Dissertação submetida por GISELLE SPINDLER* como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professora Orientadora:
Dra. Ada Maria de Souza Doering

Banca Examinadora:
Dra. Cydara Cavedon Ripoll
Dra. Luisa Rodrigues Doering
Dr. Yves Albert Emile Lequain

Data da Defesa: 19 de novembro de 2001

---

* Bolsita do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPQ

Para Pedro (in memorian) e Isabel

AGRADECIMENTOS

Agradeço à ALICE, responsável pelo meu retorno à Universidade, aos amigos de todas as horas, JOÃO e CAREN, pela grande ajuda nesta caminhada, aos colegas, SIMONE, BÁRBARA, LINÉIA, ALINE e SÍLVIO, pelo incentivo nos momentos críticos, à minha orientadora, ADA, pela paciência que teve ao me ensinar, à professora LUISA, por ter cedido a sua turma para o meu estágio, ao vô PEDRO, por ter sido um pai, e à ISABEL, que me deu a vida.

"É preciso sonhar,
mas com a condição de crer em nosso sonho.
De examinar com atenção a vida real,
de confrontar nossa observação com nosso sonho,
de realizar escrupulosamente nossa fantasia.
Sonhos, acredite neles."

(Lênin)

ÍNDICE

RESUMO

Suponhamos que M seja um ideal maximal de um domínio R e que alguma potência de M seja finitamente gerada. Vamos mostrar que M será finitamente gerado em cada um dos seguintes casos: *i*) M tem altura um, *ii*) R é inteiramente fechado e altura de M é 2, *iii*) $R = K[X,\overline{S}]$ é um domínio monóide sobre um corpo K, onde $\overline{S} = S \cup \{0\}$ é um monóide cancelativo e livre de torção, tal que $\bigcap_{i=1}^{\infty} iS = \emptyset$ e M é o ideal maximal gerado por $\{X^s / s \in S\}$. Estendemos os resultados anteriores aos ideais I de um anel reduzido R tal que $\frac{R}{I}$ é anel Noetheriano. Provamos que um anel reduzido R é Noetheriano se cada ideal primo de R possui uma potência que é finitamente gerada. Para cada d tal que $3 \leq d \leq \infty$, estabelecemos a existência de um domínio de integridade d-dimensional que possui um ideal maximal M não finitamente gerado, de altura d tal que M^2 é 3-gerado.

ABSTRACT

Suppose M is a maximal ideal of a commutative integral domain R and that some power M^n of M is finitely generated. We show that M is finitely generated in each of the following cases: *i*) M is of height one, *ii*) R is integrally closed and ht $M = 2$, *iii*) $R = K[X,\overline{S}]$ is a monoid domain over a field K, where $\overline{S} = S \cup \{0\}$ is a cancellative torsion-free monoid such that $\bigcap_{i=1}^{\infty} iS = \emptyset$, and M is the maximal ideal generated by $\{X^s / s \in S\}$. We extend the above results to ideals I of a reduced ring R such that $\frac{R}{I}$ is Noetherian. We prove that a reduced ring R is Noetherian if each prime ideal of R has a power that is finitely generated. For each d with $3 \leq d \leq \infty$, we establish existence of a d-dimensional integral domain having a nonfinitely generated maximal ideal M of height d such that M^2 is 3-generated.

Capítulo 0

Introdução

Neste trabalho todos os anéis são comutativos com unidade.

O objetivo desta dissertação é estudar a questão:

Em um anel R, se uma potência I^n de um ideal I for um ideal finitamente gerado, podemos garantir que I seja também um ideal finitamente gerado de R?

É fácil encontrar um contra-exemplo para esta questão. No exemplo 1.17.A apresentamos um anel quasilocal R cujo ideal maximal M não é um ideal finitamente gerado e, no entanto, $M^2 = (0)$.

Em 1972, em [G_1], Gilmer colocou a seguinte questão:

Questão 0.1: Em um domínio R, suponha que alguma potência M^n de um ideal maximal M seja um ideal finitamente gerado. Podemos garantir que M seja um ideal finitamente gerado de R?

Em Janeiro de 1973, na sessão de problemas de *Notices of the AMS*, organizado por

Graham Evans em Dallas, esta questão aparece novamente, agora com a hipótese adicional de R ser um domínio quasilocal inteiramente fechado.

Em 1999, Robert Gilmer, William Heinzer e Moshe Roitman, em [G-H-R], construiram um contra-exemplo para a Questão 01. Esta dissertação é baseada neste artigo. Após terem respondido negativamente a Questão 0.1, Gilmer, Heinzer e Roitman se interessaram em encontrar hipóteses que garantissem uma resposta afirmativa para esta questão. De fato eles propuseram uma questão mais geral:

Questão 0.2: Suponha que I é um ideal de um anel R tal que $\frac{R}{I}$ é um anel Noetheriano, e alguma potência de I é um ideal finitamente gerado. Sob que condições podemos garantir que I é um ideal finitamente gerado do anel R?

No Capítulo 1 são apresentadas algumas condições que garantem que o ideal M da Questão 0.1 e o ideal I da Questão 0.2 são finitamente gerados.

O Teorema 1.24 garante que o ideal maximal M, da Questão 0.1, é um ideal finitamente gerado se R é um anel reduzido e $alt(M) = 1$, ou se R é um domínio inteiramente fechado e $alt(M) \leq 2$. A Questão 0.1 para domínios inteiramente fechados ainda não foi resolvida, se $alt(M) \geq 3$.

Com respeito à Questão 0.2, o Teorema 1.10 garante que o ideal I será um ideal finitamente gerado de um anel R se $\sqrt{I}$ for o radical de um ideal gerado por uma seqüência regular finita não vazia.

O Teorema 1.17 é uma generalização para o caso de anéis reduzidos do Teorema de Cohen [K-Teorema 8], e ele garante que se R é um anel reduzido no qual cada ideal primo possui uma potência que é um ideal finitamente gerado, então R é um anel Noetheriano. O Teorema 1.20 mostra que se R é um anel semiquasilocal reduzido no qual todo ideal primo de altura positiva possui uma potência finitamente gerada, então R é um anel Noetheriano.

No Capítulo 2 estudaremos a Questão 0.1 para o caso de um domínio monóide sobre um corpo K. Para tanto iniciamos o Capítulo 2 com definições e resultados que se fazem necessários para o entendimento do artigo de Gilmer, Heinzer e Roitman. Então apresentaremos, no Teorema 2.3, condições para que a Questão 01, no caso de um semigrupo comutativo cancelativo S, tenha uma resposta afirmativa contanto que tenhamos entre as hipóteses que $\bigcap_{i=1}^{\infty} iS = \emptyset$. Dado um semigrupo comutativo cancelativo S, denotaremos por $\bar{S}$ o monóide $S \cup \{0\}$. Estabeleceremos, na Proposição 2.1, a conexão entre estes dois aspectos da Questão 0.1 (para semigrupos e para anéis) e isto, então, nos permitirá concluir, no Teorema 2.5, que se K for um corpo e se $R = K[X,\bar{S}]$ for um anel monóide sobre K, onde $\bar{S}$ é um monóide cancelativo, $S = \bar{S} \setminus \{0\}$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} iS = \emptyset$ e M é o ideal maximal gerado por $\left\{X^s \,/\, s \in S\right\}$, então M será um ideal finitamente gerado se alguma potência do ideal maximal M for finitamente gerada. Se retirarmos a hipótese de que $\bigcap_{i=1}^{\infty} iS = \emptyset$, mostraremos, no exemplo 3.2, que então o ideal maximal M poderá não ser um ideal finitamente gerado.

No capítulo 3 apresentamos, no Exemplo 3.2, o contra-exemplo construído por Gilmer, Heinzer e Roitman para a Questão 0.1. Este exemplo nos mostrará também que as hipóteses de alguns resultados deste trabalho não poderão ser desprezadas ou substituídas.

No apêndice desta dissertação são apresentados os resultados mencionados no decorrer do trabalho, cujas demonstrações podem ser devidamente encontradas nas referências citadas.

Esta dissertação seguiu rigorosamente a numeração apresentada do artigo de Gilmer, Heinzer e Roitman, a saber envolvendo apenas números. As definições e resultados que foram adicionados, aparecem indexados com números e letras.

Capítulo 1

Potências de Ideais

Seja R um anel e I um ideal de R tal que I^n é um ideal finitamente gerado para algum inteiro positivo n. O objetivo deste capítulo é determinar sob quais condições I será um ideal finitamente gerado de R.

Os Lemas 1.1 e 1.2, a seguir nos mostram que se I for um ideal de um anel R tal que I^n é um ideal finitamente gerado, para algum inteiro positivo n, então existirá um ideal J em R, finitamente gerado, tal que $J \subseteq I$ e $J^m = I^m$ para qualquer inteiro $m \geq n$.

Lema 1.1: *Sejam $J \subseteq I$ ideais em um anel R tais que $I^n = J^n$ para algum inteiro positivo n. Então $I^m = I^i J^{m-i}$ para todo $m \geq n$ e $0 \leq i \leq m$.*

Prova: Inicialmente observe que, para todo $m \geq n$ e $0 \leq i \leq m$, como $J \subseteq I$, temos $J^m = J^i J^{m-i} \subseteq I^i J^{m-i} \subseteq I^i I^{m-i} = I^m$. Assim basta mostrar que $I^m = J^m$, para todo $m \geq n$ ou, equivalentemente, que $I^{n+i} = J^{n+i}$ para qualquer inteiro positivo i. Este resultado será provado por indução sobre i. Se $i = 0$, então o resultado é válido por hipótese. Suponhamos que a igualdade seja válida para $i = k$, isto é, $I^{n+k} = J^{n+k}$. Observaremos agora que $I^n = J^n = JJ^{n-1} \subseteq JI^{n-1} \subseteq II^{n-1} = I^n$, obtendo assim que $I^n = JI^{n-1}$. Deste modo, $I^{n+k+1} = I^n I^{k+1} = JI^{n-1} I^{k+1} = JI^{n+k} = JJ^{n+k} = J^{n+k+1}$, logo a igualdade é válida para $i = k+1$. Então temos que $I^m = J^m$, para qualquer inteiro $m \geq n$. Como $J^m \subseteq I^i J^{m-i} \subseteq I^m$, para todo $0 \leq i \leq m$, então $I^m = I^i J^{m-i}$.□

Lema 1.2: *Se I é um ideal de um anel R tal que I^n é finitamente gerado para algum inteiro positivo n, então existe um ideal finitamente gerado $J \subseteq I$ tal que $I^n = J^n$.*

Prova: Seja I um ideal de um anel R, tal que I^n é um ideal finitamente gerado. Sejam $a_1, ..., a_k \in R$ geradores de I^n, isto é, $I^n = (a_1, ..., a_k)$. Como cada $a_j \in I^n$ temos que cada a_j é uma soma finita de parcelas, onde cada parcela é um produto de n elementos de I. Seja B_j o ideal gerado por estes elementos. Em particular, $a_j \in B_j^n$. Fixemos $J = \sum_{j=1}^k B_j$ e temos então que $\sum_{j=1}^k B_j = J \subseteq I$. Mostraremos agora que $I^n = J^n$. Como $J \subseteq I$ então $J^n \subseteq I^n$. Por outro lado, se $b \in I^n$, então $b = r_1 a_1 + ... + r_k a_k$, onde $r_j \in R$. Como $a_j \in B_j^n \subseteq J^n$ para qualquer $1 \leq j \leq k$, temos que $b \in J^n$. Logo $I^n \subseteq J^n$ o que demonstra que $I^n = J^n$.□

Corolário 1.2.A: *Sejam R um anel e I um ideal de R tal que, para algum inteiro positivo n, I^n é um ideal finitamente gerado. Então I^m é um ideal finitamente gerado para todo inteiro positivo m, onde $m \geq n$.*

Prova: Seja J um ideal finitamente gerado, $J \subseteq I$ tal que $J^n = I^n$. Como J é um ideal finitamente gerado, então J^m é um ideal finitamente gerado para qualquer inteiro positivo m. Seja $m \geq n$. Pelo Lema 1.1 temos que $I^m = J^m$, portanto I^m é um ideal finitamente gerado para todo inteiro positivo $m \geq n$.□

Convencionamos que sempre que os ideais I e J forem como os ideais citados no Corolário 1.2.A, diremos que I e J possuem as mesmas potências altas.

Lema 1.3.A: *Sejam M seja um ideal primo de um anel R e I um ideal de R tal que $I^m = M^m$ para algum inteiro positivo m. Então $M = \sqrt{I}$.*

Prova: Como $M^m = I^m$ então temos que $\sqrt{M^m} = \sqrt{I^m}$. Mas $\sqrt{M^m} = \sqrt{M}$ e $\sqrt{I^m} = \sqrt{I}$ e, ainda, como M é ideal primo de R então temos que $M = \sqrt{M} = \sqrt{I}$.□

Corolário 1.3.B: *Seja M um ideal primo de um anel R e I um ideal de R tal que $I \subseteq M$ e $I^m = M^m$ para algum inteiro positivo m. Seja J um ideal de R tal que $I \subseteq J$ e $I^n = J^n$ para algum inteiro positivo n, então $J \subseteq M$.*

Prova: Como $I^m = M^m$ e M é um ideal primo de R então, pelo Lema 1.3.A, $M = \sqrt{I}$. Como $I^n = J^n$ então $\sqrt{I^n} = \sqrt{J^n}$ e portanto $\sqrt{I} = \sqrt{J}$. Assim temos que $M = \sqrt{I} = \sqrt{J}$. Logo $J \subseteq M$.□

Observação 1.3: *Fica então demonstrado que se existe um ideal primo M com a propriedade de conter I e de possuir as mesmas potências altas de I, então este é o maior ideal com estas propriedades. Mesmo no caso de não existir um ideal primo M com estas propriedades, mostra-se, mas não o faremos aqui, que existe um maior ideal J contendo I tal que J possui as mesmas potências altas de I. Tal ideal J chama-se fecho de Ratliff-Rush de I* [H-L-S].

O Lema 1.4.A a seguir é um Lema auxiliar para a demonstração do Lema 1.4. Aproveitamos para lembrar que dados um homorfismo de R-módulos injetor $f : M_1 \to M$ e um homorfismo de R-módulos sobrejetor $g : M \to M_2$, a seqüência de R-módulos e R-homomorfismos:

$0 \to M_1 \to M \to M_2 \to 0$, é dita uma seqüência exata se e só se tivermos $\mathrm{Im}(f) = Ker(g)$.

Lema 1.4.A: *Sejam R um anel e $N_1 \subset N_2 \subset \ldots \subset N_r$ uma cadeia de R-módulos tais que $\frac{N_i}{N_{i-1}}$ é um R-módulo Noetheriano para qualquer $1 < i \leq r$, então $\frac{N_r}{N_1}$ é um R-módulo Noetheriano.*

Prova: A prova será feita por indução em r. Se $r = 2$, o lema vale por hipótese. Suponhamos que $r > 2$ e que o lema valha para $r-1$, isto é que $\frac{N_{r-1}}{N_1}$ é um R- módulo Noetheriano. Observamos então que, dadas a inclusão canônica $i : \frac{N_{r-1}}{N_1} \to \frac{N_r}{N_1}$ e a projeção canônica $\Pi : \frac{N_r}{N_1} \to \frac{N_r}{N_{r-1}}$, a seqüência de R-módulos: $0 \to \frac{N_{r-1}}{N_1} \to \frac{N_r}{N_1} \to \frac{N_r}{N_{r-1}} \to 0$ é exata. Além disso $\frac{N_{r-1}}{N_1}$ é um R-módulo Noetheriano por hipótese de indução e $\frac{N_r}{N_{r-1}}$ é um R-módulo Noetheriano por hipótese. Conclui-se então que $\frac{N_r}{N_1}$ é um R-módulo Noetheriano [A-M-6.3].□

Lema 1.4: *Sejam R um anel, $I_1, \ldots, I_k$ ideais de R tais que $\frac{R}{I_j}$ é um anel Noetheriano para todo $1 \leq j \leq k$. Sejam $N \subseteq M$ R-módulos tais que $N = (\Pi_{j=1}^{k} I_j)M$. Suponhamos que todos os R-módulos $(\Pi_{j=1}^{e} I_j)M$, onde $0 \leq e \leq k$, sejam finitamente gerados (para $e = 0$, convencionamos $\Pi_{j=1}^{e} I_j = R$). Então qualquer R-módulo K tal que $N \subseteq K \subseteq M$ é um R-módulo finitamente gerado.*

Prova: Seja K um R-módulo tal que $N \subseteq K \subseteq M$. Como N é R-módulo finitamente gerado, para mostrar que K é R-módulo finitamente gerado, basta mostrar que $\frac{K}{N}$ é R-módulo finitamente gerado. Mostraremos que $\frac{M}{N}$ é R-módulo Noetheriano, de onde decorrerá que $\frac{K}{N}$ é R-módulo finitamente gerado. Para mostrar que $\frac{M}{N}$ é R-módulo Noetheriano, consideremos a seqüência de R-módulos:

$N = (\Pi_{j=1}^{k} I_j)M \subseteq (\Pi_{j=1}^{k-1} I_j)M \subseteq \ldots \subseteq I_1 M \subseteq M$

Como $(\Pi_{j=1}^{e-1} I_j)M$ é um R-módulo finitamente gerado por hipótese, então $H_e := \frac{(\Pi_{j=1}^{e-1} I_j)M}{(\Pi_{j=1}^{e} I_j)M}$ é um R-módulo finitamente gerado. Além disso o R-módulo H_e é anulado por I_e, logo H_e é um $\frac{R}{I_e}$-módulo finitamente gerado. Como $\frac{R}{I_e}$ é um anel Noetheriano para todo $1 \leq e \leq k$, então H_e é um $\frac{R}{I_e}$-módulo Noetheriano [A-M-6.5]. Como os submódulos de H_e vistos como R-módulos ou como $\frac{R}{I_e}$-módulos são os mesmos, então, para todo $1 \leq e \leq k$, H_e é um R-módulo Noetheriano. Pelo Lema 1.4.A concluimos que $\frac{M}{N}$ é um R-módulo Noetheriano.□

O resultado do Lema 1.4 será muito utilizado no decorrer do nosso trabalho. Em particular, será necessário diretamente na demonstração do Teorema 1.9.

Corolário 1.4.B: *Sejam R um anel e I um ideal de R tal que* $\frac{R}{I}$ *seja um anel Noetheriano e* I^n *seja um ideal finitamente gerado para algum inteiro positivo n. Então, qualquer que seja o ideal J, para o qual exista um número natural m,* $m \geq n$, *tal que* $I^m \subseteq J \subseteq I^n$, *J é um ideal finitamente gerado.*

Prova: Sejam $I_1 = I_2 = ... = I_{m-n} = I$. Sejam $M = I^n$ e $N = I^m$. Temos as hipóteses do Lema 1.4 satisfeitas, pois $\frac{R}{I_j} = \frac{R}{I}$ é anel Noetheriano e $(\pi_{j=1}^{e} I_j)M = I^{n+e}$ é R-módulo finitamente gerado para todo $0 \leq e \leq m-n$. Então, pelo Lema 1.4, temos que J é um R-módulo finitamente gerado.□

Lema 1.5: *Sejam I e J ideais de um anel R tais que* $\sqrt{I} = \sqrt{J}$ *(em particular podemos tomar* $J = \sqrt{I}$*). Então as duas condições seguintes são equivalentes*:

i) $\frac{R}{I}$ *é um anel Noetheriano e I é um ideal finitamente gerado*;

ii) $\frac{R}{J}$ *é um anel Noetheriano e J é um ideal finitamente gerado.*

Prova: Suponhamos que $\frac{R}{I}$ seja um anel Noetheriano e que I seja um ideal finitamente gerado. Como $\frac{R}{I}$ é um anel Noetheriano e $\frac{\sqrt{I}}{I}$ é um ideal de $\frac{R}{I}$ então temos que $\frac{\sqrt{I}}{I}$ é um ideal finitamente gerado. Como I é um ideal finitamente gerado então $\sqrt{I}$ também o é, logo $\sqrt{J}$ também é um ideal finitamente gerado. Então para algum $m \geq 1$, temos que $\left(\sqrt{J}\right)^m \subseteq J$. Neste caso, obtemos: $\left(\sqrt{I}\right)^m = \left(\sqrt{J}\right)^m \subseteq J \subseteq \sqrt{J} = \sqrt{I}$. Logo, pelo Corolário 1.4.B, temos que J é um ideal finitamente gerado, pois $\sqrt{I}$ é ideal finitamente gerado e $\left(\sqrt{I}\right)^m \subseteq J \subseteq \sqrt{I}$. O anel $\frac{R}{\sqrt{J}}$ é um anel Noetheriano, pois $\frac{R}{\sqrt{J}} = \frac{R}{\sqrt{I}} \simeq \frac{R/I}{\sqrt{I}/I}$ e $\frac{R}{I}$ é um anel Noetheriano. Os ideais primos de $\frac{R}{J}$ são do tipo $\frac{P}{J}$ onde P é um ideal primo de R tal que $P \supseteq J$, portanto $P \supseteq \sqrt{J}$ e $\frac{P}{\sqrt{J}}$ é um ideal primo de $\frac{R}{\sqrt{J}}$. Então $\frac{P}{\sqrt{J}}$ é um ideal finitamente gerado. Como $\sqrt{J}$ é um ideal finitamente gerado, temos que P é um ideal finitamente gerado e portanto $\frac{P}{J}$ é um ideal finitamente gerado de $\frac{R}{J}$. Pelo Teorema de Cohen [K-Teorema 8] $\frac{R}{J}$ é um anel Noetheriano.

A outra implicação é análoga.□

Corolário 1.6: *Seja I um ideal de um anel R. Suponhamos que* $\frac{R}{I}$ *seja um anel Noetheriano e que* I^n *seja um ideal finitamente gerado para algum* $n \geq 1$. *Então I será um ideal finitamente gerado se e só se* $\frac{R}{I^n}$ *for um anel Noetheriano.*

Prova: Suponhamos que I seja um ideal finitamente gerado e tomemos $J = I^n$, então temos $\sqrt{J} = \sqrt{I^n} = \sqrt{I}$. Como $\frac{R}{I}$ é um anel Noetheriano, se I for um ideal finitamente gerado então, pelo Lema 1.5, $\frac{R}{I^n}$ será um anel Noetheriano. E, reciprocamente, se $\frac{R}{I^n}$ for um anel Noetheriano, como I^n é um ideal finitamente gerado por hipótese, então, pelo Lema 1.5, I será um ideal finitamente gerado.□

O Lema 1.7, a seguir, reduz a Questão 0.2, dada na Introdução, ao caso em que I é um ideal radical.

Lema 1.7: *Seja I um ideal de um anel R. Suponhamos que $\frac{R}{I}$ seja um anel Noetheriano e que alguma potência de I seja um ideal finitamente gerado. Então $\sqrt{I}$ também satisfará estas duas condições. Mais ainda, I será um ideal finitamente gerado se e só se $\sqrt{I}$ for um ideal finitamente gerado.*

Prova: Suponhamos que I^n é um ideal finitamente gerado para algum inteiro positivo n, como $\frac{R}{I}$ é um anel Noetheriano, temos que existe um inteiro k tal que $\left(\sqrt{I}\right)^k \subseteq I$ [A-M-7.14], logo $(I^n)^k = (I^k)^n \subseteq \left(\left(\sqrt{I}\right)^k\right)^n \subseteq I^n$. Como I^n é um ideal finitamente gerado e $\frac{R}{I}$ é um anel Noetheriano então, pelo Corolário 1.4.B, temos que $\left(\sqrt{I}\right)^{kn}$ é um ideal finitamente gerado. Como $\frac{R}{I}$ é um anel Noetheriano e $\frac{\sqrt{I}}{I}$ é um ideal de $\frac{R}{I}$ então, por [A-M-6.6], temos que $\frac{R/I}{\sqrt{I}/I}$ é um anel Noetheriano. Pelo Teorema de Isomorfismo $\frac{R/I}{\sqrt{I}/I} \simeq \frac{R}{\sqrt{I}}$, logo $\frac{R}{\sqrt{I}}$ é um anel Noetheriano. Portanto $\sqrt{I}$ é tal que $\frac{R}{\sqrt{I}}$ é anel Noetheriano e, para algum inteiro positivo n, temos $\left(\sqrt{I}\right)^n$ é um ideal finitamente gerado. Tomando $J = \sqrt{I}$ no Lema 1.5, temos que I será um ideal finitamente gerado se e só se $\sqrt{I}$ for um ideal finitamente gerado.□

O Lema 1.8, a seguir, reduz a Questão 0.1, apresentada na Introdução, ao caso em que M é o ideal maximal de um anel quasilocal. Para que não existam dúvidas sobre as definições utilizadas neste trabalho, apresentamos agora as definições de anel quasilocal, local e semiquasilocal.

Definição 1.8.A: *Um anel R é dito quasilocal quando R possui apenas um ideal maximal M.*

Definição 1.8.B: *Um anel R é dito local quando R é Noetheriano e possui apenas um ideal maximal M.*

Definição 1.8.C: *Um anel R é dito semiquasilocal quando R possui um número finito de ideais maximais.*

Lema 1.8: *Seja R um anel e M um ideal maximal de R. Suponhamos que M seja o radical de um ideal finitamente gerado. Então o ideal M de R será finitamente gerado se e só se o ideal MR_M de R_M for finitamente gerado.*

Prova: Se M é um ideal finitamente gerado então MR_M é um ideal finitamente gerado por propriedades de localização.

Suponhamos que MR_M seja um ideal finitamente gerado. Seja I um ideal finitamente gerado de R tal que $M = \sqrt{I}$. Teremos então $\sqrt{IR_M} = \sqrt{MR_M} = MR_M$. Como $\frac{R_M}{MR_M}$ é um anel Noetheriano, pois é um corpo, e MR_M é um ideal finitamente gerado, pelo Lema 1.5 temos que $\frac{R_M}{IR_M}$ é um anel Noetheriano e IR_M é um ideal finitamente gerado. Como $\frac{M}{I}$ é o único ideal maximal de $\frac{R}{I}$, então $\left(\frac{R}{I}\right) = \left(\frac{R}{I}\right)_{M/I}$. Além disto $\left(\frac{R}{I}\right)_{M/I} \simeq \frac{R_M}{IR_M}$ que é um anel Noetheriano, logo $\frac{R}{I}$ é um anel Noetheriano, portanto $\frac{M}{I}$ é um ideal finitamente gerado. Como I é um ideal finitamente gerado, então o ideal maximal M de R é finitamente gerado.□

Os próximos dois Teoremas apresentam condições suficientes para que o ideal I do anel R, citado na Questão 0.2 apresentada na Introdução, seja um ideal finitamente gerado. Apresentamos agora a definição de anel reduzido.

Definição 1.9.A: *Um anel R é dito reduzido quando o único elemento nilpotente de R é o elemento zero.*

Teorema 1.9: *Seja I um ideal de R tal que* $\frac{R}{I}$ *é um anel Noetheriano e alguma potência de I é um ideal finitamente gerado. Se para todo* $c \in I$, $c \neq 0$ *tivermos* $cI \neq 0$ (*o que vale se R for um anel reduzido*), *e se* $\sqrt{I} = \sqrt{xR}$ *para algum* $x \in R$, *então I será um ideal finitamente gerado.*

Prova: Seja $x \in R$ tal que $\sqrt{I} = \sqrt{xR}$. Existe um número natural m tal que $x^m \in I$. Como $\sqrt{x^m R} = \sqrt{xR} = \sqrt{I}$, trocando x por x^m, podemos supor que $x \in I$. Seja n o menor inteiro positivo tal que I^n seja um ideal finitamente gerado. Vamos mostrar que $n = 1$. Como I^n é um ideal finitamente gerado e $I^n \subseteq \sqrt{I} = \sqrt{xR}$ existe um inteiro positivo s tal que $I^{ns} \subseteq xR$, logo $I^{ns+1} = I^{ns}I \subseteq xRI \subseteq xI$. Escolhendo $t = ns+1$, temos que $I^t \subseteq xI$. Suponhamos que $n > 1$. Temos então $I^{t+n-2} = I^t I^{n-2} \subseteq xII^{n-2} = xI^{n-1} \subseteq I^n$. Como $\frac{R}{I}$ é anel Noetheriano e I^n é um ideal finitamente gerado então, pelo Corolário 1.4.B, temos que xI^{n-1} é um ideal finitamente gerado de R. Sejam $b_1, ..., b_s \in I^{n-1}$ tais que $xI^{n-1} = (xb_1, ..., xb_s)$. Seja $J := (b_1, ..., b_s)$. Observemos que $J \subseteq I^{n-1}$ e $xJ = xI^{n-1}$. Mostraremos que , sendo $n > 1$, $xi \neq 0$ para todo $i \in I$, $i \neq 0$, de onde teremos que $I^{n-1} = J$, concluindo assim que I^{n-1} é um ideal finitamente gerado de R, o que contrariaria a minimalidade de n. Portanto n deverá ser igual a 1 e teremos que I será um ideal finitamente gerado.

Resta-nos, portanto, mostrar que $xi \neq 0$, para todo $i \in I$, $i \neq 0$, isto é, que $(0 : x) \cap I = (0)$. Como $(0 : x) \subseteq (0 : I^{n+t-2})$, pois $I^{t+n-2} \subseteq xI^{n-1} \subseteq xR$, basta mostrarmos que $(0 : I^{t+n-2}) \cap I = (0)$. Mostraremos que $(0 : I^r) \cap I = (0)$ para todo $r \geq 1$. É claro que $(0 : I^r) \subseteq (0 : I^{r+1})$. Suponhamos, por absurdo, que $(0 : I^r) \cap I \subsetneq (0 : I^{r+1}) \cap I$ para algum $r \geq 1$. Seja $a \in I$ tal que $aI^{r+1} = (0)$ e $aI^r \neq (0)$. Seja $c \in I^r$ tal que $ac \neq 0$. Temos assim $acI \subseteq aI^rI = aI^{r+1} = (0)$. Logo $ac \in I$ e $acI = (0)$. Como por hipótese $(0 : I) \cap I = (0)$, então temos que $ac \in (0 : I) \cap I = (0)$, o que contraria o fato de $ac \neq 0$. Logo, $(0 : I^r) \cap I = (0 : I^{r+1}) \cap I$. Então $(0 : I^r) \cap I = (0)$, qualquer que seja $r \geq 1$, o que finaliza a prova.□

O Teorema 1.10, como veremos a seguir, pode ser considerado como uma generalização do Teorema 1.9. Apresentamos a definição de seqüência regular, ou R-seqüência, que será utilizada no Teorema 1.10. Observamos que na definição a seguir utilizamos $\mathcal{Z}(A)$ para denotar o conjunto dos divisores de zero de um R-módulo A.

Definição 1.10.A: *Sejam R um anel e A um R-módulo. A seqüência ordenada de elementos* $x_1, ..., x_n$ *de R é dita uma seqüência regular* (*ou uma R-seqüência*) *em A se*:

a) $(x_1, ..., x_n)A \neq A$,

b) $x_1 \notin \mathcal{Z}(A)$ *e*,

c) *para cada* $i \in \{2, ..., n\}$, $x_i \notin \mathcal{Z}(A/(x_1, ..., x_{i-1})A)$, *isto é*, x_i *é um não divisor de zero em* $A/(x_1, ..., x_{i-1})A$.

O caso em que $A = R$ *é de importância especial. Dizemos simplesmente que a seqüência é uma seqüência regular ou uma R-seqüência. Então neste caso teremos que* x_1 *não é nem um invertível nem um divisor de zero em R, a imagem de* x_2 *em* $\frac{R}{(x_1)}$ *não é nem* *um invertível nem um divisor de zero no anel* $R/(x_1)$, *a imagem de* x_3 em $\frac{R}{(x_1,x_2)}$ *não é nem um invertível nem um divisor de zero no anel* $R/(x_1,x_2)$, *etc*.

Definição 1.10.B: *Um elemento x de um anel R é dito regular se x não é um divisor de zero em R.*

Teorema 1.10: *Seja I um ideal de um anel R. Suponhamos que* $\frac{R}{I}$ *seja um anel Noetheriano e que alguma potência de I seja um ideal finitamente gerado. Então I é finitamente gerado em cada um dos seguintes casos*:

1) $\sqrt{I} = \sqrt{(J,x)}$, *onde J é um ideal de R finitamente gerado e x é um elemento regular* mod J.

2) $\sqrt{I} = \sqrt{(x_1,...,x_k)}$, *onde* $x_1,...,x_k$ *é uma seqüência regular de elementos de R* $(k \geq 1)$.

3) *R é um anel reduzido e* $\sqrt{I} = \sqrt{xR}$ *para algum* $x \in R$.

Prova: 1) Seja $\mathfrak{R} = \frac{R}{J}$ e $\mathfrak{I} = \frac{\sqrt{I}}{J}$. O anel $\mathfrak{R}/\mathfrak{I}$ é isomorfo a $R/\sqrt{I}$. Como R/I é anel Noetheriano e alguma potência de I é finitamente gerada, então pelo Lema 1.7, $R/\sqrt{I}$ é anel Noetheriano e alguma potência de $\sqrt{I}$ é finitamente gerada. Além disso, I será um ideal finitamente gerado se e só se $\sqrt{I}$ o for. Para mostrar que $\sqrt{I}$ é ideal finitamente gerado, como J é ideal finitamente gerado, basta mostrar que o ideal $\mathfrak{I}$ de $\mathfrak{R}$ é finitamente gerado. Vamos aplicar o Teorema 1.9 ao anel $\mathfrak{R}$ com o ideal $\mathfrak{I}$. Já sabemos que $\mathfrak{R}/\mathfrak{I} \simeq R/\sqrt{I}$ é um anel Noetheriano. Sabemos também que alguma potência de $\mathfrak{I} = \frac{\sqrt{I}}{J}$ é um ideal finitamente gerado, pois alguma potência de $\sqrt{I}$ é um ideal finitamente gerado. Além disso $\mathfrak{I}$ é um ideal radical, logo $\sqrt{\mathfrak{I}} = \mathfrak{I} = \frac{\sqrt{I}}{J} = \frac{\sqrt{(J,x)}}{J} = \sqrt{(x+J)\mathfrak{R}}$ e $x + J \in \mathfrak{R}$. Observamos ainda que se c é um elemento de $\mathfrak{I}$, existe $a \in \sqrt{I}$ tal que $c = a + J$. Além disso $c\mathfrak{I} = (0)$ se e somente se $a\sqrt{I} \subseteq J$. Como $\sqrt{I} = \sqrt{(J,x)}$ então se $a\sqrt{I} \subseteq J$ temos que $ax \in J$. Como x é um elemento regular módulo J, então $a \in J$, portanto $c = 0$. Logo, sendo $c \neq 0$, $c \in \mathfrak{I}$, então $c\mathfrak{I} \neq 0$. Sendo assim , as hipóteses do Teorema 1.9 estão satisfeitas e portanto $\mathfrak{I}$ é um ideal finitamente gerado do anel $\mathfrak{R}$.

2) Este é um caso particular do item 1), basta tomarmos $J = (x_1,...,x_{k-1})$ e teremos que $x_k \notin \mathcal{Z}\left(\frac{R}{J}\right)$, ou seja, x_k é um elemento regular mod J então teremos $\sqrt{I} = \sqrt{(J,x_k)}$ assim pelo item anterior, I é um ideal finitamente gerado.

3) Se R é um anel reduzido então R não possui elementos nilpotentes não nulos, logo $cI \neq (0)$, para todo $c \in I$, $c \neq 0$. Como $\frac{R}{I}$ é um anel Noetheriano, I^n é um ideal finitamente gerado, para algum inteiro positivo n, e $\sqrt{I} = \sqrt{xR}$ então, pelo Teorema 1.9, I é um ideal finitamente gerado.□

Observação 1.11: O Teorema 1.10 e alguns outros resultados deste tipo podem ser combinados com os Lemas 1.5 e 1.7 para que possamos obter outros resultados. É o caso do Lema 1.12 a seguir, que é o resultado de uma combinação entre o Teorema 1.10 e o Lema 1.5.

Lema 1.12: *Seja x um elemento regular em um anel R tal que* $\frac{R}{\sqrt{xR}}$ *é um anel Noetheriano. Se alguma potência de* $\sqrt{xR}$ *for um ideal finitamente gerado, então o anel* $\frac{R}{xR}$ *será Noetheriano. Em particular* $\sqrt{xR}$ *é um ideal finitamente gerado.*

Prova: Seja $I = \sqrt{xR}$. Pelo Teorema 1.10.2, I é um ideal finitamente gerado, pois $\frac{R}{I}$ é anel Noetheriano, alguma potência de I é finitamente gerada e x é um elemento regular de

R. Seja $J = xR$. Temos que $\sqrt{I} = \sqrt{J}$, logo, pelo Lema 1.5, $\frac{R}{J}$ é anel Noetheriano, portanto $\frac{R}{xR}$ é um anel Noetheriano .□

As Observações a seguir nos mostram resultados importantes sobre o Espectro Primo de um anel R. Estes resultados serão necessários para as demonstrações dos Teoremas 1.17 e 1.20 e também da Proposição 1.18. Assim, vale a pena relembrar a Topologia de Zariski.

Seja R um anel e X o conjunto de todos os ideais primos de R. Para cada subconjunto E do anel R, utilizamos $V(E)$ para representar o conjunto de todos os ideais primos próprios de R que contém E. É fácil verificar que são verdadeiras as seguintes afirmações.

i) $V(0) = X$ e $V(1) = \emptyset$

ii) $V(\cup_{i\in I} E_i) = \cap_{i\in I} V(E_i)$, onde $(E_i)_{i\in I}$ é uma família qualquer de subconjuntos de R.

iii) $V(I_1 \cap I_2) = V(I_1 I_2) = V(I_1) \cup V(I_2)$ para quaisquer I_1, I_2 ideais do anel R.

Assim os conjuntos $V(E)$ satisfazem os axiomas para conjuntos fechados em um espaço topológico. A topologia resultante é chamada de Topologia de Zariski e o espaço topológico X é chamado de Espectro Primo de R que será denotado por *SpecR*. Salientamos ainda as seguntes propriedades adicionais desta topologia.

iv) Se I é o ideal gerado por E, então $V(E) = V(I) = V(\sqrt{I})$.

v) Se I e J são ideais de R então $V(I) \subseteq V(J)$ se e somente se $\sqrt{I} \supseteq \sqrt{J}$.

Proposição 1.13.A: *Seja R um anel tal que para qualquer ideal primo mínimo P de R o anel $\frac{R}{P}$ é Noetheriano. Se todo ideal primo mínimo P de R for o radi- cal de um ideal finitamente gerado, então todo ideal primo de R também será o radical de um ideal finitamente gerado.*

Prova: Seja $Q \in SpecR$. Se Q é ideal primo mínimo do anel R, então $Q = \sqrt{I}$, onde I é um ideal finitamente gerado. Se Q não é um primo mínimo de R então existe P primo mínimo de R, digamos $P = \sqrt{(a_1,...,a_s)}$, tal que $Q \supset P$. Como $\frac{R}{P}$ é um anel Noetheriano então $\frac{Q}{P}$ é um ideal finitamente gerado, portanto Q é da forma $Q = P + (x_1,...,x_n)$. Mas então $Q = \sqrt{(a_1,...,a_s,x_1,...,x_n)}$. Logo todo ideal primo de R é o radical de um ideal finitamente gerado.□

Definição 1.13.B: *Um subconjunto fechado F é irredutível em um espaço topológico se e só se F não pode ser escrito como união de dois subconjuntos fechados próprios, isto é, se $F = F_1 \cup F_2$, onde F_1 e F_2 são fechados, então $F = F_1$ ou $F = F_2$.*

Proposição 1.13.C: *Seja P um ideal radical de R, isto é, $P = \sqrt{P}$. Então P é um ideal primo se e somente se $V(P)$ é um fechado irredutível.*

Prova: Suponhamos que P seja um ideal primo. Sejam I_1, I_2 ideais tais que $V(P) = V(I_1) \cup V(I_2)$. Como $V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_1 \cap I_2)$ e como P sendo um ideal primo é um elemento de $V(P)$ então $P \in V(I_1 \cap I_2)$, logo $P \supseteq I_1 \cap I_2$. Como P é um ideal primo, então $P \supseteq I_1$ ou $P \supseteq I_2$, logo $V(P) \subseteq V(I_1)$ ou $V(P) \subseteq V(I_2)$. Logo $V(P) = V(I_1)$ ou $V(P) = V(I_2)$, portanto $V(P)$ é um fechado irredutível.

Seja $V(P)$ um fechado irredutível e $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ ideais de R tais que $P \supseteq \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$. Como $P \supseteq \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$, temos que $V(P) \subseteq V(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}) = V(\mathfrak{A}) \cup V(\mathfrak{B})$. Como $V(P)$ é fechado irredutível e $V(P) = (V(\mathfrak{A}) \cap V(P)) \cup (V(\mathfrak{B}) \cap V(P))$, temos $V(P) = V(\mathfrak{A}) \cap V(P)$ ou $V(P) = V(\mathfrak{B}) \cap V(P)$, isto é, $V(P) \subseteq V(\mathfrak{A})$ ou $V(P) \subseteq V(\mathfrak{B})$. Portanto, como P é um ideal radical, $P \supseteq \mathfrak{A}$ ou $P \supseteq \mathfrak{B}$, logo P é um ideal primo.□

Definição 1.13.D: *Dizemos que um espaço topológico X é Noetheriano se* $\mathcal{F} = \{F / F$ *é subconjunto fechado de* $X\}$ *satisfizer a condição de cadeia des- cendente* (*ccd*), *o que é equivalente a toda subfamília de* $\mathcal{F}$ *possuir um elemento mínimo*.

Analisemos o que isto significa para o caso em que $X = SpecR$, para algum anel R.

Teorema 1.13: *As seguintes condições são equivalentes para um anel R*:

1) *SpecR é Noetheriano*,

2) *Cada ideal radical de R é o radical de um ideal finitamente gerado*,

3) *Cada ideal primo de R é o radical de um ideal finitamente gerado*,

4) *R satisfaz a condição de cadeia ascendente em ideais primos e cada ideal de R possui apenas um número finito de ideais primos mínimos*.

Prova: 1) implica 4). Como $V(I) = V(\sqrt{I})$, dizer que $SpecR$ é Noetheriano é equivalente a dizer que $\{V(I) / I$ é ideal radical de $R\}$ satisfaz ccd. Por outro lado, se I e J são ideais radicais de R, temos que $I \subseteq J$ se e somente se $V(I) \supseteq V(J)$, portanto $SpecR$ é Noetheriano se e somente se $\{I / I$ é ideal radical de $R\}$ satisfaz a condição de cadeia ascendente (cca). Como todo ideal primo de R é um ideal radical, se $SpecR$ é Noetheriano então R satisfaz cca. para ideais primos.

Vamos mostrar agora que se $X = SpecR$ é Noetheriano então todo subconjunto fechado em X é uma união finita de subconjuntos fechados irredutíveis. Seja E a família dos subconjuntos fechados de X e F a subfamília de E cujos elementos são uniões finitas de fechados irredutíveis de X. Queremos mostrar que $E = F$. É claro que $F \subseteq E$. Suponhamos então que $E \neq F$ então $E \setminus F \neq \emptyset$. Como X é Noetheriano então $E \setminus F$ possui um elemento mínimo, digamos A. Se A fosse irredutível então $A \in F$ o que seria um absurdo. Assim A é um fechado não irredutível; então existem F_1, F_2 subconjuntos fechados tais que $A = F_1 \cup F_2$ e $F_1 \subsetneq A$ e $F_2 \subsetneq A$, logo, pela minimalidade de A, temos que $F_1, F_2 \in F$, assim, tanto F_1 quanto F_2 são uniões finitas de fechados irredutíveis, portanto A é uma união finita de fechados irredutíveis em X, o que é um absurdo. Portanto $E = F$, isto é, todo subconjunto fechado em X é uma união finita de fechados irredutíveis. Portanto, pela Proposição 1.13.C, temos que se J é um ideal de R então existe um número finito de ideais primos mínimos, digamos $P_1, \ldots, P_n$, tais que $V(J) = V\left(\sqrt{J}\right) = \cup_{i=1}^n V(P_i) = V(\cap_{i=1}^n P_i)$. Como $\sqrt{I} = \cap_{P \in V(I)} P$, temos $\sqrt{J} = \cap_{P \in V(J)} P = \cap_{P \in V(\cap P)} P = \sqrt{\cap_{i=1}^n P_i} = \cap_{i=1}^n P_i$, logo $\sqrt{J} = \cap_{i=1}^n P_i$ e J possui apenas um número finito de primos mínimos.

4) implica 1). Suponhamos por absurdo que $SpecR = X$ não seja Noetheriano. Seja $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \ldots$ uma cadeia decrescente de fechados de X não estacionária. Sejam $Z_1, \ldots, Z_n$ as componentes irredutíveis de F_1. Como todo ideal primo de R possui apenas um número finito de ideais primos mínimos por hipótese então, pela Proposição 1.13.C, todo fechado de $SpecR$ possui apenas um número finito de componentes irredutíveis, isto é, $F_1 = Z_1 \cup \ldots \cup Z_n$. Se para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ tivéssemos que a cadeia $(Z_i \cap F_1) \supseteq (Z_i \cap F_2) \supseteq (Z_i \cap F_3) \supseteq \ldots$ fosse estacionária, então existiria N tal que, para qualquer $j > N$, $Z_i \cap F_j = Z_i \cap F_N$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Logo $F_j = F_j \cap F_1 = F_j \cap (\cup_{i=1}^n Z_i) = \cup_{i=1}^n (Z_i \cap F_j) = \cup_{i=1}^n (Z_i \cap F_N) = F_N \cap (\cup_{i=1}^n Z_i) = F_N \cap F$ Então a cadeia decrescente de fechados em X seria estacionária, uma contradição. Portanto, existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que a cadeia $Z_i \supseteq Z_i \cap F_2 \supseteq Z_i \cap F_3 \supseteq Z_i \cap F_4 \supseteq \ldots$ não é estacionária. Seja $F_1' := Z_i$, F_1' é irredutível e então a cadeia decrescente de fechados $F_1' \supseteq F_1' \cap F_2 \supseteq F_1' \cap F_3 \supseteq \ldots$ não é estacionária. Repetindo o argumento para o fechado $F_1' \cap F_2$ e para a cadeia $F_1' \cap F_2 \supseteq F_1' \cap F_3 \supseteq F_1' \cap F_4 \supseteq \ldots$, verificamos que existe alguma componente irredutível F_2' de $F_1' \cap F_2$ tal que a cadeia de fechados $F_2' \supseteq F_2' \cap (F_1' \cap F_3) \supseteq F_2' \cap (F_1' \cap F_4) \supseteq \ldots$ é uma cadeia não estacionária. Como $F_1' \supseteq F_1' \cap F_2 \supseteq F_2'$ temos que $F_1' \supseteq F_2'$, logo $F_1' \supseteq F_2' \supseteq (F_1' \cap F_2' \cap F_3) \supseteq \ldots$, é uma

cadeia de fechados não estacionária. Usando novamente o argumento anterior podemos encontrar $F_3^{'}$ uma componente irredutível de $F_1^{'} \cap F_2^{'} \cap F_3$ tal que $F_1^{'} \supseteq F_2^{'} \supseteq F_3^{'} \supseteq (F_1^{'} \cap F_2^{'} \cap F_3^{'} \cap F_4) \supseteq F_1^{'} \cap F_2^{'} \cap F_3^{'} \cap F_5 \supseteq ...$ é uma cadeia de fechados não estacionária. Desta maneira podemos concluir que existe uma cadeia decrescente de fechados irredutíveis que não é estacionária. Como, pela Proposição 1.13.C, os fechados irredutíveis de *SpecR* são os $V(P)$ onde P é um ideal primo de R então temos uma cadeia de ideais primos $P_1 \subseteq P_2 \subseteq ...$ não estacionária, mas isto contradiz o fato de R satisfazer cca. para ideais primos.

2) implica 3). É direto, pois todo ideal primo de R é também um ideal radical de R. Assim, se todo ideal radical de R é o radical de um ideal finitamente gerado, então todo ideal primo de R é também o radical de um ideal finitamente gerado.

3) implica 2). Suponhamos por absurdo que exista um ideal radical I tal que I não seja o radical de algum ideal finitamente gerado. Considere F a família de tais ideais, ordenada pela inclusão. Seja $F^{'}$ uma subfamília de F totalmente ordenada e $\bar{I} = \cup_{I^{'} \in F^{'}} I^{'}$. Como $F^{'}$ é totalmente ordenada, $\bar{I}$ é um ideal radical de R. Além disso se $\bar{I}$ fosse o radical de algum ideal finitamente gerado $(b_1, ..., b_n)$ então teríamos: $\bar{I} = \sqrt{(b_1, ..., b_n)}$ e assim para cada $i \in \{1, ..., n\}$ existiria $s_i \in \mathbb{N}^*$ tal que $b_i^{s_i} \in \bar{I}$. Como $\bar{I} = \cup_{I^{'} \in F^{'}} I^{'}$ então existiria $I^{'}$ tal que $b_i^{s_i} \in I^{'}$, portanto $b_i \in \sqrt{I^{'}} = I^{'}$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Logo $\bar{I} = \sqrt{(b_1, ..., b_n)} \subseteq \sqrt{I^{'}} = I^{'} \subseteq \bar{I}$, portanto $I^{'}$ seria o radical de um ideal finitamente gerado, o que contradiz o fato de $I^{'}$ pertencer a F. Logo $\bar{I}$ é ideal radical e $\bar{I}$ não é o radical de um ideal finitamente gerado, portanto $\bar{I} \in F$. Além disso, por construção de $\bar{I}$ temos que $\bar{I} \supseteq I^{'}$, qualquer que seja $I^{'} \in F^{'}$, logo $\bar{I}$ é uma cota superior de $F^{'}$. Assim, pelo Lema de Zorn, F possui elemento máximo I, portanto I não é um ideal primo pois, por hipótese, todo ideal primo é radical de um ideal finitamente gerado. Sejam $a, b \in R \setminus I$ tais que $ab \in I$. Assim, $I \subsetneq (I : a) \subseteq \sqrt{(I : a)}$, logo $\sqrt{(I : a)} \notin F$, portanto existem $j_1, ..., j_s \in (I : a)$ tais que $\sqrt{(I : a)} = \sqrt{(j_1, ..., j_s)}$. Analogamente, como $I \subsetneq (I, a) \subseteq \sqrt{(I, a)}$, temos que $\sqrt{(I, a)} \notin F$, logo existem $x_1, ..., x_n \in R$, $i_1, ..., i_n \in I$ tais que $\sqrt{(I, a)} = \sqrt{(i_1 + x_1 a, ..., i_n + x_n a)}$. Mostraremos que $I = \sqrt{(i_1, ..., i_n, j_1 a, ..., j_s a)}$ o que contradirá o fato de I pertencer a F. Como $i_1, ..., i_n, j_1 a, ..., j_s a \in I$ e $I = \sqrt{I}$ temos que $\sqrt{(i_1, ..., i_n, j_1 a, ..., j_s a)} \subseteq I$. Seja $z \in I$. Como $I \subseteq \sqrt{(I, a)} = \sqrt{(i_1 + x_1 a, ..., i_n + x_n a)}$ existe $n \geq 1$ tal que $z^n \in (i_1 + x_1 a, ..., i_n + x_n a)$. Sejam $u_1, ..., u_n \in R$ tais que $z^n = u_1(i_1 + x_1 a) + ... + u_n(i_n + x_n a) = (u_1 x_1 + ... + u_n x_n)a + u_1 i_1 + ... + u_n i_n$. Seja $c = u_1 x_1 + ... + u_n x_n$ e $d = u_1 i_1 + ... + u_n i_n$, logo $z^n = ca + d$. Como $c \in (I : a) \subseteq \sqrt{(j_1, ..., j_s)}$ existem $t \in \mathbb{N}^*$ e $c^t \in (j_1, ..., j_s)$. Assim podemos escrever $(z^n)^t = (ca + d)^t = c^t a^t + \binom{t}{1} c^{t-1} a^{t-1} d + ... + \binom{t}{t-1} c a d^{t-1} + d^t$. Como $c^t a^t \in (j_1 a, ..., j_s a)$ e as outras parcelas pertencem ao ideal $(d) \subseteq (i_1, ..., i_n)$ então $z^{nt} \in (j_1 a, ..., j_s a, i_1, ..., i_n)$. Logo $z \in \sqrt{(i_1, ..., i_n, j_1 a, ..., j_s a)}$, o que finaliza a prova de $I = \sqrt{(i_1, ..., i_n, j_1 a, ..., j_s a)}$, e consequentemente $I \notin F$. Logo $F = \emptyset$ e assim todo ideal radical de R é o radical de algum ideal finitamente gerado.

1) implica 2). Suponhamos que exista um ideal radical $\mathfrak{A}$ que não seja o radical de um ideal finitamente gerado. Seja $a_1 \in \mathfrak{A}$, então $\sqrt{(a_1)} \subsetneq \mathfrak{A}$. Seja $a_2 \in \mathfrak{A} \setminus \sqrt{(a_1)}$, então $\sqrt{(a_1)} \subsetneq \sqrt{(a_1, a_2)} \subsetneq \mathfrak{A}$. Seja $a_3 \in \mathfrak{A} \setminus \sqrt{(a_1, a_2)}$, então $\sqrt{(a_1)} \subsetneq \sqrt{(a_1, a_2)} \subsetneq \sqrt{(a_1, a_2, a_3)} \subsetneq \mathfrak{A}$. Repetindo o argumento encontramos uma cadeia crescente de ideais radicais que não estaciona, logo *SpecR* não é Noetheriano. Portanto se *SpecR* for Noetheriano todo ideal radical de R é o radical de um ideal finitamente gerado.

2) implica 1). Como já observamos, *SpecR* é Noetheriano se e somente se toda cadeia crescente de ideais radicais é estacionária. Seja $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq ...$ uma cadeia crescente de

ideais radicais. Seja $J = \cup_{i=1}^{\infty} I_i$. Como J é um ideal radical, da hipótese temos que J é o radical de algum ideal finitamente gerado $(a_1,...,a_n)$. Assim existe $t \in \mathbb{N}^*$ tal que $J = \sqrt{(a_1,...,a_n)} \subseteq \sqrt{I_t} = I_t \subseteq J$, logo $\cup_{i=1}^{\infty} I_i = J = I_t$ e a cadeia de ideais radicais é estacionária. Portanto $SpecR$ é Noetheriano.□

Os Lemas a seguir são aplicações importantes do Teorema e das Proposições anteriores. Seus resultados tornarão mais simples as demonstrações dos Teoremas 1.17 e 1.20 e da Proposição 1.18.

Lema 1.14: *Seja R um anel reduzido tal que para cada ideal primo mínimo P o anel $\frac{R}{P}$ seja um anel Noetheriano. Suponhamos também que R possua apenas um número finito de ideais primos mínimos ou que, cada ideal primo mínimo seja o radical de um ideal finitamente gerado. Então R é um anel Noetheriano.*

Prova: A Proposição 1.13.A e o Teorema 1.13 nos mostram que em cada um destes dois casos R possui apenas um número finito de ideais primos mínimos, $P_1,...,P_n$. Como $\frac{R}{P_i}$ é um anel Noetheriano para todo $i \in \{1,...,n\}$, e $\cap_{i=1}^{n} P_i = 0$, concluímos que $R \simeq R/\cap_{i=1}^{n} P_i$ é um anel Noetheriano [N-3.16].□

Lema 1.15: *Seja R um anel tal que para todo ideal primo mínimo P o anel $\frac{R}{P}$ é Noetheriano e alguma potência de P é finitamente gerada. Então o ideal $N = \sqrt{(0)}$ é nilpotente.*

Prova: Como $P = \sqrt{P^n}$, para todo ideal primo P de R e para todo $n \in \mathbb{N}^*$, então todo primo mínimo de R é o radical de um ideal finitamente gerado assim, pela Proposição 1.13.A e pelo Teorema 1.13, temos que R possui apenas um número finito de ideais primos mínimos. Sejam $P_1,...,P_k$ os ideais primos mínimos de R e $r_1,...,r_k$ inteiros positivos tais que $P_1^{r_1},...,P_k^{r_k}$ são ideais finitamente gerados. Tomando $n = r_1 \bullet ... \bullet r_k$, temos que $P_1^n,...,P_k^n$ são finitamente gerados. Como $N = \cap_{i=1}^{k} P_i \subseteq P_j$ para todo $j \in \{1,...,k\}$ então $N^k = (\cap_{i=1}^{k} P_i)^k \subseteq P_1 \bullet ... \bullet P_k$ e, portanto $(N^k)^n \subseteq (P_1 \bullet ... \bullet P_k)^n$. Como $(P_1 \bullet ... \bullet P_k)^n$ é um ideal finitamente gerado e $(P_1 \bullet ... \bullet P_k)^n \subseteq \cap_{i=1}^{k} P_i = \sqrt{(0)}$ então existe um inteiro s tal que $(P_1 \bullet ... \bullet P_k)^{ns} = 0$. Logo $N^{kns} = 0$ e N é um ideal nilpotente.□

Lema 1.16: *Sejam R um anel e x um elemento regular de R. Suponhamos que para cada ideal primo P mínimo de x, o anel $\frac{R}{P}$ seja Noetheriano e que alguma potência de P seja finitamente gerada. Então o ideal xR contém uma potência de seu radical, e o anel $\frac{R}{xR}$ é Noetheriano. Em particular, $\sqrt{xR}$ é um ideal finitamente gerado.*

Prova: Em $\frac{R}{xR}$ os ideais primos mínimos $\frac{P}{xR}$ são tais que $\frac{R/xR}{P/xR} \simeq \frac{R}{P}$ é um anel Noetheriano e $\left(\frac{P}{xR}\right)^n$ é um ideal finitamente gerado, se P^n é ideal finitamente gerado para algum inteiro positivo n. Assim, pela Proposição 1.13.A, todo ideal primo de R é o radical de um ideal finitamente gerado portanto, pelo Teorema 1.13, $\frac{R}{xR}$ possui apenas um número finito de ideais primos mínimos, digamos $\frac{P_1}{xR},...,\frac{P_k}{xR}$. Logo $\sqrt{(\bar{0})} = \cap_{i=1}^{k} \frac{P_i}{xR}$. Pelo Lema 1.15, existe um inteiro t tal que $\left(\frac{P_1}{xR} \cap ... \cap \frac{P_k}{xR}\right)^t = \sqrt{(\bar{0})}^{\,t} = (\bar{0})$, logo $(P_1 \cap ... \cap P_k)^t = \sqrt{xR}^{\,t} \subseteq xR$. Temos assim que $(P_1 \bullet ... \bullet P_k)^t \subseteq (P_1 \cap ... \cap P_k)^t = \sqrt{xR}^{\,t} \subseteq xR$, logo $(P_1 \bullet ... \bullet P_k)^{tk} \subseteq \sqrt{xR}^{\,tk} \subseteq x^k R \subseteq P_1 \bullet ... \bullet P_k$. Tomando $N = ((P_1 \bullet ... \bullet P_k)^n)^{tk}$ e

$M = (P_1 \bullet ... \bullet P_k)^n$ temos que tanto M quanto N são R-módulos finitamente gerados e $N = \left((P_1 \bullet ... \bullet P_k)^{tk}\right)^n \subseteq \sqrt{xR}^{tkn} \subseteq (P_1 \bullet ... \bullet P_k)^n = M$. Por outro lado, para quaisquer $m_1, m_2, ..., m_k \in \mathbb{N}$, pelo Corolário 1.2.A, os ideais $P_i^{m_i+n}$ são ideais finitamente gerados, portanto $P_1^{m_1} \bullet ... \bullet P_k^{m_k} \bullet M = P_1^{m_1+n} \bullet ... \bullet P_k^{m_k+n}$ é um R-módulo finitamente gerado. Como $\frac{R}{P_i}$ é anel Noetheriano, temos que as hipóteses do Lema 1.4 são satisfeitas e que portanto $\sqrt{xR}^{tkn}$ é um ideal finitamente gerado. Os ideais primos mínimos do anel reduzido $\frac{R}{\sqrt{xR}}$ são exatamente $\frac{P_1}{\sqrt{xR}}, ..., \frac{P_k}{\sqrt{xR}}$, portanto, como $\frac{R/\sqrt{xR}}{P_i/\sqrt{xR}} \simeq \frac{R}{P_i}$ é um anel Noetheriano e $\left(\frac{P_i}{\sqrt{xR}}\right)^n$ é um ideal finitamente gerado, para todo $i \in \{1, ..., k\}$, então pelo Lema 1.14, $\frac{R}{\sqrt{xR}}$ é um anel Noetheriano. Sendo $\frac{R}{\sqrt{xR}}$ um anel Noetheriano e $\sqrt{xR}^{tnk}$ um ideal finitamente gerado então, pelo Lema 1.12, $\frac{R}{xR}$ é anel Noetheriano e, em particular $\sqrt{xR}$ é um ideal finitamente gerado.□

O Teorema a seguir, como já foi mencionado no Capítulo 0, é um teorema semelhante ao Teorema de Cohen.

Teorema 1.17: *Seja R um anel reduzido. Suponhamos que cada ideal primo de R possui uma potência que é finitamente gerada. Então R é um anel Noetheriano.*

Prova: Como para todo ideal primo P de R temos que P^n é finitamente gerado para algum inteiro positivo n e, como $P = \sqrt{P^n}$, então todo ideal primo de R é o radical de um ideal finitamente gerado. Assim, pelo Lema 1.14, é suficiente mostrar que $\frac{R}{P}$ é anel Noetheriano para todo ideal primo mínimo P de R. Podemos então supor que R é um domínio tal que para qualquer ideal primo Q existe um inteiro positivo n tal que Q^n é um ideal finitamente gerado. Queremos provar que R é um domínio Noetheriano. Pelo Teorema 1.13, $SpecR$ é Noetheriano. Suponhamos por absurdo que o domínio R não seja Noetheriano. Então o ideal primo $Q = (\bar{0}) \in R$ é tal que o domínio $\frac{R}{Q}$ não é Noetheriano. Consideremos agora a família $F = \{Q \in SpecR \ / \ \frac{R}{Q}$ não é Noetheriano$\}$. Temos que F possui um elemento máximo, digamos Q', pois $SpecR$ é Noetheriano. Assim $\frac{R}{Q'}$ é domínio não Noetheriano e se $Q'' \in SpecR$ é tal que $Q' \subsetneq Q''$ então $\frac{R}{Q''}$ é um domínio não Noetheriano. Seja $T := \frac{R}{Q'}$ que é então um domínio não Noetheriano. Seja $x \in T$, $x \neq 0$. Seja P um ideal primo mínimo de (x). Observe que $\frac{T}{P}$ é um domínio Noetheriano. Pelo Lema 1.16, o anel $\frac{T}{xT}$ é Noetheriano, pois $x \in T$ é um elemento regular, e para todo primo mínimo P de (x), temos que $\frac{T}{P}$ é anel Noetheriano e alguma potência de P é finitamente gerada. Portanto o domínio T é tal que $\frac{T}{xT}$ é um anel Noetheriano, qualquer que seja $x \in T$, $x \neq 0$. Logo T é um domínio Noetheriano, o que contradiz o fato de $T = \frac{R}{Q'}$ ser um domínio não Noetheriano. Logo R é um anel Noetheriano.□

O exemplo a seguir mostra que a hipótese de R ser um anel reduzido é essencial.

Exemplo 1.17.A: Sejam K um corpo, $X_1, X_2, X_3, ...$ indeterminadas sobre K, $S = K[X_1, X_2, ...]$ e $M = (X_1, X_2, ...)$. Seja $R = S_M/M^2S_M$. É fácil ver que R é um anel quasilocal com um único ideal primo $P = MS_M/M^2S_M$. Além disso $P^2 = (0)$, portanto P^2 é um ideal finitamente gerado entretanto P não é um ideal finitamente gerado.

Proposição 1.18: *Seja R um anel.*

i) *Se cada ideal primo de R possui uma potência que é finitamente gerada então* $\frac{R}{\sqrt{(0)}}$ *é um anel Noetheriano e o ideal* $\sqrt{(0)}$ *é nilpotente*.

ii) *Se* $\frac{R}{\sqrt{(0)}}$ *é Noetheriano, então as condições a seguir são equivalentes*:

(1) *R é Noetheriano,*

(2) *cada ideal primo mínimo de R é finitamente gerado,*

(3) $\sqrt{(0)}$ *é finitamente gerado,*

(4) $\sqrt{(0)}$ *é nilpotente e o R-módulo* $\frac{\sqrt{(0)}}{\sqrt{(0)}^2}$ *é finitamente gerado*.

Prova:

i) Seja R um anel tal que para todo ideal primo P de R temos que P^n é um ideal finitamente gerado, para algum inteiro positivo n. Como $P \supseteq \sqrt{(0)}$ qualquer que seja P ideal primo de R, então $\frac{R}{\sqrt{(0)}}$ é um anel reduzido tal que todo ideal primo de $\frac{R}{\sqrt{(0)}}$ possui uma potência que é um ideal finitamente gerado. Assim, pelo Teorema 1.17, temos que $\frac{R}{\sqrt{(0)}}$ é anel Noetheriano. Além disso, se P for um ideal primo de R então $\frac{R}{P} \simeq \frac{R/\sqrt{(0)}}{P/\sqrt{(0)}}$ é um anel Noetheriano portanto, pelo Lema 1.15, $\sqrt{(0)}$ é um ideal nilpotente.

ii) Se R é um anel Noetheriano então 2, 3 e 4 são válidas. Mostraremos que, supondo $\frac{R}{\sqrt{(0)}}$ um anel Noetheriano, então as condições 2, 3 e 4, isoladamente, implicam que R é anel Noetheriano.

Suponhamos que vale (2). Seja P um ideal primo de R, e seja P_0 um ideal primo mínimo de R tal que $P_0 \subseteq P$. Como $\frac{R}{\sqrt{(0)}}$ é anel Noetheriano, o anel $\frac{R}{P_0}$ também é Noetheriano, pois $\frac{R}{P_0} \simeq \frac{R/\sqrt{(0)}}{P_0/\sqrt{(0)}}$. Assim $\frac{P}{P_0}$ é um ideal finitamente gerado então, como P_0 é um ideal finitamente gerado, P é um ideal finitamente gerado. Então como todos os ideais primos de R são finitamente gerados, pelo Teorema de Cohen, temos que R é um anel Noetheriano.

Suponhamos que vale (3). Podemos usar o Teorema de Cohen novamente, pois qualquer ideal primo de R é tal que $\sqrt{(0)} \subseteq P$. Como $\frac{R}{\sqrt{(0)}}$ é um anel Noetheriano, então qualquer que seja P ideal primo de R temos que $\frac{P}{\sqrt{(0)}}$ é um ideal finitamente gerado de $\frac{R}{\sqrt{(0)}}$. Como $\sqrt{(0)}$ é ideal finitamente gerado então P é um ideal finitamente gerado qualquer que seja P ideal primo de R então, pelo Teorema de Cohen, R é um anel Noetheriano.

Suponhamos que vale (4). Sejam $N = \sqrt{(0)}$ e n um número natural tal que $N^n = (0)$. Como $\frac{N}{N^2}$ é um R-módulo finitamente gerado, sejam $n_1, ..., n_s \in N$ tais que $n_1 + N^2, ..., n_s + N^2$ geram $\frac{N}{N^2}$ como R-módulo. Seja $I = (n_1, ..., n_s)$. Temos assim que I é um ideal finitamente gerado contido em N e $N = I + N^2 = I + (I + N^2)^2 = I + N^4 = ...$ Como N é nilpotente, temos que $N = I$, portanto N é finitamente gerado então, pelo item (3), temos que R é anel Noetheriano.□

Corolário 1.19: *Seja I um ideal de um anel R tal que* $\frac{R}{I}$ *é um anel Noetheriano e que para algum inteiro positivo n tenhamos que* I^n *é um ideal finitamente gerado. Então I será um ideal finitamente gerado se e só se cada ideal primo mínimo de I for um ideal finitamente gerado.*

Prova: Como $\frac{R}{I}$ é um anel Noetheriano e existe um inteiro positivo n tal que I^n é um ideal finitamente gerado temos, pelo Corolário 1.6, que o ideal I será finitamente gerado se e somente se $\frac{R}{I^n}$ for um anel Noetheriano. Como $\sqrt{(\bar{0})}$ em $\frac{R}{I^n}$ é $\frac{\sqrt{I}}{I^n}$ e $\frac{R/I^n}{\sqrt{I}/I^n} \simeq \frac{R}{\sqrt{I}} \simeq \frac{R/I}{\sqrt{I}/I}$ é um anel Noetheriano, pois $\frac{R}{I}$ é um anel Noetheriano, pela Proposição 1.18, temos que o anel $\frac{R}{I^n}$ será um anel Noetheriano se e somente se os ideais primos mínimos de $\frac{R}{I^n}$ forem ideais finitamente gerados. Os ideais primos mínimos de $\frac{R}{I^n}$ são do tipo $\frac{P}{I^n}$ onde P é um primo mínimo do ideal I. Como I^n é um ideal finitamente gerado, $\frac{P}{I^n}$ será um ideal finitamente gerado se e somente se P for um ideal finitamente gerado. Logo I é um ideal finitamente gerado se e somente se cada primo mínimo de I é um ideal finitamente gerado.□

Teorema 1.20: *Seja R um anel reduzido semiquasilocal. Se cada ideal primo de R de altura positiva possui uma potência que é finitamente gerada então R é anel Noetheriano.*

Prova: Seja P um ideal primo mínimo de R. Como em $\frac{R}{P}$ todo ideal primo possui uma potência que é finitamente gerada então, pelo Teorema 1.17, $\frac{R}{P}$ é um anel Noetheriano. Portanto, pelo Lema 1.14, se R possuir apenas um número finito de ideais primos mínimos, R será um anel Noetheriano. Basta assim provar que R possui apenas um número finito de ideais primos mínimos. Como R é um anel que possui somente um número finito de ideais maximais, basta mostrar que cada um deles contém apenas um numero finito de ideais primos mínimos de R, isto é, que para cada ideal maximal M de R, R_M possui apenas um número finito de ideais primos mínimos. Mostremos que R_M é um anel reduzido. Seja $\frac{x}{s} \in R_M$, um elemento nilpotente. Seja $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $(\frac{x}{s})^n = 0$. Decorre daí que existe $t \in R \setminus M$ tal que $tx^n = 0$, consequentemente $(tx)^n = 0$. Como R é um anel reduzido, $tx = 0$, logo $\frac{x}{s} = 0$ e R_M é anel reduzido. Como cada ideal primo de R de altura positiva possui uma potência que é finitamente gerada, o mesmo vale para R_M. Trocando R_M por R, podemos então supor que R é um anel quasilocal, reduzido, tal que todo ideal primo de altura positiva possui uma potência que é um ideal finitamente gerado.

Se $\dim R = 0$ então R é um corpo e portanto R é um anel Noetheriano.

Suponhamos então que $\dim R > 0$. Como para o ideal maximal M existe um inteiro positivo n tal que M^n é um ideal finitamente gerado, então existem $m_1,...,m_k \in M \setminus \{0\}$ tais que $M^n = (m_1,...,m_k)$. Mostremos que $(0 : m_i)$ é um ideal radical, qualquer que seja $i \in \{1,...,k\}$. Seja $x \in \sqrt{(0 : m_i)}$. Seja $r = min\{n \in \mathbb{N}^* \ / \ x^n m_i = 0\}$. Logo para qualquer ideal primo P de R, temos $x^r m_i \in P$, logo $x \in P$ ou $m_i \in P$, daí $xm_i \in P$, logo $xm_i \in \sqrt{(0)} = (0)$, daí $x \in (0 : m_i)$. Logo $\sqrt{(0 : m_i)} = (0 : m_i)$ e $(0 : m_i)$ é um ideal radical. Além disso $\bigcap_{i=1}^k (0 : m_i) = (0)$, pois, se $x \in \bigcap_{i=1}^k (0 : m_i)$, então $xm_i = 0$ qualquer que seja $i \in \{1,...,k\}$, logo $xM^n = 0$. Por outro lado, como R é anel reduzido de dimensão positiva, $M^n \neq 0$ e $xM^n = 0$ então x não é invertível, logo $x \in M$. Então $x^{n+1} = 0$, logo, como R é anel reduzido, $x = 0$.

Temos ainda que a imagem de m_i no anel $\frac{R}{(0:m_i)}$ é um elemento regular para todo $i \in \{1,...,k\}$, pois se $a \in R$ é tal que $am_i \in (0 : m_i)$ então $am_i^2 = 0$ logo $(am_i)^2 = 0$, portanto am_i é nilpotente e, como R é um anel reduzido, $am_i = 0$, logo $a \in (0 : m_i)$.

Como $(0) = \bigcap_{i=1}^k (0 : m_i)$, para mostrar que R possui apenas um número finito de ideais primos mínimos é suficiente mostrar que para cada $i \in \{1,...,k\}$ o ideal $(0 : m_i)$ possui apenas um número finito de ideais primos mínimos. Como $(0 : m_i)$ é um ideal radical, $\frac{R}{(0:m_i)}$ é um anel reduzido. Portanto $\frac{R}{(0:m_i)}$ é um anel quasilocal, reduzido, tal que todo ideal primo de altura positiva possui uma potência que é finitamente gerada. Além disso, $\frac{R}{(0:m_i)}$ possui um elemento regular, $x := m_i$. Trocando R por $\frac{R}{(0:m_i)}$, podemos supor que R contém um elemento regular x. Seja P um ideal primo mínimo de x. Como x é regular, por

$\left[\text{K-Teorema 84}\right]$, $alt(P) > 0$, logo alguma potência de P é finitamente gerada, assim pelo Teorema 1.17, o anel $\frac{R}{\sqrt{xR}}$ é Noetheriano. Sendo $\frac{R}{\sqrt{xR}}$ anel Noetheriano, para todo ideal primo P de R tal que $x \in P$, temos $\frac{R}{P} \simeq \frac{R/\sqrt{xR}}{P/\sqrt{xR}}$ é um anel Noetheriano, logo pelo Lema 1.16, $\frac{R}{xR}$ é um anel Noetheriano.

Seja Q um ideal primo de R. Se $x \in Q$ então como $\frac{R}{xR}$ é anel Noetheriano, $\frac{Q}{xR}$ é um ideal finitamente gerado e portanto Q é ideal finitamente gerado. Se $x \notin Q$ como $\frac{R}{xR}$ é anel Noetheriano, então o ideal $Q + xR$ é finitamente gerado. Sejam $x_1, ..., x_s \in Q$ tais que $Q + xR = (x_1, ..., x_s, x)$. Seja $I = (x_1, ..., x_s)$. É claro que $Q \supseteq I + xR \supseteq I + xQ$. Por outro lado, como $Q + xR = I + xR$, dado $a \in Q$, existem $i \in I$ e $r \in R$ tais que $a = i + xr$, logo $xr = a - i \in Q$ e, como $x \notin Q$, então $r \in Q$, logo $Q \subseteq I + xQ$. Assim $Q = I + xQ$.

Seja $\overline{R} := \frac{R}{\sqrt{I}}$ e $\overline{Q} = \frac{Q}{\sqrt{I}} = \{q + \sqrt{I} \ / \ q \in Q = I + xQ\}$. Temos assim que se $q \in Q$, então existem $i \in I$ e $q' \in Q$ tais que $q = i + xq'$, então $q + \sqrt{I} = (x + \sqrt{I})(q' + \sqrt{I})$. Repetindo o mesmo argumento, agora para $q' \in Q$, temos que existe $q'' \in Q$ tal que $q + \sqrt{I} = (x + \sqrt{I})(x + \sqrt{I})(q'' + \sqrt{I}) = (x + \sqrt{I})^2(q'' + \sqrt{I})$. Desta maneira temos $q + \sqrt{I} \in \cap_{n=1}^{\infty} \left\langle (x + \sqrt{I})^n \right\rangle$. Logo $\frac{Q}{\sqrt{I}} \subseteq \cap_{n+1}^{\infty} \bar{x}^n \overline{R}$. Seja $\bar{q}$ um ideal primo de $\overline{R}$ e q um ideal primo de R tal que $q \supseteq I$ e $\frac{q}{\sqrt{I}} = \bar{q}$. Logo $\frac{\overline{R}}{\bar{q}} \simeq \frac{R/\sqrt{I}}{q/\sqrt{I}} \simeq \frac{R}{q}$, portanto $\frac{\overline{R}}{\bar{q}}$ é um anel quasilocal, reduzido tal que todo ideal primo possui uma potência finitamente gerada. Logo, pelo Teorema 1.17, $\frac{\overline{R}}{\bar{q}}$ é um anel Noetheriano, portanto $\cap_{n=1}^{\infty} \left((\bar{x} + \bar{q}) \frac{\overline{R}}{\bar{q}} \right)^n = \cap_{n=1}^{\infty} (\bar{x} + \bar{q})^n \frac{\overline{R}}{\bar{q}} = \bar{0} = \frac{\bar{q}}{\bar{q}}$ por $\left[\text{K-Teorema 77}\right]$. Daí $\cap_{n=1}^{\infty} \bar{x}^n \overline{R} \subseteq \bar{q}$. Como $\bar{q}$ é um ideal primo mínimo qualquer do anel reduzido $\overline{R}$ então $\cap_{n=1}^{\infty} \bar{x}^n \overline{R} \subseteq \sqrt{(\bar{0})} = (\bar{0})$. Como $\frac{Q}{\sqrt{I}} \subseteq \cap_{n=1}^{\infty} \bar{x}^n \overline{R} = (\bar{0})$, então $Q = \sqrt{I}$, onde I é um ideal finitamente gerado. Portanto dado um ideal primo Q de R, se $x \in Q$ então Q é um ideal finitamente gerado, se $x \notin Q$ então Q é o radical de um ideal finitamente gerado. Logo todo ideal primo Q de R é radical de um ideal finitamente gerado. Assim, pelo Teorema 1.13, R possui apenas um número finito de ideais primos mínimos, o que completa a demonstração.□

Corolário 1.21: *Se (R, M) é um anel reduzido quasilocal de dimensão um, tal que alguma potência de M é finitamente gerada, então R é um anel Noetheriano.*

Prova: Como $\dim R = 1 > 0$ e o ideal maximal M possui uma potência que é finitamente gerada e R é um anel quasilocal reduzido, pelo Teorema 1.20 temos que R é um anel Noetheriano.□

Corolário 1.22: *Seja R um domínio inteiramente fechado quasilocal de dimensão um e M seu ideal maximal. Se alguma potência de M é finitamente gerada, então R é um domínio de valorização discreta de posto* 1.

Prova: Como R é um domínio inteiramente fechado, quasilocal com $\dim R = 1 > 0$ tal que M^n é finitamente gerado para algum inteiro positivo n então, pelo Teorema 1.20, R é um anel Noetheriano. Assim por $\left[\text{K-Teorema 96}\right]$ temos que R é um domínio de valorização discreta e $\dim R = 1$.□

Daremos agora algumas definições importantes que serão utilizadas no nosso trabalho, entre elas, a definição de ideal divisorial que será utilizada nas demons- trações do Lema 1.23 e do Teorema 1.24.

Definição 1.23.A: *Sejam R um domínio e K o corpo de frações de R. Um R-submódulo M de K é um ideal fracionário de R se $xM \subseteq R$ para algum $x \neq 0$ em R.*

Definição 1.23.B: *Sejam R um domínio, K o corpo de frações de R e I um ideal fracionário de R. Definimos $(R : I) = \{x \in K \,/\, xI \subseteq R\}$.*

Definição 1.23.C: *Um ideal fracionário I de um domínio R é um ideal divisorial se e só se I é tal que $I = (R : (R : I))$.*

Definição 1.23.D: *Um ideal fracionário I de um domínio R é um ideal invertível se e só se existir um ideal fracionário J tal que $IJ = R$. Neste caso, $J = (R : I)$.*

Lema 1.23: *Suponhamos que M seja um ideal maximal de um domínio inteiramente fechado R. Se M^n é um ideal finitamente gerado para algum inteiro positivo n e M é um ideal divisorial, então M é um ideal invertível e portanto finitamente gerado.*

Prova: Se $M^n = (0)$ então, R sendo um domínio, teríamos $M = (0)$, portanto M seria um ideal finitamente gerado. Suponhamos $M^n \neq (0)$. É claro que $R \subseteq (M^n : M^n)$. Vamos mostrar que $(M^n : M^n) \subseteq R$. Seja $\frac{a}{b} \in (M^n : M^n)$. Temos então que M^n é um $R\left[\frac{a}{b}\right]$-módulo. M^n é R-módulo finitamente gerado e para qualquer $x \in R\left[\frac{a}{b}\right]$, $x \neq 0$, temos $xM^n \neq 0$ então M^n é $R\left[\frac{a}{b}\right]$-módulo fiel logo, por [A-M-5.1], $\frac{a}{b}$ é inteiro sobre R. Sendo R inteiramente fechado, temos $\frac{a}{b} \in R$. Logo $(M^n : M^n) \subseteq R$, portanto $(M^n : M^n) = R$. Decorre daí que $(M : M) = R$, pois dado $x \in R$, é claro que $x \in (M : M)$ e, se $x \in (M : M)$ então $xM \subseteq M$. Logo $xM^2 = xMM \subseteq M^2$, utilizando este argumento temos que $xM^n \subseteq M^n$, portanto $x \in (M^n : M^n) = R$. Como M é um ideal divisorial então $R \supsetneq M = (R : (R : M))$, logo $1 \notin (R : (R : M))$, daí $(R : M) \supsetneq R$. Isto implica que $(R : M)M \not\subseteq M$, pois, caso contrário, dado $x \in (R : M)$ teríamos $xM \subseteq M$, isto é, $x \in (M : M) = R$ o que implicaria $(R : M) \subseteq R$, contradizendo $(R : M) \neq R$. Assim $(R : M)M \not\subseteq M$ e então $(R : M)M = R$ o que significa que M é invertível, portanto finitamente gerado [K-Teorema 58].□

O Teorema 1.24, a seguir, é uma resposta afirmativa para a Questão 0.1 em alguns casos particulares.

Teorema 1.24: *Seja R um anel e seja M um ideal maximal de R. Supo- nhamos que alguma potência de M seja um ideal finitamente gerado. Então M é um ideal finitamente gerado em cada um dos seguintes casos*:

1) *M é um ideal primo mínimo de um ideal principal e $cM \neq (0)$ para cada $c \in M$, $c \neq 0$,*

2) *M é um ideal primo mínimo de um ideal $J + xR$, onde J é um ideal finitamente gerado de R e x é um elemento regular* $\bmod J$,

3) *M é um ideal primo mínimo de um ideal gerado por uma seqüência regular não vazia de elementos em R,*

4) *R é um anel reduzido e, M é um ideal primo mínimo de um ideal principal ou $alt(M) \leq 1$,*

5) *R é um domínio de integridade, M não é divisorial e, M é um ideal primo mínimo de um ideal 2-gerado ou $alt(M) \leq 2$,*

6) *R é um domínio inteiramente fechado e, ou M é um ideal primo mínimo de um ideal 2-gerado, ou $alt(M) \leq 2$.*

Prova: Como $M = \sqrt{M^n}$ então M é o radical de um ideal finitamente gerado, logo, pelo Lema 1.8, M será um ideal de R finitamente gerado se e só se MR_M for um ideal de R_M

finitamente gerado. Assim podemos supor que, nos primeiros quatro casos, o anel R é quasilocal e M é o seu ideal maximal e M^n é um ideal finitamente gerado para algum inteiro positivo n.

1) Como o ideal maximal M é um ideal primo mínimo de um ideal principal (x), então $\sqrt{M} = \sqrt{(x)}$. Além disso $cM \neq (0)$ para qualquer elemento não nulo $c \in M$ assim, pelo Teorema 1.9, M é um ideal finitamente gerado.

2) Como $\sqrt{M} = \sqrt{(J,x)}$ onde J é um ideal finitamente gerado e x é um elemento regular mod J então, pelo Teorema 1.10(1), temos que M é um ideal finitamente gerado.

3) Como $\sqrt{M} = \sqrt{(x_1,...,x_k)}$ onde $x_1,...,x_k$ é uma seqüência regular de elementos em R então, pelo Teorema 1.10.(2), M é um ideal finitamente gerado.

4) Se M for um ideal primo mínimo de um ideal principal então, pelo item (1), M será finitamente gerado. Se $alt(M) = 0$ então R é um corpo. Se $alt(M) = 1$ então, pelo Corolário 1.21, R é um anel Noetheriano. Em ambos os casos M é um ideal finitamente gerado.

5) Suponhamos primeiramente que M seja um ideal primo mínimo de um ideal 2-gerado, digamos (x,y). Como M não é divisorial então $M \subsetneq (R:(R:M)) \subseteq R$, logo $(R:(R:M)) = R$. Assim existe $a \in R$ tal que $a \notin M$ e $a(R:M) \subseteq R$. Vamos mostrar que o ideal $\frac{M}{(x)}$ satisfaz a condição (1) deste Teorema. Se $b \in M$ é tal que $(b+xR)\frac{M}{xR} = \bar{0}$ então $bM \subseteq xR$ assim $\frac{b}{x}M \subseteq R$ e $\frac{b}{x} \in (R:M)$. Daí $a\frac{b}{x} \in R$, logo $ab \in xR$. Como a é invertível, então $b \in xR$, logo $b+xR = \bar{0}$. Então $\frac{M}{(x)}$, que é um ideal primo mínimo do ideal principal $(\bar{y}) = (y+(x))$, é tal que para todo $\bar{b} \in \frac{M}{(x)}$, $\bar{b} \neq \bar{0}$, temos $\bar{b}\frac{M}{(x)} \neq (0)$. Logo, pelo item (1) deste Teorema, temos que $\frac{M}{(x)}$ é um ideal finitamente gerado. Portanto M é um ideal finitamente gerado. Suponhamos agora que $alt(M) \leq 2$, pelo item (4), podemos supor que M não é um ideal primo mínimo de um ideal principal. Portanto se dado $0 \neq x \in M$, então $alt\left(\frac{M}{\sqrt{xR}}\right) = 1$ e então o anel $\frac{R_M}{\sqrt{xR_M}}$ é Noetheriano, pelo Corolário 1.21. Como $alt\left(\frac{MR_M}{\sqrt{xR_M}}\right) = 1$, MR_M é um ideal primo mínimo de $\left(y+\sqrt{xR_M}\right)$ para algum $y \in MR_M \setminus \sqrt{xR_M}$ e como $MR_M \supseteq \left(y, \sqrt{xR_M}\right) \supseteq (y,x)$ então M é um ideal primo mínimo de (x,y) que é um ideal 2-gerado, recaímos então na primeira parte e portanto temos que M é um ideal finitamente gerado.

6) Se M é um ideal divisorial então, pelo Lema 1.23, temos que M é um ideal finitamente gerado. Se M não é um ideal divisorial então, pelo item (5) deste Teorema, temos que M é um ideal finitamente gerado.□

Corolário 1.25: *Seja R um anel e seja M um ideal maximal de R. Se alguma potência de M for um ideal finitamente gerado e se, para algum ideal I de R e algum $x \in R$, o ideal M for um ideal primo mínimo de $I + xR$ então $\frac{M}{\sqrt{I}}$ será um R-módulo finitamente gerado.*

Prova: Temos que $\frac{M}{\sqrt{I}}$ é ideal maximal de $\frac{R}{\sqrt{I}}$ e, para algum inteiro positivo n, $\left(\frac{M}{\sqrt{I}}\right)^n$ é um ideal finitamente gerado. Se $M = \sqrt{I}$ o resultado é trivial. Se não, seja $c \in M \setminus \sqrt{I}$, então $\bar{c}\frac{M}{\sqrt{I}} \neq (\bar{0})$, pois , caso contrário $\bar{c}^2 = \bar{0}$ o que implicaria que $c \in \sqrt{I}$. Como $\frac{M}{\sqrt{I}}$ é um ideal primo mínimo do ideal $(\bar{x})$ em $\frac{R}{\sqrt{I}}$, pelo Teorema 1.24.(1), temos que $\frac{M}{\sqrt{I}}$ é um $\frac{R}{\sqrt{I}}$- módulo finitamente gerado. Como um conjunto que gera $\frac{M}{\sqrt{I}}$ como um $\frac{R}{\sqrt{I}}$- módulo também gera $\frac{M}{\sqrt{I}}$ como um R-módulo temos que $\frac{M}{\sqrt{I}}$ é um R-módulo finitamente gerado.□

Para finalizar o Capítulo 1, apresentamos um apanhado geral dos resultados obtidos até agora, com relação às Questões 0.1 e 0.2.

Questão 0.1: Sejam R um domínio, M um ideal maximal de R e n um inteiro positivo tal que M^n é um ideal finitamente gerado de R. O ideal M será um ideal finitamente gerado se alguma das condições abaixo for satisfeita.

a) Se M for o radical de um ideal finitamente gerado e se o ideal MR_M for um ideal finitamente gerado do anel R_M (Lema 1.8),

b) Se (R, M) for um anel reduzido quasilocal de dimensão um (Corolário 1.21),

c) Se R for um domínio inteiramente fechado e se M for um ideal divisorial (Lema 1.23),

d.1) Se M for um ideal primo mínimo de um ideal principal e se para todo $c \neq 0$, $c \in M$ tivermos $cM \neq (0)$,

d.2) Se M for um ideal primo mínimo de $I + xR$, onde I é um ideal finitamente gerado de R e x é um elemento regular $\operatorname{mod} I$,

d.3) Se M for um ideal primo mínimo de um ideal gerado por uma seqüência regular não vazia de elementos em R,

d.4) Se R for um anel reduzido e, ou M é um ideal primo mínimo de um ideal principal ou $alt(M) \leq 1$,

d.5) Se M não for um ideal divisorial e, ou M é um ideal primo mínimo de um ideal 2-gerado ou $alt(M) \leq 2$,

d.6) Se R for um domínio inteiramente fechado e, ou M é um ideal primo mínimo de um ideal 2-gerado ou $alt(M) \leq 2$ (Teorema 1.24).

Voltamos a lembrar que a Questão 0.1, tal como se apresenta na Introdução, possui uma resposta negativa. Um exemplo para este caso foi apresentado no Exemplo 1.17.A.

Questão 0.2: Sejam R um anel e I um ideal de R tal que $\frac{R}{I}$ é um anel Noetheriano e, para algum inteiro positivo n o ideal I^n é finitamente gerado. Então I será um ideal finitamente gerado se alguma das seguintes condições for satisfeita:

a) O anel $\frac{R}{I^n}$ for Noetheriano (Corolário 1.6),

b) O ideal $\sqrt{I}$ for finitamente gerado (Lema 1.7),

c) Se para qualquer $c \in I$, $c \neq 0$ tivermos $cI \neq 0$ e $\sqrt{I} = \sqrt{xR}$ para algum $x \in R$ (Teorema 1.9),

d.1) Se $\sqrt{I} = \sqrt{(J, x)}$, onde J é um ideal finitamente gerado de R e x é um elemento regular $\operatorname{mod} J$,

d.2) Se $\sqrt{I} = \sqrt{(x_1, \ldots, x_k)}$, onde $x_1, \ldots, x_k$ é uma seqüência regular de elementos em R e $k \geq 1$,

d.3) Se R for um anel reduzido e $\sqrt{I} = \sqrt{xR}$ para algum $x \in R$ (Teorema 1.10),

e) Se cada ideal primo mínimo de I for finitamente gerado (Corolário 1.19).

Apresentamos agora os resultados mais gerais que foram demonstrados durante este Capítulo:

a) Se R for um anel reduzido e se todo ideal primo de R possuir uma potência finitamente gerada, então o anel R será Noetheriano (Teorema 1.17),

b) Se R for um anel reduzido semiquasilocal e se qualquer ideal primo de altura positiva possuir uma potência finitamente gerada, então o anel R será Noetheriano (Teorema 1.20).

Capítulo 2
Semigrupos e Anéis Monóides

O objetivo deste Capítulo é estudar a Questão 0.1 em um contexto mais específico. Observamos primeiramente que dado um corpo K, o conjunto $K[X]$, cujos elementos são do tipo $\sum_{i=0}^{n} k_iX^i$, define uma estrutura de anel de polinômios pois seus expoentes são números naturais. Portanto podemos concluir que as propriedades do conjunto de expoentes é de extrema importância na definição da estrutura $K[X]$. Poderemos observar, no decorrer deste Capítulo, que o conjunto dos números natutais se encaixará na definição de monóide comutativo cancelativo livre de torção. Neste Capítulo, vamos considerar $\overline{S}$ um monóide comutativo cancelativo e livre de torção, $R = K[X,\overline{S}] := \{\sum_{s\in A} k_sX^s \ / \ A$ é um subconjunto finito de $\overline{S}$, $k_s \in K\}$ um domínio monóide sobre um corpo K e M um ideal maximal gerado por $\{X^s/s \in S\}$, onde S é o semigrupo obtido retirando-se o elemento neutro do monóide $\overline{S}$. Assim, neste novo contexto, teremos a Questão 0.1 reescrita da seguinte maneira: "Sendo $R = K[X,\overline{S}]$ um domínio monóide sobre um corpo K e M um ideal maximal de R, se para algum inteiro positivo n tivermos que M^n é um ideal de R finitamente gerado, sob quais condições teremos que M será um ideal de R finitamente gerado?"

Para que possamos responder a esta questão neste contexto mais específico, vamos apresentar as definições e resultados que serão necessários para que possamos alcançar nosso objetivo.

Definição 2.A: *Sejam C um conjunto não vazio e uma operação binária $* : C \times C \to C$. Se $*$ for uma operação associativa, então dizemos que $(C,*)$ é um semigrupo.*

Definição 2.B: *Sejam M um conjunto não vazio e uma operação binária $* : M \times M \to M$. Se $(M,*)$ for um semigrupo que possui um elemento neutro, então $(M,*)$ será dito um monóide.*

Convencionamos que todos os semigrupos neste capítulo serão considerados comutativos e portanto serão escritos na notação aditiva. Se S for um semigrupo comutativo, denotaremos por $\overline{S}$ o monóide $S \cup \{0\}$ obtido adicionando o elemento neutro a S.

Definição 2.C: *Seja S um semigrupo (monóide) e J um subconjunto não vazio de S. Dizemos que J é um ideal do semigrupo (monóide) S se e só se para quaisquer $j \in J$ e $s \in \overline{S} = S \cup \{0\}$, tivermos $j + s \in J$.*

O ideal J será um ideal principal se e só se existir $a \in J$ tal que $J = \{(a+s) \ / \ s \in \overline{S}\}$. Tal ideal será denotado por $\langle a \rangle$.

Observamos que, dado um conjunto qualquer $A \subseteq S$, temos que $\cup_{a_i\in A} \langle a_i \rangle$ é um ideal, pois se $x \in \cup_{a_i\in A} \langle a_i \rangle$ então $x = a_i + s$ para algum $a_i \in A$, assim $x + s^{'} = a_i + s + s^{'} \in \langle a_i \rangle$. Este ideal é dito ideal gerado por A e é denotado por $\langle A \rangle$.

O ideal J será um ideal finitamente gerado se e só se existir um subconjunto finito $A \subseteq J$ tal que $J = \langle A \rangle$.

Para um semigrupo aditivo S e um inteiro positivo m, vamos utilizar mS para denotar o subconjunto de S constituído de todas as somas $s_1 + s_2 + ... + s_m$ onde cada $s_i \in S$, para todo $i \in \{1,...,m\}$. É fácil ver que mS é um ideal de S e é também um semigrupo.

Definição 2.D: *Seja S um semigrupo (monóide) e $A \subseteq S$. Dizemos que A gera S como um semigrupo (monóide) se todo elemento de S pode ser escrito como uma soma finita de elementos de A. Dizemos que S é finitamente gerado como semigrupo (monóide) se existir um subconjunto finito A de S tal que A gera S como semigupo (monóide).*

Observamos que se A é um conjunto de geradores de nS como um semigrupo então A gera nS como um ideal do semigrupo S.

Para um semigrupo S e um corpo K, denotaremos $K\left[X,\overline{S}\right] = \{\sum_{s\in A} k_sX^s / \ A$ é um subconjunto finito de $\overline{S}$ e $k_s \in K$ para todo $s \in A\}$. Definimos nesta estrutura a igualdade entre dois elementos da seguinte maneira: dados $A_1, A_2 \subseteq \overline{S}$ subconjuntos finitos e $f(X) = \sum_{s\in A_1} k_sX^s$, $g(X) = \sum_{s\in A_2} q_sX^s \in K\left[X,\overline{S}\right]$, onde $k_s, q_s \in K$ dizemos que $f(X) = g(X)$ se e só se: i) para todo $s \in A_1 \cap A_2$ temos que $k_s = q_s$, ii) para todo

$s \in A_1 \setminus A_2$ temos que $k_s = 0$ e, *iii*) para todo $s \in A_2 \setminus A_1$ temos que $q_s = 0$. Desta maneira dado um elemento $f(X) = \sum_{s \in A} k_s X^s$ e dado um subconjunto $B \subseteq \overline{S}$ tal que $A \subseteq B$ definimos $f_B(X) = \sum_{s \in B} k_s' X^s$ onde $k_s' = k_s$ se $s \in A$ e $k_s' = 0$ se $s \in B \setminus A$, obtemos $f(X) = f_B(X)$.

Colocaremos em $K\left[X, \overline{S}\right]$ uma estrutura de anel, definindo a adição e a multiplicação de maneira semelhante à do anel de polinômios a uma variável. Sejam $f(X) = \sum_{s \in A_1} k_s X^s$ e $g(X) = \sum_{s \in A_2} q_s X^s$ elementos de $K[X, \overline{S}]$. Considerando $B = A_1 \cup A_2$ teremos $f(X) = f_B(X) = \sum_{s \in B} \widetilde{k}_s X^s$ e $g(X) = g_B(X) = \sum_{s \in B} \widetilde{q}_s X^s$. Define-se então $f(X) + g(X) = \sum_{s \in B} \left(\widetilde{k}_s + \widetilde{q}_s\right) X^s$ e, $k_s X^s \bullet k'_{s'} X^{s'} = \left(k_s \bullet k'_{s'}\right) X^{s+s'}$ estendendo a definição de multiplicação de modo a manter a distributividade. Como $\overline{S}$ contém o elemento neutro 0, temos que $1X^0$ é o elemento neutro para a multiplicação. O elemento $0X^s$ é o elemento neutro para a adição. Chamaremos a estrutura $\left(K\left[X, \overline{S}\right], +, \bullet\right)$ de anel monóide de $\overline{S}$ sobre o corpo K. Se $\overline{S}$ for um monóide totalmente ordenado então para $f(X) \in K[X, \overline{S}] \setminus \{0\}$, define-se o grau de $f(X)$ como sendo $\max_{s \in A_1} s$. Dados R um anel comutativo, C um grupo abeliano e S um semigrupo, definimos de maneira análoga as estruturas: $(R[X, C], +, \bullet)$ como sendo o anel de grupo de C sobre o anel R e $(R[X, S], +, \bullet)$ como sendo o anel de semigrupo de S sobre o anel R. Observamos que $R[X, C]$ será um anel com unidade se e só se $1 \in R$ e, ainda, que o anel $R[X, S]$ será um anel com unidade se e só se $1 \in R$ e $0 \in S$.

Definição 2.E: *Dizemos que S é um semigrupo cancelativo se e só se dados $a, b, c \in S$ tais que $a + b = a + c$ então $b = c$.*

Definição 2.F: *Dizemos que S é um semigrupo livre de torção se e só se dados $x, y \in S$ e um inteiro positivo n, se $nx = ny$ então $x = y$.*

Pretendemos provar que se S for um semigrupo cancelativo então S poderá ser imerso em um grupo abeliano C. Se, além disso, S for livre de torção então C será um grupo abeliano livre de torção. Para tanto vamos definir em $B = S \times S$ a relação de equivalência $\sim$ dada por: $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2)$ se e só se $a_1 + b_2 = a_2 + b_1$, onde $(a_i, b_i) \in B$ e para $i \in \{1, 2\}$. Mostraremos que $\sim$ é uma relação de equivalência em B.

i) $\sim$ é reflexiva, pois dado $(a_1, b_1) \in B$ temos que $a_1 + b_1 = a_1 + b_1$ logo $(a_1, b_1) \sim (a_1, b_1)$. *ii*) $\sim$ é simétrica, pois dados $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in B$ tais que $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2)$ então $a_1 + b_2 = a_2 + b_1$, que é equivalente a dizer que $a_2 + b_1 = a_1 + b_2$ que, pela definição de $\sim$, significa que $(a_2, b_2) \sim (a_1, b_1)$. *iii*) $\sim$ é transitiva, pois dados $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) \in B$ tais que $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2)$ e $(a_2, b_2) \sim (a_3, b_3)$ temos que $a_1 + b_2 = a_2 + b_1$ e $a_2 + b_3 = a_3 + b_2$. Somando as igualdades, obtemos $(a_1 + b_2) + (a_2 + b_3) = (a_2 + b_1) + (a_3 + b_2)$. Como S é associativo, abeliano e cancelativo obtemos que $a_1 + b_3 = a_3 + b_1$ logo $(a_1, b_1) \sim (a_3, b_3)$. Portanto fica provado que $\sim$ é uma relação de equivalência em B.

Denotaremos por $[a, b]$ a classe de equivalência de $(a, b) \in S \times S = B$. Seja $C = \{[a, b]$ tal que $(a, b) \in B\}$. Definimos em C a operação $[a_1, b_1] + [a_2, b_2] = [a_1 + a_2, b_1 + b_2]$. Observamos que a operação $+$ em C está bem definida, pois, dados$[a_1, b_1], [a_2, b_2], [a_3, b_3], [a_4, b_4] \in C$ tais que $[a_1, b_1] = [a_3, b_3]$ e $[a_2, b_2] = [a_4, b_4]$, então temos que $a_1 + b_3 = a_3 + b_1$ e $a_2 + b_4 = a_4 + b_2$. Somando as parcelas e utilizando a comutatividade de S, temos que $a_1 + a_2 + b_3 + b_4 = a_3 + a_4 + b_1 + b_2$, logo $[a_1 + a_2, b_1 + b_2] = [a_3 + a_4, b_3 + b_4]$.

Definição 2.G: *Uma aplicação Φ de um semigrupo S_1 em um semigrupo S_2 é dita um homomorfismo de semigrupos se, para quaisquer $a, b \in S_1$, temos que $\Phi(a + b) = \Phi(a) + \Phi(b)$.*

Definição 2.H: *Dois semigrupos S_1 e S_2 são ditos isomorfos se, existir um homomorfismo bijetor (ou seja um isomorfismo) de S_1 em S_2. Neste caso escreve-se $S_1 \simeq S_2$.*

Proposição 2.I: *Com a notação anterior, temos*:

i) *C é um grupo abeliano diante de* $+$.

ii) *C contém uma cópia isomorfa a S.*

iii) *Se o semigrupo S é livre de torção então o grupo C é livre de torção.*

Prova:

i) É fácil ver que como a operação em S é associativa e comutativa, então em C também será. Vamos verificar agora que $(C,+)$ é um grupo. O elemento neutro em C será o elemento $[x,x]$, pois, para qualquer $[a,b] \in C$, temos $[a,b] + [x,x] = [a+x, x+b] = [a,b]$. Observamos que $[x,x] = [y,y]$ para quaisquer $x,y \in S$. Temos que para qualquer $[a,b] \in C$ o elemento $[b,a] \in C$ é o elemento inverso de $[a,b]$, pois, $[a,b] + [b,a] = [a+b, b+a] = [x,x]$. Logo $(C,+)$ é um grupo abeliano.

ii) Mostraremos que existe uma função $f : S \to C$ tal que f é um homomorfismo injetor de semigrupos. Definimos então $f : S \to C$ tal que $f(a) = [a, 2a]$. É fácil ver que f é um homomorfismo, pois, dados $a,b \in S$ temos $f(a+b) = [a+b, 2a+2b] = [a,2a] + [b,2b] = f(a) + f(b)$. Verificamos também que f é injetora, pois dados $[a,2a],[b,2b] \in C$ tais que $[a,2a] = [b,2b]$ temos que $(a,2a) \sim (b,2b)$ logo $a+2b = b+2a$ e portanto $a+b+b = b+a+a$. Como S é cancelativo temos então que $a = b$. Portanto f é um homomorfismo injetor, o que significa que C contém uma cópia isomorfa a S.

iii) Seja $[a,b] = c \in C$. Suponhamos que $nc = 0$, então $nc = [na,nb] = [x,x]$. Assim $na + x = nb + x$. Como S é cancelativo então $na = nb$ e, como S é livre de torção então temos que $a = b$ que é equivalente a dizer que $[a,b] = [a,a]$. Logo C é um grupo livre de torção.□

Assim podemos concluir que um semigrupo aditivo abeliano cancelativo livre de torção S pode ser imerso em um grupo abeliano C livre de torção.

Proposição 2.J: *Seja R um anel, C um grupo abeliano e $T = R[X,C]$ o anel de grupo de C sobre R. Se R for um domínio e C um grupo totalmente ordenado então T é um domínio.*

Prova: Como T é um anel comutativo com unidade então basta mostrar que T não possui divisores de zero não nulos. Sejam $f,g \in T \setminus \{0\}$, como T é comutativo e C é um grupo totalmente ordenado então podemos escrever $f = f_0X^{a_0} + \ldots + f_rX^{a_r}$ e $g = g_0X^{b_0} + \ldots + g_sX^{b_s}$, onde para todo i temos que $a_i, b_i \in C$, $a_0 < \ldots < a_r$, $b_0 < \ldots < b_s$ e tais que $f_r, g_s \neq 0$. Como R é um domínio, $f_r \bullet g_s \neq 0$, o que mostra que $f \bullet g \neq 0$, pois o monômio $f_rg_sX^{a_r+b_s}$ que aparece em $f \bullet g$ é o único monômio de grau $a_r + b_s$. Assim T não possui divisor de zero não nulo. Logo T é um domínio.□

Corolário 2.K: *Seja R um anel, C um grupo abeliano e $T = R[X,C]$ o anel de grupo de C sobre R. Se R for um domínio e C um grupo livre de torção então T será um domínio.*

Prova: Sabemos que um grupo abeliano C será livre de torção, se e só se C admitir uma ordem total compatível com a operação em C [G_2-15.7]. Portanto, utilizando a Proposição 2.J, concluímos que T é um domínio.□

Corolário 2.L: *Sejam R um anel, S um semigrupo abeliano e $R[X,S]$ o anel de semigrupo de S sobre R. Se R for um domínio, e S for cancelativo e livre de torção então $R[X,S]$ será um domínio.*

Prova: Como S é cancelativo e livre de torção então S pode ser imerso em um grupo C livre de torção. Assim $R[X,S]$ pode ser imerso em $R[X,C]$. Como C é um grupo livre de torção, pela Proposição 2.J temos que $R[X,C]$ é um domínio e portanto, $R[X,S]$ é também um domínio.□

Desta maneira fica demonstrado que se S é um semigrupo cancelativo e livre de torção então $R[X,S]$ é um domínio. Em particular $K\left[X,\overline{S}\right]$ é também um domínio, chamado de domínio monóide de $\overline{S}$ sobre um corpo K.

Seja $\mathbb{N}^k$ o produto de k cópias de $\mathbb{N}$. Observamos que $(\mathbb{N}^k,+)$ é um monóide comutativo, pois, a operação $+$ definida em $\mathbb{N}^k$ é associativa e comutativa e, como $0 \in \mathbb{N}$ então a k-upla $(0,...,0) \in \mathbb{N}^k$. No monóide comutativo $(\mathbb{N}^k,+)$ vamos utilizar a relação de ordem $\leq$, onde, dados $(a_1,...,a_k)$, $(b_1,...,b_k) \in \mathbb{N}^k$ temos que $(a_1,...,a_k) \leq (b_1,...,b_k)$ se e só se para todo $i \in \{1,...,k\}$ tivermos $a_i \leq b_i$.

Lema 2.M: *Afirmamos que em* $(\mathbb{N}^k,+)$ *valem*:

i) *todo subconjunto de* $\mathbb{N}^k$ *cujos elementos são incomparáveis é finito e*,

ii) *todo subconjunto de* $\mathbb{N}^k$ *possui um número finito de elementos mínimos*.

Prova: A prova será feita por indução sobre k.

Se $k = 1$ ambas as afirmações são válidas.

Seja $k > 1$, suponhamos que as afirmações *i*) e *ii*) sejam válidas para $k-1$.

Seja $C \subseteq \mathbb{N}^k$ um conjunto tal que dois elementos quaisquer de C são incomparáveis. Vamos mostrar que C é um conjunto finito. Consideremos, então, $C' = \{v' \in \mathbb{N}^{k-1} / \exists x' \in \mathbb{N}$ tal que $(v',x') \in C\} \subseteq \mathbb{N}^{k-1}$. Observamos que, pela hipótese de indução, C' possui um número finito de elementos mínimos. Sejam $v'_1, v'_2, ..., v'_r$ os finitos elementos mínimos de C'. Para cada $i \in \{1,...,r\}$, seja $C_i = \{(v,x) \in C \,/\, v \geq v'_i\} \subseteq C$. Observamos que para qualquer $P \in C$, existem $v \in C'$ e $x \in \mathbb{N}$ tais que $P = (v,x)$. Logo para cada $P \in C$ existe $i \in \{1,...,r\}$ tal que $v \geq v'_i$, isto é $P \in C_i$, para algum i. Então $C = \cup_{i=1}^{r} C_i$. Para mostrarmos que C é um conjunto finito, basta mostrarmos que C_i é um conjunto finito, para cada $i \in \{1,...,r\}$. Observamos que se $x' \in \mathbb{N}$ é um elemento tal que $\left(v'_i,x'\right) \in C_i$ e se (v,x) é um elemento qualquer de C_i então $v \geq v'_i$. Como (v,x) e $(v'_i,x') \in C_i \subseteq C$ que é um conjunto cujos elementos são incomparáveis, então $x < x'$. Caso contrário teríamos $\left(v'_i,x'\right) \leq (v,x)$. Assim qualquer elemento $(v,x) \in C_i$ é tal que $0 \leq x < x'$. Portanto se C_i fosse um conjunto infinito, como o número de naturais menores que x' é finito, então existiria $y \in \mathbb{N}$, $0 \leq y < x'$ tal que para este y existiriam infinitos elementos $v' \in \mathbb{N}^{k-1}$ tais que $(v',y) \in C_i$. Assim dados dois quaisquer destes elementos v' e w', eles deveriam ser incomparáveis, pois caso contrário, $\left(v',y\right)$ e $\left(w',y\right)$ seriam comparáveis. Deste modo teríamos em $\mathbb{N}^{k-1}$ um subconjunto com infinitos elementos incomparáveis, o que contraria a hipótese de indução. Logo C_i é um conjunto finito para cada $i \in \{1,...,r\}$ e portanto $C = \cup_{i=1}^{r} C_i$ é também um conjunto finito. Assim em $\mathbb{N}^k$ todo conjunto de elementos incomparáveis é finito. Em particular todo conjunto não vazio possui um número finito de elementos mínimos.□

Definição 2.N: *Dizemos que um monóide M é Noetheriano se e só se todo ideal de M for um ideal finitamente gerado*.

Lema 2.O: *O monóide* $(\mathbb{N}^k,+)$ *é Noetheriano*.

Prova: Seja $I \subseteq \mathbb{N}^k$ um ideal. Seja A o conjunto de elementos mínimos de I, sabemos que A é um conjunto finito pois, pelo Lema 2.M, todo conjunto de elementos incomparáveis em $\mathbb{N}^k$ é finito. Sejam $a_1,...,a_n \in \mathbb{N}^k$ tal que $A = \{a_1,...,a_n\}$. Queremos mostrar que $I = \langle A \rangle = \cup_{i=1}^{n} \langle a_i \rangle$. Sejam $i \in \{1,...,n\}$ e $x_1,...,x_k \in \mathbb{N}$ tais que $a_i = (x_1,...,x_k)$. Temos que $\langle a_i \rangle = \{(x_1+n_1,...,x_k+n_k) \,/\, n_j \in \mathbb{N}$ para todo $j \in \{1,...,k\}\}$, assim $\langle a_i \rangle = \{x \in \mathbb{N}^k \,/\, x \geq a_i\}$. É claro que $I \supseteq \langle a_1,...,a_n \rangle$. Dado $x \in I$, então existe $i \in \{1,...,n\}$ tal que $x \geq a_i$, logo $x \in \langle a_i \rangle$. Portanto $I = \langle A \rangle$, isto é, qualquer ideal I de $\mathbb{N}^k$ é gerado pelo conjunto de seus elementos mínimos, que é finito, logo todo ideal de $\mathbb{N}^k$ é finitamente gerado. Portanto $(\mathbb{N}^k,+)$ é um monóide Noetheriano.□

Lema 2.P: *Sejam K um corpo e S um semigrupo tal que* $0 \notin S$. *Então o ideal* $M = \left\langle \left\{ X^s \,/\, s \in S \right\} \right\rangle$ *é um ideal maximal do anel monóide* $K\left[X,\overline{S}\right]$.

Prova: Seja $f \in K\left[X,\overline{S}\right]$ podemos escrever $f = k_{s_1}X^{s_1} + ... + k_{s_n}X^{s_n}$, onde $s_i \in \overline{S}$ são elementos distintos para todo $i \in \{1,...,n\}$. Se $s_i \neq 0$ então $s_i \in S$, logo $k_{s_i}X^{s_i} \in M$. Se $f \notin M$ então existe $i \in \{1,...,n\}$ tal que $k_{s_i}X^{s_i} \notin M$, portanto $s_i = 0$ e $k_{s_i} \neq 0$. Sem perda de generalidade podemos supor que $i = 1$. Consequentemente, todo elemento $f \in K[X,\bar{S}] \setminus M$ pode ser escrito como $f = k_0X^0 + k_{s_2}X^{s_2} + ... + k_{s_n}X^{s_n}$, onde $s_2,...,s_n$ são elementos distintos de S, $k_0, k_{s_2},...,k_{s_n} \in K$ e $k_0 \neq 0$. Como $k_{s_i}X^{s_i} \in M + (f)$ então $k_0X^0 \in M + (f)$. como k_0X^0 é invertível, $M + (f) = K\left[X,\bar{S}\right]$. Assim M é um ideal maximal do anel monóide $K\left[X,\bar{S}\right]$.□

A proposição a seguir estabelece a relação que existe entre anéis e semigrupos no contexto da Questão 0.1, citada na Introdução. Mostraremos aqui que, para que o ideal maximal M, gerado por $\{X^s/s \in S\}$, de um anel monóide $K[X,\bar{S}]$ seja finitamente gerado, é necessário e suficiente que o semigrupo S seja finitamente gerado como um semigrupo.

Proposição 2.1: *Seja S um semigrupo tal que $0 \notin S$ e seja K um corpo. Seja M o ideal maximal do anel monóide $K\left[X,\bar{S}\right]$ gerado por $\{X^s \mid s \in S\}$ e seja n um inteiro positivo. Então M^n é um ideal finitamente gerado do anel $K\left[X,\bar{S}\right]$ se e só se nS é um ideal finitamente gerado do semigrupo S. Em particular, com $n = 1$, o ideal maximal M é um ideal finitamente gerado de $K\left[X,\bar{S}\right]$ se e só se S é um ideal finitamente gerado do semigrupo S, e neste caso $S \setminus 2S$ é um conjunto finito.*

Prova: Sejam A um subconjunto de S e $s \in S$. O elemento X^s pertencerá ao ideal de $K\left[X,\bar{S}\right]$ gerado por $\{X^a/a \in A\}$ se e só se existirem $n \in \mathbb{N}^*, a_1,...,a_n \in A$ e $f_1,...,f_n \in K\left[X,\bar{S}\right]$ tais que $X^s = f_1X^{a_1} + ... + f_nX^{a_n}$. Como $f_i \in K\left[X,\bar{S}\right]$ para todo $i \in \{1,...,n\}$ então podemos escrever $f_i = \sum_{s_i \in A_i} k_{s_i}X^{s_i}$, onde A_i é um subconjunto finito de $\bar{S}$ e $k_{s_i} \in K$. Logo $X^s \in \langle\{X^a/a \in A\}\rangle$ se e só se $X^s = (\sum_{s_1 \in A_1} k_{s_1}X^{s_1})X^{a_1} + ... + (\sum_{s_n \in A_n} k_{s_n}X^{s_n})X^{a_n}$ o que implica que $X^s = X^{s_i}X^{a_i} = X^{s_i + a_i}$ para algum $a_i \in A$ e $s_i \in S$, isto é, $s = a_i + s_i$ pertence ao ideal do semigrupo gerado por a_i, logo $s \in \langle A\rangle$.

Reciprocamente se s pertence ao ideal do semigrupo gerado por A, então existe $a \in A$ tal que $s \in \langle a\rangle$, isto é, $s = a + s'$ para algum $s' \in \bar{S}$. Logo $X^s = X^aX^{s'}$ pertence ao ideal do anel $K\left[X,\bar{S}\right]$ gerado por $\{X^a/a \in A\}$. Portanto se A é um subconjunto de S então X^s pertence ao ideal do anel $K\left[X,\bar{S}\right]$ gerado por $\{X^a/a \in A\}$ se e só se s pertence ao ideal do semigrupo S gerado por A. Em particular se $\langle\{X^a/a \in A\}\rangle$ é um ideal finitamente gerado de $K[X,\bar{S}]$, isto é, $\langle\{X^a/a \in A\}\rangle = \langle\{X^{a_1},...,X^{a_n}\}\rangle$ com $a_i \in A$ se e só se $s \in \langle\{a_1,...,a_n\}\rangle$

Seja M o ideal do anel monóide $K\left[X,\bar{S}\right]$ tal que $M = \langle\{X^s/s \in S\}\rangle$, assim temos que o ideal $M^n = \langle\{X^{s_1}X^{s_2}...X^{s_n}/s_i \in S, i \in \{1,...,n\}\}\rangle$. Então podemos escrever $M^n = \langle\{X^{s_1+s_2+...+s_n}/s_i \in S, i \in \{1,...,n\}\}\rangle = \langle\{X^s/s \in nS\}\rangle$. Portanto M^n será um ideal finitamente gerado do anel $K\left[X,\bar{S}\right]$ se e só se o ideal nS for um ideal finitamente gerado do semigrupo S. Logo se $n = 1$ o ideal maximal M do anel $K\left[X,\bar{S}\right]$ será finitamente gerado se e só se S for finitamente gerado como um ideal de S. Observe que em particular teremos $S \setminus 2S$ um conjunto finito pois se $s \in S \setminus 2S$ e $s \in \langle a_i\rangle$ então $s = a_i$.□

Proposição 2.2: *Seja S um semigrupo e n um inteiro positivo. Se nS é finitamente gerado como um semigrupo, então nS é também finitamente gerado como um ideal de S. Reciprocamente, se $\bigcap_{i=1}^{\infty} iS = \emptyset$ e se nS é finitamente gerado como um ideal de S, então nS está contido em um subsemigrupo finitamente gerado de S, em particular se $n = 1$, então S é um semigrupo finitamente gerado.*

Prova: Como citado anteriormente, se A é um conjunto de geradores de nS como um semigrupo, então A gera nS como um ideal de S. Por outro lado, consideremos $A = \{a_1,...,a_k\}$ um conjunto de geradores do ideal nS. Como para todo $i \in \{1,...,k\}$, temos que $a_i \in nS$ então existem $\alpha_{i1},...,\alpha_{in} \in S$ tais que $a_i = \alpha_{i1} + ... + \alpha_{in}$. Seja $B = \left\{\alpha_{ij} \in S \,/\, i \in \{1,...,k\} \text{ e } j \in \{1,...,n\}\right\}$. Seja T o subsemigrupo de S gerado por B. Vamos mostrar que $nS \subseteq T$. Seja $x \in nS = \langle A\rangle = \cup_{i=1}^{k} \langle a_i\rangle$. Como $x \in nS$, então $x = a_i + \overline{s'}$ para algum $a_i \in A$ e $\overline{s'} \in \overline{S}$, logo $x = \alpha_{i1} + ... + \alpha_{in} + \overline{s'}$, onde $\alpha_{i1},...,\alpha_{in} \in B$. Seja $C = \{j \in \mathbb{N} \,/\, \exists\, b_1,...,b_j \in B \text{ e } \exists\, \overline{s} \in \overline{S} \text{ tais que } x = b_1 + ... + b_j + \overline{s}\}$. Observamos que $C \neq \emptyset$, pois, $n \in C$ uma vez que $x = \alpha_{i1} + ... + \alpha_{in} + \overline{s'}$. Além disso, C é um conjunto finito, pois, caso contrário, para qualquer $i \in \mathbb{N}^*$, existiria $j \in C, j > i$; existiriam assim, elementos $b_1, b_2, ..., b_i, ..., b_j$ em B e $\overline{s_j} \in \overline{S}$ tais que $x = b_1 + b_2 ... + b_j + \overline{s_j}$. Se $\overline{s_j} \neq 0$ temos que $\overline{s_j} \in S$, logo $x \in (j+1)S \subseteq iS$; se $\overline{s_j} = 0$ temos que $x \in jS \subseteq iS$. Em ambos os casos $x \in iS$. Daí $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} iS = \emptyset$, o que seria um absurdo. Portanto C é um conjunto finito e não vazio. Seja m o elemento máximo de C. Observe que $m \geq n$. Sejam $b_1,...,b_m \in B$ e $\overline{s} \in \overline{S}$ tais que $x = b_1 + ... + b_m + \overline{s}$, isto é, $x = \sum_{i=1}^{m} b_i + \overline{s} = \sum_{i=1}^{n-1} b_i + \sum_{i=n}^{m} b_i + \overline{s}$. Vamos mostrar que $\overline{s} = 0$, pois neste caso teremos que $nS \subseteq T$. Se $\overline{s} \neq 0$ então $\sum_{i=1}^{n-1} b_i + \overline{s} \in nS$. Assim $\sum_{i=1}^{n-1} b_i + \overline{s} = \sum_{i=1}^{n} c_i + t$, onde $c_i \in B$ e $t \in \overline{S}$, portanto $x = \sum_{i=1}^{n} c_i + \sum_{i=n}^{m} b_i + t$, contradizendo a maximalidade de m. Logo $\overline{s} = 0$ e $x = b_1 + ... + b_m \in T$.□

Como acabamos de ver na prova da Proposição 2.2, se $\bigcap_{i=1}^{\infty} iS = \emptyset$ e se A é um subconjunto de S temos que, A gera S como um semigrupo se e só se A gera S como um ideal de S. Observamos que a hipótese $\bigcap_{i=1}^{\infty} iS = \emptyset$ implica que $0 \notin S$.

O Teorema a seguir nos mostra um resultado semelhante ao da Questão 0.1 para um semigrupo cancelativo S, no lugar de um ideal M. Quando colocamos entre as nossas hipóteses que $\bigcap_{i=1}^{\infty} iS = \emptyset$, obtemos uma resposta positiva.

Teorema 2.3: *Seja S um semigrupo comutativo cancelativo tal que $\bigcap_{i=1}^{\infty} iS = \emptyset$. Se para algum inteiro positivo n o ideal nS de S é finitamente gerado então S é finitamente gerado como um semigrupo.*

Prova: Vamos mostrar inicialmente que o semigrupo S é gerado por $S \setminus 2S = \{s_i \in S \,/\, s_i$ não pode ser escrito como soma de dois elementos em $S\}$. Seja $x \in S$, como $\bigcap_{i=1}^{\infty} iS = \emptyset$, então existe um inteiro positivo m tal que $x \in mS$ e $x \notin (m+1)S$. Assim existem $s_1,...,s_m \in S$ tais que $x = s_1 + ... + s_m$. Como $x \notin (m+1)S$, $s_i \in S \setminus 2S$ para cada $i \in \{1,...,m\}$, portanto $S \setminus 2S$ gera o semigrupo S. Vamos mostrar que $S \setminus 2S$ é um conjunto finito e portanto S será finitamente gerado como semigrupo. Pela Proposição 2.2, o ideal nS está contido em um subsemigrupo de S que é gerado por um conjunto finito $\{a_1,...,a_k\}$. Se $S \setminus 2S$ não fosse um conjunto finito então existiria uma seqüência infinita de elementos distintos $x_1, x_2, ... \in S \setminus 2S$. Seja c um elemento qualquer em nS. Para cada i, temos que $c + x_i \in nS$. Como S é cancelativo, $c + x_i$ são elementos distintos. Podemos escrever, em $\overline{S}$, a equação $c + x_i = \sum_{j=1}^{k} n_{i_j} a_j$, onde cada n_{i_j} é um inteiro não negativo. Sejam $v_i = (n_{i_1},...,n_{i_k}) \in \mathbb{N}^k$ e $A = \{v_i \,/\, i \in \mathbb{N}^*\}$. Como $c + x_i$ são distintos e S é cancelativo, A é um conjunto com infinitos elementos. Por outro, lado o monóide $\mathbb{N}^k$ é Noetheriano logo, pelo Lema 2.M, A possui elementos comparáveis, isto é, existem inteiros $i \neq r$ tais que $v_i \leq v_r$, portanto $n_{i_j} \leq n_{r_j}$ para todo $j \in \{1,...,k\}$. Seja $t_j = n_{r_j} - n_{i_j}$ e $x = \sum_{j=1}^{k} t_j a_j$. Temos assim $c + x_r = \sum_{j=1}^{k} n_{r_j} a_j = \sum_{j=1}^{k} n_{i_j} a_j + \sum_{j=1}^{k} t_j a_j = c + x_i + x$. Como S é cancelativo e $x_i \neq x_r$ temos que $x \neq 0$. Sendo $x \neq 0$, temos $x \in S$. Como $c + x_r = c + x_i + x$ e S é cancelativo temos $x_r = x_i + x \in 2S$, o que contraria o fato de $x_r \in S \setminus 2S$. Logo $S \setminus 2S$ é um conjunto finito.□

Observação 2.3.A: *Como acabamos de ver na prova do Teorema* 2.3, *se S for um* *semigrupo cancelativo tal que* $\bigcap_{i=1}^{\infty} iS = \emptyset$, *então* S *será gerado como semigrupo por* $S \setminus 2S$. *Mais ainda, com as mesmas hipóteses,* S *será finitamente gerado se e só se* $S \setminus 2S$ *for um subconjunto finito de* S, *uma vez que, dado um subconjunto* E *de* S *temos que* E *gera* S *como semigrupo se e só se* E *contém* $S \setminus 2S$, *pois todo elemento* x *de* S *é uma soma de elementos de* E, *portanto se* $x \in S \setminus 2S$, *esta soma tem uma só parcela, isto é,* $x \in E$.

Na próxima proposição aplicaremos o Teorema 2.3 aos monóides Arquime- dianos.

Definição 2.Q: *Dizemos que um monóide totalmente ordenado* $(\bar{S},<)$ *é Arquimediano se, para quaisquer dois elementos* $a > 0$ *e* $b > 0$ *em* $\bar{S}$, *existe um inteiro positivo* k *tal que* $ka > b$.

Proposição 2.4: *Seja* $(\bar{S},<)$ *um monóide Arquimediano tal que* $S^* = \bar{S} \setminus \{0\}$ *é constituído exclusivamente por elementos positivos. Suponhamos que para algum inteiro positivo* n *o ideal* nS^* *de* $\bar{S}$ *seja finitamente gerado. Então* $\bar{S}$ *será finitamente gerado como um monóide.*

Prova: Vamos mostrar primeiramente que S^* tem um menor elemento. Supo- nhamos que o ideal nS^* de $\bar{S}$ seja gerado por $\{a_0, ..., a_k\}$. Podemos supor que $a_0 < a_1 < ... < a_k$. Neste caso a_0 é o menor elemento de nS^*, pois se $x \in nS^*$, existe $i \in \{1, ..., k\}$ tal que $x \in \langle a_i \rangle$, portanto $x \geq a_i \geq a_0$. Mais ainda, se escrevermos $a_o = c_1 + ... + c_n$, onde cada $c_i \in S^*$ e $c_1 \leq c_2 \leq ... \leq c_n$, então $a_0 \geq nc_1$. Portanto, como $nc_1 \in nS^*$ temos, pela minimalidade de a_0, que $a_0 = nc_1$. Se $c \in S^*$ então $nc \in nS^*$, então $nc \geq a_0 = nc_1$, logo $c \geq c_1$. Portanto c_1 é o menor elemento de S^*, e mc_1 é o menor elemento de mS^*, para cada m natural. Como os elementos de S^* são positivos, a propriedade Arquimediana de S garante que para qualquer $x \in S^*$, existe um inteiro positivo k tal que $kc_1 > x$, logo $x \notin \langle kc_1 \rangle = kS^*$. Verificamos assim que $\bigcap_{i=1}^{\infty} iS^* = \emptyset$ então, pelo Teorema 2.3, concluímos que S^* é finitamente gerado como semigrupo. Portanto $\bar{S}$ é finitamente gerado como um monóide.□

O Teorema a seguir responde positivamente à Questão 0.1, para o caso de ideais monóides, se tivermos entre as nossas hipóteses que $\bigcap_{i=1}^{\infty} iS = \emptyset$. Se esta hipótese não for satisfeita, então o ideal maximal M do anel $R = K[X, \bar{S}]$, não será necessariamente um ideal finitamente gerado. Um exemplo deste fato será apresentado no Capítulo 3.

Teorema 2.5: *Seja* K *um corpo, e* S *um semigrupo cancelativo satisfazendo a propriedade* $\bigcap_{i=1}^{\infty} iS = \emptyset$. *Seja* M *o ideal do anel monóide* $K[X, \bar{S}]$ *gerado por* $\{X^s / s \in S\}$. *Se alguma potência do ideal maximal* M *for um ideal finitamente gerado, então* M *será um ideal finitamente gerado.*

Prova: Se M^n é um ideal finitamente gerado de $K[X, \bar{S}]$, então, pela Proposi- ção 2.1, temos que nS é finitamente gerado como um ideal do semigrupo S, portanto, pelo Teorema 2.3, temos que S é finitamente gerado como semigrupo, logo S é finitamente gerado como ideal do semigrupo S. Finalmente, pela Proposição 2.1, temos que $M = \langle \{X^s / s \in S\} \rangle$ é finitamente gerado como um ideal do anel monóide $K[X, \bar{S}]$.□

Corolário 2.6: *Seja* K *um corpo e seja* R *uma* K*-subálgebra do anel de polinômios* $K[X_1, ..., X_n]$ *que é gerada por um conjunto* L *de monômios. Seja* M *o ideal de* R *gerado por* L. *Se alguma potência de* M *é finitamente gerada então* R *é finitamente gerada como uma* K*-álgebra e* M *é finitamente gerado como um ideal de* R.

Prova: Vamos denotar cada monômio $X_1^{i_1} ... X_n^{i_n}$ de $K[X_1, ..., X_n]$ por X^v onde

$v = (i_1, ..., i_n) \in \mathbb{N}^n$. Como $X^v X^w = X^{v+w}$, cada elemento de $K[X_1, ..., X_n]$ pode ser escrito de maneira única como $k_0 + k_1 X^{v_1} + ... + k_r X^{v_r}$ onde $r \in \mathbb{N}$, $k_0, k_1, ..., k_r \in K$ e $v_1, v_2, ..., v_r \in \mathbb{N}^n$ são distintos entre si e diferentes de $v_0 = (0, ..., 0)$. Os elementos de R, a K-subálgebra de $K[X_1, ..., X_n]$ gerada por L, são os elementos de $K[X_1, ..., X_n]$ tais que para cada $i \in \{1, ..., n\}$, v_i é uma soma finita de elementos de $A = \{v \in \mathbb{N}^n \ / \ X^v \in L\}$. Seja S o subsemigrupo de $\mathbb{N}^n$ gerado por A. Podemos assim identificar R com a álgebra monóide $K[X, \overline{S}]$. O ideal M de R gerado pelos elementos de L, quando visto como ideal de $K[X, \overline{S}]$, é gerado por $\{X^s \ / \ s \in S\}$. Se M^n é um ideal finitamente gerado de R, então também é um ideal finitamente gerado de $K\left[X, \overline{S}\right]$ o que, pela Proposição 2.1, é equivalente a nS ser um ideal finitamente gerado de S. Como $\mathbb{N}^n$ é um monóide cancelativo e $S \subseteq \mathbb{N}^n$, então S é um semigrupo cancelativo. Além disso $\bigcap_{i=1}^{\infty} iS = \emptyset$, pois $iS \subseteq i(\mathbb{N}^n \setminus \{(0, ..., 0)\})$ e $\bigcap_{i=1}^{\infty} i(\mathbb{N}^n \setminus \{(0, ..., 0)\}) = \emptyset$. Pelo Teorema 2.3, temos que S é finitamente gerado como semigrupo logo, pela Proposição 2.2, S é finitamente gerado como ideal de S. Portanto, pela Proposição 2.1, M é finitamente gerado como ideal de $K\left[X, \overline{S}\right]$, então M é finitamente gerado como ideal de R. Por outro lado se $\{v_1, ..., v_r\}$ gera S como semigrupo, então $\{X^{v_1}, ..., X^{v_r}\}$ gera $K\left[X, \overline{S}\right]$ como K-álgebra. Como $R \simeq K\left[X, \overline{S}\right]$, R é uma K-álgebra finitamente gerada.□

Capítulo 3
Exemplos

O exemplo a seguir mostra uma maneira fácil de construir um domínio que possui um ideal primo P de altura um que não é um ideal finitamente gerado tal que P é o radical de um ideal principal e P^2 é um ideal 3-gerado. Este exemplo mostra que, no Teorema 1.10, a hipótese $\frac{R}{I}$ ser anel Noetheriano, é essencial.

Exemplo 3.1: Seja T um domínio não Noetheriano e seja I um ideal de T que não é finitamente gerado. Consideremos o anel de polinômios $T[X]$ e o subanel $R = T[X^3, X^4, IX^5]$. Observemos inicialmente que $T[X]$ é uma extensão inteira de R, uma vez que $X^3 \in R$. Seja $P = (X^3, X^4, IX^5)R$.

Primeiramente mostraremos que P não é um ideal finitamente gerado de R. Note que cada elemento de $R = T[X^3, X^4, IX^5]$ pode ser escrito como $f = t + f^*$ onde $t \in T$ e $f^* = \sum_{(k,l,m) \neq (0,0,0)} t_{klm} X^{3k} X^{4l} (i_m X^5)^m$ onde $t_{klm} \in T$ e $i_m \in I$. Portanto os monômios de f^* têm grau pelo menos 3. Se $P = (X^3, X^4 IX^5)R$ for um ideal finitamente gerado, então existem $a_1, a_2, ..., a_n \in I$ tais que $P = (X^3, X^4, a_1 X^5, a_2 X^5, ..., a_n X^5)R$. Seja $a \in I$. O polinômio $aX^5 \in (IX^5)R \subseteq P$, logo existem $f, g, h_1, ..., h_n \in R$ tais que $aX^5 = fX^3 + gX^4 + h_1 a_1 X^5 + ... + h_n a_n X^5$. Decorre daí que $aX^5 = (t + f^*)X^3 + (t' + g^*)X^4 + (t_1'' + h_1^*)a_1 X^5 + ... + (t_n'' + h_n^*)a_n X^5$. Como aX^5 não possui termos de graus 3 e 4, então $t = t' = 0$. Logo $aX^5 = (f^* X^3 + g^* X^4 + h_1^* a_1 X^5 + ... + h_n^* a_n X^5) + (t_1'' a_1 + t_2'' a_2 + ... + t_n'' a_n)X^5$. Como todos os monômios que aparecem em $H = f^* X^3 + g^* X^4 + h_1^* a_1 X^5 + ... + h_n^* a_n X^5$ têm grau maior ou igual a 6, então $H = 0$ e $aX^5 = (t_1'' a_1 + ... + t_n'' a_n)X^5$, logo $a = a_1 t_1'' + ... + a_n t_n''$ e portanto o ideal I seria finitamente gerado, o que não ocorre, logo $P = (X^3, X^4, IX^5)R$ não é um ideal finitamente gerado do anel R.

Mostraremos agora que o ideal P do anel R é tal que $P^2 = (X^6, X^7, X^8)R$ e portanto é finitamente gerado. É claro que $P^2 \supseteq (X^6, X^7, X^8)R$, pois $X^6 = (X^3)^2$, $X^7 = X^3 X^4$ e $X^8 = (X^4)^2$. Sejam $a, b \in P$, vamos mostrar que $ab \in (X^6, X^7, X^8)R$, de onde decorrerá que $P^2 = (X^6, X^7, X^8)R$. Temos que $a = fX^3 + gX^4 + hX^5$ e $b = f'X^3 + g'X^4 + h'X^5$, onde

$f, g, f^{'}, g^{'} \in R$ e $h, h^{'} \in IR$. Então
$ab = ff^{'}X^6 + (fg^{'} + gf^{'})X^7 + (fh^{'} + gg^{'} + hf^{'})X^8 + (h^{'}gX^3 + hg^{'}X^3)X^6 + (hh^{'}X^4)X^6$. Como $ff^{'}, (fg^{'} + gf^{'}), (fh^{'} + gg^{'} + hf^{'}), hf^{'}X^3, hg^{'}X^3, hh^{'}X^4$ pertencem a R então $ab \in (X^6, X^7, X^8)R$. Logo $P^2 = (X^6, X^7, X^8)R$ e portanto P^2 é um ideal finitamente gerado de R.

Mostraremos agora que o ideal $P = (X^3, X^4, IX^5)R$ é um ideal primo do anel R. O ideal (X) é um ideal primo em $T[X]$. Como $R \subseteq T[X]$ então $(X)T[X] \cap R$ é um ideal primo em R. Queremos mostrar que $(X)T[X] \cap R = (X^3, X^4, IX^5)R$. É claro que $(X^3, X^4, IX^5)R \subseteq (X)T[X] \cap R$. Seja $f \in (X)T[X] \cap R$, então $f = X\sum_{j=0}^{n} t_jX^j$ e $f = \sum t_{klm}(X^3)^k(X^4)^l(i_mX^5)^m$, para $i_m \in I$, assim pelo menos um dos elementos do conjunto $\{k, l, m\}$ é diferente de zero. Logo dada qualquer parcela de f, $t_{klm}i_m^mX^{3k}X^{4l}X^{5m}$, podemos reescrevê-la da seguinte maneira, se $k > 0$, $(t_{klm}i_m^mX^{4l}X^{5m}X^{3(k-1)})X^3 \in (X^3, X^4, IX^5)R$. Analogamente mostra-se para as outras parcelas, quando tivermos $l > 0$ ou $m > 0$. Assim temos que cada parcela de f pertence a $(X^3, X^4, IX^5)R$. Logo f pertence também a $(X^3, X^4, IX^5)R$. Portanto $(X^3, X^4, IX^5)R = (X)T[X] \cap R$, assim $(X^3, X^4, IX^5)R$ é um ideal primo do anel R.

Como $P = (X^3, X^4, IX^5)R$, qualquer ideal primo que contiver P conterá também X^3, logo conterá $(X)T[X]$. Sendo a extensão $R \hookrightarrow T[X]$ inteira e $P = (X)T[X] \cap R$ concluímos, por $\left[\text{K-Teorema 44}\right]$, que $(X)T[X]$ é o único ideal primo de $T[X]$ que se contrai a P, logo, por $\left[\text{K-Teorema 44}\right]$, $altP = alt(X)T[X] = 1$. Além disto $P = \sqrt{X^3R}$, pois se um ideal primo Q de R contiver X^3, como por $\left[\text{K-Teorema 44}\right]$, existe um ideal primo $Q^{'}$ de $T[X]$ tal que $Q^{'} \cap R = Q$, temos que $X^3 \in Q^{'}$, portanto $(X)T[X] \subseteq Q^{'}$. Assim $P = (X)T[X] \cap R \subseteq Q^{'} \cap R \subseteq Q$, isto é P é o único primo mínimo de $(X^3)R$. Logo $P = \sqrt{X^3R}$.

Observemos ainda que $\frac{R}{P} \simeq T$, pois temos que $T = \frac{T}{(0)} = \frac{T}{(x)T[X] \cap T} \subseteq \frac{R}{(X)T[X] \cap R} = \frac{R}{P} \subseteq \frac{T[X]}{(X)T[X]} = T$. Logo o ideal primo P do anel R não é um ideal maximal e $\frac{R}{P}$ não é um anel Noetheriano para este ideal primo P.

Através deste exemplo verificamos que existem casos em que dado um domínio R, existe um ideal primo P, não maximal, tal que P não é um ideal finitamente gerado do anel R, mas P possui uma potência que é finitamente gerada.

Exemplo 3.2: No exemplo a seguir, para todo d, $3 \leq d \leq \infty$ construiremos um domínio T tal que $\dim T = d$, onde T possui um ideal maximal P que não é um ideal finitamente gerado, tal que $alt(P) = d$ e $P^2 = (a^2, b^2, ab) = (a, b)^2$.

Este exemplo nos mostra que as hipóteses de alguns resultados deste trabalho não podem ser substituídas ou desprezadas, como é o caso de:

- No Teorema 1.9 a hipótese de $\sqrt{I}$ ser igual ao radical de um ideal principal não pode ser substituída por $\sqrt{I}$ ser igual ao radical de um ideal gerado por 2 elementos;

- No Teorema 1.24.(1) não podemos enfraquecer a hipótese de M ser um ideal primo mínimo de um ideal principal substituindo-a por M ser um ideal primo mínimo de um ideal 2-gerado;

- No Teorema 1.24.(2) a hipótese de x ser regular $\operatorname{mod} I$ é necessária;

- No Teorema 1.24.(6) a hipótese de R ser inteiramente fechado não pode ser retirada.

Ainda mostramos que existe um ideal 2-gerado I, contido em P, tal que $I^2 = P^2$.

Se d é tal que $d = \infty$, então T pode ser escolhido como sendo o domínio monóide $K[X, \bar{S}]$ sobre um corpo K, onde P é o ideal gerado por $\{X^s / s \in S\}$.

Sejam K um corpo e $X_1, X_2, X_3, \ldots$ indeterminadas sobre K. Trataremos primeiramente o caso em que d é finito. Seja $L = K\left(\frac{X_n^2}{X_3^2}\right)_{n \geq d+1}$. Sejam $T = L\left[X_n, \frac{X_1X_i}{X_2^m}, \frac{X_2X_i}{X_1^m}\right]_{n \geq 1, m \geq 1, i \geq 3}$ e $P = (X_n)_{n \geq 1}$ o ideal de T gerado por $\{X_n\}_{n \geq 1}$.

Mostraremos que P é ideal maximal de T, que não é finitamente gerado e que $P^2 = (X_1, X_2)^2$.

Observemos que cada elemento de T é uma soma finita de elementos do tipo $lX_1^{i_1}...X_r^{i_r}\left(\frac{X_1X_3}{X_2^{m_3}}\right)^{k_3}...\left(\frac{X_1X_r}{X_2^{m_r}}\right)^{k_r}\left(\frac{X_2X_3}{X_1^{p_3}}\right)^{v_3}...\left(\frac{X_2X_r}{X_1^{p_r}}\right)^{v_r}$, onde $l \in L$, $r \in \mathbb{N}$, $i_1, ...,$ $i_r, k_3, ..., k_r, v_3, ..., v_r \in \mathbb{N}$ e $m_3, ..., m_r, p_3, ..., p_r \in \mathbb{N}^*$. Como $\frac{X_1X_i}{X_2^{m_i}} = \frac{X_1X_i}{X_2^{m_i+1}} \bullet X_2 \in X_2T \subseteq P$, $\frac{X_2X_i}{X_1^{p_i}} = \frac{X_2X_i}{X_1^{p_i+1}} \bullet X_1 \in X_1T \subseteq P$ e $X_i \in P$, então todo elemento t de T pode ser escrito como uma soma $l+p$, onde $l \in L$ e $p \in P$. E mais, como L é corpo e $L \subseteq T$, $l+p \in P$ se e somente se $l = 0$. Logo P é ideal maximal de T.

Mostremos agora que $P^2 = (X_1^2, X_1X_2, X_2^2)$ e portanto teremos que P^2 é ideal finitamente gerado de T. É claro que $X_1^2, X_2^2, X_1X_2 \in P^2$. Para mostrar que $P^2 \subseteq (X_1^2, X_1X_2, X_2^2)T$ basta mostrar que $X_iX_j \in (X_1^2, X_1X_2, X_2^2)T$.

Se $i,j \geq 3$, temos

$X_iX_j = \frac{X_iX_1}{X_2^2} \bullet \frac{X_jX_2}{X_1^2} \bullet X_1X_2 \in X_1X_2T \subseteq (X_1^2, X_1X_2, X_2^2)T$.

Se $i,j < 3$, temos $i,j \in \{1,2\}$, logo $X_iX_j \in (X_1^2, X_1X_2, X_2^2)T$.

Se $i \geq 3$ e $j < 3$, então $j = 1$ ou $j = 2$. Se $j = 1$, então $X_iX_j = X_iX_1 = \frac{X_1X_i}{X_2^2} \bullet X_2^2 \in X_2^2T \subseteq (X_1^2, X_1X_2, X_2^2)T$. Se $j = 2$, então $X_iX_j = X_iX_2 = \frac{X_2X_i}{X_1^2} \bullet X_1^2 \in X_1^2T \subseteq (X_1^2, X_1X_2, X_2^2)T$.

De maneira análoga mostra-se que se $i < 3$ e $j \geq 3$ então $X_iX_j \in (X_1^2, X_1X_2,\ X_2^2)T$. Logo $P^2 = (X_1^2, X_1X_2, X_2^2)$, isto é, P^2 é um ideal 3-gerado.

Mostremos agora que o ideal maximal P não é um ideal finitamente gerado. Para tal vamos supor, por absurdo, que existe um inteiro $n \geq 3$ tal que $X_{n+1} \in (X_1, ..., X_n)$. Sejam $t_1, t_2, ..., t_n \in T$ tais que $X_{n+1} = t_1X_1 + ... + t_nX_n$. Pelo que foi observado anteriormente, é fácil ver que cada elemento de T, em particular $t_1, t_2, ..., t_n$, pode ser escrito como uma soma finita cujas parcelas são do tipo $lX_1^{z_1}X_2^{z_2}X_3^{l_3}...X_r^{l_r}$, onde $r \in \mathbb{N}$, $l \in L$, $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ e $l_3, ..., l_r \in \mathbb{N}$, mais ainda, se z_1 ou z_2 forem negativos então existe $j \in \{3, ..., r\}$ tal que $l_j > 0$. Desta maneira X_{n+1} é escrito como uma soma finita de parcelas deste tipo. Após simplificarmos o que for possível, podemos supor que $X_{n+1} = t_1^{'}X_1 + ... + t_n^{'}X_n$, onde $t_1^{'}, ..., t_2^{'} \in T$ e o número total de parcelas de X_{n+1} é mínimo. Observamos que cada $t_i^{'}$ pode ser escrito como $t_i^* + t_i^{**}$, onde t_i^* é a soma das parcelas de $t_i^{'}$ do tipo $lX_1^{z_1}X_2^{z_2}X_3^{l_3}...X_r^{l_r}$ onde X_{n+1} não ocorre, isto é, $l_{n+1} = 0$ e, t_i^{**} é a soma de parcelas de $t_i^{'}$ do tipo $lX_1^{z_1}X_2^{z_2}X_3^{l_3}...X_r^{l_r}$ onde X_{n+1} ocorre, isto é $l_{n+1} \geq 1$. Desta maneira temos

$X_{n+1} = t_1^*X_1 + ... + t_n^*X_n + (t_1^{**}X_1 + ... + t_n^{**}X_n)$. Sejam $g_0 = t_1^*X_1 + ... + t_n^*X_n$ e $f_0 = t_1^{**}X_1 + ... + t_n^{**}X_n$. Assim $X_{n+1} = g_0 + f_0 = g_0 + h_0X_{n+1}$, onde $h_0 \in T$. Observamos que

$T = L\left[X_n, \frac{X_1X_i}{X_2^m}, \frac{X_2X_i}{X_1^m}\right]_{n\geq1, m\geq1, i\geq3} \subseteq cf(K(X_1, X_2)[X_3, X_4, ...])$. Vamos olhar os elementos de T como funções racionais nas variáveis $X_3, X_4, ...$ sobre o corpo $K(X_1, X_2)$ e considerar seu grau total nestas variáveis. Como X_{n+1} é homogêneo de grau 1, como os elementos de L tem grau zero e como o número de parcelas de X_{n+1} é mínimo então, $g_0 = 0$ ou o grau$(g_0) = 1$ e, grau$(h_0) = 0$. Mostremos primeiramente que $t_3^{**} = t_4^{**} = ... = t_n^{**} = 0$. Observe que $t_i^{**}X_i$ é soma finita de parcelas do tipo $lX_1^{z_1}X_2^{z_2}X_3^{l_3}...X_{n+1}^{l_{n+1}}...X_r^{l_r}X_i$, onde $l_{n+1} \geq 1$. Se para $i \geq 3$ tivéssemos $t_i^{**} \neq 0$ então o grau de cada uma destas parcelas seria pelo menos 2 (observe que os elementos de L tem grau zero). Como o número de parcelas de X_{n+1} é mínimo, então teríamos que o grau$(h_0X_{n+1}) > 1$. Logo $t_3^{**} = t_4^{**} = ... = t_n^{**} = 0$ e $f_0 = h_0X_{n+1} = t_1^{**}X_1 + t_2^{**}X_2$, onde tanto t_1^{**} como t_2^{**} são somas de parcelas do tipo:

a) $lX_1^{v_1}X_2^{v_2}X_{n+1}$ onde $v_1, v_2 \in \mathbb{N}$, ou

b) $lX_1^{v_1}\left(\frac{X_2X_{n+1}}{X_1^m}\right)^1$, onde $v_1 \geq 0$ e $m \geq 1$, ou

c) $lX_2^{v_2}\left(\frac{X_1X_{n+1}}{X_2^m}\right)^1$, onde $v_2 \geq 0$ e $m \geq 1$.

Logo $t_1^{**}X_1 + t_2^{**}X_2$ é soma de parcelas do tipo $lX_1^{v_1}X_2^{v_2}X_{n+1}$ com $v_1, v_2 \in \mathbb{N}$ e, $v_1 > 0$ ou $v_2 > 0$, ou do tipo $lX_1^{z_1}X_2X_{n+1}$ com $z_1 < 0$, ou do tipo $lX_1^2X_2^{z_2}X_{n+1}$ com $z_2 < 0$, ou do tipo $lX_1^{z_1}X_2^2X_{n+1}$ com $z_1 < 0$, ou ainda do tipo $lX_1X_2^{z_2}X_{n+1}$ com $z_2 < 0$.

Logo temos $h_0X_{n+1} = t_1^{**}X_1X_{n+1} + t_2^{**}X_2X_{n+1} = \left(F_1\frac{X_1}{X_2^m} + F_2\frac{X_2}{X_1^n} + F_3\right)X_{n+1}$, onde F_1, $F_2 \in L\left[X_1,\ X_2\right]$ e $F_3 \in (X_1, X_2)\ L[X_1, X_2]$. Então $X_{n+1} = g_0 + \left(F_1\frac{X_1}{X_2^m} + F_2\frac{X_2}{X_1^n} + F_3\right)X_{n+1}$. Daí temos que $\left(1 - F_1\frac{X_1}{X_2^m} - F_2\frac{X_2}{X_1^n} - F_3\right)X_{n+1} = g_0$. Como $g_0 = 0$ ou grau$(g_0) = 1$ então g_0 é uma combinação linear de $\{X_3, X_4, ..., \widehat{X_{n+1}}, ..., X_r\}$ com coeficientes em $L(X_1, X_2)$ e, como $L = K\left(\frac{X_i^2}{X_3^2}\right)_{i \geq d+1}$, observamos que no lado direito da igualdade aparecem apenas potências pares de X_{n+1} e no lado esquerdo aparecem apenas potências ímpares de X_{n+1}. Como $\{X_1, X_2, ...\}$ são algebricamente independentes sobre K, então $g_0 = 0$ e $1 - F_1\frac{X_1}{X_2^m} - F_2\frac{X_2}{X_1^n} - F_3 = 0$. Logo

$1 = F_1\frac{X_1}{X_2^m} + F_2\frac{X_2}{X_1^n} + F_3$ e, então, multiplicando dos dois lados por $X_1^nX_2^m$, obtemos

$X_1^nX_2^m = F_1X_1^{n+1} + F_2X_2^{m+1} + F_3X_1^nX_2^m$, logo $F_1X_1^{n+1}$ e $F_2X_2^{m+2}$ são divisíveis por X_2^m e X_1^n, respectivamente em $L[X_1, X_2]$. Como X_1 e X_2 são algebricamente independentes sobre L então $X_1^n \mid F_2$ e $X_2^m \mid F_1$ em $L[X_1, X_2]$. Temos assim que existem $G_1, G_2 \in L[X_1, X_2]$ tais que $G_1 = \frac{F_1}{X_2^m}$ e $G_2 = \frac{F_2}{X_1^n}$, logo

$1 = G_1X_1 + G_2X_2 + F_3$. Como $F_3 \in (X_1, X_2)L[X_1, X_2]$, temos que $1 \in (X_1, X_2)L[X_1, X_2]$, o que é um absurdo. Logo P não é um ideal finitamente gerado.

Mostraremos agora que $alt(P) = d$. Considerando $\widetilde{L} = K\left(\frac{X_n}{X_3}\right)_{n \geq d+1}$, temos que $\widetilde{L}$ é o corpo de frações de $K\left[\frac{X_n}{X_3}\right]_{n \geq d+1}$.

Seja $D_i = \widetilde{L}\left[X_1, X_2, \frac{X_3}{X_1^iX_2^i}, ..., \frac{X_d}{X_1^iX_2^i}\right]$. Como $X_1, X_2, X_3, ..., X_d, X_{d+1}, ...$ são algebricamente independentes sobre K então, para cada $i \in \mathbb{N}$, $X_1, X_2, \frac{X_3}{X_1^iX_2^i}, ..., \frac{X_d}{X_1^iX_2^i}$, $\frac{X_{d+1}}{X_3}, \frac{X_{d+2}}{X_3}$ são algebricamente independentes sobre K, logo $X_1, X_2, \frac{X_3}{X_1^iX_2^i}, ..., \frac{X_d}{X_1^iX_2^i}$ são algebricamente independentes sobre o corpo de frações de $K\left[\frac{X_n}{X_3}\right]_{n \geq d+1}$, isto é, $X_1, X_2, \frac{X_3}{X_1^iX_2^i}, ..., \frac{X_d}{X_1^iX_2^i}$ são algebricamente independentes sobre $\widetilde{L}$. Logo $\dim D_i = d$. Observamos também que $D_i \subseteq D_{i+1}$, para todo $i \geq 1$, pois para todo $j \in \{3, ..., d\}$ temos que $\frac{X_j}{X_1^iX_2^i} = \frac{X_j}{X_1^{i+1}X_2^{i+1}}X_1X_2 \in D_{i+1}$.

Seja $\widetilde{T}$ a união $\cup_{i=1}^{\infty} D_i$ e seja $\widetilde{P} = \left(X_1, X_2, \frac{X_3}{X_1^iX_2^i}, ..., \frac{X_d}{X_1^iX_2^i}\right)_{i \geq 1}\widetilde{T}$. Como a união $\cup_{i=1}^{\infty} D_i$ é crescente, então temos que $\dim\widetilde{T} \leq d$, caso contrário se $0 \subsetneq P_1 \subsetneq P_2 \subsetneq ... \subsetneq P_d \subsetneq P_{d+1}$ fosse uma cadeia de ideais primos em $\widetilde{T}$ então escolheríamos $f_1, ..., f_{d+1} \in \widetilde{T}$, tais que $f_j \in P_j \setminus P_{j-1}$, para todo $j \in \{1, ..., d+1\}$. Tomando $i \geq 1$ tal que $f_1, ..., f_{d+1} \in D_i$ (tal i existe, pois $D_1 \subseteq D_2 \subseteq ...$), teríamos, em D_i, $0 \subsetneq P_1 \cap D_i \subsetneq P_2 \cap D_i \subsetneq ... \subsetneq P_d \cap D_i \subsetneq P_{d+1} \cap D_i$ e para todo $j \in \{1, ..., d+1\}$, o que contradiria o fato de que $\dim D_i = d$. Portanto $\dim\widetilde{T} \leq d$.

Mostraremos agora que $\widetilde{P} = (X_1, X_2)\widetilde{T} = P\widetilde{T}$. É claro que $\widetilde{P} \supseteq (X_1, X_2)\widetilde{T}$. Seja $\frac{Xk}{X_1^iX_2^i} \in \widetilde{P}$, então temos que $\frac{X_k}{X_1^iX_2^i} = \frac{X_k}{X_1^{i+1}X_2^{i+1}} \bullet X_1X_2 \in (X_1, X_2)\widetilde{T}$, pois $\frac{X_k}{X_1^{i+1}X_2^{i+1}} \in D_{i+1} \subseteq \widetilde{T}$. Portanto $\widetilde{P} = (X_1, X_2)\widetilde{T}$. Por outro lado $(X_1, X_2)\widetilde{T} \subseteq (X_1, X_2, ...)\widetilde{T} = P\widetilde{T}$. Consideremos $X_k \in P\widetilde{T}$, onde $k > 2$, então temos que $X_k = \frac{X_k}{X_1X_2} \bullet X_1X_2 \in (X_1, X_2)\widetilde{T}$, pois,

$\frac{X_k}{X_1X_2} \in D_1 \subseteq \widetilde{T}$. Logo $(X_1,X_2)\widetilde{T} = P\widetilde{T}$.

Mostraremos agora que $\widetilde{P}$ é um ideal primo de $\widetilde{T}$. Dados $f,g \in \widetilde{T}$, tais que $f,g \notin \widetilde{P}$, escolhemos $i \geq 1$ tal que $f,g \in D_i$. Logo $f,g \notin \widetilde{P} \cap D_i \supseteq \left(X_1,X_2, \frac{X_3}{X_1^iX_2^i},\ldots,\frac{X_d}{X_1^iX_2^i}\right)D_i$. Como $\left(X_1,X_2, \frac{X_3}{X_1^iX_2^i},\ldots,\frac{X_d}{X_1^iX_2^i}\right)D_i$ é um ideal maximal de D_i, pois, $X_1,X_2, \frac{X_3}{X_1^iX_2^i},\ldots,\frac{X_d}{X_1^iX_2^i}$ são algebricamente independentes sobre $\widetilde{L}$, então $\widetilde{P} \cap D_i = \left(X_1,X_2, \frac{X_3}{X_1^iX_2^i},\ldots,\frac{X_d}{X_1^iX_2^i}\right)$. Portanto $f \bullet g \notin \widetilde{P} \cap D_i$ então $f \bullet g \notin \widetilde{P}$. Logo $\widetilde{P}$ é um ideal primo de $\widetilde{T}$.

Observamos que $T \subseteq \widetilde{T}$ e $\widetilde{T}$ é inteiro sobre T, pois, para cada $\frac{X_i}{X_3} \in \widetilde{L}$, com $i \geq d+1$, temos que $\left(\frac{X_i}{X_3}\right)^2 = \frac{X_i^2}{X_3^2} \in L \subseteq T$. Assim todo elemento de $\widetilde{L}$ é inteiro sobre T. Além disto, para cada $j \in \{3,\ldots,d\}$, temos que $\left(\frac{X_j}{X_1^iX_2^i}\right)^2 = \frac{X_j}{X_1^{2i}} \bullet \frac{X_j}{X_2^{2i}} = \frac{X_jX_2}{X_1^{2i+1}} \bullet \frac{X_jX_1}{X_2^{2i+1}} \in T$, pois $\frac{X_jX_1}{X_2^{2i+1}}, \frac{X_jX_2}{X_1^{2i+1}} \in T$, e $X_1,X_2 \in T$. Logo $\widetilde{T}$ é inteiro sobre T. Como $\widetilde{P} = P\widetilde{T}$ então $\widetilde{P}$ é o único ideal primo de $\widetilde{T}$ que se contrai a P. Logo $alt(P) = alt(\widetilde{P})$[A-M-5.11]. Basta então mostrar que $alt(\widetilde{P}) = d$. Já sabemos que $alt(\widetilde{P}) \leq d$, pois $\dim \widetilde{T} \leq d$. Para mostrar que $alt(\widetilde{P}) = d$ consideremos o ideal $Q_j = \left(\frac{X_3}{X_1^iX_2^i},\ldots,\frac{X_j}{X_1^iX_2^i}\right)_{i\geq 1}\widetilde{T}$. Afirmamos que Q_j é um ideal primo de $\widetilde{T}$. Dados $f,g \in \widetilde{T}$ tais que $f \bullet g \in Q_j$, existem $\alpha \in \mathbb{N}, t_1,\ldots,t_\alpha \in \widetilde{T}$ e $q_1,\ldots,q_\alpha \in \left\{\frac{X_l}{X_1^kX_2^k} / \, 3 \leq l \leq j \text{ e } k \geq 1\right\}$ tais que $f \bullet g = t_1q_1 + \ldots + t_\alpha q_\alpha$, onde $q_1 = \frac{X_{l_1}}{X_1^{k_1}X_2^{k_1}}, q_2 = \frac{X_{l_2}}{X_1^{k_2}X_2^{k_2}},\ldots,q_\alpha = \frac{X_{l_\alpha}}{X_1^{k_\alpha}X_2^{k_\alpha}}$. Consideremos agora $i > k_1,\ldots,k_\alpha$ e ainda tal que $f,g,t_1,\ldots,t_\alpha \in D_i$. Então $t_mq_m = t_m\frac{X_{l_m}}{X_1^{k_m}X_2^{k_m}} = t_m\frac{X_{l_m}}{X_1^iX_2^i}X_1^{i-k_m}X_2^{i-k_m}$, onde $\frac{X_{l_m}}{X_1^iX_2^i} \in \left(\frac{X_3}{X_1^iX_2^i},\ldots,\frac{X_j}{X_1^iX_2^i}\right)D_i$ e $t_mX_1^{i-k_m}X_2^{i-k_m} \in D_i$. Portanto $t_mq_m \in \left(\frac{X_3}{X_1^iX_2^i},\ldots,\frac{X_j}{X_1^iX_2^i}\right)D_i$ então $f \bullet g \in \left(\frac{X_3}{X_1^iX_2^i},\ldots,\frac{X_j}{X_1^iX_2^i}\right)D_i$ que é um ideal primo em D_i e, como $f,g \in D_i$ então temos que $f \in \left(\frac{X_3}{X_1^iX_2^i},\ldots,\frac{X_j}{X_1^iX_2^i}\right)D_i$ ou $g \in \left(\frac{X_3}{X_1^iX_2^i},\ldots,\frac{X_j}{X_1^iX_2^i}\right)D_i$. Portanto f ou $g \in Q_j = \left(\frac{X_3}{X_1^iX_2^i},\ldots,\frac{X_j}{X_1^iX_2^i}\right)_{i\geq 1}\widetilde{T}$ e então Q_j é um ideal primo de $\widetilde{T}$.

Além disto $\frac{X_t}{X_1^iX_2^i} \in Q_t \setminus Q_{t-1}$, pois, caso contrário existiria, como no parágrafo anterior, um $i \geq 1$ tal que $\frac{X_t}{X_1^iX_2^i} \in \left(\frac{X_3}{X_1^iX_2^i},\ldots,\frac{X_{t-1}}{X_1^iX_2^i}\right)D_i$ e portanto teríamos que $\left(\frac{X_3}{X_1^iX_2^i},\ldots,\frac{X_{t-1}}{X_1^iX_2^i}\right)D_i = \left(\frac{X_3}{X_1^iX_2^i},\ldots,\frac{X_t}{X_1^iX_2^i}\right)D_i$, o que seria um absurdo pois $\frac{X_3}{X_1^iX_2^i},\ldots,\frac{X_t}{X_1^iX_2^i}$ são algebricamente independentes sobre $\widetilde{L}$ e $D_i = \widetilde{L}\left[X_1,X_2,\frac{X_3}{X_1^iX_2^i},\ldots,\frac{X_d}{X_1^iX_2^i}\right]$. Logo $0 \subsetneq Q_3 \subsetneq Q_4 \subsetneq \ldots \subsetneq Q_{d-1} \subsetneq Q_d$ e assim $alt(Q_d) = d-2$.

Para mostrar que $alt(\widetilde{P}) = d$, vamos observar o seguinte: $Q_d \subsetneq (Q_d,X_1)\widetilde{T} \subsetneq \widetilde{P}$. Vamos mostrar que (Q_d,X_1) é um ideal primo de $\widetilde{T}$ e, ainda que $Q_d \subsetneq (Q_d,X_1)\widetilde{T}$ e $(Q_d,X_1)\widetilde{T} \subsetneq \widetilde{P}$, de onde decorrerá $alt(\widetilde{P}) = d$

Afirmamos que (Q_d,X_1) é um ideal primo de $\widetilde{T}$. Dados $f,g \in \widetilde{T}$ tais que $f \bullet g \in (Q_d,X_1)\widetilde{T}$ então existem $t_0,t_1,\ldots,t_\beta \in \widetilde{T}$ e $q_1,\ldots,q_\beta \in \left\{\frac{X_l}{X_1^kX_2^k} / \, 3 \leq l \leq d \text{ e } k \geq 1\right\}$ tais que $f \bullet g = t_0X_1 + t_1q_1 + \ldots + t_\beta q_\beta$, onde $q_l = \frac{X_{l_j}}{X_1^{s_j}X_2^{s_j}}$, com $j \in \{1,\ldots,\beta\}$. Escolhemos $i > s_1,\ldots,s_\beta$ e tal que $f,g,t_0,\ldots,t_\beta \in D_i$. Assim teremos que $t_0X_1 \in (X_1)D_i \subseteq \left(X_1,\frac{X_3}{X_1^iX_2^i},\ldots,\frac{X_d}{X_1^iX_2^i}\right)D_i$. Temos ainda que

$t_l q_l = t_l \frac{X_{t_l}}{X_1^{s_l} X_2^{s_l}} = \frac{X_{t_l}}{X_1^i X_2^i} t_l X_1^{i-s_l} X_2^{i-s_l} \in \left(\frac{X_{t_l}}{X_1^i X_2^i} \right) D_i \subseteq \left(X_1, \frac{X_3}{X_1^i X_2^i}, ..., \frac{X_d}{X_1^i X_2^i} \right) D_i$, pois, $t_l X_1^{i-s_l} X_2^{i-s_l} \in D_i$. Portanto $f \bullet g \in \left(X_1, \frac{X_3}{X_1^i X_2^i}, ..., \frac{X_d}{X_1^i X_2^i} \right) D_i$ que é um ideal primo de D_i, então temos que f ou $g \in \left(X_1, \frac{X_3}{X_1^i X_2^i}, ..., \frac{X_d}{X_1^i X_2^i} \right) D_i$. Logo f ou $g \in \left(X_1, \frac{X_3}{X_1^l X_2^l}, ..., \frac{X_d}{X_1^l X_2^l} \right)_{l \geq 1}$ em $\widetilde{T}$, então (Q_d, X_1) é um ideal primo de $\widetilde{T}$.

Vamos mostrar agora que $Q_d \subsetneq (Q_d, X_1)\widetilde{T}$, pois, $X_1 \notin Q_d$. Suponhamos por absurdo que $X_1 \in Q_d = \left(\frac{X_3}{X_1^s X_2^s}, ..., \frac{X_d}{X_1^s X_2^s} \right)_{i \geq 1} \widetilde{T}$, então podemos escrever $X_1 = t_1 q_1 + ... + t_\alpha q_\alpha$ e, assim, repetindo o argumento anterior, existiria $i \geq 1$ tal que $X_1 \in \left(\frac{X_3}{X_1^i X_2^i}, ..., \frac{X_d}{X_1^i X_2^i} \right) D_i$, o que seria um absurdo. De maneira análoga mostra-se que $X_2 \notin (Q_d, X_1)\widetilde{T}$. Portanto temos que $Q_d \subsetneq (Q_d, X_1)\widetilde{T} \subsetneq (Q_d, X_1, X_2)\widetilde{T} = \widetilde{P}$. Como $alt(Q_d) = d - 2$, então $alt(\widetilde{P}) \geq d$. Logo $alt(\widetilde{P}) = d$.

Assim temos que, se d é finito, então existe um domínio T de dimensão d que possui um ideal maximal P tal que $alt(P) = d$, onde P é ideal não finitamente gerado mas P^2 é ideal 3-gerado. O ideal $I \subseteq P$ finitamente gerado, que os Lemas 1.1 e 1.2 garantem existir, neste exemplo, é dado pelo ideal gerado por X_1, X_2.

Se $d = \infty$, consideramos $T := K\left[X_n, \frac{X_1 X_i}{X_2^m}, \frac{X_2 X_i}{X_1^m} \right]_{n \geq 1, m \geq 1, i \geq 3}$, onde, como antes K é um corpo e $X_1, X_2, X_3, ...$ são algebricamente independentes sobre K.

É claro que T é um domínio. Para ver que $\dim T = \infty$, basta observarmos que $K[X_1, X_2][X_3, X_4, ...] \subseteq T \subseteq U := K(X_1, X_2)[X_3, X_4, ...]$ e que $(X_3)U \subsetneq (X_3, X_4)U \subsetneq (X_3, X_4, X_5)U \subsetneq ...$ é uma cadeia de ideais primos de U, de comprimento infinito. Observamos também que esta cadeia é tal que $(X_3, ... X_i)U \cap T \subsetneq (X_3, ..., X_i, X_{i+1})U \cap T$, pois, $X_{i+1} \notin (X_3, ..., X_i)K[X_1, X_2][X_3, X_4, ...] = (X_3, ..., X_i)U \cap K[X_1, X_2][X_3, ...] = ((X_3, ..., X_i)U \cap$
Seja M o ideal de T gerado por $\left\{ X_n, \frac{X_1 X_i}{X_2^m}, \frac{X_2 X_i}{X_1^m} \right\}_{m \geq 1, n \geq 1, i \geq 3}$. Mostra-se que $M^2 = (X_1^2, X_2^2, X_1 X_2)$ do mesmo modo que foi feito para o caso de dimensão finita. Os elementos de T são somas finitas de parcelas do tipo $k X_1^{i_1} ... X_r^{i_r} \left(\frac{X_1 X_3}{X_2^{m_3}} \right)^{k_3} ... \left(\frac{X_1 X_r}{X_2^{m_r}} \right)^{k_r} \left(\frac{X_2 X_3}{X_1^{p_3}} \right)^{v_3} ... \left(\frac{X_2 X_r}{X_1^{p_r}} \right)^{v_r}$, onde $k \in K$, $r \in \mathbb{N}$, $i_1, ..., i_r, k_3, ..., k_r, v_3, ..., v_r \in \mathbb{N}$ e $m_3, ..., m_r, p_3, ..., p_r \in \mathbb{N}^*$. Podemos então reescrever os elementos de T como somas finitas de parce- las do tipo $k X_1^{z_1} X_2^{z_2} X_3^{n_3} ... X_r^{n_r}$, onde $r \in \mathbb{N}$, $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ e $n_3, ..., n_r \in \mathbb{N}$ são tais que:

1) Se ($z_1 < 0$ e $z_2 \leq 0$) ou ($z_1 \leq 0$ e $z_2 < 0$) então $\sum_{i=1}^{r} n_i \geq 2$.

2) Se ($z_1 < 0$ e $z_2 > 0$) ou ($z_1 > 0$ e $z_2 < 0$) então $\sum_{i=1}^{r} n_i \geq 1$.

Desta maneira $T = K[X, \overline{S}]$ onde $\overline{S}$ é o submonóide de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times (\oplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{N}_i)$ cujos elementos satisfazem as condições 1 e 2. O ideal M é igual ao ideal $\langle \{ X^s / s \in \overline{S} \setminus \{0\} \} \rangle$, portanto é ideal maximal. Além disto M será ideal finitamente gerado de $K[X, \overline{S}]$ se e só se $S = \overline{S} \setminus \{0\}$ for finitamente gerado como ideal de S. Se S fosse ideal finitamente gerado de S então $S \setminus 2S$ seria um conjunto finito o que não ocorre neste caso, pois é fácil ver que $e_3 := (0, 0, 1, 0, 0, ...)$, $e_4 := (0, 0, 0, 1, 0, ...), ..., e_i := (0, 0, ..., 0, 1, 0, ...) \in S \setminus 2S$ se $i \geq 3$. Temos assim que se $T = K[X, \overline{S}]$ é um domínio de dimensão infinita, M é um ideal maximal de T que não é ideal finitamente gerado e M^2 é um ideal 3-gerado. É fácil ver também que se S é cancelativo este exemplo mostra que no Teorema 2.5 não podemos retirar a hipótese $\bigcap_{i=1}^{\infty} iS = \emptyset$. Observe que $(1, 1, 1, 1, 0, 0, ...) = (-(i-2), 1, 1, 1, 0, 0, ...) + (i-1)(1, 0, 0, ...) \in iS$, qualquer que seja $i \geq 2$, logo $\bigcap_{i=1}^{\infty} iS \neq \emptyset$.

Observação 3.3: Para obter um exemplo de um domínio quasilocal (R, M) que possui as mesmas propriedades do Exemplo 3.2 basta considerar $R = T_P$ e $M = PT_P$, onde T e P são definidos no Exemplo 3.2. É claro que $\dim R = alt(P) = d$ e que $M^2 = P^2 T_P = (X_1^2, X_2^2, X_1X_2)R$. Precisamos apenas mostrar que M não é um ideal finitamente gerado de R. Se M fosse um ideal finitamente gerado de R, existiria um natural n tal que $X_{n+1} \in (X_1, ..., X_n)R$. Como $R = T_P$, existiria $s \in T \setminus P$ tal que $sX_{n+1} \in (X_1, ..., X_n)T$. Sendo $s \in T$, podemos escrever $s = l + m$ onde $l \in L \setminus \{0\}$ e $m \in P$. Teríamos assim que $lX_{n+1} + mX_{n+1} = sX_{n+1} \in (X_1, ..., X_n)T$. Como $mX_{n+1} \in P^2 = (X_1^2, X_2^2, X_1X_2)T \subseteq (X_1, X_2, ..., X_n)T$, obteríamos $lX_{n+1} \in (X_1, X_2, ..., X_n)T$. Como $l \in L \setminus \{0\}$, L é corpo e $L \subseteq T$, teríamos que l é um invertível em T. Logo $X_{n+1} \in (X_1, X_2, ..., X_n)T$, que já mostramos não ser possível. Portanto M não é um ideal finitamente gerado de R.

Apêndice

Faremos agora uma relação dos resultados mencionados no decorrer deste trabalho, cujas demonstrações podem ser devidamente encontradas nas referências bibliográficas.

$\left[\text{K-Teorema 8}\right]$ - *Teorema de Cohen*: ”*Se todo ideal primo de um anel R é finitamente gerado, então R é Noetheriano*.”

$\left[\text{K-Teorema 44}\right]$ ”*Sejam $R \subset T$ anéis tais que T é inteiro sobre R. Então o par R, T satisfaz INC* (*incomparabilidade*), *GU* (*Going up*) *e também LO* (*lying over*).”

$\left[\text{K-Teorema 58}\right]$ ”*Qualquer ideal invertível é finitamente gerado*.”

$\left[\text{K-Teorema 77}\right]$ ”*Sejam R um domínio Noetheriano, I um ideal de R tal que $I \neq R$, e A um R-módulo finitamente gerado livre de torção. Então $\bigcap I^n A = 0$*.”

$\left[\text{K-Teorema 84}\right]$ ”*Sejam A um R-módulo não nulo, I o anulador de A, e P um ideal primo de R tal que P é primo mínimo de I. Então $P \subset \mathcal{Z}(A)$*.”

$\left[\text{K-Teorema 96}\right]$ ”*Para um domínio R as seguintes condições são equivalentes*:

i) *Todo ideal não nulo de R é invertível*;

ii) *R é Noetheriano, inteiramente fechado, e de dimensão* ≤ 1;

iii) *R é Noetheriano, e para cada ideal maximal M, R_M é um domínio de valorização discreta*.”

[A-M-5.1] ”*As seguintes condições são equivalentes para um anel R e para A um subanel de R*:

i) *$x \in R$ é inteiro sobre A*;

ii) *$A[x]$ é um A-módulo finitamente gerado*;

iii) *$A[x]$ está contido em um subanel C de R tal que C é um A-módulo finitamente gerado*;

iv) *Existe um $A[x]$-módulo fiel M que é finitamente gerado como um A-módulo*.”

[A-M-5.11] - *Teorema do Going-up*: ”*Sejam $A \subseteq R$ anéis, R inteiro sobre A; sejam $P_1 \subseteq ... \subseteq P_n$ um a cadeia de deais primos de A e $Q_1 \subseteq ... \subseteq Q_m$ $(m < n)$ uma cadeia de ideais primos de R tais que $Q_i \cap A = P_i$ $(1 \leq i \leq m)$. Então a cadeia $Q_1 \subseteq ... \subseteq Q_m$ pode ser estendida à cadeia $Q_1 \subseteq ... \subseteq Q_n$ tal que $Q_1 \cap A = P_i$, para $1 \leq i \leq n$*.”

[A-M-6.3] ”*Seja $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ uma seqüência exata de A-módulos. Então*:

i) *M é Noetheriano $\Leftrightarrow$ M' e M'' são Noetherianos*;

ii) *M é Artiniano $\Leftrightarrow$ M' e M'' são Artinianos*.”

[A-M-6.5] ”*Seja R um anel Noetheriano* (*respectivamente Artiniano*), *M um R-módulo finitamente gerado. Então M é Noetheriano* (*respectivamente Artinia- no*).”

[A-M-6.6] ”*Seja R um anel Noetheriano* (*respectivamente Artiniano*), *$\mathfrak{A}$ um ideal de R*.

Então $\frac{R}{\mathfrak{A}}$ *é um anel Noetheriano* (*respectivamente Artiniano*).”

[A-M-7.14] ”*Em um anel Noetheriano R, todo ideal* $\mathfrak{A}$ *contém uma potência de seu radical*.”

[N-3.16] ”*Se um anel R possui ideais* $B_1, B_2, ..., B_n$ *tais que* $\bigcap_{i=1}^{n} B_i = 0$ *e, para cada* $i \in \{1, ..., n\}$, $\frac{R}{B_i}$ *é anel Noetheriano, então R é anel Noetheriano*.”

[G-15.7] ”*Seja G um grupo abeliano, as seguintes condições são equivalentes*:

i) *G é livre de torção*,

ii) *G é um grupo totalmente ordenado*,

iii) *G é um grupo reticulado*.”

Bibliografia

[G_1] R. Gilmer, *On factorization into prime ideals*, Commentarii Math. Helvetici 47 (1972), 70 - 74.

[G_2] R.Gilmer, *Multiplicative Ideal Theory*, Marce I Dekker, Inc., New York, 1972.

[G-H-R] R. Gilmer, W. Heinzer e M. Roitman, *Finite Generation of Power of Ideals*, Proceedings of the American Math. Society 127-11 (1999) 3141 - 3151.

[H-L-S] W. Heinzer, D. Lantz e K. Shah, *The Ratliff-Rush ideals in Noetherian Rings*, Comm. in Algebra 20 (1992), 591 - 622.

[A-M] M. F. Atiyah, Frs. e I. G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

[N] M. Nagata, *Local Rings*, Interscience Publishers, New York, 1962.

[K] I. Kaplansky, *Commutative Rings*, Revised Edition, The University of Chicago Press, 1974.