

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Instituto de Matemática  
Programa de Pós-Graduação em Matemática

**Teoremas de Ponto Fixo, Teoria dos Jogos e Existência do Equilíbrio de Nash  
em Jogos Finitos em Forma Normal**

Dissertação de Mestrado

Felipe Milan Guarnieri  
Porto Alegre  
2018



Dissertação submetida por Felipe Milan Guarnieri\* como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciência Probabilidade e Estatística Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Prof. Dr. Rafael Rigão Souza

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Artur Oscar Lopes

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Joana Mohr

Prof. Dr. Rogério Ricardo Steffenon

---

\*Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)



# Agradecimentos

Agradeço primeiramente e sobretudo aos meus pais, Rogéria e Ivani, pelo apoio incondicional e pela paciência. Agradeço também ao Rogério Steffenon, cujo direcionamento foi decisivo para eu entrar no mestrado, e aos professores da UFRGS que me compreenderam, especialmente ao meu orientador Rafael.

Agradeço também à minha maior influenciadora, a sorte.



# Resumo

Neste trabalho demonstram-se os teoremas de ponto fixo de Brouwer e Kakutani com o objetivo de provar a existência do equilíbrio de Nash em jogos finitos em forma normal. No primeiro capítulo apresentam-se as definições de teoria dos jogos, começando com jogos finitos em forma normal e terminando com o conceito de equilíbrio de Nash. Na primeira seção do capítulo dois desenvolve-se a teoria de simplexes, em  $\mathbb{R}^n$ , e se demonstra o teorema de Brouwer. Na seção seguinte, são relacionadas as propriedades de semi-continuidade superior e gráfico fechado em set functions, para então provar os teoremas de Celina e von Neumann que, em conjunto com o teorema de Brouwer, resultam no teorema de Kakutani no fim da seção. Como último resultado é demonstrado o teorema de existência do equilíbrio de Nash em jogos finitos em forma normal através do teorema de Kakutani, mostrando que o equilíbrio de Nash é um ponto fixo de uma set function.

**Palavras-chave:** teoremas de ponto fixo, Brouwer, Kakutani, teoria dos jogos, equilíbrio de Nash, jogos finitos.



# Abstract

In this work, the fixed-point theorems of Kakutani and Brouwer are proved with the intention of showing the existence of Nash equilibrium in finite normal-form games. In the first chapter the needed definitions of game theory are shown, starting with finite normal-form games and ending with the concept of Nash equilibrium. In the first section of chapter two, simplex theory in  $\mathbb{R}^n$  is developed and then the Brouwer fixed point theorem is proved. In the next section, some relations of upper hemi-continuity and closed graph in set functions are shown, then proving the theorems of Celina and von Neumann that, along with Brouwer theorem, result in Kakutani fixed-point theorem in the end of the section. As the last result, the existence of Nash equilibrium in finite normal-form games is proved through Kakutani's theorem, relating the Nash equilibrium to the fixed-point of a set function.

**Key-words:** fixed-point theorems, Brouwer, Kakutani, game theory, Nash equilibrium, finite games.



# Sumário

<b>1</b>	<b>TEORIA DOS JOGOS</b>	<b>1</b>
1.1	Jogos finitos em forma normal	1
1.2	Aplicações	5
1.2.1	Teoria da evolução	5
1.2.2	Economia	5
1.2.3	Exemplos	7
<b>2</b>	<b>TEOREMAS DE PONTO FIXO E EXISTÊNCIA DO EQUILÍBRIO DE NASH</b>	<b>13</b>
2.1	O teorema do ponto fixo de Brouwer	13
2.1.1	Convexidade	13
2.1.2	Simplexes	14
2.1.3	O teorema	21
2.2	O teorema do ponto fixo de Kakutani	22
2.2.1	Um pouco de Análise em $\mathbb{R}^n$	22
2.2.2	O teorema	26
2.2.3	Equilíbrio de Nash para jogos finitos	26
	<b>Referências</b>	<b>29</b>



# 1 TEORIA DOS JOGOS

Teoria dos jogos é o ramo da matemática que estuda a interação entre agentes racionais a partir da quantificação das preferências individuais. Não é importante definir racionalidade neste texto, pois o conceito vai ser assimilado de outras formas. Por exemplo, o estudo de leilões é feito na teoria dos jogos, onde estudam-se as tomadas de decisões dos participantes do leilão frente as situações que podem acontecer. De forma geral, qualquer interação de agentes, cujo resultado das decisões puder ser quantificado de uma forma ordenada e razoável, pode ser estudado em teoria dos jogos (para mais informações, veja o capítulo 3 de [15]).

O texto trabalha sobre o tipo de jogos mais simples, os jogos finitos em forma normal.

## 1.1 Jogos finitos em forma normal

**Definição 1.1.1.** *Um jogo finito de  $n$  jogadores em forma normal é uma tríade  $(N, A, u)$  onde:*

- $N$  é o conjunto de jogadores, indexados por  $i$ ;
- $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ , onde  $A_i$  é o conjunto finito de ações (estratégias puras) disponíveis para o  $i$ -ésimo jogador. Cada elemento de  $A$  é chamado de perfil de estratégia;
- $u = (u_1, \dots, u_n)$ , onde  $u_i : A \rightarrow \mathbb{R}$  é a função utilidade (payoff) do  $i$ -ésimo jogador.

Por exemplo, considere duas pessoas dirigindo na estrada, em direções opostas e prestes a se cruzar. O jogador  $J_1$  tem duas alternativas, ir pela faixa da direita ou esquerda; o mesmo para o jogador  $J_2$ . Se ambos passam por faixas diferentes então a função utilidade retorna 1 para os dois, já que os dois ficam satisfeitos em continuar seu caminho; se ambos passam pela mesma faixa, a função utilidade retorna  $-1$  para ambos, pois seus carros colidem. Pode-se modelar esta situação como um jogo em forma normal, sendo

- $N = \{J_1, J_2\}$ ;
- $A = A_1 \times A_2 = \{(Direita, Direita), (Direita, Esquerda), (Esquerda, Direita), (Esquerda, Esquerda)\}$ , com  $A_1 = A_2 = \{Direita, Esquerda\}$ ;
- $u = (u_1, u_2)$ , onde  $u_i : A \rightarrow \mathbb{R}$  é a função utilidade que retorna  $-1$  para o  $i$ -ésimo jogador se o perfil de estratégias resultar em colisão e retorna 1 caso contrário.

A principal característica dos jogos finitos em forma normal é a possibilidade de representação em forma matricial. O jogo acima pode ser representado na tabela 1.

	$J_2$	D	E
$J_1$		D	E
D		(1,1)	(-1,-1)
E		(-1,-1)	(1,1)

Tabela 1 – Jogo em forma normal.

A primeira coluna e a primeira linha representam as ações dos jogadores  $J_1$  e  $J_2$ , respectivamente. As outras células representam os payoffs. Suponha, por exemplo, que  $J_1$  escolha a ação  $D$  (direita) e  $J_2$  escolha a ação  $E$  (esquerda) (os jogadores escolhem os lados em relação aos seus pontos de vista). Então o payoff da estratégia  $(D, E)$  é  $(-1, -1)$ , representado pela célula da primeira linha e segunda coluna da tabela de payoffs. A primeira coordenada do payoff é a utilidade (payoff) do jogador  $J_1$  e a segunda coordenada é a utilidade do jogador  $J_2$ .

Uma das características deste tipo de jogo é a independência de decisões. De forma simples, isto significa que cada jogador escolhe uma estratégia sem saber como o outro vai agir.

Existem jogos de repetição que são jogados continuamente. Por exemplo, o jogo da tabela 1 jogado continuamente pode representar um motorista que cruza com diversos outros motoristas durante o seu dia. Nesta situação os jogadores podem aleatorizar suas estratégias a partir de probabilidades pré determinadas. Daí, podemos definir o seguinte

**Definição 1.1.2.** *Seja  $(N, A, u)$  um jogo de repetição nos termos da definição 1.1.1. O conjunto de estratégias mistas do  $i$ -ésimo jogador, denotado por  $S_i$ , é o conjunto de todas as distribuições de probabilidade sobre  $A_i$ . Este conjunto é isomorfo ao fecho convexo de  $A_i$  (veja a definição 2.1.1) se  $A_i$  for considerado como um conjunto linearmente independente de  $\mathbb{R}^k$ , onde  $k$  é o número de elementos de  $A_i$ .*

*O conjunto dos perfis de estratégias mistas é  $S = S_1 \times \dots \times S_n$ .*

*Para toda estratégia mista  $s_i \in S_i$  está associada uma função  $s_i : A_i \rightarrow [0, 1]$  (abuso de notação), onde  $s_i(a)$  é a probabilidade da estratégia pura  $a \in A_i$  ser jogada na estratégia mista  $s_i$ .*

Ou seja, associando  $A_1 = \{a_1, \dots, a_k\} \subset \mathbb{R}^k$  a um conjunto de elementos linearmente independentes, então  $S_1$  pode ser associado isomorficamente ao conjunto

$$S_1 = \left\{ \sum_{j=1}^k p_j a_j, p_j \geq 0 \forall j, \sum_{j=1}^k p_j = 1 \right\}.$$

Fazendo  $p_i = 1$  vem que  $a_i \in S_1$ . Daí segue que  $A_1 \subset S_1$ , isto é, o conjunto de estratégias puras é um subconjunto do conjunto de estratégias mistas.

Um exemplo simples de jogo em que usam-se estratégias mistas é o jogo do par ou ímpar, representado na tabela 2. O jogador  $J_P$  ( $J_{Par}$ ) tem utilidade positiva 1 quando o resultado final do jogo é um número par e  $-1$  caso contrário. Análogo para o jogador  $J_I$  ( $J_{Ímpar}$ ). Uma estratégia mista para o jogador  $J_P$  seria jogar  $s_P = \frac{1}{3}P + \frac{2}{3}I$ , significando que ele aleatoriza  $P$  e  $I$  com probabilidades  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{2}{3}$ , respectivamente. Da mesma forma, o jogador  $J_I$  poderia adotar a estratégia mista  $s_I = \frac{2}{3}P + \frac{1}{3}I$ , significando que ele aleatoriza  $P$  e  $I$  com probabilidades  $\frac{2}{3}$  e  $\frac{1}{3}$ , respectivamente.

Ao adotar estratégias mistas em jogos de repetição, o conceito de utilidade se generaliza para o conceito de esperança (ou valor esperado) da utilidade.

**Definição 1.1.3.** Dado um jogo em forma normal  $(N, A, u)$ , a esperança da função utilidade  $u_i$ , do jogador  $i$ , para o perfil de estratégias mistas  $s = (s_1, \dots, s_n)$  é a função  $u_i : S \rightarrow \mathbb{R}$  (abuso de notação) definida como

$$u_i(s) = \sum_{a \in A} u_i(a) \prod_{j=1}^n s_j(a_j).$$

Não é difícil mostrar que esta função é linear em cada coordenada. Esta esperança é natural, pois generaliza a função utilidade de estratégias puras. Ela é descrita como a soma dos payoffs das estratégias puras multiplicadas pelas probabilidades destas estratégias serem jogadas.

No exemplo mencionado acima, com

$$s = (s_P, s_I) := (s_1, s_2) = \left( \frac{1}{3}P + \frac{2}{3}I, \frac{2}{3}P + \frac{1}{3}I \right),$$

tem-se que a esperança da utilidade do jogador  $J_P$  é

$$\begin{aligned} u_P(s) &:= u_1(s) = u_1 \left( \frac{1}{3}P + \frac{2}{3}I, \frac{2}{3}P + \frac{1}{3}I \right) \\ &= \frac{1}{3} \frac{2}{3} u_1(P, P) + \frac{1}{3} \frac{1}{3} u_1(P, I) + \frac{2}{3} \frac{2}{3} u_1(I, P) + \frac{2}{3} \frac{1}{3} u_1(I, I) \\ &= \frac{2}{9} \cdot 1 + \frac{1}{9} \cdot (-1) + \frac{4}{9} \cdot (-1) + \frac{2}{9} \cdot 1 \\ &= -\frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Um cálculo análogo mostra que  $u_I(s) = \frac{1}{9}$ . Estes valores indicam que, ao manter estes perfis de estratégia continuamente, as utilidades médias dos jogadores se aproxima de  $-\frac{1}{9}$  e  $\frac{1}{9}$ .

Obs: O jogo do par ou ímpar é um exemplo de jogo de soma zero. Neste trabalho não vamos nos restringir aos jogos de soma zero.

Seguindo em frente, para todo  $s = (s_1, \dots, s_n) \in S$ , pode-se escrever  $s = (s_i, s_{-i})$ , onde

$$s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n).$$

**Definição 1.1.4.** Uma melhor resposta do jogador  $i$  para o perfil de estratégias  $s_{-i}$  é uma estratégia mista  $s_i^*$  tal que

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}), \forall s_i \in S_i.$$

É fácil ver que o conjunto de melhores respostas de cada jogador  $i$  para cada perfil fixo  $s_{-i}$  é convexo. De fato, se  $s_i'$  e  $s_i''$  são melhores respostas para  $s_{-i}$  com  $u_i(s_i', s_{-i}) = u_i(s_i'', s_{-i}) = M$ , então tem-se que, para todo  $t \in [0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} u_i(t \cdot s_i' + (1-t)s_i'', s_{-i}) &= t \cdot u_i(s_i', s_{-i}) + (1-t) \cdot u_i(s_i'', s_{-i}) \\ &= M, \end{aligned}$$

o que faz a combinação uma melhor resposta também.

No exemplo da tabela 1, suponha que o jogador  $J_2$  escolha sempre ir pela direita (D). Então a melhor resposta do jogador  $J_1$  é sempre ir pela direita (D) para ficar com um payoff de 1. De fato, suponha que o jogador  $J_1$  escolha uma estratégia da forma  $s_1 = kD + (1-k)E$  para algum  $k \in [0, 1]$ . Então sua utilidade seria

$$u_1(s_1) = ku_1(D, D) + (1-k)u_1(E, D) = k1 + (1-k)(-1) = 2k - 1 \leq 1,$$

com máximo em  $k = 1$ . Daí vem que  $u_1(D, D) \geq u_1(s_1, D)$ , para todo  $s_1 \in S_1$ . O mesmo processo mostra que  $D$  é uma melhor resposta do jogador  $J_2$  para a estratégia  $s_1 = a_1 = D$  do jogador  $J_1$ .

Mostrou-se acima que o perfil de estratégias  $s = (D, D)$  é um equilíbrio de Nash.

**Definição 1.1.5.** (Equilíbrio de Nash) O perfil de estratégias mistas  $s = (s_1, \dots, s_n)$  é um equilíbrio de Nash se  $s_i$  é uma melhor resposta para  $s_{-i}$ , para todo  $i$ .

No exemplo da tabela 1, dois equilíbrios de Nash são os perfis de estratégias  $(D, D)$  e  $(E, E)$ . Já foi mostrado que  $(D, D)$  é um equilíbrio de Nash e a prova de que  $(E, E)$  também é segue as mesmas linhas.

Outro exemplo simples de jogo finito em forma normal é o par ou ímpar, representado na tabela 2. Não é difícil mostrar que o perfil  $(\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}I, \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}I)$  é um equilíbrio de Nash com

	$J_I$	P	I
$J_P$			
	P	(1,-1)	(-1,1)
	I	(-1,1)	(1,-1)

Tabela 2 – Par ou ímpar.

payoff  $(0, 0)$  (o exercício é bastante educativo).

Como pode-se ver nos exemplos acima, podem existir equilíbrios de Nash em estratégias puras ou mistas, e apenas um equilíbrio ou mais. Um resultado clássico da teoria dos jogos é o

da existência de pelo menos um equilíbrio de Nash em estratégias mistas para jogos finitos em forma normal, assunto que será tratado no próximo capítulo.

Para terminar a seção, uma definição e um resultado trivial.

**Definição 1.1.6.** Uma estratégia mista  $s_i^* \in S_i$  é dita dominante se for uma melhor resposta para todo perfil de estratégias  $s_{-i}$ , isto é, se  $u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s)$  para todo  $s \in S$

**Proposição 1.1.1.** Um perfil de estratégias formado por estratégias dominantes é um equilíbrio de Nash.

No capítulo seguinte são vistas algumas condições sob as quais o equilíbrio de Nash existe. De forma geral, todo jogo finito em forma normal possui pelo menos um equilíbrio de Nash, mas não pode-se afirmar o mesmo sobre perfis de estratégias dominantes.

## 1.2 Aplicações

### 1.2.1 Teoria da evolução

O Hawk-Dove game é um jogo bastante simples que modela dois animais de uma mesma população em conflito para reprodução. Ambos animais podem adotar duas estratégias, *Hawk* ( $H$ ) que é agressiva ou *Dove* ( $D$ ) que é passiva e evita conflito com *Hawks*.

A tabela 3 define um jogo onde os payoffs são definidos como a quantidade de descendentes diretos que cada animal gera. A constante  $V$  é um valor associado à reprodução sem conflito,  $C$  ao conflito de *Hawks* e  $T$  ao conflito de *Doves*. As células que tem somente um valor significam que ambos animais recebem o mesmo payoff.

1 \ 2	H	D
H	$V/2 - C$	$(V, 0)$
D	$(0, V)$	$V/2 - T$

Tabela 3 – Hawk-Dove

Neste exemplo, se escolhermos valores apropriados para as constantes ( $V > 2C$ ,  $V > 2T$ ), o único equilíbrio de Nash  $(H, H)$  pode representar uma estratégia que perpetua ou extingue a espécie (por exemplo,  $V/2 - C < 1$ ). Este perfil de estratégias é também um perfil de estratégias dominantes. Note também que a estratégia  $(D, D)$ , mesmo não sendo um equilíbrio de Nash, é uma estratégia mais eficiente que  $(H, H)$  se  $T < C$ . Mais pode ser lido em [4].

### 1.2.2 Economia

A teoria dos jogos, em economia, se aplica à microeconomia, que é o estudo de interações entre entidades individuais. Por exemplo, como  $n$  empresas tomam decisões em uma competição, ou como  $n$  pessoas interagem num meio em comum?

As múltiplas formas de interação financeira possibilitam diversos tópicos de estudo para a teoria dos jogos. Um exemplo de aplicação é na análise de leilões: cada leilão pode ser dirigido com regras diferentes, sendo o leilão do maior preço (leilão Inglês) o tipo mais comum, em que os participantes dão lances continuamente e ganha quem der o maior lance.

Uma outra forma de leilão é o do segundo preço com lances privados. As regras são de que cada participante pode dar apenas um lance privado, escrito em um envelope selado (vamos supor que quem não quer participar deve dar um lance de 0), e que o ganhador é quem dá o maior lance, mas o valor pago é o segundo maior lance. Empates são resolvidos com algum ordenamento pré-determinado. Neste leilão, supondo que os lances são independentes, tem-se o seguinte resultado

**Proposição 1.2.1.** *Suponha um leilão de segundo preço com lances privados de  $n$  jogadores. Se o jogador  $i$  avalia o produto como tendo valor  $M_i$ , então o perfil de estratégias  $s = (M_1, \dots, M_n)$  é um perfil de estratégias dominantes.*

*Demonstração.* A demonstração parte de uma divisão das possibilidades em casos. Antes de fazer isso, vamos tratar do caso em que há empate entre os vencedores. Neste caso, como mencionado acima, existe alguma ordenação pré-definida que determina o vencedor. Para evitar análises desnecessárias, vamos supor que a avaliação e o lance do primeiro agente do ordenamento sejam somados por  $n\epsilon$  para algum  $\epsilon > 0$  ínfimo. Da mesma forma, que o lance e a avaliação do segundo agente do ordenamento sejam somados por  $(n-1)\epsilon$ , e assim sucessivamente até o lance e a avaliação do  $n$ -ésimo agente do ordenamento que serão somados por  $\epsilon$ . Este processo resulta no mesmo vencedor do jogo original e com o mesmo payoff se ignorarmos o termo em  $\epsilon$  depois de decidido o vencedor.

Escreveremos  $M_0$  e  $M$  para os valores do maior e do segundo maior lances do leilão, sucessivamente. A utilidade do jogador  $i$  é 0 se ele não vence o leilão e é  $M_i - M$  se ele vence o leilão. Visto que o caso  $M_0 = M$  é contornado pelo processo do parágrafo anterior, vamos supor que  $M < M_0$  sempre. Queremos mostrar que  $M_i$  é uma estratégia dominante para o jogador  $i$ , onde  $M_i$  é a avaliação do produto feita pelo jogador  $i$ . Vamos dividir a solução nos casos  $M_i \leq M < M_0$ ,  $M < M_i \leq M_0$  e  $M < M_0 < M_i$ . Também, dentro de cada um destes casos vamos analisar as situações onde o lance do jogador  $i$  foi  $M_0$  e onde não foi  $M_0$ .

Caso  $M_i \leq M < M_0$ : Se o lance do jogador  $i$  foi  $M_0$ , então sua utilidade é de  $M_i - M \leq 0$ . Como a utilidade do jogador  $i$  é 0 ou  $M_i - M \leq 0$ , se tivesse jogado  $M_i$  ao invés de  $M_0$  sua utilidade seria máxima e igual a 0. Então  $M_i$  maximizaria sua utilidade nesta situação. Ainda, se o lance do jogador  $i$  não foi de  $M_0$ , a sua utilidade é 0. Qualquer outro lance do jogador  $i$  nesta situação resultaria em utilidade igual a 0 ou igual a  $M_i - M_0 < 0$ . Como um lance de  $M_i$  resultaria em utilidade 0, então  $M_i$  é uma melhor resposta nesta situação. Analisadas as duas situações, mostramos que  $M_i$  é uma melhor resposta do jogador  $i$  para qualquer perfil de estratégia neste caso.

Caso  $M < M_i \leq M_0$ : Se o lance do jogador  $i$  foi  $M_0$ , então sua utilidade é  $M_i - M > 0$ . Nesta situação, se o jogador  $i$  trocasse seu lance de  $M_0$  por qualquer lance maior do que  $M$ , então sua utilidade seria a mesma. Além disso, qualquer lance menor do que  $M$  resultaria em utilidade 0, pois  $M$  se tornaria o maior lance do leilão. Assim,  $M_i$  é uma melhor resposta nesta situação. Se o lance do jogador  $i$  não foi  $M_0$ , então foi menor do que  $M_0$ . Se ele trocasse seu lance por algo maior do que  $M_i$ , então sua utilidade seria menor ou igual a 0. Se ele desse um lance menor ou igual a  $M_i$  então sua utilidade seria 0. Então  $M_i$  é uma melhor resposta. Analisadas as duas situações,  $M_i$  é uma melhor resposta do jogador  $i$  neste caso.

Caso  $M < M_0 < M_i$ : Se o lance do jogador  $i$  foi  $M_0$ , então sua utilidade é máxima e igual a  $M_i - M$ , que é a mesma utilidade caso tivesse dado um lance de  $M_i$  ao invés de  $M_0$ . Assim,  $M_i$  é uma melhor resposta nessa situação. Se o lance do jogador  $i$  não foi de  $M_0$ , então seu lance foi menor do que  $M_0$  e sua utilidade é 0. Ao troca seu lance por um lance maior do que  $M_0$  qualquer, sua utilidade se torna  $M_i - M_0 > 0$ , que é o máximo possível nesta situação. Pelo visto acima,  $M_i$  é uma melhor resposta do jogador  $i$  neste caso.

Pelos casos acima,  $M_i$  é uma melhor resposta do jogador  $i$  a qualquer perfil de estratégias, logo, é uma estratégia dominante. Assim,  $s = (M_1, \dots, M_n)$  é um perfil de estratégias dominantes.

□

O resultado acima implica que, no leilão de segundo preço com apostas privadas, a estratégia onde cada comprador aposta o valor “justo”(para si) do produto é um equilíbrio de Nash (isto vem de que um perfil de estratégias formado por estratégias dominantes é um equilíbrio de Nash). Pode-se perguntar se este leilão traz mais benefícios ao vendedor já que os lances são de valores “justos”.

Uma leitura mais completa sobre leilões pode ser feita no capítulo 11 de [15].

### 1.2.3 Exemplos

1) Calcular um equilíbrio de Nash no geral não é um processo simples, mas sob certas hipóteses alguns jogos finitos  $2 \times 2$  possuem um método interessante de resolução. Suponha que o jogador  $J_1$  vá jogar uma estratégia mista  $s_1 = tA + (1 - t)B \in S_1$  que faça o jogador  $J_2$  indiferente quanto a jogar as estratégias puras  $C$  ou  $D \in A_2$ , isto é, com mesma utilidade para as duas estratégias. Então  $J_2$  será indiferente também ao jogar qualquer estratégia mista de  $C$  e  $D$ , pela linearidade da utilidade na segunda coordenada. Analogamente, se o jogador  $J_2$  jogar uma estratégia mista  $s_2 = kC + (1 - k)D \in S_2$  que faça o jogador  $J_1$  indiferente a jogar  $A$  ou  $B \in A_1$ , então  $J_1$  será indiferente a jogar qualquer estratégia mista  $s_1 \in S_1$ , inclusive a  $s_1 = tA + (1 - t)B \in S_1$  mencionada acima. Assim sendo,  $(s_1, s_2)$  é um equilíbrio de Nash já que, pela construção acima,  $s_1$  é uma melhor resposta a  $s_2$  e vice-versa(no caso, qualquer estratégia mista de  $J_1$  é melhor resposta a  $s_2$  e qualquer estratégia mista de  $J_2$  é melhor resposta a  $s_1$ ).

Usando o jogo da tabela 2 para exemplificar a construção acima, a estratégia mista do jogador  $J_I$  tem que fazer  $J_P$  indiferente a jogar  $P$  ou  $I$ . Isto quer dizer que as utilidades do jogador  $J_P$  ao jogar  $P$  ou  $I$  devem ser as mesmas. Equacionando:

$$\begin{aligned} u_P(P, k_1P + (1 - k_1)I) &= u_P(I, k_1P + (1 - k_1)I) \\ \Rightarrow k_1u_P(P, P) + (1 - k_1)u_P(P, I) &= k_1u_P(I, P) + (1 - k_1)u_P(I, I) \\ \Rightarrow k_11 + (1 - k_1)0 &= k_10 + (1 - k_1)1 \\ \Rightarrow k_1 &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Então a estratégia mista  $s_2 = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}I \in S_I$  para o jogador  $J_I$  torna o jogador  $J_P$  indiferente a jogar  $P$  ou  $I$ , logo, indiferente a jogar qualquer estratégia  $s_1 \in S_P$ . Isto implica que todo elemento de  $S_P$  é uma melhor resposta a  $s_2$ .

O mesmo raciocínio para o jogador  $J_P$ , jogando  $P$  com probabilidade  $k_2$  gera a modelagem

$$u_I(k_2P + (1 - k_2)I, P) = u_I(k_2P + (1 - k_2)I, I),$$

que resulta em  $k_2 = \frac{1}{2}$ . Então  $s_1 = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}I \in S_P$  torna o jogador  $J_I$  indiferente a jogar qualquer combinação de  $P$  e  $I$ , inclusive a estratégia mista  $s_2$ . Isto significa que todo elemento de  $S_I$  é melhor resposta a  $s_1$ , inclusive  $s_2$ . Assim, o perfil  $(s_1, s_2) = (\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}I, \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}I) \in S$  é um equilíbrio de Nash. Mais informações em [14].

Mas então, sob quais hipóteses este método funciona? No caso de um jogo normal da forma da tabela 4, a estratégia mencionada acima nos diz que o jogador  $J_2$  é indiferente a jogar  $C$  ou

$J_1 \backslash J_2$	C	D
A	$(a, a')$	$(b, b')$
B	$(c, c')$	$(d, d')$

Tabela 4 – Jogo  $2 \times 2$  em forma normal qualquer.

$D$  se seus payoffs forem os mesmos para a estratégia  $s_1 = kA + (1 - k)B$  do jogador  $J_1$ . Modelando vem que

$$\begin{aligned} u_2(s_1, C) &= u_2(s_1, D) \\ \Rightarrow ka' + (1 - k)c' &= kb' + (1 - k)d' \\ \Rightarrow k(a' + d' - c' - b') &= d' - c', \end{aligned}$$

que não tem solução em  $\mathbb{R}$  se  $d' - c' \neq 0$  e  $a' + d' - c' - b' = 0$ . Neste caso,  $J_2$  tem uma estratégia pura dominante já que  $b' - a' = d' - c' \neq 0$ .

Uma modelagem semelhante pode ser feita em jogos com  $m$  jogadores e  $n$  estratégias puras, quando um sistema de equações vai ser gerado.

2) O equilíbrio de Nash é um conceito natural no estudo de teoria dos jogos, pois representa um perfil de estratégias mistas que os jogadores adotariam caso fossem perfeitamente racionais. Intuitivamente: um jogador sempre tentará maximizar sua utilidade frente as estratégias dos outros jogadores, o que acontece no equilíbrio de Nash.

Podemos observar a construção do equilíbrio de Nash de forma indutiva: o jogador  $A$  pode supor que o jogador  $B$  jogue uma estratégia  $b_1$ , logo, escolhe a estratégia  $a_1$  como melhor resposta a  $b_1$ . Em seguida, percebe que o jogador  $B$  pode deduzir esta lógica e escolher a estratégia  $b_2$  como melhor resposta a  $a_1$ , logo, escolhe  $a_2$  como melhor resposta a  $b_2$ . Em seguida, percebe que o jogador  $B$  pode deduzir esta lógica e escolher a estratégia  $b_3$  como melhor resposta a  $a_2$ , logo, escolhe  $a_3$  como melhor resposta a  $b_3$ . Seguindo o processo indutivamente, o equilíbrio de Nash é o limite da sequência  $(a_n, b_n)$  caso ela convirja. A partir da forma indutiva pode-se observar o porquê do equilíbrio de Nash ser bastante observado em jogos de repetição, pois a  $k$ -ésima repetição do jogo resultaria no perfil  $(a_k, b_k)$  sendo escolhido.

3) Um jogo normal em forma finita de  $n$  jogadores é representado por uma matriz  $n$  dimensional, onde o número de estratégias de cada jogador determina o comprimento de um lado da matriz. Por exemplo, um jogo de 3 jogadores, onde  $|A_1| = a$ ,  $|A_2| = b$  e  $|A_3| = c$  é uma matriz tridimensional de ordem  $a \times b \times c$  com  $a.b.c$  células. Tome o jogo “dois ou um”, jogado por três jogadores, tal que  $A_i = \{1, 2\}$  e vence aquele que jogar um valor diferente dos outros dois jogadores. Separando a matriz tridimensional em duas matrizes bidimensionais, cada uma delas para uma estratégia fixa do terceiro jogador:

		$J_3 = 1$		$J_3 = 2$		
		$J_2$		$J_2$		
$J_1$		1	2	1	2	
1		(0,0,0)	(-1,2,-1)	1	(-1,-1,2)	(2,-1,-1)
2		(2,-1,-1)	(-1,-1,2)	2	(-1,2,-1)	(0,0,0)

Tabela 5 – Jogo “dois ou um”

Parece intuitivo pensar que o perfil de estratégias mistas  $(\frac{1}{2}[1] + \frac{1}{2}[2], \frac{1}{2}[1] + \frac{1}{2}[2], \frac{1}{2}[1] + \frac{1}{2}[2])$  é um equilíbrio de Nash. Supondo que os jogadores 2 e 3 de fato adotem estas estratégias e o jogador 1 jogue  $t[1] + (1 - t)[2]$ , a esperança da sua utilidade é dada por

$$\begin{aligned}
& u_1 \left( t[1] + (1-t)[2], \frac{1}{2}[1] + \frac{1}{2}[2], \frac{1}{2}[1] + \frac{1}{2}[2] \right) = \\
& = \frac{t}{4} (u_1([1], [1], [1]) + u_1([1], [1], [2]) + u_1([1], [2], [1]) + u_1([1], [2], [2])) + \\
& + \frac{(1-t)}{4} (u_1([2], [1], [1]) + u_1([2], [1], [2]) + u_1([2], [2], [1]) + u_1([2], [2], [2])) = \\
& = 0.
\end{aligned}$$

Isto implica que, dadas estas estratégias mistas uniformemente distribuídas dos jogadores 2 e 3, qualquer estratégia mista do jogador 1 é uma melhor resposta, inclusive  $t = \frac{1}{2}$ . Como a demonstração para os outros dois jogadores é a mesma visto que o jogo é simétrico, conclui-se que o perfil de estratégias mistas uniformemente distribuídas é um equilíbrio de Nash.

4) Um tipo específico de jogos em forma normal é o de jogos sequenciais em forma perfeita. A representação mais simples deste tipo de jogo é feita através da árvore de payoffs. Por exemplo, suponha um jogo de três jogadores que representam duas crianças e um adulto. O adulto tem dois doces idênticos para dar para as crianças da seguinte forma: a primeira criança escolhe se quer 0, 1 ou 2 dos doces disponíveis. A segunda criança pode escolher quantos quer dentre os doces que sobraram ou protestar, fazendo com que o adulto interfira no processo. O adulto, por sua vez, pode acolher ou não o protesto da segunda criança. Este jogo é representado na figura 1.

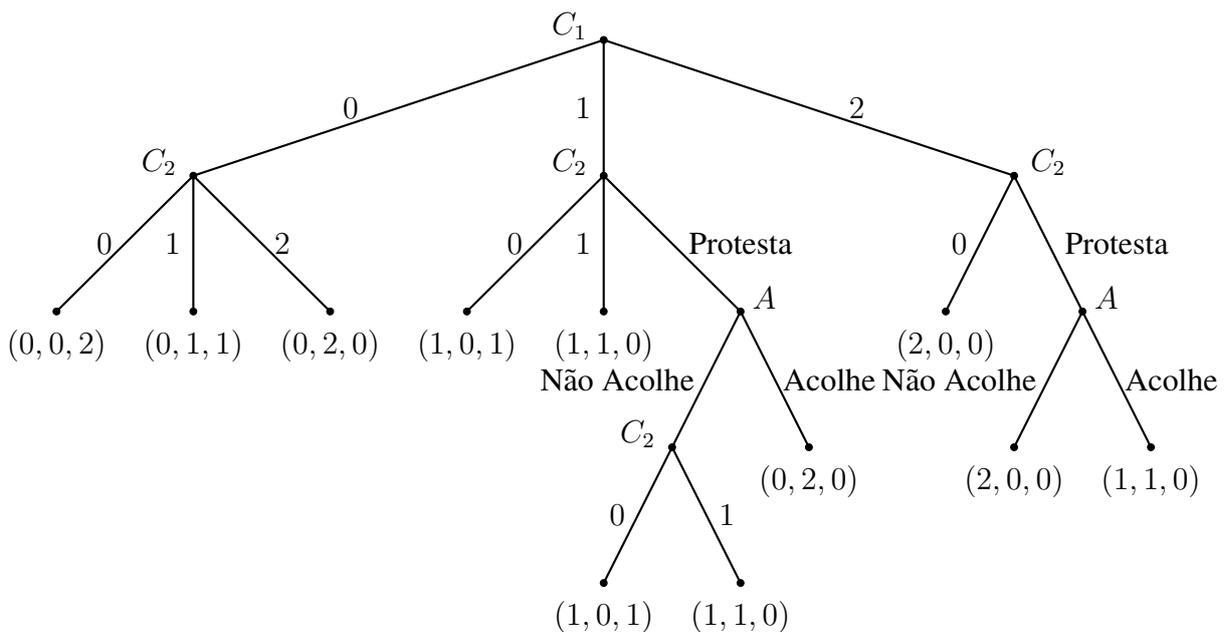


Figura 1 – Árvore de um jogo sequencial em forma perfeita.

Neste caso, para modelar o jogo sequencial em forma perfeita como um jogo normal, considera-se o conjunto de estratégias puras de um jogador como o produto cartesiano dos conjuntos de escolhas que o jogador deve fazer em cada vértice. Por exemplo, na figura 1, o jogador  $C_1$  tem como conjunto de estratégias puras  $A_1 = \{0, 1, 2\}$ , que é o conjunto de escolhas que ele pode fazer no seu único vértice de escolhas. O jogador  $C_2$  tem como conjunto de estratégias puras  $A_2 = \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, \text{Protesta}\} \times \{0, \text{Protesta}\} \times \{0, 1\}$ , que é o produto cartesiano dos conjuntos de escolhas que ele deve fazer em cada um de seus vértices de escolhas. O jogador  $A$ , da mesma forma, tem conjunto de estratégias puras  $A_3 = \{\text{Não Acolhe}, \text{Acolhe}\} \times \{\text{Não Acolhe}, \text{Acolhe}\}$ .

Por ser um subconjunto dos jogos finitos em forma normal, os jogos sequenciais em forma perfeita possuem pelo menos um equilíbrio de Nash. Para mais informações e formalizações veja o capítulo 4 de [14].



# 2 TEOREMAS DE PONTO FIXO E EXISTÊNCIA DO EQUILÍBRIO DE NASH

Neste capítulo, primeiro prova-se o teorema do ponto fixo de Brouwer via teoria de simplexes, depois o teorema do ponto fixo de Kakutani via Brouwer. No fim da segunda parte demonstra-se o teorema do ponto fixo de Nash para jogos finitos em forma normal via teorema de Kakutani.

## 2.1 O teorema do ponto fixo de Brouwer

### 2.1.1 Convexidade

**Definição 2.1.1.** Para  $A \subset R^m$ , o fecho convexo de  $A$ , denotado por  $co(A)$ , é o conjunto de todas as combinações convexas finitas de elementos de  $A$ , isto é, de todos os vetores  $x$  da forma

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$$

para algum  $n$ , onde cada  $x_i \in A$  e os  $\lambda_i$ s são não negativos somando 1.

**Teorema 2.1.1** (Teorema de Caratheodory). Seja  $E \subset R^m$ . Se  $x \in co(E)$  então  $x$  pode ser escrito como uma combinação convexa de  $k \leq m + 1$  elementos de  $E$ .

*Demonstração.* Seja  $x$  um ponto do fecho convexo de  $E$ . Então  $x$  pode ser escrito como  $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$  para algum  $k$ , onde cada  $x_i$  pertence a  $E$  e os  $\lambda_i$ s são não negativos somando 1.

Suponha que  $k > m + 1$ . Então os pontos  $x_i - x_1$  são linearmente dependentes, logo, existem escalares  $\mu_i$ , não todos iguais a zero, tais que  $\sum_{i=2}^k \mu_i (x_i - x_1) = 0$ . Escrevendo  $\mu_1 = -\sum_{i=2}^k \mu_i$ , a igualdade acima se torna  $\sum_{i=1}^k \mu_i x_i = 0$  com  $\sum_{i=1}^k \mu_i = 0$ , onde algum dos  $\mu_i$ s é positivo.

Utilizando os resultados acima, pode-se escrever

$$x = x + 0 = x + \alpha \cdot 0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i - \alpha \sum_{i=1}^k \mu_i x_i = \sum_{i=1}^k (\lambda_i - \alpha \mu_i) x_i,$$

para qualquer real  $\alpha$ . Fazendo  $\alpha = \min_{1 \leq j \leq k} \left\{ \frac{\lambda_j}{\mu_j} : \mu_j > 0 \right\}$  vem que  $x = \sum_{i=1}^k (\lambda_i - \alpha \mu_i) x_i$ , com todos os coeficientes não negativos, somando 1 e pelo menos um deles sendo nulo. Assim,  $x$  fica representado através de uma combinação convexa de  $k - 1$  elementos de  $E$ .

O processo pode ser repetido até que  $x$  seja representado como combinação convexa de  $m + 1$  pontos de  $E$ , quando a hipótese de dependência linear deixa de funcionar.  $\square$

## 2.1.2 Simplexes

**Definição 2.1.2.** Um conjunto  $\{x_0, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^m$  é afim independente se  $\sum_{i=0}^n \lambda_i x_i = 0$  e  $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 0$  implicam que  $\lambda_j = 0$  para todo  $j$ .

Isto é equivalente a dizer que o conjunto  $\{x_j - x_i, j \neq i\}$  é linearmente independente para qualquer  $i$  fixado. De fato, supondo a independência linear, que  $\sum_{i=0}^n \lambda_i x_i = 0$  e  $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 0$ , então fazendo  $\lambda_i = -\sum_{j \neq i} \lambda_j$  tem-se que  $\sum_{j=0}^n \lambda_j x_j = \sum_{j \neq i} \lambda_j (x_j - x_i) = 0$ . Por hipótese de independência linear vem que  $\lambda_j = 0$  para todo  $j$ . Por outro lado, se a definição for verdadeira tem-se que, se  $\sum_{j \neq i} \lambda_j (x_j - x_i) = 0 = (-\sum_{j \neq i} \lambda_j) x_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j x_j$ , então os conjuntos  $\{x_0, \dots, x_n\}$  e  $\{\lambda_0, \dots, \lambda_n\}$ , com  $\lambda_i = -\sum_{j \neq i} \lambda_j$  respeitam as condições da definição, logo  $\lambda_j = 0$  para todo  $j$ , daí a independência linear.

Veja a representação geométrica da figura 2 abaixo:

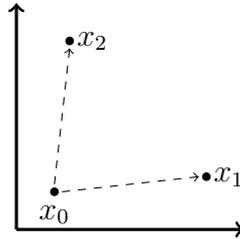


Figura 2 – Representação de afim independência.

O conjunto  $\{x_0, x_1, x_2\}$  é afim independente em  $\mathbb{R}^2$  já que os vetores  $x_1 - x_0$  e  $x_2 - x_0$  são linearmente independentes. Note que se fosse adicionado um novo elemento  $x_3$  ao conjunto então ele deixaria de ser afim independente, já que seriam formados três vetores  $x_1 - x_0$ ,  $x_2 - x_0$  e  $x_3 - x_0$  em  $\mathbb{R}^2$  que não são linearmente independentes (um conjunto linearmente independente em  $\mathbb{R}^n$  tem no máximo  $n$  vetores). Daí segue que um conjunto afim independente em  $\mathbb{R}^n$  tem no máximo  $n + 1$  elementos.

**Definição 2.1.3.** Um  $n$ -simplex é o conjunto de todas as combinações positivamente convexas de um conjunto afim independente de  $n+1$  elementos, isto é, o  $n$ -simplex definido pelo conjunto afim independente  $\{x_0, \dots, x_n\}$  é o conjunto

$$S(x_0, \dots, x_n) := \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i : \lambda_i > 0 \forall i \text{ e } \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

Um  $n$ -simplex fechado é o fecho de um  $n$ -simplex.

Cada ponto  $x_i$  é chamado de vértice e cada  $k$ -simplex formado por  $k+1$  vértices é chamado de face do  $n$ -simplex. Em particular, cada vértice é um 0-simplex que também é uma face do  $n$ -simplex.

A figura 3 dá um exemplo da diferença entre um  $n$ -simplex e seu fecho. A figura 4 mostra as faces de um 2-simplex com diferentes cores.

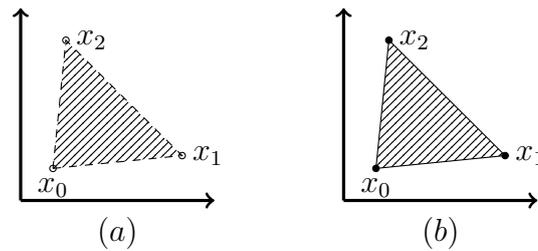


Figura 3 – (a) -  $S(x_0, x_1, x_2)$ , um 2-simplex em  $\mathbb{R}^2$ ; (b) o 2-simplex fechado  $\overline{S(x_0, x_1, x_2)} = co(x_0, x_1, x_2)$ .

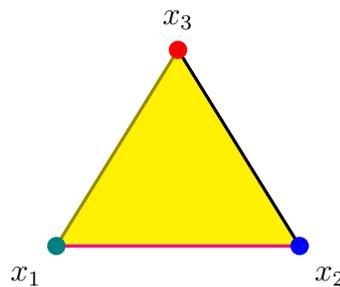


Figura 4 – Faces de um 2-simplex.

Veja que um  $n$ -simplex é um conjunto aberto em  $\mathbb{R}^n$ , limitado e convexo, enquanto o seu fecho é um conjunto compacto e convexo em qualquer  $\mathbb{R}^m$  que contenha o  $n$ -simplex.

### Proposição 2.1.1.

- a- O fecho de um  $n$ -simplex  $S(x_0, \dots, x_n)$  é igual a  $co\{x_0, \dots, x_n\}$ ;
- b- Cada ponto de um  $n$ -simplex fechado  $co\{x_0, \dots, x_n\}$  tem uma única representação convexa  $\sum_{i=0}^n \lambda_i x_i$ . As constantes  $\lambda_j$  são chamadas de coordenadas baricêntricas do ponto;
- c- Cada ponto de um  $n$ -simplex fechado está contido em apenas uma de suas faces;
- d- Um  $n$ -simplex fechado é representado pela união disjunta de suas faces;
- e- Um  $n$ -simplex fechado é a interseção de todos os convexos fechados contendo o  $n$ -simplex, isto é, é o menor convexo fechado contendo o  $n$ -simplex.

*Demonstração.*

a- Por um lado, basta tomar as sequências convergentes de  $S(x_0, \dots, x_n)$  e mostrar que convergem para uma combinação convexa não negativa de  $\{x_0, \dots, x_n\}$ . Por outro lado, todo

ponto de  $\text{co}\{x_0, \dots, x_n\}$  é limite de uma sequência de pontos de  $S(x_0, \dots, x_n)$ .

b- Isso é consequência de a. Cada ponto do  $n$ -simplex fechado pode ser escrito como  $\sum_{i=0}^n \lambda_i x_i$ ,  $\lambda_i \geq 0$  e  $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ . Suponha um ponto  $y$  com duas representações  $y = \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i = \sum_{i=0}^n \mu_i x_i$ , logo,  $\sum_{i=0}^n (\lambda_i - \mu_i) x_i = 0$  e  $\sum_{i=0}^n (\lambda_i - \mu_i) = 0$ . Por definição de afim independência,  $\lambda_i = \mu_i$  para todo  $i$ .

c- Tome a representação dada em a. Seja  $\gamma(y) = \{i : \lambda_i > 0\} = \{i_0, \dots, i_k\}$ . Então  $y = \sum_{j=0}^k \lambda_{i_j} x_{i_j}$  pertence à face  $S(x_{i_0}, \dots, x_{i_k})$ . A unicidade em b implica que não existe outra face  $S(x_{j_1}, \dots, x_{j_m})$  que contenha  $y$ .

d- Consequência direta de b e de c.

e- Que a interseção está contida no  $n$ -simplex fechado é trivial. Por outro lado, veja que os vértices do  $n$ -simplex são limites de sequências no  $n$ -simplex, logo, estão em todos os convexos fechados que contém o  $n$ -simplex. Então, por convexidade e pela letra b, todos convexos fechados que contém os vértices do  $n$ -simplex também contém o  $n$ -simplex fechado. Conclui-se que o  $n$ -simplex fechado está na interseção. □

**Definição 2.1.4.** O  $n$ -simplex padrão é o  $n$ -simplex  $e_1 \cdots e_{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , onde  $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$  é a base canônica de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .  $\Delta_n$  é o seu fecho, também chamado de  $n$ -simplex padrão fechado.

Veja a figura 5.

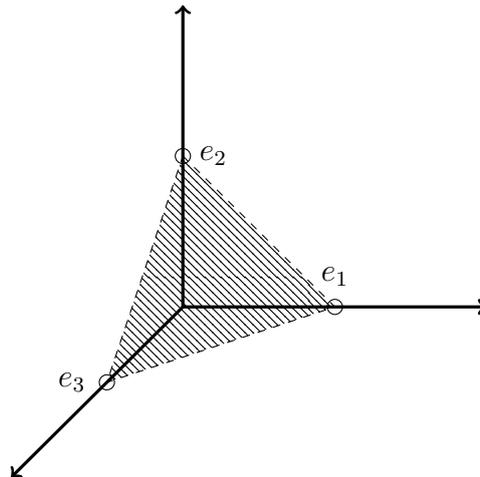


Figura 5 – O 2-simplex padrão  $S(e_1, e_2, e_3)$ .

**Definição 2.1.5.** Seja  $T = S(x_0, \dots, x_n)$  um  $n$ -simplex. Uma subdivisão por simplexes de  $\bar{T}$  é uma coleção finita  $\{T_i : i \in I\}$  de simplexes disjuntos satisfazendo  $\bigcup_{i \in I} T_i = \bar{T}$  e tal que,

para quaisquer  $i, j \in I$ , o conjunto  $\overline{T_i} \cap \overline{T_j}$  é vazio ou igual ao fecho de uma face em comum de  $T_i$  e  $T_j$ . O mesh de uma subdivisão é o diâmetro do maior simplex.

**Exemplo 2.1.1.** Para qualquer inteiro positivo  $m$ , o conjunto

$$V = \left\{ v \in \mathbb{R}^{n+1} : v_i = \frac{k_i}{m}, i = 0, \dots, n; \sum_{i=0}^n k_i = m; k_i \in \mathbb{Z}_+ \right\}$$

é o conjunto de vértices de uma subdivisão por simplexes de  $\Delta_n$ . Esta subdivisão tem  $m^n$   $n$ -simplexes de diâmetro  $\frac{\sqrt{2}}{m}$  e outros simplexes de dimensões menores.

Veja na figura 6 a subdivisão mencionada no exemplo 2.1.1 com  $m = 3$  e  $n = 2$ .

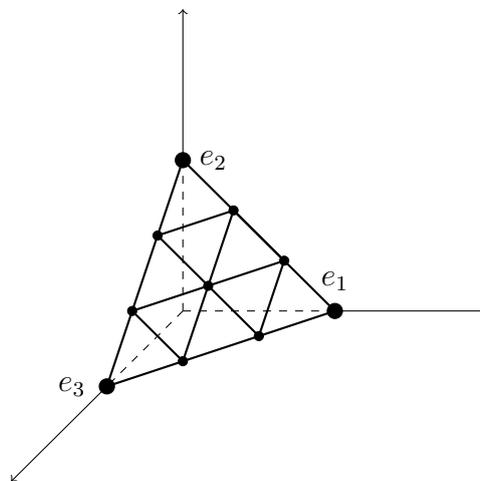


Figura 6 – A subdivisão de  $\Delta_2$  com  $m = 3$ .

**Definição 2.1.6.**

a) Para qualquer simplex  $T = S(x_0, \dots, x_n)$ , o baricentro de  $T$ , denotado por  $b(T)$ , é o ponto  $\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n x_i$ ;

b) Para simplexes  $T_1, T_2$ , defina  $T_1 > T_2$  significando que  $T_2$  é uma face própria de  $T_1$ . Dado um simplex  $T$ , a família de todos os conjuntos  $S(b(T_0), \dots, b(T_k))$  tais que  $T \geq T_0 > \dots > T_k$  (logo,  $k$ -simplex) é chamada de primeira subdivisão baricêntrica de  $T$ .

**Proposição 2.1.2.** A primeira subdivisão baricêntrica de  $T$  é uma subdivisão por simplexes de  $\overline{T}$ .

A demonstração fica a cargo do leitor. Por exemplo, a figura 7 mostra a primeira subdivisão baricêntrica de  $\Delta_2$ .

**Proposição 2.1.3.** Na subdivisão baricêntrica definida na definição 2.1.6 tem-se que o mesh da subdivisão é no máximo  $\frac{n}{n+1}$  vezes o diâmetro do  $n$ -simplex  $T$ .

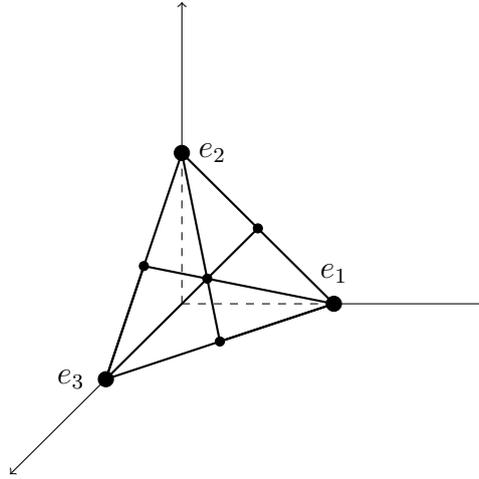


Figura 7 – A primeira subdivisão baricêntrica de  $\Delta_2$ .

*Demonstração.* Primeiro vamos mostrar que o diâmetro de um simplex qualquer é igual à distância entre dois de seus vértices. De fato, para qualquer  $x$  dentro de um simplex, seja  $r = \max\{|x - x_i|, i \leq n\}$ , onde os pontos  $x_i$  são os vértices do simplex. Então o simplex está todo contido na bola centrada em  $x$  e raio  $r$ , já que esta bola é um convexo que contém todos os vértices (proposição 2.1.1, letra e). Daí vem que o ponto mais distante de qualquer elemento do simplex é um dos vértices. Um argumento simples baseado nisso justifica que o diâmetro do simplex é a distância entre dois de seus vértices.

Agora, suponha que  $d$  é o diâmetro de um  $n$ -simplex, isto é,  $d = \max\{|x_i - x_j|, i, j \leq n\}$ . Se  $n = 0$  a afirmação da proposição é óbvia. Suponha verdade para todo  $n < k$ . Seja  $T'$  o simplex de maior diâmetro da subdivisão baricêntrica de um  $k$ -simplex, isto é, cujo diâmetro iguala o mesh da subdivisão. Seja também  $\sum_{j=0}^t \frac{x_{i_j}}{t+1}$  um vértice de  $T'$  que define o mesh com  $t$  o máximo possível. No caso  $t = k$  veja que, para todo vértice  $x_i$  do  $k$ -simplex,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=0}^k \frac{x_j}{k+1} - x_i \right| &= \left| \sum_{j \neq i} \frac{x_j - x_i}{k+1} \right| \\ &\leq \sum_{j \neq i} \frac{|x_j - x_i|}{k+1} \\ &\leq \frac{k}{k+1} d. \end{aligned}$$

Daí segue que o simplex, sendo convexo, está todo contido na bola centrada em  $\sum_{j=0}^k \frac{x_j}{k+1}$  com raio  $\frac{k}{k+1}d$  (lembre que tal ponto define o mesh).

No caso  $t < k$ , por hipótese de indução tem-se que o  $\text{diam}(T') \leq \frac{t}{t+1}d$  já que o vértice está contido no  $t$ -simplex definido pelos vértices  $\{x_{i_0}, \dots, x_{i_t}\}$ . Mas então o mesh da subdivisão é  $\text{diam}(T') \leq \frac{t}{t+1}d < \frac{k}{k+1}d$ , já que a função  $\frac{x}{x+1}$  é crescente em  $\mathbb{R}^+$ .

□

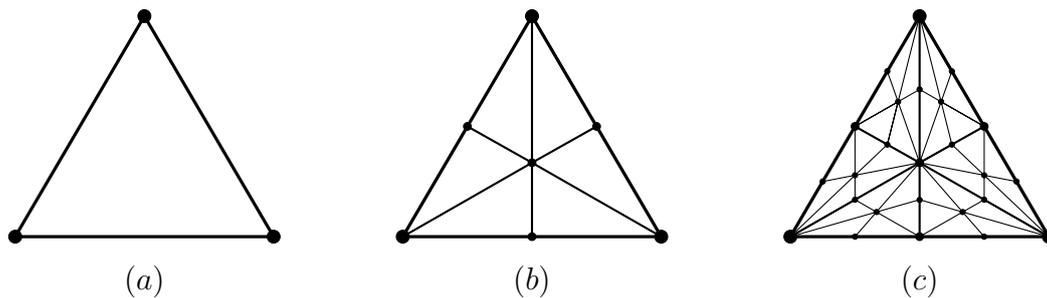


Figura 8 – (a) Um 2-simplex; (b) Primeira subdivisão baricêntrica; (c) Segunda subdivisão baricêntrica.

O resultado acima mostra que a sequência de subdivisões baricêtricas de um simplex tem mesh tendendo a 0 (a  $k$ -ésima divisão baricêntrica de um  $n$ -simplex  $T$  é a união das primeiras subdivisões baricêtricas dos  $n$ -simplexes que formam a  $(k - 1)$ -ésima divisão baricêntrica de  $T$ ). A figura 8.(b) mostra a primeira subdivisão baricêntrica do 2-simplex 8.(a) e a figura 8.(c) mostra a segunda. Note que subdivisão em (c) é criada a partir da subdivisão dos simplexes de (b). Fica a cargo do leitor mostrar que a  $k$ -ésima subdivisão baricêntrica de um simplex é uma subdivisão por simplexes.

**Definição 2.1.7.** *Seja  $\bar{T} = co\{x_0 \dots x_n\}$  um  $n$ -simplex fechado com uma subdivisão por simplexes e seja  $V$  o conjunto dos vértices dos simplexes desta subdivisão. Então uma função  $\lambda : V \rightarrow \{0, \dots, n\}$ , tal que  $\lambda(v)$  é um dos índices da face de  $T$  a que  $v$  pertence, é chamada de proper labeling da subdivisão. Um subsimplex  $T'$  é chamado de completely labeled se  $\lambda|_{T'}$  é sobrejetiva.*

A figura 9 mostra um proper labeling da primeira subdivisão baricêntrica de  $\Delta_2$ . Veja que o índice associado a cada vértice da subdivisão é igual a um dos índices da sua face. Por exemplo, o baricentro do simplex está indexado por 1, mas seu valor poderia ser 2 ou 3 já que o baricentro está na face definida pelos vértices  $e_1, e_2$  e  $e_3$ . Da mesma forma, o vértice indexado por 3 também poderia ser indexado por 1, já que ele está na face definida por  $e_1$  e  $e_3$ . O subsimplex preenchido é o único completely labeled da subdivisão pois  $\lambda$  restrita a ele é sobrejetiva, isto é, o subsimplex possui todos os índices 1, 2 e 3.

**Proposição 2.1.4.** *Dada a  $k$ -ésima subdivisão baricêntrica  $U$  do  $n$ -simplex  $T$ , todo  $(n - 1)$ -simplex  $T' \in U$  é face de um ou dois  $n$ -simplexes de  $U$ . Mais especificamente, se  $T'$  está contido na fronteira de  $T$ , então  $T'$  é face de apenas um  $n$ -simplex de  $U$ ; se  $T'$  está no interior de  $T$  então  $T'$  é face de dois  $n$ -simplexes de  $U$ .*

A prova pode ser feita por indução em  $k$  e fica a cargo do leitor.

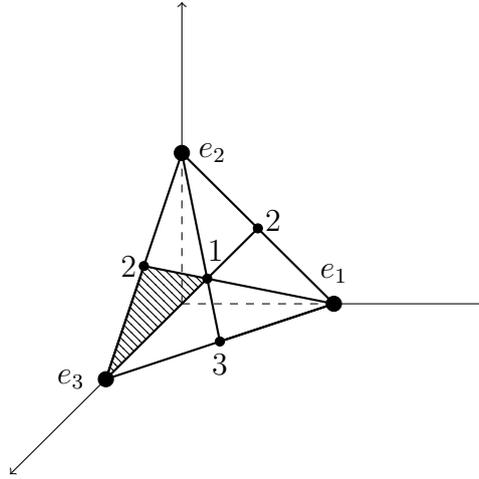


Figura 9 – Exemplo de proper labeling em  $\Delta_2$ .

**Teorema 2.1.2** (Teorema de Sperner (1928)). *Seja  $\bar{T} = \text{co}\{x_0, \dots, x_n\}$  um  $n$ -simplex fechado, subdividido pela  $k$ -subdivisão baricêntrica e properly labeled pela função  $\lambda$ . Então existe um número ímpar de simplexes completamente labeled na subdivisão. Em particular, existe um simplex completamente labeled.*

*Demonstração.* A prova é por indução em  $n$ . Se  $n = 0$  o resultado é trivial. Supõe-se verdadeiro para  $n - 1$ . Sejam

$A$  = Conjunto de todos  $n$ -simplexes completamente labeled;

$B$  = Conjunto de  $n$ -simplexes quase completamente labeled, isto é, aqueles cujos índices por  $\lambda$  são  $\{0, \dots, n - 1\}$ ;

$C$  = Conjunto de  $(n - 1)$ -simplexes da fronteira de  $T$  que possuem os labels  $\{0, \dots, n - 1\}$ ;

$D$  = Conjunto de todos  $(n - 1)$ -simplexes que possuem os labels  $\{0, \dots, n - 1\}$ ;

$E = \{(a, b) \in (A \cup B \cup C) \times D, a \in A \cup B \text{ e } b \text{ é face de } a, \text{ ou } a = b \in C\}$ .

Vai-se calcular o número de elementos em  $E$  de duas maneiras diferentes para mostrar que o número de elementos em  $A$  é ímpar.

Primeiro veja que todo elemento  $b$  de  $D$  ou está na fronteira ou no interior de  $T$ . Se ele estiver na fronteira, então ele é face de exatamente um  $n$ -subsimplex pela proposição 2.1.4, então existe  $a \in A \cup B$  tal que  $b$  é uma de suas faces, logo,  $(a, b) \in E$ . Também tem-se que  $b \in C$ , logo,  $(b, b) \in E$ . Se  $b$  estiver no interior do simplex então ele é face de exatamente dois  $n$ -subsimplex  $a_1$  e  $a_2$  pela proposição 2.1.4, que pertencem a  $A \cup B$ . Daí segue que  $(a_1, b)$  e  $(a_2, b) \in E$ .

Pelo visto acima, cada elemento de  $D$  está relacionado a dois elementos de  $A \cup B \cup C$  em  $E$ , logo,  $|E| = 2|D|$ .

Por outro lado, contando os elementos relacionados a  $A \cup B \cup C$ , veja que  $A$ ,  $B$  e  $C$  são disjuntos, então  $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C|$ . Se  $a \in A$  então existe um, e apenas um, elemento  $b \in D$  tal que  $(a, b) \in E$ . Se  $a \in B$  então existem dois elementos  $b_1$  e  $b_2 \in D$  tais

que  $(a, b_1)$  e  $(a, b_2) \in E$ , onde cada  $b_i$  corresponde a um dos índices repetidos de  $a$ . Se  $a \in C$  então  $(a, a) \in E$ .

Pelo visto acima, cada elemento de  $A$  e de  $C$  está relacionado a um elemento de  $D$  em  $E$ , enquanto cada elemento de  $B$  está relacionado a dois elementos de  $D$  em  $E$ . Como os conjuntos  $A, B$  e  $C$  são disjuntos,  $|E| = |A| + 2|B| + |C|$ .

Juntando os resultados acima temos que  $|E| = 2|D| = |A| + 2|B| + |C|$ , então  $|A| + |C|$  é par. Agora veja que  $C$  está contido na face  $S(x_0, \dots, x_{n-1})$  (por causa dos seus índices) que é um  $(n - 1)$ -simplex, logo, por hipótese de indução  $|C|$  é ímpar. Daí segue que  $|A|$  é ímpar.  $\square$

A figura 9 pode servir como exemplo. Qualquer mudança dos índices, definindo uma relação properly labeled, resulta em algum 2-subsimplex completely labeled.

### 2.1.3 O teorema

**Teorema 2.1.3.** *Seja  $f : \Delta_m \rightarrow \Delta_m$  contínua. Então  $f$  tem um ponto fixo.*

*Demonstração.* Seja  $\epsilon > 0$  e divida  $\Delta_m = S(e_1, \dots, e_{m+1})$  baricentricamente em subsimplexes de diâmetro  $< \epsilon$  (usando uma  $k$ -ésima subdivisão baricêntrica). Seja  $V$  o conjunto de vértices da subdivisão e defina a função labeling  $\lambda : V \rightarrow \{1, \dots, m + 1\}$  como

$$\lambda(v) \in \{i : v_i > 0\} \cap \{i : (f(v))_i \leq v_i\},$$

onde  $(f(v))_i$  é o  $i$ -ésimo coeficiente de  $f(v)$  e  $v_i$  é o  $i$ -ésimo coeficiente de  $v$ . Veja que  $\lambda(v)$  está definida para todo  $v$  já que é impossível que  $(f(v))_i > v_i$  para todo  $i$ , pois suas somas totalizam 1.

Como tal  $\lambda$  satisfaz as hipóteses do lema de Sperner, existe um subsimplex completely labeled  $S(x_\epsilon^1, \dots, x_\epsilon^{m+1})$  tal que  $(f(x_\epsilon^i))_i \leq (x_\epsilon^i)_i$  para cada  $i$ . Fazendo  $\epsilon = \frac{1}{n} \rightarrow 0$  tem-se uma sequência  $(\overline{T}_n)$  de  $m$ -simplexes fechados contidos em  $\Delta_m$  com  $\text{diam}(T_n) < \frac{1}{n}$  e vértices  $x_{\frac{1}{n}}^i$ ,  $1 \leq i \leq m + 1$ , tais que  $(f(x_{\frac{1}{n}}^i))_i \leq (x_{\frac{1}{n}}^i)_i$ . Forme uma sequência  $(y_n)$  de pontos  $y_n \in T_n$  e veja que essa sequência tem um ponto de acumulação  $y$  já que  $\Delta_m$  é compacto. Sem perda de generalidade, suponha que a sequência que tende ao ponto de acumulação é a própria  $(y_n)$ .

Mostra-se que  $y$  é ponto fixo de  $f$ : como  $y_n \rightarrow y$ , então as sequências  $(x_{\frac{1}{n}}^i)_{n \in \mathbb{N}}$  de vértices de  $\overline{T}_n$  também tendem a  $y$  já que o diâmetro de  $\overline{T}_n$  tende a zero. Pela continuidade de  $f$ , as sequências de imagens  $(f(x_{\frac{1}{n}}^i))_{n \in \mathbb{N}}$  tendem a  $f(y)$ .

Como  $(f(x_{\frac{1}{n}}^i))_i \leq (x_{\frac{1}{n}}^i)_i$  para todo  $i$ , então  $(f(y))_i \leq y_i$  para todo  $i$  pela continuidade de  $f$ . Como  $1 = \sum_{i=1}^{m+1} (f(y))_i = \sum_{i=1}^{m+1} y_i$ , com  $0 \leq (f(y))_i \leq y_i$  para todo  $i$ , então  $(f(y))_i = y_i$  para todo  $i$ , isto é,  $f(y) = y$ .  $\square$

**Definição 2.1.8.**  *$f : A \rightarrow B$  é um homeomorfismo se for bijetiva e contínua com inversa contínua.  $A$  e  $B$  são então ditos homeomorfos.*

**Corolário 2.1.1.** *Seja  $K$  homeomorfo a  $\Delta_m$  e  $f : K \rightarrow K$  contínua. Então  $f$  tem um ponto fixo.*

*Demonstração.* Seja  $h : \Delta_m \rightarrow K$  um homeomorfismo. Então  $h^{-1} \circ f \circ h : \Delta_m \rightarrow \Delta_m$  é contínua e existe  $z'$  tal que  $h^{-1} \circ f \circ h(z') = z'$  pelo teorema 2.1.3. Então  $f \circ h(z') = h(z')$  e  $h(z')$  é ponto fixo de  $f$ .  $\square$

**Teorema 2.1.4 (Brouwer).** *Seja  $K \subset \mathbb{R}^m$  convexo e compacto e  $f : K \rightarrow K$  contínua. Então  $f$  tem um ponto fixo.*

*Demonstração.* Já que  $K$  é compacto, então está contido em um  $n$ -simplex suficientemente grande  $T$ ,  $n \leq m$ . Defina  $h : \bar{T} \rightarrow K$  como a função que associa cada  $x$  ao seu ponto em  $K$  mais próximo de  $x$ . Como  $K$  é convexo, tal  $h$  está bem definida e é contínua (se o ponto  $x \in \bar{T} - K$  está a uma mesma distância de  $y_1$  e  $y_2$ , então está ainda mais próximo do ponto  $\frac{y_1 + y_2}{2} \in K$ , daí a unicidade; para a continuidade basta notar que  $|h(x_1) - h(x_2)| \leq |x_1 - x_2|$  para todo  $x_1$  e  $x_2$ ). Então  $f \circ h : \bar{T} \rightarrow K \subset \bar{T}$  tem um ponto fixo  $z$  pelo corolário 2.1.1 (note que  $\bar{T}$  é homeomorfo ao  $n$ -simplex padrão). Tal ponto fixo não pode estar em  $\bar{T} - K$  já que a imagem de  $f \circ h$  está em  $K$ . Então  $z \in K$  e  $f \circ h(z) = z$ . Como  $h(z) = z$ , então  $f(z) = z$ .  $\square$

## 2.2 O teorema do ponto fixo de Kakutani

Toda esta seção constrói resultados para concluir o teorema de Kakutani, que é o último resultado da seção. No teorema de Kakutani utiliza-se também o teorema de Brouwer da seção anterior.

Sugere-se que o leitor leia o teorema de Kakutani para ter uma ideia do processo construído para a sua prova. É mostrado que uma função naquelas hipóteses pode ser “aproximada” por uma sequência de funções contínuas, que possuem pontos fixos pelo teorema de Brouwer (teorema 2.1.4). Em  $K$  compacto, a sequência de pontos fixos possui um ponto de acumulação que será o ponto fixo de Kakutani.

### 2.2.1 Um pouco de Análise em $\mathbb{R}^n$

**Definição 2.2.1.** *Uma correspondência  $\sigma : K \rightarrow P(K)$ , onde  $P(K)$  é o conjunto das partes de  $K \subset \mathbb{R}^m$ , é dita fechada se o seu gráfico  $Gr(\sigma) = \{(x, y) \in K \times K, y \in \sigma(x)\} \subset \mathbb{R}^{2m}$  é fechado.*

**Definição 2.2.2.** *Seja  $\sigma : K \rightarrow P(K)$  e  $E \subset K$ . A inversa superior de  $E$  por  $\sigma$ , denotada por  $\sigma^+[E]$ , é definida por*

$$\sigma^+[E] = \{x \in K : \sigma(x) \subset E\}.$$

$\sigma$  é dita semi contínua superiormente no ponto  $x$  se, quando  $x$  está na inversa superior de um conjunto aberto então uma vizinhança de  $x$  também está. A função  $\sigma$  é dita semi contínua superiormente se for semi contínua superiormente em todo ponto do seu domínio.

*Obs:* O leitor pode se perguntar sobre semi continuidade inferior. Daremos a definição a seguir, para satisfazer a curiosidade, mas esclarecemos que ela não será utilizada neste texto:  $\sigma$  é dita semi contínua inferiormente se, quando  $\sigma(x)$  intersecta um aberto  $U$ , então existe um aberto  $V$  que contém  $x$  e tal que as imagens de todos os pontos de  $V$  intersectam  $U$ .

**Proposição 2.2.1.** *Seja  $\sigma : K \rightarrow P(K)$ ,  $K \subset R^m$ ,  $K$  compacto. Então  $\sigma$  é fechada se, e somente se, é semi contínua superiormente e toma apenas conjuntos fechados.*

*Demonstração.* A ida: Para ver que  $\sigma$  toma somente conjuntos fechados basta ver que se isto não acontecesse, então existiria algum  $x \in K$  tal que  $\Phi(x)$  não é fechado, logo, existiria uma sequência convergente  $(x, y_n)$  em  $\{x\} \times \sigma(x)$  cujo limite não está em  $x \times \sigma(x)$ , o que contradiria a hipótese de  $\sigma$  ser fechada.

Para a semi continuidade superior, supondo que  $\sigma$  não é semi contínua superior, então existe algum  $x$  e uma vizinhança aberta  $U$  de  $\sigma(x)$  tais que, para toda vizinhança  $V$  de  $x$ , existe um  $z \in V$  com  $\sigma(z) \not\subset U$ . Então podem-se achar duas sequências  $z_n \rightarrow x$ ,  $y_n \in \sigma(z_n)$  com  $y_n \notin U$ . Como  $K$  é compacto, existe uma subsequência de  $(y_n)$  que converge a um ponto  $y$  de  $K$  que não pertence a  $U$ , pois  $U$  é aberto. Mas, como  $\sigma$  é fechado,  $(z_{n_k}, y_{n_k}) \rightarrow (x, y) \in Gr(\sigma)$ , então  $y \in \sigma(x) \subset U$ , absurdo.

A volta: Suponha que  $(x, y) \notin Gr(\sigma)$ . Vai-se mostrar que existe uma vizinhança aberta de  $(x, y)$  cuja interseção com  $Gr(\sigma)$  é vazia, daí segue que  $Gr(\sigma)^c$  é aberto, logo,  $Gr(\sigma)$  é fechado. Como  $\sigma$  toma somente conjuntos fechados por hipótese, existe uma vizinhança fechada  $U$  de  $y$  ( $y$  está no seu interior) disjunta de  $\sigma(x)$  (de fato,  $y \in \sigma(x)^c$ , que é aberto, logo, existe uma bola centrada em  $y$  de raio  $2\epsilon$  contida em  $\sigma(x)^c$ . Faça  $U$  o fecho da bola centrada em  $y$  e raio  $\epsilon$ ). Então  $V = U^c$  é uma vizinhança aberta de  $\sigma(x)$ . Como  $\sigma$  é semi contínua superiormente, então existe um  $W \subset \sigma^+[V]$  tal que  $\sigma(z) \subset V$  para todo  $z \in W$ . Então  $(W \times U) \cap Gr(\sigma) = \emptyset$ , já que  $U \cap \sigma(W) \subset U \cap V = U \cap U^c = \emptyset$ . Como  $(x, y) \in W \times int(U)$  é aberto (produto cartesiano de abertos), então o complementar de  $Gr(\sigma)$  é aberto e  $Gr(\sigma)$  é fechado.  $\square$

**Proposição 2.2.2.** *Seja  $E \subset R^m$ ,  $F \subset R^n$ ,  $\sigma : E \rightarrow P(F)$  tal que  $\sigma(x)$  é sempre um conjunto compacto. Então  $\sigma$  é semi contínua superiormente em  $x$  se, e somente se, para toda sequência  $x_n \rightarrow x$  e  $y_n \in \sigma(x_n)$  existe uma subsequência convergente de  $(y_n)$  com limite em  $\sigma(x)$ .*

*Demonstração.* A ida: seja  $\sigma$  semi contínua superiormente em  $x$ ,  $x_n \rightarrow x$  e  $y_n \in \sigma(x_n)$ . Como  $\sigma$  toma somente conjuntos compactos,  $\sigma(x)$  possui uma vizinhança aberta limitada  $U$ . Pela semi continuidade, existe uma vizinhança  $V$  de  $x$  tal que  $\sigma(V) \subset U$ . Então  $y_n \in U$  para  $n$  suficientemente grande, logo, é uma sequência limitada e possui uma subsequência convergente  $(y_{n_k})$  a um  $y$ . Supõe que  $y \notin \sigma(x)$ , então  $dist(y, \sigma(x)) > 0$  já que  $\sigma(x)$  é compacto. Logo,

existem vizinhanças abertas  $U'$  e  $W$  de  $\sigma(x)$  e  $y$ , respectivamente, tais que  $U' \cap W = \emptyset$ . Como  $y_{n_k} \rightarrow y$  e  $y_{n_k} \in \sigma(x_{n_k})$ , então  $U'$  não contém  $\sigma(x_{n_k})$  para  $k$  suficientemente grande, contradizendo a semi continuidade superior em  $x$ .

A volta: Se  $\sigma$  não for semi contínua superiormente em  $x$ , então existe uma vizinhança aberta  $U$  de  $\sigma(x)$  tal que nenhuma vizinhança de  $x$  está na inversa superior de  $U$ . Então existe uma sequência  $x_n \rightarrow x$  tal que  $\sigma(x_n) \not\subset U$  para todo  $n$ . Tome  $y_n \in \sigma(x_n)$  tal que  $y_n \notin U$ . Tal sequência não tem subsequência com limite em  $\sigma(x)$  já que todos seus elementos estão fora de  $U$ , que é uma vizinhança aberta de  $\sigma(x)$ .  $\square$

**Definição 2.2.3.** Seja  $A \subset R^m$ . A  $\epsilon$ -vizinhança de  $A$  é definida como

$$N_\epsilon(A) = \{x \in R^m : \text{dist}(x, A) < \epsilon\},$$

onde  $\text{dist}(x, A) = \inf\{\|x - y\|, y \in A\}$ . Por abuso de notação, escreveremos  $N_\epsilon(x)$  para identificar o conjunto  $B(x, \epsilon)$ .

**Lema 2.2.1.** [Celina (1969), [2] - 13.1] Seja  $\sigma : E \rightarrow P(F)$  semi contínua superiormente tomando conjuntos compactos, convexos e não vazios, onde  $E \subset R^m$  é compacto e  $F \subset R^k$  é convexo. Para  $\delta > 0$  defina

$$\sigma^\delta(x) = \text{co} \left( \bigcup_{z \in N_\delta(x)} \sigma(z) \right).$$

Então para todo  $\epsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que

$$\text{Gr}(\sigma^\delta) \subset N_\epsilon(\text{Gr}(\sigma)).$$

*Demonstração.* Suponha que não. Então deve existir uma sequência  $(x_n, y_n)$  com  $(x_n, y_n) \in \text{Gr}(\sigma^{\frac{1}{n}})$  tal que  $\text{dist}((x_n, y_n), \text{Gr}(\sigma)) \geq \epsilon > 0$ . Mas  $(x_n, y_n) \in \text{Gr}(\sigma^{\frac{1}{n}})$  significa que

$$y_n \in \sigma^{\frac{1}{n}}(x_n) \Rightarrow y_n \in \text{co} \left( \bigcup_{z \in N_{\frac{1}{n}}(x_n)} \sigma(z) \right).$$

Pelo teorema 2.1.1, existem

$$y_{0n}, \dots, y_{kn} \in \bigcup_{z \in N_{\frac{1}{n}}(x_n)} \sigma(z),$$

tais que  $y_n = \sum_{i=0}^k \lambda_{in} y_{in}$  com  $\lambda_{in} \geq 0$  somando 1, onde  $y_{in} \in \sigma(z_{in})$  para  $z_{in} \in N_{\frac{1}{n}}(x_n)$ . Pela compacidade de  $E$ , existe um  $x$  ponto de acumulação de  $(x_n)$ , mas vamos escrever  $x_n \rightarrow x$  sem perda de generalidade. Como  $\sigma$  é semi contínua superiormente, para  $n$  suficientemente grande os conjuntos  $\sigma^{\frac{1}{n}}(x_n)$  são limitados numa vizinhança aberta, convexa e limitada  $U$  de  $\sigma(x)$ , com  $\sigma(x)$  limitado por hipótese. Daí, a  $(y_n)$  referente a esta sequência de  $(x_n)$  também é limitada,

já que  $(y_n) \in U$ , e possui um ponto de acumulação  $y$ . As representações  $y_n = \sum_{i=0}^k \lambda_{in} y_{in}$  desta subsequência de  $(y_n)$  que tende a  $y$  definem sequências  $(y_{in})$  que também são limitadas em  $U$  pela semi continuidade de  $\sigma$ , logo, tem subsequências convergentes  $y_{in} \rightarrow y'_i$  (novamente s.p.g. Note que primeiro calcula-se a subsequência de  $(y_{ik})$ , que vai gerar uma nova sequência  $(y_{i(k-1)})$ , cuja subsequência vai gerar uma nova sequência  $(y_{i(k-2)})$  e assim sucessivamente). Pode-se falar em pontos de acumulação das sequências  $\lambda_{in} \rightarrow \lambda_i$  da mesma forma já que elas estão no intervalo compacto  $[0, 1]$ . Daí vem que

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k \lambda_{in} y_{in} = \sum_{i=0}^k \lambda_i y'_i.$$

Pela proposição 2.2.2 temos que  $(x, y'_i) \in Gr(\sigma)$  já que  $z_{in} \rightarrow x$ ,  $y_{in} \in \sigma(z_{in})$  e  $y_{in} \rightarrow y'_i$  (considerando as devidas subsequências).

Por fim, como  $\sigma$  toma apenas conjuntos convexos e  $y'_i \in \sigma(x)$  para todo  $i$ , então  $y = \sum_{i=0}^k \lambda_i y'_i \in \sigma(x)$ . Mas veja que isto implica que  $(x, y) \in Gr(\sigma)$  é ponto de acumulação de  $(x_n, y_n)$ , absurdo. □

**Definição 2.2.4.** *Seja  $\{A_\alpha\}$  uma cobertura aberta do conjunto  $K$ . Uma partição da unidade subordinada a esta cobertura é um conjunto finito de funções contínuas  $f_1, \dots, f_n : K \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  tal que  $\sum_{i=1}^n f_i \equiv 1$  e para cada  $i$  existe um  $A_\alpha$  tal que  $f_i$  se anula fora deste conjunto.*

**Proposição 2.2.3.** *Seja  $K \subset \mathbb{R}^m$  compacto e  $\{A_\alpha\}$  uma cobertura aberta de  $K$ . Então existe uma partição da unidade subordinada a  $\{A_\alpha\}$ .*

*Demonstração.* Como  $K$  é compacto, esta cobertura possui subcobertura finita  $A_1, \dots, A_n$ . Defina  $g_i : K \rightarrow \mathbb{R}_+$  por  $g_i(x) = \min\{|x - z| : z \in A_i^c\}$ . É fácil ver que tais  $g_i$ 's são contínuas e se anulam fora de  $A_i$ . Como  $A_1, \dots, A_n$  é cobertura, as  $g_i$ 's não se anulam todas ao mesmo tempo. Defina  $f_i = \frac{g_i}{\sum_j g_j}$ . Então  $\{f_1, \dots, f_n\}$  é a partição da unidade desejada. □

A definição e a proposição acima são usadas no próximo resultado.

**Lema 2.2.2.** *[Aproximação de von Neumann (1937), [2]] Seja  $\sigma : K \rightarrow P(K)$ ,  $K \subset \mathbb{R}^m$  compacto e convexo, com  $\sigma$  semi contínua superiormente tal que  $\sigma(x)$  é sempre não vazio, compacto e convexo. Para cada  $\epsilon > 0$  existe uma função contínua  $g : K \rightarrow K$  tal que  $Gr(g) \subset N_\epsilon(Gr(\sigma))$ .*

*Demonstração.* Pelo lema 2.2.1 existe um  $\delta > 0$  tal que a correspondência  $\sigma^\delta$  satisfaz  $Gr(\sigma^\delta) \subset N_\epsilon(Gr(\sigma))$ . Como  $K$  é compacto, existem  $x_1, \dots, x_n$  tais que  $\{N_\delta(x_i)\}$  é uma cobertura aberta de  $K$ . Seja  $f_1, \dots, f_n$  uma partição da unidade subordinada a esta cobertura (proposição 2.2.3),  $y_i \in \sigma(x_i)$  e defina  $g : K \rightarrow K$  por  $g(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) y_i$ .  $g$  assim definida é contínua e veja que, como  $f_i$  se anula fora de  $N_\delta(x_i)$ ,  $f_i(x) > 0$  implica que  $|x_i - x| < \delta$ , logo  $y_i \in \sigma^\delta(x)$ .

Como  $\sigma^\delta(x)$  é convexo, toda combinação convexa dos  $y_i$  tais que  $f_i(x) > 0$  está em  $\sigma^\delta(x)$ , o que implica que  $g(x) \in \sigma^\delta(x)$ . Então  $(x, g(x)) \in (x, \sigma^\delta(x)) \subset N_\epsilon(Gr(\sigma))$  para todo  $x$  e tem-se o esperado.  $\square$

## 2.2.2 O teorema

**Teorema 2.2.1.** [Kakutani (1941)] *Seja  $K \subset \mathbb{R}^m$  um compacto convexo e  $\sigma : K \rightarrow P(K)$  fechada (equivalente a semicontínua superiormente tomando apenas conjuntos fechados, pela proposição 2.2.1), tal que  $\sigma(y)$  é sempre um conjunto convexo e não vazio. Então  $\sigma$  tem um ponto fixo, isto é, existe um  $x \in K$  tal que  $x \in \sigma(x)$ .*

*Demonstração.* Pelo lema 2.2.2 acima, existe uma sequência de funções contínuas  $g_n : K \rightarrow K$  tal que  $Gr(g_n) \subset N_{\frac{1}{n}}(Gr(\sigma))$ . Pelo teorema de Brouwer (teorema 2.1.4), cada  $g_n$  tem um ponto fixo  $x_n$ . Como  $K$  é compacto, podemos extrair uma subsequência convergente  $(x_{n_k}) \rightarrow x \in K$ . Essa subsequência é tal que  $(x_{n_k}, g_{n_k}(x_{n_k})) = (x_{n_k}, x_{n_k}) \rightarrow (x, x) \in \bigcap_{i=1}^{\infty} N_{\frac{1}{i}}(Gr(\sigma)) = Gr(\sigma)$  já que  $\sigma$  é fechado. Então  $x$  é ponto fixo de  $\sigma$ .  $\square$

Este teorema vai ser utilizado para provar o teorema da existência do equilíbrio de Nash. Também é utilizado para provar o teorema do ponto fixo de Glicksberg-Fan que generaliza o próprio teorema de Kakutani.

## 2.2.3 Equilíbrio de Nash para jogos finitos

**Teorema 2.2.2** (Teorema de Nash). *Todo jogo finito de  $n$  jogadores em forma normal tem um equilíbrio de Nash em estratégias mistas.*

*Demonstração.* Vai-se usar o teorema do ponto fixo de Kakutani. Para isso, define-se  $r_i : S \rightarrow P(S_i)$ , onde  $S = S_1 \times \dots \times S_n$  como a função reação do jogador  $i$  que associa cada perfil de estratégias mistas  $s = (s_i, s_{-i})$  ao conjunto de estratégias mistas do jogador  $i$  que maximizem o seu payoff quando seu oponente joga  $s_{-i}$ . Em seguida, define-se a correspondência  $r : S \rightarrow P(S)$  como o produto cartesiano das  $r_i$ 's. Assim sendo, um ponto fixo  $s$  de  $r$  é tal que  $s \in r(s)$ , ou seja, para cada jogador  $i$ ,  $s_i \in r_i(s)$ , logo, é um equilíbrio de Nash.

Para usar o teorema de Kakutani (teorema 2.2.1) em  $r$  é suficiente mostrar que:

- 1)  $S = S_1 \times \dots \times S_n$  é compacto, convexo, não vazio e pertence a um espaço euclidiano de dimensão finita;
- 2)  $r(s)$  é não vazio para todo  $s$ ;
- 3)  $r(s)$  é convexo para todo  $s$ ;

4)  $r$  tem gráfico fechado.

Verificando estas condições:

Para a condição 1, veja que o conjunto  $S_i$  de estratégias mistas do jogador  $i$  é um simplex fechado de dimensão  $n_i - 1$ , onde  $n_i$  é o número de estratégias puras deste jogador, logo, é compacto e convexo. Então  $S$ , sendo o produto cartesiano de compactos convexos, é um compacto convexo.

Para a condição 2, veja que a função utilidade de cada jogador é linear, logo, contínua (espaço de dimensão finita) na coordenada referente a  $S_i$ . Como funções contínuas em conjuntos compactos possuem máximo, a condição 2 é satisfeita.

Na condição 3, a convexidade vem de que se  $s_1$  e  $s_2$  estão em  $r(s)$  então  $u_i(\lambda s_{1i} + (1 - \lambda)s_{2i}, s_{-i}) = \lambda u_i(s_{1i}, s_{-i}) + (1 - \lambda)u_i(s_{2i}, s_{-i}) = u_i(s_{1i}, s_{-i}) = u_i(s_{2i}, s_{-i})$ , para todo  $\lambda \in [0, 1]$  e para todo  $i$ , logo, a combinação convexa  $\lambda s_1 + (1 - \lambda)s_2$  também está em  $r(s)$ .

Para a condição 4, suponha que ela não acontece. Então existe uma sequência  $(s^n, k^n) \rightarrow (s, k)$ ,  $k^n \in r(s^n)$ , mas  $k \notin r(s)$ . Então  $k_i \notin r_i(s)$  para algum jogador  $i$ . Então existe um  $\epsilon > 0$  e um  $s'_i$ , melhor resposta a  $s_{-i}$ , tais que  $u_i(s'_i, s_{-i}) > u_i(k_i, s_{-i}) + 3\epsilon$ . Como  $u_i$  é contínua e  $(s^n, k^n) \rightarrow (s, k)$ , para  $n$  suficientemente grande temos que

$$u_i(s'_i, s_{-i}^n) > u_i(s'_i, s_{-i}) - \epsilon > u_i(k_i, s_{-i}) + 2\epsilon > u_i(k_i^n, s_{-i}^n) + \epsilon.$$

Então  $s'_i$  é melhor contra  $s_{-i}^n$  do que  $k_i^n$ , o que contradiz que  $k_i^n \in r_i(s^n)$ .  $\square$

Para exemplificar a ideia, vamos deduzir que o único equilíbrio de Nash do jogo do par ou ímpar, mostrado na tabela 1, é o perfil de estratégias mistas  $(\frac{P}{2} + \frac{I}{2}, \frac{P}{2} + \frac{I}{2})$ .

Supõe que o jogador 1 jogue a estratégia mista  $s_1 = tP + (1 - t)I$  e o jogador 2 jogue  $s_2 = qP + (1 - q)I$ , então a utilidade esperada do jogador 1 é

$$\begin{aligned} \mu_1(s_1, s_2) &= tq\mu_1(P, P) + t(1 - q)\mu_1(P, I) + (1 - t)q\mu_1(I, P) + (1 - t)(1 - q)\mu_1(I, I) \\ &= tq - t(1 - q) - q(1 - t) + (1 - t)(1 - q) \\ &= 4tq - 2t - 2q + 1 \\ &= (4q - 2)t - 2q + 1. \end{aligned}$$

Veja que, no equilíbrio de Nash, o jogador 1 procura um valor de  $t$  que maximize essa utilidade para o valor de  $q$  escolhido pelo jogador 2. Sendo assim, fixamos o valor de  $q$  e calculamos o máximo desta utilidade para  $t \in [0, 1]$ . Este máximo acontece em  $t = 1$  se  $q > \frac{1}{2}$  e em  $t = 0$  se  $q < \frac{1}{2}$ .

O cálculo análogo da utilidade do jogador 2 nos diz que sua utilidade é máxima em  $q = 1$  se  $t < \frac{1}{2}$  e em  $q = 0$  se  $t > \frac{1}{2}$ .

Agora observe o seguinte: se  $q > \frac{1}{2}$ , então a melhor resposta do jogador 1 está em  $t = 1$ . Mas para  $t = 1$ , a melhor resposta do jogador 2 está em  $q = 0$ . Assim,  $q > \frac{1}{2}$  não determina

um equilíbrio de Nash. Analogamente, se  $q < \frac{1}{2}$ , então a melhor resposta do jogador 1 está em  $t = 0$ . Mas para  $t = 0$ , a melhor resposta do jogador 2 está em  $q = 1$ . Assim,  $q < \frac{1}{2}$  não determina um equilíbrio de Nash.

Vistas as condições acima, resta analisar  $q = \frac{1}{2}$ . Neste caso, veja que qualquer valor de  $t$  retorna a mesma utilidade esperada para o jogador 1, já que a sua esperança da utilidade se torna constante. Se analisarmos as condições  $t > \frac{1}{2}$  e  $t < \frac{1}{2}$ , analogamente ao que foi feito com  $q$  acima, concluiremos que um equilíbrio de Nash só pode existir com  $t = \frac{1}{2}$ . Este valor de  $t$  torna a esperança da utilidade do jogador 2 numa função constante, então ele maximiza sua utilidade inclusive em  $q = \frac{1}{2}$ . Esta escolha de  $q$  também faz o jogador 1 maximizar sua utilidade em  $t = \frac{1}{2}$ , como visto acima. Conclui-se assim que  $t = q = \frac{1}{2}$  determina um equilíbrio de Nash.

Este exemplo é um caso particular do modelo mencionado no exemplo 1 da seção 1.2.3.

# Referências

- [1] BACHMAN, George; NARICI, Lawrence. **Functional Analysis**. Academic Press Inc., 1966.
- [2] BORDER, Kim C.. **Fixed point theorems with applications to economics and game theory**. Cambridge University Press, 1999 reimpressão de 1985.
- [3] BREZIS, Haim. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. Springer-Verlag, 2010.
- [4] COLMAN, Andrew M.. **Game Theory and its Applications in the Social and Biological Sciences**. Second edition, Routledge, 1999.
- [5] ERDÖS, László. **Banach-Alaoglu Theorems**. Disponível em <<https://www.mathematik.uni-muenchen.de/~lerdos/WS06/FA/alaoglu.pdf>>. Acesso em 19/03/2018.
- [6] FAN, Ky. **Fixed-Point and Minimax Theorems in Locally Convex Topological Linear Spaces**. Publicado em 1951.
- [7] FUDENBERG, Drew; TIROLE, Jean. **Game Theory**. The Mit Press, 1991.
- [8] GALE, David. **The Game of Hex and the Brouwer Fixed-Point Theorem**. The American Mathematical Monthly 86, no. 10 (1979): pgs. 818-827.
- [9] GLICKSBERG, I. L.. **A Further Generalization of the Kakutani Fixed Point Theorem, with Application to Nash Equilibrium Points**. Publicado em 1952.
- [10] GRANAS, Andrzej; DUGUNDJI James; **Fixed Point Theory**. Springer-Verlag New York, 2003.
- [11] INFUSINO, Maria. **Topological Vector Spaces**. Disponível em <<http://www.math.uni-konstanz.de/~infusino/Lect8.pdf>>. Acesso em 24/04/2018.
- [12] KELLEY, John L.. **General Topology**. Springer-Verlag, versão reimpressa de 1955 por Van Nostrand.
- [13] KELLEY, John L.; NAMIOKA, Isaac. **Linear Topological Spaces**. Springer-Verlag, versão reimpressa de 1963 por Van Nostrand.
- [14] LEYTON-BROWN, Kevin; SHOHAM, Yoav. **Essentials of Game Theory**. Morgan e Claypool, 2008.

- 
- [15] LEYTON-BROWN, Kevin; SHOHAM, Yoav. **Multiagent Systems**. Shohan and Leyton-Brown, 2009.
- [16] MCLENNAN, Andrew. **Advanced Fixed Point Theory for Economics**. Disponível em <[http://cupid.economics.uq.edu.au/mclennan/Advanced/advanced\\_fp.pdf](http://cupid.economics.uq.edu.au/mclennan/Advanced/advanced_fp.pdf)>. Acesso em 19/03/2018.
- [17] OSBORNE, Martin J.; RUBINSTEIN, Ariel. **A course in Game Theory**. The MIT Press, 1994.
- [18] RUDIN, Walter. **Functional Analysis**. Segunda edição, McGraw-Hill Book Co., 1991.
- [19] SMITH, Jogn M.. **Evolution and the Theory of Games**. Cambridge University Press, 1982.
- [20] VERMEEREN, Stijn. **Sequences and Nets in Topology**. Disponível em <<https://arxiv.org/pdf/1006.4472.pdf>>. Acesso em 19/03/2018.