

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL – UFRGS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA  
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Clarissa Coragem Ballejo

**O uso de software no ensino de funções polinomiais no Ensino Médio.**

Porto Alegre  
2009

Clarissa Coragem Ballejo

**O uso de software no ensino de funções polinomiais no Ensino Médio.**

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

**Orientador: Prof Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso**

Porto Alegre  
2009

Clarissa Coragem Ballejo

**O uso de software no ensino de funções polinomiais no Ensino Médio.**

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

**Orientador: Prof Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso**

Aprovado em 18 de dezembro de 2009 com conceito \_\_\_\_\_.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso – Universidade Federal do Rio Grande do Sul

---

Prof<sup>a</sup> Dra. Marilaine de Fraga Sant'Ana – Universidade Federal do Rio Grande do Sul

---

Prof<sup>a</sup> Msc. Marlusa Benedetti da Rosa – Universidade Federal do Rio Grande do Sul

## RESUMO

Devido a uma certa barreira existente nos alunos em relacionar as funções polinomiais e seus respectivos gráficos, muitos deles concluem o Ensino Médio sem compreender tais relações. Assim, este trabalho de pesquisa busca elaborar uma proposta para o ensino de funções polinomiais para o Ensino Médio com a utilização do software matemático gratuito GeoGebra. Para a construção deste trabalho e a realização da pesquisa, utilizamos os princípios da Engenharia Didática. O mapa da Engenharia Didática foi utilizado como roteiro racional, ou seja, um orientador do raciocínio para desenvolver o projeto que envolve a descrição e justificativa do tema; análise do ensino de polinômios nos níveis epistemológico, cognitivo e didático; escolhas e hipóteses com relação à experimentação da proposta; análises posteriores e validação do plano de ensino elaborado. Com relação às conclusões da experimentação da proposta, podemos afirmar que os resultados foram bastante positivos, mostrando que o software atuou de forma a contribuir na atribuição de conceitos relacionados com o estudo de funções polinomiais.

Palavras-Chave: Ensino e Aprendizagem de Matemática. Engenharia Didática. Funções Polinomiais no Ensino Médio.

## **ABSTRACT**

Had to a certain existing barrier in the pupils in relating the polynomial functions and its respective graphs, many of them conclude High School without understanding such relations. Thus, this work of research searches to elaborate a proposal for the education of polynomial functions for High School with the use of mathematical software gratuitous GeoGebra. For the construction of this work and the accomplishment of the research, we use the principles of Didactic Engineering. The map of Didactic Engineering was used as rational script, that is, an person who orientates of the reasoning to develop the project that involves the description and justification of the subject; analysis of the education of polynomials in the levels epistemological, cognitive and didactic; choices and hypotheses with regard to the experimentation of the proposal; posterior analyses and validation of the plan of elaborated education. With regard to the conclusions of the experimentation of the proposal, we can affirm that the results had been sufficiently positive, showing that software acted of form to contribute in the attribution of concepts related with the study of polynomial functions.

**Keywords:** Education and Learning of Mathematics. Didactic engineering. Polynomial Functions in High School.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Interface do GeoGebra .....	27
Figura 2 – Etapa 1 .....	32
Figura 3 – Etapa 1 .....	32
Figura 4 – Etapa 1 .....	32
Figura 5 – Etapa 1 .....	33
Figura 6 – Gráficos da Etapa 1 .....	34
Figura 7 – Gráficos da Etapa 2 .....	35
Figura 8 – Gráficos da Etapa 3 .....	37
Figura 9 – Gráficos da Etapa 3 .....	38
Figura 10 – Etapa 3 .....	39
Figura 11 – Etapa 3 .....	39

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>7</b>
<b>2 ENGENHARIA DIDÁTICA .....</b>	<b>10</b>
<b>3 TEMA E CAMPO DE AÇÃO .....</b>	<b>13</b>
<b>4 ANÁLISES PRÉVIAS .....</b>	<b>17</b>
4.1 NÍVEL EPISTEMOLÓGICO .....	17
4.2 NÍVEL DIDÁTICO .....	19
4.3 NÍVEL COGNITIVO .....	22
4.4 CONSTRANGIMENTOS .....	23
<b>5 CONCEPÇÃO E ANÁLISE A <i>PRIORI</i> .....</b>	<b>26</b>
<b>6 EXPERIMENTAÇÃO .....</b>	<b>29</b>
6.1 HIPÓTESES .....	30
6.2 RELATO DA ETAPA 1 .....	31
6.3 RELATO DA ETAPA 2 .....	34
6.4 RELATO DA ETAPA 3 .....	36
<b>7 ANÁLISE A <i>POSTERIORI</i> .....</b>	<b>40</b>
<b>8 VALIDAÇÃO DA ENGENHARIA .....</b>	<b>42</b>
<b>9 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>44</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>46</b>
APÊNDICE A – Plano de Ensino .....	48
APÊNDICE B – Software GeoGebra .....	58

## 1 INTRODUÇÃO

Este trabalho descreve a ação pedagógica na área da Educação Matemática e, no decorrer deste texto, serão apresentados e analisados os dados coletados que culminaram na elaboração de uma proposta de ensino que consiste no trabalho das funções polinomiais com o uso do software GeoGebra. Tal proposta tem como público alvo os estudantes do terceiro ano do Ensino Médio e tem como objetivo principal fazer o estudo do termo independente e dos zeros de funções de segundo e terceiro graus que estão escritas como o produto de funções lineares. Essa pesquisa tem o intuito de resgatar o estudo das funções polinomiais que vem sendo abandonado pelos formadores de currículos escolares brasileiros, bem como apresentar uma proposta de ensino com o uso do computador.

O tema “polinômios” é trabalhado no Ensino Fundamental, geralmente na sétima série, com enfoque para os produtos notáveis, as fatorações e as simplificações de frações algébricas. No Ensino Médio, contudo, os polinômios (ou funções polinomiais) têm perdido espaço na escola para outros assuntos considerados mais importantes, já que ultimamente eles têm sido trabalhados ao final do ano letivo apenas “quando sobra tempo”.

O livro *As Ideias da Álgebra*, publicado no Brasil no ano de 1995 apresenta vários artigos de estudiosos da área da Educação Matemática e traz uma questão bastante pertinente em seu prefácio, escrita pelo tradutor:

O que ocorre no ensino de álgebra em nível médio talvez seja uma fixação exagerada nas manipulações mecânicas com símbolos, e isso, se de um lado pode produzir uma falsa sensação de facilidades, de outro pode produzir uma impressão muito forte de inutilidade, além de dar apenas uma ideia muito pálida e parcial da natureza e do alcance dessa matéria.

O que estamos propondo neste trabalho é o ensino de polinômios com o uso de software, para que os alunos consigam compreender visualmente – e não somente memorizar dados a partir da manipulação de fórmulas – o significado do zero de uma



função. Além disso, pretendemos verificar como é possível introduzir as funções polinomiais de 2º e 3º graus como um produto de funções de 1º grau, para a análise dos zeros das funções e dos termos independentes.

Os exercícios que muitos professores – e também livros didáticos – apresentam junto ao ensino dos polinômios têm caráter manipulativo e de memorização, na medida em que exigem pouca necessidade de pensar e muita aplicação direta de definições, teoremas e fórmulas.

As discussões no campo da Educação Matemática no Brasil nos levam a refletir sobre nossas práticas e experiências a fim de adequar nosso trabalho como professores às novas tendências que podem transformar o ensino - neste caso dos polinômios - em aprendizagem significativa, que possibilite o raciocínio. Nesse sentido, quero dar minha contribuição estudando teorias, investigando as dúvidas que tive e as respostas obtidas pelos alunos na experimentação. Quero, com isso, trazer um produto para os professores que sirva, pelo menos, como uma oportunidade de reflexão a respeito de sua própria prática no ensino, a fim de procurar novas abordagens mais adequadas à formação de seus alunos.

A experimentação das atividades foi realizada em uma escola da rede particular de Porto Alegre, em uma turma do terceiro ano do Ensino Médio. O desenvolvimento desta proposta foi orientado pela Engenharia Didática para estruturar a pesquisa.

Tomei conhecimento da Engenharia Didática na disciplina de Pesquisa em Educação Matemática, oferecida no curso de graduação de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Desde então me interessei bastante por essa metodologia de pesquisa, pois ela organiza e estrutura etapas importantes de um trabalho de pesquisa.

Este trabalho está organizado em nove capítulos. No próximo capítulo apresentaremos a Engenharia Didática, explicitando as etapas que constituem essa metodologia de pesquisa.

No capítulo três abordamos o tema e o campo de ação de nossa pesquisa. É nesse momento que decidimos o assunto que guiará a investigação, justificando essa escolha. Ainda nesse tópico, definiremos o campo de atuação desse trabalho.

No quarto capítulo, seguindo as etapas da Engenharia Didática, realizaremos o estudo das análises prévias nos níveis epistemológico, didático e cognitivo. Além disso, apresentaremos ainda os constrangimentos, isto é, os empecilhos encontrados para a implementação da nossa proposta.

O capítulo cinco destina-se às análises a *priori*, em que definimos as escolhas globais e locais. Com isso elaboramos uma Proposta de Ensino para o estudo de polinômios no Ensino Médio com o uso do software GeoGebra. Ainda nesse capítulo apresentaremos a fundamentação teórica utilizada para a elaboração de tal Plano.

O capítulo seis relata a experimentação da Proposta de Ensino. Dessa forma, serão descritas nossas hipóteses e, em seguida, os relatos das atividades.

No sétimo capítulo realizaremos as análises a *posteriori*, avaliando as atividades como um todo, considerando seus postos positivos e negativos.

A validação da Engenharia é descrita no oitavo capítulo. Tal validação ocorre através da comparação entre as análises a *priori* e as análises a *posteriori*.

Por fim, serão apresentadas as considerações finais no capítulo nove.

## 2 ENGENHARIA DIDÁTICA

O termo Engenharia Didática foi elaborado na área das Didáticas Matemáticas, na França, e possui como modelo o trabalho do engenheiro que necessita de conhecimentos científicos, entretanto, precisa enfrentar problemas práticos que não possuem uma teoria prévia para serem resolvidos.

A Engenharia Didática foi criada para contribuir com resultados derivados de pesquisas para o ensino, sendo ainda uma metodologia baseada na experimentação em sala de aula. A Engenharia Didática enquanto referencial para pesquisa permite ao professor revisar e melhorar as soluções intuitivas que ele poderia dar para certo problema de ensino. Dessa forma, o professor passa a analisar o problema com olhar de pesquisador. Na junção da teoria com a prática, levantamos uma pesquisa sobre determinado conteúdo e elaboramos uma proposta de ensino para que possamos construir novos produtos didáticos.

Segundo Artigue (1996), uma Engenharia Didática compreende as fases:

- 1) análises prévias;
- 2) concepção e análise a *priori* de experiências didático-pedagógicas a serem desenvolvidas na sala de aula de Matemática;
- 3) implementação da experiência;
- 4) análise a *posteriori* e validação da experiência.

Nesta etapa das análises prévias, é feito um estudo sobre o modo como vem sendo realizado o ensino habitual do conteúdo/tema escolhido, para que mais tarde seja proposta uma intervenção neste modelo existente. O objetivo é aperfeiçoá-lo, adaptá-lo ou reorganizá-lo de uma maneira que pareça mais conveniente ao professor/pesquisador.

Tais análises são divididas em três níveis:

1. Epistemológico: associado ao estudo da construção e evolução do conhecimento a ser pesquisado;

2. Didático: associado ao estudo dos métodos pelos quais esse conhecimento vem sendo abordado; análise do funcionamento do sistema de ensino;
3. Cognitivo: associado ao estudo das dificuldades de aprendizagem dos alunos com relação a esse conhecimento; dificuldades e obstáculos que surgem ao longo da construção do conhecimento.

Nas análises prévias também buscamos entender quais aspectos do ensino atual podem/devem ser mantidos, quais poderiam/deveriam ser alterados para tornar o estudo deste conhecimento epistemologicamente e/ou cognitivamente mais satisfatório e quais os constrangimentos que impedem/dificultam tais mudanças.

Em “concepção e análise *a priori*”, descrevemos nossas escolhas em dois âmbitos: um global, no qual explicamos nossa proposta didática e explicitamos nossos objetivos, e outro local, em que detalhamos esta proposta, explicitando os recursos a serem utilizados, o público e o tempo de duração da proposta.

Assim, elaboramos nossa proposta nas escolhas globais e locais e formulamos hipóteses sobre o raciocínio e o comportamento dos alunos frente a essa proposta. Essas hipóteses serão comparadas com os resultados finais, após a aplicação da proposta e irão constar na validação da Engenharia.

Sendo assim, fazemos a experimentação da nossa proposta de ensino. Nessa etapa, descreve-se como ocorreu a aplicação da proposta didática, como ela foi ministrada, de que forma se deu a participação do público e que tipo de material pôde ser coletado para posterior análise.

Na etapa análise *a posteriori* e validação da experiência avaliamos essa experiência como um todo. Na Engenharia Didática, “a validação é essencialmente interna, fundada no confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*”. (Artigue, 1996, p. 197). Neste confronto, analisa-se aquilo que foi considerado como hipótese pelo pesquisador e o que foi validado ou não com a experiência.

É importante ressaltar que a proposta da Engenharia Didática não almeja encontrar a verdade sobre algum método de ensino, ou seja, não se busca um método infalível que seja aplicável a todas as situações possíveis e útil para todas as pessoas,

mas sim, se procura uma maneira que, talvez, seja produtiva e eficaz para um certo grupo de pessoas.

O capítulo seguinte aborda a escolha do tema da pesquisa e as justificativas para tal escolha. Essas justificativas podem se basear na relevância do ensino do conteúdo, nas dificuldades encontradas em seu ensino, em uma dificuldade que foi vivenciada ou presenciada como aluno, acadêmico ou mesmo professor, ou algo que tenha partido de uma experiência prática em sala de aula.

### 3 TEMA E CAMPO DE AÇÃO

Como dito anteriormente, essa etapa do trabalho inclui a escolha do tema da pesquisa e as justificativas para tal escolha. O tema deve ser “um conjunto de saberes que se ofereça como um recorte coerente da Matemática escolar, importante e auto-suficiente em si mesmo, adequado para uma ação de engenharia” (CARNEIRO, 2005).

A partir das experiências vivenciadas em estágios extracurriculares e atividades vinculadas à Universidade, observamos que há uma certa barreira existente nos alunos do Ensino Médio em relacionar as funções polinomiais de 1º, 2º e 3º graus com seus gráficos.

Muitas vezes o esboço de gráficos de funções polinomiais é feito apenas via cálculos para a localização de alguns pontos considerados importantes, como os de interseção com os eixos coordenados. Dessa forma, não há um estudo mais aprofundado das relações existentes entre uma lei de função e seu respectivo gráfico.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) do Ministério da Educação sugerem que “aspectos do estudo de polinômios e equações polinomiais podem ser incluídos no estudo de funções polinomiais, enriquecendo o enfoque algébrico que é feito tradicionalmente”. (PCNEM, 2000, p. 43)

Durante meus estágios extracurriculares, realizados em duas escolas da rede particular de Porto Alegre, notei que os alunos do primeiro ano do Ensino Médio, ao estudarem as funções de 1º e 2º graus, mostravam conhecimento e até domínio dos passos necessários para o esboço dos gráficos dessas funções. Entretanto, quando questionados sobre alguns conceitos e significados envolvidos nesse trabalho, grande parte deles não sabia responder exatamente o que era feito, ou ainda, não sabia explicar as relações que se pode estabelecer entre as leis da função e seus respectivos gráficos.

Com relação ao estudo das funções de 1º grau, constatei que pareceu mais fácil e tranquilo aos alunos. Acredito que isso se deve ao fato de esta função ser mais simples e possuir menos propriedades que outras de grau maior como, por exemplo, a

função quadrática, que apresenta intervalos de crescimento e decrescimento e ponto de máximo ou de mínimo.

O que mais me chamou a atenção foi o fato de grande parte dos alunos, com os quais trabalhei, demonstrou ter conhecimento acerca da localização geométrica dos zeros de uma função de 1º e 2º graus. Entretanto, ao serem questionados sobre o real motivo de localizarmos esses números sobre o eixo das abscissas, poucos souberam explicar. Da mesma forma, sempre procurei questioná-los sobre o porquê de o termo independente de uma função coincidir com o número com o qual a função intercepta o eixo das ordenadas. A maioria deles demonstrou saber que naquele ponto o valor de  $x$  é zero, contudo muitos deles não conseguiram estabelecer alguma relação com a lei da função.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio ressaltam que:

O estudo da função quadrática pode ser motivado via problemas de aplicação, em que é preciso encontrar um certo ponto de máximo (clássicos problemas de determinação de área máxima). O estudo dessa função – posição do gráfico, coordenadas do ponto de máximo/mínimo, zeros da função – deve ser realizado de forma que o aluno consiga estabelecer as relações entre o “aspecto” do gráfico e os coeficientes de sua expressão algébrica, evitando-se a memorização de regras. (MEC, 2006, p. 73)

Com isso, optei por realizar um trabalho de pesquisa voltado ao ensino de funções polinomiais no Ensino Médio. A proposta de trabalhar funções polinomiais de 1º, 2º e 3º graus surgiu a partir de alguns questionamentos acerca de como é possível realizar um trabalho com polinômios no terceiro ano do Ensino Médio com alunos que apresentam lacunas e deficiências no estudo das funções de 1º e 2º graus. Como certos conceitos relacionados com gráficos e suas funções polinomiais podem ser trabalhados de forma a facilitar a compreensão dos alunos do 3º ano do Ensino Médio?

Dessa forma, fui buscar informações com professores sobre como o conteúdo de funções polinomiais é habitualmente trabalhado e descobri que, na maioria das escolas, esse era um assunto quase sempre deixado de lado. Segundo alguns professores, as funções polinomiais são destinadas, na maioria das vezes, somente

ao 3º ano do Ensino Médio, apenas se “sobrar tempo” ao final do ano letivo. Tal fato me intrigou, já que considero esse conteúdo como uma forma importante de os alunos perceberem que não existem somente as funções de 1º e 2º graus, mas sim funções de graus maiores que podem ser compreendidas ainda no Ensino Médio. Outro aspecto que considero interessante é o de podermos escrever uma expressão polinomial como o produto de funções de 1º grau, apresentando de forma clara os zeros da respectiva função. Ressalto ainda a importância de compreender graficamente uma função polinomial seja ela de 1º, 2º ou 3º grau no que diz respeito aos pontos de interseção com os eixos coordenados, principalmente os zeros.

As funções polinomiais (para além das funções afim e quadrática), ainda que de forma bastante sucinta, podem estar presentes no estudo de funções. (...) Funções polinomiais mais gerais de grau superior a 2 podem ilustrar as dificuldades que se apresentam nos traçados de gráficos, quando não se conhecem os “zeros” da função. Casos em que a função polinomial se decompõe em um produto de funções polinomiais de grau 1 merecem ser trabalhados. Esses casos evidenciam a propriedade notável de que, uma vez se tendo identificado que o número  $c$  é um dos zeros da função polinomial  $y = P(x)$ , esta pode ser expressa como o produto do fator  $(x - c)$  por outro polinômio de grau menor, por meio da divisão de  $P$  por  $(x - c)$ . (MEC, 2006, p. 74)

A partir de uma revisão bibliográfica, constatamos que há materiais que enfatizam o estudo de polinômios com o uso de material concreto. No entanto, eles são destinados ao Ensino Fundamental, mais especificamente para o trabalho na 7ª série. Com relação ao estudo de polinômios (ou funções polinomiais) no Ensino Médio a diversidade de materiais que abordam o ensino desse conteúdo torna-se muito menor.

Polinômios sempre foi um conteúdo que me despertou muito interesse desde quando era aluna do Ensino Médio. Fiquei surpresa com o fato de ser um assunto com certa carência de pesquisa na área do ensino. Acredito, dessa forma, que essa pesquisa possa ser útil até mesmo para outros professores da área que queiram pesquisar sobre esse tema, ou ainda que esta sirva como uma proposta e/ou motivação para professores interessados em desenvolver o estudo de polinômios.



Todos os acontecimentos descritos colaboraram de forma direta para desenvolver meu interesse pelo ensino de polinômios. A partir disso, procurarei desenvolver uma proposta de ensino que envolva o trabalho dessas funções e, dessa forma, chego à pergunta norteadora dessa pesquisa: **Como é possível trabalhar as relações existentes entre funções de 2º e 3º graus e seus gráficos partindo delas como produto de funções de 1º grau?**

## 4 ANÁLISES PRÉVIAS

Com a escolha do tema feita no capítulo anterior, partimos então para as análises prévias. Essa etapa do mapa da Engenharia Didática tem por objetivo analisar o ensino usual de certo conteúdo – nesse caso os polinômios – e propor uma nova abordagem para tal assunto para modificar o ensino usual, visando um melhor aprendizado e um melhor aproveitamento das aulas.

Dividimos as análises prévias em três momentos, são eles:

- a) nível epistemológico, que está associado ao desenvolvimento histórico dos polinômios;
- b) nível didático, relacionado ao ensino usual dos polinômios;
- c) nível cognitivo, que se relaciona com o aprendizado, destacando os impasses nas dificuldades que os alunos encontram para compreender o estudo dos polinômios.

### 4.1 NÍVEL EPISTEMOLÓGICO

A Álgebra surgiu no Egito quase ao mesmo tempo em que na Babilônia e servia, basicamente, para resolver problemas matemáticos que envolviam números desconhecidos. A Babilônia era tida como conhecedora de métodos mais sofisticados, com maior número de equações resolvidas, a começar pelos Papiros Moscou Rhind, documentos egípcios que datam de cerca de 1850 a.C. e 1650 a.C., respectivamente.

As soluções das equações de 2º grau, determinadas através da famosa fórmula de Bhaskara, são, na realidade, da autoria de Sridahara, no século XI, ambos hindus. Os hindus, assim como os árabes, tiveram significativo papel na Matemática, uma vez que os gregos (fãs da álgebra mais voltada às construções geométricas) estagnaram suas pesquisas, devido à invasão de seu território pelo Império Romano, por volta de 509 a.C.

Diofante, considerado um dos pais da álgebra, era grego e viveu em Alexandria no século IV. Foi ele o primeiro a usar símbolos para representar incógnitas. Ele ficou famoso com seu estudo na solução de equações consideradas indeterminadas, chamadas de *equações diofantinas*.

Por volta do século XVI, os matemáticos aperfeiçoaram as notações algébricas, aumentaram a precisão dos cálculos e, com isso, obtiveram um grande progresso na álgebra. Passaram a usar letras para representar as incógnitas, adotam os símbolos de + para adição, – para subtração e o sinal = para igualar os termos das equações. François Viète (1540-1603) foi um grande destaque nesse período.

Uma das maiores discussões matemáticas ocorreu entre os italianos Girolamo Cardano e Nicoló Fontana (mais conhecido como Tartaglia). Esses, no século XVI, foram os primeiros a desenvolver estudos para a resolução das equações de 3º grau e, pouco tempo depois, Lodovico Ferrari conseguiu resolver a equação de 4º grau. Criou-se então, em paralelo o estudo das equações algébricas polinomiais e o estudo dos Números Complexos.

As notações atualmente utilizadas nas equações algébricas (a, b, c), para os coeficientes desconhecidos, e x, y, z para as incógnitas foram estabelecidas por René Descartes, na primeira metade do século XVII. Dessa forma, surgiu o conceito que Descartes (1596–1650) e Fermat (1601–1665), e depois Newton e Leibniz, iriam utilizar no estudo de curvas.

Com relação ao Teorema Fundamental da Álgebra, muitos matemáticos tentaram prová-lo, no entanto sem sucesso. Dentre eles, podemos destacar D'Alembert, Euler, Lagrange, Laplace, entre outros. Uma demonstração rigorosa foi publicada por Argand em 1806 e, foi então que, pela primeira vez, o teorema fundamental da Álgebra foi enunciado para polinômios com coeficientes complexos e não apenas para polinômios com coeficientes reais. Gauss publicou mais duas demonstrações em 1816 e uma nova versão da primeira demonstração em 1849.

Galois (1811–1832) possui também importantes considerações para o estudo da álgebra, no que diz respeito à Teoria de Grupos. A Teoria de Galois fornece uma conexão entre a Teoria de Corpos e a Teoria de Grupos. Através dela, problemas na

Teoria de Corpos podem ser reduzidos a problemas na Teoria de Grupos, tornando-os, de certa forma, mais simples e mais fácil de serem compreendidos.

No ano de 1824, Niels Henrik Abel provou que não é possível haver uma fórmula geral, que envolva somente operações aritméticas e radicais, para a determinação de raízes de polinômios com grau igual ou superior a 5 em termos de coeficientes.

O conceito de função passou por algumas mudanças ao longo da história. Sempre ligado à álgebra, evoluiu no processo da construção de conceitos e do conhecimento matemático. Com o passar do tempo as funções moldaram-se também para a Teoria dos Conjuntos e abriram espaço para um outro ramo da Matemática.

## 4.2 NÍVEL DIDÁTICO

Após realizar um breve estudo com relação à história da álgebra e dos polinômios, buscamos por produções de cunho acadêmico. Dentre as dissertações, os artigos e outros materiais pesquisados até o momento, pudemos encontrar o estudo de polinômios para o Ensino Fundamental, atividades contextualizadas para o estudo de funções lineares ou quadráticas, atividades para o ensino de funções direcionadas a professores, ou ainda, estudo analítico de polinômios. No entanto, não há um número significativo de trabalhos ou pesquisas que abordem o ensino das funções polinomiais no Ensino Médio com o uso do computador.

Para tanto, pesquisamos brevemente sobre como o conteúdo de polinômios é abordado e trabalhado em três livros didáticos. A escolha deles foi feita, primeiramente, pelo fato de serem aprovados pelo MEC (Ministério da Educação) e por serem de edições atuais. Além do mais estes foram adquiridos durante minhas experiências como estagiária em escolas da rede particular de Porto Alegre, o que os torna de fácil acesso para consulta.

São eles:

- a) FACCHINI, Walter. **Matemática para a escola de hoje**: livro único. São Paulo: Editora FTD, 2006.
- b) DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto e aplicações**: volume único. 3ª ed. São Paulo: Ática, 2009.
- c) GIOVANNI, José Ruy. BONJORNIO, José Roberto. GIOVANNI JR., José Ruy. **Matemática Fundamental: uma nova abordagem**: ensino médio: volume único. São Paulo: FTD, 2002.

Os livros pesquisados demonstram semelhanças com relação ao conteúdo de polinômios no que diz respeito aos tópicos abordados.

De maneira geral, o livro de Facchini (2006) mostra-se extremamente técnico e compartimentalizado, com um enfoque bastante algébrico. Apresenta sempre, nessa ordem, definições, exemplos, exercícios resolvidos e exercícios (grande parte deles de vestibular). Traz ainda algumas abordagens históricas de matemáticos que contribuíram para a história da álgebra, como D'Alembert e Galois.

O livro de Dante (2009) inicia o conteúdo de polinômios com um exemplo, calculando o perímetro, a área e o volume de três formas geométricas. Então, para o desenrolar do conteúdo, o livro aborda inicialmente definições, seguidas de exemplos, exercícios resolvidos e exercícios propostos, semelhante ao livro anterior. O diferencial desse livro em relação ao primeiro é que esse apresenta pequenos quadros com questões para o aluno refletir sobre o conteúdo. Além disso, a apresentação visual desse livro é melhor que a do anterior, utilizando cores mais claras e transmitindo melhor harmonia que o anterior, que apresenta cores fortes. Ao final do capítulo traz questões de vestibular e, ao final do livro, questões do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio).

O livro de Giovanni, Bonjorno e Giovanni Jr (2002) apresenta no início do capítulo de polinômios o seguinte texto:

Determinados temas matemáticos apresentam dificuldade de serem associados a aplicações no mundo real. É o caso dos polinômios.

A manipulação de expressões algébricas envolvendo polinômios é uma técnica essencial para o desenvolvimento do saber matemático e, como qualquer habilidade, sua prática pode se tornar repetitiva.

No entanto, o estudo dos polinômios representa um bom momento para se perceber que a Álgebra pode ser usada para demonstrar alguns fatos surpreendentes! (p. 579)

Acreditamos que essa passagem talvez não seria a mais adequada para essa situação, pois pode transmitir ao aluno uma sensação de que o conteúdo de polinômios é algo totalmente abstrato e sem muitas utilidades. Não é nossa proposta no entanto, julgar o livro, mas é importante salientar que problemas que envolvem áreas, volumes, proporção e maximização, que ocorrem na biologia, física e química, por exemplo, podem ser exemplos de aplicações de polinômios.

Esse último livro, aborda o conteúdo de maneira semelhante aos anteriores, apresentando inicialmente definições, seguidas de exemplos, exercícios resolvidos e exercícios propostos. Ao final propõe exercícios de vestibular e exercícios do ENEM.

Podemos concluir, após essa rápida análise, que os livros não apresentam abordagens diferenciadas para o trabalho com os polinômios. Com exceção do livro de Dante, que apresenta pequenos quadros com questões incitando a reflexão do aluno, todos são bastante conservadores e seguem uma sequência, quase sempre ela seguida por tópicos.

Em nenhum dos livros didáticos analisados foram encontradas atividades que destacassem o uso do computador como um recurso para as aulas de Matemática. Esse fato, por exemplo, já ocorre em livros nos Estados Unidos, onde há uma abordagem do uso do computador para as aulas de Matemática.

Os PCN (2000) relatam que:

Esse impacto da tecnologia, cujo instrumento mais relevante é hoje o computador, exigirá do ensino de Matemática um redirecionamento sob uma perspectiva curricular que favoreça o desenvolvimento de habilidades e procedimentos com os quais o indivíduo possa se reconhecer e se orientar nesse mundo do conhecimento em constante movimento. (MEC, 2000, p. 41)

Acreditamos, portanto, que mesmo que os livros didáticos não destaquem o uso do computador em sala de aula, é importante que os professores busquem por atividades novas que utilizem as tecnologias computacionais. É fato que o computador está presente no cotidiano de nossos alunos, por isso por que não conectá-lo com a sala de aula, em atividades que façam o uso dessa tecnologia?

#### 4.3 NÍVEL COGNITIVO

Considerando que em grande parte das escolas o conteúdo de polinômios é deixado para ser estudado somente ao final do terceiro ano do Ensino Médio, é importante analisar o porquê dessa dificuldade de trabalhar tal conteúdo.

Partindo da constatação de que as funções polinomiais são consideradas – tanto por professores quanto por alunos – de difícil compreensão, podemos dizer, após as revisões bibliográficas, que uma das causas desse problema está no fato de esse ser um conteúdo que pede um certo nível de conhecimento sobre funções. É inegável também que os polinômios possuem um enfoque algébrico acentuado, algo que exige atenção e concentração por parte dos alunos.

Após conversas informais com professores de Matemática e alunos do curso de Licenciatura em Matemática, percebemos que muitos consideram esse como um conteúdo difícil, cansativo, algébrico ou abstrato demais. Alguns relataram que os alunos chegam ao final do terceiro ano e não se recordam mais do conteúdo de funções de 1º e 2º graus, sendo necessário revisar conceitos como o de zero de uma função e a construção de gráficos.

Observamos que, na maioria das escolas as funções de 1º e 2º graus são trabalhadas no primeiro ano do Ensino Médio, enquanto que os polinômios somente no final do terceiro ano. Dessa forma, muitos alunos podem vir a pensar que os polinômios estão à parte do estudo das funções, como se fossem conteúdos distintos, devido ao grande espaço de tempo entre um estudo e outro.

Um fato já citado anteriormente, diz que grande parte dos alunos sabe realizar

cálculos para o encontro dos zeros de uma função, por exemplo. Entretanto enfrentam alguns obstáculos no momento da transição do raciocínio aritmético para o raciocínio algébrico e geométrico, ou seja, sabem realizar o que foi previamente “treinado” a fazer, entretanto não conseguem traduzir o que foi feito.

A partir disso é necessário que repensemos sobre como a abordagem desse conteúdo vem sendo feita e se não poderíamos tornar o estudo dos polinômios mais atrativo.

Em um artigo discutido em uma mesa redonda num Encontro Paulista de Educação Matemática, em 2004, Malagutti (2004) relatou que a maioria dos professores afirma que a principal dificuldade para o trabalho em sala de aula é a falta de motivação dos alunos. Dessa forma, ele defende que as aulas de matemática devem ir além do giz e quadro negro. Malagutti afirma ainda que a ausência de manipulações de modelos, ou de outras que estimulem a visualização (softwares, vídeos), a experimentação, a formulação de hipóteses e a dedução dos resultados matemáticos, sua ligação com outras áreas do conhecimento humano e com o cotidiano dos alunos, tem sido relatada como um fator de grande apatia nas aulas atuais.

Dessa forma, podemos constatar que, muitas vezes, o problema pode estar com o professor, no que diz respeito ao seu planejamento de ensino. O uso de novas tecnologias nas aulas de Matemática vem sendo cada vez mais difundido e defendido por pesquisadores. Talvez o uso de software para uma melhor visualização dos gráficos no estudo de polinômios possa ser uma saída para preencher as lacunas e as incompreensões trazidas por alunos desde o primeiro ano do Ensino Médio, onde estudaram as funções lineares e quadráticas.

#### 4.4 CONSTRANGIMENTOS

O que acreditamos ser a principal dificuldade na implementação da nossa proposta – que consiste na introdução do estudo de polinômios no Ensino Médio com



o uso do software GeoGebra – é o fato de tal proposta exigir uma mudança na tradição do ensino de matemática no Brasil. Geralmente o estudo de polinômios no Ensino Médio, quando é feito, baseia-se na memorização de regras, teoremas e definições, seguindo quase sempre uma lista de etapas a serem cumpridas, com um enfoque algébrico muitas vezes considerado pesado.

Outro ponto que consideramos difícil de enfrentar é o uso de recursos computacionais, situação que ainda constrange muitos professores, já que grande parte não se sente seguro, nem capacitado em utilizar as ferramentas existentes.

Nas aulas de Matemática, por exemplo, há a possibilidade de explorar diversos softwares educativos pagos ou gratuitos. Régua e compasso, Poly e S-Logo (para o ensino de geometria); Geogebra, Graphequation, Graphmatica e Winplot (para o ensino de funções). Todos os exemplos citados são gratuitos e fáceis de serem encontrados na Internet para download.

Temos que debater este tema nas escolas. Diversos softwares poderiam ser explorados nos conhecimentos de diversas áreas: alguns deles dão noção de espacialidade, com o uso de imagens que mostram a rotação dos sólidos e suas faces, algo que não se consegue fazer no quadro, pelo fato de ser bidimensional, e, assim, não rotar a figura. Talvez esse tipo de ferramenta possa explicar – e o aluno compreender – o que o professor fala em aula, sanando as possíveis dificuldades de percepção espacial. (LIMA, 2006, p. 32)

Temos conhecimento que todas as ideias que exigem mudanças drásticas em estruturas que estão solidificadas – como, por exemplo, as estruturas do currículo de ensino da matemática – são as que enfrentam maior resistência. Por isso, pensamos que o principal desafio a ser ultrapassado é a estrutura de ensino de polinômios baseado em uma álgebra que é estruturada através de mecanismos de manipulação e exercícios de repetição.

Consideramos o pensamento algébrico extremamente importante e acreditamos que o ensino da álgebra possa ser conectado com o da geometria, através do estudo de gráficos. O que não concordamos é com o fato de ser trabalhado nas escolas

brasileiras um conjunto de regras que, de forma alguma, desenvolvem o pensamento algébrico e tampouco o geométrico.

De acordo com o mapa da Engenharia Didática, a próxima etapa diz respeito às análises a priori. É neste momento que apresentamos nosso estudo nos campos global e local. Sendo assim, elaboramos uma proposta de ensino levando em conta teorias que embasem nosso trabalho.

## 5 CONCEPÇÃO E ANÁLISE A *PRIORI*

A partir do estudo realizado sobre os polinômios, no que diz respeito à sua construção e evolução ao longo dos anos, ao tipo de abordagem que geralmente é dado nas escolas e como os alunos encaram esse estudo, pensamos em uma proposta de ensino. Essa proposta tem por objetivo principal abordar o estudo de polinômios de um modo diferente do usual, buscando que os alunos compreendam melhor determinados conceitos.

As primeiras escolhas que realizamos dizem respeito a variáveis globais, ou seja, aquelas que se referem à organização global da Engenharia. Posteriormente definimos nossas escolhas no âmbito local, descrevendo cada atividade proposta.

Podemos descrever nossas escolhas globais da seguinte maneira:

- a) partir do estudo de funções de 1º grau para então trabalhar com polinômios de 2º e 3º graus escrito como o produto dessas funções de 1º grau;
- b) utilizar como recurso computacional o software GeoGebra;
- c) priorizar habilidades que permitem ao estudante estabelecer relações entre uma lei de função e seu respectivo gráfico.

O GeoGebra é um software gratuito de Matemática que reúne os recursos de álgebra, geometria, aritmética e cálculo. A interface do GeoGebra apresenta duas janelas: de geometria e de álgebra. Todos os comandos dados ao programa são exibidos nas duas janelas, possibilitando ao estudante estabelecer conexões entre essas duas áreas da Matemática. Esse software tem recebido vários prêmios e permite, entre outras, a construção de pontos, retas, semirretas, vetores, mediatriz, bissetriz, polígonos, seções cônicas, ângulos e gráficos de funções.<sup>1</sup>

O software GeoGebra é considerado de fácil utilização, sem a necessidade de pré-requisitos ou tutoriais para sua manipulação. Ele permite alterar, entre outras funções, as escalas dos eixos coordenados, as cores e as espessuras dos pontos e dos gráficos. A seguir, na figura 1, podemos observar a interface do GeoGebra.

---

<sup>1</sup> O download do software GeoGebra pode ser feito em [www.geogebra.org/](http://www.geogebra.org/).

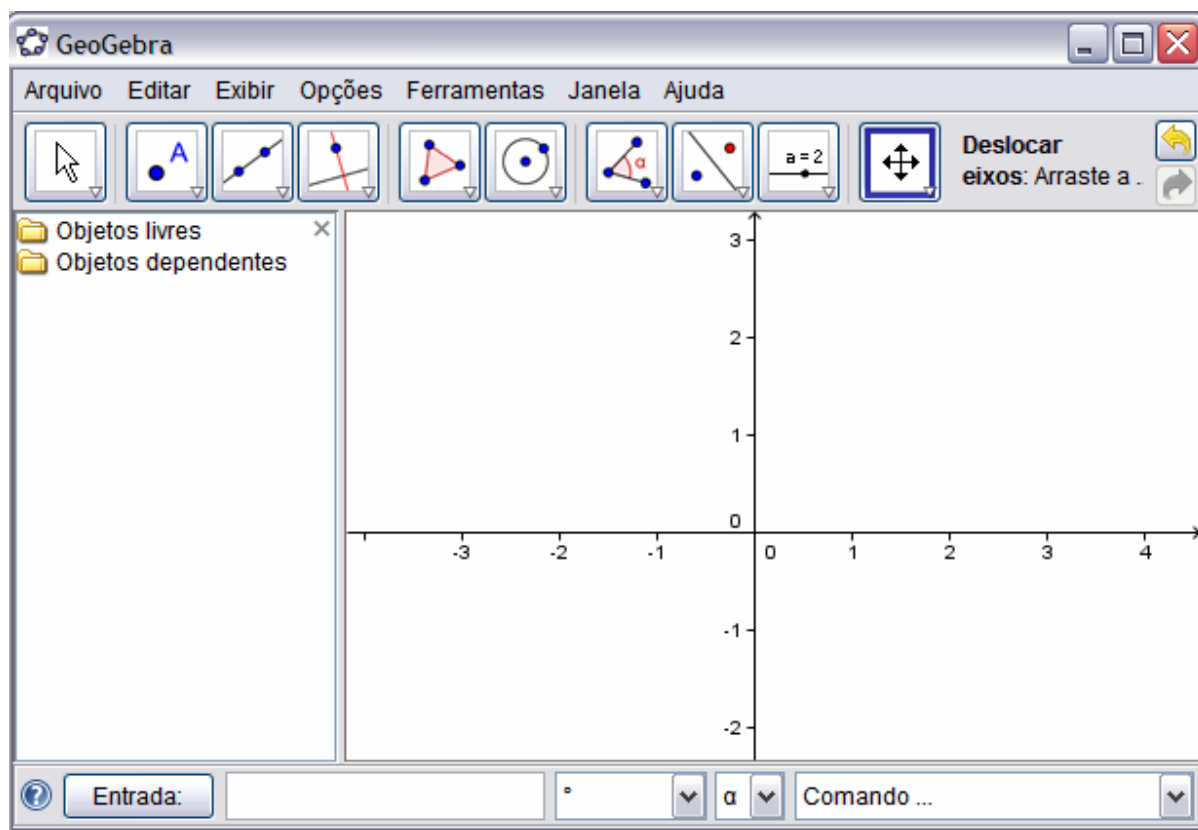


Figura 1 – Interface do GeoGebra

Acreditamos que a utilização de software para a construção de gráficos não somente torna esse trabalho mais rápido, mas também auxilia na visualização e, principalmente, na precisão dos desenhos, algo impossível de ser realizado quando esboçamos esses gráficos à mão.

Com as escolhas globais estabelecidas, partimos para a elaboração de um Plano de Ensino (ver Apêndice A), onde inserimos as escolhas locais. O Plano se apresenta numa seqüência de ações, desenvolvidas em três encontros, de um período de 50 minutos cada, com uma turma do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola da rede particular de Porto Alegre.

Organizamos estas ações com base no artigo *A qualitative study of polynomials in high school* (Um estudo qualitativo dos polinômios no Ensino Médio) das autoras

Nitsa Movshovitz-Hadar e Alla Shmukler, cujo texto aborda uma proposta para a introdução do trabalho com polinômios no Ensino Médio.

Essas autoras apresentam uma proposta com o uso de software para o estudo de polinômios no Ensino Médio e sugerem o computador como um método facilitador na introdução do estudo de polinômios no Ensino Médio. A principal proposta do artigo é a de considerar os polinômios como produtos de funções lineares e quadráticas e, assim, obter suas propriedades a partir da observação e análise de gráficos.

O objetivo principal das autoras é o de que podemos expor os estudantes a uma variedade de polinômios de grau maior que 2 e, ao mesmo tempo, fazê-los perceber que todos polinômios têm a mesma origem, isto é, podem ser escritos como o produto de lineares ou quadráticos.

Segundo Nitsa e Alla, uma condição necessária para a implementação da proposta descrita acima é a disponibilidade de computadores equipados com um software adequado para a produção das representações gráficas das funções polinomiais.

Voltamos, com isso, à questão da utilização da tecnologia em sala de aula. Conforme Lima (2006):

Apesar de existirem a mais de vinte anos, os softwares educativos ainda não foram utilizados em todo seu potencial na prática docente. A adoção sistemática de softwares educativos nas escolas é mínima. Isso se deve, em parte à carência de sistemas de qualidade e falta de informações sobre aspectos técnicos e pedagógicos de bons sistemas existentes (p. 28).

Com a proposta elaborada, partimos para a experimentação, próxima etapa da Engenharia Didática. No próximo capítulo estão listadas, de maneira detalhada, as atividades desenvolvidas.

## 6 EXPERIMENTAÇÃO

As escolhas locais que tomamos têm por objetivo principal proporcionar uma introdução ao estudo de polinômios com o uso do software GeoGebra. Para tanto, pensamos em organizar atividades distribuídas em três momentos, com a proposta de fazer o estudo de algumas propriedades dos polinômios, abordando, principalmente, o conceito de zero de uma função.

A partir disso, elaboramos uma proposta de ensino que apresenta como um dos principais objetivos o de que os alunos consigam perceber que funções de 2º e 3º graus, escritas como o produto de funções de 1º grau, possuem os mesmos zeros.

Dessa forma, pensamos em elaborar atividades que não reduzissem o estudo dos polinômios a fórmulas e regras para o estudo de algumas propriedades, mas sim utilizando o GeoGebra como ferramenta principal desse trabalho. Nossa finalidade seria a de evitar a situação em que o professor apresenta sua aula pronta e os alunos “absorvem” a matéria.

Para a aplicação das atividades tivemos três encontros com uma turma de terceiro ano do Ensino Médio, cada um deles com duração de um período (cinquenta minutos). A turma era composta por vinte e oito alunos.

As aulas foram realizadas no Laboratório de Informática da escola e a professora de Matemática dessa turma acompanhou todas as etapas de forma ativa, participando de todas as atividades e auxiliando os alunos quando necessário. Sozinhos ou em duplas (somente quatro alunos preferiram trabalhar sozinhos), os alunos realizaram atividades que consistiam em utilizar o GeoGebra para construir gráficos e, a partir disso, analisar seus principais pontos, como os de interseção com os eixos coordenados. Para tanto, foi entregue aos alunos duas folhas contendo uma breve explicação do software GeoGebra, destacando as principais ferramentas que seriam utilizadas nas atividades e como usá-las (ver Apêndice B) e um pequeno polígrafo com as atividades (ver Apêndice A).

Podemos dizer ainda que as escolhas locais possuem relação com as previsões que fazemos a respeito de como os alunos irão reagir diante das atividades propostas

no Plano de Ensino. Dessa forma, podemos formular hipóteses que, ao final das atividades, serão comparadas com os resultados obtidos, contribuindo, dessa forma, para a validação da Engenharia Didática.

## 6.1 HIPÓTESES

Nossas hipóteses foram formuladas separadamente para cada etapa das atividades, como consta a seguir:

- Etapa 1: O objetivo principal desta atividade é de fazermos uma sondagem sobre o estudo dos zeros e das constantes  $a$  e  $b$  da função de 1º grau  $y = ax + b$ . Acreditamos que as principais barreiras a serem enfrentadas nessa etapa estarão ligadas ao fato de os alunos terem de recordar algumas propriedades da função polinomial de 1º grau, estudada no primeiro ano do Ensino Médio. Primeiramente, nossa hipótese é a de que muitos alunos possam não reconhecer as palavras *abscissa* e *ordenada*, referindo-se aos eixos coordenados. Pensamos ainda, que nem todos consigam reconhecer se uma função é crescente ou decrescente dependendo do sinal do  $a$ . Uma outra hipótese levantada é a de que os estudantes não se recordem como podemos encontrar o zero de uma função de 1º grau, nem o que ele significa para a função, algébrica e graficamente. Ainda, acreditamos que alguns alunos possam apresentar dúvidas com relação à conexão que podemos estabelecer com o valor de  $b$  da função e seu gráfico.

- Etapa 2: O objetivo desta atividade é de realizar um estudo sobre os zeros e as constantes  $a$  e  $c$  da função de 2º grau  $y = ax^2 + bx + c$ . Para tanto, será pedido aos alunos que façam os gráficos de funções de 1º grau e então depois o gráfico do produto dessas funções. O esperado é que eles consigam perceber que os zeros serão os mesmos, ou seja, a parábola interceptará o eixo das abscissas nos mesmos

pontos onde as funções de 1º grau interceptaram. Outra hipótese que levantamos é a de que os alunos consigam perceber a relação existente entre o valor de  $y$  do ponto em que a parábola intercepta o eixo das ordenadas e os valores dos coeficientes lineares das funções de 1º grau, isto é, ver que o termo independente da parábola é obtido pelo produto dos coeficientes lineares das funções de 1º grau.

- Etapa 3: O foco principal dessa etapa é de fazer um estudo sobre os zeros e a constante  $d$  da função de 3º grau  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . Assim, nosso objetivo principal, bem como na etapa 2, é o de que os alunos consigam perceber que, quando uma função de 3º grau é escrita como o produto de três funções de 1º grau, os zeros dessas funções serão também os zeros da função de 3º grau. Dessa forma, nossa hipótese nessa etapa é a de que os alunos, nessa altura do trabalho já tenham percebido esse fato. Ainda como hipótese, pensamos que alguns estudantes poderão apresentar dúvidas no que diz respeito à multiplicidade das raízes. Dizemos isso, pois os gráficos de funções cúbicas que possuem três zeros simples, um zero simples e um zero com multiplicidade 2, ou um zero com multiplicidade 3 apresentam desenhos distintos, no que diz respeito à interseção com o eixo das abscissas.

## 6.2 RELATO DA ETAPA 1

Para a realização das atividades, a professora de Matemática perguntou se era necessário que houvesse inicialmente alguma abordagem do conteúdo de polinômios, já que esse seria o próximo conteúdo a ser trabalhado com a turma. Explicamos que a nossa proposta traz uma introdução ao estudo das funções polinomiais, fazendo desnecessário um breve estudo ou uma revisão sobre funções.

No Laboratório de Informática foi solicitado aos alunos que realizassem as atividades sozinhos ou em duplas. Cada aluno recebeu um pequeno polígrafo com as atividades propostas no Plano de Ensino (ver Apêndice A) e um material explicativo do



software GeoGebra, mostrando como utilizar algumas ferramentas necessárias para esse trabalho (ver Apêndice B).

Na primeira etapa tínhamos por objetivo realizar um estudo sobre os zeros e as constantes  $a$  e  $b$  da função de 1º grau  $y = ax + b$ . Dessa forma, os alunos deveriam responder questões que tratavam do significado dos coeficientes angular e linear e ainda analisar o significado do zero da função no plano cartesiano.

Podemos relatar que essa atividade foi extremamente rápida. A grande maioria da turma já possuía conhecimentos sobre os significados de  $a$  e  $b$  da expressão  $y = ax + b$  nos gráficos, como podemos ver abaixo nas figuras 2, 3 e 4.

2. Qual a influência dos valores de  $a$  nos desenhos dos gráficos? *Os valores de "a" influenciam o ângulo de inclinação das retas*

Figura 2 – Etapa 1

2. Qual a influência dos valores de  $a$  nos desenhos dos gráficos?

*Quando o valor de "a" é negativo a reta é decrescente.  
Quando o valor de "a" é positivo a reta é crescente.*

Figura 3 – Etapa 1

3. O que os valores de  $b$  da equação representam nos gráficos?

*O ponto em que o gráfico intercepta o eixo y.*

Figura 4 – Etapa 1

Com relação à pergunta que tratava do zero de uma função de 1º grau, a maioria dos alunos não soube responder, ou então relataram apenas que “era o ponto

onde a reta cortava o eixo  $x$ ". Tiveram, no entanto respostas interessantes, como na figura 5.

5. Repita a operação acima para cada uma das outras retas desenhadas e responda: o que os valores de  $x$  de cada ponto encontrado representam?

representa o valor de " $x$ " quando  $y=0$ , ou seja, a raiz da equação.

Figura 5 – Etapa 1

Logo na primeira aula todos os alunos conseguiram concluir a etapa 1 e iniciaram a segunda etapa. Essa primeira parte do trabalho mostrou que a turma já estava familiarizada e adaptada às nomenclaturas dos eixos coordenados como eixo das ordenadas e eixo das abscissas. Outra observação a fazer é que nem todos sabiam informar que o valor de  $x$  do ponto em que uma reta intercepta o eixo das abscissas é o zero dessa função.

Um fato interessante ocorrido é o de que alguns alunos perguntaram se era necessário desenhar os gráficos também à mão e então respondemos que não era preciso, já que o GeoGebra servia exatamente para auxiliar a atividade na construção, visualização e interpretação de algumas propriedades das funções.

A seguir, na figura 6, podemos observar o trabalho de uma dupla.

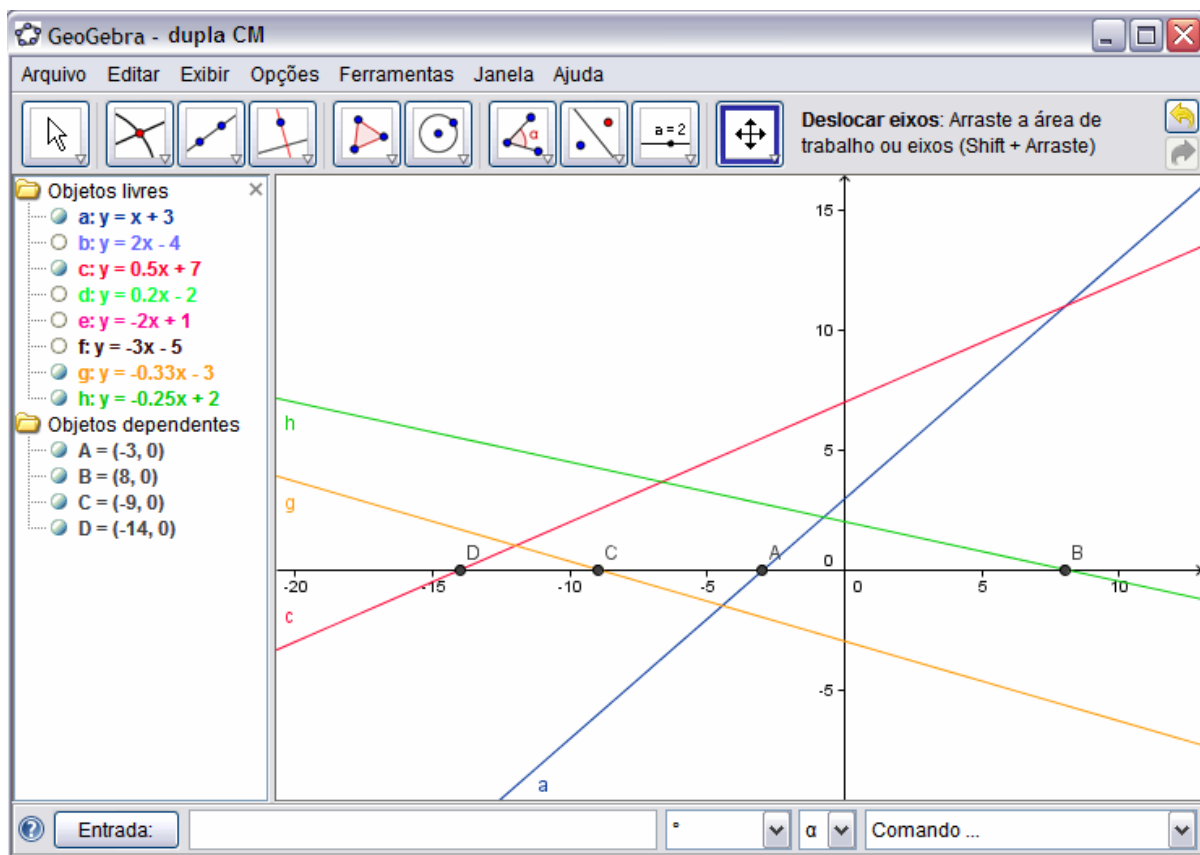


Figura 6 – Gráficos da Etapa 1

### 6.3 RELATO DA ETAPA 2

Logo no primeiro momento dessa atividade os alunos demonstraram dúvidas no que diz respeito ao campo de entrada do software (local onde digitamos as equações). A indagação da turma consistia em saber se era possível escrever uma lei de função de 2º grau na forma fatorada ou se era necessário efetuar antes o produto notável para então digitar a lei da função no campo de entrada. Então, conversamos com os alunos e dissemos que não faz diferença para o software e que as duas formas estão corretas.

Retomando nossas hipóteses e analisando as respostas dadas pelos alunos, podemos afirmar que a grande maioria deles atingiu o que esperávamos. Eles

conseguiram perceber que os zeros das funções de 1º grau e os zeros de uma função quadrática escrita como o produto de duas de 1º grau são os mesmos, ou seja, a parábola intercepta o eixo das abscissas nos mesmos pontos onde as retas interceptaram. Muitos alunos relataram que com o auxílio visual do GeoGebra essa ideia tornou-se bastante clara.

Outra hipótese que havíamos levantado era a de que os alunos conseguissem perceber a relação existente entre o valor de  $y$  do ponto em que a parábola intercepta o eixo das ordenadas e os valores dos coeficientes lineares das funções de 1º grau. Através da análise das respostas dos alunos e do acompanhamento ativo das atividades, podemos relatar que a maioria dos alunos conseguiu perceber que o termo independente da parábola é obtido pelo produto dos coeficientes lineares das funções de 1º grau. Podemos pegar como exemplo a figura 7 a seguir.

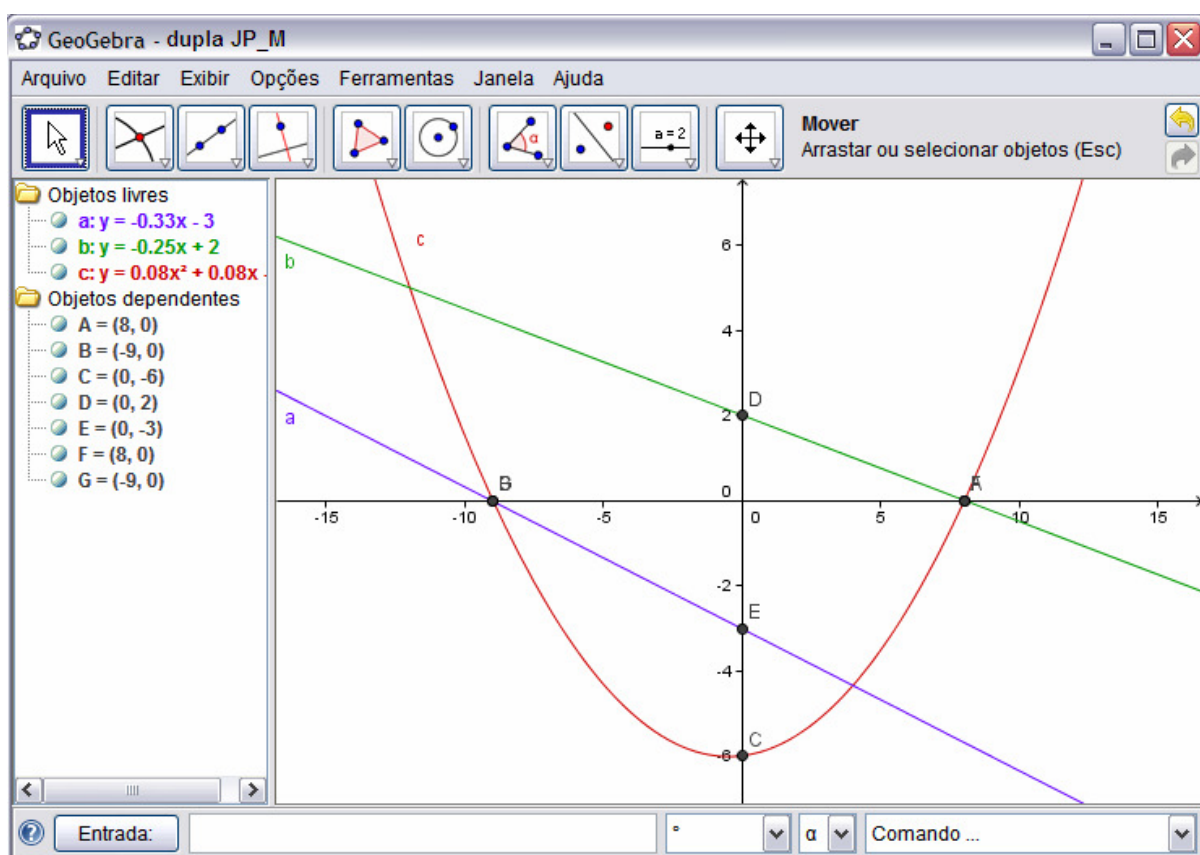


Figura 7 – Gráficos da Etapa 2

Acreditamos que essa etapa foi bastante importante para esse estudo, já que, com o apanhado da primeira etapa pudemos evoluir um pouco mais no estudo das funções, relacionando as funções de 1º grau com as de 2º grau. Além do mais, essa etapa proporciona ao aluno uma base que servirá para a etapa seguinte.

Apesar de considerarmos a etapa 2 de grande valia aos alunos, que demonstraram alcançar os nossos objetivos propostos, a maioria deles classificou essa etapa como “muito repetitiva”. Acreditamos que tal fato possa ter ocorrido devido à semelhança das atividades, em que mudavam apenas as equações, porém com as mesmas perguntas. Outro motivo que pensamos ser uma causa para essa resposta é o fato de que a maioria dos alunos já havia compreendido a relação existente entre os termos independentes das funções de 1º e 2º graus e já havia visualizado que o intercepto no eixo das abscissas é o mesmo para a função de 2º grau e as funções de 1º grau que formam seu produto.

#### 6.4 RELATO DA ETAPA 3

Essa etapa, infelizmente, não foi finalizada por todos os alunos devido à falta de tempo. Acreditamos, no entanto, através das observações em aula e das respostas dadas nas atividades, que alguns dos objetivos traçados inicialmente foram alcançados por grande parte da turma.

Assim como nas atividades da etapa anterior, verificamos que, nessa etapa a maioria da turma compreendeu que em uma função de terceiro grau escrita como o produto de três funções de 1º grau, os zeros das funções de 1º grau correspondem aos zeros da função cúbica. Notaram ainda que o termo independente da função de terceiro grau pode ser obtido através da multiplicação dos termos independentes das funções de 1º grau presentes na sua fatoração. A seguir, na figura 8, podemos observar a atividade realizada por um aluno.

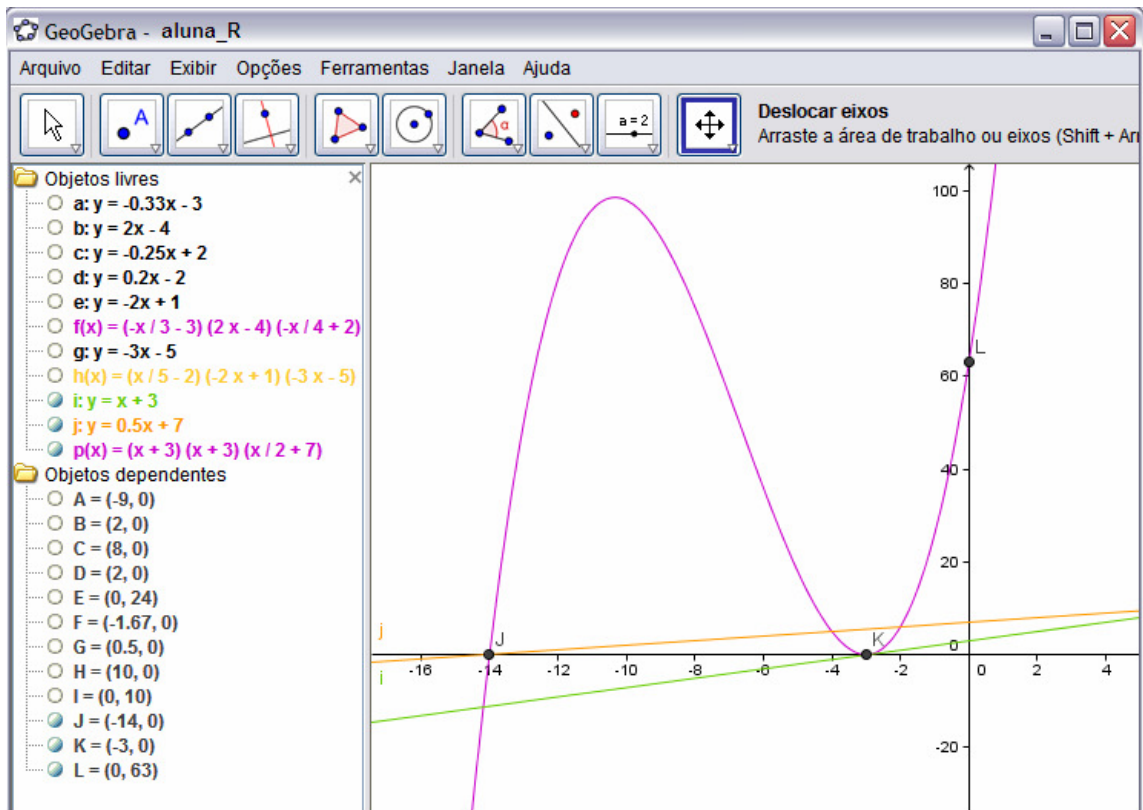


Figura 8 – Gráficos da Etapa 3

Após desenharem o gráfico da função  $y = (x + 3) \cdot (x + 3) \cdot \left(\frac{x}{2} + 7\right)$ , representada pela figura 8, alguns alunos levantaram dúvidas interessantes:

“Se uma função de 3º grau tem três zeros, então porque a função só corta o eixo x uma vez?”

“Essa função tem só dois zeros, mas não deveria ter 3, já que é de terceiro grau?”

“Sempre que tiver pedaços iguais (referindo-se a fatores iguais) o gráfico faz uma voltinha?”

“A outra raiz ta escondida no gráfico porque ela se repete na lei da função?”

Um diálogo curioso ocorreu com uma aluna, após desenhar o gráfico da função

$$y_2 = \left(-\frac{x}{3}-3\right) \cdot \left(-\frac{x}{3}-3\right) \cdot \left(-\frac{x}{3}-3\right), \text{ representada a seguir, pela figura 9:}$$

Aluna: Essa função afinal tem um ou três zeros?

Professora: Qual é o grau dessa função?

Aluna: É de grau 3.

Professora: Então quantos zeros deveria ter essa função?

Aluna: Tem que ter 3.

Professora: Quais são, então, os zeros da função?

Aluna: É só o  $-9$ . Mas ele aparece 3 vezes? É isso?

Professora: Exatamente! Há três zeros iguais a  $-9$ .

Aluna: Ah, por isso que o gráfico deita no eixo  $x$  e depois cai?

Professora: Isso! A ideia é essa mesma!

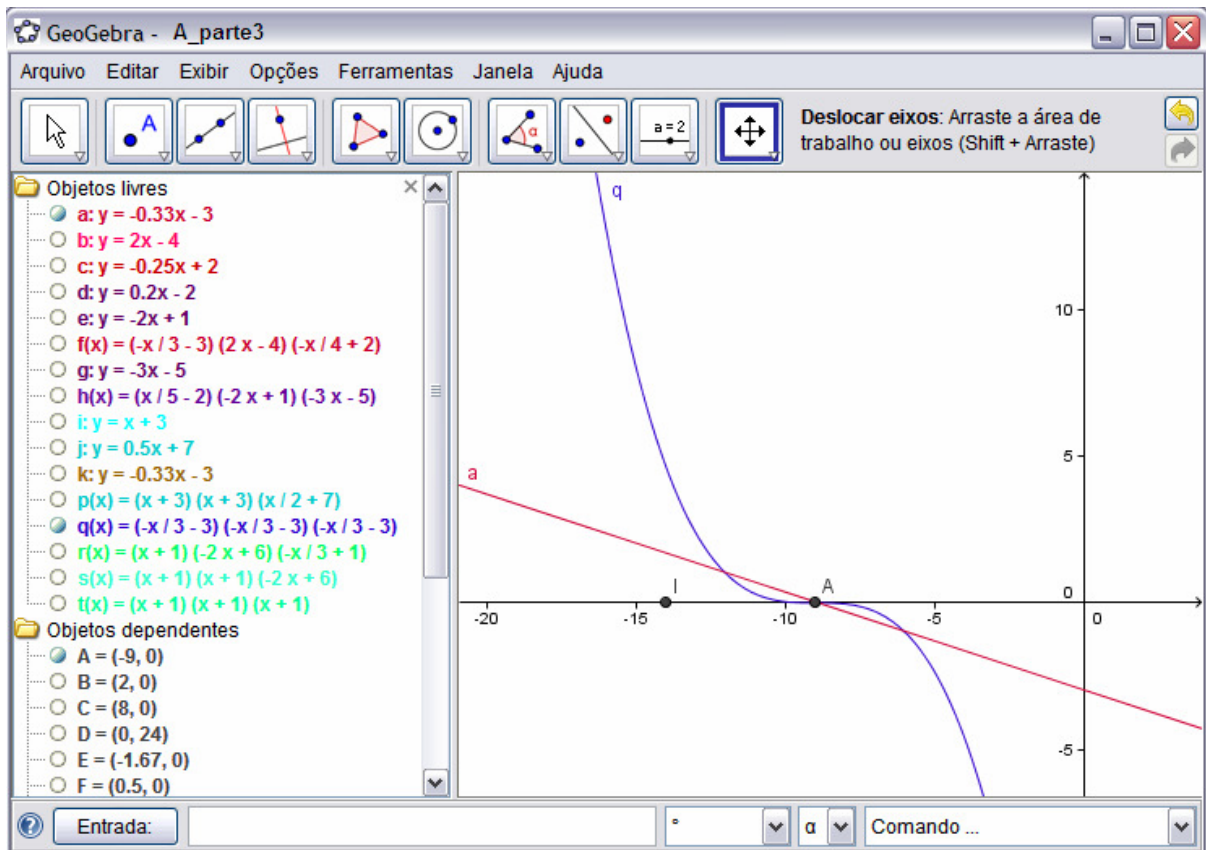


Figura 9 – Gráficos da Etapa 3

Tivemos algumas respostas interessantes para uma questão acerca das conclusões que os alunos tiraram no que diz respeito às raízes de uma equação, observando como eles explicaram o fato da multiplicidade das raízes (figuras 10 e 11).

Considere também os gráficos referentes às funções dos exercícios 1, 2, 3 e 4 anteriores. No que diz respeito às raízes das equações, quais são as conclusões que você tira após observar os gráficos desenhados?

se toca no eixo  $X \rightarrow 1$  raiz  
 se tangencia  $\rightarrow 2$  raízes  
 se caminha  $\rightarrow 3$  raízes

Figura 10 – Etapa 3

Considere também os gráficos referentes às funções dos exercícios 1, 2, 3 e 4 anteriores. No que diz respeito às raízes das equações, quais são as conclusões que você tira após observar os gráficos desenhados?

alguns gráficos tem 3 raízes, e cortam o eixo  $X$  3 vezes; alguns tem somente 2, e o cortam 2 vezes, e outros só uma raiz, cortando o eixo das abscissas somente 1 vez

Figura 11 – Etapa 3

Com as atividades realizadas, partimos para a próxima etapa da Engenharia Didática, em que avaliamos a aplicação da proposta. Nessa etapa, analisa-se aquilo que foi considerado como hipótese pelo pesquisador e o que foi validado ou não com a experiência.



## **7 ANÁLISE A POSTERIORI**

Analisando as atividades como um todo, pode-se dizer que a maioria dos objetivos foi alcançada. Em geral, os alunos se mostraram bastante participativos, envolvidos com a atividade, questionando os professores e os colegas sempre que preciso. Ao final da última aula foi solicitado aos alunos que comentassem sobre o trabalho como um todo, relatando o que gostaram e o que não gostaram. Foi pedido também que comentassem sobre o software GeoGebra.

Com relação às atividades a maioria dos alunos relatou ter gostado, especificando que o GeoGebra ajudou muito na visualização dos gráficos e de algumas questões sobre funções que ainda não estavam claras. Muitos alunos relataram que a atividade é muito extensa para três períodos, afirmando que seria necessário um período de tempo maior para a realização da mesma. Alguns colocaram ainda que as atividades da primeira, e principalmente, da segunda etapa eram bastante repetitivas.

Com relação ao GeoGebra todos os alunos, sem exceção, elogiaram muito o software. Afirmaram que ele é muito fácil de ser utilizado, pois apresenta linguagem simples e organiza de forma clara e precisa os comandos que lhe são dados. A maioria deles utilizou a ferramenta de cor, para distinguir mais claramente os gráficos. Mostraram bastante satisfação também na opção de modificar as escalas dos eixos coordenados, podendo “abri-los” para uma melhor visualização. Citamos a seguir alguns dos comentários escritos pelos alunos:

“Excelente para visualizar a parábola e os eixos com mais precisão e detalhe.”

“Gostei do trabalho porque com o recurso visual do programa ficou mais fácil compreender alguns ‘comportamentos’ das funções.”

“Um programa excelente! Leve e muito descomplicado de se usar. Recomendo aos nossos amigos.”

“O programa é muito fácil de mexer. Mexer com os gráficos e começar da equação de primeiro grau para a de segundo, ou a de primeiro para a de terceiro, montando e relacionando os gráficos ajuda a tirar conclusões e entender coisas que não se entendia antes.”

“Ele é muito bom! É a primeira vez que entendo funções na minha vida!”

Podemos afirmar que os resultados finais foram bastante positivos, pois muitas das hipóteses levantadas na primeira etapa, antes da experimentação, não ocorreram. Os alunos demonstraram um bom conhecimento sobre algumas propriedades da função de 1º grau e sabiam o significado de abscissa e ordenada. Em contrapartida, outras hipóteses levantadas nas segunda e terceira etapas ocorreram, o que consideramos ótimo. A maioria dos alunos conseguiu perceber que, quando uma função de 2º ou 3º grau é escrita como o produto de funções de 1º grau, os zeros dessas também serão também os zeros da função quadrática ou cúbica.

Uma questão que não pôde ser aprofundada devido à falta de tempo, foi a multiplicidade das raízes, no que diz respeito aos desenhos dos gráficos. Somente com os alunos que terminaram todas as atividades conseguimos dar um enfoque maior nesse assunto, explicando como os gráficos se comportam quando uma raiz apresenta multiplicidade 1, 2 ou 3. Com esses estudantes foi possível comentar sobre funções de grau maior que três, explicando que todas as propriedades que vimos para as funções quadráticas e cúbicas nessas atividades também servem para funções de graus maiores.

Outro assunto bastante interessante, contudo não abordado nesse trabalho de pesquisa, é o estudo de funções polinomiais que possuem zeros imaginários. Realizar um trabalho com os alunos sobre como ocorrem os comportamentos dos gráficos para esse caso também pode ser de grande valia aos estudantes. Observar ainda que nem todo polinômio pode ser escrito somente como produto de funções de 1º grau é bastante importante para a compreensão das funções polinomiais. Nesse texto as funções a serem estudadas foram dadas como produto de funções de 1º grau, já que a proposta era somente de introduzir o estudo das funções polinomiais.

## 8 VALIDAÇÃO DA ENGENHARIA

No mapeamento da Engenharia Didática, a etapa final caracteriza-se pelos registros dos estudos sobre o caso em questão e sobre a validação. Essa validação da pesquisa é feita internamente, diferentemente de outras metodologias, pois ela se baseia no encontro e na comparação entre a análise *a priori* e análise *a posteriori*.

A etapa da validação se apóia sobre os dados colhidos durante toda a experimentação da proposta de ensino, partindo-se desde as análises *a priori*, onde fazemos escolhas globais e locais, até as análises *a posteriori*, onde é verificado se as hipóteses feitas no início da pesquisa foram confirmadas. Constatamos, dessa maneira se o aprendizado foi consolidado e se a autonomia intelectual dos alunos foi alcançada. Isso, então, determinará a validação da Engenharia.

Após as análises *a priori*, a experimentação e as análises *a posteriori*, podemos afirmar que o trabalho foi realmente válido. Acreditamos, dessa forma, que podemos trabalhar as relações existentes entre funções de 2º e 3º grau e seus gráficos partido delas como produto de funções de 1º grau com o auxílio de um software.

O uso do software GeoGebra facilitou na rapidez da construção de gráficos de funções polinomiais de 1º, 2º e 3º grau e na visualização de pontos importantes, como os de interseção com os eixos coordenados, além de apresentar precisão no desenho. A maioria dos alunos afirmou ter compreendido o significado do zero de uma função e percebido que funções escritas como o produto de funções de 1º grau possuem os mesmos zeros, um dos principais objetivos dessa proposta.

A base teórica que utilizamos nessa proposta revelou-se de grande valia, mostrando que a tecnologia computacional, algo presente constantemente no nosso dia-a-dia, pode servir de grande aliada às aulas de Matemática.

Essa questão da tecnologia também é abordada nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio:

Não se pode negar o impacto provocado pela tecnologia de informação e comunicação na configuração da sociedade atual. Por um lado, tem-se a inserção dessa tecnologia no dia-a-dia da sociedade, a exigir indivíduos com capacitação para bem usá-la; por outro lado, tem-se nessa mesma tecnologia um recurso que pode subsidiar o processo de aprendizagem da Matemática. É importante contemplar uma formação escolar nesses dois sentidos, ou seja, a Matemática como ferramenta para entender a tecnologia, e a tecnologia como ferramenta para entender a Matemática. (MEC, 2006, p. 87)

Dessa forma, afirmamos que a proposta dessa Engenharia foi válida. A maioria da turma demonstrou interesse pelas atividades, principalmente pelo fato de a aula ser realizada no Laboratório de Informática.

Um fato que consideramos importante na Engenharia Didática é o de que nela o professor tem a oportunidade de refletir e avaliar se as suas ações estão alcançando os objetivos esperados. Sendo assim, o trabalho da Engenharia Didática ocorre juntamente com as práticas desenvolvidas, possibilitando ao professor redirecionar o trabalho que está sendo desenvolvido. Dessa forma, o professor estuda constantemente sobre os motivos que possam vir a impedir o aprendizado de seus alunos e os que auxiliam na compreensão, de modo a estar sempre investigando e refletindo as próprias ações educativas em sala de aula.

Uma possível melhoria no Plano de Ensino seria um trabalho mais sucinto no estudo das funções quadráticas (segunda etapa) e um maior aprofundamento da terceira etapa. Poderíamos também estender a proposta para o estudo de funções polinomiais com graus maiores que 3, ou ainda realizar um estudo das equações que apresentam raízes imaginárias. Acreditamos que, disponibilizando uma carga horária maior para a aplicação do Plano de Ensino, as atividades poderiam ocorrer de forma mais calma, com um maior tempo para o aprofundamento do conteúdo.

## 9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Consideramos que os objetivos da nossa proposta de ensino foram atingidos por grande parte da turma. Obtivemos resultados muito positivos com relação à aprovação dos alunos, que em todos os momentos, fizeram perguntas, levantaram conjecturas e demonstraram interesse pelas atividades propostas. Ao final do terceiro encontro alguns alunos disseram que as aulas “com gráficos” poderiam ter ocorrido sempre no Laboratório de Informática.

Consideramos de extrema importância que a professora da turma, Alessandra Faria Dornelles, tenha acompanhado todas as atividades, sempre nos dando autonomia para que seguíssemos o nosso plano de ensino. Ao final das atividades, ela elogiou bastante o trabalho e pediu o material para que pudesse estudar uma possível aplicação nas outras turmas. Tal fato foi fundamental para validação da proposta, já que um profissional mais experiente e adepto a propostas de ensino diferenciadas observou que a atividade alcançou seus objetivos. A professora acredita que o trabalho teve resultado positivo e que a maioria dos alunos compreendeu os conceitos propostos.

Sendo assim, podemos afirmar é possível realizar uma introdução ao estudo dos polinômios e trabalhar as relações existentes entre funções de 2º e 3º grau e seus gráficos partindo delas como produto de funções de 1º grau. O uso do GeoGebra serviu de grande aliado nesse trabalho e mostrou-se um software de fácil utilização. É necessário que os professores de Matemática e as escolas repensem sobre os currículos e percebam que o conteúdo de polinômios não deve ser deixado de lado, já que esses são importantes para modelarmos situações que estão presentes no cotidiano, como problemas que envolvem áreas e volumes.

Acreditamos que a busca por novas metodologias de ensino que proporcionem um verdadeiro aprendizado é cada vez mais necessária. Dessa forma, a Engenharia Didática se desenvolve juntamente com a prática do professor, já que ele tem a oportunidade de refletir e avaliar suas práticas educativas. Assim, esse processo de

reflexão pode redirecionar o trabalho desenvolvido, buscando sempre o aperfeiçoamento das aulas e a ampliação dos saberes do professor educador.

Além disso, o professor deve estar sempre em busca de novas atividades, modos distintos de abordar determinado conteúdo. É importante que estejamos sempre em constante pesquisa, na busca do aperfeiçoamento de nossas aulas. Procurar materiais que relatem experiências realizadas por outros profissionais pode ser um grande aliado na elaboração de propostas de ensino. O artigo *A qualitative study of polynomials in high school* (Um estudo qualitativo dos polinômios no Ensino Médio) nos proporcionou um embasamento teórico bastante sólido, mostrando como conectar o ensino da Matemática com o uso do computador.

Finalizando este trabalho, refletimos sobre o conhecimento e a experiência que adquirimos. Desenvolver um trabalho de pesquisa proporciona ao pesquisador ampliar suas redes de conhecimento em diversos sentidos. O desenvolvimento desse trabalho, em todas as suas etapas, nos proporcionou aprender sobre pesquisa, Educação Matemática e sobre a própria Matemática.

Acreditamos ainda que o uso de tecnologias computacionais não deve ser evitado pelos professores, mesmo que esses não possuam domínio das ferramentas. Assim como nossos alunos, estamos em constante aprendizado e é necessário que nos atualizemos sempre, pois o mundo está em constante transformação, onde, cada vez mais, as novas tecnologias da informação e da comunicação são inseridas no nosso cotidiano.

## REFERÊNCIAS

ARTIGUE, M. **Engenharia Didática**. In: BRUN, Jean. Didáctica das Matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget. Horizontes Pedagógicos, 1996, p.193-217.

BORGES, Antonio José. **Polinômios no Ensino Médio: uma investigação em livros didáticos**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. 2007.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura (MEC). **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. 2000.

BRASIL. Ministério da educação (MEC), Secretaria da Educação Básica (SEB). **Orientações Curriculares de Ensino Médio**. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. 2006. Brasília: MEC/SEB.

CARNEIRO, Vera Clotilde Garcia. **Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática**. Zetetike, Campinas-UNICAMP, v. 13, n. 23, 2005, p. 85-118.

COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. (org.). **As ideias da Álgebra**. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto e aplicações**: volume único. 3ª ed. São Paulo: Ática, 2009

EISENBERG, Theodore; DREYFUS, Tommy. **Os polinômios no currículo da escola média**. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. (org.). As ideias da Álgebra. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995. p. 127-134.

FACCHINI, Walter. **Matemática para a escola de hoje**: livro único. São Paulo: Editora FTD, 2006.

GIOVANNI, José Ruy. BONJORNO, José Roberto. GIOVANNI JR., José Ruy. **Matemática Fundamental: uma nova abordagem**: ensino médio: volume único. São Paulo: FTD, 2002.

LIMA, Joeline de Oliveira de. **Diretrizes para a construção se softwares educacionais de apoio ao ensino de Matemática**. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. 2006.

MALAGUTTI, Pedro Luiz. **A Geometria na escola básica: que espaços e formas têm hoje?** DM UFSCar. VII EPEM, 2004. Anais. Mesa redonda 21.

MOVSHOVITZ-HADAR, N.; SHMUKLER, A. **A qualitative study of polynomials in high school**. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Londres, v.22, n.4, p. 523-543, 1991.

<http://www.bienasbm.ufba.br/M18.pdf> (acesso em novembro de 2009)

<http://edu.technion.ac.il/faculty/Faculty.asp?FM=nitsa> (acesso em outubro de 2009)

<http://www.limc.ufrj.br/htem4/papers/23.pdf> (acesso em novembro de 2009)

<http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/06/MC74329499053.pdf> (acesso em novembro de 2009)

[http://www.sbmac.org.br/eventos/cnmac/cd\\_xxvii\\_cnmac/cd\\_cnmac/files\\_pdf/10527a.pdf](http://www.sbmac.org.br/eventos/cnmac/cd_xxvii_cnmac/cd_cnmac/files_pdf/10527a.pdf) (acesso em novembro de 2009)

<http://www.somatematica.com.br/algebra.php> (acesso em novembro de 2009)

[http://www2.uefs.br/sigma/arquivos/COP/COP02-2008\\_Viviane\\_Lisboa.pdf](http://www2.uefs.br/sigma/arquivos/COP/COP02-2008_Viviane_Lisboa.pdf) (acesso em novembro de 2009)



## APÊNDICE A – Plano de Ensino

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

Instituto de Matemática

Clarissa Coragem Ballejo

### Plano de Ensino

#### Objetivo principal

Fazer o estudo de funções polinomiais no Ensino Médio com a utilização do software GeoGebra e estabelecer conexões entre as equações polinomiais e seus respectivos gráficos. Essa atividade é sugerida para qualquer série do Ensino médio.

#### Conteúdos matemáticos envolvidos

Funções polinomiais de 1º, 2º e 3º graus.

#### Recursos utilizados

Software matemático gratuito GeoGebra.

#### Base teórica

A elaboração e desenvolvimento deste plano têm por base os artigos *A qualitative study of polynomials in high school* (O estudo qualitativo de polinômios no Ensino Médio, escrito por Nitsa Movshovitz-Hadar e Alla Shmukler, do Instituto de Tecnologia de Israel), *Engenharia Didáctica* (de Michelle Artigue) e *Engenharia Didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática* (de Vera Clotilde Garcia Carneiro).

O primeiro apresenta uma proposta de uso de software para o estudo de polinômios no Ensino Médio e sugere o computador como um método facilitador na introdução do estudo de polinômios no Ensino Médio. A principal proposta do artigo é a de considerar os polinômios como produtos de funções lineares e quadráticas e, assim, obter suas propriedades a partir da observação e análise de gráficos.

O texto de Artigue apresenta a Engenharia Didática como uma metodologia de investigação. No texto, a autora faz uma abordagem histórica, explicando a origem dessa metodologia e destaca ainda as características gerais da Engenharia Didática.

Por fim, o último artigo apresenta uma proposta para o ensino da geometria orientada pelos princípios da Engenharia Didática. Ele traz um mapa dessa metodologia, servindo de roteiro para que o leitor compreenda as etapas necessárias.

### Atividades

A dinâmica de trabalho em sala se dará de maneira que os alunos poderão realizar as atividades sozinhos ou em duplas. Para tanto, serão dados exercícios a serem realizados com o auxílio do GeoGebra, software de Matemática gratuito que reúne recursos de geometria, álgebra e cálculo. A seguir está a sequência de atividades entregue aos alunos.

Nome(s): .....	Dupla: .....
Data: ___/___/___	Turma: .....
Disciplina: Matemática – 3º ano	Professora: .....

## Software na Aprendizagem de Funções Polinomiais e Gráficos no Ensino Médio

### Etapa 1

**Um estudo sobre os zeros e as constantes  $a$  e  $b$  da função de 1º grau  $y = ax + b$ .**

Dada a função  $y = ax + b$ , esboce os gráficos abaixo com o auxílio do GeoGebra, quando:

a)  $a = 1$  e  $b = 3$

e)  $a = -2$  e  $b = 1$

b)  $a = 2$  e  $b = -4$

f)  $a = -3$  e  $b = -5$

c)  $a = \frac{1}{2}$  e  $b = 7$

g)  $a = -\frac{1}{3}$  e  $b = -3$

d)  $a = \frac{1}{5}$  e  $b = -2$

h)  $a = -\frac{1}{4}$  e  $b = 2$

Responda às questões que seguem:

1. Quais são as conclusões que você tira após observar os gráficos desenhados?
2. Qual a influência dos valores de **a** nos desenhos dos gráficos?
3. O que os valores de **b** da equação representam nos gráficos?
4. Utilize a opção *interseção de dois objetos* e então clique sobre a primeira reta desenhada ( $y = x + 3$ ) e o eixo das abscissas. Qual foi o ponto encontrado?
5. Repita a operação acima para cada uma das outras retas desenhadas e responda: o que os valores de **x** de cada ponto encontrado representam?

Salve o arquivo na área de trabalho com a identificação da dupla e da etapa.  
Exemplo: duplaA\_1

## **Etapa 2**

**Um estudo sobre os zeros e as constantes a e c da função de 2º grau**  $y = ax^2 + bx + c$ .

Inicie um novo arquivo.

Utilizando as funções de 1º grau da etapa anterior, esboce o gráfico no GeoGebra das seguintes funções e responda às perguntas:

1.  $y_1 = x + 3$ ,  $y_2 = \frac{x}{5} - 2$  e  $y_3 = (x + 3) \cdot \left(\frac{x}{5} - 2\right)$

a) Utilize a opção *interseção de dois objetos* e então clique sobre a parábola desenhada e o eixo das abscissas. O que você observa?

b) Utilize a opção *interseção de dois objetos* e então clique sobre a parábola desenhada e o eixo das ordenadas. Qual foi o ponto encontrado?

Qual a relação entre o valor de **y** desse ponto com os valores do **b** das equações de 1º grau?

c) As retas são crescentes ou decrescentes?

d) A parábola desenhada possui concavidade voltada para cima ou para baixo?

e) Desenvolva o produto notável na equação  $y = (x + 3) \cdot \left(\frac{x}{5} - 2\right)$  e então aplique a fórmula de Bhaskara.

i) Quais foram os números encontrados?

ii) Qual a relação desses números com seus respectivos gráficos?

iii) Como chamamos esses números encontrados?

2.  $y_1 = 2x - 4$ ,  $y_2 = -3x - 5$  e  $y_3 = (2x - 4) \cdot (-3x - 5)$

a) Utilize a opção *interseção de dois objetos* e então clique sobre a parábola desenhada e o eixo das abscissas. O que você observa?

b) Utilize a opção *interseção de dois objetos* e então clique sobre a parábola desenhada e o eixo das ordenadas. Qual foi o ponto encontrado?

Qual a relação entre o valor de **y** desse ponto com os valores do **b** das equações de 1º grau?

c) As retas são crescentes ou decrescentes?

d) A parábola desenhada possui concavidade voltada para cima ou para baixo?

e) Desenvolva o produto notável na equação  $y = (2x - 4) \cdot (-3x - 5)$  e então aplique a fórmula de Bhaskara.

i) Quais foram os números encontrados?

ii) Qual a relação desses números com seus respectivos gráficos?

iii) Como chamamos esses números encontrados?

$$3. y_1 = -\frac{x}{3} - 3, \quad y_2 = -\frac{x}{4} + 2 \quad \text{e} \quad y_3 = \left(-\frac{x}{3} - 3\right) \cdot \left(-\frac{x}{4} + 2\right)$$

a) Utilize a opção *interseção de dois objetos* e então clique sobre a parábola desenhada e o eixo das abscissas. O que você observa?

b) Utilize a opção *interseção de dois objetos* e então clique sobre a parábola desenhada e o eixo das ordenadas. Qual foi o ponto encontrado?

Qual a relação entre o valor de **y** desse ponto com os valores do **b** das equações de 1º grau?

c) As retas são crescentes ou decrescentes?

d) A parábola desenhada possui concavidade voltada para cima ou para baixo?

e) Desenvolva o produto notável na equação  $y = \left(-\frac{x}{3} - 3\right) \cdot \left(-\frac{x}{4} + 2\right)$  e então aplique a fórmula de Bhaskara.

i) Quais foram os números encontrados?

ii) Qual a relação desses números com seus respectivos gráficos?

iii) Como chamamos esses números encontrados?

4.  $y_1 = x + 3$ ,  $y_2 = x + 3$  e  $y_3 = (x + 3) \cdot (x + 3)$

a) Utilize a opção *interseção de dois objetos* e então clique sobre a parábola desenhada e o eixo das abscissas. O que você observa?

b) Utilize a opção *interseção de dois objetos* e então clique sobre a parábola desenhada e o eixo das ordenadas. Qual foi o ponto encontrado?

Qual a relação entre o valor de **y** desse ponto com os valores do **b** das equações de 1º grau?

c) As retas são crescentes ou decrescentes?

d) A parábola desenhada possui concavidade voltada para cima ou para baixo?

e) Desenvolva o produto notável na equação  $y = (x + 3) \cdot (x + 3)$  e então aplique a fórmula de Bhaskara.

i) Quais foram os números encontrados?

ii) Qual a relação desses números com seus respectivos gráficos?

iii) Como chamamos esses números encontrados?

Salve o arquivo na área de trabalho com a identificação da dupla e da etapa.  
Exemplo: duplaA\_2

### **Etapa 3**

**Um estudo sobre os zeros e a constante d da função de 3º grau**  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ .

Inicie um novo arquivo.

Utilizando as funções de 1º grau da primeira etapa, esboce os gráficos no GeoGebra das seguintes funções e responda às perguntas:

$$1. y_1 = -\frac{x}{3} - 3, y_2 = 2x - 4, y_3 = -\frac{x}{4} + 2 \text{ e } y_4 = \left(-\frac{x}{3} - 3\right) \cdot (2x - 4) \cdot \left(-\frac{x}{4} + 2\right)$$

a) Utilize a opção *interseção de dois objetos* e então clique sobre o gráfico da função de terceiro grau desenhado e o eixo das abscissas. O que você observa? Quais foram os pontos encontrados?

b) Utilize a opção *interseção de dois objetos* e então clique sobre o gráfico da função de terceiro grau desenhado e o eixo das ordenadas. Qual foi o ponto encontrado?

Qual a relação entre o valor de **y** desse ponto com os valores do **b** das equações de 1º grau?

$$c) \text{ Quais são os zeros da função } y = \left(-\frac{x}{3} - 3\right) \cdot (2x - 4) \cdot \left(-\frac{x}{4} + 2\right)?$$

$$2. y_1 = \frac{x}{5} - 2, y_2 = -2x + 1, y_3 = -3x - 5 \text{ e } y_4 = \left(\frac{x}{5} - 2\right) \cdot (-2x + 1) \cdot (-3x - 5)$$

a) Utilize a opção *interseção de dois objetos* e então clique sobre o gráfico da função de terceiro grau desenhado e o eixo das abscissas. O que você observa? Quais foram os pontos encontrados?



b) Utilize a opção *interseção de dois objetos* e então clique sobre o gráfico da função de terceiro grau desenhado e o eixo das ordenadas. Qual foi o ponto encontrado?

Qual a relação entre o valor de **y** desse ponto com os valores do **b** das equações de 1º grau?

c) Quais são os zeros da função  $y = \left(\frac{x}{5} - 2\right) \cdot (-2x + 1) \cdot (-3x - 5)$ ?

3.  $y_1 = x + 3$ ,  $y_2 = \frac{x}{2} + 7$ , e  $y_3 = (x + 3) \cdot (x + 3) \cdot \left(\frac{x}{2} + 7\right)$

a) Utilize a opção *interseção de dois objetos* e então clique sobre o gráfico da função de terceiro grau desenhado e o eixo das abscissas. O que você observa? Quais foram os pontos encontrados?

b) Utilize a opção *interseção de dois objetos* e então clique sobre o gráfico da função de terceiro grau desenhado e o eixo das ordenadas. Qual foi o ponto encontrado?

Qual a relação entre o valor de **y** desse ponto com os valores do **b** das equações de 1º grau?

c) Quais são os zeros da função  $y = (x + 3) \cdot (x + 3) \cdot \left(\frac{x}{2} + 7\right)$ ?

4.  $y_1 = -\frac{x}{3} - 3$  e  $y_2 = \left(-\frac{x}{3} - 3\right) \cdot \left(-\frac{x}{3} - 3\right) \cdot \left(-\frac{x}{3} - 3\right)$

a) Utilize a opção *interseção de dois objetos* e então clique sobre o gráfico da função de terceiro grau desenhado e o eixo das abscissas. O que você observa? Quais foram os pontos encontrados?

b) Utilize a opção *interseção de dois objetos* e então clique sobre o gráfico da função de terceiro grau desenhado e o eixo das ordenadas. Qual foi o ponto encontrado?

Qual a relação entre o valor de **y** desse ponto com os valores do **b** das equações de 1º grau?

c) Quais são os zeros da função  $y = \left(-\frac{x}{3} - 3\right) \cdot \left(-\frac{x}{3} - 3\right) \cdot \left(-\frac{x}{3} - 3\right)$ ?

5. Esboce o gráfico das funções abaixo no mesmo plano cartesiano:

$$y_1 = (x+1) \cdot (-2x+6) \cdot \left(\frac{x}{2} + 7\right)$$

$$y_2 = (x+1) \cdot (x+1) \cdot (-2x+6)$$

$$y_3 = (x+1) \cdot (x+1) \cdot (x+1)$$

Considere também os gráficos referentes às funções dos exercícios 1, 2, 3 e 4 anteriores. No que diz respeito aos **zeros** das funções, quais são as conclusões que você tira após observar os gráficos desenhados?

Salve o arquivo na área de trabalho com a identificação da dupla e da etapa.  
Exemplo: duplaA\_3

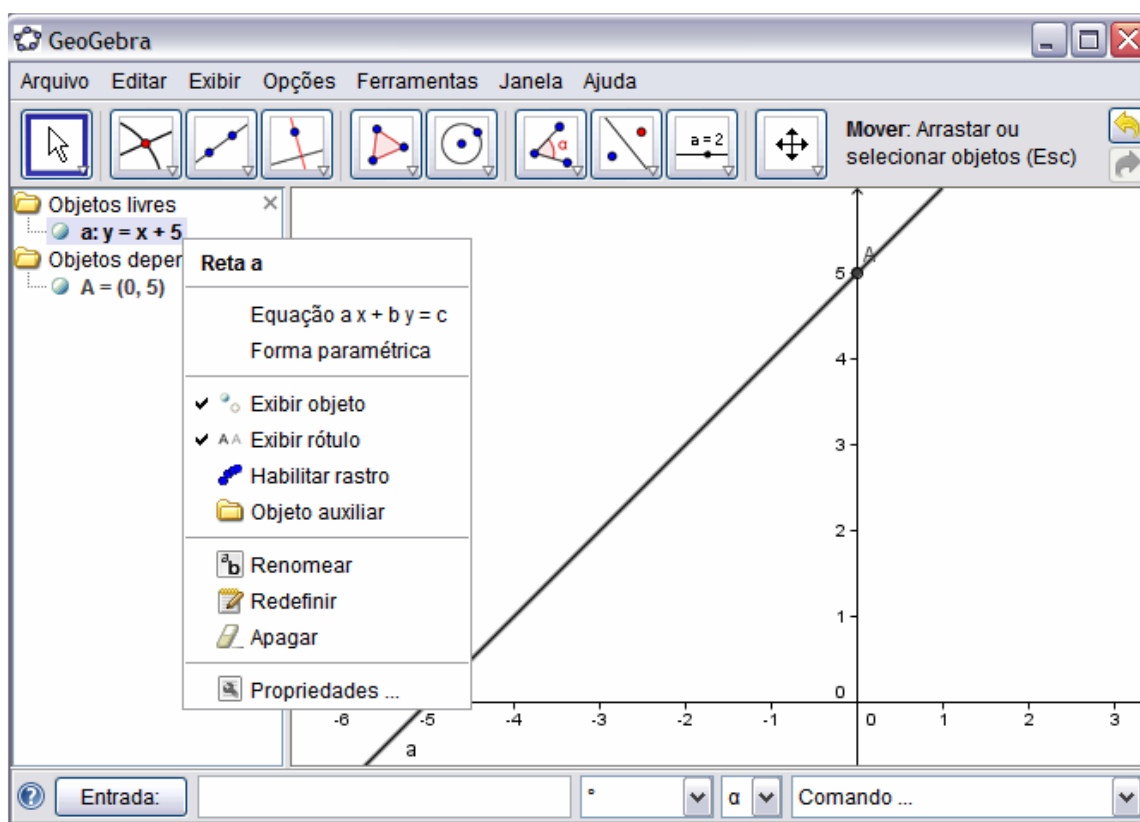
## APÊNDICE B – Software GeoGebra

### GeoGebra

O GeoGebra, software de Matemática gratuito que reúne recursos de geometria, álgebra e cálculo. O seu download pode ser feito em <http://www.geogebra.org/>.

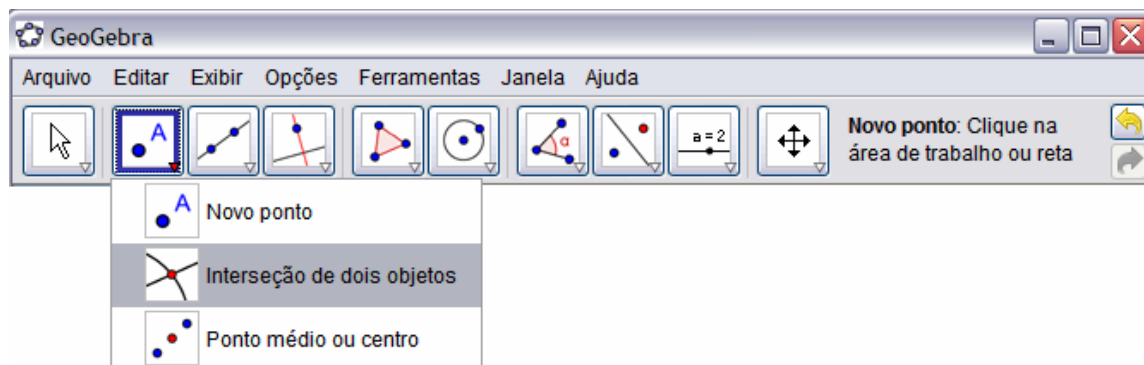
A seguir estão alguns comandos importantes para a realização da atividade que segue sobre polinômios de 1º, 2º e 3º graus.

- Entrada: no campo *entrada* você escreve a equação desejada;
- Janela de Álgebra e Janela de Geometria: tudo o que é escrito na entrada aparece na janela de álgebra (à esquerda) e aparece como objeto na janela de geometria (à direita);
- Configurações de objetos: Clicando com o botão direito do mouse sobre um objeto da janela de álgebra são abertas opções de configuração, dentre elas:
  - Exibir objeto: em vez de apagar os gráficos desenhados você pode utilizar essa opção para apenas ocultá-los;
  - Propriedades: permite, por exemplo, alterar a cor e a espessura do objeto.



**Escreva as equações aqui!**

- Para utilizar a ferramenta de *interseção entre dois objetos*, basta seguir os passos ilustrados abaixo:



- Para utilizar a ferramenta *Deslocar eixos*, basta seguir os passos ilustrados abaixo. Essa ferramenta possui as seguintes opções:
  - Arrastar a área de trabalho (nos sentidos vertical e horizontal) para uma melhor visualização dos gráficos desenhados;
  - Alterar as escalas dos eixos. Para tanto, clique com o botão esquerdo do mouse sobre o eixo o qual pretende alterar a escala e arraste esse eixo no sentido vertical (no caso do eixo das ordenadas) ou horizontal (no caso do eixo das abscissas).

