Press, 1983.

Apesar de relativamente antigo, este livro é uma das principais referências em aritmética intervalar, desenvolvendo tópicos desde a definição das operações aritméticas intervalares e suas propriedades até a solução de sistemas de equações intervalares.

- [ALE 98] ALEFELD, G.; CLAUDIO, D. M. The basic properties of interval arithmetic, its software realizations and some applications. **Computers and Structures**, Amsterdam, n. 67, p. 3-8, 1998.

Os autores apresentam uma breve introdução à análise intervalar e suas aplicações. Também são apresentadas algumas linguagens de programação que suportam esse tipo de dado.

- [ALE 2000] ALEFELD, G.; MAYER, G. Interval analysis: theory and applications. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, Amsterdam, n. 121, p. 421-464, 2000.

Este artigo destina-se a fornecer uma visão geral e atualizada da pesquisa em Análise Intervalar, orientada historicamente. São referidos problemas tais como a solução de sistemas de equações intervalares, sistemas não lineares, determinação de autovalores algébricos intervalares e resolução de certos tipos de equações diferenciais. Uma seção é devotada à caracterização dos softwares que apresentam suporte a operações intervalares. Infelizmente, as aplicações descritas são exclusivamente teóricas, como em um livro texto de Análise Matemática.

- [BER 72] BERTI, S. N. Some Relations Between Interval Functions (I). **Mathematica**, [S.l.], v. 14, n. 37, p. 9-26, 1972.

Neste artigo o autor apresenta um estudo algébrico de algumas relações entre expressões quadráticas intervalares e as compara com a propriedade de subdistributividade intervalar da multiplicação em relação à adição.

- [BOH 96] BOHLENDER, G. **Literature on Enclosure Methods and Related Topics**. Versão de 24 de setembro, 1996. Disponível em: <<http://www.uni-karlsruhe.de/~Gerd.Bohlender/listlist.html>>. Acesso em: 07 jul. 2000.

O autor apresenta uma lista bastante completa de publicações sobre métodos de enquadramento, que permitem a obtenção de resultados verificados em cálculos científicos. Infelizmente, as atualizações da lista cessam em 1996.

- [CLA 92a] CLAUDIO, D. M.; FRANCIOSI, B. R. T. A domain approach to interval mathematics. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON INTERVAL AND STOCHASTIC METHODS IN SCIENCE AND ENGINEERING, 1992, Moscou. **Proceedings...** Moscou: Department of Automatic Control, 1992. p. 13-17.

Os autores apresentam uma forma diferenciada de abordagem da análise intervalar através da Teoria dos Domínios Contínuos. Segundo os autores, essa abordagem tem a vantagem de prover uma lógica associada às operações, a lógica de Scott, além de ser construtiva e computacional.

- [CLA 92b] CLAUDIO, D. M.; ESCARDÓ, M. H.; FRANCIOSI, B. R. T. An Order-Theoretic Approach to Interval Analysis. **Interval Computations**, Dordrecht, v. 5, n. 3, p. 38-45, 1992.

Neste artigo os autores demonstram que a topologia de Scott em \mathbb{R} é compatível com a monotonicidade da inclusão e a topologia usual dos números reais. Esta demonstração é realizada enfatizando-se o papel da relação de inclusão como um qualificador da informação trazida por um intervalo de reais.

- [CLA 96] CLAUDIO, D. M.; OLIVEIRA, J. B. Interval Approximations. **ZAMM**, [S.l.], n. 76, p. 374-376, 1996.

Os autores apresentam a relação de aproximação intervalar como substitutiva da relação de igualdade entre intervalos, definindo suas propriedades algébricas.

- [CLA 9-a] CLAUDIO, D. M. **A new approach for solving equations with interval coefficients**, [199-]. Não Publicado.

O artigo apresenta uma extensão das idéias desenvolvidas por Korzenowski e Claudio [KOR 94], e por Claudio e Oliveira [CLA 96], propondo uma nova relação de equivalência para a operação entre intervalos e definindo o “Corpo Dinâmico”. Propriedades básicas e uma caracterização desta estrutura são também apresentadas.

- [CLA 9-b] CLAUDIO, D.; FERREIRA, J. A.; OLIVEIRA, F.; PATRÍCIO, F. **Roots of Polynomials with Interval Coefficients**, [199-]. Não Publicado.

Os autores apresentam uma formulação fundamentada na de Bhaskara e em propriedades que caracterizam raízes de equações polinomiais reais para a determinação de envoltórias intervalares para as raízes de equações polinomiais de segundo grau. São determinadas expressões para o cálculo de envoltórias de raízes reais e estimativas *a priori* de envoltórias de raízes complexas.

- [COX 99] COXSON, G. E. Computing Exact Bounds on Elements of na Inverse Interval Matrix is NP-Hard. **Reliable Computing**, Dordrecht, n. 5, p. 137-142, 1999.

Neste artigo o autor demonstra que a obtenção da matriz inversa de uma matriz intervalar que contenha os extremos exatos para cada elemento é um problema NP-Difícil. Portanto, nenhum algoritmo terá uma complexidade menor que exponencial no pior caso, a menos que $P = NP$.

- [DAN 99] DANQING, Z.; WEIGUO, L.; ZUHE, S. Solving Undetermined Systems with Interval Methods. **Reliable Computing**, Dordrecht, n. 5, p. 23-33, 1999.

Os autores apresentam um operador similar ao de Krawczyk e um algoritmo generalizado do tipo Krawczyk-Moore para a solução de sistemas indeterminados. O principal resultado é a garantia de unicidade e convergência do algoritmo sob determinadas condições.

- [DEN 98] DENNIS, D.; KREINOVICH, V.; RUMP, S. M. Intervals and the Origins of Calculus. **Reliable Computing**, Dordrecht, n. 4, p. 191-197, 1998.

Os autores apresentam um breve e interessante histórico da evolução de certos conceitos matemáticos através de problemas. Em particular referem que um dos primeiros algoritmos intervalares foi desenvolvido por John Wallis no século XVII, sendo significativo na definição do Cálculo Infinitesimal desenvolvido por Newton e Leibniz.

- [DIM 92] DIMITROVA, N. S.; MARKOV, S. M.; POPOVA, E. D. Extended interval arithmetics: new results and applications. ATANASSOVA, L.; HERZBERGER, J. (Ed.). **Computer Arithmetic and Enclosure Methods**. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1992. p. 225-232.

Os autores apresentam resultados que comparam diferentes estruturas aritméticas intervalares: a partir o conceito de intervalo, e a partir do conceito de extensão de número real. O trabalho é analisado essencialmente do ponto de vista algébrico, assim como as aplicações.

- [FRA 99] FRANCIOSI, B. R. T. **Representação Geométrica de Intervalos**. 1999. 108 p. Tese (Doutorado em Ciência da Computação) – Instituto de Informática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

A autora apresenta e explora uma abordagem diferenciada para a representação gráfica de intervalos, através da qual é possível a análise visual de operações e de comportamentos de seqüências deste tipo de dado. Tal análise é realizada com o auxílio de propriedades geométricas derivadas no plano cartesiano.

- [HEI 95] HEINDL, G. Experiences with a method for enclosing solutions of systems of equations. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, Amsterdam, n. 60, p. 63-76, 1995.

O autor apresenta dois algoritmos para o cálculo de inclusões intervalares para as soluções de sistemas reais, fazendo uso de métodos intervalares desenvolvidos pelo Prof. S. Rump. Um algoritmo destina-se à obtenção de

envoltórias intervalares para as componentes da solução de sistemas lineares e o outro, de sistemas não lineares.

- [JAH 74] JAHN, K. U. Eine Theorie der Gleichungssysteme mit Interval-Koeffizienten. **ZAMM**, [S.l.], n. 54, p. 405-412, 1974.

Neste artigo (em língua alemã) o autor apresenta uma discussão sobre a solubilidade de sistemas de equações lineares com coeficientes intervalares. Alguns métodos finitos para a construção das soluções são apresentados e as soluções interpretadas.

- [KEA 96] KEARFOTT, R. B. Interval Computations: Introduction, Uses, and Resources. **Euromath Bulletin**, [S.l.] v. 1, n. 2, p. 95-112, 1996. Disponível em: <<http://interval.louisiana.edu/preprints/survey.ps>>. Acesso em: 12 dez. 2000.

Neste *survey* o autor apresenta uma visão geral da pesquisa em Matemática Intervalar, procurando focar problemas-chave e algumas questões em aberto. O artigo também fornece informações para o acesso à literatura tradicional na área e para referências em meio eletrônico.

- [KOL 99] KOLEV, L. V. An Improved Method for Global Solution of Non-Linear Systems. **Reliable Computing**, Dordrecht, n. 5, p. 103-111, 1999.

O autor apresenta duas modificações sobre um método intervalar que permite a obtenção de soluções globais isoladas de sistemas de equações não lineares. Dois exemplos numéricos são apresentados e comparados com resultados obtidos através do método de Gauss intervalar.

- [KOR 94] KORZENOWSKI, H. **Estudo sobre Resolução de Equações de Coeficientes Intervalares**. 1994. 132 p. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Instituto de Informática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

A autora apresenta uma relação de equivalência, denominada relação de aproximação, em substituição à igualdade algébrica estrutural entre intervalos. Com base nesta relação a autora apresenta um espaço de soluções similar a um corpo, no qual torna-se possível a determinação de envoltórias para as soluções de equações polinomiais de coeficientes intervalares.

- [KUL 81] KULISCH, U. W.; MIRANKER, W. L. **Computer Arithmetic in Theory and Practice**. New York: Academic Press, 1981.

Neste livro, os autores partem de uma abordagem algébrica de maior amplitude, em uma forma idealizada e apropriada para definir uma aritmética computacional. Com base neste estudo abstrato descrevem como uma aritmética de ponto flutuante pode ser construída de forma ótima. Em particular, o capítulo 4 apresenta uma descrição da aritmética intervalar segundo este ponto de vista.

- [KUL 86] KULISCH, U. W.; MIRANKER, W. L. The arithmetic of the digital computer: a new approach. **SIAM Review**, [S.l.], v. 28, n. 1, p. 1-40, Mar. 1986.

Neste artigo os autores apresentam um estudo aprofundado sobre implementações de aritméticas em computadores. Regras para a implementação de aritméticas de ponto flutuante são apresentadas e discutidas. O artigo discute também formas de implementação da aritmética intervalar e de operações associadas para o suporte a processos automáticos de validação de erros, de modo a garantir alta exatidão no processamento de cálculos científicos.

- [KUL 92] KULISCH, U. W. Numerical Algorithms with Automatic Result Verification. **Lectures in Applied Mathematics**, [S.l.], v. 32, p. 471-502, 1992.

Neste artigo o autor apresenta um coprocessador aritmético que suporta operações intervalares de modo a garantir verificação automática de resultados em aritmética de ponto flutuante. Parte dos resultados é baseada em [KUL 81] e em trabalhos subsequentes. Alguns exemplos de aplicação são brevemente descritos.

- [MAR 95] MARKOV, S. On directed interval arithmetic and its applications. **J. UCS**, [S.l.], v. 1, n. 7, p. 510-521, 1995.

O autor compara duas formas alternativas de aritmética intervalar: intervalos dirigidos (generalizados), estudados por Kaucher, e intervalos normais, com operações internas e externas. Infelizmente, uma notação um tanto carregada dificulta a leitura e a compreensão total das idéias apresentadas.

- [MAR 96] MARKOV, S.; POPOVA, E.; ULLRICH, Ch. On the Solution of Linear Algebraic Equations Involving Interval Coefficients. In: MARGENOV, S.; VASSILEVSKI, P. (Ed.). **Iterative Methods in Linear Algebra**. [S.l.]: IMACS, 1996. p. 216-225. (IMACS Series in Computational and Applied Mathematics, n. 3)

Neste artigo os autores apresentam novas relações relevantes às operações entre intervalos dirigidos, de tal forma a operar algebricamente com matrizes intervalares. A partir dessas relações um algoritmo iterativo para a determinação de soluções algébricas de sistemas lineares intervalares similar ao de Gauss-Jacobi é proposto e sua convergência é demonstrada.

- [MAR 99a] MARKOV, S.; OKUMURA, K. The Contribution of T. Sunaga to Interval Analysis and Reliable Computing. In: CSENDES, T. (Ed.). **Developments in Reliable Computing**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. p. 163-184.

Neste texto os autores apresentam uma resenha do artigo de Sunaga [SUN 58], agregando uma perspectiva histórica às idéias apresentadas por este último autor. Uma relação dos principais resultados sugeridos por Sunaga e uma breve biografia vêm em anexo ao texto.

- [MAR 99b] MARKOV, S. An iterative method for algebraic solution to interval equations. **Applied Numerical Mathematics**, Amsterdam, n. 30, p. 225-239, 1999.

Neste artigo o autor apresenta sucintamente as principais definições e operações da álgebra intervalar dirigida, na qual intervalos com o extremo inferior maior que o extremo superior são aceitos como válidos e operados adequadamente. O tema principal do artigo é um método iterativo similar ao de Gauss-Jacobi capaz de determinar as soluções algébricas de sistemas lineares intervalares, similar ao apresentado em [MAR 96].

- [MOO 66] MOORE, R. E. **Interval Analysis**. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1966.

Neste livro, baseado na tese do mesmo autor, são apresentadas as primeiras idéias que fundamentam a aritmética intervalar. Moore refere não apenas propriedades elementares, referentes à aritmética e topologia, mas define métodos para a avaliação de funções e a determinação de raízes, de integrais, de soluções de equações diferenciais e de expansões em séries de Taylor para funções intervalares.

- [MOO 79] MOORE, R. E. **Methods and Applications of Interval Analysis**. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1979.

Neste livro o autor concentra-se em alguns métodos e aplicações da análise intervalar até a época em questão. O livro inicia com uma apresentação condensada das principais propriedades algébricas da aritmética intervalar. Em seguida são apresentadas idéias relacionadas à convergência finita em aritmética intervalar e a definição de condições suficientes para a existência e a convergência de soluções de sistemas de equações algébricas. Os três capítulos finais são destinados a aplicações e, em particular, o capítulo 9 apresenta um interessante exemplo no contexto financeiro. O apêndice traz ainda um índice bibliográfico de publicações na área, na época.

- [OLI 99] OLIVEIRA, J. B. S.; CLAUDIO, D. M. **Some properties of polynomials with interval coefficients**, 1999. Não Publicado.

Neste breve artigo são estudadas algumas propriedades características de funções polinomiais de coeficientes intervalares e variável real. Em particular os polinômios reais limitantes da função polinomial intervalar são caracterizados de forma bastante simples e alguns exemplos são apresentados. Também são apresentadas considerações sobre a existência de raízes reais de acordo com características dos coeficientes e das avaliações dos polinômios limitantes. A versão disponível no momento da realização dessa pesquisa encontrava-se incompleta.

- [OPP 88] OPPENHEIMER, E. P.; MICHEL, A. N. Application of Interval Analysis Techniques to Linear Systems: Part I – Fundamental Results. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, New York, v. 35, n. 9, p. 1129-

1138, 1988.

Os autores apresentam um espaço métrico baseado na aritmética intervalar e considerado mais adequado para o tipo de análise por eles realizada. O objetivo central do artigo é o estudo de equações diferenciais de primeira ordem sujeitas a parâmetros linearmente dependentes de variáveis intervalares.

- [POP 2000] POPOVA, E. D. **All About Generalized Interval Distributive Relations. I. Complete Proof of the Relations.** Sofia, 2000. Disponível em: <<http://www.math.bas.bg/~epopova/papers/index.html>>. Acesso em: 20 dez. 2000.

Neste artigo extraído da tese de doutorado da autora, são apresentados resultados referentes à existência de relações distributivas generalizadas envolvendo intervalos próprios e intervalos impróprios.

- [ROH 98] ROHN, J.; REX, G. Enclosing Solutions of Linear Equations. **SIAM Journal in Numerical Analysis**, [S.l.], v. 35, n. 2, p. 524-539, 1998.

Os autores apresentam uma releitura do método desenvolvido por S. Rump para a determinação de envoltórias intervalares para as soluções reais de sistemas de equações lineares. A principal diferença é que o trabalho apresenta uma versão real para o método intervalar de Rump e que garante as mesmas condições de validação e convergência das soluções. Não são apresentados exemplos ou resultados de eficiência computacional.

- [RUM 88] RUMP, S. M. Algebraic Computation, Numerical Computation and Verified Inclusions. In: JANßEN, R. (Ed.). **Trends in Computer Algebra.** Berlin: Springer Verlag, 1988. p. 177-197.

O autor faz uma análise comparativa das três diferentes abordagens de solução computacional de problemas listadas no título. Em particular, analisa as características, os prós e os contras de cada abordagem, bem como de combinações dessas.

- [RUM 94] RUMP, S. M. Verification Methods for Dense and Sparse Systems of Equations. In: HERZBERGER, J. (Ed.). **Topics in Validated Computations - Studies in Computational Mathematics.** Amsterdam: Elsevier Science, 1994. p. 63-136.

Neste trabalho o autor apresenta uma análise comparativa de diversos métodos autovalidáveis para a resolução de sistemas de equações densos e esparsos. Os resultados propostos pelo autor são comparados com os de outros métodos. Em particular, resultados associados à determinação de existência e unicidade de soluções são apresentados, assim como resultados para certos tipos de matrizes.

- [SUN 58] SUNAGA, T. Theory of an Interval Algebra and its Applications to Numerical Analysis. **RAAG Memoirs**, [S.l.], v. 2, p. 547-564, 1958.

Neste artigo, relatado como um dos marcos fundamentais da pesquisa em Matemática Intervalar [MAR 99a, ALE 2000], o autor apresenta as primeiras definições e aplicações da utilização de intervalos como representantes de números reais sujeitos a imprecisões.

- [YAM 2000] YAMAMURA, K. Finding All Solutions of Nonlinear Equations Using Linear Combinations of Functions. **Reliable Computing**, Dordrecht, n. 6, p. 105-113, 2000.

O autor apresenta um teste para a verificação da não existência de soluções em sistemas não lineares. Quatro exemplos numéricos evidenciam a eficiência da abordagem proposta por este autor.

- [WOL 2000] WOLFE, M. A. Interval mathematics, algebraic equations and optimization. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, Amsterdam, n. 124, p. 263-280, 2000.

O autor apresenta um *survey* sobre Matemática Intervalar, concentrando-se na apresentação de métodos para a solução de problemas de cunho aplicado, tais como a determinação da envoltória intervalar de equações algébricas intervalares de variável real, lineares ou não lineares; e otimização, local ou global.

Bibliografia

- [ABR 91] ABRAMSKY, S. Domain Theory in Logical Form. **Pure Applied Logic**, [S.l.], n. 5, p. 1-77, 1991.
- [ALE 83] ALEFELD, G.; HERZBERGER, J. **Introduction to Interval Computation**. New York: Academic Press, 1983.
- [ALE 98] ALEFELD, G.; CLAUDIO, D. M. The basic properties of interval arithmetic, its software realizations and some applications. **Computers and Structures**, Amsterdam, n. 67, p. 3-8, 1998.
- [ALE 2000] ALEFELD, G.; MAYER, G. Interval analysis: theory and applications. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, Amsterdam, n. 121, p. 421-464, 2000.
- [BER 72] BERTI, S. N. Some Relations Between Interval Functions (I). **Mathematica**, [S.l.], v. 14, n. 37, p. 9-26, 1972.
- [BOH 96] BOHLENDER, G. **Literature on Enclosure Methods and Related Topics**. Versão de 24 de setembro, 1996. Disponível em: <<http://www.uni-karlsruhe.de/~Gerd.Bohlender/listlist.html>>. Acesso em: 07 jul. 2000.
- [CLA 92a] CLAUDIO, D. M.; FRANCIOSI, B. R. T. A domain approach to interval mathematics. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON INTERVAL AND STOCHASTIC METHODS IN SCIENCE AND ENGINEERING, 1992, Moscou. **Proceedings...** Moscou: Department of Automatic Control, 1992. p. 13-17.
- [CLA 92b] CLAUDIO, D. M.; ESCARDÓ, M. H.; FRANCIOSI, B. R. T. An Order-Theoretic Approach to Interval Analysis. **Interval Computations**, Dordrecht, v. 5, n. 3, p. 38-45, 1992.
- [CLA 96] CLAUDIO, D. M.; OLIVEIRA, J. B. Interval Approximations. **ZAMM**, [S.l.], n. 76, p. 374-376, 1996.
- [CLA 9-a] CLAUDIO, D. M. **A new approach for solving equations with interval coefficients**, [199-]. Não Publicado.
- [CLA 9-b] CLAUDIO, D.; FERREIRA, J. A.; OLIVEIRA, F.; PATRÍCIO, F. **Roots of**

Polynomials with Interval Coefficients, [199-]. Não Publicado.

- [COX 99] COXSON, G. E. Computing Exact Bounds on Elements of an Inverse Interval Matrix is NP-Hard. **Reliable Computing**, Dordrecht, n. 5, p. 137-142, 1999.
- [DAN 99] DANQING, Z.; WEIGUO, L.; ZUHE, S. Solving Undetermined Systems with Interval Methods. **Reliable Computing**, Dordrecht, n. 5, p. 23-33, 1999.
- [DEN 98] DENNIS, D.; KREINOVICH, V.; RUMP, S. M. Intervals and the Origins of Calculus. **Reliable Computing**, Dordrecht, n. 4, p. 191-197, 1998.
- [DIM 92] DIMITROVA, N. S.; MARKOV, S. M.; POPOVA, E. D. Extended interval arithmetics: new results and applications. ATANASSOVA, L.; HERZBERGER, J. (Ed.). **Computer Arithmetic and Enclosure Methods**. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1992. p. 225-232.
- [FRA 99] FRANCIOSI, B. R. T. **Representação Geométrica de Intervalos**. 1999. 108 p. Tese (Doutorado em Ciência da Computação) – Instituto de Informática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.
- [GER 99] GERSTING, J. **Mathematical Structures for Computer Science**. 4th ed. New York: W. H. Freeman, 1999.
- [GIE 80] GIERZ, G.; HOFMANN, K. H.; KEIMEL, K.; LAWSON, J. D.; MISLOVE, M.; SCOTT, D. A **Compendium of Continuous Lattices**. Berlin: Springer-Verlag, 1980.
- [HEI 95] HEINDL, G. Experiences with a method for enclosing solutions of systems of equations. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, Amsterdam, n. 60, p. 63-76, 1995.
- [JAH 74] JAHN, K. U. Eine Theorie der Gleichungssysteme mit Interval-Koeffizienten. **ZAMM**, [S.l.], n. 54, p. 405-412, 1974.
- [KEA 96] KEARFOTT, R. B. Interval Computations: Introduction, Uses, and Resources. **Euromath Bulletin**, [S.l.] v. 1, n. 2, p. 95-112, 1996. Disponível em: <<http://interval.louisiana.edu/preprints/survey.ps>>. Acesso em: 12 dez. 2000.
- [KOL 99] KOLEV, L. V. An Improved Method for Global Solution of Non-Linear Systems. **Reliable Computing**, Dordrecht, n. 5, p. 103-111, 1999.
- [KOR 94] KORZENOWSKI, H. **Estudo sobre Resolução de Equações de Coeficientes Intervalares**. 1994. 132 p. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Instituto de Informática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.
- [KRE 93] KREINOVICH, V.; LAKEYEV, A.; NOSKOV, S. Optimal solution of interval linear systems is intractible (NP-hard). **Interval Computations**,

- Dordrecht, n. 1, p. 6-14, 1993.
- [KRE 96] KREINOVICH, V.; LAKEYEV, A. Linear interval equations: computing enclosures with bounded relative or absolute overestimation is NP-hard. **Reliable Computing**, Dordrecht, n. 2, p. 341-350, 1996.
- [KUL 81] KULISCH, U. W.; MIRANKER, W. L. **Computer Arithmetic in Theory and Practice**. New York: Academic Press, 1981.
- [KUL 83] KULISCH, U. W.; MIRANKER, W. L. **A New Approach to Scientific Computation**. New York: Academic Press, 1983.
- [KUL 86] KULISCH, U. W.; MIRANKER, W. L. The arithmetic of the digital computer: a new approach. **SIAM Review**, [S.l.], v. 28, n. 1, p. 1-40, Mar. 1986.
- [KUL 92] KULISCH, U. W. Numerical Algorithms with Automatic Result Verification. **Lectures in Applied Mathematics**, [S.l.], v. 32, p. 471-502, 1992.
- [LIM 89] LIMA, E. L. **Curso de Análise**. 6. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1989. v. 1.
- [MAR 95] MARKOV, S. On directed interval arithmetic and its applications. **J. UCS**, [S.l.], v. 1, n. 7, p. 510-521, 1995.
- [MAR 96] MARKOV, S.; POPOVA, E.; ULLRICH, Ch. On the Solution of Linear Algebraic Equations Involving Interval Coefficients. In: MARGENOV, S.; VASSILEVSKI, P. (Ed.). **Iterative Methods in Linear Algebra**. [S.l.]: IMACS, 1996. p. 216-225. (IMACS Series in Computational and Applied Mathematics, n. 3)
- [MAR 99a] MARKOV, S.; OKUMURA, K. The Contribution of T. Sunaga to Interval Analysis and Reliable Computing. In: CSENDES, T. (Ed.). **Developments in Reliable Computing**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. p. 163-184.
- [MAR 99b] MARKOV, S. An iterative method for algebraic solution to interval equations. **Applied Numerical Mathematics**, Amsterdam, n. 30, p. 225-239, 1999.
- [MOO 66] MOORE, R. E. **Interval Analysis**. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1966.
- [MOO 79] MOORE, R. E. **Methods and Applications of Interval Analysis**. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1979.
- [OLI 99] OLIVEIRA, J. B. S.; CLAUDIO, D. M. **Some properties of polynomials with interval coefficients**, 1999. Não Publicado.
- [OPP 88] OPPENHEIMER, E. P.; MICHEL, A. N. Application of Interval Analysis

Techniques to Linear Systems: Part I – Fundamental Results. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, New York, v. 35, n. 9, p. 1129-1138, 1988.

- [POP 2000] POPOVA, E. D. **All About Generalized Interval Distributive Relations. I. Complete Proof of the Relations**. Sofia, 2000. Disponível em: <<http://www.math.bas.bg/~epopova/papers/index.html>>. Acesso em: 20 dez. 2000.
- [ROH 96] ROHN, J. Linear interval equations: computing enclosures with bounded relative overestimation is NP-hard. In: KEARFOTT, R. B.; KREINOVICH, V. (Ed.). **Applications of Interval Computations**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996. p. 81-89.
- [ROH 98] ROHN, J.; REX, G. Enclosing Solutions of Linear Equations. **SIAM Journal in Numerical Analysis**, [S.l.], v. 35, n. 2, p. 524-539, 1998.
- [RUM 88] RUMP, S. M. Algebraic Computation, Numerical Computation and Verified Inclusions. In: JANßEN, R. (Ed.). **Trends in Computer Algebra**. Berlin: Springer Verlag, 1988. p. 177-197.
- [RUM 94] RUMP, S. M. Verification Methods for Dense and Sparse Systems of Equations. In: HERZBERGER, J. (Ed.). **Topics in Validated Computations - Studies in Computational Mathematics**. Amsterdam: Elsevier Science, 1994. p. 63-136.
- [SCH 96] SCHROEDER, W.; MARTIN, K.; LORENSEN, B. **The Visualization Toolkit. An Object-Oriented Approach to 3D Graphics**. New Jersey: Prentice-Hall, 1996.
- [SCO 82] SCOTT, D. Lecture Notes on Mathematic Theory of Computation. In: **Theoretical Foundations of Programming Methodology**. Dordrecht: Reidel, 1982. p. 145-292.
- [SUN 58] SUNAGA, T. Theory of an Interval Algebra and its Applications to Numerical Analysis. **RAAG Memoirs**, [S.l.], v. 2, p. 547-564, 1958.
- [TOS 2001] TOSCANI, L. V.; VELOSO, P. A. S. **Complexidade de Algoritmos: análise, projeto e métodos**. Porto Alegre: Sagra Luzzatto, 2001. 202 p.
- [YAM 2000] YAMAMURA, K. Finding All Solutions of Nonlinear Equations Using Linear Combinations of Functions. **Reliable Computing**, Dordrecht, n. 6, p. 105-113, 2000.
- [WOL 2000] WOLFE, M. A. Interval mathematics, algebraic equations and optimization. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, Amsterdam, n. 124, p. 263-280, 2000.