UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

LAÍS DE ALMEIDA PEREIRA

MATEMÁTICA DINÂMICA NA RESOLUÇÃO DE QUESTÕES DA OBMEP

Porto Alegre
2017

LAÍS DE ALMEIDA PEREIRA

MATEMÁTICA DINÂMICA NA RESOLUÇÃO DE QUESTÕES DA OBMEP

Dissertação elaborada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Orientadora: Profa. Dra. Débora da Silva Soares

Porto Alegre

2017

LAÍS DE ALMEIDA PEREIRA

MATEMÁTICA DINÂMICA NA RESOLUÇÃO DE QUESTÕES DA OBMEP

Dissertação elaborada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Aprovado em 07/11/2017.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Márcia Rodrigues Notare Meneghetti - IME/UFRGS

Profa. Dra. Marilaine de Fraga Sant'Ana - IME/UFRGS

Prof. Dr. Vandoir Stormowski - FAMAT/PUCRS

Profa. Dra. Débora da Silva Soares – Orientadora - IME/UFRGS

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha Orientadora, professora Débora, pela atenção e disponibilidade em todos momentos que precisei, por me apoiar e tranquilizar em momentos desafiadores. Agradeço por sua dedicação e paciência.

À professora Márcia por ter iniciado este trabalho comigo e por ser um exemplo como educadora.

Aos professores do curso por compartilharem seus conhecimentos e experiências.

Agradeço à UFRGS pela oportunidade.

Aos meus colegas de mestrado por possibilitarem trocas e construções de saberes. E por compartilharem essa etapa tão importante em nossas vidas.

À Kátia, à Dafne e ao Platão por tornarem as segundas-feiras mais animadas. E principalmente pela amizade.

Aos meus alunos que participaram e colaboraram para a realização deste trabalho.

Aos meus pais, Fabíola e Gracilau, por me apoiarem e estarem presentes em todos os momentos da minha vida.

Aos meus familiares por compreenderam minha ausência e que estiveram presentes nesta caminhada.

E em especial, ao Gabriel, meu companheiro, pela paciência e compreensão.

Muito obrigada!

RESUMO

Esta pesquisa foi regida pela seguinte questão: quais são as contribuições do uso de *software* de matemática dinâmica para a compreensão e solução de questões de geometria e contagem da OBMEP? Em termos pedagógicos, o objetivo foi trabalhar com questões desafiadoras com apelo ao dinamismo, assim o banco de questões da OBMEP[1] foi escolhido por possuir questões bem elaboradas e com enunciados claros e desafiadores. Pretendeu-se, portanto, apresentar o *software* GeoGebra[2] como recurso para resolver questões de geometria e de contagem e, analisar a produção dos alunos, avaliando como o GeoGebra contribuiu para a construção do conhecimento matemático. A metodologia utilizada foi a pesquisa qualitativa para produzir um Experimento de Ensino. As atividades foram desenvolvidas no contra turno com alunos do 7º e 8º ano do Ensino Fundamental em uma escola municipal de Gravataí, no ano de 2017. A sequência didática produzida nesta pesquisa é o produto didático da dissertação. A coleta de registros foi feita a partir de gravações de áudio e vídeo, diário de campo e arquivos de GeoGebra que contribuíram para o desenvolvimento do trabalho. A análise dos dados coletados demonstrou que o GeoGebra é interessante para desenvolver o raciocínio em questões em que a *prova do arrastar* (BORBA, DA SILVA, GADANIDIS, 2015, p.23) seja necessária. Assim, o *software* contribuiu para a construção de conceitos e compreensão de propriedades em figuras geométricas sendo possível verificar o comportamento dessas figuras conforme a utilização dos recursos do *software*. O GeoGebra também demonstrou ser útil para organização de ideias em problemas de contagem. No entanto, deve-se cuidar para que não haja a domesticação do *software*, ou seja, para não o utilizar no lugar de outras tecnologias que já são satisfatórias.

Palavras-chave: Educação Matemática; GeoGebra; Tecnologia no Ensino de Matemática.

1 A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) é uma realização do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA - e tem como objetivo estimular o estudo da matemática e revelar talentos na área. http://www.obmep.org.br.

2 GeoGebra é um *software* de geometria dinâmica totalmente gratuito criado por Markus Hohenwarter e disponível para download em http://www.geogebra.org/.

ABSTRACT

This research was conducted by the following question: What are the contributions of the use of dynamic mathematic software for understanding and solving OBMEP geometry and counting questions? In pedagogical terms, the objective was to work with challenging questions with a call for dynamism, so the OBMEP[3] questions database was chosen because it has well elaborated math problems with clear and challenging statements. It was intended, therefore, to present GeoGebra[4] software as a resource to solve geometry and counting questions and to analyze the students' production, evaluating how did GeoGebra contribute to the construction of mathematical knowledge. The methodology used was the qualitative research to produce a Teaching Experiment. The activities were developed in the inverse shift with students of the 7th and 8th years of elementary school in a municipal public school in Gravataí, in the year 2017. The didactic sequence produced in this research is the didactic product of the dissertation. The collection of records was made from audio and video recordings, field notes and GeoGebra files that contributed to the development of the work. The analysis of collected data showed that GeoGebra is interesting to develop the reasoning in questions where the drag test (BORBA, DA SILVA, GADANIDIS, 2015, p.23) is necessary. Thus, software contributes to the construction of concepts and understanding of properties in geometric figures and it is possible to verify their behavior according to the use of software resources. GeoGebra has also been shown to be useful for organizing ideas into counting problems. However, care must be taken that there is no domestication of the software, in other words, software should not be used in place of other technologies that are already satisfactory.

Key-words: Mathematics Education; GeoGebra; Technology in Mathematics Teaching.

[3] The Brazilian Mathematics Olympiad of Public Schools (OBMEP) is an achievement of the Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA - and aims to stimulate the study of mathematics and reveal talents in the area. http://www.obmep.org.br.
[4] GeoGebra is a totally free dynamic geometry software created by Markus Hohenwarter and available for download at http://www.geogebra.org/.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SIGLAS

OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
ProfMat	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
IME-UFRGS	Instituto de Matemática e Estatística – Universidade Federal do Rio Grande do Sul

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O tema desta pesquisa diz respeito à resolução de questões com uso de construções feitas no *software* GeoGebra, de modo a transformar representações estáticas em representações dinâmicas. Assim, pretendeu-se trabalhar com questões desafiadoras com apelo ao dinamismo. As questões utilizadas nesta investigação pertencem ao banco de questões da OBMEP. Para isso, uma sequência didática foi planejada e desenvolvida para este fim. Esta sequência visa proporcionar ao estudante construções dinâmicas que possibilitem a resolução de questões de geometria e contagem, e apresentar o *software* GeoGebra como recurso para realizar construções que contribuam para a compreensão de outras questões. Desta forma, esta pesquisa é regida pela seguinte questão norteadora: quais são as contribuições do uso de *software* de matemática dinâmica para a compreensão e solução de questões de geometria e de contagem da OBMEP?

Os objetivos para elaboração desta pesquisa foram: elaborar uma sequência didática que utilize a matemática dinâmica como recurso para visualização e resolução de questões da OBMEP; aplicar a sequência didática; analisar a produção dos alunos e analisar como o GeoGebra contribuiu para a compreensão de estruturas geométricas.

A ideia principal desta investigação foi a de escolher um assunto que estivesse ligado diretamente com a prática de sala de aula, logo, com o ensino de matemática. Dessa forma, surgiu a motivação para continuar a discussão sobre o uso de tecnologias digitais em sala de aula, tema tratado ao longo das disciplinas do curso de Mestrado em Ensino de Matemática.

Como professora de matemática, sempre foi possível perceber que o uso de imagens estáticas, representações prototípicas (GRAVINA, SANTAROSA, 1996) para o ensino de geometria em geral não é totalmente satisfatório, pois possibilita enganos. Por exemplo, para uma figura plana ser um quadrado ela precisa que seus quatro lados tenham a mesma medida e seus ângulos internos sejam todos retos. Deste modo, temos que os lados opostos são paralelos entre si, enquanto que os lados adjacentes são perpendiculares entre si. Uma maneira de representar esta situação é considerar que um par de lados opostos esteja na horizontal e o outro par de lados opostos esteja na vertical, porém para ser um quadrado não é necessário que a figura esteja posicionada desta forma. O tema desta pesquisa surge a partir destas percepções. Assim, observa-se a necessidade de buscar novos recursos para o ensino de matemática.

Meu primeiro contato com Tecnologias Digitais para o ensino foi ainda como aluna na 2ª série do Ensino Fundamental. Havia um projeto no turno contrário onde trabalhávamos com o MegaLogo. Meus pais, ao perceberem que meu irmão e eu gostávamos muito desse projeto, arrumaram um jeito de comprar um computador usado para nós.

Na graduação conheci alguns *software* interessantes para o ensino de matemática, porém não sabia como usá-los em sala de aula. Eles foram apenas apresentados para que os explorássemos como alunos, mas como usar em sala de aula? Vi *software* como Winplot, Grapheq, Cabri, Poly, entre outros, mas alguns só visualizei.

Então ingressei no curso de Especialização em Matemática, Mídias Digitais e Didática, ofertado pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, para melhorar minhas aulas que seguiam uma linha muito tradicional. Com as disciplinas que fizeram uso de *software*, como GeoGebra (principal programa usado), GrafEq e Winplot, minha visão sobre como usar essas tecnologias foi ampliada. Em um primeiro momento aprendendo como aluna e após percebendo as possibilidades de uso que poderia fazer em sala de aula com meus alunos. Em seguida, ingressei no mestrado em Ensino de Matemática onde tive a oportunidade de conhecer novas metodologias de ensino e como aplicá-las em sala de aula.

Já desenvolvi algumas atividades onde o aluno movimenta pontos em um arquivo GeoGebra e, a partir de questões elaboradas anteriormente, fazem uma análise reflexiva sobre o que está acontecendo ao realizar os movimentos solicitados. Usei para ensinar a Função Afim, cálculo da Área e uso livre para exploração do programa. Ao utilizar o GeoGebra como aluna, me identifico com a fala de Meier (2011, p.12-13) que:

> A manipulação direta de objetos construídos e que são colocados em movimento na tela do computador faz com que os alunos observem os resultados obtidos, primeiramente de forma empírica, mas depois buscando explicar as regularidades que vão se tornando cada vez mais evidentes.

Com os alunos não percebo ser diferente, fazem o mesmo movimento. Porém eles ainda possuem dificuldades em expor o que percebem, muitas vezes explicam verbalmente, mas se sentem desconfortáveis em escrever. Esse é outro processo que estou trabalhando para que melhorem. Assim como Goldenberg (1998) afirma:

> Para fazer matemática, deve-se ter tendência para detectar e ter em atenção relações (quantitativas, espaciais, hierárquicas ou de inclusão, estruturais, etc.), processos e conexões lógicas entre ideias, e deve-se ter capacidades para as descrever.

Essa possibilidade de expressar-se ajuda os alunos a desenvolverem seus pensamentos, estruturá-los e então expô-los. No entanto, sem desviar do assunto, é neste processo que percebo o desenvolvimento do pensamento matemático. Muitas vezes, como professora, parece que já sabemos o suficiente, porém quando usamos *software* de matemática dinâmica com os alunos ou para desenvolver algo para os alunos, sempre aprendemos algo novo. Na aplicação em sala de aula muitas vezes os discentes percebem situações ao realizar os movimentos nas figuras que nem o professor havia previsto.

A escolha do banco de questões da OBMEP é devido ao fato de ser atual e estar presente nas escolas públicas. O uso de questões da OBMEP também é motivado pelo fato de serem questões desafiantes e separadas por níveis de dificuldade. Essas questões que compõem esse banco passaram por um processo de seleção e melhorias para então serem divulgadas. Desta forma são questões bem elaboradas, criadas cuidadosamente para seu objetivo.

Este trabalho está organizado em capítulos, conforme descrição a seguir:

No capítulo 2 foi realizada uma revisão de literatura de trabalhos correlatos com a pesquisa desenvolvida nesta investigação, que se aproximam do assunto tratado como inspiração e reflexão. Também, aborda o referencial teórico utilizado para realização da análise e reflexão desta investigação.

O capítulo 3 trata da metodologia de trabalho utilizada, a pesquisa qualitativa e o experimento de ensino. Ainda, o contexto no qual a pesquisa está inserida, um breve histórico sobre os alunos, a elaboração da prática e seus passos e, sobre o GeoGebra.

No capítulo 4 foi feita a descrição da prática realizada em sala de aula, em período extraclasse, com base na coleta de dados. E a análise sobre o uso do software GeoGebra com base no referencial teórico.

O capítulo 5 apresenta uma discussão acerca da análise realizada no capítulo 4. Nesta discussão pontuamos as reflexões sobre o trabalho desenvolvido.

Nas Considerações Finais realizamos um breve resumo sobre o que foi feito e as expectativas para seguir com pesquisas futuras.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo aborda o referencial teórico utilizado para realização da análise e reflexão desta investigação. Desta forma, está dividido nas seguintes seções: “o uso da tecnologia em sala de aula”, “Geometria dinâmica”, “Geometria” e “Contagem”. Também, apresenta a revisão de literatura, ou seja, “Trabalhos correlatos” com a pesquisa desenvolvida nesta investigação, que se aproximam do assunto tratado como inspiração e reflexão.

2.1 O USO DA TECNOLOGIA EM SALA DE AULA

A tecnologia está cada vez mais presente na vida das pessoas, ao ir no banco, fazer compras, conversas por meio de chats, redes sociais, em linhas de produção, dentre muitos outros aspectos da vida moderna. Desta forma, a escola também está nesse meio, em processos de matrícula, monitoramento por câmeras para segurança, o uso constante de aparelhos celulares. No entanto, com tudo isso em torno dos alunos, muitas vezes eles entram em sala de aula e são totalmente proibidos de utilizar qualquer forma de mídias digitais, o que faz a escola se tornar desinteressante e obsoleta para realidade da comunidade escolar. Proibições que atrapalham também o planejamento do professor que poderia realizar práticas com aparelhos celulares, *tablet*, câmeras entre outros. Estas são algumas ocorrências da realidade escolar. Talvez, isso ocorra por muitos professores desconhecerem as possibilidades de uso e sua função de instruir os alunos quanto ao uso dos recursos digitais para outros fins. Na Educação Matemática, muitas são as possibilidades de uso das mídias digitais. Existem possibilidades de uso para praticamente todos os conteúdos, cabendo ao professor conhecê-las e possibilitar o seu uso.

No entanto, é muito comum encontrar a forma tradicional digitalizada, gravada ou filmada na internet, de modo que simplesmente se transfere o que sempre foi feito no papel para o digital. Também há o uso de recursos digitais para facilitar o trabalho do professor, como formulários eletrônicos que realizam a correção, entre outros meios. Não estou condenando a prática, se existe a possibilidade de facilitar determinado trabalho, acredito que esta deve ser usada, porém acredito que as mídias digitais não devem ser usadas unicamente para isso.

Um exemplo de aplicação das mídias digitais nas aulas de matemática é o uso de *software* de geometria dinâmica, que possibilitam ao aluno perceber propriedades em figuras planas ao movimentá-las e, assim, enquanto no papel teria que realizar vários desenhos, em uma aplicação dinâmica é possível visualizar todas as possibilidades. Segundo Valente (2005, p. 11):

> Hoje, a utilização de computadores na Educação é muito mais diversificada, interessante e desafiadora, do que simplesmente a de transmitir informação ao aprendiz. O computador pode ser também utilizado para enriquecer ambientes de aprendizagem e auxiliar o aprendiz no processo de construção do seu conhecimento.

Porém, nos deparamos com a realidade das escolas públicas, onde os computadores são geralmente segregados em uma sala como sendo algo a parte da sala de aula, uma disciplina a parte. Assim, se enfrentam dificuldades para conseguir levar os alunos até os computadores, por disponibilidade de horário, ou mesmo, se a sala está em pleno funcionamento. O professor em geral, se tiver uma forte intenção em trabalhar no laboratório de informática, terá que se adaptar às deficiências de estrutura presentes.

E então surgem alunos que já possuem acesso à internet em suas casas, e outros que não. Segundo Freire (2010, p.115) "nesse processo, a diferenciação entre os que têm e os que não têm acesso à Internet, acrescentou uma nova forma de desigualdade e exclusão social às já existentes, a exclusão digital". Logo, cabe à escola oportunizar o acesso à tecnologia aos alunos economicamente carentes, de modo que estes percebam que a internet é para todos. E, também, cabe à escola mostrar que as mídias digitais possuem diversas funções e não unicamente o contato social através de redes sociais que é o principal uso feito pelos alunos.

Como afirma Dupas (2001, p. 118):

> As novas tecnologias geram produtos de consumo radicalmente novos. O telefone celular e a internet, símbolos da interconectividade, passam a ser condição de felicidade. O homem volta a ser rei exibindo a sua intimidade com a mercadoria ou identificando-se com os novos ícones, os heróis da mídia eletrônica transformados eles mesmos em mercadoria ou identificados com marcas globais.

Desta forma, o professor necessita tomar cuidado com as abordagens que são feitas, sobre quem possui acesso à rede ou não, pois a escola deve reduzir essa distância que pode ocorrer entre os indivíduos. É nesse sentido que Assmann (2000, p.9) destaca:

> No acesso à sociedade da informação as políticas públicas podem fazer a diferença. Para que sejam aproveitadas todas as vantagens econômicas e sociais do progresso tecnológico e melhorada a qualidade de vida dos cidadãos, a sociedade da informação deve assentar nos princípios da igualdade de oportunidades, participação e integração de todos, o que só será possível se todos tiverem acesso a uma quota parte mínima dos novos serviços e aplicações oferecidos pela sociedade da informação.

A escola, neste sentido, é um importante meio (dentre outros) para possibilitar a apropriação das tecnologias pelos alunos em geral, pois a escola tem o potencial para ensinar como os recursos digitais podem ser usados, e assim tornar os indivíduos críticos frente a todas as imposições sociais que estão sujeitos quando usam a internet.

Consequentemente, o uso da informática em sala de aula tem sido tema de discussão entre muitos pesquisadores na área da Educação Matemática, sendo um dos tópicos de muitos eventos pelo mundo. Nestes diálogos surgem os prós e os contras acerca da utilização de tecnologia no processo de ensino. Um dos contras, conforme Borba e Penteado (2012, p. 11), “era que o aluno iria só apertar teclas e obedecer a orientação dada pela máquina. Isso contribuiria ainda mais para torna-lo um mero repetidor de tarefas”. Por outro lado, um dos argumentos favoráveis apresentados por Borba e Penteado (2012, p. 17) é que “o acesso à informática na educação deve ser visto não apenas como um direito, mas como parte de um projeto coletivo que prevê a democratização de acessos a tecnologias desenvolvidas por essa mesma sociedade”. E assim, apresentam duas justificativas para o uso de informática em sala de aula: “alfabetização tecnológica e direito ao acesso” (BORBA; PENTEADO, 2012, p.17). De fato, não são todos os alunos que possuem acesso à informática de forma contínua, alguns usam internet quase exclusivamente em aparelhos celulares com pacote de dados limitados a redes sociais e aplicativos de comunicação, como é o caso de dois dos alunos participantes da prática desta investigação.

No desenvolvimento de atividades com o uso de tecnologias o que pode ocorrer é que um problema que antes era proposto na mídia papel, ao ser proposto com o uso da tecnologia digital deixe de ser apropriado. Desta forma, é importante que o professor desenvolva atividades que envolvam experimentações e análises por parte dos alunos, assim, a tecnologia não é subutilizada ou domesticada. Domesticação da tecnologia para Borba e Penteado ocorre “quando se reproduzem nela [tecnologia digital] práticas inerentes a mídias anteriores, e quando se condiciona o seu uso à expectativa de resultados iguais àqueles obtidos durante a utilização de uma mídia anterior” (2002, p. 243).

Assim, para um problema ser de fato um problema é necessário haver um obstáculo que desafie o indivíduo, o que pode mudar conforme a mídia que é utilizada. Por exemplo, esboçar gráficos no papel pode ser um desafio, mas em uma calculadora gráfica é uma atividade simples. “A subjetividade e a objetividade são mais combinadas na noção de seres-humanos-com-mídias e com a maneira como a noção de problema pode ser transformada por ela” (Borba, 2007, p. 3). Desta forma, é preciso tomar cuidado com o planejamento de uma aula. É claro que quando se começa a usar tecnologia em sala de aula surgem muitas dúvidas, mas somente a prática é capaz de tornar um professor apto a atender todos os requisitos mencionados.

O construto seres-humanos-com-mídias tem como base a ideia de que o conhecimento é produzido por coletivos pensantes de atores humanos e não humanos, em que todos desempenham um papel central. De acordo com Borba e Villarreal (2005), não existe uma classificação de qualidade entre as mídias, e sim, diferentes tipos que condicionaram a produção de diferentes tipos de conhecimentos. Os seres humanos, ao interagirem com as mídias, reorganizam o pensamento de acordo com as possibilidades e restrições que estas oferecem. Ao usar ou não uma mídia, o conhecimento produzido é influenciado. Desta forma, quando os alunos realizam atividades escolares com *software* o conhecimento produzido pode ser qualitativamente diferente daquele produzido usando outra mídia como, por exemplo, lápis e papel. Ou seja, as relações de interface produzem transformações recíprocas entre alunos e *software* computacionais. No entanto, o ser humano ainda é unidade que produz conhecimento, no sentido de ampliarem essa unidade cognitiva e fundamentarem as concepções epistemológicas relativas ao construto seres-humanos-com-mídias, conforme Borba e Villareal (2005).

Nessa mesma linha de raciocínio, observa-se que a inovação tecnológica em geral é vista como algo para tornar a vida das pessoas mais fácil, mais prática e rápida, no entanto, não é exatamente esse o objetivo do uso da tecnologia em sala de aula. Esta deve ser usada para conduzir o aluno a construção de seus conhecimentos. Conforme Basso e Notare (2015, p. 3), “estamos falando em utilizar a tecnologia de modo a desencadear o pensamento matemático, a proporcionar aos alunos possibilidades para acessar e manipular objetos matemáticos até então não acessíveis”.

Para Goldenberg (2000, p. 1), “nem tudo que pode ser feito deve ser feito” no contexto do uso das tecnologias, pois o professor ao preparar uma aula com tecnologia se depara com o fardo do julgamento sobre o quão adequada é a atividade a ser proposta por ter muitas influências. Para Basso e Notare (2015, p.4)

> É importante, no momento de pensar em atividades com o uso de tecnologias para a sala de aula, ter claro os objetivos que queremos alcançar e escolher a tecnologia de modo a atendê-los, ao invés de simplesmente utilizar a tecnologia para tornar a aula mais atraente, mas de forma tangente e superficial, ou até mesmo prejudicial.

Em outras palavras, é possível usar a tecnologia para facilitar o trabalho do professor, para simplesmente tornar as aulas mais atraentes, porém é necessário tomar cuidado com o uso sem perspectivas na construção de conhecimento, pois logo a tecnologia deixa de ser algo novo e pode passar a ser maçante para os alunos assim como mídias mais antigas.

Para Goldenberg (2000, p. 1), o que muda com o uso da tecnologia em sala de aula é o conjunto de problemas a se escolher e como eles podem ser apresentados. Alguns problemas são muito difíceis de representar com lápis e papel. Algumas atividades exigem que os alunos visualizem certos objetos matemáticos e vejam como eles se comportam. Alguns exigem representações visuais - gráficos, diagramas, figuras geométricas, imagens em movimento. Desta forma, a tecnologia abre espaço para resolução de questões que antes eram muito mais complexas por exigir muito da imaginação do aluno e possuir representações complexas.

Logo, a tecnologia traz ferramentas para auxiliar o aluno no desenvolvimento de seu conhecimento, do raciocínio lógico e do pensamento matemático. O uso de mídias não deve ser para ocupar o lugar do aluno como ser pensante e sim para conduzir o aluno a suas próprias conclusões. Ao utilizar computadores nas aulas de matemática, o professor emprega mais uma forma de comunicação com os alunos, assim possuindo uma nova estratégia para o ensino. Assim “a influência dos seres humanos em um determinado software torna possível moldar a forma como outros humanos aprenderiam” (BORBA E PENTEADO, 2002, p. 243).

Assim, deve-se buscar meios para minimizar a desigualdade digital, para que todos tenham acesso de forma adequada e consciente a tecnologias, como por exemplo, *software* em geral, jogos com as mais diversas finalidades e a pesquisa crítica na internet. Não existe uma fórmula para o uso da web, mas deve-se oportunizar conhecimento para que cada indivíduo seja capaz de analisar as informações disponíveis e, também, saber analisar se devem disponibilizar outras.

2.2 MATEMÁTICA DINÂMICA

Com o frequente uso de tecnologia no dia-a-dia de modo a facilitar a vida das pessoas, também surge a possibilidade de usá-la para a aprendizagem. Mas não no sentido de entregar os resultados prontos como já é possível com muitos *software* e, sim, de modo que auxilie os alunos a construir seu próprio conhecimento. A Geometria Dinâmica é um exemplo, pois com ela é possível trabalhar com o uso de propriedades geométricas nas construções de figuras de modo que estas permaneçam, mesmo quando as construções são movimentadas.

Desta forma, o uso de tecnologia se justifica por apresentar a geometria de forma que o aluno desenvolva sua própria percepção de plano e espaço. Isso ocorre a partir da análise do que já é sabido pelos alunos e fazendo uso destes conhecimentos prévios. Assim, utilizamos uma ferramenta de geometria dinâmica que, segundo Gravina e Basso (2012, p. 14):

> (...) incorporam *sistemas dinâmicos de representação* na forma de objetos *concreto-abstratos*. São concretos porque existem na tela do computador e podem ser manipulados e são abstratos porque respondem às nossas elaborações e construções mentais.

Assim, a Geometria não é mais estática, visualizada apenas da forma como é apresentada em imagens. O uso da tecnologia possibilita uma interação do aluno com o assunto estudado, de forma dinâmica, de modo que ele enxergue o que está acontecendo, podendo fazer comparações, movimentos e relações. Como, por exemplo, a questão da prática de ensino desta investigação que solicita a construção de um quadrado de modo que ao mover os vértices deste continue sendo um quadrado. Assim, o aluno percebe as propriedades que definem o quadrado e possibilita enxerga-lo em todas as inclinações possíveis e não apenas com os lados paralelos às bordas do papel, como normalmente são representados, a qual é denominada representação prototípica por Gravina e Santarosa (1996). Conforme essas autoras, “não deve ser surpreendente quando os alunos não conseguem transferir um conceito ou teorema para situação que não coincide com a prototípica registrada a partir da apresentação do livro ou do professor” (GRAVINA, SANTAROSA, 1996, p.79).

Fischbein (1993), em sua teoria dos conceitos figurais, afirmava que os objetos geométricos são compostos de duas componentes: a figural e a conceitual. A componente figural é a imagem ou representação mental associada ao conceito (visualização), mantendo invariantes certas relações. A componente conceitual expressa as propriedades que caracterizam uma certa classe de objetos.

Assim como afirma Meyer (2011, p. 12-13).

> A manipulação direta de objetos construídos e que são colocados em movimento na tela do computador faz com que os alunos observem os resultados obtidos, primeiramente de forma empírica, mas depois buscando explicar as regularidades que vão se tornando cada vez mais evidentes.

O uso de um software de geometria dinâmica permite ao aluno explorar um objeto matemático visualizando simultaneamente as representações algébrica e geométrica, esboçando figuras, manipulando-as, explorando-as, e assim, possibilita que o aluno desenvolva habilidades, usando estratégias próprias. Conforme Gravina e Basso (2012, p. 16), “a conceituação das transformações acontece no plano abstrato, mas são as suas manipulações que tratam de ajustar esta conceituação, e nisso o dinamismo do sistema de representação é um recurso fundamental”.

Assim, o uso de computadores em sala de aula mostra-se interessante por permitir que os alunos visualizem o que ocorre com as figuras quando as movemos. Gravina (1996) esclarece com que tipo de ambiente informático estamos tratando:

> São ferramentas de construção: desenhos de objetos e configurações geométricas são feitos a partir das propriedades que os definem. Através de deslocamentos aplicados aos elementos que compõe o desenho, este se transforma, mantendo as relações geométricas que caracterizam a situação. Assim, para um dado objeto ou propriedade, temos associada uma coleção de “desenhos em movimento”, e os invariantes que aí aparecem correspondem às propriedades geométricas intrínsecas ao problema. (Gravina, 1996).

Estes invariantes que a autora apresenta são as propriedades e definições associadas ao objeto, de modo que este não perca suas características essenciais, como, por exemplo, o paralelogramo possui os lados opostos paralelos. Dessa forma, percebe-se como as propriedades matemáticas impõem as características na imagem.

A visualização e a representação são elementos essenciais para a formação do pensamento geométrico. Para Gutiérrez (1996, p.9), a visualização em Matemática é “um tipo de raciocínio baseado no uso de elementos visuais e espaciais, sejam mentais ou físicos, desenvolvidos para resolver problemas ou provar propriedades”.

2.3 GEOMETRIA

Para elaboração da prática foi feita uma pesquisa sobre as questões de geometria no banco de questões da OBMEP. O objetivo era encontrar questões que não exigissem maiores conhecimentos prévios dos alunos, como por exemplo, questões que exigem que o aluno saiba as fórmulas do cálculo da área. De acordo com o PCN (1998, p.86):

> Os problemas de Geometria vão fazer com que o aluno tenha seus primeiros contatos com a necessidade e as exigências estabelecidas por um raciocínio dedutivo. Isso não significa fazer um estudo absolutamente formal e axiomático da Geometria.

Nesta dissertação, o interesse foi pela descoberta dos alunos a partir do uso das construções e ferramentas do *software*. Assim, “tem como ponto de partida a análise das figuras pelas observações, manuseios e construções que permitam fazer conjecturas e identificar propriedades” (PCN, 1998, p. 86).

Para o ensino de geometria pode-se fazer uso de materiais manipulativos, pois isso permite desenvolver uma educação visual e habilidades de manipulação. Dessa maneira os alunos adquirem a capacidade de observar nas formas das coisas as propriedades geométricas e construir conceitos geométricos abstratos. Este processo também pode ocorrer com o uso de tecnologia. Lorenzatto (2006, p.43), explica essa transição do concreto para o abstrato:

> O grande objetivo do ensino da geometria é fazer com que a criança passe do espaço vivenciado para o espaço pensado. No primeiro, a criança observa, manipula, decompõe, monta, enquanto no segundo ela operacionaliza, constrói um espaço interior fundamentado em raciocínio.

A Geometria é o estudo das formas dos objetos presentes na natureza, das posições ocupadas por esses objetos, das relações e das propriedades relativas a essas formas. A geometria é construída sobre objetos primitivos: ponto, reta, plano, espaço, entre outros. O ponto, a reta, o segmento de reta, não pertencem ao espaço perceptivo. Estes “podem ser concebidos de maneira ideal, mas rigorosamente não fazem parte desse espaço sensível. Pode-se então dizer que a Geometria parte do mundo sensível e a estrutura no mundo geométrico - dos volumes, das superfícies, das linhas e dos pontos” (PCN,1997). Esses objetos não possuem definição, mas possuem características que possibilitam sua identificação. Quando esses objetos primitivos são usados em um plano são definidas as primeiras formas geométricas: segmentos de reta, retas, polígonos e ângulos.

Assim, a geometria é construída relacionando objetos primitivos a fim de obter objetos mais elaborados. Estes são relacionados entre si para chegar a objetos mais complexos e assim sucessivamente.

Na atualidade, a geometria é dividida em dois conjuntos: Geometria Euclidiana e Geometrias não Euclidianas. Nesta dissertação a Geometria Euclidiana foi o objeto de estudo. Euclides viveu, provavelmente, em torno de 300 a.C., conhecido como pai da geometria. Ele foi o primeiro a reunir toda a geometria em uma única obra, chamada “Os Elementos”.

2.4 CONTAGEM

Inicialmente a ideia foi de elaborar uma prática com o uso de questões de geometria plana. No entanto, quando foi realizada a análise de quais questões seriam interessantes para esta prática, buscou-se questões que não exigissem conhecimentos prévios que os alunos provavelmente não aprenderam nas aulas de matemática. Então, após selecionar as questões foi possível perceber que muitas delas contavam com conhecimento básico de geometria e probabilidade para realizar sua resolução. Como os alunos provavelmente não haviam ainda aprendido os conteúdos de probabilidade, por este ser ensinado no Ensino Médio, foi decidido trabalhar com essas questões com o método da contagem para chegar às soluções.

Ao realizar uma análise minuciosa sobre as questões dos bancos e provas da OBMEP, foi verificado que as questões que menos exigem conhecimentos teórico-matemático prévios são os problemas que podem ser organizados através de possibilidades e então serem contados, ou seja, problemas de contagem dentro do conteúdo de análise combinatória. Carvalho destaca que:

> Durante muitos anos, o estudo de problemas de contagem (e mais recentemente de probabilidade) fez parte, exclusivamente, do Ensino Médio. Entretanto, o tema é perfeitamente acessível aos alunos do Ensino Fundamental, o que tem sido reconhecido, por exemplo, pelos Parâmetros Curriculares editados pelo MEC (2006, p. i).

Também, conforme Carvalho (2006, p. 16) “o interesse dos matemáticos no estudo sistemático de probabilidades é relativamente recente e tem suas raízes no estudo dos jogos de azar”. Já Morgado et al. (1991, p.1) definem que “de maneira mais geral, podemos dizer que a Análise Combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas”.

Sobre os problemas de contagem, o PCN explica como esse processo ocorre:

> Coloca o aluno diante de situações em que é necessário agrupar objetos, em diferentes quantidades, caracterizando os agrupamentos feitos. Ao tentar solucionar essas situações, ele poderá aperfeiçoar a maneira de contar os agrupamentos e desenvolver, assim, o raciocínio combinatório. Consequentemente, poderá desenvolver maior segurança e criatividade para enfrentar situações-problema de caráter aleatório, que dependem de uma contagem sistematizada, e dispor de uma ferramenta útil e motivadora para a aprendizagem da probabilidade e da estatística. (1998, p. 136)

Nos livros didáticos o assunto normalmente aparece em seções intituladas como tratamento das informações. Assim a ideia de contagem é utilizada para conduzir o aluno a entender o porquê do princípio aditivo e multiplicativo. Desta forma, pode ocorrer o contato com problemas de contagem em todos os ciclos do Ensino Fundamental, pois, a contagem está presente deste os primeiros anos de vida de uma criança. Conforme Morgado et al. (1991, p.17) a primeira técnica matemática aprendida por uma criança é "contar"', ou seja, enumerar os elementos de um conjunto de forma a determinar quantos são os seus elementos”. As operações aritméticas são aprendidas pelas crianças através da aplicação de problemas de contagem, sem que muitas vezes elas percebam isso.

Ainda, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais para 5ª a 8ª série:

> Relativamente aos problemas de contagem, o objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para sua aplicação no cálculo de probabilidades. (1998, p.52)

A Análise Combinatória é dividida em alguns métodos específicos, como arranjo, permutação e combinação. No entanto, não é nosso interesse nesta investigação trabalhar com os métodos específicos e com as fórmulas destes. Pois, “problemas (...) podem ser resolvidos sem que seja necessário fazer nenhum cálculo, uma vez que a solução pode ser obtida pela contagem direta das possibilidades” (PCN, 1998, p.111). Assim, com o auxílio do GeoGebra o objetivo para o aluno foi a descoberta de um procedimento para a resolução do problema, de modo que o objetivo para o pesquisador foi analisar como o software pode ser útil para o aluno no momento de organizar suas ideias.

Nesta investigação, as questões de análise combinatória foram usadas com a intenção de serem resolvidas através da organização dos elementos possíveis e assim realizar a contagem destes. Desta forma, as questões utilizadas nesta investigação foram selecionadas de forma que fossem desafiadoras e motivadoras cuja resolução envolvesse contagem de diferentes tipos de agrupamentos utilizando principalmente figuras geométricas.

2.5 TRABALHOS CORRELATOS

A OBMEP já tem sido apreciada por outros pesquisadores que fazem uso de seu amplo material para realizar suas experiências. Como na dissertação “Uma proposta de análise de desempenho dos estudantes e de valorização da primeira fase da OBMEP”, de Vilarinho (2015). Apresenta o objetivo de compreender melhor em que medida a prova da primeira fase dessa competição pode servir de instrumento para dar *feedback* aos estudantes e docentes, em termos da aprendizagem de matemática, e aos elaboradores da prova, acerca da qualidade do instrumento de avaliação aplicado. Os resultados mostraram que a prova apresentou alto grau de dificuldade para o grupo pesquisado e com quantidade elevada de itens com baixo poder discriminativo. Observou-se, também, significativa divergência nos resultados em relação aos estudantes selecionados para a Segunda Fase da OBMEP, caso o critério utilizado fosse embasado unicamente na Teoria de Resposta ao Item[5], e não na Teoria Clássica dos Testes[6], em conjunto com outros

5 Teoria de Resposta ao Item: trabalha com a probabilidade de um indivíduo acertar um item de acordo com sua proficiência ou traço latente. Para maios informações acesse:

critérios subjetivos definidos pelas escolas. Ao final da pesquisa, foram criadas propostas de modelos de boletim de desempenho para todos os participantes da OBMEP, atitude que pode contribuir para maior envolvimento e motivação dos alunos e das escolas com a Olimpíada, gerando benefícios no processo de aprendizagem da Matemática dos participantes. O estudo foi feito considerando uma amostra composta de 534 estudantes de oitavos e nonos anos de uma escola pública.

A dissertação “Soluções não clássicas para problemas da OBMEP”, de Pinheiro (2013), que possui o objetivo de apresentar soluções alternativas para alguns problemas da OBMEP visando encorajar o professor do ensino médio a abordar e a utilizar recorrência como uma ferramenta na construção de modelos e soluções para problemas matemáticos. Com a realização do trabalho o autor percebe que o estudo de recorrências matemáticas serve também como uma oportunidade para os estudantes desenvolverem seu raciocínio, percebendo padrões, fazendo conjecturas e, com isso, aprendam a organizar ideias e a construir modelos.

O trabalho de conclusão de curso de Licenciatura em Matemática “Análise Matemática e Pedagógica de Problemas de Geometria Plana da OBMEP”, de Branti (2014), tem por objetivo analisar problemas de Geometria Plana que foram desenvolvidos e aplicados aos alunos do Ensino Fundamental na OBMEP. Buscando entender o conceito de competências e habilidades que o aluno precisa ter para resolução dos problemas.

O trabalho de conclusão do curso de Todeschini (2012), “Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP): uma visão sobre a avaliação na perspectiva da resolução de problemas”, tem o objetivo de identificar como a OBMEP é vista pelos professores e como ela influencia os alunos em sala de aula, além de fazer uma comparação do tipo de questão e formas de avaliação utilizadas na olimpíada e pelo professor. Para isso, a autora apresenta uma análise sobre quatro questões da OBMEP e uma pesquisa de opinião de professores sobre a olimpíada. A autora verificou que os professores são muito críticos quanto ao grau

---

<http://portal.mec.gov.br/ultimas-noticias/389-ensino-medio-2092297298/17319-teoria-de-resposta-ao-item-avalia-habilidade-e-minimiza-o-chute>.

6 Teoria Clássica dos Testes: realização da soma dos pontos obtidos em cada questão do teste. Para mais informações acesse: < http://hdl.handle.net/10183/24863>.

de dificuldade das questões, pelo fato de os alunos não estarem acostumados com este tipo de questão e se desmotivarem devido ao baixo rendimento. Apesar das críticas, verificou também, que a OBMEP é vista como um projeto válido, que incentiva os alunos e professores a trabalharem a resolução de problemas. Ela aponta como alternativa o uso de questões da OBMEP e outras questões que envolvam resolução de problemas.

A dissertação de Martins (2015) intitulada “Um estudo sobre as estratégias de Resolução de questões da OBMEP”. Neste trabalho o principal objetivo foi elaborar uma sequência de atividades ou material didático que evidenciasse a importância das estratégias usadas pelos alunos na resolução dos problemas. Para isso, usou a teoria da Resolução de Problemas em um Cenário de Investigação. Concluiu que as estratégias favorecem para a compreensão de conceitos e conteúdos matemáticos, além de promover a aprendizagem e o desenvolvimento do raciocínio matemático. A pesquisa foi realizada com alunos do Ensino Fundamental e Médio.

Também a dissertação da Stock (2015) intitulada “A argumentação na resolução de problemas de Matemática: uma análise a partir da Epistemologia Genética”. Teve os seguintes objetivos: verificar e analisar as diferentes relações entre o fazer e o compreender na perspectiva da resolução de problemas utilizando a argumentação; observar, através da argumentação, o raciocínio subjacente a resolução do exercício; e analisar como o aluno chegou à resposta final buscando entender se ele compreende ou não o conteúdo matemático envolvido. Para isso a autora utilizou o material de alunos do Ensino Fundamental II e Ensino Médio. Concluiu que a argumentação contribui para o ensino e a aprendizagem da matemática na perspectiva do professor, que pode identificar os erros cometidos pelos estudantes e se estes compreendem o conteúdo envolvido no problema, além de repensar sua prática docente. Contribui na perspectiva do aluno, que, em algumas situações, repensa sua estratégia e compreende a Matemática envolvida na questão. As questões da OBMEP nesta dissertação são utilizadas por corresponderem aos conteúdos e a raciocínios lógico-matemático dos anos com os quais foram trabalhados. Mesmo motivo pelo qual as questões da OBMEP foram usadas nesta investigação.

Ambas as dissertações anteriores têm foco na resolução feita pelos alunos, no caminho para chegar à solução, ou seja, nas estratégias utilizadas pelos alunos para alcançar o resultado. No entanto, na pesquisa desta dissertação a intenção é analisar o caminho feito para resolução com o uso do GeoGebra. Desta forma, esta pesquisa busca verificar as estratégias utilizadas pelos alunos a fim de perceber como o GeoGebra contribuiu para isso.

A dissertação “Olimpíadas De Matemática: concepção e descrição de ‘situações olímpicas’ com o recurso do software GeoGebra”, de Oliveira (2016), tem como objetivo geral mostrar que é possível, através do GeoGebra, propiciar ao docente um material de apoio à preparação de Olimpíadas de Matemática fazendo uso de uma metodologia de ensino. Logo, propôs-se a identificar os problemas adequados para uso do programa, realizar os comandos no GeoGebra para as atividades propostas e realizar a descrição da Situação Olímpica sob uma visão metodológica através da Teoria das Situações Didáticas, buscando estruturar situações de ensino através das duas primeiras fases da Engenharia Didática. A autora constatou que o software GeoGebra possibilita a exploração da visualização como elemento impulsionador das estratégias implementadas nas situações olímpicas. Esta pesquisa se assemelha à apresentada nesta dissertação por tratar-se da resolução de questões através do GeoGebra e percebe-lo como uma ferramenta de apoio positiva. Mas a pesquisa se diferencia pelo objetivo que tem foco no docente.

A dissertação de Machado (2015), “Uma análise crítica das provas da Segunda Fase da OBMEP 2014”, tem o objetivo de apresentar uma análise das provas da 2ª fase da OBMEP 2014, em relação aos conteúdos abordados e resultados obtidos por uma determinada amostra. Apresenta algumas possibilidades de exploração das questões da OBMEP em turmas regulares com uma sugestão de uso do software GeoGebra em uma questão e mencionando o software ao longo de seu trabalho como possibilidade de uso.

Do mesmo modo, há pesquisas que tratam de sequências didáticas com o uso do software GeoGebra para o ensino de geometria. A dissertação intitulada “As Contribuições Do Software GeoGebra Como Um Mediador Do Processo De Aprendizagem Da Geometria Plana Na Educação A Distância (Ead) Em Um Curso De Licenciatura” da autora Pelli (2014), teve como objetivo verificar as contribuições da utilização do software GeoGebra como um instrumento mediador do processo de ensino e aprendizagem de conteúdos da Geometria Plana Euclidiana, no ensino da modalidade a distância, para alunos matriculados em um Curso de Licenciatura em Pedagogia em uma universidade federal no estado de Minas Gerais. A metodologia utilizada foi Quan+Qual, ou seja, qualitativa e quantitativa. Os resultados obtidos nesse estudo mostram que existem possibilidades de contribuições da utilização do GeoGebra para a aprendizagem de conteúdos da Geometria Plana para alunos matriculados em um curso no ensino na modalidade a distância, pois a utilização desse software estimula o desenvolvimento da autonomia dos alunos, possibilitando a diminuição da distância transacional que pode ocorrer no ambiente virtual de aprendizagem. Este trabalho também se assemelha a esta investigação por estudar as possíveis contribuições do software para aprendizagem com foco na geometria plana.

A dissertação de Pereira (2012), "O Uso do Software GeoGebra em uma Escola Pública: interações entre alunos e professor em atividades e tarefas de geometria para o ensino fundamental e médio", é regida pela questão 'como se dá a interação entre professor e alunos em um ambiente colaborativo de geometria para o ensino fundamental e médio a partir da utilização do software GeoGebra?'. A metodologia utilizada foi a pesquisa qualitativa.

A dissertação de Ramiro (2014), "Situações Didáticas no Ensino de Geometria com o aplicativo GeoGebra", tem como um dos objetivos discutir a importância das demonstrações no ensino básico de Matemática. O autor usou a Teoria das Situações Didáticas proposta por Guy Brousseau e explorou os recursos tecnológicos presentes nas escolas, propôs atividades ligadas à geometria para serem desenvolvidas, em sala de aula, utilizando-se do software GeoGebra. Neste trabalho são apresentadas sugestões de atividades para professores usarem em sala de aula, não há aplicação, apenas entrevistas com professores sobre a opinião deles.

A dissertação intitulada "Da Cartolina Ao Computador: Uma Proposta Para Estudo De Geometria", de Fassio (2011), teve como objetivo analisar o envolvimento de alunos do ensino fundamental, em uma proposta de estudo da geometria que conta com o uso de diferentes recursos materiais: da cartolina ao computador, passando pelo uso de lápis, régua, caleidoscópio, esquadro, compasso, software, portasegmentos entre outros. As aulas foram extracurriculares sendo caracterizadas como experiência de ensino. Conforme as análises da autora os alunos aprenderam os conceitos estudados e adquiriram habilidades para o uso das ferramentas utilizadas ao longo das aulas.

O trabalho de Carlos (2017), “Parâmetros No GeoGebra Na Construção De Circunferências: Um Estudo Sobre Raciocínio Generalizador com Alunos do 3º Ano do Ensino Médio”, teve como objetivo analisar as contribuições do software GeoGebra no estudo da circunferência, transitando entre diferentes registros de representações semióticas, algébrica e geométrica, e utilizando parâmetros para chegar a raciocínios generalizados. Como metodologia foi utilizado o estudo de caso. Foi produzida uma sequência de atividades aplicada em sala de aula. A autora concluí que a análise dos dados coletados aponta a importância do software ao ter instigado reflexões nos alunos que os levaram à compreensão do conteúdo, e assim, proporcionando aos alunos o conhecimento global do objeto de estudo.

Também, a dissertação de Girotto (2016), “O Desenvolvimento De Hábitos De Pensamento: Um Estudo De Caso A Partir De Construções Geométricas No GeoGebra” apresenta, a partir de atividades de construções geométricas no software GeoGebra, uma proposta de desenvolvimento de hábitos do pensamento matemático no Ensino Fundamental. A partir de uma análise em materiais didáticos a autora construiu e aplicou uma sequência de atividades em uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental. A autora observou que na análise do experimento foi possível verificar estratégias que revelam raciocínios que fazem parte dos hábitos do pensamento elencados, especialmente aqueles que dizem respeito a visualização, exploração e experimentação geométrica. Para isso a autora usa como principal referencial teórico o trabalho de Goldenberg (1998).

Dentre outras pesquisas relacionadas com as olimpíadas matemáticas estas foram selecionadas pela proximidade do assunto abordado nesta dissertação. Não foi encontrado nenhum trabalho que relacionasse tecnologia com as questões da OBMEP aplicado em sala de aula. Os trabalhos que apresentam apenas análises sobre as questões e uma análise sobre a própria OBMEP foram os da Vilarinho, do Pinheiro, da Branti e da Todeschini. Os trabalhos com aplicação em sala de aula aqui citados foram da Martins e da Stock, porém estes não usam tecnologia. Também, nesta pesquisa de trabalhos correlatos foram encontrados trabalhos que sugerem o uso do GeoGebra e citam exemplos, porém estes não foram aplicados em sala de aula. Foram os trabalhos da Oliveira e do Machado. Também, as dissertações da Pelli, do Pereira, do Ramiro, da Fassio, da Carlos e da Girotto que apresentam o GeoGebra como recurso para a aprendizagem em matemática. Estas dissertações focam em conteúdos determinados, em generalização do raciocínio, o uso do software como recurso régua e compasso e a interação professor aluno em um ambiente tecnológico.

Essas produções cientificas foram selecionadas por apresentar alguma semelhança com esta investigação. Desde o uso de questões da OBMEP até o uso do software GeoGebra para resolução destas e, para ambientar o leitor em relação às pesquisas que circundam o tema desta pesquisa.

3 METODOLOGIA DE PESQUISA E DE AÇÃO DOCENTE

Para desenvolver a investigação que deu origem a esta dissertação foi utilizada a Pesquisa Qualitativa para articular a ação didática com a produção de conhecimento, de forma que a prática de ensino seja vinculada à prática de investigação. A escolha desta metodologia é devido à subjetividade envolvida em uma proposta cuja intenção é analisar “Quais são as contribuições do uso de *software* de geometria dinâmica para a compreensão e solução de questões de geometria e de contagem da OBMEP?”, questão norteadora da pesquisa.

A pesquisa qualitativa possuí o aspecto subjetivo onde o principal objeto de análise são pessoas. Segundo Borba (2013, p. 5), “essa visão de pesquisa está baseada na ideia de que há sempre um aspecto subjetivo no conhecimento produzido, não há, nessa visão, neutralidade no conhecimento que se constrói”. Ainda conforme Borba (2004, p.2):

> O que se convencionou chamar de pesquisa qualitativa, prioriza procedimentos descritivos à medida que sua visão de conhecimento explicitamente admite a interferência subjetiva, o conhecimento como compreensão que é sempre contingente, negociada e não é verdade rígida.

Além disso, ressalta que nesta modalidade não se deve ignorar informações quantitativas, assim como, pesquisas que seguem outras metodologias.

Borba e Araújo (2013) mencionam o quão falar em pesquisa qualitativa pode ser desafiador para professores de matemática que trabalham com quantidades. No entanto é uma metodologia necessária principalmente quando se quer saber como o processo de aprendizagem ocorreu, ou seja, como o aluno chegou a determinado resultado/conclusão.

Assim, é necessário observar as reações e o comportamento dos indivíduos, pois se trata de uma relação próxima entre os envolvidos na pesquisa. Conforme D’Ambrósio (2013, p. 18), “as pesquisas são fundamentais e a observação de relações, facilitada pelos meios de registro, só então disponíveis, como os gravadores de áudio e vídeo, não é contemplada no modelo então dominante de tratamento estatístico”. Ou seja, há fatos que ocorrem em uma pesquisa qualitativa que são imensuráveis, porém acontecimentos interessantes para análise. Assim, a pesquisa qualitativa está relacionada à ação, pois “o indivíduo recebe estímulos do ambiente, natural e imaginário, e, se vivo, parte para a ação” (D’AMBRÓSIO, 2013, p. 19), ocorrendo, assim, um processo de retroalimentação que determina ações sucessivas.

Desta forma, na pesquisa qualitativa pretende-se compreender determinado caso. Como Goldenberg (1999, p.14) aponta, na pesquisa qualitativa “a preocupação do pesquisador não é com a representatividade numérica do grupo pesquisado, mas com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, de uma instituição, de uma trajetória, etc.”.

Bogdan e Biklen (1994) definem cinco características presentes nas pesquisas qualitativas, características que estão presentes independente da forma de coleta do pesquisador, seja vídeo, diário de campo, áudio, diagramas, dentre outras. A primeira característica define que a fonte direta de dados é o “ambiente natural”, em que o pesquisador é o instrumento principal, ou seja, o pesquisador está presente em todos os momentos da pesquisa e independentemente do método de coleta que utilizar é o entendimento do pesquisador sobre estas informações o instrumento-chave da investigação. Nesta pesquisa, o ambiente natural é a escola onde os alunos cursam o ensino fundamental regular, porém a pesquisa não foi realizada na sala de aula e sim no contra turno, no laboratório de informática, o que de certa forma tirou os alunos da zona de conforto. A professora/pesquisadora esteve presente em todos os acontecimentos referentes à investigação.

A segunda característica, diz respeito ao fato de a pesquisa qualitativa ser descritiva, isso porque o produto da pesquisa às vezes pode conter números, mas o tratamento não é estatístico. Os resultados da pesquisa são transcrições de entrevistas, conversas, fotografias, citações, entre outras informações coletadas. E essa é uma característica desta pesquisa. Na terceira característica, Bogdan e Biklen (1994) destacam o fato de o pesquisador estar mais interessado no processo do que simplesmente nos resultados. Assim, o investigador está mais interessado no como, na história, no processo de como algo aconteceu, pois as interações entre os indivíduos influenciam essas respostas assim tornando-se impossível generalizar as informações. A questão norteadora desta pesquisa trata das contribuições do *software* na aprendizagem e, portanto, detêm-se mais no processo do que no resultado. A quarta característica, diz que os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva, ou seja, as abstrações vão sendo construídas à medida que os dados vão sendo agrupados. Esta será a forma com que os dados serão analisados nesta pesquisa.

Finalmente, a quinta característica: o significado é de importância vital na abordagem qualitativa, desta forma o investigador está em busca de compreender as perspectivas em torno do pesquisado, tais como, a história do aluno e seus conhecimentos prévios. Nesta pesquisa, sempre houve o cuidado de planejar o próximo passo de acordo com os acontecimentos prévios, ou seja, de acordo com o que ocorreu nas aulas anteriores, e também, para realização dos planos de aula se tomou cuidado quanto a história dos alunos e seus conhecimentos prévios.

3.1 EXPERIMENTOS DE ENSINO

Os experimentos de ensino podem ser vistos como uma atividade extracurricular, feita geralmente em turno contrário às aulas regulares dos alunos que participam. Desta forma, a pesquisa é realizada em alguns encontros entre alunos e investigador. Este período de estudos é organizado de modo que o pesquisador consiga estruturar como o processo de aprendizagem está ocorrendo.

Para Cobb & Steffe (1983, p.23) experimentos de ensino são a interação "a longo prazo" entre os pesquisadores e pesquisados. O que se estuda é a passagem de um estado de conhecimento para outro estado de conhecimento, o processo como isso ocorre. O que os alunos fazem é preocupante, mas a maior preocupação é como eles fazem isso. Os dados são geralmente qualitativos e não quantitativos. Os dados são transcrições de conversas entre os indivíduos da pesquisa, descrições do contexto e das respostas dos alunos nesse contexto, entrevistas clínicas realizadas ao longo do experimento de ensino.

Pelos “experimentos de ensino é possível se pensar como o conhecimento é produzido quando diferentes mídias são utilizadas” (BORBA e PENTEADO, 2012, p.53). Neste tipo de pesquisa as propostas pedagógicas são também objeto de pesquisa, de modo que está em constante análise e pode ser submetida a alterações ao longo do experimento. Desta forma, propostas de experimento de ensino são mais abertas, de forma que as ações dos alunos interferem em seu andamento. Neste trabalho não é discutido apenas sobre o como o aluno aprendeu, mas também qual o papel das mídias nesse processo. Assim:

> (...) ao analisarmos os dados, a noção de seres-humanos-com-mídias passa a ter para muitos de nós papel importante também na medida em que buscamos detectar manifestações das mídias consideradas relevantes para um dado coletivo pensante em determinado momento. (BORBA e PENTEADO, 2012, p.53).

Os pesquisadores reconheceram explicitamente que a atividade matemática na escola ocorre como resultado de participação dos alunos no ensino. Assim, a metodologia do experimento de ensino inevitavelmente continuará a evoluir entre os pesquisadores que o usam. Certamente, não surgiu como uma metodologia padronizada nem foi padronizado desde então. Em vez disso, o experimento de ensino é uma ferramenta conceitual que os pesquisadores usam na organização de suas atividades. É principalmente uma ferramenta exploratória, entrevistando e visando explorar a aprendizagem dos estudantes, pois utiliza a experimentação como meio para construção do conhecimento matemático. Desta forma, o experimento de ensino é mais do que uma entrevista clínica, pois o experimento de ensino é direcionado para a compreensão do progresso dos alunos durante as aulas, enquanto que a entrevista clínica visa à compreensão do conhecimento atual dos alunos. Logo, um experimento de ensino envolve uma sequência de “episódios de ensino”. O episódio inclui um agente de ensino, um ou mais estudantes, testemunha dos episódios de ensino e um método de gravação do que ocorre durante o episódio. Esses registros, se disponíveis, podem ser usados na preparação de episódios subsequentes, bem como na realização de uma análise retrospectiva da experiência de ensino. Esses elementos são pertinentes a todas as experiências de ensino. (STEFFE; THOMPSOM, 2000)

A investigação aqui apresentada caracteriza-se como um experimento de ensino, pois foi desenvolvida a partir de encontros entre a professora/pesquisadora e os alunos em um horário extraclasse. Além disso, tem como objetivo a compreensão do progresso dos alunos durante as aulas com o uso do *software*, como este contribui para o processo de aprendizagem onde a interação do aluno é fundamental para que o conhecimento seja construído. Nesta investigação o agente de ensino é a professora com o grupo de alunos participantes, as testemunhas são todos os envolvidos na atividade e a equipe de colaboradores da escola. O método de gravação não foi único, assim, os métodos de gravação foram vídeos, através de câmeras domésticas, áudios, através de celulares antigos, fora de uso. As informações coletadas sempre foram utilizadas para a produção da próxima aula assim como para análise da prática como um todo. Desta forma, esta investigação possui os elementos pertinentes a um experimento de ensino.

3.2 DADOS COLETADOS E TRIANGULAÇÃO

A triangulação foi utilizada pela necessidade de coletar informações por meios diferentes ao longo da pesquisa, para evitar o máximo possível as perdas de informações vitais para a pesquisa. Desta forma, foi feito o uso de gravações em áudio e vídeo, de fotos, do diário de campo e das produções dos alunos. Conforme Borba e Araújo (2013, p. 41) "a triangulação em uma pesquisa qualitativa consiste na utilização de vários e distintos procedimentos para obtenção dos dados". Eles classificam em dois principais tipos de triangulação: a de fontes e a de métodos. Por exemplo, a checagem de uma entrevista com as atas de uma reunião sobre o mesmo assunto é uma triangulação de fontes; e a observação de um grupo de alunos após realizar entrevistas com os participantes é uma triangulação de métodos. Desta forma, a triangulação ao longo da análise de dados é uma forma de comparar e confrontar as informações coletadas na investigação.

Para realizar a coleta de dados tivemos a preocupação com questões éticas e se essa coleta de fato seria interessante e utilizada para análise de dados. Neste sentido, chegamos à conclusão que uma das formas de coleta deveria ser a gravação em vídeo. A criação de um acervo de vídeos produzidos em sala de aula nos garantiu a possibilidade de revisar e refinar as análises de forma mais criteriosa, cuidadosa e aprofundada devido ao fato de poder reviver o ambiente de aprendizado quantas vezes fosse necessário.

A possibilidade de gravar vídeos que contemplem todos os instantes na forma de imagem e áudio de determinada situação é uma poderosa ferramenta para a pesquisa em Educação Matemática. Com esta possibilidade pesquisadores têm enriquecido seus registros de modo a tornar suas transcrições de interações entre alunos e professores, assim como aluno e aluno, mais detalhadas em cenários clínicos com atividades matemáticas em desenvolvimento por estes (POWELL; FRANCISCO; MAHER; 2004).

Na análise de dados

> Com videoteipes os pesquisadores podem visualizar eventos gravados com a frequência que for necessária e em formas flexíveis, tais como ‘tempo real, câmera lenta, quadro a quadro, para a diante, para trás’, e podem ocupar suas diferentes características” (BOTTORFF, 1994, p. 246 apud POWELL; FRANCISCO; MAHER; 2004).

Desta forma, é possível observar nuances que não haviam sido percebidos na primeira visualização, possibilitando novas interpretações evitando, assim, interpretações precipitadas sobre as observações feitas em sala de aula. Além disso, o pesquisador não precisa ficar tão preso à observação ao longo da prática de ensino, logo, pode interagir mais com os alunos sem se preocupar que possa estar perdendo algo que seria interessante em outro grupo no outro lado da sala de aula.

Com gravações em vídeo de um ambiente em que se está realizando uma pesquisa é possível rever sob mais pontos de vista. Esses pontos de vista podem surgir ou se transformar conforme se analisa o material de apoio, como por exemplo, entrevistas, diário de classe, anotações, rascunhos, entre outros. Ao usar vários meios de coleta é possível apurar com maior precisão os fatos ocorridos. Como afirma Powell, Francisco e Maher, (2004, p. 11), “assistir repetidamente os vídeos potencializa o melhoramento da triangulação na análise de dados”.

Embora a coleta de informações ao longo da pesquisa com o uso de vídeos pareça completa, isso não nos garante que não tenha ocorrido intervenções da pesquisadora, por mais que se tente evitá-las. O posicionamento das câmeras ou apenas a presença destas em sala de aula pode alterar a forma como aconteceriam os fatos. As imagens coletadas são feitas a partir de escolhas, e quando editadas dependem dos fatos que foram considerados mais importantes. Desta forma, Powell, Francisco e Maher (2004, p. 7) afirmam que “reconhecer que as gravações em vídeo são carregadas teórica e tecnologicamente é importante para compreender que elas, por si só, não garantem a qualidade da coleta de dados e da respectiva análise”.

Para a coleta de dados mais completa “pesquisadores têm sugerido meios de aperfeiçoar a estreita janela, necessariamente oferecida pelo fenômeno dos vídeos, através do acréscimo das fontes de dados” (POWELL, FRANCISCO, MAHER, 2004, p. 7). Ou seja, analisar os trabalhos dos alunos, os rascunhos, as entrevistas, assim como observações etnográficas.

Devido às questões éticas envolvidas na captura de imagens de pessoas, e todas as variáveis envolvidas Powell, Francisco e Maher (2004, p. 7) afirmam que:

> Essencialmente, o princípio do consentimento pactuado implica que os pesquisadores garantam que, em uma atividade gravada em vídeo, os participantes sejam bem informados, que compreendam o significado de suas participações, que percebam as implicações potenciais de terem suas vozes e imagens capturadas no vídeo e que consistam no uso pretendido das imagens gravadas.

Este consentimento deve ser na forma escrita e deve conter informações como quem terá acesso aos dados e ao seu uso (POWELL; FRANCISCO; MAHER, 2004); se sua imagem será divulgada ou apenas usada para análise na pesquisa; se sua identidade é necessária para agregar à pesquisa, ou se não é necessário revelá-la. Nesta dissertação foi mantido o anonimato dos participantes por não haver necessidade de divulgação, logo, quem teve acesso às imagens e conversas foram somente as pesquisadoras. No consentimento firmado foi redigido no termo de consentimento que a identidade do participante seria preservada. É possível que os participantes se sintam mais a vontade e haja menos interferências em suas ações por terem garantido seu anonimato.

Para a transcrição de cenas gravadas Powell, Francisco e Maher (2004) apresentam autores que reforçam a necessidade de ter cuidado com a seleção de situações a serem transcritas. Cuidados como não apenas apresentar os melhores casos como se fossem típicos, e sim destacar se o caso foi comum ou uma situação única em sala de aula. Construir essas transcrições não é uma tarefa fácil, pois se devem representar por meio da escrita as interações entre pessoas. Isso deve ser feito de forma verídica, porém sempre existirá o julgamento do pesquisador sobre os detalhes mais importantes e as informações a serem descritas ou ignoradas.

Powell, Francisco e Maher (2004, p.16) apresentam um modelo analítico para estudar o desenvolvimento do pensamento matemático, a sequência é composta por sete fases interativas e não lineares: “1. Observar atentamente aos dados do vídeo; 2. Descrever os dados do vídeo; 3. Identificar eventos críticos; 4. Transcrever; 5. Codificar; 6. Construir o enredo; 7. Compor a narrativa.” O objetivo ao apresentar este modelo é mostrar uma possibilidade para dar movimento à análise.

A sequência de fases da análise de um vídeo não necessariamente deve seguir um padrão fixo, “mesmo quando todas as fases ocorrem na análise, os pesquisadores podem ir e voltar ciclicamente, revisitando fases do modelo em suas tentativas de gerar narrativas criteriosas e inerentes do pensamento matemático dos estudantes” (POWELL; FRANCISCO; MAHER; 2004).

As análises feitas nesta dissertação são qualitativas, pois estas foram feitas sobre a prática em sala de aula com alunos, com suas particularidades, sua história e seus conhecimentos prévios, o que torna desinteressante fazer uma generalização para um todo.

Para Bogdan e Biklen (1994, p.151), notas de campo compõe “o relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experencia e pensa no decurso da recolha e refletindo sobre os dados de um estudo qualitativo”. Ou seja, no diário de campo o pesquisador descreve os acontecimentos e suas percepções sobre o que foi feito na prática. Assim, o pesquisador pôde acompanhar o desenvolvimento da investigação e perceber a cada etapa o progresso do pesquisa e até mesmo elaborar a próxima etapa a partir das informações já coletadas. Desta forma, nas notas de campo deve-se apresentar os fatos o mais detalhado possível, em vez de resumir ou avaliar.

> Esta técnica, pelo seu caráter informal e amplo, pode-se tornar um instrumento fundamental para os educadores e grupos populares, pois [...] está formando e aperfeiçoando observadores e facilitando a

> reflexão coletiva da prática, através do confronto de informações, opiniões análises preliminares e visões de mundo. [...] combiná-las com outras técnicas de investigação não só contribuirá, mas se fará necessário para o aprofundamento da busca de informações desde que [...] guardem coerência com o corpo teórico conceitual e princípios metodológicos que dão fundamento às práticas sociais em questão (FALKEMBACH, 1987, p.21).

É importante lembrar que nunca será possível “atingir um nível de compreensão e reflexão que possa resultar em notas puras, isto é, notas que reflitam a influência do observador” (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p.167). O objetivo é observar quem são e como pensam, o que ocorreu nas aulas e como as ideias foram construídas, ressaltam Bogdan e Biklen (1994), que os investigadores não devem ser ingênuos a ponto de pensar que são capazes de enxergar tudo exatamente como ocorreu e assim descrever os episódios de forma impecável.

O diário de bordo pode ser um caderno, um *tablet* ou qualquer instrumento que possibilite a realização de anotações, comentários, desenhos, interações, experiências e reflexões durante a execução da prática e após, no caso da descrição detalhada do dia.

Desta forma Bogdan e Biklen (1994) dividem o diário de bordo em duas partes: a descritiva, que apresenta os relatos dos sujeitos, reconstruções de diálogos, descrição do espaço físico, relatos de acontecimentos particulares, descrição de atividades e o comportamento do observador; a reflexiva, onde a análise é feita mais do ponto de vista do investigador, suas ideias e preocupações.

Logo, o diário de campo é uma ferramenta que auxilia no acompanhamento do desenvolvimento da pesquisa, sendo fundamental para o registro de informações que poderiam ser esquecidas ou desconsideradas futuramente por falta de detalhamentos maiores. Assim, sendo essencial por possibilitar a visualização do contexto como um todo.

3.3 CONDUÇÃO DA PRÁTICA

Para construir uma sequência didática, primeiramente foi feita uma seleção de questões da OBMEP. A partir da seleção, foram feitas as construções dinâmicas destas questões no GeoGebra, para observar como a resolução ocorreria com o apoio do GeoGebra. As construções realizadas foram testadas, para verificar se estavam elaboradas de forma adequada para manipulação de alunos. Na continuidade da experiência, foram selecionados questões e arquivos para compor a sequência didática, analisando quais ferramentas do GeoGebra seriam necessárias. Enfim, ao possuir esses elementos, as aulas puderam ser estruturadas.

A sequência didática em sala de aula foi composta de três etapas:

- 1º Etapa: No laboratório de informática, os alunos receberam questões selecionadas do banco de questões da OBMEP com as construções prontas no *software* GeoGebra para auxiliá-los na resolução.

- 2º Etapa: Os alunos receberam questões, também da OBMEP, que deveriam resolver fazendo uso do GeoGebra e elaborando uma construção convincente para sua resposta, que tornasse possível explicá-la a outros alunos.

- 3º Etapa: Os alunos deveriam apresentar as soluções encontradas e como o desenvolvimento das questões no *software* GeoGebra os auxiliou e ajudaria outros alunos a resolverem as mesmas.

Esta sequência foi aplicada com um grupo de alunos que possuíam interesse em matemática em uma escola municipal de Gravataí, RS. Os alunos do Ensino Fundamental de 7º e 8º anos foram convidados a participar das aulas. Essas turmas foram escolhidas pelo fato de a professora pesquisadora ser também a professora titular da disciplina de matemática. Todos os alunos foram convidados com a intenção de conseguir formar um grupo de 10 alunos em média. A sequência didática foi elaborada com apoio no banco de questões da OBMEP, o uso do *software GeoGebra* e disponibilizada no *GeoGebraBook*[7]. Primeiro foi realizada uma pesquisa sobre quais questões seriam utilizadas para a primeira etapa e para a segunda.

Ao longo da aplicação da sequência didática foram realizadas coletas de informações para análise. As principais informações coletadas foram: conversas de alunos na tentativa de resolver as questões, dúvidas que surgiram, os resultados propostos pelos alunos, os arquivos elaborados pelos

7 Ferramenta disponível em <https://tube.geogebra.org/>, possui o objetivo de organizar materiais como em um livro usando o recurso da geometria dinâmica. O produto didático está disponível em < https://ggbm.at/Zzf3sj5u>.

alunos, as anotações diversas feitas pelo professor e alunos, entre outras formas de registros que surgiram. As principais formas de coletas que foram usadas: gravação de conversas e discussões entre os participantes, filmagens do ambiente de trabalho, anotações feitas ao longo das interações (diário de campo), arquivos salvos das construções realizadas através de mídias digitais e relatórios dos alunos. As aulas foram relatadas conforme ocorreram, para ter uma percepção melhor da turma e como foi necessário proceder na elaboração da próxima aula com base nas informações coletadas na aula anterior. O planejamento de cada aula foi elaborado conforme as atividades apresentadas no cronograma abaixo, cada uma com uma intenção evolutiva para aquisição gradual do conhecimento. Este cronograma foi a base inicial para o planejamento das aulas.

Quadro 1 – Cronograma de Atividades

CRONOGRAMA DE ATIVIDADES		
DATAS	PERÍODOS	ATIVIDADES
1ª aula 24/04	2 (1h 30min)	Apresentação da professora. Apresentação do *software*. Os alunos receberam questões selecionadas do banco de questões da OBMEP com o recurso de construções prontas no *software* GeoGebra para auxiliá-los na resolução.
2ª aula 05/05	2 (1h 30min)	Foram apresentadas as ferramentas do GeoGebra. Atividades para que aprendam a utilizar o *software* para realizar suas próprias construções.
3ª aula 08/05	2 (1h 30min)	Os alunos receberam questões selecionadas do banco de questões da OBMEP que deveriam solucionar utilizando o *software* GeoGebra, ou explicar a questão e sua solução através de uma construção no *software*.

4ª aula 12/05	2 (1h 30min)	Os alunos receberam questões selecionadas do banco de questões da OBMEP que deveriam apresentar as soluções encontradas e como o desenvolvimento das questões no *software* GeoGebra os auxiliou e ajudaria outros alunos a resolverem as mesmas.
5ª aula 19/05	2 (1h 30min)	Os alunos receberam questões selecionadas do banco de questões da OBMEP que deveriam apresentar construções no *software* que auxiliem na resolução destas por outros colegas.
6ª aula 22/05	2 (1h 30min)	Conversa sobre o que foi realizado nas 5 aulas.
Total	12	

3.4 CARACTERÍSTICAS DA ESCOLA

A escola onde o estágio ocorreu é uma escola municipal de Gravataí – RS. A escola conta com uma direção composta por diretora, vice-diretora, orientadora educacional e supervisora. O corpo docente das séries finais é composto por professores nomeados e convocados, todos com formação superior.

Segundo o Projeto Político Pedagógico da escola (PPP), a comunidade escolar pertence a classe média. Muitos dos moradores têm sua casa própria, poço artesiano, computador e acesso à internet e não há outras pessoas morando no mesmo pátio e muitos possuem convênio médico. A rede de água e esgotos atende a todos e a maioria possui horas de lazer nas quais desfrutam de passeios, viagens, assistindo a filmes com a família. A escolaridade dos responsáveis pelos alunos varia muito. Em geral, possuem o Ensino Fundamental completo.

Quadro 2 – Filosofia da Escola

Filosofia da Escola
A escola inclusiva visa desenvolver o educando, respeitando as diferentes experiências de vida, níveis de conhecimento e tempo de aprendizagem, buscando sua interação com o meio sociocultural e proporcionando oportunidades de aprendizagem e gosto pelo conhecimento, fornecendo-lhes meios para progredir em seus estudos posteriores com assuntos de sua realidade, respeitando a individualidade de cada um.

Fonte: Regimento da Escola

Quadro 3 – Visão da Escola

Visão da Escola
Oportunizar o desenvolvimento do educando de forma democrática e comprometida com a formação do ser humano na sua integralidade, estimulando a formação de valores, hábitos e comportamentos que respeitem as diferenças e as características ampliando, assim, a cidadania – compromisso esse assumido por toda comunidade escolar.

Fonte: Regimento da Escola

3.5 CARACTERÍSTICAS DOS ALUNOS

Foi utilizada a primeira letra do nome dos alunos que participaram das aulas para identifica-los ao longo deste relatório. Segue abaixo uma breve descrição da trajetória escolar e perfil de cada aluno participante.

Aluna A:

A aluna é muito tímida, quase não interage com os colegas e professores, logo, sempre era necessário estar atento ao que a aluna estava fazendo para perceber qualquer dificuldade e ajudá-la. Ela é dedicada, sempre demonstrou interesse em realizar as atividades, estando concentrada e focada nas atividades propostas. Quando conseguia resolver as atividades, sua manifestação de alegria era um sorriso envergonhado e discreto. A aluna nunca reprovou, é seu primeiro ano na escola. Ela faltou apenas na quarta aula da oficina por motivos particulares.

Aluno B:

O aluno é muito comunicativo, sempre expressa o que pensa com palavras. Na aula que esteve presente demonstrou interesse em relação às atividades elaborando-as com foco e concentração. Ele apresenta uma perspicácia muito útil para perceber o que está acontecendo e solucionar os problemas.

O aluno estuda na escola desde 2014, quando ingressou no 6º ano após já ter reprovado duas vezes nessa série. Antes desse período o aluno estudou em outras duas escolas do município de Gravataí próximas. Esteve presente em uma vez, na segunda aula.

Aluno C:

O aluno é comunicativo, não havendo problemas com os colegas e professores. Na aula que esteve presente, a segunda, demonstrou interesse em relação às atividades elaborando-as com foco e concentração. O aluno sempre estudou na escola.

Aluno D:

O aluno não interage muito com os colegas, mas com os professores sempre chama quando precisa de ajuda com algo referente a aula. O aluno é concentrado e sempre demonstrou estar interessado nas atividades propostas. O aluno não estudou na escola apenas do 4º ao 6º ano. Esteve presente apenas na primeira aula.

Aluna E:

A aluna é comunicativa, não possui dificuldades em interagir com os colegas e professores. Na aula que esteve presente, a segunda, demonstrou interesse em relação às atividades elaborando-as com foco e concentração. A aluna sempre estudou na escola. Reprovou duas vezes no 7º ano.

Aluna F:

A aluna não apresenta problemas com relacionamentos com colegas e professores, ela é muito amiga da aluna G, são inseparáveis. Ela é dedicada, sempre demonstrou interesse em realizar as atividades, estando concentrada e focada nas atividades propostas. Sempre interagia com a aluna G para resolverem juntas as atividades. A aluna estuda na escola desde o 4º ano. Ela esteve presente em todas as aulas.

Aluna G:

A aluna é comunicativa, não apresenta problemas com relacionamentos com colegas e professores, ela é muito amiga da aluna F, como mencionado anteriormente. Ela é dedicada, sempre demonstrou interesse em realizar as atividades, estando concentrada e focada nas atividades propostas. Sempre interagia com a aluna F. A aluna sempre estudou na escola. Ela esteve presente em todas as aulas.

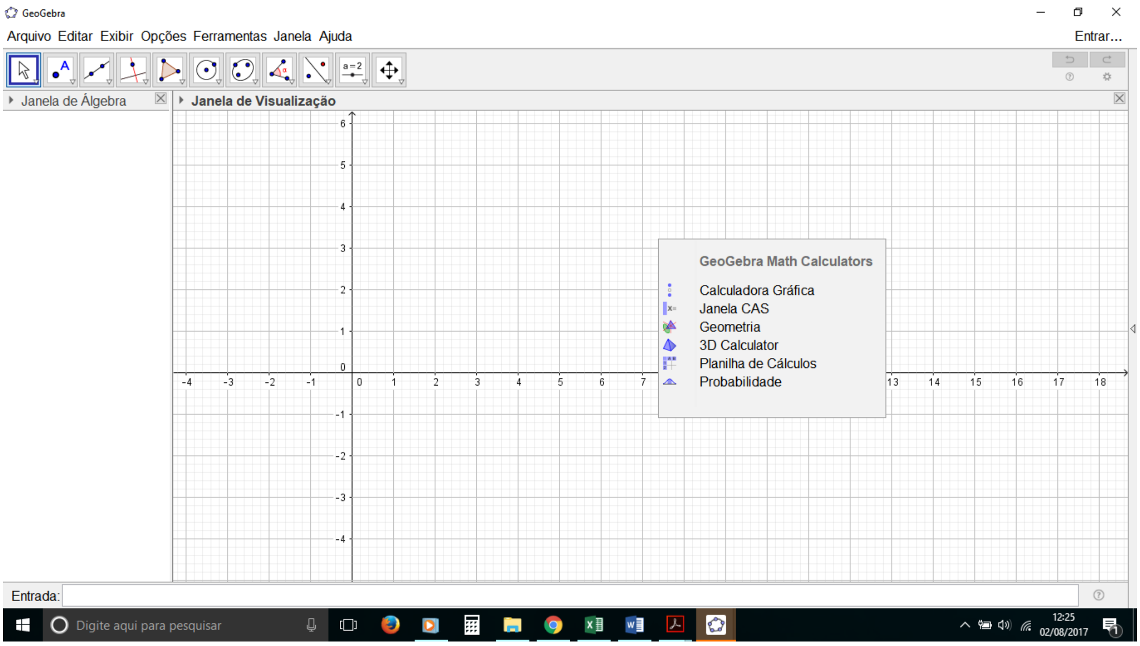
É importante ressaltar que a escola apresenta dificuldades em manter um professor de matemática, pois precisa de professor de matemática para 30h. Desta forma, possui uma professora nomeada 20h e uma convocada ou contratada 10h. No entanto, os professores que trabalham nestas 10h não permanecem por muitos meses na escola, havendo falta de professor de matemática nestas transições, o que não é interessante para o ensino dos alunos, pois não existe uma continuidade no trabalho. As turmas que receberam o convite para participar destas aulas são as que possuem este histórico desde que ingressaram nas séries finais. Logo, estes alunos possuem uma defasagem muito grande nos conteúdos de matemática.

3.6 GEOGEBRA

O GeoGebra é um *software* de matemática que reúne geometria, álgebra, planilhas, gráficos e cálculo. Desta forma, é um *software* capaz de realizar cálculos de álgebra e geometria, possibilitando também a construção de gráficos e de objetos geométricos, entre outros recursos e usos. Esse *software* é uma ferramenta apropriada para ser utilizada em sala de aula para auxiliar na resolução de problemas envolvendo a aritmética, a álgebra, a geometria e o cálculo. Neste sentido, o GeoGebra é ideal para o ensino e a aprendizagem de Matemática. É um aplicativo de linguagem simples e acessível para todos os níveis de ensino. O *software* é gratuito e encontra-se para ser utilizado de duas maneiras: online e *off-line*. É possível baixa-lo em diversos sistemas operacionais: Windows, Mac, Linux. Desta forma, é possível usar o *software* em um celular, *tablet*, notebook e desktop.

Na figura 1 segue o *print* da tela inicial do GeoGebra, na parte superior encontra-se a barra de ferramentas com os objetos que podem ser utilizados nas construções.

Figura 1 - Tela Inicial do GeoGebra



Fonte: Acervo da autora

A palavra GeoGebra é a combinação das palavras Geometria e Álgebra, pois o *software* da a mesma importância para ambas, possibilitando que se trabalhe simultaneamente com elas. Assim, apresenta diferentes formas de registros matemáticos: o algébrico, o geométrico e o discursivo. A origem da palavra vem do uso que se pode dar ao *software*.

O GeoGebra foi criado por Markus Hohenwarter, professor do Departamento de Matemática Aplicada da Universidade de Salzburgo, Áustria. É um *software* livre, ou seja, seu código é aberto para todos que queiram aperfeiçoa-lo. Este aplicativo foi escolhido por dois motivos já observados por Gravina (2011), primeiro por ser um *software* consistente e possuir um menu interessante para trabalhar com a geometria euclidiana, segundo por ser ferramenta na filosofia do “*software* livre”, logo, qualquer pessoa que tenha interesse no assunto, geometria, álgebra e ensino de matemática, pode contribuir para sua construção.

Esse *software* permite que ao realizar uma construção em um *software* de geometria dinâmica é possível estabelecer relações como paralelismo, perpendicularidade, intersecções, ou seja, propriedades, que não serão alteradas de forma alguma mesmo que se movimente os pontos definidos inicialmente, porém haverão pontos que terão movimentos restritos de acordo com as relações construídas. Este movimento, onde se percebe o que fica amarrado ao estabelecer uma relação não é possível no papel, mas em um *software* de geometria dinâmica pode-se visualizar essas interações. Essas amarrações entre as propriedades que são definidas explicitamente e implicitamente é a estabilidade.

O uso de tecnologias possibilita novas formas de aprender ao aluno, apresentando conteúdos onde anteriormente eram estáticos de uma forma dinâmica e assim permitindo uma relação mais clara entre álgebra e geometria.

3.7 OBMEP

A combinação de questões da OBMEP com a geometria dinâmica será feita de modo a proporcionar o desafio (presente nos problemas) e oferecer uma ferramenta que permita um ambiente de exploração e visualização para conduzir a novos modos de pensar na resolução.

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) é uma realização do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA - e tem como objetivo estimular o estudo da matemática e revelar talentos na área. A partir da OBMEP alunos que se destacam são encaminhados para programas como o PIC que possui o objetivo de despertar nos alunos o gosto pela matemática e pela ciência em geral e motivá-los na escolha profissional pelas carreiras científicas e tecnológicas (OBMEP, 2016).

A competição conta com apoio da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e com recursos do Ministério da Educação e do Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação. A OBMEP é constituída por problemas que estimulam o raciocino lógico e que requerem mais do que apenas conhecimento matemático. A prova é dividida em três níveis e feita em duas fases. O nível 1 é destinado a alunos do sexto e sétimo ano do Ensino Fundamental; o nível 2, para alunos do oitavo e nono ano do Ensino Fundamental e; o nível 3, para alunos do Ensino Médio. A primeira fase é feita nas escolas com todos os alunos matriculados, a prova é composta por 20 questões objetivas, cada escola encaminha para segunda fase um determinado número de alunos conforme o número total de alunos inscritos. Na segunda fase, as questões nesta fase são descritivas.

A primeira OBMEP ocorreu em 2005 ganhando espaço nas escolas a cada ano. No quadro 1 é possível verificar o aumento na participação de escolas e alunos na OBMEP.

Quadro 4 - Comparativo 2005 – 2015

OBMEP 2015 - Inscrições 1ª Fase	
Escolas	47.580
Alunos	17.972.333
Municípios	99,48%

BMEP 2015 - Inscrições 2ª Fase	
Escolas	42.316
Alunos	889.018
Municípios	97,62%

OBMEP 2005 - Inscrições 1ª Fase	
Escolas	31.031
Alunos	10.520.831
Municípios	93,5%

OBMEP 2005 - Inscrições 2ª Fase	
Escolas	29.074
Alunos	457.725
Municípios	91,9%

Fonte: http://www.obmep.org.br/em-numeros.htm

Para preparação dos alunos, são distribuídos nas escolas para os professores de matemática um livro com o banco de questões. Uma ferramenta interessante para pesquisa de questões desafiadoras e bem elaboradas para o planejamento das aulas de matemática. E também, assim como nesta pesquisa, para atividades extraclasse e investigações cientificas.

4 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo será apresentado os dados da pesquisa com uma análise destes. As informações foram coletadas ao longo da prática de ensino descrita no capítulo 3, subcapítulo 3. Então, após apresentar os aspectos teóricos da pesquisa, o contexto no qual a investigação foi realizada, este capítulo contemplará a descrição de como foi o andamento das aulas. As informações aqui transcritas e analisadas são oriundas da coleta de dados realizada através de câmeras, gravadores de som, diário de campo e arquivos salvos das produções dos alunos. Os alunos serão chamados pela letra inicial de seus nomes para preservar suas identidades.

4.1 AULA 1 – CONHECENDO O *SOFTWARE*

Esta aula foi o primeiro contato dos alunos com o *software* GeoGebra. Desse modo, a aula foi preparada para perceber o nível de conhecimento dos alunos quanto à tecnologia, em específico o uso do computador. Desta forma, os objetivos da aula foram: utilizar o *software* como recurso para solucionar problemas matemáticos; utilizar o *software* para explicar o porquê de uma solução; e resolver problemas matemáticos de raciocínio lógico e geometria.

As expectativas para esta aula eram as seguintes: os alunos possuiriam conhecimento sobre o uso do computador; os alunos utilizariam as construções feitas no GeoGebra sem maiores dificuldades, sendo necessário apenas algumas explicações; os alunos possuiriam os conhecimentos matemáticos necessários para resolução das questões e; os alunos sentiriam necessidade de recorrer ao papel como auxílio para resolver as questões.

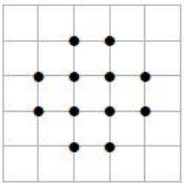
Na primeira aula estavam presentes 4 alunos: A, D, F e G. Como a escola possuía apenas 5 computadores em funcionamento e foram convidados 10 alunos, em princípio estes deveriam se sentar em duplas. No entanto, apareceram apenas 4 alunos, desta forma, eles puderam usar os computadores individualmente. Antes de iniciar com as atividades foi explicado que as regras da escola seriam as mesmas que no turno de aula, que não deveriam ficar na escola após o término das aulas, que é recomendado não trazer celular e objetos de valor para escola, entre outras regras que a direção solicitou que fossem ressaltadas.

Para agilizar o início da aula os computadores já estavam ligados e com as atividades que seriam propostas abertas na tela dos monitores. Assim, os alunos apenas escolheram os computadores que gostariam de usar.

A primeira atividade foi explicada, a questão 8, nível 1 de 2007 (figura 2). Para trabalharem esta questão foi usado uma construção no GeoGebra em que pudessem manipular e construir os quadrados, conforme figura 3.

Figura 2 - Questão 8, nível 1

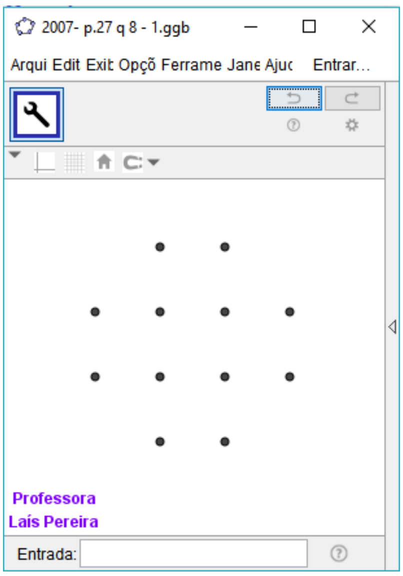
8. ***Os doze pontos*** - Doze pontos estão marcados numa folha de papel quadriculada, conforme mostra a figura.



Qual o número máximo de quadrados que podem ser formados unindo quatro desses pontos?

Fonte: Banco de Questões de 2007- p.27

Figura 3 - Construção GeoGebra para questão 8, nível 1, 2007



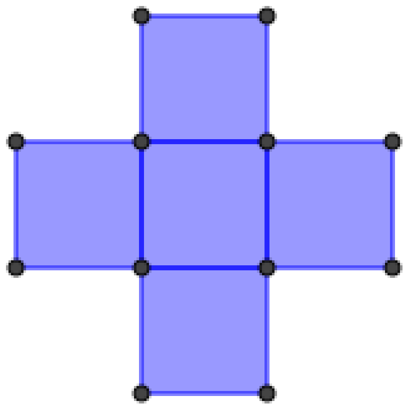
Fonte: Acervo da autora.

Nesta questão os alunos não demonstraram necessidade de utilizar papel, fizerem uso exclusivo do *software*. A ferramenta disponível para que resolvessem a questão havia sido construída de modo que ao clicar em dois pontos aparecesse um quadrado. Logo, os alunos tinham que tomar cuidado para que os quadrados usassem os pontos já existentes. Houve uma certa insistência do aluno D em construir quadrados que não possuíam os quatro vértices sobre os quadrados já existentes.

A ferramenta desfazer foi muito usada por todos os alunos, pois inicialmente construíam quadrados fora dos pontos. Surgiram questionamentos se poderiam contar os quadrados sobrepostos, quadrados construídos com os mesmos vértices. Foi questionado, então, se estes são quadrados diferentes. Os alunos responderam que não, mas com dúvidas; então respondi que se ocupam o mesmo espaço e possuem os mesmos vértices estes quadrados são iguais e só contam uma vez, pois se fosse possível contá-los, poderíamos contar infinitos quadrados.

Os quadrados com lados horizontais e verticais foram os primeiros a serem construídos conforme a figura 4.

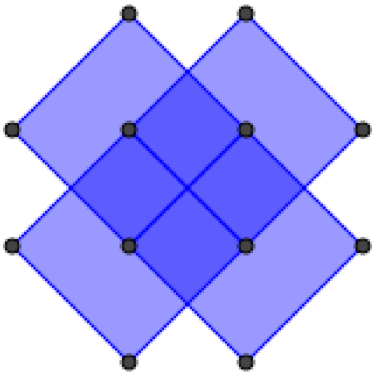
Figura 4 - Resolução dos alunos



Fonte: Acervo da autora

Os quadrados posicionados com inclinação de 45º graus foram percebidos em seguida, conforme a figura 5.

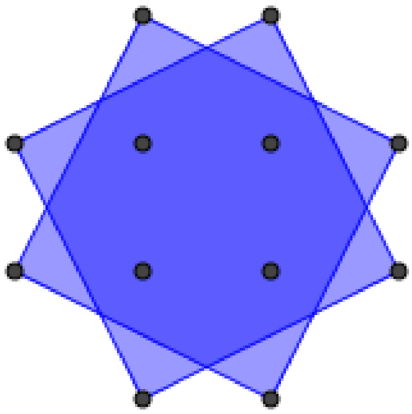
Figura 5 - Resolução dos alunos



Fonte: Acervo da autora

Quando já haviam apresentado estes dois modelos de quadrados possíveis, questionaram: “São 9 quadrados?” Foi respondido que havia mais. Não demorou para que as alunas F e G encontrassem os restantes, conforme figura 6.

Figura 6 - Resolução dos alunos

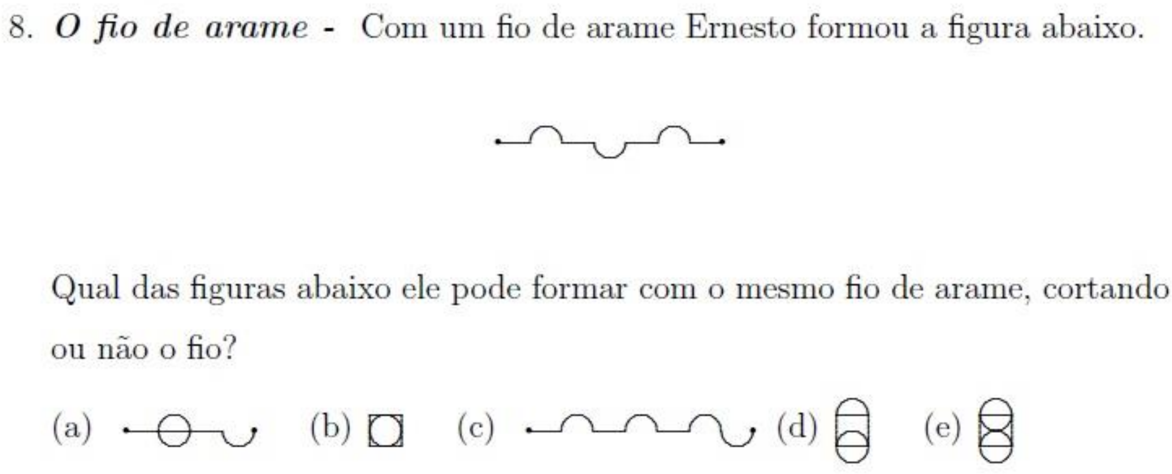


Fonte: Acervo da autora

As alunas F e G, então, concluíram que 11 quadrados poderiam ser construídos com os pontos disponíveis. Nesta questão houve a necessidade de reconstruir o conceito de quadrado.

A segunda questão proposta foi a questão 8 de 2007, nível 1, da lista 2 (figura 7). Para resolução desta questão foi disponibilizado aos alunos uma construção, figura 8, para que pudessem manipular as formas da construção inicial para tentar construir uma das possibilidades conforme a questão solicita.

Figura 7 - Questão 8, nível 1



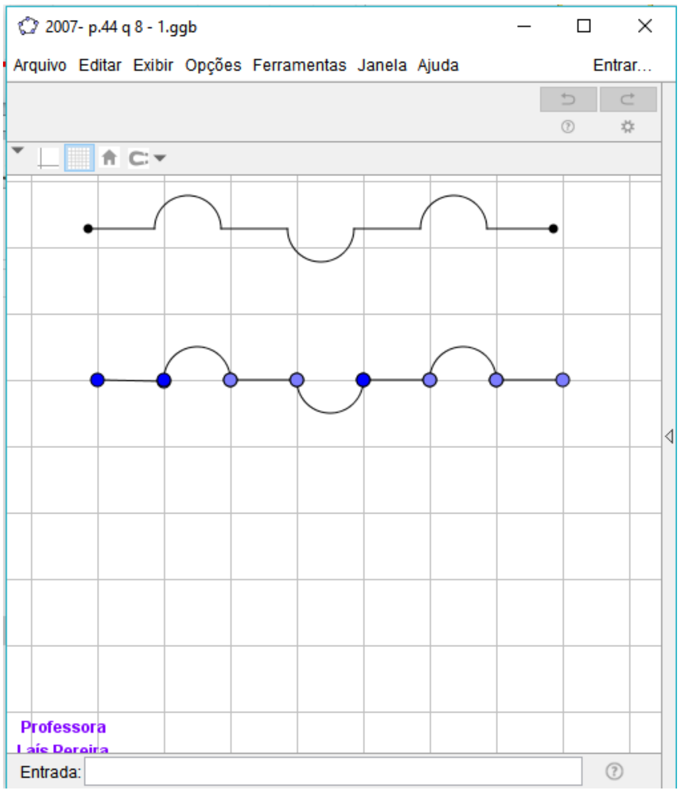
8. *O fio de arame* - Com um fio de arame Ernesto formou a figura abaixo.

Qual das figuras abaixo ele pode formar com o mesmo fio de arame, cortando ou não o fio?

(a) (b) (c) (d) (e)

Fonte: Banco de Questões de 2007- p.44

Figura 8 - Construção GeoGebra para questão 8, nível 1, 2007

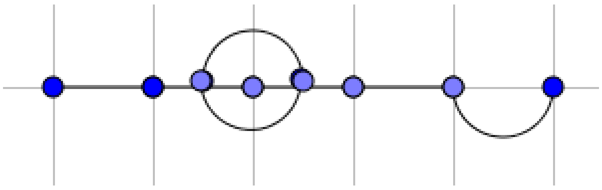


Fonte: Acervo da autora

Os alunos logo começaram movendo as formas e experimentando cada possibilidade de resposta, com exceção do aluno D que precisou de uma explicação individual de como usar a construção do GeoGebra.

A aluna A construiu a alternativa A conforme a figura 9.

Figura 9 - Resolução dos alunos

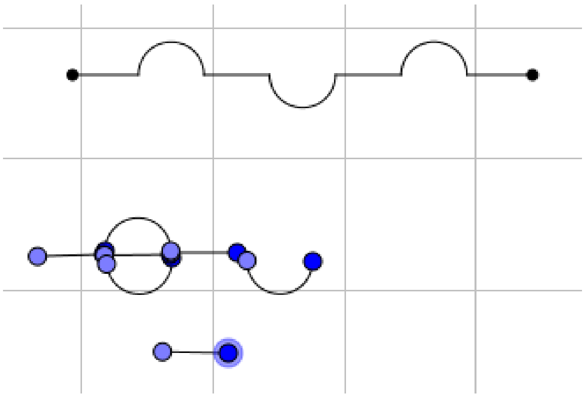


Fonte: Acervo da autora

Nesse caso a aluna não prestou atenção quanto ao tamanho dos segmentos de retas tentando emendar os segmentos e os tornando maiores ao alinhar todos. Quando ela apresentou sua solução foi avisado que deveria preservar o tamanho dos segmentos de reta de acordo com os pontos. Para esta questão é possível questionar se o software atrapalhou mais a aluna do que auxiliou.

As alunas F e G testaram alternativa por alternativa. A figura 10 apresenta a tentativa de construir a alternativa A, porém nesta sobra uma peça.

Figura 10 - Resolução dos alunos



Fonte: Acervo da autora

O aluno D quando compreendeu o que deveria ser feito seguiu pelo mesmo caminho, no entanto, tentou esconder um segmento atrás de outro para afirmar que a resposta seria a alternativa A. Então avisei que as figuras não deveriam ser sobrepostas.

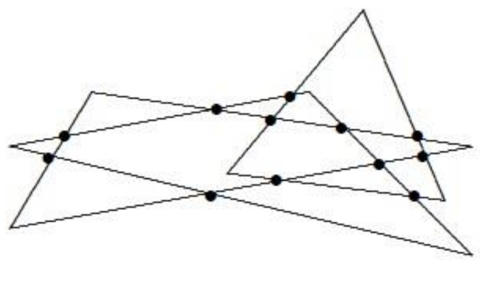
A aluna A depois que tentou a alternativa A, conforme descrito acima, parou de tentar alternativa por alternativa e logo concluiu que a alternativa correta seria a letra D. Então foi questionada sobre o porquê, mas no início não soube responder porque concluiu que seria a alternativa D. Então mostrou com o mouse que o motivo para sua resposta era a quantidade de arcos e segmentos de retas, que a letra D era a única que contemplava todas as formas sem sobrar. Ou seja, o GeoGebra não foi fundamental para a solução.

Em seguida as alunas F e G conseguiram encontrar a solução correta após testar todas as alternativas. O aluno D apresentou a letra C como alternativa, porém ele mesmo percebeu que não poderia ser pela falta de um arco para completá-la.

A terceira questão da aula foi a questão 5 de 2007, nível 3. A figura 11 apresenta a questão. Logo abaixo, na figura 12, está a construção feita para auxiliar os alunos na resolução. A construção do GeoGebra disponibilizada são três triângulos que os alunos podem manipular conforme acharem conveniente para a sua percepção sobre as intersecções entre as arestas destes triângulos. Houve muita dificuldade para compreender o que é intersecção, foi explicado de várias formas, como sendo o ponto de encontro de duas retas ou onde ocorre o cruzamento dos segmentos de reta. Os alunos levaram um tempo maior do que o esperado nesta questão devido à falta de conhecimento sobre os termos usados.

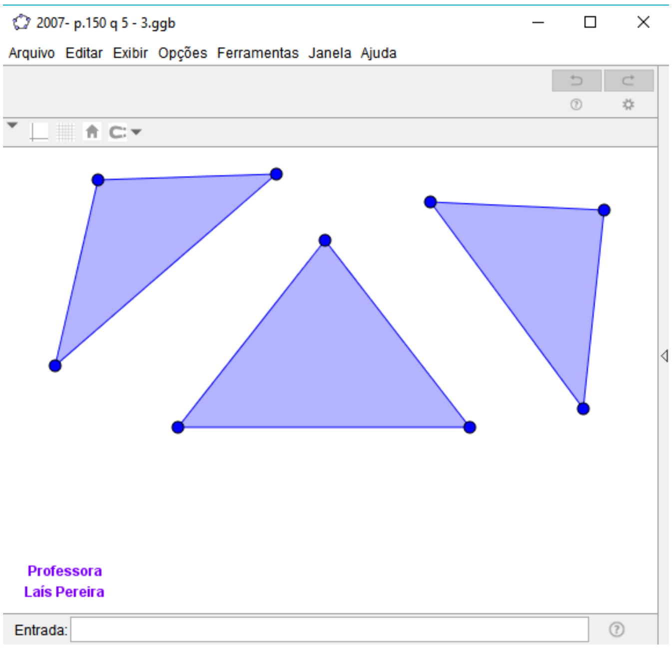
Figura 11 - Questão 5, nível 3

5. ***Intersecção de triângulos*** - Os 3 triângulos da figura se cortam em 12 pontos diferentes. Qual é o número máximo de pontos de intersecção de 3 triângulos?



Fonte: Banco de Questões de 2007- p.150

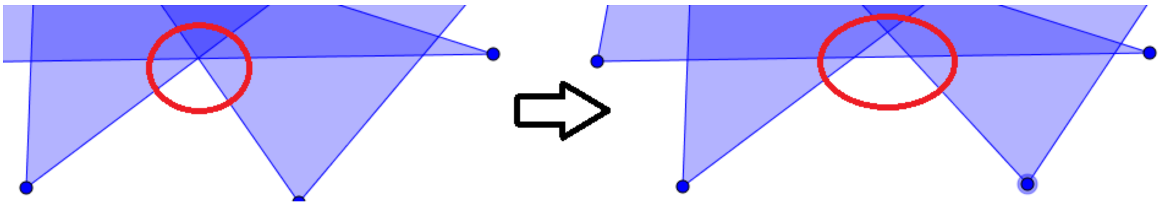
Figura 12 - Construção GeoGebra para questão 5, nível 3, 2007



Fonte: Acervo da autora

A aluna F moveu os triângulos de modo que três arestas passassem pelo mesmo ponto, ou seja, apresentassem apenas uma intersecção. Então foi falado que não seria muito interessante, pois a questão pedia o máximo de intersecções possíveis. Ao mover uma das arestas percebeu que surgiam mais duas intersecções, conforme a figura 13:

Figura 13 - Resolução dos alunos

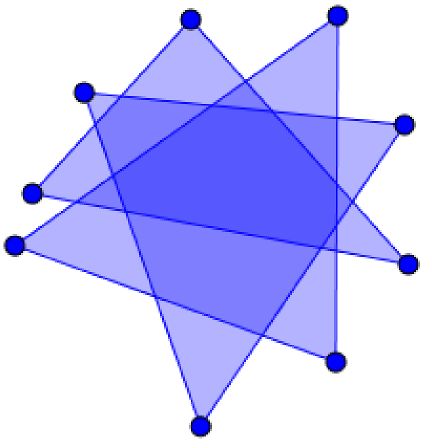


Fonte: Acervo da autora

As alunas F e G contavam: “Este com esta dá um, este com este dá dois, este com este dá três, ...”. A palavra “este” está se referindo às arestas dos triângulos, esta aresta intersecta com esta aresta, logo, conta um, e assim por diante.

Os alunos realizavam as construções, porém se perdiam ao contar os vértices. Após muitas tentativas, a aluna G realizou uma montagem que estava próxima de uma construção com todas as intersecções possíveis, a figura 14 apresenta essa construção.

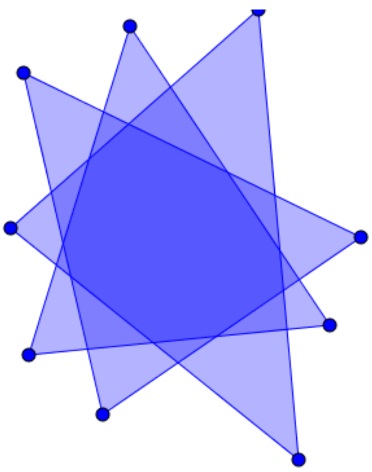
Figura 14 - Resolução dos alunos



Fonte: Acervo da autora

A aluna A percebeu que a construção de um tipo de estrela, conforme a figura 15, contemplava todas as intersecções possíveis, chegando a contagem de 18 intersecções. A contagem foi realizada com a professora devido ao fato de se confundirem um pouco com as intersecções e inicialmente tentarem realizar a contagem de forma aleatória sem saber depois de um tempo o que já haviam contado. Por este motivo houve a intervenção da professora para que percebessem a melhor forma de contar.

Figura 15 - Resolução dos alunos



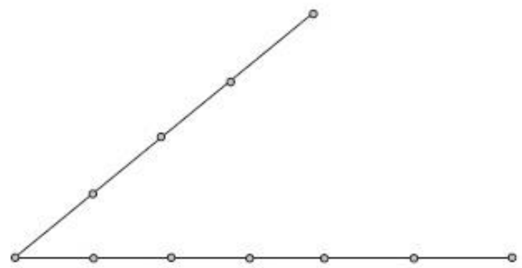
Fonte: Acervo da autora

Essa visualização foi facilmente realizada por estarmos utilizando o *software*, onde a própria aluna moveu os vértices e percebeu sobre o que a professora estava falando

A quarta e última questão foi a questão 2 de 2009, nível 3 (figura 16). Logo abaixo, na figura 17, está a construção feita para auxiliar os alunos na resolução desta.

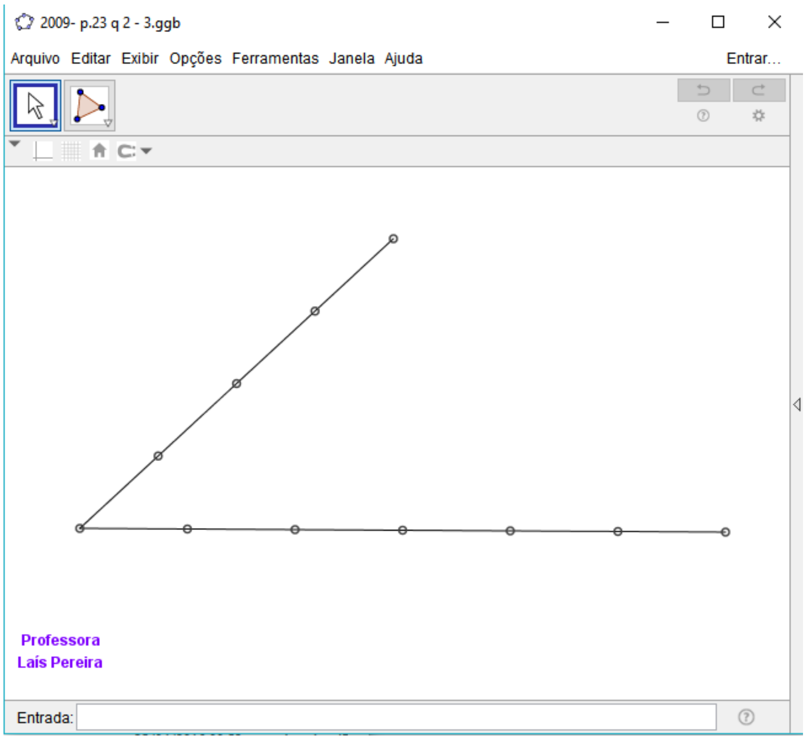
Figura 16 - Questão 2, nível 3

2. **Contando triângulos** – Na figura a seguir estão marcados 11 pontos sobre dois segmentos. Quantos triângulos podem ser formados com estes 11 pontos?



Fonte: Banco de Questões de 2009- p.23

Figura 17 - Construção GeoGebra para questão 2, nível 3, 2009

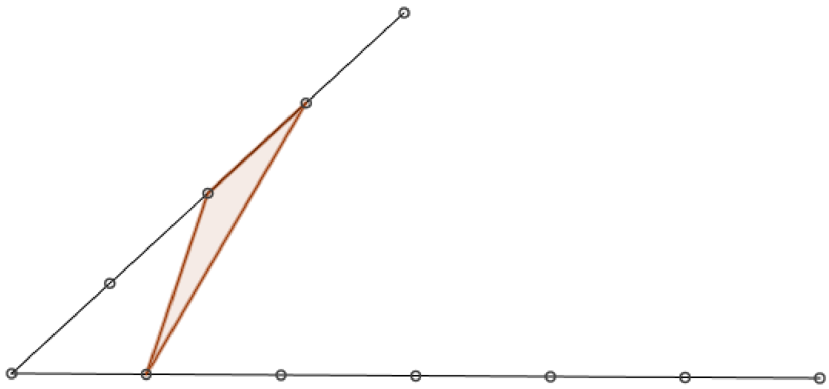


Fonte: Acervo da autora

Para esta questão houve a necessidade de relembrar o que é um triângulo e quantos lados (arestas) e pontos (vértices) um triângulo possui. Inicialmente foi explicado como a ferramenta funciona e como deveria ser usada para cada aluno individualmente.

Após terem compreendido o uso da ferramenta a aluna G questionou: “Isso aqui é um triângulo? Não, neh?” Segue a imagem na figura 18 que a aluna estava apontando com o dedo.

Figura 18 - Resolução dos alunos

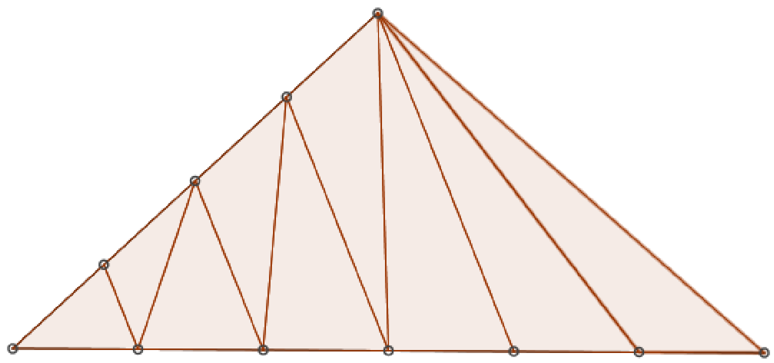


Fonte: Acervo da autora

A professora questionou se a figura possuía três pontos e três lados, ela respondeu que sim, então concluíram que era um triângulo.

Os alunos seguiram construindo muitos triângulos. A aluna F afirmou que seriam 9 triângulos a resposta, apresentando uma imagem como a da figura 19.

Figura 19 - Resolução dos alunos



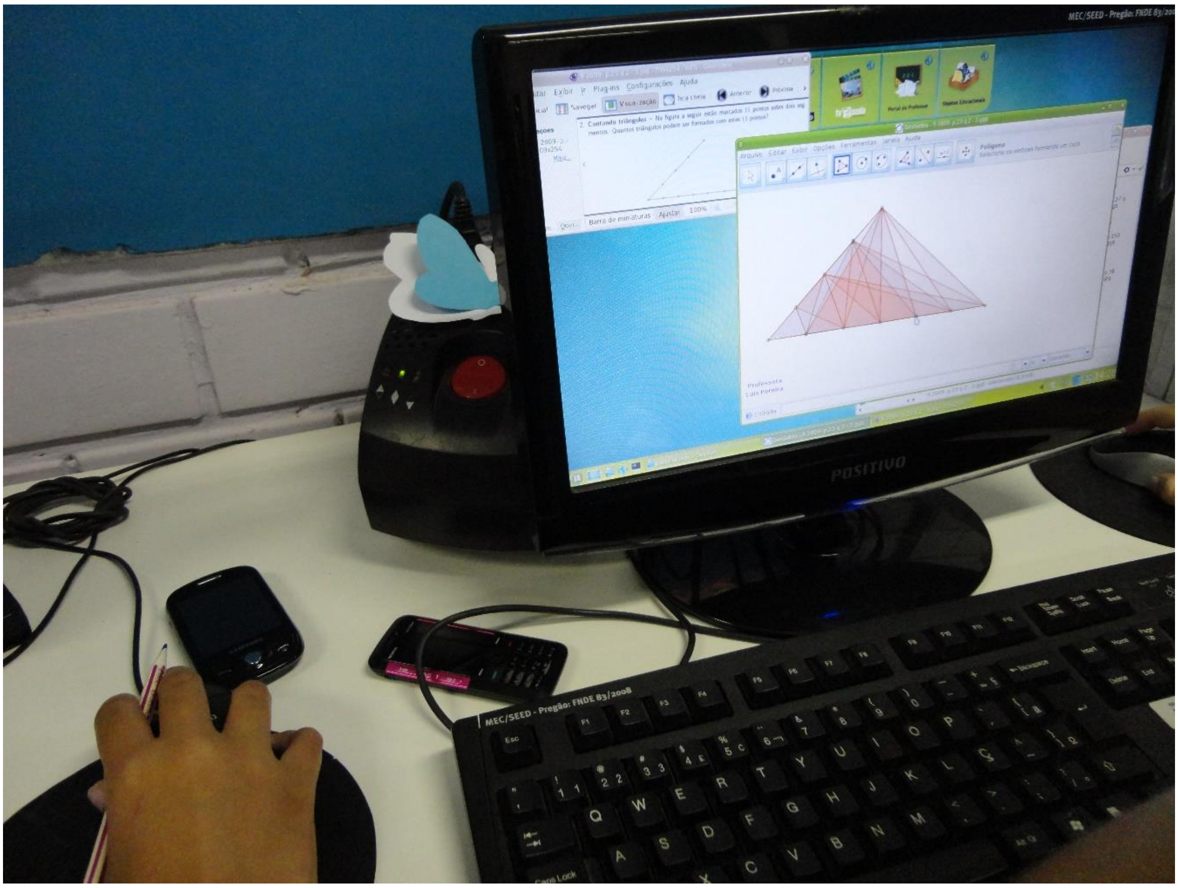
Fonte: Acervo da autora

A aluna afirmou que não conseguia mais, a professora afirmou que seria possível construir muitos mais. Quando percebeu que eles poderiam se sobrepor tomando o cuidado para não construir o mesmo, ela concluiu que então seriam muitos triângulos.

A aluna A demorou para compreender o uso da ferramenta, que ela deveria clicar em três pontos e para concluir no primeiro ponto que clicou. Como ela é muito tímida, ela não chamou quando estava com dúvidas, até a professora perceber sua dificuldade, perdeu muito tempo tentando descobrir sozinha até receber ajuda.

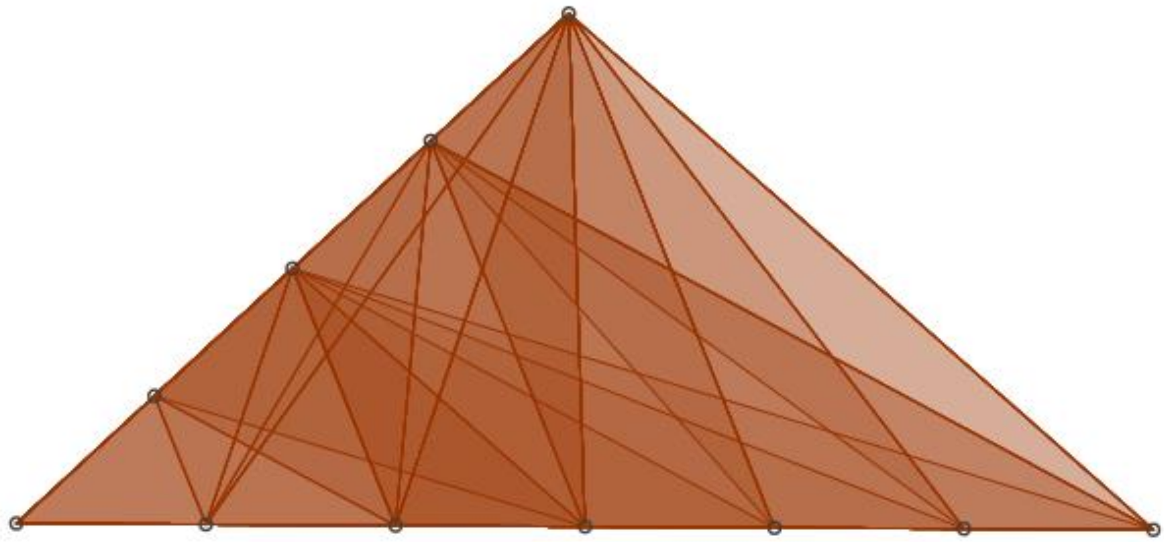
Ela começou a construir muitos triângulos. Depois de um tempo, afirmou que eram 29, ao que a professora disse que seriam mais. Ela continuou construindo e afirmou que eram 37; novamente a professora afirmou que eram mais. A aluna não conseguiu concluir a questão, pois o tempo de aula acabou. As figuras 20 e 21 apresentam como estavam construindo os triângulos. A direção da escola não permite que os alunos fiquem mais tempo que o combinado na escola.

Figura 20 - Resolução dos alunos



Fonte: Acervo da autora

Figura 21 - Resolução dos alunos



Fonte: Acervo da autora

A questão 8, nível 1 de 2007, com o uso do GeoGebra se demonstrou interessante pelo fato de os alunos envolvidos não conhecerem as propriedades do quadrado. Assim, se caso fossemos utilizar papel poderia haver dificuldades quanto as possibilidades de quadrados, enquanto no *software* foi criada uma ferramenta que garante que as figuras que estão usando são quadrados. As dificuldades que surgiram foram referentes às propriedades do quadrado e posicionamento, ou seja, quanto a representações prototípicas (GRAVINA, SANTAROSA, 1996). Se essa questão tivesse sido feita com peças de cartolina em formato de quadrado, isso entregaria as possibilidades de tamanhos dos quadrados, facilitando o processo.

Quanto a questão 8 de 2007, nível 1, da lista 2, quando comparamos o uso do GeoGebra com outras mídias como, por exemplo, o simples uso de papel e lápis, notamos que a contribuição do *software* para esta questão se limita à praticidade do uso do computador, pois a mesma questão poderia ser trabalhada com peças de cartolina.

Na questão 5 de 2007, nível 3, o uso do GeoGebra foi mais interessante, pois a visualização das intersecções foi facilmente realizada por estarmos utilizando o *software*, onde os próprios alunos moveram os vértices e perceberam as possibilidades de alteração no formato do triângulo, ou seja, as três figuras construídas na construção são triângulos, porém não possuem restrições quanto a que tipo de triângulo e medidas de lados e ângulos. Essa observação possivelmente seria mais difícil de ser feita em um ambiente em que se utilizasse apenas lápis e papel. Assim, a versatilidade e o dinamismo do GeoGebra permitiram aos alunos testarem, experimentarem, observarem e tirarem suas conclusões, ou seja, a tecnologia estava sendo utilizada, conforme aponta Goldenberg (2000) em seus estudos, como uma ferramenta para auxiliar os alunos a desenvolver o pensamento matemático. E mais do que auxiliar, nessas questões em que o uso do GeoGebra foi interessante, os alunos pensaram-com o *software*. É possível perceber o coletivo alunos-com-GeoGebra resolvendo as questões (BORBA, 2007).

Do mesmo modo, a questão 2 de 2009, nível 3, utiliza triângulos e estes podem ter medidas e ângulos diferentes. Nesta questão era esperado que as alunas percebessem as possibilidades de triângulos e os agrupassem de alguma forma que facilitasse a contagem destes, no entanto o tempo de aula acabou antes que se dessem conta desta forma de resolução.

A primeira, terceira e quarta questões propostas nesta aula são questões que utilizam de processos de contagem, ou seja, como o PCN (1998) prevê, é necessário que o aluno organize agrupamentos para então realizar a contagem. Os alunos demonstraram não possuir experiência com esse tipo de questão, logo tentaram resolvê-las construindo todas as possibilidades que conseguiam ver sem nenhum tipo de organização.

A interação dos alunos ficou prejudicada com o fato de cada aluno poder utilizar um computador e não realizar as atividades em dupla. A interação maior foi entre as duas alunas F e G, que são amigas muito próximas em sala de aula, mesmo assim a interação foi pouca. Os alunos demonstraram ter domínio sobre o uso do computador, e não tiveram problemas com o uso do GeoGebra, pois foi necessário apenas algumas explicações sobre as ferramentas e os alunos já estavam usando sem problemas. No entanto, quanto a já possuírem os conhecimentos básicos de matemática não foi o que demonstraram, pois tiveram dificuldades em compreender o que é intersecção e sempre foi necessário concluir definições, como por exemplo, se os quadrados congruentes, sobrepostos contam. A última expectativa não se confirmou, pois mesmo tendo papel e lápis a disposição os alunos não usaram até a penúltima questão. Usaram na última questão apenas para não se perder na contagem do que estavam construindo no *software*.

4.2 AULA 2 – CONHECENDO AS FERRAMENTAS

Esta aula foi preparada com o objetivo de introduzir as ferramentas do *software* aos alunos para então aprenderem a fazer suas próprias construções.

Para segunda aula os objetivos foram: manipular as ferramentas do GeoGebra; compreender as funções de cada ferramenta, e; realizar construções que mantenham suas definições iniciais.

As expectativas para esta aula eram que os alunos testariam as ferramentas sem dificuldades; os alunos possuiriam os conhecimentos matemáticos necessários para compreender o que cada ferramenta constrói e; os alunos usariam a ferramenta polígono regular para construir o quadrado.

No primeiro momento foram apresentadas as ferramentas do GeoGebra. A figura 22 apresenta a barra de ferramentas:

Figura 22 - Barra de ferramentas

Fonte: Acervo da autora

Cada item da barra contempla outras ferramentas conforme a figura 23.

Figura 23 - Barra de ferramentas aberta

Fonte: Acervo da autora

Abaixo segue a figura 24 com explicações sobre algumas ferramentas:

Figura 24 - Ferramentas GeoGebra

Novo ponto

Clique na *Zona Gráfica* para criar um novo ponto.
Nota: As coordenadas do ponto são fixadas quando o botão do rato é libertado.

Clicando num segmento, recta, polígono, cónica, gráfico de função ou curva, pode criar um ponto nesse objecto (veja também o comando Ponto).

Ponto médio ou centro

Pode clicar em dois pontos ou num segmento para obter o respectivo ponto médio. Também pode clicar numa secção cónica (eg., circunferência) para criar o respectivo centro.

Segmento definido por dois pontos

Seleccione dois pontos *A* e *B* para criar um segmento entre *A* e *B*. O comprimento do segmento aparece na *Zona Algébrica*.

Polígono

Seleccione sucessivamente pelo menos três pontos, os quais serão os vértices do polígono. Depois, clique outra vez no primeiro ponto para fechar o polígono. A área do polígono é mostrada na *Zona Algébrica*.

Polígono regular

Seleccione dois pontos *A* e *B* e especifique o número *n* de vértices no campo de texto da janela de diálogo que aparece. Isto dá-lhe um polígono regular com *n* vértices (incluindo *A* e *B*).

Recta definida por dois pontos

Seleccionando dois pontos *A* e *B* cria a recta que passa por *A* e *B*. O vector director desta recta é (*B* - *A*).

Recta paralela

Seleccionando uma recta *g* e um ponto *A* define a recta que passa por *A* paralelamente a *g*. A direcção de tal paralela é a direcção da recta *g*.

Recta perpendicular

Seleccionando uma recta *g* e um ponto *A* cria a recta passando por *A* perpendicularmente à recta *g*.

Circunferência dados o centro e o raio

Seleccione o centro *M* e insira a medida do raio no campo de texto da janela que aparece.

Circunferência dados o centro e um ponto

Seleccionando um ponto *M* e um ponto *P* define a circunferência de centro *M* passando por *P*.

Fonte: https://app.geogebra.org/help/docupt_PT.pdf

Nesta aula estavam presentes a aluna A, o aluno B, o aluno C, a aluna E, a aluna F e a aluna G. Conforme os alunos chegavam, era pedido que escolhessem um computador para utilizar. Como a sala possuí apenas 5 computadores em pleno funcionamento, dois alunos, B e C, utilizaram o mesmo computador. Os alunos foram auxiliados a abrirem o GeoGebra.

A intenção desta aula era que os alunos experimentassem as ferramentas básicas do GeoGebra. Para isso, as ferramentas foram apresentadas uma por uma. Desta forma, foi apresentada a organização das ferramentas, que aparecem agrupadas por tipos em cada botão da barra de ferramentas. Logo, foi solicitado que clicassem no primeiro botão, e encontrassem a ferramenta “Novo ponto”.

Os alunos experimentaram fazer muitos cliques na tela de produção do GeoGebra. Nesse momento foi reforçada a possibilidade de desfazer ações que não gostaram ou não desejavam fazer usando o botão “desfazer” no canto direito a cima da tela.

A próxima ferramenta foi o “Ponto médio ou centro”. Para isso foi solicitado que os alunos deixassem na tela de produção pelo menos três pontos que já haviam feito. Foi pedido que selecionassem a ferramenta e clicassem em dois pontos para ver o que acontecia. Após, foi pedido que clicassem na ferramenta “mover”, para verem o que acontecia com o ponto médio criado, que este se movia quando algum dos outros dois pontos eram movimentados de forma que sempre estava a mesma distância dos pontos iniciais e a menor distância possível.

Então, foi apresentada a ferramenta “Segmento definido por dois pontos”. Foi explicado que para criarem um segmento poderiam usar dois pontos já existentes clicando nestes, e que também poderiam construir um segmento de reta clicando onde desejassem e que, neste caso, seriam necessários dois cliques em lugares diferentes, estes cliques criariam dois novos pontos que limitariam o segmento de reta. Conforme a explicação era feita os alunos faziam suas experimentações quanto às ferramentas.

As alunas F e G construíram um triângulo com as ferramentas que já haviam sido explicadas. Então a próxima ferramenta a ser explicada foi o “Polígono”. Foi explicado que o último clique com esta ferramenta deveria ser no primeiro ponto usado, para assim fechar a figura. Para experimentarem esta ferramenta, foi solicitado que construíssem um triângulo. Em seguida foi apresentada a ferramenta “Polígono regular”, que deveriam clicar em dois pontos ou criá-los e em seguida apareceria uma caixa de mensagem onde deveriam digitar a quantidade de lados que este polígono deveria ter. Foi pedido que selecionassem a ferramenta “Mover” para verificar o que acontecia. Assim os alunos visualizaram que ao mover os pontos do polígono este permanecia uma figura proporcional mesmo aumentando ou diminuindo.

Para ferramenta “Reta definida por dois pontos” foi necessário primeiro explicar o que é uma reta e então pedir que a construíssem e após para movimentarem, de modo que visualizassem que a reta permanecia sempre uma reta e passando pelos dois pontos.

Quando questionados se sabiam o que era uma reta paralela responderam que não. Então, antes de explicar, foi pedido que fossem na ferramenta “Reta paralela” e construíssem uma usando um segmento ou outra reta e, após, que movessem os pontos para ver o que acontecia. Perceberam que ao movimentar os pontos as retas se moviam de forma que nunca se encontrassem. A partir das observações feitas foi concluído o que é uma reta paralela.

Para explicar a ferramenta “Reta perpendicular” foi questionado se os alunos sabiam o que é uma reta perpendicular. Alguns falaram não, porém o aluno C fez uma cruz usando as mãos para dizer o que é uma reta perpendicular. Então foram recordados dos ângulos que um giro completo é 360º, e que as duas retas cortavam o giro em 4 partes iguais, então concluíram que haviam 4 ângulos de 90º que foi informado aos alunos se chamar ângulo reto. Também foi comentado os lugares que se encontram esse ângulo tão popularmente utilizado, como, por exemplo, no canto do quadro, da mesa, das paredes da sala de aula.

Surgiu, então, a necessidade de explicar as cores dos pontos que foram criados: em azul, os pontos que são possíveis de mover livremente; em cinza, os pontos que são possíveis de mover, porém com alguma limitação; e em preto, os que não são possíveis de mover, pois estão “amarrados” por alguma definição com os outros.

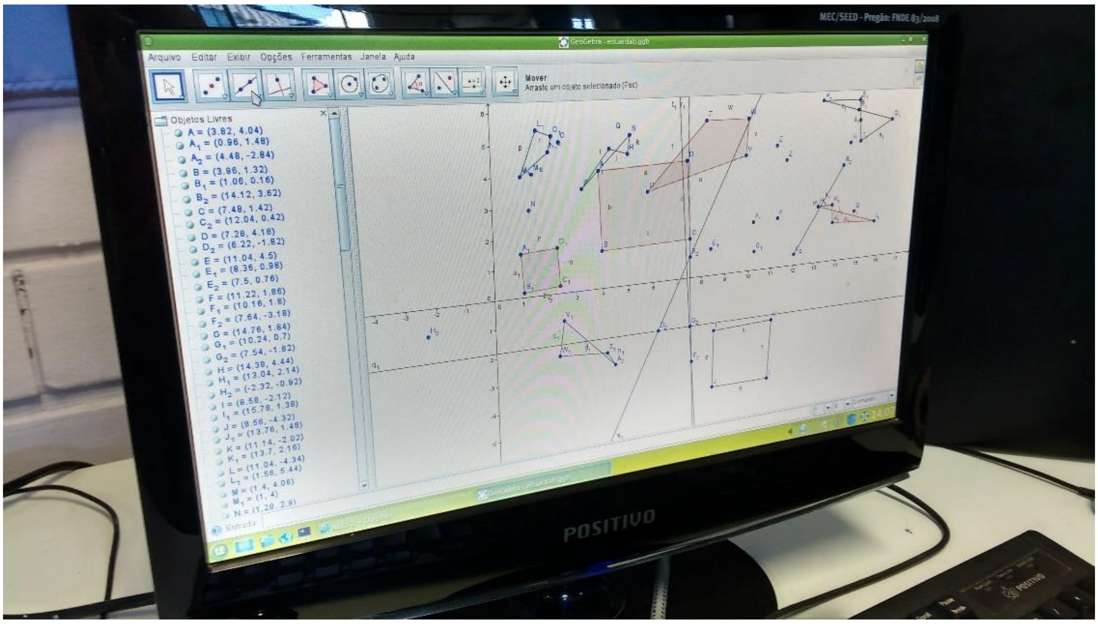
Para a construção de uma circunferência foi pedido que fossem na ferramenta “Circunferência dados o centro e o raio”. Foi pedido que escolhessem um centro e digitassem o tamanho do raio que quisessem. Em seguida foi pedido que usassem a ferramenta “Circunferência dados o centro e um ponto”. Foi necessário questioná-los sobre o que é um raio. A aluna F respondeu apontando na circunferência. E então o conceito foi reforçado.

Como aula introdutória para o uso do *software*, após apresentar as ferramentas foi proposta a construção de um quadrado aos alunos, o qual é considerado, conforme Borba, da Silva e Gadanidis (2015, p.25), um problema inicial clássico para geometria dinâmica.

Foi pedido que salvassem o que já haviam feito até então e abrissem uma nova tela de produção limpa. Então, foi solicitado que construíssem um quadrado. Os alunos foram deixados livres para construir do jeito que preferissem. Foram questionados se sabiam o que é um quadrado, responderam que sim, porém na hora de construir houve algumas dificuldades em relação a representação prototípica (GRAVINA, SANTAROSA, 1996). Então foi questionado sobre quantos lados um quadrado possui, ao que os alunos responderam quatro. Também foi questionado sobre quantos pontos havia no quadrado, chamando a atenção dos alunos para a nomenclatura destes pontos: vértices. Em seguida foi questionado se os lados do quadrado são diferentes, ao que eles afirmaram que não. A professora insistiu "então eles são..." e o aluno B afirmou "iguais". Após construírem, foi pedido que usassem a ferramenta "Mover" para ver o que acontecia. Quando questionados se após movimentarem os pontos a figura ainda era um quadrado, afirmaram que não.

As alunas F e G conseguiram construir um quadrado que mantinha as propriedades de quadrado mesmo movimentando, porém, conforme esperado, elas perceberam que poderiam usar a ferramenta "Polígono regular". Porém a professora não percebeu logo. Após os alunos restantes movimentarem os seus quadrados e estes deixarem de ser um quadrado, foi feito o desafio de construírem um quadrado que ao ser movimentado continuaria sendo um quadrado sem usar a ferramenta "Polígono regular". A figura 25 apresenta as tentativas da dupla B e C:

Figura 25 - Resolução alunos



Fonte: Acervo da autora

A aluna E foi questionada se a figura que havia sido construída era um quadrado. O aluno B respondeu que era um retângulo, então a professora interveio afirmando ser um paralelogramo. Mesmo assim foi ressaltado que estava perto de conseguir. Até este momento era a única aluna usando os recursos de modo que mantivesse alguma propriedade, neste caso, os lados opostos paralelos.

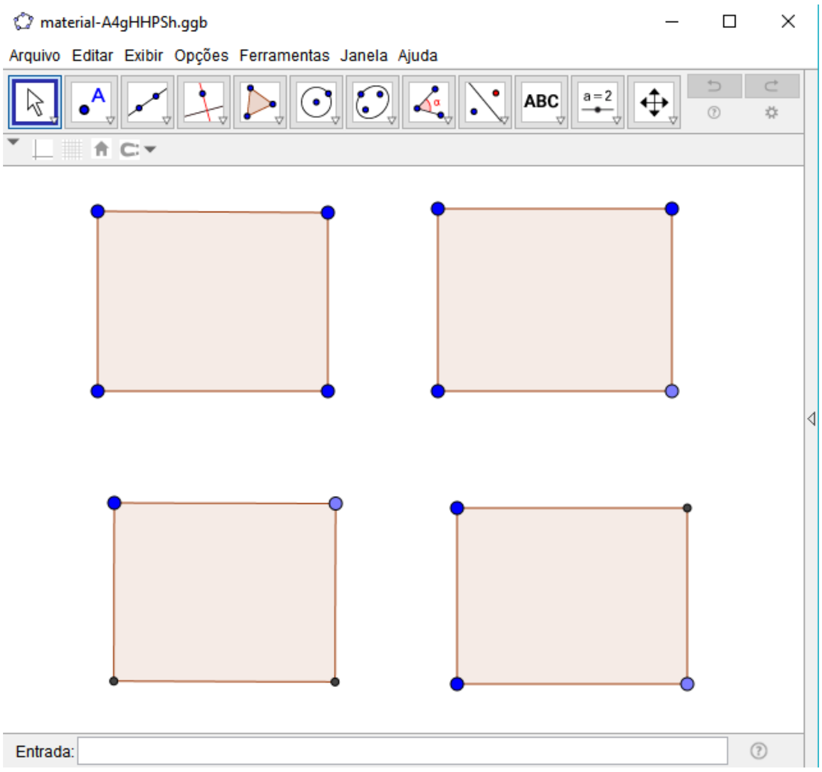
Após algum tempo, foi dada a dica de que deveriam usar as ferramentas “Reta paralela” ou “Reta perpendicular”. Como as construções estavam ficando muito poluídas houve a necessidade de mostrar que poderiam esconder alguns itens clicando com o botão direito sobre este e clicando em “esconder”.

Foi necessário ajudá-los a perceber as ferramentas e os conceitos. Para isso a professora usou as mãos e questionou sobre o que os lados opostos dos quadrados são, ao que um aluno concluiu “paralelos”.

Após 20 minutos em que os alunos tentaram construir o quadrado, a professora começou a explicar e dar o passo a passo para a construção. Iniciou explicando que chegaram perto da construção do retângulo, pois não se preocuparam com o fato de os lados do quadrado possuírem a mesma medida. Para isso apresentou a ferramenta equivalente ao compasso, a “Circunferência dados o centro e um ponto”, que possibilita transferir medidas. Então foi pedido que construíssem um círculo e, após, uma reta passando pelos dois pontos utilizados para construir o círculo. Após foi pedido que construíssem uma reta perpendicular à reta anterior. Foi pedido que marcassem a intersecção desta nova reta com o círculo. E, então, que construíssem retas paralelas em relação as retas já existentes com a distância do raio entre elas. Neste momento eles já perceberam o quadrado no meio da construção. Logo, foram questionados sobre como deixar essa construção mais bonita, o aluno B afirmou que é necessário esconder alguns pontos, porém antes a professora pediu que utilizassem a ferramenta “Polígono” e construíssem o quadrado sobre os 4 pontos do quadrado, e após, escondessem o que não quisessem que aparecesse.

Então, foi pedido que os alunos abrissem o arquivo com 4 retângulos construídos, porém de formas diferentes, ou seja com propriedades diferentes, figura 26.

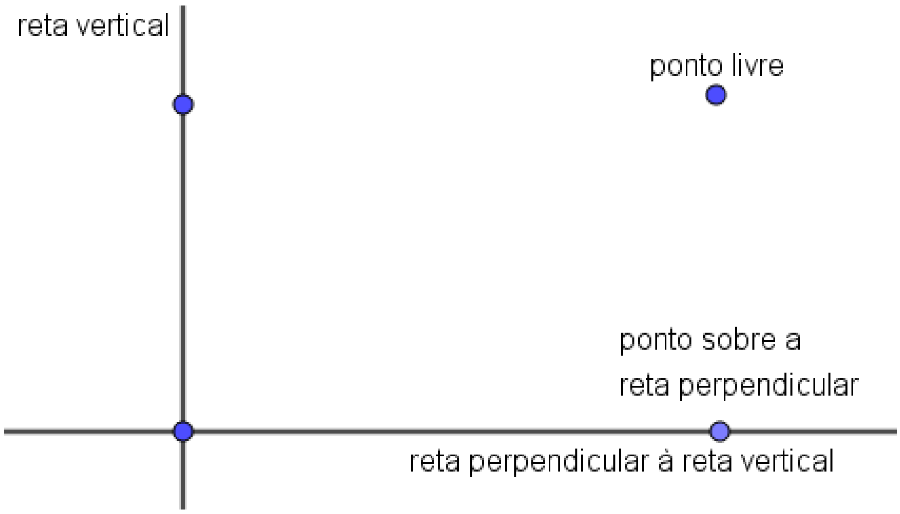
Figura 26 - Atividade dos retângulos



Fonte: Acervo da autora

O primeiro retângulo foi construído a partir de quatro pontos marcados à olho de modo que parecessem os vértices de um retângulo. E então com a ferramenta “polígono” o retângulo foi construído sobre esses pontos. Para o segundo retângulo foi construído um segmento de reta na vertical e então uma reta perpendicular a esse segmento passando pelo ponto inferior deste. Em seguida, foi marcado um ponto sobre a reta e um ponto sem relações com o que já havia sido construído, figura 27. Então com a ferramenta “polígono” foi construído um quadrilátero sobre os quatro pontos. Esse quadrilátero foi ajustado para forma de um retângulo.

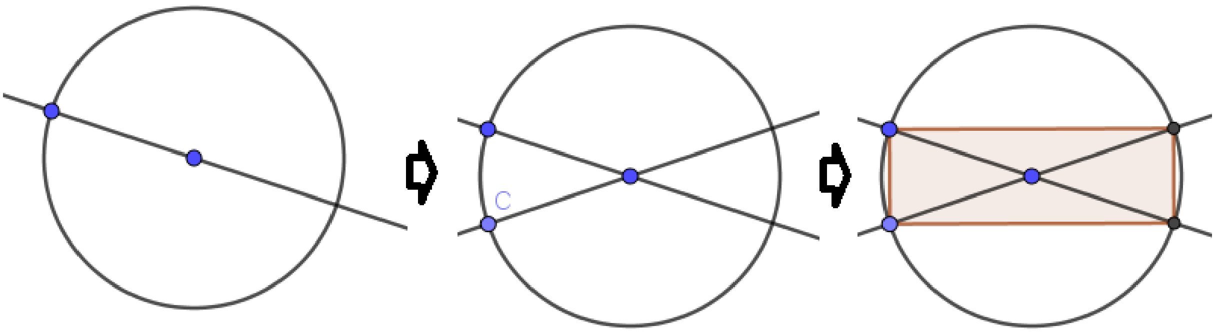
Figura 27 - Resolução 2º quadrilátero



Fonte: Acervo da autora

Para o terceiro retângulo foi construída uma circunferência a partir de dois pontos, um no centro e outro sobre esta. Após, foi construída uma reta sobre estes dois pontos e então um ponto foi marcado sobre a circunferência. Então, foi construída uma reta passando por este novo ponto e o centro da circunferência. O retângulo foi construído com a ferramenta “polígono” sobre as quatro intersecções das retas com a circunferência (figura 28).

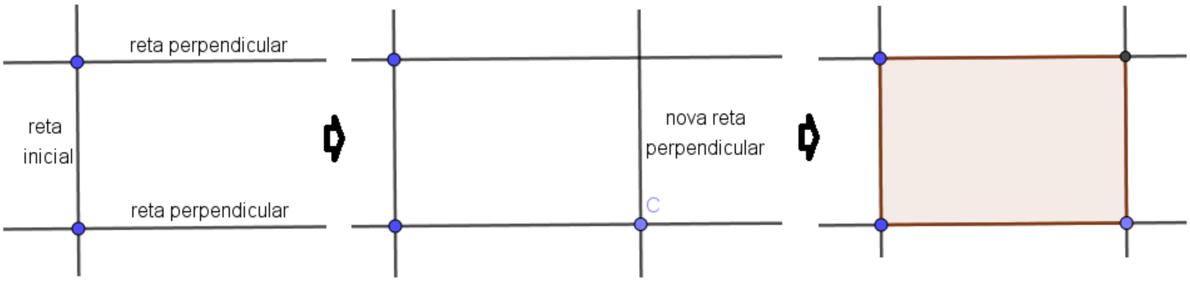
Figura 28 - Resolução 3º retângulo



Fonte: Acervo da autora

E o quarto retângulo foi construído a partir de dois pontos e uma reta na vertical passando por eles. Então foram construídas duas retas perpendiculares à primeira reta passando cada uma por um dos dois pontos iniciais. Foi marcado um ponto na reta inferior e construída uma reta perpendicular a essa reta e passando pelo ponto recém construído (figura 29). O retângulo foi construído sobre as intersecções das quatro retas.

Figura 29 - Resolução 4º retângulo



Fonte: Acervo da autora

Foi solicitado que movimentassem os pontos do primeiro retângulo e questionados se o retângulo continuava sendo um retângulo, responderam que não. Desta forma, a tarefa está possibilitando perceber a distinção entre a representação prototípica (GRAVINA, SANTAROSA, 1996) e a construção no software. Conforme Borba, da Silva e Gadanidis (2015, p.23) explicam, para verificar essa distinção pode-se usar a *prova do arrastar*, ou seja, pode-se movimentar a construção de modo a verificar as propriedades envolvidas.

Em seguida, foi solicitado que tentassem reproduzir esses retângulos com os mesmos movimentos, ou seja, com as mesmas propriedades. Surgiram dúvidas sobre o que fazer, então foi explicado. Ao questionar o que acontecia com os lados opostos de um dos retângulos, o aluno B respondeu que eram paralelos, demonstrando ter compreendido o conceito. Os alunos foram deixados à vontade para tentaram. A primeira construção foi feita logo por todos os alunos, porém as outras eles ficaram tentando até o término da aula.

Estas atividades “elucidam a prova do arrastar como uma peculiaridade emergente com o surgimento de uma nova tecnologia no estudo de geometria” (BORBA; DA SILVA GADANIDIS, 2015, p.27). Assim, o *software* passa a proporcionar uma nova possibilidade para o ensino de geometria que antes sem a tecnologia digital não era possível. Logo “a ação de arrastar (característica central dos ambientes de geometria dinâmica) muda o aspecto figural de uma construção geométrica, mas não o aspecto conceitual, uma vez que todas as propriedades do objeto geométrico são mantidas” (BASSO; NOTARE, 2015, p. 6). Retomando a teoria dos aspectos figurais de Fischbein (1993).

Nesta aula a interação entre alguns alunos foi maior, porém, houve muitos momentos de total concentração sem conversas, o que é bom por estarem trabalhando e interessados, mas não é possível saber exatamente o que estão pensando em fazer nas construções. Sempre houve a necessidade de explicar as definições matemáticas e nomenclaturas como se os alunos nunca tivessem visto, pois muitos nem sabiam o que era, contradizendo a expectativa de que teriam os conhecimentos necessários para a aula. Quanto à expectativa de que usariam a ferramenta “Polígono regular” se concretizou, logo as alunas F e G perceberam a possibilidade e usaram. Também, os alunos não demonstraram dificuldades quanto ao uso das ferramentas, outra expectativa verdadeira.

4.3 AULA 3 – USANDO AS FERRAMENTAS

Ainda no processo de conhecer as ferramentas nesta aula os alunos usaram o *software* sem construções para manipular, apenas a tela branca, de modo que deveriam realizar suas próprias construções que os auxiliassem a resolver as questões da OBMEP propostas.

Os objetivos da terceira aula foram: manipular as ferramentas do GeoGebra; compreender as funções de cada ferramenta; realizar construções que mantenham suas definições iniciais.

As expectativas para essa aula eram que: os alunos já compreenderam os conceitos de quadrado, triângulo, reta paralela e reta perpendicular; os alunos usariam o *software* de forma favorável a resolução das questões propostas e; os alunos possuíam os conhecimentos matemáticos necessários para compreender o que cada ferramenta constrói.

Nesta aula estavam presentes as alunas A, F e G. Então foi feita a continuidade da aula 2. No primeiro momento foram feitas as construções pela professora, com auxílio das alunas, referentes aos retângulos iniciados no final da última aula. Essas construções foram feitas no computador do professor com as alunas sentadas em volta. Como as alunas são muito comportadas, elas só falavam quando era solicitado, e em alguns momentos foi necessário insistir para que falassem ou respondessem algo. Em especial a aluna A que é extremamente tímida até com os colegas.

Após as construções realizadas, momento em que praticamente não interagiram, foi explicada a questão da OBMEP que deveriam resolver, a questão 3, nível 2 de 2007, presente na figura 30, utilizando o programa.

Figura 30 - Questão 3, nível 2

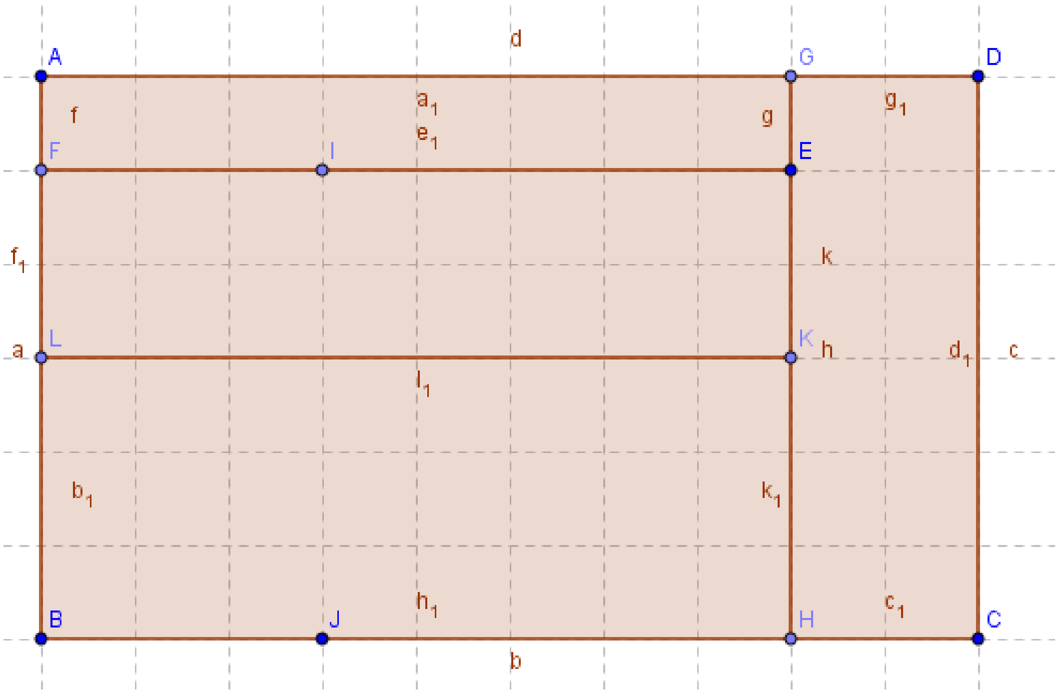
3. ***O retângulo do Luís*** - Luís desenhou um retângulo de $6cm$ por $10cm$, e quer dividí-lo em quatro partes. Cada parte deve ter de área, respectivamente, $8cm^2$, $12cm^2$, $16cm^2$, $24cm^2$. Desenhe como ele pode fazer essa divisão.

Fonte: Banco de Questões de 2007- p. 69

Então as alunas escolheram os computadores que iriam usar e estes já estavam preparados para trabalharem. Foram deixadas livres para tentar resolver. Surgiu a necessidade de explicar o que é área, pois pareciam não conhecer o conceito. A aluna A precisou de orientações sobre como fazer no GeoGebra a questão, a professora sugeriu que usasse a ferramenta “Polígono”. A aluna G questionou se seria possível sobrepor os retângulos, foi informada que não poderia.

As alunas F e G logo conseguiram, conforme figura 31. Ambas fizeram a mesma figura.

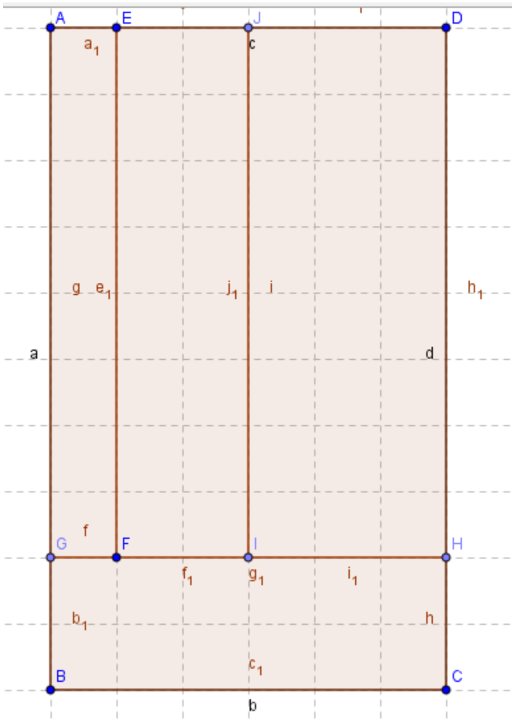
Figura 31 - Resolução alunos



Fonte: Acervo da autora

Em seguida a aluna A conseguiu conforme figura 32.

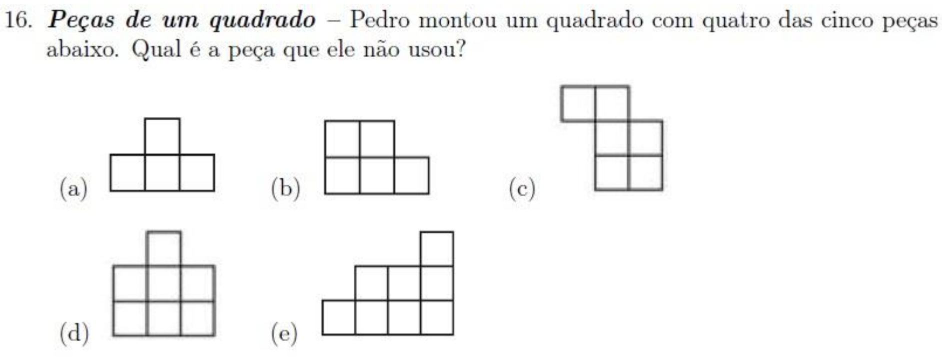
Figura 32 - Resolução alunos



Fonte: Acervo da autora

Depois de salvarem suas construções, foi passada a questão 16, nível 2 de 2010 (figura 33). Esta questão era como um quebra cabeça que as alunas deveriam montar de modo que formasse um quadrado e sobrasse apenas uma peça. Foi necessário explicar que clicando no ponto azul claro a figura girava e para mover deveriam clicar e arrastar o ponto azul forte.

Figura 33 - Questão 16, nível 2



16. ***Peças de um quadrado*** – Pedro montou um quadrado com quatro das cinco peças abaixo. Qual é a peça que ele não usou?

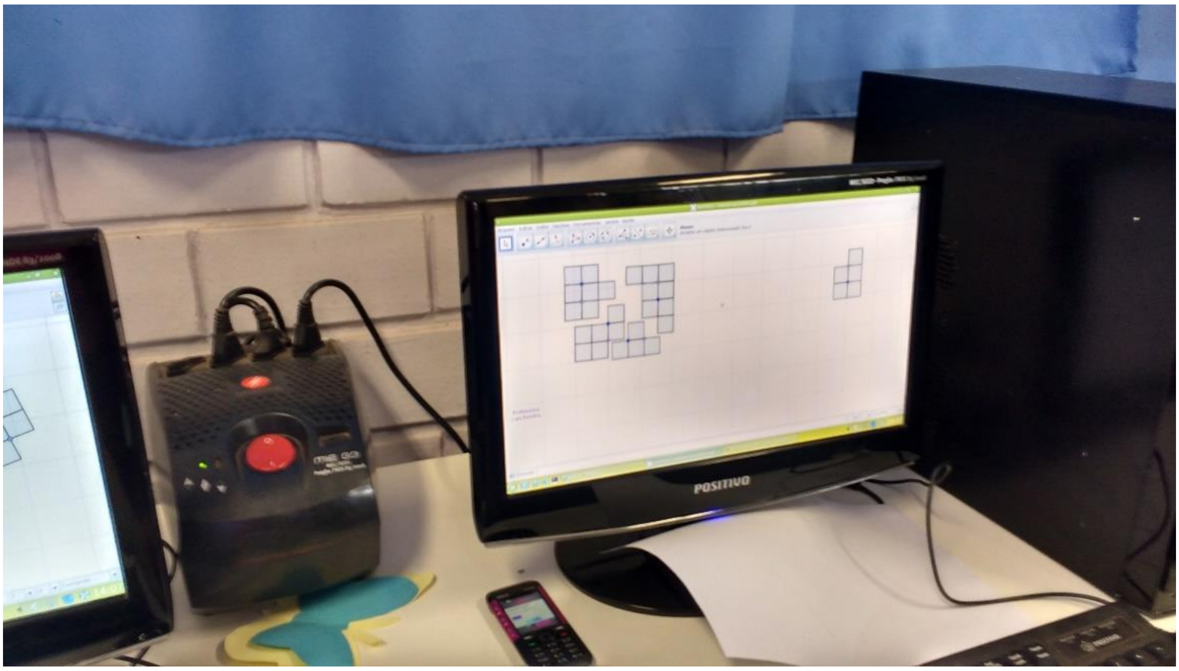
(a) (b) (c)

(d) (e)

Fonte: Banco de Questões de 2010, p. 38

Logo as alunas conseguiram resolver conforme a figura 34 mostra.

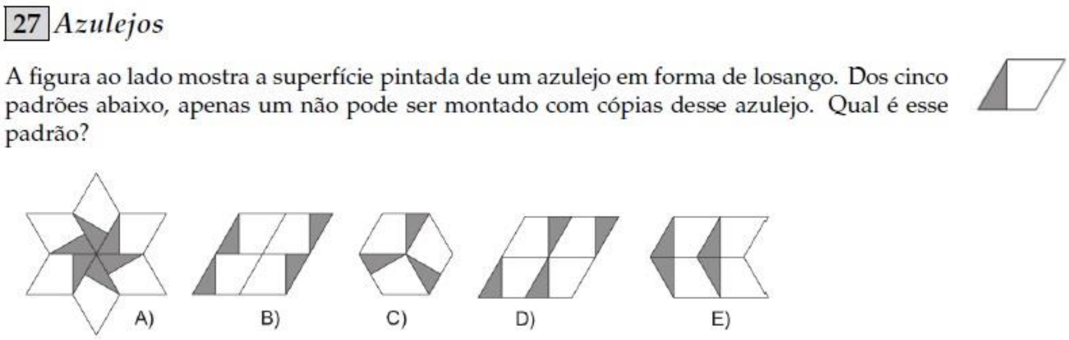
Figura 34 - Resolução alunos



Fonte: Acervo da autora

A terceira questão, a questão 27, nível 1 de 2012 (figura 35), sobre ladrilhamento as alunas demoraram a compreender o que estava sendo pedido. Após ser explicado individualmente resolveram rapidamente. A figura 36 apresenta a construção de apoio para resolução da questão.

Figura 35 - Questão 27, nível 1



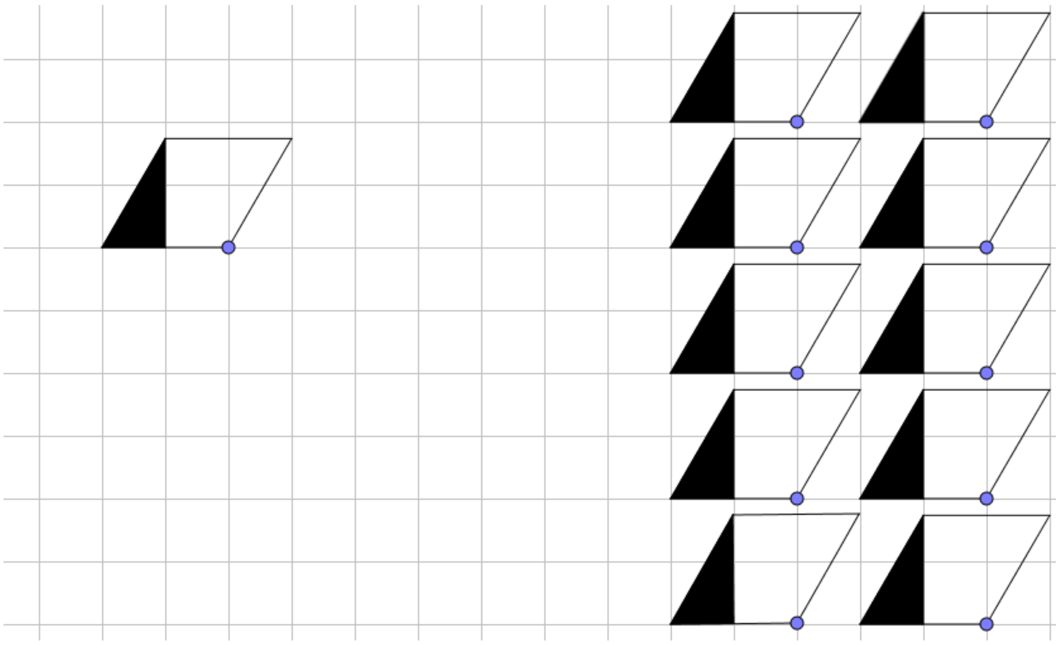
27 *Azulejos*

A figura ao lado mostra a superfície pintada de um azulejo em forma de losango. Dos cinco padrões abaixo, apenas um não pode ser montado com cópias desse azulejo. Qual é esse padrão?

A) B) C) D) E)

Fonte: Banco de Questões de 2012, p. 27

Figura 36 - Construção GeoGebra para questão 27, nível 1

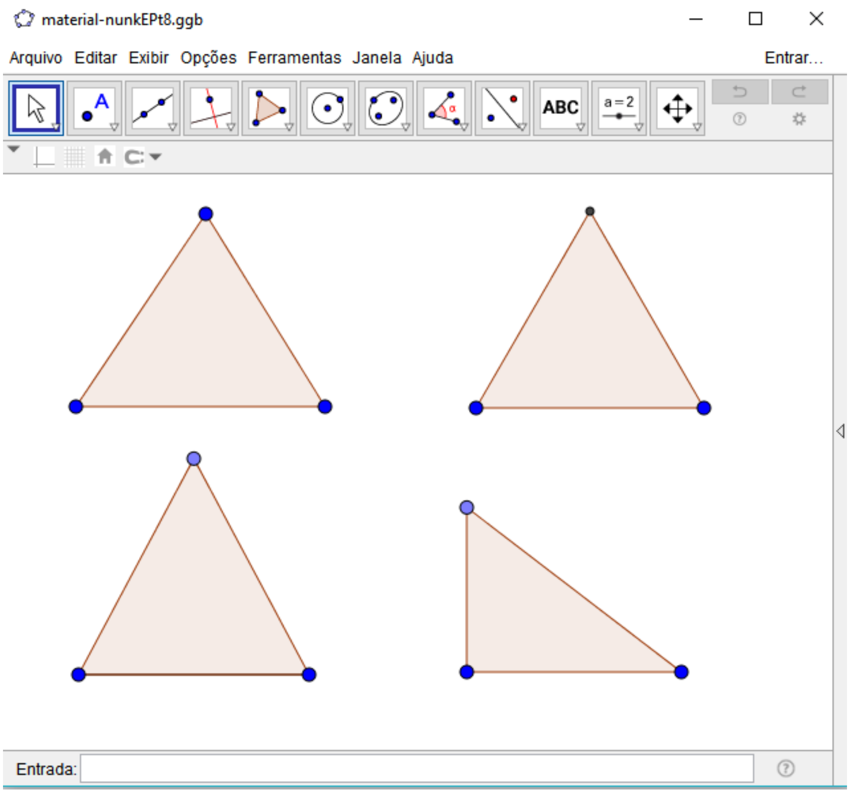


Fonte: Acervo da Autora

Nesta questão, o GeoGebra serviu como apoio, porém não realizaram todas as construções, algumas manipulações no *software* bastaram para compreender o que estava acontecendo. Foi necessário reafirmar que não poderia haver sobreposição de figuras, pergunta que sempre apareceu nas aulas. Após as alunas terminarem, a professora preferiu reafirmar a resposta delas usando a apliqueta. Foi feito o teste uma por uma, mesmo já possuindo a resposta, que era a primeira.

Continuando o encontro, foi solicitado que trabalhassem da mesma forma que trabalharam com os retângulos com triângulos presentes na figura 37.

Figura 37 - Atividade dos triângulos



Fonte: Acervo da autora

Alguns questionamentos foram propostos para orientar o trabalho:

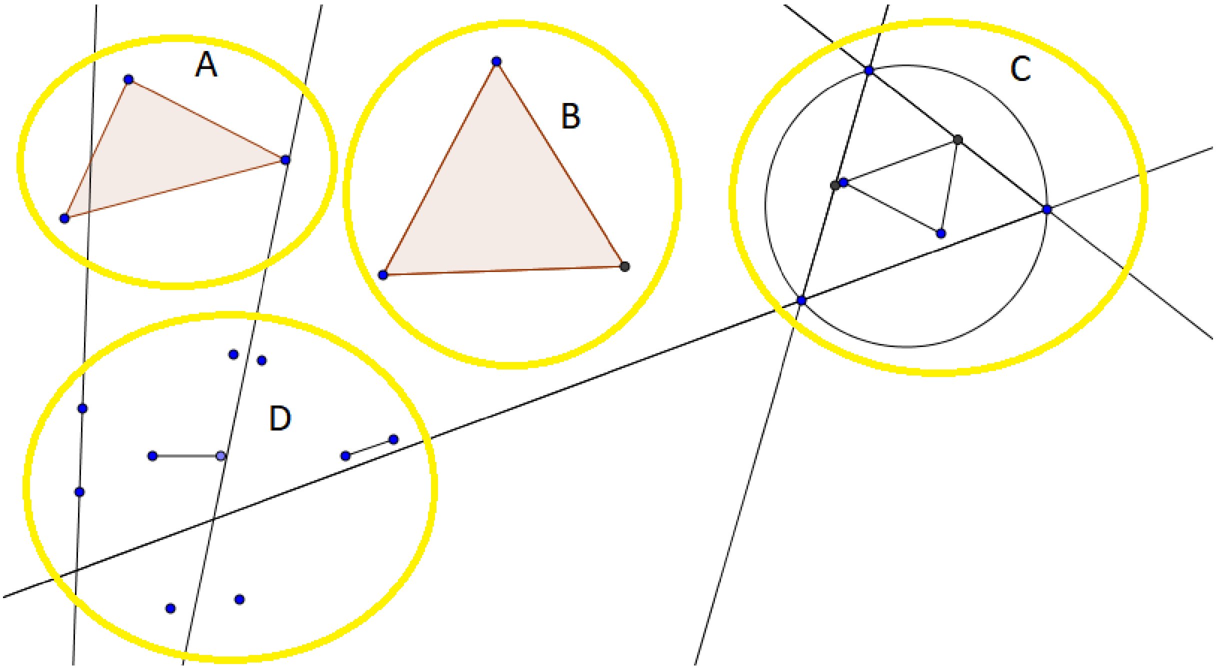
- Após movimentar os pontos, as figuras continuam sendo triângulos?
- Em cada figura, quais propriedades se mantêm?
- Reproduza as construções de modo que os retângulos que construírem se comportem da mesma forma que os já construídos.

Todos os triângulos foram construídos com propriedades diferentes. O primeiro com os pontos livres; o segundo era um triângulo equilátero; o terceiro era um triângulo isósceles e; o último um triangulo retângulo.

A aluna G logo pediu nova explicação de como construir uma reta perpendicular, pois não percebeu que para isso é necessário ter uma reta ou segmento de reta como referência para a construção da reta perpendicular.

As alunas presentes construíram rapidamente o primeiro triângulo por já perceberem que cada um dos três pontos não influenciam os outros pontos (item A da figura 38). Para a construção dos demais triângulos começaram a explorar as ferramentas conhecidas. A aluna A, que havia faltado a aula anterior, explorou todas as ferramentas possíveis, conforme o item D da figura 38, conseguiu construir o triângulo equilátero, item B da figura 38, e pelas suas ideias chegou perto de conseguir o triângulo isósceles, pois teve a ideia de usar o ponto médio conforme os itens C e D da figura 38. A figura 38 mostra as tentativas.

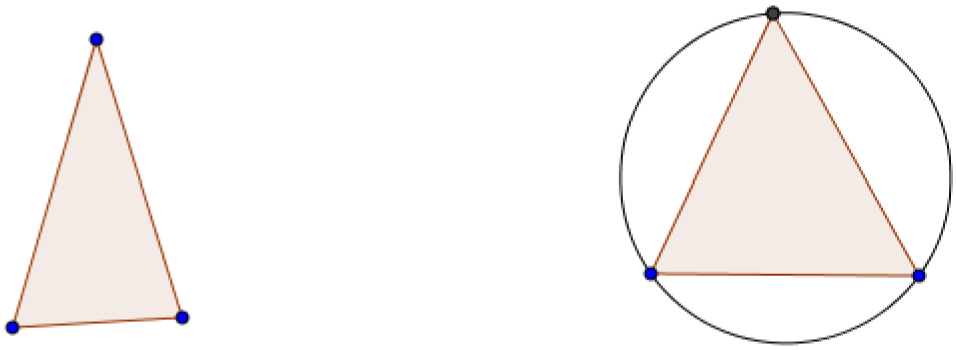
Figura 38 - Resolução da aluna A



Fonte: Acervo da autora

A aluna G explorou as ferramentas, porém conseguiu construir apenas o primeiro triângulo. Sua segunda construção foi feita inscrita em uma circunferência, porém não mantinha nenhuma propriedade; é possível movimentar os três pontos de modo que não influenciem uns aos outros, conforme a figura 39.

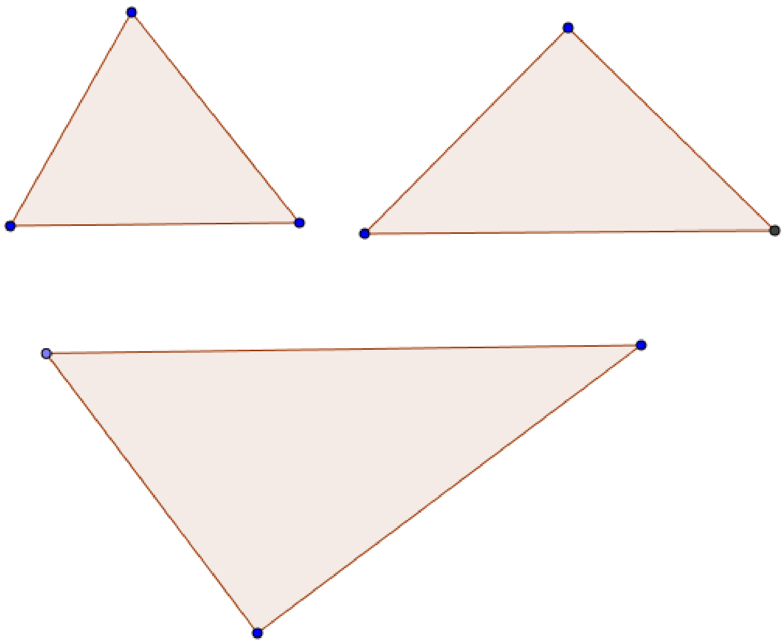
Figura 39 - Resolução da aluna G



Fonte: Acervo da autora

A aluna F construiu um triângulo retângulo isósceles utilizando as ferramentas “Reta perpendicular” e “Circunferência dados o centro e um ponto”, e um triângulo que não mantinha propriedade (figura 40). Porém é possível notar que foi útil como exploração das ferramentas e análise dos pontos, pois as alunas começaram a perceber as possibilidades de utilizar mais de uma ferramenta na tentativa de realizar suas construções. Nessa atividade as alunas não se comunicaram, as três ficaram muito concentradas trabalhando passando do horário de término da aula.

Figura 40 - Resolução da aluna F.



Fonte: Acervo da autora

Esta atividade traz a forma como o GeoGebra torna as construções mais “realistas”, no sentido de que o aluno pode visualizar as possíveis alterações de uma determinada figura geométrica mantendo as propriedades iniciais, assim alterando a percepção sobre o objeto matemático e sua existência no imaginário. Assim como Basso e Notare (2015, p. 9) explicam, “os alunos que incorporam esses recursos para resolver problemas matemáticos, têm em mãos verdadeiros instrumentos matemáticos”.

Para resolver a questão 3, nível 2 de 2007 as alunas usaram a ferramenta polígono que permitia que construíssem retângulos com as medidas que desejassem. Assim, o *software* contribuiu para a resolução desta questão por permitir a flexibilidade quanto às medidas de área e lado dos retângulos possibilitando a experimentação para realizar o encaixe de todos os retângulos dentro do retângulo maior.

Já nas questões 16, nível 2 de 2010, e 27, nível 1 de 2012, observamos que o *software* atendeu a necessidade de auxiliar os alunos na resolução, porém outras tecnologias também poderiam ser usadas com o mesmo fim, como, por exemplo, peças de cartolina. Talvez aqui esteja um exemplo de domesticação do *software* mencionado por Borba, Da Silva e Gadanidis (2015). Basso e Notare (2015) também mencionam sobre o uso de tecnologias apenas para facilitar os procedimentos. No entanto, neste caso não existe uma facilitação, apenas uma transposição de tecnologias, onde o *software* não acrescenta de fato a construção do pensamento matemático.

Nesta aula foi possível notar que as alunas já estavam com mais agilidade e de forma favorável à resolução das questões propostas, assim demonstrando facilidade no uso do *software*. As alunas demonstraram ter compreendido parcialmente os conceitos de quadrado, triângulo, reta paralela e reta perpendicular, fazendo uso destes, porém ainda com insegurança, ou seja, precisando da reafirmação dos conceitos por parte da professora. Elas não possuíam todos os conceitos necessários para a aula, pois foi necessário logo no início da aula explicar o conceito de área. Desta forma, a única expectativa que foi totalmente verdadeira foi quanto ao uso do *software*.

4.4 AULA 4 – USANDO AS FERRAMENTAS II

Esta aula foi preparada para dar continuidade a aula anterior, de modo que as questões pendentes deveriam ser resolvidas pelo grupo e a professora. Também, os alunos deveriam resolver novas questões com o uso do *software*. Para quarta aula foram definidos os seguintes objetivos: manipular as ferramentas do GeoGebra; compreender as funções de cada ferramenta; realizar construções que mantenham suas definições iniciais.

As expectativas para essa aula eram que: os alunos possuem os conhecimentos matemáticos necessários para a aula; os alunos usariam as ferramentas do GeoGebra de forma adequada para realizar construções que os ajudem na resolução das questões e; os alunos seriam capazes de resolver as questões propostas usando apenas a tela de produção sem nenhuma construção pré-elaborada.

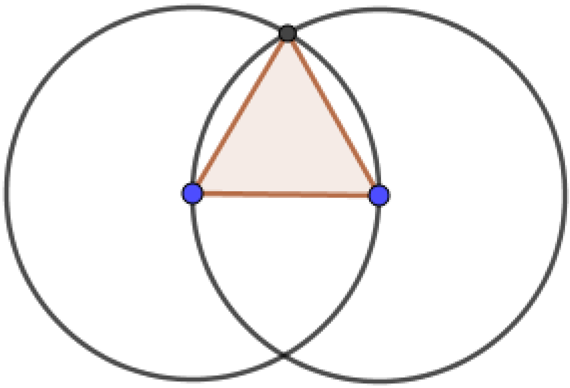
Nesta aula estavam presentes apenas as alunas F e G. A aula começou com a atividade do final da aula anterior, porém com a professora fazendo as construções e questionando as alunas sobre seus conhecimentos e percepções. As alunas foram convidadas a sentarem em torno do computador do professor, este possui a tela maior que os demais computadores.

Primeiro foi salientado que antes de qualquer coisa devemos mover os pontos e ver as dependências entre eles. Ao mover os pontos iniciais da primeira construção, todas concordaram que eram pontos livres de relações com os outros, então a construção foi feita sem maiores problemas.

Para a segunda construção, cujo triângulo era equilátero, foi necessário questioná-las se sabiam o que é um triângulo equilátero, ao que afirmaram que não. Então foi explicado o que é um triângulo equilátero. O mesmo foi feito com o triângulo isósceles. Quando questionadas quanto ao triângulo retângulo as alunas falaram “reto”, demonstraram ter noção de qual triângulo era, mas não sabiam explicar. A aluna G falou que era um retângulo movimentando os dedos. A aluna F afirmou ser um triângulo “compridinho” movimentando os dedos de forma que construiu no ar um triângulo retângulo com o cateto da vertical maior. A professora afirmou que poderia ser “compridinho”, mas também poderia ser pequeno. As alunas afirmaram então não saber e a professora explicou o conceito.

A segunda construção foi do triângulo equilátero (figura 41). Para construir este a professora afirmou ser necessário o uso de uma ferramenta que transfere medida e que para isso usaria o compasso. Questionou se as alunas já haviam usado o compasso, ao que elas afirmaram que não. Então a professora construiu na área de produção do GeoGebra um círculo com a ferramenta “Circunferência dado o centro e um ponto”, e questionou sobre a distância do centro a qualquer ponto da circunferência. A aluna G afirmou ser a mesma medida. Explicou a necessidade de uma segunda circunferência passando pelos mesmos pontos, para se obter os três pontos com a mesma distância entre eles. Explicou isso mostrando as distâncias até o centro, as alunas demonstraram compreender o que estava sendo feito.

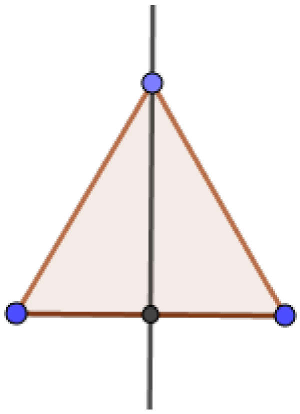
Figura 41 - Resolução em grupo



Fonte: Acervo da autora

Para a construção do triângulo isósceles (figura 42) a professora movimentou os pontos para que as alunas percebessem que o único ponto que não possuía movimentação livre passava exatamente entre os outros dois pontos. Quando questionadas sobre qual ferramenta se usava para construir um ponto no centro a aluna G afirmou não saber e logo em seguida indicou a ferramenta “Ponto médio” na barra de ferramentas. Então foi construído um segmento entre os dois pontos iniciais, definiu-se o ponto médio e, movimentando-se o ponto do triângulo que deveria ser reproduzido, mostrou-se que aquele ponto corria exatamente sobre uma reta perpendicular passando pelo ponto médio. Então foi definido um ponto qualquer sobre essa reta e construído o triângulo.

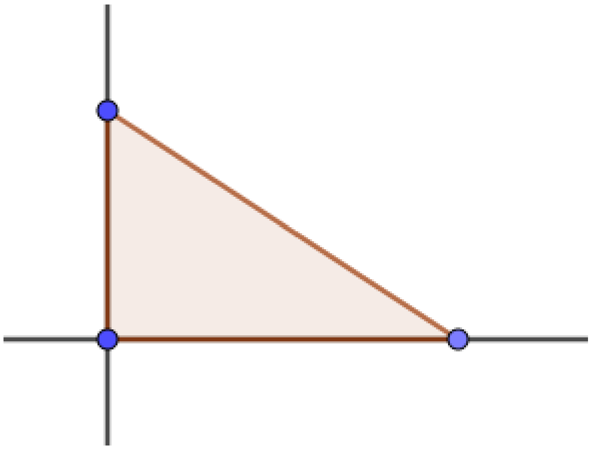
Figura 42 - Resolução em grupo



Fonte: Acervo da autora

Para construir o triângulo retângulo (figura 43), novamente os pontos foram movimentados para ver o que acontecia. Então, as alunas foram questionadas sobre que ferramenta deveríamos usar, ao que a aluna G afirmou ser a reta perpendicular. Desta forma, a construção foi feita. A professora aproveitou e apresentou a possibilidade de fixar o ponto na tela, pois poderia ser útil para as próximas construções que elas viriam a construir.

Figura 43 - Resolução em grupo

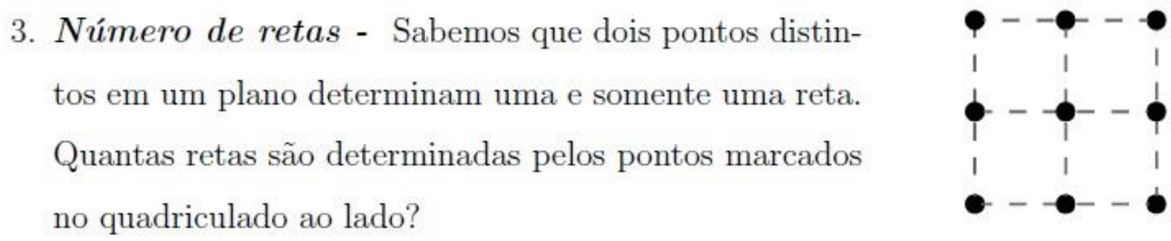


Fonte: Acervo da autora

As alunas foram encaminhadas para os computadores onde a questão que deveriam resolver já estava aberta. Foi explicado que nesta aula não teriam uma construção pronta para manipular, que deveriam realizar suas próprias construções.

A questão 3, nível 2 de 2008 (figura 44) foi explicada. Após um tempo as alunas construíram pontos e fixaram estes pontos, porém se sentiram incomodadas por estarem em azul, pois esta cor é para pontos móveis, então foi mostrada a possibilidade de alterar a cor desses pontos.

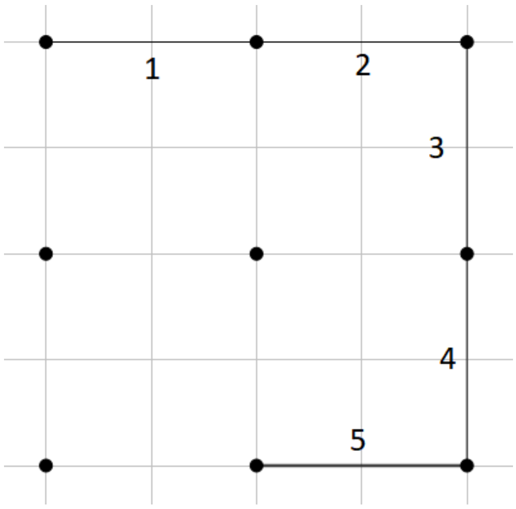
Figura 44 - Questão 3, nível 2


3. ***Número de retas*** - Sabemos que dois pontos distintos em um plano determinam uma e somente uma reta. Quantas retas são determinadas pelos pontos marcados no quadriculado ao lado?

Fonte: Banco de Questões de 2008- p.37

Quando elas começaram a colocar retas na construção que fizeram, estavam na realidade colocando segmentos de reta e realizando a contagem conforme a mostra a figura 45.

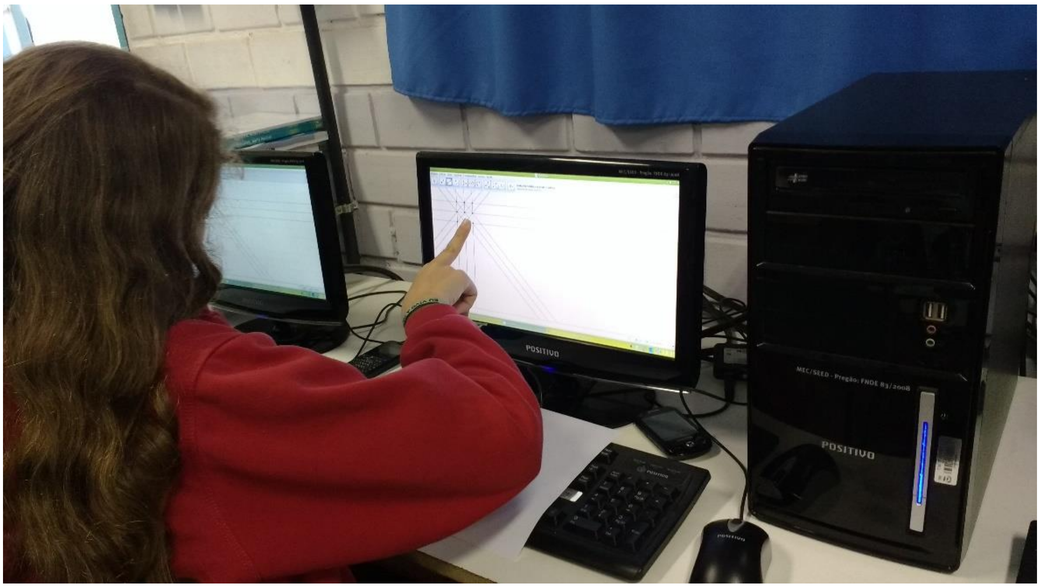
Figura 45 - Resolução alunos



Fonte: Acervo da autora

Foram questionadas se sabiam o que é reta, a aluna F afirmou: “É a perpendicular, aquela, sora?”. Então foi mostrado que elas estavam usando a ferramenta “Segmento de reta” e que deveriam usar a “Reta”. A partir daí começaram a traçar as retas conforme a figura 46.

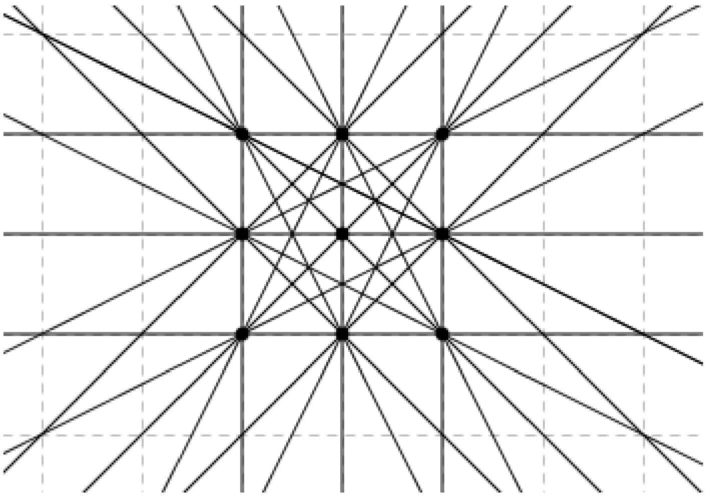
Figura 46 - Resolução alunos



Fonte: Acervo da autora

Foi afirmado que havia mais segmentos, conforme construíam retas e contavam, até chegarem na construção apresentada na figura 47.

Figura 47 - Resolução alunos



Fonte: A autora

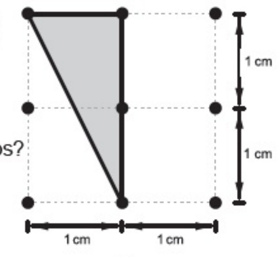
No entanto tiveram dificuldades em contar, em que posição iniciar e terminar a contagem. Inicialmente afirmaram 21 retas, pois estavam contando a primeira reta da contagem duas vezes. Contaram novamente e chegaram a resposta correta 20. Então a professora sugeriu separar as retas por tipos e realizaram a contagem separando as retas conforme a inclinação para confirmar a resposta.

Para resolver a segunda questão da tarde, a questão 5, nível 2, da prova da fase 2 de 2015 (figura 48) iniciaram fixando pontos. Perceberam que era possível primeiro construir os pontos e após fixar e pintar todos na mesma janela de propriedades.

Figura 48 - Questão 5, nível 2, fase 2

5. Em um quadrado de lado 2 cm foram marcados nove pontos, conforme a figura. Triângulos podem ser desenhados com seus vértices nesses pontos. A figura mostra um deles, com área igual a 1 cm^2.

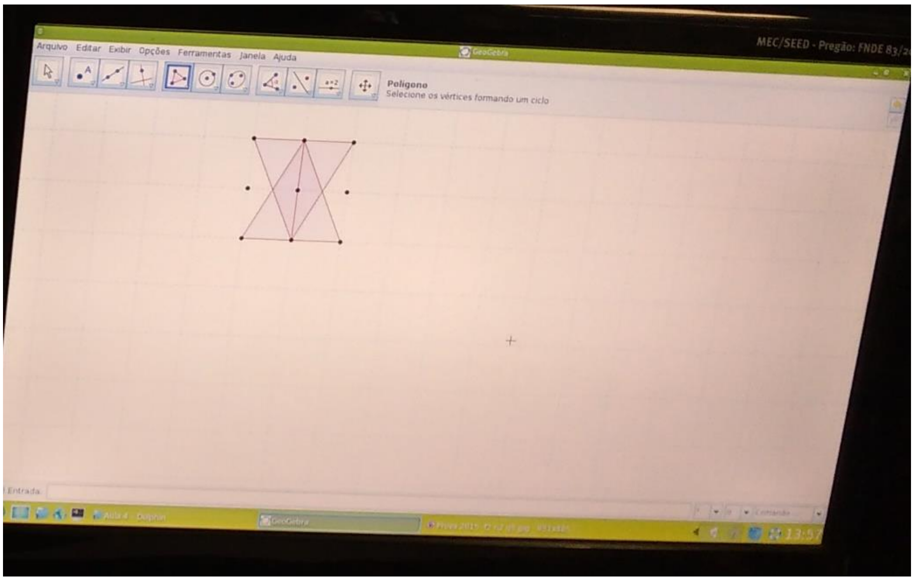
a) Quantos triângulos congruentes ao da figura possuem seus vértices nos pontos marcados?



Fonte: Prova nível 2, fase 2 de 2015

Começaram colocando todas as possibilidades na mesma construção conforme figura 49.

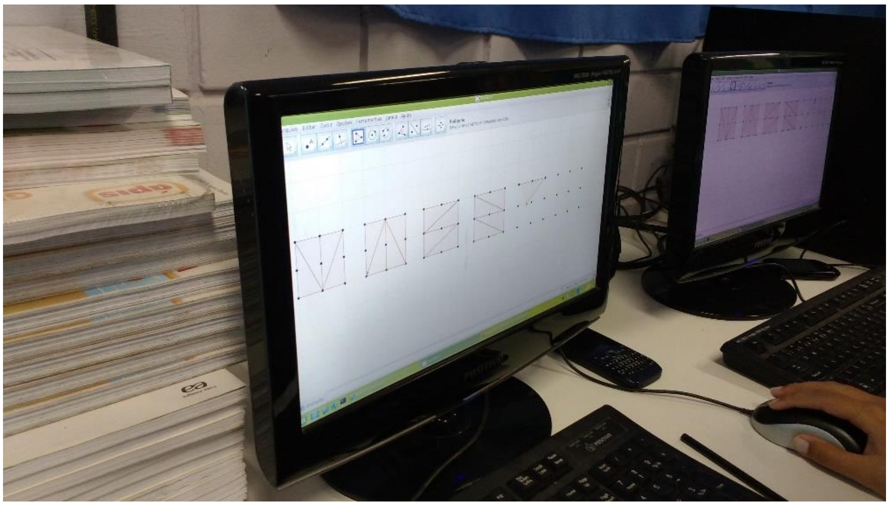
Figura 49 - Resolução alunos



Fonte: Acervo da autora

As alunas começaram a construir e anotar em um papel cada possibilidade: “1+1+1”. A professora sugeriu que fizessem mais de uma construção. As alunas aderiram à ideia, fazendo a construção conforme mostra a figura 50, concluindo a resposta final.

Figura 50 - Resolução alunos



Fonte: Acervo da autora

Então foi passada a última questão da tarde, a questão 19, nível 2 de 2009 (figura 51), novamente uma questão com contagem.

Figura 51 - Questão 19, nível 2, fase 1

19. Com exatamente dois segmentos de reta, podemos fazer figuras diferentes unindo os vértices de um pentágono. Cinco dessas figuras estão ilustradas a seguir.

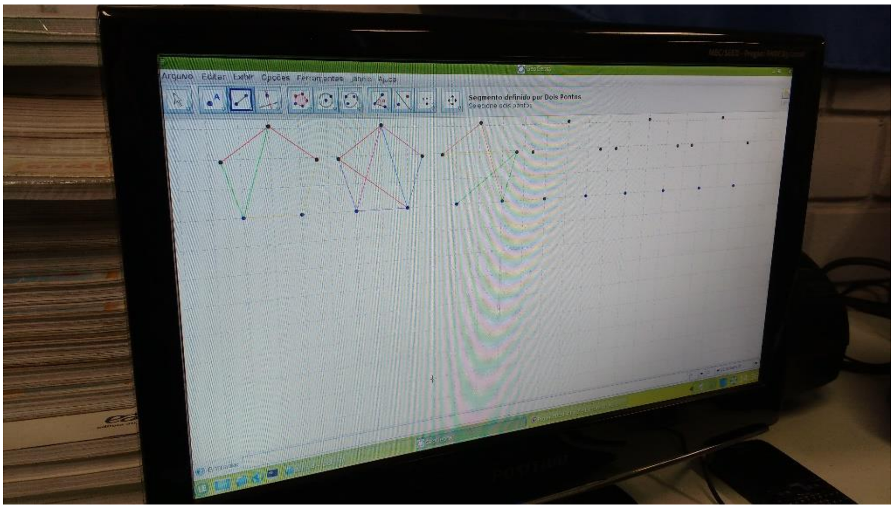
Incluindo essas cinco, quantas figuras diferentes podemos fazer desse modo?

A) 20
B) 30
C) 35
D) 40
E) 45

Fonte: Prova nível 2, fase 1 de 2009

Nesta atividade as alunas logo perceberam que seria melhor construir vários pontos para se organizar melhor. Também perceberam que poderiam usar a ferramenta “Polígonos regulares” para construir os pontos do pentágono regular. A aluna G descobriu as cores para organizar melhor as possibilidades e poder colocar mais de uma possibilidade na mesma construção (figura 52). A aula terminou antes que pudessem terminar a atividade.

Figura 52 - Resolução alunos



Fonte: Acervo da autora

Na questão 3, nível 2 de 2008, a contribuição do *software* está na possibilidade de traçar as retas de forma impecável e poder apaga-las e recriá-las conforme a necessidade, o que as alunas utilizaram para contagem. No entanto essa atividade poderia ter sido realizada sem maiores problemas com papel, lápis e régua. Desta forma, podemos afirmar que para este tipo de questão o GeoGebra não apresenta uma contribuição significativa para construção do conhecimento matemático, ou seja, o *software* não acrescenta como tecnologia inovadora.

Na questão 5, nível 2, da prova da fase 2 de 2015, e na questão 19, nível 2 de 2009 o uso do *software* foi interessante pelo fato de as alunas conseguirem organizar suas ideias de uma forma mais estruturada com as possibilidades para a contagem. Nestas questões o GeoGebra possibilitou maior agilidade para realização das atividades. No entanto, também são questões que se podem resolver com lápis, papel e régua, ou ainda, no caso da questão 5, com recortes de peças de cartolina. Logo, a contribuição do GeoGebra se limita a agilidade para resolução das questões.

As alunas demonstraram adquirir ao longo da aula domínio das ferramentas para realizar suas construções, surgindo apenas dúvidas quanto a novas possibilidades do que poderiam fazer, como o uso de cores e fixar objetos. Logo, as alunas usaram as ferramentas do GeoGebra de forma adequada para realizar construções que as ajudassem na resolução das questões. Nesta aula houve a necessidade de explicar o que é uma reta, logo a expectativa de que as alunas teriam os conhecimentos matemáticos necessários para a aula não foi verdadeira. As alunas conseguiram resolver as questões propostas usando a tela de produção do GeoGebra, porém na última questão usaram o papel para auxiliá-las na contagem de possibilidades.

4.5 AULA 5 – REALIZANDO CONSTRUÇÕES

Esta aula foi elaborada de modo que os alunos usassem o que aprenderam para criar construções no GeoGebra que auxiliassem os colegas na resolução das questões. Ou seja, eles fariam construções para os colegas usarem na resolução da questão.

Os objetivos foram: manipular as ferramentas do GeoGebra; compreender as funções de cada ferramenta; realizar construções que mantenham suas definições iniciais.

As expectativas para esta aula eram que: os alunos possuíam os conhecimentos matemáticos necessários para a aula; os alunos usariam as ferramentas do GeoGebra de forma adequada para realizar construções; os alunos seriam capazes de construir propostas usando apenas a tela de produção sem nenhuma construção pré-elaborada para auxiliar os colegas na resolução das questões e; os alunos seriam capazes de resolver as questões usando as construções feitas por outros colegas.

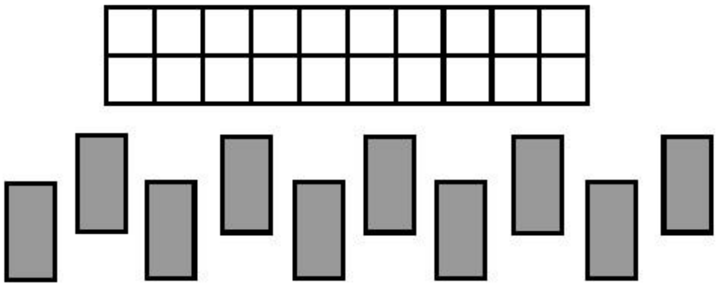
Nesta aula estavam presentes as alunas A, F e G. Os computadores já estavam preparados com as atividades que deveriam desenvolver. Foi explicado que esta aula seria um pouco diferente, que elas produziriam algo no GeoGebra que auxiliasse outra colega a resolver a questão.

A aluna G ficou com a questão 22, “O presente do pequeno Abel” (figura 53). Como a questão trata de um tabuleiro com dimensões 2xn a aluna precisou de explicação sobre a representação. Foi pedido que construísse algo apenas para o item (a) da questão para que o seu tempo de produção fosse parelho com o das colegas.

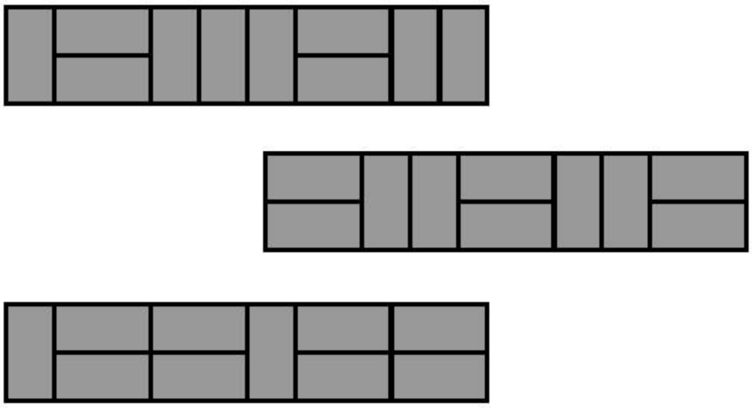
Figura 53 - Questão 22, nível 3

22 ***O presente do pequeno Abel***

O pequeno Abel ganhou de presente um tabuleiro $2 \times n$ e n fichas de tamanho 2×1. Por exemplo, a figura a seguir mostra o caso em que $n = 10$, isto é, quando Abel tem um tabuleiro 2×10 e 10 fichas de tamanho 2×1.



Ele brinca de preencher o tabuleiro usando as n fichas. Por exemplo, para $n = 10$ Abel poderia preenchê-lo dos modos ilustrados a seguir:



Observe, no entanto, que existem muitas outras maneiras pelas quais Abel pode preencher o seu tabuleiro.

a) Calcule o número total de maneiras pelas quais Abel pode preencher o seu tabuleiro nos casos em que $n = 1$, $n = 2$ e $n = 3$, isto é, no caso em que os tabuleiros têm dimensões 2×1, 2×2 e 2×3.

b) Seja a_n a quantidade de maneiras pelas quais Abel pode preencher um tabuleiro $2 \times n$ utilizando n fichas 2×1. Mostre que $a_{10} = a_9 + a_8$.

c) Calcule o número total de maneiras pelas quais Abel pode preencher o seu tabuleiro quando $n = 10$.

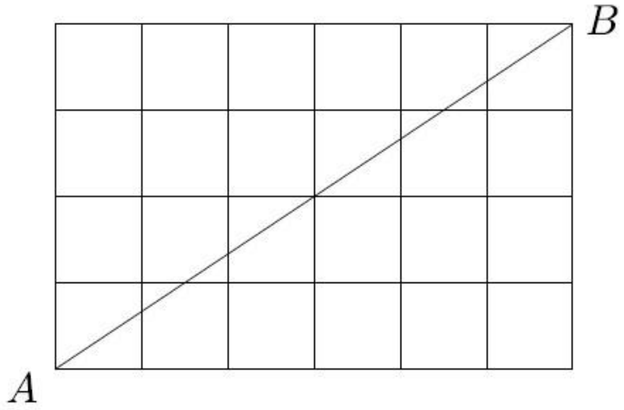
Fonte: Banco de Questões de 2013- p.67

A aluna A ficou com a questão 23, “A diagonal do quadriculado” (figura 54). Também precisou de explicação sobre o que a questão estava pedindo.

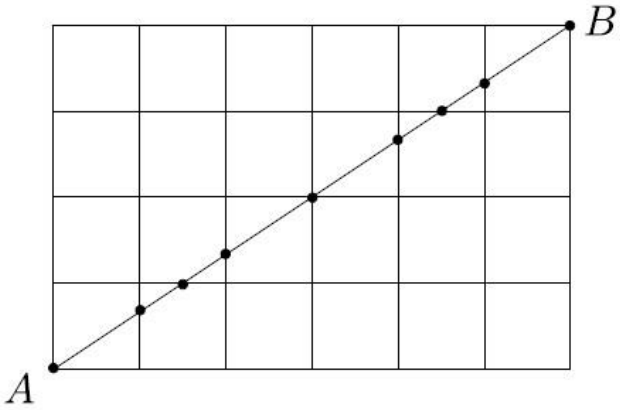
Figura 54 - Questão 23, nível 3

23 *A diagonal do quadriculado*

No seguinte papel, foi desenhado um quadriculado de 4×6 e depois traçada a diagonal de A a B.



Observe que a diagonal AB intersecta o quadriculado em 9 pontos:

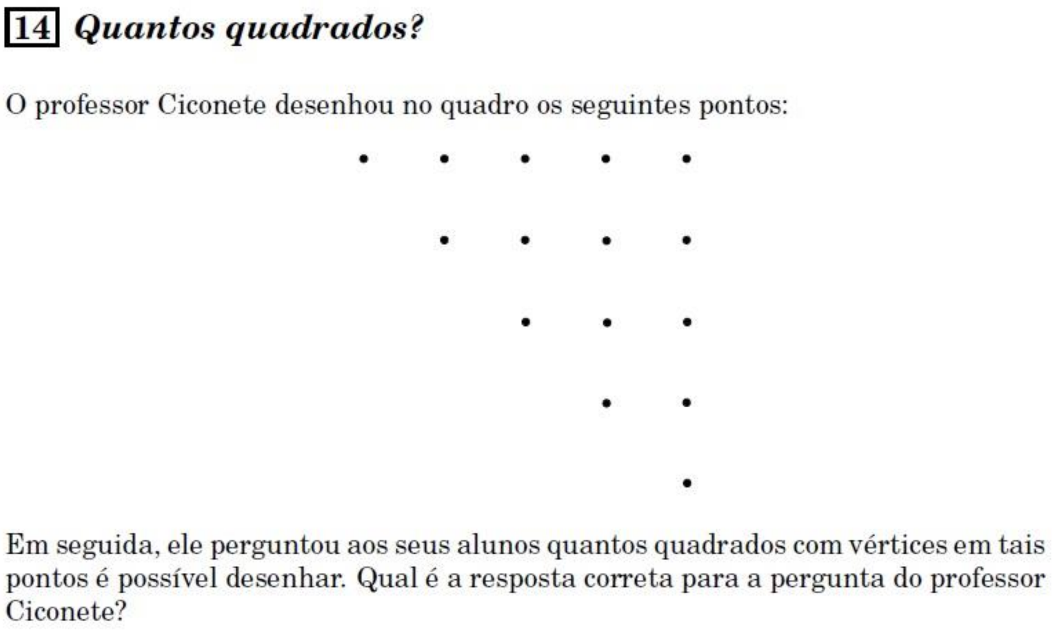


Se o quadriculado fosse de tamanho 12×17, em quantos pontos a diagonal AB intersectaria o quadriculado?

Fonte: Banco de Questões de 2014- p.62

A aluna F ficou com a questão 14, "Quantos quadrados" (figura 55). Não precisou de muita explicação, logo fez a construção.

Figura 55 - Questão 14, nível 2



14 ***Quantos quadrados?***

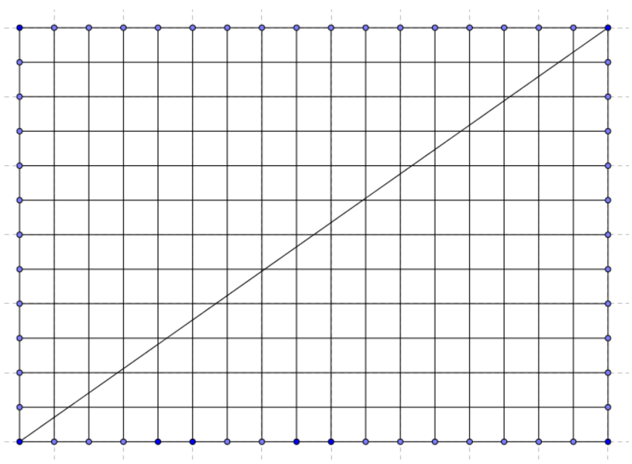
O professor Ciconete desenhou no quadro os seguintes pontos:

Em seguida, ele perguntou aos seus alunos quantos quadrados com vértices em tais pontos é possível desenhar. Qual é a resposta correta para a pergunta do professor Ciconete?

Fonte: Banco de Questões de 2013- p.42

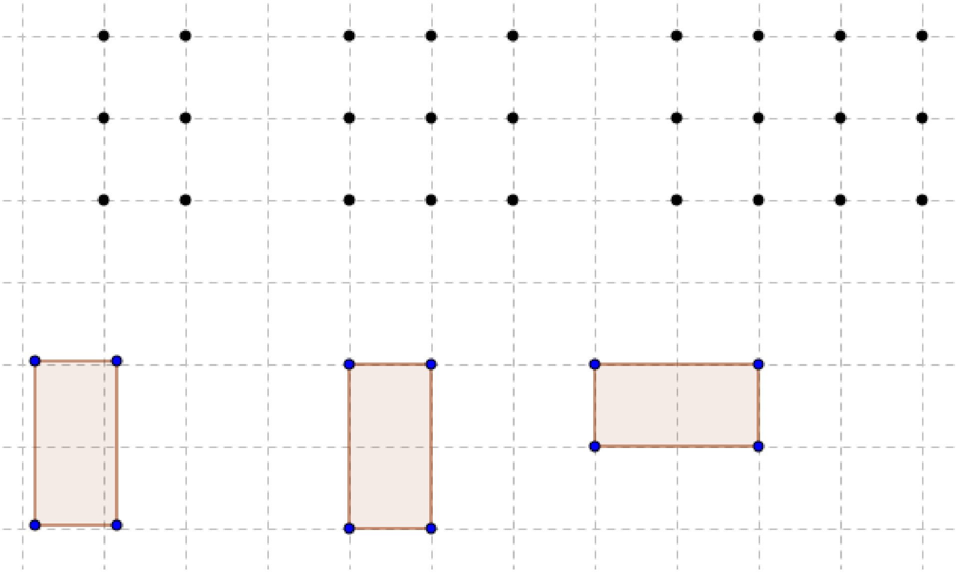
A aluna A precisou de mais ajuda quanto ao uso das ferramentas pelo fato de não ter participado da aula destinada ao conhecimento das ferramentas. A professora tentou fazer com que as alunas se ajudassem ao invés de pedir para ela. Isso ocorreu com a aluna G, pedia que a F ajudasse, porém esta também ficou perdida na questão. Assim, a professora teve que explicar a questão novamente e, após algum tempo, ela conseguiu fazer. As construções feitas para auxiliar as colegas na resolução das questões seguem nas figuras 56, 57 e 58:

Figura 56 - Resolução da aluna A



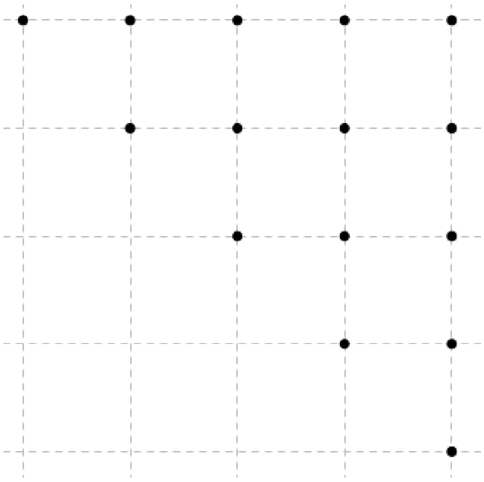
Fonte: Acervo da autora

Figura 57 - Resolução da aluna G



Fonte: Acervo da autora

Figura 58 - Resolução da aluna F

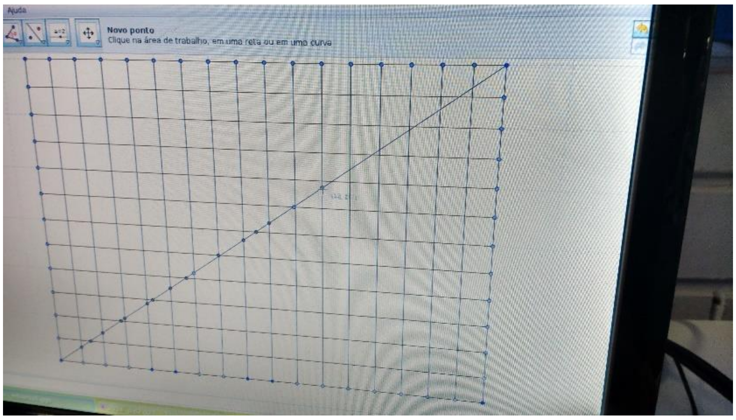


Fonte: Acervo da autora

Então foi solicitado que trocassem de lugar para resolver uma das questões.

A aluna G deveria resolver a questão preparada pela aluna A. Novamente a aluna G precisou de explicação sobre o que era intersecção, o que já havia sido trabalhado anteriormente. A professora explicou novamente tentando sanar a dificuldade. A construção da aluna A facilitou a resolução da questão pela G, segue na figura 59 que mostra a aluna marcando os pontos nas intersecções.

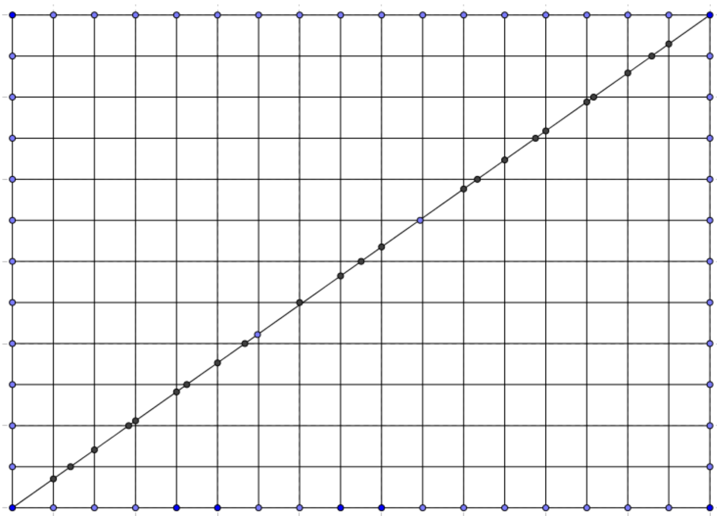
Figura 59 - Resolução da aluna G



Fonte: Acervo da autora

Após marcar todos os pontos que conseguiu ver perguntou se estava pronto. A professora afirmou que havia mais intersecções e pediu para as outras alunas ajudarem a G, se viam algo a mais. A aluna F percebeu mais intersecções e mostrou para colega. Essa questão demorou um pouco para ser solucionada devido à falta do conceito sobre interseção de retas. A figura 60 apresenta a solução final da aluna.

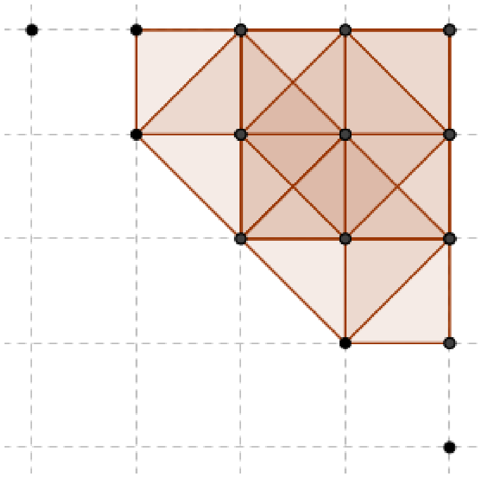
Figura 60 - Resolução alunos



Fonte: Acervo da autora

A aluna A deveria resolver a questão preparada pela aluna F. A aluna A demonstrou um pouco de dificuldade sobre o que usar no *software* para resolver a questão. Então, a professora afirmou haver uma ferramenta mais interessante para fazer a atividade e questionou o grupo se elas sabiam qual era. A aluna F afirmou que sim, e mostraram o caminho para chegar na ferramenta que era o “Polígono regular”. Após a resolução da questão, a construção ficou como na figura 61.

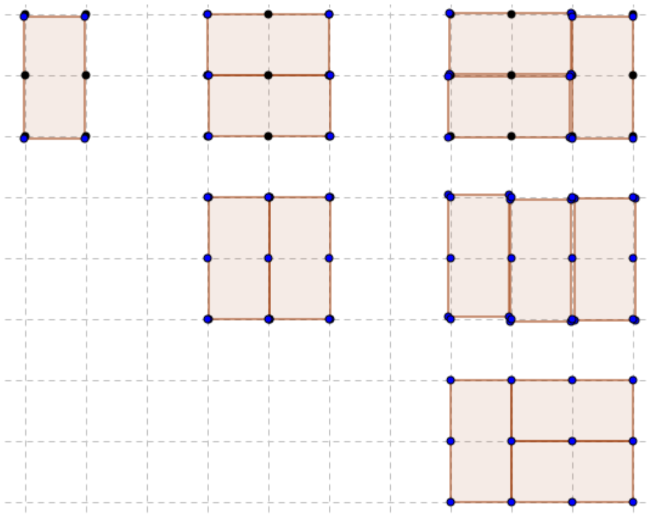
Figura 61 - Resolução da aluna A



Fonte: Acervo da autora

Finalmente, a aluna F deveria resolver a questão preparada pela aluna G. A figura 62 mostra a construção da aluna G após ser usada pela aluna F. Ela reclamou que a construção inicial não foi suficiente para resolver de forma organizada a questão, pois teve que construir mais retângulos para poder apresentar todas as possibilidades.

Figura 62 - Resolução da aluna F



Fonte: Acervo da autora

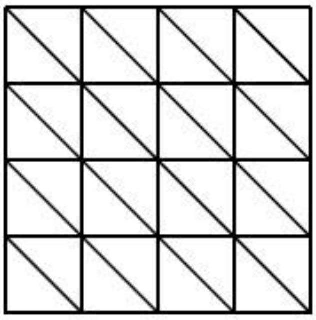
Continuando com o encontro, após terminarem as primeiras questões, as alunas começaram a realizar outra construção para a outra colega resolver. A sugestão de não construir para a mesma colega foi dada pela aluna F, que percebeu que a questão que a aluna A havia recebido era mais curta e daria menos trabalho que a anterior (não foi o que aconteceu).

A aluna A recebeu a questão 2, “Contando triângulos”, (figura 63). A aluna F ficou com a questão 17 (figura 64), e a aluna G ficou com a questão 8, “Tridominós”, (figura 65).

Figura 63 - Questão 2, nível 1

2 ***Contando triângulos***

Quantos triângulos existem na figura abaixo?

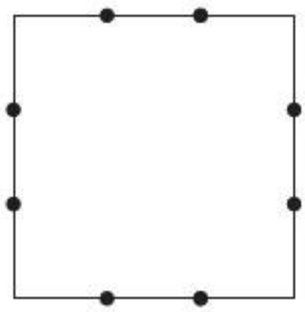


Fonte: Banco de Questões de 2015- p.14

Figura 64 - Questão 17, nível 2, fase 1

17. Os oito pontos destacados na figura dividem os lados do quadrado em três partes iguais. Quantos triângulos retângulos podem ser traçados com os três vértices nesses pontos?

A) 8
B) 12
C) 16
D) 24
E) 32

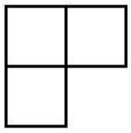


Fonte: Prova nível 2, fase 1 de 2010

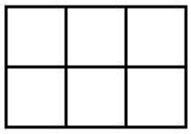
Figura 65 - Questão 8, nível 3

8 ***Tridominós***

Um tridominó é a figura a seguir, que é composta por três quadrados.



Podemos juntar tridominós para formar figuras. Por exemplo, podemos juntar dois tridominós para formar um retângulo 2×3, conforme observa-se abaixo:



a) Mostre que não é possível juntar tridominós (sem sobrepô-los) de maneira a formar um quadrado 3×3.

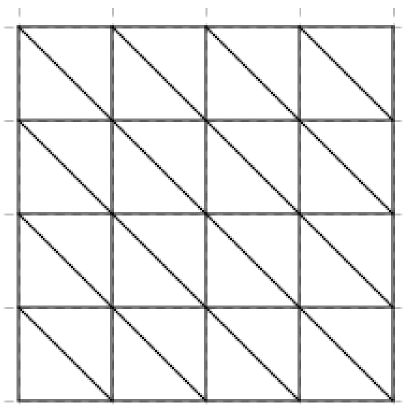
b) Mostre que não é possível juntar tridominós (sem sobrepô-los) de maneira a formar um quadrado 4×4.

c) Qual o número mínimo de tridominós necessários para formar um quadrado? Justifique.

Fonte: Banco de Questões de 2013- p.58

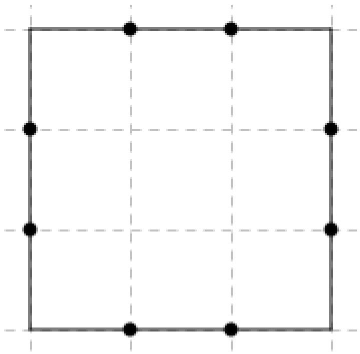
Houve alguns questionamentos sobre as questões, todos respondidos e explicados. As alunas F e A não tiveram maiores problemas com a construção. Seguem as figuras 66 e 67 com a produção das alunas.

Figura 66 - Resolução da aluna A



Fonte: Acervo da autora

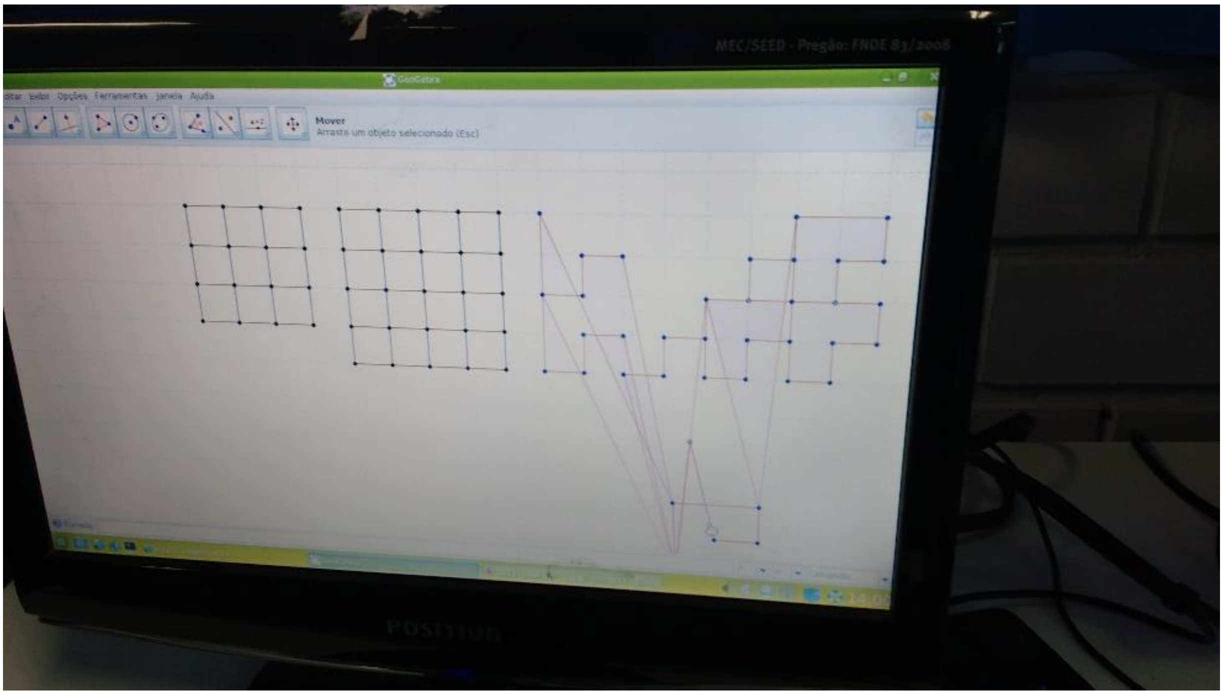
Figura 67 - Resolução da aluna F



Fonte: Acervo da autora

A aluna G demorou mais por ter realizado uma construção mais elaborada e por ter tido um contratempo: ela descobriu que não deveria usar o mesmo ponto para construir duas peças diferentes para sua montagem, pois quando movia uma as outras peças se deformavam conforme a figura 68.

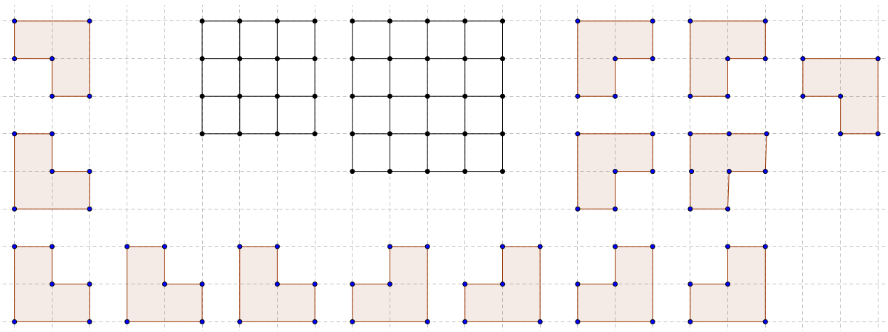
Figura 68 - Resolução da aluna G



Fonte: Acervo da autora

Então, ela teve que refazer as peças. Na figura 69 segue a construção final.

Figura 69 - Resolução final da aluna G

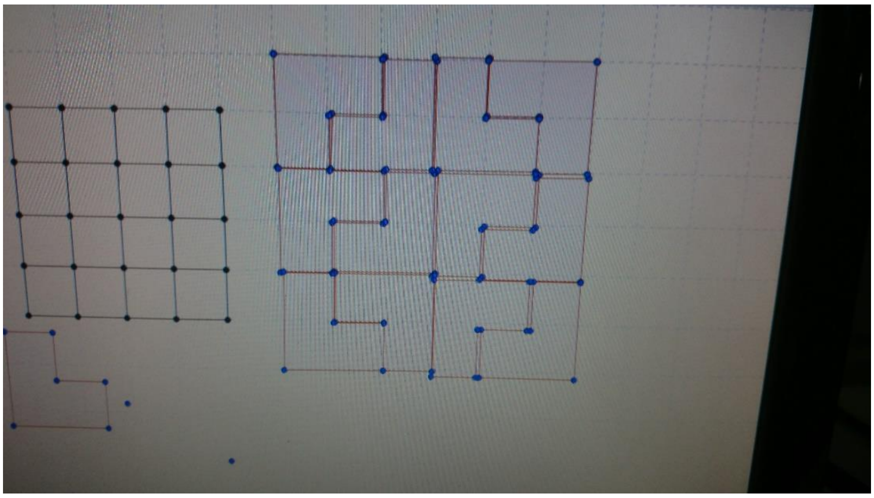


Fonte: Acervo da autora

Novamente as alunas trocaram de lugar para resolver as questões.

A aluna A deveria resolver a questão que G preparou. A aluna A logo respondeu não ser possível preencher um quadrado 3x3 com tridominós. Quando questionada sobre o porquê respondeu ser porque sempre sobra um quadradinho. Após trabalhar um pouco mais na questão, ela concluiu que não era possível cobrir um tabuleiro 3x3 e 4x4 com tridominós, e realizou a construção com os tridominós de um quadrado 6x6 cobrindo todo ele e sem sobrar partes dos tridominós. Como a aluna não havia tentado cobrir o quadrado 5x5, a professora a questionou sobre essa possibilidade, pois como queria o menor quadrado que seria possível construir com tridominós, faltava verificar apenas este para ter certeza que era o 6x6. Então após tentar percebeu que o menor quadrado que poderia ser construído com tridominós é o 6x6 conforme a figura 70.

Figura 70 - Resolução da aluna A



Fonte: Acervo da autora

Embora falte vocabulário matemático para a aluna explicar suas ideias é possível perceber que as ideias que apresentou indicam um amadurecimento no que se refere ao nível de desenvolvimento do pensamento matemático, conforme descrito por Gutiérrez (1996).

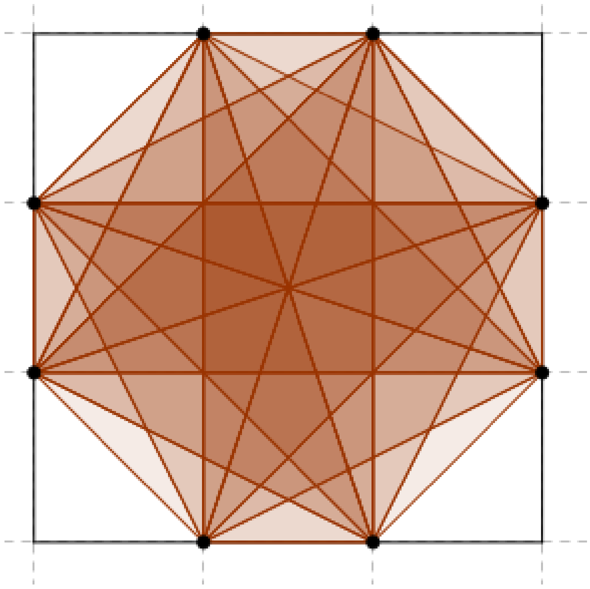
A aluna F deveria resolver a questão preparada por A. Ela usou a sugestão de construir mais figuras como a que a colega havia construído para conseguir organizar as possibilidades e, pela primeira vez, surgiu uma organização separando as figuras por tamanhos. Conforme a figura 71.

Figura 71 - Resolução da aluna F

Fonte: Acervo da autora

A aluna G deveria resolver a questão preparada por F. A aluna G concluiu logo a solução, porém não havia considerado todas as possibilidades. Novamente foi necessário sugerir que usasse mais modelos para organizar melhor sua solução, no entanto não usou essa sugestão. Então, a aluna enxergou um quadrado, com dúvida se era uma resposta válida. A professora questionou, “Mas a metade dele não é um (triângulo retângulo)?” E a aluna: “Vale?” A professora respondeu que se era um triângulo retângulo valia. Quando a aluna apresentou a resposta, ela já havia encontrado todas as possiblidades, porém sua contagem não estava correta. Ela precisou de ajuda para a contagem, pois construiu tudo sobreposto conforme a figura 72.

Figura 72 - Resolução alunos

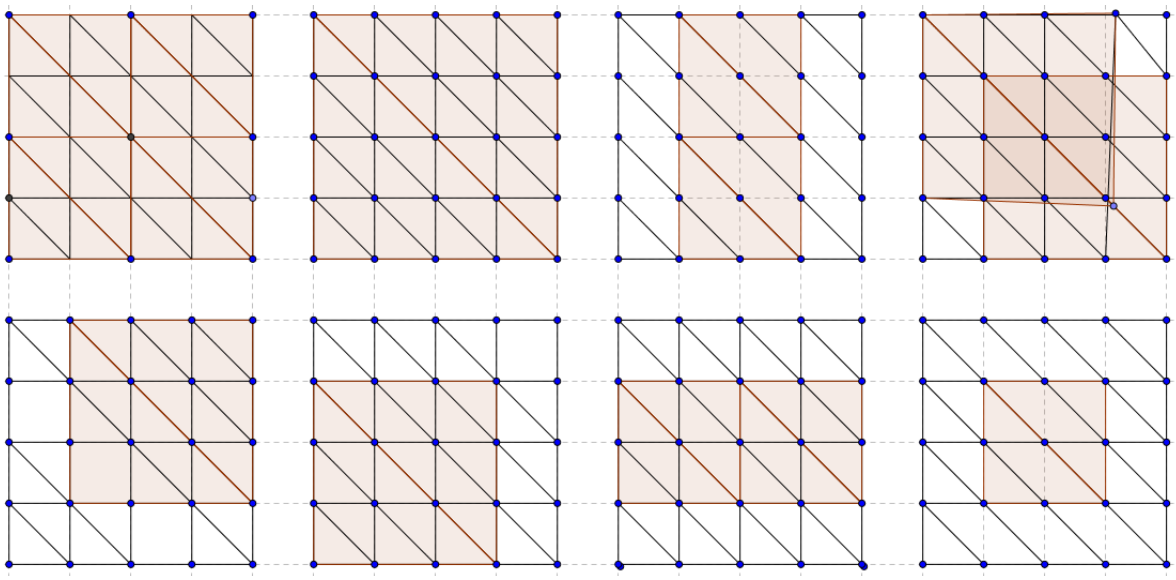


Fonte: Acervo da autora

Para facilitar a contagem, a professora ajudou construindo tudo novamente por tipos, neste caso os tipos eram os retângulos e quadrados e os triângulos que cada um possuía, pois os triângulos retângulos eram a metade destes. Logo a aluna concluiu 24 triângulos retângulos.

A contagem dos triângulos da questão da aluna F começou a ficar complicada para enxergar todas as possibilidades, então pediu ajuda. A professora sugeriu que as colegas que já haviam terminado ajudassem, então a questão seguiu sendo resolvida pelo grupo, alunas e professora. A professora indicando que ainda haviam triângulos não visualizados e as alunas tentando enxergá-los. Com todas trabalhando na questão a aluna chegou na solução presente na figura 73:

Figura 73 - Resolução das alunas



Fonte: Acervo da autora

Com base nos dados apresentados, é possível perceber que as alunas nesta etapa já estão organizando as informações antes de concluir uma resposta. Desta forma, nota-se que elas estão compreendendo a ideia de contagem como possibilidades. Logo, existe uma evolução no pensamento matemático como prevê o PCN (1998) e as ideias de Morgado et al. (1991).

A partir das ideias de Gravina e Basso (2012), é possível perceber que o *software* contribuiu na visualização das questões propostas pelo fato de as alunas observarem a questão inicial, um desenho estático, a representação prototípica (GRAVINA, SANTAROSA, 1996), enquanto no GeoGebra a atividade se tornou dinâmica e manipulável. A influência dos seres humanos em um determinado *software* torna possível moldar a forma como outros humanos aprendem, de forma que o *software* altera a forma como se pensa, modificando a linearidade do pensamento que ocorreria sem este. Assim, as alunas estão interagindo com o *software* e o *software* com elas, permitindo que a interação de uma aluna chegue na outra, conforme Borba (2007). Ou seja, a forma como o *software* a fez pensar chegue na outra colega através do próprio *software*. Logo, o que há de diferente nestas questões é o fato de que elas mesmas tiveram que criar algo para auxiliar a resolução das questões por outra colega.

Borba (2002, p. 251) entende a informática como “uma mídia que está transformando a forma como produzimos conhecimento e que modifica de maneira qualitativa o agente do conhecimento". Ou seja, temos mais de um agente neste processo de aprendizagem, são eles: as alunas, o software e a professora. Assim, temos um coletivo pensante formado por humanos e não-humanos (Borba, 2001). De modo, que as alunas utilizaram o software para organizar seus pensamentos, para que em seguida, essa organização já feita, auxiliasse na organização do pensamento da colega para chegar de fato à solução. Assim, o software auxiliou na reorganização do pensamento, e não substituiu as alunas como seres pensantes (Borba, 2001).

No entanto, a resolução em si destas questões poderia ter sido feita utilizando de outras tecnologias, assim, a contribuição do *software* se limita ao desafio de realizar construções que se comportem conforme esperado sem prejudicar a colega que irá utilizá-la após. As questões que realmente desafiaram as alunas foram as questões que necessitavam de peças para montagem.

É importante destacar que as construções das alunas não são estáveis sob a ação do movimento, perdendo forma e propriedade são sofrer a ação do "arrastar". Logo, elas realizavam os movimentos possíveis tomando cuidado para que não ocorressem deformações, e também, usaram muito a ferramenta de fixar os pontos para evitar problemas quanto às formas construídas. No entanto, as alunas estão inseridas em um processo de aprendizagem.

Esta aula foi muito produtiva pelo fato de as alunas terem que usar os conceitos vistos até aqui e relembrá-los. O uso do *software* foi mais interessante para elas, por estarem produzindo umas para as outras. Demonstraram ter gostado deste modelo de aula. As alunas ainda não possuíam os conhecimentos matemáticos necessários para a aula, pois demonstraram não ter compreendido o conceito de intersecção de retas. As alunas usaram as ferramentas do GeoGebra com mais segurança, não sendo mais necessário estar explicando o funcionamento das ferramentas, exceto pela aluna A que havia faltado na aula sobre as ferramentas. As alunas conseguiram fazer construções no GeoGebra que auxiliaram as colegas no momento de solucioná-las, porém algumas tiveram necessidade de fazer mais construções para conseguir concluir as soluções. Sendo a primeira vez que produziram algo pensando em outra pessoa resolver, acredito que tenha sido satisfatório, pois obtiveram ideias interessantes, como a construção de peças para montagem do quebra cabeça de tridominós. Finalmente, as alunas foram capazes de resolver as questões usando as construções feitas pelas colegas, mesmo que tenham tido necessidade de reproduzir as construções mais vezes.

4.6 AULA 6 – CONVERSA

Nesta aula foi realizada uma conversa sobre o *software* e as questões realizadas ao longo das aulas, afim de conhecer as percepções dos alunos.

O objetivo na última aula foi conversar com os alunos sobre o trabalho realizado nas aulas anteriores;

As expectativas para esta aula era que a conversa fluiria de forma que as alunas iriam participar falando sobre suas percepções e que as alunas demonstrassem ter adquirido os conceitos matemáticos usados nas aulas.

No primeiro momento serão concluídas questões pendentes de aulas anteriores.

Então, será feita uma conversa sobre as questões trabalhadas ao longo das aulas:

Sobre como resolveram?

O que acharam?

As construções ajudaram?

O *software* foi útil?

Nesta aula estavam presentes as alunas A, F e G. Os computadores já estavam ligados. Foi explicado que esta aula seria uma conversa sobre o decorrer das cinco aulas, sobre o que elas acharam de um todo e sobre as questões. Assim, elas foram convidadas a se sentarem em torno do computador do professor, por este ter a tela maior.

A professora abriu a primeira questão da aula 1 e questionou se as alunas fariam da mesma forma que fizeram naquela aula. A aluna G afirmou que faria do mesmo jeito, mas que faria mais rápido. Como a questão era de contagem, a professora mostrou o que elas fizeram e afirmou que como haviam feito era mais difícil de contar e a aluna G fez um movimento com as mãos e comentou que faria mais repetições para organizar a solução. Após, abriu a segunda questão, a questão 8 do banco de questões de 2007 para o nível 1, questão da lista 2, e comentou que todos haviam feito por tentativa e erro menos a aluna A. Então questionou como a aluna havia pensado, e ela disse que foi pela quantidade de arcos presentes em cada alternativa. Ela não usou a palavra arco, apenas fez o movimento com as mãos se referindo a este.

Quando a professora colocou a terceira questão da aula 1, a questão 5 do banco de questões de 2007 para o nível 3, e questionou se as alunas lembravam o que fizeram para resolver, a aluna G afirmou lembrar o que fez para errar, mas não o que fez para acertar. Afirmaram que, naquele momento, conseguiriam realizar a contagem com mais facilidade. A conversa sempre aconteceu com a professora falando mais, pois as alunas não são de conversar muito, elas são muito educadas e um pouco tímidas.

Então, a conversa continuou sobre a aula dois, a aula sobre as ferramentas básicas do GeoGebra. A professora questionou as alunas sobre alguns conceitos utilizados ao longo das aulas. O primeiro foi se elas lembravam o que é uma reta perpendicular. Para responder, a aluna F fez com as mãos um gesto com movimento mostrando uma cruz e dizendo: “Não é aquele que tem um risco e aí no meio dele tem outro assim?”. Desta forma, o conceito foi reforçado. A conversa seguiu com a professora relembrando o que foi feito, como esta aula foi mais expositiva, a apresentação das ferramentas e os alunos faziam o que era solicitado, a conversa não rendeu, as alunas não se manifestavam para falar. A atividade dos retângulos foi resolvida com as alunas apenas observando. Então, a professora continuou com os questionamentos sobre os conceitos trabalhados nessa aula, questionou se lembravam o que é uma reta paralela, as alunas afirmaram não lembrar. Desta forma, a professora explicou novamente e mostrou a construção no *software* de retas paralelas. Quando questionadas sobre o triângulo retângulo a aluna G logo respondeu mostrando com as mãos que este tem um ângulo reto.

Sobre a aula 3 as alunas não falaram nada até a questão 27 “azulejos” do nível 1 de 2012. A aluna G afirmou que mesmo que já tivesse percebido que a resposta era a letra A, preferiu testar as outras só para confirmar. A conversa não existiu a partir desta questão.

Sobre a aula 4, a aula que as alunas recebiam a questão e a tela de produção do GeoGebra em branco, iniciou-se falando sobre a questão 3, nível 2 de 2008. A aluna G logo falou que nesta questão ela iniciou marcando pontos, e que para isso usou a malha da tela e fixou os pontos para estes não se moverem, ela falou sobre a malha fazendo gestos. Então, sobre a questão 19, da prova de nível 2 da fase 1 de 2009, a professora perguntou sobre o porquê do uso de cores, e a aluna G afirmou que foi para não se perder na contagem. A professora questionou se assim não haveria risco de construir possibilidades repetidas e a aluna afirmou que tinha.

Sobre a aula 5 o questionamento chave foi se a construção do colega ajudou quem resolveu a questão no processo de resolução. Quanto às construções feitas pelas alunas A e F, elas afirmaram ter ajudado na resolução por outras colegas, a aluna G, afirmou que a construção feita pela aluna A ajudou a resolver a questão, de fato a aluna não precisou de mais nada além da construção da colega para resolver a questão. No entanto a construção da questão “o presente do pequeno Abel” a aluna F reclamou que não ajudou muito, pois teve que construir mais peças para realizar os encaixes possíveis e organizar as possibilidades. Na segunda etapa, a aluna F afirmou que a construção da aluna A para a questão 2, “contando triângulos”, não ajudou muito, pois para organizar suas construções teve que reproduzir mais vezes o que a colega havia feito. A mesma queixa da aluna G para a construção da aluna F. Já a construção feita para a questão do tridominós, as alunas afirmaram que foi útil. Elas afirmaram que a construção feita pela aluna G ajudou, de fato a aluna construiu material suficiente para a colega manipular. Quando questionadas sobre o porquê de algumas questões não terem ajudado as colegas a aluna G respondeu que foi por que pensaram que a colega faria de outro jeito que não foi o previsto.

As alunas foram questionadas se gostariam de continuar com as aulas, elas afirmaram que sim. As alunas justificaram a sua falta de conhecimento matemático afirmando que “o ano anterior foi horrível”, pois tiveram muitos professores ao longo do ano.

Quando questionadas sobre se o *software* foi útil, se elas conseguiriam resolver sem o GeoGebra, elas falaram que seria mais difícil, concluindo que o *software* as ajudou. Assim, o conhecimento é produzido por seres humanos, mas também por diferentes meios de comunicação, como a oralidade, a escrita ou as novas modalidades de linguagem que emergem da tecnologia informática conforme Borba (2007).

5 DISCUSSÃO

Até o momento, nesta investigação foi feito o relato com algumas análises sobre a prática realizada com o objetivo de fornecer um conjunto de dados que podem auxiliar no esclarecimento da questão central da dissertação a ser desenvolvida, a saber: quais são as contribuições do uso de *software* de matemática dinâmica para a compreensão e solução de questões de geometria e de contagem da OBMEP?

Nesse primeiro momento de análise observou-se que os alunos conseguiram solucionar questões mesmo não possuindo um amplo conhecimento sobre conceitos matemáticos, conceitos que já deveriam ter visto em estudos anteriores na escola, e que por motivos diversos não foram. Desta forma, sempre foi necessário rever e apresentar os conceitos necessários para cada atividade.

Desta discussão ressalta-se, conforme os autores que lhe fornecem fundamentação teórica, que a partir de intervenções realizadas por coletivos de seres-humanos-com-mídias se construiu o conhecimento matemático. Ressalta-se também que o GeoGebra possibilitou a reorganização do pensamento, assim o processo de se tornar fluente no uso desta mídia condiciona a construção de diversas formas de conhecimento matemático. Assim, desde o planejamento das atividades no qual há uma pessoa desenvolvendo práticas e tarefas que sejam de fato interessantes para a aprendizagem, passando pela aprendizagem desta pessoa ao aplicar esse planejamento aos alunos, temos a primeira intervenção de seres-humanos-com-mídias desta pesquisa. Então, chega a vez dos alunos de interagir com o *software*: usaram construções já elaboradas para auxiliar a resolução de questões; utilizaram o *software* com a “tela limpa” para resolver outras questões; e também para realizar construções para auxiliar os colegas na resolução de questões. Logo, temos nesta última parte outras formas de interações e intervenções de seres-humanos-com-mídias.

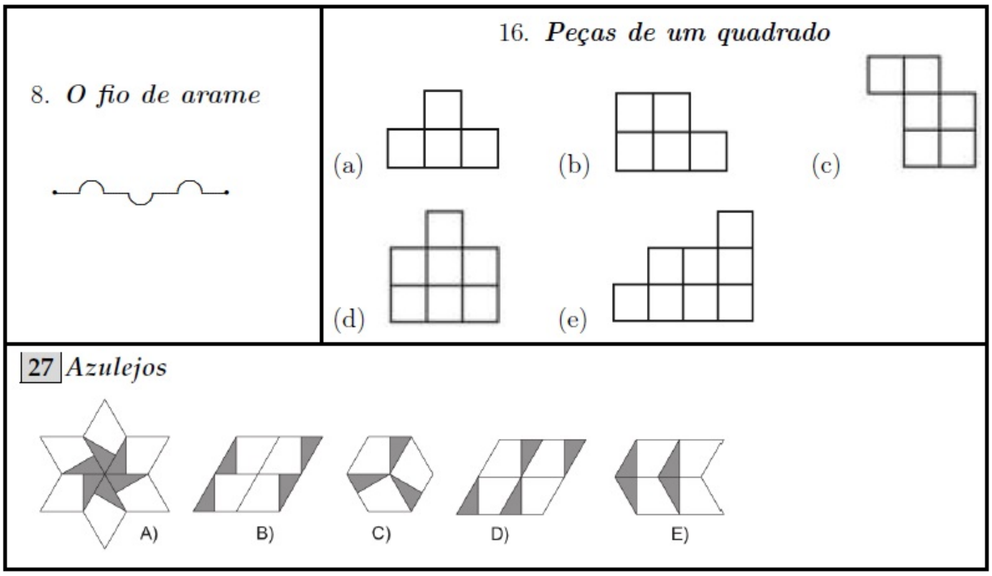
Ainda, de acordo com os autores que servem como base para esta dissertação, quando o *software* é usado adequadamente, os recursos que este proporciona apoiam a construção do conhecimento matemático de forma mais significativa. A interface dinâmica, a prova do arrastar (BORBA, DA SILVA E GADANIDIS, 2015) ou a ação de arrastar (BASSO E NOTARE, 2015), ou seja, a interatividade que o GeoGebra proporciona e os recursos de manipulação e movimentação das construções podem contribuir para perceber diferentes representações de uma mesma figura como, por exemplo, nas atividades onde os alunos deveriam reproduzir os triângulos e quadrados com o mesmo comportamento.

Quanto à preparação de uma atividade com o uso de tecnologias, é necessário ser crítico para elaboração de uma aula na qual realmente a tecnologia faça diferença, e de fato contribua para a construção de conhecimento. Nesta pesquisa existem algumas questões que poderiam ser trabalhadas com outras tecnologias como, por exemplo, material concreto ou construção com cartolina, com o mesmo tipo de trabalho proporcionado pelo uso do GeoGebra. Talvez aqui possa se dizer que o *software* foi domesticado. No entanto, estas atividades não poderiam ser realizadas com outras tecnologias por falta de material, a escola em questão passou dois meses sem ter folhas de ofício para fazer cópias de provas, e existe uma grande carência de materiais didáticos e administrativos.

De qualquer forma, o conhecimento foi produzido através de um coletivo seres-humanos-com-mídias (por exemplo, régua e compasso, quebra-cabeças de papel), ou seres-humanos-com-tecnologias (por exemplo, GeoGebra), e não apenas por seres humanos (BORBA, 2001). Assim, o processo de produção do conhecimento não é apenas um empreendimento individual, mas também coletivo por natureza, em que a cognição inclui mídias, as quais não devem ser vistas como substitutas ou como suplementares para o pensamento, mas como uma parte constitutiva essencial (BORBA; VILLARREAL, 2005). Segundo Borba e Villareal (2005), a produção desse conhecimento se dá em um espaço compartilhado por atores humanos e não-humanos, sem que haja uma separação, nem hierarquia entre eles. Logo, nesse processo deve-se considerar a habilidade do ser humano de compreender e procurar possibilidades através das mídias disponíveis.

Apesar de o *software* ter sido usado em atividades nas quais outras tecnologias também são satisfatórias, isso não muda o fato do *software* também contribuir para a construção do conhecimento, como por exemplo, a questão 8 de 2007, nível 1, da lista 2, da aula 1, a questão 16, nível 2 de 2010, e a questão 27, nível 1 de 2012 da aula 3 (figura 74), onde o *software* deu suporte a um tipo de quebra-cabeça. Em termos de conteúdos matemáticos, observamos que a questão 8 foi possível de ser resolvida por meio da contagem de quantas figuras de cada tipo seriam necessárias. Na 16, poderia ser utilizado o conteúdo de potência e raiz quadrada, assim contando o número total de quadrados e a medida do lado. E ainda, o conhecimento sobre ladrilhamento que também está presente na questão 27.

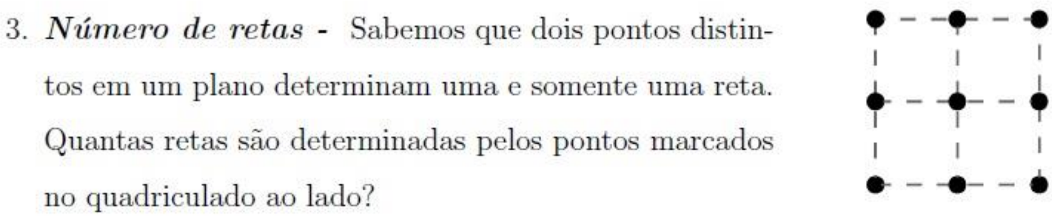
Figura 74 - Questões quebra-cabeça



Fonte: Banco de Questões OBMEP

A questão 3, nível 2 de 2008 (figura 75) é outro exemplo onde o *software* não trouxe uma novidade em sua resolução, pois poderia ser resolvida com lápis, régua e papel. Os conteúdos envolvidos nesta questão foram os conceitos de reta, ponto e intersecção.

Figura 75 - Questão 3, nível 2

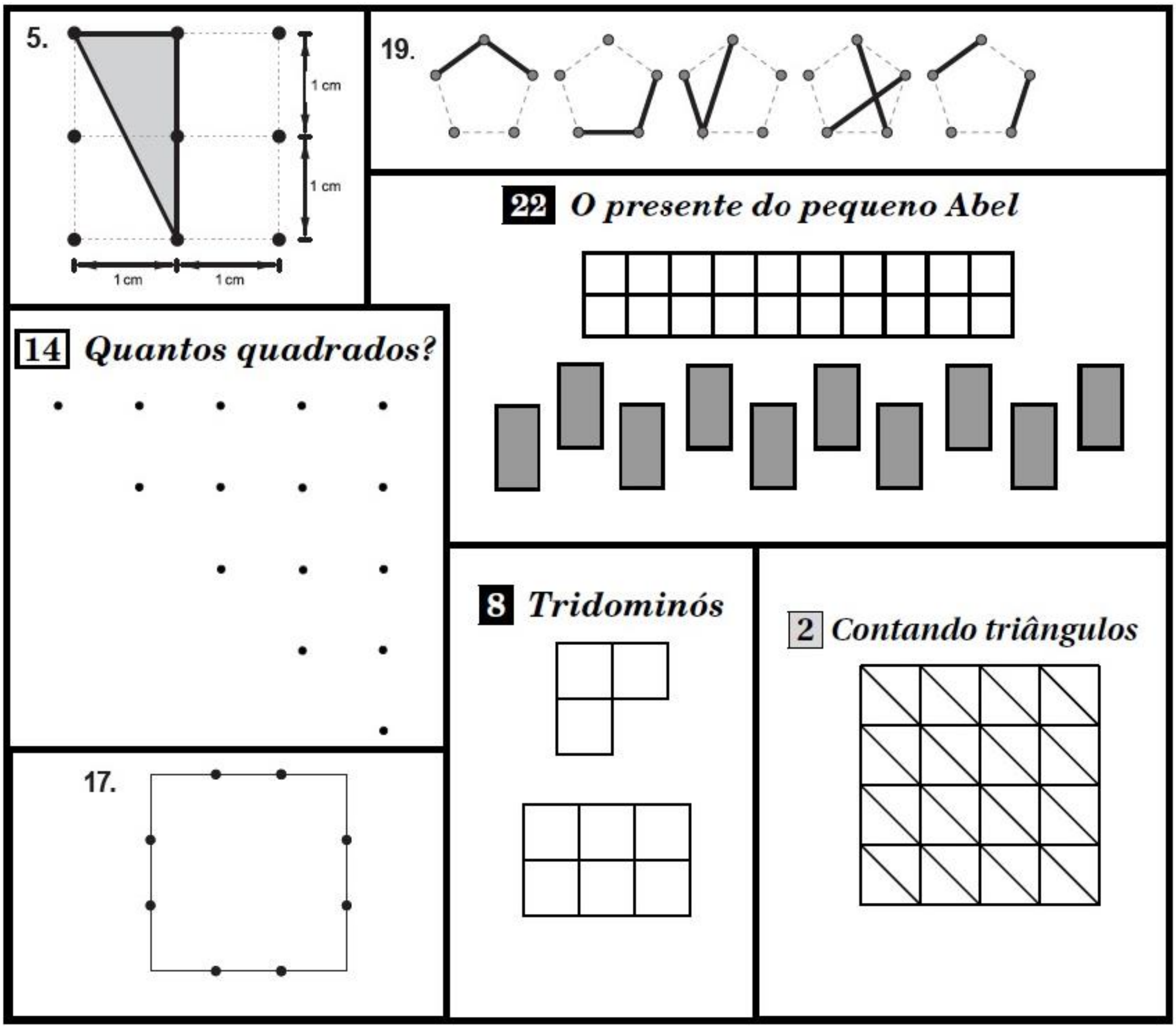

3. ***Número de retas*** - Sabemos que dois pontos distintos em um plano determinam uma e somente uma reta. Quantas retas são determinadas pelos pontos marcados no quadriculado ao lado?

Fonte: Banco de Questões OBMEP de 2008

Apesar disso, o *software* proporcionou maior agilidade para que a aula ocorresse. Exemplos disto são as questões de contagem, em que o *software* possibilitou uma melhor organização das ideias das alunas e agilidade como nas questões 5, nível 2, da prova da fase 2 de 2015 e 19, nível 2 de 2009 da aula 4 e;

questão 22, nível 3 de 2013; 14, nível 2 de 2013; 2, nível 1 de 2015; 8, nível 3 de 2013 e 17, nível 2 de 2010 da aula 5 (figura 76). Em todas as questões observamos a mobilização do conteúdo sobre contagem, ou seja, combinatória. Na questão 5, temos também o conteúdo de congruência; na questão 14, os conceitos de quadrado; nas questões 2 e 17, os conceitos de triângulo; e na questão 8 é possível usar o conteúdo de raiz quadrada e múltiplos. Nestes casos, o software contribuiu para organização e agrupamento das possibilidades.

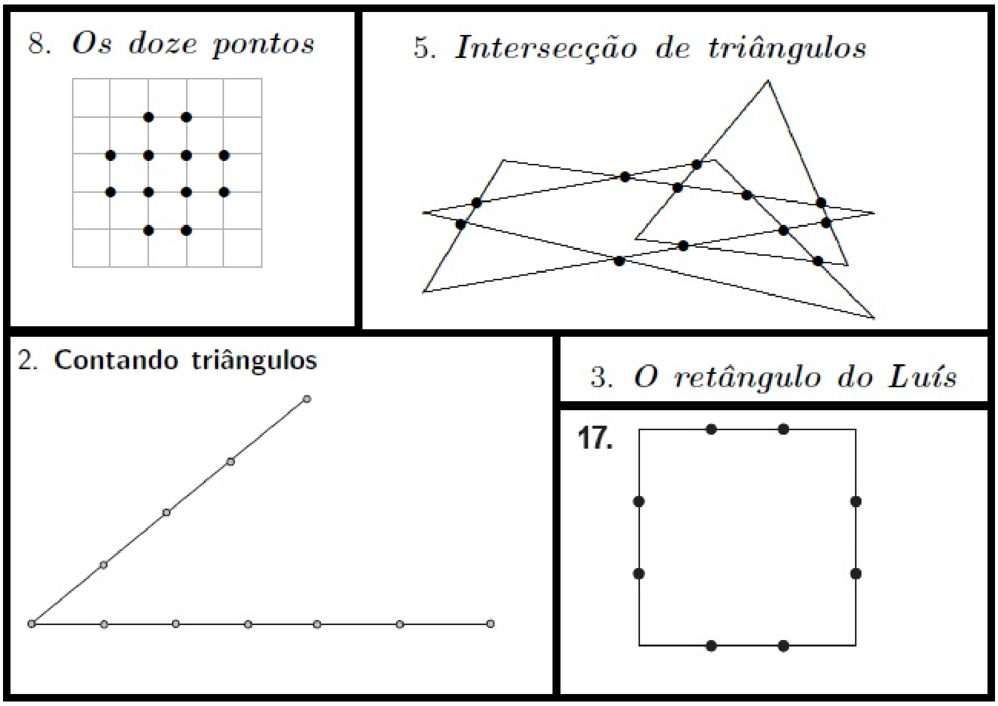
Figura 76 - Questões de Contagem



Fonte: Banco de Questões OBMEP

Porém, o referencial teórico desta dissertação chama atenção que se deve buscar utilizar o GeoGebra para atividades em que o *software* faça de fato a diferença, ou seja, que suas ferramentas e possibilidades contribuam para a construção do raciocínio lógico. Como, por exemplo, as questões 8, nível 1 de 2007; 5 de 2007, nível 3 e 2 de 2009, nível 3, também as questões 3, nível 2 de 2007 da aula 3, e 17, nível 2 de 2010 da aula 5 (figura77), em que a possibilidade de utilizar figuras geométricas apenas com suas propriedades básicas, assim podendo move-las em todas as suas possibilidades, foi essencial para resolução dessas questões. Os conteúdos presentes nestas questões são as definições de quadrado, triângulo e intersecção entre retas, e área de retângulos na questão 3. Do mesmo modo que nas anteriores, em todas estas questões está presente o conteúdo de contagem, combinatória. Na questão 5, o *software* contribuiu para a percepção sobre as intersecções entre as retas, quando os triângulos eram movimentados era possível visualizar a aparição e desaparecimento de intersecções para a contagem. O software também demonstrou ser útil para que os alunos percebessem os conceitos básicos do triângulo, na questão 2, demonstraram compreender o conceito de triângulo, ampliando este conceito além da ideia prototípica desta figura.

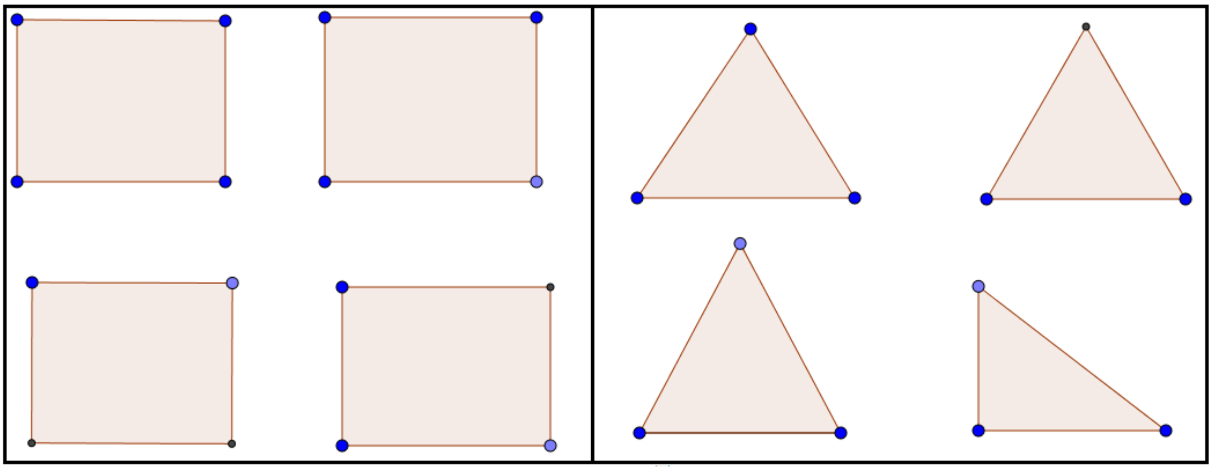
Figura 77 - Questões



Fonte: Banco de Questões OBMEP

Ainda, para reprodução dos retângulos e triângulos propostos na aula 2 e 3 (figura 78), a possibilidade de utilizar a prova do arrastar foi importante para que os alunos visualizassem o comportamento das construções. Os conteúdos presentes nestas questões foram os conceitos de retângulo, triângulo, quadrilátero, retas perpendiculares e retas paralelas.

Figura 78 - Questões dos triângulos e retângulos



Fonte: Acervo da autora

O GeoGebra mostrou ser um *software* intuitivo para o uso de alunos que nunca tiveram contato com *software* de matemática dinâmica anteriormente. De fato, desde a primeira aula os alunos conseguiram usar o *software* sem apresentar dificuldades quanto a sua organização de ferramentas e manipulação de objetos. Por outro lado, a efetividade do *software* depende de planejamento, debate e significação. As tecnologias não possuem o poder de ensinar e educar sem a ação humana por trás.

Algo importante a ser destacado foi o interesse que os alunos apresentaram durante as atividades propostas, o desejo de conseguir resolver as questões, a atenção e a concentração que demonstraram ao longo destas aulas. Porém, a interação entre eles só passou a ser significativa na aula cinco quando, de fato, uns ajudaram aos outros; até então estavam sempre concentrados em suas próprias atividades. O que é bom por estarem interessados, mas dificultou a coleta de dados devido ao fato de não externalizarem o que estavam pensando sobre as atividades.

Os trabalhos correlatos apresentados no capítulo 2 são produções cientificas selecionadas por apresentarem alguma semelhança com esta investigação: alguns por utilizarem questões da OBMEP, outros pelo uso do software. Esta dissertação diferencia-se dos trabalhos apresentados por unir estes itens, propor uma prática em sala de aula, aplicá-la e ter sido feita uma análise sobre como o processo de aprendizagem ocorreu. E então, analisar quais são as contribuições do uso de *software* de matemática dinâmica para a compreensão e solução de questões de geometria e de contagem da OBMEP?

É possível relacionar a conclusão de alguns dos trabalhos correlatos com a desta dissertação. Temos a dissertação de Pinheiro (2013) que utiliza a recorrência como uma ferramenta na construção de modelos e soluções para problemas matemáticos. Também, a dissertação de Martins (2015) que elaborou uma sequência de atividades que evidenciasse a importância das estratégias usadas pelos alunos. Ambos, concluem que, desta forma, os estudantes desenvolvem seu raciocínio. Percebo semelhança com esta dissertação pelo fato desses trabalhos buscarem formas de raciocínios diferentes do padronizado em sala de aula. Também, por visar permitir ao aluno liberdade de escolha para o caminho que preferirem usar para a resolução dos problemas, e assim, disponibilizando outros recursos além do tradicional. Desta forma, concluindo que essa permissão contribui para o desenvolvimento do raciocínio lógico.

Oliveira (2016) utiliza o GeoGebra como ferramenta para resolução de questões da OBMEP. Desta forma, conclui que o software GeoGebra possibilita a exploração da visualização como elemento impulsionador das estratégias implementadas nas situações olímpicas. O que foi possível verificar nesta dissertação também, porém através de metodologias e foco diferente. Na dissertação de Fassio (2011) são utilizados vários recursos para o ensino de geometria, da cartolina ao computador. Foi concluído que os alunos aprenderam os conceitos estudados e adquiriram habilidades para o uso das ferramentas utilizadas ao longo das aulas. Embora, este não tenha sido o foco desta dissertação, é possível também afirmar que os alunos adquiriram competências para o uso do GeoGebra e que aprenderam alguns conceitos matemáticos ao longo das aulas. O trabalho de Carlos (2017) e a dissertação de Girotto (2016) também apresentam uma prática com o uso de tecnologia digital. A conclusão assemelha-se quanto ao fato de instigar o aluno e levá-lo a compreensão do conteúdo de forma ativa.

Nesta sequência, o *software* GeoGebra possibilitou aos alunos, de forma dinâmica, a visualização das construções conforme eram manipulados os pontos dos objetos. Desta forma, acredita-se que o GeoGebra pôde contribuir para a evolução da pesquisa da dissertação de mestrado, e apresentar uma forma de ensinar matemática diferente da prática habitual nas escolas, onde os conceitos matemáticos surgem da necessidade de resolver questões, assim se tornando mais interessantes para o aluno e, também, os alunos visualizarem de forma dinâmica estes conceitos.

Logo, a apropriação das tecnologias está integrada ao processo como um todo, às inter-relações envolvidas, professor-aluno, aluno professor, aluno-aluno, e seres-humanos-com-mídias, também, com o contexto de ensino, conhecimentos prévios tanto matemáticos como experiências de vida. Desta forma, existe uma estratégia para que o conhecimento ocorra, em que o uso do *software* contribui para esse processo, porém os objetivos não são acessados sem que exista todo um planejamento.

Desta forma, podemos afirmar que o uso do *software* GeoGebra contribuiu para o desenvolvimento do raciocínio lógico matemático. Foi possível perceber que os alunos evoluíram quanto as suas ideias de organização e construção de objetos no *software*. Esta afirmação baseia-se na observação do amadurecimento dos argumentos e conhecimentos dos alunos no decorrer da proposta, na percepção e exploração das ferramentas do *software*. Nesse processo, o GeoGebra tornou se um aliado, ao auxiliar os alunos a desenvolverem a capacidade de pensar em Matemática (BASSO e NOTARE, 2015). Mais ainda, alunos-com-GeoGebra produziram conhecimento ao resolver questões da OBMEP envolvendo conceitos de Geometria e contagem, seja por meio da manipulação de construções prontas ou pela elaboração de suas próprias construções. Assim, o conhecimento é produzido por seres humanos, mas também por diferentes meios de comunicação, como a oralidade, a escrita ou as novas modalidades de linguagem que emergem da tecnologia informática (BORBA, 2007, p. 2).

Borba e Villarreal (2005) enfatizam que as tecnologias digitais alteram a linearidade do raciocínio na perspectiva de “que humanos são constituídos por tecnologias que transformam e modificam seu raciocínio e, ao mesmo tempo, esses humanos são constantemente transformados por essas tecnologias” (BORBA; VILLARREAL, 2005, p.22). Desta forma o GeoGebra contribui para a construção do conhecimento desde que utilizado com atenção aos objetivos a serem alcançados e como o *software* pode agregar para que isso ocorra.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta dissertação realizamos um planejamento de aulas com o objetivo de responder à questão central desta pesquisa: Quais são as contribuições do uso de *software* de geometria dinâmica para a compreensão e solução de questões de geometria e de contagem da OBMEP?

Desta forma, as contribuições que foram encontradas para resolução das questões da OBMEP utilizadas nesta investigação foram: para atividades em que deve-se mover vértices de figuras geométricas sem o uso de propriedades além das definições da figura em questão, como por exemplo, a questão 5 de 2007, nível 3 da aula 1; para a aprendizagem de conceitos matemáticos como, por exemplo, as definições do quadrado e do triângulo; para a organização de informações e/ou possibilidades para após realizar a contagem dessas informações; para a *prova do arrastar*, ou seja, o *software* permite que o aluno movimente a figura e verifique as propriedades envolvidas nesta (BORBA, DA SILVA, GADANIDIS, 2015, p.23). Ainda, o *software* facilitou a construção de objetos de forma impecável, ou seja, linhas retas e sem erros de proporção, também apresenta a ferramenta de desfazer e refazer que facilitou a agilidade na construção, assim acelerando o processo de resolução.

O planejamento das aulas foi feito com base no referencial teórico e experiências anteriores da autora. Para isso foram utilizadas questões do banco de questões da OBMEP pelo fato de serem questões desafiadoras e que passaram por um processo de análise e correções. Também utilizamos duas atividades semelhantes às realizadas na disciplina de Mídias Digitais I do curso de Especialização em Matemática, Mídias Digitais e Didática. A base para o planejamento foi pensada antes de sua aplicação, porém os planos de aula foram construídos conforme as aulas aconteciam por estarmos trabalhando com um Experimento de Ensino. A análise e descrição dos dados foram feitas a partir do uso dos dados coletados ao longo desta pesquisa. Pesquisa que se caracteriza como qualitativa por sua subjetividade e por não ser possível generalizar os resultados para demais grupos.

Os objetivos para elaboração desta pesquisa foram: elaborar uma sequência didática que utilize a matemática dinâmica como recurso para visualização de questões da OBMEP; aplicar a sequência didática; analisar a produção dos alunos e analisar como o GeoGebra contribuiu para a resolução de questões da OBMEP. Ao longo deste processo, foi possível observar contribuições quanto a três aspectos: compreensão do raciocínio lógico, de estruturas geométricas e organização de questões de contagem. Podemos visualizar a compreensão do raciocínio lógico nas atividades que exigiam que os alunos desenvolvessem estratégias para sua resolução, principalmente nas questões em que os alunos foram desafiados a construir algo para auxiliar os colegas na resolução da questão. Quanto a estruturas geométricas, as questões da aula 2 foram o ponto para a compreensão de propriedades presentes nas construções, onde foram apresentadas figuras inicialmente iguais que se comportavam de forma diferente ao serem movimentadas, onde a *prova do arrastar* foi essencial. Esta investigação apresenta algumas questões que necessitam que o aluno organize suas ideias percebendo possibilidades e listando-as de alguma forma para então realizar sua contagem.

O produto didático desta dissertação é o plano de aula que foi desenvolvido e aplicado em sala de aula, o qual encontra-se no apêndice A deste documento.

Foi muito gratificante perceber que os alunos se interessaram pelas aulas, demonstrando sempre estar atentos e focados em resolver as questões propostas com esmero e aprender mais sobre o *software*, percebendo as possibilidades de cores, reprodução e movimentação de pontos e objetos na tela. Os alunos apresentaram interesse em continuar com o trabalho iniciado nesta pesquisa.

Assim, foi possível perceber a necessidade de dar continuidade ao uso de tecnologias digitais também nas aulas regulares, e seguir com o uso deste plano de aula para a iniciação dos alunos quanto ao uso do *software*. Ao realizar esta investigação e estudar outras pesquisas e autores que tratam do uso de tecnologias digitais em sala de aula nota-se a necessidade de dar continuidade a pesquisas e investigações sobre o assunto e, principalmente quanto ao uso do *software* GeoGebra. Assim, cita-se mais uma vez a ideia de que a mídia está envolvida no próprio pensar (BORBA; VILLARREAL, 2005), pois se torna fundamental no processo de produção do conhecimento, tanto quanto o próprio ser humano. Desta forma, sendo necessário a análise de qual mídia é mais adequada para a produção do conhecimento e a realização de um planejamento atento às peculiaridades envolvidas.

Quanto a minha formação enquanto professora de matemática, esta investigação foi fundamental para perceber mais possibilidades quanto ao uso de tecnologias, ao realizar a revisão literária e referencial teórico, e analisar como esse uso pode ser significativo para o aluno quanto a construção do conhecimento matemático. Assim como saber analisar quando o uso de tecnologias digitais não é tão interessante por haver outras tecnologias que já resolvem a demanda, assim tomando o cuidado para não domesticar as tecnologias digitais.

Assim, nesta pesquisa foram utilizadas atividades para iniciação dos alunos para o uso do *software*, acreditamos que seja possível dar continuidade a esse trabalho com outros conteúdos, pois esta é apenas uma investigação em um grande mosaico de trabalhos direcionados ao uso de tecnologias para o ensino de matemática.

REFERÊNCIAS

ASSMANN, Hugo. A metamorfose do aprender na sociedade da informação. **Ciência da Informação**, Brasília, DF, v. 29, n. 2, p. 7-15, 2000. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/ci/v29n2/a02v29n2>. Acesso em: 09 ago. 2015.

BASSO, Marcus, NOTARE, Márcia Rodrigues. Pensar-com Tecnologias Digitais de Matemática Dinâmica. **RENOTE**. Revista Novas Tecnologias na Educação, v. 13, nº 2, p. 1-10, 2015. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/163298/001017504.pdf?sequence=1>. Acesso em: 12 abr. 2016.

BOGDAN, R.C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação Matemática**: uma introdução à teoria e aos métodos. Lisboa: Porto Editora, 1994.

BORBA, Marcelo Carvalho, ARAÚJO, Jussara de Loiola (Org.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2013. 140p. 5 ed. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

BORBA, Marcelo Carvalho, PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2012. 99p. 5ª edição. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

BORBA, Marcelo Carvalho, PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, ed. 5, 2012. 98 p.

BORBA, Marcelo Carvalho, PENTEADO, Miriam Godoy. Pesquisa em Informática e Educação Matemática. **Educação em Revista**. Belo Horizonte. n. 36, p. 239-251. 2002.

BORBA, Marcelo Carvalho, SILVA, Ricardo Scucuglia R. da, GADANIDIS, George. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática**, Sala de aula e internet em movimento. Belo Horizonte: Autêntica, 2015. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

BORBA, Marcelo Carvalho, VILLARREAL, Mónica. **Humans-with-Media and Reorganization of Mathematical Thinking**: Information and Comunication Thechnologies, Modeling, Experimentation and Visualization. USA: Springer, 2005. 232p. (Mathematics Education Library).

BORBA, Marcelo Carvalho. A Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 27., 2004, Minas Gerais. **Anais eletrônicos**... Caxambu, 2004. p. 1-18. Disponível em: <http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/borba/borba-minicurso_a-pesquisa-qualitativa-em-em.pdf>. Acesso em: 12 jul. 2017.

BORBA, Marcelo Carvalho. Coletivos seres-humanos-com-mídias e a produção matemática. In: Simpósio Brasileiro de Psicologia da Educação Matemática, 1., 2001, Curitiba. **Anais...** Curitiba, 2001. p. 135-146.

BORBA, Marcelo Carvalho. Humans with Media: A Performance Collective in the Classroom?. In: George Gadanidis; Cornelia Hoogland. (Org.). **Digital Mathematical Performance**. 1ed.Ontario: Western, 2007, v. 1, p. 15-21.

BRANTI, Ana Caroline. **Análise Matemática e Pedagógica de Problemas de Geometria Plana da OBMEP**. 2014. 95 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2014. Disponível em: < http://www.dm.ufscar.br/~ptlini/TCC_Ana_Caroline_Branti.pdf >. Acesso em: 9 jan. 2017.

CARLOS, Marciane Linhares. **Parâmetros No GeoGebra Na Construção De Circunferências**: Um Estudo Sobre Raciocínio Generalizador com Alunos do 3º Ano do Ensino Médio. 2017. 145 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/157965>. Acesso em: 9 jan. 2017.

CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Métodos de Contagem e Probabilidade.** Programa de Iniciação Cientifica da OBMEP. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

COBB, Paul, STEFFE, Leslie. The Constructivist Researcher as Teacher and Model Builder. **Journal for Research in Mathematics Education, Reston**, v. 14, n. 2, p. 83-94, 1983.

D´AMBRÓSIO, U. Prefácio. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2013. 5 ed.

DUPAS, Gilberto. Ética e poder na sociedade da informação; revendo o mito do progresso. **Revista Brasileira de Educação**, Rio de Janeiro, n. 18, 2001. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/rbedu/n18/n18a11.pdf>. Acesso em: 09 ago. 2015.

FALKEMBACH, Elza Maria Fonseca. Diário de campo: um instrumento de reflexão. **Contexto Educação**, Ijuí, v. 2, n.7, p. 19-24, 1987.

FASSIO, Sandra Aparecida Oriani. **Da cartolina ao computador**: uma proposta para o estudo de Geometria. 2011. 149 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2011. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/91058>. Acesso em: 9 jan. 2017.

FISCHBEIN, Efraim. The Theory of Figural Concepts. **Educational Studies in Mathematics**, v 24, n. 2, p. 139-162. Dordretch, Springer. 1993.

FREIRE, Isa Maria. Reflexões sobre uma Ética da Informação na Sociedade em Rede. **Ponto de Acesso**, Salvador, v.4, n.3, p. 113-133, 2010. Disponível em: <http://www.portalseer.ufba.br/index.php/revistaici/article/view/4518>. Acesso em: 09 ago. 2015.

GIROTTO, Naira. **O Desenvolvimento De Hábitos De Pensamento**: Um Estudo De Caso A Partir De Construções Geométricas No GeoGebra. 2016. 111 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de

Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/151045>. Acesso em: 9 jan. 2017.

GOLDENBERG, Miriam. **A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais**. 3a. ed. Rio de Janeiro: Record, 1999.

GOLDENBERG, P. Thinking (And Talking) About Technology in Math Classrooms. In: Education Development Center, 2000. **Anais eletrônicos**...Disponível em: <http://www2.edc.org/mcc/PDF/iss_tech.pdf>. Acesso em: 09 ago. 2015.

GOLDENBERG, Paul. “Hábitos de pensamento” um princípio organizador para o currículo (I). **Educação e Matemática**, 47, 31-35, 1998 a.

GOLDENBERG, Paul. “Hábitos de pensamento” um princípio organizador para o currículo (II). **Educação e Matemática**, 48, 37-44, 1998 b.

GRAVINA, Maria Alice. et al. Modelagem com Geometria Dinâmica na Escola. In: Conferência Interamericana de Educação Matemática, 13., 2011, Recife. **Anais...** Recife, 2011. p. 1-12.

GRAVINA, Maria Alice. Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. In: Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, 7., 1996, Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte,1996. p. 1-13.

GRAVINA, Maria Alice; BASSO, Marcus Vinicius de Azevedo. Mídias Digitais na Educação Matemática. In: GRAVINA, Maria Alice et al (Org.). **Matemática, Mídias Digitais e Didática**: tripé para formação do professor de Matemática. Porto Alegre: Evangraf, 2012. Cap. 1. p. 11-36.

GRAVINA, Maria Alice, SANTAROSA, Lucila Maria Costi. A Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados**. Informática na Educação: Teoria e Prática**, vol. 1, n. 1. Porto Alegre: UFRGS – Curso de Pós-Graduação em Informática na Educação, 1998.

GUTIÉRREZ, Angel. **Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework.** In: L. Puig and A. Guttierez (eds.) Proceedings of the 20th conference of the international group for the psychology of mathematics education. v 1, p. 3-19,1996.

LORENZATO, S. **Educação Infantil e percepção matemática**. Coleção Formação de Professores – Autores Associados – Campinas/SP – 2006.

MACHADO, Leandro da Silva. **Uma análise crítica das provas da Segunda Fase da OBMEP 2014**. 2015. 109 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Instituto De Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2015. Disponível em: < https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/Leandro_da_Silva_Machado.pdf>. Acesso em: 9 jan. 2017.

MARTINS, Lucione de Bitencourt. **Um estudo sobre as estratégias de Resolução de questões da OBMEP**. 2015. 162 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade

Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/131243>. Acesso em: 9 jan. 2017.

MEIER, Melissa. **Modelagem Geométrica e o Desenvolvimento do Pensamento Matemático no Ensino Fundamental**. 2011. 145 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011. Disponível em: <http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/54727/000852976.pdf?sequence=1>. Acesso em: 19 de maio 2015.

MINISTÉRIO DE EDUCAÇÃO E DO DESPORTO. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais** (PCN-EF) – Matemática – 1ª a 4ª série do Ensino Fundamental – Brasília, 1997.

MINISTÉRIO DE EDUCAÇÃO E DO DESPORTO. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais** (PCN-EF) – Matemática – 5ª a 8ª série do Ensino Fundamental – Brasília, 1998.

MORGADO, Augusto César de Oliveira, CARVALHO, João Bosco Pitombeira de, CARVALHO, Paulo Cesar Pinto, FERNANDEZ, Pedro. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Rio de Janeiro, 1991.

OLIMPIADAS BRASILEIRAS DE MATEMÁTICA DE ESCOLAS PÚBLICAS OBMEP. Banco de Questões. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/banco.htm>. Acesso em 10 de abril 2017.

OLIVEIRA, Cícera Carla do Nascimento. **Olimpíadas de Matemática**: concepção e descrição de “situações olímpicas” com o recurso do *software* GeoGebra. 2016. 136 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2016. Disponível em: <http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/21033 >. Acesso em: 9 jan. 2017.

PELLI, D. **As contribuições do *software* GeoGebra como um mediador do processo de aprendizagem da geometria plana na Educação a Distância (EAD) em um curso de Licenciatura em Pedagogia**. 2014. 249 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2014. Disponível em: http://www.repositorio.ufop.br/handle/123456789/4230. Acesso em: 9 jan. 2017.

PEREIRA, Thales de Lélis Martins. **O Uso do *Software* GeoGebra em uma Escola Pública**: interações entre alunos e professor em atividades e tarefas de geometria para o ensino fundamental e médio. 2012. 122 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2012. Disponível em: https://repositorio.ufjf.br/jspui/handle/ufjf/1790. Acesso em: 9 jan. 2017.

PINHEIRO, Tárcius Alievi. **Soluções não clássicas para problemas da OBMEP**. 2013. 46 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de

Santa Maria, Santa Maria, 2013. Disponível em: <http://repositorio.ufsm.br/handle/1/10936>. Acesso em: 9 jan. 2017.

POWELL, A. B.; FRANCISCO, J. M.; MAHAER, C. A. Uma Abordagem à Análise de Dados de Vídeo para Investigar o Desenvolvimento de Ideias e Raciocínios Matemáticos de Estudantes. **Boletim de Educação Matemática-BOLEMA**, ano 17, n.21, p.81-140, 2004.

RAMIRO, Leandro. **Situações didáticas no ensino de geometria com o aplicativo GeoGebra**. 2014. 115 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Ilha Solteira, 2014. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/127559>. Acesso em: 9 jan. 2017.

STEFFE, Leslie, THOMPSON, Patrick W. Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. **Research design in mathematics and science education**, Hillsdale, NJ, 2000.

STOCK, Brunna Sordi. **A argumentação na resolução de problemas de Matemática**: uma análise a partir da Epistemologia Genética. 2015. 182 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015. Disponível em: < http://hdl.handle.net/10183/117755>. Acesso em: 9 jan. 2017.

STORMOWSKI, Vandoir. **Formação de professores de matemática para o uso de tecnologia**: uma experiência com o GeoGebra na modalidade EAD. 2015. 211 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) - Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015. Disponível em: <http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/135354/000988268.pdf?sequence=1>. Acesso em: 10 de abril 2017.

TODESCHINI, Isabel Lovison. **Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)**: uma visão sobre a avaliação na perspectiva da resolução de problemas. 2012. 53 f. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012. Disponível em: < http://hdl.handle.net/10183/54862>. Acesso em: 9 jan. 2017.

VALENTE, José Armando. Informática na Educação no Brasil: Análise e Contextualização Histórica. In: J.A. Valente (org.). **O Computador na Sociedade do Conhecimento**. Brasília: Estação Palavra - USP, 2005. p. 11-28. Disponível em: < http://www. dominiopublico.gov.br/download/texto/me003150.pdf>. Acesso em: 1 maio 2015.

VILARINHO, Ana Paula Lima. **Uma proposta de análise de desempenho dos estudantes e de valorização da primeira fase da OBMEP**. 2015. 99 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Universidade de Brasília, Brasília, 2015. Disponível em: < http://repositorio.unb.br/handle/10482/19335 >. Acesso em: 9 jan. 2017.

APÊNDICE A – TERMO DE CONCENTIMENTO INFORMADO - ALUNO

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, R.G. ________________, responsável pelo(a) aluno(a) _______________________________________, da turma ___________, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada **Geometria Dinâmica na Resolução de Questões Matemáticas**, desenvolvida pelo(a) pesquisador(a) Laís de Almeida Pereira. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por Débora da Silva Soares, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do telefone 51.3308.6202 ou e-mail debora.soares@ufrgs.br.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

- Elaborar uma sequência didática que utilize a geometria dinâmica como recurso para visualização de questões da OBMEP e da OBM, buscando investigar como esse processo ocorre.
- Apresentar o *software* GeoGebra como recurso para resolver questões de geometria.
- Analisar as estratégias adotadas pelos alunos durante atividades de raciocínio lógico no *software* GeoGebra procurando identificar a relação destas com a compreensão de conceitos matemáticos;
- Identificar possíveis contribuições do uso do GeoGebra para a compreensão de estruturas geométricas;
- Identificar nas atividades elaboradas pelos alunos possíveis formas de pensar matemática.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de entrevista/questionário escrito etc., bem como da participação em oficina/aula/encontro/palestra, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc., sem identificação. A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável via telefone 51.98104.6307 ou e-mail prof.laispereira@gmail.com.

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Gravataí, _____ de ________________ de _______.

Assinatura do Responsável:

Assinatura do(a) pesquisador(a):

Assinatura do Orientador da pesquisa:

APÊNDICE B – TERMO DE CONCENTIMENTO INFORMADO - ESCOLA

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, R.G. ________________, responsável pela escola ____, declaro, por meio deste termo, que concordei em que a escola participe da pesquisa intitulada **Geometria Dinâmica na Resolução de Questões Matemáticas**, desenvolvida pelo(a) pesquisador(a) Laís de Almeida Pereira. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por Débora da Silva Soares, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do telefone 51.3308.6202 ou e-mail debora.soares@ufrgs.br.

Tenho ciência de que a participação da escola não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

- Elaborar uma sequência didática que utilize a geometria dinâmica como recurso para visualização de questões da OBMEP e da OBM, buscando investigar como esse processo ocorre.
- Apresentar o *software* GeoGebra como recurso para resolver questões de geometria.
- Analisar as estratégias adotadas pelos alunos durante atividades de raciocínio lógico no *software* GeoGebra procurando identificar a relação destas com a compreensão de conceitos matemáticos;
- Identificar possíveis contribuições do uso do GeoGebra para a compreensão de estruturas geométricas;
- Identificar nas atividades elaboradas pelos alunos possíveis formas de pensar matemática.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pela escola serão apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.).

A colaboração da escola se fará por meio de entrevista/questionário escrito de colaboradores, disponibilidade de documentos, bem como o uso do espaço escolar. No caso de fotos obtidas durante a participação, autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc. A colaboração da escola se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável via telefone 51.98104.6307 ou e-mail prof.laispereira@gmail.com.

Fui ainda informado(a) de que a escola pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Gravataí, _____ de ________________ de _______.

Assinatura do Responsável:

Assinatura do(a) pesquisador(a):

Assinatura do Orientador da pesquisa:

APÊNDICE C – PRODUTO DA DISSERTAÇÃO – SEQUÊNCIA DIDÁTICA

O produto da dissertação está disponível na integra no GeoGebraBook no endereço <https://ggbm.at/Zzf3sj5u>. Onde é possível usar e baixar as apliquetas do GeoGebra.

Aula 01 – Conhecendo o *Software* GeoGebra

Objetivos:

Utilizar o *software* como recurso para solucionar problemas matemáticos;

Utilizar o *software* para demonstrar o porquê de uma solução;

Resolver problemas matemáticos de raciocínio lógico e geometria.

Conteúdos:

Raciocínio lógico;

Probabilidade (contagem);

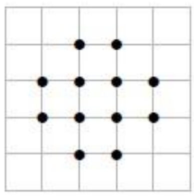
Geometria.

No primeiro momento deve-se realizar uma conversa com apresentações e sobre combinações feitas como, por exemplo, as regras da escola, na qual os alunos não devem ficar após o horário da oficina na escola.

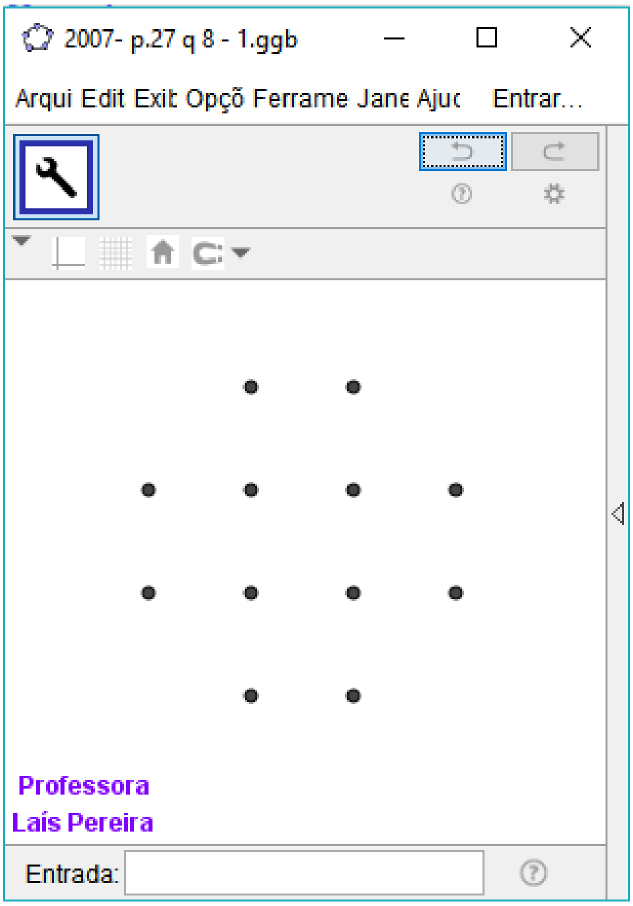
Os computadores já devem estar ligados quando os alunos chegarem. Então deve ser feita a apresentação do *software*. Os alunos terão uns 10 minutos livres para explorar as ferramentas. Após, os alunos receberão questões selecionadas do banco de questões da OBMEP com o recurso de construções prontas no *software* GeoGebra para auxiliá-los na resolução. As figuras abaixo apresentam as questões e a construção no *software*.

A figura a seguir apresenta a questão 8 do banco de questões de 2007 para o nível 1. Logo abaixo está a construção feita para auxiliar os alunos na resolução desta e em seguida a resposta apresentada pelo banco de questões.

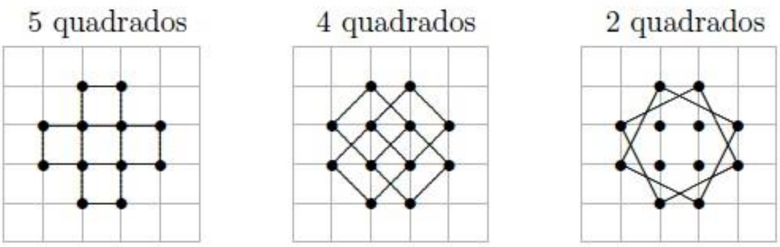
8. ***Os doze pontos*** **-** Doze pontos estão marcados numa folha de papel quadriculada, conforme mostra a figura.



Qual o número máximo de quadrados que podem ser formados unindo quatro desses pontos?



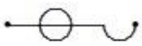
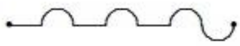
8. *Os doze pontos* - No total, temos 11 possíveis quadrados como mostrado a seguir.

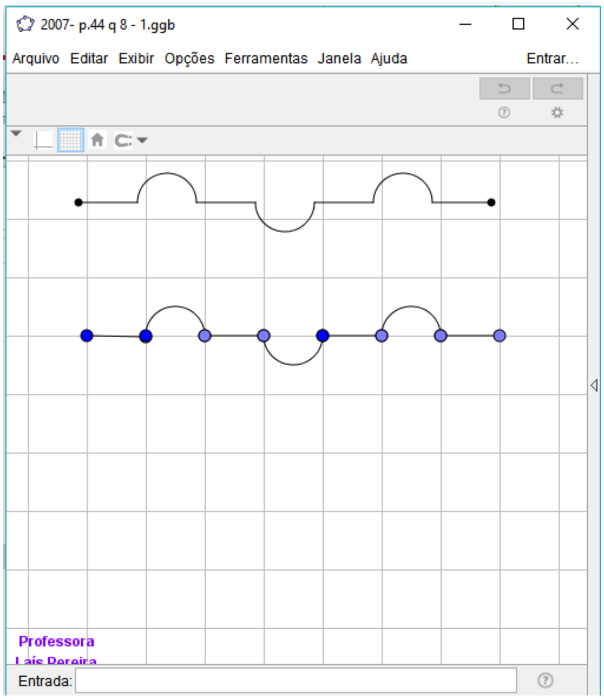


A figura a seguir apresenta a questão 8 do banco de questões de 2007 para o nível 1, questão da lista 2. Logo abaixo está a construção feita para auxiliar os alunos na resolução desta e em seguida a resposta apresentada pelo banco de questões.

8. ***O fio de arame*** **-** Com um fio de arame Ernesto formou a figura abaixo.

Qual das figuras abaixo ele pode formar com o mesmo fio de arame, cortando ou não o fio?

(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

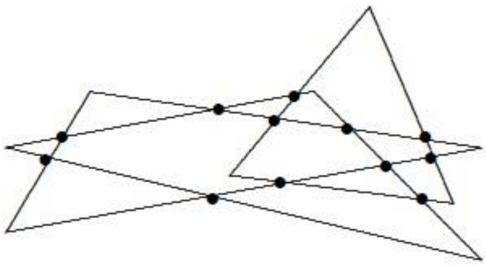


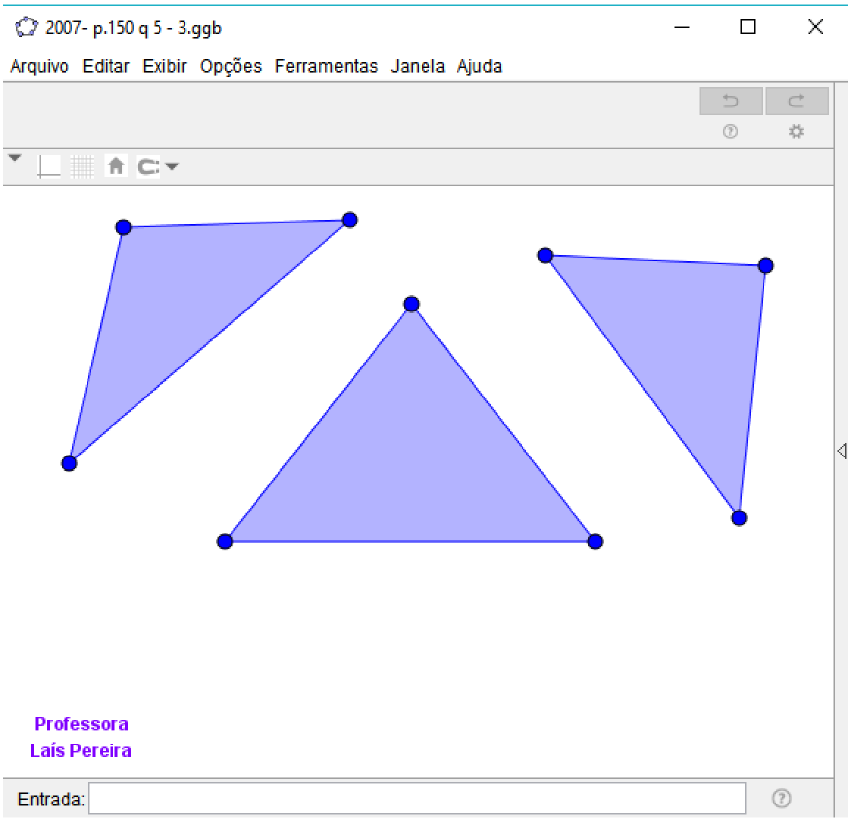
8. ***O fio de arame*** **-** A figura é composta de 3 semicírculos, o que exclui as opções (b), (c) e (e), e 4 segmentos de reta. A opção (a) só tem 3 segmentos, logo a opção correta é (d).

Observação: Esse exercício usa uma certa "informalidade", pois para decidirmos entre as opções (a) e (d), estamos admitindo que cada segmento de reta na figura tem o comprimento do diâmetro dos círculos.

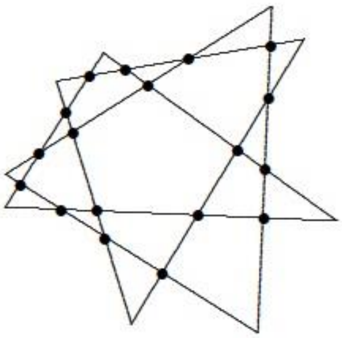
A figura a seguir apresenta a questão 5 do banco de questões de 2007 para o nível 3. Logo abaixo está a construção feita para auxiliar os alunos na resolução desta e em seguida a resposta apresentada pelo banco de questões. Esta construção foi refeita conforme uma solicitação da banca examinadora desta dissertação. Logo, a reconstrução foi feita de modo que os pontos das intersecções apareçam conforme os triângulos são manipulados.

5. *Intersecção de triângulos* - Os 3 triângulos da figura se cortam em 12 pontos diferentes. Qual é o número máximo de pontos de intersecção de 3 triângulos?



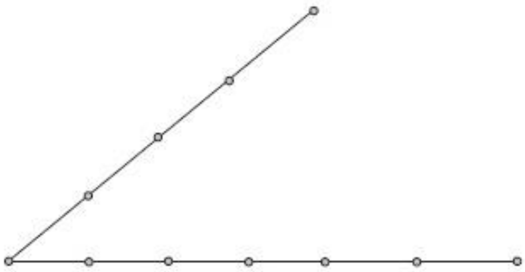


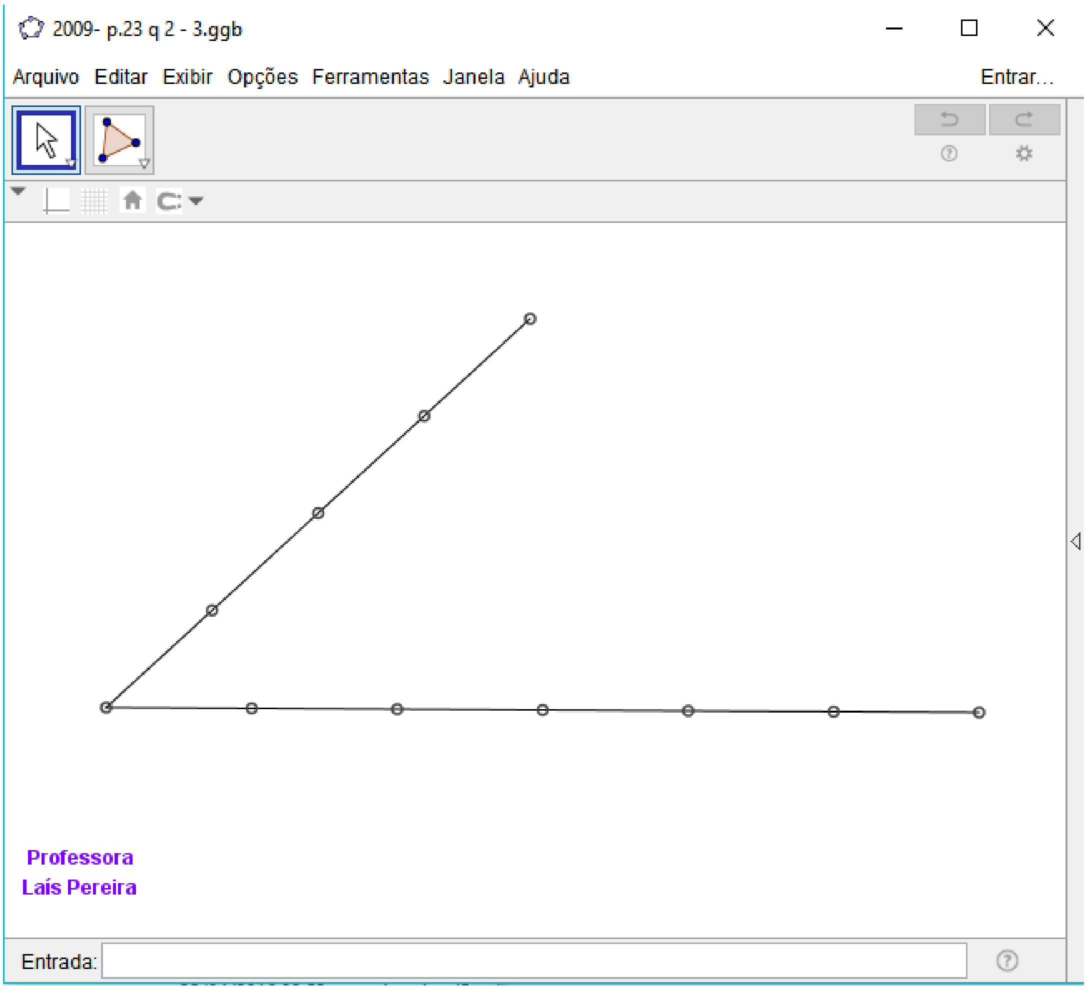
5. ***Intersecção de triângulos*** - Observemos que cada reta pode cortar no máximo dois lados de um triângulo, assim cada lado de um triângulo cortará no máximo dois lados do outro triângulo e, portanto, o número máximo de cortes entre dois triângulos é 6. Assim, se temos 3 triângulos, o número máximo de cortes é dado pelo número de formas de pegar dois de ditos triângulos e multiplicar por 6. Assim, a resposta é 18, como mostra a figura seguinte:



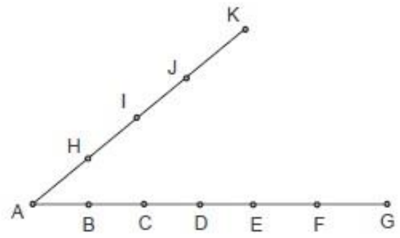
A figura a seguir apresenta a questão 2 do banco de questões de 2009 para o nível 3. Logo abaixo está a construção feita para auxiliar os alunos na resolução desta e em seguida a resposta apresentada pelo banco de questões.

2. **Contando triângulos** – Na figura a seguir estão marcados 11 pontos sobre dois segmentos. Quantos triângulos podem ser formados com estes 11 pontos?




2009- p.23 q 2 - 3.ggb
Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda
Entrar...
Professora
Laís Pereira
Entrada:

2. **Contando triângulos** – Sejam A, B, $\ldots$, K os 11 pontos nomeados como na seguinte figura:



Dividiremos a contagem em três casos:

(i) Um vértice é A. Neste caso, um vértice do triângulo deve estar no conjunto $\{H, I, J, K\}$ e o outro vértice no conjunto $\{B, C, D, E, F, G\}$. Como existem 4 escolhas para um vértice e 6 escolhas para o outro vértice, a quantidade de triângulos com um vértice no ponto A é: $6 \times 4 = 24$.

(ii) Dois vértices em $\{B, C, D, E, F, G\}$. O outro vértice está no conjunto $\{H, I, J, K\}$, pois já contamos os triângulos com vértice em A. Devemos escolher dois entre os 6 pontos $\{B, C, D, E, F, G\}$. Assim, temos a quantidade de escolhas:

$$C_6^2 = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15.$$

O outro vértice do triângulo é qualquer um dos 4 pontos $\{H, I, J, K\}$. Daí a quantidade de triângulos é $4 \times 15 = 60$.

(iii) Dois vértices em $\{H, I, J, K\}$. O outro vértice está no conjunto $\{B, C, D, E, F, G\}$. O número de maneira de escolher 2 entre os 4 pontos $\{H, I, J, K\}$ é

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \times 3}{2} = 6.$$

Como o outro vértice pode ser escolhido de 6 maneira diferentes, temos que a quantidade de triâgulos é $6 \times 6 = 36$.

Logo, a quantidade de triângulos cujos vértices são tomados dentre os 11 pontos da figura é $24 + 60 + 36 = 120$.

Conforme os alunos forem resolvendo as questões serão feitos questionamentos para compreender como estão usando o *software* e como estão pensando na resolução.

Aula 02 – Conhecendo as Ferramentas do GeoGebra

Objetivos:

Manipular as ferramentas do GeoGebra;

Compreender as funções de cada ferramenta;

Realizar construções que mantenham suas definições iniciais.

Conteúdos:

Raciocínio lógico;

Geometria plana.

No primeiro momento serão apresentadas as ferramentas do GeoGebra. Segue a imagem da barra de ferramentas:

Cada item da barra contempla outras ferramentas conforme a figura 25.

Abaixo segue as explicações sobre algumas ferramentas, cada item deve ser explicado como funciona para os alunos, de modo, que eles experimentem cada ferramenta aqui listada no *software*.

Novo ponto

Clique na *Zona Gráfica* para criar um novo ponto.
Nota: As coordenadas do ponto são fixadas quando o botão do rato é libertado.

Clicando num segmento, recta, polígono, cónica, gráfico de função ou curva, pode criar um ponto nesse objecto (veja também o comando Ponto).

Ponto médio ou centro

Pode clicar em dois pontos ou num segmento para obter o respectivo ponto médio. Também pode clicar numa secção cónica (eg., circunferência) para criar o respectivo centro.

Segmento definido por dois pontos

Seleccione dois pontos *A* e *B* para criar um segmento entre *A* e *B*. O comprimento do segmento aparece na *Zona Algébrica*.

Polígono

Seleccione sucessivamente pelo menos três pontos, os quais serão os vértices do polígono. Depois, clique outra vez no primeiro ponto para fechar o polígono. A área do polígono é mostrada na *Zona Algébrica*.

Polígono regular

Seleccione dois pontos *A* e *B* e especifique o número *n* de vértices no campo de texto da janela de diálogo que aparece. Isto dá-lhe um polígono regular com *n* vértices (incluindo *A* e *B*).

Recta definida por dois pontos

Seleccionando dois pontos *A* e *B* cria a recta que passa por *A* e *B*. O vector director desta recta é (*B* - *A*).

Recta paralela

Seleccionando uma recta *g* e um ponto *A* define a recta que passa por *A* paralelamente a *g*. A direcção de tal paralela é a direcção da recta *g*.

Recta perpendicular

Seleccionando uma recta *g* e um ponto *A* cria a recta passando por *A* perpendicularmente à recta *g*.

Circunferência dados o centro e o raio

Seleccione o centro *M* e insira a medida do raio no campo de texto da janela que aparece.

Circunferência dados o centro e um ponto

Seleccionando um ponto *M* e um ponto *P* define a circunferência de centro *M* passando por *P*.

Após apresentar as ferramentas será solicitado que construam um quadrado. Então, deverão mover os pontos do quadrado que construíram. Neste momento serão feitas as seguintes perguntas:

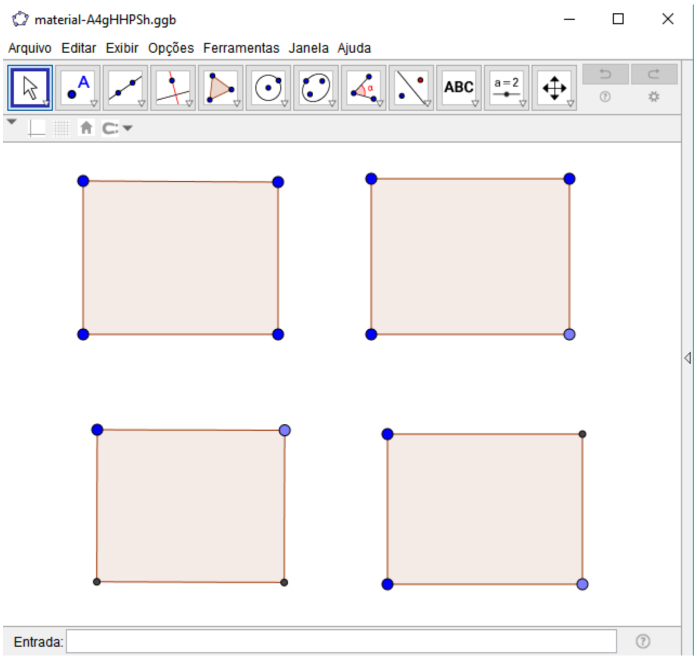
O quadrado ainda é um quadrado?

O que é necessário para uma “figura” ser um quadrado? (Com o objetivo de verificar se conhecem o conceito de quadrado)

Após definido o que é um quadrado, será solicitado novamente que o construam, porém, agora cuidando para que ao mover os pontos o quadrado continue sendo um quadrado.

É possível que alguma dupla perceba a possibilidade de usar a ferramenta “polígono regular”. Caso isso aconteça, será solicitado que tentem fazer a construção sem usá-la. Caso nenhum aluno perceba esta possibilidade, ela será apresentada ao final desta atividade.

Então será solicitado que manipulem 4 retângulos reparando no que acontece ao mover os pontos. Segue a imagem dos retângulos no GeoGebra:



Então, serão feitos os seguintes questionamentos:

Após movimentar os pontos, as figuras continuam sendo retângulos?

Em cada figura, quais propriedades se mantêm?

Reproduza as construções de modo que os retângulos que construírem se comportem da mesma forma que os já construídos.

Aula 03 – Usando as ferramentas do GeoGebra

Objetivo:

Manipular as ferramentas do GeoGebra;

Compreender as funções de cada ferramenta;

Realizar construções que mantenham suas definições iniciais.

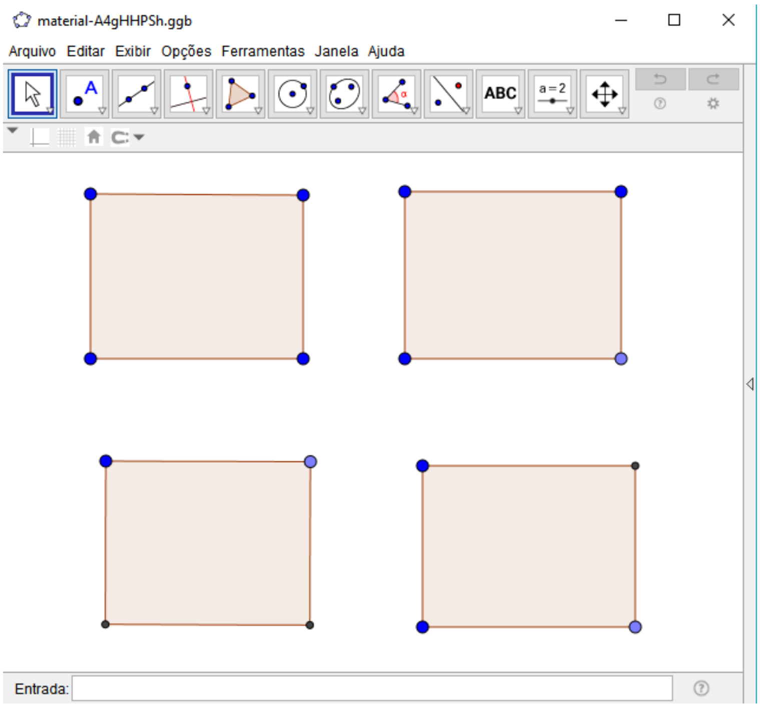
Conteúdos:

Raciocínio lógico;

Geometria plana.

Será feita a continuidade da aula 2:

Será realizada uma conversa e a construção em grupo da última atividade da aula anterior usando os mesmos questionamentos. Abaixo a imagem da atividade no GeoGebra.



Após movimentar os pontos, as figuras continuam sendo retângulos?

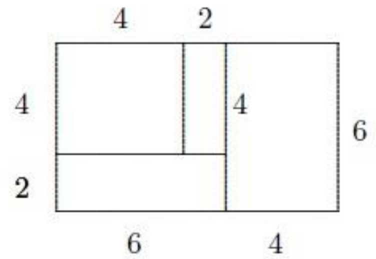
Em cada figura, quais propriedades se mantêm?

Reproduza as construções de modo que os retângulos que construírem se comportem da mesma forma que os já construídos.

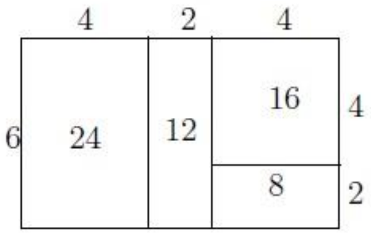
Então será solicitado que resolvam a questão 3, nível 2 de 2007, a questão 16, nível 2 de 2010, e a questão 27, nível 1 de 2012, com respostas logo abaixo de cada questão.

3. ***O retângulo do Luís*** **-** Luís desenhou um retângulo de $6cm$ por $10cm$, e quer dividí-lo em quatro partes. Cada parte deve ter de área, respectivamente, $8cm^2$, $12cm^2$, $16cm^2$, $24cm^2$. Desenhe como ele pode fazer essa divisão.

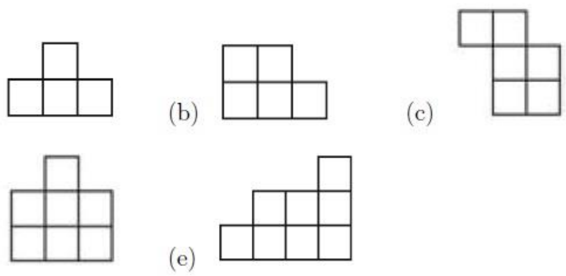
3. ***O retângulo do Luís*** **-** Como $24 = 4 \times 6$, então ele construiu o primeiro retângulo, tirando $4\,cm$ do lado de $10\,cm$, sobrando um quadrado de lado $6\,cm$. Sendo $16 = 4 \times 4$, ele construiu um quadrado de lado $4\,cm$ sobrando dois retângulos de áreas $(6-4) \times 4 = 8\,cm^2$ e $(6-4) \times 6 = 12\,cm^2$, como, por exemplo, a divisão mostrada na figura ao lado.



A seguinte configuração também é uma solução para o problema.



16. **Peças de um quadrado** – Pedro montou um quadrado com quatro das cinco peças abaixo. Qual é a peça que ele não usou?



(a) (b) (c)

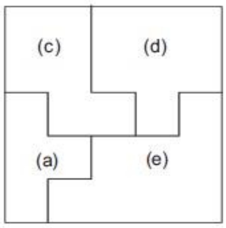
(d) (e)

16. ***Peças de um quadrado*** – A opção correta é (b).

Para que seja possível montar o quadrado, o número total de quadradinhos deve ser um quadrado perfeito. Um número inteiro é um *quadrado perfeito* se ele é igual ao quadrado de algum número inteiro. Por exemplo, 1, 4, 9, 16 e 25 são quadrados perfeitos, pois $1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $16 = 4^3$ e $25 = 5^2$. Observe que esses cinco inteiros são os únicos quadrados perfeitos menores do que 30.

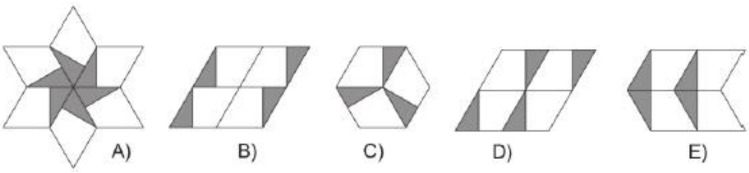
Contando o total de quadradinhos apresentados nas cinco opções de resposta obtemos $4+5+6+7+8 = 30$. Portanto, devemos eliminar uma peça com 5 quadradinhos, para restar 25, um quadrado perfeito, ou eliminar uma peça com 14 quadradinhos, para restar 16, outro quadrado perfeito, ou eliminar uma com 21, para restar 9, ou eliminar uma com 26, para restar 4, ou eliminar uma com 29 quadradinhos, para restar um único. Ocorre que não há peças com 14, 21, 26 ou 29 quadradinhos, restando a única opção de eliminar a peça (b), com 5 quadradinhos.

O único quadrado que Pedro poderia ter montado com quatro peças é não usando a peça (b). Isto não significa que seja possível montar um quadrado com as quatro peças restantes. Mas, sabendo que devemos montar um quadrado de lado 5 com as cinco peças (a), (c), (d) e (e), o problema já fica bem mais fácil. A figura mostra como isso pode ser feito.



27 *Azulejos*

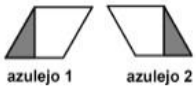
A figura ao lado mostra a superfície pintada de um azulejo em forma de losango. Dos cinco padrões abaixo, apenas um não pode ser montado com cópias desse azulejo. Qual é esse padrão?



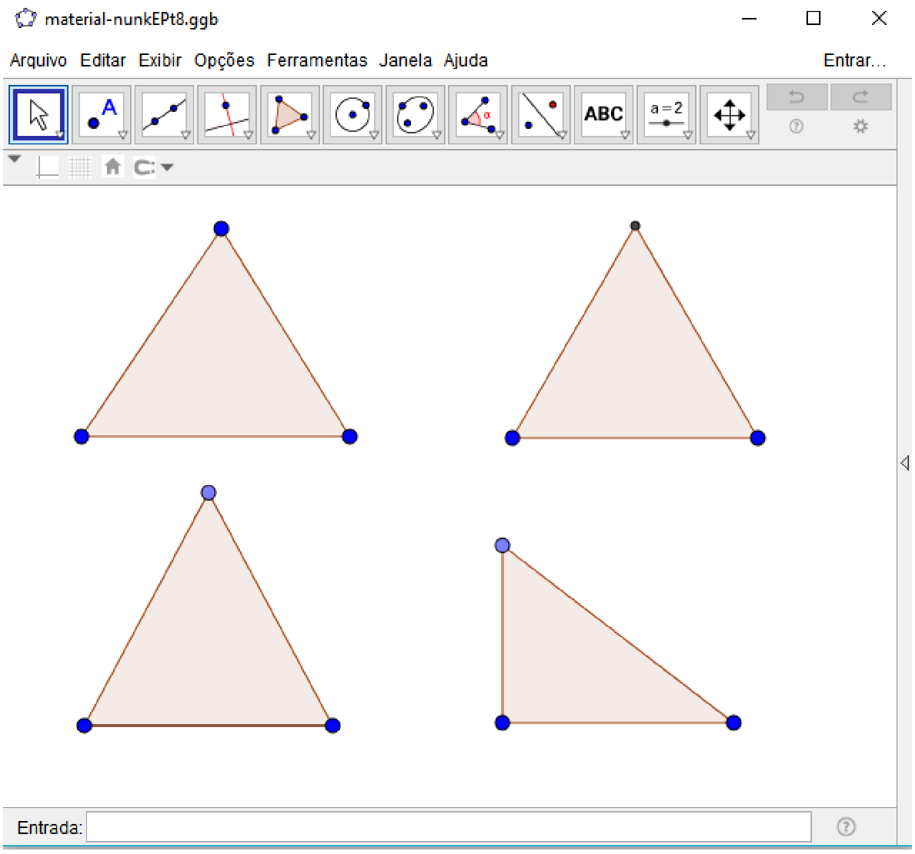
27 *Azulejos – Solução*

ALTERNATIVA E

Mostramos ao lado dois azulejos. O azulejo 1 é o azulejo do enunciado, com o qual foram formadas as figuras das alternativas *A), B), C)* e *D)*. A figura da alternativa *E)* foi feita com duas cópias do azulejo 1 e duas cópias do azulejo 2. Como não é possível obter o azulejo 2 por translação ou rotação do azulejo 1, segue que não podemos montar a figura da alternativa *E)* com cópias do azulejo 1.



Após, será solicitado que trabalhem da mesma forma que trabalharam com os retângulos com triângulos presentes na figura abaixo.



Então será questionado:

Após movimentar os pontos, as figuras continuam sendo triângulos?

Em cada figura, quais propriedades se mantêm?

Reproduza as construções de modo que os retângulos que construírem se comportem da mesma forma que os já construídos.

Aula 04 – Usando as ferramentas do GeoGebra II

Objetivos:

Manipular as ferramentas do GeoGebra;

Compreender as funções de cada ferramenta;

Realizar construções que mantenham suas definições iniciais.

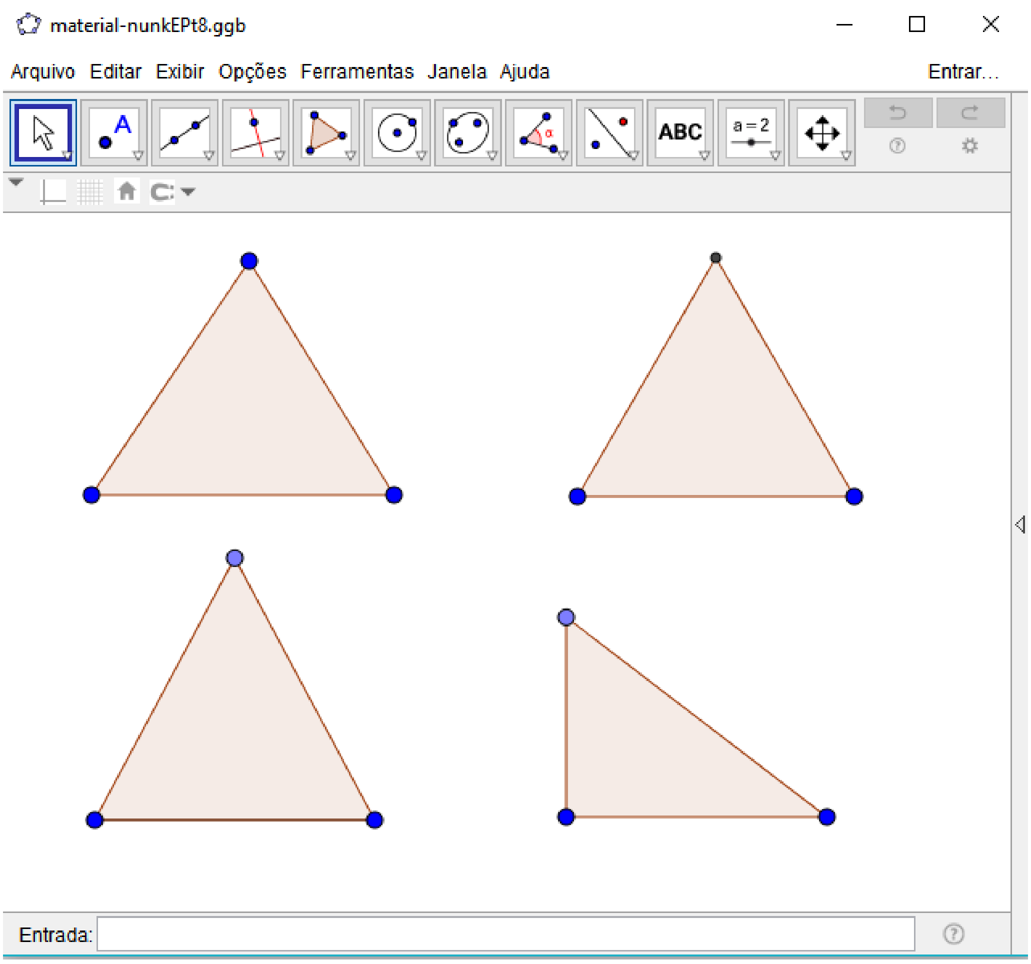
Conteúdos:

Raciocínio lógico;

Probabilidade (contagem);

Geometria.

Será realizada uma conversa e a construção em grupo da última atividade da aula anterior usando os mesmos questionamentos:



Após movimentar os pontos, as figuras continuam sendo retângulos?

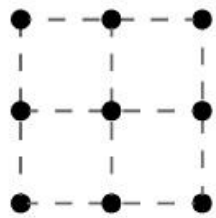
Em cada figura, quais propriedades se mantêm?

Reproduza as construções de modo que os retângulos que construírem se comportem da mesma forma que os já construídos.

Nesta aula os alunos deverão usar o *software* sem construções prévias para solucionar as questões. Desta forma, os alunos deverão usar as ferramentas do próprio *software* para ajuda-los a resolver os problemas.

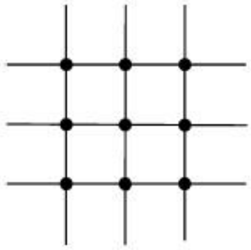
Então, serão propostas a questão 3, nível 2 de 2008, a questão 5, nível 2, fase 2 de 2015, e a questão 19, nível 2, fase 1 de 2009.

3. ***Número de retas*** **-** Sabemos que dois pontos distintos em um plano determinam uma e somente uma reta. Quantas retas são determinadas pelos pontos marcados no quadriculado ao lado?

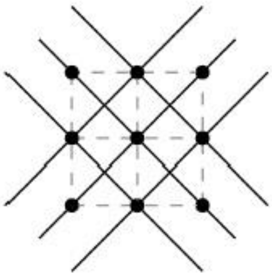


3. ***Número de retas*** **-** Para contar o número de retas dividiremos as retas de acordo com suas posições:

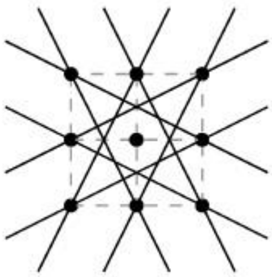
- retas parlelas aos lados dos quadrados: 3 horizontais e 3 verticais;



- retas paralelas às diagonais dos quadrados: $3 + 3 = 6$;

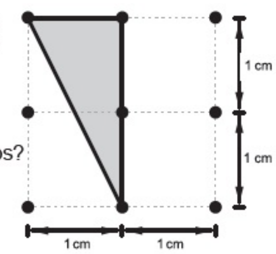


- outras retas: temos $4 \times 2 = 8$ retas, formando uma estrela, como mostrado na figura.



Ao todo temos: $3 + 3 + 6 + 8 = 20$ retas.

5. Em um quadrado de lado 2 cm foram marcados nove pontos, conforme a figura. Triângulos podem ser desenhados com seus vértices nesses pontos. A figura mostra um deles, com área igual a 1 cm².

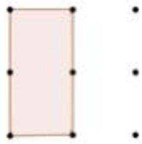


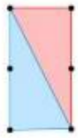
a) Quantos triângulos congruentes ao da figura possuem seus vértices nos pontos marcados?

N2Q5 – Solução

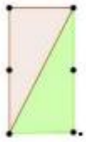
item a)

Dentro de cada retângulo como o indicado ao lado, há 4 triângulos congruentes ao da figura do enunciado:





- dois quando traçamos uma diagonal



- outros dois quando traçamos a outra

Como há quatro retângulos congruentes ao descrito acima, poderemos fazer um total de 4 x 4 = 16 triângulos congruentes ao que está no enunciado da questão.

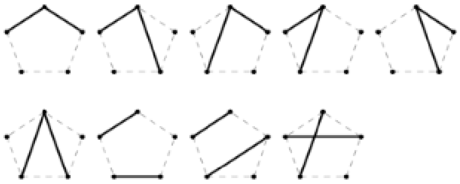
19. Com exatamente dois segmentos de reta, podemos fazer figuras diferentes unindo os vértices de um pentágono. Cinco dessas figuras estão ilustradas a seguir.

Incluindo essas cinco, quantas figuras diferentes podemos fazer desse modo?

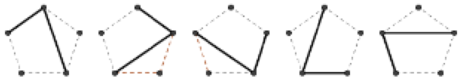
A) 20
B) 30
C) 35
D) 40
E) 45

QUESTÃO 19
ALTERNATIVA E

Na figura abaixo mostramos as 9 figuras diferentes que contém o vértice superior do pentágono. Observamos que nenhuma destas figuras pode ser obtida a partir de outra através de rotações do pentágono.



Cada uma destas figuras dá origem, através de rotações do pentágono, a outras 4 figuras diferentes, como ilustramos abaixo.



Segue que o número de figuras diferentes que podemos fazer com dois segmentos é $9 \times 5 = 45$.

Aula 05 – Realizando Construções no GeoGebra

Objetivos:

Manipular as ferramentas do GeoGebra;

Compreender as funções de cada ferramenta;

Realizar construções que mantenham suas definições iniciais.

Conteúdos:

Raciocínio lógico;

Probabilidade (contagem);

Geometria.

Os alunos receberão questões selecionadas do banco de questões da OBMEP que deverão apresentar construções no *software* que auxiliem na resolução destas por outros colegas.

Seguem as três primeiras questões a serem entregues para as alunas realizarem uma construção de modo que facilite para outra resolver. A questão 14, nível 2 de 2013, a questão 22, nível 3 de 2013 e a questão 23, nível 3 de 2014. As soluções destas questões estão logo abaixo.

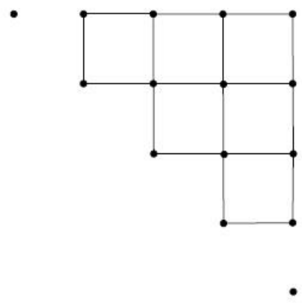
$\boxed{14}$ ***Quantos quadrados?***

O professor Ciconete desenhou no quadro os seguintes pontos:

Em seguida, ele perguntou aos seus alunos quantos quadrados com vértices em tais pontos é possível desenhar. Qual é a resposta correta para a pergunta do professor Ciconete?

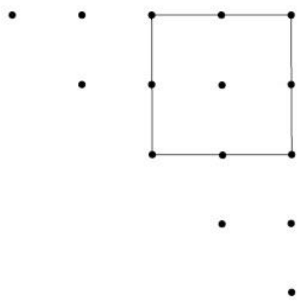
$\boxed{14}$ ***Quantos quadrados?*** – *Solução*

Considere primeiramente os quadrados de lado 1 como desenhado na figura abaixo:



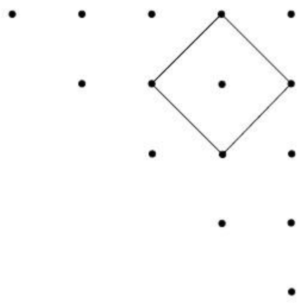
Uma simples contagem nos mostra que existem seis desses quadrados.

Podemos também desenhar um quadrado de lado 2 cujos vértices são pontos do reticulado, como na figura a seguir:

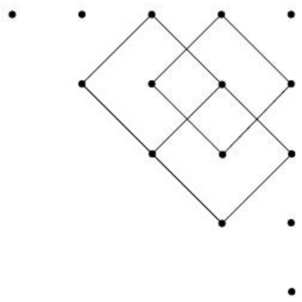


Note que é impossível desenhar um segundo quadrado de lado 2, assim quantidade total de tais quadrados é igual a um.

Agora temos que contar também o número de quadrados orientados em uma direção diferente, como mostra a figura abaixo:



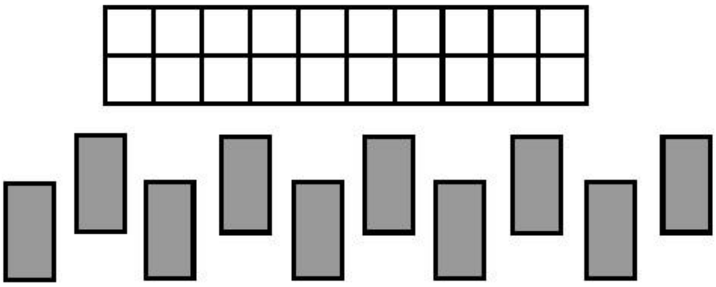
A próxima figura mostra que existem três desses quadrados:



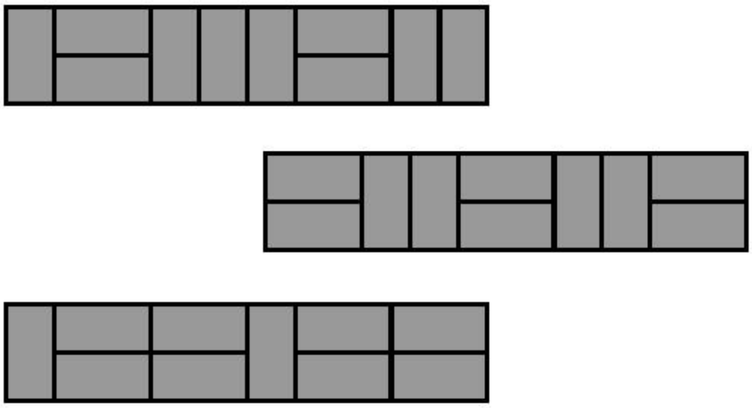
Assim, concluímos que a resposta para a pergunta do professor Ciconete é $6 + 1 + 3 = 10$.

22 *O presente do pequeno Abel*

O pequeno Abel ganhou de presente um tabuleiro $2 \times n$ e n fichas de tamanho 2×1. Por exemplo, a figura a seguir mostra o caso em que $n = 10$, isto é, quando Abel tem um tabuleiro 2×10 e 10 fichas de tamanho 2×1.



Ele brinca de preencher o tabuleiro usando as n fichas. Por exemplo, para $n = 10$ Abel poderia preenchê-lo dos modos ilustrados a seguir:



Observe, no entanto, que existem muitas outras maneiras pelas quais Abel pode preencher o seu tabuleiro.

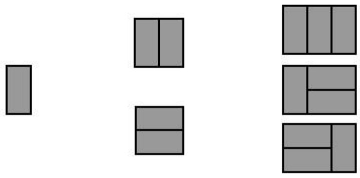
a) Calcule o número total de maneiras pelas quais Abel pode preencher o seu tabuleiro nos casos em que $n = 1$, $n = 2$ e $n = 3$, isto é, no caso em que os tabuleiros têm dimensões 2×1, 2×2 e 2×3.

b) Seja a_n a quantidade de maneiras pelas quais Abel pode preencher um tabuleiro $2 \times n$ utilizando n fichas 2×1. Mostre que $a_{10} = a_9 + a_8$.

c) Calcule o número total de maneiras pelas quais Abel pode preencher o seu tabuleiro quando $n = 10$.

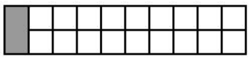
22 ***O presente do pequeno Abel*** – *Solução*

a) Podemos contar facilmente os primeiros casos e observar que $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ e $a_3 = 3$, como mostra a figura abaixo.

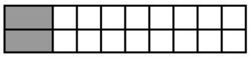


b) Ao começar a preencher o seu tabuleiro 2×10, Abel pode proceder de duas maneiras distintas:

- Abel pode começar colocando uma ficha verticalmente na primeira coluna do tabuleiro:



- Caso contrário, ele deve começar colocando duas fichas horizontais nas duas primeiras casas das duas primeiras linhas do tabuleiro:



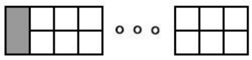
No primeiro caso, o Abel deverá usar as nove fichas restantes para preencher o resto do tabuleiro, que coincide com um tabuleiro de tamanho 2×9. Ele pode fazê-lo de a_9 maneiras.

No segundo caso, Abel deverá utilizar as oito fichas que restaram para preencher o resto do tabuleiro que coincide com um tabuleiro de tamanho 2×8. Ele pode fazê-lo de a_8 maneiras.

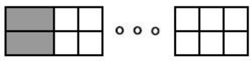
Assim, concluímos que a quantidade total de maneiras que existem para que Abel finalize o preenchimento do seu tabuleiro é igual a $a_9 + a_8$. Concluímos então que:

$$a_{10} = a_9 + a_8.$$

c) Repetindo o mesmo argumento que usamos no item anterior, temos que, de modo mais geral, as maneiras pelas quais podemos preencher um tabuleiro $2 \times n$ dividem-se em dois grupos. O primeiro grupo, no qual inicia-se posicionando uma ficha vertical no lado esquerdo do tabuleiro:



E o outro grupo no qual inicia-se posicionando duas fichas horizontais no lado esquerdo do tabuleiro:



Para o primeiro grupo, o número de maneiras de continuar o preenchimento coincide com a_{n-1} enquanto que, no segundo grupo, esse número de maneiras coincide com a_{n-2}. Concluímos que

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\,, \quad \text{para todo } n \geq 3\,. \tag{.14}$$

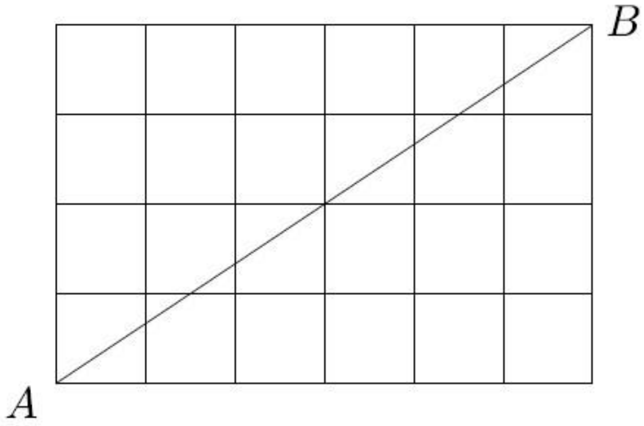
De fato, pelo item a), temos que $a_1 = 1$ e $a_2 = 2$. Agora podemos usar (.14) para conseguir os próximos valores de a_n. De fato, temos que $a_3 = a_2 + a_1 = 3$ (como já havíamos determinado no item a)). De maneira análoga temos que $a_4 = a_3 + a_2 = 3 + 2 = 5$. Continuando com o mesmo raciocínio obtemos que:

$$a_5 = 8\,, \quad a_6 = 13\,, \quad a_7 = 21\,, \quad a_8 = 34\,, \quad a_9 = 55 \quad \text{e} \quad a_{10} = 89.$$

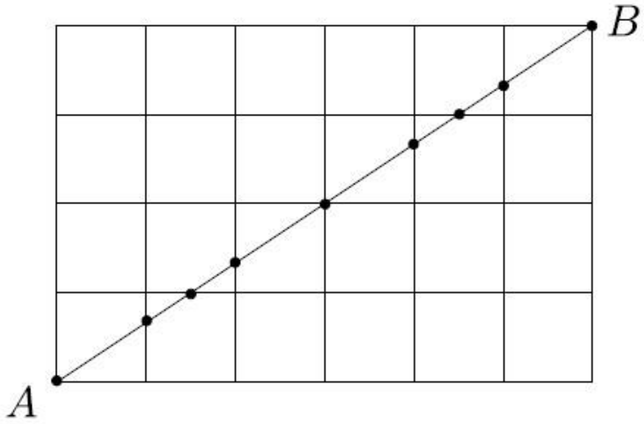
Portanto, há 89 formas pelas quais o pequeno Abel pode preencher o tabuleiro 2×10.

23 *A diagonal do quadriculado*

No seguinte papel, foi desenhado um quadriculado de 4×6 e depois traçada a diagonal de A a B.



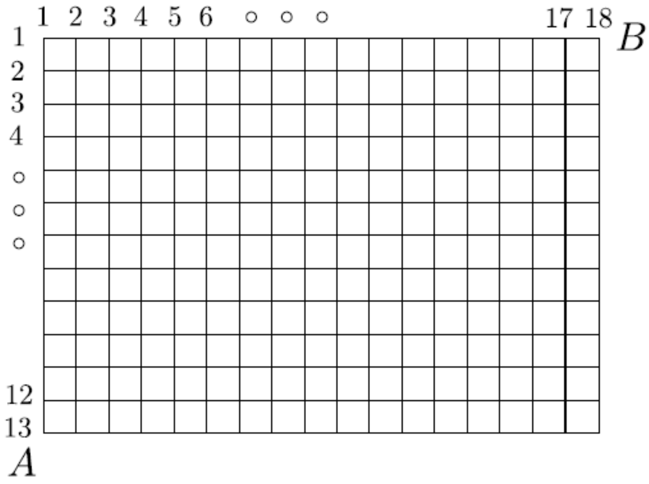
Observe que a diagonal AB intersecta o quadriculado em 9 pontos:



Se o quadriculado fosse de tamanho 12×17, em quantos pontos a diagonal AB intersectaria o quadriculado?

23 *A diagonal do quadriculado* – *Solução*

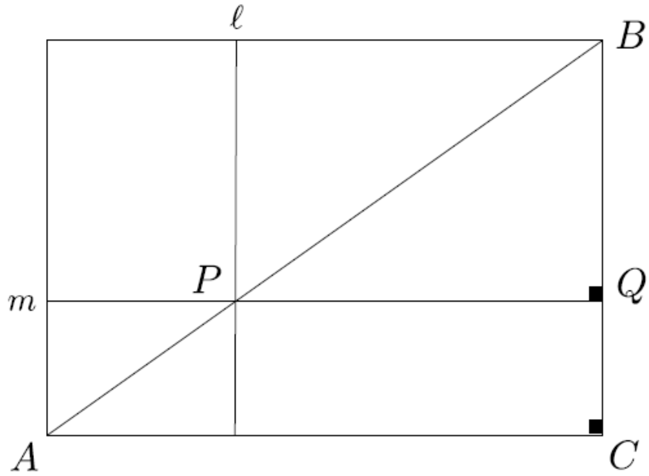
Vamos enumerar as linhas verticais e as linhas horizontais do quadriculado do seguinte modo:



A diagonal AB intersecta cada linha vertical em exatamente um ponto. Com isso, contaríamos 18 pontos de interseção. Também AB intersecta cada linha horizontal em exatamente um ponto. Com isso, contaríamos 13 pontos de interseção. Sabemos que os pontos A e B são pontos de interseção em comum. Portanto, na soma $18+13$, estamos contando cada interseção duas vezes. Se não existissem outros pontos de interseção em comum a resposta seria

$$18 + 13 - 2 = 29.$$

Suponhamos que existisse um outro ponto de interseção P, como mostrado no gráfico.



Digamos que o lado de cada quadradinho meça 1 u. Então é claro que $|AC| = 17$ u e $|BC| = 12$ u. Os triângulos ABC e PBQ são semelhantes porque possuem os mesmos ângulos. Portanto, $\frac{|BQ|}{|QP|} = \frac{|BC|}{|CA|}$ ou, equivalentemente,

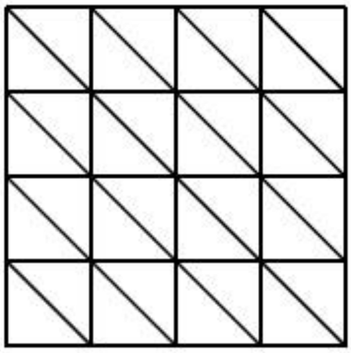
$$BQ = \frac{12 \times QP}{17}.$$

Se P pertencesse a uma linha vertical e a uma linha horizontal, então tanto QP quanto BQ deveriam ser números inteiros (quando escritos em termos de u). Para que $12 \times |QP|/17$ seja inteiro, necessariamente 17 deve dividir $|QP|$. Mas se $0 < |QP| < 17$, isso é impossível. Concluímos assim que tal P não existe. Portanto, a resposta final são 29 pontos de interseção de AB com o quadriculado.

A seguir estão as três primeiras questões a serem entregues para as alunas realizarem uma construção de modo que facilite para outra resolver. A questão 2, nível 1 de 2015, a questão 17, nível 2, fase 1 de 2010 e a questão 8, nível 3 de 2013. As soluções destas questões estão logo abaixo.

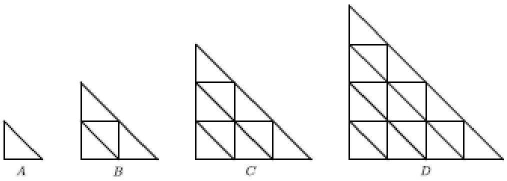
2 *Contando triângulos*

Quantos triângulos existem na figura abaixo?



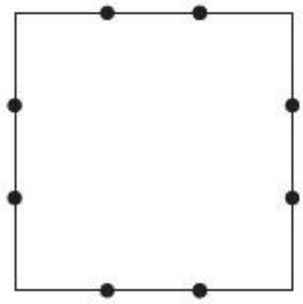
2 *Contando triângulos – Solução*

Como todos os segmentos traçados são paralelos aos lados do quadrado ou à diagonal, os triângulos formados também possuem essas características.
Assim, existem apenas quatro tipos de triângulos:



Os quatro tipos de triângulos foram definidos de acordo com a quantidade de triângulos menores: 1 na figura A, 4 na figura B, 9 na figura C e 16 na figura D. Na contagem, também devemos considerar suas cópias "viradas de cabeça para baixo". Como existem 32 triângulos do tipo A, 18 do tipo B, 8 do tipo C e 2 do tipo D, o total de triângulos é $32 + 18 + 8 + 2 = 60$.

17. Os oito pontos destacados na figura dividem os lados do quadrado em três partes iguais. Quantos triângulos retângulos podem ser traçados com os três vértices nesses pontos?



A) 8
B) 12
C) 16
D) 24
E) 32

QUESTÃO 17
ALTERNATIVA D

Vamos escolher um ponto entre os pontos destacados; por exemplo, o primeiro ponto à esquerda no lado inferior do quadrado. A figura mostra os três triângulos retângulos que podemos construir com o vértice com o ângulo reto nesse ponto. Como o mesmo acontece com os outros pontos destacados, vemos que o número de triângulos retângulos com vértices nesses pontos é $8 \times 3 = 24$.

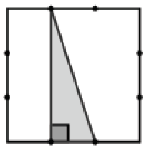


Figura 1

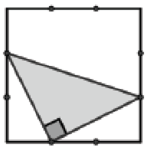


Figura 2

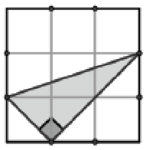
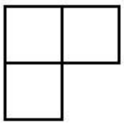


Figura 3

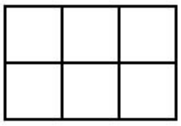
Devemos justificar a afirmativa de que esses triângulos são retângulos. Isso é claro para o triângulo da figura 1. Quanto ao da figura 2, notamos que os dois triângulos retângulos brancos são congruentes, logo seus ângulos com vértice no ponto escolhido somam 90° e, consequentemente, o ângulo do triângulo cinza nesse vértice é também 90°. Finalmente, o triângulo da figura 3 é retângulo pois seus lados menores são diagonais de quadrados, como indicado pelos segmentos mais claros; assim eles fazem ângulo de 45º com o lado inferior do quadrado e o ângulo do triângulo cinza nesse vértice é também 90º.

8 *Tridominós*

Um tridominó é a figura a seguir, que é composta por três quadrados.



Podemos juntar tridominós para formar figuras. Por exemplo, podemos juntar dois tridominós para formar um retângulo 2×3, conforme observa-se abaixo:



a) Mostre que não é possível juntar tridominós (sem sobrepô-los) de maneira a formar um quadrado 3×3.

b) Mostre que não é possível juntar tridominós (sem sobrepô-los) de maneira a formar um quadrado 4×4.

c) Qual o número mínimo de tridominós necessários para formar um quadrado? Justifique.

8 *Tridominós* – *Solução*

a) A única face de um tridominó que possui duas faces vizinhas será chamada de face central do tridominó. Vamos dividir um quadrado 3×3 em nove quadrados 1×1 numerados como abaixo:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Aqui estamos supondo que cada uma das faces quadradas numeradas de 1 a 9 têm a mesma área de cada uma das três faces quadradas usadas para construir o tridominó. Como cada tridominó tem três faces, e o quadrado 3×3 tem nove, caso fosse possível montar tal quadrado usando tridominós, a quantidade de tridominós utilizada seria exatamente três. Abaixo mostraremos que é impossível fazê-lo!

Se quiséssemos montar um quadrado 3×3 juntando peças de tridominós, então alguma das três faces quadradas do tridominó deveria ocupar a posição numerada com o número 5 no quadrado desenhado na figura acima. Temos assim os seguintes casos:

Primeiro caso: A face posicionada sobre a posição de número 5 é uma face central de tridominó.

Nesse caso, temos quatro possibilidades para a posição do tridominó:

- Ele ocupa as posições $4, 5, 8$;
- Ele ocupa as posições $2, 5, 4$;
- Ele ocupa as posições $2, 5, 6$;
- Ele ocupa as posições $6, 5, 8$.

Vamos agora excluir a primeira dessas possibilidades. Se fosse verdade que as três faces quadradas de um tridominó ocupassem as posições $4, 5, 8$, então a única forma de se posicionar um segundo tridominó sobre o restante do quadrado 3×3, seria colocando-o sobre as faces $2, 3, 6$ desse quadrado. Nesse caso, restariam sem ser cobertas as faces do quadrado 3×3 numeradas com 1, 7 e 9. Porém, é impossível posicionar o terceiro tridominó sobre essas três faces!

Isso exclui a primeira das possibilidades listadas acima. As outras três possibilidades apresentadas podem ser excluídas de maneira semelhante.

Segundo caso: A face posicionada sobre a posição de número 5 não é uma face central de tridominó.

Nesse caso, temos as seguintes possibilidades para a posição do tridominó:

- Ele ocupa as posições $5, 2, 1$;
- Ele ocupa as posições $5, 2, 3$;
- Ele ocupa as posições $5, 6, 3$;
- Ele ocupa as posições $5, 6, 9$;
- Ele ocupa as posições $5, 8, 9$;
- Ele ocupa as posições $5, 8, 7$;
- Ele ocupa as posições $5, 4, 7$;
- Ele ocupa as posições $5, 4, 1$.

Vamos agora excluir a primeira dessas possibilidades. Se fosse verdade que as três faces quadradas de um tridominó ocupassem as posições $5, 2, 1$, então teríamos as duas possibilidades para o posicionamento de um segundo tridominó:

i) Um segundo tridominó ficaria posicionado sobre as posições $4, 7, 8$.

Nesse caso, restariam sem ser cobertas as faces do quadrado 3×3 numeradas com 3, 6 e 9. Porém é impossível posicionar o terceiro tridominó sobre essas três faces.

ii) Um segundo tridominó ficaria posicionado sobre as posições $8, 9, 6$.

Nesse caso, restariam sem ser cobertas as faces do quadrado 3×3 numeradas com 3, 4 e 7. Porém é impossível posicionar o terceiro tridominó sobre essas três faces.

Assim, estão excluídos os casos *i)* e *ii)* listados acima, e como consequência, a possibilidade de que um tridominó seja posicionado sobre as posições $5, 2, 1$. As outras sete possibilidades listadas acima excluem-se de maneira semelhante.

Concluímos assim que é impossível formar um quadrado 3×3 juntando peças de tridominó.

b) Um quadrado 4×4 pode ser dividido em 16 faces quadradas 1×1 como mostrado na figura abaixo:

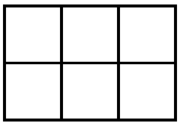
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Aqui estamos supondo que cada uma das faces quadradas numeradas de 1 a 16 têm a mesma área de cada uma das três faces quadradas usadas para construir o tridominó. Como cada tridominó tem três faces, caso fosse possível montar tal quadrado usando tridominós, a quantidade total de faces presentes nesse quadrado deveria ser um múltiplo do número 3. Como 16 não é um múltiplo de 3, é impossível juntar tridominós para formar o quadrado.

c) Já vimos nos item *a*) e *b*) que é impossível juntar tridominós para montar quadrados 3×3 e 4×4 respectivamente.

Utilizamos um argumento análogo ao do item *b*) para mostrar que não é possível também montar um quadrado 5×5. De fato, isso é consequência do fato de que tal quadrado teria um total de 25 faces quadradas 1×1, e 25 não é um múltiplo de 3 (ver a solução do item *b*)).

Vamos porém mostrar que é possível montar um quadrado 6×6. De fato, como foi dito no enunciado do problema, é possível juntar dois tridominós para formar um retângulo 2×3 como o ilustrado a seguir:



Podemos repetir o procedimento mais cinco vezes montando um total de seis desses retângulos 2×3. Para isso seriam necessários então $6 \times 2 = 12$ tridominós.

Podemos agora separar esses seis retângulos em três pares. Para cada um desses pares, podemos pegar os dois retângulos e posicioná-los lado a lado para formar um único retângulo 2×6. Como tínhamos três pares, vamos obter um total de três retângulos 2×6.

Finalmente, posicionamos esses três retângulos um sobre o outro para obter um quadrado 6×6. Como dito anteriormente, foi necessário utilizar uma quantidade de 12 tridominós. Logo, essa é a quantidade mínima de tridominós exigida para se formar um quadrado.

Aula 06 – Conversa

Objetivo:

Conversar com os alunos sobre o trabalho realizado nas aulas anteriores;

Conteúdos:

Raciocínio lógico;

Probabilidade (contagem);

Geometria.

No primeiro momento serão concluídas questões pendentes de aulas anteriores.

Então, será feita uma conversa sobre as questões trabalhadas ao longo das aulas:

Sobre como resolveram?

O que acharam?

As construções ajudaram?

O *software* foi útil?