UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

UMA PROPOSTA DE ENSINO DE TRIGONOMETRIA UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA

FELIPE BORGES DE OLIVEIRA

Porto Alegre
2018

FELIPE BORGES DE OLIVEIRA

UMA PROPOSTA DE ENSINO DE TRIGONOMETRIA UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado junto ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Márcia Rodrigues Notare

Porto Alegre
2018

Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Pura e Aplicada

Uma Proposta de Ensino de Trigonometria Utilizando o Software GeoGebra

Felipe Borges de Oliveira

Banca examinadora:

Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso
UFRGS

Profª. Drª. Débora da Silva Soares
UFRGS

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a todos que foram importantes durante esta caminhada na graduação e na realização do Trabalho de Conclusão de Curso. Sem a ajuda dos meus familiares, amigos e professores, nada disso seria possível.

Primeiramente, agradeço a minha mãe, Vera, que apoiou desde o começo a minha escolha de ser professor de Matemática. Sempre esteve presente, me dando força com palavras de incentivo e tentando me tranquilizar a cada incerteza que tive.

Por todo companheirismo, dedicação e carinho, agradeço à Ariel. Obrigado por todas as noites em claro, todos os finais de semana, enfim, todo o tempo que se disponibilizou a me ajudar e me alegrar. Obrigado por me acompanhar durante esta jornada, dividindo momentos de alegria e de dificuldade. Não sei o que eu faria sem ti. Fique sempre ao meu lado.

Aos meus colegas de curso Filipe, Leonardo, Mateus, Maurício, Victor, e muitos outros, que tive o prazer de conhecer durante a faculdade, também deixo meu agradecimento. Nossos grupos de estudos, reuniões e, principalmente, amizade, contribuíram para este momento.

Agradeço à professora Márcia por ter aceitado ser a orientadora deste trabalho, por toda disposição e paciência comigo ao longo deste semestre. Também agradeço aos outros professores com quem aprendi durante a graduação; em especial, aos professores Débora e Marcus por avaliarem este trabalho e contribuírem para a sua melhora e à professora Renata, do Departamento de Fisiologia, minha orientadora de bolsa durante quase toda a graduação.

Por fim, deixo meu agradecimento ao Colégio Protásio Alves. Obrigado professoras Cleonice e Jociane por abrirem as portas da escola para minha pesquisa. Também agradeço aos alunos da turma 210 por participarem das atividades desenvolvidas durante o período que estive na instituição.

RESUMO

O objetivo deste Trabalho de Conclusão de Curso é apresentar uma sequência de atividades para o ensino de trigonometria utilizando o software GeoGebra. A motivação para o surgimento deste tema foi uma tentativa de trabalhar Matemática, em especial trigonometria, de uma perspectiva diferente, buscando despertar o interesse dos alunos sobre o assunto ao trocar o estático do quadro pelo dinamismo do software. Essa proposta foi criada relacionando as Tecnologias da Informação e Comunicação com as diferentes representações semióticas de objetos matemáticos. Para observar como ocorre a aprendizagem nesta abordagem, foi desenvolvida uma sequência de atividades com uma turma de segundo ano do Ensino Médio em uma escola estadual pública. A pesquisa mostrou que trabalhar Trigonometria com o software GeoGebra pode contribuir com a aprendizagem e que a proposta pode ser utilizada como introdução ou complemento ao conteúdo.

Palavras-chave: Trigonometria. GeoGebra. Representação semiótica.

ABSTRACT

The aim of this study is to present activities for the teaching of trigonometry using software GeoGebra. The motivation for the emergence of this theme was an attempt to work mathematics, in particular trigonometry, from a different perspective, seeking to arouse students' interest in the subject by changing the static of the blackboard by the dynamism of the software. This proposal was created relating the Information and Communication Technologies with the different semiotic representations of mathematical objects. To observe how learning occurs in this approach, activities were developed with a second year high school class in a public state school. The research showed that working with Trigonometry with GeoGebra software can contribute to learning and that the proposal can be used as an introduction or complement to the content.

Keywords: Trigonometry. GeoGebra. Semiotic representations.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 Introdução

No período em que frequentei a escola, de 1998 até 2010, com exceção dos professores de História e Geografia, que levavam a turma para assistir filmes na sala de vídeo, e dos professores de Química e Física, que às vezes ministravam aulas práticas nos laboratórios, os demais professores não tinham incorporado em suas práticas a utilização de recursos tecnológicos. Como futuro docente, quero trazer diferentes propostas para a sala de aula, que possam ajudar na aprendizagem da Matemática, na construção e compreensão de seus conceitos, além de tentar despertar mais interesse dos alunos pela Matemática.

Desde o primeiro semestre de Licenciatura em Matemática, tive a certeza que meu Trabalho de Conclusão de Curso seria relacionado ao uso de computadores em sala de aula para aprendizagem de Matemática. Na sétima etapa da graduação, cursei a disciplina Educação Matemática e Tecnologia, na qual tive que fazer, como trabalho final, um artigo sobre o uso de recursos computacionais no ensino básico; escrevendo o artigo, descobri o tema que procurava.

A pesquisa deste Trabalho de Conclusão de Curso aborda trigonometria, mais especificamente, círculo trigonométrico, funções trigonométricas no plano cartesiano e suas alterações gráficas. A pesquisa foi realizada em uma turma de segundo ano do Ensino Médio no Colégio Protásio Alves, escola pública de Porto Alegre.

Uma sequência de atividades, utilizando o software de Matemática dinâmica GeoGebra, foi desenvolvida com os alunos no laboratório de informática da instituição durante duas semanas, analisando-se os aspectos desse recurso e seu potencial para a aprendizagem de trigonometria. A pergunta norteadora da pesquisa é: Como ocorre a aprendizagem de trigonometria com o software GeoGebra?

Os capítulos a seguir trazem os referenciais teóricos que fundamentam esta monografia, os procedimentos metodológicos que englobam a metodologia de pesquisa utilizada, a apresentação das atividades propostas, a discussão e análise dos dados e as considerações finais sobre o trabalho. O capítulo dos referenciais teóricos e documentos oficiais é o primeiro a ser desenvolvido.

2 Referenciais teóricos e documentos oficiais

Este capítulo discute as bases teóricas que sustentam a pesquisa realizada. Abordamos nas seguintes seções: os Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino de trigonometria; os registros de representações semióticas na Matemática; a tecnologia no ensino de Matemática; a história do software GeoGebra, seus recursos e potencialidades; o ensino de trigonometria em dois livros didáticos oferecidos à rede de escolas públicas do Estado do Rio Grande do Sul.

2.1 Trigonometria e Tecnologia no PCNEM

Segundo o site do Ministério da Educação, o documento Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio é:

> O resultado de meses de trabalho e de discussão realizados por especialistas e educadores de todo o país. Foram feitos para auxiliar as equipes escolares na execução de seus trabalhos. Servirão de estímulo e apoio à reflexão sobre a prática diária, ao planejamento de aulas e sobretudo ao desenvolvimento do currículo da escola, contribuindo ainda para a atualização profissional. (BRASIL, 2018)

A primeira citação sobre trigonometria no documento Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) evidencia a importância das funções trigonométricas e seus gráficos. Em um momento anterior, o PCNEM critica o ensino isolado de funções. Conforme o texto, esse isolamento não permite a exploração do caráter integrador entre teoria e prática que possui.

Outro documento fornecido no Portal do MEC, chamado de Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) afirma que se deve evitar o excesso de cálculos algébricos de identidade e equações, dando prioridade para o estudo de funções trigonométricas e análise de gráficos. Mais uma vez é destacada a importância da aplicação desse conteúdo; por exemplo, em problemas de medições e modelagem de fenômenos periódicos.

Os parâmetros curriculares também falam sobre tecnologia. O PCNEM (2018, p.48) diz que: “[...] tecnologia é integrante efetiva dos conteúdos educacionais, lado a lado com as ciências”, enfatizando que a tecnologia deve ser trabalhada em conjunto com as disciplinas e não como um assunto individual. Sobre a utilização de tecnologia no ensino, o PCN+ (2018, p. 139) defende que:

> Se quisermos que a escola média seja também um ambiente culturalmente rico, é preciso, evidentemente, equipá-la com livros e recursos audiovisuais, com a assinatura de jornais e revistas, com laboratórios, com meios para desenvolver atividades artísticas e desportivas. A vivência e o aprendizado do professor serão, em grande parte, decorrentes do que forem a produção e o intercâmbio cultural na escola e no interior das redes escolares. Não é possível também, em pleno século 21, abrir mão dos recursos oferecidos pela tecnologia da informação e da comunicação e da capacitação dos professores para a utilização plena desses recursos. [...] é inadiável nosso esforço em mudar atitudes refratárias a seu uso, uma vez que estão amplamente disseminados na vida social em geral.

Pelas orientações do Ministério da Educação e observações no comportamento da sociedade atualmente, conclui-se que é importante trazer a tecnologia para o ensino nas escolas. Computadores, celulares, tabletes, entre outros, são exemplos de recursos tecnológicos que fazem parte do cotidiano da maioria dos estudantes. Cabe aos professores se adaptarem a essa nova realidade, aproveitando seus benefícios. Pensando nisso, a proposta deste trabalho é utilizar recursos computacionais para o ensino de trigonometria.

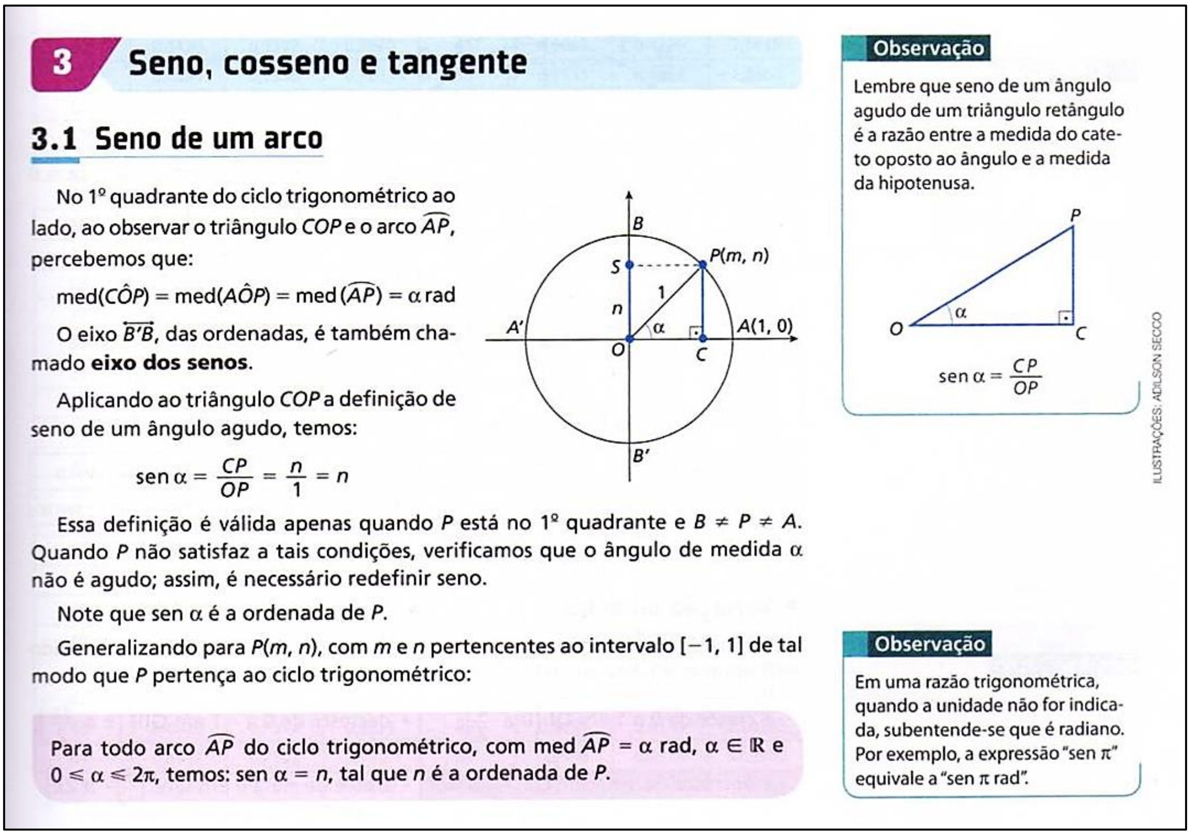
2.2 Análise de livros didáticos

Para investigar como a trigonometria é usualmente trabalhada no ensino médio, entendemos que analisar alguns livros didáticos pode dar indícios de sua abordagem nas salas de aula. Selecionamos dois livros didáticos do ensino médio: Conexões com a Matemática volume 2 (LEONARDO, 2013) e Quadrante Matemática – 2º ano (CHAVANTE e PRESTES, 2016). Essa seleção foi feita por serem livros oferecidos pelo governo para a utilização no ensino público, inclusive ambos já foram escolhidos pelo Colégio Protásio Alves, escola na qual foi realizado o experimento prático dessa pesquisa, como material de trabalho.

O primeiro livro analisado foi Conexões com a Matemática volume 2, livro manual do professor para o Ensino Médio, que traz em seu primeiro capítulo o assunto círculo trigonométrico, continuação do conteúdo de seu volume anterior, que termina abordando trigonometria no triângulo retângulo. Inicialmente, são apresentadas as definições de circunferência trigonométrica, arcos e quadrantes no plano cartesiano, com alguns exemplos, tabelas e ilustrações. Em seguida, o livro mostra três tipos de simetria existentes entre arcos no ciclo trigonométrico. Após essa introdução, o livro apresenta alguns exercícios para que os alunos trabalhem o que foi aprendido, como, por exemplo, determinar arcos simétricos em relação a um arco fornecido pelo texto, ou obter a sua medida.

Os próximos tópicos do capítulo são sobre seno, cosseno e tangente de arcos. A partir das razões trigonométricas no triângulo retângulo e aplicando no círculo trigonométrico, o valor do seno de um ângulo é definido como a medida da ordenada do ponto localizado na extremidade do arco correspondente, que não é a sua origem, como mostra a Figura 1. Utilizando o que foi trabalhado de simetria no tópico anterior, também é explicado que alguns ângulos possuem o mesmo valor de seno (Figura 2). Ainda, o livro fala sobre crescimento e decrescimento de valores de seno, entre -1 e 1, conforme o quadrante do ângulo. Analogamente, o livro define cosseno como a abscissa do mesmo ponto.

Figura 1: definição de seno no círculo trigonométrico



3 Seno, cosseno e tangente

3.1 Seno de um arco

No 1º quadrante do ciclo trigonométrico ao lado, ao observar o triângulo COP e o arco $\widehat{AP}$, percebemos que:

$\text{med}(C\hat{O}P) = \text{med}(A\hat{O}P) = \text{med}(\widehat{AP}) = \alpha$ rad

O eixo $\overleftrightarrow{B'B}$, das ordenadas, é também chamado **eixo dos senos**.

Aplicando ao triângulo COP a definição de seno de um ângulo agudo, temos:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{CP}{OP} = \frac{n}{1} = n$$

Essa definição é válida apenas quando P está no 1º quadrante e $B \neq P \neq A$. Quando P não satisfaz a tais condições, verificamos que o ângulo de medida α não é agudo; assim, é necessário redefinir seno.

Note que sen α é a ordenada de P.

Generalizando para $P(m, n)$, com m e n pertencentes ao intervalo $[-1, 1]$ de tal modo que P pertença ao ciclo trigonométrico:

Para todo arco $\widehat{AP}$ do ciclo trigonométrico, com med $\widehat{AP} = \alpha$ rad, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, temos: sen $\alpha = n$, tal que n é a ordenada de P.

Observação

Lembre que seno de um ângulo agudo de um triângulo retângulo é a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo e a medida da hipotenusa.

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{CP}{OP}$$

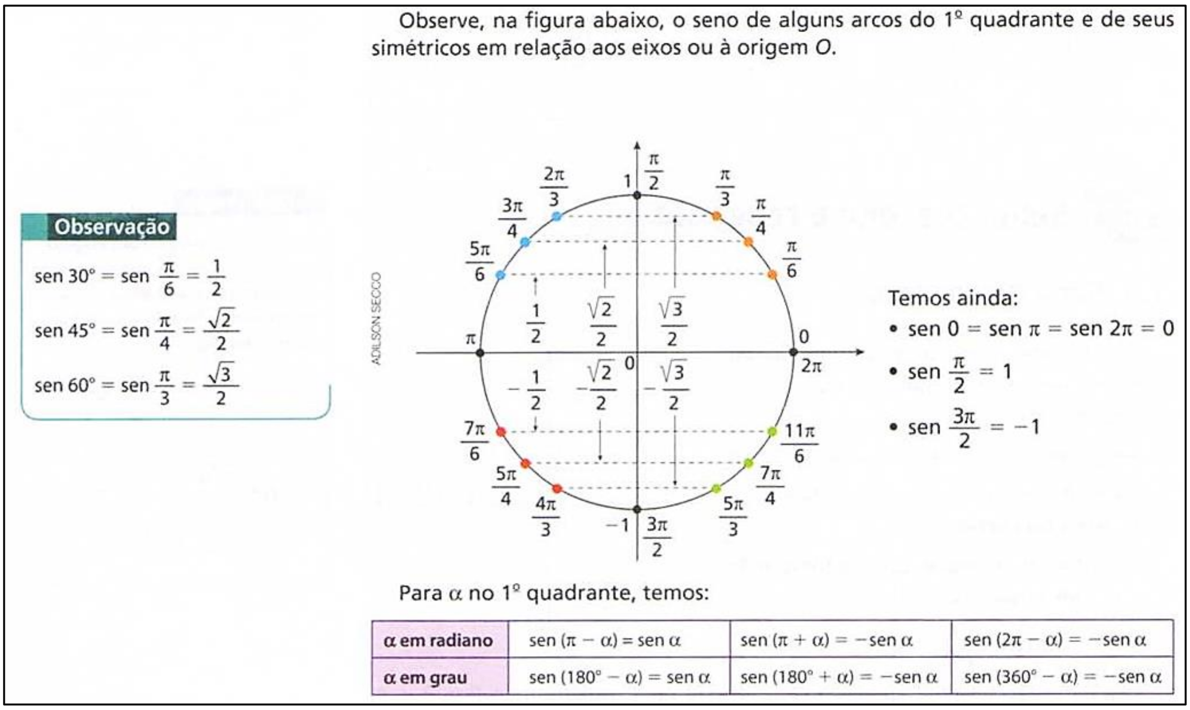
Observação

Em uma razão trigonométrica, quando a unidade não for indicada, subentende-se que é radiano. Por exemplo, a expressão "sen π" equivale a "sen π rad".

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Fonte: LEONARDO, 2013, p. 17

Figura 2: seno iguais e opostos no círculo trigonométrico



Fonte: LEONARDO, 2013, p. 18

Observa-se uma potencial e interessante via exploratória desses conteúdos: trabalhar por meio de recursos tecnológicos as questões de simetria e variação dos valores de seno e cosseno com os alunos, possibilitando dinamismo e exploração. A manipulação de objetos, que usualmente são apresentados de forma estática no livro didático, pode permitir que a aprendizagem seja enriquecida.

Além da teoria, há exercícios sobre simetria nesse início de conteúdo, alguns exigindo a consulta de uma tabela trigonométrica para resolução, com valores de seno, cosseno e tangente de ângulos do primeiro quadrante. A maioria das questões informa um ângulo e pede que o aluno determine o seno ou cosseno do ângulo simétrico ao informado.

Além de utilizar a tabela trigonométrica para trabalhar com ângulos que possuem valores comuns de seno e cosseno, também é importante visualizar essas características no círculo trigonométrico; melhor ainda se a circunferência permitir alterações nos ângulos de forma dinâmica, em que os alunos podem manipular a variação do ângulo.

A tangente é trabalhada da mesma forma que seno e cosseno. O livro ainda fala sobre relação fundamental da trigonometria, equações e inequações trigonométricas, lei dos senos, lei dos cossenos e como calcular a área de triângulo utilizando o seno de um de seus ângulos. Porém essa parte não será descrita na análise, porque esses conteúdos não fizeram parte da pesquisa deste trabalho.

O segundo capítulo do livro é sobre funções trigonométricas. A introdução diz que funções trigonométricas podem modelar problemas em diferentes áreas, como economia, acústica, astronomia ou medicina. Na teoria, antes de trabalhar as funções seno e cosseno, o material didático define arcos côngruos.

A função seno é definida como a função que associa os números reais x ao valor do seno de x. Para a construção de gráficos, o livro apresenta uma tabela relacionando ângulos notáveis e seus respectivos senos, para depois esboçar a curva no plano cartesiano, como mostra a Figura 3. Após, algumas características da função, como domínio, limitação da imagem e periodicidade, são listadas. Por fim, há exercícios sobre o assunto, como, por exemplo, esboço de gráficos e identificação de domínio, imagem, período e amplitude da função. Da mesma forma, o livro trabalha a função cosseno. Os tópicos seguintes, que abordam função tangente e funções inversas, não serão analisados, porque não fizeram parte da pesquisa deste trabalho.

Figura 3: esboço do gráfico da função seno

3.2 O gráfico da função seno

Vamos construir o gráfico da função de lei $f(x) = \text{sen } x$ com base nos dados de uma tabela de valores para x. Inicialmente, consideramos $x \in [0, 2\pi]$ (ou seja, localizado na 1ª volta), para os quais o seno já é conhecido:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
sen x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Para alguns valores de x maiores que 2π ou menores que zero, temos:

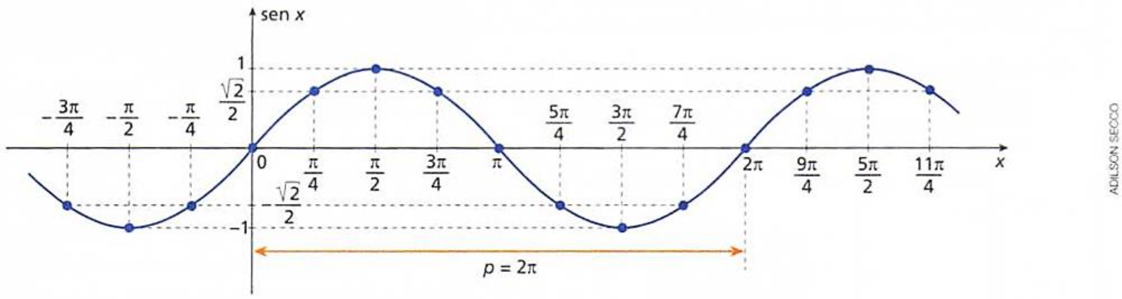
x	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{4}$
sen x	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Observação

- $\frac{9\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} + \frac{\pi}{4} =$
  $= 2\pi + \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{4}$
  Logo: $\text{sen } \frac{9\pi}{4} = \text{sen } \frac{\pi}{4}$
- $-\frac{\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$
  Logo:
  $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \text{sen } \frac{7\pi}{4}$

Observe que, para valores de x maiores que 2π ou menores que zero, o seno de x assume os valores da 1ª volta. Assim, a função seno é periódica, pois, para todo $x \in \mathbb{R}$: $\text{sen } x = \text{sen } (x + 2\pi) = \text{sen } (x + 4\pi) = ... = \text{sen } (x + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

A curva obtida no intervalo $[0, 2\pi]$ repete-se para $x > 2\pi$ e $x < 0$.



Fonte: LEONARDO, 2013, p. 47

Acrescentando a utilização de recursos tecnológicos à montagem de tabelas para a construção de gráficos, há possibilidade de enriquecer a exploração dos conceitos envolvidos e a aprendizagem dos alunos. É possível relacionar diretamente e dinamicamente a variação dos ângulos no círculo trigonométrico com o comportamento da função trigonométrica e seu esboço gráfico no plano cartesiano, podendo-se observar o comportamento da curva de forma dinâmica e simultânea com a variação dos ângulos.

Sobre as possíveis variações nos gráficos das funções trigonométricas, o livro apresenta cada uma delas separadamente. A primeira trata do deslocamento vertical, que é mostrado com um exemplo de função seno e a construção de uma tabela, para depois o gráfico ser esboçado no plano cartesiano, junto à função original para comparar as curvas, como mostra a Figura 4. Na sequência, são trabalhados deslocamento horizontal e amplitude, utilizando exemplos de função cosseno, seguindo a mesma estrutura de explicação. A mudança de período nas funções é discutida em um tópico diferente das outras três alterações gráficas, mas segue a mesma forma de explicação. Exercícios sobre comparação e esboço de gráficos são propostos ao final da teoria.

Figura 4: alterações no gráfico da função seno

7 Construção de gráficos

7.1 Alguns casos especiais

Até aqui vimos gráficos das funções trigonométricas fundamentais: seno, cosseno e tangente. Agora, veremos alguns exemplos de funções cujos gráficos são mais complexos e podem surgir em problemas reais que envolvam a Trigonometria. Trataremos cada caso em etapas distintas: inicialmente, construiremos o gráfico de uma das funções fundamentais (cor cinza) e, a partir dele, efetuando certas transformações, obteremos o gráfico pedido. Acompanhe:

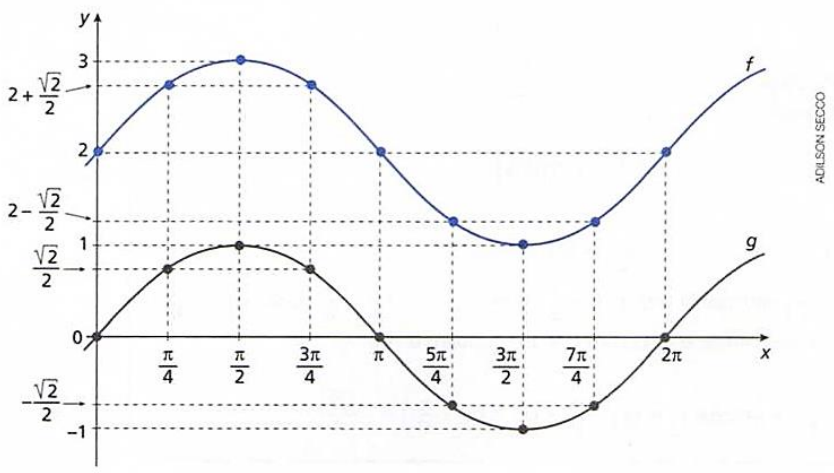
O objetivo deste tópico é possibilitar ao aluno a construção de gráficos mais complexos sem o uso de tabelas. Para isso, é fundamental o entendimento do papel que cada parâmetro desempenha na função trigonométrica em foco. Se possível, e se julgar oportuno, para que os alunos compreendam melhor esse papel, mostrar mais exemplos de cada um dos casos usando um *software* de construção de gráficos, assim como feito no exercício resolvido **R10**.

a) $f(x) = 2 + \text{sen}\, x$

Primeiro, montamos uma tabela adotando para x valores de 0 a 2π:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
sen x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
2 + sen x	2	$2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	3	$2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	2	$2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$	2

Construímos, então, os gráficos das funções dadas por $g(x) = \text{sen}\, x$ e $f(x) = 2 + \text{sen}\, x$, em um mesmo sistema de eixos, para efeito comparativo:



Fonte: LEONARDO, 2013, p. 56

O livro sugere que, se o professor achar necessário, sejam utilizados recursos tecnológicos para trabalhar a variação de parâmetros nas funções. O software GeoGebra, por exemplo, permite a criação de controles deslizantes responsáveis por alterar parâmetros na lei da função, fazendo com que o aluno possa visualizar o que ocorre com o comportamento da curva conforme as alterações realizadas na expressão algébrica.

O segundo livro analisado foi o Quadrante Matemática – 2º ano, utilizado no Colégio Protásio Alves como material de apoio para os professores. O primeiro capítulo do livro começa a trabalhar seno e cosseno a partir de um ponto P em uma circunferência de raio 1, localizada no plano cartesiano, formando um arco de A até P, em que A é um ponto de abscissa igual a 1 e ordenada igual a zero. Com um segmento da origem do plano cartesiano até o ponto P, é também formado um triângulo retângulo, como mostra a Figura 5. Utilizando as razões trigonométricas no triângulo retângulo, que não foram abordadas neste livro, e desenvolvendo os cálculos, é definido que seno e cosseno são, respectivamente, a ordenada e a abcissa do ponto P.

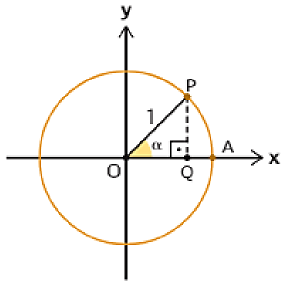
Figura 5: seno e cosseno a partir das coordenadas do ponto P

Seno e cosseno de um arco trigonométrico

No triângulo retângulo, o seno de um ângulo agudo α é a razão entre as medidas do cateto oposto a α e da hipotenusa. Por sua vez, o cosseno de um ângulo agudo α é a razão entre as medidas do cateto adjacente a α e da hipotenusa.

Considere P um ponto da circunferência trigonométrica correspondente à extremidade do arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida α.

Do triângulo retângulo OPQ, temos que:

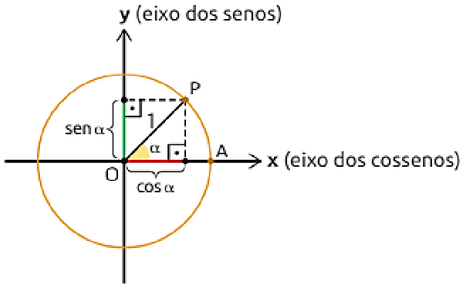


$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{PQ}{OP} = \frac{PQ}{1} = PQ$$

$$\cos\alpha = \frac{QO}{OP} = \frac{QO}{1} = QO$$

Desse modo, $\operatorname{sen}\alpha$ corresponde à ordenada do ponto P e o $\cos\alpha$ corresponde à abscissa do ponto P. Por esse motivo, o eixo das ordenadas é chamado eixo dos senos e o das abscissas é chamado eixo dos cossenos.

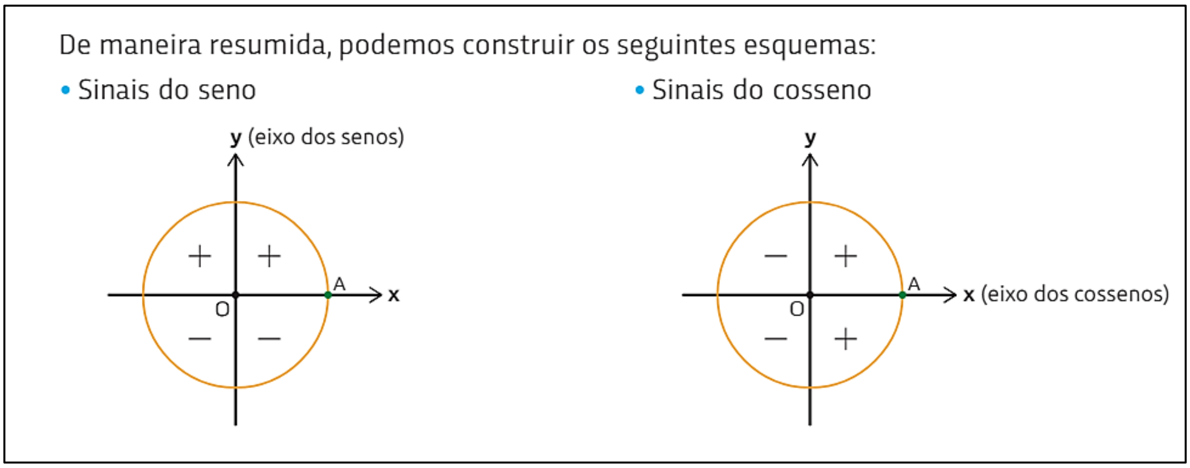
O seno e o cosseno de um arco cuja extremidade P pertence aos demais quadrantes são definidos como a ordenada e a abscissa dessa extremidade, respectivamente.



Fonte: CHAVANTE e PRESTES, 2016, p.18

O livro ainda mostra a relação entre os valores de seno e cosseno com as coordenadas do ponto P nos outros três quadrantes do círculo trigonométrico e resume o sinal dos valores de seno e cosseno conforme o quadrante, como ilustra a Figura 6. A tangente também é definida de forma semelhante, mas não será analisada porque não é o foco deste trabalho.

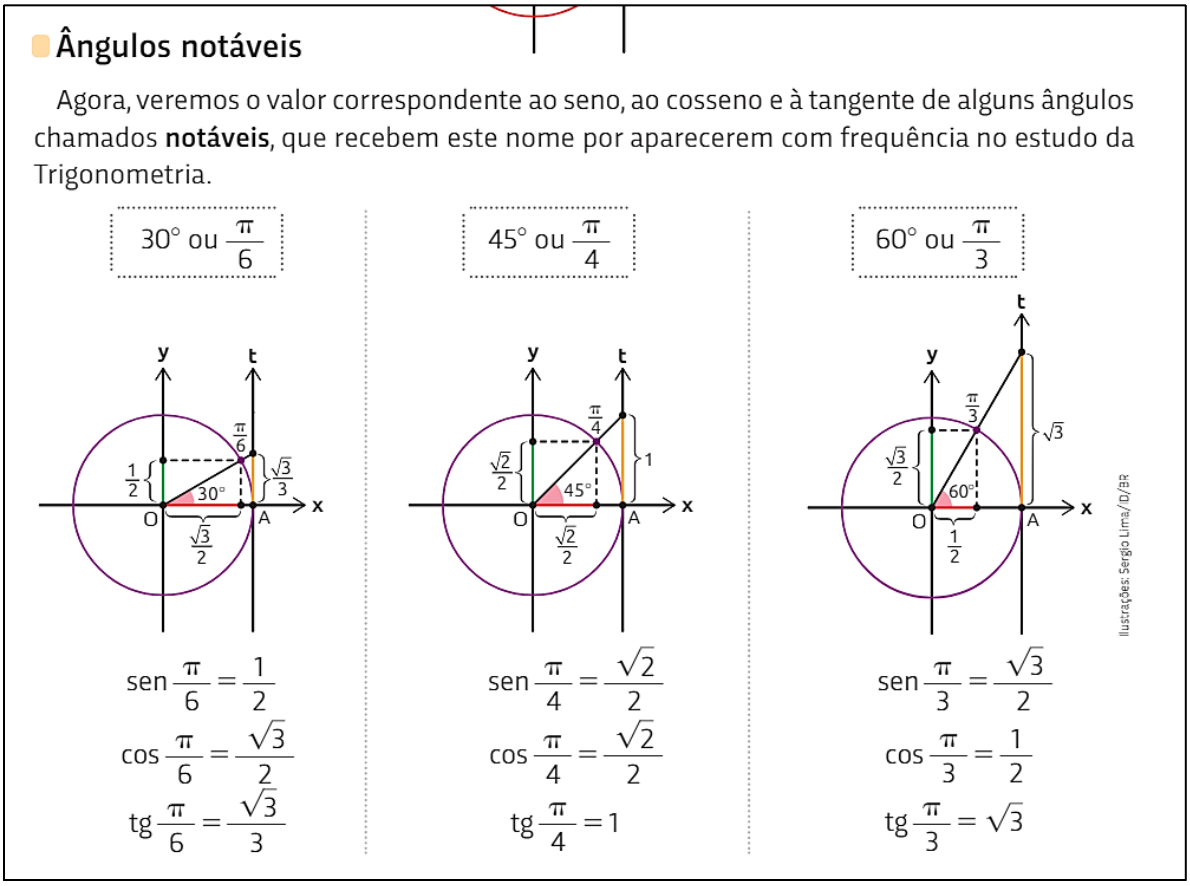
Figura 6: resumo dos sinais de seno e cosseno conforme o quadrante



Fonte: CHAVANTE e PRESTES, 2016, p.19

O Quadrante Matemática - 2º ano ilustra no círculo trigonométrico as medidas de seno, cosseno e tangente dos ângulos 30°, 45° e 60°, como mostra a Figura 7. Esses valores poderiam ser demonstrados utilizando algumas construções geométricas e o Teorema de Pitágoras, por exemplo, podendo enriquecer o ensino deste conteúdo. Os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos 0°, 90°, 180°, 270° e 360° são desenvolvidos a partir da circunferência trigonométrica e das coordenadas do ponto P, utilizando o fato do raio ser igual a 1. Por fim, é montada uma tabela com esses ângulos notáveis e seus respectivos valores trigonométricos.

Figura 7: seno, cosseno e tangente dos ângulos 30°, 45° e 60°



Ângulos notáveis

Agora, veremos o valor correspondente ao seno, ao cosseno e à tangente de alguns ângulos chamados **notáveis**, que recebem este nome por aparecerem com frequência no estudo da Trigonometria.

30° ou $\frac{\pi}{6}$

$\text{sen}\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{tg}\,\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

45° ou $\frac{\pi}{4}$

$\text{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{tg}\,\frac{\pi}{4} = 1$

60° ou $\frac{\pi}{3}$

$\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

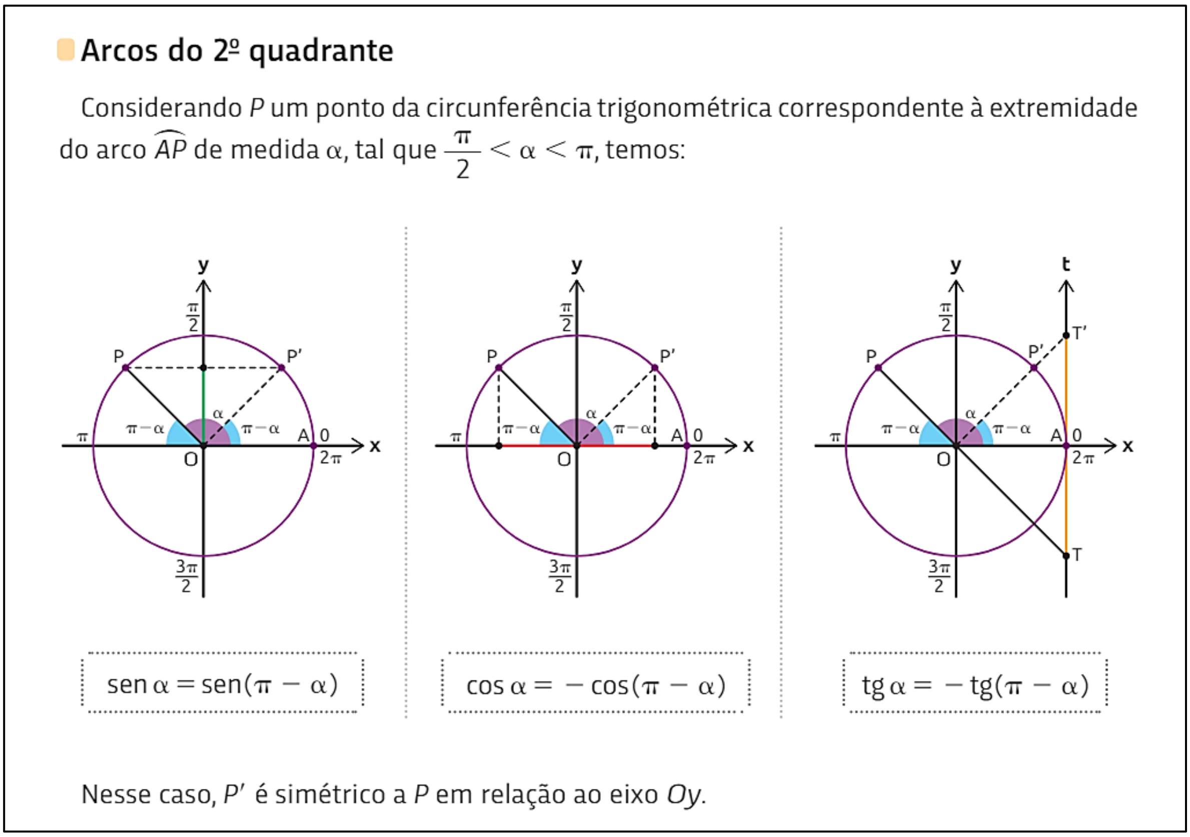
$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$\text{tg}\,\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

Fonte: CHAVANTE e PRESTES, 2016, p.20

O material didático explica que, para obter valores de seno, cosseno e tangente de ângulos maiores que 90°, mas diferentes de 180°, 270° e 360°, é preciso fazer uma redução ao 1º quadrante. A estratégia utilizada em cada um dos quadrantes e suas respectivas simetrias de ângulos analisados é ilustrada de forma separada. A Figura 8 mostra como fazer a redução do 2º ao 1º quadrante. Ao final da teoria, há exercícios sobre o que foi abordado no capítulo, como análise dos sinais de seno e cosseno de um determinado arco, resolução de expressões trigonométricas e redução ao 1º quadrante.

Figura 8: redução ao 1º quadrante a partir do 2º quadrante



Arcos do 2º quadrante

Considerando P um ponto da circunferência trigonométrica correspondente à extremidade do arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida α, tal que $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, temos:

$\text{sen}\,\alpha = \text{sen}(\pi - \alpha)$

$\cos\alpha = -\cos(\pi - \alpha)$

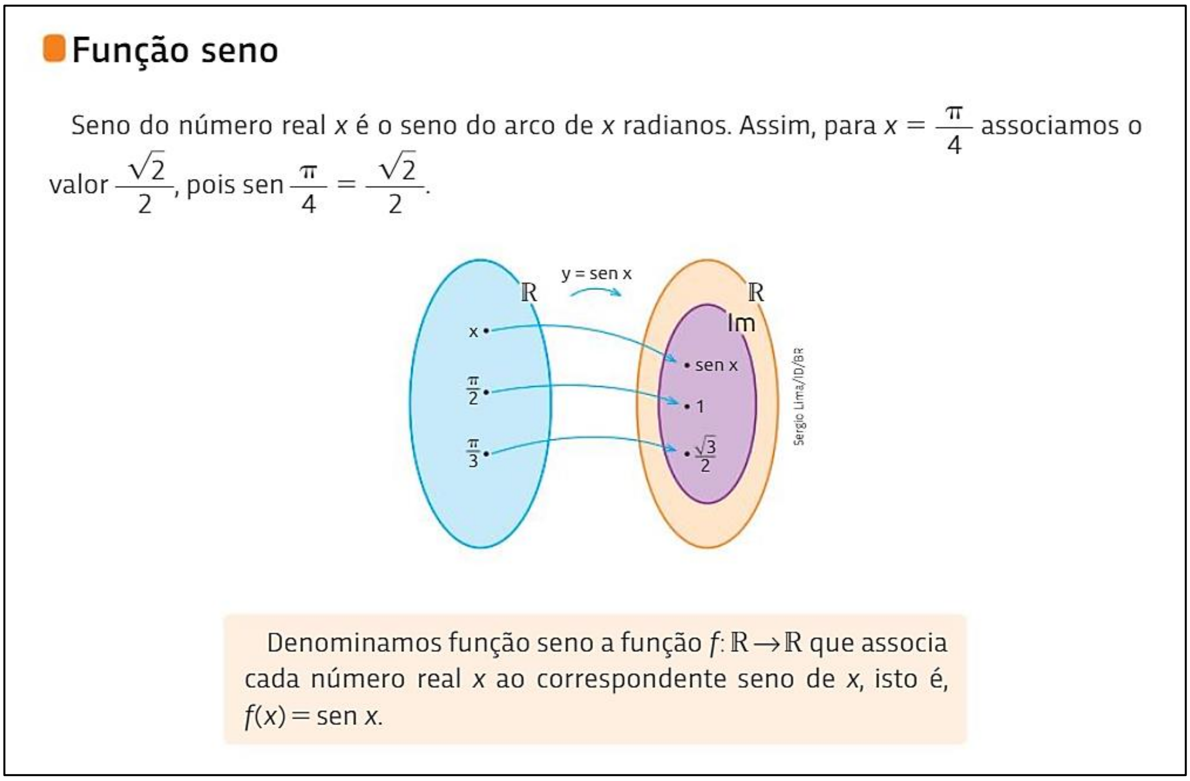
$\text{tg}\,\alpha = -\text{tg}(\pi - \alpha)$

Nesse caso, P' é simétrico a P em relação ao eixo Oy.

Fonte: CHAVANTE e PRESTES, 2016, p.22

Os próximos assuntos abordados no capítulo são as funções seno, cosseno e tangente no plano cartesiano. De acordo com o material, uma função trigonométrica é a relação entre uma variável real x e a sua medida de seno, cosseno ou tangente. Como são periódicas, podem descrever fenômenos da natureza, como o som, batimentos cardíacos, movimentos dos planetas e das marés. Utilizando a representação gráfica dos conjuntos domínio e contradomínio, a função seno é a primeira a ser definida, como mostra a Figura 9.

Figura 9: domínio, contradomínio e imagem da função seno



Função seno

Seno do número real x é o seno do arco de x radianos. Assim, para $x = \frac{\pi}{4}$ associamos o valor $\frac{\sqrt{2}}{2}$, pois sen $\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Denominamos função seno a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada número real x ao correspondente seno de x, isto é, $f(x) = \text{sen } x$.

Fonte: CHAVANTE e PRESTES, 2016, p.26

Para esboçar o gráfico, é montada uma tabela associando valores de arcos, em radianos, e seus respectivos senos, para depois marcar esses pontos no plano cartesiano e traçar a curva. Também é mostrado como o gráfico se comporta para abscissas negativas. A função cosseno é definida de forma análoga e é destacado que ambas são periódicas a cada intervalo de comprimento 2π. Novamente, ao final da teoria, aparecem alguns exercícios, dessa vez sobre intervalos crescente e decrescente, valor máximo ou mínimo, periodicidade e zeros da função.

Sobre as alterações gráficas que as funções seno e cosseno podem sofrer conforme variações na sua expressão algébrica, cada um dos parâmetros da lei da função é estudado de forma separada, mostrando o resultado na curva. Na sequência, há exercícios sobre esboço de gráfico, conjunto imagem, período e lei de formação (Figura 10). Finalizando o capítulo, o livro traz um texto para exemplificar que ondas sonoras podem ser representadas por meio de uma função trigonométrica.

Figura 10: exercícios sobre alterações gráficas das funções trigonométricas

Atividades

28. Sejam as funções $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = -3 + 5\,\text{sen}(2x)$ e $g(x) = 4\cos(3x - \pi)$. Determine:

a) $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

b) $g\left(\frac{\pi}{3}\right)$

c) $D(f)$

d) $Im(g)$

e) período de f

f) período de g

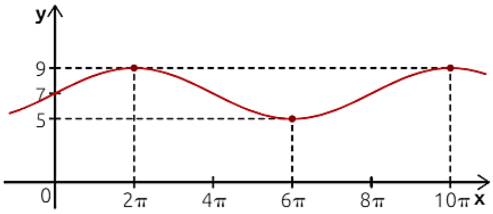
29. Identifique e relacione cada gráfico a sua respectiva lei de formação. Para isso, escreva em seu caderno a letra e o símbolo correspondentes.

a) $f(x) = -4 + 2\,\text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$

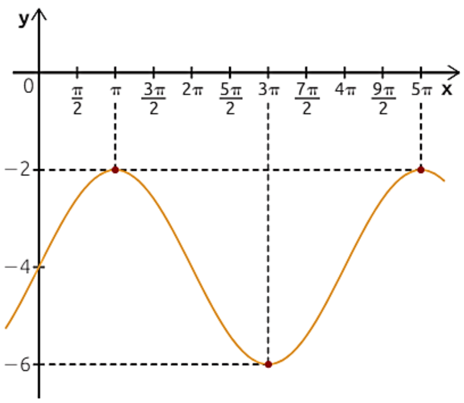
b) $g(x) = 7 - 2\,\text{sen}\left(\frac{1}{4}x - \pi\right)$

c) $h(x) = -4\,\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

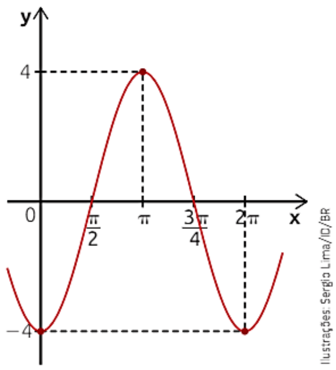
I)



II)



III)



30. Determine o período e a imagem das funções definidas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dadas suas leis de formação.

a) $q(x) = 5\,\text{sen}\left(-x + \frac{\pi}{3}\right)$

b) $r(x) = 3 - \cos\left(2\pi x - \frac{\pi}{4}\right)$

c) $s(x) = -4 + 2\,\text{sen}\left(\frac{3}{2}x + \pi\right)$

31. Esboce o gráfico de cada função definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dada sua lei de formação.

a) $q(x) = \cos(2x)$

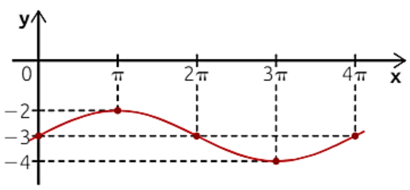
b) $r(x) = -3\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

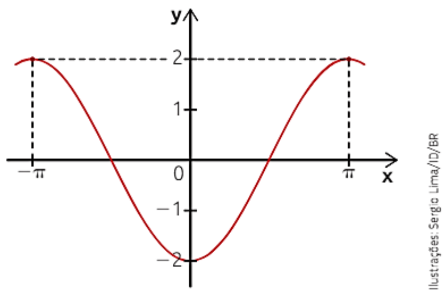
c) $s(x) = 2 - 2\,\text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$

32. Sabendo que as funções f e g a seguir estão definidas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, determine as constantes a, b, c e d, com $a, d \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ e $c \in \mathbb{R}_+^*$. Em seguida, escreva a lei de formação de cada função.

a) $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$

b) $g(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$





Fonte: CHAVANTE e PRESTES, 2016, p.34

2.3 Registros de Representações semióticas

Todos os conceitos da Matemática são abstratos. Por exemplo, não é possível observar uma reta no mundo real, com sua definição formal de não possuir começo, nem fim e conter infinitos pontos. Esse tipo de conceito pode ser de difícil compreensão para os estudantes que confundem o objeto matemático em si com sua representação limitada no mundo físico. O que se pode fazer são representações semióticas[1], que apesar de não representarem exatamente o objeto matemático, podem auxiliar na aprendizagem do conceito. Como afirma Duval (2012, p. 268):

> As diversas representações semióticas de um objeto matemático são absolutamente necessárias. De fato, os objetos matemáticos não estão diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata, como são os objetos comumente ditos “reais” ou “físicos”. É preciso, portanto, dar representantes. [...] As representações semióticas desempenham um papel fundamental na atividade matemática.

As diferentes representações semióticas de um mesmo objeto, também chamadas de registros, podem ser transformadas de duas formas: tratamento e conversão. O tratamento é a transformação dentro de um mesmo registro; a conversão é a transformação do antigo registro para um novo, conservando partes do conteúdo da representação inicial (DUVAL, 2012). Essas transformações são independentes, como exemplificado por Duval (2012, p. 272):

> Alunos podem, muito bem, efetuar a adição de dois números com sua expressão decimal e com sua expressão fracionária e podem não pensar em converter, se isto for necessário, a expressão decimal de um número em sua expressão fracionária (e reciprocamente), ou mesmo não conseguir efetuar a conversão. Muitas vezes é este tipo de exemplo que é colocado para explicar porque os alunos chegam ao ensino médio e não sabem calcular. É esquecer que a expressão decimal, a expressão fracionária e a expressão com expoente constituem três registros diferentes de representação de números.

Relacionando com o conteúdo tema deste trabalho, um aluno pode, por exemplo, realizar tratamentos em um círculo trigonométrico para determinar valores de seno e cosseno dos ângulos. Além disso, também é possível fazer a conversão

[1] O termo semiótica tem origem grega: semeion significa signo, otica significa Ciencia. A Semiótica seria, então, a Ciência destinada ao estudo dos signos. Os signos são representações de coisas, e é por meio desses signos e representações que consegue-se fazer a leitura do mundo. Essas representações se apresentam de diversas formas, como a imagética (uma ilustração ou fotografia), a linguística (a palavra casa, por exemplo, é a representação da coisa que reconhecemos por esse nome). Contudo, não se deve confundir a representação com o representado, já que uma única coisa pode ser representada de inúmeras formas.

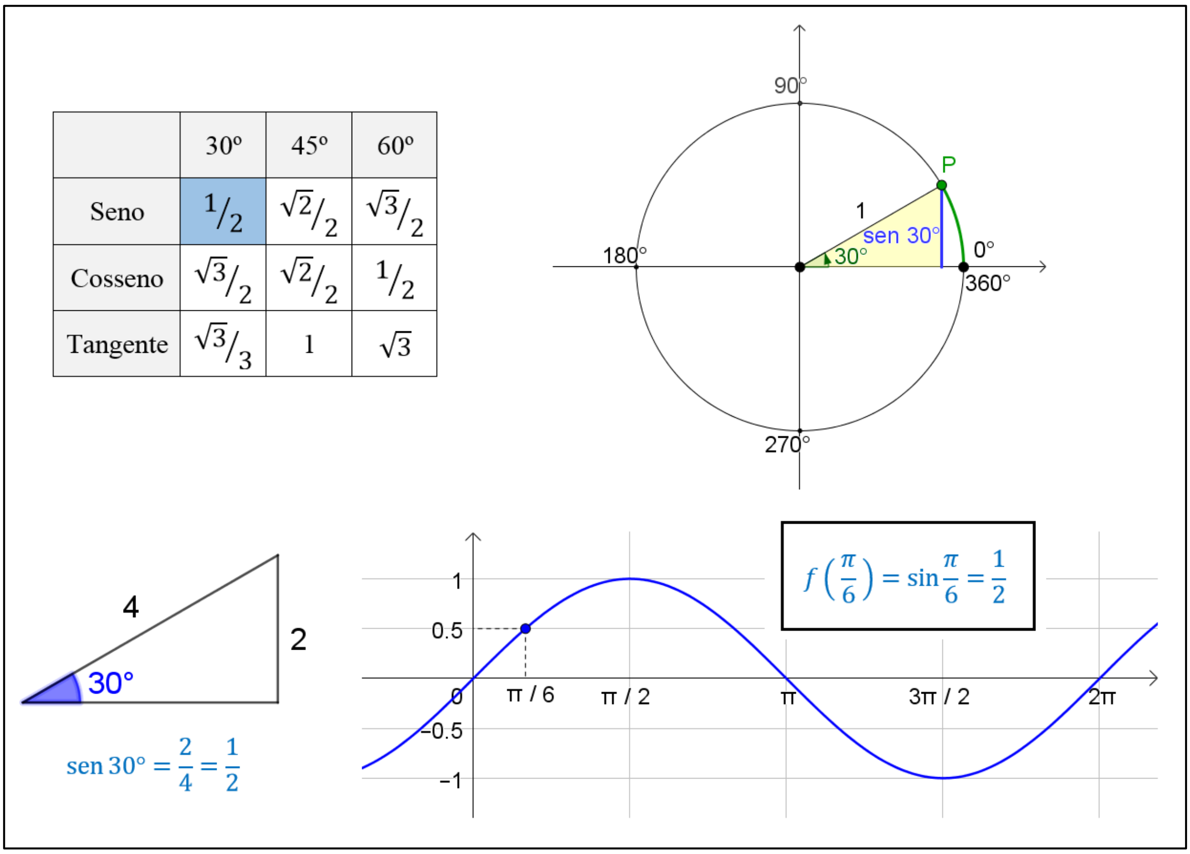
dos ângulos do círculo trigonométrico para o plano cartesiano, como uma função em que o domínio é o conjunto dos ângulos e a imagem, o conjunto dos valores de seno ou cosseno desses ângulos; ainda, pode-se fazer a conversão do gráfico para uma expressão algébrica que defina essa curva.

É importante trabalhar com diversas representações de um mesmo objeto matemático, pois isso ajuda na compreensão global desses objetos e também reforça a diferenciação entre seu conceito e sua representação, já que um mesmo objeto possui diferentes representações. Segundo Duval (2012, p. 270):

> É essencial, na atividade matemática, poder mobilizar muitos registros de representação semiótica (figuras, gráficos, escrituras simbólicas, língua natural, etc...) no decorrer de um mesmo passo, poder escolher um registro no lugar de outro. [...] A coordenação de muitos registros de representação semiótica aparece, fundamentalmente, para uma apreensão conceitual de objetos: é preciso que o objeto não seja confundido com suas representações e que seja reconhecido em cada uma de suas representações possíveis. É nestas duas condições que uma representação funciona verdadeiramente como representação, quer dizer, ela dá acesso ao objeto representado.

Na trigonometria, por exemplo, o conceito de Função Seno pode ser representado em diferentes registros: no triângulo retângulo, no círculo trigonométrico, em tabelas, no plano cartesiano e pela expressão algébrica, como mostra a Figura 11. Ainda, essas representações podem ser feitas com lápis e papel ou no computador, possibilitando mais representações para o entendimento do objeto estudado.

Figura 11: diferentes representações do seno de 30 graus



	30º	45º	60º
Seno	$^1/_2$	$\sqrt{2}/_2$	$\sqrt{3}/_2$
Cosseno	$\sqrt{3}/_2$	$\sqrt{2}/_2$	$^1/_2$
Tangente	$\sqrt{3}/_3$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: construção própria

Porém, segundo Duval (2012), não basta somente trabalhar diferentes representações de um objeto matemático de forma isolada, é preciso estabelecer relações entre elas e o objeto matemático. Sobre a coordenação entre as representações, Duval (2012, p. 283) diz que:

> Esta coordenação está longe de ser natural. E ela não parece poder realizar-se no quadro de um ensino, principalmente determinado por conteúdos conceituais. Pode-se observar, em todos os níveis de ensino, na grande maioria dos alunos, um isolamento de registros de representação. Estes não reconhecem o mesmo objeto nas representações que são dadas em sistemas semióticos diferentes [...] Este isolamento subsiste, mesmo após um ensino de conteúdos matemáticos que tenha tido estes diferentes registros amplamente utilizados.

Pensando no processo de aprendizagem da trigonometria, foco desse trabalho, é importante proporcionar situações que possibilitem aos estudantes fazer relações entre círculo trigonométrico e funções no plano cartesiano, procurando não as trabalhar de forma separada.

Sobre a ausência de coordenação, Duval (2012, p. 283) diz que “não favorece em nada as transferências e as aprendizagens ulteriores: torna os conhecimentos adquiridos pouco ou não utilizáveis em outras situações aonde deveriam realmente ser utilizados”. Para o aluno desenvolver a capacidade de compreender o mesmo assunto em diferentes representações semióticas, é preciso haver a coordenação entre elas, o que possibilita ao estudante compreender o conceito e também pode ajudar no desenvolvimento da sua capacidade de interpretar problemas.

Cabe ainda ressaltar que, para a coordenação entre as representações do objeto, é importante que o aluno consiga fazer as diferentes conversões entre os registros. Por exemplo, o estudante precisa saber como esboçar o gráfico de uma função a partir da sua forma algébrica, mas também precisa saber determinar a lei da função analisando a curva.

2.4 Tecnologias Digitais na Educação Matemática

A tecnologia impacta na sociedade e a transforma em seu tempo. O sistema de ensino sofreu mudanças ao longo da história. No começo, a linguagem oral era a predominante. Depois, essa metodologia deu lugar à predominância da linguagem escrita. Atualmente, a tecnologia está muito presente na sociedade e o ensino nas escolas deveria acompanhar essa nova tendência. Conforme Martins (2009, p. 2730):

> O grande objectivo do Ensino de Matemática, actualmente, é a preparação dos indivíduos para a Sociedade actual, que é cada vez mais complexa e que exige capacidade de se adaptar, raciocinar e de resolver situações novas. O computador e a Internet têm uma presença cada vez mais forte na vida quotidiana, pondo à disposição de qualquer um, uma fonte inesgotável de informação. Como tal, constatou-se que um dos desafios que se coloca ao processo de Ensino-Aprendizagem da Matemática é a utilização pedagógica do computador, do software pedagógico e da Internet.

Para acompanhar essa mudança, os professores precisam primeiramente entender essa nova tendência e perceber as suas possibilidades. Por isso, essa pesquisa relaciona recursos computacionais e a Matemática, em especial, conceitos de trigonometria, buscando evidenciar o potencial desse recurso para a aprendizagem. Todavia, é importante entender que a tecnologia não pode ser vista como solução para todos os problemas de aprendizagem, e sim como uma ferramenta para o professor proporcionar aos alunos diferentes experiências em sala de aula.

A sociedade tem evoluído com o passar dos anos, assim como os recursos tecnológicos disponíveis e utilizados pelas pessoas. Contudo, a Educação, às vezes, parece não acompanhar essa evolução; aulas tradicionais com teoria no quadro e resolução de listas de exercícios ainda é o método mais utilizado pelos professores. Segundo Salazar (2015, p. 18), com base em Fiorentini (1995), Miorin (1998) e D'Ambrósio (1993), “Essa prática não é propícia à aprendizagem por não possibilitar a compreensão e a construção do conhecimento pelo aluno”.

Porém essa metodologia também tem suas limitações. Segundo Garcia (2015), somente a utilização de tecnologias para o ensino não é garantia de aprendizagem. O professor tem papel fundamental neste processo ao decidir como usar estas ferramentas. Ainda, Garcia (2015, p. 5) afirma que:

> As tecnologias e a rápida expansão do uso de equipamentos digitais exigem que o professor se aproprie desses novos conhecimentos explorando o potencial da tecnologia em proveito de um ensino e uma aprendizagem mais criativa, autônoma, colaborativa e interativa. Apropriar-se dos conhecimentos tecnológicos permitirá ao educador a ciência das vantagens e desvantagens, riscos e possibilidades no uso das tecnologias da informação e comunicação visando transformá-las em ferramenta útil.

Pensando na proposta deste trabalho, o professor usar o GeoGebra de forma que só ele tenha acesso aos recursos do software, somente para ilustrar conceitos da trigonometria, não criaria uma situação propícia à aprendizagem. Os alunos precisam interagir com os recursos do software, observar o dinamismo, criarem suas próprias conjecturas.

Outros problemas também limitam ou impossibilitam a relação entre tecnologia e ensino, como o fato de que muitos professores não tiveram incorporado a sua formação as Tecnologias da Informação e Comunicação; alguns, nem sequer possuem afinidade com a área ou a utilizam em seu dia-a-dia. A (falta de) estrutura das escolas públicas do país também pode ser apontado como um fator que prejudica essa abordagem.

É preciso mudar esse cenário, principalmente na Matemática, que está diretamente ligada à tecnologia, e seguir a tendência evolutiva que a sociedade tem vivido. Lopes (2013, p. 632-633) defende que:

> A presença da linguagem digital, expressa em múltiplas tecnologias de informação e comunicação, vem impondo mudanças no modo como obtemos informação e nos comunicamos, e a chegada desses recursos na escola nos faz refletir sobre seu uso em sala de aula, analisando de que forma essas ferramentas podem contribuir para uma formação do aluno compatível com os avanços proporcionado pela sociedade da informação.

Segundo Moreno-Armella, Hegedus e Kaput (2008, apud BASSO e NOTARE, 2015, p. 2), “A natureza dos símbolos matemáticos têm evoluído nos últimos anos de um caráter estático, inerte, para objetos dinâmicos ou diagramas que são construtíveis, manipuláveis e interativos”. Essa evolução é consequência da utilização da tecnologia na Matemática, como, por exemplo, softwares que permitem ao usuário manipular e representar problemas matemáticos.

Falta aos estudantes dessa geração uma proximidade entre a escola e a tecnologia que os rodeia em toda parte. Essa aproximação pode ser benéfica para o ensino de Matemática, facilitando a visualização e o entendimento de conteúdos trabalhados pelo professor; também poderia reduzir a rejeição à disciplina, algo comum nas salas de aula atuais, onde a Matemática é encarada como a grande vilã, com elevados índices de reprovação.

A tecnologia também pode ser utilizada para criar situações investigativas para os alunos, possibilitando a manipulação e experimentação, fazendo alterações em um ambiente dinâmico. Segundo D’Ambrosio (1989, p.3):

> Acredita-se que metodologia de trabalho desta natureza tem o poder de dar ao aluno a autoconfiança na sua capacidade de criar e fazer matemática. Com essa abordagem a matemática deixa de ser um corpo de conhecimentos prontos e simplesmente transmitidos aos alunos e passa a ser algo em que o aluno faz parte integrante no processo de construção de seus conceitos.

Essa forma de trabalho pode fazer o estudante pensar sobre o problema, levantar hipóteses, criar generalizações. Assim, o aprendizado torna-se mais visual.

Para Basso e Notare (2015), utilizar o computador para representar objetos matemáticos fornece a sensação de existência material, dando a possibilidade de fazer alterações nos mesmos. Esse recurso pode ser um instrumento de ensino para ser utilizado em sala de aula, possibilitando o aluno a pensar a Matemática de outra forma. Os autores também explicam que não se trata de usar a tecnologia pela sua praticidade e atratividade, mas para fazer o estudante desenvolver o pensamento matemático, proporcionando possibilidades de visualização e manipulação, que antes da tecnologia não eram possíveis, fazendo o estudante tornar-se capaz de criar e pensar Matemática. Lopes (2013, p. 635) complementa: “Com o recurso de um *software* de Geometria Dinâmica os alunos podem realizar construções que, usualmente, fazem com régua e compasso, instrumentos que não lhes permite interagir com o desenho, por serem estáticos”.

Para Goldenberg (2000, apud BASSO e NOTARE, 2015), a utilização da tecnologia em sala de aula pode ajudar o sujeito a desenvolver diferentes formas de olhar para um problema matemático, fazendo com que construa modelos mentais e desenvolva habilidades de pensamento. Ainda sobre os pontos positivos da utilização da tecnologia como recurso de ensino, Basso e Notare (2015, p. 3) afirmam que: “Os recursos tecnológicos e a possibilidade de representação e manipulação de objetos matemáticos abrem novas possibilidades para o pensamento matemático”.

Especificamente sobre trigonometria na educação básica, que é o foco deste texto, Valli (2015) defende que o ensino desse conteúdo utilizando o software GeoGebra pode possibilitar o trabalho com investigações matemáticas, fazendo os alunos elaborarem conjecturas e criarem estratégias para resolução de problemas. Ainda, Valli (2015, p. 3) afirma que:

> A investigação matemática requer que o professor tenha um domínio dos recursos e dos materiais que poderão ser utilizados como apoio desta atividade, além de ter percepção do interesse e das potencialidades dos seus alunos. As tarefas que são propostas durante as atividades de investigação devem ser mediadas e analisadas pelo professor como um caráter investigativo pois o pesquisador precisa ser capaz de reconhecer os conceitos e os processos que a tarefa conduz.

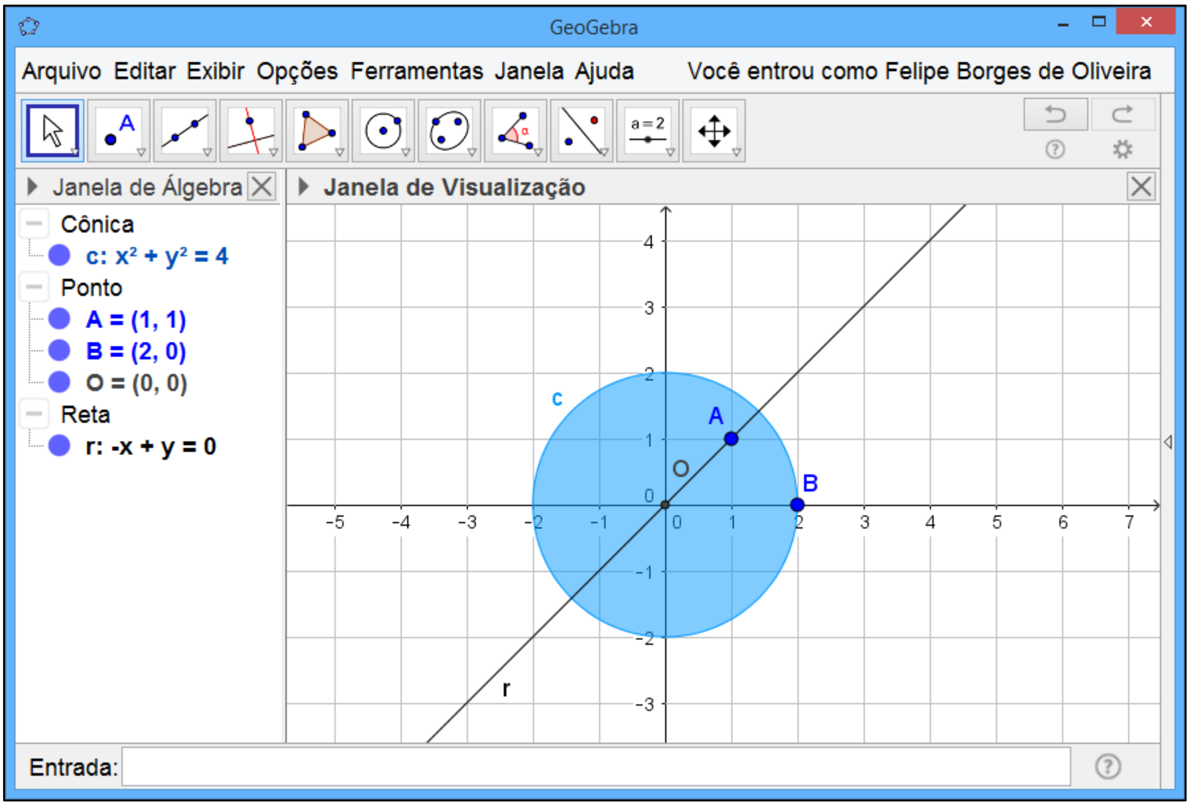
2.5 GeoGebra: surgimento e recursos

O GeoGebra é um software livre que foi inicialmente criado pelo austríaco Markus Hohenwarter, na época de seu doutorado, em 2001, pela Universidade de Salzburgo (GEOGEBRA, 2018). Hoje, o projeto conta com diversos colaboradores espalhados pelo mundo, inclusive no Brasil, que voluntariamente atualizam e aprimoram o aplicativo. Por ser livre, é um programa que pode ser obtido por qualquer usuário, através do download gratuito em seu site (www.geogebra.org), estando disponível em diferentes plataformas, como Windows e Linux, ou também disponível para uso online através do navegador.

Pelos recursos fornecidos e por sua gratuidade, obteve grande popularidade, sendo utilizado em 190 países, traduzido para 55 idiomas e com 300000 downloads mensais. Dentre os usuários, há 62 institutos espalhados em 44 países que têm como objetivo oferecer suporte para o programa e desenvolver materiais para professores (ZILKHA, 2014). Além disso, o site permite que qualquer usuário se cadastre e crie uma página pessoal, podendo armazenar suas construções feitas no GeoGebra e disponibilizá-las para o público em geral. Esses arquivos podem ser acessados e manipulados no próprio navegador, sem a necessidade de efetuar qualquer download ou instalação no dispositivo onde foi feito o acesso.

O software possui diversos recursos relacionados à geometria e à álgebra, como sugere o seu próprio nome, cuja origem vem da junção dessas palavras. A interface dele permite que a partir de uma construção algébrica possa ser visualizada a sua representação geométrica ou também é possível fazer o contrário (Figura 12), enriquecendo, assim, as possibilidades de trabalho dos educadores com os alunos, e indo ao encontro do trabalho com diferentes registros de representações semióticas.

Figura 12: interface algébrica e geométrica do GeoGebra



Fonte: construção própria

Ainda, é possível inserir relações algébricas no campo *entrada* – presente na parte inferior da tela –, dentre diversos outros recursos em diferentes áreas da matemática, como probabilidade e finanças. Utilizando conceitos de funções e geometria, pode-se realizar construções dinâmicas que relacionem conceitos algébricos da trigonometria com suas respectivas representações gráficas.

A relação entre os recursos do software, como a álgebra e a geometria, permite de se trabalhar simultaneamente com diferentes registros de um mesmo objeto matemático, ficando mais clara as conversões entre as representações. Sobre trigonometria, por exemplo, é possível o aluno observar simultaneamente o que acontece com o gráfico de uma função ao variar parâmetros da sua expressão algébrica, podendo ajudar na compreensão da conversão entre esses dois registros.

Conforme visto, as potencialidades visuais e interativas do software GeoGebra possibilitam trabalhar diferentes registros de uma forma que possa estimular o raciocínio e despertar o interesse dos estudantes. O presente trabalho fará uma análise da aproximação de seus recursos com a sala de aula, aliando essas ferramentas tecnológicas com o saber e a curiosidade dos alunos para uma proposta de ensino da trigonometria. Contudo, essa análise precisa partir de certos princípios metodológicos, a serem respeitados durante toda a pesquisa para tornar possível a discussão dos resultados.

3 Procedimentos Metodológicos

O capítulo que se segue é destinado a estabelecer e detalhar os procedimentos metodológicos que guiaram todo o projeto. Descreve-se o público participante, bem como detalha-se a coleta de dados, as atividades propostas, os planos de aula elaborados para a aplicação das tarefas, as práticas estabelecidas e os passos realizados durante a pesquisa.

3.1 Metodologia de Pesquisa

O objetivo da pesquisa abordada nesse trabalho foi analisar como ocorre a aprendizagem de trigonometria trabalhando-se com o software GeoGebra na educação básica. A pesquisa foi realizada no Colégio Protásio Alves, escola da rede pública estadual, em Porto Alegre, com um alunado do segundo ano do ensino médio regular, por meio de oficinas no horário de aula. A turma 210 da escola foi convidada a participar das oficinas e todos alunos acabaram participando nas atividades. Ainda, cabe ressaltar que, para participar da pesquisa, caso manifestassem interesse nas oficinas, os estudantes assinaram um termo de assentimento e seus responsáveis, um termo de consentimento (Apêndices 1 e 2).

A prática desenvolvida foi uma sequência de atividades utilizando recursos do GeoGebra para compreender conceitos da trigonometria. Essa sequência teve início pelo círculo trigonométrico, seguido pela relação entre círculo trigonométrico e plano cartesiano para definir as funções seno e cosseno, e por último, alterações de constantes nas funções seno e cosseno com suas representações gráficas.

Durante as atividades, os estudantes, individualmente ou separados em grupos, poderiam variar parâmetros – como ângulos, valores numéricos e pontos – no software, observar, refletir, discutir e anotar as consequências dessas variações. Enquanto a turma realizou a atividade, o professor circulou pela sala de aula observando o comprometimento e as estratégias utilizadas pelos alunos.

A pesquisa qualitativa foi considerada a mais adequada para o projeto, pois foram analisados dados com a intenção de entender o pensamento dos alunos em relação à metodologia de utilizar o software GeoGebra para compreender conceitos de trigonometria. Os métodos qualitativos explicam o porquê das coisas, expondo o que convém ser feito; os dados analisados são não-métricos (suscitados e de interação) e se valem de diferentes abordagens (GERHARD e SILVEIRA, 2009).

A coleta de dados foi feita de duas formas: pela análise das atividades realizadas pelos alunos e pelas observações do pesquisador. Nas atividades, foram analisados as estratégias de resolução e o entendimento sobre o conteúdo; nas observações, foram analisados o comprometimento e a motivação dos alunos durante a resolução das atividades, bem como a forma como manipulavam as atividades no GeoGebra para compreender os conceitos trabalhados.

3.2 Sequência de atividades

A sequência de atividades desenvolvida foi dividida em três partes, com diferentes objetivos cada uma, realizadas em 6 encontros. A Tabela 1 mostra o plano de trabalho planejado, mas os alunos trabalharam em diferentes atividades em um mesmo encontro, respeitando o tempo de aprendizado de cada estudante.

Tabela 1: sequência de atividades

Encontros	Tempo de aula	Atividades
9 de maio	1 período	Primeira
10 de maio	1 período	Primeira
11 de maio	1 período	Primeira
16 de maio	1 período	Segunda
17 de maio	2 períodos	Terceira
18 de maio	1 períodos	Terceira

Fonte: construção própria

A primeira atividade tinha como objetivo avaliar a aprendizagem sobre seno, cosseno, intervalos crescentes e decrescentes, valores de máximo e mínimo e simetrias. Já a segunda, buscava verificar se o aluno entendeu a conversão de registros entre círculo trigonométrico e plano cartesiano. Por fim, a terceira, procurava observar se o estudante conseguiu realizar a conversão do registro algébrico para o gráfico e depois do gráfico para o algébrico.

As três atividades podem ser visualizadas a seguir. As construções, utilizadas em cada uma das atividades, no software GeoGebra e suas possibilidades de manipulação, serão descritas no próximo capítulo, junto com a análise dos dados.

Primeira atividade

Utilizando o círculo trigonométrico dinâmico 1 no software GeoGebra:

1. Alterando os ângulos no controle deslizante, responda:

a) Quais os valores mínimo e máximo de seno entre 0° e 90°? Os valores de seno crescem ou decrescem conforme o ângulo varia de 0° até 90°?

b) Quais os valores mínimo e máximo de seno entre 90° e 180°? Os valores de seno crescem ou decrescem conforme o ângulo varia de 90° até 180°?

c) Quais os valores mínimo e máximo de seno entre 180° e 270°? Os valores de seno crescem ou decrescem conforme o ângulo varia de 180° até 270°?

d) Quais os valores mínimo e máximo de seno entre 270° e 360°? Os valores de seno crescem ou decrescem conforme o ângulo varia de 270° até 360°?

Utilizando o círculo trigonométrico dinâmico 2 no software GeoGebra:

2. Com relação aos ângulos a seguir, determine para cada um deles, se possível:

a) Um ângulo que possui a mesma medida de seno.

sen 0° = sen ___

sen 30° = sen ___

sen 45° = sen ___

sen 60° = sen ___

sen 90° = sen ___

b) Um ângulo que possui a medida oposta de seno.

sen 0° = – sen ___

sen 30° = – sen ___

sen 45° = – sen ___

sen 60° = – sen ___

sen 90° = – sen ___

3. Determine o ângulo cujo seno é igual a:

a) sen 85° = sen ___

b) sen 10° = sen ___

c) sen 190° = sen ___

d) sen 265° = sen ___

e) sen 110° = sen ___

f) sen 160° = sen ___

g) sen 330° = sen ___

h) sen 290° = sen ___

4. O que você observa de semelhante para resolver as questões do exercício anterior? Qual a relação com os eixos das ordenadas? Como você faria essa análise sem o software GeoGebra?

Utilizando o círculo trigonométrico dinâmico 1 no software GeoGebra:

5. Alterando os ângulos no controle deslizante, responda:

a) Quais os valores mínimo e máximo de cosseno entre 0° e 90°? Os valores de cosseno crescem ou decrescem conforme o ângulo varia de 0° até 90°?

b) Quais os valores mínimo e máximo de cosseno entre 90° e 180°? Os valores de cosseno crescem ou decrescem conforme o ângulo varia de 90° até 180°?

c) Quais os valores mínimo e máximo de cosseno entre 180° e 270°? Os valores de cosseno crescem ou decrescem conforme o ângulo varia de 180° até 270°?

d) Quais os valores mínimo e máximo de cosseno entre 270° e 360°? Os valores de cosseno crescem ou decrescem conforme o ângulo varia de 270° até 360°?

Utilizando o círculo trigonométrico dinâmico 2 no software GeoGebra:

6. Com relação aos ângulos 0°, 30°, 45°, 60° e 90°, determine para cada um deles, se possível:

a) Um ângulo que possui a mesma medida de cosseno.

cos 0° = cos ___

cos 30° = cos ___

cos 45° = cos ___

cos 60° = cos ___

cos 90° = cos ___

7. O que você observa de semelhante para resolver as questões do exercício anterior? Qual a relação com os eixos das abscissas? Como você faria essa análise sem o software GeoGebra?

Segunda atividade

No software GeoGebra, movimente o ângulo no círculo trigonométrico (mexendo o ponto P), e observando o que acontece com os pontos azul e vermelho, responda as questões.

1. Qual a relação entre a coordenada x dos pontos azul e vermelho e o ângulo?

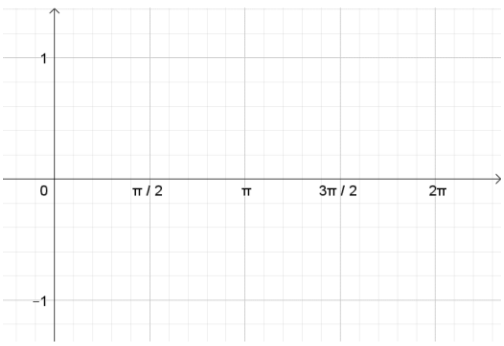
2. Qual a relação entre a coordenada y do ponto azul e o seno do ângulo? Qual a relação entre a coordenada y do ponto vermelho e o cosseno do ângulo?

3. Relacionando ângulo e seus respectivos seno e cosseno, complete a tabela abaixo:

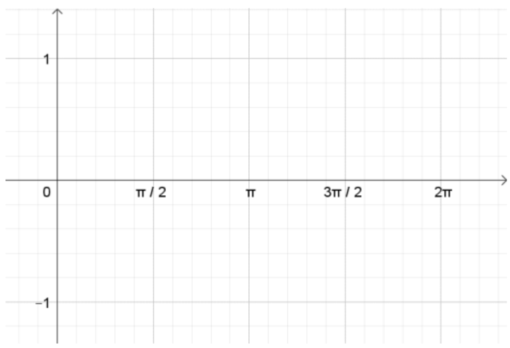
Ângulo	**Seno**	**Cosseno**
0		
$\frac{\pi}{2}$		
π		
$\frac{3\pi}{2}$		
2π		

4. Utilizando os dados dos exercícios anteriores, observando o comportamento da função seno e da função cosseno ao variar os ângulos completando uma volta no círculo trigonométrico, esboce o gráfico dessas funções entre 0 e 2π no plano cartesiano.

f(x)=sen x



g(x)=cos x



5. Após uma volta completa no círculo trigonométrico, ao continuar variando os ângulos de forma crescente, você consegue dizer o que acontecerá com os valores de seno e cosseno? O que isso representa no gráfico no plano cartesiano?

6. Sabendo que ângulos negativos são ângulos cujos arcos partem da origem do círculo trigonométrico no *<u>sentido horário</u>*, você consegue dizer o que acontecerá com os valores de seno e cosseno ao realizarmos uma volta completa no sentido horário? O que isso representa no gráfico no plano cartesiano?

Terceira atividade

Variando os parâmetros da função seno no software GeoGebra, utilizando os controles deslizantes, responda as questões 1, 2, 3 e 4:

1. O que acontece com o gráfico da função seno ao variarmos o parâmetro d? Você consegue estabelecer uma relação entre o valor d e o gráfico?

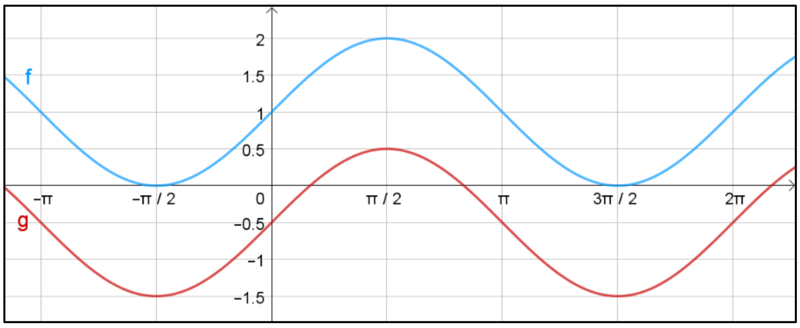
2. O que acontece com o gráfico da função seno ao variarmos o parâmetro c? Você consegue estabelecer uma relação entre o valor c e o gráfico?

3. O que acontece com o gráfico da função ao variarmos o parâmetro a? Você consegue estabelecer uma relação entre o valor a e o gráfico?

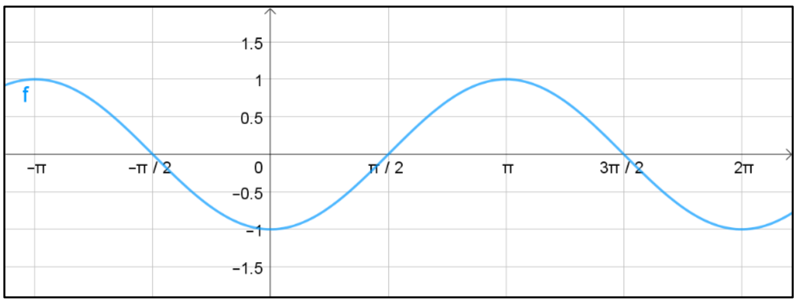
4. O que acontece com o gráfico da função ao variarmos o parâmetro b? Você consegue estabelecer uma relação entre o valor b e o gráfico?

5. Analisando os gráficos, determine as leis das funções, incluindo os parâmetros:

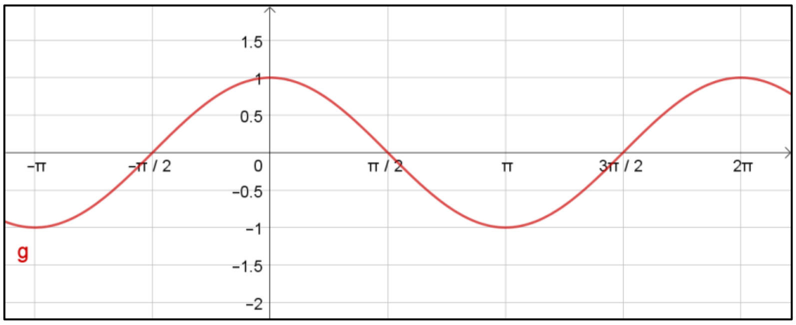
a)



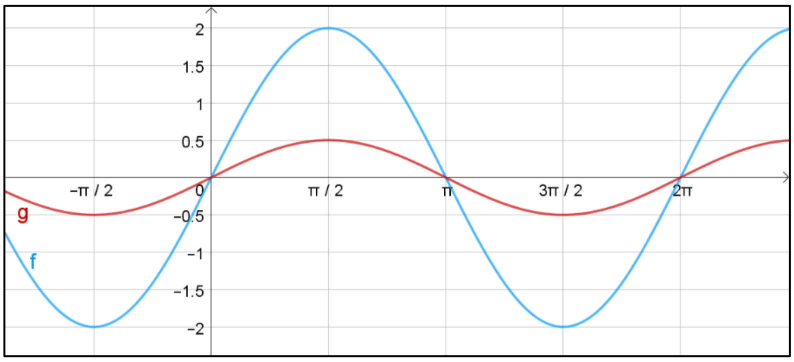
b)



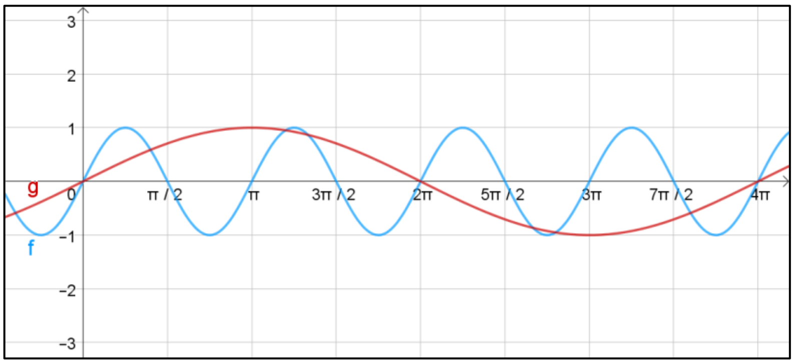
c)



d)



e)



6. Com ajuda do software GeoGebra, variando algum dos parâmetros das funções seno e cosseno, você consegue fazer com que o gráfico da função seno seja igual ao gráfico da função cosseno? Justifique sua resposta.

4 Discussão e Análise de Dados

A escolha das respostas para serem descritas e analisadas a seguir no texto foi feita de forma que representasse as diferentes repostas que apareceram na turma para uma cada questão. Porém, antes de analisar os dados, é importante descrever algumas características da estrutura e do horário do Colégio Protásio Alves, porque esses fatores podem influenciar os resultados obtidos.

A aula do Ensino Médio do turno da manhã, que conta com 6 períodos de 50 minutos cada, inicia às 7h30 e termina às 12h45, mas há uma tolerância de 15 minutos para a entrada em sala na chegada à escola e, normalmente, os alunos também são liberados um pouco mais cedo ao final da aula, o que acaba prejudicando as disciplinas que trabalham no primeiro ou no último período.

As turmas de 2º ano têm aula de Matemática quatro vezes por semana. A turma 210, na qual realizei as atividades, tinham a disciplina nos seguintes dias e períodos: quarta-feira, 4º e 5º períodos; quinta-feira, 1º período; sexta-feira, 6º período. Por causa da tolerância de 15 minutos, as quintas-feiras que trabalhei com a turma tiveram aulas mais curtas.

Outro ponto que chamou atenção foi que seguidamente algum professor faltava, o que deve prejudicar o currículo escolar. Na minha época de aluno na educação básica, quando algum professor faltava, outro docente o substituía, ou a escola disponibilizava atividades para os alunos fazerem; em último caso, o período ficava vago e os estudantes aguardavam no pátio a próxima aula. No Colégio Protásio Alves, na ausência de um professor, os períodos seguintes que a turma teria são adiantados, fazendo com que a aula termine mais cedo. No primeiro dia de atividades, perdi um período de trabalho com a turma por causa do adiantamento; nos dias seguintes, cheguei bem antes do horário previsto para evitar que isso ocorresse novamente.

Diferente de outras escolas públicas que algumas vezes nem possuem laboratório de informática, essa escola conta com sete salas equipadas com computadores, consequência dos cursos técnicos que são ofertados na instituição, em especial os técnicos em informática. Apesar disso, há alguns problemas de conexão com a internet e lentidão nas máquinas, o que acabou atrapalhando um pouco o desenvolvimento das atividades, sobretudo a parte da observação, porque tive que dividir o tempo de aula entre observar os alunos e resolver problemas nos computadores. Ainda, alguns estudantes se desmotivavam com essas falhas técnicas. Mesmo com a estrutura necessária e acima da média em relação ao ensino público, surgiram esses problemas. Como a realidade estrutural de muitas outras escolas é inferior, questões assim podem aparecer ainda mais, o que dificulta inserir no currículo escolar propostas com a utilização de tecnologias.

4.1 Primeira atividade

O primeiro dia de atividades começou com algo inesperado. Ao chegar na escola, fui informado que um dos dois períodos de Matemática que a turma teria no dia foi adiantado, os alunos ficaram em sala fazendo alguns exercícios disponibilizados pela professora. No período seguinte, os estudantes se dirigiram para o laboratório de informática onde foi realizado todo o trabalho, durante duas semanas.

No laboratório, me apresentei para a turma, explicando como funcionariam as atividades que seriam desenvolvidas nas próximas aulas e descrevendo as possibilidades de trabalho com o software GeoGebra. Após, solicitei que entrassem no site do GeoGebra para trabalhar com as construções dinâmicas e responder as questões impressas que receberam enquanto acessavam a página. A opção pela utilização do software online foi porque nos computadores estava instalado uma versão não atualizada do programa, que apresentava problemas de compatibilidade com os recursos presentes nas atividades desenvolvidas.

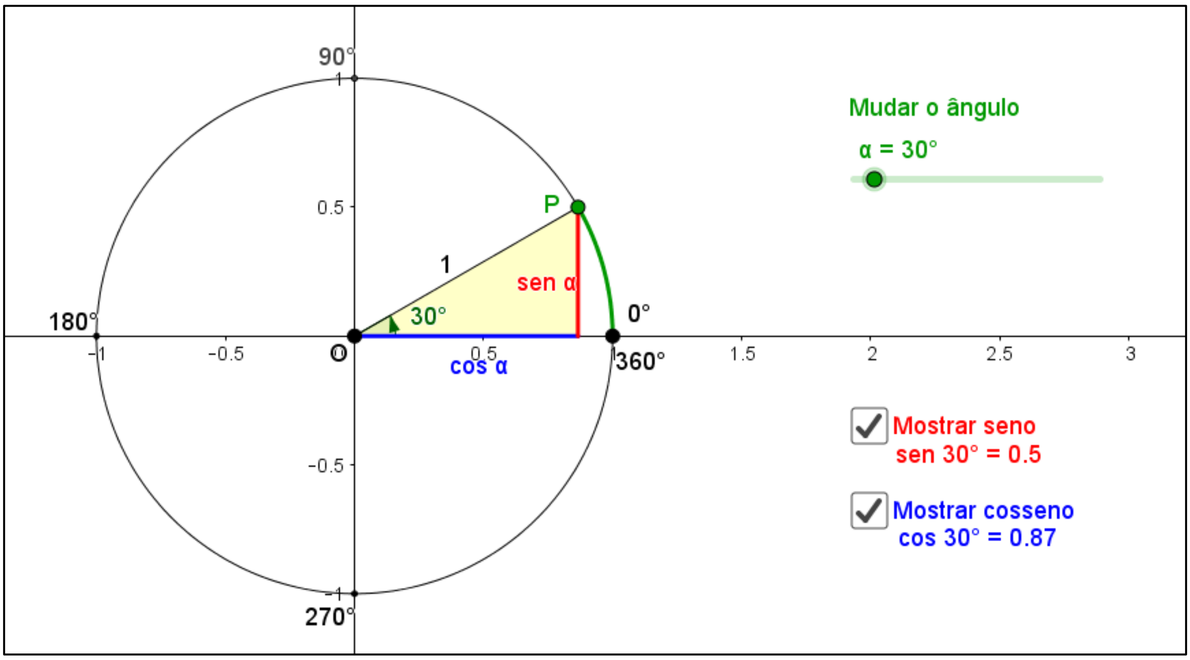
O tempo de aula interferiu no planejamento das atividades, pois perdeu-se muito tempo com a chegada ao laboratório de informática, a apresentação da proposta de trabalho, a ligação dos computadores e o acesso ao software GeoGebra. Em uma aula de dois períodos, esses fatores não causariam tanto impacto no desenvolvimento das atividades.

Outro fator que interferiu no trabalho foram os problemas de conexão com a internet, já que as tarefas deveriam ser acessadas no site do GeoGebra, para utilizar o software online. Alguns alunos tiveram que trocar de computador algumas vezes, ou ficar atualizando a página seguidamente. Inicialmente, o trabalho seria desenvolvido individualmente, mas com esse contratempo, alguns alunos formaram grupos e se juntaram para utilizar um mesmo computador. Esse problema persistiu durante as duas semanas de trabalho, atrapalhando de diversas formas e níveis de intensidade o andamento da proposta.

Como foi o primeiro dia de trabalho, com uma proposta diferente do habitual, os estudantes estavam curiosos e motivados, o que ajudou no desenvolvimento da proposta. Essa primeira atividade foi realizada em três períodos, na quarta, quinta e sexta-feira da primeira semana de experiência na escola.

Para fazer a primeira atividade, os alunos deveriam utilizar dois arquivos no software GeoGebra: círculo trigonométrico 1, para as questões 1 e 5; círculo trigonométrico 2, para as demais questões. A interface da primeira construção permitia ao aluno manipular um controle deslizante que alterava um ângulo dentro do círculo trigonométrico, enquanto também informava seu valor numérico de seno ou cosseno e ainda mostrava essa medida no triângulo retângulo, como mostra a Figura 13.

Figura 13: Círculo trigonométrico 1 da primeira atividade no GeoGebra

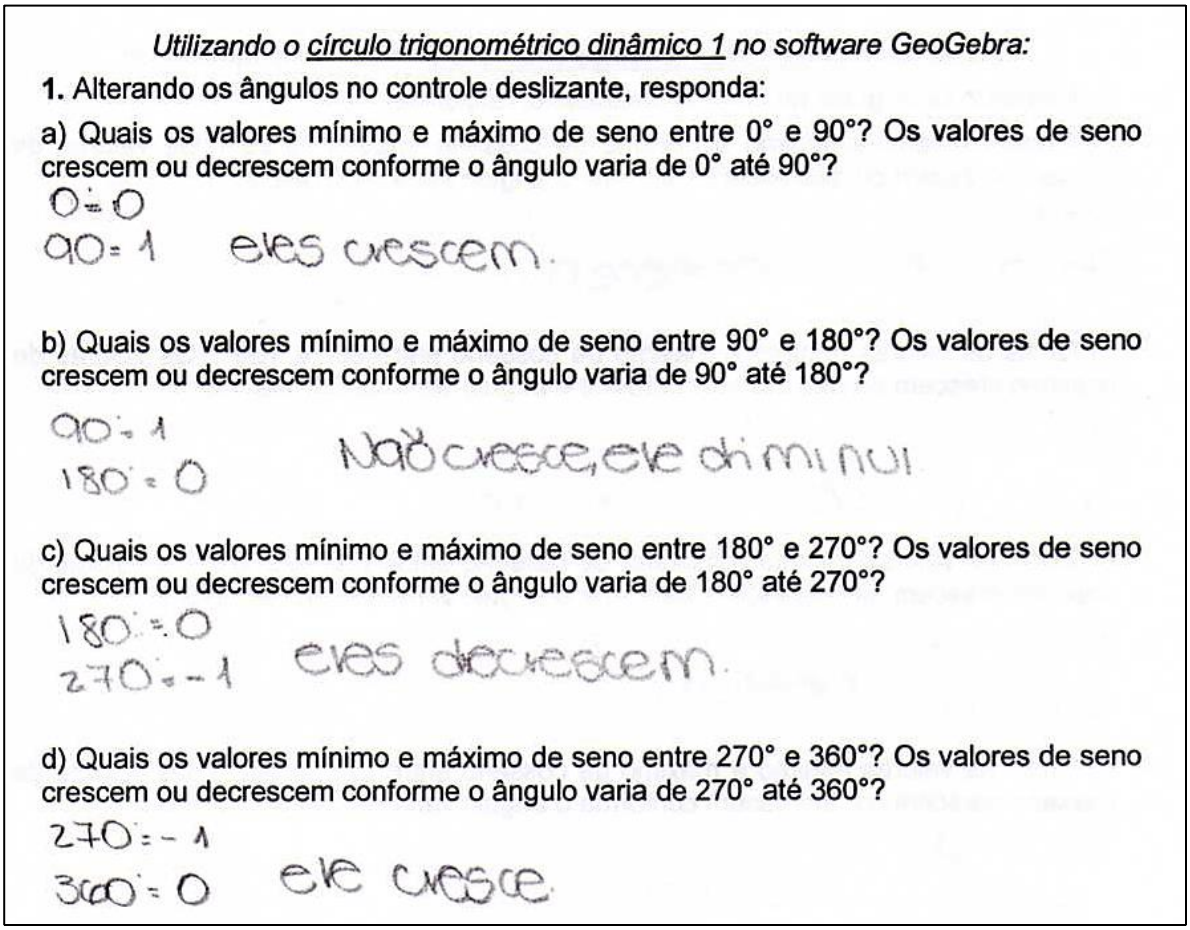


Fonte: construção própria

A primeira questão dessa atividade perguntava valores de mínimo e máximo do seno e se o intervalo era crescente ou decrescente conforme o quadrante. Pude observar que boa parte da turma teve dificuldade de interpretação, pois tive que, constantemente, explicar o que gostaria de questioná-los em cada enunciado.

A maioria dos estudantes não indicou os valores de máximo e mínimo, somente se o intervalo é crescente ou decrescente, como pode-se observar na resposta dada por um grupo de 4 alunos, que chamarei de Grupo 1 (Figura 14).

Figura 14: questão 1 da primeira atividade do Grupo 1



Utilizando o <u>círculo trigonométrico dinâmico 1</u> no software GeoGebra:

1. **Alterando os ângulos no controle deslizante, responda:**

a) Quais os valores mínimo e máximo de seno entre 0° e 90°? Os valores de seno crescem ou decrescem conforme o ângulo varia de 0° até 90°?

0 = 0

90 = 1 eles crescem.

b) Quais os valores mínimo e máximo de seno entre 90° e 180°? Os valores de seno crescem ou decrescem conforme o ângulo varia de 90° até 180°?

90 = 1

180 = 0 Não cresce, ele diminui

c) Quais os valores mínimo e máximo de seno entre 180° e 270°? Os valores de seno crescem ou decrescem conforme o ângulo varia de 180° até 270°?

180 = 0

270 = -1 eles decrescem.

d) Quais os valores mínimo e máximo de seno entre 270° e 360°? Os valores de seno crescem ou decrescem conforme o ângulo varia de 270° até 360°?

270 = -1

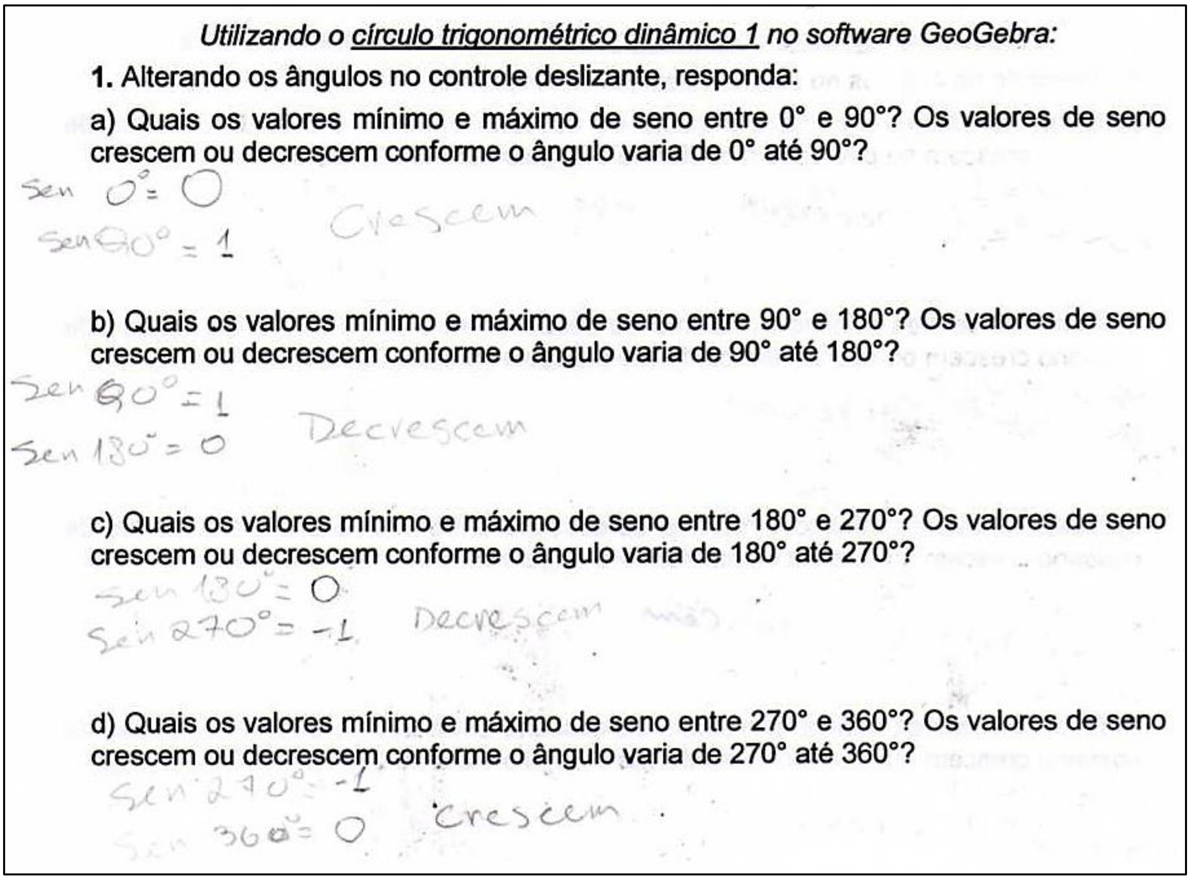
360 = 0 ele cresce.

Fonte: acervo pessoal

Apesar do erro de notação, representando a relação entre o ângulo e seu seno como uma igualdade, que depois foi corrigido, explicando para os alunos como se escreve de forma correta essa relação, os estudantes deste grupo conseguiram analisar quando os valores cresciam ou decresciam. Faltou a indicação de qual o máximo e mínimo que o seno pode assumir. Talvez não tenham achado necessário indicar, julgando que o professor fosse compreender que zero e um são, respectivamente, os valores de máximo e mínimo.

Um estudante, que chamarei de Aluno 1, por sua vez, utilizou a notação certa e indicou se o intervalo era crescente ou decrescente, porém também não viu a necessidade de indicar qual o valor máximo e o valor mínimo (Figura 15). Essa ausência pode ter sido motivada pelo fato dos estudantes utilizarem respostas enxutas e não acharem necessário fazer a indicação de algo trivial, como zero ser menor que um.

Figura 15: questão 1 da primeira atividade do Aluno 1



Utilizando o <u>círculo trigonométrico dinâmico 1</u> no software GeoGebra:

1. Alterando os ângulos no controle deslizante, responda:

a) Quais os valores mínimo e máximo de seno entre 0° e 90°? Os valores de seno crescem ou decrescem conforme o ângulo varia de 0° até 90°?

Sen 0° = 0
Sen 90° = 1
Crescem

b) Quais os valores mínimo e máximo de seno entre 90° e 180°? Os valores de seno crescem ou decrescem conforme o ângulo varia de 90° até 180°?

Sen 90° = 1
Sen 180° = 0
Decrescem

c) Quais os valores mínimo e máximo de seno entre 180° e 270°? Os valores de seno crescem ou decrescem conforme o ângulo varia de 180° até 270°?

Sen 180° = 0
Sen 270° = -1
Decrescem

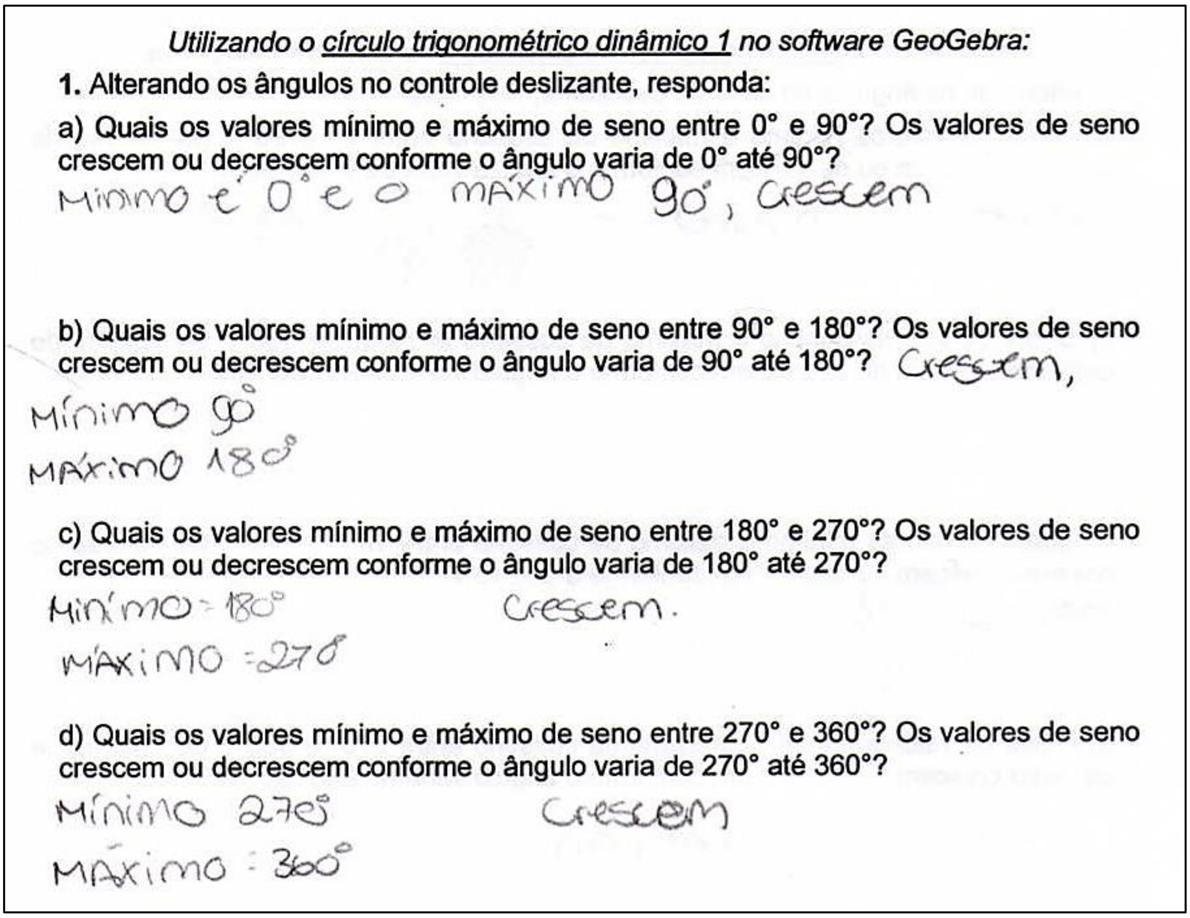
d) Quais os valores mínimo e máximo de seno entre 270° e 360°? Os valores de seno crescem ou decrescem conforme o ângulo varia de 270° até 360°?

Sen 270° = -1
Sen 360° = 0
Crescem.

Fonte: acervo pessoal

O caso do Aluno 2, como pode ser observado na Figura 16, foi responder com medidas de abertura os valores de máximo e mínimo, além de descrever os intervalos sempre como crescentes. O desenvolvimento da sequência de atividades aproveitou o que já havia sido trabalhado em sala de aula antes do início da pesquisa, como os conceitos de seno e cosseno no triângulo retângulo e no círculo trigonométrico. O Aluno 2 talvez não tenha compreendido esses conceitos e não diferenciou os objetos matemáticos ângulo e seno. O caso se repetiu com outros estudantes da turma.

Figura 16: questão 1 da primeira atividade do Aluno 2



Utilizando o círculo trigonométrico dinâmico 1 no software GeoGebra:

1. Alterando os ângulos no controle deslizante, responda:

a) Quais os valores mínimo e máximo de seno entre 0° e 90°? Os valores de seno crescem ou decrescem conforme o ângulo varia de 0° até 90°?

Mínimo é 0° e o máximo 90°, crescem

b) Quais os valores mínimo e máximo de seno entre 90° e 180°? Os valores de seno crescem ou decrescem conforme o ângulo varia de 90° até 180°? Crescem,

Mínimo 90°

Máximo 180°

c) Quais os valores mínimo e máximo de seno entre 180° e 270°? Os valores de seno crescem ou decrescem conforme o ângulo varia de 180° até 270°?

Mínimo = 180° Crescem.

Máximo = 270°

d) Quais os valores mínimo e máximo de seno entre 270° e 360°? Os valores de seno crescem ou decrescem conforme o ângulo varia de 270° até 360°?

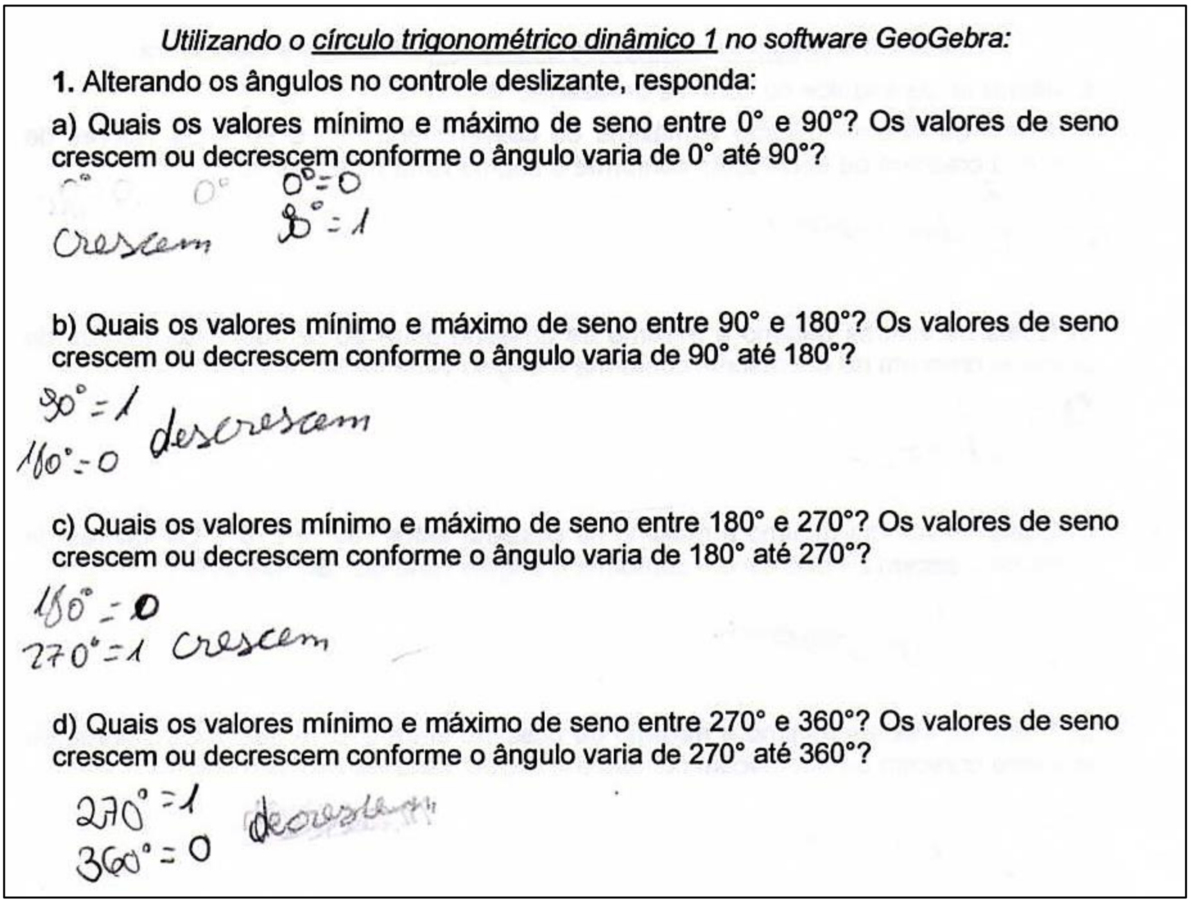
Mínimo 270° Crescem

Máximo : 360°

Fonte: acervo pessoal

O Aluno 3 não levou em consideração os sinais dos números, usando somente valores zero e um. Por não considerar os sinais, acabou errando a análise do intervalo ser crescente ou decrescente. Porém com os valores utilizados zero e um, fazendo essa mesma análise de crescente ou decrescente, o raciocínio dele não estaria errado (Figura 17).

Figura 17: questão 1 da primeira atividade do Aluno 3



Utilizando o círculo trigonométrico dinâmico 1 no software GeoGebra:

1. Alterando os ângulos no controle deslizante, responda:

a) Quais os valores mínimo e máximo de seno entre 0° e 90°? Os valores de seno crescem ou decrescem conforme o ângulo varia de 0° até 90°?

0° = 0
90° = 1
crescem

b) Quais os valores mínimo e máximo de seno entre 90° e 180°? Os valores de seno crescem ou decrescem conforme o ângulo varia de 90° até 180°?

90° = 1
180° = 0
descrescem

c) Quais os valores mínimo e máximo de seno entre 180° e 270°? Os valores de seno crescem ou decrescem conforme o ângulo varia de 180° até 270°?

180° = 0
270° = 1 crescem

d) Quais os valores mínimo e máximo de seno entre 270° e 360°? Os valores de seno crescem ou decrescem conforme o ângulo varia de 270° até 360°?

270° = 1
360° = 0
decrescem

Fonte: acervo pessoal

O Grupo 2, que era composto por 2 alunos, indicou, por extenso, os valores de máximo e mínimo que o seno pode assumir em cada um dos quadrantes (Figura 18). Além disso, também fez a análise do intervalo ser crescente ou decrescente, como pode ser observado a seguir. Esse grupo compreendeu todos os conceitos envolvidos na questão. Outra dupla também respondeu da mesma forma.

Figura 18: questão 1 da primeira atividade do Grupo 2

Utilizando o círculo trigonométrico dinâmico 1 no software GeoGebra:

1. Alterando os ângulos no controle deslizante, responda:

a) Quais os valores mínimo e máximo de seno entre 0° e 90°? Os valores de seno crescem ou decrescem conforme o ângulo varia de 0° até 90°?

o valor de seno entre 0°–90°, maximo é 1 e o minimo é 0
é crescente

b) Quais os valores mínimo e máximo de seno entre 90° e 180°? Os valores de seno crescem ou decrescem conforme o ângulo varia de 90° até 180°?

o valor de seno entre 90°–180°, o maximo é 1 = 90° e o valor minimo é 0 = 180°
é decrescente

c) Quais os valores mínimo e máximo de seno entre 180° e 270°? Os valores de seno crescem ou decrescem conforme o ângulo varia de 180° até 270°?

o valor de seno entre 180°– 270°, o maximo é 0 = 180° e o minimo é -1 = 270°
é decrescente

d) Quais os valores mínimo e máximo de seno entre 270° e 360°? Os valores de seno crescem ou decrescem conforme o ângulo varia de 270° até 360°?

o valor de seno entre 270°– 360°, o maximo é 0 = 360° e o minimo é -1 = 270
é crescente

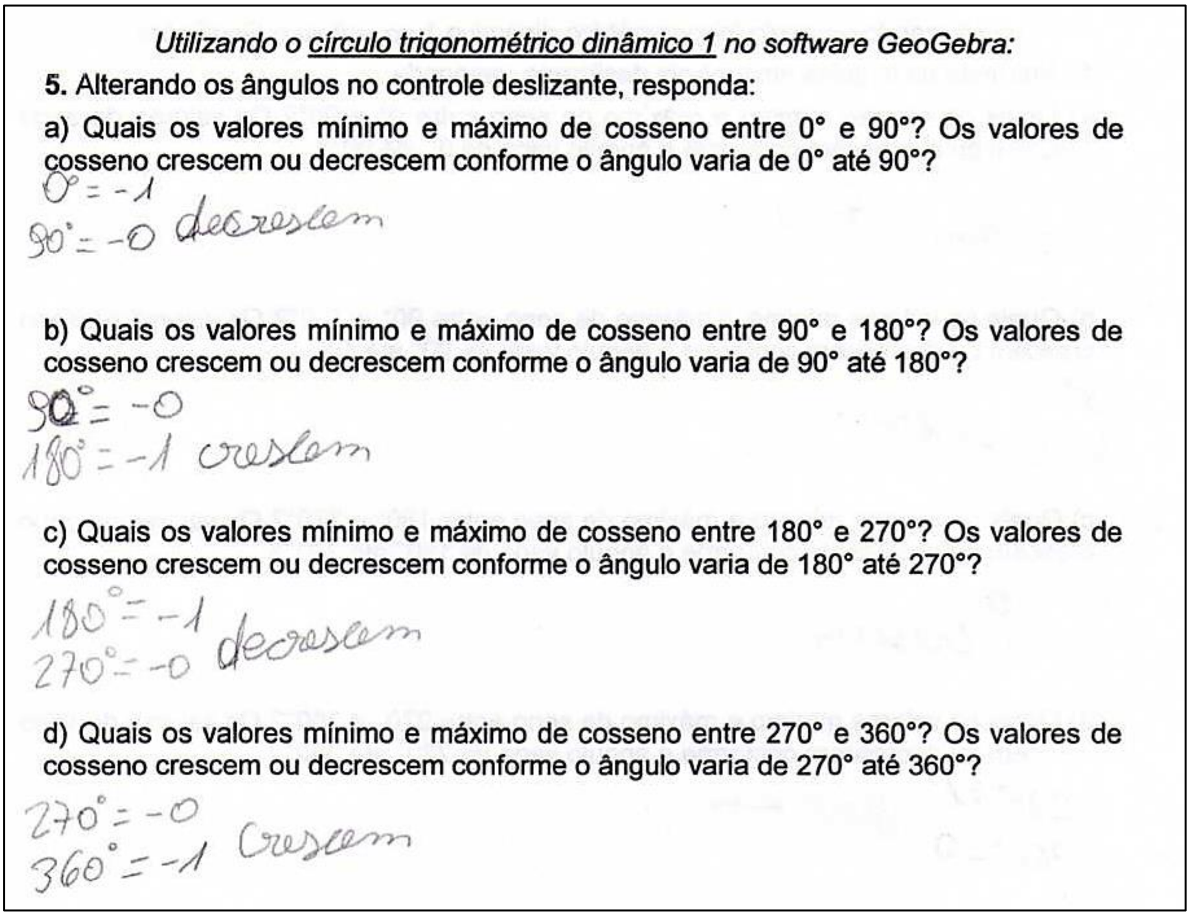
Fonte: acervo pessoal

No geral, a maioria da turma indicou qual o seno dos ângulos limites dos intervalos, não deixando claro os valores de máximo e mínimo que o seno pode assumir. Provavelmente não sentiram a necessidade de indicar se era máximo ou mínimo, já que os valores já foram registrados e era só fazer a análise. Sobre os intervalos serem crescentes ou decrescentes, a maior parte do alunado conseguiu compreender o conceito e responder de forma correta.

Os alunos conseguiram entender a relação entre o controle deslizante, o ângulo no círculo trigonométrico e o valor numérico do seno. Ao mexer o controle deslizante, perceberam que o mesmo alterava o valor numérico do ângulo, podendo também ser visualizado no círculo trigonométrico, e que essa alteração fazia os valores de seno mudar também. Pelo software mostrar simultaneamente como os diferentes registros se comportam ao alterar um deles, os estudantes conseguiram estabelecer uma coordenação entre essas diferentes representações, o que é importante para o aprendizado.

Semelhante à questão 1, mas agora com perguntas sobre cosseno, na questão 5 os alunos mantiveram mesmo nível de compreensão, com alguns destaques que devem ser comentados. O Aluno 3, que na questão 1 havia colocado todos valores de seno como positivos, na questão 5 colocou todos os valores negativos, conforme a Figura 19. O estudante pode ter entendido seno e cosseno como conceitos opostos, por serem visualizados, respectivamente, nos eixos vertical e horizontal, atribuindo ao seno valores positivos e ao cosseno, negativos.

Figura 19: questão 5 da primeira atividade do Aluno 3


Utilizando o círculo trigonométrico dinâmico 1 no software GeoGebra:

5. Alterando os ângulos no controle deslizante, responda:

a) Quais os valores mínimo e máximo de cosseno entre 0° e 90°? Os valores de cosseno crescem ou decrescem conforme o ângulo varia de 0° até 90°?

0° = -1
90° = -0 decrescem

b) Quais os valores mínimo e máximo de cosseno entre 90° e 180°? Os valores de cosseno crescem ou decrescem conforme o ângulo varia de 90° até 180°?

90° = -0
180° = -1 crescem

c) Quais os valores mínimo e máximo de cosseno entre 180° e 270°? Os valores de cosseno crescem ou decrescem conforme o ângulo varia de 180° até 270°?

180° = -1
270° = -0 decrescem

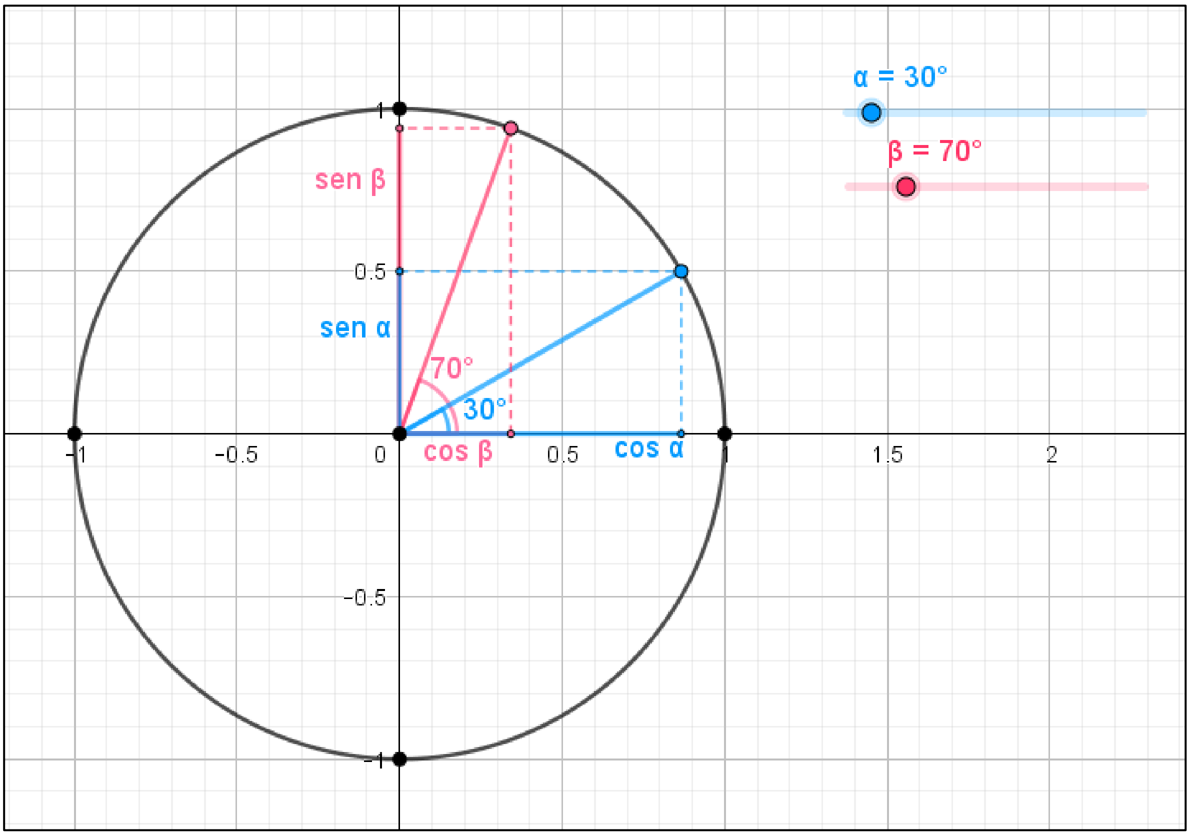
d) Quais os valores mínimo e máximo de cosseno entre 270° e 360°? Os valores de cosseno crescem ou decrescem conforme o ângulo varia de 270° até 360°?

270° = -0
360° = -1 crescem

Fonte: acervo pessoal

A segunda e terceira questão da atividade tinham como objetivo avaliar se os alunos compreenderam conceitos de simetria para encontrar ângulos cujos senos tinham o mesmo valor ou valores opostos. Para responder às perguntas, foi utilizado um arquivo intitulado de círculo trigonométrico 2, que pode ser visualizado abaixo na Figura 20. Essa construção permitia que os estudantes, a partir de dois controles deslizantes, observassem o comportamento de dois ângulos e seus respectivos seno, no eixo vertical, e cosseno, no eixo horizontal, no círculo trigonométrico, podendo compará-los.

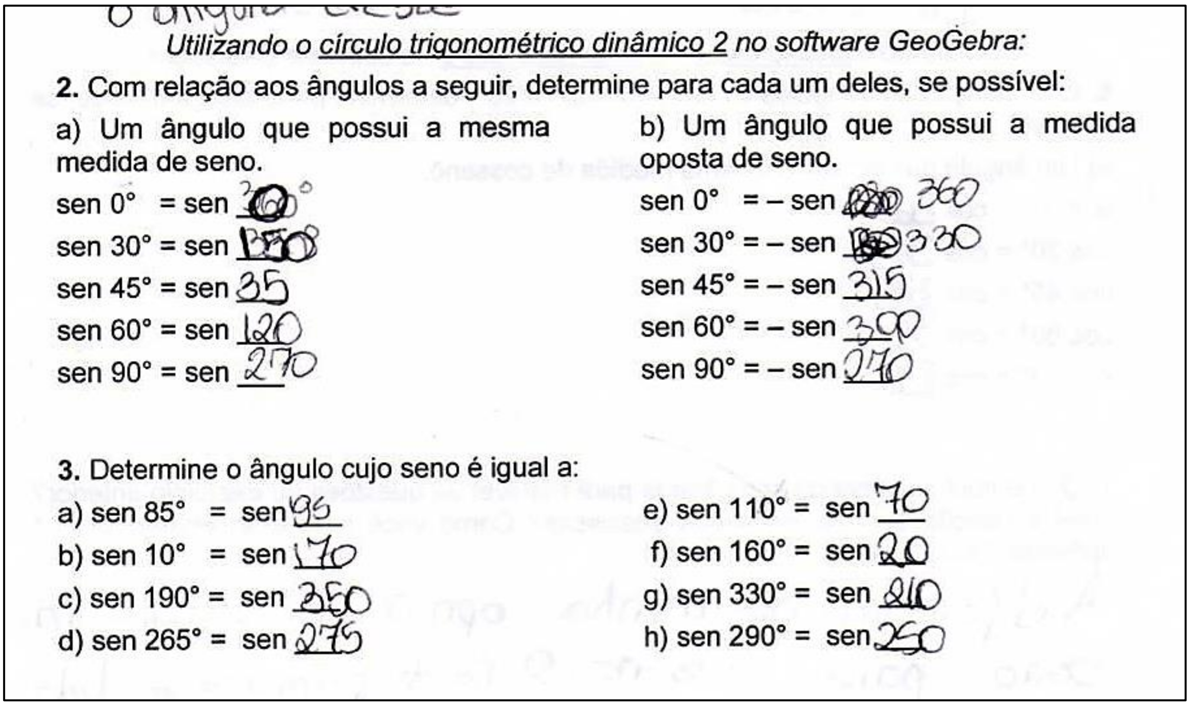
Figura 20: Círculo trigonométrico 2 da primeira atividade no GeoGebra



Fonte: construção própria

O Grupo 2, com exceção de três itens, acertou as duas questões, mostrando ter compreendido a simetria (Figura 21). Além disso, também conseguiu trabalhar com os diferentes registros de um mesmo objeto matemático no GeoGebra, mexendo nos controles deslizantes até obter ângulos cujas medidas de seno eram iguais no eixo das ordenadas. Na questão 6, que era semelhante, porém trabalhava com o cosseno, o Grupo 2 também mostrou compreender o conceito (Figura 22).

Figura 21: questões 2 e 3 da primeira atividade do Grupo 2



Utilizando o círculo trigonométrico dinâmico 2 no software GeoGebra:

2. Com relação aos ângulos a seguir, determine para cada um deles, se possível:

a) Um ângulo que possui a mesma medida de seno.

sen 0° = sen 180°
sen 30° = sen 150
sen 45° = sen 35
sen 60° = sen 120
sen 90° = sen 270

b) Um ângulo que possui a medida oposta de seno.

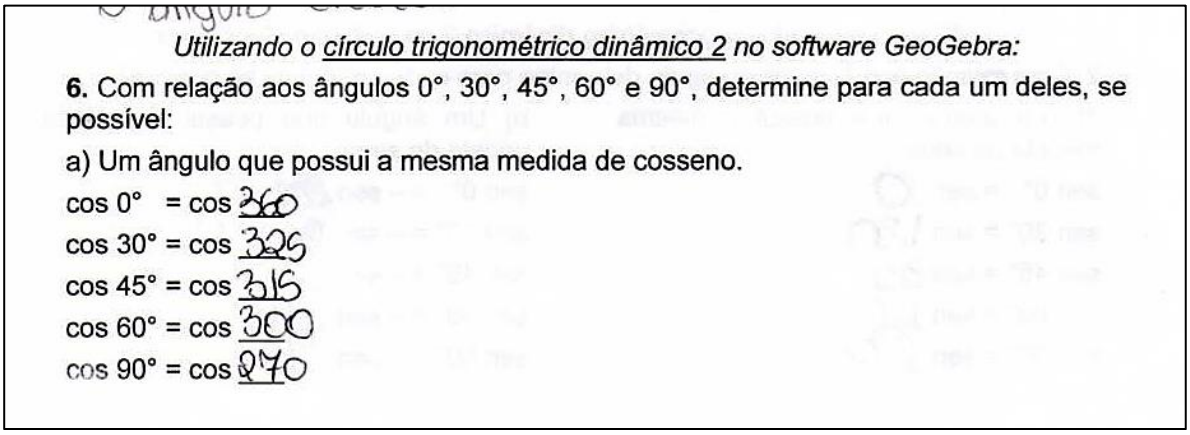
sen 0° = – sen 360
sen 30° = – sen 330
sen 45° = – sen 315
sen 60° = – sen 300
sen 90° = – sen 270

3. Determine o ângulo cujo seno é igual a:

a) sen 85° = sen 95
b) sen 10° = sen 170
c) sen 190° = sen 350
d) sen 265° = sen 275
e) sen 110° = sen 70
f) sen 160° = sen 20
g) sen 330° = sen 210
h) sen 290° = sen 250

Fonte: acervo pessoal

Figura 22: questão 6 da primeira atividade do Grupo 2



Utilizando o círculo trigonométrico dinâmico 2 no software GeoGebra:

6. Com relação aos ângulos 0°, 30°, 45°, 60° e 90°, determine para cada um deles, se possível:

a) Um ângulo que possui a mesma medida de cosseno.

cos 0° = cos 360
cos 30° = cos 325
cos 45° = cos 315
cos 60° = cos 300
cos 90° = cos 270

Fonte: acervo pessoal

Alguns estudantes compreenderam somente a simetria em relação ao eixo das ordenadas, fazendo com que respondessem de forma correta as questões relacionadas ao seno e errando as questões relacionadas ao cosseno, que deveriam ser analisadas identificando simetrias ao eixo das abcissas. O caso do Aluno 2, na Figura 23 e na Figura 24, é um exemplo desse erro.

Figura 23: questões 2 e 3 da primeira atividade do Aluno 2

Utilizando o círculo trigonométrico dinâmico 2 no software GeoGebra:

2. Com relação aos ângulos a seguir, determine para cada um deles, se possível:

a) Um ângulo que possui a mesma medida de seno.

sen 0° = sen 180°
sen 30° = sen 150
sen 45° = sen 135
sen 60° = sen 120°
sen 90° = sen 270

b) Um ângulo que possui a medida oposta de seno.

sen 0° = – sen 0
sen 30° = – sen 330°
sen 45° = – sen 315°
sen 60° = – sen 300°
sen 90° = – sen 270°

3. Determine o ângulo cujo seno é igual a:

a) sen 85° = sen 95°
b) sen 10° = sen 170°
c) sen 190° = sen 170°
d) sen 265° = sen 275
e) sen 110° = sen 70°
f) sen 160° = sen 20°
g) sen 330° = sen 210
h) sen 290° = sen 250°

Fonte: acervo pessoal

Figura 24: questão 6 da primeira atividade do Aluno 2

Utilizando o círculo trigonométrico dinâmico 2 no software GeoGebra:

6. Com relação aos ângulos 0°, 30°, 45°, 60° e 90°, determine para cada um deles, se possível:

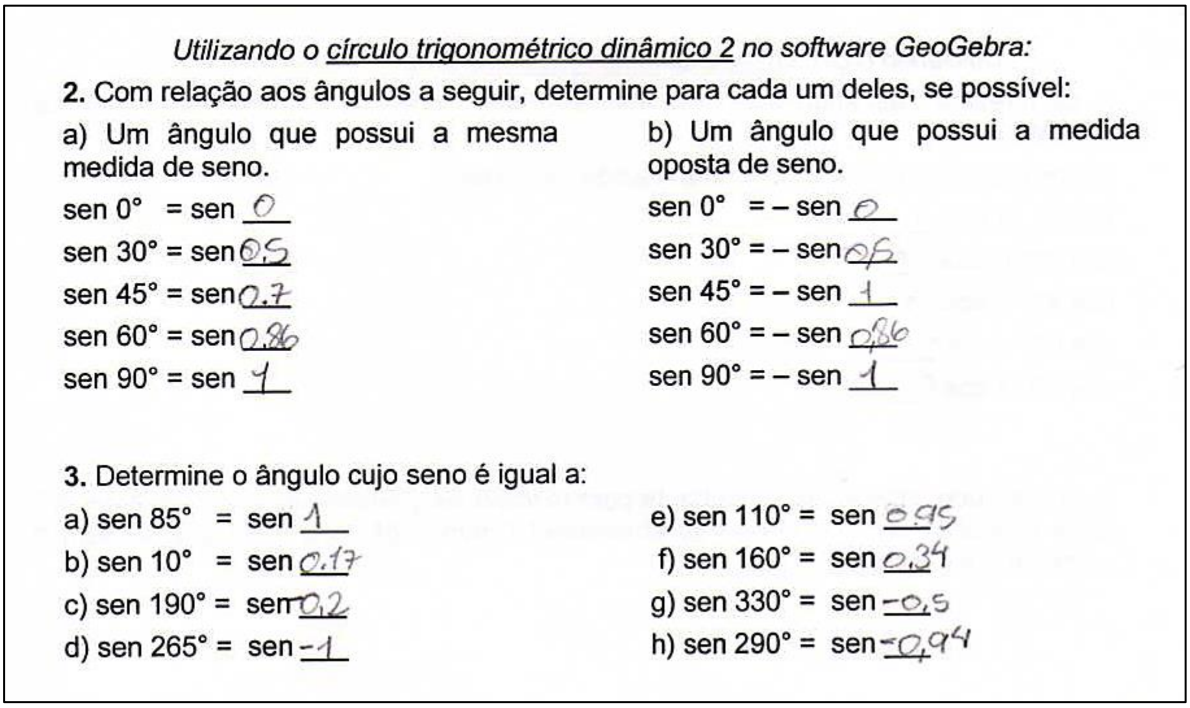
a) Um ângulo que possui a mesma medida de cosseno.

cos 0° = cos 180°
cos 30° = cos 150°
cos 45° = cos 135°
cos 60° = cos 120°
cos 90° = cos 270°

Fonte: acervo pessoal

O Aluno 4 usou a construção dinâmica errada no software GeoGebra. Nas questões 1 e 5, o recurso era o círculo trigonométrico 1, que relaciona ângulo com valores numéricos de seno e cosseno; nas questões 2, 3 e 6, era o círculo trigonométrico 2, que possui dois ângulos e pode-se comparar as medidas de seno e cosseno de ambos, para verificar casos de simetria. Como o Aluno 4 escolheu o recurso errado, acabou somente anotando os valores de seno dos ângulos (Figura 25).

Figura 25: questões 2 e 3 da primeira atividade do Aluno 4



Utilizando o círculo trigonométrico dinâmico 2 no software GeoGebra:

2. Com relação aos ângulos a seguir, determine para cada um deles, se possível:

a) Um ângulo que possui a mesma medida de seno.

sen 0° = sen 0
sen 30° = sen 0.5
sen 45° = sen 0.7
sen 60° = sen 0.86
sen 90° = sen 1

b) Um ângulo que possui a medida oposta de seno.

sen 0° = – sen 0
sen 30° = – sen 0,5
sen 45° = – sen 1
sen 60° = – sen 0,86
sen 90° = – sen 1

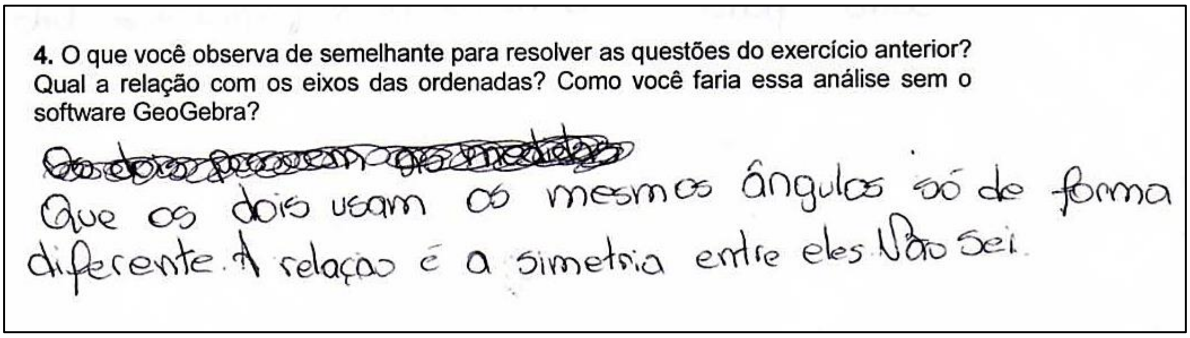
3. Determine o ângulo cujo seno é igual a:

a) sen 85° = sen 1
b) sen 10° = sen 0.17
c) sen 190° = sen 0.2
d) sen 265° = sen -1
e) sen 110° = sen 0.95
f) sen 160° = sen 0.34
g) sen 330° = sen -0.5
h) sen 290° = sen -0.94

Fonte: acervo pessoal

Por fim, serão analisadas as questões 4 e 7, que tinham como objetivo avaliar se os alunos conseguiam explicar, qual a relação entre seno e o eixo das ordenadas, e qual a relação entre o cosseno e o eixo das abcissas; além de perguntar como poderiam ser resolvidas as questões anteriores sem o auxílio do software GeoGebra. Somente o Grupo 2 escreveu sobre simetria, como pode ser observado na Figura 26.

Figura 26: questão 4 da primeira atividade do Grupo 2



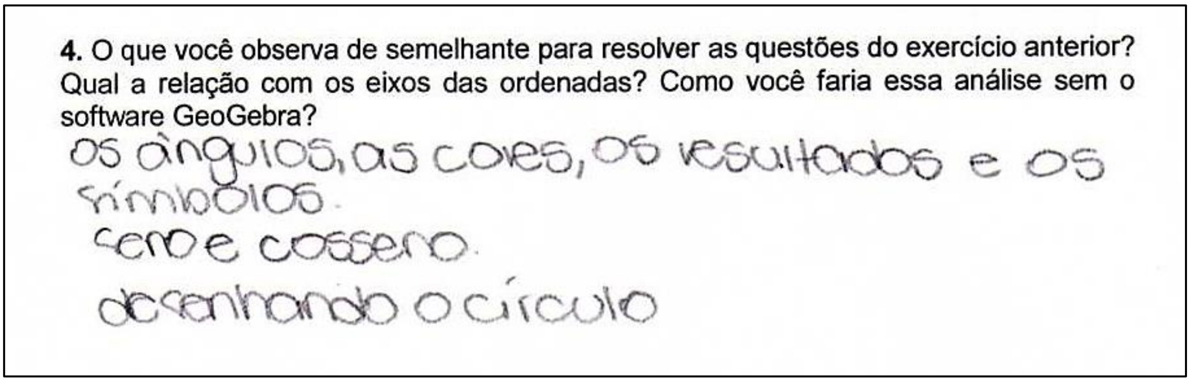
4. O que você observa de semelhante para resolver as questões do exercício anterior? Qual a relação com os eixos das ordenadas? Como você faria essa análise sem o software GeoGebra?

Que os dois usam os mesmos ângulos só de forma diferente. A relação é a simetria entre eles. Não sei.

Fonte: acervo pessoal

Já o Grupo 1 não citou padrões de resolução ou simetria. Porém, identificou elementos como cores e símbolos, e explicou que sem a ajuda do software, seria necessário desenhar o círculo trigonométrico, como mostra a Figura 27. O fato de não conseguir responder à questão não quer dizer que o estudante não tenha compreendido o conceito de simetria, talvez somente não saiba explicar, mas consegue aplica-lo de forma intuitiva para resolver as questões anteriores.

Figura 27: questão 4 da primeira atividade do Grupo 1



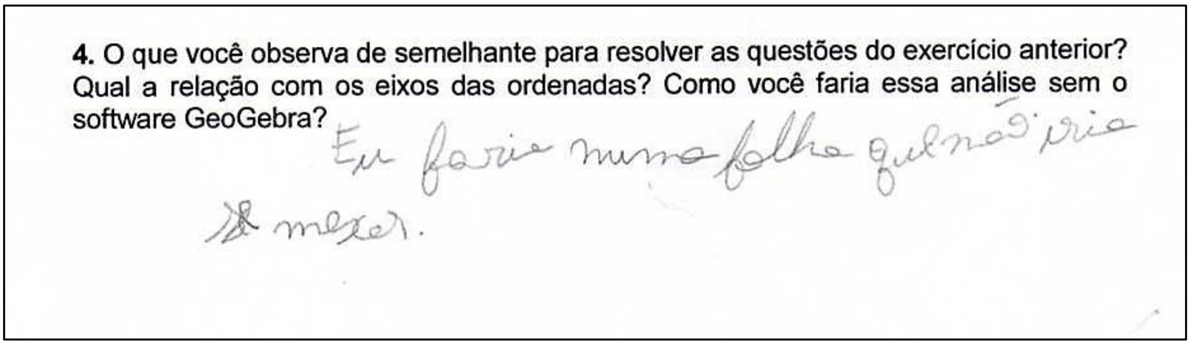
4. O que você observa de semelhante para resolver as questões do exercício anterior? Qual a relação com os eixos das ordenadas? Como você faria essa análise sem o software GeoGebra?

os ângulos, as cores, os resultados e os símbolos.
seno e cosseno.
desenhando o círculo

Fonte: acervo pessoal

As respostas do Aluno 3 referentes às questões 4 e 7 podem ser observadas, respectivamente, na Figura 28 e na Figura 29. O estudante destacou, na questão 4, o caráter estático de fazer a atividade utilizando uma folha; na questão 7, relatou que seria mais difícil sem utilizar os recursos do GeoGebra. Outros estudantes também responderam que seria necessário realizar desenhos para resolver as questões sem o uso de recursos tecnológicos.

Figura 28: questão 4 da primeira atividade do Aluno 3

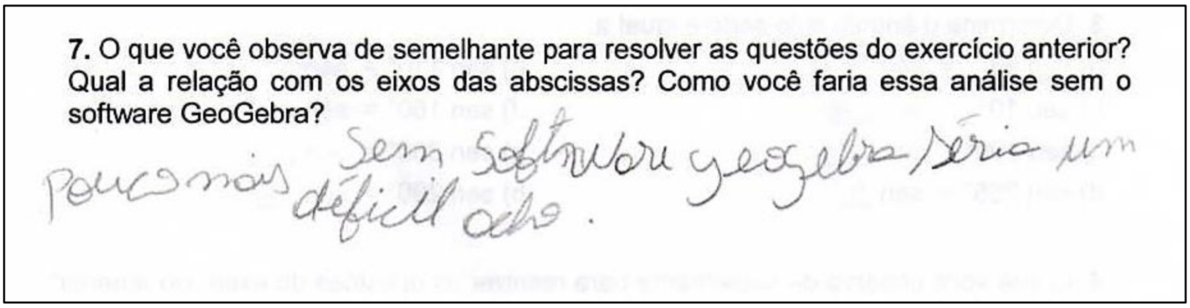


4. O que você observa de semelhante para resolver as questões do exercício anterior? Qual a relação com os eixos das ordenadas? Como você faria essa análise sem o software GeoGebra?

Eu faria numa folha que não iria se mexer.

Fonte: acervo pessoal

Figura 29: questão 7 da primeira atividade do Aluno 3


7. O que você observa de semelhante para resolver as questões do exercício anterior? Qual a relação com os eixos das abscissas? Como você faria essa análise sem o software GeoGebra?

Sem Softwore geogebra Séria um poucos mais déficill acho.

Fonte: acervo pessoal

Essas respostas sugerem a importância do uso de tecnologias no ensino, podendo contribuir para o aprendizado e estimular o aluno a fazer suas próprias conjecturas. Sobre o GeoGebra no ensino de Matemática, Basso e Notare (2012, p. 6) afirmam que:

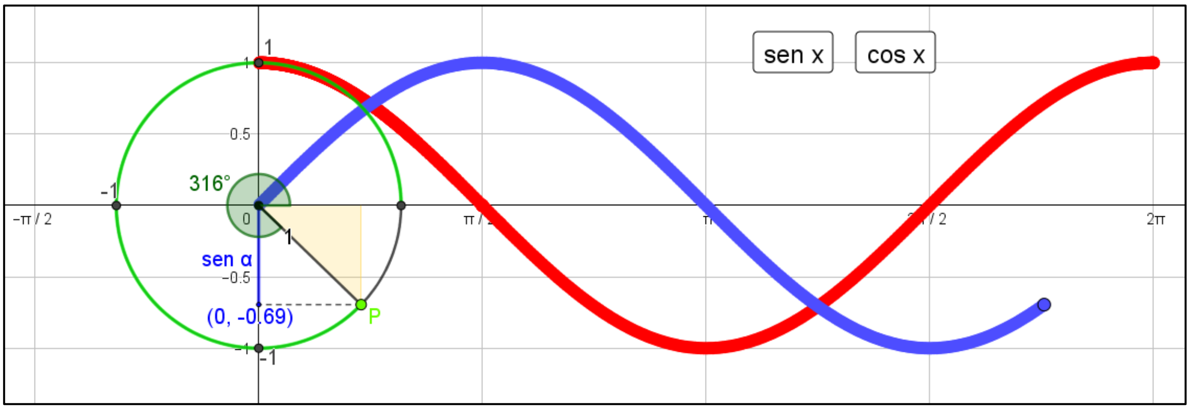
> Este ambiente torna-se um importante recurso para ser utilizado como um espaço de exploração e manipulação pelos alunos, pois valoriza a ação do aluno, tanto no processo de construção, quanto no processo de exploração. Neste sentido, sua utilização nas aulas de Matemática pode levar os alunos ao processo de tomada de consciência de conceitos matemáticos.

A primeira atividade abordou conteúdos que a professora já havia trabalhado em sala de aula, mas de outra forma. Acredito que foi importante para os alunos trabalharem um mesmo conteúdo com diferentes registros, porque ajuda na compreensão do objeto matemático estudado. Nesta atividade, principalmente no primeiro dia de trabalho, os alunos mostraram entusiasmo com a aula no laboratório de informática. Um aluno inclusive questionou se eu retornaria à escola nas aulas seguintes, demonstrando interesse em novas atividades com a mesma proposta. Cabe ressaltar que nas aulas que foram trabalhadas a primeira atividade, assim como nas demais que serão descritas, não houve correção ou discussão dos exercícios ao final da aula.

4.2 Segunda atividade

A segunda atividade tinha como objetivo avaliar a coordenação entre os registros do círculo trigonométrico e dos gráficos das funções seno e cosseno no plano cartesiano. Para responder as questões, os alunos manipulavam no GeoGebra um ponto P no círculo trigonométrico, responsável pela variação do ângulo e seu respectivo seno ou cosseno, dependendo da opção escolhida através dos botões, como mostra a Figura 30. Além disso, um ponto, cuja abscissa era a medida do arco formado pela origem do círculo trigonométrico e o ponto P, e que a ordenada era o valor do seno ou do cosseno do ângulo que forma o arco, desenhava a função no plano cartesiano.

Figura 30: segunda atividade no GeoGebra

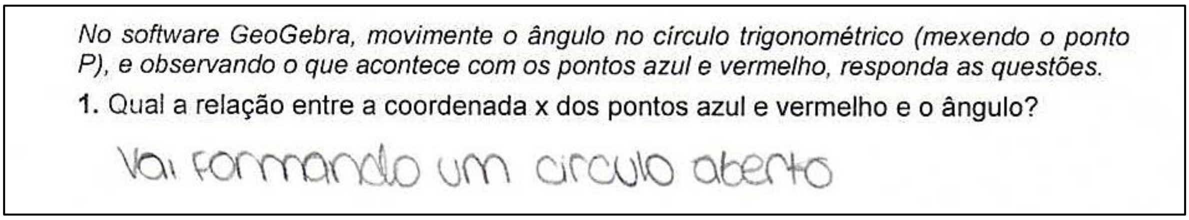


Fonte: construção própria

Assim como na atividade desenvolvida nas três primeiras aulas, alguns computadores apresentaram problemas de conexão com a internet, fazendo com que os alunos se agrupassem. Como os estudantes estavam livres para escolher os colegas de trabalho, surgiram alguns grupos novos.

As duas primeiras questões perguntavam qual a relação das coordenadas do ponto que desenhava as funções com o ângulo e seus valores de seno e cosseno. Na primeira questão, que perguntava sobre a abscissa do ponto, apareceram respostas variadas, como o caso de uma dupla de estudantes formada pelo Aluno 8 e Aluno 9, que serão analisados individualmente na próxima atividade, que chamarei de Grupo 3. Os estudantes visualizaram o gráfico das funções trigonométricas no plano cartesiano como uma representação de circunferência, conforme a Figura 31. O Grupo 3 não conseguiu realizar a conversão entre as representações do círculo trigonométrico e do plano cartesiano, a resposta mostra somente uma tentativa de tratamento em um mesmo registro.

Figura 31: questão 1 da segunda atividade do Grupo 3



No software GeoGebra, movimente o ângulo no círculo trigonométrico (mexendo o ponto P), e observando o que acontece com os pontos azul e vermelho, responda as questões.

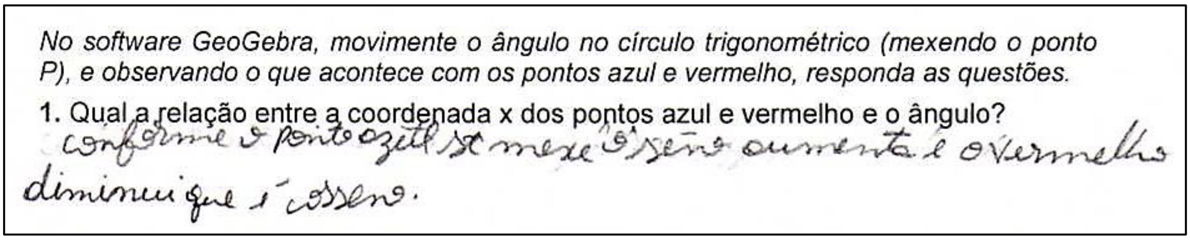
1. Qual a relação entre a coordenada x dos pontos azul e vermelho e o ângulo?

Vai formando um circulo aberto

Fonte: acervo pessoal

O Aluno 3 conseguiu compreender parcialmente a relação entre os registros do círculo trigonométrico e do plano cartesiano, observando o comportamento gráfico das funções seno e cosseno no primeiro quadrante, que crescem e decrescem, respectivamente. A Figura 32 reproduz a resposta.

Figura 32: questão 1 da segunda atividade do Aluno 3



No software GeoGebra, movimente o ângulo no círculo trigonométrico (mexendo o ponto P), e observando o que acontece com os pontos azul e vermelho, responda as questões.

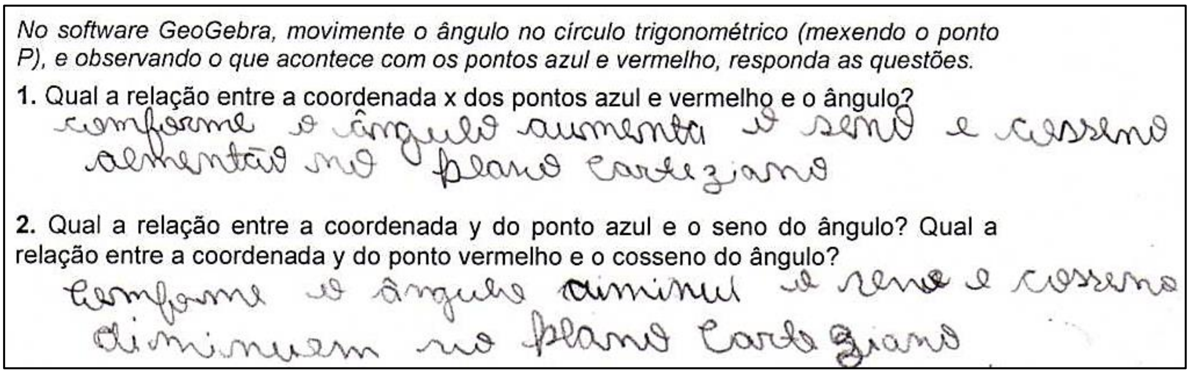
1. Qual a relação entre a coordenada x dos pontos azul e vermelho e o ângulo?

conforme o ponto azul se mexe o seno aumenta e o vermelho diminui que é o cosseno.

Fonte: acervo pessoal

O Aluno 4, nas questões 1 e 2, associou que aumentar o ângulo faz seus valores de seno e cosseno também aumentar e que diminuir o ângulo, tem o efeito oposto, como pode ser observado na Figura 33. Essa análise pode ter sido construída observando que mexendo o ponto P no sentido anti-horário, ou seja, aumentando o ângulo, o ponto que constrói os gráficos das funções vai se deslocando para a direita no eixo x; enquanto que mexer o ponto P no sentido horário, ou seja, diminuindo o ângulo, o deslocamento é para esquerda no eixo horizontal, dando uma ideia de aumento ou diminuição. Nesse caso, o estudante não conseguiu visualizar o objeto matemático completo em seus diferentes registros, mas conseguiu estabelecer uma conversão entre registros de partes desse objeto estudado. Segundo Duval (2012, p. 272): “A conversão de uma representação é a transformação desta função em uma interpretação em outro registro, conservando a totalidade ou uma parte somente do conteúdo da representação inicial”.

Figura 33: questões 1 e 2 da segunda atividade do Aluno 4



No software GeoGebra, movimente o ângulo no círculo trigonométrico (mexendo o ponto P), e observando o que acontece com os pontos azul e vermelho, responda as questões.

1. Qual a relação entre a coordenada x dos pontos azul e vermelho e o ângulo?

conforme o ângulo aumenta o seno e cosseno almentão no plano cartezianos

2. Qual a relação entre a coordenada y do ponto azul e o seno do ângulo? Qual a relação entre a coordenada y do ponto vermelho e o cosseno do ângulo?

conforme o ângulo diminui o seno e cosseno diminuem no plano cartesiano

Fonte: acervo pessoal

Entre dois registros pode existir uma relação de congruência. Duval (2003, p. 19) explica que ao realizar uma conversão entre dois registros, duas situações podem ocorrer: "a representação terminal transparece na representação de saída e a conversão está próxima de uma situação de simples codificação – diz-se então que há congruência –, ou ela não transparece absolutamente e se dirá que ocorre a não-congruência". A não congruência entre os registros de seno e cosseno no círculo trigonométrico e das funções seno e cosseno no plano cartesiano pode explicar a dificuldade da turma com as questões 1 e 2 da atividade.

A terceira questão da atividade trazia uma tabela com alguns ângulos notáveis, em radianos, que os estudantes deveriam preencher com os valores dos respectivos seno e cosseno. Além de avaliar a compreensão sobre o assunto, a questão também era pré-requisito para o próximo exercício, que consistia em desenhar os gráficos das funções. A maior parte da turma compreendeu a relação entre ângulo, seno e cosseno, conseguindo preencher a tabela, como o Grupo 3 (Figura 34).

Figura 34: questão 3 da segunda atividade do Grupo 3

3. Relacionando ângulo e seus respectivos seno e cosseno, complete a tabela abaixo:

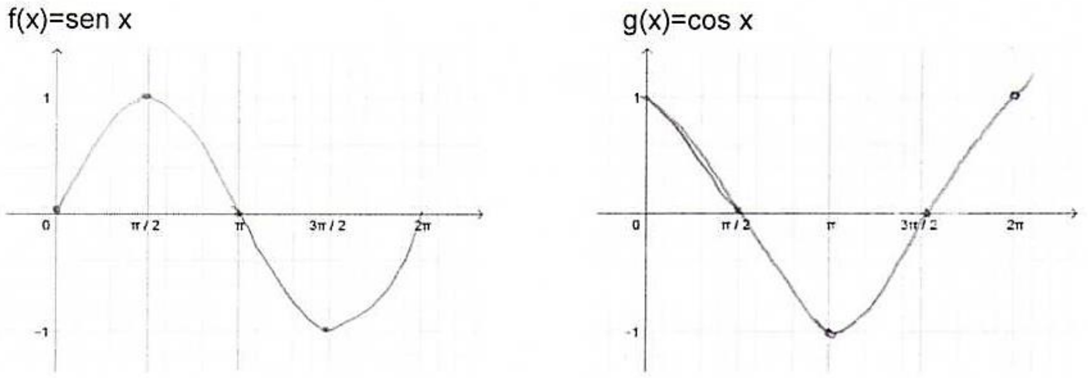
Ângulo	Seno	Cosseno
0	1	0
$\frac{\pi}{2}$	0	-1
π	-1	0
$\frac{3\pi}{2}$	0	1
2π	1	0

Fonte: acervo pessoal

O quarto exercício avaliava se o aluno compreendeu a conversão de seno e cosseno no círculo trigonométrico para o plano cartesiano, como uma função. O Grupo 3, com a ajuda dos dados encontrados no exercício anterior e da observação do gráfico no software GeoGebra, marcou os pontos no plano cartesiano e esboçou as curvas das funções seno e cosseno, como mostra a Figura 35.

Figura 35: questão 4 da segunda atividade do Grupo 3

4. Utilizando os dados dos exercícios anteriores, observando o comportamento da função seno e da função cosseno ao variar os ângulos completando uma volta no círculo trigonométrico, esboce o gráfico dessas funções entre 0 e 2π no plano cartesiano.

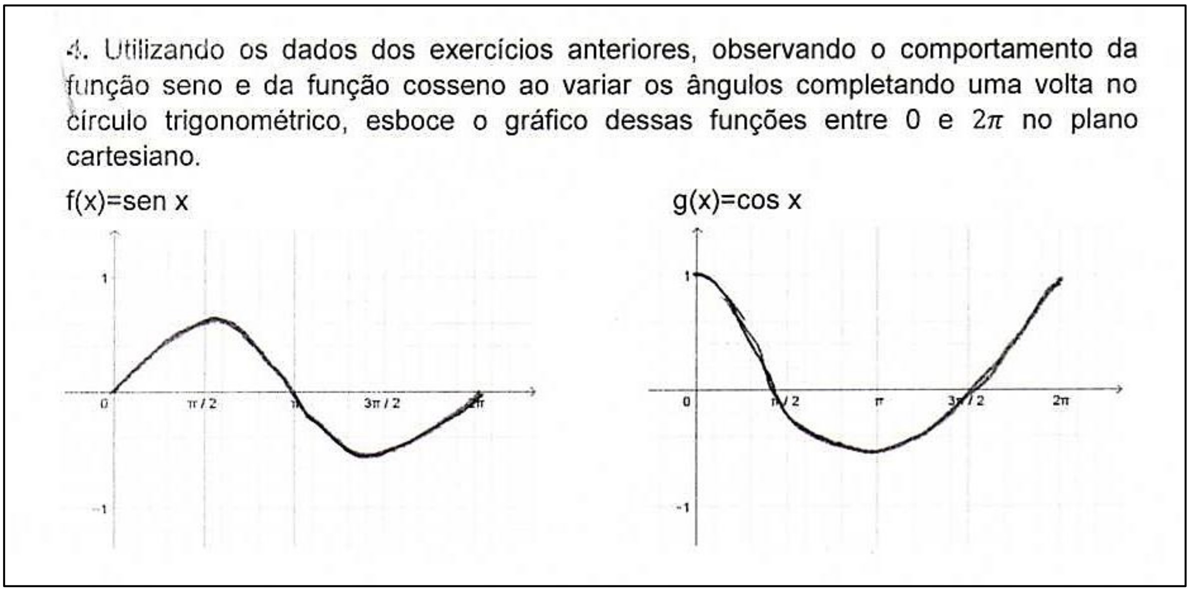


Fonte: acervo pessoal

O destaque dos pontos, cujas informações estavam presentes na tabela do exercício anterior, em conjunto com o esboço correto da curva, são evidências de que este grupo conseguiu realizar a conversão entre círculo trigonométrico e função no plano cartesiano, entendendo que são diferentes representações de um mesmo objeto matemático.

Alguns estudantes, como o Aluno 1 (Figura 36), reproduziram na atividade o gráfico visualizado no GeoGebra, mantendo a forma da curva, porém sem respeitar os valores das ordenadas. Isso dá indícios de que esses alunos compreenderam como a curva se comporta, mas não conseguiram entender completamente a relação entre os registros do círculo trigonométrico e do plano cartesiano. Novamente a não congruência entre os registros (DUVAL, 2003) pode explicar as dificuldades dos estudantes.

Figura 36: questão 4 da segunda atividade do Aluno 1



Fonte: acervo pessoal

A questão 5 perguntava o que acontece com as medidas de seno e cosseno dos ângulos após completar uma volta no círculo trigonométrico e o que isso representaria na função no plano cartesiano. O Grupo 3 compreendeu que se trata de um processo periódico e ainda indicou como seria o comportamento em cada um dos quadrantes – apesar do erro no segundo quadrante –, como pode ser observado na Figura 37. O estudante que chamarei de Aluno 5, que realizou a primeira atividade com o Grupo 2, mostrou também compreender que os valores vão crescer ou decrescer conforme o quadrante, mesmo com uma resposta diferente (Figura 38), sem indicar os intervalos.

Figura 37: questão 5 da segunda atividade do Grupo 3

5. Após uma volta completa no círculo trigonométrico, ao continuar variando os ângulos de forma crescente, você consegue dizer o que acontecerá com os valores de seno e cosseno? O que isso representa no gráfico no plano cartesiano?

De um quadrante para o outro varia entre 0,1; 0,0; 0,-1; -1,0...

Fonte: acervo pessoal

Figura 38: questão 5 da segunda atividade do Aluno 5

5. Após uma volta completa no círculo trigonométrico, ao continuar variando os ângulos de forma crescente, você consegue dizer o que acontecerá com os valores de seno e cosseno? O que isso representa no gráfico no plano cartesiano?

dependendo do angulo trigonometrico o seno e o cosseno almentam e diminuem no plano carteziano

Fonte: acervo pessoal

O estudante que chamarei de Aluno 6, que participou do Grupo 2 na primeira atividade, observou alguns conceitos que mostram compreensão da conversão de registros entre círculo trigonométrico e plano cartesiano, como reproduz a Figura 39. O aluno explica, utilizando as palavras “desce” e “sobe”, fazendo uma relação com o eixo horizontal, que as funções seno e cosseno são negativas e positivas em determinados intervalos.

Figura 39: questão 5 da segunda atividade do Aluno 6

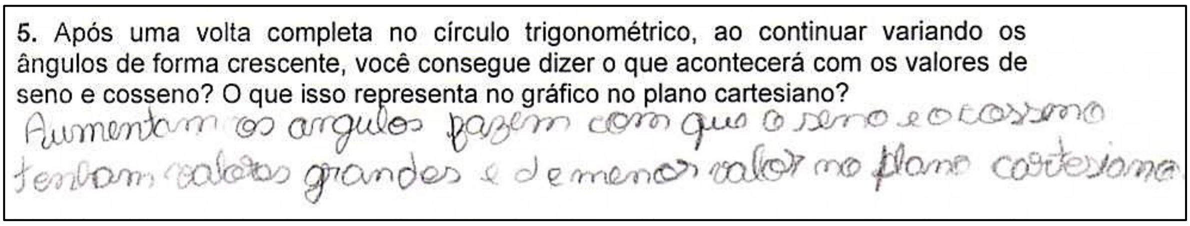
5. Após uma volta completa no círculo trigonométrico, ao continuar variando os ângulos de forma crescente, você consegue dizer o que acontecerá com os valores de seno e cosseno? O que isso representa no gráfico no plano cartesiano?

O seno quando chega em 180° o grafico desce e quando chega em 360° sobe, O cosseno quando chegа em 90° ele desce, quando chega em 270 ele sobe

Fonte: acervo pessoal

Já o estudante que chamarei de Aluno 7 mostrou não compreender a relação entre ângulo e suas medidas trigonométricas, não conseguindo realizar um tratamento em um mesmo registro. Ainda, não conseguiu fazer a conversão entre círculo trigonométrico e plano cartesiano. O aluno respondeu que quanto maior o ângulo, maiores serão seus valores de seno e cosseno, e menores serão esses valores no plano cartesiano, como mostra a Figura 40. A não compreensão da conversão resulta em dificuldades na aprendizagem. Segundo Duval (2012, p. 276): “A conversão das representações semióticas é a primeira fonte de dificuldade à compreensão em matemática”.

Figura 40: questão 5 da segunda atividade do Aluno 7



5. Após uma volta completa no círculo trigonométrico, ao continuar variando os ângulos de forma crescente, você consegue dizer o que acontecerá com os valores de seno e cosseno? O que isso representa no gráfico no plano cartesiano?

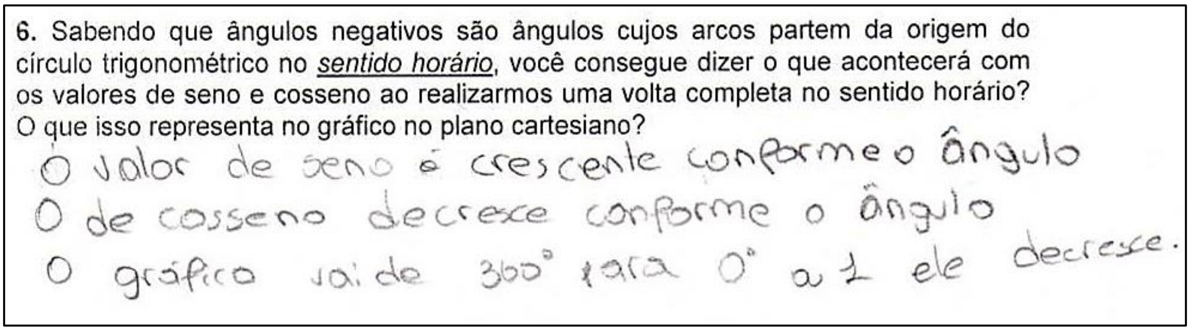
Aumentam os angulos fazem com que o seno e o cosseno tenham valores grandes e de menor valor no plano cartesiano

Fonte: acervo pessoal

O último exercício da atividade perguntava sobre ângulos negativos, explicando que se tratava de ângulos que partiam da origem dos arcos no círculo trigonométrico, no sentido horário. Talvez a definição de ângulos negativos ter sido feita em um enunciado não tenha sido o suficiente para a compreensão dos estudantes.

Mesmo assim, pode ser feita uma análise de algumas respostas, como o caso do Aluno 6, que associou que o seno é crescente e o cosseno é decrescente, talvez pela observação do comportamento dos gráficos no primeiro quadrante. Além disso, também descreveu que a função iria de 360° até 0°, mostrando que compreendeu a ideia de que os ângulos negativos seguem o sentido horário (Figura 41).

Figura 41: questão 6 da segunda atividade do Aluno 6



6. Sabendo que ângulos negativos são ângulos cujos arcos partem da origem do círculo trigonométrico no *sentido horário*, você consegue dizer o que acontecerá com os valores de seno e cosseno ao realizarmos uma volta completa no sentido horário? O que isso representa no gráfico no plano cartesiano?

O valor de seno é crescente conforme o ângulo
O de cosseno decresce conforme o ângulo
O gráfico vai de 360° para 0° a 1 ele decresce.

Fonte: acervo pessoal

A maioria da turma conseguiu visualizar as medidas de seno e cosseno no círculo trigonométrico e preencher esses valores na tabela nos seus respectivos ângulos. Além disso, trabalhar com radianos não foi um problema para os estudantes, pois já haviam estudado a conversão de graus para radianos.

No exercício da atividade que era necessário relacionar as informações da tabela com o plano cartesiano, um aluno conseguiu fazer a conversão entre os registros. Essa coordenação entre as representações de um mesmo objeto matemático faz o aluno diferenciar o objeto e sua representação (DUVAL, 2012). Ainda, Duval (2012, p. 268) afirma que: “A distinção entre um objeto e sua representação é, portanto, um ponto estratégico para a compreensão da matemática”.

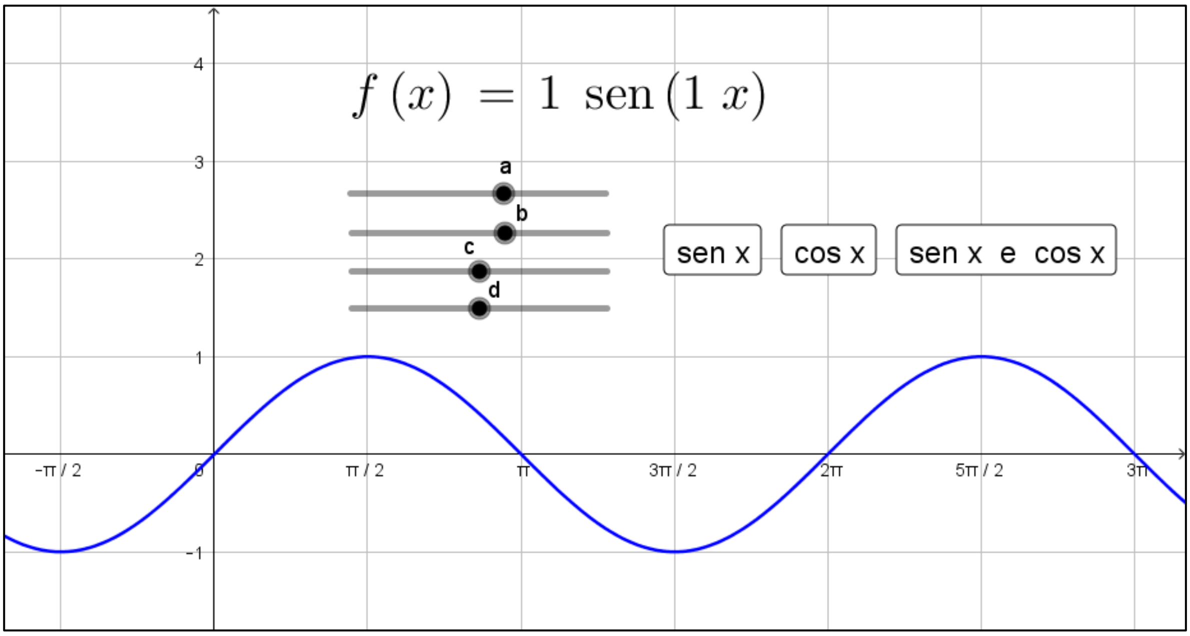
Mesmo que a maior parte da turma não tenha demonstrado compreender completamente a relação entre círculo trigonométrico e a função, foram reforçados e aprendidos conceitos importantes, como os valores de seno e cosseno de alguns ângulos notáveis e o comportamento das curvas das funções seno e cosseno no plano cartesiano. Pelo dinamismo do software GeoGebra, os estudantes conseguiram observar que existe uma relação entre o círculo trigonométrico e o plano cartesiano.

4.3 Terceira atividade

Essa última atividade tinha como objetivo avaliar se os alunos conseguiriam relacionar as representações algébricas e gráficas das funções seno e cosseno, junto com a capacidade de conversão entre os registros nos dois sentidos. Segundo Duval (2012, p. 284): “A coordenação de registros aparece como condição fundamental para todas as aprendizagens de base, ao menos nos domínios em que os únicos dados que são utilizados são as representações semióticas, como em matemática e em francês”.

Para responder as perguntas, os estudantes utilizaram uma construção no GeoGebra que permitia alterar, por meio de controles deslizantes, os parâmetros da lei da função e visualizar o que mudava na curva no plano cartesiano, além de poder alterar entre seno ou cosseno com os botões (Figura 42). Cabe ainda ressaltar que foi necessário interferir um pouco durante a atividade, com algumas dicas e explicações.

Figura 42: função seno da terceira atividade no GeoGebra

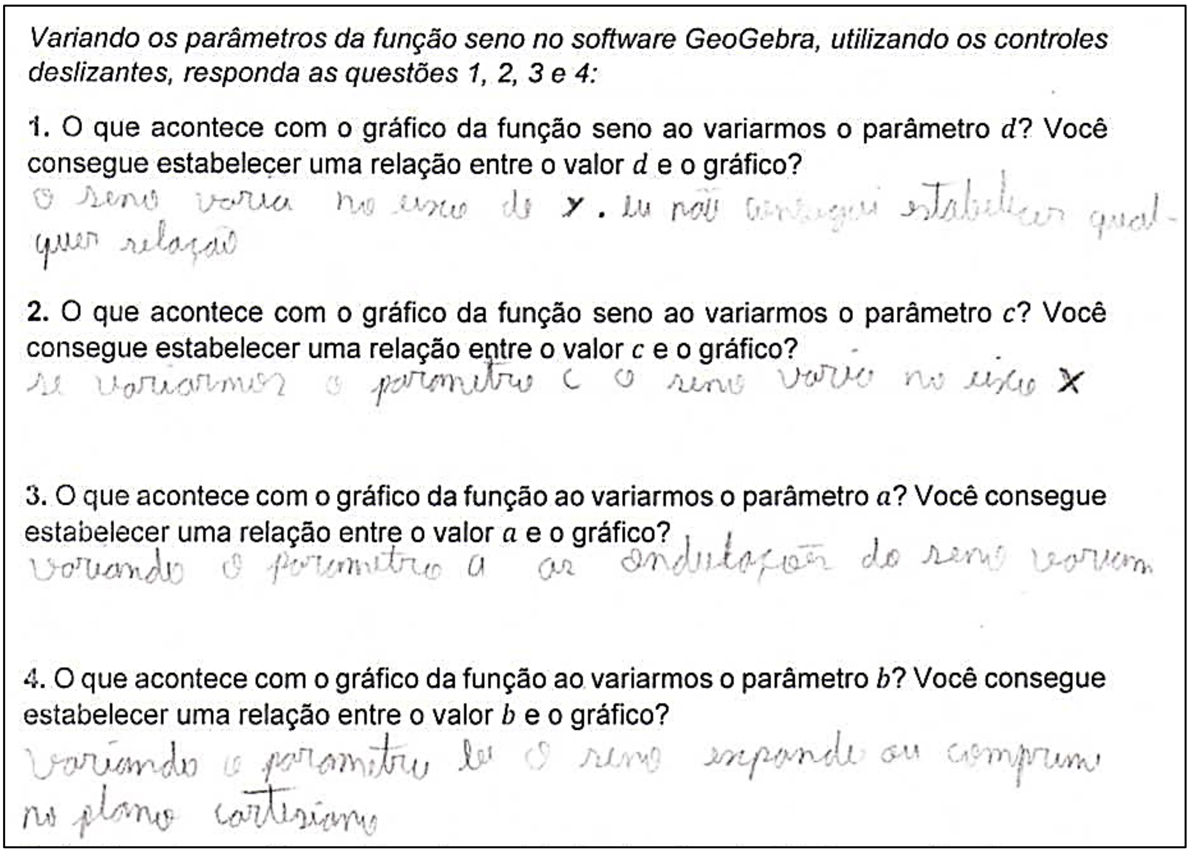


Fonte: construção própria

Nos primeiros exercícios, as perguntas eram para avaliar a entendimento da conversão da representação algébrica para a representação gráfica. A turma deveria alterar os parâmetros da lei da função e descrever como o gráfico se comportava. No início da aula, pude observar que um aluno estava entusiasmado ao ver seu colega realizar as transformações gráficas, conforme alterava os parâmetros da expressão com os controles deslizantes.

O Aluno 5 conseguiu relacionar a variação de cada um dos parâmetros da expressão que define a função com o gráfico no plano cartesiano. Nas questões 1 e 2, descreveu que a curva se deslocou nos eixos; nas questões 3 e 4, escreveu as palavras ondulação, expansão e compressão para explicar as transformações do gráfico. Essas respostas podem ser observadas na Figura 43.

Figura 43: questões 1, 2, 3 e 4 da terceira atividade do Aluno 5



Variando os parâmetros da função seno no software GeoGebra, utilizando os controles deslizantes, responda as questões 1, 2, 3 e 4:

1. O que acontece com o gráfico da função seno ao variarmos o parâmetro d? Você consegue estabelecer uma relação entre o valor d e o gráfico?

O seno varia no eixo do Y. Eu não consegui estabelecer qual-quer relação

2. O que acontece com o gráfico da função seno ao variarmos o parâmetro c? Você consegue estabelecer uma relação entre o valor c e o gráfico?

se variarmos o parametro c o seno varia no eixo X

3. O que acontece com o gráfico da função ao variarmos o parâmetro a? Você consegue estabelecer uma relação entre o valor a e o gráfico?

variando o parametro a as ondulações do seno variam

4. O que acontece com o gráfico da função ao variarmos o parâmetro b? Você consegue estabelecer uma relação entre o valor b e o gráfico?

variando o parametro b o seno expande ou comprime no plano cartesiano

Fonte: acervo pessoal

Um estudante, que participou do Grupo 1 na primeira atividade, que chamarei de Aluno 8, também mostrou compreender a conversão entre as representações algébrica e gráfica. Na primeira questão, escreveu que o gráfico sobe e desce para explicar o deslocamento vertical; na segunda, apontou que o gráfico se move para direita e esquerda, para explicar o deslocamento horizontal. Já nas questões 3 e 4, descreveu as alterações gráficas como distorção e compressão da linha, mostrando que observou mudanças na curva. Essas descrições estão na Figura 44.

Figura 44: questões 1, 2, 3 e 4 da terceira atividade do Aluno 8

Variando os parâmetros da função seno no software GeoGebra, utilizando os controles deslizantes, responda as questões 1, 2, 3 e 4:

1. O que acontece com o gráfico da função seno ao variarmos o parâmetro d? Você consegue estabelecer uma relação entre o valor d e o gráfico?

ELE SOBE E DESCE, VARIANDO O VALOR DE Y

2. O que acontece com o gráfico da função seno ao variarmos o parâmetro c? Você consegue estabelecer uma relação entre o valor c e o gráfico?

ELE SE MOVE PARA DIREITA E ESQUERDA, TAMBEM MODIFICANDO O VALOR Y

3. O que acontece com o gráfico da função ao variarmos o parâmetro a? Você consegue estabelecer uma relação entre o valor a e o gráfico?

ELE DISTORCE A LINHA

4. O que acontece com o gráfico da função ao variarmos o parâmetro b? Você consegue estabelecer uma relação entre o valor b e o gráfico?

ELE COMPRIME A LINHA

Fonte: acervo pessoal

O estudante, nomeado de Aluno 9, que na primeira atividade participou do Grupo 1, explicou que alterar o parâmetro d da função faz o gráfico ficar com valores positivos e negativos, talvez observando que se o deslocamento for para cima, com a curva acima da origem, o conjunto imagem é positivo; analogamente, deslocamento para baixo e conjunto imagem negativo. Sobre o parâmetro c, o estudante utiliza a mesma estrutura de explicação, provavelmente observando que o deslocamento para a direita do gráfico representa valores positivos, e o contrário, valores negativos. As respostas podem ser observadas na Figura 45.

Figura 45: questões 1, 2, 3 e 4 da terceira atividade do Aluno 9

Variando os parâmetros da função seno no software GeoGebra, utilizando os controles deslizantes, responda as questões 1, 2, 3 e 4:

1. O que acontece com o gráfico da função seno ao variarmos o parâmetro d? Você consegue estabelecer uma relação entre o valor d e o gráfico?

QUANDO MEXEMOS ELE FICA COM VALORES POSITIVOS E NEGATIVOS.

SIM, QUANDO MOVEMOS PARA CIMA E BAIXO ALTERA OS SINAIS

2. O que acontece com o gráfico da função seno ao variarmos o parâmetro c? Você consegue estabelecer uma relação entre o valor c e o gráfico?

ELE ALTERA O VALOR DO y.

MESMO MEXENDO ALTERA DE POSITIVO E NEGATIVO.

3. O que acontece com o gráfico da função ao variarmos o parâmetro a? Você consegue estabelecer uma relação entre o valor a e o gráfico?

ELE DISTORCE A LINHA

4. O que acontece com o gráfico da função ao variarmos o parâmetro b? Você consegue estabelecer uma relação entre o valor b e o gráfico?

ELE COMPRIME A LINHA

Fonte: acervo pessoal

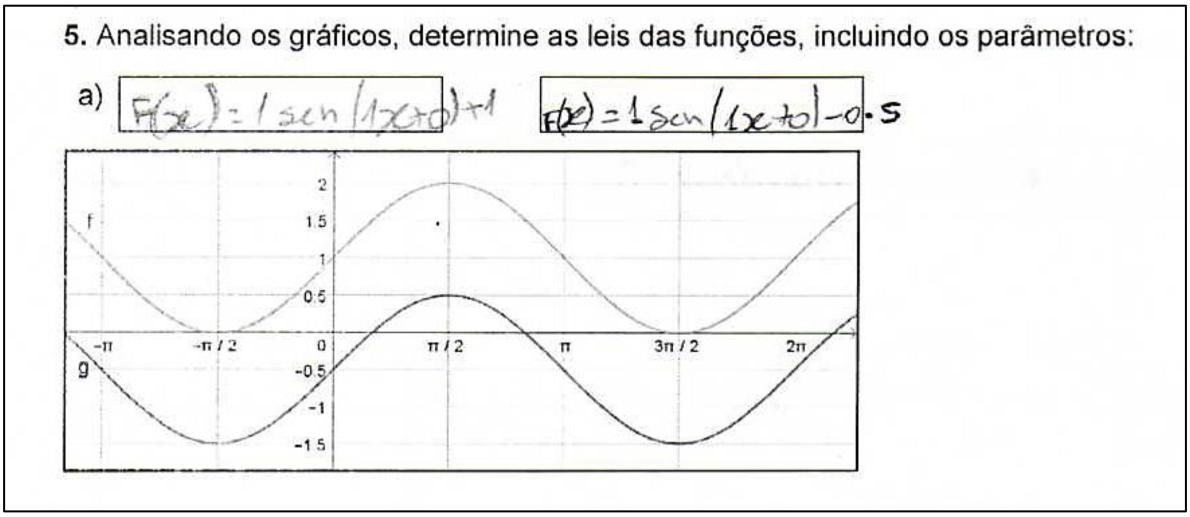
A maioria dos estudantes da turma que se propôs a fazer essa última atividade, conseguiu responder as quatro primeiras perguntas. Mesmo que alguns não tenham conseguido descrever muito bem o que compreenderam nas questões, acredito que todos tenham conseguido pelo menos visualizar, por meio do dinamismo do software GeoGebra, que havia uma relação entre os valores dos parâmetros da expressão algébrica e o comportamento da curva no plano cartesiano. Sobre trabalhar com dois registros, Duval (2003, p. 14) defende que: “A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação”.

A quinta questão avaliava se o estudante conseguia fazer a conversão do registro gráfico para o algébrico, o caminho inverso dos exercícios anteriores. Duval (2003, p. 20) aponta que: “Geralmente, no ensino, um sentido de conversão é privilegiado, pela ideia de que o treinamento efetuado num sentido estaria automaticamente treinando a conversão no outro sentido”. Pensando nisso, a quinta questão da atividade era o complemento das anteriores, de forma que se pudesse trabalhar ambos sentidos de conversão.

Os alunos deveriam manipular o gráfico da função alterando os parâmetros no software, até encontrar um gráfico igual ao da atividade impressa, para depois anotar a expressão algébrica obtida. Antes de começar a análise das questões, cabe ressaltar que o controle deslizante que alterava o parâmetro responsável pelo deslocamento horizontal da curva não estava em radianos, fazendo com que as constantes não fossem exatas nas leis das funções.

Alguns alunos demonstraram compreender a conversão do registro gráfico para o algébrico, com relação ao parâmetro responsável pelo deslocamento vertical. O caso do Aluno 1 é um exemplo, como mostra a Figura 46.

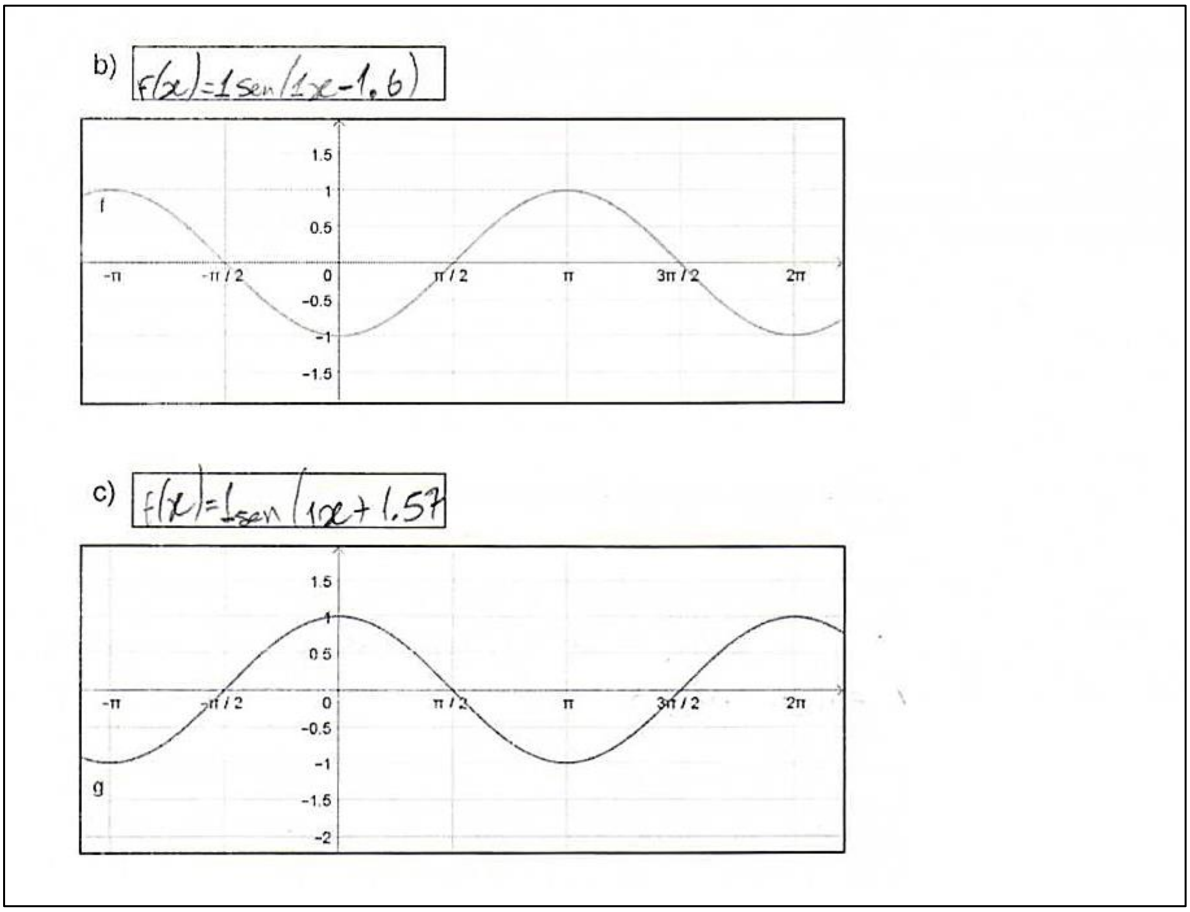
Figura 46: item a) da questão 5 da terceira atividade do Aluno 1



Fonte: acervo pessoal

Nos próximos dois itens da questão, que perguntavam sobre deslocamento horizontal, o Aluno 1 também mostrou compreender a relação entre as duas representações do mesmo objeto, como mostra a Figura 47.

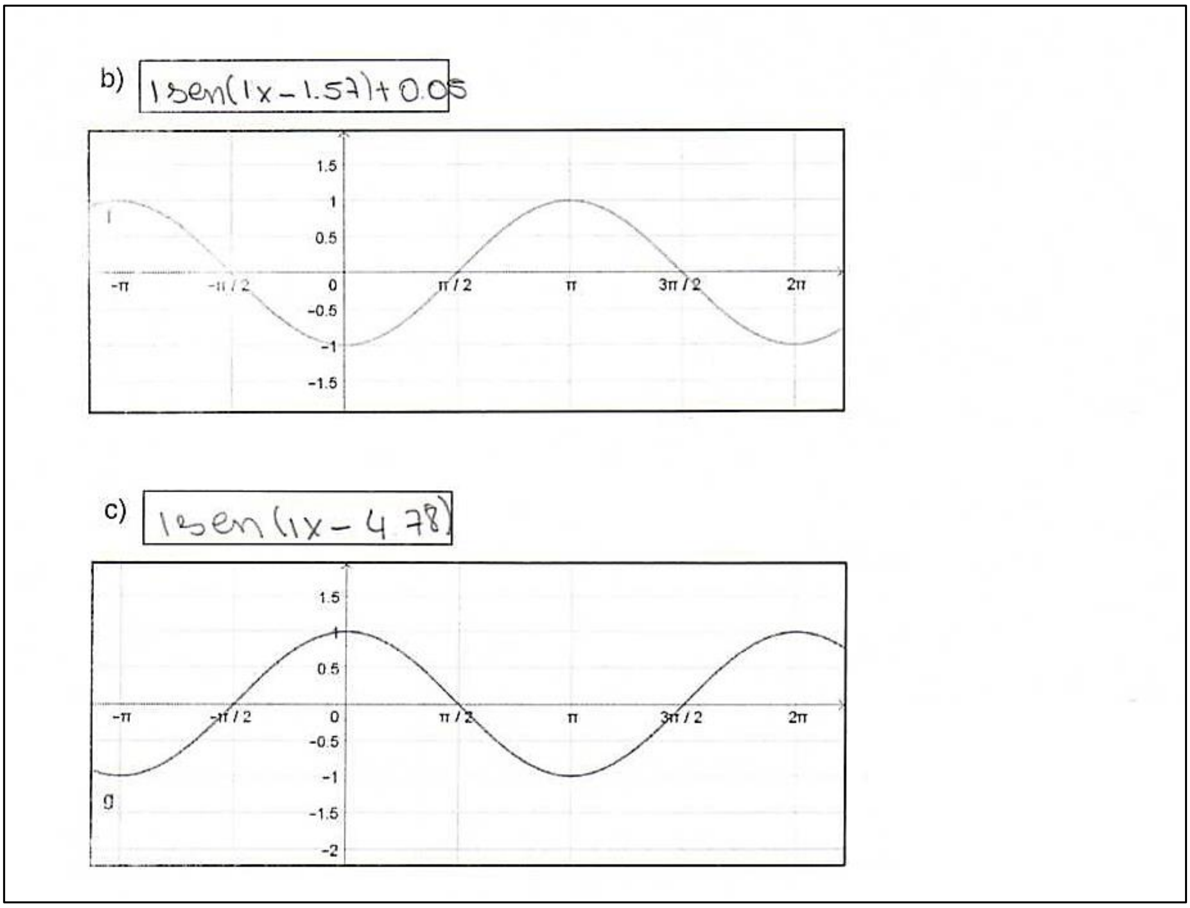
Figura 47: itens b) e c) da questão 5 da terceira atividade do Aluno 1



Fonte: acervo pessoal

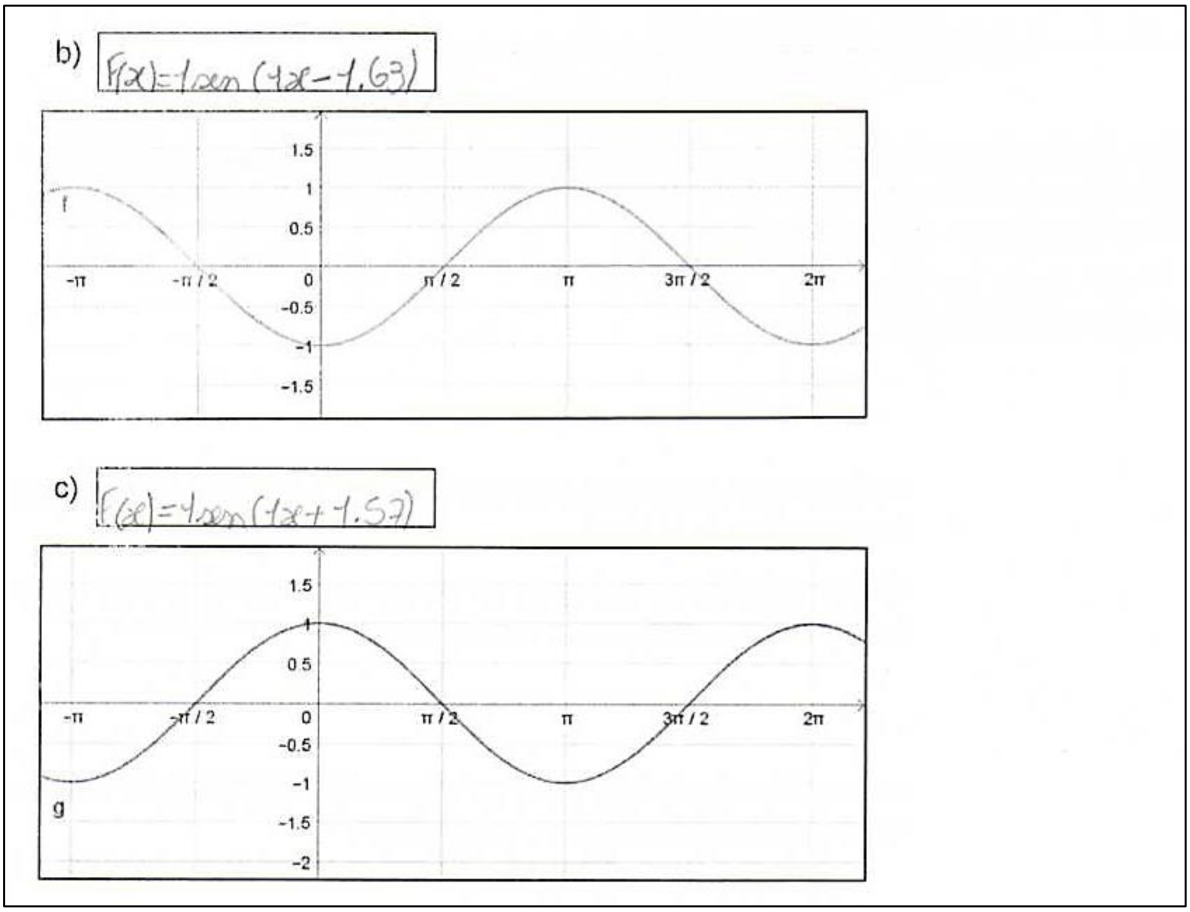
Outros estudantes também entenderam a relação entre o gráfico e o parâmetro, como no caso do Aluno 9, que inclusive achou um valor diferente para a constante responsável pelo deslocamento horizontal, devido à periodicidade da função (Figura 48). O Aluno 7, também encontrou um valor diferente, com menos exatidão, mas que graficamente o resultado foi semelhante aos obtidos pelos outros alunos (Figura 49), o que mostra que compreendeu o conceito assim como os demais.

Figura 48: itens b) e c) da questão 5 da terceira atividade do Aluno 9



Fonte: acervo pessoal

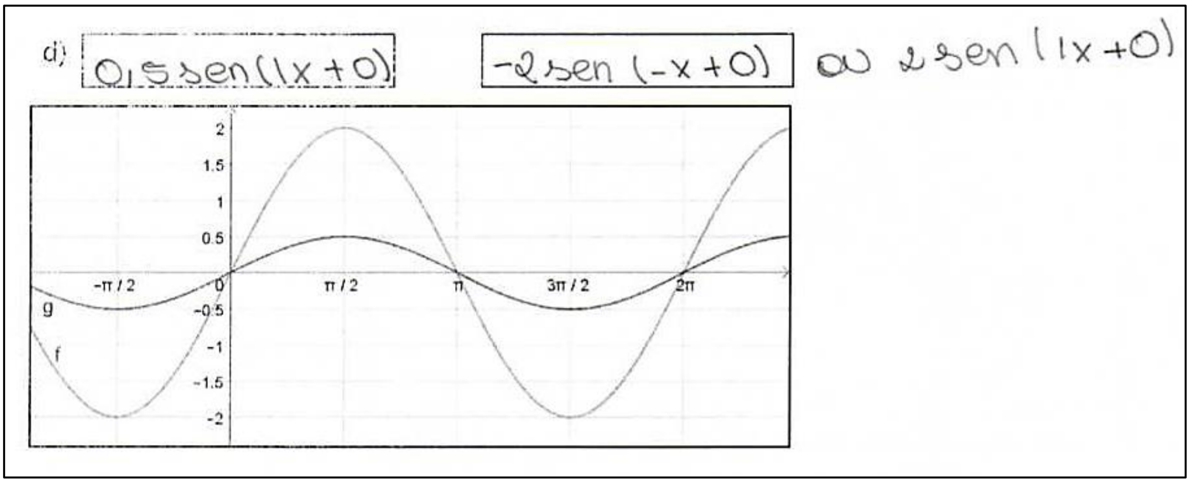
Figura 49: itens b) e c) da questão 5 da terceira atividade do Aluno 7



Fonte: acervo pessoal

O quarto item da questão 5 avaliava a compreensão da relação entre a amplitude do gráfico e o parâmetro na lei da função. O caso do Aluno 9 é interessante de ser analisado. O estudante determinou duas expressões algébricas para o mesmo gráfico, conseguindo realizar a conversão entre os registros gráfico e algébrico, como pode ser observado na Figura 50. Isso ajuda a entender que o objeto matemático e suas representações são conceitos diferentes. Além disso, cabe mais uma vez enfatizar que a conversão é importante para o entendimento do conteúdo. Duval (2003, p. 16) afirma que: “do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que [...] aparece como a atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão”.

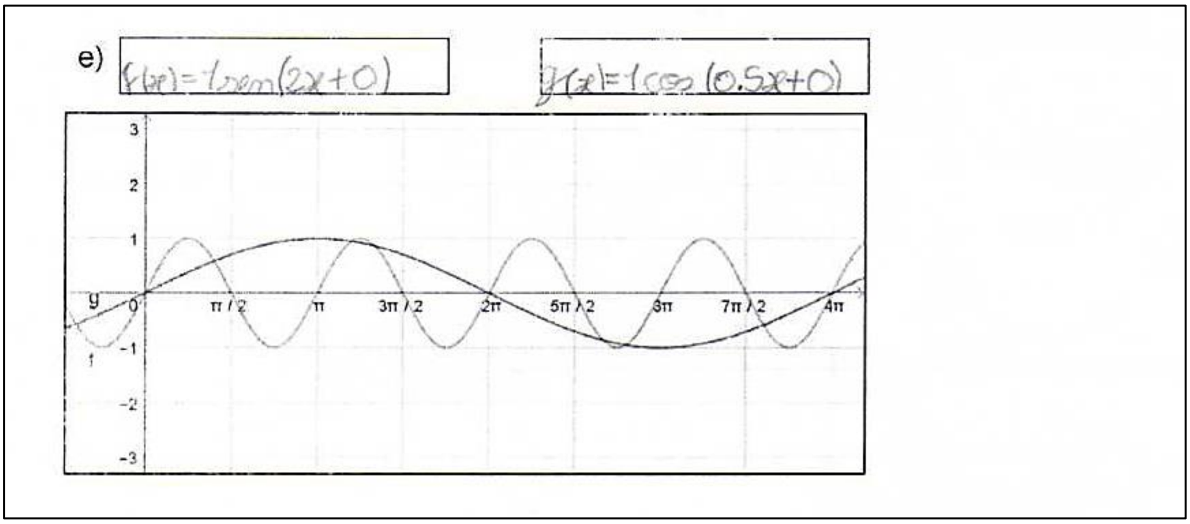
Figura 50: item d) da questão 5 da terceira atividade do Aluno 9



Fonte: acervo pessoal

O último item do exercício era sobre o período da função. A partir do gráfico, assim como nas questões anteriores, o estudante precisava determinar a lei da função com o parâmetro responsável pela alteração do período. O Aluno 7 mostrou entender a relação entre os registros da função seno no plano cartesiano e na expressão algébrica, como mostra a Figura 51.

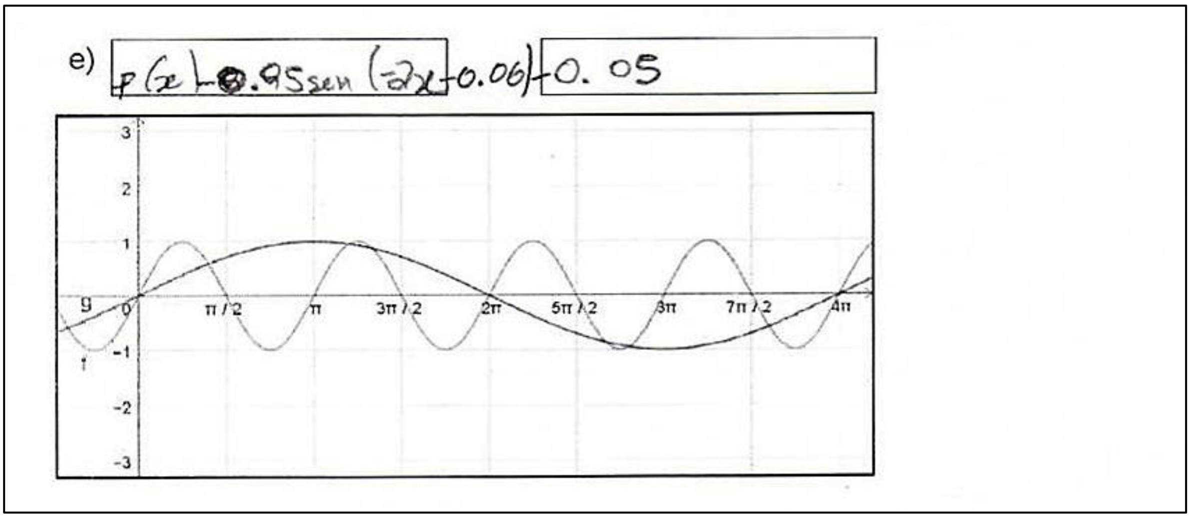
Figura 51: item e) da questão 5 da terceira atividade do Aluno 7



Fonte: acervo pessoal

O Aluno 1 determinou uma expressão cujos parâmetros dão uma boa aproximação da curva que era pedida na questão, mostrando que também compreendeu que existe uma relação entre a transformação do gráfico e o parâmetro da lei da função. Essa resposta pode ser visualizada na Figura 52.

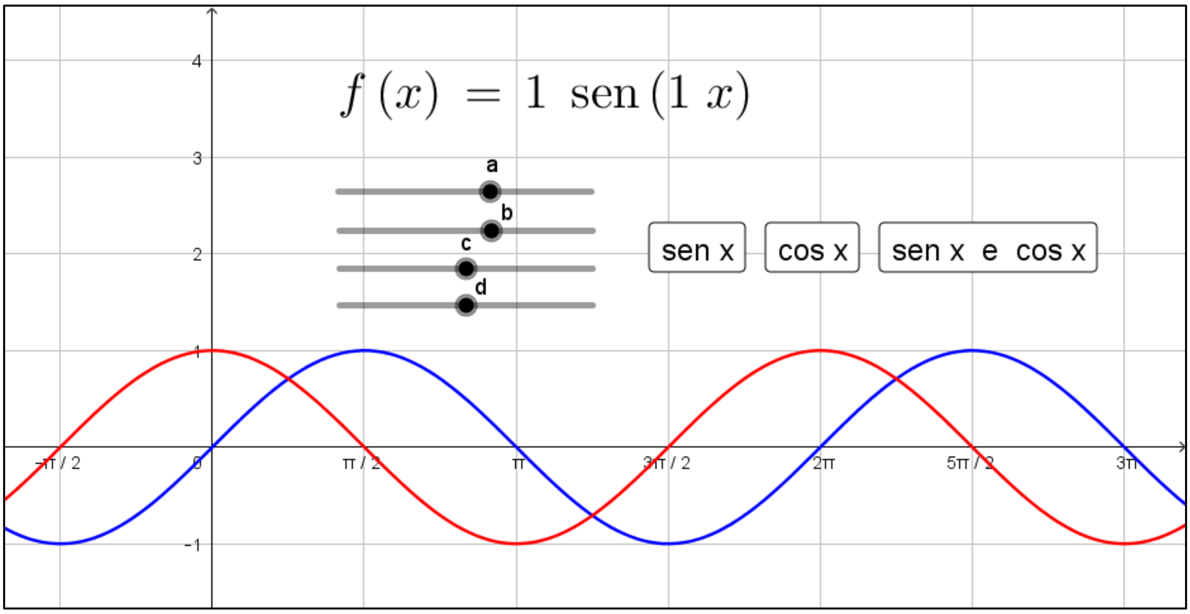
Figura 52: item e) da questão 5 da terceira atividade do Aluno 1



Fonte: acervo pessoal

A última questão da atividade perguntava se era possível, a partir da variação de algum dos parâmetros da expressão algébrica, fazer a curva da função seno ficar igual a curva da função cosseno. Para resolver esse exercício, o aluno contava com uma opção no GeoGebra que mostrava o gráfico da função cosseno fixo e o gráfico da função seno com possíveis alterações na sua lei, como mostra a Figura 53.

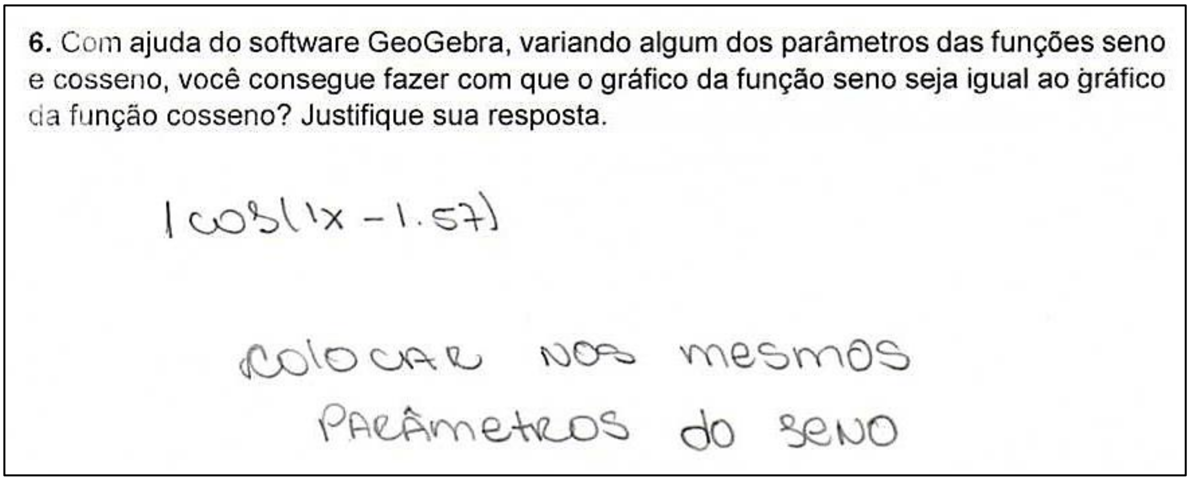
Figura 53: funções seno e cosseno da terceira atividade no GeoGebra



Fonte: construção própria

Somente o Aluno 9 conseguiu determinar o deslocamento horizontal que faz o gráfico das funções serem iguais. O estudante mexeu no parâmetro c até que a curva da função seno fosse coincidente com a curva da função cosseno, registrando o resultado na atividade impressa, como pode ser observado na Figura 54.

Figura 54: questão 6 da terceira atividade do Aluno 9


6. Com ajuda do software GeoGebra, variando algum dos parâmetros das funções seno e cosseno, você consegue fazer com que o gráfico da função seno seja igual ao gráfico da função cosseno? Justifique sua resposta.

1cos(1x - 1.57)

COLOCAR NOS MESMOS PARÂMETROS DO SENO

Fonte: acervo pessoal

Antes de finalizar a análise da atividade, gostaria de destacar uma observação que pode ser interessante. Um aluno começou a explorar alguns recursos do GeoGebra, como troca de cores das curvas das funções e habilitação do rastro, para depois clicar no botão que inicia a animação. O estudante ficou um tempo explorando esses recursos e observando os desenhos que eram construídos na interface do software.

No geral, na terceira atividade, foi mais fácil para os alunos fazer a conversão do registro algébrico para o gráfico. No processo inverso, os estudantes demonstraram um pouco mais de dificuldades. Segundo Duval (2003, p. 20): “Nem sempre a conversão se efetua quando se invertem os registros de partida e de chegada. Isso pode mesmo conduzir a contrastes muito fortes de acerto quando se inverte o sentido de conversão”. Essa diferença de complexidade dependendo do sentido de conversão é consequência da não congruência entre os registros (DUVAL, 2003).

5 Considerações Finais

O foco deste trabalho era avaliar como o ocorre a aprendizagem de trigonometria utilizando o software GeoGebra, a partir do desenvolvimento de uma sequência de atividades sobre círculo trigonométrico, funções seno e cosseno no plano cartesiano e transformações gráficas, sempre buscando estabelecer relações entre os diferentes registros envolvidos em cada uma das atividades. Como discutido anteriormente, essa metodologia pode proporcionar o aprendizado de um objeto matemático. A pesquisa foi realizada em uma turma de segundo ano do Ensino Médio, em uma escola pública.

A sequência de atividades foi pensada de forma que pudesse relacionar as Tecnologias da Informação e Comunicação, que estão presentes de diferentes modos no cotidiano da sociedade, além de serem citadas no PCNEM como algo a ser usado em aula, com a possibilidade de trabalhar diferentes registros de um mesmo objeto matemático como, por exemplo, a expressão algébrica que define uma função seno e a sua curva no plano cartesiano. A utilização do software GeoGebra foi o recurso escolhido para o desenvolvimento do trabalho, de forma que se pudesse estabelecer a relação entre as duas teorias.

Terminada a experiência na escola, pude observar alguns pontos a serem discutidos além dos dados coletados pela atividade desenvolvida. Algo que me chamou atenção, primeiramente, foi a rápida perda de entusiasmo de alguns alunos com a proposta desenvolvida. Nas primeiras aulas, a maioria da turma estava interessada na atividade. Porém, conforme os dias de trabalho foram passando, esse entusiasmo foi diminuindo rapidamente. Pode ser interessante desenvolver atividades mais curtas para o laboratório de informática, ou intercalar com outras propostas de aula.

Outro ponto que também merece destaque é o trabalho em grupo dos alunos. Pelos problemas técnicos do laboratório de informática, a atividade se desenvolveu com a turma dividida em pequenos grupos. Os alunos pareceram gostar de trabalhar dessa forma. Mas essa metodologia possui dois vieses: em alguns grupos, os integrantes se ajudavam, enriquecendo o aprendizado; porém em outros, os membros acabavam desviando a atenção dos demais colegas.

Uma parte da turma, por vezes, durante a aula, abria um software de desenho presente no sistema operacional dos computadores e começava a criar ilustrações. Além disso, alguns também utilizaram o GeoGebra para realizar seus esboços. Trabalhar com o GeoGebra em sala de aula, com uma proposta que envolva construções geométricas e ilustrações talvez seja uma boa maneira de relacionar conteúdos de geometria com tecnologia.

As atividades haviam sido criadas com o intuito de introduzir os conceitos de círculo trigonométrico e funções seno e cosseno. Pelas observações e análise dos dados, acredito que a sequência de atividades possa funcionar também como um complemento à teoria ao invés de uma introdução, isto é, fazer algumas definições para depois utilizar o dinamismo do GeoGebra para ilustrar as diferentes representações do que foi trabalhado, buscando sempre estabelecer relações entre as mesmas.

Com base nas observações em sala de aula e analisando as respostas dos estudantes às atividades, pode-se refletir como ocorreu a aprendizagem da trigonometria utilizando o GeoGebra. O dinamismo do software, junto com a separação da turma em grupos, permitiu aos alunos levantar hipóteses e discussões sobre o conteúdo, fazendo com que todos estudantes tenham conseguido compreender conceitos da trigonometria, alguns mais, outros menos. Além disso, no início do trabalho, desenvolver uma aula de Matemática no laboratório de informática mostrou que pode entusiasmar os alunos, possibilitando a aprendizagem.

É importante nós professores desenvolvermos diferentes propostas de aula, fugindo um pouco da aula expositiva, da zona de conforto. É preciso criar novas formas de ensino, de maneira que possam despertar a curiosidade e o interesse dos alunos pela Matemática, diminuindo, assim, a rejeição que se tem observado com a disciplina. Por isso, trabalhar em um ambiente comum para a maioria dos estudantes, utilizando computadores, pode ser uma estratégia interessante a ser abordada.

6 Referências

BASSO, Marcus; NOTARE, Márcia Rodrigues. Pensar-com Tecnologias Digitais de Matemática Dinâmica. **RENOTE**, Porto Alegre, v. 13, n. 2, dez. 2015.

BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio). Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC, 1998.

BRASIL, **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio). Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC, 1998.

CHAVANTE, Eduardo; Prestes, Diego. **Quadrante Matemática - 2º ano**, São Paulo: Editora SM, 2016. p.18-41.

D'AMBROSIO, Beatriz S. Como ensinar matemática hoje. **Temas e debates. SBEM. Ano II**, v. 2, p. 15-19, 1989.

DUVAL, Raymond; MORETTI, Trad Méricles Thadeu. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

GARCIA, Rosangela Silveira. Educação e Tecnologia: Desafios, Limites e Possibilidades. In: CONGRESSO INTERNACIONAL ABED DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA, 21, 2015. Bento Gonçalves. Anais eletrônicos... Bento Gonçalves: ABED, 2015. Disponível em: <http://www.abed.org.br/congresso2015/anais/pdf/BD_293.pdf>. Acesso em: 14 jul. 2018.

GERHARDT, Tatiana Engel; SILVEIRA, Denise Tolfo. Pesquisa Qualitativa. In: **Métodos de pesquisa**. Porto Alegre: Editora UFRGS, 2009. p. 31-32.

GRAVINA, Maria Alice. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. 2001. 262 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) — Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

LEONARDO, Fábio Martins de. **Conexões com a Matemática volume 2**, São Paulo: Editora Moderna, 2013. p.14-65.

LOPES, Maria Maroni. **Construção e aplicação de uma sequência didática para o ensino de trigonometria usando software Geogebra**. 2010. 141f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) — Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2010.

LOPES, Maria Maroni. Sequência didática para o ensino de trigonometria usando o software GeoGebra. **Bolema**, Rio Claro, v. 27, n. 46, ago. 2013.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara. **Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica**. Campinas: Papirus Editora, 2003.

MARTINS, Zélia. As TIC no ensino-aprendizagem da matemática. In: **Actas do X Congresso Internacional Galego-Português de Psicopedagogia. Braga: Universidade do Minho**. 2009.

O QUE É O GEOGEBRA? Disponível em: <https://www.geogebra.org/about>. Acesso em: 2 dez. 2016.

ROSA, Carlos Eduardo da. **Estudos de Introdução à Trigonometria Com Uso de Tecnologias**. 2015. 21 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

SALAZAR, Denise Mansoldo. **GeoGebra e o estudo das funções trigonométricas no Ensino Médio**. 2015. 133 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – ICE/Engenharia, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2015.

VALLI, Nádia Fernanda de Leão. **Introdução da Razão Trigonométrica e do Gráfico da Função Seno Com o Uso do GeoGebra**. 2015. 26 f. Trabalho de conclusão de curso (Especialização) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

ZILKHA, E. **Utilização do GeoGebra na Construção de Instrumentos**, no Estado do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro: IMPA, 2001. p.11-12. Trabalho de Conclusão de Curso.

Apêndice 1: termo de consentimento informado da escola

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática e Estatística

Termo de Consentimento Informado

O Colégio Protásio Alves, escola da rede pública estadual, neste ato, representada pela direção, por intermédio do presente documento, autoriza Felipe Borges de Oliveira, estudante de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), a utilizar a proposta de aula: "O Ensino de Trigonometria Utilizando o Software Geogebra" em uma turma do segundo ano do Ensino Médio, e analisá-la em seu Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), que é uma exigência para obtenção do título de Licenciado em Matemática pela UFRGS.

O trabalho será orientado pela professora Marcia Rodrigues Notare Meneghetti, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, orientadora do TCC, e pela professora de Matemática Josiane Fonseca Ney, do Colégio Protásio Alves.

O autorizado se obriga a manter em absoluto sigilo a identidade dos discentes que participarem da aplicação da proposta de aula.

Porto Alegre, 25/04/2018.

____

Eliana Alves Flores
ID 1670005/01
Vice-diretora Substituta legal

Diretor(a) da escola

____

Felipe Borges de Oliveira

De acordo:

Márcia R Notare

____

Prof.ª Márcia Rodrigues Notare Meneghetti

Josiane Ney

____

Prof.ª

Apêndice 2: termo de consentimento informado do aluno

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, R.G. ________________, responsável pelo(a) aluno(a) _______________________________________, da turma ___________, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada O Ensino de Trigonometria Utilizando o Software GeoGebra, desenvolvida pelo pesquisador Felipe Borges de Oliveira. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por Márcia Rodrigues Notare Meneghetti, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, por meio do telefone 55 51 3308 XXXX ou do e-mail marcia.notare@ufrgs.br.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) do objetivo estritamente acadêmico do estudo, que, em linhas gerais, é: observar a potencialidade do ensino de trigonometria utilizando recursos computacionais, em específico, o software GeoGebra.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) serão apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio da participação em aula, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. Esses dados ficarão armazenados por pelo menos 5 anos após o término da investigação.

Cabe ressaltar que a participação nesta pesquisa não infringe as normas legais e éticas. Além disso, asseguramos que o estudante poderá deixar de participar da investigação a qualquer momento, caso não se sinta confortável com alguma situação.

Como benefícios, esperamos com este estudo, produzir informações importantes sobre o uso de tecnologias como forma de aprendizagem, a fim de que o conhecimento construído possa trazer contribuições relevantes para a área educacional.

A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável no telefone 55 51 99308 XXXX ou no e-mail felipeboroliv@gmail.com.

Qualquer dúvida quanto a procedimentos éticos também pode ser sanada com o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), situado na Av.Paulo Gama, 110 - Sala 317, Prédio Anexo 1 da Reitoria - Campus Centro, Porto Alegre/RS - CEP: 90040-060 e que tem como telefone 55 51 3308 3738 e e-mail etica@propesq.ufrgs.br

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, _____ de ________________ de _______.

Assinatura do(a) responsável:

Assinatura do pesquisador:

Assinatura da orientadora da pesquisa:

Apêndice 3: termo de assentimento informado do aluno

TERMO DE ASSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, R.G. _______________, aluno(a) da turma ___________, declaro, por meio deste termo, que concordei em participar da pesquisa intitulada O Ensino de Trigonometria Utilizando o Software GeoGebra, desenvolvida pelo pesquisador Felipe Borges de Oliveira. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por Márcia Rodrigues Notare Meneghetti, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, por meio do telefone 55 51 3308 XXXX ou do e-mail marcia.notare@ufrgs.br.

Tenho ciência de que a minha participação não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) do objetivo estritamente acadêmico do estudo, que, em linhas gerais, é: observar a potencialidade do ensino de trigonometria utilizando recursos computacionais, em específico, o software GeoGebra.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas por mim serão apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de meu nome e pela idade.

A colaboração se fará por meio da participação em aula, em que serei observado(a) e terei minha produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. Esses dados ficarão armazenados por pelo menos 5 anos após o término da investigação.

Cabe ressaltar que a participação nesta pesquisa não infringe as normas legais e éticas. Além disso, asseguramos que você poderá deixar de participar da investigação a qualquer momento, caso não se sinta confortável com alguma situação.

Como benefícios, esperamos com este estudo, produzir informações importantes sobre o uso de tecnologias como forma de aprendizagem, a fim de que o conhecimento construído possa trazer contribuições relevantes para a área educacional.

A colaboração se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável no telefone 55 51 99308 XXXX ou no e-mail felipeboroliv@gmail.com.

Qualquer dúvida quanto a procedimentos éticos também pode ser sanada com o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), situado na Av.Paulo Gama, 110 - Sala 317, Prédio Anexo 1 da Reitoria - Campus Centro, Porto Alegre/RS - CEP: 90040-060 e que tem como telefone 55 51 3308 3738 e e-mail etica@propesq.ufrgs.br

Fui ainda informado(a) de que posso me retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, _____ de ________________ de _______.

Assinatura do(a) aluno(a):

Assinatura do pesquisador:

Assinatura da orientadora da pesquisa: