



Instituto de  
MATEMÁTICA  
E ESTATÍSTICA  
UFRGS



Programa de  
Pós-Graduação em Matemática  
Instituto de Matemática e Estatística - UFRGS



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

EDUARDO ALVES DA SILVA

**FORMAS PONDERADAS DO TEOREMA DE EULER E PARTIÇÕES  
COM RAIZ: ESTABELECEndo UM TRATAMENTO COMBINATÓRIO  
PARA CERTAS IDENTIDADES DE RAMANUJAN**

Porto Alegre

2018

EDUARDO ALVES DA SILVA

**FORMAS PONDERADAS DO TEOREMA DE EULER E PARTIÇÕES  
COM RAIZ: ESTABELECENDO UM TRATAMENTO COMBINATÓRIO  
PARA CERTAS IDENTIDADES DE RAMANUJAN**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke

Porto Alegre

2018

## CIP - Catalogação na Publicação

Silva, Eduardo Alves da

Formas ponderadas do Teorema de Euler e partições com raiz: estabelecendo um tratamento combinatório para certas identidades de Ramanujan / Eduardo Alves da Silva. -- 2018.

53 f.

Orientador: Eduardo Henrique de Mattos Brietzke.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Porto Alegre, BR-RS, 2018.

1. Partições de inteiros e partições com raiz. 2. Teorema de Euler. 3. Identidades de Ramanujan. 4. Bijeção de Sylvester. 5. Iteração de Pak da função de Dyson. I. de Mattos Brietzke, Eduardo Henrique, orient. II. Título.

EDUARDO ALVES DA SILVA

**FORMAS PONDERADAS DO TEOREMA DE EULER E PARTIÇÕES  
COM RAIZ: ESTABELECENDO UM TRATAMENTO COMBINATÓRIO  
PARA CERTAS IDENTIDADES DE RAMANUJAN**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Banca examinadora:

---

Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke - Orientador  
PPGMat - UFRGS

---

Prof. Dr. Alessandro Bagatini  
Instituto Federal Catarinense - Sombrio

---

Prof. Dr. Diego Marcon Farias  
PPGMat - UFRGS

---

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Marília Luiza Matte  
Colégio Militar de Porto Alegre

Porto Alegre

2018

## AGRADECIMENTOS

Em mais este momento tão especial em minha vida, agradeço imensamente a Deus por todas as oportunidades que tive e por todo o Seu auxílio em minha trajetória, a qual muitas vezes não foi fácil persistir firme diante das dificuldades encontradas.

Agradeço do fundo do meu coração aos meus amados e queridos pais por todo o apoio, carinho e educação dados em toda a minha vida. Mesmo não sabendo da “dimensão” que a oportunidade de estudo pode nos proporcionar (acredito que nem mesmo eu tinha tal percepção), sempre apoiaram a minha decisão de ingressar no Ensino Superior e torceram por mim. Essa “torcida” foi algo de extremo incentivo durante a graduação e a pós-graduação. Ambos sabiam e sabem do quanto tudo isto é muito importante para mim. Tenho vasta gratidão por todos os seus nobres exemplos e por serem aqueles que eu dedico este trabalho.

Agradeço, além de meus pais, a todo o restante da minha extensa família que também sempre me incentivou. Ser o primeiro graduado na família por parte de pai e o primeiro com título de Mestre em ambas será uma honra inestimável e me deixa bastante orgulhoso. Isto demonstra o quanto estamos avançando em termos de proporcionar o acesso ao Ensino Superior às pessoas de baixa renda, ainda mais na pós-graduação.

Existem pessoas que estão ao nosso lado, às vezes mesmo distantes, vibram com nossas conquistas e se importam verdadeiramente conosco. Elas se chamam amigos e não poderia deixar de agradecê-los. Agradeço em especial aos meus melhores amigos de Vacaria, Erivelto W. e Jenifer B., pela amizade sincera desde os tempos de escola. Ficar longe de ambos, assim como da minha família, não foi fácil. Apreciar da companhia de vocês quando eu ia para minha cidade durante todo esse tempo foi algo muito importante para mim.

Agradeço também a minha amiga conterrânea Tainara G., também oriunda do Curso Normal (magistério), pelo companheirismo ao longo da graduação e início da pós-graduação e durante os cursos de verão do IMPA, pelas longas e belas discussões matemáticas e por sempre estar disposta a ter ouvidos para esta pessoa que escreve. Suas palavras sempre foram certas para mim.

Agradeço à Universidade Federal do Rio Grande do Sul pela formação de excelência que me proporcionou no curso de Licenciatura em Matemática e no Mestrado, e também pela oportunidade de conhecer pessoas diferentes e incríveis que hoje posso chamar de amigos, as quais deixaram a graduação e a pós-graduação etapas muito mais prazerosas. Agradeço a vocês: Rodrigo B., Maicon R., Rodrigo L., Dionatan R., Daniela T., Maria Luiza C., Karen A., Jackson F., Juliano L., Marcos H., Rebeca F. e Tailana B.

Agradeço a todos os meus colegas pelos momentos de discussão matemática, pela troca de experiências e pelo apoio durante a pós-graduação. Destaco também as conversas

extremamente aleatórias na sala de estudos coletiva, as quais sempre foram muito interessantes e divertidas. Deixo agradecimentos aos meus “algebros” Darchan S. e Vanusa M., sobretudo ao primeiro pelas belas e calorosas discussões de Álgebra e Topologia Algébrica. Mais uma vez na pós-graduação aprendemos muito um com o outro, especialmente apontando os erros alheios.

Agradeço muito aos meus magníficos professores pelo ensino que me proporcionaram. Minha formação matemática é devida a todos vocês que têm o meu reconhecimento. Saibam que aprendi muito com cada um, que fez a sua maneira que eu desbravasse o universo da Matemática e da pesquisa, deixando-me cada vez mais fascinado.

Reservo agradecimentos especiais ao professor Eduardo Henrique de Mattos Britzke pela prestatividade, paciência e valiosos ensinamentos ao longo da orientação no Mestrado. Foram muitas discussões interessantes realizadas e sempre seus direcionamentos eram sagazes para aquilo que estávamos tratando. Dois Eduardo’s pensando juntos sempre foi uma experiência prazerosa e engrandecedora. Sinto-me duplamente orgulhoso de ter sido seu aluno em quatro disciplinas que pude cursar na graduação e ser seu orientando. Agradeço muito pela sua preocupação comigo em relação aos meus estudos, mas também acerca da minha vida pessoal e do meu futuro. Como de praxe seus perspicazes conselhos sempre foram de grande valia para mim e me ajudaram a tomar as melhores decisões.

Agradeço especialmente também aos professores Alessandro Bagatini, Diego Marcon Farias e Marília Luiza Matte por aceitarem participar da banca examinadora deste trabalho e se disporem a analisá-lo.

É claro que não poderia deixar de agradecer à OBMEP, que representou e representa muito em minha vida, proporcionando-me experiências incríveis como o PIC Jr. <sup>1</sup> e o PICME <sup>2</sup> que me fizeram ainda ter mais apreço pela Matemática. Sem dúvida posso afirmar que muitas das minhas realizações foram devidas a tal iniciativa, que definitivamente foi um marco na minha vida. Agradeço pela oportunidade de conhecer pessoas fantásticas que também gostam de Matemática entre professores e outros alunos do nosso país, alguns dos quais assim como na UFRGS, da mesma forma posso chamar de amigos. Agradeço ao PICME pela oportunidade de antecipar o curso de Mestrado, cursando-o concomitantemente com a graduação.

Agradeço muito ao IMPA pela maravilhosa oportunidade de realizar o curso de Doutorado. Estudar em tal instituição neste momento em que o Brasil faz parte da elite matemática mundial é certamente algo fantástico. Muita Matemática para aprender!

Agradeço à CAPES e ao CNPq pela bolsa de Mestrado concedida, a qual foi

---

<sup>1</sup>Programa de Iniciação Científica Júnior.

<sup>2</sup>Programa de Iniciação Científica e Mestrado.

fundamental neste período.

Certamente, posso dizer que esta dissertação foi uma peça com muito mérito para a minha formação. Por fim, a todos que fizeram parte nesta etapa tão importante para mim deixo meus sinceros agradecimentos.

## DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus amados e queridos pais que sempre fizeram de tudo para que eu pudesse me tornar a pessoa que sou hoje. Dedico também a minha madrinha Josefina (Zefa) (*in memoriam*) pelo exemplo digníssimo de pessoa.

*“Aquele que trabalha duro pode superar um gênio, mas, de nada adianta trabalhar duro se você não confia em você mesmo...”*

Rock Lee, personagem do mangá Naruto

## RESUMO

O artigo “Weighted forms of Euler’s theorem” de William Y.C. Chen e Kathy Q. Ji, em resposta ao questionamento de George E. Andrews, matemático estadunidense, sobre encontrar demonstrações combinatórias de duas identidades no Caderno “Perdido” de Ramanujan, nos mostra algumas formas ponderadas do Teorema de Euler sobre partições com partes ímpares e partes distintas via a introdução do conceito de partição com raiz. A propositura deste trabalho é envolta à apresentação de resultados sobre partições com raiz de modo a posteriormente realizar formulações combinatórias das identidades de Ramanujan por meio deste conceito, procurando estabelecer conexões com formas ponderadas do Teorema de Euler. Em particular, a bijeção de Sylvester e a iteração de Pak da função de Dyson são elementos primordiais para obtê-las.

**Palavras-chave:** partições de inteiros, partições com raiz, Teorema de Euler, Identidades de Ramanujan, bijeção de Sylvester, iteração de Pak da função de Dyson.

## ABSTRACT

The article “Weighted forms of Euler’s theorem” by William Y.C. Chen and Kathy Q. Ji in response to the questioning of George E. Andrews, American mathematician, about finding combinatorial proofs for two identities in Ramanujan’s “Lost” Notebook shows us some weighted forms of Euler’s Theorem on partitions with odd parts and distinct parts through the introduction of the concept of rooted partition. The purpose of this work involves the presentation of results on rooted partitions in order to make combinatorial formulations of Ramanujan’s identities, seeking to establish connections with weighted forms of Euler’s Theorem. In particular, the Sylvester’s bijection and the Pak’s iteration of the Dyson’s map are primordial elements to obtain them.

**Keywords:** integer partitions, rooted partitions, Euler’s theorem, Ramanujan’s identities, Sylvester’s bijection, Pak’s iteration of the Dyson’s map.

# Sumário

<b>Sumário</b>	<b>12</b>
<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>13</b>
<b>1 PRELIMINARES</b>	<b>16</b>
1.1 Definições e resultados básicos . . . . .	16
1.2 Delineamento do trabalho e resultados a serem mostrados . . . . .	25
<b>2 FORMAS PONDERADAS DO TEOREMA DE EULER</b>	<b>28</b>
2.1 A bijeção de Sylvester e a iteração de Pak da função de Dyson . . . . .	28
2.1.1 Bijeção de Sylvester . . . . .	28
2.1.2 Iteração de Pak da função de Dyson . . . . .	30
2.2 Alguns lemas decorrentes . . . . .	32
<b>3 PARTIÇÕES COM RAIZ</b>	<b>35</b>
3.1 Exemplos e resultados básicos . . . . .	36
3.2 Teoremas e lemas sobre partições com raiz . . . . .	37
3.3 Conexões entre partições com raiz e partições ordinárias . . . . .	42
<b>4 IDENTIDADES DE RAMANUJAN</b>	<b>45</b>
4.1 Formulação combinatória de (1.1) . . . . .	45
4.2 Formulação combinatória de (1.2) . . . . .	49
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>52</b>

# INTRODUÇÃO

Este trabalho trata sobre partições de inteiros e alguns resultados relacionados. Partições de inteiros podem ser entendidas como formas de escrevê-los como soma de inteiros positivos, não importando a ordem. Por exemplo,  $4 + 2$  ou  $5 + 5 + 3 + 2 + 1$  são partições de 6 e 16, respectivamente. O estudo destes simples objetos matemáticos fascinou um número considerável de matemáticos, que deram importantes contribuições para o desenvolvimento da teoria e dentre os quais podemos citar: Euler, Ramanujan, Hardy, Rademacher, Sylvester, Selberg e Dyson.

Entre os nomes desta pequena lista pode-se dizer que Srinivasa Ramanujan (1887-1920), matemático indiano, realizou contribuições substanciais na área de Teoria das Partições, a qual se enquadra como uma subárea da Teoria dos Números. No entanto, suas realizações matemáticas também abrangeram séries infinitas e frações contínuas, bem como o vislumbre de muitas fórmulas notáveis, as quais puderam ser investigadas com profundidade somente mais tarde.

Sua história é relatada no recente filme *O Homem que Viu o Infinito*, o qual mostra um pouco da sua nobre trajetória muitas vezes tempestuosa e cheia de acontecimentos. Apesar disto e do seu pouco tempo de vida, suas contribuições recebem notável reconhecimento até os dias atuais, sendo objeto de estudo desta dissertação. Convém notar que Ramanujan não possuía formação acadêmica formal.

Desde os tempos de escola Ramanujan se destacava pelo seu brilhantismo e facilidade com os números. Anos mais tarde conseguiu ganhar uma bolsa de estudos, mas infelizmente a perdeu pelo inglês tido como insuficiente, mesmo despertando admiração de mestres e colegas. Diante disto, Ramanujan se tornou autodidata e durante a adolescência lidou com inúmeros resultados matemáticos atualmente bem conhecidos, como, por exemplo, a existência de fórmulas para as equações polinomiais de terceiro e quarto graus.

Após, Ramanujan começou a frequentar uma universidade local na Índia como ouvinte. Não demorou para que os professores reconhecessem suas qualidades e o aconselhassem a enviar seus trabalhos realizados até o momento para o matemático inglês Godfrey Harold Hardy. Muito impressionado com os feitos de Ramanujan, Hardy o convidou

para ir a Cambridge na Inglaterra para realizar estudos e trabalharem conjuntamente.

Ambos realizaram diversas contribuições para a Teoria das Partições. Durante os trabalhos conjuntos Ramanujan conjecturou a veracidade de vários resultados, muitos deles relacionados à função aritmética  $p(n)$ ,<sup>3</sup> que nós dá o número de partições de  $n$ . É um fato muito curioso que exista uma fórmula fechada para o cálculo de  $p(n)$  e isto resultou do trabalho de Ramanujan, Hardy e Rademacher [1]<sup>4</sup>, o qual foi inspirado pelas ideias geniais do primeiro.

Assim como este famoso resultado, a função  $p(n)$  possui muitas outras propriedades interessantes. Em [1] e [3] são discutidas inúmeras e mencionaremos uma delas: “para todo  $n \geq 0$ , vale que  $p(n) \leq F_{n+1}$ , onde  $F_n$  denota o  $n$ -ésimo número de Fibonacci”. Diante deste fato a Teoria das Partições continua sendo uma área de pesquisa fértil até os dias atuais, com muitas questões ainda sendo levantadas.

Após a morte precoce de Ramanujan, sua esposa recolheu seus trabalhos e os doou à Universidade de Madras, na Índia. Estes foram repassados para muitos matemáticos e mais tarde foram organizados nos intitulados Cadernos de Ramanujan (*Ramanujan's Notebooks*). George Andrews and Bruce C. Berndt (2005, 2009, 2012, 2013) publicaram vários livros nos quais dão demonstrações de fórmulas matemáticas devidas a Ramanujan, muitas provenientes de suas anotações. Várias delas eram apenas um amontoado de papéis, enunciando diversas afirmações, grande parte sem demonstrações.

Em particular, o quarto caderno, conhecido como Caderno “Perdido” de Ramanujan (*Ramanujan's “Lost” Notebook*) em razão de ser descoberto por Andrews em 1976 na biblioteca da Universidade de Cambridge, retrata as descobertas de Ramanujan durante o seu último ano de vida. É surpreendente que algumas delas apareçam em questões da Física e sejam utilizadas para entender determinados comportamentos. Citamos a intrigante fórmula  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -\frac{1}{12}$ , a qual pode ser justificada “legitimamente” segundo certos argumentos envolvendo somas parciais.

Atualmente, George Andrews é considerado um dos grandes especialistas em Teoria das Partições. As obras [1] e [3] são referências clássicas para o estudo desta teoria. A perspicácia de Andrews ao afirmar a possibilidade de existência de uma relação entre identidades encontradas no Caderno “Perdido” de Ramanujan e formas ponderadas do Teorema de Euler levou William Y.C. Chen e Kathy Q. Ji [6] a encontrarem uma demonstração combinatória deste fato. O Teorema de Euler afirma: “o número de partições de  $n$  em partes distintas é igual ao número de partições de  $n$  em partes ímpares.”.

A proposta deste trabalho está relacionada à consideração anterior. Existem diver-

<sup>3</sup>Em Teoria dos Números, uma função aritmética é uma função  $f(n)$  de valor real ou complexo definida sobre o conjunto dos números naturais que expressa alguma propriedade aritmética de  $n$ .

<sup>4</sup>Neste trabalho as citações serão indicadas por um número entre colchetes, o qual representa a posição da referência em questão em relação a ordem alfabética de todas elas.

sas identidades de partição, muitas foram demonstradas primeiramente via argumentos analíticos, e mais tarde, via argumentos combinatórios. É natural em Matemática nos perguntarmos se determinado resultado pode ser demonstrado de mais de uma maneira. Em particular, combinatorialmente muitos resultados matemáticos revelam seu caráter intrínseco.

A dissertação é estruturada da maneira descrita a seguir. No primeiro capítulo apresentaremos definições e notações usuais em Teoria das Partições, como em [1] e [3], e resultados básicos para o desenvolvimento do trabalho.

No segundo capítulo apresentaremos a bijeção de Sylvester e a iteração de Pak da função de Dyson e daremos demonstrações de alguns lemas decorrentes. James Joseph Sylvester (1814-1897), matemático inglês, é reconhecido pelo pioneirismo em demonstrar muitas identidades de partição de maneira construtiva, com o uso de funções bijetivas. Freeman Dyson é um importante matemático e físico estadunidense com contribuições também relevantes. A função indexada de Dyson é relacionada ao rank <sup>5</sup> de uma partição, cuja formulação foi motivada pelo questionamento de Dyson acerca de resultados relativos a Ramanujan.

No terceiro capítulo, o conceito de partição com raiz será introduzido e serão obtidas funções geradoras e diversas identidades envolvendo partições com raiz. Também instituiremos relações entre partições com raiz e partições ordinárias. Por fim, no quarto capítulo estabeleceremos as conexões entre as formas ponderadas do Teorema de Euler deduzidas a fim de darmos o tratamento combinatório completo para as identidades de Ramanujan apresentadas no Capítulo 1 ((1.1) e (1.2)). Todos os resultados analisados neste trabalho foram extraídos do artigo de Chen e Ji [6].

---

<sup>5</sup>O rank de uma partição é definido como a maior parte menos o número de partes.

# Capítulo 1

## PRELIMINARES

Neste primeiro capítulo apresentamos definições e notações usuais em Teoria das Partições, como em Andrews [1] e Andrews [3], e resultados básicos para o desenvolvimento do trabalho. Ao longo do texto, tais tópicos serão considerados como conhecidos. Exporemos também o delineamento do trabalho e os resultados a serem mostrados.

### 1.1 Definições e resultados básicos

Todo o trabalho envolve o conceito de partição de um número inteiro positivo, conforme a definição a seguir.

**Definição 1.1.1** *Uma partição de um inteiro positivo  $n$  é uma forma de escrevê-lo como soma de inteiros positivos, não importando a ordem. Assim, uma partição  $\lambda$  de um inteiro positivo  $n$  é uma sequência não-crescente de inteiros positivos  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  tais que  $\sum_{i=1}^r \lambda_i = n$ . Então cada  $\lambda_i$  é chamado parte de  $\lambda$  e  $\lambda_1$  é sua maior parte. Podemos representar tal sequência identificando-a por meio de um vetor  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ . O número de partes de  $\lambda$  é chamado o comprimento de  $\lambda$  e denotado por  $l(\lambda)$ . O peso de  $\lambda$  é a soma das partes, denotado por  $|\lambda| = n$ .*

**Exemplo 1.1.2** *Existem 11 partições de 6, as quais estão listadas a seguir:*

$$(6), (5, 1), (4, 2), (4, 1, 1), (3, 3), (3, 2, 1), (3, 1, 1, 1)$$

$$(2, 2, 2), (2, 2, 1, 1), (2, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1, 1)$$

**Definição 1.1.3** *Para uma partição  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  definimos a partição conjugada  $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_t)$  de  $\lambda$  atribuindo a  $\lambda'_i$  o número de partes de  $\lambda$  que são maiores ou iguais a  $i$ . Claramente, temos que  $l(\lambda) = \lambda'_1$  e  $\lambda_1 = l(\lambda')$ .*

Afirmações do tipo “todo número tem tantas partições inteiras deste tipo como daquele tipo” são chamadas *identidades de partição*. É um fato muito intrigante que existam identidades de partição das mais variadas possíveis. Um exemplo famoso disto é: “*Todo número tem tantas partições inteiras em partes de tamanho 1, 4, 6, 9, 11, 14, ... como em partes cuja diferença é no mínimo 2.*”<sup>6</sup>. Esta identidade foi descoberta de maneira independente por Leonard James Rogers em 1894 e Srinivisa Ramanujan em 1913 [1]. Por tal razão é a chamada 1ª Identidade de Rogers-Ramanujan.

A fim de formular identidades de partição precisamente, alguma notação é de fato necessária. Denotamos por  $p(n)$ <sup>7</sup> o número de partições de  $n$ . De acordo com o Exemplo 1.1.2 temos que  $p(6) = 11$ . Por convenção, adotamos  $p(0) = 1$ .

Em identidades de partição, frequentemente estamos interessados no número de partições que satisfazem alguma condição. Denotamos tal número por  $p(n \mid \text{condição})$ . Por exemplo, a 1ª Identidade de Rogers-Ramanujan toma a forma:

$$p(n \mid \text{partes} \equiv 1 \text{ ou } 4 \pmod{5}) = p(n \mid \text{partes } 2\text{-distintas}).$$
<sup>8</sup>

No trabalho serão apresentadas diversas identidades de partição e as trataremos utilizando uma das principais ferramentas para a solução de problemas de contagem: a ideia de *funções geradoras*.

**Definição 1.1.4** *Se  $a_n$ , para  $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$  é o número de soluções de um problema de combinatória, a função geradora ordinária para este problema é a série de potências formal<sup>9</sup>  $a_0 + a_1q + a_2q^2 + a_3q^3 + \dots$ . De modo geral, dada a sequência  $(a_n)$ , a função geradora ordinária para esta sequência é definida como a série de potências formal anterior. Dizemos que  $q$  é a indeterminada e  $a_n$  é o coeficiente de  $q^n$ , sendo denotado por  $[q^n](a_0 + a_1q + a_2q^2 + a_3q^3 + \dots)$ .*

Segundo Santos et. al [12], esta técnica foi originária nos trabalhos de A. De Moivre (1667-1754), tendo sido amplamente empregada por L. Euler (1707-1783) em problemas de teoria aditiva de números, especificamente na Teoria de Partições. Este método também foi aplicado por outros matemáticos para estudar problemas de outras áreas, como S.

<sup>6</sup>Outra forma de expressar os possíveis tamanhos das partes 1, 4, 6, 9, 11, 14, ... é dizer que estes correspondem aos números inteiros que deixam resto 1 ou 4 na divisão por 5, ou seja, os números inteiros congruentes a 1 ou 4 (mod 5).

<sup>7</sup>Alguns autores denotam por  $P(n)$  o conjunto das partições de  $n$  e por  $p(n)$  a sua cardinalidade, ou seja,  $p(n) = |P(n)|$ .

<sup>8</sup>Dado qualquer inteiro positivo  $d$ , definimos partes  $d$ -distintas como partes cuja diferença é no mínimo  $d$ . Para o caso particular  $d = 0$ , definimos partes 0-distintas como partes de quaisquer tamanhos.

<sup>9</sup>O termo *formal* se refere ao fato de que valores não são atribuídos a  $q$ , de modo que não nos preocupamos com questões de convergência, ou seja, o que nos interessa são os coeficientes da série de potências em questão.

Laplace (1749-1827) no estudo de probabilidade e N. Bernoulli (1687-1759) no estudo de permutações caóticas.

A utilidade das funções geradoras é devida ao fato de que é possível encontrá-las sem resolver diretamente o problema de contagem correspondente. Como seus coeficientes representam o número desejado, uma questão natural que surge é encontrar um método para extrai-los. Em alguns casos, tais coeficientes podem ser obtidos a partir da manipulação de séries conhecidas, sendo expressos comumente por operações algébricas elementares. No entanto, em outras situações, isso pode ser mais complicado ou praticamente inviável. Assim, o uso de softwares computacionais nos auxilia a expandir a série de potências em questão e a selecionar o coeficiente desejado.

A ideia central das funções geradoras está envolta a um princípio algébrico: a familiar regra para multiplicação de potências de mesma base:

$$q^r \cdot q^s = q^{r+s}.$$

Suponha que queiramos exibir todas as possíveis partições consistindo de uma parte par  $< 10$  e uma parte ímpar entre 1 e 9. Uma forma de fazê-lo é listar todas as possibilidades, e existem 12 delas. Entretanto, note que todas surgem naturalmente da seguinte multiplicação de polinômios:

$$\begin{aligned} (q^2 + q^4 + q^6 + q^8)(q^3 + q^5 + q^7) &= q^{2+3} + q^{2+5} + q^{2+7} + q^{4+3} + q^{4+5} + q^{4+7} + q^{6+3} \\ &\quad + q^{6+5} + q^{6+7} + q^{8+3} + q^{8+5} + q^{8+7} \\ &= q^5 + 2q^7 + 3q^9 + 3q^{11} + 2q^{13} + q^{15}. \end{aligned}$$

Observe que a primeira e segunda linhas da expressão anterior exibem nos expoentes todas as partições satisfazendo as referidas condições, enquanto que na terceira linha os coeficientes nos indicam a quantidade de partições referentes aos expoentes das potências de  $q$  correspondentes. Assim, os coeficientes nos fornecem:

$$p(n \mid \text{uma parte par } < 10 \text{ e uma parte ímpar entre } 1 \text{ e } 9).$$

Esta ideia pode ser facilmente estendida. Suponha  $S_r = \{n_1, \dots, n_r\}$  um conjunto finito de  $r$  inteiros positivos. Tomando  $r = 4$ , vemos que:

$$\begin{aligned} (1 + q^{n_1})(1 + q^{n_2})(1 + q^{n_3})(1 + q^{n_4}) &= 1 + q^{n_1} + q^{n_2} + q^{n_3} + q^{n_4} + q^{n_1+n_2} + q^{n_1+n_3} \\ &\quad + q^{n_1+n_4} + q^{n_2+n_3} + q^{n_2+n_4} + q^{n_3+n_4} + q^{n_1+n_2+n_3} \\ &\quad + q^{n_1+n_2+n_4} + q^{n_2+n_3+n_4} + q^{n_1+n_2+n_3+n_4} \end{aligned}$$

exibe nos expoentes todas as partições possíveis usando elementos distintos de  $S_4$ .

Esta função, neste caso um polinômio, é chamada a função geradora para as partições em elementos distintos de  $S_4$  e o coeficiente de  $q^n$  é o número de tais partições de  $n$ .

Desta forma, no caso geral temos que se  $S_r = \{n_1, \dots, n_r\}$ ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n \mid \text{partes distintas em } S_r) q^n = \prod_{i=1}^r (1 + q^{n_i}) = \prod_{n \in S_r} (1 + q^n).$$

E em geral, se  $S_r = \{n_1, \dots, n_r\}$  e permitirmos que cada parte se repita até  $d$  vezes temos que

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} p(n \mid \text{partes distintas em } S_r, \text{ repetidas até } d \text{ vezes}) q^n \\ &= \prod_{i=1}^r (1 + q^{n_i} + q^{n_i+n_i} + \dots + \overbrace{q^{n_i + \dots + n_i}}^{d \text{ vezes}}) = \prod_{i=1}^r \frac{1 - q^{(d+1)n_i}}{1 - q^{n_i}} = \prod_{n \in S_r} \frac{1 - q^{(d+1)n}}{1 - q^n}, \end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade foi obtida por meio da aplicação da fórmula para a série geométrica finita:

$$\sum_{j=0}^N x^j = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x}.$$

Mas, e se quisermos permitir que as partes se repitam um número arbitrário de vezes (ou seja,  $d \rightarrow \infty$ )? Para que o argumento utilizado ainda permaneça válido vamos supor  $|q| < 1$  para assegurarmos a convergência da soma. Isto de fato é possível, pois estamos considerando  $q$  apenas como parte da notação. Assim, para  $|q| < 1$ ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n \mid \text{partes em } S_r) q^n = \prod_{i=1}^r (1 + q^{n_i} + q^{2n_i} + q^{3n_i} + \dots) = \prod_{i=1}^r \frac{1}{1 - q^{n_i}} = \prod_{n \in S_r} \frac{1}{1 - q^n},$$

onde a penúltima igualdade foi obtida por meio da aplicação da fórmula para a série geométrica infinita:

$$\sum_{j=0}^{\infty} x^j = \frac{1}{1 - x}, \quad |x| < 1.$$

As fórmulas anteriores não fazem referência à finitude do conjunto de números inteiros positivos considerado. Em razão disto, é possível estendê-las para um conjunto infinito enumerável qualquer, e em particular para o conjunto dos números naturais.<sup>10</sup>

<sup>10</sup>A demonstração das identidades anteriores para o caso em que o conjunto de números inteiros positivos considerado é infinito enumerável pode ser realizada por meio da sequência de exercícios localizada na página 46 de Andrews [1]. A legitimidade é óbvia em razão das fórmulas para o caso finito, mas algum tratamento para propriedades de convergência de produtórios infinitos deve ser dado. Estas são asseguradas por meio de testes de convergência clássicos da Análise, bem como análogos de resultados

Assim, vem que a função geradora para  $p(n)$  é dada por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 - q^n}.$$

Para ilustrar tais ideias, seguem alguns exemplos clássicos de partições e suas funções geradoras correspondentes.

**Exemplo 1.1.5** (*Partições sem quaisquer restrições*) Isto nada mais é do que  $p(n)$  e já sabemos sua função geradora de acordo com o que já foi exposto. Como ilustração, considerando a expansão dos primeiros termos da série de potências associada, vamos obter  $p(8)$ :

$$\begin{aligned} [q^8] \frac{1}{1-q} \frac{1}{1-q^2} \cdots &= [q^8] \frac{1}{1-q} \frac{1}{1-q^2} \cdots \frac{1}{1-q^8} \\ &= [q^8] \frac{1}{1-q} \frac{1}{1-q^2} \cdots \frac{1}{1-q^7} (1+q^8) \\ &= 1 + [q^8] \frac{1}{1-q} \frac{1}{1-q^2} \cdots \frac{1}{1-q^6} (1+q^7) \\ &= 1 + [q^8] \frac{1}{1-q} \frac{1}{1-q^2} \cdots \frac{1}{1-q^6} + [q] \frac{1}{1-q} \frac{1}{1-q^2} \cdots \frac{1}{1-q^6} \\ &= 2 + [q^8] \frac{1}{1-q} \frac{1}{1-q^2} \cdots \frac{1}{1-q^5} (1+q^6) \\ &= 2 + [q^8] \frac{1}{1-q} \frac{1}{1-q^2} \cdots \frac{1}{1-q^5} + [q^2] \frac{1}{1-q} \frac{1}{1-q^2} \cdots \frac{1}{1-q^5} \\ &= 4 + [q^8] \frac{1}{1-q} \frac{1}{1-q^2} \cdots \frac{1}{1-q^4} (1+q^5) \\ &= 4 + [q^8] \frac{1}{1-q} \frac{1}{1-q^2} \cdots \frac{1}{1-q^4} + [q^3] \frac{1}{1-q} \frac{1}{1-q^2} \cdots \frac{1}{1-q^4} \\ &= 7 + [q^8] \frac{1}{1-q} \frac{1}{1-q^2} \frac{1}{1-q^3} (1+q^4+q^8) \\ &= 8 + [q^8] \frac{1}{1-q} \frac{1}{1-q^2} \frac{1}{1-q^3} + [q^4] \frac{1}{1-q} \frac{1}{1-q^2} \frac{1}{1-q^3} \\ &= 8 + 10 + 4 = 22 \end{aligned}$$

**Exemplo 1.1.6** (*Partições em partes distintas*) Considere  $p_d(n)$  o número de partições de  $n$  em partes distintas. Então,

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_d(n)q^n = (1+q)(1+q^2)(1+q^3) \cdots = \prod_{n=0}^{\infty} (1+q^n).$$

**Exemplo 1.1.7** (*Partições em partes ímpares*) Considere  $p_o(n)$  o número de partições para séries infinitas.

de  $n$  em partes ímpares. Então,

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_o(n)q^n = (1 + q + q^2 + \dots)(1 + q^3 + q^{2 \cdot 3} + \dots)(1 + q^5 + q^{2 \cdot 5} + \dots) \dots = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^{2n-1}}.$$

Em razão da utilização frequente de produtórios e somatórios com termos gerais dados por produtos, adotaremos a notação de fatorial  $q$ -deslocado, o que simplificará consideravelmente muitas das expressões tratadas neste trabalho.

**Definição 1.1.8** *O fatorial  $q$ -deslocado é definido por:*

$$(x; q)_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0, \\ (1 - x)(1 - qx) \dots (1 - q^{n-1}x), & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

$$(x; q)_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} (x; q)_n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - xq^n).$$

Observe que de acordo com esta notação, as três funções geradoras abordadas nos exemplos podem ser expressas por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \frac{1}{(q; q)_{\infty}},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_d(n)q^n = (-q; q)_{\infty},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_o(n)q^n = \frac{1}{(q; q^2)_{\infty}}.$$

Certos resultados sobre partições de inteiros podem ser abordados com o auxílio de uma representação gráfica destas. Existem dois modos usuais de representá-las, por meio de pontos ou quadrados dispostos em filas ordenadas.

**Exemplo 1.1.9** Para a partição  $\lambda = (5, 4, 2, 2, 2, 1, 1)$  de 17 temos as representações:

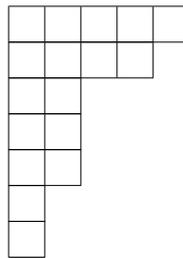
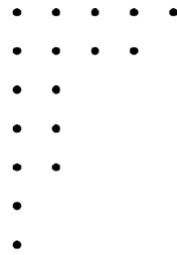


Figura 1: Representações da partição  $\lambda = (5, 4, 2, 2, 2, 1, 1)$  de 17 em gráfico de Ferrers e quadro de Ferrers

Fonte: Autor

A representação por meio de pontos é denominada *gráfico de Ferrers* e a por meio de quadrados é denominada *quadro de Ferrers* ou *diagrama de Young*. Temos as definições formais a seguir:

**Definição 1.1.10** Dada uma partição  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  de um inteiro positivo  $n$ , o seu gráfico de Ferrers é um conjunto de  $n$  pontos no plano, colocando-se em cada linha, e em ordem decrescente, um número pontos de igual a cada uma de suas partes. Ou seja, tais pontos estão dispostos em  $r$  linhas, de modo que a  $i$ -ésima linha possui  $\lambda_i$  pontos com  $i = 1, \dots, r$ .

**Definição 1.1.11** Dada uma partição  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  de um inteiro positivo  $n$ , o seu quadro de Ferrers ou diagrama de Young é um conjunto de  $n$  quadrados  $1 \times 1, (i, j)$  no plano sobre o reticulado  $\mathbb{Z}^2$ , com  $1 \leq i \leq l(\lambda)$  e  $1 \leq j \leq \lambda_i$ . Ou seja, a primeira coordenada  $i$  cresce de baixo para cima enquanto que a segunda coordenada cresce da esquerda para a direita.

Dependendo do que estiver sendo considerado, uma representação gráfica pode ser melhor que a outra. Assim, a fim de ilustrar melhor alguns resultados que serão abordados no trabalho, utilizaremos a segunda representação.

**Definição 1.1.12** Dada uma partição  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  de um inteiro positivo  $n$  e sua representação gráfica, definimos sua partição conjugada como a associada à transformação desta pela ação de trocarmos as linhas pelas colunas.

**Exemplo 1.1.13** Para a partição  $\lambda = (5, 4, 2, 2, 2, 1, 1)$  de 17 temos que sua conjugada é dada por  $\lambda' = (7, 5, 2, 2, 1)$ :

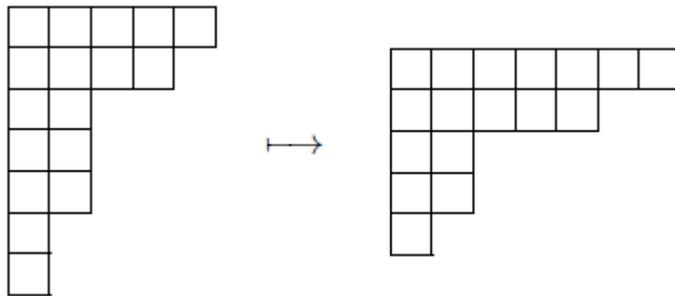


Figura 2: Partição  $\lambda = (5, 4, 2, 2, 2, 1, 1)$  de 17 e sua conjugada

Fonte: Autor

**Observação 1.1.14** A definição de partição conjugada já foi exposta neste trabalho e não existe ambiguidade em relação à Definição 1.1.3. Com efeito, a transformação de conjugação retorna uma partição com a maior parte igual ao número de partes da partição original. Aplicando sucessivamente a transformação de conjugação ao “restante” da partição sem a primeira coluna, a consideração segue.

Observamos também que a conjugada de uma partição não é, necessariamente, distinta da partição original. Partições iguais a sua própria conjugada são chamadas de autoconjugadas.

**Definição 1.1.15** Dada uma partição  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  de um inteiro positivo  $n$ , o seu rank, introduzido por Dyson [7], é definido como a maior parte menos o número de partes, denotado por  $r(\lambda)$ . Assim,  $r(\lambda) = \lambda_1 - l(\lambda)$ . Por convenção, assumimos que a partição vazia possui rank nulo.

É fácil ver que o rank de uma partição de  $n$  varia no conjunto de inteiros  $\{1 - n, 3 - n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n - 3, n - 1\}$ .

**Observação 1.1.16** Em virtude das inúmeras vezes que tais conjuntos de partições irão ser citados neste trabalho, denotaremos o conjunto de partições de  $n$  em partes distintas por  $\mathcal{D}_n$  e o conjunto de partições de  $n$  em partes ímpares por  $\mathcal{O}_n$ .

Agora, diante de todos os conceitos anteriores, apresentamos o resultado primordial do trabalho, o Teorema de Euler, o qual estabelece uma relação entre  $\mathcal{D}_n$  e  $\mathcal{O}_n$ , e duas demonstrações: uma bijetiva e outra por meio de funções geradoras.

**Teorema 1.1.17** (*Teorema de Euler*) *O número de partições de  $n$  em partes distintas é igual ao número de partições de  $n$  em partes ímpares. Ou seja,  $|\mathcal{D}_n| = |\mathcal{O}_n|$  e em termos de funções geradoras para ambos os conjuntos respectivamente temos a seguinte identidade:*

$$(-q; q)_\infty = \frac{1}{(q; q^2)_\infty}.$$

**Demonstração:** (Bijetiva) Vamos encontrar uma bijeção entre os conjuntos  $\mathcal{D}_n$  e  $\mathcal{O}_n$ .<sup>11</sup>

*De  $\mathcal{O}_n$  para  $\mathcal{D}_n$ :* Se as partes das partições resultantes são distintas, então não existem duas ou mais cópias de uma mesma parte. Assim, para uma partição de  $\mathcal{O}_n$  substitua cada dupla de partes de mesmo tamanho, fundindo-as em uma parte de tamanho duplo. Podemos repetir este processo até todas as partes serem distintas, pois o número delas decresce a cada operação. Isto nos dá uma partição em  $\mathcal{D}_n$ . Por exemplo,

$$\begin{aligned} 7 + 7 + 7 + 5 + 5 + 3 + 3 + 3 + 3 + 1 &\longmapsto (7 + 7) + 7 + (5 + 5) + (3 + 3) + (3 + 3) + 1 \\ &\longmapsto 14 + 7 + 10 + 6 + 6 + 1 \\ &\longmapsto 14 + 7 + 10 + (6 + 6) + 1 \\ &\longmapsto 14 + 7 + 10 + 12 + 1. \end{aligned}$$

*De  $\mathcal{D}_n$  para  $\mathcal{O}_n$ :* O inverso de fundir duas partes iguais é decompor uma parte par em duas partes iguais a sua metade correspondente. Assim, para uma partição de  $\mathcal{D}_n$  aplique sucessivamente tal procedimento a todas as partes pares. Podemos repetir este processo até não haver mais partes pares, pois o tamanho delas decresce a cada operação. Isto deve ocorrer no máximo até quando o tamanho das partes for igual a 1. Desta forma, obtemos uma partição em  $\mathcal{O}_n$ . Por exemplo,

$$\begin{aligned} 14 + 7 + 10 + 12 + 1 &\longmapsto (7 + 7) + 7 + (5 + 5) + (6 + 6) + 1 \\ &\longmapsto 7 + 7 + 7 + 5 + 5 + 6 + 6 + 1 \\ &\longmapsto 7 + 7 + 7 + 5 + 5 + (3 + 3) + (3 + 3) + 1 \\ &\longmapsto 7 + 7 + 7 + 5 + 5 + 3 + 3 + 3 + 3 + 1. \end{aligned}$$

Observe que não há arbitrariedade na ordem em que escolhemos as operações de decomposição e fundição. De fato, quando essas operações são realizadas sobre uma parte, elas não interferem nas operações realizadas nas outras partes. Portanto, a ordem delas não altera a partição resultante.

<sup>11</sup>A ideia da bijeção em questão pode ser generalizada para mostrar que para quaisquer inteiros  $k \geq 2$  e  $n \geq 1$ , temos a identidade de partição  $p(n \mid \text{sem partes divisíveis por } k) = p(n \mid \text{menos que } k \text{ cópias de cada parte})$ .

Logo, existe uma bijeção entre os dois conjuntos e a identidade de partição vale. ■

**Demonstração:** (Por funções geradoras) Dos exemplos realizados, sabemos que a função geradora para partições em partes distintas é dada por:

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + q^n)$$

e que a função geradora para partições em partes ímpares é igual a:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^{2n-1}}.$$

Desta forma, basta mostrarmos que tais expressões são idênticas. Assim, temos que:

$$\begin{aligned} \prod_{n=0}^{\infty} (1 + q^n) &= \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1 + q^n)(1 - q^n)}{(1 - q^n)} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1 - q^{2n}}{1 - q^n} \\ &= \left( \frac{1 - q^2}{1 - q} \right) \left( \frac{1 - q^4}{1 - q^2} \right) \left( \frac{1 - q^6}{1 - q^3} \right) \left( \frac{1 - q^8}{1 - q^4} \right) \left( \frac{1 - q^{10}}{1 - q^5} \right) \left( \frac{1 - q^{12}}{1 - q^6} \right) \dots \\ &= \frac{1}{(1 - q)(1 - q^3)(1 - q^5)(1 - q^7) \dots} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^{2n-1}}. \end{aligned}$$

Observe que o termo  $1 - q^n$  aparece no denominador para todas as potências inteiras positivas, enquanto que, no numerador, aparece apenas potências pares. Cancelando os fatores comuns no numerador e no denominador, resulta na igualdade entre as funções geradoras em questão e portanto a identidade de partição é válida. ■

## 1.2 Delineamento do trabalho e resultados a serem mostrados

A proposta deste trabalho é apresentar formulações combinatórias de duas identidades extraídas do Caderno “Perdido” de Ramanujan

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(-q; q)_{\infty} - (-q; q)_n] = (-q; q)_{\infty} \left[ -\frac{1}{2} + \sum_{d=1}^{\infty} \frac{q^d}{1 - q^d} \right] + \frac{1}{2} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{\binom{n+1}{2}}}{(-q; q)_n} \right], \quad (1.1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{(q; q^2)_{\infty}} - \frac{1}{(q; q^2)_n} \right] = (-q; q)_{\infty} \left[ -\frac{1}{2} + \sum_{d=1}^{\infty} \frac{q^{2d}}{1 - q^{2d}} \right] + \frac{1}{2} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{\binom{n+1}{2}}}{(-q; q)_n} \right]. \quad (1.2)$$

Ambas as identidades já possuem demonstrações algébricas devidas a Andrews [2]. Assim, tais formulações combinatórias a serem obtidas nos permitem dar mais uma demonstração delas. A existência desta foi motivo de questionamento do próprio Andrews ao intuir de maneira perspicaz que poderia haver alguma relação muito próxima entre alguns termos das identidades e alguma generalização do Teorema de Euler, apontando até possibilidades de estudo deste resultado em formas ponderadas.

Muitas fórmulas matemáticas podem ser demonstradas via argumentos combinatórios, os quais, além de belos, muitas vezes nos permitem entender até melhor seu caráter intrínseco. Segundo Chen e Ji [6], recentemente, alguns pesquisadores trabalharam neste sentido, encontrando resultados combinatórios relacionados a termos das identidades como tentativa de reformulações destes. De maneira muito informal, podemos perceber que os somatórios em questão parecem ser funções geradoras de determinados tipos de partições em partes ímpares ou em partes distintas.

Inspirados nas ideias de Andrews, Chen e Ji [6] encontraram interpretações combinatórias de todos os termos das identidades e o elemento chave é o conceito de partição com raiz, o qual será introduzido adiante neste trabalho. As funções geradoras para partições com raiz e identidades relacionando-as são ferramentas que permitem expressar os termos das identidades (1.1) e (1.2) como somas ponderadas entre partições em partes ímpares e partições em partes distintas.

As duas interpretações combinatórias a seguir relativas a termos das identidades (1.1) e (1.2) serão demonstradas neste trabalho:

**Lema 1.2.1** *A seguinte relação é válida:*

$$(-q; q)_{\infty} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{q^d}{1 - q^d} = \sum_{\lambda \in \mathcal{O}} 2l(\lambda)q^{|\lambda|} - \sum_{\mu \in \mathcal{D}} l(\mu)q^{|\mu|}. \quad (1.3)$$

**Lema 1.2.2** *A seguinte relação é válida:*

$$(-q; q)_{\infty} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{q^{2d}}{1 - q^{2d}} = \sum_{\lambda \in \mathcal{O}} l(\lambda)q^{|\lambda|} - \sum_{\mu \in \mathcal{D}} l(\mu)q^{|\mu|}. \quad (1.4)$$

Com base nos dois lemas anteriores, Chen e Ji [6] puderam reformular as identidades de Ramanujan (1.1) e (1.2) por meio de formas ponderadas do Teorema de Euler, como desejado por Andrews [2]. O adjetivo ponderadas vem do fato que agora atribuí-

mos certo peso à contribuição de cada partição para o coeficiente da respectiva função geradora.

**Teorema 1.2.3** *A seguinte relação é válida:*

$$\sum_{\mu \in \mathcal{D}} \left( l(\mu) + \mu_1 + \frac{1 - (-1)^{r(\mu)}}{2} \right) q^{|\mu|} = \sum_{\lambda \in \mathcal{O}} 2l(\lambda) q^{|\lambda|}. \quad (1.5)$$

**Teorema 1.2.4** *A seguinte relação é válida:*

$$\sum_{\mu \in \mathcal{D}} \left( l(\mu) + \frac{1 - (-1)^{r(\mu)}}{2} \right) q^{|\mu|} = \sum_{\lambda \in \mathcal{O}} \left( l(\lambda) - \frac{\lambda_1 - 1}{2} \right) q^{|\lambda|}. \quad (1.6)$$

Segundo Chen e Ji [6], nenhuma das demonstrações bijetivas existentes do Teorema de Euler pode mostrar a validade dos teoremas anteriores. No entanto, estes podem ser deduzidos por meio de formas ponderadas do último advindas da bijeção de Sylvester e a iteração de Pak da função de Dyson. Veremos que (1.5) segue dos Lemas 2.2.1 e 2.2.3 e que (1.6) segue dos Lemas 2.2.2 e 2.2.3, todos apresentados no próximo capítulo.

## Capítulo 2

# FORMAS PONDERADAS DO TEOREMA DE EULER

Neste capítulo daremos demonstrações das formas ponderadas (1.5) e (1.6) do Teorema de Euler. A bijeção de Sylvester e a iteração de Pak da função de Dyson são correspondências entre  $\mathcal{D}_n$  e  $\mathcal{O}_n$  e serão as ferramentas básicas para tanto. Estas também nos fornecem outras duas provas (bijetivas) deste resultado.

### 2.1 A bijeção de Sylvester e a iteração de Pak da função de Dyson

#### 2.1.1 Bijeção de Sylvester

De acordo com Chen e Ji [6], existem diversas formas de descrever a bijeção de Sylvester  $\varphi : \mathcal{O}_n \rightarrow \mathcal{D}_n$ . Aqui daremos uma descrição baseada na utilização de diagramas 2-modulares, os quais foram utilizados por Bessenrodt [4]. De um modo geral temos a definição a seguir:

**Definição 2.1.1** *Dado um número natural  $N \in \mathbb{N}$  e uma partição  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  de  $n$ , escrevemos as partes de  $\lambda$  como  $\lambda_i = s_i N + a_i$  com  $s_i, a_i \in \mathbb{N}$  e  $0 < a_i \leq N$ . Então o diagrama  $N$ -modular de  $\lambda$  é uma sequência de  $l(\lambda)$  filas, cada uma composta de  $s_i$   $N$ 's e um  $a_i$ .*

**Exemplo 2.1.2** *Para a partição  $\lambda = (15, 12, 10, 8, 7, 5, 2, 1)$  de 60 temos o diagrama 4-modular:*

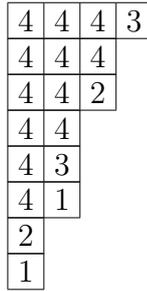


Figura 3: Diagrama 4-modular da partição  $\lambda = (15, 12, 10, 8, 7, 5, 2, 1)$  de 60

Fonte: Autor

**Bijecção de Sylvester  $\varphi$ :** Dada uma partição  $\lambda$  de  $n$  em partes ímpares, decompõe seu diagrama 2-modular em ganchos <sup>12</sup>  $H_1, H_2, \dots$  com seus cantos formando uma diagonal. Sejam  $\mu_1$  o número de quadrados em  $H_1$ ,  $\mu_2$  o número de 2's em  $H_1$ ,  $\mu_3$  o número de quadrados em  $H_2$ ,  $\mu_4$  o número de 2's em  $H_2$  e assim por diante. Defina  $\varphi(\lambda) = \mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots)$ . Então  $\varphi(\lambda)$  é claramente uma partição em partes distintas, pois a sequência dos  $\mu_i$ 's do modo como foi construída é estritamente decrescente.

**Inversa da bijecção de Sylvester  $\varphi^{-1}$ :** Seja uma partição  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{2k-1}, \mu_{2k})$  de  $n$  em partes distintas onde  $\mu_i > 0$  para  $1 \leq i \leq 2k - 1$  e  $\mu_{2k} \geq 0$ . Apenas consideramos a última parte como nula, caso o número de partes de  $\mu$  seja ímpar. Considere a parte  $\mu_{2k}$ , escreva uma quantidade  $\mu_{2k}$  de 2's em uma fila, adicione 1 ao seu final e então adicione uma quantidade  $(\mu_{2k-1} - \mu_{2k} - 1) \geq 0$  de 1's a primeira coluna. Denote este gancho por  $H_k$ . Note que por construção os 2's podem aparecer somente na primeira fila deste gancho, o qual contribui na partição resultante com  $2\mu_{2k} + 1 + (\mu_{2k-1} - \mu_{2k} - 1) = \mu_{2k} + \mu_{2k-1}$  unidades.

Considere as partes  $\mu_{2k-3}$  e  $\mu_{2k-2}$ . O gancho  $H_{k-1}$  é construído de forma que contenha uma quantidade  $\mu_{2k-2}$  de 2's e uma quantidade  $\mu_{2k-3} - \mu_{2k-2} > 0$  de 1's da maneira como segue. Se existe um 1 na  $i$ -ésima fila de  $H_k$ , então deve haver um 2 imediatamente a sua esquerda em  $H_{k-1}$ . Assim, os 2's restantes são dispostos na primeira fila de  $H_{k-1}$  e os 1's nos finais da primeira coluna e da primeira linha. Novamente, note que  $H_{k-1}$  contribui na partição resultante com  $2\mu_{2k-2} + (\mu_{2k-3} - \mu_{2k-2}) = \mu_{2k-3} + \mu_{2k-2}$  unidades.

Agora, repetimos este procedimento de maneira indutiva até obtermos uma partição com partes ímpares com representação por meio de seu diagrama 2-modular. Pelas observações realizadas,  $\varphi^{-1}$  está bem definida.

<sup>12</sup>Tais ganchos nos remetem a figura da letra L invertida:  $\lrcorner$ .

**Exemplo 2.1.3** Para a partição  $\lambda = (7, 7, 5, 5, 3, 1)$  de 28 temos:

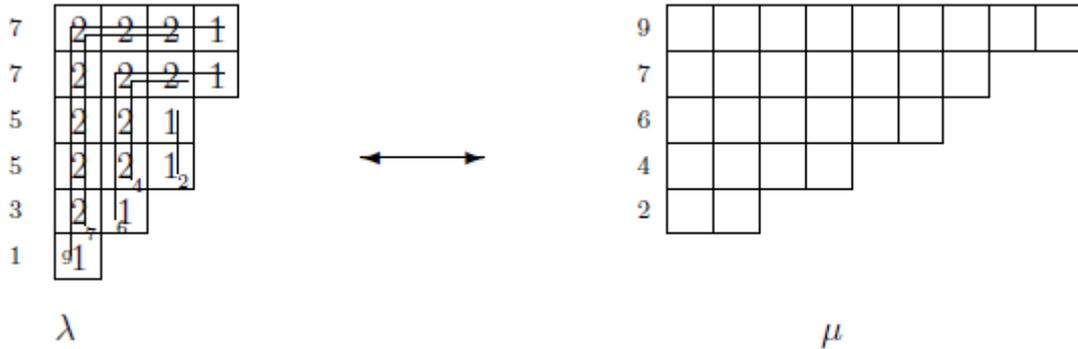


Figura 4: Bijeção de Sylvester  $\varphi: (7, 7, 5, 5, 3, 1) \mapsto (9, 7, 6, 4, 2)$

Fonte: [6]

### 2.1.2 Iteração de Pak da função de Dyson

A iteração de Pak da função de Dyson pode ser encontrada em Pak [10]. Esta correspondência também permite dar uma demonstração combinatória do Teorema de Fine.<sup>13</sup> Tal resultado é também conhecido como Refinamento de Fine, conforme Andrews [1], pois este aprimora o Teorema de Euler, utilizando a Definição 1.1.15 de rank de uma partição. Também, neste sentido existe o Refinamento de Sylvester, o qual é baseado numa variação da sua bijeção anteriormente apresentada, como podemos ver em Andrews [1].

Denote por  $H_{n,r}$  e  $G_{n,r}$  os conjuntos de partições de  $n$  com rank no máximo  $r$  e no mínimo  $r$ , respectivamente. A função indexada de Dyson  $\psi_r$  estabelece uma bijeção entre  $H_{n,r+1}$  e  $G_{n+r,r-1}$ .

**Função indexada de Dyson  $\psi_r$ :** Considere o quadro de Ferrers correspondente a uma partição  $\lambda \in H_{n,r+1}$ . Remova a primeira coluna e adicione  $l + r$  quadrados à fila superior para obter um novo quadro de Ferrers, o qual, com esta nova fila, representa uma partição  $\mu \in G_{n+r,r-1}$ . Com efeito, por construção temos que  $l(\mu) \leq l(\lambda) + 1$  e:

$$r(\lambda) = \lambda_1 - l(\lambda) \leq r + 1 \implies \lambda_1 - 1 \leq l(\lambda) + r = \mu_1$$

$$r(\mu) = \mu_1 - l(\mu) \geq l(\lambda) + r - l(\lambda) - 1 = r - 1.$$

**Inversa da função indexada de Dyson  $\psi_r^{-1}$ :** Considere o quadro de Ferrers correspondente a uma partição  $\mu \in G_{n+r,r-1}$ . Remova  $\mu_1 - r \geq 0$  quadrados da primeira fila e ignore

<sup>13</sup>(Teorema de Fine) O número de partições de  $n$  em partes distintas com rank  $2r$  ou  $2r + 1$  é igual ao número de partições de  $n$  em partes ímpares com maior parte  $2r + 1$ . [9]

os quadrados restantes. Justaponha os quadrados removidos à esquerda dos quadrados da primeira coluna do quadro de Ferrers restante de modo a obter uma nova primeira coluna, com alguns quadrados possivelmente constituindo novas linhas. Este novo quadro de Ferrers representa uma partição  $\lambda \in H_{n,r+1}$ . Com efeito, esta operação está bem definida, pois de  $r(\mu) = \mu_1 - l(\mu) \geq r - 1$  temos que  $\mu_1 - r \geq l(\mu) - 1 \geq 0$  e  $\mu_1 \geq l(\mu) + r - 1$ . Por construção, temos que  $\lambda_1 \leq \mu_1 + 1$  e  $l(\lambda) = \mu_1 - r$ . Assim, temos que:

$$r(\lambda) = \lambda_1 - l(\lambda) \leq \mu_1 + 1 - (\mu_1 - r) = r + 1.$$

**Exemplo 2.1.4** Para a partição  $\lambda = (8, 6, 6, 4, 3, 2, 1)$  de 30 temos:

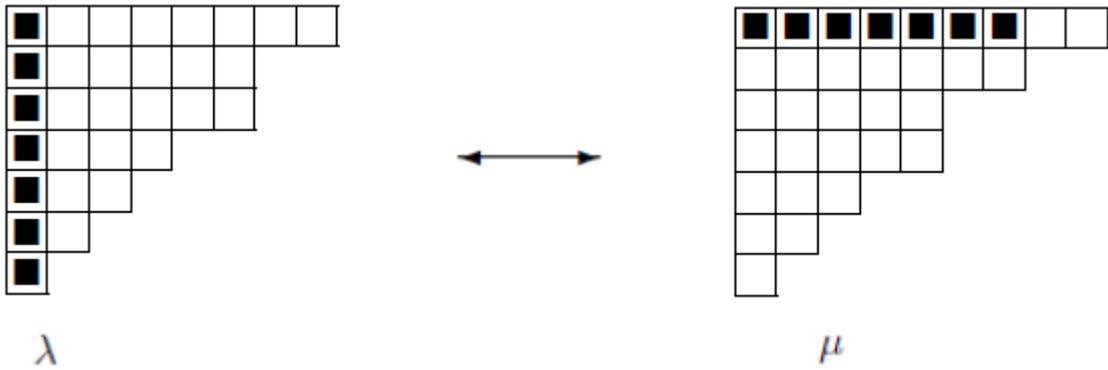


Figura 5: Função indexada de Dyson  $\psi_2: (8, 6, 6, 4, 3, 2, 1) \mapsto (9, 7, 5, 5, 3, 2, 1)$

Fonte: Autor

Agora, descreveremos a iteração de Pak da função de Dyson  $\phi: \mathcal{O}_n \rightarrow \mathcal{D}_n$ .

**Iteração de Pak da função de Dyson  $\phi$ :** Seja  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$  uma partição de  $n$  em partes ímpares. Vamos construir uma sequência de partições  $\nu^1, \nu^2, \dots, \nu^l$  de modo que o último termo a ser construído seja uma partição de  $n$  em partes distintas. Considere  $\nu^l = (\lambda_l)$  e defina  $\nu^i$  como a partição obtida pela aplicação da função indexada de Dyson  $\psi_{\lambda_i}$  a  $\nu^{i+1}$ , ou seja,  $\nu^i = \psi_{\lambda_i}(\nu^{i+1})$ . Tome  $\mu = \nu^1 = \phi(\lambda)$ . Vamos mostrar que a iteração de Pak da função de Dyson  $\phi$  está bem definida.

Note que, por indução, vem que  $|\nu^i| = \lambda_i + \lambda_{i+1} + \dots + \lambda_l$ . Portanto,  $|\phi(\lambda)| = |\mu| = |\nu^1| = |\lambda_1 + \dots + \lambda_l| = |\lambda| = n$ . Novamente, por indução, vamos mostrar que  $\nu^i$  é uma partição em partes distintas com rank  $r(\nu^i)$  igual a  $\lambda_i$  ou  $\lambda_i - 1$ .

A base de indução é evidente, pois neste caso temos  $i = l$  e  $\nu^l = (\lambda_l)$ . Suponha que a afirmação seja válida para  $\nu^{i+1}$ , ou seja,  $r(\nu^{i+1})$  é igual a  $\lambda_{i+1}$  ou  $\lambda_{i+1} - 1$ , dependendo da paridade advinda da segunda coluna do quadro de Ferrers.

Como, por construção,  $(\nu^i)_1 = l(\nu^{i+1}) + \lambda_i$ , temos que:

$$(\nu^i)_1 = l(\nu^{i+1}) + \lambda_i = (\nu^{i+1})_1 - r(\nu^{i+1}) + \lambda_i \geq (\nu^{i+1})_1 - \lambda_{i+1} + \lambda_i \geq (\nu^{i+1})_1 > (\nu^{i+1})_1 - 1 = (\nu^i)_2.$$

Isto implica que  $\nu^i$  é uma partição em partes distintas, pois  $(\nu^i)_1 > (\nu^i)_2$  e as partes  $(\nu^i)_j$  com  $j \geq 2$  são dadas por construção por  $(\nu^i)_j = (\nu^{i+1})_{j-1} - 1$ . Como por hipótese de indução temos que as partes de  $\nu^{i+1}$  são distintas, a consideração segue.

Mais uma vez, por construção temos que  $l(\nu^i)$  é igual a  $l(\nu^{i+1})$  ou  $l(\nu^{i+1}) + 1$  dependendo da segunda coluna do quadro de Ferrers. Disto segue que:

$$r(\nu^i) = (\nu^i)_1 - l(\nu^i) = l(\nu^{i+1}) + \lambda_i - l(\nu^i) \in \{\lambda_i, \lambda_i - 1\}.$$

Logo, a passagem de indução está demonstrada. Observe que não foi utilizado o fato que  $\lambda \in \mathcal{O}_n$ , mas isto se torna crucial para a construção da inversa  $\phi^{-1}$  da iteração de Pak da função de Dyson.

**Inversa  $\phi^{-1}$  da iteração de Pak da função de Dyson :** Seja  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_l)$  uma partição de  $n$  em partes distintas. Vamos definir  $\phi^{-1}$  de maneira indutiva. Considere  $\lambda_1 = r(\mu) = \mu_1 - l(\mu)$  se  $r(\mu)$  é ímpar, caso contrário considere  $\lambda_1 = r(\mu) + 1 = \mu_1 - l(\mu) + 1$ . Tome  $\nu^1 = \mu$ . Aplicando a inversa da função indexada de Dyson  $\psi_{\lambda_1}^{-1}$  a  $\mu$ , obtemos uma partição  $\nu^2 = \psi_{\lambda_1}^{-1}(\mu)$ . Aplicando sucessivas vezes tal procedimento para  $\nu^j$  com  $j \in \{2, 3, \dots\}$ , obtemos uma partição  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  de  $n$  em partes ímpares. A boa definição da inversa da iteração de Pak da função de Dyson  $\phi^{-1}$  segue por argumentos análogos aos utilizados para a própria função  $\phi$ .

**Exemplo 2.1.5** Para a partição  $\lambda = (5, 5, 3, 3, 1)$  de 17 temos:

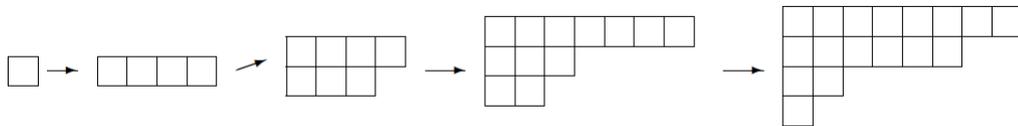


Figura 6: Iteração de Pak da função de Dyson  $\phi: (5, 5, 3, 3, 1) \mapsto (8, 6, 2, 1)$

Fonte: [6]

## 2.2 Alguns lemas decorrentes

Quando aplicamos a bijeção de Sylvester, pela representação em quadro de Ferrers podemos perceber que cada partição  $\mu$  de  $n$  em partes distintas com maior parte  $\mu_1$  é correspondida a uma partição  $\lambda$  de  $n$  em partes ímpares com maior parte  $\lambda_1$  e comprimento

$l(\lambda)$ , tais que satisfazem a relação  $2\mu_1 + 1 = \lambda_1 + 2l(\lambda)$ , ou equivalentemente,  $\mu_1 = \frac{\lambda_1 - 1}{2} + l(\lambda)$ .

Desta forma, obtemos duas formas ponderadas do Teorema de Euler.

**Lema 2.2.1** *A soma de  $2\mu_1 + 1$  sobre todas as partições  $\mu$  de  $n$  em partes distintas é igual a soma de  $\lambda_1 + 2l(\lambda)$  sobre todas as partições  $\lambda$  de  $n$  em partes ímpares, a saber,*

$$\sum_{\mu \in \mathcal{D}} (2\mu_1 + 1)q^{|\mu|} = \sum_{\lambda \in \mathcal{O}} (\lambda_1 + 2l(\lambda))q^{|\lambda|}. \quad (2.1)$$

**Lema 2.2.2** *A soma de  $\mu_1$  sobre todas as partições  $\mu$  de  $n$  em partes distintas é igual a soma de  $\frac{\lambda_1 - 1}{2} + l(\lambda)$  sobre todas as partições  $\lambda$  de  $n$  em partes ímpares, a saber,*

$$\sum_{\mu \in \mathcal{D}} \mu_1 q^{|\mu|} = \sum_{\lambda \in \mathcal{O}} \left( \frac{\lambda_1 - 1}{2} + l(\lambda) \right) q^{|\lambda|}. \quad (2.2)$$

Da construção da iteração de Pak da função de Dyson, podemos perceber que cada partição  $\lambda$  de  $n$  em partes ímpares com maior parte  $\lambda_1$  é correspondida a uma partição  $\mu$  de  $n$  em partes distintas com rank  $r(\mu)$  tal que:

$$r(\mu) + \frac{1 + (-1)^{r(\mu)}}{2} = \lambda_1.$$

Assim, obtemos mais uma forma ponderada do Teorema de Euler:

**Lema 2.2.3** *A soma de  $\mu_1 - l(\mu) + \frac{1 + (-1)^{r(\mu)}}{2}$  sobre todas as partições  $\mu$  de  $n$  em partes distintas é igual a soma de  $\lambda_1$  sobre todas as partições  $\lambda$  de  $n$  em partes ímpares, a saber,*

$$\sum_{\mu \in \mathcal{D}} \left( \mu_1 - l(\mu) + \frac{1 + (-1)^{r(\mu)}}{2} \right) q^{|\mu|} = \sum_{\lambda \in \mathcal{O}} \lambda_1 q^{|\lambda|}. \quad (2.3)$$

Todas as formas ponderadas anteriores do Teorema de Euler também podem ser obtidas por meio de refinamentos deste próprio resultado, como o Teorema de Fine já mencionado [9].

Considere o conjunto de partições  $\mu$  de  $n$  em partes distintas com multiplicidades  $l(\mu) + \mu_1 + \frac{1 - (-1)^{r(\mu)}}{2}$ . O número de tais partições de  $n$  pode ser dado pela diferença entre o número de elementos do conjunto de partições de  $n$  em partes distintas com multiplicidades  $2\mu_1 + 1$  e o número de elementos do conjunto de partições de  $n$  em partes distintas com multiplicidades iguais a  $\mu_1 - l(\mu) + \frac{1 + (-1)^{r(\mu)}}{2}$ . Pelos Lemas 2.2.1 e 2.2.3 estabelecemos a validade da forma ponderada (1.5) do Teorema de Euler.

Com efeito, temos que:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\mu \in \mathcal{D}} \left( l(\mu) + \mu_1 + \frac{1 - (-1)^{r(\mu)}}{2} \right) q^{|\mu|} \\
 = & \sum_{\mu \in \mathcal{D}} (2\mu_1 + 1)q^{|\mu|} - \sum_{\mu \in \mathcal{D}} \left( \mu_1 - l(\mu) + \frac{1 + (-1)^{r(\mu)}}{2} \right) q^{|\mu|} \\
 = & \underbrace{\sum_{\lambda \in \mathcal{O}} (\lambda_1 + 2l(\lambda))q^{|\lambda|}}_{\text{Lema 2.2.1}} - \underbrace{\sum_{\lambda \in \mathcal{O}} \lambda_1 q^{|\lambda|}}_{\text{Lema 2.2.3}} \\
 = & \sum_{\lambda \in \mathcal{O}} 2l(\lambda)q^{|\lambda|}.
 \end{aligned}$$

Considere o conjunto de partições  $\mu$  de  $n$  em partes distintas com multiplicidades  $l(\mu) + \frac{1 - (-1)^{r(\mu)}}{2}$ . O número de tais partições de  $n$  pode ser dado pela diferença entre o número de elementos do conjunto de partições de  $n$  em partes distintas com multiplicidades  $\mu_1 + 1$  e o número de elementos do conjunto de partições de  $n$  em partes distintas com multiplicidades iguais a  $\mu_1 - l(\mu) + \frac{1 + (-1)^{r(\mu)}}{2}$ . Pelos Lemas 2.2.2 e 2.2.3 estabelecemos a validade da forma ponderada (1.6) do Teorema de Euler.

Com efeito, temos que:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\mu \in \mathcal{D}} \left( l(\mu) + \frac{1 - (-1)^{r(\mu)}}{2} \right) q^{|\mu|} \\
 = & \sum_{\mu \in \mathcal{D}} (\mu_1 + 1)q^{|\mu|} - \sum_{\mu \in \mathcal{D}} \left( \mu_1 - l(\mu) + \frac{1 + (-1)^{r(\mu)}}{2} \right) q^{|\mu|} \\
 = & \sum_{\mu \in \mathcal{D}} \mu_1 q^{|\mu|} + \sum_{\mu \in \mathcal{D}} q^{|\mu|} - \sum_{\mu \in \mathcal{D}} \left( \mu_1 - l(\mu) + \frac{1 + (-1)^{r(\mu)}}{2} \right) q^{|\mu|} \\
 = & \underbrace{\sum_{\lambda \in \mathcal{O}} \left( \frac{\lambda_1 - 1}{2} + l(\lambda) \right) q^{|\lambda|}}_{\text{Lema 2.2.2}} + \underbrace{\sum_{\lambda \in \mathcal{O}} q^{|\lambda|}}_{\text{Teorema de Euler}} - \underbrace{\sum_{\lambda \in \mathcal{O}} \lambda_1 q^{|\lambda|}}_{\text{Lema 2.2.3}} \\
 = & \sum_{\lambda \in \mathcal{O}} \left( \frac{\lambda_1 - 1}{2} + l(\lambda) + 1 - \lambda_1 \right) q^{|\lambda|} \\
 = & \sum_{\lambda \in \mathcal{O}} \left( l(\lambda) - \frac{\lambda_1 - 1}{2} \right) q^{|\lambda|}.
 \end{aligned}$$

## Capítulo 3

# PARTIÇÕES COM RAIZ

Chen e Ji [6] inspirados nas sugestões de Andrews [2] nos dão interpretações combinatórias dos primeiros somatórios das identidades de Ramanujam (1.1) e (1.2). Para tanto, o conceito de partição com raiz será introduzido, o qual pode ser considerado como uma versão ponderada das partições ordinárias seguindo o preceito de Andrews [2].

**Definição 3.1** *Uma partição com raiz de  $n$  pode ser formalmente definida como um par de partições  $(\lambda, \mu)$ , onde  $|\lambda| + |\mu| = n$  e  $\mu$  é uma partição não vazia com partes iguais. A união das partes de  $\lambda$  e  $\mu$  é considerada como as partes da partição com raiz  $(\lambda, \mu)$ .*

Por exemplo, existem 20 partições com raiz de 5:

$$\begin{aligned} &(\emptyset, (5)), ((1), (4)), ((4), (1)), ((3), (2)), ((2), (3)), \\ &((3, 1), (1)), ((3), (1, 1)), ((1, 1), (3)), ((2, 2), (1)), ((2, 1), (2)), ((1), (2, 2)), \\ &((2, 1, 1), (1)), ((2, 1), (1, 1)), ((2), (1, 1, 1)), ((1, 1, 1), (2)), \\ &((1, 1, 1, 1), (1)), ((1, 1, 1), (1, 1)), ((1, 1), (1, 1, 1)), ((1), (1, 1, 1, 1)), (\emptyset, (1, 1, 1, 1, 1)). \end{aligned}$$

Existem 5 partições com raiz de 5 em partes distintas, em que tal propriedade compreende ambas as partições que compõem a partição com raiz:

$$(\emptyset, (5)), ((1), (4)), ((4), (1)), ((3), (2)), ((2), (3)).$$

Existem 9 partições com raiz de 5 em partes ímpares, em que, novamente, tal propriedade compreende ambas as partições que compõem a partição com raiz::

$$(\emptyset, (5)), ((3, 1), (1)), ((3), (1, 1)), ((1, 1), (3)),$$

$$((1, 1, 1, 1), (1)), ((1, 1, 1), (1, 1)), ((1, 1), (1, 1, 1)), ((1), (1, 1, 1, 1)), (\emptyset, (1, 1, 1, 1, 1)).$$

Uma partição com raiz  $(\lambda, \mu)$  é dita ser em partes quase distintas se  $\lambda$  tem partes distintas. No caso de  $\lambda = \emptyset$ , por convenção, consideramos  $(\lambda, \mu)$  como uma partição em raiz em partes quase distintas. Existem 13 partições com raiz de 5 em partes quase distintas:

$$(\emptyset, (5)), ((1), (4)), ((4), (1)), ((3), (2)), ((2), (3)), ((3, 1), (1)), ((3), (1, 1)),$$

$$((2, 1), (2)), ((1), (2, 2)), ((2, 1), (1, 1)), ((2), (1, 1, 1)), ((1), (1, 1, 1, 1)), (\emptyset, (1, 1, 1, 1, 1)).$$

### 3.1 Exemplos e resultados básicos

Por definição, uma partição com raiz é determinada por meio de um par de partições com determinadas condições. Desta forma, muitos resultados básicos envolvendo funções geradoras são deduzidos por meio do Princípio Multiplicativo, pois basta escolhermos a partição relativa à raiz e a outra partição segundo as condições correspondentes. Portanto, podemos obter funções geradoras para partições com raiz  $(\lambda, \mu)$  respeitando determinadas condições multiplicando a função geradora da raiz  $\mu$  pela função geradora de  $\lambda$ . Para ilustrar tal consideração, exibimos alguns exemplos que serão úteis no desenvolvimento do trabalho.

**Exemplo 3.1.1** *Função geradora para partições com raiz em partes distintas.*

$$\sum_{d=1}^{\infty} \left[ q^d \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq d}}^{\infty} (1 + q^n) \right] \quad (3.1)$$

Com efeito, por definição, só existe 1 parte na raiz. Assim, escolhida a parte relativa a esta, basta escolhermos a outra partição cumprindo também a propriedade de possuir partes distintas. Portanto, temos a função geradora a seguir:

$$\begin{aligned} & q \prod_{n=2}^{\infty} (1 + q^n) + q^2 \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq 2}}^{\infty} (1 + q^n) + q^3 \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq 3}}^{\infty} (1 + q^n) + \cdots \\ = & \sum_{d=1}^{\infty} \left[ q^d \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq d}}^{\infty} (1 + q^n) \right]. \end{aligned}$$

**Exemplo 3.1.2** *Função geradora para partições com raiz em partes ímpares.*

$$\frac{1}{(q; q^2)_\infty} \sum_{d=0}^{\infty} \frac{q^{2d+1}}{1 - q^{2d+1}}. \quad (3.2)$$

**Exemplo 3.1.3** *Função geradora para partições com raiz em partes quase distintas.*

$$(-q; q)_\infty \sum_{d=1}^{\infty} \frac{q^d}{1 - q^d}. \quad (3.3)$$

**Exemplo 3.1.4** *Defina o tamanho da raiz da partição com raiz  $(\lambda, \mu)$  como o número de partes de  $\mu$ , ou seja,  $l(\mu)$ . A função geradora para partições com raiz em partes quase distintas com tamanho da raiz par é dada por:*

$$(-q; q)_\infty \sum_{d=1}^{\infty} \frac{q^{2d}}{1 - q^{2d}}. \quad (3.4)$$

## 3.2 Teoremas e lemas sobre partições com raiz

Com a finalidade de compreender melhor o enunciado longo de certos teoremas envolvendo partições com raiz, denotaremos o número de partições com raiz de  $n$  satisfazendo determinada condição por  $p_r(n \mid \text{condição})$ .

**Teorema 3.2.1** *O número  $A_n$  de partições com raiz de  $n$  em partes quase distintas com tamanho da raiz par mais o número  $B_n$  de partições com raiz de  $n$  em partes distintas é igual ao número  $C_n$  de partições com raiz de  $n$  em partes ímpares. Assim, temos que  $A_n + B_n = C_n$ , ou seja,*

$$p_r(n \mid \text{partes quase distintas com } l(\mu) \text{ par}) + p_r(n \mid \text{partes distintas}) = p_r(n \mid \text{partes ímpares}).$$

**Demonstração:** A soma dos dois números tem a seguinte função geradora:

$$\begin{aligned}
 & (-q; q)_\infty \sum_{d=1}^{\infty} \frac{q^{2d}}{1 - q^{2d}} + \sum_{d=1}^{\infty} \left[ q^d \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq d}}^{\infty} (1 + q^n) \right] \\
 = & (-q; q)_\infty \sum_{d=1}^{\infty} \frac{q^{2d}}{1 - q^{2d}} + \sum_{d=1}^{\infty} \left[ (1 + q^d - 1) \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq d}}^{\infty} (1 + q^n) \right] \\
 = & (-q; q)_\infty \sum_{d=1}^{\infty} \frac{q^{2d}}{1 - q^{2d}} + \sum_{d=1}^{\infty} \left[ \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n) - \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq d}}^{\infty} (1 + q^n) \right] \\
 = & (-q; q)_\infty \left( \sum_{d=1}^{\infty} \frac{q^{2d}}{1 - q^{2d}} + \sum_{d=1}^{\infty} \left[ 1 - \frac{1}{1 + q^d} \right] \right) \\
 = & (-q; q)_\infty \left( \sum_{d=1}^{\infty} \frac{q^{2d}}{1 - q^{2d}} + \sum_{d=1}^{\infty} \frac{q^d}{1 + q^d} \right) \\
 = & (-q; q)_\infty \left( \sum_{d=1}^{\infty} \frac{q^{2d}}{1 - q^{2d}} + \sum_{d=1}^{\infty} \frac{q^d - q^{2d}}{(1 - q^d)(1 + q^d)} \right) \\
 = & (-q; q)_\infty \sum_{d=1}^{\infty} \frac{q^d + q^{2d} - q^{2d}}{1 - q^{2d}} \\
 = & (-q; q)_\infty \left( \sum_{d=1}^{\infty} \frac{q^d}{1 - q^d} - \sum_{d=1}^{\infty} \frac{q^{2d}}{1 - q^{2d}} \right) \\
 = & \frac{1}{(q; q^2)_\infty} \sum_{d=0}^{\infty} \frac{q^{2d+1}}{1 - q^{2d+1}}.
 \end{aligned}$$

Isto implica a afirmação considerada para partições com raiz, pois a última expressão é a função geradora para o número de partições com raiz de  $n$  em partes ímpares. ■

Apresentaremos uma demonstração bijetiva do resultado anterior em termos de uma involução e uma bijeção dadas pelos lemas a seguir.

**Lema 3.2.2** *O número  $D_n$  de partições com raiz de  $n$  em partes quase distintas com tamanho da raiz ímpar é igual ao número  $A_n$  de partições com raiz de  $n$  em partes quase distintas com tamanho da raiz par mais o número  $B_n$  de partições com raiz de  $n$  em partes distintas. Assim, temos que  $A_n + B_n = D_n$ , ou seja,*

$$p_r(n \mid \text{partes quase distintas com } l(\mu) \text{ par}) + p_r(n \mid \text{partes distintas})^{14}$$

<sup>14</sup>Por definição, observe que automaticamente uma partição com raiz com partes distintas possui tamanho da raiz ímpar.

$$= p_r(n \mid \text{partes quase distintas com } l(\mu) \text{ ímpar}).$$

**Demonstração:** Vamos construir uma involução  $\tau$  sobre o conjunto das partições com raiz de  $n$  em partes quase distintas com exceção das partições com partes estritamente distintas. Pela definição de partição com raiz, segue que a involução  $\tau$  é sobre o conjunto das partições com raiz  $(\lambda, \mu)$  de  $n$  tais que  $\lambda$  possui partes distintas e o número de ocorrências da parte de  $\mu$  em  $\lambda$  e  $\mu$  é no mínimo dois. Definiremos  $\tau$  por meio de dois casos.

**Caso 1:** Se uma partição com raiz  $(\lambda, \mu)$  em partes quase distintas, mas não estritamente distintas, for tal que  $\lambda$  contém a parte de  $\mu$ , então mova esta parte de  $\lambda$  para  $\mu$ .

**Caso 2:** Se uma partição com raiz  $(\lambda, \mu)$  em partes quase distintas, mas não estritamente distintas, for tal que  $\lambda$  não contém a parte de  $\mu$ , então mova esta parte de  $\mu$  para  $\lambda$ .

É claro que  $\tau$  é uma involução, a qual possui a propriedade de mudar a paridade do tamanho da raiz. Assim, a involução que estabelece o resultado é a extensão  $T$  de  $\tau$  ao conjunto das partições com raiz de  $n$  em partes quase distintas definindo  $T((\lambda, \mu)) = (\lambda, \mu)$  se  $(\lambda, \mu)$  é uma partição com raiz com partes estritamente distintas. Observe que  $T$  está bem definida, pois uma partição do tipo anterior possui tamanho da raiz ímpar, por definição. ■

Por exemplo, vimos que existem 13 partições com raiz de 5 com partes quase distintas:

$$(\emptyset, (5)), ((1), (4)), ((4), (1)), ((3), (2)), ((2), (3)), ((3, 1), (1)), ((3), (1, 1)),$$

$$((2, 1), (2)), ((1), (2, 2)), ((2, 1), (1, 1)), ((2), (1, 1, 1)), ((1), (1, 1, 1, 1)), (\emptyset, (1, 1, 1, 1, 1)).$$

Aplicando a bijeção  $\tau$  nas partições com raiz em que está bem definida temos as correspondências a seguir:

$$((3, 1), (1)) \Leftrightarrow ((3), (1, 1)), ((2, 1), (2)) \Leftrightarrow ((1), (2, 2))$$

$$((2, 1), (1, 1)) \Leftrightarrow ((2), (1, 1, 1)), ((1), (1, 1, 1, 1)) \Leftrightarrow (\emptyset, (1, 1, 1, 1, 1)).$$

A involução  $\tau$  não se aplica para as partições com raiz a seguir:

$$(\emptyset, (5)), ((1), (4)), ((4), (1)), ((3), (2)), ((2), (3)).$$

O resultado a seguir pode ser considerado como a versão análoga com raiz do

Teorema de Euler.

**Lema 3.2.3** *O número  $D_n$  de partições com raiz de  $n$  em partes quase distintas com tamanho da raiz ímpar é igual ao número  $C_n$  de partições com raiz de  $n$  em partes ímpares. Assim, temos que  $D_n = C_n$ , ou seja,*

$$p_r(n \mid \text{partes quase distintas com } l(\mu) \text{ ímpar}) = p_r(n \mid \text{partes ímpares}).$$

**Demonstração:** Vamos empregar a bijeção de Sylvester para construirmos uma função  $\sigma$  bijetiva entre o conjunto de partições com raiz de  $n$  em partes quase distintas com tamanho da raiz ímpar e o conjunto de partições com raiz de  $n$  em partes ímpares.

**Função  $\sigma$ :** Para uma partição com raiz  $(\lambda, \mu)$  em partes quase distintas com tamanho da raiz ímpar, aplicamos a inversa da bijeção de Sylvester  $\varphi^{-1}$  a  $\lambda$  para gerar uma partição  $\alpha$  com partes ímpares. Seja  $\beta$  a conjugada de  $\mu$ , que é uma partição com partes ímpares iguais em razão da operação de conjugação. Portanto,  $(\alpha, \beta)$  é uma partição com raiz em partes ímpares.

**Função  $\sigma^{-1}$ :** Para uma partição com raiz  $(\alpha, \beta)$  em partes ímpares, aplicamos a bijeção de Sylvester  $\varphi$  a  $\alpha$  para gerar uma partição  $\lambda$  em partes distintas. Seja  $\mu$  a conjugada de  $\beta$  que é uma partição em partes iguais com comprimento ímpar em razão da operação de conjugação. Assim,  $(\lambda, \mu)$  é uma partição com raiz em partes quase distintas com tamanho da raiz ímpar.

Pela bijeção de Sylvester junto com a operação de conjugação para a raiz segue que  $\sigma$  está bem definida e é uma bijeção. Logo, o resultado vale. ■

Por exemplo, existem 9 partições com raiz de 5 com partes quase distintas com tamanho da raiz ímpar:

$$\begin{aligned} &(\emptyset, (5)), ((1), (4)), ((4), (1)), ((3), (2)), ((2), (3)), ((3, 1), (1)) \\ &((2, 1), (2)), ((2), (1, 1, 1)), (\emptyset, (1, 1, 1, 1, 1)). \end{aligned}$$

E existem 9 partições com raiz de 5 em partes ímpares:

$$\begin{aligned} &(\emptyset, (5)), ((3, 1), (1)), ((3), (1, 1)), ((1, 1), (3)) \\ &((1, 1, 1, 1), (1)), ((1, 1, 1), (1, 1)), ((1, 1), (1, 1, 1)), ((1), (1, 1, 1, 1)), (\emptyset, (1, 1, 1, 1, 1)). \end{aligned}$$

Aplicando a bijeção  $\sigma$  às partições com raiz em que está bem definida temos as correspondências a seguir:

$$\begin{aligned} (\emptyset, (5)) &\Leftrightarrow (\emptyset, (1, 1, 1, 1, 1)), ((1), (4)) \Leftrightarrow ((1), (1, 1, 1, 1)) \\ ((4), (1)) &\Leftrightarrow ((1, 1, 1, 1), (1)), ((3), (2)) \Leftrightarrow ((1, 1, 1), (1, 1)) \\ ((2), (3)) &\Leftrightarrow ((1, 1), (1, 1, 1)), ((3, 1), (1)) \Leftrightarrow ((3, 1), (1)) \\ ((2, 1), (2)) &\Leftrightarrow ((3), (1, 1)), ((2), (1, 1, 1)) \Leftrightarrow ((1, 1), (3)) \\ (\emptyset, (1, 1, 1, 1, 1)) &\Leftrightarrow (\emptyset, (5)) \end{aligned}$$

Pelos Lemas 3.2.2 e 3.2.3, reobtemos o Teorema 3.2.1 por meio da aplicação da involução  $T$  com domínio apropriado seguida da aplicação da bijeção  $\sigma$ . Podemos notar que o Teorema 3.2.1 serve como uma formulação combinatória para a identidade de Ramanujan (1.2).

Para a identidade de Ramanujan (1.1), precisaremos do teorema a seguir, o qual é consequência dos Lemas 3.2.2 e 3.2.3.

**Teorema 3.2.4** *O número  $E_n$  de partições com raiz de  $n$  em partes quase distintas mais o número  $B_n$  de partições com raiz de  $n$  em partes distintas é igual a duas vezes o número  $C_n$  de partições com raiz de  $n$  em partes ímpares. Assim, temos que  $E_n + B_n = 2C_n$ , ou seja,*

$$p_r(n \mid \text{partes quase distintas}) + p_r(n \mid \text{partes distintas}) = 2 \cdot p_r(n \mid \text{partes ímpares}).$$

**Demonstração:** Observe que o conjunto de partições com raiz de  $n$  em partes quase distintas com tamanho da raiz par unido com o conjunto de partições com raiz de  $n$  em partes quase distintas com tamanho da raiz ímpar determina uma partição do conjunto de partições com raiz de  $n$  em partes quase distintas. Disto, vem que  $A_n + D_n = E_n$ .

Pelo Teorema 3.2.1 sabemos que  $A_n + B_n = C_n$  e pelo Lema 3.2.2 sabemos que  $C_n = D_n$ . Assim, temos que:

$$E_n + B_n = A_n + D_n + B_n = C_n + C_n = 2C_n.$$

Logo, o resultado vale. ■

### 3.3 Conexões entre partições com raiz e partições ordinárias

Agora faremos uma conexão entre partições com raiz em partes distintas e partes ímpares e partições ordinárias em partes distintas e partes ímpares. Por partições ordinárias entende-se partições envoltas ao conceito básico, de acordo com a Definição 1.1.1. Chapman [5] mostrou que a série (3.1):

$$\sum_{d=1}^{\infty} \left[ q^d \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq d}}^{\infty} (1 + q^n) \right]$$

é a função geradora para partições ordinárias em partes distintas com multiplicidades sendo seus comprimentos. Assim, a identidade a seguir é válida:

$$\sum_{d=1}^{\infty} \left[ q^d \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq d}}^{\infty} (1 + q^n) \right] = \sum_{\mu \in \mathcal{D}} l(\mu) q^{|\mu|}.$$

Pelo Exemplo 3.1.1, a série (3.1) é a função geradora para partições com raiz com partes distintas.

Em razão disso, esta identidade de partição nos faz intuir que deva existir uma correspondência combinatória entre partições com raiz e partições ordinárias em partes distintas.

Com efeito, temos a correspondência a seguir. Para uma partição  $\alpha$  com partes distintas, nós podemos obter  $l(\alpha)$  diferentes entre si partições com raiz  $(\lambda, \mu)$  com partes distintas atribuindo qualquer parte de  $\alpha$  como uma parte de  $\mu$  e mantendo as partes restantes como partes de  $\lambda$ . Esta correspondência é claramente invertível.

Por exemplo, existem 3 partições de 5 em partes distintas: (5), (4, 1) e (3, 2). A soma dos seus comprimentos é 5, enquanto que existem 5 partições com raiz de 5 em partes distintas:

$$(\emptyset, (5)), ((1), (4)), ((4), (1)), ((3), (2)), ((2), (3)).$$

Desta forma, a correspondência anterior estabelece o resultado a seguir relacionando partições com raiz em partes distintas e partições em partes ímpares.

**Teorema 3.3.1** *O número de partições com raiz de  $n$  em partes distintas é igual a soma dos comprimentos sobre as partições de  $n$  em partes distintas.*

Chapman [5] mostrou que (3.2) é também a função geradora para a soma dos

comprimentos de partições em partes ímpares:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{(q; q^2)_\infty} \sum_{d=0}^{\infty} \frac{q^{2d+1}}{1 - q^{2d+1}} \\
 = & \sum_{d=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{(q; q^2)_d (q^{2d+3}; q^2)_\infty} \cdot \frac{q^{2d+1}}{(1 - q^{2d+1})^2} \right] \\
 = & \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{mq^{(2d+1)m}}{(q; q^2)_d (q^{2d+3}; q^2)_\infty} \\
 = & \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{\lambda \in \mathcal{O}} n_\lambda (2d+1) q^{|\lambda|} \\
 = & \sum_{\lambda \in \mathcal{O}} l(\lambda) q^{|\lambda|},
 \end{aligned}$$

onde  $n_\lambda(d)$  é o número de partes iguais a  $d$  em  $\lambda$ . A antepenúltima igualdade é consequência da relação:

$$\frac{1}{1 - q^d} \frac{q^d}{1 - q^d} = \sum_{m=1}^{\infty} mq^{dm}.$$

Com efeito, em razão da fórmula para a série geométrica infinita, esta se justifica pelo fato de que as contribuições para o termo geral do somatório são da forma  $q^d q^{m_1 d} q^{m_2 d}$ , com  $m_1, m_2 \geq 0$  e  $m_1 + m_2 = m - 1$ . Assim, como existem  $m$  dessas contribuições, a relação é válida.

Note que as últimas igualdades são justificadas pelo fato de a multiplicidade considerada ser justamente o número de vezes que a respectiva parte é considerada na partição correspondente.

Usando a formulação de partições com raiz em partes ímpares e a função geradora anterior, podemos estabelecer o resultado a seguir entre partições com raiz e partições ordinárias. Apresentaremos também uma demonstração combinatória deste resultado, a qual é semelhante à do anterior.

Ambos os Teoremas 3.3.1 e 3.3.2 serão necessários para transformar as formulações das identidades de Ramanujan com partições com raiz para formulações combinatórias com partições ordinárias.

**Teorema 3.3.2** *O número de partições com raiz de  $n$  em partes ímpares é igual a soma dos comprimentos sobre as partições de  $n$  em partes ímpares.*

**Demonstração:** Com efeito, para uma partição  $\beta$  de  $n$  em partes ímpares, podemos obter  $l(\beta)$  diferentes entre si partições com raiz  $(\lambda, \mu)$  em partes ímpares atribuindo qualquer parte de  $\beta$  como uma parte de  $\mu$  e mantendo as partes restantes como partes de  $\lambda$ . Assumindo que  $d$  é uma parte que aparece  $m$  vezes ( $m \geq 2$ ) em  $\beta$ , então podemos escolher a raiz  $\mu$  como uma partição em que  $d$  aparece até  $i$  vezes, onde  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ .

■

Por exemplo, existem 3 partições de 5 em partes ímpares:  $(5)$ ,  $(3, 1, 1)$  e  $(1, 1, 1, 1, 1)$ . A soma dos seus comprimentos é 9, enquanto que existem 9 partições com raiz de 5 em partes ímpares:

$$(\emptyset, (5)), ((3, 1), (1)), ((3), (1, 1)), ((1, 1), (3)),$$

$$((1, 1, 1, 1), (1)), ((1, 1, 1), (1, 1)), ((1, 1), (1, 1, 1)), ((1), (1, 1, 1, 1)), (\emptyset, (1, 1, 1, 1, 1)).$$

# Capítulo 4

## IDENTIDADES DE RAMANUJAN

Neste capítulo apresentaremos reformulações combinatórias das identidades de Ramanujan (1.1) e (1.2) como as formas ponderadas (1.5) e (1.6) do Teorema de Euler. Veremos que apenas uma manipulação algébrica as diferenciá da maneira como são estabelecidas.

Os lados esquerdos de (1.1) e (1.2) possuem interpretações combinatórias dadas por Andrews [2] e Chapman [5]. Os primeiros somatórios do lado direito de (1.1) e (1.2) podem ser interpretados combinatoriamente em termos de partições ordinárias com multiplicidades dadas pelos Teoremas 3.2.1 e 3.2.4. Os segundos somatórios do lado direito de (1.1) e (1.2) possuem interpretações combinatórias em termos do rank.

### 4.1 Formulação combinatória de (1.1)

Combinando os Teoremas 3.3.1 e 3.3.2 sobre relações entre partições com raiz e partições ordinárias, podemos transformar o Teorema 3.2.4 sobre partições com raiz para uma afirmação sobre partições ordinárias. Assim, apenas uma manipulação algébrica estabelece a validade do Lema 1.2.1, o qual afirma que a relação a seguir é válida:

$$(-q; q)_\infty \sum_{d=1}^{\infty} \frac{q^d}{1-q^d} = \sum_{\lambda \in \mathcal{O}} 2l(\lambda)q^{|\lambda|} - \sum_{\mu \in \mathcal{D}} l(\mu)q^{|\mu|}.$$

Com efeito, pelo Teorema 3.2.4 temos a seguinte identidade entre funções geradoras:

$$\sum_{d=1}^{\infty} \left[ q^d \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq d}}^{\infty} (1+q^n) \right] + (-q; q)_\infty \sum_{d=1}^{\infty} \frac{q^d}{1-q^d} = 2 \cdot \frac{1}{(q; q^2)_\infty} \sum_{d=0}^{\infty} \frac{q^{2d+1}}{1-q^{2d+1}}.$$

Realizando uma manipulação algébrica e aplicando os Teoremas 3.3.1 e 3.3.2 vem

que:

$$\begin{aligned}
 & (-q; q)_\infty \sum_{d=1}^{\infty} \frac{q^d}{1-q^d} \\
 = & 2 \cdot \frac{1}{(q; q^2)_\infty} \sum_{d=0}^{\infty} \frac{q^{2d+1}}{1-q^{2d+1}} - \sum_{d=1}^{\infty} \left[ q^d \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq d}}^{\infty} (1+q^n) \right] \\
 = & \underbrace{\sum_{\lambda \in \mathcal{O}} 2l(\lambda)q^{|\lambda|}}_{\text{Teorema 3.3.2}} - \underbrace{\sum_{\mu \in \mathcal{D}} l(\mu)q^{|\mu|}}_{\text{Teorema 3.3.1}}.
 \end{aligned}$$

Com o auxílio do Lema 1.2.1, para demonstrarmos que a identidade de Ramanujan (1.1) pode ser reformulada como a forma ponderada (1.5) do Teorema de Euler, estabeleceremos a validade dos lemas a seguir.

**Lema 4.1.1** *O lado esquerdo da identidade de Ramanujan (1.1) é a função geradora para a soma das maiores partes sobre as partições em partes distintas. Assim, temos que:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(-q; q)_\infty - (-q; q)_n] = \sum_{\mu \in \mathcal{D}} \mu_1 q^{|\mu|}.$$

**Demonstração:** Note que  $(-q; q)_\infty$  é a função geradora para partições em partes distintas, enquanto que  $(-q; q)_n$  é a função geradora para partições em partes distintas de tamanho no máximo  $n$ . Portanto, a diferença  $(-q; q)_\infty - (-q; q)_n$  é a função geradora para partições em partes distintas de tamanho no mínimo  $n + 1$ . Logo, na expressão:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(-q; q)_\infty - (-q; q)_n]$$

cada partição em partes distintas com maior parte igual a  $k$  é contada exatamente  $k$  vezes. Desta forma, temos a identidade a seguir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(-q; q)_\infty - (-q; q)_n] = \sum_{n=1}^{\infty} nq^n (1+q)(1+q^2) \cdots (1+q^{n-1}),$$

ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(-q; q)_\infty - (-q; q)_n] = \sum_{\mu \in \mathcal{D}} \mu_1 q^{|\mu|}.$$

■

**Lema 4.1.2** *A diferença entre a função geradora para partições com comprimento par e*

a função geradora para partições com comprimento ímpar é dada por  $\frac{1}{(-q; q)_\infty}$ , ou seja,

$$\sum_{l(\mu) \text{ par}} q^{|\mu|} - \sum_{l(\mu) \text{ ímpar}} q^{|\mu|} = \frac{1}{(-q; q)_\infty}.$$

**Demonstração:** Observe que a menos do sinal “−” a expressão  $\frac{1}{(-q; q)_\infty}$  é a função geradora para partições sem quaisquer restrições. O sinal “−” possui o efeito de atribuir a paridade do número de vezes que cada parte aparece na partição. Se uma parte aparece um número par de vezes, ela contribui com coeficiente positivo, e se uma parte aparece um número ímpar de vezes, ela contribui com coeficiente negativo.

Com efeito, ilustraremos com um exemplo. Em razão da fórmula para a série geométrica infinita, temos que:

$$\frac{1}{(-q; q)_\infty} = (1 - q + q^2 - q^3 + \dots)(1 - q^2 + q^{2 \cdot 2} - q^{3 \cdot 2} + \dots)(1 - q^3 + q^{2 \cdot 3} - q^{3 \cdot 3} + \dots) \dots$$

Para a partição  $\lambda = (4, 4, 4, 3, 3, 2, 1, 1, 1)$  de 23 temos que esta foi obtida pelo produto com sinal  $(-q^3) \cdot (-q^2) \cdot q^{2 \cdot 3} \cdot (-q^{3 \cdot 4})$ . Assim, tal partição contribui com multiplicidade negativa para o coeficiente de  $q^{23}$ .

Logo, as partições com comprimento par contribuem com multiplicidade positiva, enquanto que as partições com comprimento ímpar contribuem com multiplicidade negativa para o coeficiente de  $q^{|\mu|}$ . Portanto, o resultado é válido. ■

**Lema 4.1.3** *A diferença entre a função geradora para partições em partes distintas com rank par e a função geradora para partições em partes distintas com rank ímpar é dada por  $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{\binom{n+1}{2}}}{(-q; q)_n}$ , ou seja,*

$$\sum_{\substack{\mu \in \mathcal{D} \\ r(\mu) \text{ par}}} q^{|\mu|} - \sum_{\substack{\mu \in \mathcal{D} \\ r(\mu) \text{ ímpar}}} q^{|\mu|} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{\binom{n+1}{2}}}{(-q; q)_n}.$$

**Demonstração:** Pela representação gráfica em quadro de Ferrers podemos perceber que uma partição com partes distintas  $\lambda$  de um inteiro  $m$  é constituída da partição  $\alpha = (l(\lambda), l(\lambda) - 1, \dots, 1)$  mais a partição vazia ou uma partição  $\beta$  de  $m - (1 + 2 + \dots + l(\lambda)) = m - \binom{l(\lambda)+1}{2}$  com no máximo  $l(\lambda)$  partes.

Com efeito, ilustraremos com um exemplo. Para a partição  $\lambda = (10, 8, 4, 3)$  de 25 temos

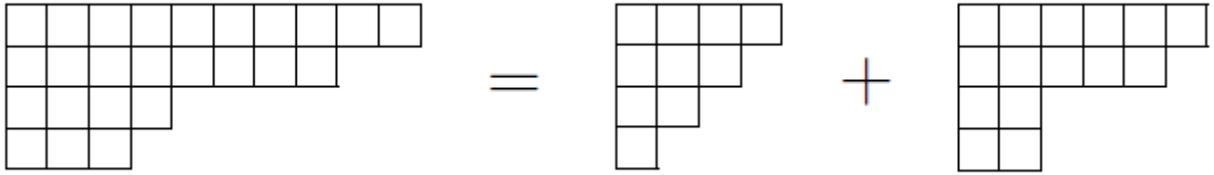


Figura 7: Quadro de Ferrers da partição  $\lambda = (10, 8, 4, 3)$  de 25

Fonte: Autor

Novamente, pela representação gráfica em quadro de Ferrers, podemos perceber que o rank de uma partição com partes distintas é nulo ou determinado pela maior parte  $\beta_1$  da partição  $\beta$  de  $m - \binom{l(\lambda)+1}{2}$ , pois  $r(\lambda) = \lambda_1 - l(\lambda) = l(\lambda) + \beta_1 - l(\lambda) = \beta_1$ .

A operação de conjugação nos dá uma demonstração bijetiva da identidade de partição:

$$p(n \mid \leq m \text{ partes}) = p(n \mid \text{todas as partes} \leq m).$$

Assim,  $\beta_1$  é o comprimento de uma partição de  $m - \binom{l(\lambda)+1}{2}$  com partes menores que ou iguais a  $l(\lambda)$ .

Por uma adaptação na demonstração do Lema 4.1.2 para partes menores que ou iguais a  $n$  mais as considerações anteriores, obtemos a validade do resultado. ■

**Lema 4.1.4** *A seguinte relação é válida:*

$$-\frac{1}{2}(-q; q)_\infty + \frac{1}{2} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{\binom{n+1}{2}}}{(-q; q)_n} \right] = - \sum_{\substack{\mu \in \mathcal{D} \\ r(\mu) \text{ ímpar}}} q^{|\mu|}.$$

**Demonstração:** Pelo Lema 4.1.3 temos que

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}(-q; q)_\infty + \frac{1}{2} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{\binom{n+1}{2}}}{(-q; q)_n} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left( \sum_{\substack{\mu \in \mathcal{D} \\ r(\mu) \text{ par}}} q^{|\mu|} + \sum_{\substack{\mu \in \mathcal{D} \\ r(\mu) \text{ ímpar}}} q^{|\mu|} \right) + \frac{1}{2} \left( \sum_{\substack{\mu \in \mathcal{D} \\ r(\mu) \text{ par}}} q^{|\mu|} - \sum_{\substack{\mu \in \mathcal{D} \\ r(\mu) \text{ ímpar}}} q^{|\mu|} \right) \\ &= - \sum_{\substack{\mu \in \mathcal{D} \\ r(\mu) \text{ ímpar}}} q^{|\mu|}. \end{aligned}$$

Dos lemas anteriores e do Lema 1.2.1, vem que o lado direito da identidade de Ramanujan (1.1) é a função geradora para a soma de duas vezes os comprimentos sobre

as partições em partes ímpares menos a função geradora para a soma dos comprimentos sobre as partições em partes distintas e menos a função geradora para as partições em partes distintas com rank ímpar:

$$\begin{aligned}
 & (-q; q)_\infty \left[ -\frac{1}{2} + \sum_{d=1}^{\infty} \frac{q^d}{1-q^d} \right] + \frac{1}{2} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{\binom{n+1}{2}}}{(-q; q)_n} \right] \\
 = & \sum_{\lambda \in \mathcal{O}} 2l(\lambda)q^{|\lambda|} - \sum_{\mu \in \mathcal{D}} l(\mu)q^{|\mu|} - \sum_{\substack{\mu \in \mathcal{D} \\ r(\mu) \text{ ímpar}}} q^{|\mu|}.
 \end{aligned}$$

Pelo Lema 4.1.1 e uma manipulação algébrica vem que a identidade de Ramanujan (1.1) pode ser reformulada como a forma ponderada (1.5) do Teorema de Euler:

$$\sum_{\mu \in \mathcal{D}} \left( l(\mu) + \mu_1 + \frac{1 - (-1)^{r(\mu)}}{2} \right) q^{|\mu|} = \sum_{\lambda \in \mathcal{O}} 2l(\lambda)q^{|\lambda|}.$$

Com efeito, pelos resultados anteriores temos que:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=0}^{\infty} [(-q; q)_\infty - (-q; q)_n] = (-q; q)_\infty \left[ -\frac{1}{2} + \sum_{d=1}^{\infty} \frac{q^d}{1-q^d} \right] + \frac{1}{2} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{\binom{n+1}{2}}}{(-q; q)_n} \right] \\
 \Leftrightarrow & \sum_{\mu \in \mathcal{D}} \mu_1 q^{|\mu|} = \sum_{\lambda \in \mathcal{O}} 2l(\lambda)q^{|\lambda|} - \sum_{\mu \in \mathcal{D}} l(\mu)q^{|\mu|} - \sum_{\substack{\mu \in \mathcal{D} \\ r(\mu) \text{ ímpar}}} q^{|\mu|} \\
 \Leftrightarrow & \sum_{\mu \in \mathcal{D}} \left( l(\mu) + \mu_1 + \frac{1 - (-1)^{r(\mu)}}{2} \right) q^{|\mu|} = \sum_{\lambda \in \mathcal{O}} 2l(\lambda)q^{|\lambda|}.
 \end{aligned}$$

Assim, obtemos uma demonstração combinatória de (1.1) baseada em uma forma ponderada do Teorema de Euler.

## 4.2 Formulação combinatória de (1.2)

Combinando os Teoremas 3.3.1 e 3.3.2 sobre relações entre partições com raiz e partições ordinárias, podemos transformar o Teorema 3.2.1 sobre partições com raiz para uma afirmação sobre partições ordinárias. Assim, apenas uma manipulação algébrica estabelece a validade do Lema 1.2.2, o qual afirma que a relação a seguir é válida:

$$(-q; q)_\infty \sum_{d=1}^{\infty} \frac{q^{2d}}{1-q^{2d}} = \sum_{\lambda \in \mathcal{O}} l(\lambda)q^{|\lambda|} - \sum_{\mu \in \mathcal{D}} l(\mu)q^{|\mu|}.$$

Com efeito, pelo Teorema 3.2.1 temos a seguinte identidade entre funções gerado-

ras:

$$(-q; q)_\infty \sum_{d=1}^{\infty} \frac{q^{2d}}{1 - q^{2d}} + \sum_{d=1}^{\infty} \left[ q^d \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq d}}^{\infty} (1 + q^n) \right] = \frac{1}{(q; q^2)_\infty} \sum_{d=0}^{\infty} \frac{q^{2d+1}}{1 - q^{2d+1}}.$$

Realizando uma manipulação algébrica e aplicando os Teoremas 3.3.1 e 3.3.2 vem que:

$$\begin{aligned} & (-q; q)_\infty \sum_{d=1}^{\infty} \frac{q^{2d}}{1 - q^{2d}} \\ &= \frac{1}{(q; q^2)_\infty} \sum_{d=0}^{\infty} \frac{q^{2d+1}}{1 - q^{2d+1}} - \sum_{d=1}^{\infty} \left[ q^d \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq d}}^{\infty} (1 + q^n) \right] \\ &= \underbrace{\sum_{\lambda \in \mathcal{O}} l(\lambda) q^{|\lambda|}}_{\text{Teorema 3.3.2}} - \underbrace{\sum_{\mu \in \mathcal{D}} l(\mu) q^{|\mu|}}_{\text{Teorema 3.3.1}}. \end{aligned}$$

Com o auxílio do Lema 1.2.2, para demonstrarmos que a identidade de Ramanujan (1.2) pode ser reformulada como a forma ponderada (1.6) do Teorema de Euler, estabeleceremos a validade do lema a seguir.

**Lema 4.2.1** *O lado esquerdo da identidade de Ramanujan (1.2) é a função geradora para a soma das metades das maiores partes menos um sobre as partições em partes ímpares.*

*Assim, temos que:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{(q; q^2)_\infty} - \frac{1}{(q; q^2)_n} \right] = \sum_{\lambda \in \mathcal{O}} \frac{\lambda_1 - 1}{2} q^{|\lambda|}.$$

**Demonstração:** Note que  $\frac{1}{(q; q^2)_\infty}$  é a função geradora para partições em partes ímpares, enquanto que  $\frac{1}{(q; q^2)_n}$  é a função geradora para partições em partes ímpares de tamanho no máximo  $2n + 1$ . Portanto, a diferença  $\frac{1}{(q; q^2)_\infty} - \frac{1}{(q; q^2)_n}$  é a função geradora para partições em partes ímpares de tamanho no mínimo  $2n + 3$ . Logo, na expressão:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{(q; q^2)_\infty} - \frac{1}{(q; q^2)_n} \right]$$

cada partição em partes ímpares com maior parte igual a  $2k + 1$  é contada exatamente  $k$  vezes. Desta forma, temos a identidade a seguir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{(q; q^2)_\infty} - \frac{1}{(q; q^2)_n} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nq^{2n+1}}{(1 - q)(1 - q^3) \cdots (1 - q^{2n+1})},$$

ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{(q; q^2)_{\infty}} - \frac{1}{(q; q^2)_n} \right] = \sum_{\lambda \in \mathcal{O}} \frac{\lambda_1 - 1}{2} q^{|\lambda|}.$$

■

Dos lemas anteriores e do Lema 1.2.2, vem que o lado direito da identidade de Ramanujan (1.2) é a função geradora para a soma dos comprimentos sobre as partições em partes ímpares menos a função geradora para a soma dos comprimentos sobre as partições em partes distintas e menos a função geradora para as partições em partes distintas com rank ímpar:

$$\begin{aligned} & (-q; q)_{\infty} \left[ -\frac{1}{2} + \sum_{d=1}^{\infty} \frac{q^{2d}}{1 - q^{2d}} \right] + \frac{1}{2} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{\binom{n+1}{2}}}{(-q; q)_n} \right] \\ = & \sum_{\lambda \in \mathcal{O}} l(\lambda) q^{|\lambda|} - \sum_{\mu \in \mathcal{D}} l(\mu) q^{|\mu|} - \sum_{\substack{\mu \in \mathcal{D} \\ r(\mu) \text{ ímpar}}} q^{|\mu|}. \end{aligned}$$

Pelo Lema 4.2.1 e uma manipulação algébrica vem que a identidade de Ramanujan (1.2) pode ser reformulada como a forma ponderada (1.6) do Teorema de Euler:

$$\sum_{\mu \in \mathcal{D}} \left( l(\mu) + \frac{1 - (-1)^{r(\mu)}}{2} \right) q^{|\mu|} = \sum_{\lambda \in \mathcal{O}} \left( l(\lambda) - \frac{\lambda_1 - 1}{2} \right) q^{|\lambda|}.$$

Com efeito, pelos resultados anteriores temos que:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{(q; q^2)_{\infty}} - \frac{1}{(q; q^2)_n} \right] = (-q; q)_{\infty} \left[ -\frac{1}{2} + \sum_{d=1}^{\infty} \frac{q^{2d}}{1 - q^{2d}} \right] + \frac{1}{2} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{\binom{n+1}{2}}}{(-q; q)_n} \right] \\ \Leftrightarrow & \sum_{\lambda \in \mathcal{O}} \frac{\lambda_1 - 1}{2} q^{|\lambda|} = \sum_{\lambda \in \mathcal{O}} l(\lambda) q^{|\lambda|} - \sum_{\mu \in \mathcal{D}} l(\mu) q^{|\mu|} - \sum_{\substack{\mu \in \mathcal{D} \\ r(\mu) \text{ ímpar}}} q^{|\mu|} \\ \Leftrightarrow & \sum_{\mu \in \mathcal{D}} \left( l(\mu) + \frac{1 - (-1)^{r(\mu)}}{2} \right) q^{|\mu|} = \sum_{\lambda \in \mathcal{O}} \left( l(\lambda) - \frac{\lambda_1 - 1}{2} \right) q^{|\lambda|}. \end{aligned}$$

Assim, obtemos uma demonstração combinatória de (1.2) baseada em uma forma ponderada do Teorema de Euler.

# Referências Bibliográficas

- [1] ANDREWS, George E.; ERIKSSON, Kimmo. **Integer Partitions**. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [2] ANDREWS, George E. **Ramanujan’s “lost” notebook V: Euler’s partition identity**. *Advances in Mathematics*. 61, p. 156–164, 1986.
- [3] ANDREWS, George E. **The Theory of Partitions**. Massachusetts: Addison–Wesley, 1976.
- [4] BESSENRODT, Christine. **A bijection for Lebesgue’s partition identity in the spirit of Sylvester**. *Discrete Mathematics* 132, p. 1–10, 1994.
- [5] CHAPMAN, Robin. **Combinatorial proofs of q-series identities**. *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 99, p. 1–16, 2002.
- [6] CHEN, William Y.C.; JI, Kathy Q. **Weighted forms of Euler’s theorem**. *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 114, p. 360–372, 2007.
- [7] DYSON, Freeman J. **Some guesses in the theory of partitions**. *Eureka (Cambridge)* 8, p. 10–15, 1944.
- [8] FINE, Nathan J. **Basic Hypergeometric Series and Applications**. Providence: American Mathematical Society, v. 27, 1988. (Mathematical Surveys and Monographs).
- [9] FINE, Nathan J. **Some new results on partitions**. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 34, p. 616–618, 1948.
- [10] PAK, Igor. **On Fine’s partition theorems, Dyson, Andrews, and missed opportunities**. *Math. Intelligencer* 25, p. 10–16, 2003.
- [11] RAMANUJAN LOST’S NOTEBOOK. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2018. Disponível em: <[https://en.wikipedia.org/wiki/Ramanujan%27s\\_lost\\_notebook#CITEREFAndrewsBerndt2013](https://en.wikipedia.org/wiki/Ramanujan%27s_lost_notebook#CITEREFAndrewsBerndt2013)>. Acesso em: 6 jun. 2018.

- [12] SANTOS, José Plínio de Oliveira. MELLO, Margarida P.; MURARI, Idani T. C. **Introdução à Análise Combinatória**. 4<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.
- [13] SANTOS, José Plínio de Oliveira. **Introdução à Teoria dos Números**. 3<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. (Coleção Matemática Universitária).
- [14] SRINIVASA RAMANUJAN. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2018. Disponível em: <[https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Srinivasa\\_Ramanujan&oldid=52282712](https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Srinivasa_Ramanujan&oldid=52282712)>. Acesso em: 6 jun. 2018.