UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Anelise Pereira Baur

INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA NA APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA: CONEXÕES ENTRE QUADRILÁTEROS, TRIÂNGULOS E TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

Porto Alegre
2017

Anelise Pereira Baur

INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA NA APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA: CONEXÕES ENTRE QUADRILÁTEROS, TRIÂNGULOS E TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dra. Leandra Anversa Fioreze

Porto Alegre

2017

Anelise Pereira Baur

INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA NA APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA: CONEXÕES ENTRE QUADRILÁTEROS, TRIÂNGULOS E TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dra. Leandra Anversa Fioreze

Banca examinadora:

Prof.ª Dra. Leandra Anversa Fioreze – Orientadora

Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso

Prof. Dr. Rodrigo Dalla Vechia

Prof. Dr. José Carlos Pinto Leivas

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a todos aqueles que contribuíram para a realização deste trabalho. Primeiramente, agradeço à minha família por estar comigo em todos os momentos durante a realização deste trabalho. Ao meu esposo, Bruno, pelo companheirismo, paciência, carinho e compreensão. Aos meus pais, Maria e Bernhard, pelo acolhimento, carinho e pelas lições de vida. Aos meus irmãos Vinícius, Marcelo e Lúcia, pelo apoio e compreensão. À Isa e à Elisa, sem as quais a realização deste trabalho não seria possível.

Também dedico este trabalho aos meus sogros Raul e Alzira, e a toda Família Viganó, por me acolherem com tanto amor e carinho por todos estes anos.

Agradeço também a todos os professores do Mestrado em Ensino de Matemática da UFRGS, por todos os saberes aprendidos. Em especial, agradeço à minha orientadora, Prof.ª Leandra, por toda a paciência, carinho e dedicação com a minha pesquisa. Agradeço também à Prof.ª Márcia Notare, por me auxiliar no início deste processo.

Não posso deixar de agradecer aos colegas da EMEF João Antônio Satte, que me auxiliaram em todos os momentos da pesquisa. Em especial, aos colegas de B30 e da EJA que acompanharam de perto todo este processo.

Obrigada aos meus queridos alunos da turma B34 de 2016, sem os quais esta pesquisa não se realizaria. Vocês são demais!

Por fim, agradeço a todos os meus amigos que me auxiliaram neste processo, me apoiando e me acompanhando em todos os momentos. OBRIGADA!

RESUMO

Este trabalho de pesquisa investigou o processo de aprendizagem de geometria em uma turma do sexto ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede municipal de Porto Alegre. Durante dois meses do ano de 2016, foram desenvolvidos os conceitos de quadriláteros, triângulos e de Transformações Geométricas (translação, rotação e reflexão) sob a perspectiva da Investigação Matemática em sala de aula, metodologia de ensino que possui potencial para desencadear o processo de construção do conhecimento. Durante este período, os estudantes realizaram a investigação de quadriláteros e de triângulos, utilizando o software GeoGebra como recurso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC). Os alunos construíram estes polígonos no GeoGebra, através de orientações passo-a-passo que foram disponibilizadas através de formulários online. Ao longo destas construções, os estudantes responderam a questionamentos também contidos nestes formulários online, de forma a identificar as propriedades contidas em cada construção, referentes a cada figura geométrica. Posteriormente, registraram as propriedades de cada polígono em uma tabela de características, de forma a organizar as propriedades de cada quadrilátero e de cada triângulo estudado. Para a investigação das Transformações Geométricas, desenvolveu-se um trabalho fazendo-se uso de tesselações no plano (coberturas para o plano). Para esta etapa da investigação, utilizou-se o *applet* "*Design a Tessellation*", que é um recurso online e gratuito no qual o usuário pode criar diferentes coberturas para o plano através de uma unidade de tesselação quadrada. Os alunos fizeram uso de formulários online para responder aos questionamentos sobre as Transformações Geométricas estudadas, assim como folhas com atividades e malhas impressas para a criação de tesselações. Para a análise do processo de aprendizagem dos estudantes, foi utilizada a perspectiva dos níveis de Van Hiele, que classifica os níveis de pensamento geométrico, utilizando também uma abordagem que admite a existência de níveis intermediários. Além disso, este trabalho também formulou uma complementação para os níveis de Van Hiele quanto às Transformações Geométricas, de forma a analisar os dados obtidos com a pesquisa de uma maneira mais detalhada. Com a pesquisa finalizada, conclui-se que houve progresso dos níveis de Van Hiele para os estudantes analisados.

Palavras-chave: Investigação Matemática. Polígonos. Transformações Geométricas. Níveis de Van Hiele. Tecnologias da Informação e Comunicação.

ABSTRACT

This research investigated the learning process of geometry in a class of the sixth grade of Elementary School, of a municipal school in Porto Alegre. During two months of 2016, the concepts of quadrilaterals, triangles and Geometric Transformations (translation, rotation and reflection) were developed from the perspective of Math Investigation in the classroom, teaching methodology which has the potential to develop the process of knowledge construction. During this period, students performed the investigation of quadrilaterals and triangles, using GeoGebra software as a resource of Information and Communication Technologies (TIC). The students constructed these polygons in GeoGebra, through step-by-step guidelines, which were made available through online forms. Throughout these constructions, the students answered the questions also contained in these online forms, in order to identify the properties contained in each construction, referring to each geometric figure. Later, they registered the properties of each polygon in a table of characteristics, in order to organize the properties of each quadrilateral and of each triangle studied. For the investigation of the Geometric Transformations, a work was developed making use of tessellations in the plane (covers for the plane). For this stage of the research, the "Design a Tessellation" applet was used, which is an online and free resource, where the user can create different covers for the plane, through a square tessellation unit. Students used online forms to answer questions about Geometric Transformations studied, as well as sheets with activities, and printed meshes for the creation of tessellations. For the analysis of the students' learning process, the Van Hiele levels perspective was also used, which classifies the levels of geometric thinking, using an approach that admits the existence of intermediate levels. In addition, this work also formulated a complementation for the Van Hiele levels, regarding Geometric Transformations, in order to analyze the data obtained with the research in a more detailed way. With the research completed, it is concluded that there was progress of the levels of Van Hiele for the analyzed students.

Keywords: Math Investigation. Polygons. Geometric Transformations. Van Hiele levels. Information and Communication Technologies.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Minha trajetória como estudante de Licenciatura em Matemática foi carregada de uma bagagem repleta de aspectos voltados às Tecnologias da Informação e Comunicação. Depois de formada, já na escola, atuando como professora de Matemática, sempre busquei possibilitar aos estudantes um contato maior com as Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) na disciplina de Matemática; além de procurar oferecer recursos com tais tecnologias, que desencadeassem o processo de aprendizagem de conceitos matemáticos em sala de aula.

De acordo com Gravina e Basso (2012), as tecnologias digitais disponibilizam recursos interativos, que vem apresentando reflexos positivos em pesquisas em Educação Matemática, principalmente naquelas que tem o foco voltado para a aprendizagem de conceitos matemáticos e para o desenvolvimento cognitivo. Desta maneira, os recursos digitais se mostram como tecnologias que podem potencializar o processo de aprendizagem de conceitos matemáticos.

Sendo assim, devido à minha formação acadêmica e à minha convicção de que o uso de tecnologias digitais potencializa a aprendizagem da Matemática, ao escolher um tema para pesquisar, mesmo sem ter nada definido, já sabia que ele envolveria o uso de TIC.

Durante o curso de licenciatura também tive grande influência da geometria e da metodologia da resolução de problemas, principalmente quanto aos aspectos voltados ao desenvolvimento de atividades para a sala de aula. Já durante o mestrado, pude ter o contato com disciplinas que discutiram a Investigação Matemática em sala de aula, metodologia com a qual me identifiquei e que me despertou a curiosidade, como forma de abordagem dos conteúdos. Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2010), a investigação não precisa girar apenas em torno de problemas difíceis ou sofisticados, mas sim trabalhar com questões para as quais não temos uma resposta pronta. São questões que inicialmente podem parecer nebulosas, mas que aos poucos vão tomando forma, instigam o nosso pensamento e nos mobilizam na busca por uma solução.

E o que pode ser mais importante para o processo de aprendizagem do que a mobilização do sujeito em aprender? Desta forma, a metodologia da Investigação Matemática se mostra como um recurso com potencial para a aprendizagem, que pode se adaptar aos diversos níveis acadêmicos, e que certamente também deveria integrar a minha pesquisa.

Escolhidas a Investigação Matemática e as TIC, respectivamente, como metodologia de ensino e como recurso para a aprendizagem, para integrarem a minha pesquisa, só faltava definir quais seriam os conceitos matemáticos a desenvolver durante o trabalho. Para esta definição, novamente a minha influência acadêmica falou mais alto, apontando para a geometria como uma possibilidade de pesquisa.

Acreditando no potencial da geometria em desenvolver no aluno formas de pensar que permitem compreender, descrever e representar matematicamente as formas e objetos do mundo em que vive (BRASIL, 1998), acabei escolhendo como tema, o estudo de quadriláteros e triângulos, o qual é abordado no sexto ano, série em que lecionava naquele momento. Mas sentia que ainda faltava algo que enriquecesse o meu trabalho. Desta forma, acabei acrescentando na pesquisa, o estudo de Transformações Geométricas.

Inicialmente pensei em trabalhar com quadriláteros, triângulos e com as Transformações Geométricas sob o ângulo da Investigação Matemática, juntamente com o uso de TIC que potencializassem a aprendizagem de geometria. Imediatamente, lembrei-me da multiplicidade de recursos presentes no GeoGebra, e imaginei que, apesar deste já ser um software bastante difundido pelo meio acadêmico matemático, ainda é possível explorá-lo de uma maneira original. Pesquisando na web, me deparei com o applet *Design a Tesselation,* que é um recurso disponibilizado na forma online e gratuita no qual podem ser representadas diferentes tesselações (coberturas para o plano), a partir da criação de uma unidade de tesselação quadrada.

Desta forma, acabei decidindo em desenvolver um trabalho que estudasse os quadriláteros e triângulos, sob a ótica da Investigação Matemática em sala de aula, fazendo o uso do GeoGebra como recurso digital. Já a Investigação Matemática das Transformações Geométricas seria desenvolvida através dos recursos disponibilizados pelo applet *Design a Tesselation.*

Durante a elaboração do trabalho, foi necessário escolher um embasamento teórico para analisar os aspectos geométricos da pesquisa. Desta maneira, foi escolhida a teoria proposta por Van Hiele para os níveis de pensamento geométrico. Tal teoria consiste na classificação do pensamento geométrico em cinco níveis, os quais foram criados pelos holandeses Pierre Van Hiele e Dina Van Hiele –Gedolf, na década de 50.

Sendo assim, a teoria da Investigação Matemática foi utilizada por esta pesquisa como metodologia de ensino que visou promover o avanço dos estudantes pelos níveis de Van Hiele. A Investigação Matemática, por sua vez, foi utilizada na elaboração das atividades e na realização destas pelos estudantes.

Este trabalho também elaborou uma complementação aos níveis de Van Hiele, no que diz respeito à análise das Transformações Geométricas. Além disso, utilizou-se uma abordagem para os níveis de Van Hiele que admitisse a existência de níveis intermediários para o pensamento geométrico (SANTOS, 1998; 2001).

Considerando todos os aspectos já citados até agora, delineou-se esta pesquisa através dos seguintes questionamentos:

- **Considerando um trabalho que utiliza a Investigação Matemática, o software GeoGebra e o applet *Design a Tesselation*: que níveis do pensamento geométrico podem ser atingidos por uma turma de estudantes do sexto ano do Ensino Fundamental para os conceitos de quadriláteros, triângulos e de Transformações Geométricas?**

- **Que mudanças ocorreram quanto aos níveis do pensamento geométrico, considerando os estudantes de uma turma do sexto ano, em relação aos níveis no início do trabalho, no que diz respeito aos quadriláteros e triângulos e Transformações Geométricas?**

Para responder a estes questionamentos, este trabalho foi organizado em capítulos, de forma a desencadear algumas conclusões. Para tanto, o trabalho inicia com um capítulo intitulado “Discutindo geometria”, no qual são discutidas questões sobre a importância da geometria para o indivíduo e sobre a relevância de se desenvolver um trabalho envolvendo conceitos geométricos em sala de aula. Além disso, também são discutidos aspectos sobre os motivos que levam alguns professores a não desenvolverem o trabalho com geometria em sala de aula.

No capítulo “Abordagem teórica e metodológica abordada nesta pesquisa”, são apresentadas a metodologia da Investigação Matemática e a teoria dos níveis de Van Hiele para o pensamento geométrico, as quais foram utilizadas na elaboração das atividades e na análise dos dados, respectivamente. Com o objetivo de justificar a relevância do desenvolvimento da presente pesquisa, este capítulo também buscou apresentar outras pesquisas sobre geometria utilizando os Níveis de Van Hiele e sobre Investigação Matemática.

Visando suplementar o uso do GeoGebra e do applet *Design a Tesselation*, no capítulo “Tecnologias da Informação e Comunicação e a sala de aula” são apresentados alguns aspectos sobre a relevância do uso destas tecnologias no ambiente escolar como recursos que podem contribuir no processo de aprendizagem em sala de aula.

No capítulo “Aspectos metodológicos” são apresentadas as características dos sujeitos de pesquisa, assim como as atividades desenvolvidas e a dinâmica utilizada para a coleta de dados. Neste capítulo também será apresentada a forma como os dados foram analisados.

No capítulo “Análise dos dados” são apresentados os dados obtidos durante a realização da coleta de dados. Tais dados foram analisados sob a perspectiva dos níveis de Van Hiele.

Por fim, nas “Considerações Finais”, são apresentados os resultados da pesquisa, bem como algumas considerações sobre tais resultados.

2. DISCUTINDO GEOMETRIA

Como a presente pesquisa abordará o estudo de quadriláteros, triângulos e Transformações Geométricas no Ensino Fundamental, faz-se necessário discutir a importância da geometria, assim como as maneiras através das quais se pode desenvolver estes conteúdos em sala de aula.

A palavra geometria tem origem grega: “geo” significa “terra” e “metria” significa “medida”. Sendo assim, é possível inferir que a geometria se preocupa com as questões referentes às formas e medidas dos elementos inseridos no mundo em que vivemos. Ou seja, a geometria acaba se inserindo nos mais diversos contextos, desde situações cotidianas até aplicações sofisticadas (COSTA, 2016).

Desta maneira, a geometria se mostra como uma área da Matemática que possui potencial para relacionar os aspectos concretos do espaço a aspectos matemáticos abstratos. Esta transposição é destacada por Soares (2014), que apresenta a capacidade de desenvolver a abstração como uma das maiores contribuições da geometria. De acordo com o autor, esta área do conhecimento pode propiciar situações que fazem a relação entre aspectos concretos e abstratos.

Pavanello (1993) alerta que um trabalho com a geometria pode propiciar aos estudantes o desenvolvimento de níveis sucessivos de abstração. Segundo a autora:

> A geometria se apresenta como um campo profícuo da “capacidade de abstrair, generalizar, projetar, transcender o que é imediatamente sensível” – que é um dos objetivos da Matemática – oferecendo condições para que os níveis sucessivos de abstração possam ser alcançados. (PAVANELLO, 1989, p. 182)

A álgebra, uma área da Matemática que envolve diretamente a abstração, por diversas vezes encontra na geometria um caminho para a materialização das suas definições e propriedades, o que pode facilitar o seu entendimento por parte do aluno. Entendimento esse que se deve a uma contextualização dos conceitos algébricos, proporcionada pela geometria. De acordo com Pavanello (1989), a ênfase nos conceitos algébricos sem uma abordagem geométrica como complementação, pode deixar os estudantes sem um desenvolvimento integral dos processos de pensamento essenciais à resolução de problemas matemáticos. Lobo e Bayer (2004) também constatam em suas entrevistas com um grupo de professores que alguns deles apresentam uma preocupação em utilizar a geometria como um recurso para a compreensão da álgebra.

Além da abstração, o trabalho com geometria em sala de aula pode desenvolver no aluno formas de pensar que permitem compreender, descrever e representar matematicamente as formas e objetos do mundo em que vive (BRASIL, 1998). Esta forma de pensar também pode desenvolver no aluno a capacidade de análise e de dedução, assim como a habilidade de estabelecer relações. Conforme Pavanello (1993, p.16), um trabalho desenvolvido com a geometria “pode favorecer a análise de fatos e de relações, o estabelecimento de ligações entre eles e a dedução, a partir daí, de novos fatos e novas relações”.

A geometria também pode se apresentar como uma facilitadora para o entendimento de determinadas situações cotidianas. Segundo Lorenzato (1995), a geometria é uma área do conhecimento com o potencial de desenvolver o pensamento geométrico (ou o raciocínio visual). De acordo com o autor, o pensamento geométrico é a habilidade do indivíduo em utilizar a geometria para compreender uma determinada situação contextualizada. Ainda segundo o autor, este fator facilitador também pode estar presente na resolução de problemas presentes em outras áreas do conhecimento humano.

Através da geometria, é possível que uma criança consiga mostrar o seu nível de entendimento de uma situação, a sua maneira de raciocinar e a sua solução para um determinado problema, já que esta é uma área do conhecimento que valoriza as descobertas, conjecturas e experiências. A geometria pode servir, ainda, como um apoio para as demais áreas do conhecimento, além de auxiliar no esclarecimento de muitas situações abstratas, agindo como um meio de facilitar a comunicação Matemática (LORENZATO, 1995).

Soares (2014) e Costa (2016) destacam que o movimento da Matemática Moderna, ocorrido no início da década de 60, teve repercussão até meados dos anos 90. Até esta década, foi possível perceber um certo abandono da geometria nos currículos de Matemática da época. Neste período, grande parte dos professores de Matemática acabou deixando a geometria de lado, priorizando conceitos aritméticos e algébricos em detrimento dos conceitos geométricos. Tal movimento priorizava o rigor matemático através do estudo da teoria de conjuntos, preocupando-se com as estruturas algébricas e com a utilização de uma linguagem simbólica. Os autores enfatizam que devido a este fato, muitos professores tiveram uma formação mais voltada para os aspectos algébricos, já que a disciplina de Matemática desenvolvia um trabalho com geometria fazendo uso de teoremas como postulados, sem nenhuma construção de conhecimento geométrico através de noções empíricas (PAVANELLO, 1993).

Segundo a autora, o abandono da geometria pode ser sentido de uma maneira mais forte nas escolas públicas, principalmente após a promulgação da Lei 5692/71, que dava total liberdade para o professor montar o seu programa de ensino. O que ocorreu foi que muitos professores que não se sentiam seguros para ensinar geometria começaram a excluir este conteúdo dos seus programas de aula, e os poucos que a incluíram em seus programas deixavam-na sempre para o final, talvez na esperança de que não fosse possível trabalhar a geometria em sala de aula por falta de tempo no ano letivo (PAVANELLO, 1993).

A pesquisa de Lobo e Bayer (2004) aponta para uma tendência dos professores a não trabalhar o conteúdo de geometria durante o ano letivo devido à falta de tempo. Segundo os pesquisadores, grande parte do grupo de professores pesquisados não cumpria os conteúdos do último trimestre/bimestre e, em sua maioria, o conteúdo de geometria estava incluso na lista destes conteúdos postergados. A mesma pesquisa também constatou que este mesmo grupo de professores, apesar de deixar a geometria em último lugar no ano letivo, considerou esta como uma parte importante da Matemática, por fazer parte do cotidiano do aluno, além de desenvolver o raciocínio lógico através de recursos concretos.

Embora tenha existido um distanciamento da geometria nas propostas curriculares de Matemática do Ensino Fundamental, o que talvez tenha sido uma consequência do Movimento da Matemática Moderna, é importante destacar que atualmente este distanciamento já não se encontra tão acentuado. Conforme Lima (2015), ao longo das décadas de 70 e 80 ocorreu um movimento de resgate da geometria para o currículo do ensino básico, que foi consolidado pelos PCN na década de 90.

Sob esta perspectiva, torna-se necessário refletir sobre quais as possíveis consequências de um trabalho inadequado em geometria ou da exclusão da mesma do currículo escolar. A exclusão da geometria do currículo escolar ou um trabalho inadequado nesta área do conhecimento pode ser prejudicial para a formação do indivíduo (PAVANELLO, 1989), já que a geometria é uma área do conhecimento capaz de desenvolver mecanismos de pensamento necessários para a resolução de problemas em geral. Segundo a autora, a ausência do conteúdo de geometria do contexto escolar, em detrimento da álgebra, por exemplo, pode privar o estudante da possibilidade de desenvolver integralmente os processos de pensamento necessários à resolução de problemas matemáticos.

Um trabalho inadequado em geometria pode ser tão prejudicial quanto a exclusão deste tema do currículo escolar, já que impede que o indivíduo possa se beneficiar das potencialidades desta área do conhecimento. Entretanto, analisando-se livros didáticos, é possível perceber que os conceitos geométricos muitas vezes são abordados com figuras geométricas acompanhadas de algoritmos escritos, sem que se tenha realizado nenhum questionamento ao leitor estudante que promova a sua reflexão para as suas próprias conclusões. Em seguida, os textos são acompanhados de atividades que se resumem a exercícios de fixação, promovendo assim a memorização de conceitos e fórmulas relacionadas às figuras geométricas (informação verbal)[1]. Soares (2014) destaca que, atualmente, os conceitos geométricos são trabalhados em sala de aula quase que totalmente através da memorização, o que priva o estudante de analisar as propriedades das figuras de maneira autônoma e de entender como estas propriedades estão relacionadas entre si. De acordo com Geddes e Fortunato (1993, apud, BARBOSA, 2002), a metodologia de ensino baseada na memorização e no reconhecimento de fórmulas e algoritmos pode atrapalhar a aprendizagem adequada de conceitos geométricos, deixando estes sem um significado para o estudante.

Barbosa (2002) ressalta que, no ano de 1989, o Conselho Nacional de Professores de Matemática (NCTM), órgão que tem o objetivo de melhorar a qualidade de ensino de Matemática nos Estados Unidos, incluiu em seu documento *Normas para o currículo e avaliação em Matemática escolar* diretrizes com mais ênfase para a geometria. Ganharam espaço aspectos como o desenvolvimento da compreensão de objetos geométricos e de suas relações e a utilização da geometria para resolver problemas, em detrimento da memorização de conceitos geométricos e do estudo de teoremas e axiomas, por exemplo (BARBOSA, 2002). Tal documento

---

[1] Notas de aula da disciplina de Análise e Produção de Material Didático Escolar, oferecida pelo Programa de Pós-Graduação de Ensino em Matemática da UFRGS, cursada pela autora no segundo semestre de 2015.

influenciou as tendências em educação Matemática nos Estados Unidos, Canadá e outros países (VELOSO, 1998, apud, BARBOSA, 2002, p.7).

Ressaltada a importância da geometria, torna-se necessário discutir quais conceitos geométricos são mais pertinentes para um trabalho em determinada fase escolar, além dos modos de trabalhar os conceitos geométricos no Ensino Fundamental.

Na década de 90, Lorenzato (1995) apresentou algumas tendências para um trabalho de geometria no Ensino Fundamental de 5ª a 8ª séries:

- Apresentar a Geometria como meio de descrever o mundo físico;
- Explorar as Transformações Geométricas através de rotação, translação, simetria e deformação, ressaltando a semelhança e a congruência;
- Utilizar a Geometria como auxiliar para resolver problemas;
- Aplicar propriedades geométricas;
- Favorecer a emissão e a verificação de hipóteses;
- Integrar a Geometria com a Aritmética e Álgebra.

Na época, o autor ressaltou que na fase que abrange os anos finais do Ensino Fundamental deveriam ser desenvolvidas as primeiras descobertas sistemáticas e as primeiras deduções lógicas, discutindo sempre os processos e as conclusões, porém sem dar ênfase à formalização. (LORENZATTO,1995)

No final da década de 90, os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1998), destacam que em um trabalho envolvendo geometria na sala de aula deveriam ser abordadas situações em que fossem necessárias construções geométricas com régua e compasso, assim como a visualização e aplicação das propriedades das figuras e a construção de outras relações. Além disso, o documento ressaltou a importância de um trabalho incluindo as Transformações Geométricas, de forma que se permitisse o desenvolvimento da percepção espacial e como um recurso para levar os estudantes a descobertas. O documento ressaltou também que as atividades envolvendo translação, rotação e reflexão deveriam ser privilegiadas nas séries finais do Ensino Fundamental, por permitirem a aprendizagem de conceitos geométricos que não se restringe ao estudo de conceitos geométricos na forma estática. Além disso, o documento propõe que sejam utilizados softwares neste trabalho. Segundo os PCN, um trabalho com

Transformações Geométricas é essencial para a compreensão do conceito de congruência. (BRASIL, 1998).

Já a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2016) propõe que nos anos finais do Ensino Fundamental o estudo da geometria consiga contemplar os seguintes aspectos:

- Ênfase em tarefas que analisem e produzam transformações, ampliações ou reduções de figuras geométricas planas, a fim de que se possa identificar seus elementos variantes e invariantes, de modo a desenvolver os conceitos de congruência e semelhança;
- Aproximação da álgebra com a geometria, desde o início do estudo do plano cartesiano, por meio da geometria analítica;
- Abandono da aplicação de fórmulas prontas decorrentes de teoremas (Teorema de Tales, Teorema de Pitágoras, cálculo de áreas, volumes, perímetro, etc.);
- Os alunos devem conseguir identificar as condições de necessidade e de suficiência envolvidas na semelhança de triângulos, a fim de que se possa contribuir para o desenvolvimento do raciocínio hipotético-dedutivo.

Além disso, a BNCC destaca que o estudo das Transformações Geométricas deve estar presente no estudo da geometria de todo o Ensino Fundamental (anos iniciais e anos finais), ao citar que “o estudo da posição e deslocamentos no espaço e o das formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos” (BRASIL, 2016, p 227). O documento aponta que, através deste desenvolvimento do pensamento geométrico, é possível que os estudantes sejam capazes de investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos. (BRASIL, 2016)

Por sua vez, o Caderno 5 do Pacto pela Alfabetização na Idade Certa - PACTO (BRASIL, 2014), referente ao estudo da geometria, enfatiza que os estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental já devem conhecer as Transformações Geométricas básicas (rotação, reflexão e translação) através de situações vivenciadas.

Analisando-se estas referências sobre as tendências no ensino da geometria, é possível perceber que, na década de 90, tanto Lorenzato (1995) quanto os PCN

(BRASIL, 1998) ressaltam que o estudo das Transformações Geométricas deveria ocorrer nos anos finais do Ensino Fundamental. Já a BNCC (BRASIL, 2016) orienta que o trabalho com Transformações Geométricas deve iniciar nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Esta ideia reforça as orientações destacadas pelo Caderno 5 do PACTO (BRASIL, 2014).

Levando-se em consideração as orientações curriculares para o ensino de geometria no ensino fundamental, o computador se apresenta como um recurso que pode contribuir para a aprendizagem de geometria em sala de aula. Barbosa (2002) defende que o computador se apresenta como um ambiente rico para o desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes, já que estimula a atitude crítica e desenvolve a criatividade dos alunos, além de enriquecer a capacidade de raciocínio e comunicação. Graf e Hodgson (1998, apud BARBOSA, 2002, p.13), sinalizam a importância do uso do computador como uma ferramenta para o ensino e aprendizagem de geometria, que possibilita a exploração de situações geométricas que antes não poderiam ser exploradas de maneira concreta:

> o computador é agora o ingrediente principal no ensino e aprendizagem da geometria, não só pelas suas extraordinárias capacidades gráficas, mas também por permitir explorações antes demasiadamente complexas ou até impossíveis de materializar.

O computador pode ser um aliado ao processo da aprendizagem de geometria em sala de aula, através dos softwares de Geometria Dinâmica, uma vez que dá movimento a uma geometria que era então estática. De acordo com Lopes (2010, p. 37), os programas de Geometria Dinâmica se apresentam como um recurso que possibilita “fazer investigações, descobertas, confirmar resultados, fazer simulações e levantar questões relacionadas com a sua aplicação prática”.

Os softwares de geometria dinâmica possibilitam visualizações diferentes para uma mesma figura por meio da sua movimentação, o que possibilita ao estudante uma oportunidade de poder criar conjecturas e fazer hipóteses. De acordo com Gravina (2001), através do recurso da estabilidade no movimento, os mais diversos teoremas da geometria passam a ter uma multiplicidade de representações.

Ressaltada a importância da inserção da geometria nas aulas da disciplina de Matemática, em especial para o Ensino Fundamental, no capítulo seguinte, este trabalho trata sobre os referenciais teóricos e metodológicos que foram utilizados durante o desenvolvimento desta pesquisa.

3. ABORDAGEM TEÓRICA E METODOLÓGICA ABORDADA NESTA PESQUISA

Neste capítulo será apresentado o referencial teórico e metodológico que norteou a análise dos dados obtidos neste trabalho: a Investigação Matemática e os níveis de Van Hiele para o pensamento geométrico.

Primeiramente, serão discutidos aspectos referentes à Investigação Matemática em sala de aula e, posteriormente, será apresentada a teoria dos níveis de Van Hiele.

3.1 A Investigação Matemática em sala de aula

A Investigação Matemática foi a metodologia de ensino adotada por esta pesquisa. Sendo assim, as atividades formuladas para o desenvolvimento deste trabalho buscaram contemplar as etapas da Investigação Matemática.

O ensino da Matemática é, por muitas vezes, pautado na memorização e na resolução repetitiva de tarefas. Os alunos, por sua vez, acabam se habituando a uma memorização de conceitos e procedimentos e há ênfase na repetição de tarefas, fazendo com que eles desenvolvam apenas uma parte do processo de resolução (BORASI, 1991, apud SEGURADO; PONTE, 1998). Mediante esta situação, o estudante não consegue perceber que é possível fazer uso de outras abordagens em muitos problemas matemáticos. Isto acaba fazendo com que os alunos tenham uma visão empobrecida sobre as formas possíveis de se lidar com a Matemática (SEGURADO; PONTE, 1998).

Frank (1988, apud SEGURADO; PONTE, 1998, p.8), estudou as principais concepções de um grupo de estudantes de 6º a 8º anos do Ensino Fundamental sobre a Matemática e o seu processo de aprendizagem. Foram identificadas cinco concepções:

1. A Matemática é cálculo: a excessiva importância dada ao cálculo numérico e à aplicação de fórmulas durante as aulas da disciplina de Matemática pode

gerar uma concepção equivocada de que Matemática se resume a calcular e aplicar fórmulas prontas.

2. Os problemas de Matemática são questões que podem ser resolvidas rapidamente em poucos segundos: ao estudar um assunto, o professor mostra estratégias e técnicas de como se resolve um determinado problema. Desta maneira, o estudante ao tentar solucionar, procura resolvê-lo através de uma maneira rápida. Caso não consiga, acaba desistindo.

3. Em Matemática, o objetivo é obter “respostas certas”: quando um trabalho só é valorizado se estiver impecavelmente correto, acaba-se por excluir a possibilidade da aprendizagem através do erro, além de se desconsiderar o caminho percorrido pelo pensamento para a solução de um problema. Um sistema de avaliação baseado na quantidade de acertos dos estudantes acaba por reforçar a ideia de que aprende mais apenas quem acerta mais.

4. O papel do estudante é receber conhecimentos de Matemática e demonstrar que os adquiriu: durante as aulas de Matemática, os estudantes registram o que o professor escreve ou fala, para que assim seja possível imitar tais técnicas nas avaliações. Desta maneira, os estudantes acabam por não questionar o motivo pelo qual estão recebendo tais conhecimentos.

5. O papel do professor é transmitir conhecimentos de Matemática e verificar se os estudantes os adquiriram. O professor é uma autoridade detentora do conhecimento. Desta forma, basta que o professor explique bem o que precisa ser feito, para que os estudantes possam reproduzir de maneira rápida o que foi ensinado.

Sendo assim, faz-se necessário discutir outras maneiras de desenvolver um trabalho de aprendizagem em Matemática, as quais não tenham como base a repetição e a memorização ou a ênfase no certo e no errado. Compartilho com as ideias de Garofalo (1989) quando aponta que “o ensino da Matemática deve dar ênfase a atividades que encorajem os alunos a explorarem tópicos; desenvolver e refinar as suas próprias ideias, estratégias e métodos; e refletirem e discutirem sobre conceitos e processos matemáticos” (GAROFALO, 1989, p.504, apud SEGURADO; PONTE, 1998, p.10).

De acordo com Braumann (2002, p.5), “aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática feita. Mas ser capaz de fazer investigação de natureza Matemática (ao nível adequado de cada grau de ensino).” Na visão do autor, só através da investigação é que ocorrerá a compreensão dos conceitos matemáticos de fato. Braumann (2002) cita que aprender Matemática sem fazer uso da investigação é o mesmo que aprender a andar de bicicleta apenas observando os outros andarem e recebendo informações sobre como o conseguem; o que não é suficiente para se aprender a andar de bicicleta, uma vez que é necessário que o indivíduo suba na bicicleta e tente andar; errando e aprendendo com os erros. Analogamente seria a aprendizagem Matemática, pois é insuficiente que o estudante receba informações sobre os conceitos matemáticos e como se trabalhar com eles. É necessário que tais conceitos sejam desenvolvidos através de um trabalho investigativo.

A Investigação Matemática em sala de aula proporciona ao estudante a vivência do processo de construção do conhecimento e não objetiva apenas o resultado final. Através de atividades investigativas, o estudante pensa sobre o que está se investigando e pode desenvolver outros saberes além do que foi solicitado pelo professor (LAMONATO, 2007).

A Investigação Matemática se apresenta como uma possibilidade que pode se enquadrar nesta perspectiva mais abrangente de aprendizagem, a qual tira o foco da repetição e memorização e coloca o estudante como autor de sua própria aprendizagem. De acordo com Segurado e Ponte (1998), o trabalho investigativo em Matemática se caracteriza inicialmente por não possuir objetivos precisos, que vão se estruturando aos poucos, e por proporcionar aos estudantes a experimentação, a formulação e o teste de conjecturas (PONTE; MATOS, 1996; apud SEGURADO; PONTE, 1998, p.3). Desta maneira, de acordo com a visão dos autores sobre o trabalho investigativo, os estudantes poderiam ter contato com uma parte essencial da Matemática, baseada na experimentação e na formulação de hipóteses.

De acordo com Abreu (2011), as tarefas envolvendo Investigações Matemáticas apresentam um grande potencial para o desenvolvimento do pensamento matemático. Para isso, tais tarefas são constituídas por situações que proporcionem ao estudante a formulação de outros questionamentos. Esta perspectiva está de acordo com a visão de Lamonato (2007, p.76):

> a Investigação Matemática alcança destaque por possibilitar que o aprender e ensinar sejam diferentes de transmitir e adquirir conhecimentos, mas pelos seus processos intrínsecos, proporcionam o desenvolvimento do conhecimento por quem se envolve em atividade de Investigação Matemática.

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2005, p.13) “investigar é procurar conhecer o que não se sabe.” Ainda segundo os autores, ao investigar em Matemática, ocorre uma busca por “descobrir relações entre os objetos matemáticos [...], procurando identificar as respectivas propriedades”. A Investigação Matemática geralmente ocorre utilizando-se uma ou mais situações que envolvam problemas, e deve-se ter clareza quanto ao problema a se resolver; ou seja, o estudante deve saber o que lhe está sendo pedido (PONTE; BORCARDO; OLIVEIRA, 2005).

A amplitude trazida pela Investigação Matemática em sala de aula acaba por possibilitar a experiência Matemática real, contemplando aspectos de formulação de questões, conjecturas, testes, argumentação e de discussão de ideias (ABRANTES; LEAL; PONTE, 1996, apud LAMONATO, 2007). Quanto à qualidade do problema em questão, o matemático inglês Stewart (1995, apud, PONTE; BORCARDO; OLIVEIRA, 2005) afirma que um bom problema é o que possibilita descobertas para além da sua solução, ou que, segundo o autor, “em vez de simplesmente conduzir a um beco sem saída, abre horizontes inteiramente novos [...]” (STEWART, 1995, apud, PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2005, p.16). Ponte, Brocardo e Oliveira (2005) também desenvolve esta ideia:

> quando trabalhamos num problema, o nosso objetivo é, naturalmente, resolvê-lo. No entanto, para além de resolver o problema proposto, podemos fazer outras descobertas que, em alguns casos, se revelam tão ou mais importantes que a solução do problema original. Outras vezes, não se conseguindo resolver o problema, o trabalho não deixa de valer a pena pelas descobertas imprevistas que proporciona. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2005, p.17)

No âmbito da sala de aula, as atividades que envolvem Investigação Matemática não podem ser confundidas com resolução de exercícios, pois quando o professor apresenta um exercício ao estudante, o docente espera que o estudante consiga compreender uma maneira específica de solucionar a questão proposta.

Em contrapartida, uma atividade envolvendo investigação abre margem para descobertas de uma maneira mais ampla, fugindo de respostas únicas e descobertas únicas. O estudante terá um papel mais autônomo durante uma atividade investigativa, já que este deverá formular suas hipóteses e questões com base no problema em questão (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2005)

Durante o processo investigativo em sala de aula, o papel do professor é fundamental, já que este não realizará a investigação em si, mas mostrará ao estudante como investigar em Matemática. Além disso, o professor deve estar atento ao processo de desenvolvimento da resolução do problema e deve prestar apoio sempre que for necessário (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2005).

Ponte, Brocardo e Oliveira (2005) apresentam três momentos de desenvolvimento para uma atividade investigativa:

- 1º Introdução da tarefa: o professor introduz a tarefa, propondo o problema à turma, oralmente ou por escrito.
- 2º Realização da investigação: os estudantes realizam a investigação
- 3º Discussão dos resultados: momento em que os estudantes relatam o que foi descoberto e como as descobertas foram feitas.

De acordo com os autores, a introdução da tarefa deve ser um dos momentos cruciais para a atividade investigativa, já que é nesta etapa que o estudante entende o sentido da tarefa e o que se espera da atividade em si. Além disso, é nesta fase que o professor poderá estimular os estudantes a realizar a investigação utilizando termos como “pequenos exploradores” ou “partindo para uma descoberta”, pois este tipo de termo ajuda o estudante a compreender a diferença entre uma tarefa comum e uma atividade de investigação (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2005).

O momento de introdução é de grande importância para o desenvolvimento do trabalho, uma vez que pode influenciar o êxito na busca de uma solução, ainda mais se os estudantes não estiverem familiarizados com atividades de investigação. Além disso, quanto mais o professor desenvolver atividades investigativas em sala de aula, mais facilmente os estudantes compreenderão a finalidade da atividade (FONSECA; BRUNHEIRA; PONTE, 1999).

É natural que os estudantes pouco habituados com a investigação em sala de aula peçam ajuda imediata durante a introdução da tarefa, justificando que não a compreenderam. Isto ocorre porque, em uma atividade investigativa, geralmente os estudantes não conseguem vislumbrar uma resposta imediata, situação à qual não estão acostumados (FONSECA; BRUNHEIRA; PONTE, 1999).

O momento de desenvolvimento da investigação deve ocorrer com o apoio do professor seguindo quatro fases para a realização da Investigação Matemática, conforme apresentado por Ponte, Brocardo e Oliveira (2005):

- 1º Introdução: neste momento os estudantes devem reconhecer o problema proposto, explorando a situação e formulando questões.
- 2º Conjecturas: nesta etapa deve ser realizada a organização dos dados do problema em questão, para que assim seja possível a formulação de conjecturas.
- 3º Testes e reformulação: neste momento, os estudantes realizam testes e refinam as suas conjecturas.
- 4º Justificação e avaliação: neste momento os alunos justificam a escolha de uma conjectura e avaliam o raciocínio utilizado na resolução do problema.

O autor ressalta a importância do registro durante o processo investigativo, ao citar o fato de alguns estudantes apenas verbalizarem as suas conjecturas:

> daqui decorre a importância da realização de um registro escrito do trabalho de investigação. É somente quando se dispõem a registrar as suas conjecturas que os alunos se confrontam com a necessidade de explicitarem as suas ideias e estabelecerem consensos e um entendimento comum quanto às suas realizações. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2005, p.33)

Além disso, é esperado que os estudantes adquiram uma atitude investigativa e que o professor seja um orientador, questionando–os sempre quando o seu apoio for solicitado, a fim de provocar o raciocínio dos alunos (FONSECA; BRUNHEIRA; PONTE, 1999). O momento de discussão dos resultados é a fase de fechamento do trabalho, onde os mesmos podem realizar uma reflexão Matemática sobre o que foi investigado e descoberto. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2005): “Podemos afirmar que, sem a discussão final, se corre o risco de perder o sentido da investigação.”

De acordo com Fonseca, Brunheira e Ponte (1999, p.5):

> durante a fase de discussão o professor, na sua função de moderador e orientador, cabe-lhe estimular a comunicação entre os alunos. Nesta fase, os alunos são confrontados com hipóteses, estratégias e justificações diferentes das que tinham pensado, são estimulados a explicar suas ideias, a argumentar em defesa das suas afirmações e a questionar os colegas. É também esta a altura adequada para se clarificarem ideias, se sistematizarem algumas conclusões e se validarem resultados.

Desta maneira, a discussão dos resultados é a fase em que os estudantes podem realizar uma reflexão sobre o desenvolvimento do trabalho, ampliando os horizontes da solução do problema e analisando outros caminhos para a resolução do desafio proposto.

Nesta fase da investigação, o “professor deve conhecer bem o trabalho dos alunos de modo a valorizar tanto as descobertas mais interessantes como as mais modestas” (FONSECA; BRUNHEIRA; PONTE, 1999, p.5). Este comportamento do professor pode motivar os alunos a continuar realizando outros trabalhos de cunho investigativo.

A discussão dos resultados é um momento no qual os alunos irão pensar sobre o que fizeram e o que descobriram. Nesta fase é possível ter uma valorização do trabalho feito pelos estudantes, mesmo que não tenham chegado a uma solução correta para o problema. Além disso, é neste momento que é possível fazer conexões com outras ideias Matemáticas e constituir um novo ponto de partida para outras investigações (FONSECA; BRUNHEIRA; PONTE, 1999).

Este momento também poderá ser uma oportunidade de construção do conhecimento, uma vez que “envolverá uma situação pensada, experimentada e problematizada, um momento de novidades até para o aluno que concluiu a tarefa” (LAMONATO, 2007, p.77).

É importante destacar que, durante uma Investigação Matemática, não é possível ao professor prever os caminhos a serem seguidos pelos estudantes. Desta maneira, através da atividade investigativa, ele pode surpreender diante da proposta inicial, fazendo descobertas não previstas pelo professor em um primeiro momento (LAMONATO, 2007).

Ao longo do trabalho investigativo, existe a possibilidade de o estudante seguir por um caminho equivocado para a solução do problema. Cabe ao professor evitar apontar o erro e deixar que ele consiga perceber o seu próprio equívoco. No entanto, é necessário que o professor não permita que este erro se prolongue demais, de modo a provocar o desânimo dos estudantes. Para isso é necessário que o professor oriente os alunos de uma forma mais direta, ou aconselhando a utilizar raciocínio análogo ao de outra situação (FONSECA; BRUNHEIRA; PONTE, 1999).

Além do papel de orientador dos estudantes durante o processo investigativo, o professor adquire outro papel de grande importância para esta atividade, no que diz respeito à elaboração da tarefa. O professor deve levar em conta quais objetivos que se pretende atingir com determinada atividade de investigação. Para isso, a ação docente deve levar em conta os seguintes questionamentos (FONSECA; BRUNHEIRA; PONTE, 1999):

- Qual o peso relativo a atribuir às atividades de investigação? Elas devem ser o eixo condutor do trabalho com os alunos? Estão em concordância com outras atividades ou, pelo contrário, assumem um peso menor no currículo?

- Como as investigações estão relacionadas com os conteúdos a serem lecionados? Os conteúdos devem estar na base da investigação, ou a sua presença tem uma importância secundária? Os conteúdos podem surgir a partir da atividade ou esta deverá ser realizada depois de serem tratados?

Além de equilibrar a atividade de investigação com o currículo, o professor deve refletir se determinada atividade realmente desencadeará uma investigação. Ainda, o professor terá que fazer uso da sua criatividade para dar forma à tarefa, realizando as adaptações necessárias ao problema em questão, a fim de que seja possível atingir os objetivos pretendidos (FONSECA; BRUNHEIRA; PONTE, 1999).

Para que seja possível desenvolver-se um trabalho investigativo em uma sala de aula de Matemática também é importante que ocorram mudanças no ambiente da sala de aula, tais como a postura dos estudantes e do professor, além da dinâmica das aulas. (ABREU, 2011). Estas mudanças podem contribuir para a consolidação desta nova perspectiva no âmbito da sala de aula.

Após discutir a metodologia de ensino utilizada para o desenvolvimento deste trabalho, a seção seguinte apresentará a teoria dos níveis de Van Hiele para o pensamento geométrico.

3.2 Os níveis de Van Hiele

Como aporte teórico para esta pesquisa, utilizou-se a teoria formulada pelo casal de holandeses Dina Van Hiele-Gedolf e Pierre Van Hiele, que estudaram o desenvolvimento do pensamento geométrico em meados das décadas de 50 e 60. Logo após a publicação dos resultados iniciais, Dina vem a falecer, e o seu esposo Pierre reformula e desenvolve o restante da teoria (KALEFF et al.,1994). O modelo ganhou proporções primeiramente na União Soviética, na década de 60, e internacional na década de 70, através do norte-americano Izaak Wirszup, que começou a escrever e falar sobre o modelo. Juntamente com isso, o professor dos Van Hiele, Hans Freudenthal, chamou a atenção para a teoria no livro *Mathematics as an Educational Task,* de 1973. Na década de 80, o interesse norte-americano sobre o trabalho dos Van Hiele aumenta, o que foi acentuado pelas traduções dos trabalhos do casal para a língua inglesa (CROWLEY, 1994).

O modelo criado pelos Van Hiele consiste basicamente em cinco níveis de compreensão do pensamento geométrico, que descrevem este processo de pensar em geometria. (KALEFF et al.,1994). De acordo com o comportamento apresentado pelo estudante se define o seu grau de maturidade geométrica, ou seja, em que nível de Van Hiele ele está (CROWLEY, 1994). De acordo com Nasser e Sant'anna (2010), o progresso dos alunos por entre os níveis ocorre através de atividades adequadas, que são ordenadas pelo professor. Desta maneira, o avanço dos estudantes "depende mais da aprendizagem adequada do que de idade ou de maturação" (NASSER ; SANT'ANNA, 2010, p.6).

Pesquisando a literatura e trabalhos já realizados na área de geometria, foram localizadas inúmeras pesquisas que abordam os níveis de Van Hiele para o estudo e análise de figuras geométricas. No entanto, foram encontrados apenas dois trabalhos que detalham os níveis de Van Hiele quanto aos aspectos e particularidades relacionados às Transformações Geométricas (CLEMENS E BATISTA, 1992, apud COSTA, 2005; LEWELLEN, 1992, apud COSTA, 2005). Devido à escassez de pesquisas que relacionam diretamente os níveis de Van Hiele às Transformações Geométricas no plano, o presente trabalho julgou necessário realizar esta análise, fazendo uma releitura interpretativa destes níveis para este campo da geometria, a fim de complementar o detalhamento dos níveis de Van Hiele desenvolvido por Kaleff (1994), Crowley (1994) e Nasser e Sant'anna (2010).

Desta forma, utilizando a interpretação dos níveis de Van Hiele para Transformações Geométricas, seguem os níveis de Van Hiele e suas características, que serão utilizados como fonte de análise para este trabalho:

Níveis de Van Hiele	Características	Interpretação complementar para as Transformações Geométricas
Nível 0 Visualização	Neste nível, os estudantes percebem o espaço apenas como algo que existe em torno deles. Os conceitos de geometria são vistos como entidades totais, desconsiderando os componentes e atributos de cada conceito. Os estudantes raciocinam apenas através de considerações visuais (KALEFF et al.,1994). As figuras geométricas, por exemplo, são vistas como algo inteiro, são desconsideradas as suas partes e propriedades (CROWLEY, 1994). Reconhecimento, comparação e nomenclatura das figuras são feitos por meio da aparência global (NASSER; SANT'ANNA, 2010).	Neste nível, o estudante reconhece o movimento de cada transformação visualmente como um todo e consegue diferenciar os movimentos em termos visuais.
Nível 1 Análise	Os estudantes começam a analisar os conceitos geométricos através da observação e da experimentação; e inicia-se um processo de discernimento quanto às características das figuras, por partes (CROWLEY, 1994). De acordo com Crowley (1994), começam a surgir propriedades que são utilizadas para conceituar classes de configurações. Entretanto, os estudantes deste nível ainda não são capazes de explicar relações entre propriedades, assim como não percebem inter-relações entre figuras e não entendem definições (CROWLEY, 1994).	Quanto às Transformações Geométricas, o estudante inicia a compreensão quanto às características de cada Transformação Geométrica. O estudante consegue analisar e prever o que uma Transformação Geométrica pode fazer em uma figura.
Nível 2 Dedução informal	Neste nível os estudantes conseguem estabelecer inter-relações de propriedades tanto dentro de figuras como entre figuras: desta forma são capazes de deduzir propriedades de uma figura e reconhecer classes de figuras. A inclusão de classes é compreendida e as definições passam a ter significado (CROWLEY, 1994). Há uma necessidade de uma definição precisa por parte do estudante e da percepção que uma propriedade pode decorrer de outra. (NASSER; SANT'ANNA, 2010). O estudante não consegue compreender o processo de dedução como um todo, mas acompanha provas formais, mas sem saber como construir uma (KALEFF et al., 1994).	Quanto às Transformações Geométricas, o estudante consegue estabelecer relações entre as mesmas, a fim de reconhecer as diferentes classes de transformações (translação, reflexão, rotação). Além disso, é capaz de compor dois ou mais tipos de Transformações Geométricas para cobrir o plano.

Nível 3 Dedução ou dedução formal	O discente percebe a inter-relação e o papel de termos não definidos, axiomas, postulados, definições, teoremas e demonstrações, conseguindo construir demonstrações e não apenas memorizá-las, inclusive de mais de uma forma. (CROWLEY, 1994). O aluno é capaz de desenvolver uma sequência de afirmações, deduzindo uma afirmação de outra ou de outras, entendendo a relevância de tais deduções como um caminho para o estabelecimento de uma teoria geométrica (KALEFF et al.,1994). Reconhece as condições necessárias e suficientes (NASSER; SANT'ANNA, 2010).	Cada transformação no plano é vista como uma função que leva cada ponto A do plano, em um ponto B do plano.
Nível 4 Rigor	Neste estágio, o estudante é capaz de trabalhar com vários sistemas axiomáticos, sendo possível, assim, estudar geometrias não-euclidianas e conseguindo comparar os diferentes sistemas, percebendo a geometria, agora, também no plano abstrato (CROWLEY, 1994). Neste nível, os estudantes avaliam vários sistemas dedutivos com alto grau de rigor (KALEFF et al.,1994) e atingem a capacidade de compreender demonstrações formais, conseguindo estabelecer teoremas em diversos sistemas e realizar a comparação dos mesmos (NASSER; SANT'ANNA, 2010).	Não há nenhuma interpretação complementar para este nível.

Quadro 1: Níveis de Van Hiele e interpretação complementar para as Transformações Geométricas utilizados para a análise dos dados.

De acordo com o modelo, através de experiências educacionais adequadas, é possível que o estudante se mova sequencialmente a partir do nível inicial (visualização), até o último nível (rigor) (CROWLEY, 1994). O modelo proposto por Van Hiele também é composto por algumas propriedades que servem como orientações quanto à metodologia a ser aplicada. De acordo com Crowley (1994), as propriedades são:

1. Sequencial: para passar para o nível seguinte, o estudante deve ter assimilado as estratégias dos níveis anteriores.

2. Avanço: a progressão por entre os níveis depende mais do conteúdo e dos métodos de instrução recebidos pelo estudante do que propriamente da sua idade. Nenhum método de ensino possibilita que o estudante "pule" de níveis.

3. Intrínseco e extrínseco: os objetos inerentes a um nível tornam-se os objetos de ensino no nível seguinte. Por exemplo, no nível 0, a forma da figura geométrica é o que é percebido. A mesma figura possui características e propriedades, que serão analisadas apenas no nível 1.

4. Linguística: “Cada nível tem seus próprios símbolos linguísticos e seus próprios sistemas de relações que ligam esses símbolos” (VAN HIELE, 1984a, apud CROWLEY, 1994, p.5).

5. Combinação inadequada: se o estudante está em um certo nível e a aula em um nível diferente, o aprendizado e o progresso esperados podem não ocorrer, ou seja, o estudante não será capaz de acompanhar os processos de pensamento empregados em aula.

Os estudos de Santos (1998; 2001) indicam que, ao estudar conceitos geométricos, é comum que estudantes apresentem comportamentos relativos a dois níveis consecutivos, indicando a existência de níveis intermediários entres aqueles propostos por Pierre Van Hiele. Desta maneira, se faz necessário que esta pesquisa considere, em seu estudo de caso, a possível ocorrência destes estágios de transição.

Esta pesquisa utiliza a seguinte formulação para os níveis do pensamento geométrico:

Níveis de Van Hiele
0 – Visualização
Entre 0 e 1 - Intermediário
1 – Análise
Entre 1 e 2 – Intermediário
2 - Dedução informal
3 - Dedução Formal
4 – Rigor

Quadro 2: Níveis do pensamento geométrico utilizados pelo trabalho.

Visando promover o desenvolvimento dos estudantes pelos níveis do pensamento geométrico propostos por Van Hiele, fez-se uso da metodologia da Investigação Matemática em sala de aula durante as atividades propostas. Já os níveis de Van Hiele foram utilizados para categorizar os estudantes analisados por esta pesquisa de acordo com suas atitudes durante o processo investigativo no que diz respeito aos quadriláteros, triângulos e às Transformações Geométricas.

Na sequência, serão apresentados alguns trabalhos que discutem os níveis de Van Hiele ou a metodologia da Investigação Matemática.

3.3 Pesquisas que utilizam os níveis de Van Hiele ou Atividades Investigativas no ensino da geometria

Com o objetivo de qualificar metodologicamente e teoricamente o desenvolvimento do presente trabalho, foi necessário realizar uma pesquisa acerca do assunto Investigação Matemática e níveis de Van Hiele. Para tanto, foi realizada uma busca sobre o tema "Investigação Matemática e Níveis de Van Hiele". Primeiramente, foi feita uma procura por teses e dissertações que tratassem deste assunto. Como não foram encontrados resultados para esta busca, foi realizada uma nova procura, agora buscando teses ou dissertações que abordassem os assuntos "Investigação Matemática" e "Níveis de Van Hiele" de maneira separada.

Para estas últimas buscas, foram encontrados muitos trabalhos para os dois temas. Foram selecionadas aquelas pesquisas que tivessem sido desenvolvidas nas séries finais do Ensino Fundamental, que tratassem da aprendizagem de polígonos (preferencialmente quadriláteros e triângulos) ou que tivessem utilizado softwares de geometria.

Além disso, também se ampliou a busca por pesquisas acadêmicas em geral que abordassem o assunto específico "Investigação Matemática e Níveis de Van Hiele". Foram encontrados dois artigos acadêmicos que abordavam o tema.

Desta forma, foram estudados 9 trabalhos (7 dissertações e 2 artigos acadêmicos), sendo que um aborda o assunto "Investigação Matemática e níveis de Van Hiele", 3 abordam o estudo de triângulos ou quadriláteros conjuntamente com os níveis de Van Hiele, 2 abordam softwares de geometria e os níveis de Van Hiele, um aborda a Investigação Matemática e o software GeoGebra, um aborda a Investigação Matemática apenas e outro aborda os níveis de Van Hiele apenas. Os trabalhos estudados serão apresentados nesta seção.

3.3.1. Descrição das pesquisas encontradas

Cargnin, Guerra e Leivas (2016) utilizam os níveis de Van Hiele para analisar um trabalho que envolveu a metodologia da Investigação Matemática referente à classificação de figuras geométricas planas em uma turma do 5º ano do Ensino Fundamental.

Nesta pesquisa, os estudantes foram divididos em grupos e foram entregues as atividades, as quais estavam em uma sequência referente à Investigação Matemática. Os alunos tiveram que realizar uma análise das figuras e discutir com os colegas do grupo, para que então pudessem responder aos questionamentos da atividade.

Durante as atividades, foi solicitado aos estudantes que classificassem cada figura geométrica plana contida em um desenho composto somente por polígonos. Em seguida os alunos tiveram que classificar um grupo de polígonos, utilizando qualquer critério. Após, os alunos analisaram os triângulos, quadriláteros, pentágonos e hexágonos, a fim de verificar as características e propriedades de cada grupo de polígonos. Por fim, os estudantes classificaram diversos polígonos utilizando os seguintes critérios: ângulos, lados congruentes, paralelismo, entre outros. Foi possível observar progresso dos alunos por entre os níveis de Van Hiele em relação às figuras geométricas planas, já que os estudantes iniciaram no nível zero de Van Hiele, e, no desenvolvimento investigativo, alcançaram o nível 1 de Van Hiele.

Na pesquisa de Oliveira e Leivas (2017), os níveis de Van Hiele foram utilizados para analisar o processo de aprendizagem de poliedros e de suas características. Para esta pesquisa, os estudantes manipularam diferentes tipos de poliedros dentro de caixas, sem que conseguissem ver o sólido em questão. Sem utilizar a visão e utilizando somente o tato, alguns estudantes conseguiram construir uma visualização mental para a identificação de cada sólido, atingindo o nível 1 de Van Hiele (Visualização e Reconhecimento) para estes.

Soares (2014) utiliza os níveis de Van Hiele para analisar o trabalho desenvolvido com o quarto ciclo do Ensino Fundamental no estudo de triângulos e paralelogramos. Após verificar que seus alunos concluintes do Ensino Fundamental apresentavam concepções equivocadas sobre uma série de definições quanto aos triângulos e aos paralelogramos e que a maior parte dos estudantes atingia apenas os dois primeiros níveis na escala de Van Hiele, o autor desenvolveu a sua pesquisa utilizando construções com régua e compasso destas figuras geométricas. Segundo o autor, estas construções:

> servirão como ponte para aquisição do conhecimento necessário ao entendimento de tais relações, pois, o próprio aluno passará a se questionar sobre alguns aspectos das figuras construídas, desde que as atividades possam direcioná-lo a isto. (SOARES, 2014, p.79)

Após uma etapa de construções e de atividades que proporcionavam o questionamento sobre os tipos de paralelogramos e triângulos, além das Transformações Geométricas reflexão e rotação, o autor conseguiu perceber que a maior parte dos alunos acabou avançando para o terceiro nível de Van Hiele, e todos os estudantes saíram do primeiro nível acerca das definições estudadas durante as construções.

Santos (1998; 2001) apresenta estudos de caso sobre os níveis iniciais de Van Hiele em alunos dos anos finais do Ensino Fundamental no Colégio de Aplicação da UFPE, quanto aos quadriláteros. Em um dos estudos, foi utilizado o software de geometria dinâmica *Cabri Geomètre.*

Os resultados obtidos indicam que "embora possam se reconhecer a existência de tais níveis, a fronteira entre eles não se apresenta bem definida" (SANTOS, 1998, p.396). Além disso, o autor conclui que, geralmente, os estudantes não trabalham em um nível único do pensamento geométrico, apresentando consideráveis estágios de transição (SANTOS, 2001). Isto significa que, segundo o autor, é possível que o estudante opere em dois níveis de Van Hiele ao mesmo tempo, apresentando características relativas a níveis consecutivos distintos.

Costa (2016) desenvolve o seu trabalho sobre quadriláteros com uma turma de sexto ano do Ensino Fundamental, fazendo uso do software de geometria dinâmica GeoGebra. Em seu trabalho, o autor utiliza a teoria de Van Hiele para verificar em quais níveis de pensamento os alunos se encontravam, no que se refere às propriedades dos quadriláteros. Para isso, dividiu o desenvolvimento do trabalho em três etapas: a primeira consistia em uma familiarização dos estudantes com o GeoGebra e com algumas propriedades básicas, como paralelismo, perpendicularismo, etc.; a segunda etapa consistiu em um estudo das propriedades de ângulos e circunferências; e a terceira fase consistiu na construção dos quadriláteros. Por fim, o pesquisador percebeu avanço dos estudantes por entre os níveis de Van Hiele de pensamento, e que alguns estudantes apresentavam ao mesmo tempo, comportamentos relativos a dois níveis, sugerindo a existência de níveis de transição entre os níveis de Van Hiele.

A dissertação de Martins (2012) tem como proposta de trabalho a argumentação geométrica dedutiva no Ensino Médio, com o uso de recursos digitais, visando o ensino de transformações geométricas de translação, ampliação, reflexão e rotação. Para avaliar o processo de aprendizagem, o autor analisa os níveis de Van Hiele dos estudantes sob a luz da teoria de Duval, relacionando cada nível com a teoria das representações semióticas.

Costa (2005) realiza um trabalho com alunos do 4º ano do 1º ciclo, que relaciona os níveis de Van Hiele às Transformações Geométricas, através da codificação proposta por Lewellen (1992, apud COSTA, 2005), com a extensão para os níveis de movimentos elementares desenvolvida por Clements e Batista (1992, apud COSTA, 2005).

A dissertação de Pinto (2011) mostra uma análise dos níveis de pensamento geométrico de alunos do sexto ano do Ensino Fundamental no que se refere ao estudo de isometrias. A autora também fez uso da codificação proposta por Lewellen (1992, apud PINTO, 2011).

Nagata (2016) analisou o desenvolvimento do pensamento geométrico sob a perspectiva de Van Hiele de estudantes de anos finais do Ensino Fundamental, em uma escola pública do município de Curitiba. Fazendo uso do conteúdo de polígonos para o desenvolvimento deste trabalho, a autora baseou-se na abordagem utilizada pelos livros didáticos participantes do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2014, para desenvolver as questões do instrumento de pesquisa.

Rodrigues (2015) realizou uma intervenção pedagógica com estudantes do 8º ano, baseando-se, primeiramente, em testes para a verificação dos níveis de pensamento geométrico de Van Hiele, para os quais estes estudantes se encontravam. As atividades presentes na intervenção pedagógica realizada foram elaboradas de acordo com estes testes iniciais, respeitando os níveis de pensamento em que os alunos estavam e focaram na utilização de materiais pedagógicos manipuláveis. Além disso, esta intervenção pedagógica buscou respeitar as fases de aprendizagem trazidas pela teoria de Van Hiele. Posteriormente, a autora reaplicou os testes e verificou avanço dos estudantes pelos níveis de pensamento geométrico de Van Hiele.

O estudo conduzido por Barbosa (2002) desenvolve um trabalho acerca de circunferências, polígonos e rotações com uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental, utilizando o ambiente computacional *The Geometer's Sketchpad*. Foi utilizado o teste de Geometria de Van Hiele para verificar em que níveis do pensamento geométrico os alunos se encontravam quanto aos conceitos relacionados à circunferência, polígono e rotação, antes e após a intervenção pedagógica. Segundo Barbosa, o recurso computacional torna a aprendizagem mais atrativa e significativa para o estudante, uma vez que este tipo de programa contribui para que a aprendizagem seja mais acessível e intuitiva, servindo como ferramenta poderosa nas atividades de exploração, investigação e descoberta sobre geometria. Ainda, segundo a autora: "A utilização de computadores, em particular os programas de geometria dinâmica, trouxe outras possibilidades ao ensino da geometria, uma vez que facilitam a formulação de testes e conjecturas" (BARBOSA, 2002, p.1). A autora conclui que, através do ambiente computacional, foi possível desenvolver um trabalho incluindo argumentação e demonstrações mesmo com estudantes que se encontravam no nível 1 do pensamento geométrico de Van Hiele.

Brönstrup (2007) apresenta a Investigação Matemática em sala de aula como uma possibilidade para além da memorização e da aplicação de algoritmos e regras. Segundo a autora, tradicionalmente, o ensino da Matemática está fortemente relacionado ideia da Matemática mecanizada, o que não potencializa o processo de aprendizagem. (BRÖNSTRUP, 2007). Nesta perspectiva, a investigação se apresenta como uma alternativa a esta mecanização, uma vez que oportuniza a observação e identificação da tarefa, além de promover a criação de significados, a criação de conjecturas, a testagem e a argumentação.

Carneiro (2013) apresenta um trabalho desenvolvido sobre atividades investigativas utilizando o software de geometria dinâmica GeoGebra, durante um curso de extensão ministrado pela própria autora, o qual foi oferecido a professores de Matemática da rede estadual de ensino da Bahia.

Durante o curso, os docentes apresentavam aos colegas atividades de investigação utilizando o GeoGebra, aplicadas em suas salas de aula, cada uma envolvendo um conteúdo diferente. Esta apresentação era acompanhada de uma discussão posterior, tendo como embasamento teórico a teoria de Investigação Matemática, visando ao aprimoramento das atividades. Este trabalho realiza uma análise do processo de elaboração e do processo de aprimoramento coletivo, sob o ponto de vista da Investigação Matemática.

Segundo a autora, a criação de atividades contendo situações desafiadoras, como as que levam a algum tipo de investigação, desenvolve competências como a criatividade e a imaginação, despertando a curiosidade em investigar o que está sendo estudado. Caso os professores não apresentem um ambiente que motive descobertas, no qual os estudantes não consigam se expressar e contribuir com as suas opiniões, pode estar-se colaborando para a depreciação destas competências dentro do espaço escolar (NAKANO, 2011, apud CARNEIRO, 2013).

Quanto aos softwares de geometria dinâmica, a autora ressalta que estes contribuem para o processo de aprendizagem, já que o aluno pode participar ativamente da construção do conhecimento. Além disso, este software facilita a visualização e a movimentação de imagens, contribuindo com a construção do conhecimento dos conceitos geométricos (CARNEIRO, 2013).

A autora conclui que os docentes fizeram uso do GeoGebra com facilidade e que este software pode ser um forte aliado no ensino de Matemática, pois permite a construção de figuras geométricas e o destaque no processo de visualização (CARNEIRO, 2013).

A seguir, um resumo dos trabalhos relatados nesta seção.

Autores	Assunto	Teoria utilizada
Cargnin, Guerra, e Leivas, 2016	Investigação Matemática de polígonos	Utiliza os níveis de Van Hiele para analisar um trabalho que envolveu a metodologia da Investigação Matemática referente à classificação de figuras geométricas planas, em uma turma do 5º ano do Ensino Fundamental.
Oliveira e Leivas, 2017	Estudo de poliedros	Faz o uso da teoria de Van Hiele para medir o nível de aprendizagem de poliedros, atingidos por alunos do 5º ano do Ensino Fundamental, sem a utilizar a visão, somente através do tato.
Soares, 2014	Construções geométricas de triângulos e paralelogramos no quarto ciclo do Ensino Fundamental	Faz uso da teoria de Van Hiele para verificar a evolução dos estudantes pelos níveis de pensamento, acerca das propriedades dos triângulos e dos paralelogramos.
Costa, 2016	Construções geométricas de quadriláteros no GeoGebra no sexto ano	Faz uso da teoria de Van Hiele para verificar a evolução dos alunos por entre os níveis acerca dos conceitos envolvidos no estudo de quadriláteros.

Costa, 2005	Transformações Geométricas e Van Hiele	Realiza um trabalho com alunos do 4º ano do 1º ciclo, que relaciona os níveis de Van Hiele às Transformações Geométricas, através da codificação proposta por Lewellen (1992, apud COSTA, 2005), com a extensão para os níveis de movimentos elementares desenvolvida por Clements e Batista (1992, apud COSTA, 2005).
Pinto, 2011	Transformações Geométricas e Van Hiele	Mostra uma análise dos níveis de pensamento geométrico de alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, no que se refere ao estudo de isometrias, fazendo uso da codificação proposta por Lewellen (1992, apud PINTO, 2011).
Nagata, 2016	Quadriláteros	Faz uso da teoria de Van Hiele para construir um instrumento de pesquisa, que objetiva investigar em quais níveis do pensamento geométrico se encontrava um determinado grupo de alunos, quanto ao conteúdo de polígonos.
Rodrigues, 2015	Estudo de triângulos	Utiliza a Teoria de Van Hiele para analisar em que níveis do pensamento geométrico se encontram estudantes do 8º ano antes e, depois, uma intervenção pedagógica, baseada nos conceitos relacionados ao estudo de triângulos.
Barbosa, 2002	Estudo de circunferências, polígonos e rotações, utilizando o recurso computacional The Geometer's Sketchpad	A Teoria de Van Hiele é utilizada para analisar em quais níveis de pensamento geométricos os estudantes observados se encontram, quanto aos conceitos relacionados ao estudo de circunferências, polígonos e rotações. Utiliza o computador e a geometria dinâmica como um recurso didático para o ensino de geometria.
Carneiro, 2013	Atividades investigativas com o GeoGebra	Investiga como um grupo de professores realizou o planejamento e o desenvolvimento de estratégias de Investigação Matemática em sala de aula, utilizando como recurso didático o software de geometria dinâmica GeoGebra.
Brönstrup, 2007	Atividades investigativas	Realiza uma discussão acerca do processo investigativo sob o ponto de vista teórico, analisando de que forma este processo ocorre em sala de aula, verificando relações entre teoria e prática.

Quadro 3: Trabalhos que utilizam a Investigação Matemática ou os níveis de Van Hiele.

Após apresentar pesquisas que utilizaram os níveis de Van Hiele ou a Investigação Matemática no ensino da geometria, no capítulo seguinte, esta pesquisa discutirá acerca do uso de Tecnologias da Informação e Comunicação no ambiente de sala de aula.

4 TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO E A SALA DE AULA

A presente pesquisa desenvolve-se sob a perspectiva de que as TIC fornecem recursos com potencial para o processo de aprendizagem em geometria. Sendo assim, fez-se necessário apresentar perspectivas de uso de TIC em sala de aula, a partir da visão da autora da dissertação, apoiada em pesquisadores da área. Primeiramente, será abordada a questão do uso de TIC em sala de aula, e, posteriormente, serão tratados os aspectos relativos ao uso do computador, dando ênfase aos programas de geometria dinâmica e ao GeoGebra.

Nos últimos anos, as TIC se colocaram no nosso cotidiano, instaurando-se em nossas vidas através de smartphones, tablets, computadores, videogames, softwares, aplicativos, etc. Esta inserção também se reflete no âmbito escolar:

> se [...] a sociedade vivencia mudanças significativas na organização geral da vida cotidiana, a escola não pode estar à margem desse processo evolutivo. Para refletir sobre esse desafio, é conveniente constatar que o contexto social mais amplo, no qual a escola se insere, está pulverizado por inovações tecnológicas, emergentes da sociedade da informação, descrevendo novas competências, sem o domínio das quais é praticamente impossível a conquista da cidadania. (PAIS, 2008, p.14)

A inclusão das tecnologias no cotidiano atual mudou o ritmo de vida das pessoas, já que grande parte das ações de comunicação e informação ficou mais rápida se comparado a estas mesmas ações durante a década de 50, por exemplo. A rotina escolar deveria também acompanhar este ritmo de inclusão das TIC, já que estas podem modificar as maneiras de pensar, aprender e produzir (GRAVINA; BASSO, 2012). Deste modo, torna-se pertinente discutir de que formas estas tecnologias podem ser utilizadas em uma sala de aula, em específico na disciplina de Matemática, de modo a potencializar o processo de ensino e de aprendizagem.

O advento das TIC proporciona a disponibilidade de uma quantidade excessiva de informações, que podem ser acessadas em tempo real, por qualquer usuário conectado. De acordo com Pais (2008), isto pode ser benéfico, já que aumenta a lista de meios com o potencial de se tornarem conhecimento para o indivíduo; mas também pode se tornar um desafio para o processo de aprendizagem, uma vez que, para que estas informações possam propiciar a produção de conhecimento, é necessário que o sujeito saiba pesquisá-las, associálas e aplicá-las às situações de interesse. O autor enfatiza que, neste sentido, aumentará a exigência das competências de autonomia e de independência na busca do conhecimento.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para as séries finais do Ensino Fundamental da disciplina de Matemática destacam que o computador pode ser um aliado em um trabalho em sala de aula, já que contempla os ritmos de trabalho de todos os estudantes, e que possibilita que este possa aprender com os seus erros (BRASIL, 1998).

A tecnologia trazida pelo uso do computador em sala de aula durante a disciplina de Matemática é uma recomendação dos PCN. Segundo este documento (BRASIL, 1998), o computador pode ser utilizado nas aulas de Matemática com as seguintes finalidades:

- Como fonte de informação e como recurso para alimentar o processo de aprendizagem;
- Como auxiliar no processo de construção de conhecimento;
- Como meio para desenvolver a autonomia, através do uso de softwares que possibilitem pensar, refletir e criar soluções;
- Como ferramenta para realizar determinadas atividades;
- Para possibilitar o uso de planilhas eletrônicas, processadores de texto, banco de dados, etc.

O documento também ressalta o quanto a disciplina de Matemática é responsável por uma educação tecnológica em sala de aula, oferecendo assim a oportunidade do contato com a TIC, juntamente com a aprendizagem de conteúdo, relacionando tecnologia e práticas sociais:

> é esperado que nas aulas de Matemática se possa oferecer uma educação tecnológica, que não signifique apenas uma formação especializada, mas, antes, uma sensibilização para o conhecimento dos recursos da tecnologia, pela aprendizagem de alguns conteúdos, sobre sua estrutura, funcionamento e linguagem e pelo reconhecimento das diferentes aplicações da informática, em particular nas situações de aprendizagem, e valorização da forma como ela vem sendo incorporada nas práticas sociais. (BRASIL, 1997, p.46)

Já a BNCC (BRASIL, 2016) orienta como as TIC podem ser utilizadas na disciplina de Matemática:

- Para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, de forma a validar estratégias e resultados;
- Através da utilização de mapas em tablets ou smartphones, como suporte para a estimativa de distâncias;
- Pelo uso de softwares de geometria dinâmica para a representação de figuras planas e o estudo de simetrias;
- Através do uso de calculadoras, para avaliação e comparação de resultados;
- Pela utilização de planilhas eletrônicas, para a construção de gráficos e para cálculos de medidas estatísticas;
- Promover o uso do computador como meio de acesso a informações para pesquisas estatísticas;
- Através do estudo de algoritmos e fluxogramas.

Apesar de toda a importância das TIC destacadas, o trabalho realizado nas escolas ainda não utiliza todo o potencial para desenvolver o processo de aprendizagem dos estudantes. De acordo com Garcia (2012), apesar de muitas instituições escolares já estarem equipadas com laboratórios de informática conectados à *web*, ainda se percebe uma subutilização de tais tecnologias nestes ambientes. De acordo com a visão da autora, o trabalho com alunos fica mais voltado a uma formação mais geral, constituída por noções de informática, edição de texto e desenho e navegação na *web*. (GARCIA, 2012)

Na disciplina de Matemática, frequentemente observa-se uma transposição da sala de aula para o ambiente informatizado, reproduzindo o que é feito com o giz e quadro negro através do aparato tecnológico (GARCIA, 2012). Pais (2008) alerta que a disponibilidade física dos recursos tecnológicos no meio escolar, por si só, não traz garantias de transformações significativas na educação. A ação docente tem papel fundamental neste processo. O autor ressalta que a ideia de que a inserção do computador no ambiente escolar seja suficiente para causar transformações qualitativas na prática pedagógica tem origem no movimento tecnicista, o qual trouxe uma ideia equivocada de que a técnica por si só é capaz de provocar mudanças significativas na educação.

A maneira como o professor vai conduzir um trabalho utilizando TIC em sala de aula deve ser considerada como parte essencial do desenvolvimento deste trabalho. Um software pode vir a possibilitar uma aprendizagem mais significativa, desde que ocorra uma intensificação da interatividade entre o usuário e o universo de informações nele contido, fugindo da mera reprodução de páginas de um livro didático (PAIS, 2008).

Esta interação proposta por Pais (2008) está em concordância com a visão de Neto (2007), o qual defende que o papel das TIC deve potencializar a aprendizagem e não apenas servir como apoio ao ensino baseado no giz e quadro negro. Segundo o autor, o papel do professor é essencial para a promoção deste desenvolvimento:

> não adianta virtualizar o ensino tradicional. A tecnologia como apoio ao ensino é limitada e até desnecessária. O que se pretende é que a tecnologia seja usada como uma ferramenta para a aprendizagem. A postura pedagógica do professor define qual utilização será feita. (NETO, 2007, p.110)

A fim de que se possa desenvolver um trabalho no qual as TIC sejam utilizadas como recursos de aprendizagem, é necessário que o conhecimento técnico e o conhecimento didático sejam duas premissas exigidas ao professor durante o uso de um software em sala de aula. O docente deve conhecer o programa em suas especificidades técnicas, de modo a conseguir manuseá-lo. Além disso, o docente deve perceber as potencialidades pedagógicas para desenvolver e potencializar o processo de aprendizagem de Matemática (BAIRRAL, 2010).

Além de conhecimento técnico e didático, é preciso que o professor tenha um olhar crítico quanto às TIC disponíveis para a sala de aula, de modo a avaliar a forma mais adequada para o seu uso. Sendo assim:

> o professor precisa [...] ter acesso e conhecer quais são as opções tecnológicas disponíveis na sociedade, não para aceitá-las sem questionamento no seu cotidiano, mas para com criticidade decidir a melhor forma de utilizá-las em benefício da aprendizagem dos seus alunos [...]. (NETO, 2007, p.112).

Sendo assim, torna-se pertinente discutir as opções de TIC que podem auxiliar e potencializar o processo de aprendizagem em sala de aula. Em razão de a presente pesquisa fazer uso do software GeoGebra como um recurso de aprendizagem de geometria, na seção seguinte será discutido o uso deste software no ambiente escolar, enfatizando a geometria dinâmica.

4.1 O Uso do Computador em Sala de Aula e o software GeoGebra

O computador é uma das TIC que se apresenta de maneira frequente nos ambientes da escola básica. Na disciplina de Matemática, experiências de inserção do computador no processo de aprendizagem podem permitir que o professor deixe de ser o centro desse processo, como figura que detém o conhecimento. No processo de aprendizagem, utilizando o computador tem-se a possibilidade se de se desenvolver experiências com centro no aluno, alternando as tarefas e reponsabilidades tanto do professor como do estudante (FIOREZE, 2010).

O sucesso do uso do computador no ambiente de sala de aula está fortemente ligado à ideia de interatividade. Essa está ligada à ideia de interação do usuário da tecnologia com uma série de informações que são fornecidas pelo suporte tecnológico (PAIS, 2008).

De acordo com o autor, quanto mais interativa for a relação entre o aluno usuário do computador e as informações contidas no software que está sendo utilizado, maiores serão as possibilidades de se produzir saberes (PAIS, 2008). O autor também ressalta que, desta maneira, existe “a possibilidade do saber aprendido tornar-se mais significativo, na medida em que aumenta as chances de interação entre o usuário com a dinâmica estrutural do programa” (PAIS, 2008, p. 144).

É importante destacar a função da simulação em um ambiente computacional como recurso para o processo de aprendizagem. De acordo com Pais (2008), a simulação é um momento em que o sujeito tem a possibilidade de perceber e de manipular parâmetros, de forma a reconhecer casos particulares, contribuindo, assim, para a generalização e para a abstração de um conceito específico.

O uso do computador pode servir como um aliado ao desenvolvimento cognitivo dos estudantes, pois, dependendo de como é utilizado, pode instigar o estudante a pensar e a buscar soluções para as atividades propostas pelo professor (FIOREZE, 2010).

A facilidade de manipulação trazida pelo computador permite que o estudante possa visualizar uma multiplicidade de situações que podem servir como auxiliares à formação dos conceitos envolvidos. É possível perceber que o processo de aprendizagem de um conceito pode se tornar mais significativo na medida em que o estudante consegue reconhecer este conceito nas mais variadas situações (PAIS, 2008).

O autor enfatiza que, no caso da educação Matemática, a simulação pode contribuir para o desenvolvimento do senso de generalidade:

> no caso da educação Matemática, [...], em que se valoriza situações envolvendo provas e demonstrações de teoremas, mesmo que a simulação não seja um conhecimento adequado à formalização desse tipo de argumentação, ela desenvolve o senso intuitivo e prepara o espírito do aluno para a apropriação de níveis mais amplos de generalidade. (PAIS, 2008, p.152)

Desta maneira, através de simulações realizadas no computador, o estudante poderá atingir níveis de generalização de conceitos, o que é algo muito presente no raciocínio matemático.

4.1.1 O software de geometria dinâmica GeoGebra

Os programas computacionais que permitem a movimentação de figuras e conceitos geométricos, ou seja, os softwares de Geometria Dinâmica são os que possibilitam a visualização de conceitos geométricos além daquela configuração estática trazida pelos livros, baseada em um único ponto de vista. Tais softwares promovem a visualização através das mais variadas perspectivas, possibilitando uma diversidade de situações que contribuem para uma melhor compreensão dos saberes estudados, até mesmo para o caso dos saberes que só podem ser estudados de maneira estática (PAIS, 2008).

Tais programas têm por objetivo trazer movimento para as construções geométricas de forma que seja possível observar padrões e regularidades dentro destas construções, que poderiam ser imperceptíveis quando visualizados em um desenho estático das mesmas. Sendo assim, os softwares e aplicativos que envolvem geometria dinâmica podem ser considerados como elementos de grande importância para a sala de aula (GRAVINA, 1996).

O GeoGebra é um destes programas de Geometria Dinâmica, e o mesmo foi utilizado durante a realização das atividades envolvidas nesta pesquisa. De acordo com a página oficial do programa, ele é um software de Matemática dinâmica voltado para todos os níveis de ensino que reúne geometria, álgebra, planilhas de cálculo, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único e simples pacote. Ainda, segundo as informações do site[2], o GeoGebra possui uma comunidade de milhões de usuários em praticamente todos os países do mundo, já que possui versões em diversos idiomas. Além disso, é um software de código aberto e se tornou líder na área de softwares de Matemática dinâmica, podendo ser utilizado na promoção do ensino e da aprendizagem em ciências, tecnologias, engenharia e Matemática.

O programa é composto por botões que podem colocar desde um único ponto na tela, passando pela construção de retas e polígonos regulares, até de curvas cônicas, por exemplo. Além disso, o software possui ferramentas de medida e de Transformações Geométricas. O usuário pode movimentar a construção realizada da maneira que lhe for mais conveniente, possibilitando a visualização de uma variedade de casos particulares.

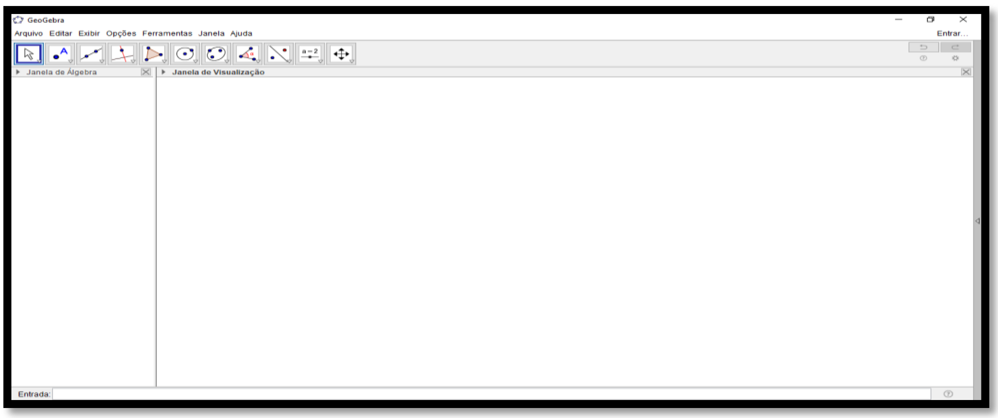


Figura 1: Tela do software GeoGebra.

Segundo a Wikipedia[3], o GeoGebra foi criado por Markus Hohenwarter, para ser utilizado em ambiente de sala de aula. O projeto foi iniciado em 2001, na Universitat Salzburg, e tem prosseguido em desenvolvimento na Florida Atlantic

---

[2] https://www.geogebra.org

[3] https://pt.wikipedia.org/wiki/GeoGebra

University. Desde então, o software já foi premiado algumas vezes em eventos que discutem softwares e educação, tais como o Prêmio Austríaco de Software Educacional (Learnie Award), o Prêmio Internacional de Software Livre na categoria Educação (Trophées du Libre) e o Prêmio de Mídia Educacional Alemão (Comenius 2004). Além disso, nos últimos anos, um grande número de trabalhos acadêmicos utilizou o GeoGebra como recurso didático. Somente no Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior[4], (CAPES), estão disponibilizados mais de 700 trabalhos de nível acadêmico que utilizam o GeoGebra como um dos assuntos.

O GeoGebra contém um banco de dados de arquivos construídos por diversas pessoas ao redor do planeta, utilizando seus recursos do GeoGebra, chamado GeoGebraTube. Esse banco de construções pode ser acessado por qualquer usuário conectado à internet. Como este banco de dados aceita exclusivamente arquivos GeoGebra, seus administradores criaram um outro ambiente no qual, além de fazer o upload de arquivos do GeoGebra, também é possível incluir textos e vídeos: o GeoGebraBook (STAHL et al., 2014).

De acordo com Hohenwarter (2014), o GeoGebra é uma ferramenta cognitiva no sentido de que só pode ser utilizada de forma eficaz na sala de aula, quando os alunos e professores têm pelo menos alguns conhecimentos sobre a manipulação do software, tais como o uso das ferramentas geométricas disponíveis. Ainda, segundo o autor, o uso dos applets disponíveis no GeoGebraTube podem ser úteis, pois para manipulá-los o usuário não necessita ter um alto grau de conhecimentos sobre as ferramentas geométricas do GeoGebra.

Ao utilizar o GeoGebra, o estudante tem a oportunidade de pensar sobre as ações que está realizando tanto quanto ao objeto que está sendo construído, como quanto aos movimentos que está realizando. Isto permite "o estabelecimento de uma relação entre os dados de observação e a ação do aluno e, nesse processo de idas e vindas, o aluno vai aumentando o grau de compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos no problema" (NOTARE; BASSO, 2012, p.6).

Ressaltado o potencial benéfico para o processo de aprendizagem de Matemática trazido por um trabalho realizado com o GeoGebra, nesta pesquisa, tal software foi utilizado pelos estudantes para a construção de quadriláteros e

[4] http://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/

triângulos. No capítulo seguinte, serão apresentados a caracterização da pesquisa e os procedimentos metodológicos adotados durante o desenvolvimento deste trabalho.

5 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo serão apresentados os aspectos metodológicos relativos a este trabalho: os questionamentos que nortearam a pesquisa, assim como a sua caracterização e os procedimentos metodológicos adotados.

5.1 Caracterização da Pesquisa e Procedimentos Metodológicos

Este trabalho objetivou analisar o processo de aprendizagem de quadriláteros, triângulos e transformações geométricas sob a perspectiva da Investigação Matemática, juntamente com o uso de TIC. Analisou-se as produções dos alunos de maneira individual, realizando a interpretação destas com o auxílio dos níveis de Van Hiele para o pensamento geométrico, atribuindo, assim, significado para as ações dos estudantes. Desta forma, a presente pesquisa se enquadrou como qualitativa, por ser caracterizada em**:** haver uma relação dinâmica entre o mundo do sujeito e o mundo real que não pode ser traduzida em números; o processo e seu significado serem básicos na abordagem; não utiliza métodos estatísticos; os dados obtidos são analisados indutivamente. A interpretação dos fenômenos e a atribuição de significados são consideradas procedimentos básicos no processo de pesquisa qualitativa (SILVA; MENEZES, 2001).

Sobre a pesquisa qualitativa, Bicudo (2012) cita que este é um tipo de pesquisa onde “trabalha-se com a qualidade”, ou seja, “a qualidade é do objeto e passível de ser observada” (BICUDO, 2012, p.17). Segundo a autora, na pesquisa qualitativa, realiza-se uma observação do sujeito para verificar os seus comportamentos, de modo que se possa interpretar estes dados, sob a perspectiva de uma teoria que esteja relacionada com o que se está pesquisando.

Este trabalho se desenvolveu em uma escola pertencente à rede municipal de ensino de Porto Alegre, situada na periferia da cidade, em uma turma de sexto ano do Ensino Fundamental. O período compreendido pela pesquisa foi de 11 de outubro de 2016 a 15 de dezembro de 2016, no decorrer dos períodos da disciplina de Matemática.

A turma na qual o trabalho se desenvolveu era composta por 30 alunos (15 meninos e 15 meninas), da faixa etária de 11 a 13 anos de idade. Tais estudantes eram, em sua maioria, residentes de comunidades pertencentes à periferia da zona norte de Porto Alegre.

Os conceitos trabalhados com os alunos durante as aulas podem ser visualizados no quadro a seguir:

<table>
<tr><td rowspan="5">Quadriláteros</td><td>Quadrado</td></tr>
<tr><td>Retângulo</td></tr>
<tr><td>Paralelogramo</td></tr>
<tr><td>Losango</td></tr>
<tr><td>Trapézio</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Triângulos</td><td>Triângulo retângulo</td></tr>
<tr><td>Triângulo equilátero</td></tr>
<tr><td>Triângulo isósceles</td></tr>
<tr><td>Triângulo escaleno</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Transformações Geométricas</td><td>Translação</td></tr>
<tr><td>Reflexão vertical</td></tr>
<tr><td>Reflexão horizontal</td></tr>
<tr><td>Rotação de ½ volta</td></tr>
<tr><td>Rotação de ¼ de volta</td></tr>
</table>

Quadro 4: Conceitos geométricos desenvolvidos durante a pesquisa

Com o objetivo de se realizar uma análise aprofundada para os dados obtidos, foi necessário reduzir o grupo de alunos a serem analisados. Para isso, inicialmente avaliou-se razoável analisar os trabalhos de 10 alunos. Como critério de pesquisa, utilizou-se a maior frequência às aulas durante o período de desenvolvimento. Tal desenvolvimento foi dividido em 18 atividades, e a frequência dos 30 alunos da turma durante este período, conforme disposto no quadro a seguir:

Alunos participantes da pesquisa			
Alunos	Nº de atividades em que participou	Frequência (%)	
Aluno 1	18	100%	Alunos escolhidos para a análise de dados
Aluno 2	17	94%	
Aluno 3	17	94%	
Aluno 4	17	94%	
Aluno 5	17	94%	
Aluno 6	16	89%	
Aluno 7	16	89%	
Aluna 8	16	89%	
Aluno 9	16	89%	
Aluna 10	15	83%	
Aluna 11	15	83%	
Aluno 12	15	83%	
Aluno 13	14	78%	
Aluno 14	14	78%	
Aluno 15	14	78%	
Aluno 16	14	78%	
Aluno 17	14	78%	
Aluno 18	13	72%	
Aluno 19	13	72%	
Aluno 20	13	72%	
Aluno 21	12	67%	
Aluno 22	12	67%	
Aluno 23	12	67%	
Aluno 24	11	61%	
Aluno 25	10	56%	
Aluno 26	9	50%	
Aluno 27	8	44%	
Aluno 28	6	33%	
Aluno 29	5	28%	
Aluno 30	5	28%	

Quadro 5: Frequência dos alunos da turma escolhida para o desenvolvimento do trabalho.

Como é possível visualizar no quadro, se fossem escolhidos exatamente 10 alunos, os alunos 11 e 12 ficariam fora da análise, mesmo possuindo a mesma frequência que a aluna 10. Sendo assim, julgou-se razoável analisar os dados dos alunos 11 e 12 também. Desta forma, foram escolhidos para a análise dos dados os alunos de 1 a 12. Tais estudantes apresentaram as frequências maiores ou iguais a 83% (participação em 15 atividades ou mais).

Durante o desenvolvimento do trabalho, para fins de registro e coleta de dados, os alunos foram filmados por uma pequena câmera, que inicialmente foi colocada ao fundo da sala, e posteriormente, presa ao pescoço da professora que, assim, registrou os diálogos e os questionamentos dos estudantes quanto às atividades desenvolvidas.

Para responder aos questionamentos da pesquisa, foi elaborada uma sequência de atividades, criadas baseando-se na metodologia da Investigação Matemática de quadriláteros, de triângulos e de Transformações Geométricas. Esta sequência de atividades se encontra detalhada nos anexos deste trabalho.

As atividades propostas buscaram contemplar, para cada um dos conceitos descritos no Quadro 2, os momentos da Investigação Matemática propostos por Ponte, Brocardo e Oliveira (2005):

- 1º Introdução da tarefa.
- 2º Realização da investigação.
- 3º Discussão dos resultados.

Para iniciar o processo investigativo, a sequência de atividades teve um momento introdutório, o qual consistiu em uma apresentação da sombra de alguns objetos tridimensionais projetadas no chão da sala. Neste momento, os alunos foram questionados sobre alguns aspectos geométricos de tais sombras.

Posteriormente, ocorreu uma etapa de familiarização com o GeoGebra, na qual os estudantes tiveram a oportunidade de trabalhar com este software, realizando algumas atividades para conhecer as ferramentas contidas no mesmo.

Em seguida, os estudantes realizaram atividades referentes aos quadriláteros e triângulos, utilizando o GeoGebra. Através destas tarefas, os estudantes puderam realizar a investigação dos seguintes polígonos: quadrado, retângulo, paralelogramo, losango, trapézio, triângulo retângulo, triângulo isósceles, triângulo equilátero e triângulo escaleno.

Esta fase do trabalho foi composta por atividades que necessitavam do uso do computador (GeoGebra). O laboratório de informática da escola contava, neste período de desenvolvimento da pesquisa, com cerca de 14 computadores funcionando através do sistema Linux Educacional e com internet. O número de computadores disponíveis para o uso foi determinante para que, nas atividades desta etapa, os alunos trabalhassem em duplas ou em trios, sendo que a cada novo encontro estes pequenos grupos se modificavam, conforme a frequência dos estudantes e o grau de afinidade entre eles.

Nesta etapa, os estudantes fizeram uso de formulários online, disponibilizados via e-mail pelo Google Drive, nos quais estavam contidas as tarefas para a realização da investigação. Como a maior parte dos estudantes não possuía conta de e-mail, foi criada uma conta no Google pela professora pesquisadora, que teve senha e usuário compartilhados com os estudantes, de modo que os mesmos fizeram uso da mesma de maneira coletiva.

Estes formulários continham as orientações para as construções dos polígonos, assim como questionamentos pertinentes a cada construção. Para fins de esclarecimento, a seguir se apresenta a atividade relativa à investigação do retângulo.

A sua missão de hoje é descobrir as propriedades sobre esta figura já tão conhecida por você e seus colegas!
Para isso, vamos construir esta figura no programa Geogebra.

1) Abra o programa Geogebra e siga os seguintes passos a seguir:

a) Trace um segmento de reta AB e uma reta perpendicular passando por A.
b) Marque um ponto C qualquer sobre a reta e marque o segmento AC.
c) Construa uma reta paralela a AC passando por B.
d) Construa uma reta paralela a AB passando por C.
e) Marque o ponto D como o encontro entre estas duas retas.
f) Com a ferramenta polígono marque ABCD.
g) Esconda as retas.
h) Com a ferramenta ângulo meça todas as aberturas internas da figura.
i) Com a ferramenta medida, meça os lados dessa figura.
j) Movimente o ponto A. O que você pode dizer sobre as medidas de lado e de ângulo dessa figura?
k) Qual é a semelhança desta figura com o quadrado?
l) O quadrado poderia ser chamado de retângulo ou o retângulo poderia ser chamado de quadrado?

Quadro 6: atividade de investigação do retângulo.

Os estudantes registraram nos formulários online as suas respostas referentes aos questionamentos contidos em cada atividade. Além disso, com o objetivo de promover uma reflexão acerca dos conceitos estudados nesta etapa, os estudantes realizaram o preenchimento de uma tabela com as características dos quadriláteros e dos triângulos. Para este preenchimento, os estudantes fizeram uso das construções feitas no GeoGebra, de modo a consolidar a aprendizagem das características dos polígonos investigados.

Nome do polígono	Rascunho do polígono	Número de lados	Características dos ângulos	Número de vértices (pontas)	Características do polígono
Quadrado					
Retângulo					
Paralelogramo					
Losango					
Trapézio					
Triângulo retângulo					
Triângulo equilátero					
Triângulo isósceles					
Triângulo escaleno					

Quadro 7: tabela oferecida aos alunos para o registro de descobertas sobre os polígonos.

Após este momento de construções com o GeoGebra, os estudantes realizaram atividades de investigação envolvendo as seguintes Transformações Geométricas: translação, reflexão e rotação. Para esta investigação, os estudantes trabalharam com atividades envolvendo tesselações (coberturas do plano). Para isso, fizeram o uso do applet *Design a Tessellation*[5], que é disponível de forma online e gratuita. Tais atividades se encontram na seção de Anexos.

Tal applet tem por objetivo cobrir o plano, baseando-se em uma unidade de tesselação com unidades quadradas, construída pelo usuário, que é reproduzida ao longo do plano, de acordo com cada Transformação Geométrica. Em tal site, é

[5] http://gwydir.demon.co.uk/jo/tess/tess.htm

possível que o usuário cubra o plano, utilizando diferentes tipos de Transformações Geométricas.

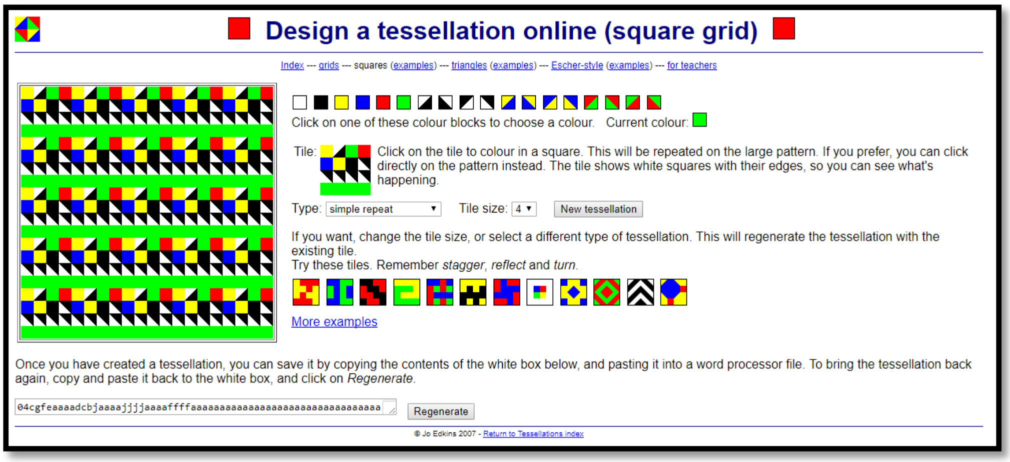


Figura 2: Layout do applet *Design a Tessellation.*

As atividades envolvendo tesselação foram desenvolvidas, primeiramente, no laboratório de informática, sendo que os estudantes também trabalharam em duplas ou em trios, e fizeram uso de formulários online enviados para a conta de e-mail coletiva. Os questionamentos relativos a cada atividade foram respondidos nos formulários online e os registros relativos à produção de tesselações foram feitos em folhas impressas com grade. Segue uma das atividades propostas.

1. No laboratório de informática acessar o link: http://gwydir.demon.co.uk/jo/tess/tess.htm
Em seguida, na malha 4x4 indicada abaixo, crie uma unidade para pavimentar o plano à esquerda. Esta unidade deverá ter no mínimo 4 cores diferentes.

a) Observe e descreva com suas palavras o que ocorre com a sua cobertura do plano em cada uma das opções.

- Simple Repeat (Repetição Simples - translação):
- Staggered (Translação diferente):
- Reflected Vertically(Reflexão vertical):
- Reflected Horizontally(Reflexão Horizontal):
- ½ turn (Rotação de meia volta):
- ¼ turn (Rotação de um quarto de volta):

b) Clique em More Examples (Mais exemplos). Escolha pelo menos três pavimentações para reproduzir com o programa. Em seguida reproduza abaixo a unidade de pavimentação original utilizada e qual tipo de movimentação (transformação) foi utilizada (simple repeat, staggered, reflected vertically, reflected horizontally, ½ turn, ¼ turn). Utilize lápis de cor para essa reprodução. (Folha impressa)

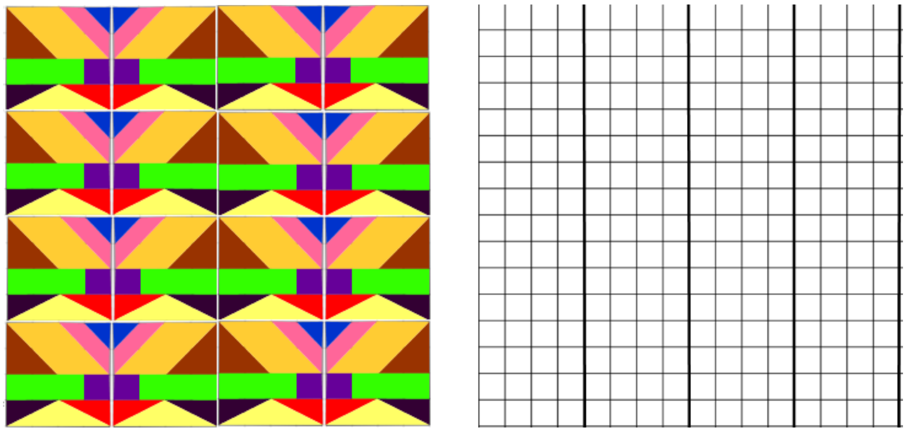
Unidade utilizada	Movimentação/Transformação utilizada

Quadro 8: Investigação das Transformações Geométricas.

Após o trabalho com o applet online, foi realizado um trabalho em sala de aula o qual consistiu em situações envolvendo Transformações Geométricas em um contexto tridimensional, momento em que os alunos foram observados quanto à expressão oral.

O trabalho seguinte envolveu a tesselação do plano utilizando colagem ou pintura com lápis de cor. Nesta atividade, os estudantes criaram unidades de tesselação e cobriram o plano de acordo com cada Transformação Geométrica. Para elucidar, observe a seguir uma parte da atividade proposta:

Preencha o plano abaixo considerando as linhas mais escuras como eixos de reflexão vertical. Exemplo:



Quadro 9: Cobertura do plano com pintura e colagem – reflexão vertical.

As respostas obtidas por cada um dos 12 alunos, tanto na produção escrita como nas falas, foram analisadas e categorizadas de acordo com os níveis de Van Hiele. Para isto, procedeu-se à análise dos níveis inicial e final de Van Hiele para cada conceito geométrico trabalhado durante a pesquisa. Estas informações foram organizadas em forma de tabela, conforme o modelo a seguir:

Alunos	Quadriláteros					Triângulos				Transformações geométricas				
	Quadrado	Retângulo	Paralelogramo	Losango	Trapézio	Triângulo Retângulo	Triângulo Equilátero	Triângulo Isósceles	Triângulo Escaleno	Translação	Reflexão vertical	Reflexão horizontal	Rotação de 1/2 volta	Rotação de 1/4 volta
1														
2														
3														
4														
5														
6														
7														
8														
9														
10														
11														
12														

Quadro 10: Planilha de classificação do aluno conforme o nível de pensamento geométrico.

Desta maneira, levando em conta que é possível classificar o nível do pensamento geométrico de um estudante através dos níveis de Van Hiele estudados por Kaleff (1994), Crowley (1994) e Nasser e Sant'anna (2010), juntamente com a interpretação complementar para as Transformações Geométricas (detalhadas por este trabalho), já discutida no capítulo 3, o presente trabalho buscou realizar um estudo de cunho qualitativo, no que se refere aos níveis de pensamento geométrico, atingidos por estudantes do sexto ano do Ensino Fundamental, através da abordagem da Investigação Matemática, para os quadriláteros, triângulos e Transformações Geométricas. Sendo assim, esta pesquisa buscou responder os seguintes questionamentos:

- **Considerando um trabalho que utiliza a Investigação Matemática, o software GeoGebra e o applet *Design a Tesselation*: que níveis do pensamento geométrico podem ser atingidos por uma turma de estudantes do sexto ano do Ensino Fundamental para os conceitos de quadriláteros, triângulos e de Transformações Geométricas?**

- **Que mudanças ocorreram quanto aos níveis do pensamento geométrico, considerando os estudantes de uma turma do sexto ano, em relação aos níveis no início do trabalho, no que diz respeito aos quadriláteros e triângulos e Transformações Geométricas?**

No capítulo que segue, será apresentada uma análise dos dados referentes a esta pesquisa, assim como os resultados obtidos.

6 ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo são descritos alguns dos resultados obtidos durante este estudo, a fim de que se possa identificar elementos importantes à pesquisa quanto ao processo de aprendizagem de triângulos, quadriláteros e de Transformações Geométricas em sala de aula. Para isso, foram utilizados os níveis de Van Hiele como aporte teórico.

6.1 Iniciando o trabalho

Como introdução à tarefa investigativa, conforme a perspectiva de Ponte, Brocardo e Oliveira (2005), esta pesquisa contou com um momento introdutório, que teve duração de uma hora-aula, que consistiu em um momento no qual os alunos foram dispostos em círculo, de maneira que todos enxergassem o centro da roda. Foram projetadas as sombras dos seguintes objetos: uma caixa em forma de prisma triangular, um chapéu em formato de cone, duas caixas em formato de prisma quadrangular e um cubo. Os estudantes foram questionados sobre quais eram os polígonos do contorno das regiões poligonais projetadas. Estavam presentes todos os 12 alunos do grupo analisado por esta pesquisa.

Após o momento introdutório, os estudantes foram conduzidos ao laboratório de informática, onde realizaram atividades no computador, trabalhando em duplas ou em trios (de acordo com a disponibilidade de máquinas em funcionamento), de forma a conhecer o funcionamento das ferramentas do software GeoGebra. Os alunos tiveram 3 horas-aula para conhecer o GeoGebra. Tais atividades estão descritas no Apêndice A.

No momento introdutório, através da observação das falas dos alunos, foi possível verificar os níveis iniciais de Van Hiele para o quadrado, para o retângulo, para o triângulo equilátero e para o triângulo isósceles.

Figura 3: Imagem do momento introdutório: Projeção de um quadrado no chão da sala de aula.

Ao projetar um dos prismas quadrangulares, os estudantes foram questionados quanto ao formato da caixa. Imediatamente o grande grupo disse que era um retângulo e um quadrado. Após, foram questionados se era mesmo um retângulo ou um quadrado. Disseram então que era quadrangular, triangular, triângulo, circulo, circular, losango, “losangular”, caixa e cubo.

De maneira geral, dos 12 alunos analisados, 6 não se manifestaram, dois falaram que era um cubo, 3 citaram como retângulo e um disse que era uma forma redonda ou losangular.

Que formato tem essa projeção?	
Aluno 1	Retangular. Quadrangular
Aluno 2	Cubo.
Aluno 3	Não se manifestou
Aluno 4	Não se manifestou
Aluno 5	Não é quadrado... É cubo.
Aluno 6	Retângulo
Aluno 7	Não se manifestou
Aluna 8	Não se manifestou
Aluno 9	Não se manifestou
Aluna 10	Retângulo
Aluna 11	Não se manifestou
Aluno 12	Losangular.

Quadro 11: respostas dos estudantes para o formato da caixa

Ao projetar o prisma no chão, a região poligonal projetada foi retangular (chamaremos aqui 1ª projeção retangular). Neste ponto, os estudantes da turma em geral, disseram que se tratava de uma folha ou da sombra da caixa. Posteriormente, depois de questionados sobre a forma geométrica do contorno da folha ou da projeção da caixa, disseram que se tratava de um retângulo. Dentre os 12 alunos, obteve-se que 5 não se manifestaram, 6 disseram que era um retângulo e 1 disse que se tratava da sombra de uma caixa.

Quando questionados sobre como sabiam que se tratava de uma região relacionada a um retângulo, o aluno 7 disse que era porque se tratava de “um quadrado espichado.” Os demais estudantes não se manifestaram, mas aparentemente, concordaram com a resposta da colega, ou não sabiam o que responder.

Ao virar a caixa, agora projetando uma região poligonal quadrada (chamaremos aqui de 1ª projeção quadrangular) no chão, de modo geral a turma toda chegou à conclusão de que se tratava de uma projeção relacionada ao quadrado. Entre os estudantes analisados, identifica-se que 6 não se manifestaram, e 6 disseram que se tratava de um quadrado.

Ao realizar a projeção do outro prisma quadrangular, projetou-se novamente uma sombra quadrangular (chamaremos esta de 2ª projeção quadrangular). De modo geral, os estudantes da turma disseram se tratar de uma projeção relacionada ao quadrado, já que a mesma possuía 4 lados. Quanto ao grupo analisado, as respostas foram: 8 disseram que se tratava de um quadrado e 4 não se manifestaram. Quanto ao motivo de ser quadrado, 11 justificaram que é porque ele tinha 4 lados.

Os estudantes, então, foram questionados quanto ao fato de o retângulo também ser um polígono que possui 4 lados. As respostas do grupo analisado foram: 7 não se manifestaram, 4 disseram que o quadrado tem 4 lados com medidas iguais e um disse que o retângulo é um quadrado alongado. A seguir, apresentam-se as respostas dos alunos para os questionamentos realizados durante este momento.

Respostas dos alunos durante o momento introdutório (Quadriláteros)					
	1ª Projeção retangular	1ª Projeção quadrangular	2ª Projeção quadrangular	Justificativa para o quadrado	Questionamento retângulo
Aluno 1	Retângulo.	Quadrado.	Quadrado.	Porque tem 4 lados.	Não se manifestou.
Aluno 2	Retângulo.	Não se manifestou.	Quadrado.	Porque tem 4 lados.	O retângulo é "espichado", o quadrado não.
Aluno 3	Retângulo.	Não se manifestou.	Não se manifestou.	Não se manifestou.	Não se manifestou.
Aluno 4	Não se manifestou.	Não se manifestou.	Não se manifestou.	Porque tem 4 lados.	Não se manifestou.
Aluno 5	Retângulo.	Não se manifestou.	Não se manifestou.	Porque tem 4 lados.	O quadrado tem 4 lados iguais.
Aluno 6	Não se manifestou.	Quadrado.	Quadrado.	Porque tem 4 lados.	Não se manifestou.
Aluno 7	Retângulo.	É um quadrado.	Quadrado.	Porque tem 4 lados.	O quadrado tem 4 lados de mesmo tamanho.
Aluna 8	Não se manifestou.	Quadrado.	Quadrado.	Porque tem 4 lados.	O retângulo não tem 4 lados iguais
Aluno 9	Não se manifestou.	Não se manifestou.	Quadrado.	Porque tem 4 lados.	Não se manifestou.
Aluna 10	A sombra da caixa.	Quadrado.	Quadrado.	Porque tem 4 lados.	O quadrado tem 4 lados de mesmo tamanho.
Aluna 11	Não se manifestou.	Não se manifestou.	Não se manifestou.	Porque tem 4 lados.	Não se manifestou.
Aluno 12	Retângulo.	Quadrado.	Quadrado.	Porque tem 4 lados.	Não se manifestou.

Quadro 12: respostas dos estudantes para os questionamentos durante o momento introdutório.

Analisando-se as falas dos alunos quanto a cada questionamento, no que se refere ao quadrado e ao retângulo, é possível perceber o nível de Van Hiele inicial, de cada estudante, para estes polígonos.

- Aparentemente, com exceção do aluno 3, todos os alunos analisados parecem perceber o que é um quadrado, e além disso, já iniciam a caracterização do mesmo de acordo com o número de lados, o que indica o nível 1 de Van Hiele para este polígono. Não há subsídios para classificar o nível de Van Hiele do aluno 3 para o quadrado.

- Alunos 2, 7 e 8: O retângulo é visto através de uma comparação com o quadrado (quadrado espichado ou o retângulo não possui todas as medidas de lados iguais), no entanto a inclusão de classes entre quadrado e retângulo ainda não é percebida, o que indica um nível intermediário, entre os níveis 1 e 2 de Van Hiele para este polígono.

- Alunos 1, 3, 5 e aluno 12: O retângulo é aparentemente classificado pelos estudantes de maneira global, apontando para o nível 0 para esta figura geométrica.

- Não há subsídios para classificar o nível de Van Hiele dos alunos 4, 6, 9, 10 e 11 para o retângulo.

Ao projetar as sombras do prisma triangular, de maneira geral os alunos identificaram corretamente a região retangular. Dos 12 estudantes, 10 constataram que esta região era relacionada a um retângulo e apenas 2 não se manifestaram.

Ao projetar a sombra da base triangular, que correspondia a uma região descrita por um triângulo equilátero, 9 alunos relacionaram ao triângulo apenas, sem especificar mais nenhuma informação, e 3 estudantes não se manifestaram. Quando se projetou a sombra de um chapéu em formato de cone, a sombra obtida era de uma região descrita por um triângulo isósceles, os estudantes foram questionados quanto ao tipo de polígono que descrevia o contorno. Do grupo analisado, 9 estudantes disseram se tratar de um triângulo apenas, sem especificar o tipo, e 3 alunos não se manifestaram. Isto indica que para os estudantes, tanto para o triângulo equilátero, como para o triângulo isósceles, a classificação global destes polígonos como triângulos foi suficiente. Este fato aponta para o nível 0 tanto para o triângulo equilátero quanto para o triângulo isósceles.

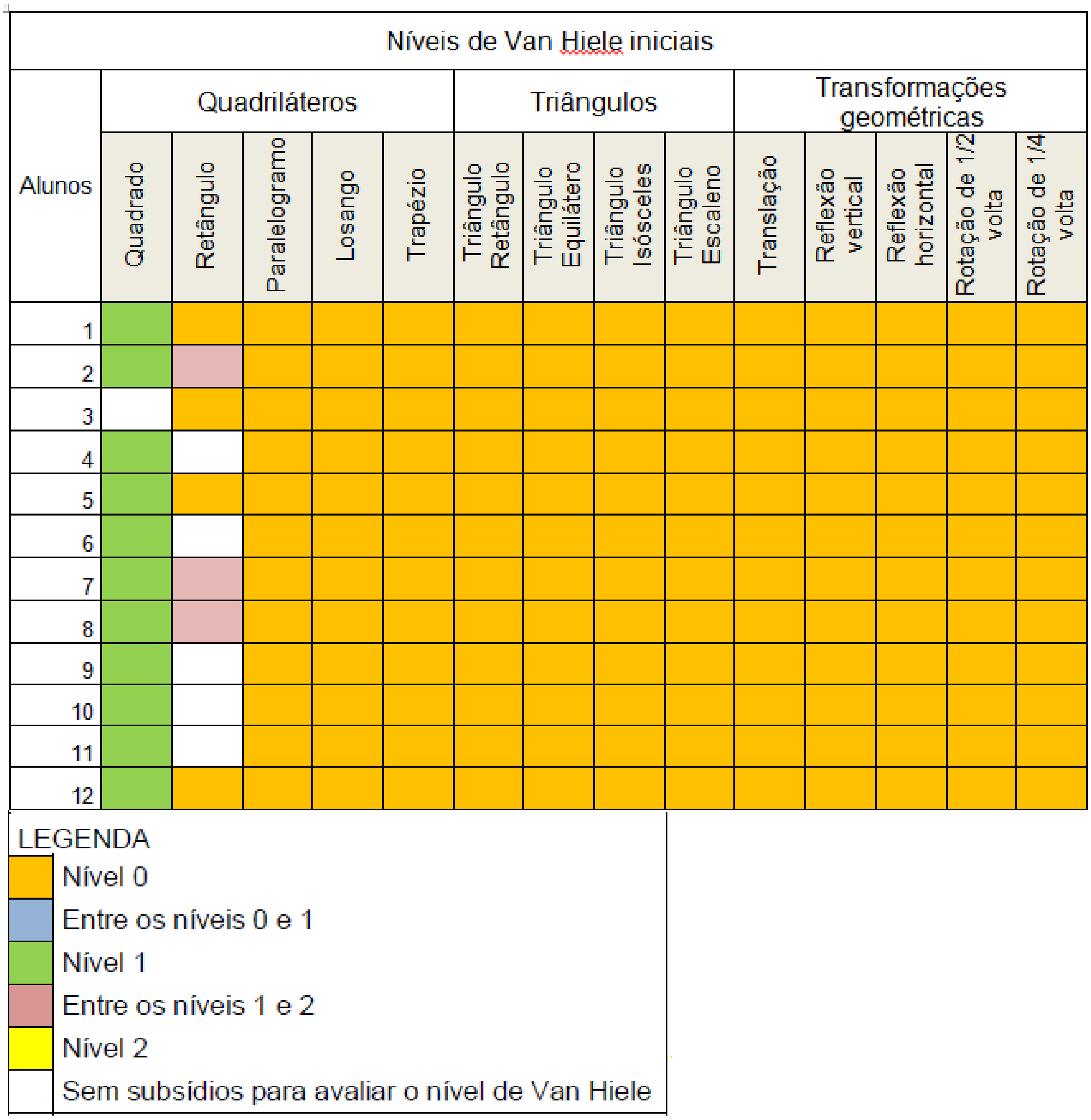
Para os demais polígonos, os níveis iniciais foram identificados ao longo do desenvolvimento da pesquisa através da observação dos alunos durante o desenvolvimento das atividades.

- Paralelogramo, trapézio, losango e triângulo escaleno: No início desta construção, nenhum estudante do grupo analisado demonstrou saber o que era um paralelogramo ou um trapézio, assim como nenhum aluno mostrou saber especificar as características de um losango. Por este motivo, esta pesquisa considera que tais estudantes estavam no nível 0 de Van Hiele.

- Triângulo retângulo: Ao início da pesquisa, foi observado que os estudantes desconheciam o que era ângulo reto, já que este conceito só foi desenvolvido ao longo da construção do quadrado e do retângulo. Como a construção do triângulo retângulo foi realizada após a construção destes quadriláteros, avalia-se que o nível inicial dos estudantes para o triângulo retângulo como nível 0 de Van Hiele.

Ao iniciar o trabalho com as Transformações Geométricas, utilizando o applet *Design a Tessellation*, foi possível perceber que os estudantes identificavam que a tesselação mudava a configuração conforme a transformação efetuada, analisando o plano de tesselação de maneira global, mas sem conseguir analisar o que ocorria em cada unidade de tesselação. Isto aponta que para as Transformações Geométricas trabalhadas os alunos do grupo analisado se encontravam no nível 0 de Van Hiele para todas as Transformações Geométricas.

Desta forma, os níveis de Van Hiele iniciais de cada aluno podem ser visualizados através do quadro a seguir.



Quadro 13: Níveis de Van Hiele iniciais.

Na seção seguinte, apresentaremos o relato das atividades desenvolvidas durante a realização da investigação de triângulos e quadriláteros pelos estudantes.

6.2 Investigando triângulos e quadriláteros com o GeoGebra

Para realizar esta investigação, os estudantes desenvolveram construções referentes aos polígonos citados, passo a passo, no GeoGebra, seguindo as instruções contidas nos formulários online. Ao longo do desenvolvimento de cada atividade, os estudantes responderam a questionamentos referentes aos aspectos geométricos e às regularidades envolvidas em cada construção, que estavam contidos nos formulários online. Ao final de cada atividade construtiva, os estudantes enviaram as respostas através do formulário, além de enviar, via e-mail, os arquivos do GeoGebra em cada construção.

Ao longo das construções, foi solicitado aos estudantes que preenchessem a seguinte tabela, que foi entregue aos mesmos em uma folha. O objetivo do seu preenchimento é que esta fosse uma forma de sistematizar os conceitos estudados:

Nome do polígono	Rascunho do polígono	Número de lados	Características dos ângulos	Número de vértices (pontas)	Características do polígono
Quadrado					
Retângulo					
Paralelogramo					
Losango					
Trapézio					
Triângulo retângulo					
Triângulo equilátero					
Triângulo isósceles					
Triângulo escaleno					

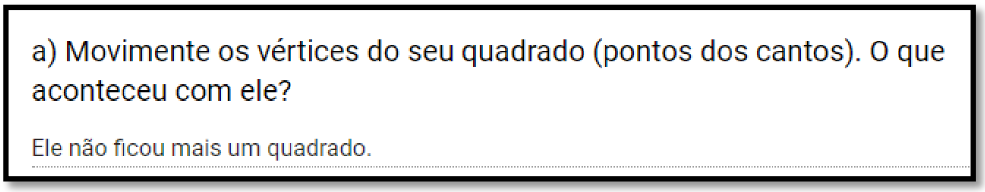
Quadro 14: ficha com as características dos polígonos.

A seguir, será apresentada a análise referente à investigação de quadriláteros, que foi realizada com o auxílio do software GeoGebra. Como fonte de análise desta etapa, foram utilizadas as observações feitas durante as aulas, e os registros escritos contidos nos formulários online e nas fichas com as características dos polígonos.

6.2.1 Quadriláteros

Nesta seção apresenta-se a análise referente ao desenvolvimento do processo de aprendizagem de quadriláteros para os alunos analisados.

- Quadrado: primeiramente, os estudantes tiveram que reproduzir um quadrado no GeoGebra da maneira que julgassem mais adequada. Todos os estudantes analisados fizeram esta construção utilizando apenas segmentos de retas para os lados do quadrado (o que já era esperado). Em seguida, foi solicitado aos estudantes que movimentassem um dos pontos e observassem o que ocorria. Em geral todos os estudantes notaram mudanças, como é possível verificar nas respostas dos alunos apresentadas no quadro a seguir. Grande parte do grupo respondeu com a figura que conseguiu visualizar através da movimentação de um vértice do quadrado construído.


a) Movimente os vértices do seu quadrado (pontos dos cantos). O que aconteceu com ele?

Ele não ficou mais um quadrado.

Figura 4: Resposta da aluna 8 para a primeira construção do quadrado, escrita no formulário online.

No quadro a seguir, seguem as respostas dos alunos, que foram respondidas nos formulários online.

Alunos 1 e 12	Ele vira uma seta ou um avião de papel.
Aluno 2 e 5	Ele vira uma seta.
Aluno 3, 7 e 9	Quando mexe desloca o eixo.
Aluno 4, 6	Se espichar, ele fica de um formato de uma gravata.
Aluna 8	Ele não ficou mais um quadrado.
Aluna 10	Virou outras formas.
Aluna 11	Não respondeu.

Quadro 15: respostas dos alunos para as mudanças observadas no primeiro quadrado construído.

Em seguida, foi solicitado ao grupo que fosse feita uma nova construção do quadrado, agora com um passo a passo, conforme as orientações dos formulários online (Apêndice A). A construção resultante se apresenta na figura a seguir:

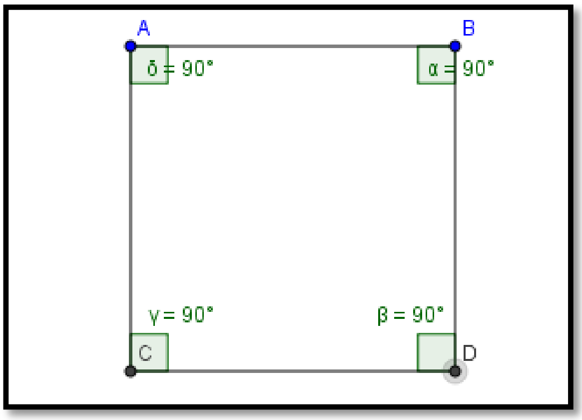
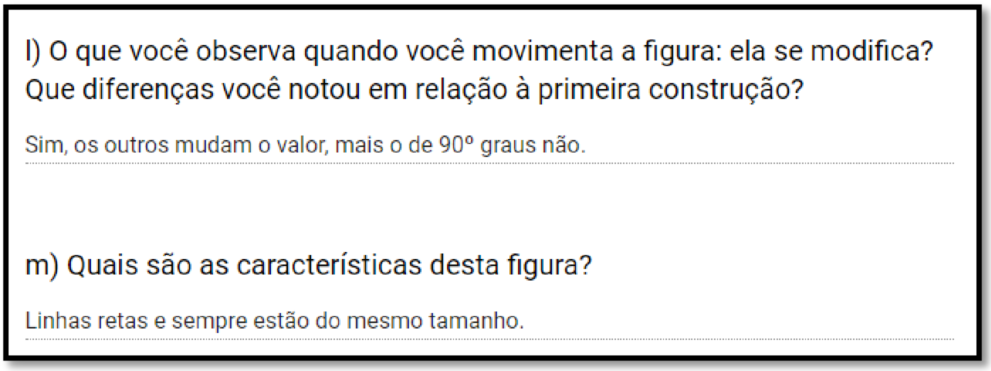


Figura 5: construção do quadrado feita no GeoGebra

Os estudantes foram então questionados sobre o que ocorria com esta construção quando se movia um dos pontos. Os alunos escreveram as suas respostas nos formulários online.



l) O que você observa quando você movimenta a figura: ela se modifica? Que diferenças você notou em relação à primeira construção?

Sim, os outros mudam o valor, mais o de 90º graus não.

m) Quais são as características desta figura?

Linhas retas e sempre estão do mesmo tamanho.

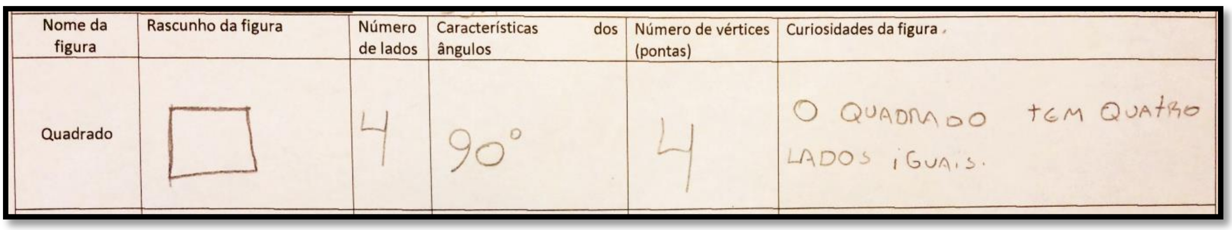
Figura 6: resposta do aluno 1, para a segunda construção do quadrado, escrita no formulário online.

No quadro a seguir, são apresentadas as respostas dos alunos a partir do preenchimento do formulário online, além da análise destas respostas.

Alunos	Respostas retiradas dos formulários online, que foram preenchidos pelos alunos.		Considerações feitas pela pesquisadora, a partir das respostas dos alunos.
	O que você observa quando você movimenta a figura: ela se modifica? Que diferenças você notou em relação à primeira construção?	Quais são as características desta figura?	
Alunos 1, 3 e 12	Sim, os outros mudam o valor, mas o de 90º graus não.	Linhas retas e sempre estão do mesmo tamanho.	Perceberam a invariância dos ângulos de 90° e que as medidas de lado permaneciam iguais.
Alunos 2 e 5	Não se modifica. Mesmo modificando os lados da figura vai ser do mesmo tamanho.	Linhas retas do mesmo tamanho e o angulo sempre é 90.	Perceberam a invariância dos ângulos de 90° e que o formato não se modificou. Além disso, notaram que as medidas de lado permaneciam iguais.
Aluno 6	Sim ele muda.	Parece um círculo misturado com um triangulo	Percebeu as mudanças, mas parece não ter compreendido.
Aluno 7	Sim, os ângulos são os mesmos, mas a distância modifica.	Tem os ângulos de 90 graus, e tem os lados iguais.	Percebeu a invariância dos ângulos de 90° e que as medidas de lado permaneciam iguais.
Aluna 8	Não, ele não deixa de ser um quadrado.	Linhas retas do mesmo tamanho.	Percebeu a invariância no formato e nas medidas dos lados, porém não percebeu os ângulos de 90º.
Alunos 4, 9, 10 e 11	Não respondeu.	Não respondeu.	Não respondeu.

Quadro 16: respostas dos alunos para o segundo quadrado construído e considerações da pesquisa.

Após este momento investigativo com o GeoGebra, os estudantes puderam refletir sobre as construções realizadas, através do preenchimento da tabela com as características do quadrado (quadro 14). Todos os alunos analisados caracterizaram o quadrado como um polígono formado por 4 lados de mesma medida, 4 vértices e ângulos de 90°.



Nome da figura	Rascunho da figura	Número de lados	Características dos ângulos	Número de vértices (pontas)	Curiosidades da figura
Quadrado		4	90°	4	O QUADRADO TEM QUATRO LADOS IGUAIS.

Figura 7: tabela das características dos polígonos preenchida pelo aluno 12 para o quadrado.

Isto indica que todos os estudantes analisaram e caracterizaram o quadrado através de suas características.

- Retângulo: Esta investigação iniciou-se com as orientações dos formulários online. Abaixo, segue a imagem do retângulo feito pelos alunos 2 e 3.

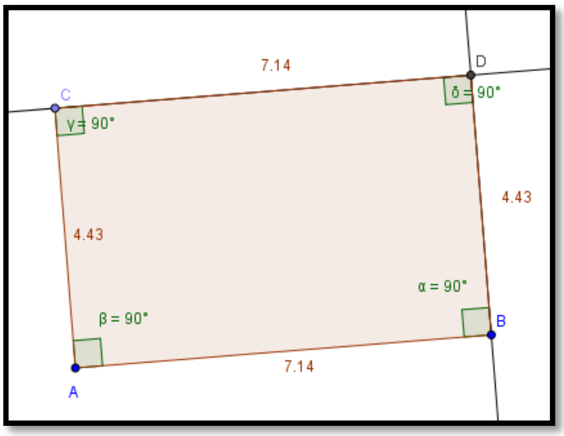


Figura 8: retângulo feito pelos alunos 2 e 5, no GeoGebra.

A seguir, são apresentadas as respostas dos alunos para os questionamentos dos formulários online no que diz respeito ao retângulo.

Alunos	Respostas retiradas dos formulários online, que foram preenchidos pelos alunos.		
	Movimente o ponto A. O que você pode dizer sobre as medidas de lado e de ângulo dessa figura?	Qual é a semelhança desta figura com o quadrado?	O quadrado poderia ser chamado de retângulo ou o retângulo poderia ser chamado de quadrado?
Alunos 1 e 3	As medidas de 90º graus não mudam.	Ambos tem 4 lados.	Não, porque o quadrado tem 4 lados iguais, o retângulo tem 4 lados diferentes.
Aluno 2 e 5	As medidas são iguais, mas o ângulo é diferente.	As medidas são iguais.	. O quadrado pode ser chamado de retângulo, mas o retângulo não pode ser chamado de quadrado.
Aluno 4 e 6	Aumenta e diminui o tamanho dos ângulos.	É porque o quadrado tem quatro partes iguais e o retângulo tem só tem duas partes iguais.	Eles podem até ser parecidos, mas a diferença é que o retângulo é esticado e maior que o quadrado, nos lados.
Aluno 7 e 9	As medidas de ângulo sempre ficam a 90 graus e as de medida só que mudam	O ângulo delas é 90 graus, e tem quatro lados.	O retângulo pode ser chamado de quadrado, mas o quadrado não pode ser chamado de retângulo, porque ele precisa ter todos os quatro lados iguais.
Aluna 8	Todo o retângulo se movimenta menos o ponto B.	Bastante.	Não.
Aluno 10	Não respondeu.	Não respondeu.	Não respondeu.
Aluno 11	Elas sempre estão do mesmo tamanho dependendo do jeito que mexem elas.	Parecida.	O retângulo pode ser chamado de quadrado.
Aluno 12	Tem dois lados, e os ângulos são de 90º.	Não respondeu.	Não respondeu.

Quadro 17: respostas dos alunos para o retângulo construído.

Após este momento, os estudantes efetuaram o preenchimento da tabela de características dos polígonos (quadro 14), que foi registrado pela pesquisadora na segunda coluna do quadro 18.

Durante as aulas, os estudantes foram observados no que se refere às suas atitudes e respostas dadas na forma oral. Também se fez uma análise das respostas dos alunos, de maneira individual. Tais apontamentos estão representados no quadro 18.

Alunos	Respostas dos estudantes (retiradas da tabela de características)	Observações realizadas pela pesquisadora durante o processo	Considerações feitas pela pesquisadora, a partir das respostas dos alunos.
Alunos 1 e 2	Caracterizaram o retângulo como um polígono com quatro linhas paralelas e opostas com mesma medida, 4 vértices e ângulos de 90°.	Os alunos citaram que a semelhança entre o quadrado e o retângulo são os 4 ângulos de 90° e que a construção do retângulo pode virar um quadrado. Além disso, disseram que o quadrado poderia ser chamado de retângulo e concluíram que nem todo o retângulo pode virar um quadrado.	Apesar de o aluno 2 parecer confundir a palavra “ângulo” com a palavra “lado” em um dos seus registros escritos, os dois estudantes perceberam que o retângulo possui 4 lados, com lados opostos paralelos e iguais, além de ângulos de 90º. Além disso, perceberam a inclusão de classes entre quadrado e retângulo.
Aluno 3	Caracterizou o retângulo como um polígono com quatro linhas paralelas e opostas com mesma medida, 4 vértices e ângulos de 90°.	Sem observações.	Identificou que tanto o quadrado, quanto o retângulo, possuem 4 lados e ângulos de 90º.
Aluno 4	Caracterizou o retângulo como uma figura com 4 lados, 4 vértices. De acordo com o estudante, tal figura é parecida com o quadrado, porém maior, o que faz ele ter apenas 2 lados com mesma medida.	Disse que a semelhança entre o quadrado e o retângulo é o ângulo de 90°, o quadrado pode ser chamado de retângulo, pois tem ângulo de 90°, e que o retângulo não pode ser chamado de quadrado porque ele não tem os quatro lados iguais	Apesar de, na escrita, fazer distinção entre o retângulo e o quadrado, no que diz respeito às classes, oralmente consegue expressar corretamente as características do retângulo. Parece ter confundido o emprego da palavra “ângulo”, com a palavra “lado”. Além disso, oralmente também é possível verificar o que o aluno identifica a existência de inclusão de classes entre os dois polígonos.
Aluno 5	Caracterizou o retângulo como um polígono com quatro linhas paralelas e opostas com mesma medida, 4 vértices e ângulos de 90°.	Sem observações.	Parece ter confundido a palavra “ângulo” com a palavra “lado” em um dos seus registros escritos. Percebeu a inclusão de classes entre quadrado e retângulo.
Aluno 6	Caracterizou o retângulo como um polígono com quatro linhas paralelas e opostas com mesma medida, 4 vértices e ângulos de 90°.	Sem observações.	Parece ter confundido o emprego da palavra “ângulo”, com a palavra “lado”. Não percebe a inclusão de classe entre o quadrado e o retângulo.

Aluno 7 e 9	Caracterizaram o retângulo como uma figura com 4 lados, 4 vértices e ângulos de 90°, sendo que os lados "de cima" e "de baixo" são de mesma medida e os dois lados "do canto" tem mesma medida, mas diferente do "de cima" e do lado "de baixo" e lados mais “largos”.	Sem observações.	Conseguem caracterizar o retângulo, porém apenas na configuração em que este polígono não seja um quadrado. Todavia, percebem a inclusão de classes entre quadrado e retângulo, ao citarem que a construção do retângulo poderia reproduzir um quadrado.
Alunas 8 e 10	Caracterizaram o retângulo como um polígono com quatro linhas paralelas e opostas com mesma medida, 4 vértices e ângulos de 90°.	Sem observações.	Não expressou compreensão no que diz respeito à inclusão de classes entre o quadrado e o retângulo.
Aluna 11	Caracterizou o retângulo como um polígono com quatro linhas paralelas e opostas com mesma medida, 4 vértices e ângulos de 90°.	Sem observações.	Identificou que a construção do retângulo poderia reproduzir um quadrado.
Aluno 12	Caracterizou o retângulo como um polígono com quatro linhas paralelas e opostas com mesma medida, 4 vértices e ângulos de 90°. Citou que a construção abrange quadrado.	Sem observações.	Pareceu perceber a inclusão de classes entre o retângulo e o quadrado.

Quadro 18: Registros dos alunos e análise da produção.

No momento introdutório, a aluna 8 já havia feito uma comparação do quadrado com o retângulo, conforme os dados do quadro 11.

Com exceção dos alunos 4, 7 e 9, os registros da folha de características (Quadro 13), feitos pelos demais estudantes caracterizam o retângulo como um polígono com quatro linhas paralelas e opostas com mesma medida, 4 vértices e ângulos de 90°. Isto indica que analisaram o retângulo de acordo com as suas características.

- Paralelogramo: a seguir apresenta-se o paralelogramo feito pelos alunos 7 e 9, no GeoGebra.

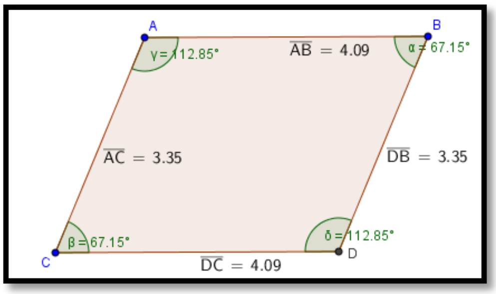


Figura 9: paralelogramo feito pelos alunos 7 e 9, no GeoGebra.

Na sequência, são apresentadas as respostas do grupo analisado para os questionamentos do paralelogramo, contidas no formulário online.

Alunos	Respostas retiradas dos formulários online, que foram preenchidos pelos alunos.	
	Movimente algum ponto da figura. O que você observa? O que acontece com as medidas feitas?	Quais são as características desta figura?
Alunos 1 e 3	Que os lados opostos sempre ficam iguais.	Pode ser transformado em quadrado e retângulo.
Alunos 2 e 5	As medidas mudam junto com o ponto.	As medidas opostas são iguais. Os ângulos opostos são iguais.
Alunos 4 e 6	Os pontos A e D se movem, mas os pontos B e C ficam parados.	Tem 4 pontas, mas só dois lados iguais.
Alunos 7 e 9	As medidas se movem junto com o ponto e elas se modificam quando eles se afastam.	Ela tem quatro lados e pontas tipo um quadrado.
Aluna 8	Mudam os números e mudam os jeitos de ficar.	Lados opostos são iguais.
Aluna 10	Ela muda de forma e as medidas também.	Os lados opostos desta figura são iguais e os ângulos opostos também são iguais.
Aluna 11	Os lados opostos se movem.	Não respondeu.
Aluno 12	Não respondeu.	Não respondeu.

Quadro 19: respostas dos alunos aos questionamentos do paralelogramo.

Após o momento de investigação com o GeoGebra, os estudantes efetuaram o preenchimento da tabela de características dos polígonos (quadro 14).

Durante as aulas, os estudantes também foram observados no que se refere às suas atitudes e respostas dadas na forma oral. Após uma análise das respostas dos alunos, que foi feita de maneira individual, realizou-se algumas considerações sobre este processo. Tais apontamentos estão representados no quadro 20.

Alunos	Respostas dos estudantes (retiradas da tabela de características)	Observações realizadas pela pesquisadora durante o processo	Considerações feitas pela pesquisadora, a partir das respostas dos alunos.
Aluno 1	Caracterizou o paralelogramo como um polígono com 4 lados opostos de medidas iguais, 4 vértices, e ângulos opostos com mesma medida.	Sem observações.	Identificou que a construção abrange o quadrado e o retângulo.
Aluno 2	Caracterizou o paralelogramo como um polígono com 4 lados opostos de medidas iguais, 4 vértices, e ângulos opostos com mesma medida. Citou que esta construção abrange o losango, quadrado e retângulo.	O aluno percebeu que os lados opostos e ângulos opostos eram de mesma medida. Percebeu que a construção do paralelogramo pode virar um retângulo ou um quadrado.	Verificou que esta construção abrange o retângulo, quadrado e o losango, identificando a inclusão de classes entre estes polígonos e o paralelogramo.
Aluno 3	Caracterizou o paralelogramo como um polígono com 4 lados opostos de medidas iguais, 4 vértices, e ângulos opostos com mesma medida.	O aluno percebeu que os lados opostos e ângulos opostos eram de mesma medida. Percebeu que a construção do paralelogramo pode virar um retângulo ou um quadrado.	Identificou que a construção abrange o quadrado e o retângulo.
Aluno 4	Caracterizou o paralelogramo como um polígono com 4 lados opostos de medidas iguais, 4 vértices, e ângulos opostos com mesma medida.	Citou que esta construção abrange o quadrado, retângulo e losango.	Identificou inclusão de classes entre o paralelogramo e: quadrado, retângulo e losango.
Aluno 5	Caracterizou o paralelogramo como um polígono com 4 lados opostos de medidas iguais, 4 vértices, e ângulos opostos com mesma medida.	Citou que esta construção abrange o losango, quadrado e retângulo. O aluno percebeu que os lados opostos e ângulos opostos eram de mesma medida. Percebeu que a construção do paralelogramo pode virar um retângulo ou um quadrado.	Identificou inclusão de classes entre o paralelogramo e: quadrado, retângulo e losango.
Alunos 6 e 11	Caracterizaram o paralelogramo como um polígono com 4 lados opostos de medidas iguais, 4 vértices, e ângulos opostos com mesma medida.	Sem observações.	Não identificou inclusão de classes, nem fizeram relação do paralelogramo com outros quadriláteros.
Aluno 7	Caracterizou o paralelogramo como um polígono com 4 lados opostos de medidas iguais, 4 vértices, e ângulos opostos com	Sem observações.	Não identificou inclusão de classes, nem caracteriza o paralelogramo através

	mesma medida. Citou que os lados opostos possuem a mesma direção.		de ângulos e medidas de lado.
Aluna 8	Caracterizou o paralelogramo como um polígono com 4 lados opostos de medidas iguais, 4 vértices, e ângulos opostos com mesma medida. Citou que a construção do paralelogramo abrange o quadrado.	A aluna identificou que a construção do paralelogramo podia virar um quadrado ou um retângulo. Além disso, identificou que os lados e os ângulos opostos eram de mesma medida.	Identifica inclusão de classes para o quadrado e o retângulo.
Aluno 9	Caracterizou o paralelogramo como um polígono com 4 lados opostos de medidas iguais, 4 vértices, e ângulos opostos com mesma medida.	Sem observações.	Verificou que a construção do paralelogramo abrange o quadrado, losango e retângulo.
Aluna 10	Caracterizou o paralelogramo como um polígono com 4 lados opostos de medidas iguais, 4 vértices, e ângulos opostos com mesma medida. Citou que a construção do paralelogramo abrange o quadrado, losango e retângulo.	A aluna citou que os lados opostos são iguais. A aluna apontou para os ângulos opostos com medidas iguais.	Identificou inclusão de classes entre o paralelogramo e: quadrado, retângulo e losango.
Aluno 12	Caracterizou o paralelogramo como um polígono com 4 lados opostos de medidas iguais, 4 vértices, e ângulos opostos com mesma medida. Citou que esta construção abrange um quadrado, retângulo e um losango.	O aluno percebeu que os lados opostos e ângulos opostos eram de mesma medida. Percebeu que a construção do paralelogramo pode virar um retângulo ou um quadrado.	Identificou a inclusão de classes para o quadrado e o retângulo.

Quadro 20: respostas dos alunos, observações realizadas pela professora pesquisadora e considerações para o paralelogramo.

Com exceção do aluno 7, todos os estudantes registraram em suas tabelas de características que o paralelogramo se trata de um polígono com 4 lados opostos de medidas iguais, 4 vértices e ângulos opostos com mesma medida. Sendo assim, avalia-se que, (exceto pelo aluno 7) todos os alunos tenham analisado o paralelogramo em função de suas características.

- Losango: ao longo do trabalho, os estudantes não puderam realizar o registro referente ao losango e ao trapézio para a tabela de características (Quadro 13).

Sendo assim, nestes casos, foram analisados apenas os formulários online e as observações realizadas pela professora pesquisadora.

A seguir apresentam-se as respostas dos alunos aos questionamentos contidos nos formulários online.

Alunos	Respostas retiradas dos formulários online, que foram preenchidos pelos alunos.	
	O que acontece com as medidas quando movimentamos a figura? Quais são as características desta figura?	Você consegue ver alguma relação entre esta figura e o quadrado? E entre esta figura e o paralelogramo?
Alunos 1, 3 e 12	Os lados são iguais e os ângulos dos lados opostos são iguais.	Ele parece um quadrado, mas não pode ser chamado de quadrado porque ele não tem ângulo de 90ºgraus.
Alunos 2 e 5	Todos os lados são iguais. Os ângulos opostos são iguais.	Esta figura fica parecida com um quadrado, mas ela não pode ser um quadrado porque o ângulo não é de 90 graus. Ela pode virar um paralelogramo porque os lados opostos são iguais.
Alunos 4 e 6	Os ângulos que ficam de frente para o outro são iguais. Essa figura tem o mesmo tamanho nos 4 lados.	Eles podem ser parecidos, mas o retângulo e espichado nos lados, já o quadrado ele e do mesmo tamanho nas 4 partes.
Alunos 7 e 9	Ela se movimenta.	Sim, elas podem virar um paralelogramo.
Aluna 8	Os lados são iguais, e todas as medidas opostas são iguais.	Sim.
Aluno 10	Os ângulos opostos são iguais e os lados são iguais.	Sim, também são iguais.
Aluna 11	Todos os lados são iguais, e os ângulos também.	Sim, ele pode virar um paralelogramo.

Quadro 21: respostas dos alunos aos questionamentos para o losango.

Durante as aulas, os alunos também foram observados no que se refere às suas atitudes e respostas dadas na forma oral (quadro 22, segunda coluna). Após uma análise individual das respostas contidas nos formulários online, assim como de suas atitudes durante as aulas, fez-se considerações para cada estudante (quadro 22, terceira coluna).

Alunos	Observações realizadas pela pesquisadora durante o processo	Considerações feitas pela pesquisadora, a partir das respostas dos alunos.
Alunos 1, 3 e 12	Sem observações.	Não relacionaram o losango ao quadrado.
Alunos 2 e 5	Caracterizaram a figura como um polígono de lados com mesma medida e ângulos opostos de mesma medida: os alunos conseguiram perceber que a construção também podia virar um quadrado e um paralelogramo.	Perceberam a inclusão de classes entre o losango e o quadrado e entre o losango e o paralelogramo.
Alunos 4 e 6	Caracterizaram o polígono com lados de mesma medida, e ângulos opostos com mesmas medidas. Disseram que era parecido com o quadrado por ter 4 lados iguais, e que a construção poderia deixar a figura em forma de quadrado. Disseram que nem todo losango é quadrado.	Perceberam a inclusão de classes entre o losango e o quadrado.
Alunos 7 e 9	Sem observações.	Perceberam a inclusão de classes entre o losango e o paralelogramo.
Aluna 8	Sem observações.	Dados insuficientes para uma avaliação.
Aluna 10	Caracterizou como um polígono de lados com mesma medida e ângulos opostos de mesma medida, e percebeu que a construção poderia formar um paralelogramo ou um quadrado.	Percebeu a inclusão de classes entre o losango e: o quadrado e o paralelogramo.
Aluna 11	Disse que se parece com o quadrado por ter 4 lados com mesma medida, e percebeu que a construção poderia reproduzir um quadrado.	Percebeu a inclusão de classes entre o losango e o quadrado.

Quadro 22: observações e considerações da pesquisa para o losango.

Analisando-se as respostas, com exceção dos alunos 7 e 9, percebe-se que os estudantes analisaram e caracterizaram o losango como um polígono de lados com tamanhos iguais e ângulos opostos de mesma medida. Desta forma, concluiu-se que tais alunos conseguiram analisar o losango em função de suas características. Os alunos 7 e 9 não caracterizaram o losango. A aluna 11 caracterizou o losango apenas em função dos lados de medidas iguais, não percebendo as características dos ângulos.

- Trapézio: A seguir se apresenta o trapézio feito pela aluna 10, no Geogebra, durante esta investigação.

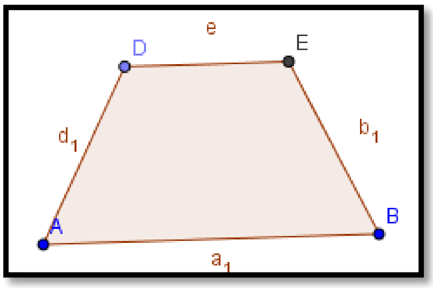


Figura 10: construção da aluna 10 para o trapézio, feita no GeoGebra.

Seguem as respostas dos estudantes para o trapézio, que foram registradas nos formulários online.

Alunos	Movimente os pontos da figura. O que você observa que acontece? (Respostas retiradas dos formulários online)
Alunos 1 e 12	A linha A1 e a linha E se movimentam juntas.
Alunos 2 e 3	O lado B1 e o lado D1 nunca ficam paralelos. O lado A1 e o E ficam paralelos.
Alunos 4 e 6	Trapézio tem 2 partes paralelas 2 partes não paralelas.
Aluno 5	Não respondeu.
Alunos 7 e 9	Quando mexemos o ponto A o segmento e vai para a mesma direção.
Aluna 8	A linha se movimenta junto com o ponto.
Aluna 10	O lado B1 e o lado D1 nunca ficam paralelos, e o lado A1 e o lado E ficam paralelos.
Aluna 11	Os lados B1 e o lado D1 não são paralelos, e o lado A1 e o lado E são paralelos.

Quadro 23: respostas dos alunos ao questionamento do trapézio, contidas no formulário online.

Nos registros dos formulários online, apenas os estudantes 2, 3, 4, 6, 10 e 11 definiram o trapézio como um quadrilátero com dois lados opostos paralelos e dois lados opostos não paralelos, indicando análise do polígono através de suas características. A seguir, tem-se as observações realizadas pela professora pesquisadora durante a pesquisa.

Alunos	Observações realizadas pela pesquisadora durante o processo
Aluno 1, 3 e 12	Observou o paralelismo entre dois lados opostos e que seria impossível fazer um quadrado.
Alunos 2 e 5	Os alunos usaram o termo "reto" para designar paralelo. Identificaram dois lados opostos paralelos e dois lados opostos não paralelos.
Alunos 4, 6 e 8	Identificaram dois lados paralelos e dois lados não paralelos.
Alunos 7 e 9	Perceberam o paralelismo entre dois lados da figura e dois lados não paralelos.
Aluno 10	Identificou dois lados opostos paralelos, e dois lados não paralelos.
Aluno 11	Percebeu o paralelismo entre dois lados do polígono.

Quadro 24: observações realizadas pela professora pesquisadora durante o processo.

Analisando-se individualmente as respostas dos alunos contidas nos formulários online e suas reações durante as aulas, avalia-se que todos os estudantes analisaram o trapézio através de suas características. É importante observar que, neste trabalho, os estudantes não tiveram a oportunidade de comparar o trapézio com outro polígono, não possuindo elementos para diferenciar este polígono com os demais quadriláteros. Além disso, como o trapézio não pertence a nenhuma outra classe de quadriláteros, não conseguiram perceber nenhum tipo de inclusão de classes para o mesmo.

A seguir, serão apresentados os níveis de Van Hiele atingidos pelos estudantes para os quadriláteros.

6.2.2 Níveis de Van Hiele atingidos pelos estudantes para os quadriláteros

Os estudantes do grupo foram analisados de forma individual no que diz respeito à aprendizagem de quadriláteros. Para esta análise foram utilizados os níveis de Van Hiele para o pensamento geométrico, da seguinte forma:

- o estudante atingiu o nível 1 se caracterizou o polígono em função de suas partes.
- o estudante atingiu o nível 2 se, além de caracterizar o polígono em função das suas partes, o relacionou ou o comparou a outro quadrilátero, identificando inclusão de classes e classes de figuras.

A seguir, apresentam-se os polígonos relacionados a cada quadrilátero, no que diz respeito às classes de figuras. Para atingir o nível 2, o estudante deve relacionar cada quadrilátero, com todos os polígonos relacionados a ele.

- Quadrado: retângulo, paralelogramo e losango.
- Retângulo: paralelogramo e quadrado.
- Losango: Paralelogramo e quadrado.
- Paralelogramo: quadrado, losango e retângulo.

No caso em que o estudante não relacionar cada quadrilátero a todos os polígonos relacionados a ele, mas sim a uma parte, o nível atingido pelo aluno será classificado como entre os níveis 1 e 2 de Van Hiele. Ou seja, o nível atingido pelo estudante será classificado como intermediário, conforme a abordagem de Santos (1998; 2001), que trata da existência de níveis intermediários, já abordada no capítulo 3.

Neste trabalho, tanto para os quadriláteros, quanto para os triângulos e para as Transformações Geométricas, apresentaremos a análise detalhada apenas para os alunos 1 e 2, de forma a ilustrar a análise realizada para todos os estudantes. Em seguida, os resultados dos demais alunos serão detalhados no quadro 25.

Ao inferir sobre os níveis de Van Hiele atingidos pelo aluno 1 e pelo aluno 2, ao final da investigação, em relação a cada polígono, pode-se concluir que:

- Quadrado: o aluno 1 atingiu um nível entre os níveis 1 e 2 de Van Hiele pois, apesar de não perceber o fato de que o quadrado também é um tipo de losango, já consegue perceber a inclusão de classes entre o quadrado e o retângulo e entre o quadrado e o paralelogramo. Além disso, o estudante caracteriza o quadrado em função das suas características.

Já o aluno 2 atingiu o nível 2 de Van Hiele, pois conseguiu perceber que o quadrado é um caso especial de retângulo, de paralelogramo e de losango.

- Retângulo: o aluno 1 atingiu o nível 2 de Van Hiele, pois conseguiu perceber que o retângulo é um caso particular de paralelogramo, além de verificar que o quadrado é um tipo de retângulo.

O aluno 2 atingiu o nível 2 de Van Hiele, pois identificou a possibilidade de o retângulo ser um caso especial de paralelogramo, além de relacionar este polígono ao quadrado.

- Paralelogramo: o aluno 1 atingiu um nível entre os níveis 1 e 2 de Van Hiele, pois relacionou o paralelogramo ao quadrado e ao retângulo, mas não o relacionou ao losango. Além disso, definiu o paralelogramo em função de suas características.

O aluno 2 atingiu o nível 2 de Van Hiele, pois conseguiu relacionar este polígono ao quadrado, ao retângulo e ao losango.

- Losango e trapézio[6]: o aluno 1 atingiu o nível 1 de Van Hiele, pois conseguiu caracterizar estes polígonos através de suas partes, porém sem perceber a inclusão de classes para o losango (em relação ao quadrado e ao paralelogramo) e para o trapézio.

O aluno 2 atingiu o nível 2 de Van Hiele para o losango, pois conseguiu perceber que este é um caso especial de paralelogramo, além de relacionar este polígono ao quadrado. Já para o trapézio, atingiu o nível 1 de Van Hiele, já que analisou e caracterizou este polígono através de suas partes.

A seguir, é apresentado o resumo da análise dos níveis atingidos por todos os estudantes do grupo analisado para os quadriláteros.

[6]É importante observar que, neste trabalho, os estudantes não tiveram a oportunidade de comparar o trapézio com outra figura, não possuindo elementos para diferenciar este polígono com os demais quadriláteros. Além disso, como o trapézio não pertence a nenhuma outra classe de quadriláteros, de acordo com os níveis de Van Hiele, os alunos atingiram no máximo o nível 1 para este polígono, já que não conseguiram perceber nenhum tipo de inclusão de classes para o mesmo.

Aluno	Quadrado		Retângulo		Paralelogramo		Losango		Trapézio	
	Analisa por partes	Relaciona com:	Analisa por partes	Relaciona com:	Analisa por partes	Relaciona com:	Analisa por partes	Relaciona com:	Analisa por partes	Relaciona com:
Aluno 1	Sim	Retângulo Paralelogramo	Sim	Quadrado Paralelogramo	Sim	Quadrado Losango	Sim	Nenhum	Sim	Nenhum
	Nível entre 1 e 2		Nível 2		Nível entre 1 e 2		Nível 1		Nível 1	
Aluno 2	Sim	Retângulo Paralelogramo Losango	Sim	Quadrado Paralelogramo	Sim	Retângulo Quadrado Losango	Sim	Paralelogramo Quadrado	Sim	Nenhum
	Nível 2		Nível 2		Nível 2		Nível 2		Nível 1	
Aluno 3	Sim	Retângulo Paralelogramo	Sim	Quadrado Paralelogramo	Sim	Retângulo Quadrado	Sim	Nenhum	Sim	Nenhum
	Nível entre 1 e 2		Nível 2		Nível entre 1 e 2		Nível 1		Nível 1	
Aluno 4	Sim	Retângulo Paralelogramo Losango	Sim	Quadrado Paralelogramo	Sim	Retângulo Quadrado Losango	Sim	Paralelogramo Quadrado	Sim	Nenhum
	Nível 2		Nível 2		Nível 2		Nível 2		Nível 1	
Aluno 5	Sim	Retângulo Paralelogramo Losango	Sim	Quadrado Paralelogramo	Sim	Retângulo Quadrado Losango	Sim	Paralelogramo Quadrado	Sim	Nenhum
	Nível 2		Nível 2		Nível 2		Nível 2		Nível 1	
Aluno 6	Sim	Losango	Sim	Nenhum	Sim	Nenhum	Sim	Quadrado	Sim	Nenhum
	Nível entre 1 e 2		Nível 1		Nível 1		Nível entre 1 e 2		Nível 1	
Aluno 7	Sim	Retângulo	Sim	Quadrado	Sim	Losango	Não	Paralelogramo	Sim	Nenhum
	Nível entre 1 e 2		Nível entre 1 e 2		Nível 1		Sem condições de avaliar		Nível 1	
Aluna 8	Sim	Paralelogramo	Sim	Quadrado Paralelogramo	Sim	Retângulo Quadrado	Sim	Nenhum	Sim	Nenhum
	Nível entre 1 e 2		Nível 2		Nível entre 1 e 2		Sem condições de avaliar		Nível 1	
Aluno 9	Sim	Retângulo Paralelogramo	Sim	Quadrado Paralelogramo	Sim	Retângulo Quadrado Losango	Sim	Paralelogramo	Sim	Nenhum
	Nível entre 1 e 2		Nível 2		Nível 2		Nível entre 1 e 2		Nível 1	
Aluna 10	Sim	Paralelogramo Losango	Sim	Paralelogramo	Sim	Retângulo Quadrado Losango	Sim	Paralelogramo Quadrado	Sim	Nenhum
	Nível entre 1 e 2		Nível entre 1 e 2		Nível 2		Nível 2		Nível 1	
Aluna 11	Sim	Retângulo Losango	Sim	Quadrado	Sim	Nenhum	Sim	Quadrado	Sim	Nenhum
	Nível entre 1 e 2		Nível entre 1 e 2		Nível 1		Nível entre 1 e 2		Nível 1	
Aluno 12	Sim	Retângulo Paralelogramo	Sim	Quadrado Paralelogramo	Sim	Retângulo Quadrado	Sim	Nenhum	Sim	Nenhum
	Nível entre 1 e 2		Nível 2		Nível entre 1 e 2		Nível 1		Nível 1	

Quadro 25: níveis de Van Hiele atingidos pelos alunos para os quadriláteros.

A quantidade de alunos em cada nível de Van Hiele referente à aprendizagem de quadriláteros pode ser visualizada na tabela a seguir:

Níveis de Van Hiele atingidos para os quadriláteros										
Níveis de Van Hiele atingidos pelos alunos	Quadrado		Retângulo		Paralelogramo		Losango		Trapézio	
Nível 1	0	0,00%	1	8,33%	3	25,00%	3	25,00%	12	100,00%
Entre os níveis 1 e 2	9	75,00%	3	25,00%	4	33,33%	3	25,00%	0	0,00%
Nível 2	3	25,00%	8	66,67%	5	41,67%	4	33,33%	0	0,00%
Sem subsídios para avaliar o nível de Van Hiele	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	2	16,67%	0	0,00%

Quadro 26: quantidade de alunos em cada nível de Van Hiele (quadriláteros).

Na seção que segue, será apresentada a análise dos dados para a aprendizagem de triângulos, de acordo com a perspectiva dos níveis de Van Hiele, que foi desenvolvida através da metodologia da Investigação Matemática utilizando o software GeoGebra.

6.2.3 Triângulos

Nesta seção, apresentam-se os dados referentes ao desenvolvimento do processo de aprendizagem de triângulos para o grupo de estudantes analisados.

- Triângulo retângulo: esta investigação envolveu sua construção no GeoGebra (conforme figura 11).

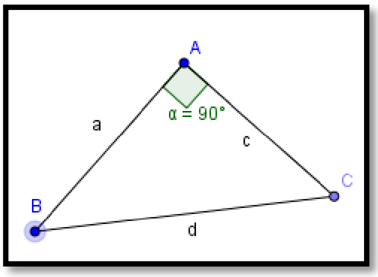


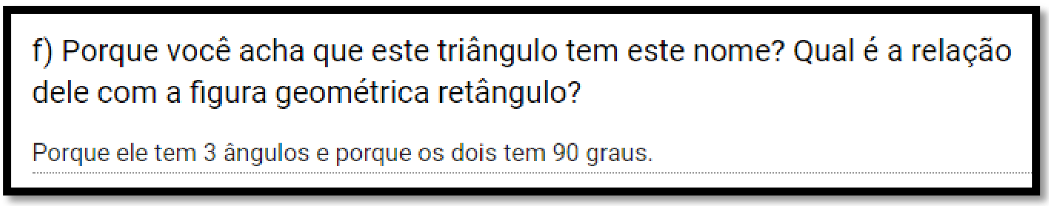
Figura 11: produção da aluna 8 para o triângulo retângulo, feita no GeoGebra.

A seguir, são apresentadas as respostas dos alunos para os questionamentos referentes ao triângulo retângulo, contidos nos formulários online.

Alunos	Respostas dos alunos retiradas dos formulários online	
	O que ocorre quando se movimenta o ponto B? A posição entre os segmentos se altera?	Porque você acha que este triângulo tem este nome? Qual é a relação dele com o retângulo?
Alunos 1, 3 e 12	A linha C se movimenta junto com a linha B.	Porque tem ângulo de 90º graus.
Alunos 2 e 5	Quando movimenta o ponto b o ponto c também muda de posição, mas o ângulo não muda.	Porque ele tem 3 ângulos e porque os dois (retângulo e triângulo retângulo) possuem ângulo de 90 graus.
Aluno 4	O segmento fica reto e ele aumenta e diminui, e só os pontos b e c que ficam se movimentando.	Não respondeu.
Alunos 6 e 11	Não compareceram.	Não compareceram.
Alunos 7 e 9	Ele gira e o ângulo sempre fica em 90 graus.	Porque o angulo dele é 90 graus.
Aluna 8	O ângulo não muda, mas as medidas sim.	Porque tri significa 3 e ângulo significa 3 ângulos. O ângulo é de 90 graus igual ao do retângulo.
Aluna 10	Ele se movimenta com o ponto C. Não.	Porque ele tem três ângulos. Os dois têm ângulo no nome, e os dois têm 90 graus.

Quadro 27: respostas dos alunos aos questionamentos do triângulo retângulo, contidos nos formulários online.

Os alunos 2 e 5 conseguiram perceber o motivo pelo qual o triângulo retângulo possui este nome: a presença do ângulo de 90º nos dois polígonos (figura 12).


f) Porque você acha que este triângulo tem este nome? Qual é a relação dele com a figura geométrica retângulo?

Porque ele tem 3 ângulos e porque os dois tem 90 graus.

Figura 12: resposta dos alunos 2 e 5 para o questionamento do triângulo retângulo.

Após o momento de investigação com o GeoGebra, os estudantes efetuaram o preenchimento da tabela de características dos polígonos (quadro 14). Todos os alunos que preencheram a tabela apresentaram o triângulo retângulo como um polígono com três lados, três vértices.

Durante as aulas, os alunos também foram observados no que se refere às suas atitudes e respostas dadas na forma oral. A seguir, são apresentadas em uma tabela estas observações e registros:

Alunos	Respostas dos estudantes (retiradas da tabela de características)	Observações realizadas pela pesquisadora durante o processo
Alunos 1, 2 e 5	Classificou como um polígono que possui três lados, três vértices e todos os ângulos diferentes.	Sem observações.
Alunos 3 e 6	Não responderam.	Sem observações.
Aluno 4	Não respondeu.	O estudante concluiu que esta figura possui este nome, pois é um pedaço de um retângulo.
Aluno 7	Classificou como um polígono que possui três lados, três vértices e um dos ângulos mede 90°.	Disse que este triângulo tem um ângulo de 90º.
Aluna 8	Classificou como um polígono que possui três lados, três vértices e um ângulo de 90.	A aluna disse que ele tem este nome pois tem três ângulos. Além disso, que a semelhança com o retângulo se deve aos lados que não precisam ter as mesmas medidas e também pela presença do ângulo de 90°.
Aluno 9	Classificou como um polígono que possui três lados, três vértices, que possui um dos ângulos medindo 90° e todos os lados diferentes.	Sem observações.
Aluna 10	Classificou como um polígono que possui três lados, três vértices e apresentou as medidas do triângulo que estava visualizando no momento.	Disse que o triângulo retângulo tem esse nome, pois possui um ângulo de 90°.
Aluna 11	Classificou como um polígono que possui três lados, três vértices e que sempre apresenta um ângulo de 90°.	A aluna percebeu que não importa o quanto se movimenta a figura, a presença do ângulo de 90° é constante.
Aluno 12	Classificou como um polígono que possui três lados, três vértices e com todos os ângulos diferentes.	Disse que o triângulo retângulo tem esse nome, pois ele tem um "tipo reto". Quando questionado o que seria o "tipo reto", o estudante concluiu que era devido ao ângulo de 90º.

Quadro 28: registros e observações para o triângulo retângulo.

Após a análise das respostas dos alunos, que foi feita de maneira individual, apresentam-se as considerações da pesquisa (quadro 29).

Alunos	Considerações da pesquisa quanto às respostas dos alunos
Alunos 1, 2, 5, 9 e 12	Apesar de mencionarem o ângulo de 90°, provavelmente visualizaram apenas as configurações em que o triângulo retângulo possuía todos os ângulos com medidas diferentes, relacionando este ao triângulo escaleno.
Aluno 3	Apesar de mencionar o ângulo de 90º, esta pesquisa não tem subsídios para avaliar o nível de Van Hiele.
Aluno 4	Caracterizou o triângulo retângulo como um pedaço de retângulo. Percebe-se que o aluno analisou as partes do triângulo retângulo para concluir isso.
Aluno 6	Sem subsídios para avaliar o nível de Van Hiele.
Alunos 7, 8, 10 e 11	Identificaram que este é um tipo de triângulo que possui um ângulo de 90º.

Quadro 29: considerações da pesquisa para cada estudante, para o triângulo retângulo.

Do grupo analisado, 9 estudantes identificaram como um polígono com 3 lados, 3 vértices que possui um ângulo de 90°. Um aluno citou que este polígono seria um “pedaço de um retângulo”. Um aluno citou que este polígono teria os três lados com medidas distintas, quatro alunos citaram que as 3 medidas de ângulos seriam diferentes, o que indica a visualização de apenas estas configurações para este polígono.

- Triângulo equilátero: As respostas dos estudantes a partir da investigação no GeoGebra e do preenchimento do formulário online, além das observações feitas pela professora pesquisadora foram as seguintes:

Alunos	E as medidas de lado? O que acontecem com elas? (formulários online)	Observações realizadas pela pesquisadora durante o processo
Aluno 1	Todas elas mudam, sempre ficando do mesmo tamanho.	Disse que os ângulos são sempre iguais, e medem 60° e que os lados ficam sempre com medidas iguais.
Alunos 2 e 5	Todas elas mudam, sempre ficam do mesmo tamanho.	Disseram que quando você mexe um lado todos os outros ficam do mesmo tamanho e que os ângulos são sempre 60°.
Alunos 3 e 8	Todas elas mudam, sempre ficando do mesmo tamanho.	Sem registros.
Aluno 4	Não respondeu.	Disse que os ângulos ficam no mesmo tamanho, que é 60° e que as medidas aumentam e diminuem com a mesma medida.
Aluno 6	Não respondeu.	Disse que os ângulos aumentam e diminuem e que as medidas estão paradas no 60º.
Alunos 7 e 9	Elas se alteram, pois os lados do triângulo se esticam, mas os comprimentos continuam iguais.	Ao serem questionados sobre quais seriam as medidas dos ângulos, o aluno cita sempre 60°. Disseram que os lados ficam todos com o mesmo tamanho.
Aluno 10	Elas se alteram.	Disse que os ângulos são sempre iguais, e medem 60°. Os lados se alteram quando se move a figura, mas ficam sempre com medidas iguais.
Aluno 11	Elas mudam as posições.	Disse que os ângulos são 60° e os lados sempre iguais.
Aluno 12	Não respondeu.	Sem registros.

Quadro 30: respostas dos alunos para os formulários online e observações realizadas pela professora pesquisadora para o triângulo equilátero.

Analisando a tabela, é possível perceber que os alunos 7 e 9 destacaram que, quando movimentavam o polígono, os lados se “esticavam”, mantendo as mesmas medidas. Como os estudantes estavam se referindo às medidas de lado, é possível inferir que perceberam que as medidas de lado se mantinham as mesmas. Além de 7 e 9, os alunos 1, 2 , 5, 10 e 11 perceberam que as medidas de lado permaneciam congruentes. Quanto às medidas de ângulo, à exceção dos alunos 3, 8, e 12, todos os alunos citaram o ângulo de 60º.

Após este momento, os estudantes realizaram o preenchimento da tabela de características para o triângulo equilátero. Com exceção do aluno 3, que não preencheu a tabela, todos os demais estudantes apresentaram o triângulo equilátero como um polígono de 3 lados, que possuem medidas iguais, 3 vértices e 3 ângulos de 60º ou 3 ângulos de mesma medida,

Analisando-se os registros dos alunos de maneira individual, esta pesquisa avalia que todos os estudantes do grupo analisaram o triângulo equilátero em função de suas partes.

- Triângulo isósceles: a seguir, é apresentado o polígono feito pelos alunos 1 e 3 para o triângulo isósceles, no GeoGebra:

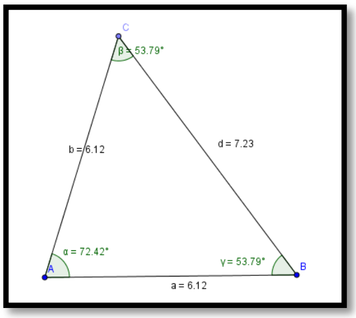


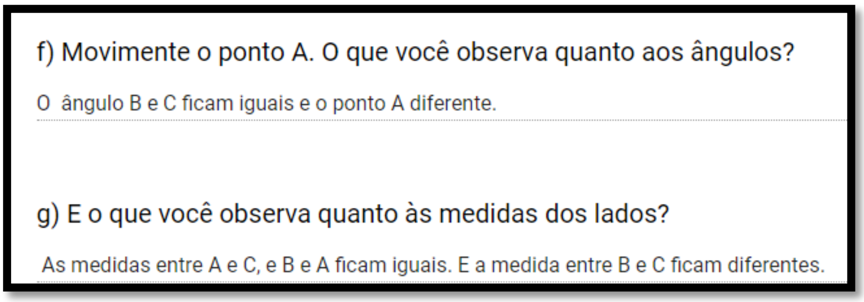
Figura 13: triângulo isósceles feito pelos alunos 1 e 3, no GeoGebra.

No quadro seguinte, apresentam-se as respostas dos alunos retiradas dos formulários online:

Alunos	Respostas dos alunos retiradas dos formulários online	
	O que você observa quanto aos ângulos?	O que você observa quanto às medidas dos lados?
Aluno 1	O ângulo B e C ficam iguais e o ângulo A diferente.	E dois lados com medidas iguais.
Aluno 2	Têm 2 ângulos iguais.	As medidas do segmento A-C e A-B sempre ficam iguais, mas a medida do segmento C-B é diferente.
Aluno 3	Quando movimentamos o ponto A ele não fica igual aos outros, mas o ponto B e o C, mesmo se alterando sempre ficam iguais uns aos outros.	E dois lados com medidas iguais.
Alunos 4 e 6	Movimentam-se, mudando as medidas de lado.	O ponto (B) é o único que fica parado e isso faz com que o outro lado pareça diferente, mas são do mesmo tamanho.
Aluno 5	Os ângulos de baixo têm o mesmo tamanho e o de cima não.	As medidas do segmento A-C e A-B sempre ficam iguais, mas a medida do segmento C-B é diferente.
Alunos 7 e 12	O triângulo tem dois lados iguais e um diferente.	Não respondeu.
Aluna 8	Os ângulos não são iguais.	Duas das medidas são iguais e uma é a "ovelha negra", a única diferente.
Aluno 9	Quando movimento o ponto A os outros pontos se movem.	As medidas do A e do B ficam com a mesma medida.
Aluna 10	O ângulo B e C ficam iguais e o ponto A diferente.	As medidas entre A e C, e B e A ficam iguais. E a medida entre B e C fica diferente.
Aluna 11	Os pontos b e c dos ângulos ficam com os mesmos graus.	Não respondeu.

Quadro 31: respostas dos alunos para os questionamentos do triângulo isósceles.

A aluna 10 citou a presença de dois ângulos iguais e um que tinha medida diferente dos demais, em seu polígono construído. Além disso, percebeu dois lados com medidas congruentes e um lado com medida diferente, conforme mostra a figura 15:



f) Movimente o ponto A. O que você observa quanto aos ângulos?

O ângulo B e C ficam iguais e o ponto A diferente.

g) E o que você observa quanto às medidas dos lados?

As medidas entre A e C, e B e A ficam iguais. E a medida entre B e C ficam diferentes.

Figura 14: respostas da aluna 10 para os questionamentos do triângulo isósceles.

Após o momento de investigação com o GeoGebra, os estudantes efetuaram o preenchimento da tabela de características dos polígonos (quadro 14). Com exceção do aluno 3, todos os outros 11 estudantes definiram o triângulo isósceles como um polígono que possui 3 lados e 3 vértices, dois ângulos de mesma medida e o outro diferente. Além disso, os alunos citaram que o triângulo isósceles possui dois lados de mesma medida e um de medida diferente.

Durante as aulas, os alunos também foram observados no que se refere às atitudes e respostas dadas na forma oral. Tais observações e registros estão sintetizados no quadro 32.

Alunos	Respostas dos estudantes (retiradas da tabela de características)	Observações realizadas pela pesquisadora durante o processo
Aluno 1	Classificou como um polígono que possui 3 lados e 3 vértices, dois ângulos de mesma medida e o outro diferente. Além disso, citou que o triângulo isósceles possui dois lados de mesma medida e um de medida diferente.	Ao mover o objeto construído, o aluno percebeu que poderia deixar um dos ângulos medindo 90°. Percebeu também que poderia deixar todos os ângulos iguais e assim, obteria um triângulo equilátero.
Aluno 2	Classificou como um polígono que possui 3 lados e 3 vértices, dois ângulos de mesma medida e o outro diferente. Além disso, citou que o triângulo isósceles possui dois lados de mesma medida e um de medida diferente.	Observou que a sua construção possuía duas medidas que eram iguais.
Aluno 3	Não respondeu.	Indicou na construção da qual participou, que esta figura possuía dois lados iguais e dois ângulos iguais. Não percebeu o caso em que os três ângulos e os três lados ficariam com medidas iguais.
Alunos 4 e 6	Classificaram como um polígono que possui 3 lados e 3 vértices, dois ângulos de mesma medida e o outro diferente. Além disso, citaram que o triângulo isósceles possui dois lados de mesma medida e um de medida diferente.	Sem observações.

Aluno 5	Classificou como um polígono que possui 3 lados e 3 vértices, dois ângulos de mesma medida e o outro diferente. Além disso, citou que o triângulo isósceles possui dois lados de mesma medida e um de medida diferente.	Sem observações.
Alunos 7 e 12	Classificaram como um polígono que possui 3 lados e 3 vértices, dois ângulos de mesma medida e o outro diferente. Além disso, citaram que o triângulo isósceles possui dois lados de mesma medida e um de medida diferente. Observaram que um ângulo era diferente dos demais.	Sem observações.
Aluna 8	Classificou como um polígono que possui 3 lados e 3 vértices, dois ângulos de mesma medida e o outro diferente. Além disso, citou que o triângulo isósceles possui dois lados de mesma medida e um de medida diferente. Enfatizou que não possui todos os lados nem todos os ângulos com mesma medida.	Observou que uma medida de ângulo era diferente das outras duas. E que isso também ocorria nas medidas de lado.
Aluno 9	Classificou como um polígono que possui 3 lados e 3 vértices, dois ângulos de mesma medida e o outro diferente. Além disso, citou que o triângulo isósceles possui dois lados de mesma medida e um de medida diferente.	O estudante indicou na construção feita por ele quais eram os ângulos que eram iguais. Além disso, o estudante observou a simetria reflexiva presente no triângulo isósceles. Citou que um lado "imitava" o outro ao movimentar a figura, e que, portanto, tinham as mesmas medidas.
Aluna 10	Caracterizou o triângulo isósceles como uma figura que possui 3 lados e 3 vértices, que possui dois ângulos de mesma medida e um diferente.	Percebeu que a sua construção tinha dois ângulos iguais e dois lados iguais e mostrou para a professora, apontando para a tela. Questionada sobre deixar todos os ângulos iguais, percebeu que era possível apresentar um triângulo com ângulos de 60° e lados de mesma medida.
Aluna 11	Classificou como um polígono que possui 3 lados e 3 vértices, dois ângulos de mesma medida e o outro diferente. Além disso, citou que o triângulo isósceles possui dois lados de mesma medida e um de medida diferente. Também observou que apenas dois ângulos seriam sempre da mesma medida.	Sem observações.

Quadro 32: registros dos alunos e observações realizadas pela professora pesquisadora para o triângulo isósceles.

O aluno 9 percebeu o eixo de simetria reflexiva presente neste triângulo. Apenas os alunos 1 e 10 identificaram que o triângulo equilátero também tem dois lados com medidas iguais, o que o caracteriza como triângulo isósceles, e apenas o aluno 1 fez relação entre triângulo isósceles e retângulo.

Após uma análise individual das respostas dos formulários online, das respostas para a tabela de características, e das observações realizadas pela professora pesquisadora, foram realizadas algumas considerações, que são apresentadas a seguir.

Alunos	Considerações feitas pela pesquisadora, a partir das respostas dos alunos.
Aluno 1	O estudante percebeu que este triângulo possui dois lados iguais e dois ângulos congruentes, além de perceber as relações com os triângulos retângulo e equilátero.
Aluno 2	Percebeu dois lados de mesma medida e dois ângulos de mesma medida.
Aluno 3	Percebeu dois lados de mesma medida e dois ângulos congruentes.
Alunos 4 e 6	O aluno parece usar a palavra ponto ao invés de ângulo. Percebeu dois ângulos de mesma medida.
Aluno 5	Observou dois lados iguais e dois ângulos congruentes. Não percebeu o caso em que o triângulo isósceles reproduz um triângulo equilátero.
Alunos 7, 9 e 11	Percebeu dois ângulos de mesma medida.
Aluna 8	Observou dois ângulos congruentes e dois lados de mesma medida. Não observou o caso em que a construção reproduz um triângulo equilátero.
Aluna 10	Observou dois ângulos congruentes e dois lados de mesma medida. Percebeu a relação com o triângulo equilátero.

Quadro 33: considerações da pesquisa para cada aluno, quanto ao triângulo isósceles.

Analisando-se o quadro acima, é possível perceber que todos os alunos analisaram o triângulo isósceles por partes. Além disso, o aluno 1 relacionou este aos triângulos retângulo e equilátero. A aluna 10 observa a relação com o triângulo equilátero apenas.

- Triângulo escaleno: para esta investigação, obteve-se as seguintes respostas para os questionamentos realizados nos formulários online:

Alunos	O que diferencia este triângulo do isósceles ou do equilátero? (formulários online)
Alunos 1, 2, 3 e 12	A diferença deste triângulo para os outros é que ele tem todos os lados diferentes e os ângulos também.
Aluno 4 e 6	Tem diferença, e a diferença é que o triângulo isósceles tem só tem dois lados iguais e já o equilátero tem todos os lados iguais.
Aluno 5	A diferença deste triângulo para os outros é que ele tem todos os lados diferentes e os ângulos também.
Alunos 7 e 9	Ele (o triângulo equilátero) tem todos os lados e ângulos iguais.
Aluna 8	Não, ele não tem nenhum lado igual.
Aluna 10	Não, porque todos os lados são diferentes, e os ângulos também.
Aluna 11	Ele é escaleno.

Quadro 34: respostas dos alunos para o questionamento do triângulo equilátero.

Após este momento, com exceção do aluno 3, os estudantes realizaram o preenchimento da tabela de características, na qual o triângulo escaleno foi caracterizado pelos demais estudantes como um polígono com 3 lados e 3 vértices, cujos ângulos e lados possuem medidas distintas. Para este polígono, os estudantes não fizeram considerações orais.

Analisando-se individualmente as respostas dos formulários online, assim como os dados contidos nas tabelas de características, é possível inferir que todos os estudantes analisaram o triângulo escaleno por partes, de modo a classificar este como um polígono com 3 lados e 3 vértices, cujos ângulos e lados possuem medidas diferentes.

Na próxima seção, será apresentada a análise dos dados, de acordo com a perspectiva dos níveis de Van Hiele para a aprendizagem de triângulos.

6.2.4 Níveis de Van Hiele atingidos pelos estudantes para os triângulos

Os estudantes do grupo foram analisados de forma individual, no que diz respeito à aprendizagem dos triângulos. Para esta análise foram utilizados os níveis de Van Hiele para o pensamento geométrico, da seguinte forma:

- o estudante atingiu o nível 1 se caracterizou o polígono em função de suas partes.
- o estudante atingiu o nível 2 se, além de caracterizar o polígono em função das suas partes, o relacionou ou o comparou a outro triângulo, identificando inclusão de classes e relações entre figuras.

A seguir, apresentam-se os polígonos relacionados a cada triângulo, no que diz respeito às classes de figuras. Para atingir o nível 2, o estudante deve relacionar cada triângulo com todos os polígonos relacionados ao mesmo, conforme o esquema a seguir:

- Triângulo retângulo: isósceles e escaleno;
- Equilátero: isósceles;
- Isósceles: equilátero e triângulo retângulo;
- Escaleno: triângulo retângulo

No caso em que o estudante não relacionar cada triângulo a todos os polígonos relacionados a ele, analogamente à análise dos quadriláteros, o nível atingido pelo aluno será classificado como intermediário, entre os níveis 1 e 2 de Van Hiele, conforme a abordagem de Santos (1998; 2001), já tratada no capítulo 3, a qual assume a existência de níveis intermediários.

A título de exemplo de como foi realizada a análise dos 12 alunos ao final da investigação, apresenta-se a análise dos alunos 1 e 2. Em relação a cada tipo de triângulo, pode-se concluir que os níveis de Van Hiele atingidos pelos estudantes foram:

- Triângulo retângulo: O aluno 1 atingiu o nível 2 de Van Hiele para este polígono, pois percebeu que a relação existente entre triângulo retângulo e o triângulo isósceles e o triângulo retângulo e o triângulo escaleno.

O aluno 2 atingiu um nível entre os níveis 1 e 2 de Van Hiele para o triângulo retângulo, pois analisou tal polígono em função de suas partes, mas apesar de parecer perceber que o triângulo retângulo possui casos específicos de triângulo escaleno, não percebeu a relação existente entre o triângulo retângulo e o triângulo isósceles.

- Triângulo equilátero: O aluno 1 atingiu o nível 2 para todos os triângulos equiláteros, pois percebeu que o triângulo equilátero é um caso especial de triângulo isósceles.

O aluno 2 atingiu o nível 1 de Van Hiele para este polígono, uma vez que, conseguiu analisar e classificar o mesmo em função de suas componentes. Todavia não notou que triângulo equilátero é um caso particular de triângulo isósceles.

- Triângulo isósceles: O aluno 1 atingiu o nível 2 de Van Hiele, pois percebeu as relações existentes entre o triângulo retângulo e o triângulo isósceles. Além disso, percebeu que o triângulo equilátero é um caso especial de triângulo isósceles.

O aluno 2 atingiu o nível 1 de Van Hiele para este polígono, uma vez que conseguiu analisar e caracterizar o mesmo em função de suas características. Todavia, não notou que triângulo equilátero é um caso particular de triângulo isósceles.

- Triângulo escaleno: Os alunos 1 e 2 atingiram o nível 2 para este triângulo, pois perceberam as relações existentes entre o triângulo retângulo e o triângulo escaleno.

A seguir, segue o resumo da análise dos níveis atingidos por todos os estudantes do grupo analisado, individualmente, para os triângulos

Aluno	Triângulo retângulo		Equilátero		Isósceles		Escaleno	
	Analisa por partes	Relaciona com:	Analisa por partes	Relaciona com:	Analisa por partes	Relaciona com:	Analisa por partes	Relaciona com:
Aluno 1	Sim	Escaleno Isósceles	Sim	Isósceles	Sim	Retângulo Equilátero	Sim	Retângulo
	Nível 2		Nível 2		Nível 2		Nível 2	
Aluno 2	Sim	Escaleno	Sim	Nenhum	Sim	Nenhum	Sim	Retângulo
	Nível entre 1 e 2		Nível 1		Nível 1		Nível 2	
Aluno 3	Sem condições de avaliar	Nenhum	Sim	Nenhum	Sim	Nenhum	Sim	Nenhum
	Sem condições de avaliar		Nível 1		Níve l 1		Nível 1	
Aluno 4	Sim	Nenhum	Sim	Nenhum	Sim	Nenhum	Sim	Nenhum
	Nível 1		Nível 1		Nível 1		Nível 1	
Aluno 5	Sim	Escaleno	Sim	Nenhum	Sim	Nenhum	Sim	Retângulo
	Nível entre 1 e 2		Nível 1		Nível 1		Nível 2	
Aluno 6	Sem condições de avaliar	Nenhum	Sim	Nenhum	Sim	Nenhum	Sim	Nenhum
	Sem condições de avaliar		Nível 1		Nível 1		Nível 1	
Aluno 7	Sim	Nenhum	Sim	Nenhum	Sim	Nenhum	Sim	Nenhum
	Nível 1		Nível 1		Nível 1		Nível 1	
Aluna 8	Sim	Nenhum	Sim	Nenhum	Sim	Nenhum	Sim	Nenhum
	Nível 1		Nível 1		Nível 1		Nível 1	
Aluno 9	Sim	Escaleno	Sim	Nenhum	Sim	Nenhum	Sim	Retângulo
	Nível entre 1 e 2		Nível 1		Nível 1		Nível 2	
Aluna 10	Sim	Nenhum	Sim	Isósceles	Sim	Equilátero	Sim	Nenhum
	Nível 1		Nível 2		Nível entre 1 e 2		Nível 1	
Aluna 11	Sim	Nenhum	Sim	Nenhum	Sim	Nenhum	Sim	Nenhum
	Nível 1		Nível 1		Nível 1		Nível 1	
Aluno 12	Sim	Escaleno	Sim	Nenhum	Sim	Nenhum	Sim	Retângulo
	Nível entre 1 e 2		Nível 1		Nível 1		Nível 2	

Quadro 35: níveis de Van Hiele atingidos pelos alunos para os triângulos

A quantidade de alunos por nível de Van Hiele pode ser visualizada no quadro a seguir:

Níveis de Van Hiele atingidos pelos alunos	Triângulo Retângulo		Triângulo Equilátero		Triângulo Isósceles		Triângulo Escaleno	
Nível 1	5	41,67%	10	83,33%	10	83,33%	7	58,33%
Entre os níveis 1 e 2	4	33,33%	0	0,00%	1	8,33%	0	0,00%
Nível 2	1	8,33%	2	16,67%	1	8,33%	5	41,67%
Sem subsídios para avaliar o nível de Van Hiele	2	16,67%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%

Quadro 36: número de alunos por nível de Van Hiele para os triângulos.

Na seção que segue, será apresentada a análise dos dados, de acordo com a perspectiva dos níveis de Van Hiele para a aprendizagem das Transformações Geométricas desenvolvida neste trabalho através da metodologia da Investigação Matemática utilizando o software GeoGebra.

6.3 Investigando as Transformações Geométricas através de Tesselações

Nesta seção, apresenta-se a análise referente ao desenvolvimento do processo de aprendizagem, para o grupo de estudantes analisados, das seguintes Transformações Geométricas no plano: translação, rotação e reflexão.

Com o objetivo de realizar a investigação referente à parte de Transformações Geométricas, os estudantes realizaram atividades envolvendo tesselações. Para isso, inicialmente fizeram uso do applet *Design a Tessellation*, que tem por objetivo cobrir o plano baseando-se em uma unidade de tesselação com unidades quadradas, construída pelo usuário, que é reproduzida ao longo do plano, de acordo com cada Transformação Geométrica:

- Simple Repeat (Simples repetição ou Translação): Cobre o plano usando translação da unidade de tesselação.

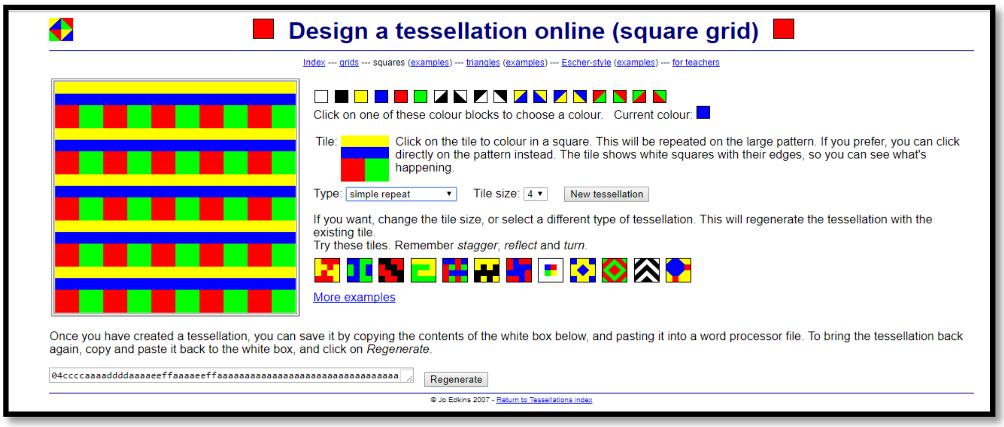


Figura 15: cobertura do plano para a o modo Simple Repeat.

- ¼ turn (¼ de volta): Cobre o plano utilizando um quarto de volta para a direita, em relação à unidade de tesselação à esquerda ou acima.

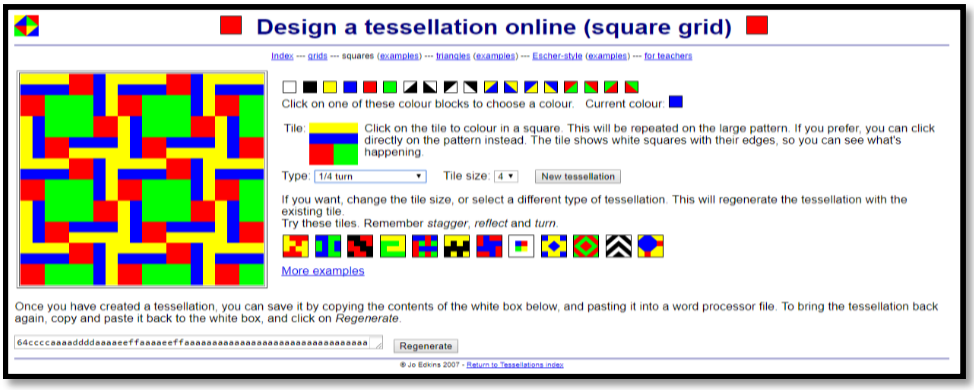


Figura 16: cobertura do plano para a o modo ¼ turn.

- ½ turn (Meia volta): Cobre o plano utilizando meia volta da unidade à esquerda ou acima.
- Staggered: Cobre o plano, utilizando uma translação de meia unidade para o lado, na linha de cobertura seguinte.
- Reflected vertically (Reflexão vertical): Cobre o plano utilizando a reflexão vertical de cada coluna de cobertura.
- Reflected horizontally (Reflexão horizontal): Cobre o plano utilizando a reflexão horizontal de cada linha de cobertura.
- Reflected both ways (Reflexão vertical e horizontal): Cobre o plano utilizando reflexão vertical e horizontal.

Serão apresentados, a seguir, os resultados obtidos com a 1ª Atividade da sequência de investigação das Transformações Geométricas.

6.3.1 1ª Atividade

Nesta etapa do trabalho, os estudantes produziram diferentes coberturas para o plano no site em questão, utilizando para isso no mínimo 4 cores distintas. Ao longo destas construções, foram questionados quanto aos efeitos de cada transformação produzida pelo applet. Esperava-se que os estudantes compreendessem o que é uma tesselação/pavimentação do plano, utilizando para isso um quadrado como unidade de tesselação.

Figura 17: coberturas do plano feitas por alunos.

Foi solicitado aos estudantes que descrevessem como se comportava a cobertura do plano, conforme cada transformação. Com esta descrição, objetivou-se que os estudantes identificassem alguns movimentos das unidades de tesselação no plano, descobrindo assim os efeitos das Transformações Geométricas translação, rotação e reflexão nesse plano. Nas demais atividades envolvidas neste trabalho, não foi enfatizada a transformação do tipo “Staggered” (Translação diferente), já que esta não era um dos objetos de estudo desta pesquisa.

Seguem as respostas dos alunos, que foram retiradas dos formulários online (exceto aluna 8, que não compareceu neste dia):

Alunos	Respostas dos alunos retiradas dos formulários online				
	Simples repetição	Reflexão vertical	Reflexão Horizontal	Rotação de meia volta	Rotação de um quarto de volta
Alunos 4 e 6	Ela coloca um do mesmo lado e na posição igual ao outro. Não mudava nada.	O da segunda e quarta linha mudam os quadradinhos. Na vertical todos os quadrados ficavam do mesmo lugar. Só o preto que ficava mudando da ponta de cima, do lado direito para o esquerdo.	Ficar na posição horizontal e de cabeça para baixo.	Nessa fica na posição horizontal e o que está na direita vai para a esquerda e o que está na esquerda vai para a direita. E só acontecem na primeira, terceira e quinta linhas.	Ele ficava igual à reflexão horizontal.
Alunos 7 e 9	Ficam vários quadradinhos iguais se repetindo por toda a cobertura do plano. A unidade de tesselação fica se repetindo.	Ele meio que vira de lado. As linhas (verticais) ficam refletindo a que está do lado.	Uma linha fica normal e a outra fica de cabeça para baixo. As linhas (horizontais) ficam refletindo a que esta cima.	Os quadradinhos ficam girando 180 graus.	Os quadradinhos ficam girando 90 graus.
Alunos 2 e 5	Ficar em quadrados.	Ficar na posição vertical	Ficar na posição horizontal.	Ângulo 180 graus.	90 graus.
Alunos 1 e 3	Ficar normal.	Ficar na posição vertical. Espelhar na Vertical	Ficar na posição horizontal. Espelhar na horizontal.	Girar meia volta. 180 graus.	Girar metade de meia volta. 90 graus.
Aluno 12	Ficar normal	Espelhar na Vertical	Espelhar na horizontal.	Girar meia volta.	Girar metade de meia volta.
Aluno 10	Colocar em quadrados.	Ele se virou, e ficou igual a um espelho.	Colocam os de cima pra baixo e os de baixo para cima.	Não respondeu.	Não respondeu.
Aluno 11	Ele está um ao do lado do outro e um embaixo do outro.	Eles ficam um do ladinho do outro parecendo uma corrente e estão na vertical.	Eles estão um de frente para o outro como se fosse um espelho. E esse espelho está na horizontal.	Eles ficam iguais a simples repetição.	Metade de uma meia volta
Aluna 8	Não compareceu.	Não compareceu.	Não compareceu.	Não compareceu.	Não compareceu.

Quadro 37: definições dos estudantes para cada transformação.

- Simples Repetição: os estudantes 1, 3 e 12 descreveram esta transformação como "ficar normal", sugerindo nenhuma mudança nas unidades de cobertura do plano. Os alunos 2, 5, 7, 9 e 10 citaram que eram dispostos em quadrados, sugerindo que a disposição das unidades de cobertura do plano estava organizada em quadrados justapostos. Os alunos 4, 6 e 11 disseram que eram dispostos um abaixo do outro ou um ao lado do outro.

- Reflexão Vertical: os alunos 1, 2, 3 e 5 definem esta transformação como “ficar na posição vertical”, provavelmente sugerindo a presença do eixo de reflexão vertical. Os estudantes 7 e 9 a definem como “virar de lado” e “refletir o que está ao lado”, observando a mudança entre as unidades de tesselação antes e depois dos eixos verticais. Já os alunos 1, 3, 10 e 12 a apresentam como espelhar na vertical; e os alunos 4, 6 e 11 só fizeram considerações visuais quanto às regularidades das colunas.

- Reflexão Horizontal: os estudantes 1, 2, 3, 4, 5 e 6 definiram esta transformação como “ficar na horizontal”, provavelmente sugerindo a presença do eixo de reflexão horizontal. Os alunos 4, 6, 7 e 9 a definiram como “ficar de cabeça para baixo”, observando as variações entre as unidades de tesselação antes e depois do eixo horizontal. Já os estudantes 7, 9 a apresentaram como “refletir o que está em cima”, e os discentes 1, 3, 11 e 12 citaram o espelho na horizontal. A aluna 10 cita observa uma troca de posição entre as linhas do plano de tesselação, observando mudanças de posição entre as unidades de tesselação antes e depois do eixo de reflexão.

- Rotação de ½ volta: os alunos 1, 2, 3, 5, 7 e 9 disseram que era como um ângulo de 180°, os estudantes 1, 3 e 12 disseram que era como se os quadrados girassem ½ volta, os alunos 4, 6 e 11 fizeram considerações visuais inconclusivas e a aluna 10 não respondeu.

- Rotação de ¼ de volta: os alunos 1, 2, 3, 5, 7 e 9 relacionaram esta transformação a um giro de 90°, os estudantes 1, 3, 12 e 11 disseram que era como a metade de uma meia volta. Já os alunos 4 e 6 fizeram considerações visuais inconclusivas e a aluna 10 não respondeu.

Nesta atividade, o aluno 3 citou que refletir é espelhar uma figura. Portanto, concluiu que a reflexão horizontal é o mesmo que colocar um espelho na horizontal.

De acordo com o aluno, quando se espelha uma figura, próximo ao eixo de reflexão, o traço fica mais grosso.

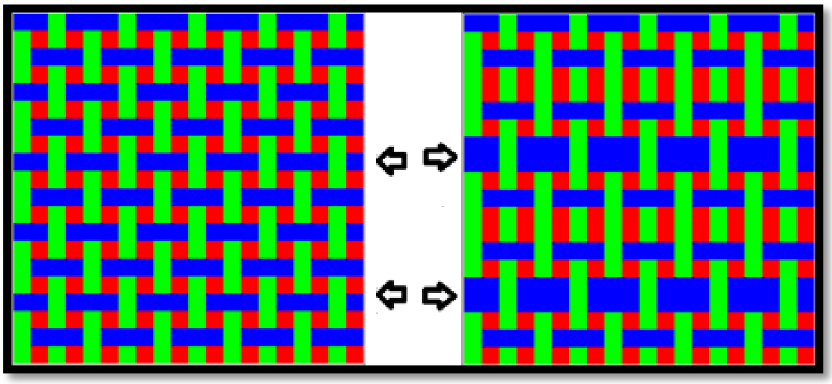


Figura 18: cobertura para o plano criada pelos alunos 1, 3 e 12 para a simples repetição e reflexão horizontal.

Aluna 8: Ao realizar a reflexão horizontal no plano com a unidade de tesselação criada no site, a aluna foi questionanda quanto ao motivo que levou a parte em preto da figura ficar mais comprida. A aluna diz que é porque ele refletiu na peça de baixo.

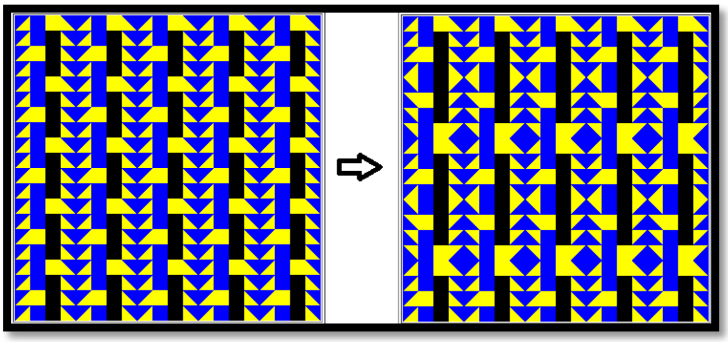


Figura 19: cobertura para o plano criada pela aluna 8 para a simples repetição e reflexão horizontal.

Availia-se que, à exceção da aluna 8, que estava ausente nesta atividade, todos os estudantes analisaram e definiram a translação e a reflexão horizontal através de suas características.

Para a reflexão vertical, avaliou-se que os alunos 4, 6 e 11 realizaram apenas considerações em termos visuais, sem analisar as mudanças nas unidades de tesselação. Os demais alunos presentes analisaram a reflexão vertical e a definiram através de suas características.

Para a rotação de ½ volta e para a rotação de ¼ de volta, avaliou-se que os alunos 4 e 6 realizaram apenas considerações visuais globais. A aluna 11 analisou e caracterizou a rotação de ¼ de volta, mas fez considerações globais quanto à rotação de ½ volta. A aluna 10 não respondeu e os demais estudantes presentes analisaram as rotações de ½ volta e de ¼ de volta, definindo estas através de suas características.

Serão apresentados, a seguir, os resultados obtidos com a 2ª Atividade da sequência de investigação das Transformações Geométricas.

6.3.2 2ª Atividade

Na sequência do trabalho, foi solicitado aos estudantes que escolhessem 4 tipos de ilusões de ótica contidas no site do *Design a Tessellation*, para que, assim, pudessem analisar cada uma delas.

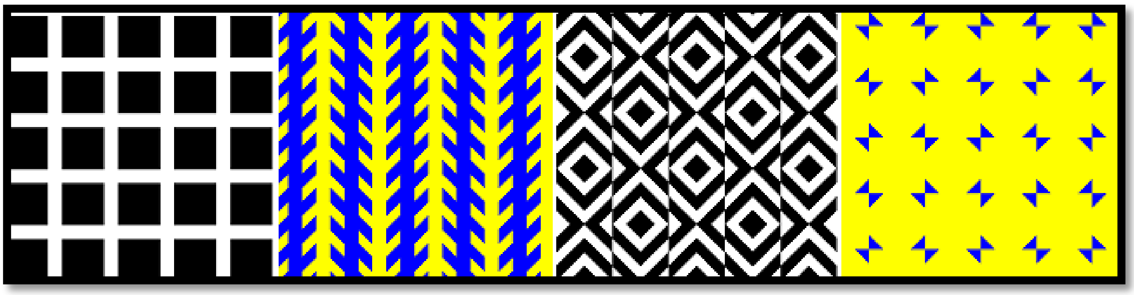


Figura 20: exemplos de algumas ilusões de ótica contidas no site do applet *Design a Tessellation*.

Em seguida, foi solicitado aos estudantes que identificassem a unidade de tesselação e a transformação envolvida para os 4 tipos de ilusão de ótica escolhidos. Esta atividade tinha por objetivo que os alunos conseguissem identificar a unidade de tesselação, analisando os movimentos causados pela Transformação Geométrica envolvida, de modo a identificar a transformação correta para cada caso dentro de uma cobertura do plano já pronta. Os estudantes tiveram que registrar a unidade de tesselação descoberta em uma folha impressa, contendo uma grade quadriculada 4 unidades x 4 unidades, pintando a mesma com lápis de cor. Ao lado da grade, registraram por escrito o tipo de transformação realizada.

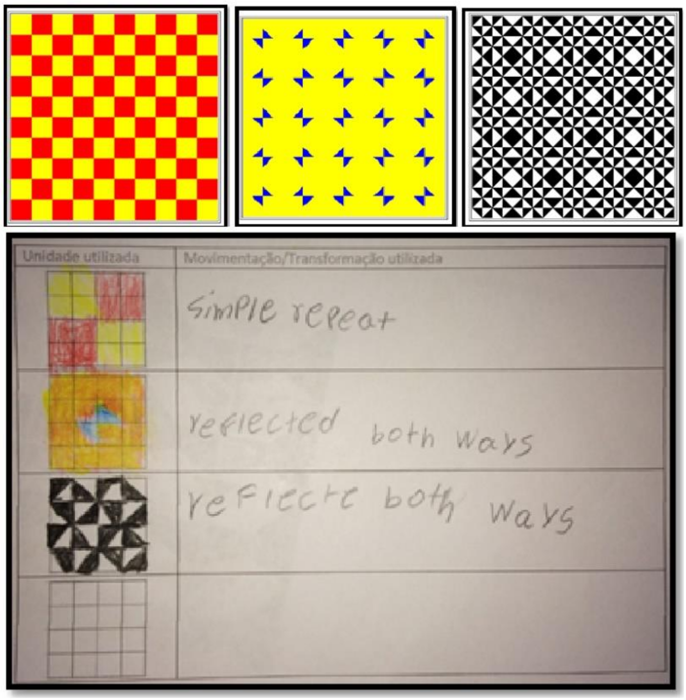


Figura 21: tesselações reproduzidas pelo aluno 9 e registro sobre as unidades de tesselação e Transformações Geométricas utilizadas.

O aluno 5 parece ter feito confusão ao identifcar a unidade de tesselação para a seguinte cobertura do plano:

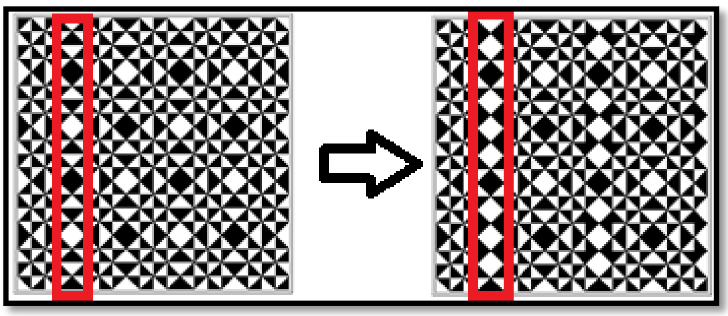


Figura 22: Cobertura para o plano original e a reproduzida pelo aluno 5

Embora o estudante tenha identificado a transformação de maneira correta, se equivocou ao representar a unidade de tesselação. Atribui-se este equívoco a complexidade da cobertura no plano utilizada pelo estudante.

A aluna 11 conseguiu ter um efeito semelhante (em relação à versão original) para uma das ilusões de ótica escolhida. A estudante percebeu que a transformação que havia sido utilizada era a reflexão vertical, porém não identificou de maneira correta a unidade de tesselação, produzindo uma cobertura para o plano com algumas linhas em branco, que não aparecem na tesselação original:

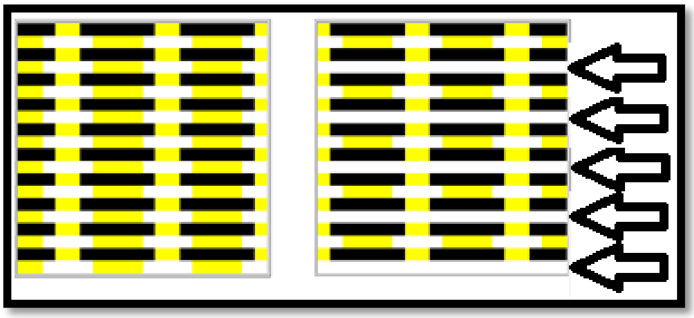


Figura 23: versão original da ilusão de ótica e versão reproduzida pela aluna.

Aluno 1: Na atividade de descobrir quais eram as unidades de tesselação referentes a cada tipo de ilusão, o estudante conseguiu perceber de maneira correta quais eram as unidades de tesselação e as Transformações Geométricas utilizadas para a reprodução dos desenhos propostos.

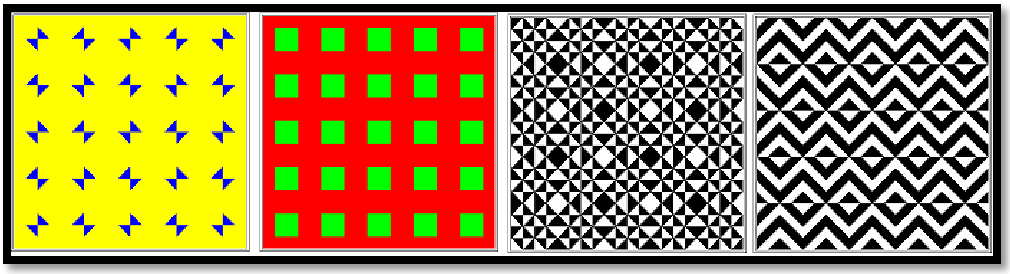


Figura 24: ilusões de ótica escolhidas pelo aluno 1.

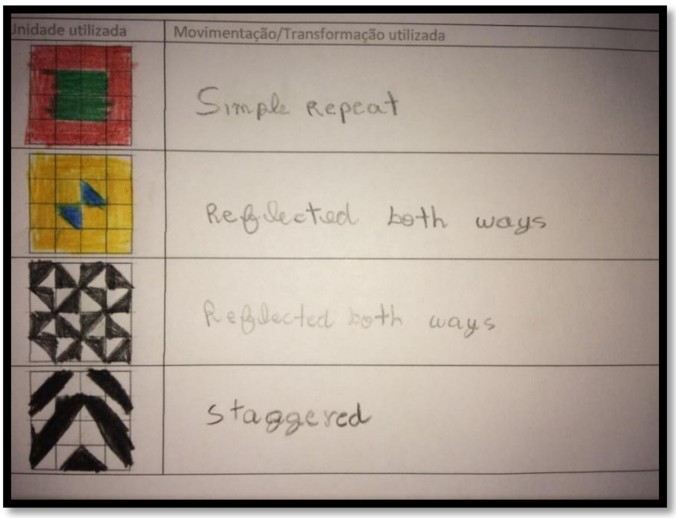


Figura 25: unidades de tesselação e Transformações Geométricas descobertas pelo aluno 1 para cada ilusão de ótica reproduzida.

Aluno 2: Na atividade de identificação das unidades de tesselação relacionadas a cada tipo de ilusão de ótica, o estudante conseguiu compreender a atividade e identificar as unidades de tesselação e cada Transformação Geométrica utilizada de maneira correta.

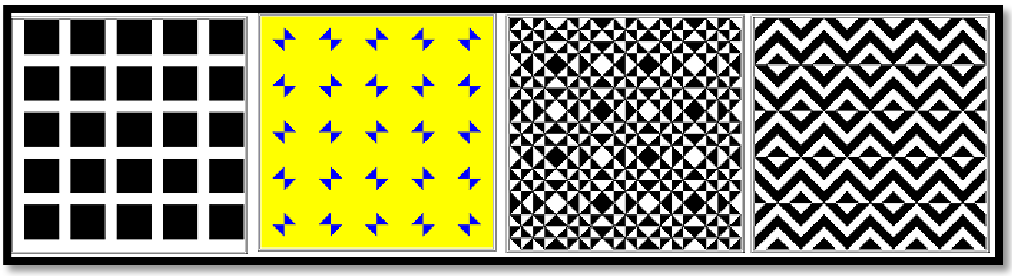


Figura 26: ilusões de ótica escolhidas pelo aluno 2.

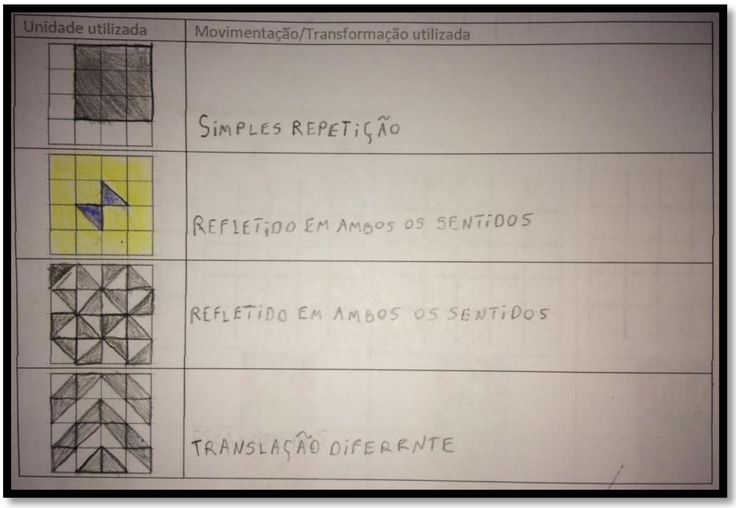
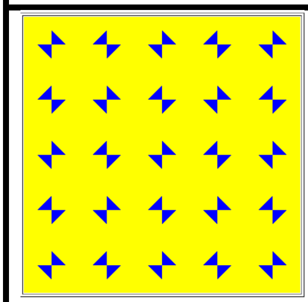
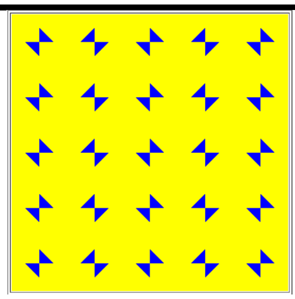


Figura 27: unidades de tesselação e Transformações Geométricas descobertas pelo aluno 2 para cada Ilusão de ótica reproduzida.

Isto aponta que o estudante conseguiu identificar cada unidade de tesselação, assim como cada transformação envolvida.

Para a resolução desta atividade, no segundo polígono, o aluno 2 havia dito que a transformação correta era a reflexão vertical. Em seguida, foi questionado sobre o efeito da reflexão vertical sobre este polígono, que acabava resultando em uma configuração muito semelhante, mas diferente da original.

Versão original do site *Design a Tessellation*	Versão do aluno
	

Quadro 38: versão original e versão do aluno para a ilusão de ótica escolhida.

O estudante, então, precisou fazer uso de espelhos colocados na frente da tela para perceber as diferenças entre o desenho original e o obtido com a reflexão vertical. Percebeu então que, além do eixo vertical, esta cobertura possuía também um eixo horizontal. Chegou à conclusão, assim, que refletir é o mesmo que espelhar.

Com exceção dos alunos 5 e 9, todos os estudantes conseguiram identificar de maneira correta todas as unidades de tesselação envolvidas em cada ilusão de ótica. Todos os alunos conseguiram identificar as Transformações Geométricas de maneira correta, exceto o aluno 2.

Serão apresentados, a seguir, os resultados obtidos com a 3ª Atividade da sequência de investigação das Transformações Geométricas.

6.3.3 3ª Atividade

Foi solicitado aos estudantes que criassem uma unidade de tesselação no site e que utilizassem as diferentes Transformações Geométricas disponíveis no applet. Os estudantes tiveram que preencher a seguinte tabela, que foi entregue em uma folha impressa, quanto aos efeitos de cada transformação ao redor da primeira unidade da cobertura no plano:

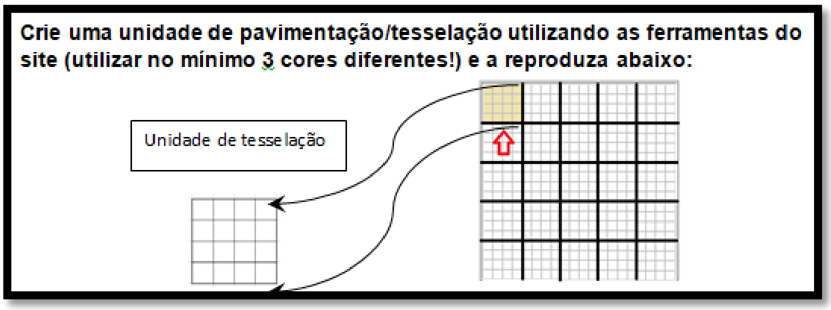
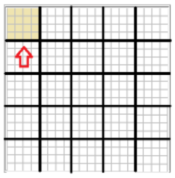
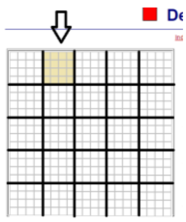
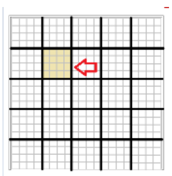
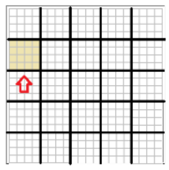


Figura 28: Orientações da atividade sobre a unidade de tesselação no plano do applet *Design a Tessellation.*

Efetue cada comando e em seguida preencha a tabela abaixo				
Reproduza o que acontece com cada unidade em destaque quando você utiliza:				
Simples Repetição (translação)				
Reflexão vertical				
Reflexão horizontal				
Ferramenta rotação ½ volta				
Ferramenta rotação ¼ de volta				

Quadro 39: atividade de análise das unidades de tesselação no plano do applet *Design a Tessellation.*

Com esta atividade, objetivou-se que os estudantes percebessem os efeitos de cada Transformação Geométrica nas unidades da tesselação ao redor da primeira unidade do plano. Neste trabalho, esta região do plano de tesselação foi denominada 1º quadrante do plano de tesselação:

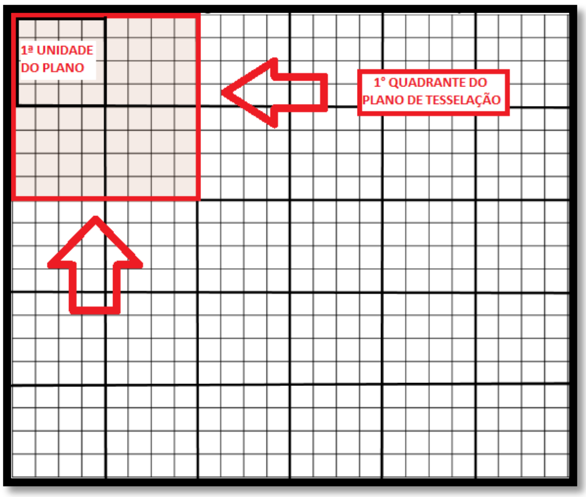


Figura 29: Representação do 1º quadrante do plano de tesselação

Todos os alunos conseguiram criar a unidade de tesselação utilizando o applet *Design a Tessellation.*

Nesta atividade, os estudantes 1, 3 e 12 criaram a seguinte cobertura para o plano:

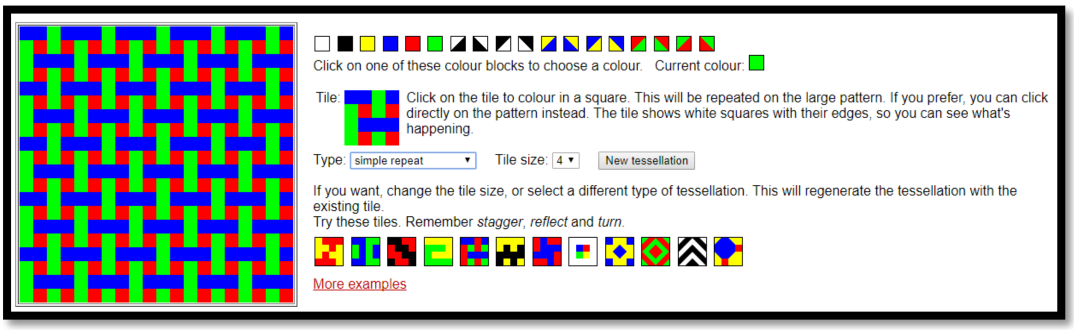


Figura 30: cobertura para o plano e unidade de tesselação criada pelos alunos 1, 3 e 12.

Ao analisar o primeiro quadrante, nota-se que os estudantes conseguiram verificar os movimentos corretos para cada tipo de transformação:

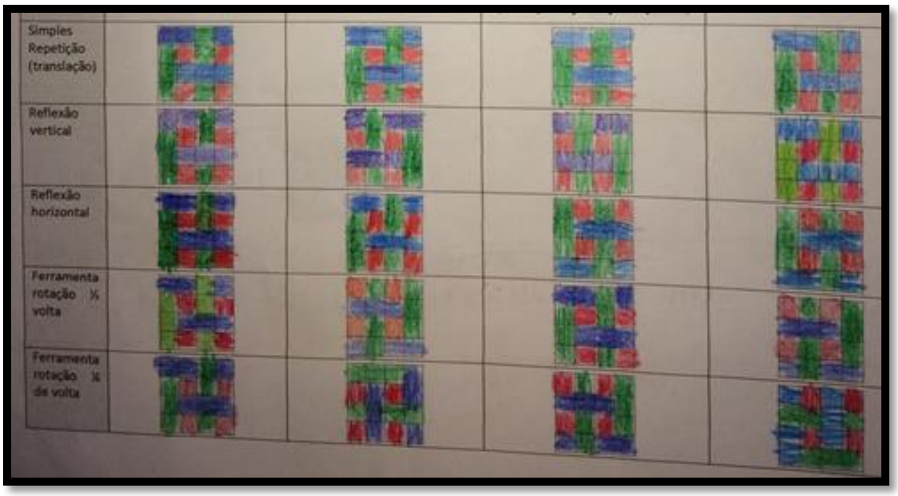


Figura 31: atividade sobre o comportamento das unidades de tesselação criada pelos alunos 1, 3 e 12.

Os alunos 2 e 5 criaram a seguinte cobertura para o plano:

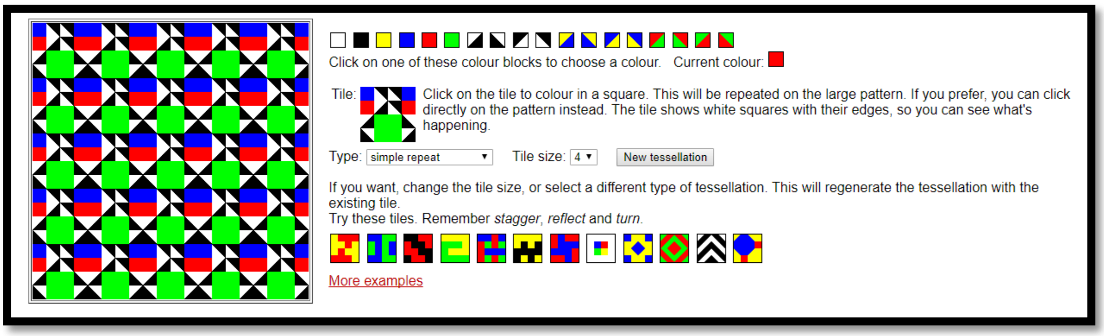


Figura 32: cobertura para o plano e unidade de tesselação criada pelos alunos 2 e 5.

Em seguida, representaram os efeitos das Transformações Geométricas nas unidades de tesselação do primeiro quadrante do plano.

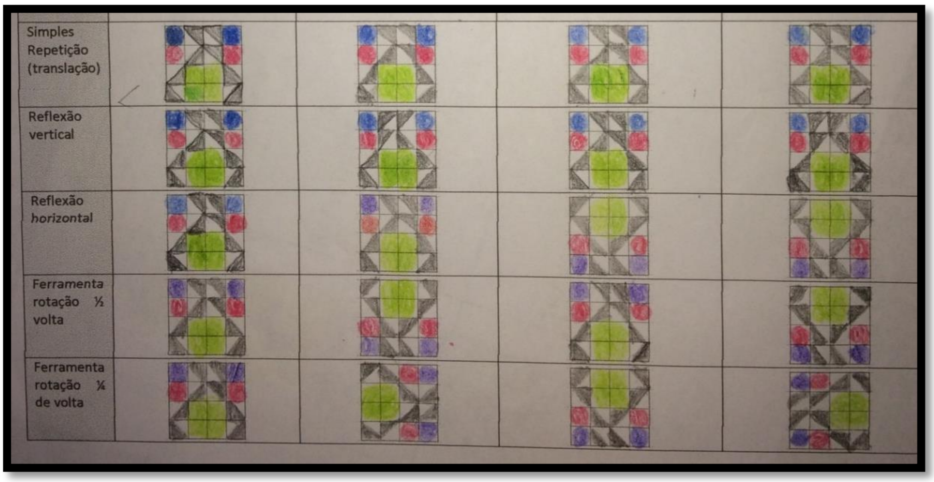


Figura 33: atividade sobre o comportamento das unidades de tesselação criada pelos alunos 2 e 5.

Os estudantes conseguiram reproduzir os movimentos das unidades do primeiro quadrante de tesselação de maneira correta.

A dupla formada pelos alunos 4 e 6 não forneceu subsídios para uma avaliação, pois neste caso, apresentou uma unidade de tesselação com simetria horizontal e vertical:

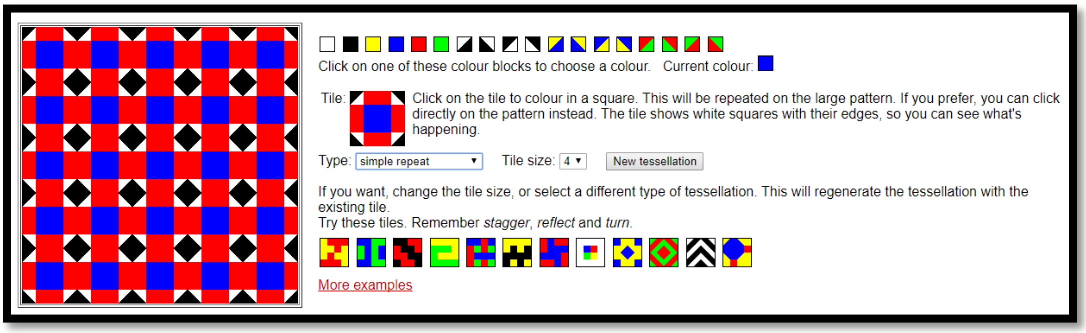


Figura 34: cobertura para o plano e unidade de tesselação criada pelos alunos 4 e 6.

Por esta razão, no momento de verificar os efeitos das Transformações Geométricas, os estudantes desta dupla não obtiveram dados que possibilitassem a visualização das diferenças entre os movimentos de translação, reflexão e rotação:

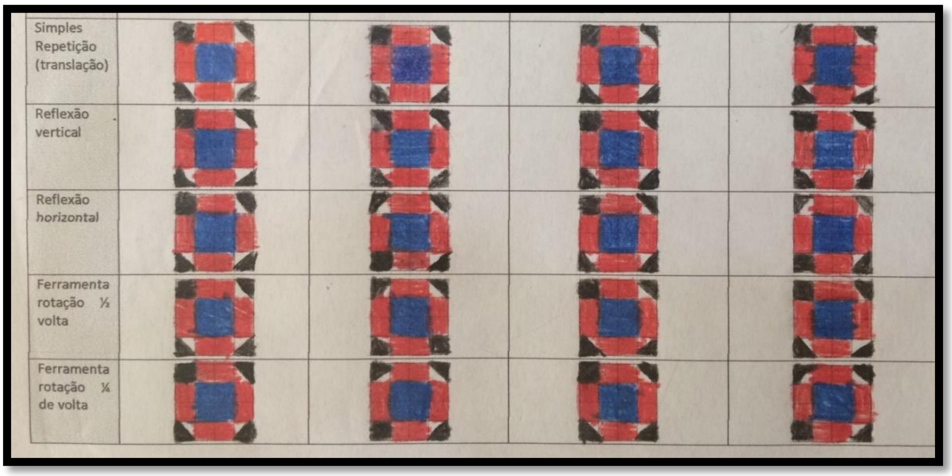


Figura 35: atividade de observação do comportamento das unidades de tesselação criada pelos alunos 4 e 6.

Sendo assim, esta atividade não carrega informações que possibilitem concluir o nível de compreensão dos estudantes.

Os alunos 7 e 9 produziram a seguinte unidade de tesselação e cobertura para o plano:

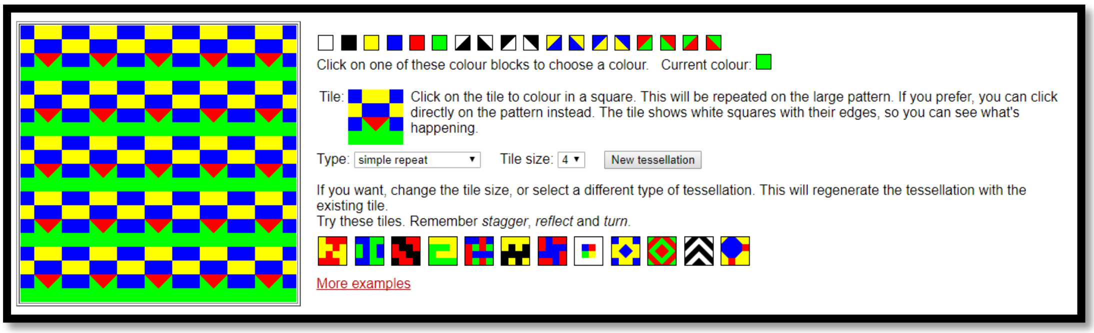


Figura 36 : cobertura para o plano produzida pelos alunos 7 e 9.

Como a unidade de tesselação criada pelos estudantes apresenta simetria vertical, esta atividade não carrega subsídios para avaliar a aprendizagem destes dois estudantes para a reflexão vertical.

Os alunos 7 e 9 mostraram não ter compreendido a reflexão horizontal, já que apresentaram unidades de tesselação refletidas nelas mesmas, conforme as figuras que seguem. Quanto a rotação de ½ volta, os dados se encontram ilegíveis ou incoerentes para os dois alunos.

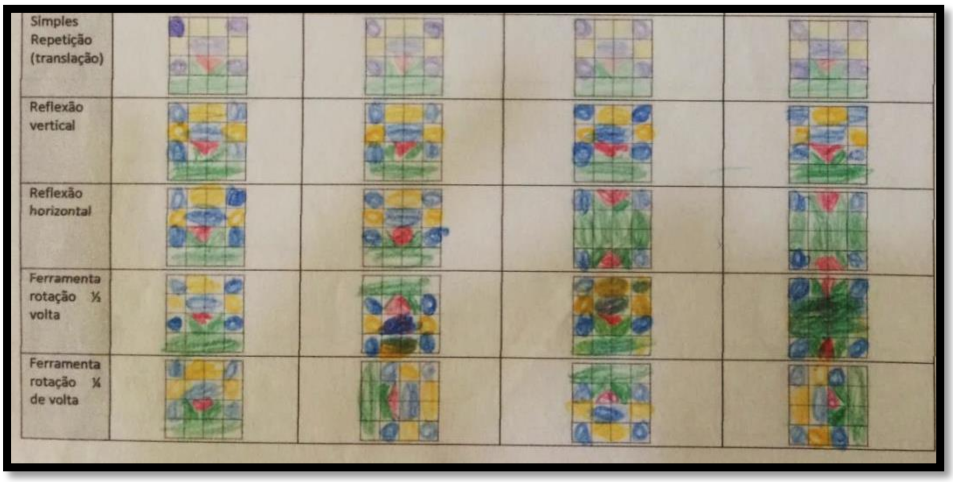


Figura 37: atividade preenchida pelo aluno 7.

Figura 38: atividade preenchida pelo aluno 9.

A estudante 10 criou uma unidade de tesselação que apresentou simetria vertical, não gerando subsídios que evidenciem a compreensão da mesma quanto à reflexão vertical, conforme as figuras que seguem.

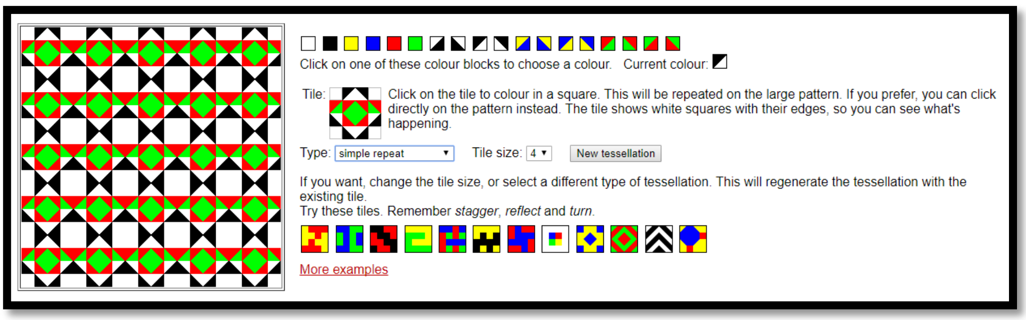


Figura 39: cobertura para o plano e unidade de tesselação criadas pela aluna 10.

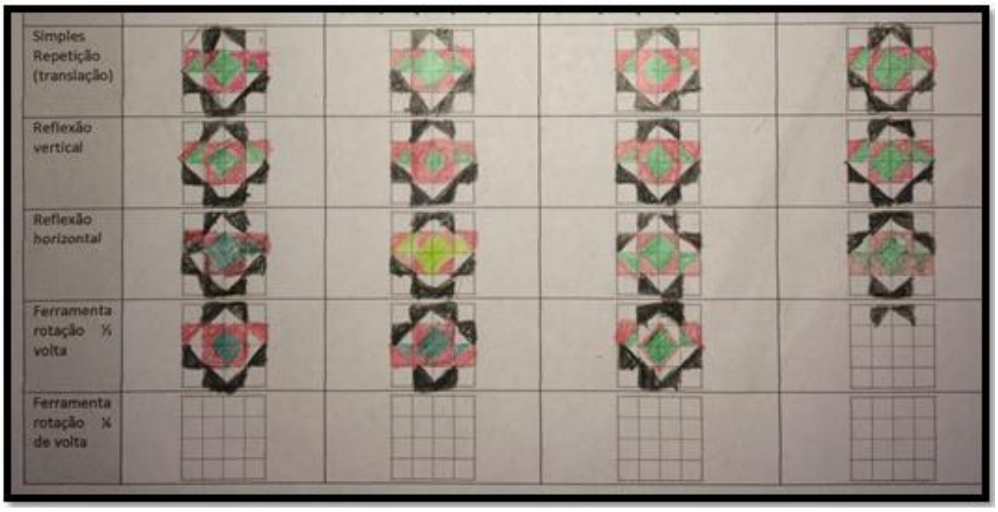


Figura 40: atividade preenchida pela aluna 10.

Através deste registro a aluna mostra compreensão da simples repetição e da reflexão horizontal. Quanto à rotação de ½ volta e de ¼ de volta, esta atividade não evidencia subsídios para uma análise da aprendizagem da aluna 10.

A aluna 11 também criou a seguinte cobertura para o plano:

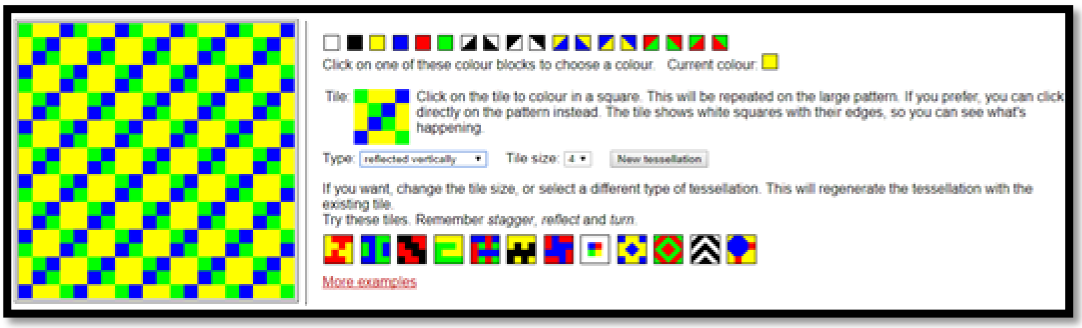


Figura 41: cobertura para o plano e unidade de tesselação criadas pela aluna 11.

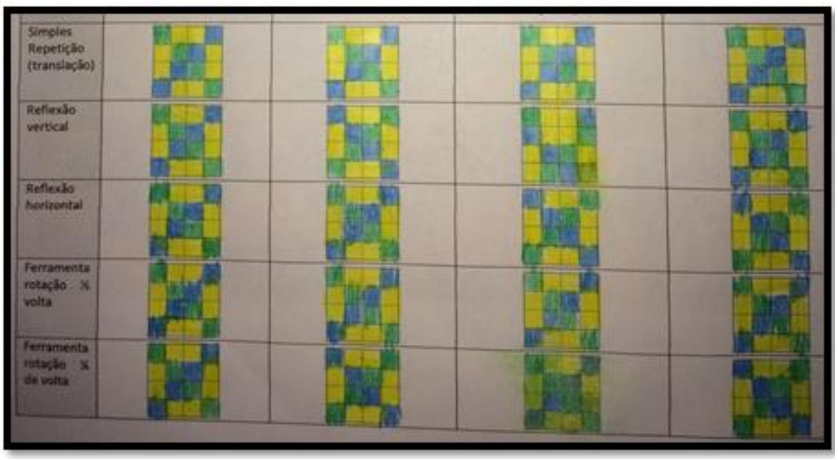


Figura 42: atividade preenchida pela aluna 11.

A aluna parece ter percebedido de maneira coerente os movimentos das unidades de tesselação para todas as transformações, exceto para a reflexão vertical, na qual a terceira unidade de tesselação parece com uma configuração incoerente com as demais.

Do grupo analisado, os alunos 1, 2, 3, 5 e 12 conseguiram representar corretamente todos movimentos das unidades do primeiro quadrante, do plano de tesselação. A aluna 8 não participou desta atividade.

A seguir, serão apresentados os resultados obtidos com a 4ª Atividade da sequência de investigação das Transformações Geométricas.

6.3.4 4ª Atividade:

Para esta atividade, foi solicitado primeiramente que os estudantes montassem uma unidade quadrada de tesselação com 4 unidades de comprimento e 4 unidades de comprimento, a qual utilizasse os seguintes polígonos previamente estudados:

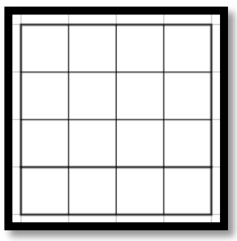
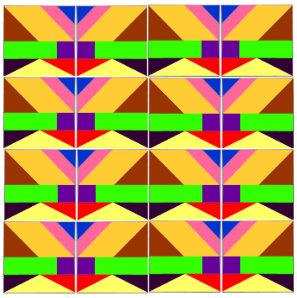
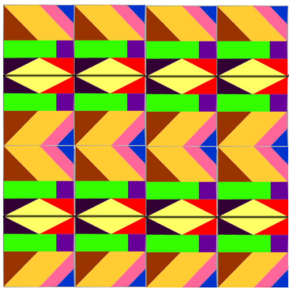
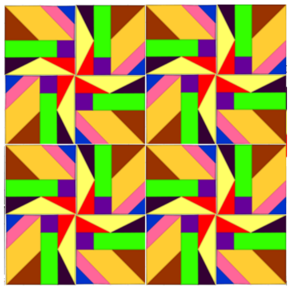


Figura 43: unidade de tesselação 4 unidades x 4 unidades

- Quadrado
- Retângulo
- Paralelogramo
- Losango
- Trapézio
- Triângulos: retângulo, isósceles ou equilátero.

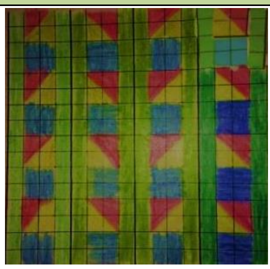
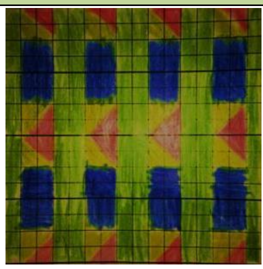
Em seguida, foi solicitado aos estudantes que realizassem a cobertura do plano utilizando eixos de reflexão horizontal, reflexão vertical e rotação.

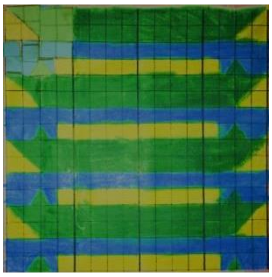
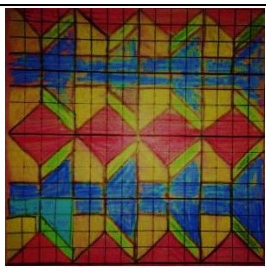
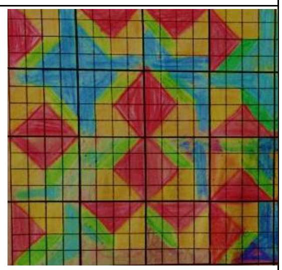
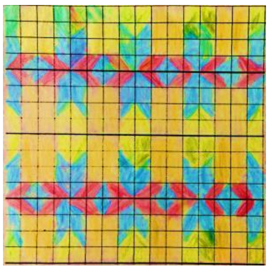
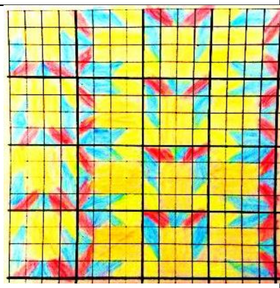
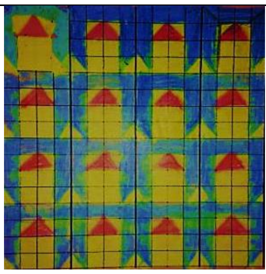
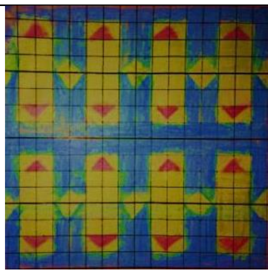
Reflexão vertical	Reflexão horizontal	Rotação
		

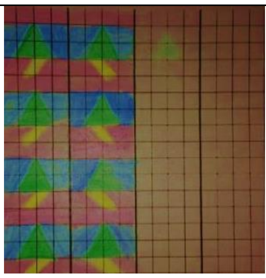
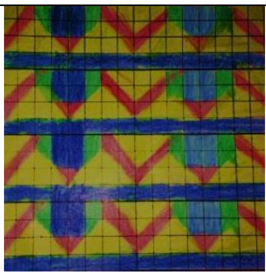
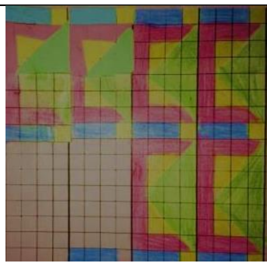
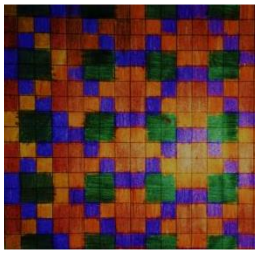
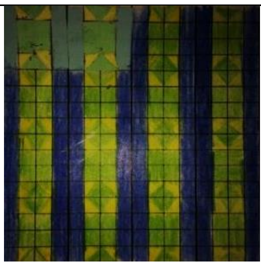
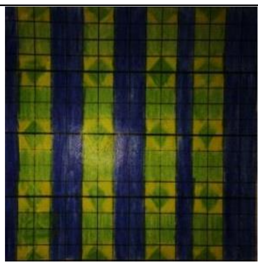
Quadro 40: exemplos apresentados aos estudantes para os diferentes tipos de transformação, na atividade de cobertura do plano com colagem e pintura.

Esta atividade teve por objetivo que os estudantes identificassem os eixos de reflexão e realizassem as Transformações Geométricas solicitadas. Além disso, esta atividade buscou integrar diferentes Transformações Geométricas em uma única cobertura do plano.

Nesta atividade, os alunos não encontraram dificuldades em criar a tesselação utilizando os polígonos estudados. A maior dificuldade encontrada pelos estudantes foi em cobrir o plano utilizando colagem, pois se atrapalharam ao cortar os polígonos com o papel colorido, e a atividade acabou se tornando muito demorada. Neste ponto do trabalho avaliou-se que o recorte dos polígonos não era algo relevante para o desenvolvimento desta pesquisa. Por este motivo, os estudantes cobriram apenas parte do plano com colagem, finalizando a tesselação com lápis de cor. Seguem as coberturas para o plano elaboradas pelos alunos:

Alunos	Translação e reflexão vertical	Translação e reflexão horizontal	Rotação de ¼ de volta	Produção livre (composição de transformações)
1				
2	Não realizou.	Não realizou.	Não realizou.	Não realizou.

3			Não realizou.	Não realizou.
4			Não realizou.	Não realizou.
5		Não realizou.	Não realizou.	Não realizou.
6				
7	Não realizou.			Não realizou.
8			Não realizou.	Não realizou.

9		Não realizou.	Não realizou.	Não realizou.
10			Não realizou.	Não realizou.
11	Não realizou.		Não realizou.	
12				Não realizou.

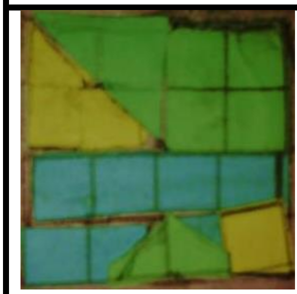
Quadro 41: coberturas para o plano elaboradas pelos estudantes, utilizando colagem e pintura.

Após analisar individualmente a produção dos alunos, esta pesquisa fez considerações acerca da compreensão das Transformações Geométricas para esta atividade. Tais considerações são apresentadas no quadro a seguir:

Alunos	Considerações feitas pela pesquisadora, a partir das respostas dos alunos.
Aluno 1	Apesar de utilizar uma unidade de tesselação refletida verticalmente na reflexão horizontal, o estudante parece ter compreendido os dois tipos de reflexão, compostos com a translação e a rotação de ¼ de volta, composta com a reflexão horizontal. Na produção livre, o estudante parece ter compreendido a rotação de ¼ de volta composta com a reflexão vertical e horizontal, na mesma cobertura para o plano.
Aluno 2	Não realizou.
Aluno 3	Parece ter compreendido os dois tipos de reflexão, compostos com a translação.
Aluno 4	Parece ter compreendido o conceito de reflexão vertical, apesar de não ter refletido a unidade de tesselação. Representou a reflexão horizontal composta com a translação.
Aluno 5	Parece ter compreendido a reflexão vertical, composta com a translação.
Aluno 6	Parece ter compreendido os dois tipos de reflexão, compostos com a translação e a rotação de ¼ de volta, sem composição. Ao compor a rotação de ¼ de volta com os dois tipos de reflexão, parece ter se confundido.
Aluno 7	Parece ter compreendido a reflexão horizontal, composta com a translação e a rotação de ¼ de volta, támbémcomposta com a translação.
Aluna 8	Parece ter compreendido os dois tipos de reflexão, compostos com a translação.
Aluno 9	Parece ter compreendido a reflexão vertical, composta com a translação.
Aluna 10	Parece ter compreendido os dois tipos de reflexão, compostos com a translação.
Aluna 11	Parece não ter compreendido a reflexão horizontal, composta com a translação. Além disso, na produção livre utilizou reflexão, tanto vertical como horizontal e translação. A reflexão horizontal foi utilizada na primeira coluna do desenho, e a reflexão vertical, no restante da cobertura do plano.
Aluno 12	Parece ter compreendido os dois tipos de reflexão, compostos com a translação e a rotação de ¼ de volta.

Quadro 42: considerações da pesquisa para a atividade 4.

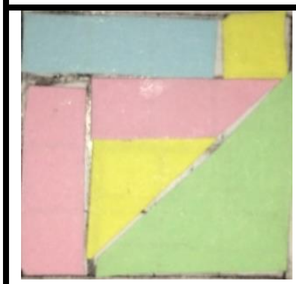
O aluno 4 criou a seguinte unidade de tesselação e coberturas para o plano:

Unidade de tesselação	Reflexão vertical	Reflexão horizontal
		

Quadro 43: coberturas para o plano obtidas pelo aluno 4.

Analisando a criação do estudante, é possível perceber que o mesmo não compreendeu a atividade, assim como as posições corretas das unidades de tesselação, de acordo com cada transformação solicitada na atividade. Entretanto, a figura mostra que o estudante compreendeu o conceito de reflexão vertical, já que apresentou uma figura com um único eixo simétrico vertical. A segunda figura mostra que o estudante compreendeu a reflexão horizontal, composta com a translação.

A aluna 11 produziu a seguinte unidade de tesselação:

Unidade de tesselação	Reflexão horizontal
	

Quadro 44: unidade de tesselação e cobertura para o plano criadas pela aluna 11.

Percebe-se aqui que a estudante não fez uso dos eixos de reflexão vertical, cobrindo parte deste plano utilizando a reflexão horizontal, juntamente com a translação. É possível perceber que a estudante refletiu de maneira correta a primeira e a segunda linha do plano.

A partir da terceira linha, a tesselação da estudante apresenta problemas, pois ela não efetuou a reflexão, apenas continuou a unidade de tesselação. Nota-se que, na terceira linha, as unidades possuem padrão diferente das demais.

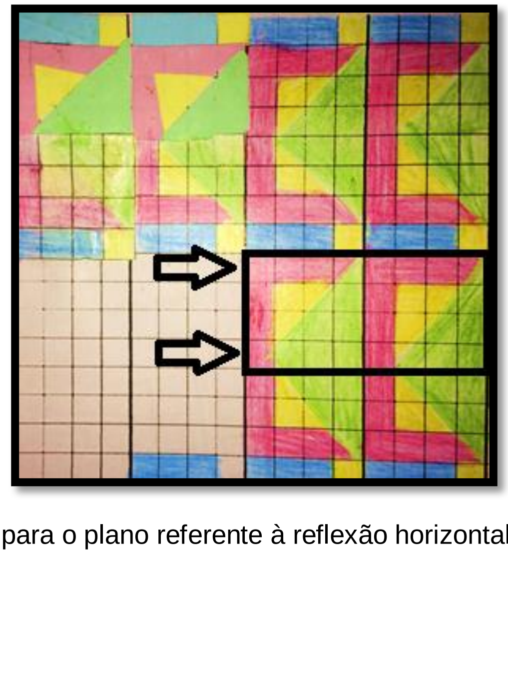


Figura 44: cobertura para o plano referente à reflexão horizontal criada pela aluna 11.

Este trabalho mostra que a estudante não conseguiu atingir a compreensão necessária para prever a posição de cada unidade de tesselação, referente à reflexão horizontal.

Na seção que segue, será apresentada a análise dos dados de acordo com a perspectiva dos níveis de Van Hiele para a aprendizagem das Transformações Geométricas, desenvolvida neste trabalho através da metodologia da Investigação Matemática utilizando o applet *Design a Tesselation*.

6.4 Níveis de Van Hiele atingidos pelos estudantes para as Transformações Geométricas

É importante ressaltar que, neste trabalho, não foram desenvolvidas atividades que promovessem a diferenciação conceitual entre as Transformações Geométricas trabalhadas. No entanto, é possível cobrir o plano utilizando dois ou mais tipos de Transformações Geométricas. Sendo assim, é coerente que os estudantes atinjam no máximo o nível entre os níveis 1 e 2 de Van Hiele, uma vez que não poderão comparar uma Transformação Geométrica com outra, mas poderão realizar composições.

Admitindo-se a existência de níveis intermediários de Van Hiele, conforme a abordagem de Santos (1998; 2001), que trata da existência de níveis intermediários, já abordada no capítulo 3, os estudantes foram analisados de forma individual no que diz respeito à aprendizagem das Transformações Geométricas. Para esta análise, foram utilizados os níveis de Van Hiele para o pensamento geométrico, da seguinte forma:

- o estudante atingiu o nível 0 de Van Hiele se caracterizou a Transformação Geométricas em termos globais.
- o estudante atingiu um nível entre 0 e 1 de Van Hiele se analisou a Transformação Geométrica em termos de suas características, mas não conseguiu prever os efeitos dessa transformação no plano, ou também, no caso em que conseguiu prever os efeitos, mas não realizou uma análise dessa transformação.

- o estudante atingiu o nível 1 de Van Hiele se analisou a Transformação Geométrica em termos de suas características, além de prever os seus efeitos no plano.
- o estudante atingiu um nível entre 1 e 2 de Van Hiele se, além de atingir o nível 1 de Van Hiele, realizou alguma composição de Transformações Geométricas.

Através da análise de materiais produzidos pelos alunos, foi possível inferir os níveis de Van Hiele atingidos pelos estudantes para as Transformações Geométricas.

- Translação: O aluno 1 atingiu um nível entre os níveis 1 e 2 de Van Hiele, já que conseguiu caracterizar e prever o efeito da translação, reproduzindo os efeitos da mesma nas unidades de tesselação. Além disso, conseguiu compor esta transformação com a reflexão em uma cobertura do plano.

O aluno 2 atingiu um nível entre os níveis 0 e 1 de Van Hiele, pois conseguiu reconhecer o movimento de cada transformação visualmente como um todo e conseguiu diferenciar os movimentos em termos visuais. Contudo, quando questionado, mostra compreensão quanto às características da translação. Porém, esta pesquisa não tem registros que demonstrem o domínio do aluno 2 quanto à previsão dos efeitos da translação no plano.

- Reflexão vertical e reflexão horizontal: O aluno 1 atingiu um nível entre os níveis 1 e 2 de Van Hiele para as duas Transformações Geométricas, já que conseguiu cobrir o plano utilizando tanto a reflexão vertical como a reflexão horizontal, compostas com outras transformações. Além disso, em seus registros, o estudante coloca que tanto a reflexão vertical como a reflexão horizontal são Transformações Geométricas que podem ser caracterizadas como colocações de espelho (na vertical e na horizontal respectivamente). Isto mostra que o aluno conseguiu relacionar estas duas transformações.

Quando questionado a respeito das características da reflexão, o aluno 2 mostrou compreensão quanto a estas características, referentes a cada tipo de reflexão, relacionando as mesmas à colocação de um espelho em linha. No entanto, não apresenta trabalhos que evidenciem que consegue prever os efeitos da reflexão vertical e horizontal no plano. Sendo assim, o estudante atingiu um nível entre os níveis 0 e 1 de Van Hiele para estas transformações.

- Rotação de ½ volta e de ¼ de volta: O aluno 1 atingiu um nível entre os níveis 0 e 1 de Van Hiele, pois conseguiu caracterizar a rotação de ½ volta como um giro de 180°, porém o estudante não tem registros que evidenciem que consegue prever o que uma rotação de ½ volta pode fazer em uma tesselação no plano. Para a rotação de ¼ de volta, o estudante atingiu um nível entre os níveis 1 e 2 de Van Hiele, já que conseguiu cobrir o plano utilizando a rotação de ¼ de volta, composta com outras transformações. Além disso, em seus registros, o estudante coloca que esta transformação é um giro de metade de meia volta. Isto mostra que o aluno conseguiu relacionar esta transformação com a rotação de meia volta.

O aluno 2 atingiu um nível entre os níveis 0 e 1 de Van Hiele para a rotação de ½ volta e para a rotação de ¼ de volta, já que as caracterizou verbalmente como um giro de 180° e 90°, respectivamente. Porém, o aluno não tem registros que evidenciem que consegue prever o que estas duas Transformações Geométricas podem fazer em uma tesselação no plano.

A seguir (Quadros 45 e 46), é apresentado o resumo da análise dos níveis atingidos por todos os estudantes do grupo analisado, que foi feita de maneira individual, para as Transformações Geométricas.

Aluno	Translação		Reflexão vertical		Reflexão horizontal	
	Analisou por características e conseguiu prever efeitos	Realizou composição com:	Analisou por características e conseguiu prever efeitos	Realizou composição com:	Analisou por características e conseguiu prever efeitos	Realizou composição com:
1	Sim.	Reflexão vertical e Reflexão horizontal.	Sim.	Translação, rotação de ¼ de volta e reflexão horizontal.	Sim.	Translação, rotação de ¼ de volta e reflexão vertical.
	Entre os níveis 1 e 2.		Entre os níveis 1 e 2.		Entre os níveis 1 e 2.	
2	Só analisou. Não mostrou prever efeitos.	Não.	Só analisou. Não mostrou prever efeitos.	Não.	Só analisou. Não mostrou prever efeitos.	Não.
	Entre os níveis 0 e 1.		Entre os níveis 0 e 1.		Entre os níveis 0 e 1.	
3	Sim.	Reflexão vertical e horizontal.	Sim.	Translação.	Sim.	Translação.
	Entre os níveis 1 e 2.		Entre os níveis 1 e 2.		Entre os níveis 1 e 2.	
4	Sim.	Reflexão horizontal.	Não, apenas fez considerações em termos visuais globais, sem prever efeitos.	Não.	Sim.	Translação.
	Entre os níveis 1 e 2.		Nível 0.		Entre os níveis 1 e 2.	
5	Sim.	Reflexão vertical.	Sim.	Translação.	Só analisou. Não mostrou prever efeitos	Não.
	Entre os níveis 1 e 2.		Entre os níveis 1 e 2.		Entre os níveis 0 e 1.	
6	Sim.	Reflexão vertical e reflexão horizontal.	Conseguiu prever os movimentos, mas não analisou.	Translação.	Sim.	Translação.
	Entre os níveis 1 e 2.		Sem condições de avaliar.		Entre os níveis 1 e 2.	
7	Sim.	Reflexão horizontal e rotação de ¼ de volta.	Só analisou. Não mostrou prever efeitos.	Não.	Sim.	Translação.
	Entre os níveis 1 e 2.		Entre os níveis 0 e 1.		. Entre os níveis 1 e 2.	
8	Conseguiu prever os movimentos, mas não analisou.	Reflexão vertical e reflexão horizontal.	Conseguiu prever os movimentos, mas não analisou. .	Translação.	Conseguiu prever os movimentos, mas não analisou.	Translação.
	Sem condições de avaliar.		Sem condições de avaliar.		Sem condições de avaliar.	
9	Sim.	Reflexão vertical.	Sim.	Translação	Só analisou. Não mostrou prever efeitos.	Não.
	Entre os níveis 1 e 2.		Entre os níveis 1 e 2.		Entre os níveis 0 e 1.	
10	Sim.	Reflexão vertical e reflexão horizontal.	Sim.	Translação.	Sim.	Translação.
	Entre os níveis 1 e 2.		Entre os níveis 1 e 2.		Entre os níveis 1 e 2.	
11	Sim.	Reflexão horizontal.	Conseguiu prever os movimentos, mas não analisou.	Reflexão horizontal.	Sim.	Translação e reflexão vertical.
	Entre os níveis 1 e 2.		Sem condições de avaliar.		Entre os níveis 1 e 2.	
12	Sim.	Reflexão vertical e reflexão horizontal.	Sim.	Translação.	Sim.	Translação.
	Entre os níveis 1 e 2.		Entre os níveis 1 e 2.		Entre os níveis 1 e 2.	

Quadro 45: níveis de Van Hiele atingidos pelos estudantes para a translação, reflexão vertical e reflexão horizontal.

Aluno	Rotação de ½ volta		Rotação de ¼ de volta	
	Analisou por características e conseguiu prever efeitos	Realizou composição com:	Analisou por características e conseguiu prever efeitos	Realizou composição com:
1	Só analisou. Não mostrou prever efeitos.	Não.	Sim.	Reflexão vertical e reflexão horizontal.
	Entre os níveis 0 e 1.		Entre os níveis 1 e 2.	
2	Só analisou. Não mostrou prever efeitos.	Não.	Só analisou. Não mostrou prever efeitos.	Não.
	Entre os níveis 0 e 1.		Entre os níveis 0 e 1.	
3	Só analisou. Não mostrou prever efeitos.	Não.	Só analisou. Não mostrou prever efeitos.	Não.
	Entre os níveis 0 e 1.		Entre os níveis 0 e 1.	
4	Não, apenas fez considerações em termos visuais globais, sem prever efeitos.	Não.	Não, apenas fez considerações em termos visuais globais, sem prever efeitos.	Não.
	Nível 0.		Nível 0.	
5	Só analisou. Não mostrou prever efeitos.	Não.	Só analisou. Não mostrou prever efeitos.	Não.
	Entre os níveis 0 e 1.		Entre os níveis 0 e 1.	
6	Não, apenas fez considerações em termos visuais globais, sem prever efeitos.	Não.	Não, apenas fez considerações em termos visuais globais, e conseguiu prever efeitos.	Não.
	Nível 0.		Sem condições de avaliar.	
7	Só analisou. Não mostrou prever efeitos.	Não.	Sim.	Translação.
	Entre os níveis 0 e 1.		Entre os níveis 1 e 2.	
8	Não respondeu.	Não.	Não respondeu.	Não.
	Sem condições de avaliar.		Sem condições de avaliar.	
9	Só analisou. Não mostrou prever efeitos.	Não.	Só analisou. Não mostrou prever efeitos.	Não.
	Entre os níveis 0 e 1.		Entre os níveis 0 e 1.	
10	Não respondeu.	Não.	Não respondeu.	Não.
	Sem condições de avaliar.		Sem condições de avaliar	
11	Não, apenas fez considerações em termos visuais globais, sem prever efeitos.	Não.	Não, apenas fez considerações em termos visuais globais, sem prever efeitos.	Não.
	Nível 0.		Nível 0.	
12	Só analisou. Não mostrou prever efeitos.	Não.	Sim.	Não.
	Entre os níveis 0 e 1.		Nível 1.	

Quadro 46: níveis de Van Hiele atingidos pelos alunos para as rotações de ½ volta e de ¼ de volta.

Níveis de Van Hiele atingidos pelos alunos	Translação		Reflexão vertical		Reflexão horizontal		Rotação de 1/2 volta		Rotação de 1/4 volta	
Nível 0	0	0,00%	1	8,33%	0	0,00%	3	25,00%	2	16,67%
Entre os níveis 0 e 1	1	8,33%	2	16,67%	3	25,00%	7	58,33%	4	33,33%
Nível 1	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	1	8,33%
Entre os níveis 1 e 2	10	83,33%	6	50,00%	8	66,67%	0	0,00%	2	16,67%
Nível 2	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
Sem subsídios para avaliar o nível de Van Hiele	1	8,33%	3	25,00%	1	8,33%	2	16,67%	3	25,00%

Quadro 47: quantidade de alunos em cada nível de Van Hiele (Transformações Geométricas).

Na seção seguinte, serão apresentados os resultados níveis de Van Hiele que foram alcançados pelos estudantes para os quadriláteros, triângulos e para as Transformações Geométricas durante o desenvolvimento da pesquisa.

6.5 Resultados obtidos

Através da análise dos dados obtidos, foi possível classificar os níveis de Van Hiele atingidos por cada estudante analisado para cada um dos conceitos trabalhados nesta pesquisa, conforme apresenta o quadro a seguir:

Níveis de Van Hiele atingidos pelos alunos														
Alunos	Quadriláteros					Triângulos				Transformações geométricas				
	Quadrado	Retângulo	Paralelogramo	Losango	Trapézio	Triângulo Retângulo	Triângulo Equilátero	Triângulo Isósceles	Triângulo Escaleno	Translação	Reflexão vertical	Reflexão horizontal	Rotação de 1/2 volta	Rotação de 1/4 volta
1	Entre os níveis 1 e 2	Nível 2	Entre os níveis 1 e 2	Nível 1	Nível 1	Nível 2	Nível 2	Nível 2	Nível 2	Entre os níveis 1 e 2	Entre os níveis 1 e 2	Entre os níveis 1 e 2	Entre os níveis 0 e 1	Entre os níveis 1 e 2
2	Nível 2	Nível 2	Nível 2	Nível 2	Nível 1	Entre os níveis 1 e 2	Nível 1	Nível 1	Nível 2	Entre os níveis 0 e 1	Entre os níveis 0 e 1	Entre os níveis 0 e 1	Entre os níveis 0 e 1	Entre os níveis 0 e 1
3	Entre os níveis 1 e 2	Nível 2	Entre os níveis 1 e 2	Nível 1	Nível 1		Nível 1	Nível 1	Nível 1	Entre os níveis 1 e 2	Entre os níveis 1 e 2	Entre os níveis 1 e 2	Entre os níveis 0 e 1	Entre os níveis 0 e 1
4	Nível 2	Nível 2	Nível 2	Nível 2	Nível 1	Nível 1	Nível 1	Nível 1	Nível 1	Entre os níveis 1 e 2	Nível 0	Entre os níveis 1 e 2	Nível 0	Nível 0
5	Nível 2	Nível 2	Nível 2	Nível 2	Nível 1	Entre os níveis 1 e 2	Nível 1	Nível 1	Nível 2	Entre os níveis 1 e 2	Entre os níveis 1 e 2	Entre os níveis 0 e 1	Entre os níveis 0 e 1	Entre os níveis 0 e 1
6	Entre os níveis 1 e 2	Nível 1	Nível 1	Entre os níveis 1 e 2	Nível 1		Nível 1	Nível 1	Nível 1	Entre os níveis 1 e 2		Entre os níveis 1 e 2	Nível 0	
7	Entre os níveis 1 e 2	Entre os níveis 1 e 2	Nível 1		Nível 1	Nível 1	Nível 1	Nível 1	Nível 1	Entre os níveis 1 e 2	Entre os níveis 0 e 1	Entre os níveis 1 e 2	Entre os níveis 0 e 1	Entre os níveis 1 e 2
8	Entre os níveis 1 e 2	Nível 2	Entre os níveis 1 e 2		Nível 1	Nível 1	Nível 1	Nível 1	Nível 1					
9	Entre os níveis 1 e 2	Nível 2	Nível 2	Entre os níveis 1 e 2	Nível 1	Entre os níveis 1 e 2	Nível 1	Nível 1	Nível 2	Entre os níveis 1 e 2	Entre os níveis 1 e 2	Entre os níveis 0 e 1	Entre os níveis 0 e 1	Entre os níveis 0 e 1
10	Entre os níveis 1 e 2	Entre os níveis 1 e 2	Nível 2	Nível 2	Nível 1	Nível 1	Nível 2	Entre os níveis 1 e 2	Nível 1	Entre os níveis 1 e 2	Entre os níveis 1 e 2	Entre os níveis 1 e 2		
11	Entre os níveis 1 e 2	Entre os níveis 1 e 2	Nível 1	Entre os níveis 1 e 2	Nível 1	Nível 1	Nível 1	Nível 1	Nível 1	Entre os níveis 1 e 2		Entre os níveis 1 e 2	Nível 0	Nível 0
12	Entre os níveis 1 e 2	Nível 2	Entre os níveis 1 e 2	Nível 1	Nível 1	Entre os níveis 1 e 2	Nível 1	Nível 1	Nível 2	Entre os níveis 1 e 2	Entre os níveis 1 e 2	Entre os níveis 1 e 2	Entre os níveis 0 e 1	Nível 1

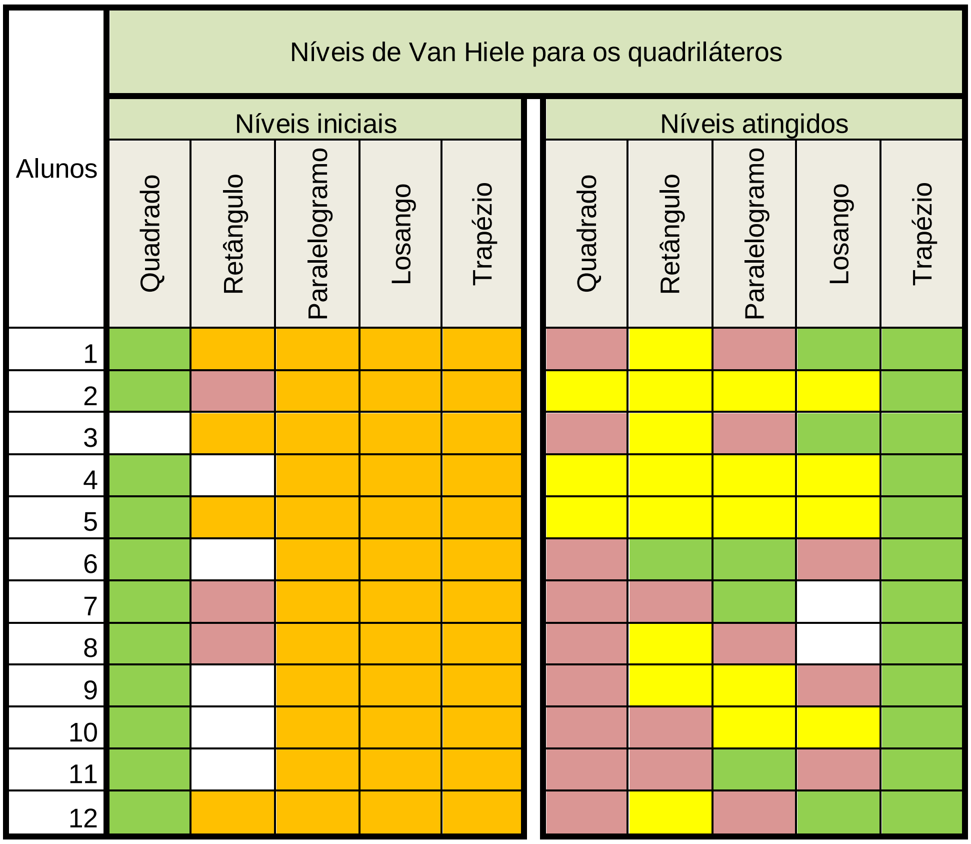
LEGENDA	
	Nível 0
	Entre os níveis 0 e 1
	Nível 1
	Entre os níveis 1 e 2
	Nível 2
	Sem subsídios para avaliar o nível de Van Hiele

Quadro 48: níveis de Van Hiele atingidos pelos alunos para os conceitos trabalhados durante a pesquisa.

Analisando-se o quadro 48, é possível inferir que que os estudantes estabeleceram um maior número de relações ou inclusão de classes (atingindo o nível 2 de Van Hiele) para os quadriláteros. A maior incidência de caracterização e análise (nível 1 de Van Hiele) ocorreu no estudo de triângulos.

O aparecimento do nível zero e do nível intermediário entre 0 e 1 só ocorreu nas Transformações Geométricas, o que indica que, para os alunos, este estudo foi mais difícil do que o estudo de polígonos.

Comparando-se os dados referentes aos quadriláteros, contidos no quadro 48 (níveis de Van Hiele atingidos), com os dados do quadro 13 (níveis iniciais de Van Hiele iniciais), tem-se:



LEGENDA	
	Nível 0
	Entre os níveis 0 e 1
	Nível 1
	Entre os níveis 1 e 2
	Nível 2
	Sem subsídios para avaliar o nível de Van Hiele

Quadro 49: comparativo entre os níveis de Van Hiele iniciais e atingidos para os quadriláteros.

Analisando-se o quadro 49, é possível perceber que, exceto nos casos em que não foi possível avaliar o nível, na maioria dos casos houve avanço do nível de Van Hiele em relação ao nível inicial de cada estudante.

É possível perceber invariância do nível de Van Hiele para o aluno 7, no que diz respeito ao retângulo. Inicialmente, o aluno relacionou o retângulo ao quadrado. Ao longo do trabalho, o aluno 7 continuou fazendo apenas esta relação.

Para o quadrado, os alunos 2, 4 e 5 avançaram um nível; e os demais avançaram menos do que um nível (exceto aluno 3, o qual não foi possível avaliar o nível inicial). Observa-se que, neste trabalho, o quadrado é o polígono com maior número de quadriláteros relacionados (retângulo, paralelogramo e losango). Isso torna mais difícil o avanço ao nível 2 de Van Hiele; e talvez possa explicar a grande incidência de níveis entre 1 e 2 de Van Hiele para o quadrado.

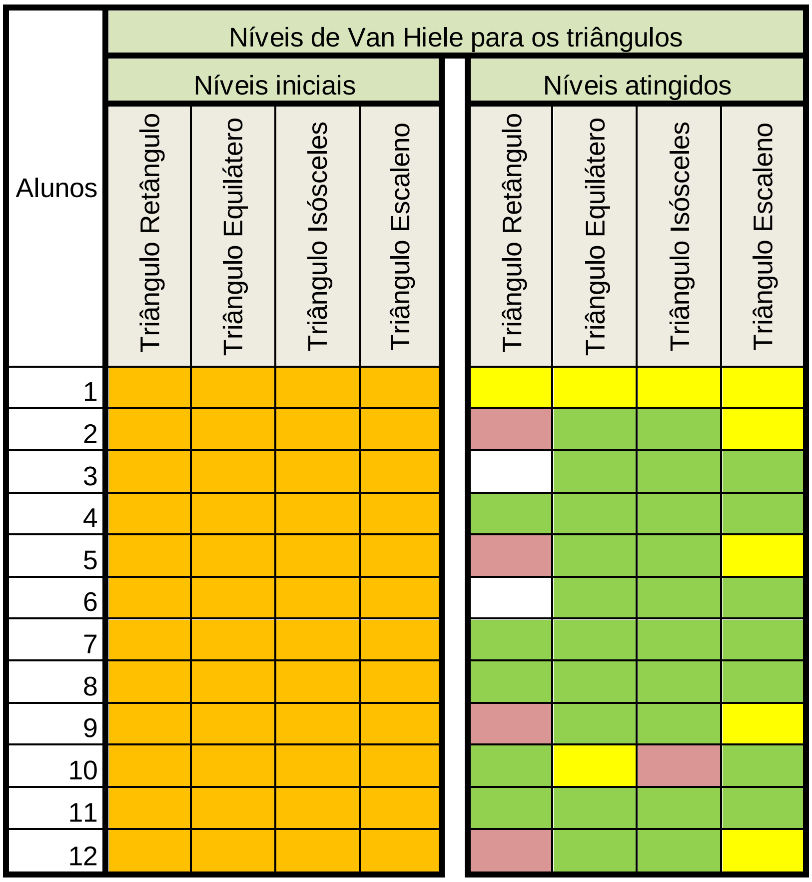
Para o retângulo, os alunos 1, 3, 5 e 12 avançaram dois níveis; os alunos 2 e 8 avançaram menos do que um nível e o aluno 7 não apresentou avanço.

Para o paralelogramo, houve avanço de todos os estudantes: 3 avançaram 1 nível, 5 avançaram dois níveis e 4 avançaram mais que um e menos que dois níveis.

Para o losango, é possível inferir que houve avanço de 10 estudantes: 3 avançaram um nível, 4 avançaram dois níveis e 3 avançaram um nível e meio.

Para o trapézio, houve avanço de um nível para todos os alunos. Observa-se que o trapézio obteve apenas o nível 1 de Van Hiele, já que este polígono não foi relacionado a nenhum outro quadrilátero trabalhado, uma vez que os estudantes não tiveram a oportunidade de comparar o trapézio com outra figura, não possuindo elementos para diferenciar este polígono com os demais quadriláteros. Além disso, observa-se que o trapézio não pertence a nenhuma outra classe de quadriláteros.

Estabelecendo-se agora um comparativo entre os dados dos quadros 13 e 49, agora para os triângulos, tem-se:



LEGENDA	
	Nível 0
	Entre os níveis 0 e 1
	Nível 1
	Entre os níveis 1 e 2
	Nível 2
	Sem subsídios para avaliar o nível de Van Hiele

Quadro 50: comparativo entre os níveis de Van Hiele iniciais e atingidos, para os triângulos.

Analisando-se o quadro 50, é possível perceber que, exceto nos casos em que não foi possível se avaliar o nível de Van Hiele inicial, houve avanço de todos os estudantes, no que se refere à aprendizagem de triângulos.

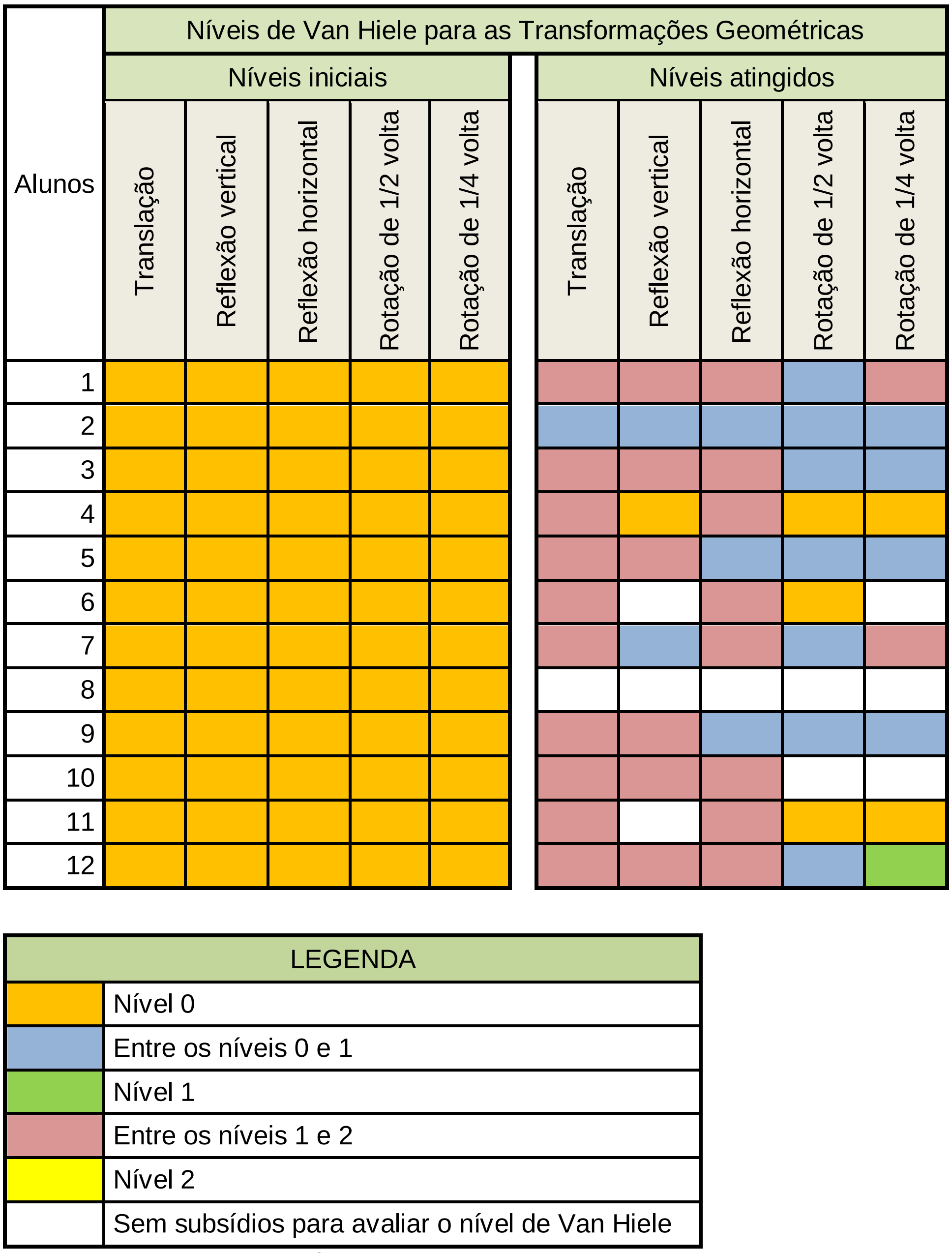
Quanto ao triângulo retângulo, dos 10 alunos que mostraram avanço 5 avançaram um nível, um avançou dois níveis e 4 avançaram mais que um e menos que dois níveis.

Para o triângulo equilátero, 10 alunos avançaram um nível e 2 alunos avançaram dois níveis.

Para o triângulo isósceles, 10 alunos avançaram um nível, um avançou dois níveis e outro avançou mais que um e menos que dois níveis.

Para o triângulo escaleno, 7 alunos avançaram um nível, e 5 avançaram dois níveis. Para os triângulos, é possível perceber que a maior parte dos estudantes do grupo analisado praticamente não estabeleceu relações de inclusão de classes ou de relação entre figuras, mas eles conseguiram classificar cada triângulo de acordo com as suas características e propriedades.

Comparando-se agora os níveis de Van Hiele iniciais e os níveis atingidos pelos alunos, para as Transformações Geométricas, tem-se:



Quadro 51: comparativo entre os níveis de Van Hiele iniciais e atingidos, para as Transformações Geométricas.

Analisando-se os dados do quadro 51, é possível perceber que houve crescimento quanto aos níveis de Van Hiele na maioria dos casos.

Para a translação, 10 alunos avançaram mais que um e menos que dois níveis e um aluno avançou menos do que um nível.

Para a reflexão vertical, 6 alunos avançaram mais que um e menos que dois níveis, dois avançaram menos do que um nível e 1 aluno não mostrou avanço.

Para a reflexão horizontal, 8 alunos avançaram mais que um e menos que dois níveis e três avançaram menos do que um nível.

Para a rotação de ½ volta, 7 alunos avançaram menos do que um nível e 3 não apresentaram avanço. Já para a rotação de ¼ de volta, 4 alunos avançaram menos do que um nível, um avançou um nível, 2 avançaram mais que um e menos que dois níveis e dois não avançaram.

É possível notar que muitos alunos atingiram um nível entre os níveis 0 e 1 de Van Hiele para os dois tipos de rotação. Pode-se inferir que estes dois tipos de rotação foram de difícil compreensão para os estudantes, que evoluíram pouco em relação aos níveis de Van Hiele.

Já a translação e os dois tipos de reflexão apresentaram a maior incidência de composições entre Transformações Geométricas. Isto pode ser explicado pelo fato de estas desenvolverem-se antes dos dois tipos de rotação, o que proporcionou um maior tempo para a conclusão das atividades de translação e reflexão.

Desenvolver o estudo de quadriláteros e triângulos utilizando atividades com o software GeoGebra deixou os alunos mais envolvidos com as aulas de Matemática, já que mostrou um viés mais dinâmico desta disciplina. A cada questionamento feito pelas atividades de investigação, os estudantes ficavam motivados a buscar respostas, que eram obtidas através de uma análise de suas construções.

As atividades com o applet *Design a Tesselation* foram motivadoras para os estudantes, pois forneceram liberdade de criação para os estudantes no que se refere à cobertura do plano.

Além de aspectos positivos presentes neste trabalho, tais como o crescimento dos estudantes do grupo analisado pelos níveis de Van Hiele para os conceitos estudados, tal estudo também destaca alguns aspectos que poderiam ser melhorados.

Observa-se que o momento introdutório, presente nesta pesquisa como uma das etapas da Investigação Matemática, poderia ter sido complementado por uma atividade inicial que trouxesse mais elementos a respeito de todos os conceitos geométricos desenvolvidos nesta pesquisa (todos os quadriláteros, todos os triângulos, e todas as Transformações Geométricas). Desta forma, poderia se avaliar os níveis de Van Hiele iniciais dos estudantes para cada conceito trabalhado de uma maneira mais substancial.

Avalia-se que a atividade de criação de tesselação no site *Design a Tessellation* e de observação do comportamento das unidades de tesselação, (presentes no primeiro quadrante do plano de tesselação) poderia ter contemplado um momento no qual os estudantes realizassem o preenchimento da ficha dos efeitos em cada unidade de tesselação, sem observar o preenchimento feito pelo applet, na tela do computador.

Este trabalho avalia também que a atividade envolvendo colagem para a criação de efeitos de tesselação no plano utilizou muito tempo do trabalho, se for comparada ao mesmo trabalho realizado com a pintura a lápis de cor.

Esta pesquisa também avalia a ausência de um momento coletivo com os estudantes para que se pudesse realizar a socialização dos trabalhos produzidos por eles, com o objetivo de oportunizar um fechamento para o trabalho realizado durante a pesquisa.

Analisando-se os aspectos positivos e negativos presentes nesta pesquisa, avalia-se que, de acordo com a perspectiva dos níveis de Van Hiele, a realização de Atividades Investigativas utilizando recursos tecnológicos contribui no processo de aprendizagem de triângulos, quadriláteros e Transformações Geométricas em uma sala de aula de Matemática do sexto ano. Esta avaliação se deve ao fato desta utilização de Atividades Investigativas juntamente com os recursos tecnológicos ter proporcionado aos estudantes uma evolução pelos níveis de Van Hiele para o pensamento geométrico em relação aos conceitos desenvolvidos na maior parte das ocorrências.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa realizou-se em uma turma do sexto ano do Ensino Fundamental, em uma escola da Rede Municipal de Porto Alegre. Tal trabalho objetivou a integração dos recursos tecnológicos disponibilizados pelo software GeoGebra e pelo applet online *Design a Tessellation*, juntamente com a metodologia da Investigação Matemática em sala de aula, visando possibilitar o desenvolvimento do processo de aprendizagem de quadriláteros, triângulos e de Transformações Geométricas em uma turma do sexto ano do Ensino Fundamental.

Com este intuito, a presente pesquisa buscou responder aos seguintes questionamentos:

- **Considerando um trabalho que utiliza a Investigação Matemática, o software GeoGebra e o applet *Design a Tesselation*: que níveis do pensamento geométrico podem ser atingidos por uma turma de estudantes do sexto ano do Ensino Fundamental para os conceitos de quadriláteros, triângulos e de Transformações Geométricas?**

- **Que mudanças ocorreram quanto aos níveis do pensamento geométrico, considerando os estudantes de uma turma do sexto ano, em relação aos níveis no início do trabalho no que diz respeito aos quadriláteros e triângulos e Transformações Geométricas?**

O grupo analisado por esta pesquisa foi constituído por 12 alunos da turma na qual se desenvolveu o trabalho, que foram selecionados para esta pesquisa de acordo com as maiores frequências durante o desenvolvimento deste trabalho. Para este estudo, foram analisados os registros escritos dos alunos contidos na ficha de características dos polígonos (preenchidas pelos estudantes ao longo da investigação dos quadriláteros e triângulos), assim como os registros escritos contidos nos formulários online preenchidos pelos mesmos e os diálogos dos estudantes durante as aulas (que foram filmados pela professora pesquisadora).

A análise dos dados desta pesquisa foi feita utilizando-se os níveis de Van Hiele para o pensamento geométrico. Cada estudante foi analisado quanto aos níveis de Van Hiele ao início do trabalho e quanto aos níveis que atingiu para cada um dos seguintes conceitos geométricos:

- Quadriláteros: quadrado, retângulo, paralelogramo, losango e trapézio.
- Triângulos: triângulo retângulo, triângulo isósceles, triângulo equilátero e triângulo escaleno.
- Transformações Geométricas: translação, reflexão vertical, reflexão horizontal, rotação de ½ volta e rotação de ¼ de volta.

Com relação aos níveis de Van Hiele atingidos pelos estudantes durante o trabalho, estes foram os seguintes:

Níveis de Van Hiele	Quadriláteros	Triângulos	Transformações Geométricas
0 - Visualização			X
Entre 0 e 1			X
1 – Análise	x	x	X
Entre 1 e 2	x	x	X
2 - Dedução informal	x	x	
3 - Dedução Formal			
4 – Rigor			

Quadro 52: níveis de Van Hiele atingidos para cada conceito geométrico.

Analisando-se o quando 52 é possível perceber que os níveis de Van Hiele atingidos com o trabalho variaram de 0 até o nível 2. Para os quadriláteros e triângulos, os níveis atingidos foram: nível 1, nível intermediário entre 1 e 2 e o nível 2. Para as Transformações Geométricas, os níveis variaram entre 0 e o nível intermediário entre 1 e 2.

Ocorrências por nível		Quadriláteros	Triângulos	Transformações Geométricas	Ocorrências
	Nível 0	0	0	6	6
	Entre os níveis 0 e 1	0	0	17	17
	Nível 1	19	32	1	52
	Entre os níveis 1 e 2	19	5	26	51
	Nível 2	20	9	0	28
	Sem subsídios para avaliar o nível de Van Hiele	2	2	10	14
Total de ocorrências		60	48	60	168

Quadro 53: número de ocorrências por nível de Van Hiele atingidos.

Esta pesquisa observou que os dois níveis mais atingidos pelos estudantes do grupo analisado foram o nível 1 – Análise, com 52 ocorrências em relação ao total; e o intermediário entre os níveis 1 e 2 - Entre Análise e Dedução informal, com 51 ocorrências em relação ao total.

Mudanças no nível de Van Hiele	Quadriláteros	Triângulos	Transformações Geométricas
	Ocorrências	Ocorrências	Ocorrências
Avançou	51	46	44
Permaneceu no nível de Van Hiele	0	0	6
Sem condições para avaliar	9	2	10

Quadro 54: mudanças quanto aos níveis de Van Hiele.

Analisando-se o quadro 54, é possível inferir que houve avanço entre os níveis de Van Hiele em grande parte dos casos, o que indica êxito da integração entre as Atividades Investigativas e o uso de TIC.

Este trabalho também destaca que a sequência investigativa utilizando o computador, tanto o GeoGebra quanto o applet *Design a Tessellation*, deixou os alunos motivados a realizar as atividades no computador, para assim responderem aos questionamentos realizados em cada atividade. Na atividade da tesselação utilizando a colagem, os estudantes também se mostraram motivados. Porém, como a colagem tornou este trabalho lento, foi necessário orientar os estudantes a realizarem os seus trabalhos utilizando pintura com lápis de cor, de forma a manter o otimismo dos estudantes quanto a esta atividade.

Destaca-se um avanço quanto ao desenvolvimento da autonomia dos estudantes ao utilizar o computador. No início da pesquisa, a maioria dos estudantes não sabia lidar com o e-mail ou com os formulários online, assim como as ferramentas do GeoGebra. Ao final do trabalho, foi possível notar que a maioria dos estudantes analisados já estava conseguindo enviar e-mails e preencher formulários sem recorrer ao auxílio da professora. Este avanço também ocorreu no que diz respeito às ferramentas do GeoGebra.

Observa-se também que os aspectos ligados à avaliação inicial dos níveis de Van Hiele dos estudantes poderiam ser melhorados, caso fossem incluídos no momento introdutório. Além disso, destaca-se a ausência de um momento coletivo final, que consistisse em uma discussão que retomasse os conceitos desenvolvidos durante a pesquisa.

Analisando-se este trabalho de uma maneira ampla, avalia-se o resultado desta pesquisa como positivo, no sentido de que este trabalho apresenta uma metodologia de aprendizagem de triângulos, quadriláteros e Transformações Geométricas que explora alguns recursos disponibilizados pelas TIC utilizadas no mundo contemporâneo e a metodologia da Investigação, que carrega potencial para proporcionar a aprendizagem Matemática em sala de aula.

O momento atual aponta para um futuro tecnológico no qual ocorre a intensa utilização das TIC móveis, tais como celulares, tablets e notebooks. Analisando-se alguns exemplares de livros didáticos disponibilizados pelo Programa Nacional do Livro Didático, é possível perceber que o conteúdo de Transformações Geométricas ainda é pouco explorado.

Sendo assim, faz-se necessário investigar mais a respeito da integração da Investigação Matemática com outros dispositivos móveis trazidos pelas TIC. Desta forma, uma perspectiva de pesquisa futura pode ser dada por um trabalho envolvendo a Investigação Matemática de Transformações Geométricas fazendo uso dos diferentes recursos disponibilizados por dispositivos móveis, como por exemplo, o aplicativo do próprio GeoGebra.

REFERÊNCIAS

ABREU, Jeferson Rodrigues. **Vídeo na matemática:** Aprendendo geometria com produção audiovisual. Porto Alegre: UFRGS, 2011, 59 f. Monografia - Curso de especialização Matemática, Mídias Digitais e Didática, UFRGS, Porto Alegre, 2011.

BAIRRAL, Marcelo Almeida. **Tecnologias informáticas, salas de aula e aprendizagens matemáticas.** 1ª edição. Rio de Janeiro: Ed. Da UFRRJ, 2010. 136 p. (série InovaComTic)

BARBOSA, Ana Cristina Coelho. **Geometria no plano numa turma do 9º ano de escolaridade: uma abordagem sociolinguística à teoria de van Hiele usando o computador.** Porto: Universidade do Porto, 2002. 157 f. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Departamento de Matemática Pura, Porto, 2002.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. A pesquisa em educação matemática: a prevalência da abordagem qualitativa. **Revista Brasileira de Ensino de Ciências e Tecnologia.** Curitiba, vol 5, n. 2, mai./ago. 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Proposta preliminar. Segunda versão revista. Brasília: MEC, 2016.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática: 5-8**. Brasília: MEC/SEF. 1998.

BRASIL. Ministério de Educação Básica. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa: Geometria.** Brasília: MEC/SEB, 2014.

BRAUMANN, C. **Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática.** In: PONTE, J. P.; COSTA, C.; ROSENDO, A. I.; MAIA, E.; FIEGUEIREDO, N.; DIONÍSIO, A. F. As atividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores. Lisboa: SEM-SPCE, 2002. p. 5 – 24.

BRÖNSTRUP, Mara. **Ensinar matemática: Uma vivência com atividades investigativas.** Ijuí: UNIJUÍ, 2007. 153 f. Dissertação (Mestrado) – UNIJUÍ, Programa de Pós-Graduação em Educação nas Ciências. Ijuí, 2007.

CARNEIRO, Gabriele Silva. **Atividades investigativas com o GeoGebra: contribuições de uma proposta para o ensino de matemática.** Jequié: Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, 2013, 149 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Programa de pós-graduação em Educação Científica e Formação de Professores. Jequié, 2013.

CARGNIN, Rita Maria. GUERRA, Sheila Heydt Réquia. LEIVAS, José Carlos Pinto. Teoria de van Hiele e Investigação Matemática: implicações para o ensino de Geometria. **Revista Práxis**. n. 15, p.105 -117, jun. 2016.

CONTEÚDO aberto. In: **Wikipédia: a enciclopédia livre.** Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/GeoGebra> Acesso em: 25 de jul. de 2017.

COSTA, André Pereira da. **A construção do conceito de quadriláteros notáveis no 6º ano do ensino fundamental: um estudo sob a luz da teoria vanhieliana.** Recife: Universidade Federal do Pernambuco, 2016. 243 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica. Recife, 2016.

COSTA, Maria Da Conceição Monteiro da. **Modelo do pensamento visual-espacial: transformações geométricas no início da escolaridade.** Lisboa: Universidade Nova de Lisboa, 2005, 330 f. Tese (Doutorado) - Universidade Nova de Lisboa. Lisboa, 2005.

CROWLEY, Mary L. **O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico.** In: LINDQUIST, Mary e SHULTE, Albert P. (organizadores), Aprendendo e Ensinando Geometria. São Paulo: Atual, 1994.

FIOREZE, Leandra Anversa. **Atividades digitais e a construção do conceito de proporcionalidade:** uma análise a partir dos campos conceituais. Porto Alegre: UFRGS, 2010, 244 f. Tese (Informática na Educação) – Programa de Pós-graduação em Informática na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

FONSECA, Helena. BRUNHEIRA, Lina. PONTE. João Pedro da. As actividades de investigação, o professor e a aula de matemática. In: Encontro Nacional de Professores de Matemática – APM, 1999, Lisboa. **Actas.** Lisboa: 1999, p.91-101.

GARCIA, Vera Clotilde Vanzetto. Formação de Professores de Matemática e Mudanças Curriculares na escola. In: In: BÚRIGO, Elisabete Zardo; GRAVINA, Maria Alice; BASSO, Marcus Vinicius de Azevedo; GARCIA, Vera Clotilde Vanzetto. **A matemática na escola: Novos conteúdos, novas abordagens.** Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2012, p.11-24.

GRAVINA, Maria Alice. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético dedutivo.** Porto Alegre: UFRGS, 2001, 277 f. Tese (Informática na Educação) – Programa de Pós-graduação em Informática na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

GRAVINA, Maria Alice. Geometria Dinâmica: Uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. In: Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, n.7, 1996, Belo Horizonte**. Anais.** Belo Horizonte: 1996, p.1-13.

GRAVINA, Maria Alice; BASSO, Marcus V. de A. Mídias Digitais na Educação Matemática. In: GRAVINA, Maria Alice; BÚRIGO, Elisabete Zardo; BASSO, Marcus Vinicius de Azevedo; GARCIA, Vera Clotilde Vanzetto. **Matemática, mídias digitais e didática:** tripé para formação de professores de matemática. Porto Alegre: Evangraf, 2012, p.11-36

HOHENWARTER, Markus**.** Multiple representations and GeoGebra-based learning environments. **Unión – Revista Ibero-Americana de Educación Matematica**. n. 39, p. 11-18, set./2014.

KALEFF, Ana Maria M. R; HENRIQUES, Almir; REI, Dulce M.; FIGUEIREDO, Luiz G. Desenvolvimento do pensamento geométrico: Modelo de Van Hiele. **Bolema**. Rio Claro, v.10, p.21-30, 1994.

LAMONATO, Maiza. **Investigando Geometria: Aprendizagens de Professoras da Educação Infantil.** São Carlos: Universidade Federal de São Carlos, 2007. 245 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Carlos. Programa de Pós-Graduação em Educação. São Carlos, 2007

LIMA, André Ferreira de. **Do sensível às ideias: um estudo de geometria a partir de atividades envolvendo espaço e forma.** Campina Grande: Universidade Estadual Da Paraíba, 2015, 225 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Da Paraíba. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Campina Grande, 2015.

LOBO, Joyce da Silva; BAYER, Arno. O Ensino da Geometria no Ensino Fundamental. **Acta Scientiae,** Canoas, v.6, n.1, p.19-26, jan./jun. 2004

LOPES, Maria Maroni. **Construção e aplicação de uma sequência didática para o ensino de trigonometria usando software Geogebra.** Natal: Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2010, 141f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática. Natal, 2010.

LORENZATO, Sérgio. Porque não ensinar Geometria? **A Educação Matemática em Revista-SBEM,** Blumenau, n. 4, p. 3-13, jan./jul. 1995.

NAGATA, Rosenilda de Souza. **Os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico: o aprendizado do conteúdo de polígonos numa perspectiva do modelo de Van Hiele.** Curitiba: Universidade tecnológica Federal do Paraná, 2016. 121 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Curitiba, 2016.

NASSER, Lilian. SANT'ANNA, Neide F. Parracho. **Geometria segundo a teoria de Van Hiele.** 2ª edição. Rio de Janeiro: Projeto Fundão, Editora IM – UFRJ, 2010.

NETO, José Augusto de Melo. **Tecnologia educacional: formação de professores no labirinto de ciberespaço.** Rio de Janeiro: MEMVAVMEM, 2007.

NOTARE, Marcia; BASSO, Marcus V. de A. Tecnologia na Educação Matemática: Trilhando o Caminho do Fazer ao Compreender. **Renote,** Porto Alegre, v.10, n.3, p.1-11, 2012.

O QUE É O GEOGEBRA. In: **GeoGebra.org.** Disponível em: <https://www.geogebra.org/about?ggbLang=pt_BR> Acesso em: 25 de jul. de 2017.

OLIVEIRA, Marluce Trentin. LEIVAS, José Carlos Pinto. Visualização e Representação Geométrica com suporte na Teoria de Van Hiele. **Ciência e Natura**, Santa Maria, v.39, n.1, p. 108 – 117, jan./abr. 2017.

PAIS, Luiz Carlos. **Educação escolar e as Tecnologias da Informática.** 1ª edição. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. 168 p.

PARAIZO, Ricardo Ferreira, BARALDI, Ivete Maria. Elaboração de vídeos didáticos de geometria como atividade escolar no ensino médio. In: Encontro mineiro de educação matemática, 7, 2015, São João del Rei. **Anais.** São João del Rei: UFSJ, 2015, p.1-4.

PAVANELLO, Regina Maria. **O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências**. Revista Zetetiké n.1 – Ano 1 – 1993.

___________. **O abandono do ensino da geometria: uma visão histórica.** Campinas: UNICAMP, 1989. 201 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. Campinas, 1989.

PINTO, Susana Rodrigues. **Desenvolvimento do pensamento geométrico: Uma proposta para o ensino das isometrias.** Viana do Castelo: Instituto Politécnico de Viana do Castelo, 2011. 205 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto Politécnico de Viana do Castelo. Viana do Castelo, 2011.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana, OLIVEIRA. **Investigações matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2005**.**

RODRIGUES, Shirlaine dos Santos Aguiar Rodrigues. **A teoria de Van Hiele aplicada aos triângulos: uma sequência didática para o 8º ano do ensino fundamental.** Campos dos Goytacazes: Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, 2015. 130 f. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Campos dos Goytacazes, 2015.

SANTOS, Marcelo Câmara dos. Investigando os níveis de pensamento geométrico de Van-Hiele: o caso dos quadriláteros. In: Encontro Nacional de Educação Matemática. 6., 1998, Porto Alegre. **Anais do VI Encontro Nacional de Educação Matemática.** Porto Alegre, 1998.

___________. Effets de l´utilisation du logiciel Cabri-Géomètre dans le developpement de la pensée géométrique. In: Congres International Cabri Géomètre. 2001, Montreal, QC, Canadá. **Anais do Congresso Internacional Cabri Géomètre**. Montreal, 2001.

SEGURADO, Irene; PONTE, João Pedro da. **Concepções sobre a Matemática e trabalho investigativo.** Lisboa, 1998, 39 f. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/98-SeguradoPonte%20(Quadrante).pdf> – Acesso em 14 de jul. de 2017.

SILVA, E. L. da; MENEZES, E. M. **Metodologia da pesquisa e elaboração de dissertação**. 3. ed. Florianópolis: Laboratório de Ensino à Distância da Universidade Federal de Santa Catarina, 2001.

SOARES, Ideogar Pereira. **O ensino das propriedades de triângulos e paralelogramos enfocando o uso de construções geométricas.** Maceió: Universidade Federal do Alagoas, 2014, 135f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do Alagoas. Programa de Pós-Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal do Alagoas , Maceió, 2014.

STAHL, Gerry, WEIMAR, Stephen, FETTER, Annie, MANTOAN, Anthony. **Developing Comprehensive Open-Source Geometry Curricula using GeoGebra**. In: North American GeoGebra Conference: Explorative Learning with Technology. n.5, 2014, Toronto. **Proceedings of the Fifth North American GeoGebra Conference.** Toronto: 2014. p. 70-74.

APÊNDICE A

SEQUENCIA DIDÁTICA

Aula 1: Momento introdutório
Duração: 1 hora aula
Material necessário: lanterna e diferentes objetos tridimensionais.
Objetivos:

- Instigar os estudantes sobre o aparecimento de figuras planas no mundo composto basicamente por objetos tridimensionais. Mais especificamente, sobre o aparecimento de quadriláteros e de triângulos.
- Questionar os estudantes sobre como são os quadriláteros e os triângulos, quais são as propriedades destas figuras.

Os estudantes devem ser colocados em círculo, na sala de aula. Em seguida, o professor deve apresentar diferentes objetos tridimensionais aos estudantes, de forma que os mesmos possam manusear os mesmos, incluindo um cubo, um paralelepípedo, e outros objetos que contenham os diferentes tipos de quadriláteros em suas faces. Em seguida, o professor deve utilizar a lanterna para projetar no chão (ou na parede da sala) as sombras produzidas pelos objetos. Logo após, o professor deve questionar os alunos quanto às figuras que estão aparecendo, e quanto às suas características.

Aula 2: Conhecendo o GeoGebra
Duração: 3 horas aula
Material necessário: computadores do laboratório de informática e software GeoGebra.
Objetivos: Familiarização dos alunos com o GeoGebra. Neste momento, os alunos farão uso do programa, e terão algumas atividades como tarefa, tais como: construir um ponto, um segmento, construir uma reta, uma reta perpendicular, uma reta paralela, etc.

Hoje vamos conhecer o GeoGebra e aprender a como trabalhar com ele. Para isso, siga as instruções abaixo, e responda as perguntas que aparecerem.

Abra o programa GeoGebra. Em seguida, clique com o botão direito do mouse e clique na palavra Eixos, fazendo-os sumir da tela.

1) Com a tela sem os eixos, clique no segundo botão, na opção ponto, e crie um ponto na tela branca.

2) Em seguida, clique no terceiro botão, na opção reta. Passe o mouse sobre o ponto construído anteriormente, e clique sobre ele e fora dele, para construir uma reta passando pelo ponto. Crie outro ponto, e faça o mesmo para a opção segmento.

3) No quarto botão, clique na opção reta perpendicular. Em seguida, clique no primeiro ponto construído, e na reta passando por ele, criando assim, uma reta perpendicular à reta anterior. O que acontece se você movimentar esta construção? Dê um exemplo de um objeto que possui esta posição entre duas retas.

4) Ainda no quarto botão, clique na opção reta paralela. Clique no segmento construído anteriormente, e clique fora do mesmo, para construir assim, uma reta paralela ao segmento construído. Movimente os pontos, os que ocorre com a reta e com o segmento quando você movimenta os pontos?

5) Clique em Arquivo e Novo para abrir uma nova construção. Em seguida, disponha quatro pontos na tela branca. Utilizando a ferramenta polígono, do quinto botão, crie uma figura poligonal. Faça o mesmo, com cinco e com seis pontos.

6) No oitavo botão, clique na opção ângulo, e em cada uma das pontas da figura, no sentido horário, vá marcando os ângulos interiores da figura.

7) Ainda no oitavo botão, clique na opção medida, e em cada um dos lados da figura, clique para obter as medidas de tamanho da mesma.

8) Clique em Arquivo e Novo para abrir uma nova construção. Construa um novo ponto. No sétimo botão clique em circunferência dado o seu centro e o seu raio (no GeoGebra está como CÍRCULO dado o seu centro e o seu raio). Clique sobre o ponto construído e arraste o mouse, clicando fora quando o círculo estiver pronto.

9) Clique em Arquivo e Novo para abrir uma nova construção. Trace uma reta. Por um de seus pontos, trace uma circunferência, que irá passar pelo outro ponto da reta.

Aula 3: Investigando o quadrado
Duração: 4 horas aula
Material necessário: computadores do laboratório de informática e software GeoGebra.
Objetivos:

- Fazer com que os alunos percebam a falta de rigidez na construção inicial de um quadrado feito de qualquer maneira, e a diferença da construção de um quadrado feito com embasamento das propriedades geométricas.

- Fazer com que os estudantes percebam as propriedades geométricas contidas no quadrado: perpendicularidade e igualdade nas medidas dos lados.

A sua missão de hoje é descobrir as propriedades sobre esta figura já tão conhecida por você e seus colegas!
Para isso, vamos construir esta figura no programa GeoGebra.

1) Abra o programa GeoGebra e construa um quadrado da maneira que você achar mais adequada.

a) Movimente os vértices do seu quadrado (pontos dos cantos). O que aconteceu com ele?

2) Abra o programa GeoGebra e execute os seguintes passos:

a) Construa um segmento de extremidades AB.

b) Em seguida, construa uma reta perpendicular ao segmento AB passando por A. O que acontece quando você move o ponto B? A inclinação entre as retas muda?

c) Construa um círculo com centro em A, passando por B. Marque o ponto C como a intersecção entre o círculo e a reta, e em seguida trace o segmento AC.

d) Com o auxílio da ferramenta medida, clique nos segmentos AB e AC. O que acontece com os tamanhos dos segmentos AB e AC quando você move o ponto B ou o ponto A? Por que você acha que isto acontece?

e) Construa uma reta perpendicular a AC passando por C. Quando você movimenta a construção pelo ponto B ou pelo ponto A, a inclinação entre a nova reta e o segmento AC muda?

f) Construa um novo círculo com centro em C, passando por A.

g) Marque o ponto D, como o ponto de intersecção entre o novo círculo e a nova reta, e trace o segmento CD e BD.

h) Esconda os círculos e as retas, clicando com o botão direito em “exibir objeto”.

i) Clique no botão de medidas e em seguida nos segmentos CD e BD.

j) Movimente os pontos A ou B.

k) Com a ferramenta ângulo, meça todas as aberturas internas da figura.

l) O que você observa quando você movimenta a figura: ela se modifica? Que diferenças você notou em relação à primeira construção?

m) Quais são as características desta figura?

Aula 4 – Investigando o retângulo
Duração: 2 horas aula
Material necessário: computadores do laboratório de informática e software GeoGebra.
Objetivos:

- Fazer com que os estudantes percebam que o retângulo possui ângulos internos de 90°, assim como o quadrado.
- Fazer o estudante refletir sobre o quadrado ser um caso especial de retângulo.

A sua missão de hoje é descobrir as propriedades sobre esta figura já tão conhecida por você e seus colegas!
Para isso, vamos construir esta figura no programa Geogebra.

1) Abra o programa Geogebra e siga os seguintes passos a seguir:

a) Trace um segmento de reta AB e uma reta perpendicular passando por A.

b) Marque um ponto C qualquer sobre a reta e marque o segmento AC.

c) Construa uma reta paralela a AC passando por B.

d) Construa uma reta paralela a AB passando por C.

e) Marque o ponto D como o encontro entre estas duas retas.

f) Com a ferramenta polígono marque ABCD.

g) Esconda as retas.

h) Com a ferramenta ângulo meça todas as aberturas internas da figura.

i) Com a ferramenta medida, meça os lados dessa figura.

j) Movimente o ponto A. O que você pode dizer sobre as medidas de lado e de ângulo dessa figura?

k) Qual é a semelhança desta figura com o quadrado?

l) O quadrado poderia ser chamado de retângulo ou o retângulo poderia ser chamado de quadrado?

Aula 5 – Investigando o Paralelogramo
Duração: 2 horas aula
Material necessário: computadores do laboratório de informática e software GeoGebra.
Objetivos:

- Fazer com que os estudantes percebam a noção do conceito de paralelismo.
- Fazer com que os estudantes percebam que o paralelogramo tem a propriedade de possuir ângulos opostos de mesma medida e lados opostos também com a mesma medida.

A sua missão de hoje é descobrir as propriedades sobre esta figura já tão conhecida por você e seus colegas!

Para isso, vamos construir esta figura no programa Geogebra.

1) Abra o programa Geogebra e siga os seguintes passos a seguir:

a) Trace uma reta qualquer no plano e marque um ponto C fora dela.

b) Trace o segmento AC. Em seguida, trace uma reta paralela a AC, passando por B.

c) Movimente o ponto C. O que acontece com a nova reta?

d) Construa agora uma reta paralela ao segmento AB passando por C, e marque o ponto D como a intersecção entre as duas retas.

e) Com a ferramenta polígono, marque os pontos ABCD e esconda as retas.

f) Com a ferramenta distância, meça todos os lados da figura.

g) Com a ferramenta ângulo, meça todas as aberturas internas da figura.

h) Movimente algum ponto da figura. O que você observa? O que acontecem com as medidas feitas?

i) Quais são as características desta figura?

Aula 6 – Investigando o Losango
Duração: 1 hora aula
Material necessário: computadores do laboratório de informática e software GeoGebra.
Objetivos:

- Fazer os estudantes perceberem as propriedades do losango: quatro lados iguais, e ângulos opostos iguais.
- Questionar os estudantes sobre a relação entre o losango e o quadrado e o losango e o paralelogramo

A sua missão de hoje é descobrir as propriedades sobre esta figura já conhecida por você e seus colegas!

Para isso, vamos construir esta figura no programa Geogebra.

1) Abra o programa Geogebra e siga os seguintes passos a seguir:

a) Trace um segmento de reta AB.

b) Trace uma circunferência (no Geogebra, um círculo) com centro em A passando por B.

c) Marque um ponto C na circunferência (no Geogebra, no círculo) e trace o segmento AC.

d) Trace uma circunferência (no Geogebra, um círculo) com centro em B passando por A, e outra circunferência (círculo no Geogebra) com centro em C passando por A. Marque o ponto D como o ponto onde estas duas circunferências (círculos no Geogebra) se encontram.

e) Trace o polígono ABDC e esconda as circunferências.

f) Com a ferramenta distância, meça todos os lados da figura.

g) Com a ferramenta ângulo, meça todas as aberturas internas da figura.

h) Movimente um dos pontos da figura. O que acontece com as medidas quando movimentamos a figura? Quais são as características desta figura?

i) Você consegue ver alguma relação entre esta figura e o quadrado? E entre esta figura e o paralelogramo?

Aula 7 – Investigando o Trapézio
Duração: 1 hora aula
Material necessário: computadores do laboratório de informática e software GeoGebra.
Objetivos:

- Fazer os estudantes perceberem que no trapézio tem-se dois lados opostos paralelos, e dois lados opostos não paralelos.

A sua missão de hoje é descobrir as propriedades sobre esta figura já conhecida por você e seus colegas!
Para isso, vamos construir esta figura no programa Geogebra.

1) Abra o programa Geogebra e siga os seguintes passos a seguir:

a) Trace um segmento AB e um ponto C fora dele. Em seguida, trace os segmentos AC e BC.

b) Marque um ponto D sobre o segmento AC. Trace uma reta paralela ao segmento AB passando por D. Marque o ponto E como a intersecção desta reta com o segmento BC.

c) Trace o polígono ABED.

d) Movimente os pontos da figura? O que você observa que acontece?

Aula 8 – Investigando o Triângulo Retângulo
Duração: 1 hora aula
Material necessário: computadores do laboratório de informática e software GeoGebra.
Objetivos:

- Fazer os estudantes perceberem que o triângulo retângulo possui um ângulo de 90°.

A sua missão de hoje é descobrir as propriedades sobre esta figura já conhecida por você e seus colegas!
Para isso, vamos construir esta figura no programa Geogebra.

1) Abra o programa Geogebra e siga os seguintes passos a seguir:

a) Construir um segmento AB e uma reta perpendicular a AB passando por A.

b) Marcar o ponto C sobre a reta e marcar o segmento AC.

c) Esconda a reta. Trace o segmento BC.

d) Marque o ângulo BAC. Movimente o ponto B.

e) O que ocorre quando se movimenta o ponto B? A posição entre os segmentos se altera?

f) Porque você acha que este triângulo tem este nome? Qual é a relação dele com a figura geométrica retângulo?

Aula 9 – investigando o Triângulo Isósceles
Duração: 1 hora aula
Material necessário: computadores do laboratório de informática e software GeoGebra.
Objetivos:

- Fazer os estudantes perceberem que o triângulo isósceles possui dois ângulos congruentes e dois lados com medidas iguais.

A sua missão de hoje é descobrir as propriedades sobre esta figura já conhecida por você e seus colegas!
Para isso, vamos construir esta figura no programa Geogebra.

1) Abra o programa Geogebra e siga os seguintes passos a seguir:

a) Marque um segmento AB e uma circunferência (círculo no geogebra) com centro em A e raio AB.

b) Marque um ponto C sobre o círculo, diferente de B, e marque o segmento AC.

c) Marque o segmento BC e esconda o círculo.

d) Marque os ângulos internos do triângulo.

e) Com a ferramenta medida, meça os lados do triângulo.

f) Movimente o ponto A. O que você observa quanto aos ângulos?

g) E o que você observa quanto às medidas dos lados?

Aula 10 – Investigando o Triângulo Equilátero
Duração: 1 hora aula
Material necessário: computadores do laboratório de informática e software GeoGebra.
Objetivo:

- Fazer com que os estudantes percebam que o triângulo equilátero possui três lados de mesma medida e três ângulos de 60°.

A sua missão de hoje é descobrir as propriedades sobre esta figura já conhecida por você e seus colegas!
Para isso, vamos construir esta figura no programa Geogebra.

1) Abra o programa Geogebra e siga os seguintes passos a seguir:

a) Construir um segmento AB e uma circunferência (círculo no Geogebra) com centro em A passando por B.

b) Construir uma nova circunferência (círculo no Geogebra) com centro em B passando por A.

c) Marque o ponto C que é um dos pontos de intersecção entre as duas circunferências (o ponto onde as duas circunferências se encontram).

d) Trace os segmentos AC e BC.

e) Esconda as circunferências (círculos no Geogebra).

f) Com a ferramenta ângulo, marque os ângulos internos do triângulo.

g) Com a ferramenta medida meça os lados do triângulo.

h) Movimente o ponto A. O que você observa quanto às medidas de ângulo? Elas se alteram?

i) E as medidas de lado? O que acontecem com elas?

Aula 11 – Investigando o Triângulo Escaleno
Duração: 1 hora aula
Material necessário: computadores do laboratório de informática e software GeoGebra.
Objetivo:

- Construir e identificar um triângulo escaleno através das medidas de lados de medidas distintas e ângulos distintos.

A sua missão de hoje é descobrir as propriedades sobre esta figura já conhecida por você e seus colegas!
Para isso, vamos construir esta figura no programa Geogebra.

1) Abra o programa Geogebra e siga os seguintes passos a seguir:

a) Construa um triângulo qualquer.

b) Com a ferramenta medida, meça os lados desse triângulo.

c) Com a ferramenta ângulo, meça os ângulos internos da figura.

d) Ele se encaixa na categoria isósceles ou equilátero? Se sim, desenhe aleatoriamente outro triângulo e repita o procedimento. Caso não, o que diferencia este triângulo do isósceles ou do equilátero?

Aula 12: Registro das características das figuras trabalhadas no GeoGebra e discussão sobre as figuras trabalhadas
Duração: 2 horas aula
Material necessário: Folha de registro, computador e data show.
Objetivo: Fazer os alunos perceberem as características de cada figura, registrando as mesmas.

Mostrar aos estudantes as construções feitas pelos mesmos, projetadas no data show, movendo os pontos de cada construção, de forma a destacar as características de cada figura. Os alunos devem anotar as características na tabela abaixo:

Nome do polígono	Rascunho do polígono	Número de lados	Características dos ângulos	Número de vértices (pontas)	Características do polígono
Quadrado					
Retângulo					
Paralelogramo					
Losango					
Trapézio					
Triângulo retângulo					
Triângulo equilátero					
Triângulo isósceles					
Triângulo escaleno					

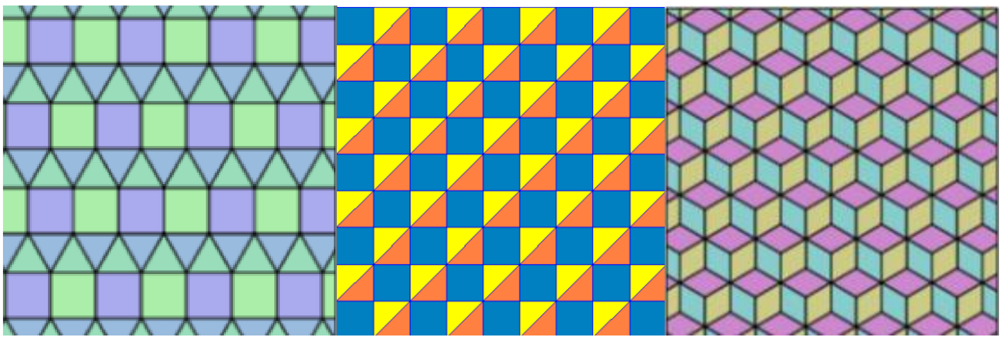
Aula 13 – Tesselações

Duração: 9 horas aula
Material necessário: Laboratório de informática com acesso à internet, que abra páginas em html, folhas com as atividades e lápis de cor.
Objetivos:

- Espera-se que o estudante compreenda o que seja uma tesselação/pavimentação do plano, utilizando para isso um quadrado como referência.
- Espera-se que o estudante perceba os movimentos das unidades de tesselação no plano, de acordo com cada transformação geométrica, no contexto virtual e físico.

Na aula de hoje vamos investigar as coberturas do plano ou tesselações.

Observe alguns exemplos de como podemos cobrir uma região plana.



1. No laboratório de informática acessar o link:
http://gwydir.demon.co.uk/jo/tess/tess.htm

Em seguida, na malha 4x4 indicada abaixo, crie uma unidade para pavimentar o plano à esquerda. Esta unidade deverá ter no mínimo 4 cores diferentes.

c) Observe e descreva com suas palavras o que ocorre com a sua cobertura do plano em cada uma das opções.

- Simple Repeat(Repetição Simples - translação):

- Staggered (Translação diferente):
- Reflected Vertically(Reflexão vertical):
- Reflected Horizontally(Reflexão Horizontal):
- ½ turn(Rotação de meia volta):
- ¼ turn(Rotação de um quarto de volta):

d) Clique em More Examples (Mais exemplos). Escolha pelo menos três pavimentações para reproduzir com o programa. Em seguida reproduza abaixo a unidade de pavimentação original utilizada e qual tipo de movimentação (transformação) foi utilizada (simple repeat, staggered, reflected vertically, reflected horizontally, ½ turn, ¼ turn). Utilize lápis de cor para essa reprodução. (Folha impressa)

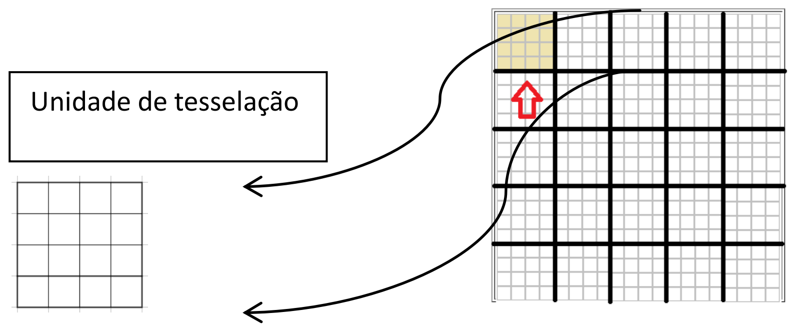
Nome:____ Turma: _____

Unidade utilizada	Movimentação/Transformação utilizada

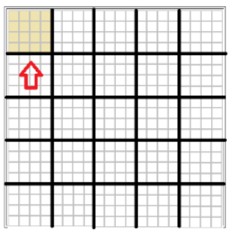
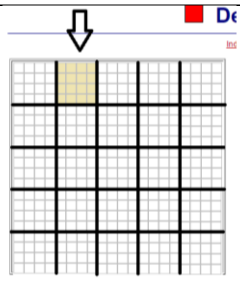
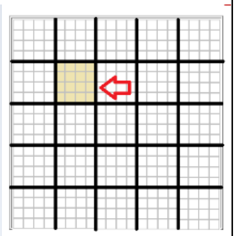
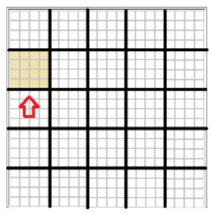
(Folha impressa)
Nome: ____
Turma: B34

Acesse o site **http://gwydir.demon.co.uk/jo/tess/tess.htm**

a) Crie uma unidade de pavimentação/tesselação utilizando as ferramentas do site (utilizar no mínimo 3 cores diferentes!) e a reproduza abaixo através de uma pintura com lápis de cor:



b) Efetue cada comando e em seguida preencha a tabela abaixo

Reproduza o que acontece com cada unidade em destaque quando você utiliza:				
Simples Repetição (translação)				
Reflexão vertical				
Reflexão horizontal				
Ferramenta rotação ½ volta				
Ferramenta rotação ¼ de volta				

2 Explique com suas palavras cada um dos conceitos abaixo ou exemplifique com algum objeto ou situação cotidiana:

a) A reflexão HORIZONTAL:
b) A reflexão VERTICAL:
c) A Simples repetição ou translação:
d) A rotação de ½ volta:
e) A rotação de ¼ de volta:

Aula 14 – Transformações Geométricas em um ambiente 3D
Duração: 1 hora aula
Materiais necessários: Duplas de objetos iguais ou simétricos, fichas para escrever a posição do objeto, palitos de picolé, folhas para anotações dos alunos.
Objetivo: O objetivo desta atividade era de que os estudantes possam ter a noção de que o contexto das transformações geométricas pode sair do bidimensional para o tridimensional.

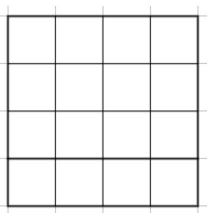
Na sala de aula, dispor cada objeto da dupla de objetos em dois pontos distintos da sala e em posições diferentes e numerá-los com as fichas com as informações “Posição 1” e “Posição 2”. O professor deve solicitar aos alunos que descubram quais transformações foram efetuadas no objeto da “Posição 1” para chegar à “Posição 2”. Como unidade de translação, os estudantes devem utilizar palitos de picolé. Desta forma, devem descrever quantos palitos de picolé o objeto se deslocou para cima, ou para a direita, por exemplo, conforme a situação proposta.

Aula 15 – Tesselações com colagem e pintura
Duração: 5 horas aula
Materiais necessários: Folhas com as atividades, papel colorido, lápis de cor, cola e tesoura.
Objetivo: Espera-se que o estudante perceba os movimentos das unidades de tesselação no plano, de acordo com cada transformação geométrica, agora fora do contexto virtual.

(Folha impressa)
Atividade de criação de tesselação com as figuras geométricas estudadas.

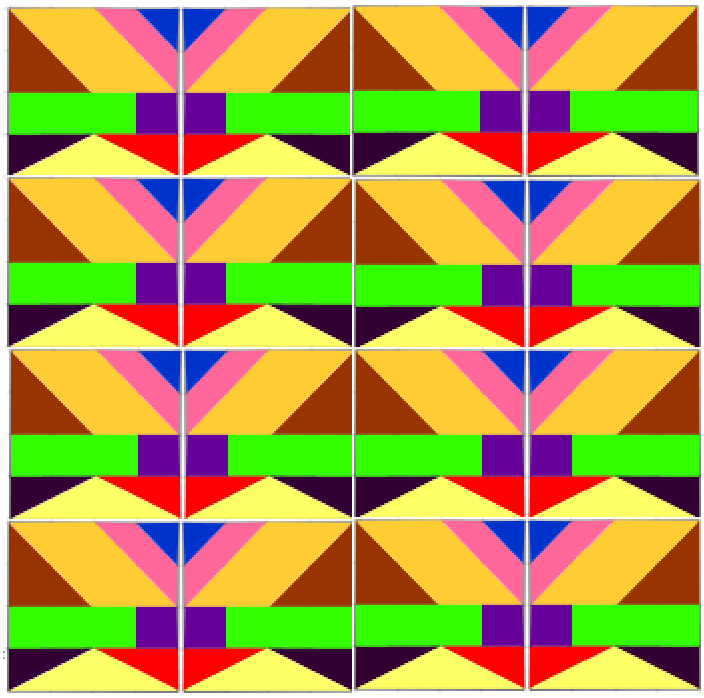
1. Escolha 4 tipos de figuras diferentes, dentre as que você estudou até então, para preencher a sua unidade de tesselação:
    - Quadrado
    - Retângulo
    - Paralelogramo
    - Losango
    - Trapézio
    - Triângulos: retângulo, isósceles, ou equilátero

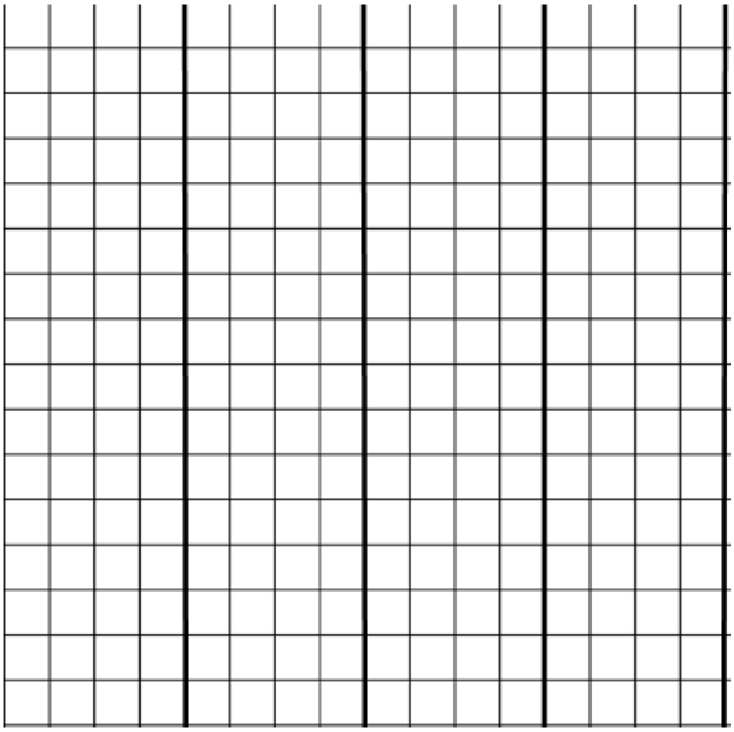
Unidade de tesselação:



Exemplo de unidade de tesselação:

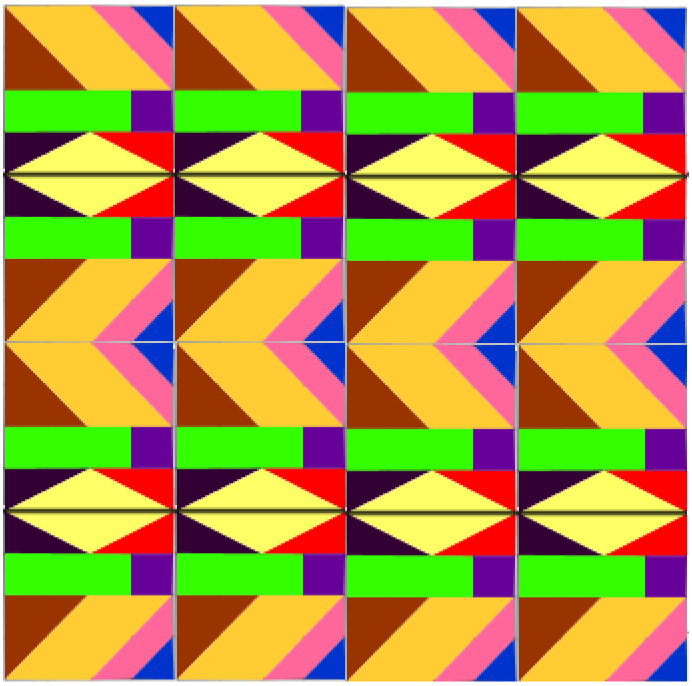
Preencha o plano abaixo considerando as linhas mais escuras como eixos de reflexão vertical:
Exemplo:





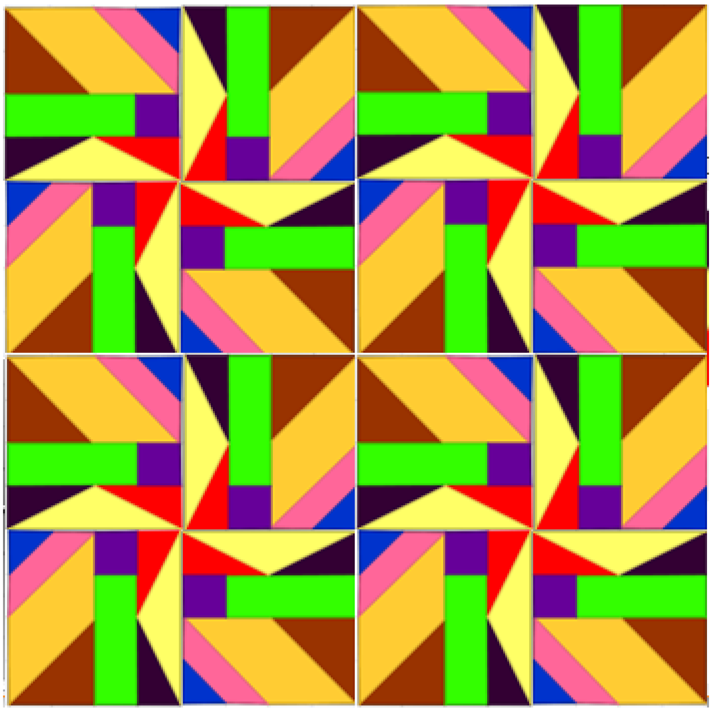
Preencha o plano abaixo considerando as linhas mais escuras como eixos de reflexão vertical.

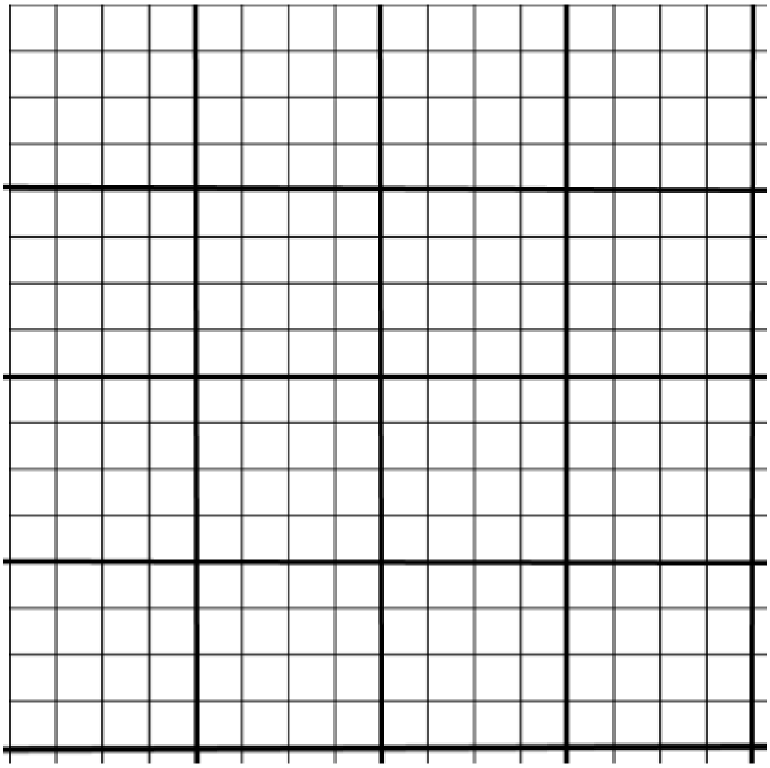
Exemplo:



Preencha o plano abaixo considerando as linhas mais escuras como referenciais para rotação.

Exemplo:





Agora, crie uma cobertura do plano, que contenha ao mesmo tempo reflexão e rotação:

APÊNDICE B

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, R.G. ________________, responsável pelo(a) aluno(a) ______________________________________, da turma B34, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada **Investigação matemática, produção de vídeos e GeoGebraBook: integrando ferramentas para o ensino de triângulos e de quadriláteros**, desenvolvida pela professora/pesquisadora Anelise Pereira Baur. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por Professora Leandra Anversa Fioreze, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do e-mail leandra.fioreze@gmail.com.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro tendo a pesquisa objetivos estritamente acadêmicos. Fui informado(a) dos objetivos, que, em linhas gerais, são:

- Identificar quais são as possíveis contribuições da investigação matemática em sala de aula para a aprendizagem de geometria, quando coligada à produção de vídeo e à construção de um portfólio na plataforma GeogebraBook, ambas pelos estudantes, para o ensino de alguns conceitos da geometria plana, mais especificamente, dos triângulos e dos quadriláteros e de suas propriedades.
- Analisar de que forma os alunos utilizam os recursos de vídeo para discutirem sobre os conceitos matemáticos descobertos através da segunda etapa da investigação.

Fui também esclarecido(a) de que o uso das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), não tendo sua identificação.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de entrevista/questionário escrito, etc., bem como da participação em oficina/aula/encontro/palestra, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários, etc., sem identificação.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável no endereço da EMEF João Antonio Satte, situada na Rua Gamal Abdel Nasser, 500, Porto Alegre, ou pelo e-mail anelisebaur@yahoo.com.br.

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, _____ de ________________ de _______.

Assinatura do Responsável:

Assinatura da pesquisadora:

Assinatura do Orientador da pesquisa: