

# Ajuste geostrófico e transientes num modelo de águas rasas com acoplamento oceano-atmosfera

**Julio R. Claeysen**

Instituto de Matemática-Promec, UFRGS  
90.001-970, Porto Alegre,RS  
E-mail: julio@mat.ufrgs.br

**Sandra E.Vielmo**

Departamento de Matemática, UFSM  
97.105-900, Santa Maria,RS  
E-mail: sandravielmo@smail.ufsm.br

## Resumo

Este trabalho visa o uso de uma resposta fundamental de valor inicial no ajuste geostrófico descrito pelas equações de águas rasas para um modelo acoplado oceano-atmosfera. Este ajuste é considerado através de perturbações na pressão e efeitos da rotação, onde a conservação da vorticidade potencial permite escolher a elevação correspondente a um estado de equilíbrio geostrófico. O sistema de equações de águas rasas é aproximado linearmente e desacoplado em equações de Klein-Gordon com valores iniciais e termos não-homogêneos acoplados. A resposta dinâmica formada pela resposta transiente e a resposta forçada é obtida para uma perturbação inicial da elevação. Simulações simbólicas foram realizadas na resolução de uma equação de Klein-Gordon associada ao ajuste geostrófico unidimensional.

## 1 Introdução

Vários aspectos da atmosfera e do oceano podem ser apreciados em termos de efeitos forçantes, os quais tendem a perturbar o sistema, e a força da gravidade, que pode ser vista como uma força restauradora do estado de equilíbrio. É bastante conhecido que perturbações de escala sinótica na atmosfera e oceano satisfazem, aproximadamente, as condições de balanço geostrófico entre os gradientes da pressão e a aceleração de Coriolis. Isto corresponde ao ajuste de um fluido ho-

mogêneo de profundidade constante que inicialmente possui um deslocamento inicial pequeno de sua superfície livre. Os efeitos da rotação foram considerados inicialmente por Rossby [10] para esclarecer os mecanismos pelos quais as distribuições de pressão e de velocidade na atmosfera e no oceano tendem para um ajuste geostrófico mútuo e posteriormente por Cahn [2] e Gill [7].

Neste trabalho serão caracterizados os transientes induzidos por uma perturbação da pressão em torno do estado geostrófico. Para tanto, será explorado o uso da resposta impulso ou função de Green de valor inicial, Claeysen et al [3], Polyanin [9], das equações de Klein-Gordon não-homogêneas que são derivadas das equações de águas rasas e do princípio da conservação da vorticidade potencial. Além disso, é analisada a decomposição de respostas forçadas, as quais são definidas através da integral de convolução da solução fundamental com o termo forçante.

Um primeiro passo para uma abordagem não-linear foi dado por Obukhov [8]. Uma correção não-linear de baixa ordem foi discutida em Dewar et al[5]. Recentemente, Zeitlin et al [11] apresentaram um estudo do processo de ajuste geostrófico não-linear para o caso de um domínio infinito bidimensional. Posteriormente, Zeitlin et al [12] e Bouchut et al [1] continuaram o ajuste não-linear no contexto das equações primitivas continuamente estratificadas. Estes problemas serão futuramente abordados com o uso das técnicas introduzidas em termos da resposta impulso.

## 2 Perturbações na Pressão do Fluido e Efeitos da Rotação

As equações que descrevem o movimento de um fluido na sua forma linearizada, quando consideradas a aproximação hidrostática para a pressão do fluido e os efeitos de rotação, são descritas pelo sistema de equações de águas rasas linearizadas, Gill [7]

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = -g \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \quad (3)$$

com as condições iniciais  $u(0, x, y) = u_o(x, y)$ ,  $v(0, x, y) = v_o(x, y)$  e  $\eta(0, x, y) = \eta_o(x, y)$ , onde  $u(t, x, y)$ ,  $v(t, x, y)$  são as componentes da velocidade,  $\eta(t, x, y)$  a elevação da superfície livre,  $h$  é a profundidade (considerada constante),  $f$  a aceleração de Coriolis e  $g$  a aceleração da gravidade.

A equação (3) pode ser escrita como

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\eta}{h} \right) + \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \quad (4)$$

Agora, considerando a componente vertical da vorticidade relativa

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (5)$$

e tomando a divergência das equações de momento, obtém-se a equação

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c^2 \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) + fh\zeta = 0, \quad (6)$$

onde  $c = \sqrt{gh}$  é a velocidade de onda de águas rasas, as quais são não-dispersivas.

A partir das equações (1), (2) e (4) pode-se derivar a equação de conservação da vorticidade potencial. Inicialmente, elimina-se a variável  $\eta$ , calculando o rotacional e obtém-se a equação para a componente vertical da vorticidade

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\zeta}{f} \right) + \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \quad (7)$$

Subtraindo a equação da continuidade (4) de (7), resulta

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\zeta}{f} - \frac{\eta}{h} \right) = 0. \quad (8)$$

Esta equação expressa a conservação temporal da vorticidade potencial linearizada

$$Q = hf \left( \frac{\zeta}{f} - \frac{\eta}{h} \right). \quad (9)$$

De (9) e do fato que a vorticidade potencial é preservada, segue

$$fh\zeta(t, x, y) = fh^2Q(0, x, y) + f^2\eta(t, x, y).$$

Substituindo em (6), obtém-se que a elevação subsequente a um estado inicial  $\eta(0, x) = \eta_o(x)$ ,  $\eta_t(0, x) = \eta_1(x)$  pode, em princípio, ser determinado resolvendo a equação de Klein-Gordon bidimensional não-homogênea

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c^2 \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) + f^2\eta = -fh^2Q(0, x, y) \quad (10)$$

em termos de um valor inicial para a vorticidade. Como o termo  $Q(0, x, y)$  depende das condições iniciais para a velocidade e elevação da superfície livre, tem-se que

$$-fh^2Q(0, x, y) = -fh \left( \frac{\partial v_o}{\partial x} - \frac{\partial u_o}{\partial y} \right) + f^2\eta_o. \quad (11)$$

Portanto, a equação (10) se reduz a

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c^2 \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) + f^2\eta = F(t, x, y), \quad (12)$$

$$F(t, x, y) = f^2\eta_o - fh \left( \frac{\partial v_o}{\partial x} - \frac{\partial u_o}{\partial y} \right)$$

sujeita as condições iniciais

$$\begin{aligned} \eta(0, x, y) &= \eta_o(x, y), \\ \eta_t(0, x, y) &= -h(u_x(0, x, y) + v_y(0, x, y)) \end{aligned} \quad (13)$$

Escrevendo o sistema (1)-(3) na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} & -f & g \frac{\partial}{\partial x} \\ f & \frac{\partial}{\partial t} & g \frac{\partial}{\partial y} \\ h \frac{\partial}{\partial x} & h \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e desacoplando-o, tem-se que  $u$  e  $v$  satisfazem

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f^2 u \right] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + f^2 v \right] = 0.$$

Assim, utilizando (1)-(3) em  $t = 0$ , vem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f^2 u = U(x, y) \quad (14)$$

$$U(x, y) = \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f^2 u \right]_{t=0}$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} \left( c^2 \left( \frac{\partial v_o}{\partial x} - \frac{\partial u_o}{\partial y} \right) - fg\eta_o \right)$$

sujeita as condições iniciais

$$\begin{aligned} u(0, x, y) &= u_o(x, y), \\ u_t(0, x, y) &= fv(0, x, y) - g\eta_x(0, x, y). \end{aligned} \quad (15)$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + f^2 v &= V(x, y) \\ V(x, y) &= -\frac{\partial}{\partial x} \left( c^2 \left( \frac{\partial v_o}{\partial x} - \frac{\partial u_o}{\partial y} \right) - fg\eta_o \right) \end{aligned} \quad (16)$$

sujeita as condições iniciais

$$\begin{aligned} v(0, x, y) &= v_o(x, y), \\ v_t(0, x, y) &= -fu(0, x, y) - g\eta_y(0, x, y). \end{aligned} \quad (17)$$

Observa-se que  $u$ ,  $v$  e  $\eta$  satisfazem uma equação de Klein-Gordon não-homogênea, porém, as condições iniciais bem como os termos não-homogêneos estão acoplados.

### 3 Resposta Estacionária Geostrófica

A obtenção de uma solução estacionária  $(u, v, \eta)$  do sistema (1) e (2), requer um balanço entre a aceleração de coriolis e o gradiente de pressão, conhecido como *balanço geostrófico*, isto é,

$$fu = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad \text{e} \quad fv = g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (18)$$

e a validade da relação não-divergente para conservação da massa

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (19)$$

A substituição de (18) em (5) mostra que a vorticidade, num balanço geostrófico, será dada por

$$\zeta = \frac{g}{f} \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right). \quad (20)$$

De (8), obtém-se

$$\zeta = \left( \frac{\partial v_o}{\partial x} - \frac{\partial u_o}{\partial y} \right) + \frac{f}{h} (\eta - \eta_o). \quad (21)$$

Igualando (20) e (21), a elevação  $\eta$  correspondente ao estado geostrófico satisfaz

$$-c^2 \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) + f^2 \eta = f^2 \eta_o - fh \left( \frac{\partial v_o}{\partial x} - \frac{\partial u_o}{\partial y} \right)$$

que é a versão estacionária de (12). Introduzindo o *raio de deformação de Rossby*  $a =$

$\frac{c}{|f|}$ , obtém-se a forma alternativa para a elevação  $\eta$  correspondente ao estado geostrófico

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} - \frac{1}{a^2} \eta = -\frac{1}{a^2} \eta_o + \frac{f}{g} \left( \frac{\partial v_o}{\partial x} - \frac{\partial u_o}{\partial y} \right). \quad (22)$$

### 4 Resposta Dinâmica da Equação de Klein-Gordon

A solução da equação de Klein-Gordon não-homogênea (12) para a elevação  $\eta$ , pode ser obtida em termos de uma solução fundamental com o uso da transformada de Fourier. Devido as simulações, a seguir será considerado somente o caso unidimensional. Tem-se

$$\hat{\eta}(t, \omega) = \sqrt{(2\pi)} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\omega} \eta(t, x) dx.$$

A equação operacional é dada por

$$\frac{\partial^2 \hat{\eta}}{\partial t^2}(t, \omega) + \beta^2(\omega) \hat{\eta}(t, \omega) = \hat{F}(t, \omega) \quad (23)$$

onde  $\beta^2(\omega) = c^2\omega^2 + f^2$  e  $\hat{F}(t, \omega)$  é a transformada de Fourier do termo forçante  $F(t, x)$ . Aplicando-se a transformada de Fourier nas condições iniciais  $\eta(0, x) = \eta_o(x)$  e  $\eta_t(0, x) = \eta_1(x)$ , decorre que

$$\hat{\eta}(0, \omega) = \hat{\eta}_0(\omega), \quad \hat{\eta}_t(0, \omega) = \hat{\eta}_1(\omega). \quad (24)$$

A solução do problema de valor inicial (23) e (24), pode ser expressa de maneira conveniente em termos de uma base fundamental, Claeysen et al [4], como

$$\hat{\eta}(t, \omega) = \frac{d\hat{h}}{dt}(t, \omega) \hat{\eta}_0(\omega) + \hat{h}(t, \omega) \hat{\eta}_1(\omega) + \hat{h}^* \hat{F} \quad (25)$$

onde  $\hat{h}(t, \omega) = \frac{\sin(\beta(\omega)t)}{\beta(\omega)}$  é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{d^2 \hat{h}}{dt^2}(t, \omega) + \beta^2(\omega) \hat{h}(t, \omega) = 0$$

$$\hat{h}(0, \omega) = 0, \quad \frac{d\hat{h}}{dt}(0, \omega) = 1, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

e

$$\hat{h}^* \hat{F} = \int_0^t \hat{h}(t - \tau, \omega) \hat{F}(\tau, \omega) d\tau,$$

o termo de convolução no domínio da frequência. Aplicando-se em (25), a transformada inversa de Fourier, obtém-se a resposta dinâmica  $\eta$  devido a uma força externa

e condições iniciais:

$$\begin{aligned}\eta(t, x) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial h}{\partial t}(t, x - \xi) \eta_0(\xi) d\xi \\ &+ \int_{\mathbb{R}} h(t, x - \xi) \eta_1(\xi) d\xi \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} h(t - \tau, x - \xi) F(\tau, \xi) d\xi d\tau,\end{aligned}\quad (26)$$

onde  $h(t, x)$  é a *resposta impulso, solução fundamental ou dinâmica* ou, ainda, *função de Green temporal ou no domínio tempo* e satisfaz o problema de valor inicial

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(t, x) - c^2 \Delta h(t, x) + f^2 h(t, x) &= 0, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ h(0, x) = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial t}(0, x) &= \delta(x),\end{aligned}\quad (27)$$

onde  $\delta(x)$  é a função Delta de Dirac. A resposta para (27) é

$$h(t, x) = \frac{\mathcal{H}(ct - |x|)}{2c} J_0 \left( \frac{f}{c} \sqrt{c^2 t^2 - x^2} \right), \quad (28)$$

onde  $\mathcal{H}(z)$  é a função de Heaviside e  $J_0(z)$  é uma função de Bessel do primeiro tipo. Ver Polyanin [9] entre outros.

#### 4.1 Transientes na Resposta Forçada

A terceira parcela de (26) com condições iniciais nulas é chamada *resposta forçada*  $\eta_F(t, x)$  do sistema e é dada pelo termo de convolução temporal distribuído espacialmente

$$\eta_F(t, x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} h(t - \tau, x - \xi) F(\tau, \xi) d\xi d\tau. \quad (29)$$

Para forçantes do tipo

$$F(t, x) = e^{\lambda t} r(x)$$

é possível simplificar os cálculos envolvidos na resposta forçada. Pois, uma solução particular não-homogênea ou permanente  $\eta_p(t, x)$  do mesmo tipo

$$\eta_p(t, x) = e^{\lambda t} \vartheta(x)$$

requer a resolução da equação de Helmholtz não-homogênea

$$\vartheta''(x) + \gamma \vartheta(x) = -r(x)/c^2, \quad (30)$$

onde  $\gamma = -(f^2 + \lambda^2)/c^2$ . Para esse tipo de entrada, a resposta forçada será da forma

$$\eta_F(t, x) = e^{\lambda t} \vartheta(x) + \eta_{hp}(t, x)$$

onde  $\eta_{hp}(t, x)$  satisfaz a equação homogênea

$$\frac{\partial^2 \eta_{hp}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \eta_{hp} + f^2 \eta_{hp} = 0,$$

sujeita a valores iniciais

$$\eta_{hp}(0, x) = -\eta_p(0, x), \quad \frac{\partial \eta_{hp}}{\partial t}(0, \mathbf{x}) = -\frac{\partial \eta_p}{\partial t}(0, \mathbf{x}),$$

obtidos a partir do fato que a resposta forçada possui condições iniciais nulas. Assim,

$$\begin{aligned}\eta_F(t, \mathbf{x}) &= \eta_p(t, x) - \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial h}{\partial t}(t, x - \xi) \eta_p(0, \xi) d\xi \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}} h(t, x - \xi) \frac{\partial \eta_p}{\partial t}(0, \xi) d\xi\end{aligned}\quad (31)$$

Uma solução particular para  $\vartheta(x)$  é dada pela convolução

$$\vartheta(x) = \frac{1}{c^2} \int_0^x h(\xi - x) r(\xi) d\xi, \quad (32)$$

onde

$$h(x - \xi) = \frac{\sin(\gamma(x - \xi))}{\gamma} \quad (33)$$

denota a solução fundamental da equação.

Em geral, para as condições iniciais  $\eta(0, x) = \eta_0(x)$  e  $\frac{\partial \eta}{\partial t}(0, x) = \eta_1(x)$  e forçante  $F(t, x) = e^{\lambda t} r(x)$  em um domínio infinito, a resposta dinâmica da equação (12) possui um transiente devido as condições iniciais do sistema e um transiente induzido pelas condições iniciais da resposta permanente. Assim,

$$\eta(t, x) = \eta_h(t, x) + \eta_F(t, x)$$

onde

$$\eta_h(t, x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial h}{\partial t}(t, x - \xi) \eta_0(\xi) d\xi + \int_{\mathbb{R}} h(t, x - \xi) \eta_1(\xi) d\xi$$

e  $\eta_F(t, x)$  é a resposta forçada dada (31).

## 5 Ajuste Geostrófico

Uma explicação do processo de ajuste geostrófico com rotação foi conduzida no trabalho de Rossby [10], e posteriormente, Cahn [2], Gill [6], entre outros. Para tanto, supõe-se que somente uma das variáveis possui valor inicial não nulo e que o estado inicial independe de  $y$ . Então, podemos assumir que a solução em tempos subsequentes também independe de  $y$ , e

a partir das equações (1)-(3), tem-se o sistema unidimensional

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - fv &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + fu &= 0, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Neste trabalho são considerados os valores iniciais utilizados por Gill [6],  $\eta(0, x) = \eta_o(x) = \text{sgn}(x)$ ,  $u(0, x) = u_o(x) = 0$  e  $v(0, x) = v_o(x) = 0$ . Das equações (34), consideram-se os valores iniciais para as derivadas,  $\eta_t(0, x) = 0$ ,  $u_t(0, x) = -g\eta_x(0, x) = -2g\delta(x)$  e  $v_t(0, x) = 0$ . Nestas condições, o estado de equilíbrio ( $u_g, v_g, \eta_g$ ), correspondente ao estado geostrófico, pode ser determinado a partir de uma solução particular de (22), isto é,

$$\frac{d^2 \eta_g}{dx^2} - \frac{1}{a^2} \eta_g = -\frac{1}{a^2} \text{sgn}(x) \quad (35)$$

e das equações (18),

$$u_g = 0, \quad v_g = \frac{g}{f} \frac{\partial \eta_g}{\partial x}.$$

Para determinar a elevação e as velocidades nos tempos subsequentes, considere-se o problema evolutivo representado pelas equações de Klein-Gordon forçadas e as respectivas condições iniciais, equações (12)-(17) para o caso unidimensional

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} + f^2 u &= 0 \quad (36) \\ u(0, x) &= 0, \\ u_t(0, x) &= -g\eta'_o(x) = -2g\delta(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{tt} - c^2 v_{xx} + f^2 v &= -fg\eta'_o(x) = 2fg\delta(x) \quad (37) \\ v(0, x) &= 0, \\ v_t(0, x) &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_{tt} - c^2 \eta_{xx} + f^2 \eta &= f^2 \eta_o(x) = f^2 \text{sgn}(x) \quad (38) \\ \eta(0, x) &= \text{sgn}(x), \\ \eta_t(0, x) &= 0 \end{aligned}$$

Observa-se que a solução para a velocidade  $v$  vem a ser a resposta forçada da equação de Klein-Gordon com  $F(t, x) = 2fg\delta(x)$ , cuja solução é dada pela equação (29) e utilizando

(28) para a função  $h(t, x)$ , segue

$$\begin{aligned} v(t, x) &= \frac{gf}{c} \begin{cases} \int_0^t J_0 \left( \frac{f}{c} \sqrt{c^2 \tau^2 - x^2} \right) d\tau, & |x| \leq ct \\ 0, & |x| > ct \end{cases} \quad (39) \\ &= \frac{gf}{c} \mathcal{H}(ct - |x|) \int_0^t J_0 \left( \frac{f}{c} \sqrt{c^2 \tau^2 - x^2} \right) d\tau, \end{aligned}$$

ou, após uma mudança de variável, resulta em

$$v(t, x) = \begin{cases} \int_0^{\frac{f}{c} \sqrt{c^2 t^2 - x^2}} g(c^2 r^2 + f^2 x^2)^{-\frac{1}{2}} J_0(r) r dr, & |x| \leq ct \\ 0, & |x| > ct \end{cases} \quad (40)$$

Agora, comparando o sistema (36) com (27), observa-se que a solução para a velocidade  $u$  será um múltiplo da resposta impulso da equação de Klein-Gordon, ou seja

$$\begin{aligned} u(t, x) &= -2gh(t, x) \\ &= -\frac{g}{c} \begin{cases} J_0 \left( \frac{f}{c} \sqrt{c^2 t^2 - x^2} \right), & |x| \leq ct \\ 0, & |x| > ct \end{cases} \quad (41) \end{aligned}$$

A solução do problema de valor inicial (38) é representada pela fórmula de variação de parâmetros (26). A contribuição da parte forçada pode ser decomposta segundo (31), onde devido ao tipo de forçante, a solução particular  $\eta_p(t, x)$  pode ser escolhida independente do tempo. Assim, a partir de (26) tem-se

$$\eta(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial h}{\partial t}(t, x - \xi) [\eta_o(\xi) - \eta_p(\xi)] d\xi + \eta_p(x) \quad (42)$$

onde  $h(t, x)$  é dada por (28).

Uma solução particular não-homogênea ou permanente, apresentada em Gill [6], é dada por

$$\begin{aligned} \eta_g(x) &= \text{sgn}(x)(1 - e^{-|x|/a}) \\ &= \begin{cases} 1 - e^{-x/a} & : x \geq 0 \\ -1 + e^{x/a} & : x < 0 \end{cases} \quad (43) \end{aligned}$$

e o campo de velocidade geostrófico associado com essa solução é

$$u_g = 0, \quad v_g = \frac{g}{fa} e^{-|x|/a}. \quad (44)$$

## 6 Simulações Simbólicas

Considerando  $a = f = g = 1$  nas equações (43) e (44), a Figura 1 mostra os gráficos de  $v_g$  e  $\eta_g$ , soluções para o estado geostrófico.

A partir de (39) ou (40), a velocidade  $v$  é mostrada na Figura 2, para os perfis em  $t=2$ ,  $t=4$ ,  $t=6$  e  $t=8$ .

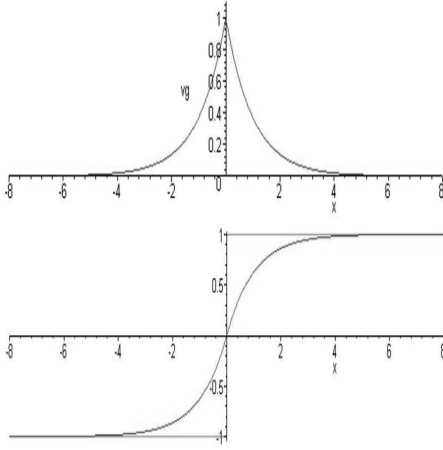


Figura 1: Soluções geostóficas  $v_g$  e  $\eta_g$  e condição inicial  $\eta_o$ .

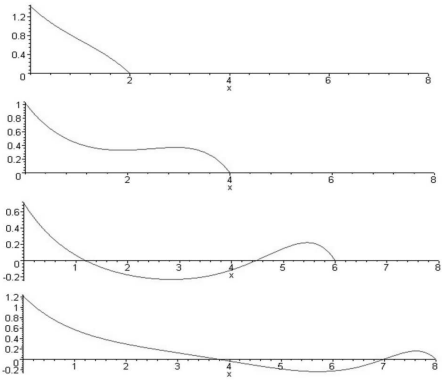


Figura 2: Perfis da velocidade  $v$ .

E, a partir de (41), alguns perfis da velocidade  $u$  para  $t=2$ ,  $t=4$ ,  $t=6$  e  $t=8$ , são mostrados na Figura 3.

A Figura 4 mostra a propagação das velocidades  $u$  e  $v$  ao longo do tempo, quando os efeitos da rotação são considerados.

A elevação  $\eta$  é dada em (42) ou, pela conservação da vorticidade potencial (21) e pela solução de  $v$  em (39), tem-se Gill [6]

$$\begin{aligned} \eta(t, x) &= \frac{\partial v}{\partial x} + \eta_o(x) \\ &= \begin{cases} x \int_0^{\sqrt{t^2-x^2}} \frac{J_1(r)}{\sqrt{x^2+r^2}} dr, & |x| < t \\ \text{sgn}(x), & |x| > t \end{cases} \end{aligned} \quad (45)$$

A elevação da superfície livre  $\eta$  dada por (45) é visualizada na Figura 5 para  $t=2$ ,  $t=4$ ,  $t=6$  e  $t=8$ .

A decomposição da resposta dinâmica na equação de Klein-Gordon em termos uma solução homogênea total (homogênea dos valores iniciais  $\eta_h$  mais a homogênea induzida pela

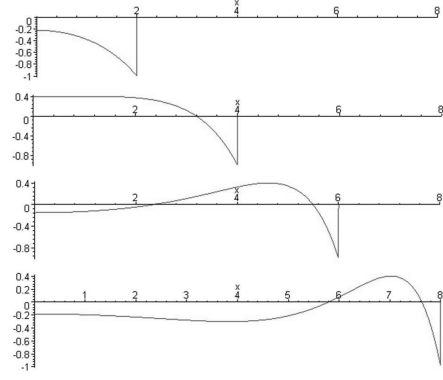


Figura 3: Perfis da velocidade  $u$ .

permanente  $\eta_{hp}$ ) e de uma solução permanente  $\eta_p$  (geostrófica) é mostrada na Figura 6.

## 7 Conclusões

O uso da resposta impulso ou resposta fundamental de valor inicial foi utilizado no ajuste geostrófico descrito pelo sistema de equações de águas rasas linearizadas. Este sistema foi desacoplado em equações de Klein-Gordon que com valores iniciais e termos não-homogêneos acoplados. A resposta dinâmica formada pela resposta transiente devida aos valores iniciais e os transientes introduzidos pela resposta forçada foram obtidos para uma perturbação inicial da elevação. Simulações simbólicas foram realizadas na resolução de uma equação de Klein-Gordon associada ao ajuste geostrófico, identificando-se os transientes introduzidos pela resposta permanente. É observado que a propagação das velocidades  $u$  e  $v$  e da elevação  $\eta$  com o passar do tempo, tendem a sua respectiva solução permanente, que no caso foi tomada como sendo a solução geostrófica.

## Referências

- [1] BOUCHUT, F., SOMMER, J. L., AND ZEITLIN, V. Frontal geostrophic adjustment, slow manifold and nonlinear wave phenomena in one-dimensional rotating shallow water. part 2. high-resolution numerical simulations. *J. Fluid Mech.* 514 (2004), 35–63.

- [2] CAHN, A. An investigation of the free oscillations of a simple current system. *J. Meteorol.* 2, 2 (1945), 113–119.
- [3] CLAEYSSSEN, J., FERREIRA, I. M., AND COPETTI, R. D. Decomposition of forced responses in vibrating systems. *Appl. Numer. Math.* (2003).
- [4] CLAEYSSSEN, J., GALLICCHIO, E., AND TAMAGNA, A. *Sistemas Vibratórios Amortecidos*. Editora da UFRGS, Porto Alegre, 2004.
- [5] DEWAR, W. K., AND KILLWORTH, P. D. Do fast gravity waves interact with geostrophic motions? *Deep-Sea Res.* 42, I (1995), 1063–1081.
- [6] GILL, A. E. Adjustment under gravity in a rotating channel. *J. Fluid Mech.* 77, 3 (1976), 603–621.
- [7] GILL, A. E. *Atmosphere-Ocean Dynamics*. Academic Press, New York, 1982.
- [8] OBUKHOV, A. M. On the problem of geostrophic wind. *Izv. Geogr. Geophys.* 13 (1949), 281–306.
- [9] POLYANIN, A. D. *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists*. Chapman and Hall, New York, 2002.
- [10] ROSSBY, C. G. On the mutual adjustment of pressure and velocity distributions in certain simple current systems. *J. Mar. Res.* 2 (1938), 239–263.
- [11] ZEITLIN, V., MEDVEDEV, S. B., AND PLOUGONVEN, R. Frontal geostrophic adjustment, slow manifold and nonlinear wave phenomena in one-dimensional rotating shallow water. part 1. theory. *J. Fluid Mech.* 481 (2003), 269–290.
- [12] ZEITLIN, V., REZNIK, G. M., AND JELLOUL, M. B. Nonlinear theory of geostrophic adjustment. part 2. two-layer and continuously stratified primitive equations. *J. Fluid Mech.* 491 (2003), 207–228.

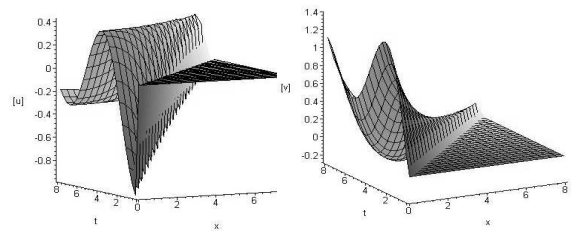


Figura 4: Propagação de  $u$  e  $v$ .

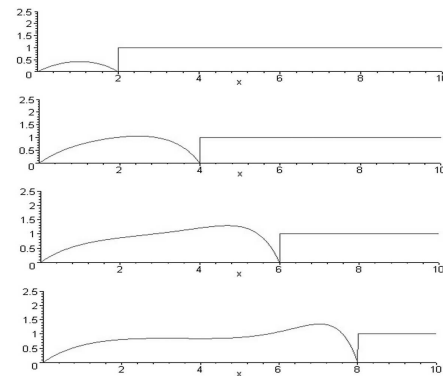
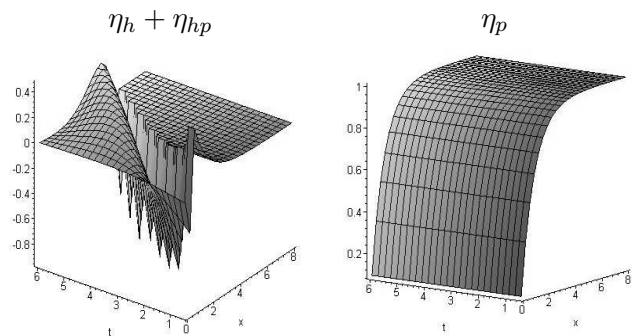


Figura 5: Perfis da elevação  $\eta$ .



$$\eta = \eta_p + \eta_h + \eta_{hp}$$

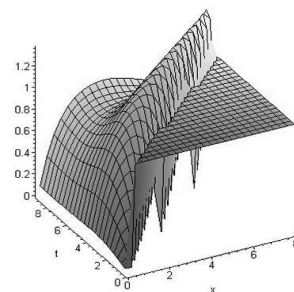


Figura 6: Decomposição de  $\eta$ .