Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

# SOLUÇÕES RADIALMENTE SIMÉTRICAS DA EQUAÇÃO DE POISSON-BOLTZMANN COM UMA ENERGIA DADA

Diego Eduardo Lieban

Dissertação de Mestrado

Porto Alegre, 27 de Janeiro de 2010

Dissertação submetida por Diego Eduardo Lieban como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Dr. Leonardo Prange Bonorino (PPGMAT-UFRGS)

Banca Examinadora:
Dra. Elizabeth Quintana Ferreira da Costa (PPGMAT-UFRGS)
Dr. Jaime Bruck Ripoll (PPGMAT-UFRGS)
Dr. José Afonso Barrionuevo (PPGMAp-UFRGS)

Data da Apresentação: 27 de Janeiro de 2010

# Agradecimentos

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul, pelas condições proporcionadas e aos professores que integram o corpo docente do Instituto de Matemática, com os quais tive a felicidade do aprendizado e que são, muitos deles, referências por sua competência e dedicação para com os alunos. Em especial, agradeço aos professores Eduardo Brietzke, Cydara, Marcus Basso, Maria Alice, Vilmar Trevisan e, sem dúvida, ao Leonardo que foi, além de orientador e amigo, um professor exemplar.

Também aos profissionais que tornam viva a instituição e que, por desempenharem com dedicação suas funções, são merecedores de todo o apreço e reconhecimento da comunidade acadêmica: Rosane e Alessandra, por manterem nossas salas sempre em condições agradáveis de estudo; Sibila, pelo apoio irrestrito e sempre atencioso nas buscas a *papers* e periódicos; e Rosane, pela constante e simpática ajuda para assuntos burocráticos.

À minha mãe, vó, irmãos, cunhadas e sobrinhos pela paciência, compreensão e apoio.

A lista maior de agradecimentos deve-se, entretanto, àqueles que foram fundamentais para que este trabalho chegasse ao fim. Alguns deles acreditando em mim, mesmo quando eu, por vezes, duvidava. Outros, por agradáveis companhias e sorrisos, sem que tivessem noção de quanto isso me fazia bem...mesmo que, com alguns deles, o contato não tenha sido constante. Ainda, àqueles que me ajudaram ao longo das disciplinas. Enfim, por uma razão ou outra, ou mesmo por nenhuma que não seja o simples e tão nobre fato de tê-los como AMIGOS: Diego Marcon, Carlos Felipe Lardizábal, Pati K.K., Patropy, Thaísa Müller, Nicolau, Rodrigo $\pi$, Miriam, Pati, Ju Ziebell, Lucinéia, Augusto, Ju, Elisa, Diego Chaves, Rene, Andrea, Thaísa, João Hélder, Raquel, Douglas, Duda, Tadeu, Leandro, Joana, Rafael, Diego Zurawski, Daiana, Saradia, Samuel, Gabriel, Pomper, Vânia, Alvino, Marilaine, Flávia, Cristina, Ludmila, Catiele, Gabriel Goldmeier, Bolbotka (representando a turma do futebol), Cóser, Dani, Renato, Suzana, Aninha, Émerson,... cada um, de alguma maneira, é importante para mim e, se esqueço de algum, me desculpo por antecipação...

# Resumo


Neste trabalho, o objetivo é avaliar, com parâmetros $M$ e $E$ dados, a existência de solução (suposta radialmente simétrica) para o Problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta\varphi = \pm\dfrac{M^2}{E}\dfrac{\int_\Omega e^{-\varphi}\left(1+\frac{1}{2}\varphi\right)}{\left(\int_\Omega e^{-\varphi}\right)^2}e^{-\varphi} & \text{em } \Omega \\ \varphi = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}, \tag{1}$$

cuja conotação física é discutida no capítulo 1. Inicialmente fazemos para bolas unitárias em $\mathbb{R}^2$, onde mostramos a existência e unicidade a partir de soluções explícitas para um "problema associado" e ajustando este ao problema original via uma função apropriada. Mais adiante, procurando estender a ideia para uma bola unitária em $\mathbb{R}^n$, usamos o Método de Sub/Supersolução para chegarmos à solução do problema, já que para dimensões maiores do que 2 não dispomos de "soluções associadas". Por último, mostramos que se reduzirmos nossas hipóteses, ou seja, estendendo o domínio além de uma bola unitária (desde que limitado), ainda assim conseguiremos solução única. Entretanto, a "liberdade" para os parâmetros $M$ e $E$ fica restrita à condição de que $\frac{M^2}{E}$ seja suficientemente pequeno.

As referências fundamentais para elaboração deste trabalho são [12], [6], [7] e [13], embora outras bibliografias tenham sido consultadas e, eventualmente, citadas.

# Abstract


In this work, the goal is to evaluate, with parameters $M$ and $E$ given, the existence of solution (assumed radially symmetric) for the Dirichlet problem

$$\begin{cases} \Delta\varphi = \pm\dfrac{M^2}{E}\dfrac{\int_\Omega e^{-\varphi}\left(1+\frac{1}{2}\varphi\right)}{\left(\int_\Omega e^{-\varphi}\right)^2}e^{-\varphi} & \text{em } \Omega \\ \varphi = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}, \tag{2}$$

whose physical connotation is discussed in chapter 1. Initially we do for unit balls in $\mathbb{R}^2$, where we show the existence and uniqueness from the explicit solutions to a “associated problem” and adjusting to this original problem via a proper function. Later seeking to extend the idea to a unit ball in $R^n$, we use the Sub/Supersolution method to get to the solution of the problem, since for dimensions larger than 2, “associated solutions”are not available. Finally, we show that if we reduce our hypotheses, i.e., extending beyond the domain of a unit ball (but still limited), we still have a unique solution. However, the “ freedom ” on the parameters $M$ and $E$ is restricted to the condition that $\frac{M^2}{E}$ is sufficiently small.

The fundamental references of this work are [12], [6], [7] and [13], although other bibliographies have been consulted and eventually cited.

# Conteúdo

# Capítulo 1

# Introdução

Estamos interessados no movimento de um sistema de partículas Brownianas confinadas em um recipiente termicamente isolado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$. Consideramos que as partículas movem-se sob influência da eletricidade "mútua"ou interações gravitacionais e são submetidas à difusão térmica. (vide [2] e [14] para maior suporte físico).

Sejam $M$, $E$ a carga total (massa total) e energia de uma sistema, respectivamente. É sabido ([2]) que no equilíbrio termodinâmico, o potencial elétrico (gravitacional) $\Phi$ de um sistema, sob certas condições, satisfaz a equação de Poisson-Boltzmann

$$\Delta\Phi = \pm \frac{M}{\int_\Omega e^{-\frac{\Phi}{\theta}}} e^{-\frac{\Phi}{\theta}} \tag{1.1}$$

onde $\theta$ é a temperatura, que pode ser estimada pela equação da energia

$$E = M\theta \mp \frac{1}{2}\int_\Omega \mid \nabla \varPhi \mid^2 \tag{1.2}$$

O sinal "-" (resp. "+") em (1.1) corresponde às interações de Coulomb (resp. gravitacional). Em (1.2), inversamente, "-" corresponde às interações gravitacionais.

Escrevendo $\varphi = \frac{\Phi}{\theta}$, onde $\varphi$ expressa o potencial, transformamos (1.1) e (1.2) em

$$\Delta\varphi = \pm\frac{M}{\theta}\frac{e^{-\varphi}}{\int_\Omega e^{-\varphi}} \tag{1.3}$$

e

$$E = M\theta \mp \frac{1}{2}\theta^2\int_\Omega \mid \nabla\varphi \mid^2 . \tag{1.4}$$

Admitiremos que na fronteira $\partial\Omega$ de $\Omega$, o potencial $\varphi$ é constante. Esta suposição é fisicamente razoável no caso de interações de Coulomb ou para interações arbitrárias, se o domínio $\Omega$ é radialmente simétrico. Ainda, como a equação de Poisson-Bolltzmann é invariante por translações, podemos supor que

$$\varphi \mid_{\partial\Omega} = 0 \tag{1.5}$$

Multiplicando (1.3) por $\varphi$ e integrando sobre $\Omega$, obtemos

$$\int_\Omega \varphi\triangle\varphi = \pm\frac{M}{\theta}\frac{1}{\int_\Omega e^{-\varphi}}\int_\Omega e^{-\varphi}\varphi$$

que, pela Primeira Identidade de Green $\left(\int_\Omega \varphi\Delta\varphi\, dx = -\|\nabla\varphi\|^2\right)$, pode ser reescrita como

$$\|\nabla\varphi\|^2 = \mp\frac{M}{\theta}\frac{1}{\int_\Omega e^{-\varphi}}\int_\Omega e^{-\varphi}\varphi.$$

Daí, a energia $E$ pode ser expressa na forma

$$\begin{aligned}E &= M\theta \mp \frac{1}{2}\theta^2\left(\mp\frac{M}{\theta}\frac{1}{\int_\Omega e^{-\varphi}}\int_\Omega e^{-\varphi}\varphi\right) = M\theta + \frac{1}{2}M\theta\frac{1}{\int_\Omega e^{-\varphi}}\int_\Omega e^{-\varphi}\varphi \\ &= \frac{M\theta}{\int_\Omega e^{-\varphi}}\int_\Omega e^{-\varphi} + \frac{1}{2}M\theta\frac{1}{\int_\Omega e^{-\varphi}}\int_\Omega e^{-\varphi}\varphi = \frac{M\theta}{\int_\Omega e^{-\varphi}}\left(\int_\Omega e^{-\varphi} + \frac{1}{2}\int_\Omega e^{-\varphi}\varphi\right) \\ &= \frac{M\theta}{\int_\Omega e^{-\varphi}}\left(\int_\Omega e^{-\varphi}\left(1+\frac{1}{2}\varphi\right)\right),\end{aligned} \tag{1.6}$$

de modo que

$$\theta = \frac{E}{M}\frac{\int_\Omega e^{-\varphi}}{\int_\Omega e^{-\varphi}\left(1+\frac{1}{2}\varphi\right)}.$$

Assim, substituindo a temperatura $\theta$ em (1.3), obtemos uma EQUAÇÃO ELÍPTICA NÃO-LOCAL para o potencial $\varphi$:

$$\Delta\varphi = \pm\frac{M^2}{E}\frac{\int_\Omega e^{-\varphi}\left(1+\frac{1}{2}\varphi\right)}{\left(\int_\Omega e^{-\varphi}\right)^2}e^{-\varphi}. \tag{1.7}$$

Para $M$ e $E$ dados, estamos interessados na existência de soluções para a equação (1.7) com a condição $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$, estabelecida em(1.5)(a qual nos referiremos por vezes, ao longo do texto, como problema PRINCIPAL). Chamaremos (1.7) (sob a condição (1.5)) de problema *elétrico*, quando o sinal for "-" e de problema *gravitacional*, quando o sinal for "+". A equação (1.7) é equivalente à equação (1.3) (ambas com a condição $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$) quando $\theta > 0$. Note que no caso de interações elétricas, a energia é sempre positiva (o mesmo não podemos garantir no caso de interações gravitacionais).

# Capítulo 2

# Definições e Resultados Prévios

A fim de dar suporte aos resultados dos capítulos que seguem, apresentamos algumas definições e teoremas pertinentes, sejam de Análise ou Teoria Clássica de EDP.

## 2.1 Operadores Compactos

**Definição 2.1.1.** Sejam $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ espaços lineares normados. Um operador $T : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ é dito *compacto* (ou *completamente contínuo*) se $T$ leva conjuntos limitados de $\mathcal{M}$ em conjuntos relativamente compactos (ou seja, cujo fecho é compacto) de $\mathcal{N}$ ou, equivalentemente, $T$ leva sequências limitadas de $\mathcal{M}$ em sequências de $\mathcal{N}$ que contenham subsequências convergentes. Segue que operadores compactos são também contínuos, mas a recíproca não é, em geral, verdadeira, a menos que $\mathcal{N}$ tenha dimensão finita.

**Definição 2.1.2.** Uma sequência $(f_k)_{k\geq 1}$ é dita *equicontínua* se

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que

$$|x - y| < \delta \Longrightarrow |f_k(x) - f_k(y)| < \epsilon, \forall k \geq 1.$$

**Teorema 2.1.3 (Arzelá-Ascoli).** *Sejam $K$ um espaço métrico compacto e $(f_k)_{k\geq 1}$ uma sequência de funções contínuas em $K$. Se $(f_k)_{k\geq 1}$ for equiconínua, então existe uma subsequência $(f_{k_j})_{j\geq 1}$ tal que $f_{k_j} \to f$ em $K$ para algum $f \in C(K)$.*

**Teorema 2.1.4 (Teorema do Ponto Fixo de Schauder).** *Se $X$ é um espaço de Banach, $K \subset X$ é compacto e convexo e $A : K \to K$ é uma aplicação contínua, então $A$ possui um ponto fixo em $K$, isto é, existe $p \in K$ tal que $A(p) = p$.*

## 2.2 Teorema da Divergência

**Teorema 2.2.1 (Teorema da Divergência).** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe $C^1$. Se $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é de classe $C^1$ em $\Omega$ e contínua em $\overline{\Omega}$, então*

$$\int_{\Omega} div\, F\, dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, dS,$$

*onde $\nu$ é o vetor normal unitário exterior a $\Omega$ em $\partial\Omega$.*

**Corolário 2.2.2 (Identidades de Green).** *Sejam $u$ e $v \in C^2(\overline{\Omega})$, onde $\Omega$ é como no Teorema 2.2.1. Então,*

(i) $\displaystyle\int_{\Omega} \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS;$

(*ii*) *Primeira Identidade de Green*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = -\int_\Omega u \Delta v \, dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} \, dS;$$

(*iii*) *Segunda Identidade de Green*

$$\int_\Omega u \Delta v - v \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS.$$

## 2.3 Espaços $L^p$

**Definição 2.3.1.** O espaço $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ é o espaço de todas as funções (classes de funções que coincidem em quase todo ponto) mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty.$$

Uma norma em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, é

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \Big( \int_\Omega |u(x)|^p \, dx \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Definimos também $L^\infty(\Omega)$ o espaço de todas as funções (classes de funções que coincidem em quase todo ponto) mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x)| < \infty,$$

onde o símbolo $\sup |u|$ indica o supremo essencial de $u$, ou seja, o ínfimo dos $M \geq 0$ para os quais o conjunto $\{x \in \Omega \,|\, |u(x)| > M\}$ tem medida 0. Uma norma em $L^\infty(\Omega)$ é

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

**Teorema 2.3.2.** *O espaço $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, é de Banach quando munido da norma acima.*

**Teorema 2.3.3 (Desigualdade de Hölder).** *Suponhamos que $1 < p, q < \infty$ e que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

*Se $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$, então*

$$\int_\Omega |uv|\, dx \leq \Big( \int_\Omega |u|^p\, dx \Big)^{1/p} \Big( \int_\Omega |v|^q\, dx \Big)^{1/q}.$$

**Observação 2.3.4.** No caso $p = 1$ e $q = \infty$, notamos que vale

$$\int_\Omega |uv|\, dx \leq \|v\|_\infty \int_\Omega |u|\, dx,$$

para $u \in L^1(\Omega)$ e $v \in L^\infty(\Omega)$.

## 2.4 Espaços de Hölder

Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e $0 < \gamma \leq 1$. Se $u$ satisfaz

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\gamma (x, y \in \Omega)$$

para alguma constante C dizemos que ela é Hölder contínua com expoente $\gamma$.

**Definição 2.4.1.** (i) No espaço das funções contínuas em $\overline{\Omega}$, $C(\overline{\Omega})$, definimos a norma do supremo por

$$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} := \sup_{x\in\Omega} |u(x)|$$

(ii) A $\gamma$-ésima seminorma de Hölder de $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} := \sup_{x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\gamma}$$

e a $\gamma$-ésima norma de Hölder é dada por

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} := \|u\|_{C(\overline{\Omega})} + [u]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}$$

**Definição 2.4.2.** O Espaço de Hölder $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$ consiste de todas as funções $u \in C^k(\overline{\Omega})$ para as quais a norma

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})} := \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}$$

é finita. Ou seja, o espaço $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$ consiste das funções $u$ que são $k$ vezes continuamente diferenciáveis e cujas $k$-ésimas derivadas parciais são Hölder contínuas com expoente $\gamma$.

## 2.5 As Equações de Laplace e Poisson

Entre as equações diferenciais parciais mais importantes estão a equação de Laplace

$$\Delta u = 0 \text{ em } \Omega$$

e a equação de Poisson

$$-\Delta u = f \text{ em } \Omega,$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ são dados e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é a incógnita.

**Definição 2.5.1.** Dizemos que uma função $u \in C^2(\Omega)$ satisfazendo a equação de Laplace é uma *função harmônica*.

**Teorema 2.5.2.** *Se $u \in C^2(\Omega)$ é uma função harmônica (subharmônica, superharmônica), então para todo $x \in \Omega$ e $r > 0$ tais que $B_r(x) \subset\subset \Omega$, temos*

$$u(x) = (\leq,\ \geq) \fint_{B_r(x)} u(y)\, dy := \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} u(y) dy, \tag{2.1}$$

*onde $|B_r(x)|$ representa a medida $n$ dimensional da esfera $B_r(x)$ e*

$$u(x) = (\leq,\ \geq) \fint_{\partial B_r(x)} u(y)\, dS := \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{B_r(x)} u(y) dy,$$

*onde $|\partial B_r(x)|$ representa a medida $(n-1)$ dimensional da esfera $\partial B_r(x)$.* (2.2)

**Teorema 2.5.3 (Princípio do Máximo).** *Seja $\Omega$ um domínio limitado contido em $\mathbb{R}^n$. Suponhamos que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ é tal que*

$$-\Delta u \leq 0.$$

*Então, $u$ não pode atingir seu máximo no interior de $\Omega$, a menos que seja* *constante. Em particular,*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

*Demonstração.* Suponhamos que exista $x_0 \in \Omega$ tal que

$$u(x_0) = u =: M.$$

Definimos $\mathcal{A} = \{x \in \Omega; u(x) = M\}$. É claro que $\mathcal{A}$ é fechado em $\Omega$. Como $\Omega$ é conexo e estamos supondo $\mathcal{A} \neq \emptyset$, a demonstração estará concluída ao mostrarmos que $\mathcal{A}$ é também aberto em $\Omega$. De fato, seja $x \in \mathcal{A}$. Pela Propriedade do Valor Médio, temos

$$M = u(x) \leq \fint_{B_r(x)} u(y)\, dy \leq M.$$

Assim,

$$\int_{B_r(x)} (M - u)\, dy = 0$$

e, como $M - u \geq 0$ em $B_r(x)$, temos $u \equiv M$ em $B_r(x)$, mostrando que $\mathcal{A}$ é aberto em $\Omega$, como queríamos. $\square$

**Definição 2.5.4.** Dizemos que um ponto $x \in \partial\Omega$ satisfaz a condição da esfera interior se existem $y \in \Omega$ e $r > 0$ tais que $B_r(y) \subset \Omega$ e $x \in \partial B_r(y)$. Analogamente, definimos a condição da esfera exterior.

**Observação 2.5.5.** Se $\Omega$ é de classe $C^2$, todos os pontos de $\partial\Omega$ satisfazem as condições da esfera interior e exterior.

### 2.5.1 Funções de Green

**Definição 2.5.6.** Definimos a *solução fundamental* para a Equação de Laplace por

$$\Gamma(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\log|x|, & \text{se } n = 2 \\ \dfrac{1}{n(n-2)\omega_n}|x|^{2-n}, & \text{se } n \geq 3 \end{cases} \tag{2.3}$$

**Observação 2.5.7.** Acima, $\omega_n$ denota o volume da bola unitária do $\mathbb{R}^n$.

As proposições seguintes mostram a importância da solução fundamental. Começamos com a fórmula de representação de Green.

**Proposição 2.5.8.** *Suponha que* $u \in C^2(\overline{\Omega})$. *Então*

$$u(x) = -\int_\Omega \Gamma(y-x)\Delta u(y)\,dy + \int_{\partial\Omega}\Big(\Gamma(y-x)\frac{\partial u}{\partial\eta}(y) - u(y)\frac{\partial\Gamma}{\partial\eta}(y-x)\Big)\,dS.$$

*Demonstração.* Para $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset\subset \Omega$, temos

$$\int_{\Omega\setminus B_r(x)} \Gamma(x-y)\Delta u\,dy = \int_{\partial\Omega}\Big(\Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial\eta}(y) - u(y)\frac{\partial\Gamma}{\partial\eta}(x-y)\Big)\,dS(y)$$

$$+\int_{\partial B_r(x)}\Big(\Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial\eta}(y) - u(y)\frac{\partial\Gamma}{\partial\eta}(x-y)\Big)\,dS(y),$$

onde, na última integral, $\eta$ é o vetor normal unitário exterior à bola $B_r(x)$ em $\partial B_r(x)$. Como $\Gamma$ é integrável e $\Delta u$ limitado em $\Omega$, temos

$$\int_{\Omega\setminus B_r(x)} \Gamma(x-y)\Delta u\,dx \longrightarrow \int_\Omega \Gamma(x-y)\Delta u\,dx \text{ quando } r \to 0.$$

Além disso, é fácil ver que, fazendo $r \to 0$, obtemos

$$\int_{\partial B_r(x)} \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial \eta}(y)\,dx \longrightarrow 0 \text{ e}$$

$$\int_{\partial B_r(x)} u(y)\frac{\partial \Gamma}{\partial \eta}(x-y)\,dS \longrightarrow u(x),$$

concluindo a demonstração da proposição. □

**Observação 2.5.9.** Se $u$ for solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega \\ \quad u = g & \text{em } \partial\Omega \end{cases}, \tag{2.4}$$

então a fórmula acima nos diz que

$$u(x) = \int_\Omega \Gamma(y-x)f(y)\,dy + \int_{\partial\Omega}\left(\Gamma(y-x)\frac{\partial u}{\partial \eta}(y) - g(y)\frac{\partial \Gamma}{\partial \eta}(y-x)\right)dS. \tag{2.5}$$

Agora, suponhamos que $h$ seja uma função harmônica que coincida com $\Gamma$ na fronteira, isto é, seja $h_x : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \Delta h_x = 0 & \text{em } \Omega \\ h_x(y) = \Gamma(x-y) & \text{para } y \in \partial\Omega \end{cases}. \tag{2.6}$$

Assim, pela Segunda Identidade de Green,

$$0 = \int_\Omega h_x \Delta u\,dy + \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial h_x}{\partial \eta} - h_x\frac{\partial u}{\partial \eta}\,dS. \tag{2.7}$$

Somando (2.5) e (2.7), obtemos

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x,y)f(y)\,dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial \eta}(x,y)u(y)\,dS, \tag{2.8}$$

onde $G(x,y) := \Gamma(y-x) - h_x(y)$ é chamada Função de Green.

**Teorema 2.5.10.** *Suponhamos que $\Omega$ satisfaça a condição da esfera interior e exterior. Então, existe a função de Green $G$ associada a $\Omega$.*

*Demonstração.* Ver [13], onde é apresentada uma prova devida a Peter D. Lax, como consequência do Teorema de Hahn-Banach. $\square$

## 2.6 Espaços de Sobolev

**Definição 2.6.1.** Sejam $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $\alpha$ um multi-índice, isto é, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, onde $\alpha_i \in \{0,1,2,3,...\}$. Dizemos que $v$ é a *$\alpha$-ésima derivada fraca de $u$* se

$$\int_{\Omega} uD^{\alpha}\phi\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega} v\phi\,dx, \tag{2.9}$$

para qualquer função teste $\phi \in C_c^{\infty}(\Omega)$, onde $D^{\alpha}\phi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}}...\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial_{x_n}^{\alpha_n}}\phi$ e $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ . Se este for o caso, escrevemos $D^{\alpha}u := v$.

**Definição 2.6.2.** O espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ é definido como o espaço de funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ pertencentes a $L^p(\Omega)$ tais que $D^{\alpha}u$, a $\alpha$-ésima derivada fraca de $u$, existe e pertence a $L^p(\Omega)$, para todo multi-indíce $\alpha$ tal que $|\alpha| \leq k$.

**Definição 2.6.3.** Podemos definir uma norma em $W^{k,p}(\Omega)$ por

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \Big(\sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p\Big)^{1/p} & \text{se } 1 \leq p < \infty \\ \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_\Omega |D^\alpha u| & \text{se } p = \infty \end{cases} \tag{2.10}$$

onde indicamos por $\sup_\Omega |f|$ o supremo essencial de $f$ em $\Omega$.

**Teorema 2.6.4.** *O espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach quando munido da norma dada por* (2.10)*.*

**Notação:** $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ **e** $H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega)$**.** Note que $H^k$ e $H_0^k$ são espaços de Hilbert.

**Teorema 2.6.5 (Teorema do Traço).** *Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e limitado tal que $\partial U$ é de classe $C^1$. Então existe $C > 0$ e $T : W^{1,p}(U) \to L^p(\partial U)$ operador linear tal que:*
*(i) $Tu = u|_{\partial U}$ se $u \in W^{1,p}(U) \cap C(\overline{U})$ e*
*(ii) $\|Tu\|_{L^p(\partial U)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(U)$;*

**Definição 2.6.6.** Chamamos de $Tu$ o traço de $u$ em $\partial U$.

## 2.7 Método de Sub/Supersolução

A ideia do método aqui apresentado é mostrar que, se podemos encontrar uma subsolução $\underline{u}$ e uma supersolução $\overline{u}$ para um particular problema de contorno e se, além disso, $\underline{u} \leq \overline{u}$, então existe uma solução satisfazendo $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$.

Analisaremos o problema de valor de contorno para a Equação de Poisson não-linear

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{em } U \\ u = 0 & \text{em } \partial U \end{cases}, \tag{2.11}$$

onde $U \subset \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é suave, com

$$|f'| \leq K \ (z \in \mathbb{R}), \tag{2.12}$$

para alguma constante K.

**Definição 2.7.1.** (i) Dizemos que $\overline{u} \in H^1(U)$ é uma supersolução fraca de (2.11) se

$$\int_U D\overline{u} \cdot Dvdx \geq \int_U f(\overline{u})vdx \tag{2.13}$$

para cada $v \in H_0^1(U), v \geq 0 \ q.t.p.$.

(ii) Similarmente, dizemos que $\underline{u} \in H^1(U)$ é uma subsolução fraca de (2.11) se

$$\int_U D\underline{u} \cdot Dvdx \leq \int_U f(\underline{u})vdx \tag{2.14}$$

para cada $v \in H_0^1(U), v \geq 0 \ q.t.p.$.

(iii) Finalmente, dizemos que $u \in H_0^1(U)$ é uma solução fraca de (2.11) se

$$\int_U Du \cdot Dvdx = \int_U f(u)vdx$$

para cada $v \in H_0^1(U), v \geq 0 \ q.t.p.$.

**Teorema 2.7.2.** *Suponhamos a existência de $\underline{u}$ subsolução fraca e $\overline{u}$ super-*

*solução fraca de (2.11), satisfazendo*

$$\underline{u} \leq 0,\ \overline{u} \geq 0 \text{ em } \partial U \text{ no sentido do traço, } \underline{u} \leq \overline{u} \text{ q.t.p em } U.$$

*Então existe uma solução fraca $u$ de (2.11) tal que*

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u} \text{ q.t.p em } U.$$

A demonstração para este teorema pode ser vista em [6].

## 2.8 Regularidade de Soluções

Para os propósitos deste trabalho apresentamos, ainda, dois resultados de especial relevância (extraídos, respectivamente, dos capítulos 6 e 8 de [7]) . Com eles (mais precisamente na seção 4.1.1) garantiremos que uma solução fraca é também solução clássica do Problema de Dirichlet abordado.

**Teorema 2.8.1.** *Seja $L$ um operador estritamente elíptico em um domínio limitado $\Omega$, com $c \leq 0$, $a^{ij}$, $b^i$, $c$, $f \in C^\alpha(\Omega)$ e suponha $b^i$, $c$, $f$ limitados. Suponha que $\Omega$ satisfaz a condição da esfera exterior. Então, se $\varphi$ é contínua em $\partial\Omega$, o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} Lu = f(x) & \text{em } \Omega \\ u = \varphi & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.15}$$

*tem uma única solução $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^{2,\alpha}(\Omega)$.*

Como consequência do Corolário 8.35 de [7], vale o

**Teorema 2.8.2.** *Se* $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ *é a solução fraca de*

$$\begin{cases} \Delta\varphi = g(x) & em\ \Omega \\ \varphi = 0 & em\ \partial\Omega \end{cases} \tag{2.16}$$

*onde* $g \in L^\infty(\Omega)$ *e a fronteira de* $\Omega$ *é* $C^{1,\alpha}$, *então* $\varphi \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$.

# Capítulo 3

# Caso radialmente simétrico em 2 dimensões

Neste capítulo, faremos uma abordagem do problema para o caso particular em que o domínio é uma região (mais precisamente, um disco) de $\mathbb{R}^2$ para, no capítulo seguinte, estendermos para o $\mathbb{R}^n$.

## 3.1 O laplaciano em funções radialmente simétricas

Seja $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1\}$ a bola de raio unitário e olhemos para as soluções radialmente simétricas de (1.7) (sob a condição (1.5)), isto é, admitamos que $\varphi(x) = \widetilde{\varphi}(r)$, onde $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Note que

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{-\frac{1}{2}} 2x_1 = \frac{x_1}{r} \quad (x \neq 0).$$

Analogamente,

$$\frac{\partial r}{\partial x_2} = \frac{x_2}{r} \quad (x \neq 0).$$

Assim, derivando $\varphi$ em relação a $x_1$ (resp a $x_2$), obtemos

$$\varphi_{x_1} = \widetilde{\varphi}'(r)\frac{x_1}{r} \qquad \left(\text{resp} \quad \varphi_{\mathrm{x}_2} = \widetilde{\varphi}'(\mathrm{r})\frac{\mathrm{x}_2}{\mathrm{r}}\right)$$

e, derivando novamente, em relação à mesma variável

$$\varphi_{x_1x_1} = \widetilde{\varphi}''(r)\frac{x_1^2}{r^2} + \widetilde{\varphi}'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_1^2}{r^3}\right) \quad (\text{análogo} \quad \text{para } \varphi_{x_2x_2})$$

Com isso, temos que $\Delta\varphi = \varphi_{x_1x_1} + \varphi_{x_2x_2}$ de onde segue que

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi &= \widetilde{\varphi}''(r)\frac{(x_1^2 + x_2^2)}{r^2} + \widetilde{\varphi}'(r)\left(\frac{2}{r} - \frac{x_1^2}{r^3} - \frac{x_2^2}{r^3}\right) \\
&= \widetilde{\varphi}''(r) + \widetilde{\varphi}'(r)\left(\frac{2}{r} - \frac{(x_1^2 + x_2^2)}{r^3}\right) \qquad (3.1) \\
&= \widetilde{\varphi}''(r) + \widetilde{\varphi}'(r) \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{r}(r\widetilde{\varphi}')'(r)
\end{aligned}$$

**Observação 3.1.1.** Para dimensão maior do que 2, o laplaciano para funções radialmente simétricas pode ser obtido de modo análogo e é expresso por

$$\Delta v = v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r) \qquad (3.2)$$

## 3.2 Problema de interesse

Suprimindo, daqui por diante (por abuso de notação e melhor leitura), o $\sim$ de $\widetilde{\varphi}$, podemos reescrever o problema PRINCIPAL como segue:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}(r\varphi')'(r) = \pm\dfrac{M^2}{E}\dfrac{\int_0^1 se^{-\varphi(s)}\left(1+\frac{1}{2}\varphi(s)\right)ds}{2\pi\left(\int_0^1 se^{-\varphi(s)}ds\right)^2}e^{-\varphi(r)} \\ \\ \varphi'(0)=0 \quad \text{e} \quad \varphi(1)=0 \end{cases} \tag{3.3}$$

**Observação 3.2.1.** Note que para obtenção de (3.3) usamos o fato de $\Omega$ ser a bola unitária e, portanto, valer que

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{B_1(0)} e^{-\varphi}dy = \int_0^1\left(\int_{\partial B_1(0)} e^{-\varphi(s)}d\sigma\right)sds = \int_0^1 e^{-\varphi(s)}\int_{\partial B_1(0)} d\sigma sds = \\ \textstyle= \int_0^1 e^{-\varphi(s)}2\pi sds = 2\pi\int_0^1 e^{-\varphi(s)}sds \end{aligned}$$

Usando a integrabilidade da equação de Poisson-Boltzmann no caso radialmente simétrico de duas dimensões, nós provamos o

**Teorema 3.2.2.** *O problema (3.3) tem solução única.*

*Demonstração.* Consideraremos dois casos:

a) Problema elétrico (considerando o sinal "-"em (3.3)):

Observamos que $\varphi_C(r) = 2\log\left(\frac{4+C-Cr^2}{4}\right)$ é solução de

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}(r\varphi')'(r) = -C\dfrac{e^{-\varphi(r)}}{\int_0^1 se^{-\varphi(s)}ds}, \quad C>0 \\ \varphi'(0)=0 \quad \text{e} \quad \varphi(1)=0 \end{cases} \tag{3.4}$$

**Observação 3.2.3.** Para obtenção da solução explicitada acima são recomendados [1] e [9].

A verificação da igualdade faz-se substituindo diretamente $\varphi_C$ na expressão, resultando em ambos os lados $\frac{-8C(4+C)}{(4+C-Cr^2)^2}$. Além disso, $\varphi_C'(0) = 0$ e $\varphi_C(1) = 0$. Fazendo mudança de variáveis e integrando por partes obtemos, ainda:

$$\left(\int_0^1 se^{-\varphi_C(s)}ds\right)^{-1} = \frac{4+C}{2} \tag{3.5}$$

e

$$\int_0^1 se^{-\varphi_C(s)}\varphi_C(s)ds = \frac{4}{4+C}\left(1 - \frac{4}{C}log\left(1+\frac{C}{4}\right)\right). \tag{3.6}$$

Seja

$$V(C) := \frac{\int_0^1 se^{-\varphi_C(s)}\left(1+\frac{1}{2}\varphi_C(s)\right)ds}{2\pi\int_0^1 se^{-\varphi_C(s)}ds}.$$

Note que se $C = \frac{M^2}{E}V(C)$, então $\varphi_C$ é uma solução de (3.3). Definindo $g(C) := \frac{C}{V(C)}$, obtemos, por (3.5) e (3.6) que

$$g(C) = \frac{2\pi C}{2 - \frac{4}{C}\log\left(1+\frac{C}{4}\right)},$$

que é uma função contínua, crescente e tem $\lim_{C\to\infty} g(C) = \infty$ e $\lim_{C\to 0} g(C) = 0$. Consequentemente, para cada $M \geq 0$, $E > 0$ (como mencionado antes, no "caso elétrico", $E > 0$) a equação $\frac{M^2}{E} = g(C)$ tem uma única solução.

b) Problema gravitacional (considerando o sinal "+"em (3.3)):

Com procedimento análogo ao feito em a), mostra-se que

$$\varphi_C(r) = 2\log\left(\frac{4 - C + Cr^2}{4}\right), \quad C \in (0,4),$$

é solução única de

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}(r\varphi')'(r) = C\dfrac{e^{-\varphi(r)}}{\int_0^1 se^{-\varphi(s)}ds} \\ \varphi'(0) = 0 \quad \text{e} \quad \varphi(1) = 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

Também com procedimentos análogos aos realizados no item anterior, obtemos:

$$\left(\int_0^1 se^{-\varphi_C(s)}ds\right)^{-1} = \frac{4-C}{2}$$

e

$$\int_0^1 se^{-\varphi_C(s)}\varphi_C(s)ds = \frac{4}{4-C}\left(1 + \frac{4}{C}\log\left(1 - \frac{C}{4}\right)\right)$$

Neste caso, a função V definida anteriormente tem a forma

$$\begin{aligned} V(C) := \frac{\int_0^1 se^{-\varphi_C(s)} + \frac{1}{2}\int_0^1 se^{-\varphi_C(s)}\varphi_C(s)ds}{2\pi\int_0^1 se^{-\varphi_C(s)}ds} &= \frac{\left(\frac{2}{4-C}\right)\left(2 + \frac{4}{C}\log\left(1 - \frac{C}{4}\right)\right)}{2\pi\left(\frac{2}{4-C}\right)} \\ = \frac{1}{\pi}\left(1 + \frac{2}{C}\log\left(1 - \frac{C}{4}\right)\right). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Note que se $C = \frac{M^2}{E}V(C)$, então $\varphi_C$ é uma solução de (3.3). Definindo $f(C) := \frac{C}{V(C)}$, temos (pelas igualdades acima obtidas):

$$f(C) = \frac{C}{\frac{1}{\pi}\left(1 + \frac{2}{C}\log\left(1 - \frac{C}{4}\right)\right)} = \frac{2\pi C}{2 + \frac{4}{C}\log\left(1 - \frac{C}{4}\right)} \tag{3.9}$$

Observemos que existe uma descontinuidade, digamos em $C_0$, onde o denominador da função $f(C)$ se anula:

$$2+\frac{4}{C}\log\left(1 - \frac{C}{4}\right) = 0 \Rightarrow \log\left(1 - \frac{C}{4}\right) = \frac{-C}{2} \Rightarrow 1-\frac{z}{2} = e^{-z}, \quad \text{sendo } z = \frac{C}{2}$$

Graficamente, temos

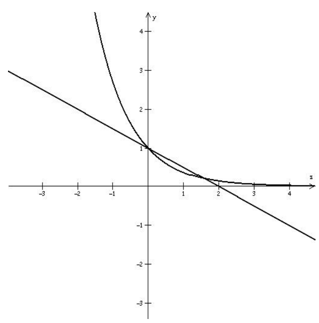

Figura 3.1: as funções $e^{-z}$ e $1 - \frac{z}{2}$ interceptam-se num ponto de abscissa $z_0$;

Logo, para $0 < z_0 < 2$, a equação $1 - \frac{z}{2} = e^{-z}$ é satisfeita, ou seja, existe $0 < \frac{C_0}{2} < 2$ (equivalentemente $0 < C_0 < 4$), onde $f(C)$ é descontínua. Note, ainda, que f(C) é crescente em $(0, C_0) \cup (C_0, 4)$, $\lim_{C\to 0^+} f(C) = 0$, $\lim_{C\to C_0^-} f(C) = +\infty$, $\lim_{C\to C_0^+} f(C) = -\infty$ e $\lim_{C\to 4^-} f(C) = 0$, de modo que o gráfico é dado por

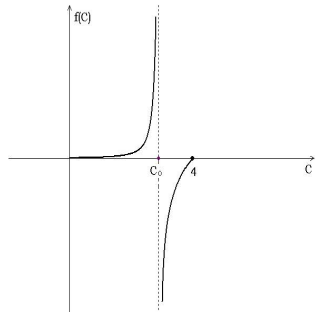


Figura 3.2: $f : (0, C_0) \cup (C_0, 4) \to \mathbb{R}$ é crescente e bijetiva

e deixa claro que a equação $\frac{M^2}{E} = f(C)$ tem uma única solução para todo $M > 0$, $E \neq 0$.

Similarmente, podemos provar a existência de soluções de (3.3) em uma bola de raio R. A função auxiliar tem, então, a forma

$$\varphi_{C,R}(r) = 2\log\left(\frac{(4+C)R^2 - Cr^2}{4R^2}\right), \quad C > 0,$$

no caso de interações elétricas e

$$\varphi_{C,R}(r) = 2\log\left(\frac{(4-C)R^2 + Cr^2}{4R^2}\right), \quad C \in (0,4),$$

no caso gravitacional.

$\square$

# Capítulo 4

# Problema radialmente simétrico em $\mathbb{R}^n$

Por fim, consideraremos o problema PRINCIPAL sobre um domínio em $\mathbb{R}^n$. Primeiramente em uma bola de raio unitário, para depois, no Teorema 4.2.1, estendermos a um domínio limitado qualquer com fronteira suave. Neste último caso, a existência da solução depende de que a razão $\frac{M^2}{|E|}$ seja suficientemente pequena.

## 4.1 Resolução na bola unitária

Consideremos, então, o problema elétrico radialmente simétrico numa bola unitária em $\mathbb{R}^n$. Nesse caso, temos

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r^{n-1}}(r^{n-1}\varphi')'(r) = -\dfrac{M^2}{E}\dfrac{\int_0^1 s^{n-1}e^{-\varphi(s)}\left(1+\frac{1}{2}\varphi(s)\right)ds}{\sigma_n\left(\int_0^1 s^{n-1}e^{-\varphi(s)}ds\right)^2}e^{-\varphi(r)} \\ \\ \varphi'(0) = 0 \quad \text{e} \quad \varphi(1) = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $\sigma_n$ é a área da esfera unitária em $\mathbb{R}^n$.

No capítulo anterior determinamos de forma explícita as soluções da equação de Poisson-Boltzmann no caso de duas dimensões. Tais fórmulas não são conhecidas em dimensões maiores. Para provar a existência para (4.1), usaremos a técnica de sub e supersoluções. Antes, reuniremos alguns resultados a fim de garantir a solução única para uma "versão intermediária" do problema.

### 4.1.1 Existência e unicidade de um problema associado

Consideremos

$$\begin{cases} \Delta\varphi_C = -Ce^{-\varphi_C}, \quad C > 0 \\ \\ \varphi_C|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

**Observação 4.1.1.** O problema elíptico acima tem solução única.

O Método da Sub/Supersolução (2.7) garante solução fraca para o problema acima quando conhecidas subsolução e supersolução associadas. Suponhamos que $\varphi$ seja tal solução. Então temos $-\Delta\varphi = Ce^{-\varphi}$ e, portanto, $\varphi$ é super-harmônica. Logo, pelo Princípio Fraco do Máximo vale

$$\min_{\overline{\Omega}} \varphi = \min_{\partial\Omega} \varphi \Longrightarrow \varphi \geq 0 \text{ em } \Omega$$

e temos, então, que $|Ce^{-\varphi}| \leq C$. Ou seja,

$$\Delta\varphi = -Ce^{-\varphi} \in L^{\infty}(\Omega).$$

Logo, pelo Teorema 2.8.2,

$$\varphi \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \;\text{ e, daí, } -Ce^{-\varphi} \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}).$$

Assim,

$$\Delta\varphi = -Ce^{-\varphi} \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$$

e, portanto, $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, ou seja, é solução clássica.

Para mostrarmos a unicidade, supomos $\varphi_1$ e $\varphi_2$ soluções do problema e $\mathcal{A} = \{x \in \Omega | \varphi_1 > \varphi_2\}$. Tomando $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$, temos $\psi|_{\partial\mathcal{A}} = 0$ e

$$\Delta\psi = \Delta(\varphi_1 - \varphi_2) = C(e^{-\varphi_2} - e^{-\varphi_1}) > 0.$$

Logo, $\psi$ é subsolução e, pelo Princípio do Máximo, $\psi \leq 0$. Segue, daí, que $\mathcal{A} = \emptyset$ e, portanto, $\varphi_1 \leq \varphi_2$. Repetindo o argumento com $\widetilde{\mathcal{A}} = \{x \in \Omega | \varphi_2 > \varphi_1\}$, temos que $\varphi_2 \leq \varphi_1$ e concluímos, assim, que $\varphi_1 = \varphi_2$.

### 4.1.2 Identificando a constante $C$

Abordaremos o problema elétrico geral. Seja $\varphi_C$ a única solução (conforme seção anterior) do problema elíptico

$$\begin{cases} \Delta\varphi_C = -Ce^{-\varphi_C}, \quad C > 0 \\ \varphi_C|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

Para provar a existência de soluções de (1.7) (sob a condição (1.5)), mostraremos que existe uma constante C, de modo que

$$C = \frac{M^2}{E} \frac{\int_\Omega e^{-\varphi_C}\left(1 + \frac{1}{2}\varphi_C\right)}{\left(\int_\Omega e^{-\varphi_C}\right)^2}. \tag{4.4}$$

Integrando, sobre $\Omega$, a equação primeira de (4.3), obtemos

$$\int_\Omega \Delta\varphi_C = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\varphi_C}{\partial\nu} = -C\int_\Omega e^{-\varphi_C}. \tag{4.5}$$

Usando (4.5), podemos escrever (4.4) na forma

$$\frac{M^2}{E} = \frac{2\left(\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\varphi_C}{\partial\nu}\right)^2}{C\int_\Omega \varphi_C e^{-\varphi_C} - 2\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\varphi_C}{\partial\nu}} =: F(C) \tag{4.6}$$

Consequentemente, o problema da existência de soluções para (1.7) (sob a condição (1.5)) com $M, E > 0$ é equivalente a mostrar que $F((0,\infty)) = (0,\infty)$. Para tanto, apresentaremos uma subsolução e uma supersolução particulares para o problema (4.3).

**Lema 4.1.2.** *Para $\alpha < \frac{1}{2}$ e $C > 0$ suficientemente grande, a função $\underline{\varphi_C}(r) = 2\log(1 + \frac{C^\alpha(1-r^2)}{2n})$ é subsolução de (4.3).*

*Demonstração.* Invocando (3.2), temos

$$\Delta\underline{\varphi_C} = \frac{-2C^\alpha}{n}\left(\frac{\left(1+\frac{C^\alpha(1-r^2)}{2n}\right)+\frac{C^\alpha r^2}{n}}{\left(1+\frac{C^\alpha(1-r^2)}{2n}\right)^2}\right)+\frac{n-1}{r}\left(\frac{-2C^\alpha r}{n\left(1+\frac{C^\alpha(1-r^2)}{2n}\right)}\right)$$
$$= -2C^\alpha\frac{\left(1+\frac{C^\alpha(1-r^2)}{2n}\right)}{\left(1+\frac{C^\alpha(1-r^2)}{2n}\right)^2} - 2\frac{C^{2\alpha}}{n^2}\frac{r^2}{\left(1+\frac{C^\alpha(1-r^2)}{2n}\right)^2} \tag{4.7}$$

Nosso objetivo é mostrar que $-\Delta\underline{\varphi_C} \le Ce^{-\underline{\varphi_C}}$. Mas isto é equivalente à desigualdade

$$2C^\alpha\left(1+C^\alpha\frac{1-r^2}{2n}\right)+2\frac{C^{2\alpha}}{n^2}r^2 \le C, \tag{4.8}$$

que é satisfeita para $\alpha < \frac{1}{2}$ e $C$ suficientemente grande, como mostramos na observação a seguir:

**Observação 4.1.3.** Sendo $0 \le r \le 1$, temos que $1-r^2 \le 1$ e $r^2 \le 1$, de onde segue que

$$2C^\alpha + \frac{C^{2\alpha}}{n}(1-r^2) + 2\frac{C^{2\alpha}}{n^2}r^2 \le 2C^\alpha + \frac{C^{2\alpha}}{2} + 2\frac{C^{2\alpha}}{4} = 2C^\alpha + C^{2\alpha},$$

já que $n \ge 2$.

Agora note que $C^{\frac{x}{2}}\left(C^{\frac{x}{2}}+2\right) \le C^{\frac{1}{2}} \cdot C^{\frac{1}{2}} = C$, para $x < 1$ e $C$ suficientemente grande, ou seja, $2C^\alpha + C^{2\alpha} \le C$ para tal $C$ e $\alpha \le \frac{1}{2}$.

□

De modo análogo, podemos provar o

**Lema 4.1.4.** *A função* $\overline{\varphi_C}(r) = 2\log(1 + \frac{C(1-r^2)}{2n})$ *é supersolução de (4.3) para todo* $C > 0$.

*Demonstração.* Uma vez mais, o laplaciano de funções radialmente simétricas (como em (3.2)) nos conduz a

$$-\Delta\overline{\varphi_C} = 2C\frac{\left(1 + \frac{C(1-r^2)}{2n}\right)}{\left(1 + \frac{C(1-r^2)}{2n}\right)^2} + 2\frac{C^2}{n^2}\frac{r^2}{\left(1 + \frac{C(1-r^2)}{2n}\right)^2} \tag{4.9}$$

Para comprovarmos que é supersolução, observamos que $-\Delta\overline{\varphi_C} \geq Ce^{-\overline{\varphi_C}}$ é equivalente a

$$2 + C\frac{1-r^2}{n} + 2\frac{C}{n^2}r^2 \geq 1,$$

que é, naturalmente, satisfeita para todo $C > 0$ (pois $r \in (0,1)$). □

Sendo $\underline{\varphi_C}(r)$ subsolução e $\overline{\varphi_C}(r)$ supersolução do problema (4.3) (cuja solução é $\varphi_C(r)$), temos que

$$\underline{\varphi_C}(r) \leq \varphi_C(r) \leq \overline{\varphi_C}(r).$$

Consequentemente,

$$|\underline{\varphi_C'}(1)| = 2\frac{C^\alpha}{n} \leq |\varphi_C'(1)| \leq 2\frac{C}{n} = |\overline{\varphi_C'}(1)|.$$

Logo, obtemos

$$F(C) \leq \int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial\varphi_C}{\partial\nu}\right| \leq \frac{2C\sigma_n}{n}$$

e garantimos, assim, que $\lim_{C\to 0^+} F(C) = 0$.

Dividindo numerador e denominador de $F(C)$ por $2\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial\varphi_C}{\partial\nu}\right|$ (observe que sendo $\frac{\partial\varphi_C}{\partial\nu} < 0$ (na fronteira), então $|\frac{\partial\varphi_C}{\partial\nu}| = -\frac{\partial\varphi_C}{\partial\nu}$, de modo que $\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial\varphi_C}{\partial\nu}\right| = -\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\varphi_C}{\partial\nu}$), podemos estimar $F(C)$ como segue:

$$\begin{aligned} F(C) &= \frac{\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial\varphi_C}{\partial\nu}\right|}{1+\frac{1}{2}C\frac{\int_\Omega \varphi_C e^{-\varphi_C}}{\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial\varphi_C}{\partial\nu}\right|}} \geq \frac{\frac{2C^\alpha}{n}}{1+C^{1-\alpha}\left(\frac{n}{4}\right)\int_\Omega e^{-\varphi_C}\varphi_C} \\ &= \frac{2}{n\left(C^{-\alpha}+\left(\frac{n}{4}\right)C^{1-2\alpha}\int_\Omega e^{-\varphi_C}\varphi_C\right)}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Aqui, observamos que

$$\int_\Omega e^{-\varphi_C}\varphi_C \leq \int_\Omega e^{-\underline{\varphi_C}}\cdot\overline{\varphi_C} = \int_0^1 \frac{1}{\left(1+\frac{C^\alpha(1-r^2)}{2n}\right)^2} 2\log\left(1+C\frac{1-r^2}{2n}\right)dr \approx C^\gamma$$

para algum $\gamma$ conveniente ($\gamma < 0$).

**Observação 4.1.5.** Tal aproximação pode ser obtida decompondo o intervalo $[0,1]$ em $I_1 = \left[0,\sqrt{1-\frac{1}{C^\beta}}\right]$ e $I_2 = \left[\sqrt{1-\frac{1}{C^\beta}},1\right]$, onde $\beta$ pode ser ajustado convenientemente. Mostra-se que, em $I_1$, a integral fica limitada por $K\cdot C^{\rho-2\alpha+2\beta}$ e, em $I_2$, por $C^{\rho-\beta}$, onde $K$ é uma constante que depende de n e $\rho$ é também "ajustável"para C suficientemente grande. Logo,

$$\int_0^1 \frac{2\log\left(1+C\frac{1-r^2}{2n}\right)}{\left(1+\frac{C^\alpha(1-r^2)}{2n}\right)^2}dr \leq K\cdot C^{\rho-2\alpha+2\beta} + C^{\rho-\beta}$$

e, tomando, por exemplo, $\rho = \alpha/3$ e $\beta = 2\alpha/3$, obtemos $\gamma$ desejável.

Assim, quando $C \to \infty$, temos $F(C) \to \infty$.

Para mostrarmos que $F((0, \infty)) = (0, \infty)$ resta provar o

**Lema 4.1.6.** *A solução $\varphi_C$ de (4.3) depende continuamente de $C$ na norma do supremo.*

*Demonstração.* Para $C > C_0$, a função $\frac{C}{C_0}\varphi_{C_0}$ é uma supersolução de (4.3). De fato,

$$-\Delta \frac{C}{C_0}\varphi_{C_0} = Ce^{-\varphi_{C_0}} \geq Ce^{-\frac{C}{C_0}\varphi_{C_0}}$$

De modo análogo, a função $\frac{C}{C_0}\varphi_{C_0}$ para $C < C_0$ é subsolução de (4.3).

Além disso, para $C > C_0$, a função $\varphi_{C_0}$ é uma subsolução de (4.3) e para $C < C_0$ a função $\varphi_{C_0}$ é uma supersolução de (4.3).
Tomando, então, $C_1 < C_0 < C_2$, temos

$$\frac{C_1}{C_0}\varphi_{C_0} \leq \varphi_{C_1} \leq \varphi_{C_0} \leq \varphi_{C_2} \leq \frac{C_2}{C_0}\varphi_{C_0}.$$

Temos, portanto, que $\varphi_C$ depende continuamente de $C$. $\square$

Com isso, concluímos o

**Teorema 4.1.7.** *O problema (4.1) tem uma solução para todo $M > 0$ e $E > 0$.*

## 4.2 Resolução em um domínio limitado

O objetivo desta seção é mostrar que se reduzirmos nossas hipóteses em relação ao Teorema 4.1.7, ou seja, estendendo o domínio além de uma bola unitária (desde que limitado), ainda assim conseguiremos solução única. É razoável que, para tanto, fiquemos condicionados a certas restrições de $M$ e $E$ (antes, positivos quaisquer). Para isso, utilizaremos o Teorema do Ponto Fixo de Schauder (Teorema 2.1.4) aplicado a um operador $A$ definido convenientemente.

Além disso, usaremos o fato de que, sendo $\partial\Omega \in C^2$, então $\Omega$ satisfaz a condição da esfera exterior/interior e, por conseguinte, existe a função de Green associada, cujas estimativas, dadas por (4.11) e (4.12) conduzem à compacidade do operador definido.

**Teorema 4.2.1.** *Se $\Omega$ é um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ com fronteira suave, então o problema (1.7) (sob a condição (1.5)) tem solução única para $M$ e $E$ tais que $\frac{M^2}{E}$ seja suficientemente pequeno.*

*Demonstração.* Definimos o operador $A : C^0(\overline{\Omega}) \to C^0(\overline{\Omega})$ por

$$A\varphi(x) = \pm\frac{M^2}{E}\frac{\int_\Omega e^{-\varphi}\left(1 + \frac{1}{2}\varphi\right)}{\left(\int_\Omega e^{-\varphi}\right)^2}\int_\Omega G(x,y)e^{-\varphi}dy,$$

onde $G(x,y)$ é a função de Green para o operador Laplaciano.

**Observação 4.2.2.** A razão pela qual definimos assim o operador deve-se ao fato de que a solução (caso exista) para o problema dado deve ser, de acordo com (2.8), da forma $\varphi(x) = \int_\Omega G(x,y)\left(\pm\frac{M^2}{E}\frac{\int_\Omega e^{-\varphi}\left(1+\frac{1}{2}\varphi\right)}{\left(\int_\Omega e^{-\varphi}\right)^2}e^{-\varphi}\right)$, já que

$\varphi = 0$ em $\partial\Omega$. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Schauder (Teorema 2.1.4), garantiremos que $\varphi = A\varphi$ para alguma $\varphi \in C^0(\overline{\Omega})$, concluindo o teorema.

As estimativas (conforme [8])

$$|G(x,y)| \leq C(\Omega)|x-y|^{-(n-2)} \tag{4.11}$$

e

$$|\nabla_x G(x,y)| \leq C'(\Omega)|x-y|^{-(n-1)} \tag{4.12}$$

indicam que $A$ é um operador contínuo e compacto.

De fato, tomando $\varphi_n$ sequência limitada em $C^0(\overline{\Omega})$ (digamos $\varphi_n \subseteq B_1(0)$) e $\psi_n = A(\varphi_n)$, mostremos que $(\psi_n)_{n\geq 1}$ é equicontínua:

$$\begin{aligned} |A(\varphi_n(x_2)) - A(\varphi_n(x_1))| &\leq \left| \frac{M^2}{E} \frac{\int_\Omega e^{-\varphi_n}\left(1 + \frac{1}{2}\varphi_n\right)}{\left(\int_\Omega e^{-\varphi_n}\right)^2} \right| \int_\Omega |G(x_2,y) - G(x_1,y)| e^{-\varphi_n} dy \\ &\leq \int_\Omega |\nabla_x G(\widetilde{x},y)||x_2 - x_1| e^{-\varphi_n(y)} dy \leq \int_\Omega C'(\Omega)|\widetilde{x} - y|^{-(n-1)}|x_2 - x_1| e^{-\varphi_n(y)} dy \\ &= |x_2 - x_1| C'(\Omega) \int_\Omega \frac{e^{-\varphi_n(y)}}{|\widetilde{x} - y|^{n-1}} \leq |x_2 - x_1| C'(\Omega) L, \end{aligned} \tag{4.13}$$

para alguma constante L.

**Observação 4.2.3.** (i) note que para última desigualdade usamos o fato de $e^{-\varphi_n(y)}$ ser limitada ($\varphi_n \subseteq B_1(0)$) e $|\widetilde{x} - y|^{-(n-1)}$ ser integrável.
(ii) $\widetilde{x}$ é tal que $x_1 \leq \widetilde{x} \leq x_2$ e, então, pudemos usar o TVM.

Para usar o Teorema do Ponto Fixo de Schauder, devemos mostrar que

$A$ leva $B_R(0) \subset C^0(\overline{\Omega})$ nela mesma.

De fato, se $\varphi \in B_R$, temos

$$\begin{aligned} |A\varphi(x)| &\leq \frac{M^2}{|E|} \frac{\left|1+\frac{1}{2}R\right| e^R \int_\Omega G(x,y)dy}{\int_\Omega e^{-\varphi}} \leq \frac{M^2}{|E|} \frac{\left|1+\frac{1}{2}R\right| e^R \vartheta(\Omega)}{e^{-R}|\Omega|} \\ &\leq \frac{M^2}{|E|} \frac{\vartheta(\Omega)}{|\Omega|} e^{2R} \left(1+\frac{R}{2}\right), \end{aligned} \tag{4.14}$$

onde $\vartheta(\Omega) = \sup_{x\in\Omega} |\int_\Omega G(x,y)dy|$. Para obtermos $|A\varphi(x)| \leq R$, é suficiente que

$$\frac{M^2}{|E|} \leq \frac{|\Omega|}{\vartheta(\Omega)} \frac{R}{e^{2R}\left(1+\frac{R}{2}\right)} := h(R).$$

Como $h(R)$ atinge seu máximo em $R = \sqrt{2}-1$, temos que, se

$$\frac{M^2}{|E|} \leq \frac{|\Omega|}{\vartheta(\Omega)} \frac{\sqrt{2}-1}{e^{2(\sqrt{2}-1)}\left(1+\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)} = \frac{|\Omega|}{\vartheta(\Omega)} 2(3-2\sqrt{2})e^{-2(\sqrt{2}-1)}$$

então $A\varphi \in B_R(0)$. $\square$

# Bibliografia


[1] C. Bandle; *Isoperimetric Inequalities and Aplications*, Monographs Stud. Math. 7, Pitman, New York, 1980.

[2] P. Biller, A. Krzywicki e T. Nadzieja; *Self-interaction of Brownian particles coupled with thermodynamic processes*, Rep. Math. Phys. 42 (1998), 359-372.

[3] P. Clément e G. Sweers; *Existence and multiplicity results for a semilinear elliptic eigenvalue problem*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa 14 (1987), pp. 97 - 121.

[4] D. S. Cohen e H. B. Keller; *Some positone problems suggested by nonlinear heat generation*, Journal of Mathematical Mechanics 16 (1967), pp. 1361 - 1376.

[5] E. N. Dancer e G. Sweers; *On the existence of a maximal weak solution for a semilinear elliptic equation*, Differential and Integral Equations 2 (1989), pp. 533 - 540.

[6] L. C. Evans; *Partial Differential Equations*, Graduated Studies in Mathematics, Vol. 19, American Mathematical Society (1998).

[7] D. Gilbarg, N. Trudinger; *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Berlin, New York: Springer-Verlag (2001).

[8] M. Grüter, K.O. Widman; *The Green function for uniformly elliptic equations*, Manuscripta Math. 37 (1982), 303-342.

[9] A. Krzywicki e T. Nadzieja; *Some results concerning the Poisson-Boltzmann equation*, Appl. Math. (Warsaw) 21 (1991), 365-372

[10] E. L. Lima; *Análise Real Vol. 3 - Análise Vetorial*, Coleção Matemática Universitária, SBM, (2007).

[11] P. L. Lions; *On the existence of positive solutions of semilinear elliptic equations*, Siam Review 24 (1982), pp. 441 - 467.

[12] T. Nadzieja, P. L. Lions; *Radially Symmetric Solutions of the Poisson-Boltzmann Equation with a given energy*, Applicationes Mathematicae 27,4 (2000), pp. 465 - 473.

[13] A. C. Ponce; *Métodos Clássicos em Teoria do Potencial*, Publicações Matemáticas, IMPA (2006).

[14] R. F. Streater; *A gas of Brownian particles in stochastic dynamics*, J. Statist. Phys. 88 (1997), 447-469.