

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Neutrino-Magnetohidrodinâmica, Oscilações de Neutrinos e Instabilidades em Plasmas [†]

Kellen Alves Pascoal

Tese realizada sob a orientação do Prof. Dr. Fernando Haas apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento dos requisitos para a obtenção do grau de Doutor em Ciências.

Porto Alegre, Maio de 2018.

[†]Trabalho realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)

Agradecimentos

- Agradeço, aqueles que foram e são fundamentais na minha caminhada, meus pais. Estiveram sempre ao meu lado, me apoiando e dando forças para continuar a lutar por meus sonhos e objetivos e sempre acreditarem na importância do estudo, me mostrando os verdadeiros valores da vida;
- Agradeço, em especial, ao meu orientador, Fernando Haas, pela valiosa orientação, dedicação, paciência que foi fundamental para que este trabalho se tornasse realidade, pelo apoio e incentivo e por estar sempre pronto a sanar minhas dúvidas. Lhe agradeço por ter confiado em mim;
- A todos, familiares e amigos que, diretamente ou indiretamente, contribuíram positivamente para a minha maneira de pensar, em especial, meus avós;
- Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq, pelo auxílio financeiro durante este período.

Resumo

Foi feita uma modificação da teoria magnetohidrodinâmica, incorporando a dinâmica dos neutrinos, chamada magnetohidrodinâmica de neutrinos. Elétrons e íons foram tomados como não-relativísticos, juntamente com os neutrinos eletrônicos (ultra) relativísticos acoplados via força eletro-frac. Devido à ressonância com um feixe de neutrinos, foi prevista a desestabilização das ondas magnetosônicas rápidas. Admitindo modos oblíquos, é possível detectar uma instabilidade que se torna mais forte quando o vetor de onda é paralelo ao campo magnético de equilíbrio, associando-se à onda magnetosônica lenta. Assumindo perturbações eletrostáticas em um plasma magnetizado composto por elétrons em um fundo iônico neutro, acoplado a neutrinos eletrônicos, foi considerado o papel desestabilizador dos feixes de neutrinos quanto aos modos de Trivelpiece-Gould. O campo magnético aumenta significativamente a taxa de crescimento linear, conforme calculado para os parâmetros de supernovas tipo II. Para o caso não magnetizado, a taxa de crescimento da instabilidade é encontrada para o vetor de onda paralelo ou perpendicular ao campo magnético substituindo-se a frequência de plasma pela frequência apropriada de Trivelpiece-Gould. Adicionalmente, considerou-se um modelo que combina as interações neutrino-plasma e as oscilações de sabores de neutrinos. Neste contexto, estudou-se o acoplamento entre ondas íon-acústicas e oscilações de sabores de neutrinos, obtendo-se uma nova instabilidade. Mostrou-se que a taxa de crescimento desta instabilidade não é modificada pela inclusão de efeitos colisionais.

Abstract

A modification of the magnetohydrodynamic theory was made incorporating the dynamics of neutrinos, called neutrino magnetohydrodynamics. Electrons and ions were taken as non-relativistic, along with (ultra) relativistic electron neutrinos coupled via electro-weak force. Due to the resonance with the neutrino beam the destabilization of the fast magnetosonic wave was predicted. Then, oblique modes were admitted, resulting in a detection of an instability, which becomes stronger when the wave vector is parallel to the equilibrium magnetic field, associating with the slow magnetosonic wave. For the simplest case, assuming electrostatic perturbations in a magnetized plasma composed of electrons on a neutral ionic background, coupled with electronic neutrinos, the destabilizing role of the neutrino beams in Trivelpiece-Gould modes was considered. The magnetic field significantly increases the linear growth rate, as calculated for type II supernova parameters. For the nonmagnetized case, the growth rate of instability is found for the wave vector parallel or perpendicular to the magnetic field, replacing the plasma frequency with the appropriate frequency of Trivelpiece-Gould. For oblique propagation the growth rate is also found. Subsequently, a model combining neutrino-plasma interactions and neutrino flavor oscillations was studied in the case of the coupling between the ion-acoustic waves and the oscillations of neutrino flavors. When included collision effects, the rate of growth of instability has shown that the coupling between the ion-acoustic waves and the oscillations of neutrino flavors in a completely ionized plasma remain the same.

“One, remember to look up at the stars and not down at your feet. Two, never give up work. Work gives you meaning and purpose and life is empty without it. Three, if you are lucky enough to find love, remember it is there and don’t throw it away.”

Stephen Hawking

Lista de Figuras

2.1	Ondas de Alfvén (conforme a Ref. [31]).	33
3.1	Geometria da instabilidade mostrada na Eq. (3.61), conforme apresentada em [30].	48
3.2	Taxa de crescimento devido à Eq. (3.60) como uma função da velocidade magnetosônica $V = \sqrt{V_S^2 + V_A^2}$. Parâmetros: $\theta = \pi/2$, $V_N = 1.77 \times 10^{-8}$ m/s, $k = 2\pi \times 10^{12}$ m ⁻¹ . Conforme apresentado em [30].	50
3.3	Taxa crescimento $\gamma = V_N c k / V$ como uma função do número de onda k e da velocidade magnetosônica $V = \sqrt{V_S^2 + V_A^2}$. Parâmetros: $\theta = \pi/2$, $V_N = 1.77 \times 10^{-8}$ m/s. Conforme apresentado em [30].	51
3.4	Vetor de onda e campo magnético ambiente. Conforme apresentado em [34].	52
3.5	Taxa de crescimento da onda magnetosônica rápida desestabilizada, para o conjunto de parâmetros descritos no texto. Conforme apresentado em [34].	55
3.6	Taxa de crescimento da onda magnetosônica lenta desestabilizada, para o conjunto de parâmetros descritos no texto. Conforme apresentado em [34].	56
4.1	Geometria do modo de Trivelpiece-Gould. Conforme apresentado em [35] .	64
4.2	Taxa de instabilidade decorrente da Eq. (4.32) para $\mathcal{E}_{\nu 0} = 10$ MeV, $v_T/c = 1/10$, $n_0 = 10^{34}$ m ⁻³ , $B_0 = 5 \times 10^7$ T, em função feixe da densidade do feixe de neutrinos $n_{\nu 0}$, para $\mathbf{k} \perp \boldsymbol{\omega}_c$. Conforme apresentado em [35]	68
4.3	Taxa de instabilidade para a Eq. (4.37) for $\mathcal{E}_{\nu 0} = 10$ MeV, $v_T/c = 1/10$, $n_0 = 10^{34}$ m ⁻³ , em função da densidade do feixe de neutrinos $n_{\nu 0}$, for $\mathbf{k} \parallel \boldsymbol{\omega}_c$. Conforme apresentado em [35]	69

4.4	Taxa de instabilidade para a Eq. (4.45) em função de θ , usando o modo ω_- , para $n_0 = 10^{34} \text{ m}^{-3}$, $n_{\nu 0} = 10^{35} \text{ m}^{-3}$, $B = 5 \times 10^7 \text{ T}$, $v_T = c/10$, $\mathcal{E}_{\nu 0} = 10 \text{ MeV}$. Conforme apresentado em [35]	73
4.5	Taxa de instabilidade para a Eq. (4.45) em função de θ , usando o modo ω_+ , para $n_0 = 10^{34} \text{ m}^{-3}$, $n_{\nu 0} = 10^{35} \text{ m}^{-3}$, $B = 5 \times 10^7 \text{ T}$, $v_T = c/10$, $\mathcal{E}_{\nu 0} = 10 \text{ MeV}$. Conforme apresentado em [35]	73
5.1	Linha continua: taxa de crescimento γ da Eq. (5.34) em função da população normalizada de neutrinos eletrônicos. Curva tracejada: a taxa de crescimento γ_ν sem levar em conta as oscilações de neutrinos. Linha horizontal ponto-tracejada: a taxa de crescimento γ_{osc} associada a oscilações de neutrinos, da Eq. (5.35). Parâmetros: $\mathcal{E}_0 = 10 \text{ MeV}$, $N_0 = 10^{41} \text{ m}^{-3}$, $n_0 = 10^{35} \text{ m}^{-3}$, $\kappa_B T_e = 100 \text{ keV}$. Conforme apresentado em [36].	85

Sumário

1	Introdução	5
1.1	Histórico e estado da arte	6
1.2	Metodologia	9
2	Elementos de oscilações de neutrino e física de plasmas	12
2.1	Física de oscilações de neutrinos	12
2.1.1	Oscilação no vácuo	14
2.1.2	Oscilação na matéria	22
2.1.3	Interação com a matéria	22
2.1.4	Ângulo de mistura efetivo	24
2.1.5	Auto-estado de massa efetiva	25
2.1.6	Massa efetiva	26
2.2	Elementos de física de plasma	26
2.2.1	Características do plasma	27
2.2.2	Teorias para descrição de plasmas	28
2.2.3	Teoria magnetohidrodinâmica	28
2.2.4	Ondas MHD	29
3	Magnetohidrodinâmica e neutrinos	36
3.1	Magnetohidrodinâmica na presença de feixes intensos de neutrinos.	37
3.2	Relação de dispersão simplificada	45
3.2.1	Ondas lineares e instabilidades	47
3.3	Relação de dispersão para geometrias gerais	50
3.3.1	Instabilidades	53
3.4	Considerações finais	57

4	Neutrinos e instabilidades eletrostáticas em plasmas magnetizados	59
4.1	Generalidades	59
4.2	Modelo físico	60
4.3	Ondas lineares	61
4.3.1	Propagação perpendicular ao campo magnético ambiente	65
4.3.2	Propagação paralela ao campo magnético ambiente	67
4.4	Caso geral	70
4.5	Considerações finais	72
5	Ondas íon-acústicas e oscilações de neutrinos.	74
5.1	Generalidades	75
5.2	Acoplamento entre as ondas íon-acústicas e oscilações de neutrinos	76
5.3	Ondas lineares	79
5.4	Instabilidades	82
5.5	Acoplamento entre as ondas íon-acústicas e oscilações de neutrinos in- cluindo efeitos colisionais	84
5.6	Ondas lineares	86
5.7	Considerações finais	88
	Conclusões	89
	Referências	91

Capítulo 1

Introdução

Neutrinos estão entre as partículas elementares mais fugidias. Fluxos intensos de neutrinos são emitidos do núcleo de estrelas como o Sol ou em eventos cataclísmicos no Universo, tais como explosões de supernovas ou erupções (*bursts*) de raios gama. Entretanto, mesmo os detectores mais sensíveis disponíveis são capazes de medir apenas uma diminuta fração destes neutrinos. Neutrinos têm sido investigados desde que foram sugeridos por Pauli durante os anos 30 do século XX, mas propriedades básicas, como a massa dos neutrinos de sabor eletrônico, foram apenas recentemente verificadas [1]. A explicação de problemas astrofísicos persistentes desde longa data tem sido conectada à dinâmica dos neutrinos. O déficit solar de neutrinos [2], explosões de supernovas do tipo II [3] e fontes astrofísicas de raios gama intensos [4] são alguns exemplos nesta linha.

Os neutrinos interagem com as outras partículas por meio da força nuclear fraca. Devido à intensidade extremamente pequena desta força, usualmente uma descrição de partícula única, linear e não auto-consistente, é utilizada para a propagação de neutrinos na matéria. Entretanto, em eventos astrofísicos super-explosivos, existem fluxos densos de neutrinos, com potências acima de 10^{47} J/s na neutrino-esfera, e intensidades de até 10^{34} W/cm² na faixa entre 100 e 300 km do centro da explosão, correspondendo a conversão de várias massas solares em neutrinos. Em supernovas do tipo II, ou em erupções de raios gama, estima-se que 99 % da energia total da explosão é transferida aos neutrinos. Nestas condições extremas, é necessário investigar o papel de fenômenos não lineares e/ou auto-consistentes envolvendo neutrinos. Isto demanda uma abordagem via física de plasmas. De acordo com o Modelo Padrão, as interações eletromagnética e fraca são unificadas,

apontando para uma fenomenologia equivalente para elétrons e neutrinos. O estudo dos processos não lineares coletivos em plasmas mediados por fluxos intensos de neutrinos, bem como a geração de campos magnéticos e sua interação com neutrinos, é um tópico contemporâneo iniciado por Bingham et al. em [5].

A modelagem hidrodinâmica de neutrinos aplicada a problemas astrofísicos não é completamente nova e tem sido considerada no passado [6]. Tipicamente nas abordagens anteriores, neutrinos aparecem por meio da absorção pela matéria, atuando como uma fonte na equação de transporte de energia para um fluido neutro. Os efeitos coletivos do plasma são portanto ignorados. Em particular, o papel do campo magnético ambiente geralmente não é levado em conta de forma sistemática (ver [7] para uma revisão). O tema demanda, portanto, uma linguagem unificada das comunidades da física de partículas e da física de plasmas. Um cenário intermediário que contenha os aspectos essenciais da teoria de neutrinos e aspectos coletivos de plasmas em uma descrição magnetohidrodinâmica (MHD) seria uma ferramenta para preencher a lacuna referida, estimulando avanços no campo.

Recentemente, foram propostos modelos de fluidos neutrino-plasma, em primeiro lugar num contexto puramente eletrostático [8] e, em seguida [9] permitindo campos magnéticos e oscilações de sabores de neutrinos [10].

1.1 Histórico e estado da arte

Já em 1957, Pontecorvo [11] notou que a existência de massas para neutrinos poderia representar a possibilidade de oscilações quânticas entre sabores de neutrinos. Mais exatamente, a propagação de auto-estados de sabor, como uma superposição coerente de auto-estados de massa, leva à conversão de um estado de sabor inicial em um estado com outro número quântico de sabor. Verificou-se que a probabilidade de transição de sabores oscila com uma frequência que depende das diferenças de massas.

Em anos recentes, avanços em técnicas experimentais para neutrinos têm sido espetaculares, proporcionando informação detalhada sobre processos na matéria estelar, assim como outras propriedades intrínsecas no vácuo. As oscilações de sabores de neutrinos têm sido documentadas via experimentos e observações [10].

Interações de neutrinos em plasmas densos mostram que uma parcela significativa da energia trocada entre feixes de neutrinos e ondas em plasmas pode ocorrer ao longo de grandes distâncias, sugerindo que este mecanismo possa ser decisivo para a formação de ondas de choque em supernovas do tipo II [12]. Este acoplamento resulta da existência de uma carga induzida [13–16], levando a instabilidades coletivas do tipo cinético, mediadas pelo amortecimento de Landau originado na distribuição de velocidades dos neutrinos [17]. Interações neutrino-plasma podem também levar a emissão de pares elétron-pósitron [18], e a criação de campos magnéticos quase-estáticos [19]. Por outro lado, a interação com a matéria pode alterar significativamente as oscilações de sabores de neutrinos, levando a um acoplamento ressonante entre os auto-estados de sabor [20–22], conhecido como efeito MSW (Mikheiev-Smirnov-Wolfenstein).

Instabilidades via interação neutrino-plasma e oscilações de sabores de neutrinos usualmente são consideradas separadamente. Recentemente, Mendonça e Haas [23] propuseram uma descrição unificadora, ao analisar simultaneamente a influência das instabilidades em plasma e da turbulência em plasmas nas oscilações de sabores de neutrinos. Especificamente, a influência das oscilações de plasma (ondas) na evolução temporal do vetor de polarização dos auto-estados de sabor foi analisada com métodos semi-analíticos do tipo WKBJ (Wentzel-Kramers-Brillouin-Jeans). Desta maneira o papel dos harmônicos de ordem mais alta foi identificado. Foi demonstrado que variações lentas do plasma de fundo, com frequências muito menores do que a frequência de oscilação dos sabores de neutrinos, levam a um alargamento espectral do processo de oscilação dos sabores de neutrinos e a batimentos entre estas oscilações. Por outro lado, no caso de um espectro turbulento de alta frequência estendido no espaço de frequências, foi possível obter um modelo estocástico similar ao de Langevin. Equações para a evolução temporal assintótica do vetor de polarização de auto-estados de sabor foram derivadas. Como resultado da turbulência, surge um deslocamento de frequências.

Estes resultados indicam que as oscilações de plasma estão intimamente conectadas aos processos de coerência quântica presentes nas oscilações de sabores de neutrinos. A amplitude das oscilações de plasma pode ser, por outro lado, alterada por estas oscilações de sabores, o que demanda estudos mais aprofundados e para além de aproximações semi-analíticas.

A abordagem ortodoxa para a interação neutrino-plasma assume as propriedades do meio como dadas. A partir daí, se busca resolver de modo aproximado ou numérico as equações dinâmicas obedecidas pelas componentes do vetor de polarização. Nestes termos, a densidade eletrônica pode ser tomada como sendo periódica, exponencial ou mesmo como sendo uma variável estocástica com determinadas propriedades estatísticas. Em contrapartida, Haas e Mendonça demonstraram [24] a existência de soluções exatas para as oscilações de sabores, sob condições gerais amplas. Para este fim, a forma do vetor de polarização é fixada *ab initio* e então se determina a densidade eletrônica correspondente. Esta abordagem inversa é análoga à construção de soluções estacionárias do tipo BGK (Bernstein-Greene-Kruskal) em teoria cinética de plasmas, onde formas arbitrárias do potencial eletrostático são possíveis, desde que as populações de partículas aprisionadas (*trapped*) e não aprisionadas (*untrapped*) sejam adequadamente prescritas. No caso das oscilações de sabores de neutrino, entretanto, apenas o caso com dois sabores já foi trabalhado nesta nova perspectiva. A situação geral contendo três sabores é mais complexa analiticamente e não foi, ainda, devidamente explorada.

Finalmente, em um trabalho mais recente Mendonça, Haas e Bret [9] propuseram um passo adiante, ao admitir uma dinâmica própria para o plasma, sem inicialmente supor uma forma específica para a densidade eletrônica. Mais exatamente, foi proposto um modelo espaço-temporal hidrodinâmico, para os campos de densidade e corrente do fluido eletrônico, dos neutrinos do tipo eletrônico e dos neutrinos do tipo muônico. As equações correspondentes são acopladas por meio da constante de Fermi $G_F = 1.45 \times 10^{-62} \text{J.m}^3$ e termos correspondentes à força fraca. Considerando a propagação de um feixe de neutrinos intenso, foi obtida uma instabilidade cuja taxa de crescimento máxima é dada por

$$\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} \omega_p \left(\frac{N_{e0} n_0 G_F^2 c^2}{m E_0 v_0^4} \right)^{1/3}. \quad (1.1)$$

Aqui, γ é a parte imaginária da frequência do modo coletivo, sendo seu valor positivo associado a instabilidades lineares. Além disso, nesta última equação, $\omega_p = (n_0 e^2 / m \varepsilon_0)^{1/2}$ é a frequência de plasma, sendo N_{e0} a densidade de equilíbrio da população dos neutrinos eletrônicos, n_0 a densidade de equilíbrio da população de elétrons, c a velocidade da luz no vácuo, m a massa do elétron, E_0 a energia do feixe de neutrinos, v_0 a velocidade do feixe, e a carga elementar e ε_0 a constante de permissividade no vácuo. Para valores

típicos em colapsos de núcleos em supernovas [9], obtém-se $\gamma = 0.02$ ns, muito menor do que a escala temporal (~ 1 segundo) da explosão. Deste modo, a nova instabilidade é rápida o bastante para alterar a dinâmica de neutrinos nestes eventos. Finalmente, o escalonamento $\gamma \sim G_F^{2/3}$ confirma resultados prévios [17] obtidos por outros métodos.

No modelo exposto na Ref. [9], várias hipóteses simplificadoras foram assumidas. Apenas a corrente fraca carregada foi retida, sendo a corrente fraca neutra ignorada. É sabido que os neutrinos eletrônicos se acoplam via bósons carregados W^- aos elétrons, e que todos os sabores de neutrinos se acoplam pelo bóson neutro Z com elétrons. Para um plasma com prótons e elétrons em equilíbrio, este acoplamento fraco não produz nenhuma contribuição líquida para a interação neutrino-plasma. Em contraste, na presença de uma perturbação, isto leva a correções de ordem mais alta na constante de Fermi G_F .

Além disso, o foco no trabalho [9] foi nas oscilações eletrônicas do plasma (ondas de Langmuir), com um fundo iônico assumido imóvel. Alternativamente, ondas eletrostáticas de baixa frequência, ou modos íon-acústicos, poderiam ter sido considerados, com frequências da ordem da frequência de oscilação dos sabores de neutrinos. O acoplamento entre estas dinâmicas pode levar a resultados de impacto ainda maior.

Principalmente, os trabalhos [9,23,24] têm um alcance restrito no sentido de não serem incluídos: (a) campos magnéticos (externos ou gerados de modo auto-consistente); (b) efeitos relativísticos; (c) todos os três sabores de neutrinos. Com relação a este último tópico, a simplificação permite um certo número de resultados analíticos não triviais [23]. Entretanto, uma abordagem mais realista deve incorporar estes efeitos. Isto aponta para a necessidade de simulações numéricas mais pesadas. Outros efeitos, não considerados neste trabalho, poderiam incluir o papel de fenômenos quânticos ondulatórios representados pela difração criada pelo potencial de Bohm [25]. Esta possibilidade foi explorada em [26,27], mas sem levar em conta oscilações de sabores e assumindo o acoplamento apenas com o sabor eletrônico dos neutrinos.

1.2 Metodologia

Tendo em vista o estado da arte do assunto, foi feita uma investigação dos modelos já propostos e a incorporação dos efeitos negligenciados na descrição da interação neutrino-

plasma, a magnetização e as oscilações de sabores de neutrinos. Os trabalhos no assunto demandam aproximações analíticas e uso de computação algébrica.

Realizamos a extensão da teoria magnetohidrodinâmica não relativística exposta em [28, 29], agora incorporando a dinâmica dos neutrinos. Os neutrinos desempenham um papel importante em novos fenômenos, possibilitando o estudo das taxas de instabilidade, buscando a explicação de eventos astrofísicos cataclísmicos, os quais via de regra envolvem campos magnéticos. Tais instabilidades desempenham um papel central no plasma fortemente magnetizado como ocorre em supernovas [30].

Inicialmente [30] foram analisadas instabilidades apenas em certas configurações correspondendo a ondas magnetosônicas. O caso geral em que as orientações do feixe de neutrinos, do campo magnético e do vetor de onda são menos restritas foi também estudado, o que leva a um panorama mais completo das instabilidades nestes sistemas.

Posteriormente, procuraremos estender a teoria exposta em [9], de modo a levar em conta campos magnéticos. Este último aprimoramento levaria a incorporação do conjunto total das quatro equações de Maxwell, contrariamente ao formalismo eletrostático em [9] o qual necessita apenas da equação de Poisson (além das equações para a dinâmica dos sabores dos neutrinos e para o fluido eletrônico). Aqui, apenas os sabores de neutrinos eletrônicos e muônicos seriam incluídos e também considerando o caso magnetizado e as oscilações de sabores de neutrinos.

Este trabalho apresenta algumas possibilidades de resolver esses problemas citados. O texto está organizado conforme segue. No capítulo 2, discutimos conceitos básicos de física de neutrinos e plasmas. No capítulo 3, a modificação da teoria MHD [1, 31, 32] foi feita, incorporando a dinâmica dos neutrinos e desprezando os efeitos relativísticos [33]. Esta nova modelagem pode ser chamada magnetohidrodinâmica de neutrinos (*NMHD*, *neutrino magnetohydrodynamics*). Elétrons e íons foram tomados como não-relativísticos, juntamente com neutrinos (ultra) relativísticos [30]. Em seguida, propomos analisar uma estabilidade linear mais geral, permitindo orientações arbitrárias. Se remove a condição de ortogonalidade de [30], para obter taxas de crescimento de instabilidade de *NMHD* simplificada e ideal para ângulos oblíquos arbitrários entre a propagação do vetor de ondas e o campo magnético de equilíbrio. Da mesma forma, a análise de instabilidade de perturbações eletrostáticas gerais em plasmas magnetizados interagindo com neutrinos

eletrônicos em um fundo iônico foi recentemente realizada [34]. No capítulo 4, o papel desestabilizador dos feixes de neutrinos nos modos Trivelpiece-Gould é considerado, assumindo perturbações eletrostáticas em um plasma magnetizado composto por elétrons em um fundo iônico neutro, acoplado aos neutrinos por meio de uma força efetiva decorrente da interação eletro-fracas. O campo magnético melhora significativamente a taxa de crescimento linear, conforme calculado para os parâmetros de supernovas tipo II. No nível formal, para o vetor de onda paralelo ou perpendicular ao campo magnético, a taxa de crescimento da instabilidade é encontrada a partir do caso não magnetizado, substituindo-se a frequência de plasma pela frequência apropriada de Trivelpiece-Gould. A taxa de crescimento associada à propagação oblíqua também é obtida [35]. No capítulo 5, o acoplamento entre as ondas íon-acústicas (IAW, *ion-acoustic waves*) e as oscilações de sabores de neutrino foi estabelecido [36] usando um modelo que combina as interações neutrino-plasma [17,37,38] e as oscilações de sabores de neutrino [1,39]. Os comprimentos de onda e a taxa de crescimento linear para uma nova instabilidade foram identificados. A fonte de energia livre das oscilações de neutrinos foi encontrada como a influência dominante em tais situações, em comparação com a interação neutrino-plasma tradicional [36]. Confirmando as estimativas da taxa de crescimento da instabilidade descrita em [36], foi mostrado que o acoplamento entre as ondas íon-acústicas e as oscilações de sabores de neutrinos em um plasma completamente ionizado permanecem significativas mesmo incluindo efeitos colisionais [40,41].

Por fim, as conclusões e considerações finais estão descritas no capítulo 6.

Capítulo 2

Elementos de oscilações de neutrino e física de plasmas

Neste capítulo, vamos tratar alguns conceitos básicos sobre as oscilações de neutrinos e a física de plasmas. Propomos um cenário no qual se possa unificar determinados conceitos da teoria de neutrinos e conceitos coletivos de plasmas, tentando preencher uma lacuna que existe na interação neutrino-plasma e também utilizar esses conceitos para o estudo de oscilações de sabores de neutrinos.

2.1 Física de oscilações de neutrinos

Nos últimos anos, nossa compreensão sobre neutrinos mudou muito. Investigações teóricas e experimentais das propriedades dos neutrinos e suas interações são um dos campos mais ativos da pesquisa atual de altas energias, fornecendo informações além do modelo padrão.

O físico alemão Wolfgang Pauli em 1930 postulou a existência de uma partícula que deveria ter massa próxima à do elétron, desprovida de carga elétrica e deveria interagir fracamente com a matéria. Pauli, seguindo o princípio da conservação de energia explicou o espectro contínuo de energia dos elétrons emitidos no decaimento beta. Mais tarde, o físico Enrico Fermi chamou essa partícula de neutrino.

Com a descoberta do neutrino, detectar essa partícula que interage fracamente com a matéria era o próximo passo. Então, em 1956, Clyde Cowan e Frederick Reines [42, 43]

detectaram essa partícula. Um dos maiores problemas da física moderna era descobrir se essa partícula possuía massa. Entre os anos 50 e os anos 90, haviam evidências que o neutrino era não massivo, principalmente a observação da violação de paridade entre léptons [44] e por interagir com outras partículas apenas por meio da interação gravitacional e fraca [45]. É conhecido por ser extremamente leve, algumas centenas de vezes mais leve que o elétron. Depois do fóton é a partícula mais abundante e interage fracamente com a matéria (cerca de 65 bilhões de neutrinos atravessam cada centímetro quadrado da superfície da Terra voltada para o Sol a cada segundo) [46]. Mas percebeu-se que alguns fenômenos poderiam ser explicados somente se os neutrinos possuísem massa. Um desses fenômenos é conhecido como oscilação de neutrinos.

Existem três tipos de neutrinos, o neutrino eletrônico ν_e , o neutrino muônico ν_μ e o neutrino tauônico ν_τ . Chamados assim porque o neutrino eletrônico só participa de interações entre partículas subatômicas em que o elétron também participa; o do múon só naquelas em que o múon também participa; e o mesmo com o do tau. O elétron, o múon e o tau são três partículas elementares que, juntamente com os três neutrinos, são classificadas como léptons. Também existem os antineutrinos, ou antipartículas dos neutrinos. Ocorrem também em três sabores: do elétron, do múon e do tau. Os neutrinos, transformam-se espontaneamente em outros sabores de neutrinos devido ao fenômeno da oscilação de neutrinos.

Existem diversas fontes de neutrinos, por exemplo, devido a fusão nuclear que ocorre próxima as estrelas, gerados em reações nucleares, produzidos em reatores nucleares e aceleradores de partícula, produzidos na atmosfera devido à incidência de raios cósmicos, devido a supernovas distantes.

Explosões de supernovas, é quando algumas estrelas chegam ao fim de suas vidas, dão origem a um objeto compacto, como uma estrela de nêutrons ou um buraco negro, e estão relacionados com um processo que espalha os elementos pesados por todo universo, logo após a explosão. Então, a morte de estrelas pode descrever a evolução estelar, as condições para o nascimento de estrela de nêutrons, a aceleração de raios cósmicos entre outros.

O papel que os neutrinos desempenham em uma explosão pode ser crucial para o entendimento dos mecanismos físicos que conduzem ao colapso do núcleo de uma super-

nova, pois antes de percebermos a luz emitida pela explosão, os neutrinos emitidos por esse fenômeno já são observados. Os neutrinos carregam informações valiosas sobre as regiões mais internas das estrelas, pelo fato deles deixarem as estrelas durante os primeiros segundos do colapso.

Em 23 de fevereiro de 1987, foi observado pela primeira vez neutrinos de supernovas. Foi quando uma explosão de neutrinos foi observada conjuntamente com as observações óticas da explosão de uma supernova na grande nuvem de Magalhães. Para este evento, foi dado o nome de SN19987A (foi no ano 1987).

O século XX foi sem dúvida consagrador para a física de partículas. Através de vários problemas e descobertas, o atual Modelo Padrão (MP) foi sendo construído e conseguiu unificar duas forças fundamentais: o eletromagnetismo, que explicava a natureza da luz; e a força fraca, que explicava certos tipo de decaimentos. Entretanto, não existe outra partícula tão importante no desenvolvimento da teoria eletrofraca quanto o neutrino.

2.1.1 Oscilação no vácuo

A oscilação dos neutrinos foi proposta como uma solução para o desaparecimento dos neutrinos entre o Sol e a Terra. Existem três estados de sabor $\nu_l = \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ oscilando entre si, onde ν_e, ν_μ e ν_τ são os neutrino eletrônicos, muônicos e tauônicos, respectivamente. Se somente neutrinos ν_e são produzidos no Sol é possível detectar outros sabores devido as oscilações. O neutrino interage via interação fraca a qual é mediada por três mensageiros, os bósons W^+, W^- e Z^0 , que são massivos e por isso limitam muito o alcance da interação. Os mediadores da interação fraca não acoplam com essas partículas diretamente. Ao invés disso, a interação fraca apenas cria ou aniquila estados mistos de neutrinos físicos. Os neutrinos físicos, são denominados, $\nu_i = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, cada um com massa (m_1, m_2, m_3) , respectivamente.

O neutrino eletrônico é um estado do tipo [39]

$$\nu_e = U_{e1}\nu_1 + U_{e2}\nu_2 + U_{e3}\nu_3, \quad (2.1)$$

onde U_{e1}, U_{e2}, U_{e3} são coeficientes de mistura. Estes determinam o quanto de cada neutrino físico compõe o neutrino eletrônico ν_e , e o mesmo ocorre para os outros sabores ν_μ e ν_τ .

Uma forma simplificada de escrever os estados de sabor em função dos neutrinos físicos

é

$$\nu^{(s)} = U\nu^{(m)}, \quad (2.2)$$

onde $\nu^{(s)}$ e $\nu^{(m)}$ são vetores cujas componentes são os estados de sabor $\nu_l^{(s)}$ e de massa $\nu_i^{(m)}$, respectivamente. A matriz U é a matriz de mistura. A expressão (2.2) é escrita conforme

$$\nu_l = U_{li}\nu_i, \quad (2.3)$$

utilizando a notação de Einstein para soma, com $i = 1, 2, 3$ e $l = e, \mu, \tau$.

Para garantir a ortogonalidade de estados de sabor e a normalização da probabilidade, a matriz U deve ser unitária $UU^\dagger = U^\dagger U = I$, sendo I a matriz identidade.

Oscilação entre dois sabores

Faremos aqui uma descrição simplificada de dois sabores ν_e e ν_τ , devido a complexidade da oscilação entre três sabores de neutrinos. Utilizando o formalismo dos vetores de estado kets e bras. Reescrevendo a relação (2.2) com apenas dois sabores,

$$\begin{aligned} |\nu_e\rangle &= \cos\theta|\nu_1\rangle + \sin\theta|\nu_2\rangle, \\ |\nu_\alpha\rangle &= -\sin\theta|\nu_1\rangle + \cos\theta|\nu_2\rangle, \end{aligned} \quad (2.4)$$

e a relação inversa

$$\begin{aligned} |\nu_1\rangle &= \cos\theta|\nu_e\rangle - \sin\theta|\nu_\alpha\rangle, \\ |\nu_2\rangle &= \sin\theta|\nu_e\rangle + \cos\theta|\nu_\alpha\rangle. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Usando as matrizes de Pauli ¹ σ_i para descrever os operadores. Então, o vetor fica escrito da forma

$$\nu^{(s)} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}_s. \quad (2.6)$$

¹ $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

O índice s indica que o vetor está escrito na base de auto-estado de sabores. A base do espaço de vetores se relaciona com a base do espaço de estados, na forma

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_s \equiv |\nu_e \rangle, \quad (2.7)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_s \equiv |\nu_\alpha \rangle. \quad (2.8)$$

Da mesma forma, são escritos os auto-estados de massa.

Utilizando esta notação, podemos escrever a expressão (2.2), da seguinte forma,

$$\nu^{(s)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \nu^{(m)}, \quad (2.9)$$

onde a matriz de mistura é definida como uma função de θ , chamado ângulo de mistura. A matriz U é unitária. O ângulo de mistura só pode ser determinado experimentalmente e não teoricamente, até o momento.

Formalismo

Então, sendo $\nu^{(m)}$ o vetor de estado das partículas físicas, que são aquelas que possuem massa bem definida e se propagam no vácuo. Devem satisfazer a equação de Schrödinger, utilizando o sistema natural de unidades $c = \hbar = 1$,

$$i \frac{d}{dt} \nu^{(m)} = H \nu^{(m)}. \quad (2.10)$$

Sendo H a hamiltoniana do sistema, representada por

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

onde E_1 e E_2 são as energias dos neutrinos ν_1 e ν_2 , respectivamente.

Mudança de base

Escrevendo a Eq. (2.10) utilizando os auto-estados de sabor $\nu^{(s)}$ ao invés dos auto-estados de massa $\nu^{(m)}$. Para isto, vamos escrever as Eqs. (2.5)-(2.9) os estados físicos em função dos estados de sabor, ou seja, o inverso da expressão (2.2)

$$\nu^{(m)} = U^\dagger \nu^{(s)}. \quad (2.12)$$

considerando o ângulo de mistura constante e substituindo a Eq. (2.12) na Eq. (2.10)

$$iU^\dagger \frac{d}{dt} \nu^{(m)} = HU^\dagger \nu^{(m)}, \quad (2.13)$$

agora, multiplicando pela esquerda por U

$$i \frac{d}{dt} \nu^{(s)} = UHU^\dagger \nu^{(s)}. \quad (2.14)$$

Definindo H_s como sendo

$$H_s = UHU^\dagger \equiv \begin{pmatrix} E_1 \cos^2 \theta + E_2 \sin^2 \theta & (E_2 - E_1) \cos \theta \sin \theta \\ (E_2 - E_1) \cos \theta \sin \theta & E_1 \sin^2 \theta + E_2 \cos^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

podendo ser escrita como combinação das matrizes de Pauli e da identidade

$$H_s = \frac{(E_1 + E_2)}{2} I + \frac{(E_2 - E_1)}{2} (\sigma_1 \sin 2\theta - \sigma_3 \cos 2\theta), \quad (2.16)$$

A relação (2.11) que é diagonal, significa que não existe probabilidade de haver transição entre estados ν_1 e ν_2 . Já, os termos não diagonais no operador hamiltoniano H_s , indicando que a solução da equação tem probabilidades não nulas de ter estados mistos compostos de ν_e encontramos ν_α (e vice-versa). Se $E_1 = E_2$ ou $\theta = \pi/2$ a matriz passa a ser diagonal. Somente se existir a diferença entre as velocidades de fase das funções de onda será possível observar uma conversão entre os estados ν_l ($\nu_e \rightleftharpoons \nu_\alpha$).

Solução Geral

A equação de Schrödinger

$$i \frac{d}{dt} \nu^{(s)} = H_s \nu^{(s)}, \quad (2.17)$$

que possui solução do tipo

$$\nu^{(s)}(t) = e^{-iH_s t} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}_s, \quad (2.18)$$

onde φ_1 e φ_2 são constantes e dependem das condições iniciais sendo a proporção inicial dos neutrinos ν_e com relação ao ν_α . Substituindo a Eq. (2.16) na Eq. (2.18), obtemos a solução geral. Aqui, usaremos a igualdade, $e^{-i\alpha(\sigma_1 \sin \beta - \sigma_3 \cos \beta)} = I \cos \alpha - i(\sigma_1 \sin \beta - \sigma_3 \cos \beta) \sin \alpha$, comparando $\beta = 2\theta$ e $\alpha = (E_2 - E_1)t/2$. Definimos, também, $E_2 - E_1 = \Delta E$ e conseguimos obter a solução geral

$$\begin{aligned} \nu_s(t) &= e^{-i \frac{E_1 + E_2}{2} t} \times \left[I \cos\left(\frac{\Delta E}{2} t\right) \right. \\ &\quad \left. - i(\sigma_1 \sin 2\theta - \sigma_3 \cos 2\theta) \sin\left(\frac{\Delta E}{2} t\right) \right] \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Solução particular

Estamos tratando com neutrinos ν_e e ν_α pois a Eq. (2.13) utilizada está escrita na base dos auto-estados de sabor. Chamando φ_1 e φ_2 proporções do número inicial de cada neutrino, logo, os estados $\nu_{(s)}(t)$ podem ser o feixe de neutrinos. Considerando o feixe de neutrinos vindo do Sol é composto por ν_e , escrito conforme

$$\nu^{(s)}(0) = |\nu_e\rangle \implies \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_s. \quad (2.20)$$

Substituindo σ_1 e σ_3 na Eq. (2.20)

$$\sigma_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_s = |\nu_\alpha\rangle, \quad (2.21)$$

e

$$\sigma_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_s = |\nu_e\rangle. \quad (2.22)$$

Obtemos então a solução particular, colocando os termos $|\nu_e\rangle$ e $|\nu_\alpha\rangle$ em evidência e organizando, conforme

$$|\nu_e(t)\rangle = e^{-i\frac{E_1+E_2}{2}t} \times \left\{ \left[\cos\left(\frac{\Delta E}{2}t\right) + i \cos 2\theta \sin\left(\frac{\Delta E}{2}t\right) \right] |\nu_e\rangle - i \sin 2\theta \sin\left(\frac{\Delta E}{2}t\right) |\nu_\alpha\rangle \right\}. \quad (2.23)$$

Como podemos ver na equação acima, temos uma parte que representa a propagação do estado inicial $|\nu_e\rangle$ e outra que representa $|\nu_\alpha\rangle$ e também temos a mistura dos estados $|\nu_e\rangle$ com $|\nu_\alpha\rangle$. Se o ângulo de mistura θ for a zero, a solução da Eq. (2.23) fica sendo

$$|\nu_e(t)\rangle = e^{-iE_1 t} |\nu_e\rangle. \quad (2.24)$$

Probabilidades de conversão e sobrevivência

A probabilidade de conversão $P_{e\alpha}$ é a probabilidade de um neutrino produzido como ν_e ser detectado como ν_α após um certo tempo t , dada por

$$P_{e\alpha}(t) = |\langle \nu_\alpha | \nu_e(t) \rangle|^2 = \sin^2 2\theta \sin^2\left(\frac{\Delta E}{2}t\right). \quad (2.25)$$

Como as probabilidades estão normalizadas, podemos obter a probabilidade de sobrevivência $P_{ee} = 1 - P_{e\alpha}$ dada por

$$P_{ee}(t) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2\left(\frac{\Delta E}{2}t\right). \quad (2.26)$$

Para tornar este resultado final para oscilações no vácuo, precisamos fazer algumas aproximações.

Sabe-se que os neutrinos são partículas extremamente relativísticas. Então podemos dizer que sua velocidade é aproximadamente aquela da luz, $v_{neutrino} \approx c$ e essa velocidade é constante, pois trata-se de partículas no vácuo. Então, podemos relacionar o tempo t com um parâmetro x

$$x = v_{\text{neutrino}}t \approx ct, \quad (2.27)$$

sendo x a distância entre a fonte e o detector. Considerando, $x \approx t$, pois foi adotado $c = 1$.

Então as soluções em função de x e não de t , podem ser escritas sem perder a generalidade. Então, a probabilidade de sobrevivência fica

$$P_{ee}(t) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{\Delta E}{2} x \right), \quad (2.28)$$

Massa, momentum e energia

O modelo proposto por Enrico Fermi, publicado em 1934, considerava que a massa de repouso dos três tipos de neutrinos era zero. O modelo em si continha uma variável para a massa, mas a coincidência entre a previsão teórica do modelo e os dados experimentais era máxima quando o valor zero era dado a essa variável. O neutrino, então, continha apenas energia cinética e viajaria na velocidade da luz.

Bruno Pontecorvo em 1968 [47] propôs os três tipos de neutrinos podem transformar-se uns nos outros. Assim, parecia haver menos neutrinos porque estavam observando neutrinos do elétron vindos do Sol, mas parte deles se transformava em neutrinos do múon e do tau. Como a transformação é oscilante, o fenômeno foi chamado "oscilação de neutrinos" e foi observado diretamente em 1998 no observatório Superkamiokande, no Japão [48].

Em 2002, o problema foi resolvido, com observações do Observatório de Neutrinos de Sudbury (SNO), no Canadá, mostraram que considerando as oscilações, o número de neutrinos vindos do Sol coincide bem com as previsões teóricas [49]. A observação de Sudbury também mostrou que se as massas dos três neutrinos fosse nula, não haveria oscilações. Logo, o experimento mostrou que os neutrinos tem massa e a equação da oscilação do neutrino depende da diferença entre as massas dos três neutrinos. Todavia, os experimentos indicam a diferença entre as massas dos três tipos de neutrino, não o valor das massas individuais. Estudos indicam que a massa dos neutrinos é centenas de vezes menor que a massa de um elétron, de $0,511 MeV/c^2$ ou seja, são da ordem de poucos elétrons-volt ou frações de elétrons-volt [49].

Como podemos ver na Eq. (2.11) as energias E_1 e E_2 são energias relativísticas pois a velocidade das partículas é próxima a velocidade da luz, portanto as energias obedecem

$$E_i^2 = p^2 + m_i^2, \quad (2.29)$$

onde $p_i \equiv |p_i|$ é o módulo do momentum linear do estado ν_i , com $i = 1, 2, 3$. O índice i indica o estado de massa do neutrino.

Podemos obter uma aproximação para p , sabendo que $m_i/E_i \ll 1$, usando uma expansão binomial e isolando E_i se obtém,

$$E_i = p + \frac{m_i^2}{2E_i}. \quad (2.30)$$

Considerando um feixe de partículas bem distribuídas, que representará o feixe de neutrinos produzidos no Sol e chega na Terra, utilizando o formalismo de ondas planas. Então, E é a energia do feixe e E_i o auto-valor da hamiltoniana para o auto-estado de massa ν_i . Relacionando a energia do feixe de neutrinos E composto pelos estados de sabores ν_e e ν_α com os auto-valores da Hamiltoniana E_i

$$E_i = p + \frac{m_i^2}{2E}, \quad (2.31)$$

onde temos os auto-valores E_i em termos das massas m_i e da energia do feixe E , pois $m_i^2/2E_i$ tem aproximadamente o mesmo valor numérico que $m_i^2/2E$. Substituindo E_1 e E_2 na Eq. (2.31), usando a definição de ΔE e usando Δ a diferença entre o quadrado das massas temos

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{m_2^2 - m_1^2}{2E}. \quad (2.32)$$

A solução para a oscilação de sabor no vácuo fica sendo

$$P_{ee} = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{\Delta E}{4} x \right), \quad (2.33)$$

onde θ é obtido experimentalmente.

2.1.2 Oscilação na matéria

Os neutrinos interagem fracamente com a matéria em seu trajeto entre o Sol e Terra. A interação dos neutrinos com a matéria é mediada pela interação fraca. Portanto não tratamos a interação partícula-partícula mas um mecanismo de interação efetiva que se baseia em potenciais efetivos (quantidades que alteram a energia total de cada componente do feixe de neutrinos, dependentes das características do meio).

O potencial efetivo sobre a componente ν_e do feixe, composta por uma contribuição da corrente carregada V_{qe} e outra corrente neutra V_{ne} é dada por

$$V_e = V_{qe} + V_{ne} = \sqrt{2}G_F \left(n_e - \frac{n_n}{2} \right). \quad (2.34)$$

Já, o potencial efetivo para a componente ν_α , que contém apenas a contribuição da corrente neutra, é dado por

$$V_\alpha = V_{n\alpha} = -\sqrt{2}G_F \frac{n_n}{2}. \quad (2.35)$$

Os parâmetros n_e e n_n são as densidades do meio dos elétrons e neutrinos, respectivamente.

O potencial efetivo, pode ser representado por,

$$V_{eff} = \begin{pmatrix} V_e & 0 \\ 0 & V_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}G_F(n_e - n_n/2) & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}G_F n_n/2 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

ou ainda,

$$V_{eff} = -\sqrt{2}G_F \frac{n_n}{2} I + \begin{pmatrix} \sqrt{2}G_F n_e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

Com isto, percebemos que a matéria através do potencial efetivo altera a energia total do feixe de neutrinos que é diferente para cada componente do feixe e é contabilizada na Hamiltoniana do sistema.

2.1.3 Interação com a matéria

Como já foi visto, a Hamiltoniana na base dos auto-estados de sabor pode ser escrita pela Eq. (2.16), e também vimos que as energias E_1 e E_2 podem sofrer algumas

aproximações na massa dos neutrinos e na energia cinética, onde concluímos que

$$E_i = E + \frac{m_i^2}{2E}. \quad (2.38)$$

Substituindo na Eq. (2.16), temos

$$H_s = E + \frac{m_1 + m_2}{4E} I + \frac{\Delta}{4E} (\sigma_1 \sin 2\theta - \sigma_3 \cos 2\theta), \quad (2.39)$$

consideramos a diferença do quadrado das massas $\Delta = m_2^2 - m_1^2$. Substituindo, aqui, σ_1 e σ_3 na Hamiltoniana H_s , obtemos a forma matricial,

$$H_s = E + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} I + \frac{\Delta}{4E} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}, \quad (2.40)$$

Neste ponto, chamamos a Hamiltoniana efetiva na matéria \tilde{H}_s , definida como,

$$\tilde{H}_s = H_s + V_{eff}. \quad (2.41)$$

Realizando todas as substituições e agrupando todos os termos proporcionais à identidade e somando as matrizes, obtemos a Hamiltoniana,

$$\tilde{H}_s = \left(E + \frac{m_2^2 + m_1^2}{4E} - \sqrt{2} G_F \frac{n_n}{2} \right) I + \frac{1}{4E} \begin{pmatrix} -\Delta \cos 2\theta + 2A & \Delta \sin 2\theta \\ \Delta \sin 2\theta & \Delta \cos 2\theta \end{pmatrix}, \quad (2.42)$$

onde a quantidade A é definida como $A \equiv 2\sqrt{2} G_F n_e E$.

Esta hamiltoniana representa a propagação de um feixe de neutrinos em um meio material. A alteração na energia total é considerada como uma mudança na “inércia” dos neutrinos, pois o material fornece uma resistência à passagem das partículas. Então, consideramos que a energia cinética das partículas é alterada, logo, a modificação da energia total pelo potencial efetivo tem que ser absorvida pela massa. Neste ponto, precisamos definir novos estados de massa para podermos estudar melhor a propagação dos neutrinos na matéria.

2.1.4 Ângulo de mistura efetivo

Escrevendo a hamiltoniana H_s (2.40) de maneira simplificada e procurando definir o ângulo de mistura em termos das quantidades físicas do sistema,

$$H_s = \frac{\Delta}{4E} \begin{pmatrix} \epsilon - \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \epsilon + \cos 2\theta \end{pmatrix}, \quad (2.43)$$

onde ϵ representa os termos proporcionais à matriz identidade. Escrevendo suas componentes matriciais por $H_s^{(ij)}$, obtemos,

$$\frac{H_s^{12} + H_s^{21}}{H_s^{22} - H_s^{11}} = \frac{\Delta/4E \sin 2\theta \Delta/4E \sin^2 2\theta}{\Delta/4E(\epsilon + \cos 2\theta) - \Delta/4E(\epsilon - \cos 2\theta)}, \quad (2.44)$$

com algumas simplificações, temos

$$\frac{H_s^{12} + H_s^{21}}{H_s^{22} - H_s^{11}} = \tan 2\theta. \quad (2.45)$$

Nota-se que o ângulo de mistura independe dos termos diagonais, pois ϵ é cancelado, então, podemos obter este ângulo em termos das componentes da hamiltoniana. Se a hamiltoniana for diagonal ($H_s^{12} = H_s^{21} = 0$), o ângulo de mistura se anula. Considerando a hamiltoniana simétrica ($H_s^{12} = H_s^{21}$), podemos escrever

$$\tan 2\theta \equiv \frac{2H_s^{12}}{H_s^{22} - H_s^{11}}. \quad (2.46)$$

Neste ponto, consideramos a oscilação da matéria. A hamiltoniana do vácuo foi alterada pelo potencial efetivo. Definimos, por analogia, o ângulo de mistura na matéria como

$$\tan 2\tilde{\theta} \equiv \frac{2\tilde{H}_s^{12}}{\tilde{H}_s^{22} - \tilde{H}_s^{11}}. \quad (2.47)$$

Da hamiltoniana da matéria obtemos as componentes de \tilde{H}_s , substituídas na Eq. (2.47), nos fornece,

$$\tan 2\tilde{\theta} = \frac{\Delta \sin 2\theta}{\Delta \cos 2\theta - A}. \quad (2.48)$$

Usando a propriedade trigonométrica $\sin^2 \alpha = \tan^2 \alpha / (1 + \tan^2 \alpha)$, temos,

$$\sin^2 2\tilde{\theta} = \frac{\Delta^2 \sin^2 2\theta}{(\Delta \cos 2\theta - A)^2 + \Delta^2 \sin^2 2\theta}. \quad (2.49)$$

Esta expressão define o ângulo de mistura na matéria $\tilde{\theta}$ em termos das características que estão presentes em A , do ângulo de mistura no vácuo (θ) e da interação fraca (constante G_F).

2.1.5 Auto-estado de massa efetiva

Redefinindo os auto-estados de massa em função dos auto-estados de interação,

$$\nu^{(m)} = U^\dagger \nu^{(s)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \nu^{(s)}. \quad (2.50)$$

Considerando que o meio material não pode alterar a forma de uma interação fundamental. Definindo os auto-estados de massa efetiva como

$$\tilde{\nu}^{(m)} = \tilde{U}^\dagger \nu^{(s)} = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\theta} & -\sin \tilde{\theta} \\ \sin \tilde{\theta} & \cos \tilde{\theta} \end{pmatrix} \nu^{(s)}, \quad (2.51)$$

e os estados de sabor são dados por

$$\tilde{U}^\dagger \tilde{\nu}^{(m)} = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\theta} & \sin \tilde{\theta} \\ -\sin \tilde{\theta} & \cos \tilde{\theta} \end{pmatrix} \tilde{\nu}^{(m)}, \quad (2.52)$$

onde a matriz de mistura efetiva \tilde{U} é dada por

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\theta} & -\sin \tilde{\theta} \\ \sin \tilde{\theta} & \cos \tilde{\theta} \end{pmatrix}. \quad (2.53)$$

Os estados físicos efetivos representados por $\tilde{\nu}^{(m)}$

$$\tilde{\nu}^{(m)} = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \tilde{\psi}_2 \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

a base do espaço de estados $\tilde{\nu}^{(m)}$ se relaciona com a base do espaço de estados $|\tilde{\nu}_i\rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\tilde{m}} \equiv |\tilde{\nu}_1\rangle, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\tilde{m}} \equiv |\tilde{\nu}_2\rangle. \quad (2.55)$$

A mistura efetiva mostra a possibilidade de haver efeitos oscilatórios com certa independência da mistura no vácuo.

2.1.6 Massa efetiva

Definindo \tilde{M}^2

$$\tilde{M}^2 \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\Delta \cos 2\theta + 2A & \Delta \sin 2\theta \\ \Delta \sin 2\theta & \Delta \cos 2\theta \end{pmatrix}. \quad (2.56)$$

Escrevendo a hamiltoniana para a propagação na matéria, obtém-se

$$\tilde{H}_S = \left(E + \frac{m_2^2 + m_1^2}{4E} - \sqrt{2}G_F \frac{n_n}{2} \right) I + \frac{1}{2E} \tilde{M}^2. \quad (2.57)$$

Os auto-valores \tilde{E}_i de \tilde{H}_S são definidos por

$$\tilde{E}_i = E + \frac{m_2^2 + m_1^2}{4E} - \sqrt{2}G_F \frac{n_n}{2} + \frac{\tilde{m}_i^2}{2E}. \quad (2.58)$$

Os auto-valores de \tilde{M}^2 são dados por

$$\tilde{m}_\pm^2 = \frac{1}{2} \left[(m_1^2 + m_2^2 + A) \pm \sqrt{(\Delta \cos 2\theta - A)^2 + \Delta^2 \sin^2 2\theta} \right], \quad (2.59)$$

onde obtemos a diferença do quadrado das massas efetivas $\tilde{\Delta}$

$$\tilde{\Delta} \equiv \tilde{m}_2^2 - \tilde{m}_1^2 = \sqrt{(\Delta \cos 2\theta - A)^2 + \Delta^2 \sin^2 2\theta}. \quad (2.60)$$

2.2 Elementos de física de plasma

O plasma, é um estado físico da matéria e tem características semelhantes a um gás com um grande número de partículas ionizadas. A presença dos portadores de carga permite ao meio uma característica de condutor, o qual tem neutralidade macroscópica

e seus elementos constitutivos apresentam comportamento coletivo devido as forças coulombianas de longo alcance [31]. O estilo adotado nesta breve revisão segue fortemente as referências [31, 50, 51]

2.2.1 Características do plasma

A maior parte da matéria conhecida do universo é formada por plasma [52]. Plasmas contêm grande número de partículas ionizadas, mas nem todo meio carregado pode ser chamado de plasma. Para classificar um conjunto de partículas carregadas como plasma, deve ter estas características [31, 50, 51]: o plasma é macroscopicamente neutro na ausência de perturbações externas. Não existe carga líquida em uma região macroscópica pois os campos microscópicos se cancelam. Deve obedecer também a condição de quase-neutralidade macroscópica apenas até distâncias da ordem do comprimento de Debye. As partículas carregadas se distribuem de forma a blindar qualquer campo eletrostático dentro de uma distância da ordem de comprimento de Debye, dado por

$$\lambda_D = \left(\frac{\epsilon_0 k T}{n_e e^2} \right)^{1/2}, \quad (2.61)$$

onde ϵ_0 é a permissividade elétrica no vácuo, k é a constante de Boltzmann, T é a temperatura, n_e é a densidade eletrônica e e é a carga fundamental. Os movimentos do plasma são caracterizados por uma frequência natural, conhecida como frequência de plasma

$$\omega_{pe} = \left(\frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0} \right)^{1/2}, \quad (2.62)$$

onde m_e é a massa do elétron. Os íons não são capazes de acompanhar o movimento dos elétrons pois as oscilações são de alta frequência, logo, a força de restabelecimento exercida pelas interações coulombianas entre elétrons faz com que estes oscilem coletivamente em torno dos íons pesados. Os íons não são capazes de acompanhar o movimento dos elétrons pois as oscilações são de alta frequência, logo, a força de restabelecimento exercida pelas interações coulombianas entre elétrons e íons faz com que estes oscilem coletivamente em torno dos íons pesados.

2.2.2 Teorias para descrição de plasmas

São quatro as principais abordagens teóricas diferentes para o estudo de plasmas: a teoria orbital, a teoria cinética, a teoria de vários fluidos e a teoria MHD. Cada uma delas considera diferentes aproximações.

A teoria orbital, consiste em rastrear o movimento individual de cada partícula com a presença de campos elétricos e magnéticos externos. Sendo desconsiderado as variações dos campos eletromagnéticos devido às próprias partículas, sendo útil para estudo de plasmas pouco densos. Essa teoria é importante para verificar os efeitos físicos dos processos dinâmicos que ocorrem no plasma [31].

Na teoria cinética, é preciso conhecer a função de distribuição do conjunto de partículas o qual contém todas informações do sistema. As equações cinéticas descrevem a evolução da função de distribuição onde as quantidades físicas podem ser calculadas [31, 50, 53].

Na teoria de vários fluidos, como existem colisões entre as partículas do plasma, cada espécie mantém uma função de distribuição local de equilíbrio, logo, cada espécie pode ser tratada como um fluido diferente. As equações da eletrodinâmica são utilizadas assim como as equações da hidrodinâmica que descrevem as conservações de energia, massa e momentum para cada espécie [31, 51, 52].

Com a teoria MHD, podemos tratar o plasma como um único fluido, somando as equações sobre todas espécies. É útil para estudar fenômenos de baixa frequência que ocorrem em plasmas condutores imersos em campos magnéticos externos [50, 51]. Então, devido suas aproximações e considerações, esta teoria será utilizada neste trabalho. Com isso, será feita uma discussão um pouco mais detalhada na próxima seção.

2.2.3 Teoria magnetohidrodinâmica

O plasma é descrito pelas equações de fluidos junto com as equações de eletrodinâmicas, no limite de baixas frequências.

Em sua forma geral, as equações são de difícil aplicação, no entanto, são feitas algumas aproximações fisicamente justificáveis, tornando as equações matematicamente mais simples.

Primeiro, é desconsiderado na lei de Ampère o termo de corrente de deslocamento ($\epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$) [53]. Considera-se também que é mantida a neutralidade macroscópica, sendo

zero a densidade elétrica ($\rho = 0$). Na lei de Ohm, são desprezadas as derivadas temporais.

Logo, o conjunto de equações MHD é constituído pela equação da continuidade de massa, de momentum, de conservação de energia, Ampère simplificada e a lei de Ohm generalizada, respectivamente,

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{u}) = 0, \quad (2.63)$$

$$\rho_m \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p, \quad (2.64)$$

$$\nabla p = V_s^2 \nabla \rho_m, \quad (2.65)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (2.66)$$

$$\mathbf{J} = \sigma_0 (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{\sigma_0}{ne} \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (2.67)$$

onde ρ_m é a densidade de massa e \mathbf{u} a velocidade local do plasma, \mathbf{J} densidade de corrente elétrica, V_s velocidade adiabática do som, μ_0 a permeabilidade magnética do vácuo e σ_0 a condutividade elétrica do plasma.

Considera-se um fluido condutor onde a condutividade do plasma é muito alta, logo, a Eq. (2.67) se torna $\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B}$.

2.2.4 Ondas MHD

Considerando processos oscilatórios compatíveis com um fluido condutor perfeito, compressível, não viscoso, que se encontre imerso num campo magnético, usando conjunto de Eqs. (2.63)-(2.67). Em seguida, será considerado um fluido mais realista, fazendo algumas considerações, onde as atenuações das ondas podem ser vistas.

Combinando as Eqs. (2.64)-(2.66) no equilíbrio. O fluido é considerado uniforme, em repouso, com densidade uniforme, ρ_0 , imerso num campo magnético uniforme e constante, \mathbf{B}_0 .

$$\rho_m \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho_m (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -V_s^2 \nabla \rho_m + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (2.68)$$

e

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.69)$$

Considerando pequenas perturbações na amplitude em torno do equilíbrio,

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1(x, t), \quad (2.70)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_1(x, t), \quad (2.71)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1(x, t). \quad (2.72)$$

Substituindo as Eqs. (2.70)-(2.72) na combinação das Eqs. (2.63), (2.68) e (2.69), linearizando e desconsiderando termos de segunda ordem, e usando $\nabla p = V_S^2 \nabla \rho_1$, temos

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot (\mathbf{u}_1) = 0, \quad (2.73)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + V_S^2 \nabla \rho_1 + \frac{\mathbf{B}_0}{4\pi} \times (\nabla \times \mathbf{B}_1) = 0, \quad (2.74)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0) = 0. \quad (2.75)$$

Para obtermos uma equação para \mathbf{u}_1 , combinamos as Eqs. (2.73)-(2.75) e derivando a Eq. (2.74) em relação ao tempo, obtemos,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t^2} - V_S^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_1) + \left(\frac{\mathbf{B}_0}{4\pi \rho_0} \right) \times \nabla \times [\nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0)] = 0, \quad (2.76)$$

onde o vetor velocidade Alfvén pode ser definido como $\mathbf{V}_A = \mathbf{B}_0 / \sqrt{4\pi \rho_0}$. Substituindo a velocidade de Alfvén na equação (2.76), temos

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t^2} - V_S^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_1) + \mathbf{V}_A \times \nabla \times [\nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{V}_A)] = 0, \quad (2.77)$$

usando a solução de onda plana para ω e k , a Eq. (2.77) fica

$$-\omega^2 \mathbf{u}_1 + V_S^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1) \mathbf{k} - \mathbf{V}_A \times \{ \mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{V}_A)] \} = 0. \quad (2.78)$$

Usando a identidade vetorial, $[\mathbf{k} \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{V}_A)] = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_A) \mathbf{u}_1 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1) \mathbf{V}_A$, na Eq. (2.78),

com isso obtemos a equação de dispersão para ondas magnetohidrodinâmicas

$$-\omega^2 \mathbf{u}_1 + (V_S^2 + V_A^2)(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{k} + \mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k}[(\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})\mathbf{u}_1 - (\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{V}_A] = 0. \quad (2.79)$$

Agora, vamos considerar algumas situações, como, $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$, $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$ e \mathbf{k} formando um ângulo arbitrário com \mathbf{B}_0 .

- Para $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$ no qual obtemos as ondas magnetosônicas, A relação de dispersão (2.79) fica,

$$-\omega^2 \mathbf{u}_1 + (V_S^2 + V_A^2)(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{k} = 0, \quad (2.80)$$

temos

$$\mathbf{u}_1 = \left[\frac{(V_S^2 + V_A^2)(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1)}{\omega^2} \right] \mathbf{k} = 0, \quad (2.81)$$

para $\mathbf{u}_1 \parallel \mathbf{k}$,

$$\frac{\mathbf{u}_1}{u_1} = \frac{\mathbf{k}}{k}. \quad (2.82)$$

Substituindo a Eq. (2.82) na Eq. (2.81), tem-se

$$\frac{\omega}{k} = (V_S^2 + V_A^2)^{1/2}, \quad (2.83)$$

logo, temos uma onda com velocidade de fase independente da frequência, então temos uma onda magnetosônica.

- Para $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$, ($\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_A = kV_A$), obtêm-se:

Desta condição temos $\mathbf{V}_A/V_A = \mathbf{k}/k$, obtemos a equação,

$$(k^2 V_A^2 - \omega^2)\mathbf{u}_1 + k^2 \left[\left(\frac{V_S^2}{V_A^2} - 1 \right) (\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{u}_1) \right] \mathbf{V}_A = 0, \quad (2.84)$$

Com isso, temos duas possibilidades:

- 1) Ondas sônicas se \mathbf{u}_1 for paralelo a \mathbf{B}_0 e a \mathbf{k} . Como \mathbf{u}_1 e \mathbf{V}_A são paralelos, temos $\mathbf{V}_A/V_A = \mathbf{u}_1/u_1$,

$$\omega^2 = k^2 V_S^2, \quad (2.85)$$

que resulta em uma onda sônica,

$$\frac{\omega}{k} = V_S. \quad (2.86)$$

2) Ondas de Alfvén se \mathbf{u}_1 for perpendicular a \mathbf{B}_0 e a \mathbf{k} . Como \mathbf{u}_1 e \mathbf{V}_A são perpendiculares, temos $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{V}_A = 0$.

A Eq. (2.84) se reduz a

$$(k^2 V_A^2 - \omega^2) \mathbf{u}_1 = 0, \quad (2.87)$$

que resulta em ondas de Alfvén,

$$\frac{\omega}{k} = V_A. \quad (2.88)$$

Podemos verificar que o campo magnético está na mesma direção que a onda Alfvén e em sentido contrário ao da velocidade \mathbf{u}_1). Usando a Eq. (2.75) e considerando $\mathbf{B}_1(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}_1 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t)$. Obtemos a relação,

$$\omega \mathbf{B}_1 + \mathbf{k} \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0) = 0. \quad (2.89)$$

utilizando a identidade $\mathbf{k} \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0) = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) \mathbf{u}_1 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1) \mathbf{B}_0$, obtemos a equação,

$$\mathbf{B}_1 = -\frac{B_0}{\omega/k} \mathbf{u}_1, \quad (2.90)$$

Como podemos ver, \mathbf{B}_1 é perpendicular ao campo original \mathbf{B}_0 . A componente \mathbf{B}_1 , mostrada na figura (2.1), inserida no campo \mathbf{B}_0 , resulta às ondulações senoidais nas linhas de campo magnético.

- \mathbf{k} formando um ângulo arbitrário com \mathbf{B}_0

Escolhemos direção do campo magnético \mathbf{B}_0 como sendo a direção do eixo cartesiano z e escolhendo o plano xz aquele que contém o vetor \mathbf{k} e θ o ângulo arbitrário entre

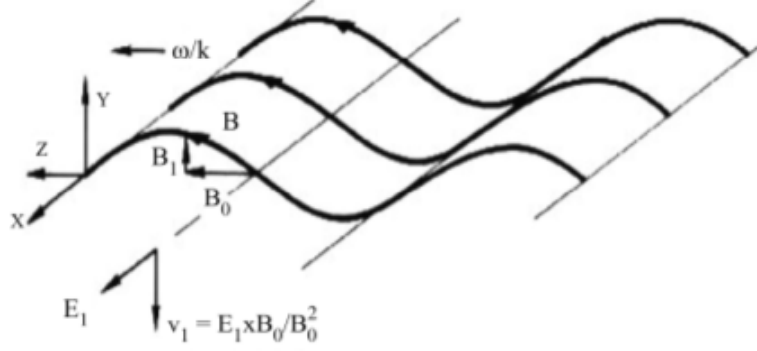


Figura 2.1: Ondas de Alfvén (conforme a Ref. [31]).

o vetor \mathbf{k} e o vetor campo magnético \mathbf{B}_0 . Assim,

$$\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{z}}, \quad (2.91)$$

$$\mathbf{V}_A = V_A \hat{\mathbf{z}}, \quad (2.92)$$

$$\mathbf{k} = k(\sin \theta \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}), \quad (2.93)$$

$$\mathbf{u}_1 = u_{1x} \hat{\mathbf{x}} + u_{1y} \hat{\mathbf{y}} + u_{1z} \hat{\mathbf{z}}, \quad (2.94)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_A = k V_A \cos \theta, \quad (2.95)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1 = k(u_{1x} \sin \theta + u_{1z} \cos \theta), \quad (2.96)$$

$$\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{u}_1 = V_A u_{1z}, \quad (2.97)$$

usando os vetores unitários $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$.

Substituindo as Eqs. (2.91)-(2.97) na Eq. (2.79), temos

$$\begin{aligned} 0 = & -\omega^2(u_{1x} \hat{\mathbf{x}} + u_{1y} \hat{\mathbf{y}} + u_{1z} \hat{\mathbf{z}}) \\ & + (V_S^2 + V_A^2) k^2 (u_{1x} \sin \theta + u_{1z} \cos \theta) (\hat{\mathbf{x}} \sin \theta + \hat{\mathbf{z}} \cos \theta) + \\ & k V_A \cos \theta [k V_A \cos \theta (u_{1x} \hat{\mathbf{x}} + u_{1y} \hat{\mathbf{y}} + u_{1z} \hat{\mathbf{z}}) \\ & - V_A u_{1z} k (\hat{\mathbf{x}} \sin \theta + \hat{\mathbf{z}} \cos \theta) - k (u_{1x} \sin \theta + u_{1z} \cos \theta) V_A \hat{\mathbf{z}}] \end{aligned} \quad (2.98)$$

separando nas componentes, para a componente x ,

$$u_{1x} (-\omega^2 + k^2 V_A^2 + k^2 V_S^2 \sin^2 \theta) + u_{1z} (k^2 V_S^2 \sin \theta \cos \theta) = 0, \quad (2.99)$$

para a componente y ,

$$u_{1y}(-\omega^2 + k^2 V_A^2 \cos^2 \theta) = 0, \quad (2.100)$$

e para a componente z ,

$$u_{1x}(V_S^2 k^2 \sin \theta \cos \theta) + u_{1z}(-\omega^2 + V_S^2 k^2 \cos^2 \theta) = 0. \quad (2.101)$$

Analisando a componente y , percebe-se a existência de uma onda linearmente polarizada, com as oscilações perpendiculares a \mathbf{k} e \mathbf{B}_0 , temos

$$-\omega^2 + k^2 V_A^2 \cos^2 \theta = 0, \quad (2.102)$$

obtendo a velocidade de fase,

$$\frac{\omega}{k} = V_A \cos \theta. \quad (2.103)$$

obtemos ondas de Alfvén puras.

Agora, resolvendo o sistema para as equações de componentes x e z , onde o determinante dos coeficientes desse sistema deve ser nulo. Temos que

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 + k^2 V_A^2 + k^2 V_S^2 \sin^2 \theta & k^2 V_S^2 \sin \theta \cos \theta \\ k^2 V_S^2 \sin \theta \cos \theta & -\omega^2 + V_S^2 k^2 \cos^2 \theta \end{pmatrix} = 0, \quad (2.104)$$

de onde obtém-se

$$\frac{\omega^4}{k^4} - \frac{\omega^2}{k^2} (V_S^2 + V_A^2) + V_S^2 V_A^2 \cos^2 \theta = 0, \quad (2.105)$$

resolvendo essa equação, obtemos duas soluções reais

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{2} (V_S^2 + V_A^2) \pm \frac{1}{2} [(V_S^2 + V_A^2)^2 - 4V_S^2 V_A^2 \cos^2 \theta]^{1/2}. \quad (2.106)$$

A velocidade de fase maior é aquela com sinal positivo, conhecida como onda MHD rápida e a menor velocidade de fase com o sinal negativo, conhecida como onda MHD lenta. Note que nas Eqs. (2.103) e (2.106) as ondas não dependem da frequência, representando ondas de Alfvén puras, MHD rápida e lenta, não apresentando dispersão.

Podemos analisar também quando temos $\theta = 90^0$, as ondas de Alfvén puras e as ondas MHD lentas sempre desaparecem. As ondas MHD rápidas se transformam em magnetosônicas. e para $\theta = 0^0$, as ondas MHD rápidas se transformam em sonoras se ($V_S > V_A$) e em ondas de Alfvén se ($V_A > V_S$).

Na sequência se pretende estudar o impacto da interação com os neutrinos na propagação das ondas descritas via teoria MHD.

Capítulo 3

Magnetohidrodinâmica e neutrinos

Propomos estender a teoria magnetohidrodinâmica encontrada em livros textos básicos de física de plasma [1, 28, 29]. A derivação foi baseada em um modelo de plasma de dois fluidos composto de elétrons e íons e incorporando a dinâmica de uma espécie de neutrinos, levando em conta a corrente carregada fraca [33]. Esta nova modelagem chamada magnetohidrodinâmica de neutrinos. Em vista da complexidade do sistema resultante de equações, uma hipótese justificada é usar a teoria MHD simplificada e ideal [31]. Os elétrons e os íons foram tomados como não-relativísticos, juntamente com neutrinos (ultra) relativísticos [30].

Como uma primeira aplicação, a *NMHD* provou que o feixe de neutrinos desestabiliza as ondas magnetosônicas, produzindo um mecanismo plausível para a explosão de supernovas de tipo II. No entanto, a onda magnetosônica supõe uma geometria muito particular, onde a propagação da onda é perpendicular ao campo magnético ambiente. Houve também repercussão do artigo [30] na revista *Physics Today*, que é uma das mais destacadas no jornalismo científico.

A segunda aplicação foi uma análise de estabilidade linear mais geral, permitindo orientações arbitrárias, considerando o estudo do impacto de um feixe de neutrinos sobre a estabilidade das ondas MHD gerais. Ou seja, no caso de um fluido condutor ideal e usando as suposições da MHD simplificadas, estas são a onda de Alfvén e as ondas magnetosônicas rápidas e lentas. Portanto, é removido a condição de ortogonalidade de [30], para obter taxas de crescimento de instabilidade de *NMHD* simplificada e ideal para ângulos oblíquos arbitrários entre a propagação do vetor de ondas e o campo magnético de equilí-

brio. Da mesma forma, a análise das instabilidades de perturbações eletrostáticas gerais em plasmas magnetizados interagindo com neutrinos eletrônicos em um fundo iônico foi recentemente realizada [34].

3.1 Magnetohidrodinâmica na presença de feixes intensos de neutrinos.

Um sistema com feixe de neutrinos interagindo com um fluido de plasma de duas espécies de partículas, elétrons e íons. O sistema é descrito com a equação de transporte de massa e momentum, para os elétrons com massa m_e e carga $-e$ são, respectivamente

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{u}_e) = 0, \quad (3.1)$$

$$m_e \left(\frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial t} + \mathbf{u}_e \cdot \nabla \mathbf{u}_e \right) = - \frac{\nabla P_e}{n_e} - e(\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}) + \mathbf{F}_\nu - \nu_{ei}(\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i), \quad (3.2)$$

as equações para os íons com massa m_i e carga e são

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \mathbf{u}_i) = 0, \quad (3.3)$$

$$m_i \left(\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + \mathbf{u}_i \cdot \nabla \mathbf{u}_i \right) = - \frac{\nabla P_i}{n_i} + e(\mathbf{E} + \mathbf{u}_i \times \mathbf{B}) - \nu_{ie}(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e). \quad (3.4)$$

O fluido de neutrinos satisfaz

$$\frac{\partial n_\nu}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\nu \mathbf{u}_\nu) = 0, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_\nu}{\partial t} + \mathbf{u}_\nu \cdot \nabla \mathbf{p}_\nu = \sqrt{2} G_F (\mathbf{E}_e + \mathbf{u}_\nu \times \mathbf{B}_e). \quad (3.6)$$

As densidades e velocidades do fluido dos elétrons, íons e neutrinos são $n_{e,i,\nu}$ e $\mathbf{u}_{e,i,\nu}$, a massa e a pressão do fluido de elétrons e íons são $m_{e,i}$ e $P_{e,i}$, o campo elétrico e magnético são representados por \mathbf{E} e \mathbf{B} . O momentum do feixe de neutrinos relativístico é $\mathbf{p}_\nu = \mathcal{E}_\nu \mathbf{u}_\nu / c^2$, onde \mathcal{E}_ν é a energia do feixe de neutrinos e c a velocidade da luz.

A força dos neutrinos \mathbf{F}_ν é escrita como

$$\mathbf{F}_\nu = \sqrt{2} G_F (\mathbf{E}_\nu + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}_\nu), \quad (3.7)$$

onde G_F é a constante de Fermi da interação fraca e \mathbf{E}_ν , \mathbf{B}_ν são os campos efetivos induzidos pela interação fraca, escritos por

$$\mathbf{E}_\nu = -\nabla n_\nu - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (n_\nu \mathbf{u}_\nu), \quad \mathbf{B}_\nu = \frac{1}{c^2} \nabla \times (n_\nu \mathbf{u}_\nu), \quad (3.8)$$

com

$$\mathbf{E}_e = -\nabla n_e - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (n_e \mathbf{u}_e), \quad \mathbf{B}_e = \frac{1}{c^2} \nabla \times (n_e \mathbf{u}_e), \quad (3.9)$$

usado na Eq. (3.6). Somente a corrente de carga fraca foi mantida, desconsiderando a corrente neutra fraca o que levaria a uma correção de primeira ordem para os termos proporcionais a G_F . Isto é porque os elétrons são acoplados aos neutrinos eletrônicos pelos bósons carregados W^\pm .

Para um melhor entendimento, será mostrado uma breve revisão de alguns pontos interessantes sobre os termos da interação eletrofraca usados nas Eqs. (3.2) e (3.6). Uma apresentação completa pode ser vista na Ref. [54] e também foram seguidas as Ref. [8, 17]. Na aproximação semi-clássica, a interação Lagrangiana para um neutrino em um *background* de elétrons, é escrita como

$$L_{int} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \left(n_e - \frac{\mathbf{J}_e \cdot \mathbf{v}_\nu}{c^2} \right) (C_V + 1), \quad (3.10)$$

com $\mathbf{J}_e = n_e \mathbf{v}_e$, \mathbf{v}_ν é a velocidade dos neutrinos e $C_V = 1/2 + \sin^2 \theta_W$ é a contante de acoplamento do vetor-corrente, onde θ_W é o ângulo de mistura de Weinberg, com $\sin \theta_W \simeq 1/2$. Usamos $C_V = 1$. A aproximação semi-clássica é satisfeita quando o comprimento de onda de de Broglie $\lambda_\nu = 2\pi\hbar/p_\nu$ (p_ν é o momentum dos neutrinos) é muito mais curto do que a escala típica de oscilação. Assume-se que essa suposição seja válida para neutrinos ultra-relativísticos. A formulação Lagrangiana completa para os neutrinos inclui a Lagrangiana livre L_0 para uma partícula massiva simples,

$$L = L_0 + L_{int} = -m_\nu c^2 \sqrt{1 - v_\nu^2/c^2} - \sqrt{2} G_F \left(n_e - \frac{\mathbf{J}_e \cdot \mathbf{v}_\nu}{c^2} \right). \quad (3.11)$$

A formulação Hamiltoniana encontrada na Ref. [54] é mais direta para construir uma teoria de acoplamento de neutrinos e elétrons. Então, o momentum canônico é

$$\mathbf{P}_\nu = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_\nu} = \mathbf{p}_\nu + \sqrt{2} \frac{G_F}{c^2} \mathbf{J}_e, \quad \mathbf{p}_\nu = \frac{m_\nu \mathbf{v}_\nu}{\sqrt{1 - v_\nu^2/c^2}}, \quad (3.12)$$

e a Hamiltoniana

$$H = \mathbf{P}_\nu \cdot \mathbf{v}_\nu - L = \sqrt{\left(\mathbf{P}_\nu c - \sqrt{2} \frac{G_F}{c} \mathbf{J}_e \right)^2 + m_\nu^2 c^4} + V_{eff}, \quad (3.13)$$

onde $V_{eff} = \sqrt{2} G_F n_e$ é o potencial efetivo entre o neutrino e o plasma eletrônico.

A equação momentum canônico é

$$\begin{aligned} \frac{dP_{\nu i}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial r_i} = -\frac{\partial V_{eff}}{\partial r_i} + \sqrt{2} G_F \sum_{j=1}^3 \frac{P_{\nu j} - \sqrt{2} G_F J_{ej}/c^2}{\sqrt{\left(\mathbf{P}_\nu c - \sqrt{2} G_F \mathbf{J}_e/c \right)^2 + m_\nu^2 c^4}} \frac{\partial J_{ej}}{\partial r_i} \\ &= \frac{\partial V_{eff}}{\partial r_i} + \frac{\sqrt{2} G_F}{c^2} \sum_{j=1}^3 v_{\nu j} \frac{\partial J_{ej}}{\partial r_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \mathbf{v}_\nu = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

usando as Eqs. (3.12) e (3.14), a equação para o momentum é

$$\frac{dp_{\nu i}}{dt} = -\sqrt{2} G_F \left[\frac{\partial n_e}{\partial r_i} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial J_{ei}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{v_{\nu j}}{c^2} \left(\frac{\partial J_{ei}}{\partial r_j} - \frac{\partial J_{ej}}{\partial r_i} \right) \right], \quad (3.15)$$

que, após um rearranjo, explica a equação de transporte de momentum dos neutrinos (3.6). Embora a aproximação acima para um simples neutrino, a descrição de fluido segue o formalismo semelhante de pacote de onda [55] e substituindo $\mathbf{v}_\nu \rightarrow \mathbf{u}_\nu$ a velocidade dos neutrinos. Uma abordagem alternativa para o mesmo problema começa a partir da teoria cinética para neutrinos em um meio ionizado [56], como é justificado em [57]. Até agora, somente o efeito dos neutrinos no plasma eletrônico tem sido estudado. Descobriu-se que o agrupamento de neutrinos devido à interação com os modos coletivos causam um gradiente de pressão no fluido de neutrinos, e portanto, dão origem a uma força ponderomotiva no fluido de elétrons. Nos referimos a Eq. (3.24) da Ref. [56] e a um raciocínio associado ao redor desta, para derivação detalhada de força ponderomotiva \mathbf{F}_ν dos neutrinos nas Eqs. (3.2) e (3.7).

As modificações em comparação com o modelo proposto por Mendonça [9] são a

inclusão de íons móveis e de uma transferência de momentum entre elétrons e íons do fluido, descrito de forma fenomenológica em termos da frequência de colisão, com ν_{ei} a taxa de colisão elétron-íon e ν_{ie} a taxa de colisão íon-elétron. A conservação global do momentum implica $m_e\nu_{ei} = m_i\nu_{ie}$, de modo que $\nu_{ie} \ll \nu_{ei}$, desde que $m_i \gg m_e$. A forma específica dos termos de dissipação é irrelevante na medida em que a conservação está assegurada, como discutido na derivação da teoria MHD [1, 28, 29]. Além disso, para simplificar as oscilações de sabores de neutrinos são desconsideradas neste capítulo.

As Eqs. (3.1)-(3.6) tem como complemento as equações de Maxwell,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (3.16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.17)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.18)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (3.19)$$

onde ε_0 e μ_0 são a permissividade e permeabilidade no vácuo, respectivamente.

A densidade de carga e corrente são descritas por

$$\rho = e(n_i - n_e), \quad (3.20)$$

$$\mathbf{J} = e(n_i \mathbf{u}_i - n_e \mathbf{u}_e). \quad (3.21)$$

As Eqs. (3.1)-(3.19) constituem um modelo magnetohidrodinâmico completo com interação do fluido de plasma com um feixe de neutrinos que permite obter, entre diversas possibilidades, a formulação magnetohidrodinâmica com um fluido unificado de elétrons e íons. Para isto, introduzimos a densidade global de massa ρ_m e a velocidade global do fluido \mathbf{U} ,

$$\rho_m = m_e n_e + m_i n_i, \quad (3.22)$$

$$\mathbf{U} = \frac{m_e n_e \mathbf{u}_e + m_i n_i \mathbf{u}_i}{m_e n_e + m_i n_i}. \quad (3.23)$$

Aqui, as velocidades dos elétrons e íons são dadas por

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{U} - \frac{m_i \mathbf{J}}{e \rho_m}, \quad (3.24)$$

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{U} - \frac{m_e \mathbf{J}}{e \rho_m}. \quad (3.25)$$

Utilizando as definições sugeridas e seguindo o procedimento padrão encontrado em diversos livros texto de física dos plasmas [1, 28, 29], obtemos a equação de transporte de massa e momentum, considerando, sempre que possível, $m_i \gg m_e$,

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{U}) = 0, \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \rho_m \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} \right) = & - \nabla \cdot \Pi + \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \\ & + \left(\frac{\rho_m}{m_i} - \frac{\rho}{e} \right) \mathbf{F}_\nu. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Na Eq. (3.27), o *stress dyad* Π é dado por

$$\Pi = P \mathbf{I} + \frac{m_e m_i n_e n_i}{\rho_m} (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i) \otimes (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i), \quad (3.28)$$

onde $P = P_e + P_i$ é a pressão escalar total do plasma, \mathbf{I} é a matriz identidade e \otimes é o produto tensorial.

Nas Eqs.(3.27)-(3.28) as densidades dos elétrons e íons são definidas em termos da densidade de massa e carga de acordo com

$$m_e = \frac{1}{m_i + m_e} \left(\rho_m - \frac{m_i}{e} \rho \right), \quad (3.29)$$

$$m_i = \frac{1}{m_i + m_e} \left(\rho_m + \frac{m_e}{e} \rho \right). \quad (3.30)$$

Desconsiderando o segundo termo do lado direito da Eq. (3.28) conforme o procedimento padrão [1, 28, 29] devido às condições dominantes de pressão escalar. Assumindo condutividade infinita podemos desconsiderar o desequilíbrio de carga, de modo que $\rho \approx 0$ e $n_e \approx n_i$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} = - \frac{1}{\rho_m} \nabla P + \frac{1}{\rho_m} \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \frac{\mathbf{F}_\nu}{e m_i}. \quad (3.31)$$

Tomando a derivada no tempo da lei de Ampère-Maxwell, se obtém a lei de Ohm

generalizada,

$$\begin{aligned} \frac{m_e m_i}{\rho_m e} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} &- \frac{m_i}{\rho_m} \nabla P = e(\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B}) \\ &- \frac{m_i}{\rho_m} \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \mathbf{F}_\nu - \frac{\mathbf{J}}{\sigma}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde $\sigma = \rho_m e^2 / (m_e m_i \nu_{ei})$ é a condutividade elétrica longitudinal. Usando as definições apresentadas, as Eq. (3.27) e (3.32) podem ser reescritas utilizando a equação da força dos neutrinos (3.7) na forma

$$\mathbf{F}_\nu = \sqrt{2} G_F \left[\mathbf{E}_\nu + \left(\mathbf{U} - \frac{m_i \mathbf{J}}{\rho_m e} \right) \times \mathbf{B}_\nu \right], \quad (3.33)$$

que representa a influência dos neutrinos no fluido MHD.

Como o modelo obtido é muito amplo, devem ser feitas algumas simplificações, de acordo com o procedimento habitual encontrado nos livros texto de física dos plasmas [1, 28, 29], mas ainda mantendo as modificações obtidas devido a interação do plasma com o feixe de neutrinos. Temos o conjunto de equações para a teoria MHD global

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{U}) = 0, \quad (3.34)$$

$$\rho_m \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} \right) = - \nabla P + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \frac{1}{m_i} \mathbf{F}_\nu, \quad (3.35)$$

$$\nabla P = V_s^2 \nabla \rho_m, \quad (3.36)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.37)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (3.38)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \left[\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B} - \frac{m_i}{e \rho_m} \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \frac{\mathbf{F}_\nu}{e} \right]. \quad (3.39)$$

Sendo que V_s da Eq. (3.36) é a velocidade adiabática do som no fluido. Assumindo aqui, condutividade infinita $\sigma \rightarrow \infty$, de modo que o desequilíbrio de carga pode ser desconsiderado, $\rho \approx 0$, logo $n_e \approx n_i$. Negligenciando a derivada da densidade de corrente em relação ao tempo e o termo de pressão da Eq. (3.32) devido a dependência lenta no tempo e ignorando também o termo Hall $\sim \mathbf{J} \times \mathbf{B}$ por ser onda de alta frequência.

Desconsiderando correções relativísticas sobre as equações MHD, uma vez que os elétrons e íons são assumidos não relativísticos e para as ondas com velocidade de fase muito

menor do que a velocidade da luz, a corrente de deslocamento pode ser negligenciada na lei de Ampère-Maxwell.

Assumindo essas hipóteses, eliminamos o campo elétrico $\mathbf{E} = -\mathbf{U} \times \mathbf{B} + \mathbf{F}_\nu/e$, os campos efetivos em um fluido não-relativístico ficam sendo $\mathbf{E}_e = \nabla n_e = -\frac{\nabla \rho_m}{m_i}$ e $\mathbf{B}_e = 0$.

Com isso, obtemos as equações básicas para o modelo *NMHD*. A equação da continuidade para os neutrinos (3.5) como

$$\frac{\partial n_\nu}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\nu \mathbf{u}_\nu) = 0, \quad (3.40)$$

a equação da força para neutrinos,

$$\frac{\partial \mathbf{p}_\nu}{\partial t} + \mathbf{u}_\nu \cdot \nabla \mathbf{p}_\nu = -\frac{\sqrt{2} G_F}{m_i} \nabla \rho_m, \quad (3.41)$$

a equação da continuidade (3.34), reescrita conforme

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{U}) = 0, \quad (3.42)$$

a equação da forma para os neutrinos, reescrita como

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} = -\frac{V_S^2 \nabla \rho_m}{\rho_m} + \frac{(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{\mu_0 \rho_m} + \frac{\mathbf{F}_\nu}{m_i}, \quad (3.43)$$

e, por fim, a lei de Faraday

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left(\mathbf{U} \times \mathbf{B} - \frac{\mathbf{F}_\nu}{e} \right), \quad (3.44)$$

onde foi eliminado o campo elétrico e usado a lei de Gauss magnética como condição inicial. Assim, temos um conjunto completo de 11 equações com 11 variáveis, ρ_m , n_ν e as componentes de \mathbf{U} , \mathbf{p}_ν , \mathbf{B} .

É importante assegurar as condições de validade das equações *NMHD* simplificadas. Neutrinos são quase sempre uma perturbação, de modo que na ordem zero o modelo tem as mesmas condições de validade que a MHD ideal, mostrados, por exemplo em [58]. Começando com o modelo de plasma de duas espécies de fluidos, devido ao alto índice de colisões é possível utilizar o modelo MHD (por definição, sempre um modelo de um

fluido), ou

$$|\omega| \ll \nu_{ei}, \quad (3.45)$$

onde $|\omega|^{-1}$ é a escala de tempo do fluxo MHD, ν_{ei} é a taxa de colisão elétron-íon. Além disso, as equações MHD simplificadas são válidas para o plasma de alta condutividade e uma velocidade típica $V \ll c$,

$$\frac{\varepsilon_0 |\omega|}{\sigma} \ll 1, \quad \frac{\varepsilon_0 V}{\sigma L} \ll 1, \quad (3.46)$$

onde L é uma escala de comprimento característica. Em ambientes astrofísicos apenas a primeira condição na Eq. (3.46) pode causar dificuldades.

Em vista da expressão da condutividade na Eq. (3.32), a combinação das Eqs. (3.45) e (3.46), expressa em termos de ν_{ei} é

$$\frac{m_i |\omega|}{m_e} \ll \nu_{ei} \ll \frac{\omega_{pe}^2}{|\omega|}, \quad (3.47)$$

onde para uma densidade de número de equilíbrio n_0 temos $\rho_m \approx n_0 m_i$. Por definição, efeitos cinéticos tais como amortecimento de Landau para elétrons e neutrinos não estão incluídos em um modelo hidrodinâmico.

A Eq. (3.47) pode ser expressa em termos de parâmetros físicos mais específicos. Utilizando o capítulo V de [59], a frequência de Landau para colisões elétron-elétron é dada por

$$\nu_{ee} \approx \nu_{ei} = \frac{2\omega_{pe}}{3} \frac{\ln \Lambda}{\Lambda}, \quad \Lambda = 4\pi n_0 \lambda_D^3 / 3, \quad \lambda_D = v_T / \omega_{pe}, \quad (3.48)$$

onde $v_T = \sqrt{2k_B T_e / m_e}$ é a velocidade térmica para um fluido de elétrons com temperatura T_e e constante de Boltzmann k_B . Em seguida, a partir das equações (3.47), (3.48) em sua forma adimensional,

$$\frac{m_i |\omega|}{m_e \omega_{pe}} \ll \frac{2 \ln \Lambda}{3 \Lambda} \ll \frac{\omega_{pe}}{|\omega|}. \quad (3.49)$$

Uma discussão mais detalhada das condições de validade para magnetohidrodinâmica podem ser encontrados na Ref. [60], no capítulo VII.

3.2 Relação de dispersão simplificada

Uma consequência da interação do fluido de plasma com o feixe de neutrinos é que a condição de congelamento das linhas de campo magnético num plasma ideal é quebrada pela força \mathbf{F}_ν na Eq. (3.44). Esse efeito qualitativamente novo vem da força fraca agindo sobre os elétrons e, portanto, sobre o fluido MHD, que é a fonte do próprio campo magnético. Os resultados mostrados nessa seção foram apresentados em [30].

Quando considerado uma situação quase-estática, onde $\mathbf{U} \approx 0$, $\mathbf{J} \approx 0$ e próxima do equilíbrio, o termo contendo o campo magnético “fraco” \mathbf{B}_ν dos neutrinos na Eq. (3.33) é de segunda ordem. Além disso, para onda subluminal e de baixa frequência a força fraca é escrita conforme $\mathbf{F}_\nu = -\sqrt{2}G_F\nabla n_\nu$, de modo que $\nabla \times \mathbf{F}_\nu = 0$, a condição de congelamento das linhas de campo ainda é satisfeita, visto na Eq. (3.44).

Para obter a relação de dispersão para o sistema *NMHD*, consideramos perturbações de pequenas amplitudes em torno de um equilíbrio homogêneo magnetizado e supondo a perturbação de onda plana proporcional a $\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$. Considerando $\rho_m = \rho_{m0}$, $n_\nu = n_{\nu0}$, $\mathbf{U} = 0$, $\mathbf{p}_\nu = \mathbf{p}_{\nu0}$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$ nas equações (3.40)-(3.44) e desconsiderando os termos de segunda ordem, obtemos

$$\omega \delta n_\nu = \mathbf{k} \cdot (n_{\nu0} \delta \mathbf{u}_\nu + \delta n_\nu \mathbf{u}_{\nu0}), \quad (3.50)$$

$$(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu0}) \delta \mathbf{p}_\nu = \frac{\sqrt{2}G_F}{m_i} \mathbf{k} \delta \rho_m, \quad (3.51)$$

$$\omega \delta \rho_m = \rho_{m0} (\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{U}), \quad (3.52)$$

$$\omega \delta \mathbf{U} = \frac{V_S^2 \mathbf{k} \delta \rho_m}{\rho_{m0}} - \frac{1}{\rho_{m0} \mu_0} (\mathbf{k} \times \delta \mathbf{B}) \times \mathbf{B}_0 + \frac{\sqrt{2}G_F}{m_i} \mathbf{k} \delta n_\nu, \quad (3.53)$$

$$-\omega \delta \mathbf{B} = \mathbf{k} \times \delta \mathbf{U} \times \mathbf{B}_0 - \frac{\sqrt{2}G_F}{m_i} \mathbf{k} \delta n_\nu, \quad (3.54)$$

onde ρ_{m0} é a densidade de massa no equilíbrio, \mathbf{B}_0 é o campo magnético considerado uniforme e constante e $n_{\nu0}$ é a densidade dos neutrinos no equilíbrio. Quantidades perturbadas recebem a variável δ .

Por exemplo, a correção linear para a velocidade dos neutrinos se torna

$$\delta \mathbf{u}_\nu = \frac{c^2}{\varepsilon_{\nu 0}} (\delta \mathbf{p}_\nu - \mathbf{u}_{\nu 0} \mathbf{u}_{\nu 0} \cdot \delta \mathbf{p}_\nu / c^2) \quad (3.55)$$

$$= \frac{\sqrt{2} G_F \rho_{m0} c^2 (\mathbf{k} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0} \mathbf{u}_{\nu 0} / c^2)}{m_i \varepsilon_{\nu 0} \omega (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0})} \mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{U}. \quad (3.56)$$

A Eq. (3.55) pode ser encontrada usando a relação entre o momentum do neutrino, a velocidade dos neutrinos e a relação de energia-momentum $\mathcal{E} = (p_\nu^2 c^2 + m_\nu^2 c^4)^{1/2}$, onde a massa dos neutrinos definida por m_ν é eliminada no final. O passo da Eq. (3.55) para a Eq. (3.56) é feito usando a equação da continuidade de plasma linearizada e a equação de transporte dos neutrinos.

Na Eq. (3.55), a força do neutrino linearizada torna-se $\delta \mathbf{F}_\nu = \sqrt{2} G_F \delta \mathbf{E}_\nu$ uma vez que o termo contendo o campo magnético efetivo \mathbf{B}_ν dos neutrinos é de segunda ordem. O campo elétrico efetivo perturbado $\delta \mathbf{E}_\nu$ dos neutrinos pode ser encontrado a partir da Eq. (3.8), juntamente com a equação de continuidade dos neutrinos e a Eq. (3.56). O resultado é

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{F}_\nu &= \frac{2i G_F^2 n_{\nu 0} \rho_{m0} (\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{U})}{m_i \varepsilon_{\nu 0} \omega (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0})^2} \times \\ &\times \left[((\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0})^2 - c^2 k^2 - \omega (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0}) + \omega^2) \mathbf{k} + \omega \left(k^2 - \frac{\omega}{c^2} \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0} \right) \mathbf{u}_{\nu 0} \right]. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Como esperado, a força dos neutrinos é aprimorada para $\omega \approx \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0}$, quando há um acoplamento neutrino-onda.

A equação de momentum linearizada apenas em termos de $\delta \mathbf{U}$,

$$\begin{aligned} \omega^2 \delta \mathbf{U} &= \left(V_S^2 + V_A^2 + V_N^2 \frac{(c^2 k^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0})^2)}{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0})^2} \right) (\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{U}) \mathbf{k} \\ &+ (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_A) \left((\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_A) \delta \mathbf{U} - (\delta \mathbf{U} \cdot \mathbf{V}_A) \mathbf{k} \right. \\ &\left. - (\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{U}) \mathbf{V}_A \right). \end{aligned} \quad (3.58)$$

Sempre que possível, foi utilizado o pressuposto de baixa frequência $\omega/k \ll c$. Na Eq. (3.58), o vetor velocidade de Alfvén \mathbf{V}_A e uma nova velocidade característica em relação

ao neutrino V_N foram empregados. Esses são dados por

$$\mathbf{V}_A = \frac{\mathbf{B}_0}{(\rho_{m0}\mu_0)^{1/2}}, \quad V_N = \left(\frac{2G_F^2 \rho_{m0} n_{\nu 0}}{m_i^2 \mathcal{E}_{\nu 0}} \right)^{1/2}, \quad (3.59)$$

onde $\mathcal{E}_{\nu 0}$ é a energia do feixe de neutrinos no equilíbrio, e $\mathbf{p}_{\nu 0} = \mathcal{E}_{\nu 0} \mathbf{u}_{\nu 0}/c^2$. É interessante notar que V_N é determinada tanto pelas variáveis MHD quanto pelas variáveis dos neutrino, enfatizando o acoplamento entre eles. A Eq. (3.58) é a relação padrão de dispersão MHD geral [1, 28, 29], exceto pela contribuição dos neutrinos.

3.2.1 Ondas lineares e instabilidades

Analisando a relação de dispersão (3.58) podemos obter os modos para as ondas de Alfvén que são puramente transversais, para $\mathbf{k} \perp \mathbf{V}_A$ e $\mathbf{k} \perp \delta\mathbf{U}$ não são afetadas pelo feixe de neutrinos, pelo menos sob o conjunto de aproximações usadas nesta seção.

Podemos também considerar alguns ângulos entre a propagação da onda e o feixe de neutrinos para obtermos resultados mais gerais.

Um outro possível modo de oscilação é o das ondas magnetosônicas com $\mathbf{k} \perp \mathbf{V}_A$ e $\mathbf{k} \parallel \delta\mathbf{U}$, onde é encontrada uma instabilidade devido ao feixe de neutrino. Considerando um ângulo θ entre a propagação da onda e o feixe de neutrinos, como mostrado na Fig. 3.1 com $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0} = k u_{\nu 0} \cos \theta$. A relação de dispersão se reduz

$$\left(\frac{\omega}{k} - u_{\nu 0} \cos \theta \right)^2 \left(\frac{\omega^2}{k^2} - V_S^2 - V_A^2 \right) = V_N^2 (c^2 - u_{\nu 0}^2 \cos^2 \theta). \quad (3.60)$$

O lado direito da Eq. (3.60) pode ser tomado como uma perturbação. Portanto, tomando $\omega = k u_{\nu 0} \cos \theta + i\gamma$, onde γ é muito menor do que a frequência $\Omega \equiv (V_s^2 + V_A^2)^{1/2} k$. A solução é

$$\gamma = \frac{V_N k (c^2 - u_{\nu 0}^2 \cos^2 \theta)^{1/2}}{(V_S^2 + V_A^2 - u_{\nu 0}^2 \cos^2 \theta)^{1/2}}, \quad (3.61)$$

apontando para uma instabilidade ($\gamma > 0$) desde que $V_s^2 + V_A^2 > u_{\nu 0}^2 \cos^2 \theta$. Tendo em vista que os neutrinos são ultra-relativísticos ($u_{\nu 0} \approx c$), a instabilidade é mais provável para a propagação perpendicular, $\theta = \pi/2$. Nesse caso, a velocidade do feixe de neutrinos ultra-relativístico aparece apenas implicitamente, por meio da energia do feixe de neutrinos $\mathcal{E}_{\nu 0}$ contidos em V_N .

Foram identificadas características específicas, como: a instabilidade é maior por $\mathbf{u}_{\nu 0} \perp \mathbf{k}$ e é suprimida para propagação paralela; como esperado, a instabilidade é maior para o feixe de neutrinos mais denso e menor campo magnético ambiente. Além disso, a taxa de crescimento é $\gamma \sim V_n \sim G_F$, que é muito maior do que as instabilidades feixe de neutrino-plasma eletrostáticas típicas [60] que não consideram um campo magnético ambiente.

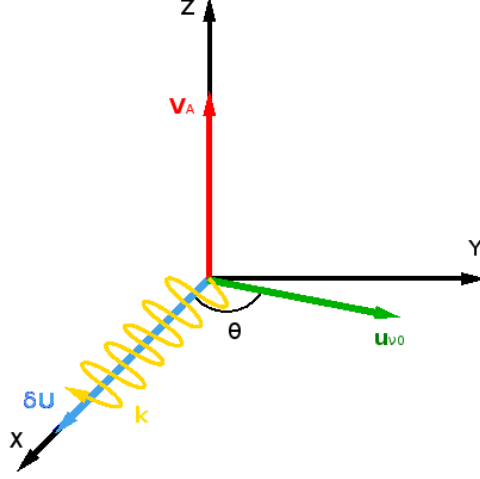


Figura 3.1: Geometria da instabilidade mostrada na Eq. (3.61), conforme apresentada em [30].

No caso dos neutrinos com uma propagação perpendicular $\theta = \pi/2$ e desprezando a velocidade adiabática do som em comparação com a velocidade de Alfvén em um plasma fortemente magnetizado, o resultado é

$$\gamma = \left(\frac{2n_{\nu 0}}{\varepsilon_0 \mathcal{E}_{\nu 0}} \right)^{1/2} \frac{G_F n_0 k}{B_0}. \quad (3.62)$$

Usando a constante de Fermi $G_F = 1.45 \times 10^{-62} \text{ J.m}^3$, para um plasma de hidrogênio e parâmetros típicos das supernovas [6], teremos $n_{\nu 0} = 10^{35} \text{ m}^{-3}$, que é a mesma densidade de número n_0 do fluido MHD, além de uma energia $\varepsilon_{\nu 0} = 10 \text{ MeV}$, o resultado é $\gamma = 172.33 k/B_0$, em termos de unidades S.I. Usando $\omega = 6.90 \times 10^{-2} k B_0$, obtemos $\gamma/\omega = 2.50 \times 10^3 B_0^{-2} \ll 1$ para os campos magnéticos fortes $B_0 \approx 10^6 - 10^8 T$ característicos em eventos do colapso do núcleo de estrelas. A taxa de crescimento é muito menor do que a frequência magnetosônica, justificando a aproximação usada na derivação da Eq. (3.61). Devemos considerar a intensidade do campo magnético abaixo do ponto crítico de Schwinger $B_c = m_e^2 c^2 / (e \hbar) = 4.43 \times 10^9 T$, mas grande o suficiente para considerar

$$V_S \ll V_A.$$

Como ilustração, podemos considerar $\kappa_B T_e = 0.1 MeV$, temos $\Lambda = 487.38$, $\omega_{pe} = 1.78 \times 10^{19} s^{-1}$, $\nu_{ei} = 1.51 \times 10^{17} s^{-1}$. A ordem de desigualdades (3.48) com $|\omega| \approx \gamma$ para o plasma de elétron-próton torna-se

$$1.77 \times 10^{-14} k/B_0 \ll 8.47 \times 10^{-3} \ll 1.03 \times 10^{17} B_0/k, \quad (3.63)$$

que é bem atendido por qualquer número de onda moderado, para campos magnéticos fortes. Portanto, as condições da MHD simplificadas e ideais são satisfeitas.

Pode-se considerar $B_0 = 10^6 T$ e um comprimento de onda $\lambda = 2\pi/k = 1 nm$ de raios-x de baixa energia. A partir da Eq. (3.62) temos $\gamma = 1.08 \times 10^6 s^{-1}$. Isto pode ser comparado com a escala de tempo (cerca de 1 segundo) de uma explosão de supernova. Então a instabilidade devido aos neutrinos é rápida o suficiente para ocasionar o evento cataclísmico. Para isso foi definido $V_A = 69.03 km/s$ e $V_N = 3.97 \times 10^{-8} m/s$. Utilizando os mesmos parâmetros, mas deixando a velocidade de Alfvén e velocidade adiabática do som livres, pode-se calcular a taxa de crescimento do ramo instável da relação de dispersão (3.60) como uma função da velocidade magnetosônicas $V = \sqrt{V_S^2 + V_A^2}$, conforme mostrado na Fig. 3.2.

Pode-se, colocar em questão haveremos negligenciado a corrente de deslocamento. No entanto,

$$\frac{\varepsilon_0 |\partial \mathbf{E} / \partial t|}{\sigma |\mathbf{E}|} \sim \frac{\varepsilon_0 \gamma}{\sigma} \sim \frac{\nu_{ei} \gamma}{\omega_{pe}^2} \ll 1, \quad (3.64)$$

que é automaticamente satisfeita, tendo em conta a última desigualdade na Eq. (3.49). Outra preocupação é sobre possíveis mecanismos para a distribuição anisotrópica de velocidades de neutrinos associada ao feixe de neutrinos, discutida na Ref. [61]. Em particular, na neutrinosfera há uma pequena difusão angular da direção radial do feixe neutrinos. Além disso, em supernovas tipo II, os neutrinos são suficientemente colimados para fornecerem um mecanismo de instabilidade eletrostática adequada [62].

Podemos considerar $\theta = \pi/2$ para simplificar, de modo que $\gamma = V_N c k / V$ satisfaça claramente a suposição de baixa frequência $\gamma / (Vk) = V_N c / V^2 \ll 1$ exceto para velocidades magnetosônicas extremamente pequenas. O resultado mostrado na Fig. 3.3 implica uma menor taxa de crescimento para comprimentos de onda mais longos, mas ainda alcançando

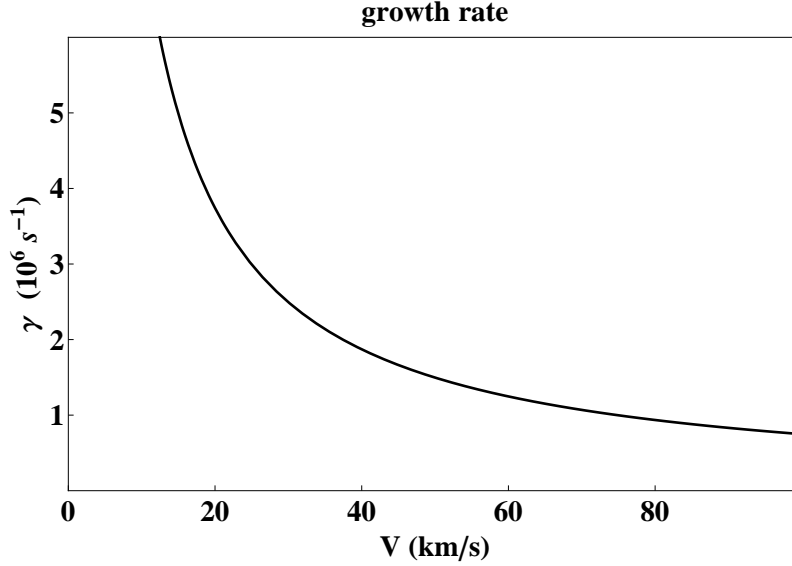


Figura 3.2: Taxa de crescimento devido à Eq. (3.60) como uma função da velocidade magnetosônica $V = \sqrt{V_S^2 + V_A^2}$. Parâmetros: $\theta = \pi/2$, $V_N = 1.77 \times 10^{-8}$ m/s, $k = 2\pi \times 10^{12}$ m $^{-1}$. Conforme apresentado em [30].

valores apreciáveis para parâmetros típicos.

3.3 Relação de dispersão para geometrias gerais

Será utilizado e estendido o modelo estudado na seção anterior, mas agora incluindo orientações arbitrárias.

Partindo do equilíbrio homogêneo $n_\nu = n_{\nu 0}$, $\rho_m = \rho_{m0}$, $\mathbf{p}_\nu = \mathbf{p}_{\nu 0}$, $\mathbf{U} = 0$ e $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$. Seguindo o procedimento padrão e linearizando é possível obter a relação de dispersão para ondas de pequena amplitude. Os resultados exibidos nessa seção foram publicados em [34].

A equação de momentum linearizada apenas em termos de $\delta\mathbf{U}$,

$$\begin{aligned}
\omega^2 \delta\mathbf{U} &= \left(V_A^2 + V_S^2 + V_N^2 \left(\frac{c^2 k^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0})^2 + \omega(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0}) - \omega^2}{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0})^2} \right) \right) (\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{U}) \mathbf{k} \\
&+ (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_A) ((\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_A) \delta\mathbf{U} - (\delta\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}_A) \mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{U}) \mathbf{V}_A) \\
&- \frac{\omega V_N^2 (k^2 - \omega \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0} / c^2) (\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{U}) \mathbf{u}_{\nu 0}}{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0})^2} \\
&+ \frac{i V_N^2 V_A (\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{U})}{\Omega_i (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0})^2} \left(k^2 - \frac{\omega \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0}}{c^2} \right) \mathbf{V}_A \times (\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{u}_{\nu 0})), \quad (3.65)
\end{aligned}$$

enquanto $\Omega_i = eB_0/m_i$ é a frequência cíclotron dos íon. A velocidade característica

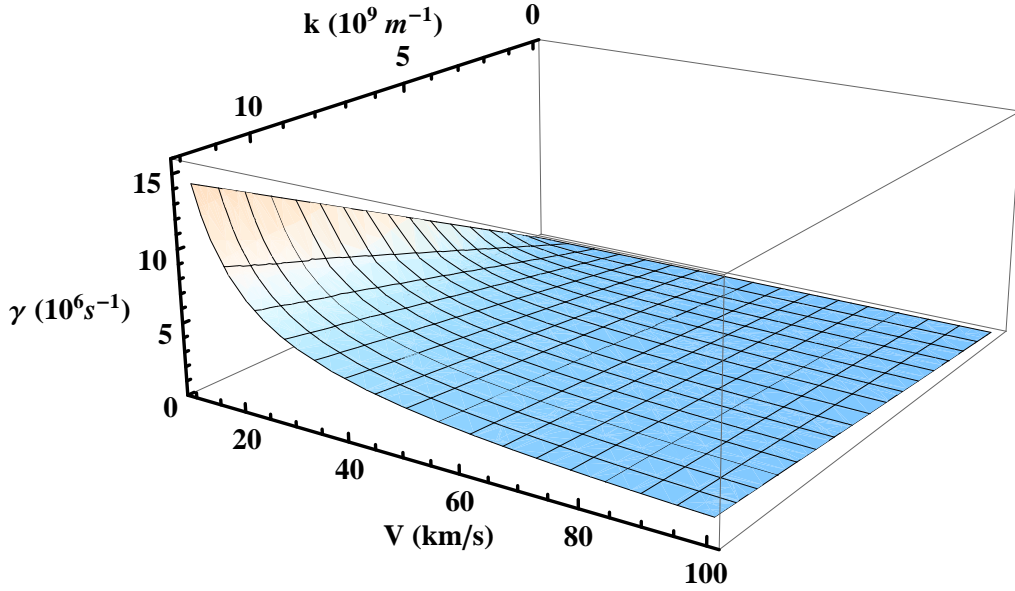


Figura 3.3: Taxa crescimento $\gamma = V_N c k / V$ como uma função do número de onda k e da velocidade magnetosônica $V = \sqrt{V_S^2 + V_A^2}$. Parâmetros: $\theta = \pi/2$, $V_N = 1.77 \times 10^{-8}$ m/s. Conforme apresentado em [30].

do neutrino-plasma V_N contém variáveis da teoria MHD e dos neutrino, enfatizando o acoplamento mútuo.

Considerando a expressão simplificada para ondas de baixa frequência, de modo que $\omega/k \ll c$, é permitido desconsiderar os termos contendo ω nos numeradores do lado direito da Eq. (3.65). Do mesmo modo, o último termo proporcional a Ω_i^{-1} pode ser descartado, desde que $kV_A/\Omega_i \ll c/V_A$, ou equivalentemente $ck/\omega_{pe} \ll \omega_{pe}/\Omega_e$, onde $\Omega_e = eB_0/m_e$ é a frequência cíclotron dos elétrons. Tal condição tende a ser facilmente satisfeita para comprimentos de onda muito maiores que o “*skin depth*” eletrônico c/ω_{pe} e densidades suficientemente grandes para que $\omega_{pe} \gg \Omega_e$. Finalmente, a Eq. (3.65) se reduz [30] a

$$\begin{aligned} \omega^2 \delta \mathbf{U} &= \left(V_S^2 + V_A^2 + V_N^2 \frac{(c^2 k^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0})^2)}{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0})^2} \right) (\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{U}) \mathbf{k} \\ &+ (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_A) \left((\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_A) \delta \mathbf{U} - (\delta \mathbf{U} \cdot \mathbf{V}_A) \mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{U}) \mathbf{V}_A \right). \end{aligned} \quad (3.66)$$

Em [30], para simplificar, supôs-se que $\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_A = 0$, que permite descartar vários termos da Eq. (3.66). Isso corresponde à onda magnetosônica modificada pela componente dos neutrinos, para a qual $\delta \mathbf{U} \parallel \mathbf{k}$. Então, é considerado uma situação geral, onde o vetor de onda e o campo magnético ambiente têm uma orientação arbitrária, como mostrado na Fig. 3.4. A instabilidade correspondente devido ao feixe dos neutrinos foi então avaliada.

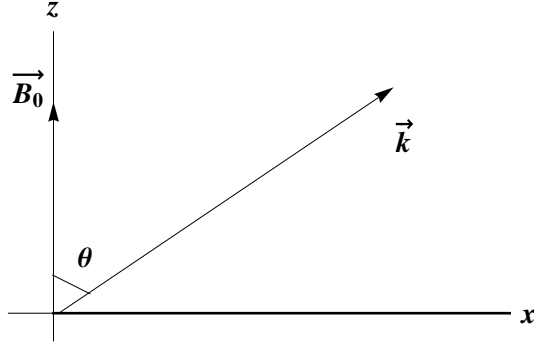


Figura 3.4: Vetor de onda e campo magnético ambiente. Conforme apresentado em [34].

A partir da Eq. (3.66) são obtidas as mesmas ondas lineares encontradas na MHD ideal e simplificada, desde que a velocidade adiabática do som V_S seja substituída por $\tilde{V}_S(\omega, \mathbf{k})$ definida por

$$\tilde{V}_S^2(\omega, \mathbf{k}) = V_S^2 + V_N^2 \frac{(c^2 k^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0})^2)}{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0})^2}, \quad (3.67)$$

de modo que

$$\begin{aligned} \omega^2 \delta \mathbf{U} &= \left(V_A^2 + \tilde{V}_s^2(\omega, \mathbf{k}) \right) (\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{U}) \mathbf{k} \\ &+ (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_A) \left((\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_A) \delta \mathbf{U} - (\delta \mathbf{U} \cdot \mathbf{V}_A) \mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{U}) \mathbf{V}_A \right), \end{aligned} \quad (3.68)$$

que é uma equação bem conhecida na MHD ideal e simplificada [1, 28, 29].

Assumindo a geometria da Fig. 3.4, sem perda de generalidade, a componente y do vetor de onda \mathbf{k} e da velocidade de Alfvén \mathbf{V}_A é ajustada para zero. O determinante do sistema homogêneo da Eq. (3.68) para os componentes de $\delta \mathbf{U}$ é

$$(\omega^2 - k^2 V_A^2 \cos^2 \theta) \left[\omega^4 - k^2 (V_A^2 + \tilde{V}_S^2(\omega, \mathbf{k})) \omega^2 + k^4 V_A^2 \tilde{V}_S^2(\omega, \mathbf{k}) \cos^2 \theta \right] = 0. \quad (3.69)$$

Com isso, temos que uma raiz é $\omega = k V_A \cos \theta$, que é a onda de Alfvén, não afetada pelo feixe de neutrinos. Isso acontece porque $\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{U} = 0$ para a onda de Alfvén, que elimina a contribuição dos neutrinos na Eq. (3.68). Portanto, os modos mais interessantes provêm do segundo termo na Eq. (3.69) que serão discutidos a seguir.

3.3.1 Instabilidades

A relação de dispersão geral (3.69), ignorando as ondas de Alfvén, produz

$$\begin{aligned} \omega^4 - k^2(V_A^2 + V_S^2)\omega^2 + k^4V_A^2V_S^2\cos^2\theta \\ = \frac{V_N^2k^2(c^2k^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0})^2)(\omega^2 - k^2V_A^2\cos^2\theta)}{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0})^2}, \end{aligned} \quad (3.70)$$

onde a contribuição dos neutrinos foi isolada no lado direito. Devido ao pequeno valor da constante de Fermi, a contribuição dos neutrinos é sempre uma perturbação. Na Eq. (3.70) é possível definir

$$\omega = \Omega + \delta\omega, \quad \Omega \gg \delta\omega, \quad \Omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0}, \quad (3.71)$$

onde Ω é a solução clássica, desconsiderando a contribuição dos neutrinos,

$$\Omega^4 - k^2(V_A^2 + V_S^2)\Omega^2 + k^4V_S^2V_A^2\cos^2\theta = 0, \quad (3.72)$$

na Eq. (3.71) o modo de feixe dos neutrinos foi selecionado para aumentar a contribuição dos neutrinos.

A solução de ordem zero fornece as ondas magnetosônicas rápidas (+) e lentas (-), seguindo as relações de dispersão,

$$\Omega = \omega_{\pm} = kV_{\pm}, \quad V_{\pm} = \left[\frac{1}{2} \left(V_A^2 + V_S^2 \pm \sqrt{(V_A^2 + V_S^2)^2 + 4V_A^2V_S^2\sin^2\theta} \right) \right]^{1/2}. \quad (3.73)$$

Levando em consideração a Eq. (3.70) e a Eq. (3.71), bem como a expressão da frequência não perturbada, obtemos

$$\begin{aligned} (\delta\omega)^3 &= \frac{\pm V_N^2(c^2k^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0})^2)(V_{\pm}^2 - V_A^2\cos^2\theta)k}{2V_{\pm}\sqrt{(V_A^2 - V_S^2)^2 + 4V_A^2V_S^2\sin^2\theta}} \\ &\approx \frac{\pm V_N^2c^2(V_{\pm}^2 - V_A^2\cos^2\theta)k^3}{2V_{\pm}\sqrt{(V_A^2 - V_S^2)^2 + 4V_A^2V_S^2\sin^2\theta}}, \end{aligned} \quad (3.74)$$

onde no último passo $\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0}$ e $V_{\pm}^2 \ll c^2$ foram utilizados. A raiz instável com

$\gamma = \text{Im}(\delta\omega) > 0$ produz a taxa de crescimento

$$\gamma = \gamma_{\pm} = \frac{\sqrt{3}k}{2^{4/3}} \left(\frac{\Delta c^4 |V_{\pm}^2 - V_A^2 \cos^2 \theta|}{V_{\pm} \sqrt{(V_A^2 - V_S^2)^2 + 4V_A^2 V_S^2 \sin^2 \theta}} \right)^{1/3}, \quad (3.75)$$

introduzido a quantidade adimensional

$$\Delta = \frac{V_N^2}{c^2} = \frac{2G_F^2 n_0 n_{\nu 0}}{m_i c^2 \mathcal{E}_{\nu 0}}. \quad (3.76)$$

O parâmetro Δ é encontrado em problemas de interação neutrino-plasma, como na discussão das cargas efetivas de neutrinos e anti-neutrinos ou na expressão da contribuição dos neutrinos na susceptibilidade de um plasma. A condição de feixe fraco $\gamma/\Omega \ll 1$ pode ser escrita como

$$\frac{\Delta c^4 |V_{\pm}^2 - V_A^2 \cos^2 \theta|}{V_{\pm}^4 \sqrt{(V_A^2 - V_S^2)^2 + 4V_A^2 V_S^2 \sin^2 \theta}} \ll 1, \quad (3.77)$$

independente da magnitude k do número de onda. Nos casos improváveis onde a Eq. (3.77) não é satisfeita, é preciso voltar para a equação polinomial de sexta ordem na Eq. (3.70), para ser resolvida numericamente.

A taxa de crescimento na Eq. (3.62) é completamente geral, no sentido em que é válida para geometrias arbitrárias da propagação de ondas, desde que a suposição de feixe fraco seja válida. É interessante avaliar a estabilidade nos casos magnetosônicos rápidos e lentos, bem como à propagação de ondas perpendiculares ($\mathbf{k} \perp \mathbf{V}_A$) e paralelas ($\mathbf{k} \parallel \mathbf{V}_A$) ao campo magnético.

Desestabilização das ondas magnetosônicas rápidas

A escolha do sinal de adição na Eq. (3.75) corresponde a onda magnetosônica rápida, com uma taxa de crescimento $\gamma \equiv \gamma_+$. De agora em diante, serão aplicados os parâmetros do cenário de colapso do núcleo de supernovas tipo II, como para a supernova SN1987A. Para o feixe de 10^{58} neutrinos e energias da ordem de $10 - 15$ MeV, campos magnéticos $B_0 \approx 10^6 - 10^8 T$ e densidades de feixe de neutrinos $n_{\nu 0}$ com $10^{34} - 10^{37} m^{-3}$ [63]. Tomaremos $\mathcal{E}_{\nu 0} = 10$ MeV, $n_0 = 10^{34} m^{-3}$, $n_{\nu 0} = 10^{35} m^{-3}$, $B_0 = 5 \times 10^7 T$, e à temperatura do fluido de elétrons $T_e = 0.1$ MeV. São parâmetros apropriados para um plasma de hidro-

gênio no centro da estrela proto-nêutron. Para os parâmetros, temos $\Delta = 1.75 \times 10^{-33}$, $V_A/c = 3.64 \times 10^{-2}$, $V_S/c = 1.03 \times 10^{-2}$. Podemos tomar $k = 10^6 m^{-1}$, que é consistente com a condição de aplicabilidade (3.48). Finalmente, a suposição simplificadora $ck/\omega_{pe} \ll \omega_{pe}/\Omega_e$ torna-se $k \ll 1.2 \times 10^{10} m^{-1}$.

É mostrado na Fig. 3.5, a taxa de crescimento como uma função do ângulo de orientação. Se obtém uma instabilidade rápida com a estimativa $1/\gamma_+ \approx 10^{-3}$ s, enquanto o tempo característico das explosões de supernova é da ordem de ~ 1 segundo. Por outro lado, a suposição de feixe fraco $\gamma_+ \ll \Omega_+$ (equivalente à Eq. (3.77)) é satisfeita de modo bastante satisfatório, uma vez que $\Omega_+ \approx 10^{13}$ rad/s sem muita variação em função do ângulo. A conclusão da Fig. 3.5 é que a instabilidade torna-se mais forte para ondas mais perpendiculares. Pode-se ter instabilidades ainda mais fortes para um plasma mais denso, nos cálculos acima, embora permanecendo aproximadamente precisos, precisariam ser em vista de efeitos relativísticos e de degenerescência.

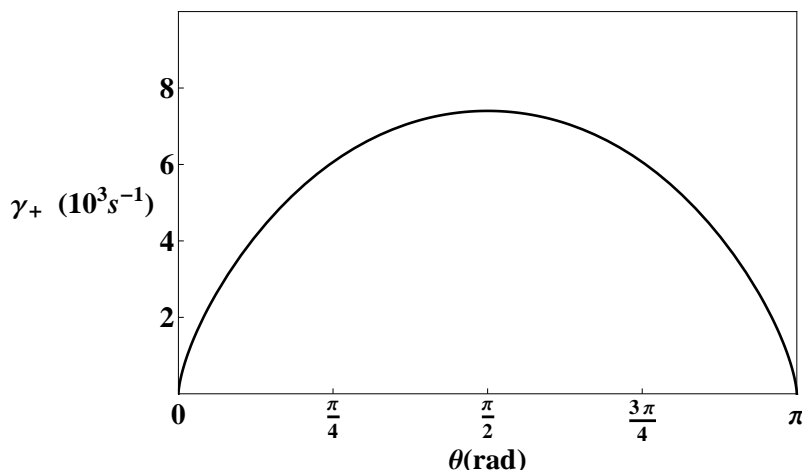


Figura 3.5: Taxa de crescimento da onda magnetosônica rápida desestabilizada, para o conjunto de parâmetros descritos no texto. Conforme apresentado em [34].

Desestabilização das ondas magnetosônicas lentas

Utilizando exatamente os mesmos parâmetros utilizados para a onda magnetosônica rápida e usando a Eq. (3.75), obtém-se a taxa de crescimento mostrada na Fig. 3.6, mostrando que $1/\gamma_- \approx 10^{-3}$ s. A condição de feixe fraco (3.77) é satisfeita, exceto para $\theta \rightarrow \pi/2$ rad, onde Ω_- e γ_- vão para zero. Ao contrário da onda magnetosônica rápida, a onda magnetosônica lenta torna-se mais instável para propagação paralela e anti-paralela,

tornando-se estável para orientação perpendicular entre \mathbf{k} e \mathbf{B}_0 .

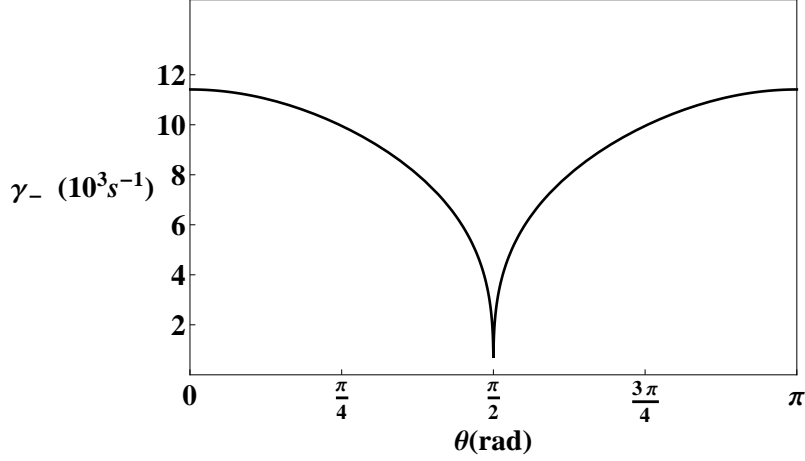


Figura 3.6: Taxa de crescimento da onda magnetosônica lenta desestabilizada, para o conjunto de parâmetros descritos no texto. Conforme apresentado em [34].

Propagação perpendicular ($\mathbf{k} \perp \mathbf{V}_A$)

Quando considerado $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$, ou $\theta = \pi/2$ rad, é encontrado

$$\gamma_+ = \frac{\sqrt{3}\Delta^{1/3}c^{4/3}k}{2^{4/3}(V_A^2 + V_S^2)^{1/6}}, \quad \gamma_- = 0. \quad (3.78)$$

Neste ponto, é interessante comparar criticamente a instabilidade obtida aqui com a obtida na Eq. (3.62), onde $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$ foram utilizado desde o início. A taxa de crescimento encontrada na Eq. (3.62) foi

$$\gamma = \frac{\Delta^{1/2}c^2k}{\sqrt{V_A^2 + V_S^2}}. \quad (3.79)$$

Para a Eq. (3.61), no caso de propagação dos neutrinos quase perpendicular $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0} \approx 0$ produz as instabilidades maiores. Pode-se perceber que entre as Eqs. (3.78) é possível obter γ_+ e a Eq. (3.79) existem algumas discrepâncias, e efetivamente $\gamma_+ \gg \gamma$ por muitas ordens de grandeza. Isto é devido ao acoplamento extremamente pequeno em termos de $\Delta^{1/3} \sim G_F^{2/3}$ na Eq. (3.78) e $\Delta^{1/2} \sim G_F$ na Eq. (3.79). Qual é a origem da discrepância? Na Eq. (3.62) o modo de feixe de neutrinos foi selecionado com $\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0} + i\gamma$, $\Omega = (V_A^2 + V_S^2)^{1/2}$, sendo o vetor de onda quase perpendicular à velocidade do feixe de neutrino, mas a condição de ressonância $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0} = \Omega$ não foi aplicada. A condição de ressonância

satisfaz a interação entre a onda e o feixe de neutrino, produzindo uma maior instabilidade.

Propagação paralela ($\mathbf{k} \parallel \mathbf{V}_A$)

Quando $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$ ou $\theta = 0$, temos

$$\gamma_+ = 0, \quad \gamma_- = \frac{\sqrt{3}\Delta^{1/3}c^{4/3}k}{2^{4/3}V_S^{1/3}}, \quad (3.80)$$

onde o resultado supõe $V_A > V_S$. Caso contrário, se $V_S > V_A$, então γ_+ é substituído por γ_- na Eq. (3.80). O caso de propagação paralela tem dois modos fundamentais: a onda de Alfvén pura $\Omega = kV_A$, que não é afetada pelo feixe de neutrino, e o modo sônico $\Omega = kV_S$, que é desestabilizado de acordo com a Eq. (3.80). O caso anti-paralelo ($\theta = \pi$ rad) é semelhante.

3.4 Considerações finais

O modelo *NMHD* foi introduzido e analisado com mais detalhes em condições simplificadas e ideais. Foram considerados modos simples de propagação e modos generalizados para geometrias gerais. Considerando o modo mais simples de propagação conclui-se que a componente de neutrino mostrou ser uma fonte adequada de difusão de linhas de campo magnético. Além disso, foi encontrada uma nova instabilidade conduzida por neutrinos, associada à geometria da onda magnetosônica. A taxa de instabilidade pode ser bastante grande em cenários de supernova, aumentando para comprimentos de onda mais curtos.

Quando considerado geometrias gerais e analisado a relação de dispersão geral, com a hipótese adicional de ondas subluminais ($V_{\pm} \ll c$), a relação de dispersão linear obtida é a mesma que a obtida na teoria MHD simplificada e ideal, desde que a velocidade adiabática do som seja substituída pela quantidade $V_S(\omega, \mathbf{k})$ contendo a contribuição do feixe de neutrino. Devido ao pequeno valor da constante de acoplamento de Fermi, a contribuição dos neutrinos é quase sempre uma perturbação, podendo ser considerado como um efeito de segunda ordem. No entanto, a instabilidade correspondente é forte candidata para desencadear eventos cataclísmicos em supernovas. A taxa de crescimento na Eq. (3.75) é válida para geometrias arbitrárias e amplia consideravelmente os resultados da Ref. [30], que são restritos a propagação de ondas perpendiculares ($\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0$).

No próximo capítulo, será utilizado o modelo magnetohidrodinâmico de neutrinos descrito nesse capítulo, mas em uma situação mais simples, onde o feixe de neutrinos interage com o fluido de plasma de apenas uma espécie de partículas, os elétrons. Íons são considerados imóveis nesse caso.

Capítulo 4

Neutrinos e instabilidades eletrostáticas em plasmas magnetizados

4.1 Generalidades

Existe um interesse contínuo na interação neutrino-plasma em meios magnetizados. Por exemplo, foi sugerido [64,65] que as explosões emitem neutrinos e esses poderiam transferir energia-momento para o plasma magnetizado em torno do núcleo das supernovas. Foram relatados fortes campos devido a emissões de neutrinos após explosões no plasma magnetizado de elétrons-pósitrons [16]. O efeito Mikheilev-Smirnov-Wolfenstein da conversão de sabores de neutrinos é significativamente influenciado por campos magnéticos fortes, com possíveis implicações na evolução de supernova e outros meios magnetizados [66]. As ondas desestabilizadas por feixes de neutrinos em plasmas magnetizados [67], o espectro linear de elétron-pósitron magnetizado acoplado a espécies de neutrino-antineutrino no universo primitivo e na cosmologia de neutrinos [74], a carga efetiva de neutrinos no plasma de elétrons e pósitrons magnetizado [16], emissão de neutrinos através de processos coletivos em plasma magnetizado [68], geração não linear de ondas por neutrinos em plasmas magnetizados [69, 70], os efeitos desestabilizadores de neutrinos sobre ondas magnetosônicas descritas pelo modelo de magnetohidrodinâmica de neutrinos [30] e o acoplamento entre as oscilações de sabores de neutrino e as ondas acústicas iônicas [36] foram relatados.

Os modos de Trivelpiece-Gould [71] são uma das ondas básicas no plasma magnetizado,

caracterizado apenas por excitações eletrostáticas (sem perturbações do campo magnético), para um plasma eletrônico em um fundo iônico homogêneo. Portanto, o tratamento dos modos de Trivelpiece-Gould que permite o acoplamento neutrino-plasma tem uma relevância intrínseca, além de aplicações astrofísicas. Observe que de acordo com o artigo original [71], os modos de Trivelpiece-Gould foram deduzidos permitindo ângulo arbitrário entre o campo magnético externo e o vetor de onda.

4.2 Modelo físico

O sistema é descrito por um modelo hidrodinâmico para elétrons e neutrinos, em um fundo iônico homogêneo. Denotando $n_{e,\nu}$ e $\mathbf{u}_{e,\nu}$ respectivamente a densidade de fluido de elétrons (e) e neutrinos (ν) (no quadro de laboratório) e os campos de velocidade. As equações de continuidade

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{u}_e) = 0, \quad \frac{\partial n_\nu}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\nu \mathbf{u}_\nu) = 0, \quad (4.1)$$

a equação de força de elétrons (não-relativísticos)

$$m_e \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_e \cdot \nabla \right) \mathbf{u}_e = - \frac{\nabla p}{n_e} - e (-\nabla \phi + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}_0) + \sqrt{2} G_F (\mathbf{E}_\nu + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}_\nu), \quad (4.2)$$

e a equação da força dos neutrinos

$$\frac{\partial \mathbf{p}_\nu}{\partial t} + \mathbf{u}_\nu \cdot \nabla \mathbf{p}_\nu = \sqrt{2} G_F \left(-\nabla n_e - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (n_e \mathbf{u}_e) + \frac{\mathbf{u}_\nu}{c^2} \times [\nabla \times (n_e \mathbf{u}_e)] \right), \quad (4.3)$$

onde $\mathbf{p}_\nu = \mathcal{E}_\nu \mathbf{u}_\nu / c^2$ é o momentum relativístico dos neutrinos para um feixe de neutrinos de energia \mathcal{E}_ν . Na Eq. (4.2), m_e é a massa dos elétrons, $-e$ é a carga dos elétrons, $p = p(n_e)$ é a pressão do fluido eletrônico, G_F a constante de acoplamento de Fermi e $\mathbf{E}_\nu, \mathbf{B}_\nu$ são os campo efetivos elétricos e magnéticos descritos por

$$\mathbf{E}_\nu = -\nabla n_\nu - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (n_\nu \mathbf{u}_\nu), \quad \mathbf{B}_\nu = \frac{1}{c^2} \nabla \times (n_\nu \mathbf{u}_\nu), \quad (4.4)$$

onde c é a velocidade da luz. Consideramos excitações eletrostáticas com potencial escalar ϕ descrito pela equação de Poisson com um fundo neutralizante n_0 ,

$$\nabla^2 \phi = \frac{e}{\varepsilon_0} (n_e - n_0), \quad (4.5)$$

onde ε_0 é a constante de permissividade no vácuo, na presença de um campo magnético homogêneo \mathbf{B}_0 como na força magnética na Eq. (4.2). No entanto, não há perturbações de campo magnético. Sem neutrinos, esta configuração dá origem aos modos de Trivelpiece-Gould [71]. O objetivo é investigar o papel de uma energia livre de feixe de neutrinos nesse contexto. O modelo atual foi introduzido, sem campo magnético ambiente, em [8]. Por simplicidade, as oscilações de sabores de neutrino não são levadas em consideração. Este modelo já foi abordado em capítulos anteriores da tese, mas agora será considerado o caso magnetizado \mathbf{B}_0 , não estudado anteriormente.

4.3 Ondas lineares

Temos o equilíbrio estático e homogêneo

$$n_e = n_0, \quad \mathbf{u}_e = 0, \quad n_\nu = n_{\nu 0}, \quad \mathbf{u}_\nu = \mathbf{u}_{\nu 0}, \quad \phi = 0, \quad (4.6)$$

onde $n_{\nu 0}$ e $\mathbf{u}_{\nu 0}$ são respectivamente o campo de densidade e velocidade dos neutrino no equilíbrio, assumidos como constante. Seguindo o procedimento padrão e linearizando, encontramos,

$$\omega \delta n_e = n_0 \mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{u}_e, \quad (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0}) \delta n_\nu = n_{\nu 0} \mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{u}_\nu, \quad (4.7)$$

$$m_e \omega \delta \mathbf{u}_e = \frac{1}{n_0} \left(\frac{dp}{dn_e} \right)_0 \mathbf{k} \delta n_e - e (\mathbf{k} \delta \phi + i \delta \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}_0) + \sqrt{2} G_F \left(\left(\mathbf{k} - \frac{\omega}{c^2} \mathbf{u}_{\nu 0} \right) \delta n_\nu - \frac{\omega n_{\nu 0}}{c^2} \delta \mathbf{u}_\nu \right), \quad (4.8)$$

$$(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0}) \delta \mathbf{p}_\nu = \sqrt{2} G_F \left(\mathbf{k} \delta n_e - \frac{n_0 \omega}{c^2} \delta \mathbf{u}_e - \frac{n_0}{c^2} \mathbf{u}_{\nu 0} \times (\mathbf{k} \times \delta \mathbf{u}_e) \right), \quad (4.9)$$

$$-k^2 \delta \phi = \frac{e}{\varepsilon_0} \delta n_e. \quad (4.10)$$

Note que na Eq. (4.9), $\delta \mathbf{u}_e$ aparece em um termo proporcional a G_F . Uma vez que não é necessário incluir correções muito pequenas de ordem superior, na Eq. (4.9) substituímos

$\delta \mathbf{u}_e = \delta \mathbf{u}_e^C$ com $G_F = 0$ na Eq. (4.8),

$$\delta \mathbf{u}_e^C = \frac{\delta n_e}{n_0} \frac{V^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} (\omega^2 \mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}_c) \boldsymbol{\omega}_c + i \omega \boldsymbol{\omega}_c \times \mathbf{k}), \quad (4.11)$$

onde

$$V^2 = v_T^2 + \frac{\omega_p^2}{k^2}, \quad v_T^2 = \frac{1}{m_e} \left(\frac{dp}{dn_e} \right)_0, \quad \omega_p^2 = \frac{n_0 e^2}{m_e \varepsilon_0}, \quad \boldsymbol{\omega}_c = \frac{e \mathbf{B}_0}{m_e}. \quad (4.12)$$

Substituímos $\delta \mathbf{u}_e \rightarrow \delta \mathbf{u}_e^C$ na Eq. (4.9), obtendo $\delta \mathbf{p}_\nu$ e depois $\delta \mathbf{u}_\nu$ até $\mathcal{O}(G_F)$. Utilizando a equação da continuidade dos neutrinos, obtemos δn_ν até $\mathcal{O}(G_F)$. O procedimento permite escrever a Eq.(4.8) como

$$\omega \delta \mathbf{u}_e + i \delta \mathbf{u}_e \times \boldsymbol{\omega}_c = \frac{V^2 \mathbf{k} \delta n_e}{n_0} + \omega \delta \mathbf{v}_\nu, \quad (4.13)$$

onde $\delta \mathbf{v}_\nu$ contém todos os efeitos dos neutrinos,

$$\delta \mathbf{v}_\nu \equiv \frac{\sqrt{2} G_F}{m_e \omega} \left((\mathbf{k} - \frac{\omega}{c^2} \mathbf{u}_{\nu 0}) \delta n_\nu - \frac{n_{\nu 0} \omega}{c^2} \delta \mathbf{u}_\nu \right). \quad (4.14)$$

Por construção, $\delta \mathbf{v}_\nu$ será da ordem $\mathcal{O}(G_F^2)$, já que δn_ν e $\delta \mathbf{u}_\nu$ sejam da ordem $\mathcal{O}(G_F)$. Seguindo o procedimento descrito, assumindo $\omega^2 \neq \omega_c^2$, temos

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}_\nu &= \frac{\sqrt{2} G_F \delta n_e c^2}{\mathcal{E}_{\nu 0} (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0}) (\omega^2 - \omega_c^2)} \times \left[(\omega^2 - \omega_c^2 - \frac{\omega^2 \omega_p^2}{c^2 k^2}) \mathbf{k} + \frac{\omega_p^2}{c^2 k^2} \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}_c \boldsymbol{\omega}_c + \right. \\ &+ \frac{\omega_p^2}{c^2 k^2} \frac{\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}_c}{\omega} \mathbf{u}_{\nu 0} \times (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\omega}_c) - \frac{i \omega_p^2}{c^2 k^2} \omega \boldsymbol{\omega}_c \times \mathbf{k} - \frac{i \omega_p^2}{c^2 k^2} [\mathbf{u}_{\nu 0} \cdot (\boldsymbol{\omega}_c \times \mathbf{k})] \mathbf{k} + \\ &+ \frac{i \omega_p^2}{c^2 k^2} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0}) (\boldsymbol{\omega}_c \times \mathbf{k}) - \frac{\mathbf{u}_{\nu 0}}{c^2} \left((\omega^2 - \omega_c^2 - \frac{\omega^2 \omega_p^2}{c^2 k^2}) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0}) + \right. \\ &\left. \left. + \frac{\omega_p^2}{c^2 k^2} (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}_c) (\mathbf{u}_{\nu 0} \cdot \boldsymbol{\omega}_c) - \frac{i \omega_p^2}{c^2 k^2} \omega \mathbf{u}_{\nu 0} \cdot (\boldsymbol{\omega}_c \times \mathbf{k}) \right) \right]. \quad (4.15) \end{aligned}$$

Então, da equação de continuidade para os neutrinos, obtemos

$$\begin{aligned} \delta n_\nu &= \frac{\sqrt{2} G_F n_{\nu 0} \delta n_e c^2}{\mathcal{E}_{\nu 0} (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0})^2 (\omega^2 - \omega_c^2)} \times \left[(\omega^2 - \omega_c^2) k^2 - \frac{\omega^2 \omega_p^2}{c^2} + \frac{\omega_p^2}{c^2 k^2} (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}_c)^2 + \right. \\ &+ \frac{\omega_p^2}{c^2 k^2} \frac{(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}_c)}{\omega} \mathbf{k} \cdot [\mathbf{u}_{\nu 0} \times (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\omega}_c)] - \frac{i \omega_p^2}{c^2} [\mathbf{u}_{\nu 0} \cdot (\boldsymbol{\omega}_c \times \mathbf{k})] \quad (4.16) \\ &\left. - \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0})}{c^2} \left((\omega^2 - \omega_c^2 - \frac{\omega^2 \omega_p^2}{c^2 k^2}) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0}) + \frac{\omega_p^2}{c^2 k^2} (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}_c) (\mathbf{u}_{\nu 0} \cdot \boldsymbol{\omega}_c) - \frac{i \omega_p^2}{c^2 k^2} \omega \mathbf{u}_{\nu 0} \cdot (\boldsymbol{\omega}_c \times \mathbf{k}) \right) \right]. \end{aligned}$$

Ambas as expressões são necessárias para avaliar a contribuição dos neutrinos na relação de dispersão total mostrada na Eq. (4.21).

As mesmas fórmulas mostram δn_ν e $\delta \mathbf{u}_\nu$ como diretamente proporcional a δn_e . A solução para a Eq. (4.13),

$$\delta \mathbf{u}_e = \delta \mathbf{u}_e^C + \frac{1}{(\omega^2 - \omega_c^2)} (\omega^2 \delta \mathbf{v}_\nu - (\boldsymbol{\omega}_c \cdot \delta \mathbf{v}_\nu) \boldsymbol{\omega}_c + i \omega \boldsymbol{\omega}_c \times \delta \mathbf{v}_\nu), \quad (4.17)$$

para $\delta \mathbf{u}_e$ proporcional a δn_e . Finalmente, substituindo a Eq. (4.17) na equação de continuidade de elétrons, derivamos a relação de dispersão linear dos modos de Trivelpiece-Gould modificada por um feixe de neutrino. Note que na Eq. (4.17) é assumido $\omega^2 \neq \omega_c^2$, desde o modo com $\omega^2 = \omega_c^2$ é independente dos neutrinos.

Procedendo como explicado, obtém-se

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{p}_\nu &= \frac{\sqrt{2} G_F \delta n_e}{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0})(\omega^2 - \omega_c^2)} \times \\ &\times \left[(\omega^2 - \omega_c^2) \mathbf{k} - \frac{V^2}{c^2} \left(\omega^2 \mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}_c) \boldsymbol{\omega}_c + i(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0}) \boldsymbol{\omega}_c \times \mathbf{k} \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}_c}{\omega} \mathbf{u}_{\nu 0} \times (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\omega}_c) + i \mathbf{k} [\mathbf{u}_{\nu 0} \cdot (\boldsymbol{\omega}_c \times \mathbf{k})] \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Por outro lado, a perturbação da velocidade dos neutrinos é obtida de $\delta \mathbf{p}_\nu$ de acordo com

$$\delta \mathbf{u}_\nu = \frac{c^2}{\mathcal{E}_{\nu 0}} \left(\delta \mathbf{p}_\nu - \frac{\mathbf{u}_{\nu 0} \cdot \delta \mathbf{p}_\nu}{c^2} \mathbf{u}_{\nu 0} \right), \quad (4.19)$$

como encontrado a partir da relação energia-momentum relativística, onde $\mathcal{E}_{\nu 0}$ é a energia de ordem zero do feixe de neutrinos. Usando as Eqs. (4.18) e (4.19) derivamos uma expressão para $\delta \mathbf{u}_\nu$, que por sua vez fornece δn_ν da Eq. (4.7), permitindo determinar $\delta \mathbf{v}_\nu$ como proporcional a δn_e .

Sem perda de generalidade, assumindo o campo magnético ambiente ao longo do eixo z e um vetor de onda no plano xz , conforme mostrado na Figura 4.1, para que

$$\boldsymbol{\omega}_c = \omega_c \hat{z}, \quad \mathbf{k} = k (\sin \theta, 0, \cos \theta). \quad (4.20)$$

Portanto, a relação dispersão fica da seguinte forma,

$$\begin{aligned}
(\omega^4 - \omega_H^2 \omega^2 + \omega_p^2 \omega_c^2 \cos^2 \theta) \delta n_e &= n_0 \omega (\omega^2 \mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{v}_\nu - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}_c) (\boldsymbol{\omega}_c \cdot \delta \mathbf{v}_\nu) + i \omega \mathbf{k} \cdot (\boldsymbol{\omega}_c \times \delta \mathbf{v}_\nu)) \\
&= \frac{\sqrt{2} G_F n_0}{m_e c^2} \left[\omega^2 (c^2 k^2 - \omega^2) \delta n_\nu - c^2 (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}_c)^2 \delta n_\nu \right. \\
&\quad + \omega (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}_c) (\boldsymbol{\omega}_c \cdot \mathbf{u}_{\nu 0}) \delta n_\nu + n_{\nu 0} \omega (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}_c) (\boldsymbol{\omega}_c \cdot \delta \mathbf{u}_\nu) \\
&\quad \left. - i \omega^2 \mathbf{k} \cdot (n_{\nu 0} \boldsymbol{\omega}_c \times \delta \mathbf{u}_\nu + \boldsymbol{\omega}_c \times \mathbf{u}_{\nu 0} \delta n_\nu) \right], \quad (4.21)
\end{aligned}$$

em termos da frequência híbrida superior $\omega_H = \sqrt{\omega_p^2 + \omega_c^2}$. A equação de continuidade de neutrinos foi usada para eliminar $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0}$. As quantidades $\delta \mathbf{u}_\nu$ e δn_ν são expressões longas proporcionais a δn_e como mostrado nas Eqs. (4.15) e (4.16). Portanto, para $\delta n_e \neq 0$, obtemos a relação de dispersão a partir da Eq. (4.21). Sem neutrinos ($\delta \mathbf{v}_\nu \equiv 0$), recupera-se a relação de dispersão de Trivelpiece-Gould [51,71], ou seja, $\omega^4 - \omega_H^2 \omega^2 + \omega_p^2 \omega_c^2 \cos^2 \theta = 0$. Por simplicidade, nesse ponto, assumiu-se $\omega_p \gg kv_T$ para que $V \approx \omega_p$. Observamos que

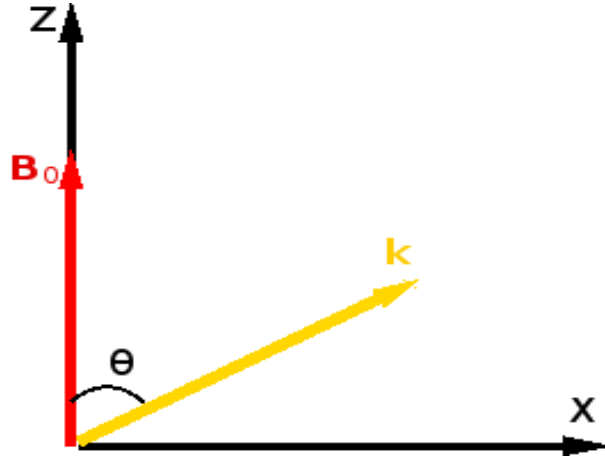


Figura 4.1: Geometria do modo de Trivelpiece-Gould. Conforme apresentado em [35].

no caso não-magnetizado ($\omega_c = 0$) usando a Eq. (4.21) juntamente com o caso especial apropriado da Eq. (4.16) obtém-se o mesmo resultado encontrado em [8, 17, 54], ou seja,

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \frac{\Delta (c^2 k^2 - \omega_p^2)^2}{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0})^2} \times \left(1 - \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0})^2}{c^2 k^2} \right), \quad (4.22)$$

introduzindo a quantidade adimensional

$$\Delta = \frac{2 G_F^2 n_0 n_{\nu 0}}{m_e c^2 \mathcal{E}_{\nu 0}}. \quad (4.23)$$

Para obter a Eq. (4.22), no numerador do termo proporcional a Δ foi substituída a aproximação não perturbada $\omega \approx \omega_p$ sempre que conveniente, já que o termo de neutrinos já é uma correção. Para proceder ao caso magnetizado, observe-se que a contribuição dos neutrinos na Eq. (4.21) podem ser relevantes somente dentro de uma condição de ressonância em que $\text{Re}(\omega) \approx \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0}$, devido a o pequeno valor da constante Fermi. Por construção, nossos cálculos mantêm termos até $\mathcal{O}(\Delta)$. Antes de mostrar no caso geral, dois subcasos são obtidos: propagação de onda perpendicular ou paralela ao campo magnético ambiente, conforme discutido a seguir.

4.3.1 Propagação perpendicular ao campo magnético ambiente

Supondo as oscilações híbridas superiores com $\mathbf{k} \perp \boldsymbol{\omega}_c$ e $\omega \neq 0$, nas Eqs. (4.21), (4.15) e (4.16), obtemos

$$\begin{aligned}
\omega^2 - \omega_H^2 - \Delta \omega_c^2 &= \frac{\Delta}{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0})^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{c^2 k^2}\right) \times \\
&\times \left[\left(c^2 k^2 - \omega^2\right) \left(c^2 k^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0})^2\right) + \left(\mathbf{u}_{\nu 0} \cdot (\boldsymbol{\omega}_c \times \mathbf{k})\right)^2 \right] \\
&- \frac{\Delta \omega_c^2 (\omega^2 - \omega_H^2)}{\omega^2 - \omega_c^2} + \frac{\Delta (c^2 k^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0})^2) \omega^2}{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0})^2 (\omega^2 - \omega_c^2)} \left(1 - \frac{\omega^2}{c^2 k^2}\right) (\omega^2 - \omega_H^2) \\
&- \frac{\Delta \left(\mathbf{u}_{\nu 0} \cdot (\boldsymbol{\omega}_c \times \mathbf{k})\right)^2}{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0})^2 (\omega^2 - \omega_c^2)} \left(1 - \frac{\omega^2}{c^2 k^2}\right) (\omega^2 - \omega_H^2) \\
&+ i \frac{\Delta \left(\mathbf{u}_{\nu 0} \cdot (\boldsymbol{\omega}_c \times \mathbf{k})\right) \left(c^2 k^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0}) \omega\right)}{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0})^2 (\omega^2 - \omega_c^2)} (\omega^2 - \omega_H^2). \tag{4.24}
\end{aligned}$$

O lado direito da Eq. (4.24) é sempre uma perturbação devido ao valor muito pequeno da constante de Fermi, de modo que é legítimo substituir $\omega^2 \rightarrow \omega_H^2$ sempre que conveniente. Em particular, essa substituição permite descartar a contribuição imaginária explícita que é proporcional a $\Delta (\omega^2 - \omega_H^2) \approx 0$ dentro da precisão da aproximação. A substituição é corroborada por resultados numéricos. Ficamos com

$$\begin{aligned}
\omega^2 - \omega_H^2 - \Delta \omega_c^2 &= \frac{\Delta}{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0})^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{c^2 k^2}\right) \times \\
&\times \left[\left(c^2 k^2 - \omega^2\right) \left(c^2 k^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0})^2\right) + \left(\mathbf{u}_{\nu 0} \cdot (\boldsymbol{\omega}_c \times \mathbf{k})\right)^2 \right]. \tag{4.25}
\end{aligned}$$

O termo não ressonante $\Delta \omega_c^2$ no lado esquerdo da Eq. (4.25) é sempre muito pequeno

para condições realistas, de modo que também pode ser descartado. O lado direito da mesma equação pode produzir uma contribuição significativa, desde que o feixe de neutrino se torne ressonante com a frequência híbrida superior, de modo que estabelecemos

$$\omega_H = \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0}, \quad \omega = \omega_H + \delta, \quad |\delta| \ll \omega_H, \quad (4.26)$$

convertendo a Eq. (4.25) em

$$\omega^2 = \omega_H^2 + \frac{\Delta}{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0})^2} \times \left[(c^2 k^2 - \omega_H^2)^2 + (\mathbf{u}_{\nu 0} \cdot (\boldsymbol{\omega}_c \times \mathbf{k}))^2 \right] \times \left(1 - \frac{\omega_H^2}{c^2 k^2} \right), \quad (4.27)$$

que é quase idêntica à Eq. (4.22) com a substituição de $\omega_p \rightarrow \omega_H$ apropriada para o caso magnetizado. Para aumentar a contribuição dos neutrinos na Eq. (4.27), teríamos $\omega_H \ll ck$. No caso não magnetizado, para evitar o amortecimento de Landau, também é necessário $\omega \gg \langle \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_e \rangle$, onde $\langle \rangle$ indica a média estatística envolvendo as velocidades \mathbf{v}_e dos elétrons.

Podemos definir

$$\mathbf{k} = (k, 0, 0), \quad \boldsymbol{\omega}_c = (0, 0, \omega_c), \quad \mathbf{u}_{\nu 0} = u_{\nu 0}(\cos \varphi \sin \Theta, \sin \varphi \sin \Theta, \cos \Theta), \quad (4.28)$$

onde para neutrinos ultra-relativísticos $u_{\nu 0} \approx c$. Definindo o número de onda $k \equiv \omega_H/v_T$ transformamos a Eq. (4.27) em

$$\omega^2 = \omega_H^2 + \frac{\Delta \omega_H^4 c^4 / v_T^4}{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0})^2} \left[\left(1 - \frac{v_T^2}{c^2} \right)^2 + \frac{\omega_c^2 v_T^2}{\omega_H^2 c^2} \sin^2 \varphi \sin^2 \Theta \right]. \quad (4.29)$$

Em vista de $\omega_c^2 < \omega_H^2$ e a suposição não-relativística $v_T^2 \ll c^2$, a Eq. (4.29) pode ser aproximada por

$$\omega^2 = \omega_H^2 + \frac{\Delta \omega_H^4 c^4 / v_T^4}{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0})^2}, \quad (4.30)$$

exatamente o mesmo que o resultado não-magnetizado na Eq. (4.22) para a perturbação máxima dos neutrinos, desde que se substitua $\omega_p \rightarrow \omega_H$. Além disso, usando a Eq. (4.26) é encontrado

$$\left(\frac{\delta}{\omega_H} \right)^3 = \frac{\Delta}{2} \left(\frac{c}{v_T} \right)^4, \quad (4.31)$$

que corresponde a um modo instável com

$$\text{Im} \left(\frac{\delta}{\omega_H} \right) = \sqrt{3} \Delta^{1/3} \left(\frac{c}{2v_T} \right)^{4/3} > 0. \quad (4.32)$$

O resultado da Eq. (4.32) é o mesmo que a taxa de crescimento da instabilidade máxima das Refs. [8, 17, 54], com a simples substituição da frequência de plasma pela frequência híbrida superior. Como $\omega_H > \omega_p$, temos uma instabilidade ainda maior no caso magnetizado. Além disso, denotando ϕ como o ângulo entre \mathbf{k} e $\mathbf{u}_{\nu 0}$, da condição de ressonância encontramos $\cos \phi \approx \omega_H(ck) \approx v_T/c \ll 1$, mostrando que o feixe de neutrino se propaga quase perpendicularmente à onda, mas sem uma orientação definida em relação ao campo magnético externo.

Para os cenários típicos do *core-collapse* tipo II, como para a supernova SN1987A, com a explosão de neutrinos de 10^{58} neutrinos com energias em torno de 10 – 15 MeV [63]. Para obter algumas estimativas, consideramos $\mathcal{E}_{\nu 0} = 10$ MeV, $v_T = 1/10$, $n_0 = 10^{34} \text{ m}^{-3}$, apropriado para o centro da estrela. Além disso, em eventos de colapso central, tem campos magnéticos fortes $B_0 \approx 10^6 - 10^8$ T, e consideramos $B_0 = 5 \times 10^7$ T. Para esses parâmetros, temos $\omega_p = 5,64 \times 10^{18}$ rad/s, uma girofrequência $\omega_c = 8,78 \times 10^{18}$ rad/s, e $\omega_H = 1.04 \times 10^{19}$ rad/s, mostrando o importante papel da magnetização. A taxa de crescimento da instabilidade da Eq. (4.32) é mostrado na Fig. 4.2 como uma função da densidade do feixe de neutrinos $n_{\nu 0}$ entre $10^{34} - 10^{37} \text{ m}^{-3}$. Normalmente, temos $1/\text{Im}(\delta) \approx 10^{-11}$ s, para ser comparado com o tempo característico das explosões de supernova, cerca de 1 segundo.

4.3.2 Propagação paralela ao campo magnético ambiente

Quando $\mathbf{k} \parallel \boldsymbol{\omega}_c$, ou $\theta = 0^\circ$, a Eq. (4.21) se simplifica para

$$(\omega^2 - \omega_c^2)(\omega^2 - \omega_p^2)\delta n_e = \frac{\sqrt{2}G_F n_0}{m_e c^2} (\omega^2 - \omega_c^2)(c^2 k^2 - \omega^2)\delta n_\nu. \quad (4.33)$$

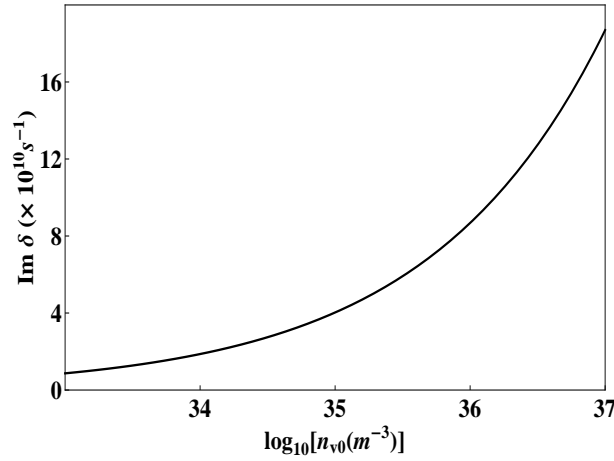


Figura 4.2: Taxa de instabilidade decorrente da Eq. (4.32) para $\mathcal{E}_{\nu 0} = 10 \text{ MeV}$, $v_T/c = 1/10$, $n_0 = 10^{34} \text{ m}^{-3}$, $B_0 = 5 \times 10^7 \text{ T}$, em função da densidade do feixe de neutrinos $n_{\nu 0}$, para $\mathbf{k} \perp \boldsymbol{\omega}_c$. Conforme apresentado em [35].

O modo clássico com $\omega^2 = \omega_c^2$ não possui contribuição de neutrino. Portanto, podemos substituir $\omega^2 \approx \omega_p^2 \neq \omega_c^2$ no lado direito da Eq. (4.33) para obter

$$(\omega^2 - \omega_p^2)\delta n_e = \frac{\sqrt{2}G_F n_0}{m_e c^2}(c^2 k^2 - \omega_p^2)\delta n_\nu, \quad (4.34)$$

um resultado que poderia ser confirmado diretamente pelas Eqs.(4.7), (4.8) e (4.10).

Usando a Eq. (4.16) para δn_ν , da Eq. (4.34) obtemos a Eq. (4.22). Portanto, para propagação paralela, o campo magnético ambiente não modifica a instabilidade. Procedendo como de costume, na configuração

$$\omega_p = \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0}, \quad \omega = \omega_p + \delta, \quad |\delta| \ll \omega_p, \quad (4.35)$$

o modo instável é encontrado com

$$\left(\frac{\delta}{\omega_p}\right)^3 = \frac{\Delta}{2} \frac{(1 - \cos^2 \phi)^3}{\cos^4 \phi}, \quad (4.36)$$

onde ϕ é o ângulo entre \mathbf{k} e $\mathbf{u}_{\nu 0}$ para que $\omega_p \approx ck \cos \phi$. Para propagação paralela ($\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$), a questão do amortecimento de Landau torna-se relevante para ressonância ciclotrônica. Ou seja, para partículas ressonantes girando em torno das linhas de campo magnético com a mesma frequência angular que o campo elétrico de onda, $\omega - l\omega_c - kv_z \approx 0$, onde l é um

número inteiro e v_z é o componente da velocidade dos elétrons na direção de \mathbf{B}_0 . Para o modo fundamental ($l = 0$) e a função de distribuição de partículas quase isotrópica, com $k \ll \omega_p/v_T$ e assim $\cos \phi \gg v_T c$. Finalmente, obtém-se

$$\text{Im} \left(\frac{\delta}{\omega_p} \right) = \sqrt{3} \Delta^{1/3} \left(\frac{c}{2v_T} \right)^{4/3} > 0, \quad (4.37)$$

que está bem documentado na literatura [8, 17, 54] e onde $\cos \phi \approx v_T/c \ll 1$ foi selecionado. Nesse sentido, a Eq. (4.37) é o limite superior da taxa de crescimento de instabilidade, evitando o amortecimento de Landau.

É interessante comparar com o caso do campo magnético predominante. Usando a Eq. (4.37) e exatamente os mesmos parâmetros da subseção 4.3.1, obtemos o resultado mostrado na Fig. 4.3, mostrando uma taxa de crescimento de instabilidade significativamente menor (mas ainda rápida) quando comparada à Fig. 4.2. A principal conclusão é que um campo magnético ambiente forte pode ter um impacto marcante na desestabilização dos modos eletrostáticos em plasmas sob feixes de neutrinos, pelo menos para certas orientações de vetor de onda.

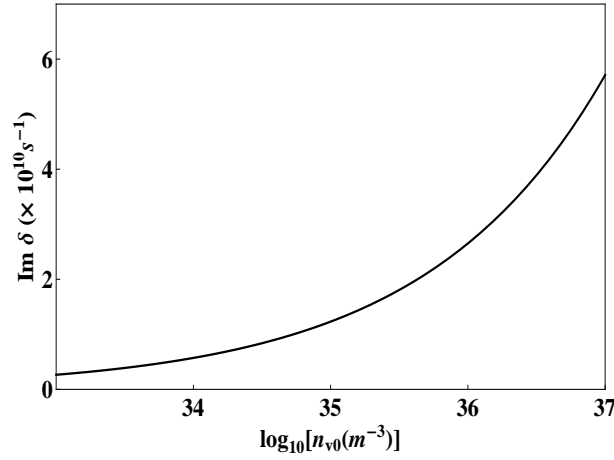


Figura 4.3: Taxa de instabilidade para a Eq. (4.37) for $\mathcal{E}_{\nu 0} = 10 \text{ MeV}$, $v_T/c = 1/10$, $n_0 = 10^{34} \text{ m}^{-3}$, em função da densidade do feixe de neutrinos $n_{\nu 0}$, for $\mathbf{k} \parallel \boldsymbol{\omega}_c$. Conforme apresentado em [35].

4.4 Caso geral

Para um ângulo arbitrário θ , a Eq. (4.21) torna-se mais complicada. Analisando as Eqs. (4.15) e (4.16) os termos ressonantes contêm $\delta\mathbf{u}_\nu \sim (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0})^{-1}$ e na Eq. (4.21) são genericamente menos singulares do que aqueles com $\delta n_\nu \sim (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0})^{-2}$. Desta forma, ignoramos os termos $\delta\mathbf{u}_\nu$, então a relação de dispersão linear pode ser simplificada para

$$\begin{aligned} (\omega^4 - \omega_H^2 \omega^2 + \omega_p^2 \omega_c^2 \cos^2 \theta) \delta n_e = \frac{\sqrt{2} G_F n_0}{m_e c^2} \left[\omega^2 (c^2 k^2 - \omega^2) - c^2 (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}_c)^2 + \right. \\ \left. + \omega (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}_c) (\boldsymbol{\omega}_c \cdot \mathbf{u}_{\nu 0}) - i \omega^2 \mathbf{k} \cdot (\boldsymbol{\omega}_c \times \mathbf{u}_{\nu 0}) \right] \delta n_\nu. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Além disso, para ressonância ($\omega \approx \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0}$) é possível simplificar consideravelmente a Eq. (4.16) conforme

$$\begin{aligned} \delta n_\nu = \frac{\sqrt{2} G_F n_{\nu 0} \delta n_e}{\mathcal{E}_{\nu 0} (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0})^2 (\omega^2 - \omega_c^2)} \times \left(1 - \frac{\omega^2}{c^2 k^2} \right) \times \\ \times \left[(\omega^2 - \omega_c^2) c^2 k^2 - \omega^2 \omega_p^2 + \frac{\omega_p^2}{\omega} (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}_c) (\mathbf{u}_{\nu 0} \cdot \boldsymbol{\omega}_c) - i \omega_p^2 [\mathbf{u}_{\nu 0} \cdot (\boldsymbol{\omega}_c \times \mathbf{k})] \right]. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Inserindo o resultado (4.39) na Eq. (4.38) e substituindo sempre que conveniente a expressão de ordem zero $(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}_c)^2 \approx k^2 \omega^2 (\omega_H^2 - \omega^2) / \omega_p^2$ no termo dos neutrino, é encontrado

$$\begin{aligned} \omega^4 - \omega_H^2 \omega^2 + \omega_p^2 \omega_c^2 \cos^2 \theta = \frac{\Delta}{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0})^2 (\omega^2 - \omega_c^2)} \times \left(1 - \frac{\omega^2}{c^2 k^2} \right) \times \\ \times \left\{ \left[\frac{\omega}{\omega_p} \left((\omega^2 - \omega_c^2) c^2 k^2 - \omega_p^2 \omega^2 \right) + \omega_p (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}_c) (\mathbf{u}_{\nu 0} \cdot \boldsymbol{\omega}_c) \right]^2 + \right. \\ \left. + \omega_p^2 \omega^2 [\mathbf{u}_{\nu 0} \cdot (\boldsymbol{\omega}_c \times \mathbf{k})]^2 + i c^2 k^2 [\mathbf{u}_{\nu 0} \cdot (\boldsymbol{\omega}_c \times \mathbf{k})] \left(\omega^4 - \omega_H^2 \omega^2 + \omega_p^2 \omega_c^2 \cos^2 \theta \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Conforme verificado, a parte explicitamente imaginária na Eq. (4.41) desaparece desde $\omega^4 - \omega_H^2 \omega^2 + \omega_p^2 \omega_c^2 \cos^2 \theta = \mathcal{O}(\Delta)$. Daí a relação de dispersão geral final fica sendo dada por

$$\begin{aligned} \omega^4 - \omega_H^2 \omega^2 + \omega_p^2 \omega_c^2 \cos^2 \theta = \frac{\Delta}{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0})^2 (\omega^2 - \omega_c^2)} \times \left(1 - \frac{\omega^2}{c^2 k^2} \right) \times \\ \times \left\{ \left[\frac{\omega}{\omega_p} \left((\omega^2 - \omega_c^2) c^2 k^2 - \omega_p^2 \omega^2 \right) + \omega_p (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}_c) (\mathbf{u}_{\nu 0} \cdot \boldsymbol{\omega}_c) \right]^2 + \omega_p^2 \omega^2 [\mathbf{u}_{\nu 0} \cdot (\boldsymbol{\omega}_c \times \mathbf{k})]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Além disso: (a) para $\mathbf{k} \parallel \boldsymbol{\omega}_c$ pode ser usado $\mathbf{u}_{\nu 0} \cdot \boldsymbol{\omega}_c = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0})\omega_c/k \approx \omega_p\omega_c/k$ no termo dos neutrino, reduzindo a Eq. (4.41) para Eq. (4.22); (b) para $\mathbf{k} \perp \boldsymbol{\omega}_c$ e com $\omega \approx \omega_H$, a Eq. (4.41) se reduz na Eq. (4.27).

Apesar de o resultado geral abranger os subcasos mostrados, foi útil fornecer um tratamento mais detalhado de algumas geometrias particulares, em vista da álgebra não tão transparente envolvida na Eq. (4.41). No entanto, o poder da relação de dispersão geral é que dá a perturbação dos modos de Trivelpiece-Gould por efeitos neutrinos para a orientação angular arbitrária do vetor de onda, do feixe de neutrinos e do campo magnético ambiente.

Para aumentar a contribuição dos neutrinos na Eq. (4.41) temos $\omega \approx \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0} \ll ck$. Ao mesmo tempo, o amortecimento de Landau é relevante para partículas ressonantes com $\omega - l\omega_c - k_z v_z \approx 0$, onde $k_z = k \cos \theta$. Para evitar isso no caso do modo fundamental ($l = 0$), um deles precisa de $k \ll \omega/(v_T \cos \theta)$ ou apenas $k \ll \omega/v_T$, por simplicidade e de forma semelhante às opções anteriores. Nesse contexto, como antes definimos o número de onda $k = \omega/v_T$, da mesma forma que a Eq. (4.37), com o entendimento de que a estimativa da taxa de crescimento obtida é o limite superior da mesma.

Podemos verificar que as velocidades do feixe de neutrinos compatíveis com $|\mathbf{u}_{\nu 0}| \approx c \gg v_T = \omega/k = \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\nu 0}/k$ são dadas por

$$\mathbf{u}_{\nu 0} = (v_T \sin \theta + c \cos \alpha \cos \theta, c \sin \alpha, v_T \cos \theta - c \cos \alpha \sin \theta), \quad (4.42)$$

onde α é um ângulo arbitrário. Configurando $\omega = \omega_{\pm} + \delta$, com $|\delta| \ll \omega_{\pm}$ e onde

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2}(\omega_H^2 \pm \Omega^2), \quad \Omega^2 = ((\omega_p^2 - \omega_c^2)^2 + 4\omega_p^2\omega_c^2 \sin^2 \theta)^{1/2} \quad (4.43)$$

as frequências não perturbadas e funciona como antes, a raiz instável com $\text{Im}(\delta) > 0$ é encontrada com

$$\begin{aligned} \text{Im}(\delta) &= \frac{\sqrt{3} \Delta^{1/3}}{2^{4/3} |\omega_{\pm}^2 - \omega_c^2|^{1/3} \omega_{\pm}^{1/3} \Omega^{2/3}} \times \\ &\times \left\{ \left[\omega_{\pm}^2 \left((\omega_{\pm}^2 - \omega_c^2) c^2 / v_T^2 - \omega_p^2 \right) + \omega_p^2 \omega_c^2 \cos \theta (\cos \theta - (c/v_T) \cos \alpha \sin \theta) \right] \omega_{\pm}^2 / \omega_p^2 + \right. \\ &\left. + \omega_c^2 \omega_p^2 \omega_{\pm}^4 (c^2 / v_T^2) \sin^2 \theta \sin^2 \alpha \right\}^{1/3}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

A escolha de α não é numericamente relevante para estimativas físicas realistas. Definindo $\alpha = 0^\circ$, usando o pressuposto não-relativístico $v_T^2/c^2 \ll 1$ e substituindo a relação de dispersão de ordem zero $\omega_p^2 \omega_c^2 \cos^2 \theta = \omega_H^2 \omega_\pm^2 - \omega_\pm^4$ sempre que conveniente permite simplificar a Eq. (4.44) conforme

$$\text{Im}\left(\frac{\delta}{\omega_\pm}\right) = \sqrt{3}\Delta^{1/3} \left(\frac{\omega_\pm^2 |\omega_\pm^2 - \omega_c^2|}{\omega_p^2 \Omega^2}\right)^{1/3} \left(\frac{c}{2v_T}\right)^{4/3}. \quad (4.45)$$

A equação (4.45) é o nosso resultado geral final. Quando $\mathbf{k} \perp \boldsymbol{\omega}_c$ e $\omega_\pm^2 = \omega_+^2 \approx \omega_H^2$, ele reproduz a Eq. (4.32), enquanto que para $\omega_\pm^2 = \omega_-^2 \approx 0$ temos $\delta \approx 0$, justificando negligenciar o modo de frequência zero. Por outro lado, quando $\mathbf{k} \parallel \boldsymbol{\omega}_c$ e $\omega_\pm^2 \approx \omega_p^2$, ele reproduz a Eq. (4.37), enquanto a configuração $\omega_\pm^2 \approx \omega_c^2$ dá $\delta \approx 0$, em que $\omega^2 \approx \omega_c^2$ foi observado como associado a flutuações de densidade de neutrinos zero. Observe que todos os efeitos dos neutrinos aparecem com o fator multiplicativo $\Delta^{1/3} \sim G_F^{2/3}$.

Para algumas estimativas numéricas e para comparação, estabelecemos os mesmos parâmetros das seções anteriores, ou seja, $n_0 = 10^{34} \text{ m}^{-3}$, $B = 5 \times 10^7 \text{ T}$, $v_T = c/10$, $\mathcal{E}_{\nu 0} = 10 \text{ MeV}$ com uma densidade de número de neutrino de equilíbrio $n_{\nu 0} = 10^{35} \text{ m}^{-3}$, mas mantendo θ livre, permitindo uma observação detalhada da dependência do taxa de crescimento no ângulo. Os resultados são mostrados nas Figs. 4.4 e 4.5 abaixo, aplicando respectivamente para ω_- e ω_+ . Em particular, na Fig. 4.4 para $\theta = \pi/2$ rad (propagação perpendicular) dá $\delta \approx 0$ correspondente a $\omega^2 = \omega_-^2 = 0$. Da mesma forma, em particular, na Fig. 4.5 para propagação paralela dá $\delta \approx 0$ correspondente a $\omega^2 = \omega_+^2 = \omega_c^2 > \omega_p^2 = \omega_-^2$ para os parâmetros escolhidos. Finalmente, pode-se verificar que usando a expressão mais geral (4.44) também permitindo que o ângulo α varie, não altera sensivelmente os resultados qualitativos e quantitativos.

4.5 Considerações finais

Neste trabalho, foi estabelecida a desestabilização dos modos de Trivelpiece-Gould devido à interação com a emissão de neutrinos. A taxa de crescimento em plasma magnetizado denso sob feixes de neutrinos intensos foi significativa, como no caso de condições próximas ao núcleo de supernovas. Verificou-se que o campo magnético ambiente pode aumentar a instabilidade, como no caso de propagação perpendicular, onde o resultado

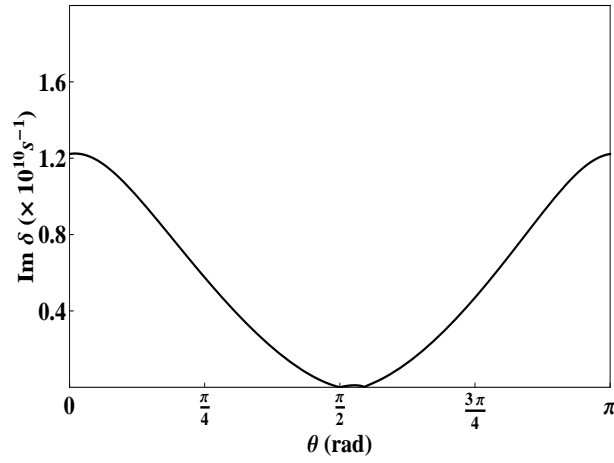


Figura 4.4: Taxa de instabilidade para a Eq. (4.45) em função de θ , usando o modo ω_- , para $n_0 = 10^{34} \text{ m}^{-3}$, $n_{\nu 0} = 10^{35} \text{ m}^{-3}$, $B = 5 \times 10^7 \text{ T}$, $v_T = c/10$, $\mathcal{E}_{\nu 0} = 10 \text{ MeV}$. Conforme apresentado em [35].

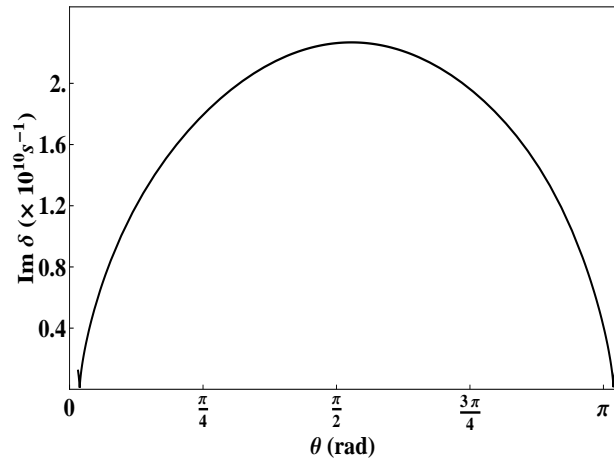


Figura 4.5: Taxa de instabilidade para a Eq. (4.45) em função de θ , usando o modo ω_+ , para $n_0 = 10^{34} \text{ m}^{-3}$, $n_{\nu 0} = 10^{35} \text{ m}^{-3}$, $B = 5 \times 10^7 \text{ T}$, $v_T = c/10$, $\mathcal{E}_{\nu 0} = 10 \text{ MeV}$. Conforme apresentado em [35].

essencial é a substituição da frequência de plasma pela frequência híbrida superior como a escala temporal inversa natural da instabilidade. A taxa de crescimento mais geral (4.45) pode ser usada para a análise das interações neutrino-plasma em um meio magnetizado, em testes empíricos de nossa compreensão do acoplamento entre léptons carregados e neutrinos. No próximo capítulo, será considerado a interação do fluido do plasma com as oscilações de neutrinos.

Capítulo 5

Ondas íon-acústicas e oscilações de neutrinos.

Neste capítulo investigamos o acoplamento entre as ondas íon-acústicas e as oscilações de sabores dos neutrinos em um plasma de íons e elétrons não relativísticos sob a influência de um feixe de neutrinos misto. As oscilações de sabores dos neutrinos são mediadas pela dinâmica do vetor polarização em um meio material e os elétrons (léptons) são acoplados ao fluido de neutrinos eletrônicos através da força fraca de Fermi. Sabe-se que os neutrinos eletrônicos podem converter-se em outros sabores de neutrinos e vice-versa. Devido à frequência tipicamente lenta das oscilações de sabores dos neutrinos, muitas ordens de grandeza menor que a frequência de plasma, uma transferência efetiva de energia entre ondas de plasma e as oscilações de sabores dos neutrinos ocorre no ramo eletrostático de baixa frequência. A relação de dispersão linear em torno do equilíbrio eletrostático homogêneo será desenvolvida, obtendo-se a desestabilização das ondas íon-acústicas em cenários astrofísicos, como em supernovas do tipo II, onde essas explosões emitem intensos feixes de neutrinos. Os resultados podem ser usados para comparação com verificações experimentais, em um contexto de física de plasma. Os resultados apresentados neste capítulo foram divulgados nos artigos [36, 40, 41].

5.1 Generalidades

A investigação das propriedades dos neutrinos é um ponto muito importante a ser discutido no contexto de física de partículas elementar, cosmologia e astrofísica. Essa importância da física de neutrinos é mostrada pelo Prêmio Nobel de 2015 concedido a T. Kajita e A. B. McDonald devido à verificação experimental de oscilações de sabores de neutrinos, que por sua vez são resultado da existência da massa do neutrino. A partir de dados sobre oscilações acústicas e radiação cósmica de fundo em microondas [72], a soma estimada das massas de neutrinos tem um pequeno limite de 0,23 eV. Além disso, o mecanismo para a geração de massas de neutrinos está atualmente incerto. Apesar de tudo isso, a confirmação da massa do neutrino e oscilações de sabores dos neutrinos mostra a incompletude do Modelo Padrão, exigindo uma nova descrição da natureza.

Feixes intensos de neutrinos estão presentes em plasmas astrofísicos, desde o universo primitivo [73] ou em conexão com a questão da emissão de neutrinos em supernovas de tipo II [17,37]. Conforme discutido em [38], para as condições nas supernovas tipo II, os feixes de neutrinos são colimados o suficiente para conduzir instabilidades rápidas no plasma. Na verdade, longe da neutrinosfera, os neutrinos viajam na direção radial, de modo que a dispersão da velocidade angular se torna pequena. Neste contexto, é interessante verificar o acoplamento entre as oscilações de neutrinos e o plasma.

Recentemente, foi estabelecido o acoplamento de neutrinos com ondas magnetohidrodinâmicas (MHD), com uma nova perspectiva para abordagens de plasma astrofísico e partículas elementares [30]. As distribuições de velocidades dos neutrinos anisotrópicos foram analisadas [61]. O objetivo deste capítulo é analisar o acoplamento entre as oscilações de sabores de neutrinos e ondas íon-acústicas em um plasma não relativístico de elétrons e íons sobre a influência do feixe de neutrinos misto. Será mostrado também que o acoplamento entre as ondas íon-acústicas e as oscilações de sabores de neutrinos em um plasma completamente ionizado não são afetadas pelos efeitos colisionais. Aqui, será considerado um plasma ionizado, sem um componente neutro, que é o cenário mais provável em plasmas astrofísicos densos como nas supernovas. Além disso, é assumido as condições de quasineutralidade, o que equivale ao tratamento em [36] onde as ondas de frequência lentas $\omega \ll \omega_{pi}$ são consideradas, onde ω_{pi} é a frequência de plasma iônica. Os resultados aqui mostrados foram discutidos e apresentados em [36,40,41].

5.2 Acoplamento entre as ondas íon-acústicas e oscilações de neutrinos

O sistema é descrito pelo modelo hidrodinâmico para elétrons, íons, neutrinos eletrônicos e neutrinos muônicos, denotados por $n_{e,i}$ e $\mathbf{u}_{e,i}$ a densidade do fluido e o campo de velocidades dos elétrons (e) e íons (i), respectivamente. Teremos, portanto, as equações da continuidade para elétrons e íons

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{u}_e) = 0, \quad \frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \mathbf{u}_i) = 0, \quad (5.1)$$

a equação de força para os elétrons (não relativísticos)

$$m_e \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_e \cdot \nabla \right) \mathbf{u}_e = -\kappa_B T_e \frac{\nabla n_e}{n_e} + e \nabla \phi + \sqrt{2} G_F (\mathbf{E}_\nu + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}_\nu), \quad (5.2)$$

a equação de força para os íons

$$m_i \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_i \cdot \nabla \right) \mathbf{u}_i = -e \nabla \phi, \quad (5.3)$$

onde os íons são assumidos frios por simplicidade. Nas Eqs. (5.2) e (5.3), $m_{e,i}$ são as massas dos elétrons (carga $-e$) e íons (carga $+e$), κ_B é a constante Boltzmann, T_e é a temperatura do fluido de elétrons, ϕ é o potencial eletrostático. Em adição, G_F é a constante de acoplamento de Fermi e $\mathbf{E}_\nu, \mathbf{B}_\nu$ são os campos efetivos elétrico e magnético dos neutrinos,

$$\mathbf{E}_\nu = -\nabla N_e - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (N_e \mathbf{v}_e), \quad \mathbf{B}_\nu = \frac{1}{c^2} \nabla \times (N_e \mathbf{v}_e), \quad (5.4)$$

onde N_e, \mathbf{v}_e são a densidade do fluido e o campo de velocidade dos neutrinos eletrônicos e c a velocidade da luz. Para uma descrição completa, incluída a equação de Poisson

$$\nabla^2 \phi = \frac{e}{\varepsilon_0} (n_e - n_i), \quad (5.5)$$

onde ε_0 é a constante de permissividade no vácuo.

A força fraca de Fermi acopla somente elétrons (léptons) e neutrinos eletrônicos, en-

quanto os íons (bárions) não são influenciados por ela.

As oscilações de neutrino eletrônicos e muônicos são mediadas por

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} + \nabla \cdot (N_e \mathbf{v}_e) = \frac{1}{2} N \Omega_0 P_2, \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial N_\mu}{\partial t} + \nabla \cdot (N_\mu \mathbf{v}_\mu) = -\frac{1}{2} N \Omega_0 P_2, \quad (5.7)$$

com N_μ , \mathbf{v}_μ sendo respectivamente a densidade e o campo de velocidades do fluido de neutrinos muônicos. Com $N = N_e + N_\mu$ a densidade total do fluido de neutrinos e P_2 corresponde à contribuição da coerência quântica no vetor de polarização de sabores $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$. Além disso, $\Omega_0 = \omega_0 \sin 2\theta_0$, onde $\omega_0 = \Delta m^2 c^4 / (2 \hbar \mathcal{E}_0)$ com Δm^2 o quadrado da diferença de massas dos neutrinos. Em complemento, \mathcal{E}_0 é o estado fundamental do spinor de energia dos neutrinos e θ_0 é o ângulo de mistura das oscilações dos neutrinos. Os termos convectivos no lado esquerdo das Eqs. (5.6) e (5.7) são devidos ao fluxo de neutrinos, enquanto os termos à direita são termos de fonte devidos a conversão entre sabores.

As equações de força dos neutrinos são

$$\frac{\partial \mathbf{p}_e}{\partial t} + \mathbf{v}_e \cdot \nabla \mathbf{p}_e = \sqrt{2} G_F \left(-\nabla n_e - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (n_e \mathbf{u}_e) + \frac{\mathbf{v}_e}{c^2} \times [\nabla \times (n_e \mathbf{u}_e)] \right), \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_\mu}{\partial t} + \mathbf{v}_\mu \cdot \nabla \mathbf{p}_\mu = 0, \quad (5.9)$$

onde $\mathbf{p}_e = \mathcal{E}_e \mathbf{v}_e / c^2$, $\mathbf{p}_\mu = \mathcal{E}_\mu \mathbf{v}_\mu / c^2$ são os momentum relativísticos dos neutrinos eletrônicos e muônicos com $\mathcal{E}_e, \mathcal{E}_\mu$ as energias do feixe de neutrinos eletrônicos e muônicos.

Como discutido em [54, 74], as interações neutrino-plasma podem ser derivadas por um formalismo lagrangiano, pelo menos quando as oscilações de sabores estão ausentes.

A evolução do vetor de polarização $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$ em um meio material é dada [1, 39], por

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = -\Omega(n_e) P_2, \quad \frac{\partial P_2}{\partial t} = \Omega(n_e) P_1 - \Omega_0 P_3, \quad \frac{\partial P_3}{\partial t} = \Omega_0 P_2, \quad (5.10)$$

onde $\Omega(n_e) = \omega_0 [\cos 2\theta_0 - \sqrt{2} G_F n_e / (\hbar \omega_0)]$. Em um determinado ponto no espaço, temos $\partial |\mathbf{P}|^2 / \partial t = 0$. No entanto, as características das oscilações de neutrinos são levadas no espaço e no tempo devido as flutuações da densidade do fluido eletrônico. Por conveniência, também definimos a frequência de oscilação do sabor dos neutrinos $\Omega_\nu = \sqrt{\Omega^2(n_0) + \Omega_0^2}$,

onde n_0 é a densidade dos elétrons (íons) no equilíbrio.

A descrição utilizada neste capítulo aborda duas teorias. Um modelo de oscilações de neutrinos, que é, em particular, uma abordagem bem sucedida para resolver o problema do déficit dos neutrinos solares [1, 39] e o outro modelo de acoplamento neutrino-plasma que descreve a evolução de um gás de neutrinos em um plasma denso [5, 17, 38]. A ligação entre esses modelos está estabelecida nas equações da continuidade dos neutrinos (5.5) e (5.6), onde as densidades $N_{e,\mu}$ são afetadas pelas oscilações através da coerência P_2 , bem como por meio dos campos fracos que são afetados por N_e e \mathbf{v}_e na Eq. (5.4). Embora uma teoria mais fundamental possa ser concebida, o modelo de fluido quântico proposto oferece uma alternativa eficiente para tratamento unificado das oscilações de sabores dos neutrinos devido a diferença de massas e da interação neutrino-plasma, generalizando significativamente o trabalho proposto na Ref. [23].

Para resumir, o modelo compreende as quantidades $n_{e,i}$, $\mathbf{u}_{e,i}$ (densidades de fluido e campos de velocidade de elétrons e íons), ϕ (o potencial eletrostático), $N_{e,i}$ e $\mathbf{v}_{e,i}$ (densidades de fluidos e campo de velocidade de neutrinos eletrônicos e muônicos) e as três componentes do vetor de polarização de sabor. Com isso, o sistema é composto por 20 variáveis e 20 equações definidas na Eq. (5.1)-(5.3), (5.4)-(5.6), (5.8) e (5.9).

Por uma questão de referência, é útil lembrar as propriedades das oscilações dos neutrinos em um meio homogêneo $n_e = n_0$, $\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_\mu = 0$. Neste caso, da Eq. (5.6) e Eq. (5.7), temos

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} = \frac{1}{2}N_0\Omega_0P_2, \quad \frac{\partial N_\mu}{\partial t} = -\frac{1}{2}N_0\Omega_0P_2, \quad (5.11)$$

onde $N_0 = N_e + N_\mu$ não é apenas global, mas também localmente constante. A evolução no tempo do vetor polarização é descrita por

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = -\Omega(n_0)P_2, \quad \frac{\partial P_2}{\partial t} = \Omega(n_0)P_1 - \Omega_0P_3, \quad \frac{\partial P_3}{\partial t} = \Omega_0P_2, \quad (5.12)$$

onde $\Omega(n_0) = \omega_0[\cos 2\theta_0 - \sqrt{2}G_F n_0/(\hbar\omega_0)]$. Obtém-se

$$\ddot{\mathbf{P}} + \Omega_\nu^2 \dot{\mathbf{P}} = 0, \quad (5.13)$$

onde Ω_ν é a frequência da oscilação de neutrinos de dois sabores. Neste caso, obtemos

$$\Omega_\nu^2 = \Omega^2(n_0) + \Omega_0^2. \quad (5.14)$$

A solução no estado de equilíbrio ou em um ponto fixo é obtida

$$P_1 = \frac{\Omega_0}{\Omega_\nu}, \quad P_2 = 0, \quad P_3 = \frac{\Omega(n_0)}{\Omega_\nu} = \frac{N_{e0} - N_{\mu 0}}{N_0}, \quad (5.15)$$

onde N_{e0} , $N_{\mu 0}$ são as densidades do fluido de neutrinos eletrônicos e muônicos no equilíbrio. Por simplicidade temos $|\mathbf{P}| = 1$ no equilíbrio, correspondendo a um estado puro (em geral, $|\mathbf{P}| < 1$).

5.3 Ondas lineares

Para o sistema geral, consideramos o equilíbrio estático homogêneo para as Eqs. (5.1)-(5.3), (5.4)-(5.6), (5.8) e (5.9), definido por

$$\begin{aligned} n_e &= n_i = n_0, & \mathbf{u}_e &= \mathbf{u}_i = 0, & \phi &= 0, \\ N_e &= N_{e0}, & N_\mu &= N_{\mu 0}, & \mathbf{v}_e &= \mathbf{v}_\mu = \mathbf{v}_0, \end{aligned} \quad (5.16)$$

e a linearização supõe-se perturbações do tipo onda plana $\sim \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$. Obtemos da equação da continuidade (5.1) e da equação da força para os íons (5.3)

$$\omega \delta n_e = n_0 \mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{u}_e, \quad \omega \delta n_i = n_0 \mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{u}_i, \quad \phi = -\frac{m_i \omega^2}{en_0 k^2} \delta n_e. \quad (5.17)$$

A partir da equação do momentum para os elétrons, obtém-se

$$\frac{n_0 m_e \omega \delta \mathbf{u}_e}{m_i} = -\left(\frac{\omega^2}{k^2} - c_s^2\right) \mathbf{k} \delta n_e + \frac{\sqrt{2} G_F n_0}{m_i c^2} ((c^2 \mathbf{k} - \omega \mathbf{v}_0) \delta N_e - \omega N_{e0} \delta \mathbf{v}_e), \quad (5.18)$$

e a partir da equação do transporte do momentum para os neutrinos eletrônicos, temos

$$\begin{aligned} c^2 (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0) \delta \mathbf{p}_e &= \mathcal{E}_{e0} (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0) \left[\delta \mathbf{v}_e + \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^{-1} \frac{\mathbf{v}_0 \cdot \delta \mathbf{v}_e}{c^2} \mathbf{v}_0 \right] \\ &= \sqrt{2} G_F n_0 \left(c^2 \mathbf{k} \frac{\delta n_e}{n_0} - \omega \delta \mathbf{u}_e - \mathbf{v}_0 \times (\mathbf{k} \times \delta \mathbf{u}_e) \right). \end{aligned} \quad (5.19)$$

A primeira igualdade da Eq. (5.19) vem de $\mathbf{p}_e = \mathcal{E}_e \mathbf{v}_e / c^2$ e $\mathcal{E}_e = m_\nu c^2 (1 - \mathbf{v}_e^2 / c^2)^{-1/2}$ assumindo uma massa m_ν dos neutrinos, usada para os cálculos mas desaparecendo no final.

A Eq. (5.19) pode ser resolvida para $\delta \mathbf{v}_e$, aproximando $\mathcal{E}_{e0} \approx \mathcal{E}_0$ de tal maneira que

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{v}_e &= \frac{\sqrt{2} G_F}{\mathcal{E}_0 (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0)} \left[c^2 \mathbf{k} \delta n_e - n_0 \omega \delta \mathbf{u}_e - \left(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0 \delta n_e - \frac{n_0 \omega}{c^2} \mathbf{v}_0 \cdot \delta \mathbf{u}_e \right) \mathbf{v}_0 \right. \\ &\quad \left. - n_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \delta \mathbf{u}_e \mathbf{k} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0 \delta \mathbf{u}_e) \right]. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Tomando o produto escalar com \mathbf{k} e usando a Eq. (5.20), a Eq. (5.18) para o transporte de momentum fica sendo

$$\begin{aligned} \frac{m_e \omega^2 \delta n_e}{m_i} &= -(\omega^2 - c_s^2 k^2) \delta n_e + \frac{\sqrt{2} G_F n_0}{m_i c^2} (c^2 k^2 - \omega \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0) \delta N_e \\ &\quad - \frac{2 G_F^2 N_{e0} n_0 \omega}{m_i c^2 \mathcal{E}_0 (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0)} \left[(c^2 k^2 - \omega^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0)^2) \delta n_e \right. \\ &\quad \left. + \frac{n_0 \omega}{c^2} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0) (\mathbf{v}_0 \cdot \delta \mathbf{u}_e) - n_0 k^2 \mathbf{v}_0 \cdot \delta \mathbf{u}_e + n_0 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0) (\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{u}_e) \right], \end{aligned} \quad (5.21)$$

usando a aproximação

$$\delta \mathbf{u}_e \approx -\frac{m_i}{n_0 m_e \omega} (\omega^2 - c_s^2 k^2) \frac{\mathbf{k} \delta n_e}{k^2} \approx \frac{\omega \mathbf{k} \delta n_e}{n_0 k^2}, \quad (5.22)$$

substituindo na Eq. (5.21), uma vez que os termos contendo $\delta \mathbf{u}_e$ nessa equação são da ordem $O(G_F^2)$. A última aproximação na Eq. (5.22) segue do limite clássico ($G_F = 0$) e é consistente com a equação da continuidade linearizada para o fluido de elétrons $\omega \delta n_e = n_0 \mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{u}_e$.

Inserindo a Eq. (5.22) na Eq. (5.21), é obtido

$$\begin{aligned} \frac{m_e \omega^2 \delta n_e}{m_i} &= -(\omega^2 - c_s^2 k^2) \delta n_e + \frac{\sqrt{2} G_F n_0}{m_i c^2} (c^2 k^2 - \omega \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0) \delta N_e \\ &- \frac{2 G_F^2 N_{e0} n_0 \omega}{m_i c^2 \mathcal{E}_0 (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0)} \left(1 - \frac{\omega^2}{c^2 k^2} \right) (c^2 k^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0)^2) \delta n_e, \end{aligned} \quad (5.23)$$

Por outro lado, da equação da continuidade para os neutrinos eletrônicos, obtém-se

$$(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0) \delta N_e - N_{e0} \mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{v}_e = \frac{i N_0 \Omega_0 \delta P_2}{2}. \quad (5.24)$$

A partir das Eqs. (5.21) e (5.22), temos

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{v}_e &= \frac{\sqrt{2} G_F}{\mathcal{E}_0 (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0)} \left(1 - \frac{\omega^2}{c^2 k^2} \right) (c^2 \mathbf{k} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0) \delta n_e \\ &\approx \frac{\sqrt{2} G_F}{\mathcal{E}_0 (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0)} (c^2 \mathbf{k} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0) \delta n_e. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Inserindo o último resultado na Eq. (5.21), finalmente encontramos

$$(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0) \delta N_e = \frac{\sqrt{2} G_F N_{e0}}{\mathcal{E}_0 (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0)} (c^2 k^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0)^2) \delta n_e + \frac{i}{2} N_0 \Omega_0 \delta P_2, \quad (5.26)$$

e

$$\begin{aligned} \left(\omega^2 - c_s^2 k^2 + \frac{2 G_F^2 N_{e0} n_0 \omega (c^2 k^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0)^2)}{m_i c^2 \mathcal{E}_0 (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0)} \right) \delta n_e \\ = \frac{\sqrt{2} G_F n_0}{m_i c^2} (c^2 k^2 - \omega \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0) \delta N_e, \end{aligned} \quad (5.27)$$

onde $c_s = \sqrt{k_B T_e / m_i}$ é a velocidade íon-acústica e δn_e , δN_e são as densidades perturbadas dos elétrons e dos neutrinos eletrônicos, respectivamente, enquanto δP_2 é a perturbação da coerência quântica no equilíbrio. A Eq. (5.26) mostra o efeito das oscilações dos neutrinos por meio do termo $\sim \delta P_2$. Por simplicidade, assumimos ω muito menor que a frequência do plasma iônico $\omega_{pi} = \sqrt{n_0 e^2 / (m_i \epsilon_0)}$. Assumimos, $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_{e0} \approx \mathcal{E}_{\mu 0}$ a energia de feixe neutrino mono-energético no equilíbrio.

É obtido para o sistema (5.12) o resultado

$$\delta P_2 = -i \frac{\sqrt{2} \Omega_0 \omega G_F \delta n_e}{(\omega^2 - \Omega_\nu^2) \hbar \Omega_\nu}. \quad (5.28)$$

O termo das oscilações de neutrinos é mais relevante para as ondas de baixa frequência, de modo que $\omega \approx \Omega_\nu$, como esperado por motivos físicos.

Inserindo a Eq. (5.28) nas Eqs. (5.27) e (5.26), obtemos a relação de dispersão

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 + \frac{\Delta_e c^2 k^2 \Lambda(\theta) (c^2 k^2 - \omega^2)}{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0)^2} + \frac{\Delta \Omega_0^2 \omega \mathcal{E}_0 (c^2 k^2 - \omega \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0)}{2 \hbar \Omega_\nu (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0) (\omega^2 - \Omega_\nu^2)}, \quad (5.29)$$

onde

$$\Delta_e = \frac{2 G_F^2 N_{e0} n_0}{m_i c^2 \mathcal{E}_0}, \quad \Delta = \frac{2 G_F^2 N_0 n_0}{m_i c^2 \mathcal{E}_0}, \quad \Lambda(\theta) = \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right) \cos^2 \theta + \sin^2 \theta, \quad (5.30)$$

com $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0 = k v_0 \cos \theta$.

O último termo no lado direito da Eq. (5.29) é devido as oscilações de neutrinos. Sem essa contribuição e com $N_{e0} = N_0$, se recupera a Eq. (5.12) de [8], levando em consideração $c_s \ll c$, o que é necessário desde que $c_s \ll v_T = \sqrt{k_B T_e / m_e} \ll c$ para elétrons não-relativísticos. Por simplicidade, assume-se que $\omega \ll \omega_{pi}$ correspondente ao ramo íon-acústico da relação de dispersão.

5.4 Instabilidades

Da Eq. (5.29) conclui-se que a contribuição dos neutrinos é uma perturbação das ondas íon-acústicas, devido ao pequeno valor da constante de Fermi G_F . Considerando o caso

$$\omega \approx c_s k = \Omega_\nu = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0, \quad (5.31)$$

de modo a aumentar a contribuição do último termo do lado direito da relação de dispersão, decorrente das oscilações de sabores dos neutrinos. Observamos a necessidade de uma condição adicional de ressonância do feixe $\omega \approx \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0$ para produzir correções significativas.

Definindo

$$\omega = \Omega_\nu + \delta\omega, \quad |\delta\omega| \ll \Omega_\nu, \quad (5.32)$$

obtemos da Eq. (5.20), com os neutrinos ultra-relativísticos ($v_0 \approx c$), o resultado

$$(\delta\omega)^3 = \frac{\Delta_e}{2} \left(\frac{c}{c_s} \right)^4 \Omega_\nu^3 + \frac{G_F^2 N_0 n_0 \Omega_0^2}{4\hbar\kappa_B T_e}. \quad (5.33)$$

O modo instável corresponde a uma taxa de crescimento $\gamma = \text{Im}(\delta\omega) > 0$ dada por

$$\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{\Delta_e}{2} \left(\frac{c}{c_s} \right)^4 \Omega_\nu^3 + \frac{G_F^2 N_0 n_0 \Omega_0^2}{4\hbar\kappa_B T_e} \right]^{1/3}, \quad (5.34)$$

onde o efeito das oscilações de neutrinos está agora contido no último termo dentro da raiz cúbica na Eq. (5.34). É conveniente definir

$$\gamma_\nu = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\Delta_e}{2} \left(\frac{c}{c_s} \right)^4 \right)^{1/3} \Omega_\nu, \quad \gamma_{osc} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{G_F^2 N_0 n_0 \Omega_0^2}{4\hbar\kappa_B T_e} \right)^{1/3}. \quad (5.35)$$

Assim, da Eq. (5.34) temos $\gamma^3 = \gamma_\nu^3 + \gamma_{osc}^3$. A quantidade γ_ν corresponde ao acoplamento usual neutrino-plasma, sem considerar as oscilações dos neutrinos. O efeito de conversão de sabores está associado a γ_{osc} .

Temos uma configuração conveniente para a avaliação do efeito das oscilações de neutrinos,

$$\left(\frac{\gamma_\nu}{\gamma_{osc}} \right)^3 = \frac{4\hbar\Omega_\nu^3}{\varepsilon_0\Omega_0^2} \left(\frac{c}{c_s} \right)^2 \frac{N_{e0}}{N_0}. \quad (5.36)$$

É interessante notar que, para um feixe de neutrinos muônicos ($N_{e0} = 0, N_{\mu 0} = N_0$), o termo de oscilações de neutrinos domina completamente a instabilidade. Isso é esperado, uma vez que os neutrinos muônicos não se acoplam aos elétrons, de modo que o plasma é afetado pelo feixe de neutrinos apenas por causa da conversão de sabor quando alguns neutrinos muônicos se tornam gradualmente neutrinos eletrônicos.

Para um plasma denso, podemos assumir $\Omega(n_0) \approx -\sqrt{2}G_F n_0/\hbar$, onde um valor negativo correspondente a uma hierarquia de massa invertida. Além disso, $\Omega_\nu \approx |\Omega(n_0)|$, de

modo que a Eq. (5.36) pode ser substituída por

$$\left(\frac{\gamma_\nu}{\gamma_{osc}}\right)^3 \approx \frac{8\sqrt{2}(G_F n_0)^3}{\varepsilon_0(\hbar\omega_0 \sin(2\theta_0))^2} \left(\frac{c}{c_s}\right)^2 \frac{N_{e0}}{N_0} = \frac{35.16 N_{e0}}{k_B T_e N_0}, \quad (5.37)$$

assumindo $\varepsilon_0 = 10 \text{ MeV}$, $n_0 = 10^{35} \text{ m}^{-3}$ e onde $k_B T_e$ é medido em keV . Portanto, se $k_B T_e > 35.16 \text{ keV}$, a instabilidade causada pela oscilação de neutrinos dominará a instabilidade do acoplamento neutrino-plasma, enquanto as ondas íon-acústicas corresponderem às oscilações de neutrinos ou $\omega \approx \Omega_\nu$.

Calculamos a taxa de crescimento no cenário *core-collapse* de supernova do tipo II, como na supernova SN1987A com um fluxo de neutrinos de 10^{58} neutrinos de todos os sabores e energia entre 10 – 15 MeV [63]. Usamos $\Delta m^2 c^4 = 3 \times 10^{-5} (\text{eV})^2$, $\sin(2\theta_0) = 10^{-1}$, que são apropriados para resolver o problema dos neutrinos solares [1]. Além disso, $\mathcal{E}_0 = 10 \text{ MeV}$, $\kappa_B T_e = 100 \text{ keV}$, $N_0 = 10^{41} \text{ m}^{-3}$, $n_0 = 10^{35} \text{ m}^{-3}$. Para esses valores $\omega \approx \Omega_\nu = 1.94 \times 10^7 \text{ rad/s}$, muito menor do que $\omega_{pi} = 4.16 \times 10^{17} \text{ rad/s}$. Em adição, $c_s = 3.10 \times 10^6 \text{ m/s} \ll c$ e $k = \Omega_\nu/c_s = 6.28 \text{ m}^{-1}$, correspondente a um comprimento de onda $\lambda = 2\pi/k = 1.00 \text{ m}$. Finalmente, $\gamma_{osc} = 21.87 \text{ s}^{-1}$ e a taxa de crescimento máxima é $\gamma_{max} = 24.18 \text{ s}^{-1}$. Portanto, $1/\gamma_{max} \sim 0.04 \text{ s}$, muito menor que o tempo característico para a explosões da supernova que é em torno de 1 segundo. A Fig. 5.1 mostra o valor numérico da taxa de crescimento da instabilidade, para diferentes populações normalizadas de neutrinos eletrônicos. Observa-se que o mecanismo da instabilidade causado por oscilações de neutrinos é sempre dominante sobre o acoplamento neutrino-plasma. Em comparação com estudos prévios sobre instabilidades devido a interações neutrino-plasma [1, 8, 17, 23, 30, 37–39, 54, 74], os resultados mostram um maior comprimento de onda. Em suma, as estimativas fornecem indiretamente a conversão de sabor em termos de desestabilização das ondas íon-acústicas ressonantes com as oscilações de neutrinos.

5.5 Acoplamento entre as ondas íon-acústicas e oscilações de neutrinos incluindo efeitos colisionais

O acoplamento entre as ondas íon-acústicas e as oscilações de sabores de neutrinos foram estudadas. Nessa seção, propomos incluir os efeitos colisionais no modelo proposto

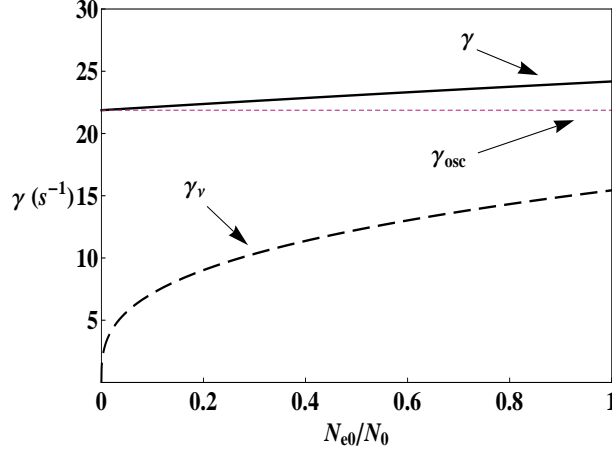


Figura 5.1: Linha contínua: taxa de crescimento γ da Eq. (5.34) em função da população normalizada de neutrinos eletrônicos. Curva tracejada: a taxa de crescimento γ_ν sem levar em conta as oscilações de neutrinos. Linha horizontal ponto-tracejada: a taxa de crescimento γ_{osc} associada a oscilações de neutrinos, da Eq. (5.35). Parâmetros: $\mathcal{E}_0 = 10 \text{ MeV}$, $N_0 = 10^{41} \text{ m}^{-3}$, $n_0 = 10^{35} \text{ m}^{-3}$, $\kappa_B T_e = 100 \text{ keV}$. Conforme apresentado em [36].

na seção anterior.

As equações da continuidade para elétrons e íons, são dadas por

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{u}_e) = 0, \quad \frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \mathbf{u}_i) = 0, \quad (5.38)$$

a equação de força para os elétrons (não relativísticos)

$$m_e \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_e \cdot \nabla \right) \mathbf{u}_e = -\kappa_B T_e \frac{\nabla n_e}{n_e} + e \nabla \phi + \sqrt{2} G_F (\mathbf{E}_\nu + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}_\nu) - m_e \nu_{ei} (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i), \quad (5.39)$$

a equação de força para os íons

$$m_i \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_i \cdot \nabla \right) \mathbf{u}_i = -e \nabla \phi - m_i \nu_{ie} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e), \quad (5.40)$$

onde ν_{ei} , ν_{ie} são respectivamente as frequências de colisão elétron-íon e íon-elétron. Devido a conservação global de massa temos $m_e \nu_{ei} = m_i \nu_{ie}$. Em conjunto com as Eqs. (5.4)-(5.6), (5.8) e (5.9) formam o modelo completo.

5.6 Ondas lineares

Considerando o equilíbrio homogêneo estático para as Eqs. (5.38)-(5.40), (5.4)-(5.6), (5.8) e (5.9), para

$$\begin{aligned} n_e &= n_i = n_0, & \mathbf{u}_e &= \mathbf{u}_i = 0, & \phi &= 0, \\ N_e &= N_{e0}, & N_\mu &= N_{\mu0}, & \mathbf{v}_e &= \mathbf{v}_\mu = \mathbf{v}_0. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Supondo a linearização em torno do equilíbrio para perturbação de onda plana. Obtemos então, as equações de força para os elétrons e íon, como

$$\begin{aligned} m_e \omega \delta \mathbf{u}_e &= \frac{k_B T_e}{n_0} \mathbf{k} \delta n_e - e \mathbf{k} \delta \phi + \frac{\sqrt{2} G_F}{c^2} ((c^2 \mathbf{k} - \omega \mathbf{v}_0) \delta N_e - \omega N_{e0} \delta \mathbf{v}_e) \\ &\quad - i m_e \nu_{ei} (\delta \mathbf{u}_e - \delta \mathbf{u}_i), \end{aligned} \quad (5.42)$$

e

$$m_i \omega \delta \mathbf{u}_i = e \mathbf{k} \delta \phi - i m_i \nu_{ie} (\delta \mathbf{u}_i - \delta \mathbf{u}_e). \quad (5.43)$$

Tomando o produto escalas das Eqs. 5.42 e 5.43 com \mathbf{k} , somando os resultados para eliminar $\delta \phi$, assumindo $m_i \gg m_e$ e aplicando a condição de quase-neutralidade $\delta n_i \approx \delta n_e$, obtemos

$$(\omega^2 - c_s^2 k^2) \delta n_e = \frac{\sqrt{2} n_0 G_F}{m_i c^2} ((c^2 k^2 - \omega \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0) \delta N_e - \omega N_{e0} \mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{v}_e). \quad (5.44)$$

Para prosseguir e avaliar os efeitos de colisão em $\delta \mathbf{v}_e$, note que as etapas envolvidas na derivação da Eq. (5.20) permanecem válidas, de modo que

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{v}_e &= \frac{\sqrt{2} G_F}{\mathcal{E}_0 (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0)} \left[c^2 \mathbf{k} \delta n_e - n_0 \omega \delta \mathbf{u}_e - \left(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0 \delta n_e - \frac{n_0 \omega}{c^2} \mathbf{v}_0 \cdot \delta \mathbf{u}_e \right) \mathbf{v}_0 \right. \\ &\quad \left. - n_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \delta \mathbf{u}_e \mathbf{k} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0 \delta \mathbf{u}_e) \right], \end{aligned} \quad (5.45)$$

onde no lado direito foi usado a aproximação $\varepsilon_{e0} \approx \varepsilon_0$. A contribuição $\sim \delta \mathbf{v}_e$ na Eq. (5.44) é da ordem de $O(G_F^2)$. Devido a constante de Fermi se muito pequena, usamos a expressão clássica para $\delta \mathbf{u}_e$, encontrado a partir da Eq. (5.42) com $G_F \equiv 0$. Inserindo

$\delta \mathbf{u}_i$ da Eq. (5.43) na equação clássica, temos

$$\begin{aligned} m_e \omega \delta \mathbf{u}_e &= \frac{k_B T_e}{n_0} \mathbf{k} \delta n_e - e \mathbf{k} \delta \phi - i \nu_{ie} \delta \mathbf{u}_e \\ &+ i \frac{m_e \nu_{ei}}{\omega + i \nu_{ie}} \left(\frac{e \mathbf{k} \delta \phi}{m_i} + i \nu_{ie} \delta \mathbf{u}_e \right). \end{aligned} \quad (5.46)$$

Não é necessário resolver a última equação para $\delta \mathbf{u}_e$ mas observar que $\delta \mathbf{u}_e$ é paralelo a \mathbf{k} na aproximação clássica. A equação da continuidade dos elétrons, é escrita então como

$$\delta \mathbf{u}_e \approx \frac{\omega \mathbf{k} \delta n_e}{n_0 k^2}, \quad (5.47)$$

Inserindo na Eq. (5.41), obtemos

$$\delta \mathbf{v}_e = \frac{\sqrt{2} G_F}{\mathcal{E}_0 (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0)} \left(c^2 - \frac{\omega^2}{k^2} \right) \left(\mathbf{k} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0 \frac{\mathbf{v}_0}{c^2} \right) \delta n_e. \quad (5.48)$$

O ponto importante é que os efeitos colisionais desaparecem completamente. Portanto, os resultados obtidos a partir de agora serão os mesmos obtidos na seção anterior, reproduzidos aqui, por conveniência. Então,

$$\begin{aligned} \left(\omega^2 - c_s^2 k^2 + \frac{2 G_F^2 N_{e0} n_0 \omega (c^2 k^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0)^2)}{m_i c^2 \mathcal{E}_0 (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0)} \right) \delta n_e \\ = \frac{\sqrt{2} G_F n_0}{m_i c^2} (c^2 k^2 - \omega \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0) \delta N_e, \end{aligned} \quad (5.49)$$

e

$$\begin{aligned} (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0) \delta N_e &= \frac{\sqrt{2} G_F N_{e0}}{\mathcal{E}_0 (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0)} (c^2 k^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0)^2) \delta n_e \\ &+ \frac{\sqrt{2} N_0 \Omega_0^2 \omega G_F \delta n_e}{2 (\omega^2 - \Omega_\nu^2) \hbar \Omega_\nu}. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Para as Eqs. (5.49) e (5.50), obtém-se a relação de dispersão

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 + \frac{\Delta_e c^2 k^2 \Lambda(\theta) (c^2 k^2 - \omega^2)}{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0)^2} + \frac{\Delta \Omega_0^2 \omega \mathcal{E}_0 (c^2 k^2 - \omega \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0)}{2 \hbar \Omega_\nu (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0) (\omega^2 - \Omega_\nu^2)}. \quad (5.51)$$

Terá um forte acoplamento entre as ondas íon-acústicas, o feixe de neutrinos e as

oscilações de neutrinos, somente se

$$\omega \approx c_s k = \Omega_\nu = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0. \quad (5.52)$$

O modo instável corresponde a uma taxa de crescimento, a mesma obtida na Eq. (5.34), como

$$\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{\Delta_e}{2} \left(\frac{c}{c_s} \right)^4 \Omega_\nu^3 + \frac{G_F^2 N_0 n_0 \Omega_0^2}{4\hbar\kappa_B T_e} \right]^{1/3}. \quad (5.53)$$

Mostrando que as oscilações não tem influência na interação entre as ondas íon-acústicas e as oscilações de sabores de neutrinos.

5.7 Considerações finais

Neste capítulo, reformulamos e generalizamos o tratamento de [23], permitindo flutuações mais gerais das densidades do fluido de neutrinos, de modo que a densidade total dos neutrinos $N = N_e + N_\mu$ possa flutuar localmente. Em seguida, realizamos a análise da estabilidade linear em torno das soluções de equilíbrio estático e homogêneo para o sistema de neutrinos mistos e plasma. A relação de dispersão (5.29) generaliza os resultados da Ref. [8], levando em consideração o impacto das oscilações de neutrinos em ondas íon-acústicas. O resultado pode ser útil para verificações experimentais da massa de neutrinos, em conexão com a desestabilização das ondas íon-acústicas acopladas a oscilações de sabores em configurações astrofísicas extremas. Os comprimentos de onda e a taxa de crescimento linear para o novo mecanismo de instabilidade foram identificados. Mostrou-se que o acoplamento entre as ondas íon-acústicas e as oscilações de sabores dos neutrinos em um plasma completamente ionizado permaneceram significativas mesmo incluindo os efeitos colisionais.

Conclusão

A física de neutrinos nos permite uma melhor compreensão do Universo, pelo fato deles interagirem fracamente com a matéria, carregando informações puras sobre os mais variados fenômenos. Em eventos astrofísicos com condições extremas é necessário investigar o fenômenos envolvendo neutrinos, no qual demanda uma abordagem de física de plasma.

Para isso foi proposto de um modelo magnetohidrodinâmico constituído de um fluido de plasma composto por elétrons e íons interagindo com um feixe de neutrinos eletrônicos, acoplado via força eletro-frac. Foi prevista a desestabilização da onda magnetosônica rápida devido à ressonância com feixes de neutrinos. Também foi considerado a geometria das ondas magnetosônicas rápidas, onde a propagação da onda é perpendicular ao campo magnético ambiente. Foram também admitido modos oblíquos. O resultado foi a detecção de uma instabilidade, que se torna mais forte quando o vetor de onda é paralelo ao campo magnético de equilíbrio, associando-se à onda magnetosônica lenta.

Em um caso mais simples, quando assumido perturbações eletrostáticas em um plasma magnetizado composto por elétrons em um fundo iônico neutro, acoplado à neutrinos eletrônicos, o papel desestabilizador dos feixes de neutrinos nos modos Trivelpiece-Gould foi considerado. Percebeu-se que o campo magnético melhora a taxa de crescimento linear, como calculado para os ambientes supernova tipo II. A taxa de crescimento da instabilidade é encontrada a partir do caso não magnetizado, quando se substitui a frequência de plasma pela frequência apropriada de Trivelpiece-Gould, para o vetor de onda paralelo ou perpendicular ao campo magnético. A taxa de crescimento associada à propagação oblíqua também é encontrada. A fonte de energia livre das oscilações dos neutrinos foi encontrada com a influência dominante em tais situações, em comparação com a interação neutrino-plasma tradicional. Quando incluído efeitos colisionais, notou-se que o acoplamento entre as ondas íon-acústicas e as oscilações de sabor dos neutrinos em um plasma

completamente ionizado permanecem o mesmo, sem sofrer alterações.

Quando estudado o acoplamento entre as ondas íon-acústicas e as oscilações de sabores dos neutrinos em um plasma não relativístico, foram identificados os comprimentos de onda e a taxa de crescimento linear para uma nova instabilidade. A fonte de energia livre das oscilações dos neutrinos foi encontrada com a influência dominante em tais situações, em comparação com a interação neutrino-plasma tradicional.

Referências Bibliográficas

- [1] RAFFELT, G. G. *Stars as laboratories for fundamental physics*. University of Chicago Press: Chicago, 1996.
- [2] BACHALL, J. N. *Neutrino astrophysics*. Cambridge University Press: Cambridge, 1989.
- [3] BETHE, H. A. Supernova mechanisms. *Rev. Mod. Phys.*, v. 62, p. 801-866, 1990.
- [4] BACHALL, J. N. and OSTRICKER, J. P. *Unsolved problems in astrophysics*. Princeton University Press: Princeton, 1994.
- [5] BINGHAM, R.; BETHE, H. A.; DAWSON, J. M.; SHUKLA, P. K. and SU, J. J. Nonlinear scattering of neutrinos by plasma waves: a ponderomotive force description. *Phys. Lett. A*, v. 220, p. 107-110, 1996.
- [6] BURROWS, A. Colloquium: Perspectives on core-collapse supernova theory. *Rev. Mod. Phys.*, v. 85, p. 245-261, 2013.
- [7] MURPHY, J. W.; DOLENCE, J. C. and BURROWS, A. The dominance of neutrino-driven convection in core-collapse supernovae. *Astrophys. J.*, v. 771, p. 52-65, 2013.
- [8] SERBETO, A. Fluid description of collective neutrino-plasma interaction. *Phys. Lett. A*, v. 296, p. 217-221, 2002.
- [9] MENDONÇA, J. T.; HAAS, F. and BRET, A. Influence of flavor oscillations in neutrino beam instabilities. *Phys. Rev. D*, v. 21, p. 092117 1-6, 2014.
- [10] DUAN, H.; FULLER, G. M. and QUIAN, Y. -Z. Collective neutrino oscillations. *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.*, v. 60, p. 569-594, 2010.

- [11] PONTECORVO, B. Mesonium and anti-mesonium. *Sov. Phys. JETP B*, v. 6, p. 429-431, 1957.
- [12] BINGHAM, R.; SILVA, L. O.; MENDONÇA, J. T.; SHUKLA, P. K.; MORI, W. B. and SERBETO, A. Neutrino plasma coupling in dense astrophysical plasmas. *Plasma Phys. Control. Fusion*, v. 46, p. B327–B334, 2004.
- [13] ORAEVSKY, V. N. and SEMIKOZ V. B. Induced electric charge of the neutrino in a dispersive medium. *Physica A*, v. 142, p. 135-156, 1987.
- [14] D'OLIVO, J. C.; NIEVES, J. F. and PAL, P. B. Electromagnetic properties of neutrinos in a background of electrons. *Phys. Rev. D*, v. 40, p. 3679-3687, 1987.
- [15] NIEVES, J. F. and PAL, P. B. Induced charge of neutrinos in a medium, *Phys. Rev. D*, v. 49, p. 1398-1403, 1994.
- [16] SERBETO, A.; RIOS, L. A.; MENDONÇA, J. T. and SHUKLA, P. K. Neutrino (antineutrino) effective charge in a magnetized electron-positron plasma. *Phys. Plasmas*, v. 11, p. 1352-1357, 2004.
- [17] SILVA, L. O.; BINGHAM, R.; DAWSON, J. M.; MENDONÇA, J. T. and SHUKLA, P. K. Neutrino-driven streaming instabilities in a dense plasma. *Phys. Rev. Lett.*, v. 83, p. 2703-2706, 1999.
- [18] RIOS, L. A.; SERBETO, A.; MENDONÇA, J. T.; SHUKLA, P. K. and BINGHAM, R. Pair production by a strong wakefield excited by intense neutrino bursts in plasmas. *Phys. Lett. B*, v. 606, p. 79-85, 2005.
- [19] SHUKLA, P. K.; BINGHAM, R.; MENDONÇA, J. T. and STENFLO, L. Neutrinos generating inhomogeneities and magnetic fields in the early universe. *Phys. Plasmas*, v. 5, p. 2815-2817, 1998.
- [20] BETHE, H. A. Possible explanation of the solar-neutrino puzzle. *Phys. Rev. Lett.*, v. 56, p. 1305-1308, 1986.
- [21] WOLFENSTEIN, L. Neutrino oscillations in matter. *Phys. Rev. D*, v. 17, p. 2369-2374, 1978.

- [22] MIKHEYEV, S. P. and SMIRNOV, A. Y. Neutrino oscillations in variable-density medium and bursts due to gravitational collapse of stars. *Sov. Phys. JETP*, v. 64, p. 4-7, 1986.
- [23] MENDONÇA, J. T. and HAAS, F. Neutrino oscillations in a turbulent plasma. *Phys. Plasmas*, v.20, p. 072107 1-7, 2013.
- [24] HAAS, F. and MENDONÇA, J. T. Exact solution to neutrino-plasma two-flavor dynamics. *J. Plasma Phys.*, v. 79, p. 991-993, 2013.
- [25] HAAS, F. *Quantum plasmas: an hydrodynamic approach*. Springer: New York, 2011.
- [26] RIOS, L. A. and SHUKLA, P. K. Neutrino induced charge in a superdense two-electron fermi plasma. *Phys. Plasmas*, v. 15, p. 012101 1-5, 2008.
- [27] RIOS, L. A.; SHUKLA, P. K. and SERBETO, A. Neutrino-driven instabilities in very dense plasmas. *Europhys. Lett.*, v. 80, p. 35001 p1-p5, 2007.
- [28] NICHOLSON, D. R. *Introduction to plasma theory*. John Wiley: New York, 1983.
- [29] BITTENCOURT, J. A. *Fundamentals of plasma physics*. New York: Pergamon Press, 1995.
- [30] HAAS, F.; PASCOAL, K. A. and MENDONÇA, J. T. Neutrino magnetohydrodynamics. *Phys. Plasmas*, v. 23, p. 012104 1-7, 2016.
- [31] BITTENCOURT, J.A. *Fundamentals of plasma physics*. Springer Verlag: New York, 2004.
- [32] BELLAN, P. M. *Fundamentals of plasma physics*. Cambridge University Press: Cambridge, 2008.
- [33] MENDONÇA, J. T. and THIDE, B. Neutrino orbital angular momentum in a plasma vortex . *Europhys. Lett.*, v. 84, p. 41001 p1-p4, 2008.
- [34] HAAS, F. and PASCOAL, K. A. Instabilities and propagation of neutrino magnetohydrodynamics waves in arbitrary direction. *Phys. Plasmas*, v.24 , p. 092109, 2017.

- [35] HAAS, F.; PASCOAL, K. A. and MENDONÇA, J. T. Neutrino-driven electrostatic instabilities in a magnetized plasma. *Physical Review D*, v. 96, p. 023018, 2017.
- [36] HAAS, F.; PASCOAL, K. A. and MENDONÇA, J. T. Coupling between ion-acoustic waves and neutrino oscillations. *Physical Review E*, v. 95, p. 013207, 2017.
- [37] BIGHMAN, R.; DAWSON, J. M.; SU, J. J. and BETHE, H. A. Collective interactions between neutrinos and dense plasmas. *Phys. Lett. A*, v. 193, p. 279, 1994; MENDONÇA, J. T., Bingham, R.; SHUKLA, P. K.; DAWSON, J. M. and TSYTOVISH, V. N. . *ibid*, v. 209, p. 78, 1995.
- [38] SILVA, L. O. and BINGHAM, R. Exact analytical models of the streaming instability driven by intense neutrino beams. *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, v. 05, p. 011, 2006.
- [39] SUEKANE, F. *Neutrino oscillations - A practical guide to basic and applications* Springer, Tokyo, 2015.
- [40] HAAS, F.; PASCOAL, K. A. and MENDONÇA, J. T. Collisional effects, ion-acoustic waves and neutrino oscillations. *Phys. Plasmas*, v. 24, p. 052115, 2017.
- [41] HAAS, F.; PASCOAL, K. A. and MENDONÇA, J. T. Coupling between ion-acoustic waves and neutrino oscillations: collisional effects. *8th International Conference on the Frontiers of Plasma Physics and Technology (FPPT-8)*, aceito para publicação, 2017.
- [42] COWAN, C. L. et al. Detection of the free neutrino: a confirmation. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 124, n. 3212, p. 103-104, 1956.
- [43] REINES, F. COWAN, C. L. The neutrino. *Nature*, Los Alamos Scientific Lab., N. Mex., v. 178, n. 4531, p. 446-449, 1956
- [44] WU, C. S. et al. Experimental test of parity conservation in beta decay. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 105, p. 1413-1415, 1957.
- [45] GRIFFITHS, D. *Introduction to Elementary Particles*. John Wiley: New York, 1987.
- [46] BAHCALL, J.N. *Neutrino astrophysics*. Cambridge Univ. Press, New York, 1989.

- [47] GRIBOV, V. and PONTECORVO, B. Neutrino astronomy and lepton charge. *Phys. Lett. B*, v. 28, p. 493, 1969.
- [48] FUKUDA, Y. *et al.*, Atmospheric ν_μ/ν_e ratio in the multi-GeV energy range. *Phys. Lett. B*, v. 335, p. 237, 1994.
- [49] AHMAD, Q. R. *et al.*, Measurement of the rate of $\nu_e + d \rightarrow +p + e^-$ interactions produced by **B** solar neutrinos at the sudbury neutrino observatory. *Phys. Rev. Lett.*, v. 87, p. 071301, 2001.
- [50] GURNETT, D.A. and BHATTACHARJEE, A. *Plasma physics and controlled fusion*. Cambridge University Press: Cambridge, 1984.
- [51] CHEN, F.F. *Introduction to plasma physics*. Plenum Press: New York, 1984.
- [52] BURGALA, L.F. *Interplanetary magnetohydrodynamics*. Oxford University Press, Oxford, 1995.
- [53] KIVELSON, M.G. and RUSSELL, C.T. *Introduction to space physics*. Cambridge University Press, Boston, 1995.
- [54] SILVA, L. O.; BINGHAM, R.; DAWSON, J. M.; MENDONÇA, J. T. and SHUKLA, P. K. Collective neutrino-plasma interactions. *Phys. Plasmas*, v. 7, p. 2166-2172, 2000.
- [55] KAYSER, B. On the quantum mechanics of neutrino oscillation. *Rev. D*, v. 24, p. 110, 1981.
- [56] SILVA, L. O.; BINGHAM, R.; DAWSON, J. M.; MORI, W. B.; MENDONÇA, J. T. and SHUKLA, P. K. Electroweak plasma instabilities and supernovae. *Plasma Phys. Control. Fusion*, v. 42, p. B223, 2000.
- [57] SEMIKOZ, V. B. Statistical mechanics and its applications. *Physica A*, v. 142, p. 157, 1987.
- [58] AKHIEZER, A. I.; AKHIEZER, I. A.; POLOVIN, R. V.; SITENKO, A. G. and STEPANOV, K. N. *Plasma electrodynamics vol. I, linear theory*. Pergamon Press: Oxford, 1975.

- [59] SPITZER, L. *Physics of fully ionized gases*. Dover: New York, 2006.
- [60] BALESCU, R. *Transport processes in plasma*. Elsevier: North Holland, 1988.
- [61] LAMING, J. M. Neutrino induced waves in degenerate electron plasmas: a mechanism in supernovae or gamma ray bursts?. *New Astronomy*, v. 4, p. 389-403, 1999.
- [62] SILVA, L. O. and BINGHAM, R. Exact analytical models of the streaming instability driven by intense neutrino beams. *J. Cosmology Astroparticle Phys.*, v. 5, p. 11 1-10, 2016.
- [63] HIRATA, K. et al Observation of a neutrino burst from the supernova SN1987A *phys. Rev. Lett.* v. 58, p. 1490, 1987.
- [64] BETHE, H. A. and Wilson J. R. Revival of a stalled supernova shock by neutrino heating. *Astrophys. J.*, v. 295, p. 14, 1985.
- [65] BINGHAM, R.; SILVA. L. O.; CAIRNS, R. A.; SEMIKOZ, V. B. and ORAEVSKY, V. N. Classical mode description of neutrino oscillations in dense magnetized plasmas. *Phys. Plasma*, v. 10, p. 4903, 2003.
- [66] ORAEVSKY, V. N. and SEMIKOZ, V. B. Neutrino-driven streaming instability of spin waves in dense magnetized plasma. *Physics of atomic nuclei*, v. 66, p. 466, 2003.
- [67] BRIZARD, A. J. and MCGREGOR, S. L. Linear wave spectrum associated with collective neutrino-plasma interactions in the early universe. *New J. Phys.*, v. 4, p. 97, 2002.
- [68] KENNETT, M. P. and MELROSE, D. B. Neutrino emission via the plasma process in a magnetized plasma. *Phys. Rev. D*, v. 58, p. 093011, 1998.
- [69] SHUKLA, P. K.; STENFLO, L.; BINGHAM, R.; BETHE, H. A.; DAWSON, J. M. and MENDONÇA, J. T. Nonlinear propagation of neutrinos in a strongly magnetized medium. *Phys. Lett. A*, v. 230, p. 353, 1997.
- [70] SHUKLA, P. K.; STENFLO, L.; BINGHAM, R.; BETHE, H. A.; DAWSON, J. M. and MENDONÇA, J. T. Nonlinear generation of radiation by intense neutrino fluxes in dense magnetized plasmas. *Phys. Lett. A*, v. 224, p. 239, 1997.

- [71] TRIVELPIECE, A. W. and GOULD, R. W. Space charge waves in cylindrical plasma columns. *J. Appl. Phys.*, v. 30, p. 1784, 1959.
- [72] ADE, P. A. R. et al., Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters, *Astron. Astrophys.* v. 571, p. A16, 2014.
- [73] TAJIMA, T. and SHIBATA, K. *Plasma astrophysics*. Addison-Wesley: Reading, 1997.
- [74] BRIZARD, A. J.; MURAYAMA, H. and WURTELE, J. S. Magnetic field generation from self-consistent collective neutrino-plasma interactions. *Phys. Rev. E*, v. 61, p. 4410-4421, 2000.