UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Newton Loebens

Espaço Atrator para Operadores Completamente Positivos de Dimensão Finita

Porto Alegre
2018

Dissertação submetida por Newton Loebens[1] como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador: Dr. Carlos Felipe Lardizábal Rodrigues (PPGMat-UFRGS)

Banca Examinadora:

Dr. Leonardo Fernandes Guidi (PPGMAp-UFRGS)
Dr. Artur Oscar Lopes (PPGMat-UFRGS)
Dr. Rafael Rigão Souza (PPGMat-UFRGS)

Data de Defesa: 16 de março de 2018.

[1] Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à minha família pelo total apoio em todos os momentos de minha vida, em especial, à minha mãe Petronila, ao meu padrasto Roberto e à minha namorada Mariana.

Agradeço ao meu orientador Carlos Felipe pela paciência e auxílios inestimáveis, aos professores Rogério Ricardo Steffenon e Rodrigo Orsini Braga, cujo apoio se estende desde meu ingresso no ensino médio.

Enfatizo também um grande agradecimento aos meus amigos e colegas, em especial, ao Éder, ao Guilherme Wantz e ao Maicon Karling.

Agradeço aos professores Leonardo, Artur e Rafael por terem aceito participar da banca e pelas diversas sugestões e apoio ao longo deste trabalho.

Por fim, agradeço ao CNPq pelo auxílio financeiro durante a minha preparação e realização do mestrado.

Resumo

A partir de uma aplicação da Forma Canônica de Jordan, construímos uma base para o espaço atrator para operadores quânticos de dimensão finita. Essa base é formada pelos autoespaços correspondentes a autovalores de módulo 1. Com essa construção, descrevemos o comportamento da dinâmica assintótica dos operadores quânticos, obtendo assim, o resultado principal do texto. A dinâmica depende dos vetores duais, cuja definição não é feita a partir de uma forma explícita, mas por propriedades relacionadas ao traço. Investigando propriedades dos operadores estritamente positivos, definimos um produto interno que relaciona o produto interno de Hilbert-Schmidt com um operador estritamente positivo. Com isso, obtemos uma forma explícita para os vetores duais.

Palavras-chaves: Operador quântico; Espaço atrator; Dinâmica assintótica; Vetores duais.

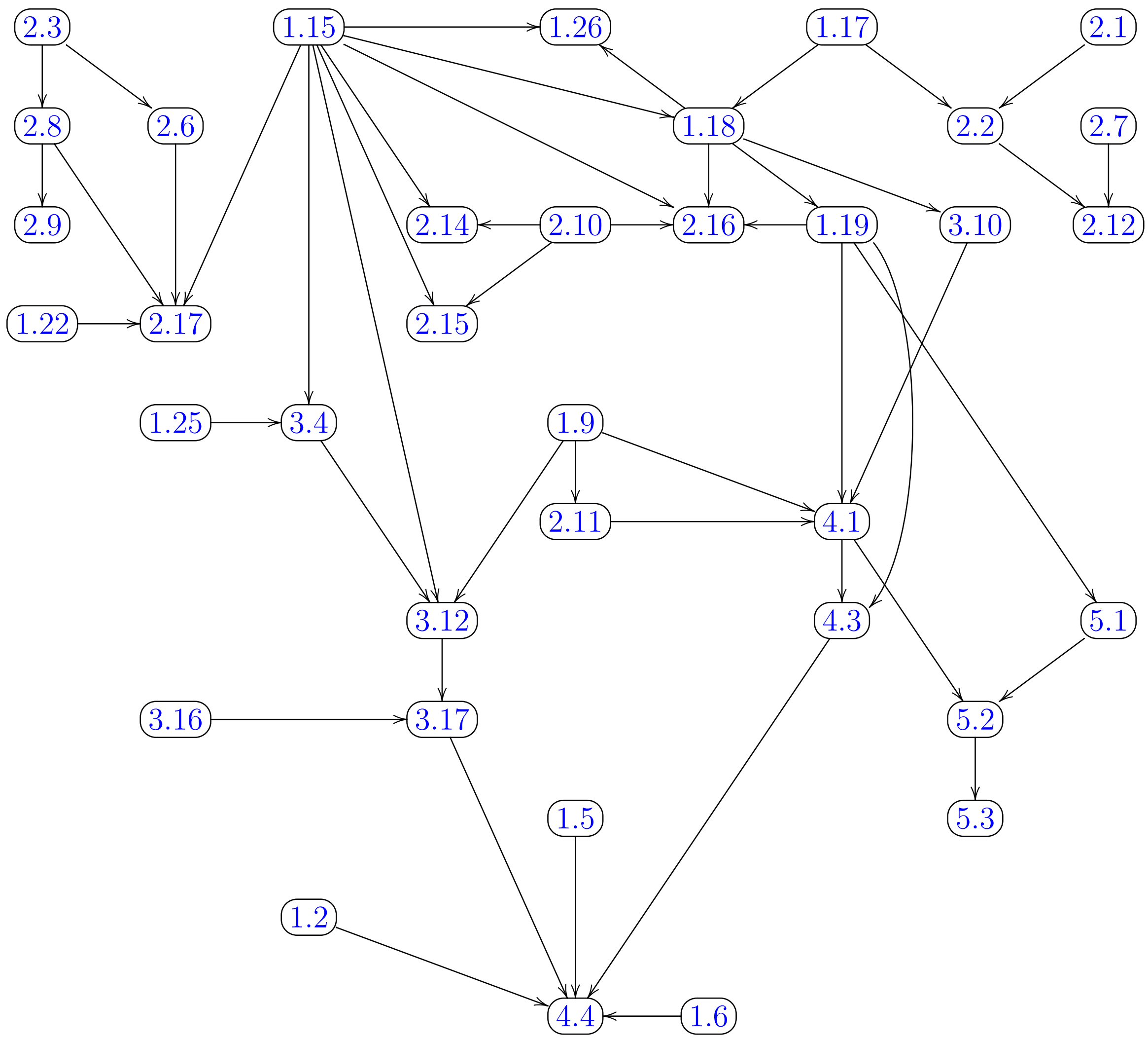
Abstract

From an application of the Jordan Canonical Form, we construct a basis for the attractor space for quantum operations of finite dimension. This basis is formed by eigenspaces corresponding to eigenvalues of modulus 1. With this construction, we describe the behavior of the asymptotic dynamics of the quantum operations, thus obtaining the main result of the text. The dynamics depends on the dual vectors whose definition is not made in an explicit form, but by properties related to the trace. Investigating the properties of strictly positive operators, we define an inner product that relates the Hilbert-Schmidt inner product with a strictly positive operator. Thus, we have an explicit form for the dual vectors.

Keywords: Quantum operation; Attractor space; Asymptotic dynamics; Dual Vectors.

Sumário

Organograma de Dependência Entre Teoremas e Proposições



Introdução

Neste trabalho descreveremos resultados básicos de operadores lineares positivos e completamente positivos de dimensão finita com o intuito de se estudar operadores quânticos, elementos básicos da teoria de informação quântica (10).

Inicialmente enunciaremos e apresentaremos demonstrações de alguns resultados bem conhecidos de álgebra linear. Na sequência, faremos uso de uma álgebra linear mais aplicável a mecânica quântica, cujas demonstrações serão feitas com o uso da notação de Dirac com o propósito de familiarizar o leitor que ainda não a conhece. Na sequência enunciaremos os postulados da mecânica quântica. No final deste primeiro capítulo, reformularemos esses postulados após uma breve análise das propriedades das matrizes densidade.

No segundo capítulo reunimos algumas propriedades dos operadores positivos a partir da diagonalização assegurada pelo *Teorema Espectral*. Nesse capítulo introduziremos os *mapas lineares positivos* e verificaremos resultados bastante conhecidos de álgebra linear.

No terceiro capítulo introduziremos os conceitos de operadores completamente positivos e de um conjunto específico destes operadores, os operadores quânticos. A linearidade dos operadores completamente positivos nos permite encontrar diversas propriedades a partir do emprego da álgebra linear, como por exemplo, a verificação de que o espectro de um operador quântico está inserido no círculo unitário e que os blocos de Jordan correspondentes a autovalores com módulo menor que 1 não contribuem para a dinâmica iterativa assintótica. Assim, essa dinâmica só depende dos autoespaços correspondentes a autovalores com raio espectral máximo.

No final do terceiro capítulo apresentaremos o resultado principal do trabalho, para isto, seguiremos os resultados de Novotný et al. (12). Será visto que, dado um operador inicial $X(0) \in B(\mathcal{H})$, a dinâmica assintótica de um operador quântico $\mathcal{P}$ é descrita por

$$X_\infty(n) = \sum_{\lambda \in \sigma_1, i=1}^{d_\lambda} \lambda^n X_{\lambda,i} \mathrm{Tr}(X^{\lambda,i\dagger} X(0)), \tag{1}$$

com

$$\|X_\infty(n) - P^n(X(0))\| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{2}$$

onde σ_1 é o conjunto de autovalores de $\mathcal{P}$ de módulo 1, d_λ é a dimensão do autoespaço associado ao autovalor λ, $\{X_{\lambda,i}\}$ denota o conjunto dos autovetores de $\mathcal{P}$, $X(0)$ é um operador inicial e $\{X^{\lambda,i}\}$ denota o conjunto de operadores que chamaremos de vetores duais. Os vetores duais serão definidos como satisfazendo as propriedades $\mathrm{Tr}(X^{\lambda,i\dagger} X_{\lambda',i'}) = \delta_{\lambda\lambda'}\delta_{ii'}, \forall \lambda, \lambda' \in \sigma_1$ e para $\lambda \in \sigma_1$ cada $X^{\lambda,i}$ é ortogonal a todos os autoespaços $Nuc(\mathcal{P} - \lambda' I)$ com $|\lambda'| < 1$.

No quarto capítulo introduziremos um novo produto interno que permitirá uma construção para a base dual assintótica. Assim, poderemos calcular explicitamente os vetores duais do operador iterado e, consequentemente, teremos todas as ferramentas para calcular o valor de X_∞ para um operador quântico que satisfaz $\mathcal{P}(\rho) \leq \rho$ para algum $\rho \in B(\mathcal{H})$.

No quinto capítulo analisaremos o espaço atrator para um operador quântico particular em termos de suas matrizes de Kraus.

1 Revisão de Álgebra Linear

Neste capítulo faremos uma revisão de álgebra linear de acordo com nossas necessidades. Na primeira seção seguiremos alguns resultados de (1) e (8) para expormos alguns conceitos bem conhecidos de álgebra linear, enquanto que na segunda seção veremos algumas propriedades de álgebra linear mais usuais no estudo da mecânica quântica (10, 15).

1.1 Ortogonalidade, Notação de Dirac e Produto Tensorial

Ao longo do texto estaremos, muitas vezes, interessados em analisar algumas formas de ortogonalidade, como por exemplo, entre dois vetores, entre diversos espaços vetoriais e entre vetores e espaços vetoriais. A seguir, apresentamos alguns conceitos e propriedades bem usuais da álgebra linear que serão de suma importância neste texto.

Definição 1.1. *Sejam V um espaço vetorial com produto interno e $u, v \in V$. Se*

$$\langle u, v \rangle = 0, \tag{1.1}$$

então dizemos que o vetor u é ***ortogonal*** *ao vetor v e escrevemos $u \perp v$. Se $W \subseteq V$ é um subespaço vetorial e $\langle v, w \rangle = 0, \forall w \in V$, então dizemos que o vetor v é ortogonal ao subespaço W. Se $A = \{a_1, a_2, \dots a_n\}$ é uma base para um espaço vetorial V com $\langle a_i, a_j \rangle = 0, \forall i \neq j$, então dizemos que A é uma base ortogonal de V. Ainda, se $A = \{a_1, a_2, \dots a_n\}$ é base ortogonal de V e $\langle a_i, a_i \rangle = 1, \forall i \in \{1, \dots, n\}$, então dizemos que A é base ortonormal de V.*

Teorema 1.2. *(7) Seja $A = \{u_1, \dots, u_n\}$ uma base ortogonal de um espaço vetorial V munido com um produto interno. Então qualquer $v \in V$ pode ser escrito como*

$$v = \sum_{i-1}^{n} a_i u_i, \tag{1.2}$$

onde

$$a_i = \frac{\langle u_i, v \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle}, \forall i = 1, \dots, n. \tag{1.3}$$

Demonstração. Tome $A = \{u_1, \dots, u_n\}$ uma base ortogonal de V, assim, existem $a_1, \dots a_n \in \mathbb{C}$ tais que $v = a_1 u_1 + \dots + a_n v_n$, com isto,

$$\langle u_i, v \rangle = \langle u_i, a_1 u_1 + \dots + a_n v_n \rangle = a_i \langle u_i, u_i \rangle,$$

portanto,

$$a_i = \frac{\langle u_i, v \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle}, \forall i = 1, \dots, n.$$

□

Definição 1.3. *Seja V um espaço vetorial com dimensão finita e com produto interno. Se $U \subset V$ é não-vazio, então*

$$U^{\perp} = \{x \in V | \langle x, u \rangle = 0, \forall u \in U\} \tag{1.4}$$

é chamado de ***complemento ortogonal*** *de U.*

Definição 1.4. *Dados $V_1, \ldots, V_n$ subespaços vetoriais de V, o subconjunto $V_1 + \ldots + V_n$ de V é formado pelas somas*

$$v_1 + \ldots + v_n, v_1 \in V_1, \ldots, v_n \in V_n. \tag{1.5}$$

Quando $V_1 \cap \ldots \cap V_n = \{0\}$, então escrevemos $V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$, e dizemos que $V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$ é a soma direta de $V_1, \ldots, V_n$.

Proposição 1.5. *(8) Sejam $V_1, \ldots, V_n$ subespaços vetoriais de um espaço vetorial V de dimensão finita com produto interno. Então*

$$(V_1 + \ldots + V_n)^{\perp} = V_1^{\perp} \cap \ldots \cap V_n^{\perp}. \tag{1.6}$$

Demonstração. Tome $z \in (V_1^{\perp} \cap \ldots \cap V_n^{\perp})$ e $x_1 \in V_1, \ldots, x_n \in V_n$ quaisquer. Então

$$\langle z, x_1 + \ldots + x_n \rangle = \langle z, x_1 \rangle + \ldots + \langle z, x_n \rangle = 0,$$

assim, $(V_1 + \ldots + V_n)^{\perp} \supseteq V_1^{\perp} \cap \ldots \cap V_n^{\perp}$.

Agora, tome $w \in (V_1 + \ldots + V_n)^{\perp}$. Por definição temos que $\langle w, x_1 + \ldots + x_n \rangle = 0, \forall x_i \in V_i, i = 1, \ldots, n$. Mas $0 \in V_i, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$, logo, $\langle w, 0 + \ldots + 0 + x_i + 0 + \ldots + 0 \rangle = 0, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$, portanto, $w \in V_1^{\perp} \cap \ldots \cap V_n^{\perp}$, assim $(V_1 + \ldots + V_n)^{\perp} \subseteq V_1^{\perp} \cap \ldots \cap V_n^{\perp}$. Temos então que $(V_1 + \ldots + V_n)^{\perp} = V_1^{\perp} \cap \ldots \cap V_n^{\perp}$. □

Teorema 1.6. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $V_1, V_2 \subseteq V$ tais que $dim(V) = dim(V_1) + dim(V_2)$. Então*

$$V = V_1 \oplus V_2 \Leftrightarrow V_1 \cap V_2 = \{0\}. \tag{1.7}$$

Demonstração. Uma demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em (1). □

Definição 1.7. *Seja $T : V \to V$ um operador linear e λ um autovalor de T. O* ***autoespaço*** *de T correspondente a λ é definido por*

$$Nuc(T - \lambda I) = \{X \in V | T(X) = \lambda X\}, \tag{1.8}$$

e a ***imagem associada ao operador*** *$T - \lambda I$ é denotada por*

$$Im(T - \lambda I) = \{X \in V | \exists Y \in V, X = T(Y) - \lambda Y\}. \tag{1.9}$$

Definição 1.8. *Seja $T : V \to V$ um operador linear e λ um autovalor de T. Dizemos que um vetor $x \in V$ não-nulo é um* ***autovetor generalizado*** *de T correspondente a λ se $\exists k \in \mathbb{Z}_+$ tal que*

$$(T - \lambda I)^k x = 0. \tag{1.10}$$

Agora introduziremos uma notação muito comum na mecânica quântica, a **Notação de Dirac**.

Se V é um espaço vetorial de dimensão n, então V e $\mathbb{C}^n$ são isomorfos. Denotamos por $|\psi\rangle \in V$ o **vetor**

$$|\psi\rangle := \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{bmatrix}, \psi_1, \ldots, \psi_n \in \mathbb{C}, \tag{1.11}$$

e seu **vetor dual** $\langle\psi|$ por

$$\langle\psi| = (|\psi\rangle)^{\dagger 1} := [\overline{\psi_1}, \ldots, \overline{\psi_n}]. \tag{1.12}$$

Tome $|\psi\rangle, |\phi\rangle \in V$. Note que

$$\langle\psi| \, |\phi\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{\psi_i}\phi_i,$$

isto é, a expressão acima representa o produto interno entre os vetores $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$. Com isso, podemos a partir de agora usar a notação $\langle\psi|\phi\rangle = \langle\psi| \, |\phi\rangle$ para representar o produto interno de $|\psi\rangle$ com $|\phi\rangle$.

A **norma do vetor** é definida por

$$\| \, |\psi\rangle \, \| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\psi_i|^2}. \tag{1.13}$$

Se $\| \, |\psi\rangle \, \| = 1$, então dizemos que o vetor $|\psi\rangle$ é um **estado**.

Seja V um espaço vetorial de dimensão n. Tome uma base ortonormal $|i\rangle$ de V, assim, existem $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{C}$ tais que $|v\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i |i\rangle$. Como a base é ortonormal, temos que $\langle i|v\rangle = v_i$, com isso,

$$|v\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i |i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle i|v\rangle |i\rangle = \left(\sum_{i=1}^{n} |i\rangle \langle i|\right) |v\rangle, \tag{1.14}$$

verificando assim uma decomposição para o operador identidade:

$$\sum_{i=1}^{n} |i\rangle \langle i| = I. \tag{1.15}$$

[1] O símbolo “†” sobrescrito é empregado para representar a adjunta do operador, isto é, a transposta do conjugado do operador. Em mecânica quântica, o uso desta simbologia é bem comum e será utilizada neste texto ao invés de “*”.

Seja V um espaço vetorial de dimensão n, $|i\rangle$ uma base ortonormal de V e T um operador linear em V. Então podemos reescrever T como

$$T = \sum_{i,j=1}^{n} \langle j|T|i\rangle\, |j\rangle \langle i| \,, \tag{1.16}$$

pois

$$T = ITI = \sum_{j=1}^{n} |j\rangle \langle j|\, T \sum_{i=1}^{n} |i\rangle \langle i| = \sum_{i,j=1}^{n} |j\rangle \underbrace{\langle j|\, T\, |i\rangle}_{\in\mathbb{C}} \langle i| = \sum_{i,j=1}^{n} \langle j|T|i\rangle\, |j\rangle \langle i| \,.$$

Teorema 1.9 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz (10))**.** *Tome dois vetores quaisquer $|v\rangle$ e $|w\rangle$ num espaço vetorial V munido de um produto interno. Então temos que*

$$|\,\langle v|w\rangle\,|^2 \leqslant \langle v|v\rangle \langle w|w\rangle \,. \tag{1.17}$$

Demonstração. Pelo processo de Gram-Schmidt, podemos construir uma base ortonormal $|i\rangle$ para o espaço vetorial V. Tome $|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle w|w\rangle}} |w\rangle$ como primeiro membro da base $|i\rangle$.

Temos

$$\langle v|v\rangle \langle w|w\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle v|i\rangle \langle i|v\rangle \langle w|w\rangle \geq \langle v|1\rangle \langle 1|v\rangle \langle w|w\rangle \,.$$

Além disso,

$$\langle v|1\rangle \langle 1|v\rangle \langle w|w\rangle = \frac{\langle v|w\rangle \langle w|v\rangle}{\sqrt{\langle w|w\rangle}^2} \langle w|w\rangle = \frac{\langle v|w\rangle \langle w|v\rangle}{\langle w|w\rangle} \langle w|w\rangle = \langle v|w\rangle \langle w|v\rangle = |\,\langle v|w\rangle\,|^2,$$

portanto, $|\,\langle v|w\rangle\,|^2 \leqslant \langle v|v\rangle \langle w|w\rangle \,, \forall\, |v\rangle \,, |w\rangle \in V$. □

Definição 1.10. *Quando um operador linear $A : V \to V$ é igual sua adjunta ($A = A^\dagger$), isto é,*

$$\langle x, Ax\rangle = \langle Ax, x\rangle, \forall x \in V, \tag{1.18}$$

então dizemos que A é um ***operador hermitiano****.*

Definição 1.11. *Seja W um subespaço vetorial de dimensão k de um espaço vetorial V de dimensão d. Tome $|1\rangle, \ldots, |d\rangle$ base ortonormal de V de tal forma que $\{|1\rangle, \ldots, |k\rangle\}$ seja uma base ortonormal de W. Então o operador P definido por*

$$P := \sum_{i=1}^{k} |i\rangle \langle i| \tag{1.19}$$

é chamado de ***operador projeção*** *no subespaço W.*

O operador projeção P é hermitiano, pois $|i\rangle\langle i| = (|i\rangle\langle i|)^\dagger, \forall i \in \{1, \ldots, d\}$.

O operador

$$Q := I - P \tag{1.20}$$

é chamado de **complemento ortogonal** de P. Note que Q é o operador projeção do espaço gerado por $|k+1\rangle, \ldots, |d\rangle$, por isso Q tem esse nome.

Definição 1.12. *Um operador linear M que satisfaz $M^\dagger M = MM^\dagger$ é dito **normal**.*

Definição 1.13. *(10) Seja A um operador linear em um espaço vetorial V. Se A admite uma representação*

$$A = \sum_i \lambda_i |i\rangle\langle i|, \tag{1.21}$$

*onde $|i\rangle$ é um conjunto ortonormal de autovetores de A com autovalores correspondentes λ_i, então dizemos que A é **diagonalizável**.*

Exemplo 1.14. Seja a matriz

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Os autovalores dessa matriz são 1 e -1 com autovetores ortonormais correspondentes $|0\rangle$ e $|1\rangle$, onde

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \tag{1.22}$$

assim, podemos representar σ_x por $\sigma_x = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$.

Podemos agora enunciar o Teorema da Decomposição Espectral.

Teorema 1.15 (Decomposição Espectral (10))**.** *Qualquer operador normal M em um espaço vetorial V é diagonalizável com respeito a alguma base ortonormal de V. Reciprocamente, qualquer operador diagonalizável é normal.*

Demonstração. Seja M um operador normal. Queremos mostrar que M é diagonalizável em relação a alguma base ortonormal de V. Por indução, para $d = dim(V)$, temos que para $d = 1, M \in \mathbb{C}$, logo, $MM^\dagger = |M|^2 = M^\dagger M$. Suponha que a implicação do teorema é válida para qualquer $d_0 < d$.

Seja λ um autovalor de M, P a projeção no autoespaço correspondente a λ (N_1) e Q a projeção no complemento ortogonal (N_2). Sabendo que $Q = I - P$, temos que

$$M = (P+Q)M(P+Q) = PMP + PMQ + QMP + QMQ. \tag{1.23}$$

Esta equação pode ser reduzida, para isso, tome $|w\rangle \in V$ não-nulo, logo, $MP|w\rangle = \lambda P|w\rangle$. Também sabemos que $QP = 0$, assim,

$$QMP|w\rangle = Q\lambda P|w\rangle = \lambda QP|w\rangle = 0 \Rightarrow QMP = 0. \tag{1.24}$$

Temos também que $PMQ = 0$, pois se $|v\rangle$ é um vetor em N_1, então $M(M^\dagger|v\rangle) = M^\dagger M|v\rangle = M^\dagger\lambda|v\rangle = \lambda(M^\dagger|v\rangle)$, ou seja, $M^\dagger|v\rangle$ é autovetor de M com autovalor λ, assim, $M^\dagger|v\rangle$ está em N_1. Temos então que $QM^\dagger P = 0$, mas $(PMQ)^\dagger = QM^\dagger P = 0$, portanto, $PMQ = 0$.

Assim, a equação (1.23) se reduz a

$$M = PMP + QMQ. \tag{1.25}$$

Mas QMQ é normal. De fato, usando que

$$QM = QM(P+Q) = QMQ \tag{1.26}$$

e

$$QM^\dagger = QM^\dagger(P+Q) = QM^\dagger Q, \tag{1.27}$$

temos que

$$\begin{aligned} QMQQM^\dagger Q = QMQM^\dagger Q &\overset{(1.26)}{=} QMM^\dagger Q = QM^\dagger MQ \overset{(1.27)}{=} QM^\dagger QMQ \\ &= QM^\dagger QQMQ, \end{aligned}$$

ou seja, QMQ é normal.

Por indução, podemos afirmar que QMQ é diagonalizável com respeito a alguma base ortonormal de N_2, pois sua dimensão será sempre menor que d, já que o resto da dimensão é ocupado por N_1, que tem no mínimo dimensão 1.

Além disso, PMP é diagonalizável com respeito a alguma base ortonormal de N_1, assim, $M = PMP + QMQ$ é diagonal com respeito a alguma base ortonormal de V.

Reciprocamente: seja M um operador diagonalizável. Então existe uma base ortonormal $|i\rangle$ tal que $M = \sum_i \lambda_i |i\rangle\langle i|$, onde $\lambda_i \in \mathbb{C}, \forall i$. Temos então:

$$\begin{aligned} M^\dagger M = & \ (\textstyle\sum_i \lambda_i |i\rangle\langle i|)^\dagger(\sum_j \lambda_j |j\rangle\langle j|) = \sum_{i,j} \lambda_i^*\lambda_j |i\rangle\langle i|j\rangle\langle j| \\ = & \ \textstyle\sum_{i,j} \lambda_i^*\lambda_j\delta_{ij} |i\rangle\langle j| = \sum_i |\lambda_i|^2 |i\rangle\langle i| \end{aligned} \tag{1.28}$$

e

$$\begin{aligned} MM^\dagger = & \ (\textstyle\sum_j \lambda_j |j\rangle\langle j|)(\sum_i \lambda_i |i\rangle\langle i|)^\dagger = \sum_{j,i} \lambda_j\lambda_i^* |j\rangle\langle j|i\rangle\langle i| \\ = & \ \textstyle\sum_{j,i} \lambda_j\lambda_i^*\delta_{ji} |j\rangle\langle i| = \sum_j |\lambda_j|^2 |j\rangle\langle j|. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Como $M^\dagger M = MM^\dagger$, temos que M é normal. □

Definição 1.16. *Seja V um espaço vetorial com produto interno. Um operador linear $T : V \to V$ é dito **positivo semidefinido** se*

$$\langle v, Tv\rangle \geq 0, \forall v \in V. \tag{1.30}$$

Se vale

$$\langle v, Tv\rangle > 0, \forall v \in V, \tag{1.31}$$

*então T é dito **positivo definido**.*

No seguimento do texto chamaremos um operador positivo semidefinido, simplesmente, por **operador positivo**. Quando o operador for positivo definido, diremos então que o operador é **estritamente positivo**.

Proposição 1.17. *(5) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Um operador $T : V \to V$ é hermitiano se e somente se $\langle \psi, T\psi\rangle \in \mathbb{R}, \forall \psi \in V$.*

Demonstração. Suponha que T é hermitiano, ou seja, $T = T^\dagger$, então

$$\overline{\langle \psi, T\psi\rangle} = \langle T\psi, \psi\rangle = \langle \psi, T^\dagger\psi\rangle = \langle \psi, T\psi\rangle,$$

assim, $\langle \psi, T\psi\rangle \in \mathbb{R}, \forall \psi \in V$.

Agora suponha que $\langle \psi, T\psi\rangle \in \mathbb{R}, \forall \psi \in V$, então

$$\langle \psi, T^\dagger\psi\rangle = \langle T\psi, \psi\rangle = \overline{\langle \psi, T\psi\rangle} = \langle \psi, T\psi\rangle,$$

assim, $T = T^\dagger$. □

Teorema 1.18. *(1) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e T um operador $T : V \to V$. São equivalentes:*

(i) *T é positivo;*

(ii) *T é hermitiano e seus autovalores são não-negativos;*

(iii) *T possui uma raíz quadrada positiva;*

(iv) *T possui uma raíz quadrada hermitiana;*

(v) *T pode ser decomposta como $S^\dagger S$ para algum $S : V \to V$.*

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$ Se T é positivo, então decorre da Proposição 1.17 que T é hermitano. Agora, tome λ como sendo um autovalor de T com autovetor correspondente x, então

$$\lambda\langle x, x\rangle = \langle x, \lambda x\rangle = \langle x, Tx\rangle \geq 0.$$

Pela positividade do produto interno, temos que $\lambda \geq 0$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Suponha que T é hermitiano e seus autovalores são não-negativos. O Teorema Espectral (1.15) assegura a existência de uma base ortonormal de V formada por autovetores de T. Sejam $v_1, \ldots, v_n$ esses autovetores e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ seus respectivos autovalores correspondentes. Por hipótese, $\lambda_i \geq 0, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$, portanto, $\sqrt{\lambda_i} \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Defina $S : V \to V$ por $Sv_i = \sqrt{\lambda_i} v_i, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Temos então que S é positivo, pois

$$\langle v_i, Sv_i \rangle = \langle v_i, \sqrt{\lambda_i} v_i \rangle = \sqrt{\lambda_i} \langle v_i, v_i \rangle \geq 0.$$

Ainda,

$$S^2 v_i = S(Sv_i) = S\sqrt{\lambda_i} v_i = \sqrt{\lambda_i} S v_i = \sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_i} v_i = \lambda_i v_i,$$

assim, $S^2 = T$. Temos então que S é raíz quadrada positiva de T.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Se S é raíz quadrada positiva de T, então S é hermitiana pela primeira implicação.

$(iv) \Rightarrow (v)$ Se S é raíz quadrada hermitiana de T, então $S = S^\dagger$, logo, $T = S^2 = SS = S^\dagger S$.

$(v) \Rightarrow (i)$ Suponha que T possui uma decomposição da forma $T = S^\dagger S$. Tome $v \in V$ qualquer, assim,

$$\langle v, Tv \rangle = \langle v, S^\dagger S v \rangle = \langle Sv, Sv \rangle \geq 0,$$

concluímos assim que T é um operador positivo. □

Proposição 1.19. *Seja $T : V \to V$ um operador estritamente positivo. Então*

(i) *T é inversível;*

(ii) *T^{-1} é hermitiano;*

(iii) *$T^{\frac{1}{2}}$ é hermitiano;*

(iv) *$T^{-\frac{1}{2}}$ é hermitiano.*

Demonstração. Suponha que $\langle x, Tx \rangle > 0, \forall x \in V$. Se T não fosse inversível, existiria algum $v \in V$ não-nulo tal que $Tv = 0$, assim, teríamos $\langle v, Tv \rangle = 0$, contradizendo a hipótese de que T não seja estritamente positivo, logo, vale (i).

(ii) Pelo Teorema 1.18, temos que T é hermitiano, assim

$$\langle T^{-1} v, v \rangle = \langle T^{-1} v, TT^{-1} v \rangle = \langle TT^{-1} v, T^{-1} v \rangle = \langle v, T^{-1} v \rangle,$$

logo, T^{-1} é hermitiano.

(iii) Foi verificado no Teorema 1.18.

(iv) Basta juntar os itens (ii) e (iii). □

Definição 1.20. *Um operador linear U que satisfaz a propriedade*

$$U^{\dagger}U = I = UU^{\dagger} \tag{1.32}$$

é dito operador ***unitário****.*

Os operadores unitários desempenham um papel muito importante na mecânica quântica, como veremos na seção 1.2.

Denotaremos por $\mathbb{M}_{n,m}$ o conjunto das matrizes $n \times m(\mathbb{M}_{n,n} = \mathbb{M}_n)$ com entradas complexas.

Exemplo 1.21. Considere as seguintes matrizes em $\mathbb{M}_2$:

$$\sigma_x := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.33}$$

Cada uma dessas matrizes é hermitiana e unitária. As matrizes $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ são chamadas de **Matrizes de Pauli**.

Proposição 1.22. *Seja $U : V \to V$ um operador unitário. Então*

(i) *U preserva produto interno;*

(ii) *Todos seus autovalores têm módulo* 1.

Demonstração. Sejam $U : V \to V$ um operador unitário e $v, w \in V$.

(i) $\langle Uv, Uw\rangle = \langle v, U^{\dagger}Uw\rangle = \langle v, w\rangle$.

(ii) Se λ é autovalor de U associado a um autovalor v, então

$$|\lambda|^2\|v\|^2 = \|\lambda v\|^2 = \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \langle Uv, Uv\rangle = \langle v, v\rangle = \|v\|^2.$$

Como v é autovetor, é não-nulo, logo, $|\lambda| = 1$. □

Na mecânica quântica, muitas vezes, estamos interessados em unir espaços vetoriais com o intuito de analisar o comportamento de várias partículas ao mesmo tempo, assim, utilizamos uma ferramenta que nos permite analisar espaços compostos. Essa ferramenta é o produto tensorial.

Definição 1.23. *Tome as seguintes matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{q1} & \dots & b_{qp} \end{bmatrix}. \tag{1.34}$$

O ***produto tensorial*** *de A por B é definido por*

$$A \otimes B := \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}. \tag{1.35}$$

Exemplo 1.24. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \tag{1.36}$$

então o produto tensorial de A por B é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.37}$$

Podemos tomar algumas propriedades do produto tensorial (15) que decorrem da definição, para isso, tome $A \in \mathbb{M}_{n,m}, B \in \mathbb{M}_{p,q}, C \in \mathbb{M}_{r,s}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, então

- $A \otimes B \in \mathbb{M}_{np,mq}$;
- $(\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B) = \alpha(A \otimes B)$;
- $(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$;
- $A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$;
- $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$;
- $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$;
- $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$, onde X^* denota o conjugado de uma matriz X com entradas complexas;
- $A \in \mathbb{M}_n, B \in \mathbb{M}_m$ positivos $\Rightarrow A \otimes B$ positivo.

Com essas propriedades podemos verificar, por exemplo,

$$\mathrm{Tr}(A \otimes B) = \mathrm{Tr}(B \otimes A) = \mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B), \forall A \in \mathbb{M}_n, B \in \mathbb{M}_m \tag{1.38}$$

e

$$(A \otimes B)^\dagger = A^\dagger \otimes B^\dagger. \tag{1.39}$$

Sejam U e V espaços vetoriais com dimensões m e n, respectivamente. O **produto tensorial** $U \otimes V$ é um espaço vetorial de dimensão mn cujos elementos são combinações lineares dos “produtos tensoriais”$|u\rangle \otimes |v\rangle$ de elementos $|u\rangle \in U$ e $|v\rangle \in V$. Assim, se $\{|u\rangle\}$ é uma base de U e $\{|v\rangle\}$ é uma base de V, então $\{|u\rangle \otimes |v\rangle\}$ é uma base de $U \otimes V$.

Proposição 1.25. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão n, $T : V \to V$ e $|\phi\rangle, |\psi\rangle \in V$. Então*

$$\langle\phi| \otimes (T|\psi\rangle) = \langle\phi|\psi\rangle T. \tag{1.40}$$

Demonstração. Sejam $|\phi\rangle$ e $|\psi\rangle$ vetores em V. Podemos representar esses vetores por

$$|\phi\rangle = \begin{bmatrix}\phi_1\\ \vdots \\ \phi_n\end{bmatrix} \text{ e } |\psi\rangle = \begin{bmatrix}\psi_1\\ \vdots \\ \psi_n\end{bmatrix}. \tag{1.41}$$

Temos então

$$\langle\phi| \otimes (T|\psi\rangle) = [\overline{\phi}_1 \cdots \overline{\phi}_n] \otimes T \begin{bmatrix}\psi_1\\ \vdots \\ \psi_n\end{bmatrix} = [\overline{\phi}_1 T \cdots \overline{\phi}_n T] \begin{bmatrix}\psi_1\\ \vdots \\ \psi_n\end{bmatrix}$$

$$= (\overline{\phi}_1\psi_1 + \ldots + \overline{\phi}_n\psi_n)T = [\overline{\phi}_1 \cdots \overline{\phi}_n] \begin{bmatrix}\psi_1\\ \vdots \\ \psi_n\end{bmatrix} T = \langle\phi|\psi\rangle T.$$

□

1.2 Postulados da Mecânica Quântica

A mecânica quântica trata da descrição dinâmica e estatística de partículas microscópicas. Baseado em certas medições e resultados experimentais, podemos definir o que chamaremos de **postulados da mecânica quântica**, e que servirão como fundamento matemático da teoria.

Os postulados serão descritos de acordo com (10), bem como o restante do capítulo.

Estaremos interessados em analisar o comportamento de uma partícula inserida em um sistema. Se o sistema não sofre alterações por fenômenos fora do sistema, dizemos que o sistema é **fechado**, caso contrário, dizemos que o sistema é **aberto**.

Postulado 1: Qualquer sistema físico isolado de dimensão finita possui um espaço de Hilbert associado, conhecido como o **espaço de estados** do sistema. Esse sistema é completamente descrito pelos seus estados, que são vetores unitários no espaço de estados do sistema.

Postulado 2: A evolução temporal do estado de um sistema quântico fechado é descrita pela **Equação de Schrödinger**,

$$\imath\hbar\frac{d|\psi\rangle}{dt} = H|\psi\rangle, \tag{1.42}$$

onde $\hbar$ é a **constante de Planck** e H denota o operador **Hamiltoniano** do sistema fechado.

Resolvendo a equação (1.42), obtemos que

$$|\psi_2\rangle = U\,|\psi_1\rangle\,, \tag{1.43}$$

onde $U = e^{iHt}$ é um operador unitário, portanto, a evolução de um sistema quântico fechado é descrita por uma **transformação unitária**, isto é, o estado $|\psi_1\rangle$ do sistema no tempo t_1 está relacionado ao estado $|\psi_2\rangle$ do sistema no tempo t_2 por um operador unitário U, que depende apenas dos tempos t_1 e t_2.

Postulado 3: As medições quânticas são descritas por uma coleção $\{M_m\}$ de operadores. Estes operadores interferem no espaço de estados do sistema que está sendo medido. O índice m denota os resultados da medição que podem ocorrer no experimento. Se o estado do sistema quântico é $|\psi\rangle$ imediatamente antes da medição, então a probabilidade de que o resultado m ocorra é dada por

$$p(m) = \langle\psi|M_m^\dagger M_m|\psi\rangle\,, \tag{1.44}$$

e o estado do sistema após medido é

$$\frac{M_m\,|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|M_m^\dagger M_m|\psi\rangle}}. \tag{1.45}$$

Esses operadores satisfazem a **Relação de Completude**,

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = I. \tag{1.46}$$

A Relação de Completude expressa o fato que probabilidades somam 1:

$$1 = \sum_m p(m) = \sum_m \langle\psi|M_m^\dagger M_m|\psi\rangle\,. \tag{1.47}$$

Agora, já temos boas informações sobre o comportamento de sistemas que agem de forma isolada. Mas o que ocorre quando fazemos medições em sistemas compostos? Neste caso, fazemos uso do produto tensorial, como é descrito a seguir.

Postulado 4: O espaço de estados de um sistema físico composto é descrito pelo produto tensorial dos espaços de estados dos sistemas físicos componentes. Além disso, se tivermos sistemas numerados de 1 a n e o sistema i se encontra no estado $|\psi_i\rangle$, então o estado conjunto do sistema total é $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \cdots \otimes |\psi_n\rangle$.

1.3 Operadores Densidade

Suponha que um sistema quântico esteja em um dos estados $|\psi_i\rangle$ com probabilidade p_i. Chamaremos $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ de conjunto de **estados puros**. O operador **densidade** do sistema é definido por

$$\rho := \sum_i p_i \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right| . \tag{1.48}$$

Quando tomamos um sistema quântico cujo estado $|\phi\rangle$ é conhecido exatamente, dizemos que ρ é um estado puro e é da forma $|\psi\rangle \langle\psi|$.

Na demonstração do próximo teorema faremos uso da propriedade

$$\operatorname{Tr}(A\left|\psi\right\rangle\left\langle\psi\right|) = \left\langle\psi\right| A \left|\psi\right\rangle , \tag{1.49}$$

para qualquer operador linear A agindo num espaço vetorial que contém o estado $|\psi\rangle$. Essa propriedade decorre da ordenação de uma base ortonormal $\{i\}$, onde o primeiro termo é $|\psi\rangle$. Assim,

$$\operatorname{Tr}(A\left|\psi\right\rangle\left\langle\psi\right|) = \sum_i \langle i|A|\psi\rangle \langle\psi|i\rangle = \left\langle\psi\right| A \left|\psi\right\rangle .$$

Teorema 1.26. *(10) Um operador ρ é o operador densidade associado a algum conjunto $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ se e somente se satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) *ρ tem traço igual a 1;*

(ii) *ρ é um operador positivo.*

Demonstração. Suponha que $\rho = \sum_i p_i \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right|$ é um operador densidade. Então

$$\operatorname{Tr}(\rho) = \operatorname{Tr}\left(\sum_i p_i \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right|\right) = \sum_i \operatorname{Tr}(p_i \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right|) =$$

$$= \sum_i p_i(\operatorname{Tr}(\left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right|)) \overset{(1.49)}{=} \sum_i p_i \langle\psi_i|\psi_i\rangle = \sum_i p_i = 1,$$

onde a penúltima igualdade decorre do fato de $|\psi_i\rangle$ ser um estado. Assim, $\operatorname{Tr}(\rho) = 1$.

Agora, tome $|\varphi\rangle$ um vetor arbitrário no espaço de estados, então

$$\langle\varphi|\,\rho\,|\varphi\rangle = \langle\varphi| \sum_i p_i \left|\psi_i\right\rangle \langle\psi_i|\varphi\rangle = \sum_i p_i \langle\varphi|\psi_i\rangle \langle\psi_i|\varphi\rangle = \sum_i p_i |\langle\varphi|\psi_i\rangle|^2 \geq 0,$$

logo, ρ é positivo.

Reciprocamente, suponha que ρ é um operador que satisfaz (i) e (ii). Como ρ é positivo, é normal, logo, admite decomposição espectral

$$\rho = \sum_j \lambda_j \left|j\right\rangle \left\langle j\right| ,$$

onde os vetores $|j\rangle$ são ortogonais e λ_j são autovalores não-negativos de ρ. Por (i), vemos que

$$\sum_j \lambda_j = 1,$$

ou seja, um sistema no estado $|j\rangle$ com probabilidade λ_j terá operador densidade ρ. Isto é, o conjunto $\{\lambda_j, |j\rangle\}$ é um conjunto de estados que dá origem ao operador densidade ρ. $\square$

O último teorema fornece uma caracterização dos operadores densidade, portanto, podemos estabelecer uma nova definição para estes operadores.

Definição 1.27. *Um operador linear ρ positivo e com traço 1 é chamado de* ***operador densidade.***

1.3.1 Reformulação dos Postulados

Podemos agora reformular os postulados da mecânica quântica empregando operadores densidade da seguinte forma:

Postulado 1: Associado a qualquer sistema físico isolado está um espaço de Hilbert, conhecido como o *espaço de estados* do sistema. O sistema é completamente descrito por seu operador densidade, agindo no espaço de estados do sistema. Se um sistema quântico está no estado ρ_i com probabilidade p_i, então o operador densidade do sistema é $\sum_i p_i\rho_i$.

Postulado 2: A evolução de um sistema quântico fechado é descrita por uma transformação unitária, isto é, o estado ρ do sistema no tempo n está relacionado ao estado ρ' do sistema no tempo $n+1$ por um operador unitário U :

$$\rho' = U\rho U^\dagger. \tag{1.50}$$

Postulado 3: As medições quânticas são descritas por uma coleção $\{M_m\}$ de operadores. Esses operadores agem sobre o espaço de estados do sistema que está sendo medido. O índice m refere-se aos resultados da medição que podem ocorrer no experimento. Se o estado do sistema quântico é ρ imediatamente antes da medição, então a probabilidade de que o resultado m ocorra é dada por

$$p(m) = \mathrm{Tr}(M_m^\dagger M_m\rho), \tag{1.51}$$

e o estado do sistema após medido é

$$\frac{M_m\rho M_m^\dagger}{\mathrm{Tr}(M_m^\dagger M_m\rho)}. \tag{1.52}$$

Esses operadores satisfazem a Relação de Completude, ou seja,

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = I. \tag{1.53}$$

Postulado 4: O espaço de estados de um sistema físico composto é o produto tensorial dos espaços estado dos sistemas físicos componentes. Além disso, se tivermos sistemas numerados de 1 a n e o sistema i se encontra no estado ρ_i, então o estado conjunto do sistema total é $\rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \cdots \otimes \rho_n$.

Exemplo 1.28. (10) A princípio, poderia-se supor que um sistema quântico com matriz densidade

$$\rho = \frac{3}{4} |0\rangle \langle 0| + \frac{1}{4} |1\rangle \langle 1|$$

está no estado $|0\rangle$ com probabilidade $3/4$ e no estado $|1\rangle$ com probabilidade $1/4$. Entretanto, isso pode não ser o caso. De fato, defina

$$|a\rangle := \sqrt{\frac{3}{4}} |0\rangle + \sqrt{\frac{1}{4}} |1\rangle$$

$$|b\rangle := \sqrt{\frac{3}{4}} |0\rangle - \sqrt{\frac{1}{4}} |1\rangle ,$$

onde o sistema quântico está preparado com probabilidade $1/2$ no estado $|a\rangle$ e $1/2$ no $|b\rangle$. Então

$$\rho = \frac{1}{2} |a\rangle \langle a| + \frac{1}{2} |b\rangle \langle b| =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{3}{4}} |0\rangle + \sqrt{\frac{1}{4}} |1\rangle \right) \left(\sqrt{\frac{3}{4}} \langle 0| + \sqrt{\frac{1}{4}} \langle 1| \right) + \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{3}{4}} |0\rangle - \sqrt{\frac{1}{4}} |1\rangle \right) \left(\sqrt{\frac{3}{4}} \langle 0| - \sqrt{\frac{1}{4}} \langle 1| \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} |0\rangle \langle 0| + \frac{1}{4} |1\rangle \langle 1| + \frac{3}{4} |0\rangle \langle 0| + \frac{1}{4} |1\rangle \langle 1| \right) = \frac{3}{4} |0\rangle \langle 0| + \frac{1}{4} |1\rangle \langle 1| .$$

Esse exemplo mostra que é possível que dois ensaios diferentes de estados quânticos deem origem a mesma matriz densidade. Em geral, os autovalores e autovetores de uma matriz densidade indicam apenas uma maneira das várias possíveis de ensaios que podem dar origem a uma específica matriz densidade, não havendo razão para supor que algum ensaio tenha esse privilégio especial.

2 Mapas Positivos

Como visto no Teorema 1.18, o conjunto dos operadores positivos é uma subclasse do conjunto dos operadores hermitianos, cujos espectros são compostos por valores não-negativos. Na física estes operadores têm aplicações muito importantes, pois quando desempenham o papel de um objeto observável, qualquer medição feita neste observável retorna um resultado positivo.

A seguir introduziremos o espaço de Hilbert em que a teoria é elaborada e aplicaremos matrizes em blocos como ferramenta para obtenção de resultados que envolvem operadores e mapas positivos.

2.1 Decomposição de Operadores Diagonalizáveis

Tome um espaço de Hilbert N-dimensional $\mathcal{H}$ equipado com um produto escalar. Seja $B(\mathcal{H})$ o espaço de Hilbert associado a todos os operadores lineares limitados agindo em $\mathcal{H}$ com o produto escalar de Hilbert-Schmidt $\langle A, B\rangle_{HS} := \mathrm{Tr}(A^\dagger B)$.

Como $dim(\mathcal{H}) < \infty$, temos que $B(H)$ e $\mathbb{M}_N$ são isomorfos (6).

Teorema 2.1. *(6) Se um operador linear $A \in B(\mathcal{H})$ é normal, então A é unitariamente diagonalizável, isto é, existe um operador unitário $U \in B(\mathcal{H})$ tal que*

$$A = UDU^\dagger, \tag{2.1}$$

onde $D \in B(\mathcal{H})$ é uma matriz diagonal e suas entradas são os autovalores de A.

Demonstração. Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada, por exemplo, em (6). $\square$

Corolário 2.2. *Se um operador linear $A \in B(\mathcal{H})$ é hermitiano, então existem operadores positivos $A_+, A_- \in B(\mathcal{H})$ tais que*

$$A = A_+ - A_-. \tag{2.2}$$

Demonstração. Seja $A \in B(\mathcal{H})$ hermitiano, então A também é normal, logo, $A = UDU^\dagger$ para algum operador unitário U e D diagonal. Pela Proposição 1.17 as entradas de D são reais. Reescrevendo $D = D_+ - D_-$, onde D_+ e D_- são diagonais que contêm os módulos das entradas positivas e negativas de D, respectivamente, podemos então decompor A como

$$A = \underbrace{UD_+U^\dagger}_{A_+} - \underbrace{UD_-U^\dagger}_{A_-}, \tag{2.3}$$

obtendo o resultado desejado. □

Teorema 2.3 (Teorema dos Valores Singulares (10))**.** *Todo operador linear $A \in B(\mathcal{H})$ admite uma decomposição da forma*

$$A = UDV, \tag{2.4}$$

onde D é diagonal com entradas reais não-negativas e $U, V \in B(\mathcal{H})$ são operadores unitários.

Demonstração. Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada, por exemplo, em (10). □

Definição 2.4. *A **norma** induzida pelo produto interno de Hilbert-Schmidt é dada por*

$$||A|| := \sqrt{\langle A, A \rangle_{HS}}, \forall A \in B(\mathcal{H}). \tag{2.5}$$

Se $\{|i\rangle\}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{H}$, então também temos que

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j} | \langle i|A|j \rangle |^2}. \tag{2.6}$$

De fato,

$$\langle A, A \rangle_{HS} = \mathrm{Tr}(A^\dagger A) = \mathrm{Tr}\left(\sum_{i,j} \langle j|A|i \rangle |j\rangle \langle i| \sum_{k,l} \langle k|A|l \rangle |k\rangle \langle l| \right)$$

$$= \sum_{i,j,k,l} \langle j|A|i \rangle \langle k|A|l \rangle \mathrm{Tr}(|j\rangle \langle i|k\rangle \langle l|) = \sum_{i,j,l} \langle j|A|i \rangle \langle i|A|l \rangle \mathrm{Tr}\left(\langle l|j \rangle\right) = \sum_{i,j} \langle j|A|i \rangle \langle i|A|j \rangle$$

$$= \sum_{i,j} | \langle j|A|i \rangle |^2.$$

Definição 2.5. *Um operador $A \in B(\mathcal{H})$ que satisfaz*

$$\|A\| \leq 1 \tag{2.7}$$

*é chamado de **contração**.*

Corolário 2.6. *(3) Se um operador linear $A \in B(\mathcal{H})$ é uma contração, então existem operadores unitários $U, V \in B(\mathcal{H})$ tais que*

$$A = \frac{1}{2}(U + V). \tag{2.8}$$

Demonstração. Seja $A \in B(\mathcal{H})$ uma contração e $A = XDY$ a decomposição assegurada pelo Teorema 2.3, onde D é diagonal com entradas reais não-negativas e $X, Y \in B(\mathcal{H})$ são operadores unitários. Como A é contração, as entradas $s_1, \ldots, s_n$ de D estão entre 0 e 1, logo, para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$, existe algum real θ_j tal que $s_j = \frac{1}{2}(e^{i\theta_j} + e^{-i\theta_j})$, assim,

$$A = XDY = X \begin{bmatrix} s_1 & & \\ & \ddots & \\ & & s_n \end{bmatrix} Y = \frac{1}{2}\left\{ \underbrace{X \begin{bmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{bmatrix} Y}_{U} + \underbrace{X \begin{bmatrix} e^{-i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{-i\theta_n} \end{bmatrix} Y}_{V} \right\}.$$

Note que $e^{i\theta_j} e^{-i\theta_j} = 1$, logo, U e V são operadores unitários. □

Proposição 2.7. *(10) Qualquer matriz $X \in \mathbb{M}_n$ pode ser escrita da forma*

$$X = Y + iZ, \tag{2.9}$$

onde $Y, Z \in \mathbb{M}_n$ são matrizes hermitianas.

Demonstração. Note que

$$X = \frac{1}{2}(X + X^\dagger) + \frac{i}{2}(-iX + iX^\dagger).$$

Escrevendo $Y = \frac{1}{2}(X + X^\dagger)$ e $Z = \frac{1}{2}(-iX + iX^\dagger)$ e notando que $Y = Y^\dagger$ e $Z = Z^\dagger$, obtemos o resultado desejado. □

2.2 Positividade de Matrizes em Blocos

Proposição 2.8. *(3) Seja um operador linear $A \in B(\mathcal{H})$. O operador A é uma contração se e somente se a matriz em blocos $\begin{bmatrix} I & A \\ A^\dagger & I \end{bmatrix}$ é uma matriz positiva.*

Demonstração. Por indução, suponha que $dim(\mathcal{H}) = 1$, então $A \in \mathbb{C}$, logo,

$$\begin{bmatrix} I & A \\ A^\dagger & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & A \\ A^* & 1 \end{bmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \|A\|^2 \geq 0,$$

ou seja, $\|A\| \leq 1$.

Suponha que vale para $dim(\mathcal{H}) = n - 1$. Tome $U, V \in B(\mathcal{H})$ unitários e $D \in B(\mathcal{H})$ diagonal com entradas $d_i, i = 1, \ldots, n$, onde $A = UDV$, assim,

$$\begin{bmatrix} I & A \\ A^\dagger & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & UDV \\ (UDV)^\dagger & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & UDV \\ V^\dagger D^\dagger U^\dagger & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & V^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & D \\ D & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^\dagger & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix}.$$

A matriz $\begin{bmatrix} I & D \\ D & I \end{bmatrix}$ é unitariamente equivalente a soma direta

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} 1 & d_i \\ d_i & 1 \end{bmatrix},$$

com isso, $\|A\| \leq 1$ se e somente se $1 - d_i^2 \geq 0, \forall i \in \{1, \ldots, n\} \Leftrightarrow d_i \leq 1, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$, ou seja, quando a matriz em blocos é positiva. $\square$

Proposição 2.9. *(3) Sejam $A, B \in B(\mathcal{H})$ operadores positivos. A matriz em blocos $\begin{bmatrix} A & X \\ X^\dagger & B \end{bmatrix}$ é positiva se e somente se existe uma contração $C \in B(\mathcal{H})$ tal que X é da forma $X = A^{1/2}CB^{1/2}$.*

Demonstração. Se $A, B > 0$, então temos a equivalência

$$\begin{bmatrix} A & X \\ X^\dagger & B \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} A^{-1/2} & 0 \\ 0 & B^{-1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & X \\ X^\dagger & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1/2} & 0 \\ 0 & B^{-1/2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A^{1/2} & A^{-1/2}X \\ B^{-1/2}X^\dagger & B^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1/2} & 0 \\ 0 & B^{-1/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & A^{-1/2}XB^{-1/2} \\ B^{-1/2}X^\dagger A^{-1/2} & I \end{bmatrix}.$$

Seja $C = A^{-1/2}XB^{-1/2}$, então, pela Proposição 2.8, esta matriz é positiva se e somente se o operador C é uma contração. O caso em que $A, B \geq 0$ decorre da continuidade do operador. $\square$

Teorema 2.10. *(3) Sejam $A, B \in B(\mathcal{H})$ operadores estritamente positivos. A matriz em blocos $\begin{bmatrix} A & X \\ X^\dagger & B \end{bmatrix}$ é positiva se e somente se $A \geq XB^{-1}X^\dagger$.*

Demonstração. Tome $A, B \in B(\mathcal{H})$ estritamente positivos e considere a congruência

$$\begin{bmatrix} A & X \\ X^\dagger & B \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} I & -XB^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & X \\ X^\dagger & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -B^{-1}X^\dagger & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - XB^{-1}X^\dagger & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Assim, a matriz em blocos $\begin{bmatrix} A & X \\ X^\dagger & B \end{bmatrix}$ é positiva se e somente se $A \geq XB^{-1}X^\dagger$. $\square$

2.3 Mapas Lineares Positivos

Nesta seção serão apresentadas algumas propriedades dos **mapas lineares positivos**, que são operadores que levam operadores positivos em operadores positivos, isto é, $\Phi : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ é um mapa linear positivo se $\Phi(A) \geq 0$, para todo $A \in B(\mathcal{H})$ positivo.

Se $S : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$, então a **norma do mapa** S é definida por

$$\|S\| := \sup_{X\neq 0} \frac{\|S(X)\|}{\|X\|} = \sup_{\|X\|=1} \|S(X)\|, X \in B(\mathcal{H}). \tag{2.10}$$

Proposição 2.11. *(5) Se S e T são mapas agindo em $B(\mathcal{H})$, então*

(i) $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$;

(ii) $\|S\| = \|S^\dagger\|$.

Demonstração. (i) Temos que

$$\|S\| = \sup_{B(\mathcal{H})\ni Y\neq 0} \frac{\|S(Y)\|}{\|Y\|} \geq \frac{\|S(X)\|}{\|X\|}, \forall X \in B(\mathcal{H}), \tag{2.11}$$

logo, $\|S\|\|X\| \geq \|S(X)\|, \forall X \in B(\mathcal{H})$. Então

$$\|ST\| = \sup_{X\neq 0} \frac{\|ST(X)\|}{\|X\|} \leq \sup_{X\neq 0} \frac{\|S\|\|T(X)\|}{\|X\|} \leq \sup_{X\neq 0} \frac{\|S\|\|T\|\|X\|}{\|X\|} = \|S\|\|T\|. \tag{2.12}$$

(ii) Se $S = 0$, então o resultado é trivial. Suponha então que $S \neq 0$, assim, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz (Teorema 1.9) e pelo item anterior, temos

$$\|S\|^2 = \sup_{\|X\|=1} \langle S(X), S(X)\rangle = \sup_{\|X\|=1} \langle X, S^\dagger S(X)\rangle \leq \sup_{\|X\|=1} \|S^\dagger S(X)\| = \|S^\dagger S\| \leq \|S^\dagger\|\|S\|, \tag{2.13}$$

ou seja, $\|S\| \leq \|S^\dagger\|$. Analogamente, $\|S^\dagger\| \leq \|S\|$, portanto, vale (ii). □

Lema 2.12. *(3) Todo mapa linear positivo $\Phi : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ preserva adjunta, isto é,*

$$(\Phi(X))^\dagger = \Phi(X^\dagger), \forall X \in B(\mathcal{H}). \tag{2.14}$$

Demonstração. Seja $\Phi : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ um mapa positivo. Tome $A \in B(\mathcal{H})$ hermitiano. Pelo Corolário 2.2 existe uma decomposição $A = A_+ - A_-$, onde $A_\pm \geq 0$. Temos então

$$\Phi(A) = \Phi(A_+ - A_-) = \underbrace{\Phi(A_+)}_{\geq 0} - \underbrace{\Phi(A_-)}_{\geq 0}.$$

Temos assim uma diferença de mapas positivos, ou seja, hermitianos, consequentemente essa diferença é um mapa hermitiano. Assim, $\Phi(A) = (\Phi(A))^\dagger$ para todo $A \in B(\mathcal{H})$ hermitiano.

Seja $X \in B(\mathcal{H})$ qualquer, então podemos escrever $X = Y + iZ$, onde Y e Z são hermitianos, assim,

$$\begin{aligned}(\Phi(X))^\dagger &= (\Phi(Y+iZ))^\dagger = (\Phi(Y) + i\Phi(Z))^\dagger = (\Phi(Y))^\dagger - i(\Phi(Z))^\dagger = \Phi(Y) - i\Phi(Z)\\ &= \Phi(Y - iZ) = \Phi(X^\dagger).\end{aligned}$$

□

Definição 2.13. *Um mapa $\mathcal{P} : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ que satisfaz*

$$\mathcal{P}(I) = I \tag{2.15}$$

é chamado de ***unital****.*

Teorema 2.14 (Desigualdade de Kadison (3))**.** *Seja $\Phi : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ positivo e unital. Se $A \in B(\mathcal{H})$ é hermitiano, então*

$$(\Phi(A))^2 \leq \Phi(A^2). \tag{2.16}$$

Demonstração. Se $A \in B(\mathcal{H})$ é hermitiano, então é normal. Pelo Teorema Espectral (1.15), existem projeções $P_j = |j\rangle\langle j|$, onde $\{|j\rangle\}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{H}$, tais que

$$A = \sum_j \lambda_j P_j, \tag{2.17}$$

onde cada λ_j é autovalor de A. Desta relação obtemos

$$A^2 = \left(\sum_j \lambda_j P_j\right)^2 = \sum_{i,j} \lambda_i\lambda_j |i\rangle\langle i|j\rangle\langle j| = \sum_{i,j} \delta_{ij}\lambda_i\lambda_j |i\rangle\langle j| = \sum_j \lambda_j^2 P_j. \tag{2.18}$$

Temos ainda, pela equação (1.15), que

$$\sum_j P_j = I. \tag{2.19}$$

Podemos verificar agora que

$$\begin{bmatrix} \Phi(A^2) & \Phi(A) \\ \Phi(A) & I \end{bmatrix} = \sum_j \begin{bmatrix} \lambda_j^2\Phi(P_j) & \lambda_j\Phi(P_j) \\ \lambda_j\Phi(P_j) & \Phi(P_j) \end{bmatrix} = \sum_j \begin{bmatrix} \lambda_j^2 & \lambda_j \\ \lambda_j & 1 \end{bmatrix} \otimes \Phi(P_j).$$

Note que a matriz $\begin{bmatrix} \lambda_j^2 & \lambda_j \\ \lambda_j & 1 \end{bmatrix}$ é positiva para todo j, assim como $\Phi(P_j)$. Portanto, a matriz em blocos $\begin{bmatrix} \Phi(A^2) & \Phi(A) \\ \Phi(A) & I \end{bmatrix}$ é a soma de matrizes positivas, com isso, também é positiva. Pelo Teorema 2.10, temos que

$$\Phi(A^2) \geq \Phi(A)I^{-1}(\Phi(A))^\dagger = \Phi(A)\Phi(A) = (\Phi(A))^2.$$

□

Teorema 2.15 (Teorema de Choi (3))**.** *Seja $\Phi : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ positivo e unital. Se $A \in B(\mathcal{H})$ é normal, então*

$$\Phi(A)\Phi(A^\dagger) \leq \Phi(A^\dagger A) \text{ e } \Phi(A^\dagger)\Phi(A) \leq \Phi(A^\dagger A). \tag{2.20}$$

Demonstração. Se $A \in B(\mathcal{H})$ é normal, então existem projeções $P_j = |j\rangle\langle j|$, onde $\{|j\rangle\}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{H}$, tais que

$$A = \sum_j \lambda_j P_j, \tag{2.21}$$

onde cada λ_j é autovalor de A. Ainda

$$A^\dagger = \left(\sum_j \lambda_j P_j\right)^\dagger = \sum_j \overline{\lambda}_j P_j^\dagger = \sum_j \overline{\lambda}_j P_j \tag{2.22}$$

e

$$A^\dagger A = \sum_{i,j} \overline{\lambda}_i \lambda_j P_i P_j = \sum_{i,j} \delta_{ij} \overline{\lambda}_i \lambda_j P_i = \sum_i |\lambda_i|^2 P_i. \tag{2.23}$$

Podemos verificar agora que

$$\begin{bmatrix} \Phi(A^\dagger A) & \Phi(A) \\ \Phi(A^\dagger) & I \end{bmatrix} = \sum_i \begin{bmatrix} |\lambda_i|^2 \Phi(P_i) & \lambda_i \Phi(P_i) \\ \overline{\lambda}_i \Phi(P_i) & \Phi(P_i) \end{bmatrix} = \sum_j \begin{bmatrix} |\lambda_i|^2 & \lambda_i \\ \overline{\lambda}_i & 1 \end{bmatrix} \otimes \Phi(P_i) \geq 0.$$

Note que a matriz $\begin{bmatrix} |\lambda_i|^2 & \lambda_i \\ \overline{\lambda}_i & 1 \end{bmatrix}$ é positiva para todo i, assim como $\Phi(P_i)$. Portanto, a matriz em blocos $\begin{bmatrix} \Phi(A^\dagger A) & \Phi(A) \\ \Phi(A^\dagger) & I \end{bmatrix}$ é a soma de matrizes positivas, assim, também é positiva. Pelo Teorema 2.10, temos que

$$\Phi(A^\dagger A) \geq \Phi(A) I^{-1} (\Phi(A))^\dagger = \Phi(A)\Phi(A^\dagger).$$

□

Teorema 2.16 (Desigualdade de Choi (3))**.** *Seja $\Phi : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ estritamente positivo e unital. Se $A \in B(\mathcal{H})$ é estritamente positivo, então*

$$(\Phi(A))^{-1} \leq \Phi(A^{-1}). \tag{2.24}$$

Demonstração. Assim como nas demonstrações anteriores, tome a decomposição $A = \sum_j \lambda_j P_j$, onde os autovalores λ_j são estritamente maiores que 0 (Teorema 1.18). Pela Proposição 1.19, A é inversível, logo,

$$A^{-1} = \left(\sum_j \lambda_j P_j\right)^{-1} = \sum_j \lambda_j^{-1} P_j, \tag{2.25}$$

portanto,

$$\begin{bmatrix} \Phi(A^{-1}) & I \\ I & \Phi(A) \end{bmatrix} = \sum_j \begin{bmatrix} \lambda_j^{-1} \Phi(P_j) & \Phi(P_j) \\ \Phi(P_j) & \lambda_j \Phi(P_j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_j^{-1} & 1 \\ 1 & \lambda_j \end{bmatrix} \otimes \Phi(P_j) \geq 0, =$$

assim,

$$\Phi(A^{-1}) \geq I(\Phi(A))^{-1}I^{\dagger} = (\Phi(A))^{-1}.$$

□

Teorema 2.17 (Russo-Dye (3))**.** *Seja* $\Phi : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ *positivo e unital, então*

$$\|\Phi\| = 1. \tag{2.26}$$

Demonstração. Tome $U \in B(\mathcal{H})$ unitário. Os autovalores λ_j de U satisfazem $|\lambda_j| = 1$ (Proposição 1.22). Note ainda que, por definição, U é normal, portanto, possui uma decomposição da forma $U = \sum_j \lambda_j P_j$, assim,

$$\begin{bmatrix} I & \Phi(U) \\ (\Phi(U))^{\dagger} & I \end{bmatrix} = \sum_j \begin{bmatrix} \Phi(P_j) & \lambda_j \Phi(P_j) \\ \overline{\lambda}_j \Phi(P_j) & \Phi(P_j) \end{bmatrix} = \sum_j \begin{bmatrix} 1 & \lambda_j \\ \overline{\lambda}_j & 1 \end{bmatrix} \otimes \Phi(P_j) \geq 0.$$

Pela Proposição 2.8, $\|\Phi(U)\| \leq 1$.

Tome uma contração $A \in B(\mathcal{H})$. Pelo Corolário 2.6, o operador A admite uma decomposição $A = \frac{1}{2}(V + W)$, onde $V, W \in B(\mathcal{H})$ são unitários, logo

$$\|\Phi(A)\| = \left\| \frac{1}{2}\Phi(V + W) \right\| = \frac{1}{2}\|\Phi(V+W)\| = \frac{1}{2}\|\Phi(V)+\Phi(W)\| \leq \frac{1}{2}\|\Phi(V)\| + \frac{1}{2}\|\Phi(W)\| \leq 1,$$

com isso, $\|\Phi(A)\| \leq 1$, para qualquer contração $A \in B(\mathcal{H})$. Ainda,

$$\|\Phi\| = \sup_{\|A\|=1} \|\Phi(A)\| \geq \|\Phi(I)\| = \|I\| = 1.$$

Concluímos então que $\|\Phi\| = 1$. □

3 Dinâmica Assintótica Quântica

Neste capítulo introduziremos os conceitos de operadores completamente positivos e quânticos, associando esses operadores com três axiomas motivados fisicamente. Veremos que o espectro de um operador quântico está contido no círculo unitário, assim, teremos um resultado crucial na construção do espaço atrator do operador quântico e, consequentemente, na dinâmica assintótica do operador, cujo resultado é central neste texto.

Começamos introduzindo os operadores quânticos de acordo com (10).

3.1 Introdução

Os sistemas clássicos podem ser descritos por processos estocásticos. Com frequência, a análise de processos em vários estágios pode ser descrita por Cadeias de Markov. Num processo de apenas um estágio, a probabilidade de saída $\vec{q}$ está relacionada à probabilidade de entrada $\vec{p}$ pela equação

$$\vec{q} = E\vec{p}, \tag{3.1}$$

onde E é uma matriz de transição de probabilidades. Temos então que o estado final do sistema está relacionado linearmente ao estado inicial.

Assim como os estados clássicos podem ser descritos por (3.1), os estados quânticos podem ser descritos por

$$\rho' = \mathcal{E}(\rho), \tag{3.2}$$

onde ρ é uma matriz densidade e $\mathcal{E}$ é um mapa que denominaremos nas próximas seções por operador quântico.

Uma maneira natural de descrever a dinâmica de um sistema quântico aberto é considerá-lo como decorrente de uma iteração entre o sistema de interesse, chamado de sistema principal (A), e um ambiente (B) que, em conjunto, formam um sistema quântico fechado.

A dinâmica do sistema decorre de uma evolução unitária livre em um sistema composto, isto é, se $\rho \in A$ e $\rho_{amb} \in B$, então $\rho \otimes \rho_{amb}$ é um estado do sistema composto $A \otimes B$.

Com o intuito de reduzir o sistema composto a um sistema único, podemos usar o traço parcial de um dos sistemas que compõe o sistema composto $A \otimes B$. Se $|a_1\rangle, |a_2\rangle \in A$ e $|b_1\rangle, |b_2\rangle \in B$, então o **traço parcial** de B é definido por

$$\mathrm{Tr}_B(|a_1\rangle\langle a_2| \otimes |b_1\rangle\langle b_2|) := |a_1\rangle\langle a_2| \,\mathrm{Tr}(|b_1\rangle\langle b_2|). \tag{3.3}$$

Assim, utilizando o traço parcial, a dinâmica principal do sistema é dada por:

$$\mathcal{E}(\rho) = \mathrm{Tr}_B[U(\rho \otimes \rho_{amb})U^\dagger], \tag{3.4}$$

portanto, temos um sistema que, após interagir com o operador unitário U, não interage mais com o sistema ambiente.

3.2 Operadores Completamente Positivos

Tome um mapa $\Phi : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ positivo. Podemos então considerar o operador induzido $(I_N \otimes \Phi) : \mathbb{M}_N(B(\mathcal{H})) \to \mathbb{M}_N(B(\mathcal{H}))$ dado por

$$(I_N \otimes \Phi)([X_{ij}]) = (\Phi([X_{ij}])), X_{ij} \in B(\mathcal{H}), \tag{3.5}$$

assim,

$$\begin{bmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{i1} & \cdots & X_{ij} \end{bmatrix} \xmapsto{I_N \otimes \Phi} \begin{bmatrix} \Phi(X_{11}) & \cdots & \Phi(X_{1j}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi(X_{i1}) & \cdots & \Phi(X_{ij}) \end{bmatrix}. \tag{3.6}$$

Definição 3.1. *Um mapa $\Phi : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ é dito **N-positivo** quando $(I_N \otimes \Phi) : \mathbb{M}_N(B(\mathcal{H})) \to \mathbb{M}_N(B(\mathcal{H}))$ é positivo. Se Φ é N-positivo para todo $N = 1, 2, ...$, então dizemos que Φ é um **operador completamente positivo**.*

Exemplo 3.2. Tomando $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ e $N = 2$, podemos definir um mapa $\Phi : B(\mathbb{C}^2) \to B(\mathbb{C}^2)$ por $\Phi(X) = VXV^\dagger$, onde $V \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$. Se $X \in B(\mathbb{C}^2)$ é positivo, então para todo $v \in \mathbb{C}^2$, temos

$$\langle v, \Phi(X)v\rangle = \langle v, VXV^\dagger v\rangle = \langle V^\dagger v, XV^\dagger v\rangle \geq 0,$$

logo, o mapa Φ é positivo (1-positivo).

Agora, tome um operador positivo

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \in B(\mathbb{C}^4). \tag{3.7}$$

Então

$$(I_2 \otimes \Phi)(A) = \begin{bmatrix} \Phi(A_{11}) & \Phi(A_{12}) \\ \Phi(A_{21}) & \Phi(A_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} VA_{11}V^\dagger & VA_{12}V^\dagger \\ VA_{21}V^\dagger & VA_{22}V^\dagger \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^\dagger & 0 \\ 0 & V^\dagger \end{bmatrix} \geq 0,$$

logo, Φ é 2-positivo.

Exemplo 3.3. (3) Nem todo mapa é completamente positivo. Seja $T(X) = X^T$, onde X^T representa a transposta de X. Tome

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}. \tag{3.8}$$

Note que A é hermitiana e seus autovalores são não-negativos, assim, A é positiva. Já $(I_2 \otimes T)(A)$ não é positiva, pois

$$(I_2 \otimes T)(A) = \begin{bmatrix} E_{11}^T & E_{12}^T \\ E_{21}^T & E_{22}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} := E.$$

Note que E é hermitiana, porém, um dos autovalores de E é -1, logo, E não é positiva.

Neste texto, estamos interessados em analisar um tipo especial de operadores completamente positivos, os operadores quânticos. Antes de definirmos esses operadores, analisaremos um teorema que nos permite reformular a definição de operador completamente positivo e, consequentemente, nos permite dar uma boa definição de operador quântico.

Seja $\mathcal{E} : Q_1 \to Q_2$, onde Q_1 é o espaço de entrada, formado por operadores densidade, e Q_2 é o espaço de saída, formado por operadores operadores positivos. Considere os seguintes axiomas motivados fisicamente:

$A1$: O $\mathrm{Tr}[\mathcal{E}(\rho)]$ é a probabilidade de ocorrência do processo representado por $\mathcal{E}$, onde ρ é o estado inicial. Assim, $0 \leq \mathrm{Tr}[\mathcal{E}(\rho)] \leq 1$ para qualquer estado ρ.

$A2$: $\mathcal{E}$ é um mapa linear no conjunto das matrizes densidade, isto é, para probabilidades $\{p_i\}$,

$$\mathcal{E}\left(\sum_i p_i \rho_i\right) = \sum_i p_i \mathcal{E}(\rho_i). \tag{3.9}$$

$A3$: $\mathcal{E}$ é um operador completamente positivo.

Veremos a seguir que todo operador completamente positivo $\mathcal{E}$ admite uma decomposição que depende de operadores do espaço de entrada de $\mathcal{E}$. Por conveniência, podemos supor que $Q_1 = Q_2 = Q$ na demonstração do teorema a seguir.

Teorema 3.4. *:(10) O mapa $\mathcal{E}$ satisfaz os axiomas $A1$, $A2$ e $A3$ se e somente se possui uma representação da forma*

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_i E_i \rho E_i^\dagger,$$

onde $\{E_i\}$ é um conjunto de operadores que leva o espaço de Hilbert de entrada no espaço de Hilbert de saída e satisfaz a propriedade

$$\sum_i E_i^\dagger E_i \leq I. \tag{3.10}$$

Demonstração. ($\Leftarrow$) Seja $\mathcal{E}$ um mapa da forma $\mathcal{E}(\rho) = \sum_i E_i \rho E_i^\dagger$, onde $\sum_i E_i^\dagger E_i \leq I$. Suponha que ρ é densidade, então

$$\operatorname{Tr}\left[\mathcal{E}(\rho)\right] = \operatorname{Tr}\left[\sum_i E_i \rho E_i^\dagger\right] = \sum_i \operatorname{Tr}\left[E_i \rho E_i^\dagger\right] = \sum_i \operatorname{Tr}\left[E_i^\dagger E_i \rho\right] =$$

$$= \operatorname{Tr}\left[\sum_i E_i^\dagger E_i \rho\right] \leq \operatorname{Tr}(\rho) = 1.$$

Ainda, $\mathcal{E}(\rho)$ é positivo, logo, vale $A1$.

O mapa $\mathcal{E}$ é linear, pois

$$\mathcal{E}\left(\sum_i p_i \rho_i\right) = \sum_j E_j \left(\sum_i p_i \rho_i\right) E_j^\dagger = \sum_{i,j} E_j p_i \rho_i E_j^\dagger =$$

$$= \sum_{i,j} p_i E_j \rho_i E_j^\dagger = \sum_i p_i \left(\sum_j E_j \rho_i E_j^\dagger\right) = \sum_i p_i \mathcal{E}(\rho_i),$$

logo, vale $A2$.

Tome dois espaços de Hilbert, R e Q, um operador positivo $A := A_1 \otimes A_2$ agindo em $R \otimes Q$ e $|\psi\rangle$ um estado de $R \otimes Q$.

Denote por I_R o operador identidade do espaço de Hilbert R e defina

$$|\varphi_i\rangle := (I_R \otimes E_i^\dagger)\,|\psi\rangle\,, \tag{3.11}$$

temos então que

$$\langle\psi|\,(I_R \otimes E_i)A(I_R \otimes E_i^\dagger)\,|\psi\rangle = \langle\varphi_i|\,A\,|\varphi_i\rangle \geq 0, \tag{3.12}$$

com isso,

$$\begin{aligned}
\langle\psi|\,(I \otimes \mathcal{E})(A)\,|\psi\rangle &= \langle\psi|\,(A_1 \otimes \mathcal{E}(A_2))\,|\psi\rangle \\
&= \langle\psi|\,(A_1 \otimes \textstyle\sum_i E_i A_2 E_i^\dagger)\,|\psi\rangle \\
&= \textstyle\sum_i \langle\psi|\,(A_1 \otimes (E_i A_2 E_i^\dagger))\,|\psi\rangle \\
&= \textstyle\sum_i \langle\psi|\,(I_R \otimes E_i)(A_1 \otimes A_2)(I_R \otimes E_i^\dagger)\,|\psi\rangle \\
&= \textstyle\sum_i \langle\psi|\,(I_R \otimes E_i)(A)(I_R \otimes E_i^\dagger)\,|\psi\rangle \\
&= \textstyle\sum_i \langle\varphi_i|\,A\,|\varphi_i\rangle \geq 0,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

logo, vale $A3$.

($\Rightarrow$) Suponha que $\mathcal{E}$ satisfaça os axiomas $A1$, $A2$ e $A3$. Nosso objetivo é encontrar uma soma de operadores que represente $\mathcal{E}$.

Suponha que introduzimos um sistema, R, com a mesma dimensão do sistema quântico original, Q. Sejam $|i_R\rangle$ e $|i_Q\rangle$ bases ortonormais de R e Q, respectivamente. Defina um estado do espaço estendido $R \otimes Q$ por

$$|\alpha\rangle := \sum_i |i_R\rangle |i_Q\rangle \tag{3.14}$$

e um operador σ no espaço de estados de $R \otimes Q$ por

$$\sigma := (I_R \otimes \mathcal{E})(|\alpha\rangle \langle\alpha|). \tag{3.15}$$

Seja $|\psi\rangle = \sum_j \psi_j |j_Q\rangle$ um estado qualquer do sistema Q e $|\tilde{\psi}\rangle = \sum_j \overline{\psi}_j |j_R\rangle$ um estado correspondente em R. Com isso,

$$\langle\tilde{\psi}|\sigma|\tilde{\psi}\rangle = \langle\tilde{\psi}| (I_R \otimes \mathcal{E})(|\alpha\rangle \langle\alpha|) |\tilde{\psi}\rangle = \langle\tilde{\psi}| (I_R \otimes \mathcal{E}) \left(\sum_i |i_R\rangle |i_Q\rangle \sum_j \langle j_R| \langle j_Q|\right) |\tilde{\psi}\rangle =$$

$$= \sum_{i,j} \langle\tilde{\psi}|i_R\rangle \langle j_R| \otimes \mathcal{E}(|i_Q\rangle \langle j_Q|) |\tilde{\psi}\rangle \overset{Prop 1.25}{=} \sum_{i,j} \langle\tilde{\psi}|i_R\rangle \langle j_R|\tilde{\psi}\rangle \mathcal{E}(|i_Q\rangle \langle j_Q|)$$

$$= \sum_{i,j} \sum_{k,l} \psi_k \langle k_R|i_R\rangle \overline{\psi}_l \langle j_R|l_R\rangle \mathcal{E}(|i_Q\rangle \langle j_Q|) = \sum_{i,j} \sum_{k,l} \psi_k \overline{\psi}_l \delta_{ki}\delta_{jl}\mathcal{E}(|i_Q\rangle \langle j_Q|)$$

$$= \sum_{i,j} \psi_i \overline{\psi}_j \mathcal{E}(|i_Q\rangle \langle j_Q|) = \mathcal{E}(|\psi\rangle \langle\psi|).$$

Como σ é positivo, existe uma decomposição espectral $\sigma = \sum_i |s_i\rangle \langle s_i|$, onde os vetores $|s_i\rangle$ não são necessariamente normalizados. Defina

$$E_i(|\psi\rangle) := \langle\tilde{\psi}|s_i\rangle . \tag{3.16}$$

Por definição, E_i é linear, assim, E_i é um operador linear no espaço de estados de Q. Ainda,

$$\sum_i E_i |\psi\rangle \langle\psi| E_i^\dagger = \sum_i \langle\tilde{\psi}|s_i\rangle \langle s_i|\tilde{\psi}\rangle = \langle\tilde{\psi}|\sigma|\tilde{\psi}\rangle = \mathcal{E}(|\psi\rangle \langle\psi|).$$

Temos então que

$$\mathcal{E}(|\psi\rangle \langle\psi|) = \sum_i E_i |\psi\rangle \langle\psi| E_i^\dagger, \tag{3.17}$$

para todos os estados puros $|\psi\rangle$ de Q. Por linearidade e pelo fato de $\mathcal{E}$ ser convexa,

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_i E_i \rho E_i^\dagger, \tag{3.18}$$

para qualquer estado $\rho \in R \otimes Q$.

A condição $\sum_i E_i E_i^\dagger \leq I$ decorre do Axioma $A1$, pois se fosse $\sum_i E_i E_i^\dagger > I$, então

$$1 \geq \mathrm{Tr}[\mathcal{E}(\rho)] = \mathrm{Tr}\left[\sum_i E_i(\rho)E_i^\dagger\right] = \mathrm{Tr}\left[\sum_i E_i^\dagger E_i(\rho)\right] > \mathrm{Tr}(\rho) = 1,$$

que não pode ocorrer, assim, $\sum_i E_i E_i^\dagger \leq I$. □

Como foi visto no teorema 3.4, todo operador completamente positivo $\mathcal{P} : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ admite uma decomposição em **operadores de Kraus** $\{A_j\}_{j=1}^k \subseteq B(\mathcal{H})$, isto é, $\mathcal{P}$ pode ser escrito da forma

$$\mathcal{P}(.) = \sum_{j=1}^{k} A_j(.)A_j^\dagger. \tag{3.19}$$

Além disso, sua adjunta com respeito ao produto interno de Hilbert-Schmidt também é um operador completamente positivo, ou seja, seus operadores de Kraus são $\{A_j^\dagger\}_{j=1}^k \subseteq B(\mathcal{H})$, e o mapa pode ser escrito da forma

$$\mathcal{P}^\dagger(.) = \sum_{j=1}^{k} A_j^\dagger(.)A_j. \tag{3.20}$$

De fato, se $X \in B(\mathcal{H})$,

$$\begin{aligned}
\langle X, \mathcal{P}^\dagger(X)\rangle &= \langle \mathcal{P}(X), X\rangle = \langle \textstyle\sum_{j=1}^k A_j X A_j^\dagger, X\rangle = \sum_{j=1}^k \langle A_j X A_j^\dagger, X\rangle \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^k \mathrm{Tr}((A_j X A_j^\dagger)^\dagger X) = \sum_{j=1}^k \mathrm{Tr}(A_j X^\dagger A_j^\dagger X) = \sum_{j=1}^k \mathrm{Tr}(X^\dagger A_j^\dagger X A_j) \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^k \langle X, A_j^\dagger X A_j\rangle = \langle X, \sum_{j=1}^k A_j^\dagger X A_j\rangle.
\end{aligned}$$

Definição 3.5. *Um operador completamente positivo $\mathcal{P} : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ dado por $\mathcal{P}(.) = \sum_{j=1}^k A_j(.)A_j^\dagger$ que satisfaz*

$$\sum_{j=1}^{k} A_j^\dagger A_j \leq I \tag{3.21}$$

*é chamado de **operador quântico**.*

Exemplo 3.6. Seja $\mathcal{P}$ um mapa da forma $\mathcal{P}(.) = \sum_{j=1}^k A_j(.)A_j^\dagger$. Para $A_j = \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta$ com $\alpha, \beta \in \{x, y, z\}$[1] temos que

$$\sum_{j=1}^{k} A_j^\dagger A_j = kI, \tag{3.22}$$

portanto, $\mathcal{P}$ é completamente positivo para qualquer $k = 1, 2, \ldots,$ mas, neste caso, só é operador quântico quando $k = 1$.

[1] σ_α e σ_β representam matrizes de Pauli (Exemplo 1.21).

Definição 3.7. *Dizemos que um mapa $\mathcal{P} : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$* ***preserva traço*** *quando* $\mathrm{Tr}[\mathcal{P}(X)] = \mathrm{Tr}(X), \forall X \in B(\mathcal{H})$.

Quando os operadores de Kraus do operador quântico $\mathcal{P}$ satisfazem $\sum_j A_j^\dagger A_j = I$, $\mathcal{P}$ preserva traço, pois

$$\mathrm{Tr}\left[\mathcal{P}(X)\right] = \mathrm{Tr}\left[\sum_j A_j X A_j^\dagger\right] = \sum_j \mathrm{Tr}\left[A_j X A_j^\dagger\right] = \sum_j \mathrm{Tr}\left[A_j^\dagger A_j X\right]$$
$$= \mathrm{Tr}\left[\sum_j A_j^\dagger A_j X\right] = \mathrm{Tr}(X).$$

No caso em que $\sum_j A_j A_j^\dagger \leq I$, dizemos que $\mathcal{P}$ é **traço não-crescente**, pois nesse caso $\mathrm{Tr}\left[\mathcal{P}(X)\right] \leq \mathrm{Tr}(X)$.

Definição 3.8. *Um mapa $\mathcal{P} : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ que satisfaz*

$$\mathcal{P}(I) \leq I \tag{3.23}$$

é chamado de ***subunital****.*

O próximo exemplo auxiliará no entendimento da demonstração do teorema que segue esse exemplo.

Exemplo 3.9. (2) Seja n a dimensão de $B(\mathcal{H})$,

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1} & \cdots & X_{nn} \end{bmatrix} \text{ e } |\varphi\rangle = \begin{bmatrix} \varphi_n \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix}. \tag{3.24}$$

Por definição, se $X \in B(\mathcal{H})$, então $X \geq 0 \Leftrightarrow \langle\varphi|X|\varphi\rangle \geq 0, \forall \varphi \in \mathcal{H}$. Reescrevendo o produto interno, temos

$$0 \leq \langle\varphi|X|\varphi\rangle = \sum_{i,j=1}^{N} \langle\varphi_i|X_{ij}|\varphi_j\rangle\,. \tag{3.25}$$

Tome $Y_i \in B(\mathcal{H})$ e $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$ arbitrários e defina $|\varphi_i\rangle := Y_i\,|\phi\rangle$. Temos então que $X \geq 0$ se e somente se

$$0 \leq \sum_{i,j=1}^{N} \langle\varphi_i|X_{ij}|\varphi_j\rangle = \sum_{i,j=1}^{N} \langle\phi|Y_i^\dagger X_{ij} Y_j|\phi\rangle \Leftrightarrow Y_i^\dagger X_{ij} Y_j \geq 0, \forall Y_i \in B(\mathcal{H}). \tag{3.26}$$

Matricialmente, para todo $Y_i \in B(\mathcal{H})$,

$$0 \leq \sum_{i,j=1}^{N} Y_i^\dagger X_{ij} Y_j = (Y_1^\dagger \;\ldots\; Y_N^\dagger) \begin{pmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1N} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{N1} & \cdots & X_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_N \end{pmatrix}. \tag{3.27}$$

Teorema 3.10. *(2) Seja $\mathcal{P}$ um operador completamente positivo e subunital. Então*

$$\mathcal{P}(X^\dagger X) \geq \mathcal{P}(X^\dagger)\mathcal{P}(X). \tag{3.28}$$

Demonstração. Seja $\mathcal{P}$ um operador completamente positivo e subunital. Pelo Teorema 1.18, um operador $A \in B(\mathcal{H})$ é positivo se e somente se possui uma decomposição da forma $T = S^\dagger S, S \in B(\mathcal{H})$. Tome o caso particular de uma matriz em blocos

$$A := \begin{pmatrix} I & X \\ X^\dagger & X^\dagger X \end{pmatrix}. \tag{3.29}$$

Note que decompondo A como

$$A = \begin{pmatrix} I & X \\ X^\dagger & X^\dagger X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ X^\dagger & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.30}$$

temos pelo Teorema 1.18 que A é positivo.

Denotemos por I_2 a matriz identidade em $\mathbb{M}_2$. Então temos que

$$0 \leq (I_2 \otimes \mathcal{P})(A) = (I_2 \otimes \mathcal{P}) \begin{pmatrix} I & X \\ X^\dagger & X^\dagger X \end{pmatrix} \overset{\mathcal{P}(I)\leq I}{\leq} \begin{pmatrix} I & \mathcal{P}(X) \\ \mathcal{P}(X^\dagger) & \mathcal{P}(X^\dagger X) \end{pmatrix}. \tag{3.31}$$

Portanto,

$$\mathcal{P}(X^\dagger X) - \mathcal{P}(X^\dagger)\mathcal{P}(X) = ([\mathcal{P}(X)]^\dagger \quad -I) \begin{pmatrix} I & \mathcal{P}(X) \\ \mathcal{P}(X^\dagger) & \mathcal{P}(X^\dagger X) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{P}(X) \\ -I \end{pmatrix} \geq 0, \tag{3.32}$$

pela positividade de (3.31). □

3.3 Dinâmica Iterativa de um Operador Quântico

Nesta seção analisaremos algumas propriedades muito interessantes do **espectro** de um operador quântico $\mathcal{P}$, isto é, o conjunto dos autovalores de $\mathcal{P}$. Começamos com um exemplo que envolve alguns elementos da demonstração do Teorema 3.4 e que auxiliarão na demonstração da propriedade de que o espectro de um operador quântico está contido no círculo unitário.

Exemplo 3.11. Se $\mathcal{P}$ é um operador quântico e $|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}|i\rangle|i\rangle \in \mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$ é um estado positivo do espaço de estados, então pelo Teorema 3.4 o sistema quântico $\gamma := I\otimes\mathcal{P} : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ agindo em $|\varphi\rangle$ é positivo. Assim como na demonstração do Teorema 3.4, tomando $|\psi\rangle = \sum_\beta \psi_\beta |\beta\rangle$ agindo em Q, onde $|\beta\rangle$ é uma base ortonormal de Q, para o caso particular em que $Q = \mathcal{H} = R$ e $|\psi\rangle$ pertence à base ortonormal de $\mathcal{H}$, temos que $|\psi\rangle = |\tilde{\psi}\rangle$. Ainda, o sistema quântico γ admite uma decomposição da forma

$$\gamma = \sum_{\alpha} \frac{1}{N} |\alpha\rangle \langle\alpha| \tag{3.33}$$

e os operadores de Kraus de $\mathcal{P}$ satisfazem $A_\alpha(|\psi\rangle) = \langle\tilde{\psi}|\alpha\rangle = \langle\psi|\alpha\rangle$, para qualquer $|\psi\rangle$ contido na base ortonormal de $\mathcal{H}$. Assim, se $|i\rangle |l\rangle, |j\rangle |k\rangle$ são elementos de uma base ortonormal de $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, então temos a relação

$$|\langle i| \langle l| (I \otimes \mathcal{P})(|\varphi\rangle \langle\varphi|) |j\rangle |k\rangle|^2 = \left| \langle i| \langle l| \left(\sum_{\alpha} \frac{1}{N} |\alpha\rangle \langle\alpha| \right) |j\rangle |k\rangle \right|^2$$

$$= \left| \frac{1}{N} \langle i| \sum_{\alpha} \langle l|\alpha\rangle \langle\alpha|j\rangle |k\rangle \right|^2 = \left| \frac{1}{N} \langle i| \sum_{\alpha} A_\alpha(|l\rangle \langle j|) A_\alpha^\dagger |k\rangle \right|^2 =$$

$$\left| \frac{1}{N} \langle i| \mathcal{P}(|l\rangle \langle j|) |k\rangle \right|^2.$$

Teorema 3.12. *(12) Seja $\mathcal{P} : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ um operador quântico. Então valem as seguintes relações:*

(i) *Qualquer autovalor λ de $\mathcal{P}$ satisfaz $|\lambda| \leq 1$;*

(ii) *Se λ é autovalor satisfazendo $|\lambda| = 1$, então*

$$Nuc(\mathcal{P} - \lambda I) \cap Im(\mathcal{P} - \lambda I) = \{0\}. \tag{3.34}$$

Demonstração. (i) Pelo exemplo anterior, o sistema quântico $I \otimes \mathcal{P} : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ agindo no estado $|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} |i\rangle |i\rangle \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ é positivo. Tomando elementos arbitrários $|i\rangle |l\rangle, |j\rangle |k\rangle$ de uma base ortonormal do espaço de Hilbert estendido $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, temos pela positividade de $I \otimes \mathcal{P}$ que

$$|\langle i| \langle l| (I \otimes \mathcal{P})(|\varphi\rangle \langle\varphi|) |j\rangle |k\rangle|^2 = \left| \frac{1}{N} \langle i| \mathcal{P}(|l\rangle \langle j|) |k\rangle \right|^2. \tag{3.35}$$

Ainda, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\left| \frac{1}{N} \langle i| \mathcal{P}(|l\rangle \langle j|) |k\rangle \right|^2 \leq \frac{1}{N} \langle i| \mathcal{P}(|l\rangle \langle l|) |i\rangle \frac{1}{N} \langle k| \mathcal{P}(|j\rangle \langle j|) |k\rangle, \tag{3.36}$$

assim, para todos $l, j = 1, ..., N$,

$$\sum_{l,k=1}^{N} |\langle i| \mathcal{P}(|l\rangle \langle j|) |k\rangle|^2 \leq 1, \tag{3.37}$$

pois,

$$\sum_{i,k=1}^{N} |\left\langle i\right| \mathcal{P}(\left|l\right\rangle\left\langle j\right|)\left|k\right\rangle|^2 \overset{(3.36)}{\leq} \sum_{i,k=1}^{N} \left\langle i\right| \mathcal{P}(\left|l\right\rangle\left\langle l\right|)\left|i\right\rangle \left\langle k\right| \mathcal{P}(\left|j\right\rangle\left\langle j\right|)\left|k\right\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left\langle i\right| \mathcal{P}(\left|l\right\rangle\left\langle l\right|)\left|i\right\rangle \sum_{k=1}^{N} \left\langle k\right| \mathcal{P}(\left|j\right\rangle\left\langle j\right|)\left|k\right\rangle =$$

$$= \mathrm{Tr}(\mathcal{P}(\left|l\right\rangle\left\langle l\right|))\mathrm{Tr}(\mathcal{P}(\left|j\right\rangle\left\langle j\right|)) \leq \mathrm{Tr}(\left|l\right\rangle\left\langle l\right|)\mathrm{Tr}(\left|j\right\rangle\left\langle j\right|) = \langle l|l\rangle\langle j|j\rangle = 1,$$

onde usamos a hipótese de que $\mathcal{P}$ tem a propriedade de traço não-crescente e que l e j são ortonormais.

Tome um autovalor λ do mapa $\mathcal{P}$ correspondente ao autovetor X. Pela equação (1.16), podemos escrever

$$X = \sum_{l,j=1}^{n} \langle j|X|l\rangle \left|j\right\rangle\left\langle l\right|, \tag{3.38}$$

logo,

$$|\lambda|^2\|X\|^2 = \|\mathcal{P}(X)\|^2 = \left\|\mathcal{P}\left(\sum_{l,j=1}^{n} \langle l|X|j\rangle \left|l\right\rangle\left\langle j\right|\right)\right\|^2$$

$$= \left\|\sum_{l,j=1}^{n} \langle l|X|j\rangle \mathcal{P}\left(\left|l\right\rangle\left\langle j\right|\right)\right\|^2 \overset{(2.6)}{=} \sum_{i,k=1}^{N} \left|\sum_{l,j=1}^{N} \langle l|X|j\rangle \left\langle k\right| \mathcal{P}(\left|l\right\rangle\left\langle j\right|)\left|i\right\rangle\right|^2$$

$$\leq \sum_{l,j=1}^{N} |\langle l|X|j\rangle|^2 \sum_{i,k=1}^{N} |\left\langle k\right| \mathcal{P}(\left|l\right\rangle\left\langle j\right|)\left|i\right\rangle|^2 \overset{(3.37)}{\leq} \|X\|^2.$$

Concluímos que se λ é autovalor de $\mathcal{P}$, então $|\lambda| \leq 1$.

(ii) Tome λ autovalor de $\mathcal{P}$ tal que $|\lambda| = 1$ e $X \in Nuc(\mathcal{P} - \lambda I) \cap Im(\mathcal{P} - \lambda I)$. Por definição $\mathcal{P}(X) - \lambda X = 0$ e existe $Y \in B(\mathcal{H})$ tal que $\mathcal{P}(Y) - \lambda Y = X$.

Afirmamos que $\mathcal{P}^n(Y) = \lambda^n Y + n\lambda^{n-1}X, \forall n \geq 1$. De fato, por indução podemos ver que para $n = 1$, a hipótese de indução é satisfeita pela hipótese $\mathcal{P}(Y) - \lambda Y = X$. Supondo válido para $n - 1$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^n(Y) &= \mathcal{P}(\mathcal{P}^{n-1}(Y)) = \mathcal{P}(\lambda^{n-1}Y + (n-1)\lambda^{n-2}X) \\
&= \lambda^{n-1}\mathcal{P}(Y) + n\lambda^{n-2}\mathcal{P}(X) - \lambda^{n-2}\mathcal{P}(X) \\
&= \lambda^{n-1}(X + \lambda Y) + n\lambda^{n-2}\lambda X - \lambda^{n-2}\lambda X \\
&= \lambda^{n-1}X + \lambda^n Y + n\lambda^{n-1}X - \lambda^{n-1}X \\
&= \lambda^n Y + n\lambda^{n-1}X.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Assim, vale

$$\omega_n := \lambda^{n-1}X = \underbrace{\frac{1}{n}\mathcal{P}^n(Y)}_{:=\mu_n} - \underbrace{\frac{1}{n}\lambda^n Y}_{:=\nu_n}, \forall n \geq 1. \tag{3.40}$$

Note que ν_n decresce mais rapidamente que ω_n para $\lambda \in \sigma_1$ quando $n \to \infty$.

Agora tome uma base ortonormal $\{|i\rangle\}$ do espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, assim, uma base de $B(\mathcal{H})$ é dada por $\{|i\rangle\langle j|\}$, então temos

$$\mathcal{P}^n(Y) = \sum_{i,j=1}^{N} \langle i|Y|j\rangle \, \mathcal{P}^n(|i\rangle\langle j|). \tag{3.41}$$

Ainda, $\mathcal{P}^n$ é completamente positivo e traço não-crescente, portanto,

$$0 \leq |[\langle l| \, \mathcal{P}^n(|i\rangle\langle j|) \, |k\rangle]| \overset{(3.37)}{\leq} 1, \forall n \geq 0, \forall 1 \leq k, l \leq N. \tag{3.42}$$

Verificamos assim que $\mu_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, logo, $\omega_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, portanto, concluímos que $X = 0$, pois $|\lambda| = 1$. □

Exemplo 3.13. Sejam $\mathcal{P}_1 : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ definido por

$$\mathcal{P}_1(.) = \sum_{i=1}^{3} A_i(.)A_i^\dagger, \tag{3.43}$$

onde

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1+i \end{bmatrix}, A_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \tag{3.44}$$

e $\mathcal{P}_2 : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ definido por

$$\mathcal{P}_2(.) = \sum_{i=1}^{3} B_i(.)B_i^\dagger, \tag{3.45}$$

onde

$$B_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, B_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1+i \end{bmatrix}, B_3 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}. \tag{3.46}$$

Temos então que $\mathcal{P}_1$ não é operador quântico, pois $\sum_{i=1}^{3} A_i^\dagger A_i = \frac{5}{3}I > I$, enquanto que $\mathcal{P}_2$ é operador quântico, pois $\sum_{i=1}^{3} B_i^\dagger B_i = \frac{5}{9}I < I$.

Os autovalores de $\mathcal{P}_1$ são $-\frac{1}{3}, 0, 1$ e $\frac{5}{3}$, e os autovalores de $\mathcal{P}_2$ são $-\frac{1}{9}, 0, \frac{1}{3}$ e $\frac{5}{9}$, portanto, operadores completamente positivos que não são operadores quânticos podem ter autovalores com módulo maior que 1.

Definição 3.14. *Seja T um operador linear com autovalor λ. A **multiplicidade algébrica** de λ, $m(\lambda)$, é a dimensão do autoespaço de T correspondente a λ. A **multiplicidade geométrica** de λ, $g(\lambda)$, é a dimensão do autoespaço generalizado de T correspondente a λ. Sabemos que $g(\lambda) \leq m(\lambda)$ (6).*

Definição 3.15. *Seja $\mathcal{P} : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ um operador quântico. Definimos o **espaço atrator** de $\mathcal{P}$ por*

$$Attr(\mathcal{P}) = \bigoplus_{|\lambda|=1} Nuc(\mathcal{P} - \lambda I). \tag{3.47}$$

Teorema 3.16 (Forma Canônica de Jordan (1))**.** *Sejam V um espaço vetorial complexo de dimensão finita e T um operador linear em V. Existe uma base de V em que a matriz correspondente ao operador T tem a forma canônica de Jordan, isto é, T pode ser diagonalizada por uma matriz em blocos*

$$\begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_p \end{bmatrix}, \tag{3.48}$$

onde cada J_i é uma matriz superior triangular da forma

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix}. \tag{3.49}$$

Demonstração. Demonstrações desse teorema podem ser encontradas, por exemplo, em (1, 8). □

Seja $\mathcal{P}$ um operador quântico. Podemos decompor $\mathcal{P}$ de acordo com a Forma Canônica de Jordan, assim, decorre do Teorema 3.12 que todo bloco de Jordan associado a um autovalor de módulo 1 é unidimensional. De fato, suponha que $\lambda \in \sigma_1$ é autovalor de $\mathcal{P}$. Para mostrarmos que um bloco de Jordan é unidimensional, precisamos mostrar que as multiplicidades algébrica e geométrica coincidem. Por absurdo, suponha que $m(\lambda) \neq g(\lambda)$, assim, existe um bloco de Jordan J correspondente a λ tal que sua dimensão é maior que 1, ou seja, existe $v \in B(\mathcal{H})$ autovetor generalizado de $\mathcal{P}$, isto é, existe um N inteiro positivo tal que $(\mathcal{P} - \lambda I)^N v = 0$ e $(\mathcal{P} - \lambda I)^{N-1} v \neq 0$, logo, $(\mathcal{P} - \lambda I)(\mathcal{P} - \lambda I)^{N-1} v = 0 \Rightarrow (\mathcal{P} - \lambda I)^{N-1} v \in Nuc(\mathcal{P} - \lambda I)$. Ainda, note que $(\mathcal{P} - \lambda I)^{N-1} v \in Im(\mathcal{P} - \lambda I)$, pois $N > 1$. Temos então que $0 \neq (\mathcal{P} - \lambda I)^{N-1} v \in Nuc(\mathcal{P} - \lambda I) \cap Im(\mathcal{P} - \lambda I)$, contrariando o Teorema 3.12.

A seguir, utilizaremos a notação $\sigma := \{\lambda \in \mathbb{C} | \mathcal{P}(\rho) = \lambda \rho\}$ para representar o **espectro** de um mapa $\mathcal{P}$ e σ_1 denotará o subconjunto de σ constituído pelos elementos de módulo 1.

Teorema 3.17. *(12) Dado um operador inicial $X(0) \in B(\mathcal{H})$, assintoticamente, a dinâmica iterativa de qualquer operador quântico $\mathcal{P} : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ é dada por*

$$X_\infty(n) = \sum_{\lambda \in \sigma_1, i=1}^{d_\lambda} \lambda^n X_{\lambda,i} \mathrm{Tr}(X^{\lambda,i\dagger} X(0)) \tag{3.50}$$

com

$$\lim_{n\to\infty} \|X_\infty(n) - \mathcal{P}(X(0))\| = 0. \tag{3.51}$$

Assim, os autovetores $X_{\lambda,i}$ são determinados pela relação $\mathcal{P}(X_{\lambda,i}) = \lambda X_{\lambda,i}$ para $i = 1, ..., d_\lambda$, assim, $d_\lambda = dim[Nuc(\mathcal{P} - \lambda I)]$, com $\lambda \in \sigma_1$. Seus vetores duais $X^{\lambda,i} \in B(\mathcal{H})$ com respeito ao produto escalar de Hilbert-Schmidt são definidos pelas propriedades $\mathrm{Tr}(X^{\lambda,i\dagger} X_{\lambda',i'}) = \delta_{\lambda\lambda'}\delta_{ii'}, \forall \lambda, \lambda' \in \sigma_1$ e para $\lambda \in \sigma_1$ cada $X^{\lambda,i}$ é ortogonal a todos os autoespaços $Nuc(\mathcal{P} - \lambda I)$ com $|\lambda'| < 1$.

Demonstração. Seja $\mathcal{P} : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ um operador quântico e tome uma forma normal de Jordan de $\mathcal{P}$ em relação a transformação de base $T \in B(\mathcal{H})$, isto é,

$$\mathcal{P} = TJT^{-1}, \tag{3.52}$$

onde $J \in B(\mathcal{H})$ denota a forma normal de Jordan do mapa $\mathcal{P}$. Temos então que o mapa iterado $\mathcal{P}^n$ pode ser escrito da forma

$$\mathcal{P}^n = TJ^nT^{-1}. \tag{3.53}$$

Tome agora um bloco de Jordan J_k da matriz J na posição (i, j). O módulo de cada entrada dessa matriz elevada a n pode ser estimado por

$$|(J_k)^n_{ij}| = |\lambda_k|^{n-(j-i)} \binom{n}{n-(j-i)} \leq \frac{n!|\lambda_k|^{n-d_k}}{(n-(j-i))!(j-i)!} \leq |\lambda_k|^{n-d_k} n^{d_k}.$$

Pelo Teorema 3.12, $|\lambda_k| \leq 1$. Podemos então dividir o problema em dois casos: se $|\lambda_k| < 1$, então $\lim_{n\to\infty} |\lambda_k|^{n-d_k} n^{d_k} = 0$. Este resultado é de suma importância, pois nos permite concluir que os blocos de Jordan correspondentes aos autovalores com módulo menor que 1 não contribuem para a dinâmica iterativa do mapa $\mathcal{P}$. Se $|\lambda| = 1$, então o bloco de Jordan associado é unidimensional.

Consequentemente, o mapa $\mathcal{P}^n$ pode ser diagonalizado no subespaço atrator

$$Attr(\mathcal{P}) = \bigoplus_{|\lambda|=1} Nuc(\mathcal{P} - \lambda I), \tag{3.54}$$

que é gerado pelos autovetores $X_{\lambda,i}, i = 1, \ldots, d_\lambda$. Esses autovetores $X_{\lambda,i}$ satisfazem a relação $\mathcal{P}(X_{\lambda,i}) = \lambda X_{\lambda,i}$ para $i = 1, \ldots, d_\lambda$ e $\lambda \in \sigma_1 := \{\lambda||\lambda| = 1\}$ e em geral eles não são ortogonais (com respeito ao produto escalar de Hilbert-Schmidt). Consequentemente, no limite de um número grande de iterações n, é suficiente expandir qualquer operador linear $X(0) \in B(\mathcal{H})$ nos termos desses autovetores, isto é,

$$X(0) = \sum_{\lambda\in\sigma_1} \sum_{i=1}^{d_\lambda} x_{\lambda,i} X_{\lambda,i} + Y(0), \tag{3.55}$$

onde $x_{\lambda,i} \in \mathbb{C}$ e $Y(0)$ denota a parte de $X(0)$ que está contida no autoespaço de autovalores $|\lambda| < 1$.

Afirmamos que os coeficientes $x_{\lambda,i}$ são dados por

$$x_{\lambda,i} = \mathrm{Tr}(X^{\lambda,i\dagger} X(0)), \tag{3.56}$$

onde $X^{\lambda,i} \in B(\mathcal{H})$ denota a base dual de $X_{\lambda,i}$ que satisfaz as relações $\mathrm{Tr}(X^{\lambda,i\dagger} X_{\lambda',i'}) = \delta_{\lambda\lambda'}\delta_{ii'}$ para todos os autovetores generalizados de uma base de Jordan. De fato,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}[X^{\lambda,i\dagger} X(0)] &= \mathrm{Tr}\left[X^{\lambda,i\dagger}\left(\sum_{\lambda'\in\sigma_1, i'=1}^{d_{\lambda'}} x_{\lambda',i'} X_{\lambda',i'} + Y(0)\right)\right] \\
&= \mathrm{Tr}\left[X^{\lambda,i\dagger}\left(\sum_{\lambda'\in\sigma_1, i'=1}^{d_{\lambda'}} x_{\lambda',i'} X_{\lambda',i'}\right)\right] + \mathrm{Tr}[X^{\lambda,i\dagger} Y(0)] \\
&= x_{\lambda,i},
\end{aligned} \tag{3.57}$$

onde a última igualdade segue do fato de que $\mathrm{Tr}(X^{\lambda,i\dagger} X_{\lambda',i'}) = \delta_{\lambda\lambda'}\delta_{ii'}$.

Temos então que

$$\begin{aligned}
\|X_\infty(n) - \mathcal{P}^n(X(0))\| &= \left\|\sum_{\lambda\in\sigma_1, i=1}^{d_\lambda} \lambda^n X_{\lambda,i} \mathrm{Tr}(X^{\lambda,i\dagger} X(0)) - \mathcal{P}^n(X(0))\right\| \\
&\overset{(3.56)}{=} \left\|\sum_{\lambda\in\sigma_1, i=1}^{d_\lambda} x_{\lambda,i} \lambda^n X_{\lambda,i} - \mathcal{P}^n(X(0))\right\| \\
&= \left\|\sum_{\lambda\in\sigma_1, i=1}^{d_\lambda} x_{\lambda,i} \mathcal{P}^n(X_{\lambda,i}) - \mathcal{P}^n(X(0))\right\| \\
&= \left\|\sum_{\lambda\in\sigma_1, i=1}^{d_\lambda} \mathcal{P}^n(x_{\lambda,i} X_{\lambda,i} - X(0))\right\| \\
&= \left\|\mathcal{P}^n\left(\sum_{\lambda\in\sigma_1, i=1}^{d_\lambda} x_{\lambda,i} X_{\lambda,i} - X(0)\right)\right\| \\
&\overset{(3.55)}{=} \|\mathcal{P}^n(Y(0))\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned} \tag{3.58}$$

□

Este teorema nos fornece uma boa caracterização para a dinâmica assintótica do mapa $\mathcal{P}^n$, porém, ainda é difícil encontrar o valor de X_∞, já que conhecemos apenas as propriedades que compõe os vetores duais $X^{\lambda,i}$, e não uma forma explícita para eles. Veremos no próximo capítulo que é possível encontrar uma forma explícita para os vetores duais, assim, poderemos calcular o valor de X_∞ explicitamente.

4 Construção da Base Dual Assintótica

Neste capítulo buscamos determinar uma base apropriada para o espaço dual assintótico, com isso feito, poderemos determinar explicitamente os vetores duais $X^{\lambda,i}$, consequentemente, poderemos calcular o valor de X_∞ explicitamente. Para isso, analisaremos operadores quânticos $\mathcal{P} : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ de modo a satisfazerem a propriedade $\mathcal{P}(\rho) \leq \rho$ para algum $\rho \in B(\mathcal{H})$ estritamente positivo. A partir dessa análise, faremos uso de um produto interno que relaciona o produto interno de Hilbert-Schmidt com algum operador estritamente positivo $\rho \in B(\mathcal{H})$ que satisfaz $\mathcal{P}(\rho) \leq \rho$.

4.1 Espaços ρ-Ortogonais

Teorema 4.1. *(12) Seja $\mathcal{P} : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ um operador quântico que satisfaz a propriedade $\mathcal{P}(\rho) \leq \rho$ para algum $\rho \in B(\mathcal{H})$ estritamente positivo. Então para todo autovalor $\lambda \in \sigma_1$, temos*

(i) $X \in Nuc(\mathcal{P} - \lambda I) \Leftrightarrow X\rho^{-1} \in Nuc(\mathcal{P}^\dagger - (1/\lambda)I)$;

(ii) $X \in Nuc(\mathcal{P} - \lambda I) \Leftrightarrow \rho^{-1}X \in Nuc(\mathcal{P}^\dagger - (1/\lambda)I)$;

(iii) $X \in Nuc(\mathcal{P} - \lambda I) \Leftrightarrow \rho^{-1}X\rho \in Nuc(\mathcal{P} - \lambda I)$.

Demonstração. (i) Tome o mapa $\mathcal{S} : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ definido por

$$\mathcal{S}(X) := \mathcal{P}^\dagger(X\rho^{-\frac{1}{2}})\rho^{\frac{1}{2}}. \tag{4.1}$$

A adjunta de $\mathcal{S}$ é dada por

$$\mathcal{S}^\dagger(X) = \mathcal{P}(X\rho^{\frac{1}{2}})\rho^{-\frac{1}{2}}. \tag{4.2}$$

De fato,

$$\begin{aligned} \langle X, \mathcal{S}^\dagger(X)\rangle &= \langle \mathcal{S}(X), X\rangle = \langle \mathcal{P}^\dagger(X\rho^{-\frac{1}{2}})\rho^{\frac{1}{2}}, X\rangle = \langle \textstyle\sum_j A_j^\dagger(X\rho^{-\frac{1}{2}})A_j\rho^{\frac{1}{2}}, X\rangle \\ &= \textstyle\sum_j \mathrm{Tr}(\rho^{\frac{1}{2}}A_j^\dagger\rho^{-\frac{1}{2}}X^\dagger A_j X) = \mathrm{Tr}(X^\dagger A_j X\rho^{\frac{1}{2}}A_j^\dagger\rho^{-\frac{1}{2}}) \\ &= \textstyle\sum_j \langle X, A_j X\rho^{\frac{1}{2}}A_j^\dagger\rho^{-\frac{1}{2}}\rangle = \langle X, \sum_j A_j X\rho^{\frac{1}{2}}A_j^\dagger\rho^{-\frac{1}{2}}\rangle \\ &= \langle X, \mathcal{P}(X\rho^{\frac{1}{2}})\rho^{-\frac{1}{2}}\rangle. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Como $\mathcal{P}$ é operador quântico, $\mathcal{P}^\dagger$ é subunital, pois

$$\mathcal{P}^\dagger(I) = \sum_j A_j^\dagger A_j \leq I, \tag{4.4}$$

portanto, pelo Teorema 3.10,

$$\mathcal{P}^\dagger(X)\mathcal{P}^\dagger(X^\dagger) \leq \mathcal{P}^\dagger(XX^\dagger), \forall X \in B(\mathcal{H}). \tag{4.5}$$

Note que,

$$(\mathcal{P}^\dagger(X\rho^{-1/2}))^\dagger = \left(\sum_{i=1}^{k} A_i^\dagger(X\rho^{-1/2})A_i\right)^\dagger = \sum_{i=1}^{k} A_i^\dagger(\rho^{-1/2}X^\dagger)A_i = \mathcal{P}^\dagger(\rho^{-1/2}X^\dagger), \forall X \in B(\mathcal{H}),$$

com isso, se $\rho \in B(\mathcal{H})$ é um operador estritamente positivo satisfazendo $\mathcal{P}(\rho) \leq \rho$, então

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}(X)\|^2 &= \mathrm{Tr}[(\mathcal{S}(X))^\dagger \mathcal{S}(X)] \\ &= \mathrm{Tr}[(\mathcal{P}^\dagger(X\rho^{-\frac{1}{2}})\rho^{\frac{1}{2}})^\dagger \mathcal{P}^\dagger(X\rho^{-\frac{1}{2}})\rho^{\frac{1}{2}}] \\ &= \mathrm{Tr}[\mathcal{P}^\dagger(\rho^{-\frac{1}{2}}X^\dagger)\mathcal{P}^\dagger(X\rho^{-\frac{1}{2}})\rho] \\ &\leq \mathrm{Tr}[\mathcal{P}^\dagger(\rho^{-\frac{1}{2}}X^\dagger X\rho^{-\frac{1}{2}})\rho] \\ &= \mathrm{Tr}[\rho^{-\frac{1}{2}}X^\dagger X\rho^{-\frac{1}{2}}\mathcal{P}(\rho)] \\ &\leq \mathrm{Tr}(\rho^{-\frac{1}{2}}X^\dagger X\rho^{-\frac{1}{2}}\rho) \\ &= \mathrm{Tr}(X^\dagger X) \\ &= \|X\|^2, \forall X \in B(\mathcal{H}). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Obtemos assim que

$$1 = \sup_{\|X\|=1} \|X\| \geq \sup_{\|X\|=1} \|S(X)\| = \|\mathcal{S}\| \overset{Prop\ 2.11}{=} \|\mathcal{S}^\dagger\|, \tag{4.7}$$

logo, os mapas $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}^\dagger$ são contrações.

Se $X \in Nuc(\mathcal{P} - \lambda I)$, então

$$\|\mathcal{S}^\dagger(X\rho^{-\frac{1}{2}})\| = \|\mathcal{P}(X\rho^{-\frac{1}{2}}\rho^{\frac{1}{2}})\rho^{-\frac{1}{2}}\| = \|\mathcal{P}(X)\rho^{-\frac{1}{2}}\| = |\lambda|\|X\rho^{-\frac{1}{2}}\|, \tag{4.8}$$

além disso, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}^\dagger(X\rho^{-\frac{1}{2}})\|^2 &= \mathrm{Tr}[(\mathcal{S}^\dagger(X\rho^{-\frac{1}{2}}))^\dagger \mathcal{S}^\dagger(X\rho^{-\frac{1}{2}})] = \mathrm{Tr}[(X\rho^{-\frac{1}{2}})^\dagger \mathcal{S}\mathcal{S}^\dagger(X\rho^{-\frac{1}{2}})] \\ &\leq \|\mathcal{S}\mathcal{S}^\dagger(X\rho^{-\frac{1}{2}})\|\|X\rho^{-\frac{1}{2}}\| \leq \|\mathcal{S}\|\|\mathcal{S}^\dagger\|\|X\rho^{-\frac{1}{2}}\|^2 \\ &\leq \|X\rho^{-\frac{1}{2}}\|^2. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Por hipótese, $|\lambda| = 1$, logo a equação (4.8) implica que há igualdade em (4.9), portanto,

$$\|\mathcal{S}\mathcal{S}^\dagger(X\rho^{-\frac{1}{2}}) - X\rho^{-\frac{1}{2}}\|^2 = \langle \mathcal{S}\mathcal{S}^\dagger(X\rho^{-\frac{1}{2}}) - X\rho^{-\frac{1}{2}}, \mathcal{S}\mathcal{S}^\dagger(X\rho^{-\frac{1}{2}}) - X\rho^{-\frac{1}{2}}\rangle$$

$$= \|\mathcal{S}\mathcal{S}^\dagger(X\rho^{-\frac{1}{2}})\|^2 - \langle X\rho^{-\frac{1}{2}}, \mathcal{S}\mathcal{S}^\dagger(X\rho^{-\frac{1}{2}})\rangle - \langle \mathcal{S}\mathcal{S}^\dagger(X\rho^{-\frac{1}{2}}), X\rho^{-\frac{1}{2}}\rangle + \|X\rho^{-\frac{1}{2}}\|^2$$

$$= \|\mathcal{S}\mathcal{S}^\dagger(X\rho^{-\frac{1}{2}})\|^2 - 2\|\mathcal{S}^\dagger(X\rho^{-\frac{1}{2}})\|^2 + \|X\rho^{-\frac{1}{2}}\|^2 = 0,$$

com isso, $\mathcal{S}\mathcal{S}^\dagger(X\rho^{-\frac{1}{2}}) = X\rho^{-\frac{1}{2}}$.

Ainda,

$$\begin{aligned} X\rho^{-\frac{1}{2}} &= \mathcal{S}\mathcal{S}^\dagger(X\rho^{-\frac{1}{2}}) = \mathcal{S}[\mathcal{P}(X\rho^{-\frac{1}{2}}\rho^{\frac{1}{2}})\rho^{-\frac{1}{2}}] = \mathcal{S}[\mathcal{P}(X)\rho^{-\frac{1}{2}}] \\ &= \mathcal{P}^\dagger[\mathcal{P}(X)\rho^{-\frac{1}{2}}\rho^{-\frac{1}{2}}]\rho^{\frac{1}{2}} = \mathcal{P}^\dagger(\mathcal{P}(X)\rho^{-1})\rho^{\frac{1}{2}} = \mathcal{P}^\dagger(\lambda X\rho^{-1})\rho^{\frac{1}{2}} \\ &= \lambda\mathcal{P}^\dagger(X\rho^{-1})\rho^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{4.10}$$

logo,

$$\lambda\mathcal{P}^\dagger(X\rho^{-1})\rho^{\frac{1}{2}} = X\rho^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \mathcal{P}^\dagger(X\rho^{-1})\rho^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\lambda}X\rho^{-\frac{1}{2}} \tag{4.11}$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}^\dagger(X\rho^{-1}) = \frac{1}{\lambda}X\rho^{-1} = \bar{\lambda}X\rho^{-1}, \tag{4.12}$$

ou seja, $X\rho^{-1} \in Nuc(\mathcal{P}^\dagger - (1/\lambda)I)$.

Reciprocamente, suponha que $X\rho^{-1} \in Nuc(\mathcal{P}^\dagger - (1/\lambda)I)$. Então

$$\|\mathcal{S}(X\rho^{-\frac{1}{2}})\| = \|\mathcal{P}^\dagger(X\rho^{-1})\rho^{\frac{1}{2}}\| = |\overline{\lambda}|\|X\rho^{-1}\rho^{\frac{1}{2}}\| = |\lambda|\|X\rho^{-\frac{1}{2}}\|, \tag{4.13}$$

além disso,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}(X\rho^{-\frac{1}{2}})\|^2 &= \mathrm{Tr}[(\mathcal{S}(X\rho^{-\frac{1}{2}}))^\dagger\mathcal{S}(X\rho^{-\frac{1}{2}})] = \mathrm{Tr}[(X\rho^{-\frac{1}{2}})^\dagger\mathcal{S}^\dagger\mathcal{S}(X\rho^{-\frac{1}{2}})] \\ &\leq \|\mathcal{S}^\dagger\mathcal{S}(X\rho^{-\frac{1}{2}})\|\|X\rho^{-\frac{1}{2}}\| \leq \|\mathcal{S}^\dagger\|\|\mathcal{S}\|\|X\rho^{-\frac{1}{2}}\|^2 \\ &\leq \|X\rho^{-\frac{1}{2}}\|^2, \end{aligned} \tag{4.14}$$

assim,

$$\|\mathcal{S}^\dagger\mathcal{S}(X\rho^{-\frac{1}{2}}) - X\rho^{-\frac{1}{2}}\|^2 = \|\mathcal{S}^\dagger\mathcal{S}(X\rho^{-\frac{1}{2}})\|^2 - 2\|\mathcal{S}(X\rho^{-\frac{1}{2}})\|^2 + \|X\rho^{-\frac{1}{2}}\|^2 = 0,$$

então,

$$\begin{aligned} X\rho^{-\frac{1}{2}} = \mathcal{S}^\dagger\mathcal{S}(X\rho^{-\frac{1}{2}}) = \mathcal{S}^\dagger[\mathcal{P}^\dagger(X\rho^{-1})\rho^{\frac{1}{2}}] = \mathcal{P}[\mathcal{P}^\dagger(X\rho^{-1})\rho]\rho^{-\frac{1}{2}} \\ = \mathcal{P}\left[\frac{1}{\lambda}X\rho^{-1}\rho\right]\rho^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\lambda}\mathcal{P}(X)\rho^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Com este resultado temos que

$$X = \frac{1}{\lambda}\mathcal{P}(X)\rho^{-\frac{1}{2}}\rho^{\frac{1}{2}} \Rightarrow P(X) = \lambda X, \tag{4.15}$$

ou seja, $X \in Nuc(\mathcal{P} - \lambda I)$, portanto, vale (i).

(ii) Tome agora o mapa $\mathcal{T} : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ definido por

$$\mathcal{T}(X) := \rho^{\frac{1}{2}}\mathcal{P}^\dagger(\rho^{-\frac{1}{2}}X). \tag{4.16}$$

A adjunta de $\mathcal{T}$ é dada por

$$\mathcal{T}^\dagger(X) := \rho^{-\frac{1}{2}}\mathcal{P}(\rho^{\frac{1}{2}}X). \tag{4.17}$$

De fato,

$$\begin{aligned} \langle X, \mathcal{T}^\dagger(X)\rangle &= \langle \mathcal{T}(X), X\rangle = \langle \rho^{\frac{1}{2}}\mathcal{P}^\dagger(\rho^{-\frac{1}{2}}X), X\rangle = \langle \mathcal{P}^\dagger(\rho^{-\frac{1}{2}}X), \rho^{\frac{1}{2}}X\rangle \\ &= = \langle \rho^{-\frac{1}{2}}X, \mathcal{P}(\rho^{\frac{1}{2}}X)\rangle = \langle X, \rho^{-\frac{1}{2}}\mathcal{P}(\rho^{\frac{1}{2}}X)\rangle. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Como no item (i), podemos calcular

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}(X)\|^2 = &\ \mathrm{Tr}[(\mathcal{T}(X))^\dagger\mathcal{T}(X)] \\ = &\ \mathrm{Tr}[(\rho^{\frac{1}{2}}\mathcal{P}^\dagger(\rho^{-\frac{1}{2}}X))^\dagger\rho^{\frac{1}{2}}\mathcal{P}^\dagger(\rho^{-\frac{1}{2}}X)] \\ = &\ \mathrm{Tr}[\mathcal{P}^\dagger(X^\dagger\rho^{-\frac{1}{2}})\rho\mathcal{P}^\dagger(\rho^{-\frac{1}{2}}X)] \\ = &\ \mathrm{Tr}[\mathcal{P}^\dagger(\rho^{-\frac{1}{2}}X)\mathcal{P}^\dagger(X^\dagger\rho^{-\frac{1}{2}})\rho] \\ \leq &\ \mathrm{Tr}[\mathcal{P}^\dagger(\rho^{-\frac{1}{2}}XX^\dagger\rho^{-\frac{1}{2}})\rho] \\ = &\ \mathrm{Tr}[(\rho^{-\frac{1}{2}}XX^\dagger\rho^{-\frac{1}{2}})\mathcal{P}(\rho)] \\ \leq &\ \mathrm{Tr}[\rho^{-\frac{1}{2}}XX^\dagger\rho^{-\frac{1}{2}}\rho] \\ = &\ \mathrm{Tr}(X^\dagger X) = \|X\|^2, \end{aligned} \tag{4.19}$$

assim, $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}^\dagger$ são contrações.

Se $X \in Nuc(\mathcal{P} - \lambda I)$, então

$$\|\mathcal{T}^\dagger(\rho^{-\frac{1}{2}}X)\| = \|\rho^{-\frac{1}{2}}\mathcal{P}(\rho^{\frac{1}{2}}\rho^{-\frac{1}{2}}X)\| = \|\rho^{-\frac{1}{2}}\mathcal{P}(X)\| = |\lambda|\|\rho^{-\frac{1}{2}}X\|, \tag{4.20}$$

além disso,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}^\dagger(\rho^{-\frac{1}{2}}X)\|^2 &= \mathrm{Tr}[(\mathcal{T}^\dagger(\rho^{-\frac{1}{2}}X))^\dagger\mathcal{T}^\dagger(\rho^{-\frac{1}{2}}X)] = \mathrm{Tr}[\rho^{-\frac{1}{2}}X\mathcal{T}\mathcal{T}^\dagger(\rho^{-\frac{1}{2}}X)] \\ &\leq \|\mathcal{T}\mathcal{T}^\dagger(\rho^{-\frac{1}{2}}X)\|\|\rho^{-\frac{1}{2}}X\| \leq \|\mathcal{T}\|\|\mathcal{T}^\dagger\|\|\rho^{-\frac{1}{2}}X\|^2 \\ &\leq \|\rho^{-\frac{1}{2}}X\|^2. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Por hipótese, $|\lambda| = 1$, logo a equação (4.20) implica que há igualdade em (4.21), portanto,

$$\|\mathcal{T}\mathcal{T}^\dagger(\rho^{-\frac{1}{2}}X) - \rho^{-\frac{1}{2}}X\|^2 = \langle \mathcal{T}\mathcal{T}^\dagger(\rho^{-\frac{1}{2}}X) - \rho^{-\frac{1}{2}}X, \mathcal{T}\mathcal{T}^\dagger(\rho^{-\frac{1}{2}}X) - \rho^{-\frac{1}{2}}X\rangle$$

$$= \|\mathcal{T}\mathcal{T}^\dagger(\rho^{-\frac{1}{2}}X)\|^2 - 2\|\mathcal{T}^\dagger\rho^{-\frac{1}{2}}X\|^2 + \|\rho^{-\frac{1}{2}}X\|^2 = 0,$$

com isso, $\mathcal{T}\mathcal{T}^\dagger(\rho^{-\frac{1}{2}}X) = \rho^{-\frac{1}{2}}X$. Ainda,

$$\begin{aligned} \rho^{-\frac{1}{2}}X = &\ \mathcal{T}\mathcal{T}^\dagger(\rho^{-\frac{1}{2}}X) = \mathcal{T}[\rho^{-\frac{1}{2}}\mathcal{P}(\rho^{\frac{1}{2}}\rho^{-\frac{1}{2}}X)] = \mathcal{T}[\rho^{-\frac{1}{2}}\mathcal{P}(X)] \\ = &\ \rho^{\frac{1}{2}}\mathcal{P}^\dagger[\rho^{-\frac{1}{2}}\rho^{-\frac{1}{2}}\mathcal{P}(X)] = \rho^{\frac{1}{2}}\mathcal{P}^\dagger[\rho^{-1}\mathcal{P}(X)] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \rho^{-1}X = \mathcal{P}^\dagger(\lambda\rho^{-1}X) \Rightarrow \frac{1}{\lambda}\rho^{-1}X = \mathcal{P}^\dagger(\rho^{-1}X),$$

ou seja, $\rho^{-1}X \in Nuc(\mathcal{P}^\dagger - (1/\lambda)I)$.

Reciprocamente, se $\rho^{-1}X \in Nuc(\mathcal{P}^\dagger - (1/\lambda)I)$, então

$$\|\mathcal{T}(\rho^{-\frac{1}{2}}X)\| = \|\rho^{\frac{1}{2}}\mathcal{P}^\dagger(\rho^{-\frac{1}{2}}X)\| = \|\rho^{\frac{1}{2}}\overline{\lambda}(\rho^{-1}X)\| = |\lambda|\|\rho^{-\frac{1}{2}}X\|, \tag{4.22}$$

além disso,

$$\|\mathcal{T}(\rho^{-\frac{1}{2}}X)\|^2 = \mathrm{Tr}[(\mathcal{T}(\rho^{-\frac{1}{2}}X))^\dagger\mathcal{T}(\rho^{-\frac{1}{2}}X)] = \mathrm{Tr}[X^\dagger\rho^{-\frac{1}{2}}\mathcal{T}^\dagger\mathcal{T}(\rho^{-\frac{1}{2}}X)]$$
$$\leq \|\mathcal{T}^\dagger\mathcal{T}(\rho^{-\frac{1}{2}}X)\|\|\rho^{-\frac{1}{2}}X\| \leq \|\rho^{-\frac{1}{2}}X\|^2,$$

assim,

$$\|\mathcal{T}^\dagger\mathcal{T}(\rho^{-\frac{1}{2}}X) - \rho^{-\frac{1}{2}}X\|^2 = 0, \tag{4.23}$$

logo,

$$\rho^{-\frac{1}{2}}X = \mathcal{T}^\dagger\mathcal{T}(\rho^{-\frac{1}{2}}X) = \mathcal{T}^\dagger(\rho^{\frac{1}{2}}\mathcal{P}^\dagger(\rho^{-1}X)) = \tfrac{1}{\lambda}\mathcal{T}^\dagger(\rho^{-\frac{1}{2}}X) = \tfrac{1}{\lambda}\rho^{-\frac{1}{2}}\mathcal{P}(\rho^{\frac{1}{2}}\rho^{-\frac{1}{2}}X) = \tfrac{1}{\lambda}\rho^{-\frac{1}{2}}\mathcal{P}(X)$$
$$\Rightarrow \lambda X = \mathcal{P}(X),$$

ou seja, $X \in Nuc(\mathcal{P} - \lambda I)$.

(iii) $X \in Nuc(\mathcal{P} - \lambda I) \overset{(ii)}{\Leftrightarrow} \rho^{-1}X \in Nuc(\mathcal{P}^\dagger - (1/\lambda)I) \Leftrightarrow \rho^{-1}X\rho\rho^{-1} \in Nuc(\mathcal{P}^\dagger - (1/\lambda)I) \overset{(i)}{\Leftrightarrow} \rho^{-1}X\rho \in Nuc(\mathcal{P} - \lambda I)$. □

Exemplo 4.2. Considere as seguintes matrizes:

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ -1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{bmatrix}, A_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -1 & i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1-i \end{bmatrix}, A_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.24}$$

Temos que $A_1^\dagger A_1 + A_2^\dagger A_2 + A_3^\dagger A_3 = I$, com isso, defina o operador quântico $\mathcal{P} : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ por

$$\mathcal{P}(.) = \sum_{i=1}^{3} A_i(.)A_i^\dagger. \tag{4.25}$$

Os autovetores de $\mathcal{P}$ em σ_1 são

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{8}+\frac{i}{4} & 0 \\ -\frac{5}{8}-\frac{i}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.26}$$

Considere o operador

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{8}+\frac{i}{4} & 0 \\ -\frac{5}{8}-\frac{i}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.27}$$

O operador ρ é estritamente positivo, pois é hermitiano e todos seus autovalores são positivos e não-nulos. Ainda, pelo mesmo argumento, podemos verificar que

$$\rho - \mathcal{P}(\rho) = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{17}{40} + \frac{i}{20} & 0 \\ -\frac{17}{40} - \frac{i}{20} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} > 0, \tag{4.28}$$

assim, $\mathcal{P}(\rho) \leq \rho$.

Como

$$X_1\rho^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{8} + \frac{i}{4} & 0 \\ -\frac{5}{8} - \frac{i}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{64}{35} & \frac{8}{7} - \frac{16}{35}i & 0 \\ \frac{8}{7} + \frac{16}{35}i & \frac{64}{35} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.29}$$

temos pelo Teorema 4.1 que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in Nuc(\mathcal{P}^\dagger - (1/\lambda)I). \tag{4.30}$$

Como $X_1\rho^{-1} = \rho^{-1}X_1$, obtemos o mesmo resultado.

Tome um operador estritamente positivo $\rho \in B(\mathcal{H})$. Podemos então definir o produto interno

$$\langle X, Y\rangle_\rho := \langle X, Y\rho^{-1}\rangle_{HS}, \tag{4.31}$$

onde a inversa de ρ sempre existe e é hermitiana (Proposição 1.19). Pela positividade estrita de ρ, temos que ρ^{-1} também é estritamente positiva.

Essa definição é, de fato, um produto interno, pois para todos $X, Y \in B(\mathcal{H})$, as seguintes propriedades são satisfeitas:

(i) $\langle X, \sum_k \alpha_k Y_k\rangle_\rho = \langle X, \sum_k \alpha_k Y_k \rho^{-1}\rangle_{HS} = \sum_k \alpha_k \langle X, Y_k\rho^{-1}\rangle_{HS} = \sum_k \alpha_k \langle X, Y_k\rangle_\rho$;

(ii) $\langle X, Y\rangle_\rho = \langle X, Y\rho^{-1}\rangle_{HS} = \mathrm{Tr}(X^\dagger Y\rho^{-1}) = \mathrm{Tr}(\rho^{-1}X^\dagger Y)$
$= \langle X\rho^{-1}, Y\rangle_{HS} = \overline{\langle Y, X\rho^{-1}\rangle}_{HS} = \overline{\langle Y, X\rangle}_\rho$

(iii) $\langle X, X\rangle_\rho = \langle X, X\rho^{-1}\rangle_{HS} = \mathrm{Tr}(X^\dagger X\rho^{-1}) = \mathrm{Tr}(X\rho^{-1}X^\dagger) = \langle X^\dagger, \rho^{-1}X^\dagger\rangle_{HS} \geq 0$.

(iv) $\langle X, X\rangle_\rho = 0 \Leftrightarrow X = 0$. Seja $\rho^{-1} = AA^\dagger, B(H) \ni A > 0$ a decomposição de ρ^{-1} assegurada pelo Teorema 1.18. Como A é estritamente positivo, também admite inversa, logo

$$\begin{aligned} \langle X, X\rangle_\rho = & \ \langle X, X\rho^{-1}\rangle_{HS} = \mathrm{Tr}(X^\dagger X\rho^{-1}) = \mathrm{Tr}(X^\dagger XAA^\dagger) \\ = & \ \mathrm{Tr}(A^\dagger X^\dagger XA) = \langle XA, XA\rangle_{HS} = \|XA\|^2. \end{aligned}$$

Assim, $\langle X, X\rangle_\rho = 0 \Leftrightarrow \|XA\| = 0 \Leftrightarrow XA = 0 \Leftrightarrow XAA^{-1} = 0 \Leftrightarrow X = 0$.

Quando $\langle X, Y\rangle_\rho = 0$, escrevemos $X \perp_\rho Y$ e dizemos que X e Y são $\rho -$ **ortogonais**.

Teorema 4.3. *(12) Seja $\mathcal{P} : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ um operador quântico que satisfaz $\mathcal{P}(\rho) \leq \rho$ para algum $\rho \in B(\mathcal{H})$ estritamente positivo. Então*

(i) *Se $\lambda \in \sigma_1$ é autovalor de $\mathcal{P}$, então*

$$Nuc(\mathcal{P} - \lambda I) \perp_\rho Im(\mathcal{P} - \lambda I) \tag{4.32}$$

e

$$Nuc(\mathcal{P} - \lambda I) \cap Im(\mathcal{P} - \lambda I) = \{0\}; \tag{4.33}$$

(ii) *Se $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma_1$ são autovalores distintos de $\mathcal{P}$, então seus autoespaços associados são $\rho -$ ortogonais, isto é,*

$$Nuc(\mathcal{P} - \lambda_1 I) \perp_\rho Nuc(\mathcal{P} - \lambda_2 I). \tag{4.34}$$

Demonstração. **(i)** Tome $\lambda \in \sigma_1$ autovalor de $\mathcal{P}$, $N \in Nuc(\mathcal{P} - \lambda I)$ e $R \in Im(\mathcal{P} - \lambda I)$, assim, existe $A \in B(\mathcal{H})$ não-nulo tal que $(\mathcal{P} - \lambda I)(A) = R$. Temos então que

$$\begin{aligned}
\langle N, R\rangle_\rho &= \langle N, R\rho^{-1}\rangle_{HS} = \mathrm{Tr}(N^\dagger R \rho^{-1}) = \mathrm{Tr}[N^\dagger (\mathcal{P} - \lambda I)(A)\rho^{-1}] \\
&= \mathrm{Tr}[N^\dagger \mathcal{P}(A)\rho^{-1}] - \lambda \mathrm{Tr}[N^\dagger A \rho^{-1}] = \mathrm{Tr}[\rho^{-1} N^\dagger \mathcal{P}(A)] - \lambda \mathrm{Tr}[N^\dagger A \rho^{-1}] \\
&= \mathrm{Tr}[(\mathcal{P}^\dagger(N\rho^{-1}))^\dagger A] - \lambda \mathrm{Tr}[N^\dagger A \rho^{-1}] \overset{Teo\ 4.1}{=} \mathrm{Tr}[(\bar{\lambda} N \rho^{-1})^\dagger A] - \lambda \mathrm{Tr}[N^\dagger A \rho^{-1}] \\
&= \lambda \mathrm{Tr}[\rho^{-1} N^\dagger A] - \lambda \mathrm{Tr}[N^\dagger A \rho^{-1}] \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

(ii) Tome $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma_1$ autovalores distintos de $\mathcal{P}$, $N_1 \in Nuc(\mathcal{P} - \lambda_1 I)$ e $N_2 \in Nuc(\mathcal{P} - \lambda_2 I)$, assim,

$$\begin{aligned}
\langle N_1, N_2\rangle_\rho &= \langle N_1, N_2\rho^{-1}\rangle_{HS} = \mathrm{Tr}(N_1^\dagger N_2 \rho^{-1}) = \frac{1}{\overline{\lambda_1}}((\mathcal{P}(N_1))^\dagger N_2 \rho^{-1}) \\
&= \frac{1}{\overline{\lambda_1}} \mathrm{Tr}(N_1^\dagger \mathcal{P}^\dagger (N_2 \rho^{-1})) \overset{Teo\ 4.1}{=} \frac{1}{\overline{\lambda_1}} \mathrm{Tr}(N_1^\dagger \lambda_2^{-1} N_2 \rho^{-1}) \\
&= \frac{1}{\overline{\lambda_1}\lambda_2} \mathrm{Tr}(N_1^\dagger N_2 \rho^{-1}) = \frac{1}{\overline{\lambda_1}\lambda_2} \langle N_1, N_2 \rho^{-1}\rangle_{HS} = \frac{1}{\overline{\lambda_1}\lambda_2} \langle N_1, N_2\rangle_\rho.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Temos então que $\overline{\lambda}_1 \lambda_2 \langle N_1, N_2\rangle_\rho = \langle N_1, N_2\rangle_\rho$, que ocorre se e somente se $\langle N_1, N_2\rangle_\rho = 0$, pois, por hipótese, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. □

4.2 Uma Base Dual

A partir dos resultados já vistos no texto, poderemos agora construir uma base adequada para o espaço dual. Essa construção é demonstrada no teorema a seguir.

Teorema 4.4. *(12) Seja $\mathcal{P} : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ dado por $\mathcal{P}(.) = \sum_{i=1}^{k} A_i(.)A_i^\dagger$ um operador quântico satisfazendo $\mathcal{P}(\rho) \leq \rho$ para algum $\rho \in B(\mathcal{H})$ estritamente positivo. Então os vetores duais $X^{\lambda,i}$ correspondentes aos autovetores $X_{\lambda,i}, \lambda \in \sigma_1$, onde $i \in \{1, \dots, d_\lambda\}$, são dados por*

$$X^{\lambda,i} = X_{\lambda,i}\rho^{-1}[\mathrm{Tr}(X_{\lambda,i}^\dagger X_{\lambda,i}\rho^{-1})]^{-1}. \tag{4.37}$$

Demonstração. Aplicando o Teorema do Núcleo e da Imagem ao mapa $\mathcal{P} - \lambda I$, temos

$$dim[Nuc(\mathcal{P} - \lambda I)] + dim[Im(\mathcal{P} - \lambda I)] = dim[B(\mathcal{H})], \tag{4.38}$$

assim, aplicando os Teoremas 1.6 e 4.3, obtemos

$$Nuc(\mathcal{P} - \lambda I) \oplus Im(\mathcal{P} - \lambda I) = B(\mathcal{H}). \tag{4.39}$$

Tome $\mathfrak{J}_1 := \bigoplus_{\lambda\in\sigma_1} Nuc(\mathcal{P} - \lambda I)$ e $\mathfrak{J}_2 := \bigcap_{\lambda\in\sigma_1} Im(\mathcal{P} - \lambda I)$. Pelo Teorema 4.3, $Nuc(\mathcal{P} - \lambda I)\perp_\rho Im(\mathcal{P} - \lambda I)$, assim, pela Proposição 1.5, temos que

$$\left[\sum_{\lambda\in\sigma_1} Nuc(\mathcal{P} - \lambda I)\right]^\perp = \bigcap_{\lambda\in\sigma_1} [Nuc(\mathcal{P} - \lambda I)]^\perp = \bigcap_{\lambda\in\sigma_1} Im(\mathcal{P} - \lambda I), \tag{4.40}$$

ou seja, $\mathfrak{J}_1^\perp = \mathfrak{J}_2$, assim,

$$\mathfrak{J}_1 \oplus \mathfrak{J}_2 = B(\mathcal{H}). \tag{4.41}$$

Portanto, o espaço $\mathfrak{J}_2$ contém todas as contribuições dos autoespaços $Nuc(P - \lambda I)$ com $|\lambda| < 1$, cujas dinâmicas não contribuem para o mapa iterado $\mathcal{P}^n$ quando $n \to \infty$, logo, o espaço atrator de $\mathcal{P}$ é gerado pelos autoespaços ρ-ortogonais $Nuc(\mathcal{P} - \lambda I)$ com $\lambda \in \sigma_1$, logo, o espaço atrator é da forma

$$Attr(\mathcal{P}) = \bigoplus_{\lambda\in\sigma_1} Nuc(\mathcal{P} - \lambda I). \tag{4.42}$$

Se $Y \in B(\mathcal{H})$, então a projeção ortogonal de Y sobre o espaço atrator $Attr(\mathcal{P})$ é dada por

$$\Pi(Y) = \sum_{\lambda\in\sigma_1, i=1}^{d_\lambda} x_{\lambda,i}X_{\lambda,i} \overset{(3.56)}{=} \sum_{\lambda\in\sigma_1, i=1}^{d_\lambda} \mathrm{Tr}(X^{\lambda,i\dagger}Y)X_{\lambda,i} = \sum_{\lambda\in\sigma_1} \mathrm{Tr}(X^{\lambda,i\dagger}Y)X_{\lambda,i},$$

onde a última igualdade decorre de propriedade de $\mathrm{Tr}(X^{\lambda,i\dagger}X_{\lambda',i'}) = \delta_{\lambda\lambda'}\delta_{ii'}$.

Tome uma base ρ-ortogonal para $Attr(\mathcal{P})$ constituída pelo conjunto de autovetores $\{X_{\lambda,i}|\lambda \in \sigma_1, i = 1, \dots, d_\lambda\}$, onde cada elemento dessa base é um autovetor correspondente a algum autovalor $\lambda \in \sigma_1$.

Seja $\rho \in B(\mathcal{H})$ um operador estritamente positivo que satisfaz $\mathcal{P}(\rho) \leq \rho$, então, pelo Teorema 1.2, podemos escrever o operador $X^{\lambda,i}\rho$ como combinação linear dos elementos em $\{X_{\lambda,i}\}$ com coeficientes $\alpha_{\lambda,i}$ dados por

$$\alpha_{\lambda,i} = \frac{\langle X_{\lambda',i'}, X^{\lambda,i}\rho\rangle_\rho}{\langle X_{\lambda',i'}, X_{\lambda',i'}\rangle_\rho}. \tag{4.43}$$

Temos também que

$$\begin{aligned} \langle X_{\lambda',i'}, X^{\lambda,i}\rho\rangle_\rho &= \langle X_{\lambda',i'}, X^{\lambda,i}\rho\rho^{-1}\rangle_{HS} = \langle X_{\lambda',i'}, X^{\lambda,i}\rangle_{HS} = \overline{\langle X^{\lambda,i}, X_{\lambda',i'}\rangle_{HS}} \\ &= \overline{\mathrm{Tr}(X^{\lambda,i\dagger}X_{\lambda',i'})} = \overline{\delta_{\lambda\lambda',ii'}} = \delta_{\lambda\lambda'}\delta_{ii'} \end{aligned}$$

e

$$\langle X_{\lambda',i'}, X_{\lambda',i'}\rangle_\rho = \langle X_{\lambda',i'}, X_{\lambda',i'}\rho^{-1}\rangle_{HS} = \mathrm{Tr}(X^\dagger_{\lambda',i'}X_{\lambda',i'}\rho^{-1}).$$

Juntando estes resultados temos que

$$X^{\lambda,i}\rho = \sum_{\lambda'\in\sigma_1,i'=1}^{d_{\lambda'}} \alpha_{\lambda,i}X_{\lambda',i'} = \sum_{\lambda'\in\sigma_1,i'=1}^{d_{\lambda'}} \frac{\delta_{\lambda\lambda'}\delta_{ii'}}{\mathrm{Tr}(X^\dagger_{\lambda',i'}X_{\lambda',i'}\rho^{-1})}X_{\lambda',i'} = X_{\lambda,i}[\mathrm{Tr}(X^\dagger_{\lambda,i}X_{\lambda,i}\rho^{-1})]^{-1}, \tag{4.44}$$

consequentemente,

$$X^{\lambda,i} = X_{\lambda,i}\rho^{-1}[\mathrm{Tr}(X^\dagger_{\lambda,i}X_{\lambda,i}\rho^{-1})]^{-1}. \tag{4.45}$$

□

Com este teorema temos uma boa maneira de calcular o operador X_∞ do Teorema 3.17, pois se temos um operador quântico $\mathcal{P}$ e encontramos um operador $\rho \in B(\mathcal{H})$ estritamente positivo que satisfaz $\mathcal{P}(\rho) \leq \rho$, precisamos apenas encontrar os autovalores de módulo 1, seus autovetores correspondentes e os vetores duais para obtermos o valor de X_∞, isto é, o valor de $\mathcal{P}^n(X(0)$ para n grande e $X(0) \in B(\mathcal{H})$ positivo qualquer.

Exemplo 4.5. (12) Seja $p \in (0, 1)$. Tome os operadores

$$A_1 = \sqrt{p}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \sqrt{1-p}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.46}$$

Temos que $A_1^\dagger A_1 + A_2^\dagger A_2 = I$, portanto, o mapa $\mathcal{P} : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ definido por

$$\mathcal{P}(.) = \sum_{i=1}^{2} A_i(.)A_i^\dagger \tag{4.47}$$

é um operador quântico.

Os autovalores de $\mathcal{P}$ são $\{-1, -\sqrt{3p^2-3p+1}, \sqrt{3p^2-3p+1}, 1\}$. Como queremos encontrar o espaço atrator de $\mathcal{P}$, precisamos verificar quais são os autovalores pertencentes a σ_1. É claro que -1 e 1 pertencem a σ_1, já os autovalores $-\sqrt{3p^2-3p+1}$ e $\sqrt{3p^2-3p+1}$ não. De fato, os únicos valores reais de p que satisfazem $3p^2-3p+1=1$ são 0 e 1, enquanto que nenhum p real satisfaz $3p^2-3p+1=-1$, logo, não é possível que estes dois últimos autovalores pertençam a σ_1.

Os autovetores correspondentes a -1 e 1 são:

$$X_{-1,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, X_{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, X_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$X_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, X_{1,4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, X_{1,5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Note que os operadores de Kraus que compõem o operador quântico $\mathcal{P}$ são hermitianos, assim, $\mathcal{P}(I) = I$. Aplicando o Teorema 4.4, verificamos que os vetores duais correspondentes são:

$$X^{-1,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, X^{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, X^{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$X^{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, X^{1,4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, X^{1,5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tome um operador inicial positivo

$$X(0) := \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ \overline{x_{12}} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ \overline{x_{13}} & \overline{x_{23}} & x_{33} & x_{34} \\ \overline{x_{14}} & \overline{x_{24}} & \overline{x_{34}} & x_{44} \end{bmatrix},$$

então,

$$X_\infty(n) = \sum_{i=1}^{1} (-1)^n X_{-1,i} \mathrm{Tr}(X^{-1,i\dagger} X(0)) + \sum_{i=1}^{5} 1^n X_{1,i} \mathrm{Tr}(X^{1,i\dagger} X(0))$$

$$= \frac{(-1)^n}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{23}-\overline{x_{23}} & 0 \\ 0 & -x_{23}+\overline{x_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & x_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{22}+x_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{22}+x_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \overline{x_{14}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{44} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_{11} & 0 & 0 & x_{14} \\ 0 & \dfrac{x_{22}+x_{33}}{2} & -i(-1)^n\Im(x_{23}) & 0 \\ 0 & i(-1)^n\Im(x_{23}) & \dfrac{x_{22}+x_{33}}{2} & 0 \\ \overline{x_{14}} & 0 & 0 & x_{44} \end{bmatrix},$$

onde $\Im(x)$ denota a parte imaginária de $x \in \mathbb{C}$.

Note que, neste caso, o operador $X_\infty(n)$ depende do operador inicial $X(0)$. Ainda, as entrada na segunda linha da terceira coluna e a terceira linha da segunda coluna dependem de uma entrada de $X(0)$ e de n. Note que fazendo $n \to \infty$, o operador $X_\infty(n)$ converge apenas se $x_{23} \in \mathbb{R}$.

Temos ainda que

$$N_1 := \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \tag{4.48}$$

é uma base de $Nuc(\mathcal{P}+I)$, enquanto que

$$N_2 := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}. \tag{4.49}$$

é uma base $Nuc(\mathcal{P}-I)$. Como -1 e 1 são os únicos autovalores de $\mathcal{P}$ com módulo 1, temos que $Attr(\mathcal{P}) = Nuc(\mathcal{P}-I) \oplus Nuc(\mathcal{P}+I)$, logo, uma base para o espaço atrator é $N_1 \cup N_2$.

No próximo capítulo será feita uma construção para o espaço atrator, assim, teremos propriedades muito interessantes em relação aos operadores de Kraus, autovetores do operador quântico e o operador $\rho \in B(\mathcal{H})$ que define o produto interno utilizado neste capítulo.

5 Construção do Espaço Atrator

Vimos no final do Capítulo 3 que uma base para o espaço atrator de um operador quântico $\mathcal{P} : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ é dada por

$$Attr(\mathcal{P}) = \bigoplus_{|\lambda|=1} Nuc(\mathcal{P} - \lambda I). \tag{5.1}$$

Neste capítulo veremos que quando existe um operador estritamente positivo $\rho \in B(\mathcal{H})$ satisfazendo $\mathcal{P}(\rho) = \rho$, então uma base para o espaço atrator é constituída por operadores em $B(\mathcal{H})$ que satisfazem propriedades relacionadas aos operadores de Kraus, aos autovalores e ao ponto fixo ρ do operador quântico.

Teorema 5.1. *(12) Seja $\mathcal{P} : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ um operador quântico dado por $\mathcal{P}(.) = \sum_{i=1}^{k} A_i(.)A_i^\dagger$ satisfazendo $\mathcal{P}(\rho_1) \leq \rho_1$ para algum $\rho_1 \in B(\mathcal{H})$ e $\mathcal{P}^\dagger(\rho_2) \leq \rho_2$ para algum $\rho_2 \in B(\mathcal{H})$, onde ρ_1, ρ_2 são estritamente positivos. Tome $\lambda \in \sigma_1$ e $N \in Nuc(P - \lambda I)$, então para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, vale*

$$\rho_2 A_i N \rho_1^{-1} = \lambda \rho_2 N \rho_1^{-1} A_i. \tag{5.2}$$

Demonstração. Tome $N \in Nuc(P - \lambda I)$ e considere o mapa $S_i : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ definido por

$$S_i(N) := \lambda \rho_2^{1/2} N \rho_1^{-1} A_i \rho_1^{1/2} - \rho_2^{1/2} A_i N \rho_1^{-1/2}. \tag{5.3}$$

Podemos então calcular

$$\begin{aligned}
[S_i(N)][S_i(N)]^\dagger &= (\lambda \rho_2^{1/2} N \rho_1^{-1} A_i \rho_1^{1/2} - \rho_2^{1/2} A_i N \rho_1^{-1/2})(\overline{\lambda} \rho_1^{1/2} A_i^\dagger \rho_1^{-1} N^\dagger \rho_2^{1/2} - \rho_1^{-1/2} N^\dagger A_i^\dagger \rho_2^{1/2}) \\
&= |\lambda|^2 \rho_2^{1/2} N \rho_1^{-1} A_i \rho_1 A_i^\dagger \rho_1^{-1} N^\dagger \rho_2^{1/2} - \lambda \rho_2^{1/2} N \rho_1^{-1} A_i N^\dagger A_i^\dagger \rho_2^{1/2} \\
&\quad - \overline{\lambda} \rho_2^{1/2} A_i N A_i^\dagger \rho_1^{-1} N^\dagger \rho_2^{1/2} + \rho_2^{1/2} A_i N \rho_1^{-1} N^\dagger A_i^\dagger \rho_2^{1/2}.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Com este resultado e pelas propriedades do traço, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} \mathrm{Tr}\{S_i(N)[S_i(N)]^\dagger\} &= \mathrm{Tr}\left[|\lambda|^2 \rho_2^{1/2} N \rho_1^{-1} \sum_{i=1}^{k} A_i \rho_1 A_i^\dagger \rho_1^{-1} N^\dagger \rho_2^{1/2} - \lambda \rho_2^{1/2} N \rho_1^{-1} \sum_{i=1}^{k} A_i N^\dagger A_i^\dagger \rho_2^{1/2}\right] \\
&+ \mathrm{Tr}\left[-\overline{\lambda} \rho_2^{1/2} \sum_{i=1}^{k} A_i N A_i^\dagger \rho_1^{-1} N^\dagger \rho_2^{1/2} + \rho_2^{1/2} \sum_{i=1}^{k} A_i N \rho_1^{-1} N^\dagger A_i^\dagger \rho_2^{1/2}\right] \\
&= |\lambda|^2 \mathrm{Tr}[\rho_2^{1/2} N \rho_1^{-1} \mathcal{P}(\rho_1) \rho_1^{-1} N^\dagger \rho_2^{1/2}] - \lambda \mathrm{Tr}[\rho_2^{1/2} N \rho_1^{-1} \mathcal{P}(N^\dagger) \rho_2^{1/2}]
\end{aligned}$$

$$-\overline{\lambda}\mathrm{Tr}[\rho_2^{1/2}\mathcal{P}(N)\rho_1^{-1}N^\dagger\rho_2^{1/2}] + \mathrm{Tr}[N\rho_1^{-1}N^\dagger\mathcal{P}^\dagger(\rho_2)]$$

$$= |\lambda|^2\mathrm{Tr}[N\rho_1^{-1}\mathcal{P}(\rho_1)\rho_1^{-1}N^\dagger\rho_2] - \lambda\mathrm{Tr}[N\rho_1^{-1}\mathcal{P}(N^\dagger)\rho_2]$$
$$-\overline{\lambda}\mathrm{Tr}[\mathcal{P}(N)\rho_1^{-1}N^\dagger\rho_2] + \mathrm{Tr}[N\rho_1^{-1}N^\dagger\mathcal{P}^\dagger(\rho_2)]$$

$$\leq |\lambda|^2\mathrm{Tr}[N\rho_1^{-1}\rho_1\rho_1^{-1}N^\dagger\rho_2] - \lambda\mathrm{Tr}[N\rho_1^{-1}\mathcal{P}(N^\dagger)\rho_2]$$
$$-\overline{\lambda}\mathrm{Tr}[\mathcal{P}(N)\rho_1^{-1}N^\dagger\rho_2] + \mathrm{Tr}[N\rho_1^{-1}N^\dagger\rho_2]$$

$$= |\lambda|^2\mathrm{Tr}[N\rho_1^{-1}N^\dagger\rho_2] - \lambda\mathrm{Tr}[N\rho_1^{-1}\overline{\lambda}N^\dagger\rho_2]$$
$$-\overline{\lambda}\mathrm{Tr}[\lambda N\rho_1^{-1}N^\dagger\rho_2] + \mathrm{Tr}[N\rho_1^{-1}N^\dagger\rho_2]$$

$$= |\lambda|^2\mathrm{Tr}[N\rho_1^{-1}N^\dagger\rho_2] - |\lambda|^2\mathrm{Tr}[N\rho_1^{-1}N^\dagger\rho_2]$$
$$-|\lambda|^2\mathrm{Tr}[N\rho_1^{-1}N^\dagger\rho_2] + \mathrm{Tr}[N\rho_1^{-1}N^\dagger\rho_2]$$
$$= 0.$$

Portanto, se $N \in Nuc(\mathcal{P} - \lambda I)$, então $S_i(N) = 0, \forall i \in \{1, \ldots, k\}$. Temos então que

$$\lambda\rho_2^{1/2}N\rho_1^{-1}A_i\rho_1^{1/2} = \rho_2^{1/2}A_iN\rho_1^{-1/2}$$

$$\Rightarrow \lambda\rho_2^{1/2}\rho_2^{1/2}N\rho_1^{-1}A_i\rho_1^{1/2}\rho_1^{-1/2} = \rho_2^{1/2}\rho_2^{1/2}A_iN\rho_1^{-1/2}\rho_1^{-1/2}$$

$$\Rightarrow \rho_2A_iN\rho_1^{-1} = \lambda\rho_2N\rho_1^{-1}A_i.$$

□

Teorema 5.2. *(12) Seja $\mathcal{P} : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ um operador quântico dado por $\mathcal{P}(.) = \sum_{i=1}^k A_i(.)A_i^\dagger$ satisfazendo $\mathcal{P}(\rho) \leq \rho$ para algum $\rho \in B(\mathcal{H})$ estritamente positivo. Então se $\lambda \in \sigma_1$ e $N \in Nuc(\mathcal{P} - \lambda I)$, as seguintes relações são satisfeitas*

(i) $A_iN\rho^{-1} = \lambda N\rho^{-1}A_i$;

(ii) $A_i^\dagger N\rho^{-1} = (1/\lambda)N\rho^{-1}A_i^\dagger$;

(iii) $A_i\rho^{-1}N = \lambda\rho^{-1}NA_i$;

(iv) $A_i^\dagger\rho^{-1}N = (1/\lambda)\rho^{-1}NA_i^\dagger$,

$\forall i \in \{1, \ldots, k\}$.

Demonstração. Note que o operador identidade é estritamente positivo. Além disso, $\mathcal{P}^\dagger(I) \leq I$. Assim, pelo Teorema 5.1, para $\rho_1 = \rho$ e $\rho_2 = I$, temos $IA_iN\rho^{-1} = \lambda IN\rho^{-1}A_i$, logo, vale (i).

Note que $\mathcal{P}^\dagger$ é da forma $\mathcal{P}^\dagger(.) = \sum_{i=1}^k A_i^\dagger(.)A_i$. Por hipótese, $\mathcal{P}(\rho) \leq \rho$, logo, $\mathcal{P}^\dagger(I) \leq I$. Ainda, pelo Teorema 4.1, temos que $N\rho^{-1} \in Nuc(\mathcal{P}^\dagger - (1/\lambda)I)$, portanto, aplicando o Teorema 5.1 ao mapa $\mathcal{P}^\dagger$ para $\rho_1 = I$ e $\rho_2 = \rho$, temos que

$$\rho A_j^\dagger N\rho^{-1} = \frac{1}{\lambda}\rho N\rho^{-1}A_i^\dagger \Rightarrow A_j^\dagger N\rho^{-1} = \frac{1}{\lambda}N\rho^{-1}A_i^\dagger,$$

logo, vale (ii). Analogamente, temos que $\rho^{-1}N \in Nuc(\mathcal{P}^\dagger - (1/\lambda)I)$, então para $\rho_1 = I$ e $\rho_2 = \rho$,

$$\rho A_i^\dagger \rho^{-1}N = \frac{1}{\lambda}\rho\rho^{-1}NA_i^\dagger \Rightarrow A_i^\dagger\rho^{-1}N = \frac{1}{\lambda}\rho^{-1}NA_i^\dagger,$$

logo, vale (iv).

Pelo Teorema 5.1, a equação (5.2) vale para qualquer $N \in Nuc(\mathcal{P} - \lambda I)$. Por hipótese, $N \in Nuc(\mathcal{P} - \lambda I)$, assim, pelo Teorema 4.1, $\rho^{-1}N\rho \in Nuc(\mathcal{P} - \lambda I)$, portanto, para $\rho_1 = \rho$ e $\rho_2 = I$ em 5.1, temos que

$$A_i(\rho^{-1}N\rho)\rho^{-1} = \lambda(\rho^{-1}N\rho)\rho^{-1}A_i \Rightarrow A_i\rho^{-1}N = \lambda\rho^{-1}NA_i,$$

logo, vale (iii). $\square$

Seja $\mathcal{P} : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ um operador quântico descrito por $\mathcal{P}(.) = \sum_{i=1}^k A_i(.)A_i^\dagger$. Definimos, para $i \in \{1, \ldots, k\}$, o conjunto

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}(\lambda,\rho) := \{N \in B(\mathcal{H}) \quad | \quad & A_iN\rho^{-1} = \lambda N\rho^{-1}A_i, \quad A_i^\dagger N\rho^{-1} = (1/\lambda)N\rho^{-1}A_i^\dagger \\ & A_i\rho^{-1}N = \lambda\rho^{-1}NA_i, \quad A_i^\dagger\rho^{-1}N = (1/\lambda)\rho^{-1}NA_i^\dagger\}.\end{aligned} \tag{5.5}$$

Se $\mathcal{P}$ satisfaz $\mathcal{P}(\rho) \leq \rho$ para algum $\rho \in B(\mathcal{H})$ estritamente positivo e $\lambda \in \sigma_1$, então, pelo Teorema 5.2, vale

$$Nuc(P - \lambda I) \subseteq \mathfrak{D}(\lambda,\rho). \tag{5.6}$$

Veremos no próximo corolário que se tomarmos ρ tal que $\mathcal{P}(\rho) = \rho$, então $\mathfrak{D}(\lambda,\rho) \subseteq Nuc(P - \lambda I)$, ou seja, $Nuc(P - \lambda I) = \mathfrak{D}(\lambda,\rho)$. Teremos assim uma base para o espaço atrator do operador quântico descrita pelos operadores de Kraus, autovetores e autovalores (de módulo 1) do operador quântico pelo operador $\rho \in B(\mathcal{H})$ que satisfaz $\mathcal{P}(\rho) = \rho$.

Corolário 5.3. *(12) Seja $\mathcal{P} : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ dado por $\mathcal{P}(.) = \sum_{i=1}^k A_i(.)A_i^\dagger$ um operador quântico satisfazendo $\mathcal{P}(\rho) = \rho$ para algum $\rho \in B(\mathcal{H})$ estritamente positivo. Então*

(i) *Se $\lambda \in \sigma_1$, $Nuc(\mathcal{P} - \lambda I) = \mathfrak{D}(\lambda,\rho)$;*

(ii) *Se $N_1 \in Nuc(\mathcal{P} - \lambda_1 I)$ e $N_2 \in Nuc(\mathcal{P} - \lambda_2 I)$, $N_1N_2\rho^{-1} \in Nuc(\mathcal{P} - \lambda_1\lambda_2 I)$.*

Demonstração. (i) Já sabemos que $Nuc(P-\lambda I) \subseteq \mathfrak{D}(\lambda,\rho)$. Então seja $N \in \mathfrak{D}(\lambda,\rho)$, assim, $A_iN\rho^{-1} = \lambda N\rho^{-1}A_i$, logo, $A_iN\rho^{-1}\rho A_i^\dagger = \lambda N\rho^{-1}A_i\rho A_i^\dagger$. Somando esses termos de 1 a k, temos

$$\begin{array}{lrcl} & \sum_{i=1}^k A_iN\rho^{-1}\rho A_i^\dagger & = & \sum_{i=1}^k \lambda N\rho^{-1}A_i\rho A_i^\dagger \\ \Rightarrow & \sum_{i=1}^k A_iNA_i^\dagger & = & \lambda N\rho^{-1}\sum_{i=1}^k A_i\rho A_i^\dagger \\ \Rightarrow & \mathcal{P}(N) & = & \lambda N\rho^{-1}\mathcal{P}(\rho) \\ & & = & \lambda N\rho^{-1}\rho = \lambda N, \end{array} \tag{5.7}$$

logo, $N \in Nuc(\mathcal{P}-\lambda I)$.

(ii) Tome $N_1 \in Nuc(\mathcal{P}-\lambda_1 I)$ e $N_2 \in Nuc(\mathcal{P}-\lambda_2 I)$. Decorre que $N_1 \in \mathfrak{D}(\lambda_1,\rho)$ e $N_2 \in \mathfrak{D}(\lambda_2,\rho)$ por (i). Ainda,

$$\mathcal{P}(\rho N_2\rho^{-1}) = \sum_{i=1}^k A_i\rho \underbrace{N_2\rho^{-1}A_i^\dagger}_{N_2\in\mathfrak{D}(\lambda_2,\rho)} = \lambda_2\sum_{i=1}^k A_i\rho A_i^\dagger N_2\rho^{-1} = \lambda_2\mathcal{P}(\rho)N_2\rho^{-1} = \lambda_2\rho N_2\rho^{-1}, \tag{5.8}$$

portanto, $\rho N_2\rho^{-1} \in Nuc(\mathcal{P}-\lambda_2 I) = \mathfrak{D}(\lambda_2,\rho)$. Com isso, podemos afirmar que $N_1N_2\rho^{-1} \in \mathfrak{D}(\lambda_1\lambda_2,\rho) = Nuc(\mathcal{P}-\lambda_1\lambda_2 I)$. De fato, temos que

$$\begin{array}{rcl} A_i(N_1N_2\rho^{-1})\rho^{-1} & = & (A_iN_1)N_2\rho^{-1}\rho^{-1} = (\lambda_1N_1\rho^{-1}A_i\rho)N_2\rho^{-1}\rho^{-1} \\ & = & \lambda_1N_1\rho^{-1}(A_i\rho N_2\rho^{-1}\rho^{-1}) = \lambda_1N_1\rho^{-1}(\lambda_2\rho N_2\rho^{-1}\rho^{-1}A_i) \\ & = & \lambda_1\lambda_2N_1\rho^{-1}\rho N_2\rho^{-1}\rho^{-1}A_i = \lambda_1\lambda_2(N_1N_2\rho^{-1})\rho^{-1}A_i; \end{array} \tag{5.9}$$

$$\begin{array}{rcl} A_i\rho^{-1}(N_1N_2\rho^{-1}) & = & (A_i\rho^{-1}N_1)N_2\rho^{-1} = (\lambda_1\rho^{-1}N_1A_i)N_2\rho^{-1} = \lambda_1\rho^{-1}N_1(A_iN_2\rho^{-1}) \\ & = & \lambda_1\rho^{-1}N_1(\lambda_2N_2\rho^{-1}A_i) = \lambda_1\lambda_2\rho^{-1}(N_1N_2\rho^{-1})A_i; \end{array} \tag{5.10}$$

$$\begin{array}{rcl} A_i^\dagger(N_1N_2\rho^{-1})\rho^{-1} & = & (A_i^\dagger N_1)N_2\rho^{-1}\rho^{-1} = (\overline{\lambda}_1N_1\rho^{-1}A_i^\dagger\rho)N_2\rho^{-1}\rho^{-1} \\ & = & \overline{\lambda}_1N_1\rho^{-1}(A_i^\dagger\rho N_2\rho^{-1}\rho^{-1}) = \overline{\lambda}_1N_1\rho^{-1}(\overline{\lambda}_2\rho N_2\rho^{-1}\rho^{-1}A_i^\dagger) \\ & = & \overline{\lambda}_1\overline{\lambda}_2N_1\rho^{-1}\rho N_2\rho^{-1}\rho^{-1}A_i^\dagger = \overline{\lambda}_1\overline{\lambda}_2(N_1N_2\rho^{-1})\rho^{-1}A_i^\dagger; \end{array} \tag{5.11}$$

$$\begin{array}{rcl} A_i^\dagger\rho^{-1}(N_1N_2\rho^{-1}) & = & (A_i^\dagger\rho^{-1}N_1)N_2\rho^{-1} = (\overline{\lambda}_1\rho^{-1}N_1A_i^\dagger)N_2\rho^{-1} = \overline{\lambda}_1\rho^{-1}N_1(A_i^\dagger N_2\rho^{-1}) \\ & = & \overline{\lambda}_1\rho^{-1}N_1(\overline{\lambda}_2N_2\rho^{-1}A_i^\dagger) = \overline{\lambda}_1\overline{\lambda}_2\rho^{-1}(N_1N_2\rho^{-1})A_i^\dagger. \end{array} \tag{5.12}$$

□

Agora, tome $\mathcal{P}: B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ um operador quântico dado por $\mathcal{P}(.) = \sum_{i=1}^k A_i(.)A_i^\dagger$ tal que exista $\rho \in B(\mathcal{H})$ estritamente positivo satisfazendo $\mathcal{P}(\rho) = \rho$. Pelo Teorema 3.17, uma base para o espaço atrator de $\mathcal{P}$ é

$$Attr(\mathcal{P}) = \bigoplus_{|\lambda|=1} Nuc(\mathcal{P}-\lambda I). \tag{5.13}$$

Pelo Corolário 5.3, podemos reescrever essa base como

$$Attr(\mathcal{P}) = \bigoplus_{|\lambda|=1} \mathfrak{D}(\lambda, \rho), \tag{5.14}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(\lambda, \rho) = \{N \quad | \quad & A_i N \rho^{-1} = \lambda N \rho^{-1} A_i, \quad A_i^\dagger N \rho^{-1} = (1/\lambda) N \rho^{-1} A_i^\dagger \\ & A_i \rho^{-1} N = \lambda \rho^{-1} N A_i, \quad A_i^\dagger \rho^{-1} N = (1/\lambda) \rho^{-1} N A_i^\dagger \}, \end{aligned} \tag{5.15}$$

para $\lambda \in \sigma_1$.

Referências

1 AXLER, S. J. Linear Algebra Done Right, 3a edição. New York: Springer, 2015.

2 BENATTI, F. Dynamics, Information and Complexity in Quantum Systems. Springer Science and Business Media, 2009.

3 BHATIA, R. Positive Definite Matrices. Princeton University Press, 2009.

4 FAIGLE, U., SCHONHUTH, A. Asymptotic Mean Stationarity of Sources with Finite Evolution Dimension. IEEE Transactions on Information Theory, v. 53, n. 7, p. 2342-2348, 2007.

5 HAYASHI, M. et al. Introduction to Quantum Information Science. Springer, 2014.

6 HORN, R. A., JOHNSON, C. R. Matrix Analysis, 2a edição. New York: Cambridge University Press, 2013.

7 LAY, D. C. Linear Algebra and its Applications, 4a edição. Pearson Education, Inc, 2012.

8 LIMA, E. L. Álgebra Linear, 2a edição. Rio de Janeiro: IMPA, 1996.

9 LIU, C., PETULANTE, N. On Limiting Distributions of Quantum Markov Chains. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2011.

10 NIELSEN, M. A., CHUANG, I. Quantum Computation and Quantum Information. New York: Cambridge University Press, 2002.

11 NOVOTNÝ, J., ALBER, G., JEX, I. Asymptotic Evolution of Random Unitary Operations. Open Physics, v. 8, n. 6, p. 1001-1014, 2010.

12 NOVOTNÝ, J., ALBER, G., JEX, I. Asymptotic Properties of Quantum Markov Chains. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, v. 45, n. 48, p. 485301, 2012.

13 NOVOTNÝ, J., ALBER, G., JEX, I. Random Unitary Dynamics of Quantum Networks. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 42(28), 282003, 2009.

14 PORTUGAL, R. Quantum Walks and Search Algorithms. Springer Science and Business Media, 2013.

15 SCHÄCKE, K. On the Kronecker Product, 2013. Disponível em http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.419.3846

Índice