Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Expansão de Puiseux e normalização de domínios noetherianos semi-locais de dimensão 1

Dissertação de Mestrado

Rafael Cavalheiro

Porto Alegre, Agosto de 2009

Dissertação submetida por Rafael Cavalheiro [1], como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Ivan Pan

Banca examinadora:
Ivan Pan (IM - UFRGS, ORIENTADOR)
Luisa Doering (IM - UFRGS)
Ada Maria Doering (IM - UFRGS)
Walter Ferrer (U. DE LA REP. - URUGUAI)

Data da defesa: 11 de agosto de 2009

[1]Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)

RESUMO

Seja S um domínio noetheriano semi-local de dimensão 1. O objetivo principal deste trabalho é descrever a normalização $\overline{S}$ de S no caso onde $\overline{S}$ é finita sobre S. Demonstramos que $\overline{S}$ pode ser obtido através de um número finito de *blow-ups* no radical de Jacobson. Além disso, se K é um corpo algebricamente fechado com $\mathit{char}(K) = 0$ e S é um domínio local da forma $K[[x,y]]/(F)$, onde $F(x,y) \in K[[x,y]]$ é uma série de potências formal irredutível com $F(0,0) = 0$, demonstramos a existência de uma solução para a equação $F(x,y) = 0$ utilizando séries de Puiseux; em particular obtemos $\overline{S}$ exibindo uma parametrização explícita.

ABSTRACT

Let S be a noetherian semi-local domain of dimension 1. The aim of this work is to describe the normalization $\overline{S}$ of S in the case where $\overline{S}$ is finite over S. We show that $\overline{S}$ may be obtained by a finite number of *blow-ups* in the Jacobson radical. Moreover, if K is an algebraically closed field with $\mathit{char}(K) = 0$ and S is a local domain of the form $K[[x,y]]/(F)$, where $F(x,y) \in K[[x,y]]$ is an irreducible formal power series with $F(0,0) = 0$, we prove that there exist a solution for the equation $F(x,y) = 0$ by using Puiseux series; in particular we obtain $\overline{S}$ by exibing an explicit parametrization.

Sumário

Introdução

Seja K um corpo algebricamente fechado de característica zero. Uma curva algébrica plana $C \subseteq K^2$ é o conjunto de zeros de algum polinômio não constante $F \in K[x,y]$, ou seja,

$$C := \{F=0\} = \left\{ (a,b) \in K^2 \; / \; F(a,b)=0 \right\} .$$

A curva C é irredutível se F pode ser escolhido irredutível (observe-se que para todo $n \geq 1$, F^n define a mesma curva C). Um ponto $(a,b) \in C$ é singular se

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial F}{\partial y}(a,b) = 0 .$$

Se F é irredutível, o conjunto dos pontos singulares de $C := \{F=0\}$ é finito. Com efeito, se não fosse assim teríamos $\frac{\partial F}{\partial x}|_C = \frac{\partial F}{\partial y}|_C = 0$ (ver, por exemplo, [Re, Chapter II, Exercise 3.12]). Por Nullstellensatz existiriam $n_1, n_2 \geq 1$ tais que

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{n_1} , \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{n_2} \in (F) .$$

Da irredutibilidade de F seguiria que $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$, uma contradição já que F não é constante.

Além disso, (a,b) é um ponto singular de $C := \{F(x,y)=0\}$ se e somente se $(0,0)$ é ponto singular de $C' := \{F(x-a, y-b)=0\}$. Isto significa que o conceito de singularidade é invariante por mudanças lineares de variáveis.

Suponhamos que $K = \mathbb{C}$ é o corpo dos números complexos e que $(0,0)$ é um ponto não singular da curva $C := \{F=0\} \subseteq \mathbb{C}^2$, digamos $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) \neq 0$.

Pelo Teorema da Função Implícita (para funções analíticas), existe uma solução da equação $F(x,y)=0$ da forma $y=\phi(x)$, $\phi(0)=0$, com ϕ analítica numa vizinhança da origem, ou seja,

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \, x^i \ ,$$

onde a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \, x^i$ tem raio de convergência positivo. Em particular, obtemos uma parametrização local da curva C num vizinhança da origem:

$$x \mapsto \big(x \, , \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i \, x^i \big) \ .$$

Se $(0,0)$ é um ponto singular, o Teorema da Função Implícita não pode ser aplicado. Não obstante, existe uma forma de generalizar a situação acima neste caso.

Mais precisamente, suponhamos que o polinômio F é irredutível quando considerado como série de potências (formal) em duas variáveis, $F(x,y) \in K[[x,y]]$. Fazendo uma mudança linear de variáveis podemos assumir que, para um certo $m \geq 1$, todas as derivadas parciais de ordem $\leq m-1$ se anulam em $(0,0)$ e que $\frac{\partial^m F}{\partial y^m}(0,0) \neq 0$. Então temos uma solução da equação $F(x,y)=0$ da forma

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \, x^{i/m} \ ,$$

onde $x^{1/m}$ indica uma raiz do polinômio $T^m - x \in K((x))[T]$ no seu fecho algébrico ($K((x))$ denota o corpo de frações de $K[[x]]$).

A escrita $y = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \, x^{i/m}$ é conhecida como Expansão de Puiseux de F em $(0,0)$, cuja existência demonstraremos em 2.2. Este é o primeiro resultado fundamental do trabalho. O corolário mais importante deste resultado é que $K[[t]]$ é a normalização do anel $K[[x,y]]/(F)$.

Por outro lado, $A := K[x,y]/(F)$ é um domínio noetheriano de dimensão 1. Se $p_1, \ldots, p_\ell \in C$ são os pontos singulares de C, consideramos os ideais maximais de $K[x,y]$

$$\mathfrak{M}_i := \{ \ G \in K[x,y] \ / \ G(p_i) = 0 \ \} \supseteq (F)$$

e os correspondentes ideais maximais $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{M}_i + (F)$ de A. Tomando o conjunto multiplicativo $\mathcal{S} := A \backslash \bigcup_{i=1}^{\ell} \mathfrak{m}_i$, o anel de localização $S := \mathcal{S}^{-1}A$ é um domínio noetheriano semi-local de dimensão 1, com ideais maximais $\mathcal{S}^{-1}\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathcal{S}^{-1}\mathfrak{m}_\ell$. Além disso, a normalização $\overline{S}$ de S é finita sobre S (ver argumento no Exemplo 3.2.4). O segundo resultado fundamental deste trabalho descreve um algoritmo para obter a normalização de S (Capítulo 3).

O objetivo da dissertação foi o de estudar em detalhes os resultados das Seções 1.11, 1.12 e 1.13 de [Ko], focando-se na parte algébrica das demonstrações. A maioria dos pré-requisitos para a leitura deste trabalho encontra-se em [AM] e na Seção 6 de [Ma]. Alguns poucos encontram-se nas outras referências.

Observemos ainda que em [Ko] os resultados são um pouco mais gerais que os descritos neste trabalho. Mais precisamente, lá não se exige que o corpo K do Teorema 2.2.3 seja de característica zero nem que o anel S do Capítulo 3 seja um domínio (ver [Ko, Chapter 1, Theorems 1.96 and 1.101]).

Capítulo 1

Esquemas

Neste capítulo descrevemos algumas definições básicas e demonstramos algumas propriedades sobre esquema que serão utilizados no Capítulo 3.

1.1 Feixes

Definição 1.1.1. *Seja* X *um espaço topológico. Um* pré-feixe $\mathscr{F}$ *de anéis em* X *consiste de,*

(a) *para cada subconjunto aberto* U *de* X *, um anel comutativo com unidade* $\mathscr{F}(U)$ *e,*

(b) *para cada inclusão* $V \subseteq U$ *de subconjuntos abertos de* X *, um homomorfismo* $\rho_{UV} : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$

tais que

(i) $\mathscr{F}(\varnothing) = 0$,

(ii) $\rho_{UU} : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(U)$ *é a identidade para todo aberto* U *de* X *, e*

(iii) *se* $W \subseteq V \subseteq U$ *são subconjuntos aberto de* X *, então* $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$.

Os elementos de $\mathscr{F}(U)$ são chamados *seções* do pré-feixe $\mathscr{F}$ no aberto U e os elementos de $\mathscr{F}(X)$ são chamados *seções globais*. As funções ρ_{UV} são chamadas funções *restrição* do pré-feixe $\mathscr{F}$ e, se $s \in \mathscr{F}(U)$, denotaremos $s|_V$ em vez de $\rho_{UV}(s)$.

Se U é um subconjunto aberto de X, então um subconjunto de U é aberto em U (condiderando a topologia induzida de X) se e somente se é aberto em X. Assim, temos um pré-feixe natural $\mathscr{F}|_U$ no espaço topológico U, onde, para um aberto V de U, $\mathscr{F}|_U(V) := \mathscr{F}(V)$ e as restrições de $\mathscr{F}|_U$ são as respectivas restrições de $\mathscr{F}$.

Definição 1.1.2. *Um pré-feixe $\mathscr{F}$ em um espaço topológico X é um* feixe *se para todo subconjunto aberto U de X e toda cobertura $U = \bigcup U_i$ de U por meio de abertos U_i de X, tem-se o seguinte:*

(iv) *se $s \in \mathscr{F}(U)$ é tal que $s|_{U_i} = 0$ para todo i, então $s = 0$;*

(v) *dados $s_i \in \mathscr{F}(U_i)$ para cada i, se $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ para todo i e todo j, então existe $s \in \mathscr{F}(U)$ tal que $s|_{U_i} = s_i$ para todo i.*

É fácil verificar que se U é um subconjunto aberto de X e o pré-feixe $\mathscr{F}$ é um feixe em X, então o pré-feixe $\mathscr{F}|_U$ é um feixe em U.

Definição 1.1.3. *Seja X um espaço topológico, $\mathscr{F}$ um pré-feixe em X e p um ponto de X. Definimos o stalk $\mathscr{F}_p$ de $\mathscr{F}$ em p como segue:*

$$\mathscr{F}_p := \Big\{ (U,s) \Big/ U \text{ é uma vizinhança de } p \text{ e } s \in \mathscr{F}(U) \Big\} \Big/ \sim$$

onde $(U,s) \sim (V,t)$ quando existe uma vizinhança W de p contida em $U \cap V$ tal que $s|_W = t|_W$ em $\mathscr{F}(W)$. Denotaremos $\langle U, s \rangle$ a classe de equivalência de (U,s).

Proposição 1.1.4. *O stalk* $\mathscr{F}_p$ *é um anel comutativo com unidade.*

Demonstração: Definimos as operações de soma e multiplicação em $\mathscr{F}_p$ como segue. Dados $\langle U, s \rangle, \langle V, t \rangle \in \mathscr{F}_p$, pela definição de $\mathscr{F}_p$ temos

$$\langle U, s \rangle = \langle U \cap V, s|_{U\cap V} \rangle \qquad \text{e} \qquad \langle V, t \rangle = \langle U \cap V, t|_{U\cap V} \rangle .$$

Definimos então

$$\begin{aligned} \langle U, s \rangle + \langle V, t \rangle &:= \langle U \cap V, s|_{U\cap V} + t|_{U\cap V} \rangle \\ \langle U, s \rangle \cdot \langle V, t \rangle &:= \langle U \cap V, s|_{U\cap V} \cdot t|_{U\cap V} \rangle \end{aligned}$$

Estas operações são ambas comutativas e associativas, a multiplicação é distributiva em relação à soma e $\langle X, 0 \rangle$ e $\langle X, 1 \rangle$ são os respectivos elementos neutros da soma e multiplicação. Além disso, se $\langle U, s \rangle \in \mathscr{F}_p$ então o elemento $\langle U, -s \rangle$ é o simétrico de $\langle U, s \rangle$. $\square$

Definição 1.1.5. *Seja* X *um espaço topológico e* $\mathscr{F}$ *e* $\mathscr{G}$ *pré-feixes em* X. *Um* morfismo *de pré-feixes* $\psi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ *consiste de um homomorfismo* $\psi_U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ *para cada aberto* U *de* X *de forma que, para toda inclusão* $V \subseteq U$ *de abertos de* X, *o diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(U) \arrow[r, "\psi_U"] \arrow[d] & \mathscr{G}(U) \arrow[d] \\ \mathscr{F}(V) \arrow[r, "\psi_V"'] & \mathscr{G}(V) \end{tikzcd}$$

comuta (as flechas verticais representam as respectivas restrições de $\mathscr{F}$ *e* $\mathscr{G}$ *).*

Se $\mathscr{F}$ *e* $\mathscr{G}$ *forem ambos feixes em* X, *então dizemos que* ψ *é um morfismo de feixes.*

O morfismo ψ *é um* isomorfismo *se cada* ψ_U *é um isomorfismo.*

Notemos que um morfismo de pré-feixes $\psi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ em X induz, para cada ponto p de X, um homomorfismo entre os respectivos *stalks*:

$$\begin{aligned} \psi_p : \mathscr{F}_p &\to \mathscr{G}_p \\ \langle U, s \rangle &\mapsto \langle U, \psi_U(s) \rangle \end{aligned}$$

De fato, se $\langle U, s \rangle = \langle V, t \rangle$ em $\mathscr{F}_p$, então existe um aberto W de X contido em $U \cap V$, tal que $s|_W = t|_W$ em $\mathscr{F}(W)$. Pela definição de morfismo, temos

$$\big(\psi_U(s)\big)|_W = \psi_W(s|_W) = \psi_W(t|_W) = \big(\psi_V(t)\big)|_W$$

em $\mathscr{G}(W)$, donde $\langle U, \psi_U(s) \rangle = \langle V, \psi_V(t) \rangle$ em $\mathscr{G}_p$. Portanto ψ_p está bem definida. Além disso, como cada ψ_U é um homomorfismo, é fácil verificar que ψ_p é um homomorfismo.

Observação 1.1.6. *É possível demonstrar que se $\psi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ é um morfismo de feixes em X, então ψ é um isomorfismo se e somente se $\psi_p : \mathscr{F}_p \to \mathscr{G}_p$ é um isomorfismo para todo $p \in X$* (ver [Ha, Chapter 2, Proposition 1.1]).

Sejam X e Y espaços topológicos e $\mathscr{F}_X$ é um pré-feixe de anéis em X. Uma função contínua $\phi : X \to Y$ induz um pré-feixe de anéis $\phi_*\mathscr{F}_X$ em Y. De fato, se U é um aberto de Y, então $\phi^{-1}(U)$ é um aberto de X. Definimos daí $\phi_*\mathscr{F}_X(U) := \mathscr{F}_X(\phi^{-1}(U))$ e consideramos as respectivas restrições de $\mathscr{F}_X$. É facil verificar que $\phi_*\mathscr{F}_X$ assim definido satisfaz os axiomas da Definição 1.1.1, portanto é um pré-feixe de anéis em Y. Também é fácil verificar que se $\mathscr{F}_X$ é um feixe de anéis em X, então $\phi_*\mathscr{F}_X$ é um feixe de anéis em Y. Para isso basta notar que, se $U = \bigcup U_i$ então $\phi^{-1}(U) = \bigcup \phi^{-1}(U_i)$ e $\phi^{-1}(U_i \cap U_j) = \phi^{-1}(U_i) \cap \phi^{-1}(U_j)$ para todo i e todo j, e que além disso, se $V \subseteq U$ é uma inclusão de abertos de Y e $s \in \phi_* \mathscr{F}_X(U) = \mathscr{F}_X(\phi^{-1}(U))$, então por definição, o elemento $s|_V$ de $\phi_* \mathscr{F}_X(V)$ é o elemento $s|_{\phi^{-1}(V)}$ de $\mathscr{F}_X(\phi^{-1}(V))$.

Definição 1.1.7. *Um* espaço anelado *é um par* $\left(X, \mathscr{F}\right)$ *consistindo de um espaço topológico* X *e um feixe de anéis* $\mathscr{F}$ *em* X *.*

Um morfismo de espaços anelados $\left(\phi, \phi^{\#}\right) : \left(X, \mathscr{F}_X\right) \to \left(Y, \mathscr{F}_Y\right)$ *é um par* $\left(\phi, \phi^{\#}\right)$ *consistindo de uma função contínua* $\phi : X \to Y$ *e um morfismo* $\phi^{\#} : \mathscr{F}_Y \to \phi_* \mathscr{F}_X$ *de feixes de anéis em* Y *.*

O morfismo $\left(\phi, \phi^{\#}\right)$ *é um* isomorfismo *se* ϕ *é um homeomorfismo de espaços topológicos e* $\phi^{\#}$ *é um isomorfismo de feixes em* Y *.*

Observemos que um morfismo $\left(\phi, \phi^{\#}\right) : \left(X, \mathscr{F}_X\right) \to \left(Y, \mathscr{F}_Y\right)$ de espaços anelados $\left(X, \mathscr{F}_X\right)$ e $\left(Y, \mathscr{F}_Y\right)$ induz, para cada $p \in X$, um homomorfismo entre os *stalks* $\left(\mathscr{F}_Y\right)_{\phi(p)}$ e $\left(\mathscr{F}_X\right)_p$:

$$\begin{aligned} \phi_p^{\#} : \left(\mathscr{F}_Y\right)_{\phi(p)} &\to \left(\mathscr{F}_X\right)_p \\ \langle U, s \rangle &\mapsto \left\langle \phi^{-1}(U), \phi_U^{\#}(s) \right\rangle. \end{aligned}$$

Antes de tudo, devemos nos convencer que esta aplicação está bem definida. Ora, dado $p \in X$, se U é uma vizinhança de $\phi(p)$ em Y , então $\phi^{-1}(U)$ é uma vizinhança de p em X . Também, pela definição de morfismo de feixes, temos um homomorfismo de anéis $\phi_U^{\#} : \mathscr{F}_Y(U) \to \phi_* \mathscr{F}_X(U) := \mathscr{F}_X(\phi^{-1}(U))$. Assim se $\langle U, s \rangle$ é um elemento do *stalk* $\left(\mathscr{F}_Y\right)_{\phi(p)}$ então $\left\langle \phi^{-1}(U), \phi_U^{\#}(s) \right\rangle$ é um elemento do *stalk* $\left(\mathscr{F}_X\right)_p$.

Além disso, se $\langle U, s \rangle = \langle V, t \rangle$ em $\left(\mathscr{F}_Y\right)_{\phi(p)}$, então existe uma vizinhança W de $\phi(p)$ contida em $U \cap V$ tal que $s|_W = t|_W$ em $\mathscr{F}_Y(W)$. Isso implica que $\phi^{-1}(W)$ é uma vizinhança de p contida em $\phi^{-1}(U) \cap \phi^{-1}(V)$ e, pela definição de morfismo,

$$\left(\phi_U^{\#}(s)\right)|_W = \phi_W^{\#}(s|_W) = \phi_W^{\#}(t|_W) = \left(\phi_V^{\#}(t)\right)|_W \qquad \text{em} \quad \phi_* \mathscr{F}_X(W)$$

ou seja,

$$\left(\phi_U^{\#}(s)\right)|_{\phi^{-1}(W)} = \left(\phi_V^{\#}(t)\right)|_{\phi^{-1}(W)} \qquad \text{em} \quad \mathscr{F}_X\left(\phi^{-1}(W)\right) .$$

Portanto $\left\langle \phi^{-1}(U), \phi_U^{\#}(s) \right\rangle = \left\langle \phi^{-1}(V), \phi_V^{\#}(t) \right\rangle$ em $\left(\mathscr{F}_X\right)_p$ e $\phi_p^{\#}$ está bem definida.

Por outro lado, como cada $\phi_U^{\#}$ é um homomorfismo, é fácil verificar que cada $\phi_p^{\#}$ é também um homomorfismo.

Definição 1.1.8. *Um espaço anelado* $\left(X, \mathscr{F}_X\right)$ *é um* espaço anelado local *se, para cada* $p \in X$ *, o stalk* $\mathscr{F}_p$ *é um anel local.*

Um morfismo de espaços anelados locais *é um morfismo de espaços anelados* $\left(\phi, \phi^{\#}\right) : \left(X, \mathscr{F}_X\right) \to \left(Y, \mathscr{F}_Y\right)$ *, tal que, para cada* $p \in X$ *, o homomorfismo induzido* $\phi_p^{\#} : \left(\mathscr{F}_Y\right)_{\phi(p)} \to \left(\mathscr{F}_X\right)_p$ *é um homomorfismo local.*

O morfismo $\left(\phi, \phi^{\#}\right)$ *é um* isomorfismo *se* ϕ *é um homeomorfismo de espaços topológicos e* $\phi^{\#}$ *é um isomorfismo de feixes em* Y *.*

Observação 1.1.9. *Se* A *e* B *são anéis (comutativos com unidade) locais com ideais maximais* $\mathfrak{m}_A$ *e* $\mathfrak{m}_B$ *respectivamente, um homomorfismo* $\varphi : A \to B$ *é um* homomorfismo local *quando* $\varphi^{-1}(\mathfrak{m}_B) = \mathfrak{m}_A$ *.*

Seja $\left(X, \mathscr{F}\right)$ um espaço anelado. É fácil verificar, usando a definição de *stalk*, que se U é um aberto de X e p é um ponto de U , então $\left(\mathscr{F}|_U\right)_p \cong \mathscr{F}_p$. Em particular, se $\left(X, \mathscr{F}\right)$ é um espaço anelado local então $\left(U, \mathscr{F}|_U\right)$ também é.

1.2 Esquemas

1.2.1 Caso afim

Seja A um anel comutativo com unidade. Denotaremos $\mathcal{Spec}\,(A)$ o conjunto dos ideais primos de A.

Exemplo 1.2.1.
$\mathcal{Spec}\,(K) = \{(0)\}$ *para qualquer corpo* K.
$\mathcal{Spec}\,(\mathbb{Z}) = \{(0)\} \cup \{\ (p) \ /\ p \in \mathbb{Z}$ *tal que* p *é primo* $\}$.

Exemplo 1.2.2. *Seja K um corpo e seja $K[x]$ o anel de polinômios em uma variável sobre K. O anel $K[x]$ é um Domínio de Ideais Principais (DIP) e portanto um Domínio de Fatoração Única (DFU). Assim*

$$\mathcal{Spec}\,(K[x]) = \{(0)\} \cup \left\{ \big(p(x)\big) \ /\ p(x) \text{ é mônico e irredutível em } K[x] \right\}.$$

Se além disso K for algebricamente fechado, então os únicos polinômios mônicos irredutíveis em $K[x]$ são os da forma $x-a$ para algum $a \in K$. Nesse caso temos

$$\mathcal{Spec}\,(K[x]) = \{(0)\} \cup \left\{ \big(x-a\big) \ /\ a \in K \right\}.$$

Em particular

$$\begin{aligned} \mathcal{Spec}\,(\mathbb{R}[x]) &= \{(0)\} \cup \left\{ \big(x-r\big) \ /\ r \in \mathbb{R} \right\} \\ &\quad \cup \left\{ \big(x^2+ax+b\big) \ /\ a,b \in \mathbb{R} \text{ e } x^2+ax+b \text{ não possui raiz real} \right\}. \\ \mathcal{Spec}\,(\mathbb{C}[x]) &= \{(0)\} \cup \left\{ \big(x-a\big) \ /\ a \in \mathbb{C} \right\}. \end{aligned}$$

Dado um ideal $\mathfrak{a}$ de A, denotaremos

$$V_A\,(\mathfrak{a}) := \left\{ \mathfrak{p} \in \mathcal{Spec}\,(A) \ /\ \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a} \right\},$$

ou simplesmente $V(\mathfrak{a})$ quando ficar subentendido a que anel estamos nos referindo. Se f é um elemento de A, escreveremos simplesmente $V(f)$ em vez de $V((f))$.

Como mostra a proposição a seguir, os subconjuntos de $\mathcal{S}pec(A)$ da forma $V(\mathfrak{a})$, com $\mathfrak{a}$ ideal de A, satisfazem os axiomas de subconjuntos fechados de um espaço topológico. Esta topologia é chamada *topologia de Zariski* de $\mathcal{S}pec(A)$.

Proposição 1.2.3. *Sejam $f \in A$ e $(\mathfrak{a}_i)_{i\in I}$ uma família de ideais de A.*
(i) $V(A) = \varnothing$ *e* $V(0) = \mathcal{S}pec(A)$.
(ii) $\bigcap_{i\in I} V(\mathfrak{a}_i) = V\left(\left(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{a}_i\right)\right) = V\left(\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i\right)$.
(iii) $V(\mathfrak{a}_i) \cup V(\mathfrak{a}_j) = V(\mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{a}_j) = V(\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_j)$.
(iv) $V(\mathfrak{a}_i) = V(\sqrt{\mathfrak{a}_i})$, *onde* $\sqrt{\mathfrak{a}_i} = \left\{ a \in A \,/\, a^n \in \mathfrak{a}_i, \ \textit{para algum} \ n \geq 1 \right\}$ *é o* ideal radical *de* $\mathfrak{a}_i$. *Em particular* $V(f) = V(f^n)$ *para todo* $n \geq 1$.
(v) $V(\mathfrak{a}_i) \subseteq V(\mathfrak{a}_j) \iff \sqrt{\mathfrak{a}_i} \supseteq \sqrt{\mathfrak{a}_j}$.
(vi) $V(f) = \mathcal{S}pec(A) \iff f$ *é nilpotente;*
(vii) $V(f) = \varnothing \iff f$ *é invertível;*

Demonstração: (i) Trivial
(ii) Um ideal primo $\mathfrak{p}$ de A pertence a $\bigcap_{i\in I} V(\mathfrak{a}_i)$ se e somente se $\mathfrak{p}$ contém cada $\mathfrak{a}_i$, o que acontece se e somente se $\mathfrak{p} \supseteq \bigcup_{i\in I} \mathfrak{a}_i$, portanto, se e somente se $\mathfrak{p} \in V\left(\left(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{a}_i\right)\right)$. Além disso, é fácil verificar que $\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i$ é o ideal gerado por $\bigcup_{i\in I} \mathfrak{a}_i$.
(iii) Se um ideal primo $\mathfrak{p}$ de A contém $\mathfrak{a}_i$ ou $\mathfrak{a}_j$ então $\mathfrak{p}$ também contém a interseção $\mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{a}_j$, a qual por sua vez contém o produto $\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_j$. Portanto $V(\mathfrak{a}_i) \cup V(\mathfrak{a}_j) \subseteq V(\mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{a}_j) \subseteq V(\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_j)$.

Por outro lado, se $\mathfrak{p}$ não contém nem $\mathfrak{a}_i$ nem $\mathfrak{a}_j$, então existem $a \in \mathfrak{a}_i$ e $b \in \mathfrak{a}_j$ tais que $a, b \notin \mathfrak{p}$. Daí $ab \in \mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_j$, mas $ab \notin \mathfrak{p}$ (pois $\mathfrak{p}$ é primo), portanto $\mathfrak{p}$ não contém o produto $\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_j$. Assim, vale também a inclusão $V(\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_j) \subseteq V(\mathfrak{a}_i) \cup V(\mathfrak{a}_j)$.

(iv) Seja $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}_i)$. Dado $a \in \sqrt{\mathfrak{a}_i}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n \in \mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{p}$. Sendo $\mathfrak{p}$ um ideal primo, segue que $a \in \mathfrak{p}$. Isso mostra que $V(\mathfrak{a}_i) \subseteq V(\sqrt{\mathfrak{a}_i})$. Por outro lado, como $\mathfrak{a}_i \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}_i}$, é evidente que $V(\mathfrak{a}_i) \supseteq V(\sqrt{\mathfrak{a}_i})$.

(v) $V(\mathfrak{a}_i) \subseteq V(\mathfrak{a}_j)$ significa que todo ideal primo de A que contém $\mathfrak{a}_i$ também contém $\mathfrak{a}_j$. Assim, se $V(\mathfrak{a}_i) \subseteq V(\mathfrak{a}_j)$, então

$$\sqrt{\mathfrak{a}_i} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathcal{S}pec(A) \\ \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}_i}} \mathfrak{p} \supseteq \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathcal{S}pec(A) \\ \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}_j}} \mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{a}_j}.$$

(ver [AM, Chapter 1, Proposition 1.14]). Por outro lado, se $\sqrt{\mathfrak{a}_i} \supseteq \sqrt{\mathfrak{a}_j}$, então, pelo item (iv), temos

$$V(\mathfrak{a}_i) = V(\sqrt{\mathfrak{a}_i}) \subseteq V\left(\sqrt{\mathfrak{a}_j}\right) = V(\mathfrak{a}_j).$$

(vi) Seja $\mathcal{N}(A)$ o conjunto de elementos nilpotentes de A . Temos

$$\mathcal{N}(A) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathcal{S}pec(A)} \mathfrak{p}.$$

(ver [AM, Chapter 1, Proposition 1.8]). Assim, f é nilpotente se e somente se f pertence a todo ideal primo de A , ou seja, se e somente se $V(f) = \mathcal{S}pec(A)$.

(vii) Se f é invertível então $(f) = A$, donde $V(f) = V(A) = \varnothing$. Por outro lado, se f não é invertível existe em A um ideal maximal, portanto primo, que contém f (ver [AM, Chapter 1, Corollary 1.5]). O que implica $V(f) \neq \varnothing$. □

Exemplo 1.2.4. *Seja* A *um anel comutativo com unidade. Os únicos pontos fechados de* $\mathcal{S}pec(A)$ *são os ideais maximais de* A *. Com efeito, se* $\mathfrak{m}$ *é um ideal maximal de* A *então*

$$\{\mathfrak{m}\} = V(\mathfrak{m}).$$

Por outro lado se $\mathfrak{p} \subseteq A$ *é um ideal primo que não é maximal então existe (pelo menos) um ideal maximal* $\mathfrak{m} \subseteq A$ *tal que* $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m}$ (ver [AM, Chapter 1, Corollary 1.4]). *Assim o fecho de* $\{\mathfrak{p}\}$ *, que é* $V(\mathfrak{p})$ *, contém pelo menos dois pontos,* $\mathfrak{p}$ *e* $\mathfrak{m}$ *.*

Exemplo 1.2.5. *Seja* K *um corpo algebricamente fechado. Vimos no Exemplo 1.2.2 que*

$$\mathcal{S}pec\,(K[x]) \;=\; \{(0)\} \,\cup\, \left\{\, \big(x-a\big) \;/\; a \in K \,\right\}.$$

O único destes ideais que não é maximal é (0) *. Pelo exemplo anterior* (0) *é o único ponto de* $\mathcal{S}pec\,(K[x])$ *que não é fechado. Afirmamos que os únicos conjuntos fechados de* $\mathcal{S}pec\,(K[x])$ *além de* $\mathcal{S}pec\,(K[x])$ *e* $\varnothing$ *são as uniões finitas de pontos que são ideais maximais de* $K[x]$ *. De fato, seja* $\varnothing \neq V\,(\mathfrak{a}) \subsetneq \mathcal{S}pec\,(K[x])$ *um subconjunto próprio, não vazio e fechado de* $\mathcal{S}pec\,(K[x])$ *. Então* $\mathfrak{a} \neq (0)$ *. Tomando* $p(x) \in \mathfrak{a}\backslash(0)$ *ele escreve-se unicamente como*

$$p(x) \;=\; c\,(x-a_1)\cdots(x-a_n) \qquad \textit{para certos} \quad c, a_1, \ldots, a_n \in K.$$

Assim os únicos ideais primos de $K[x]$ *que contém* $p(x)$ *são* $\big(x-a_1\big), \ldots, \big(x-a_n\big)$ *. Em particular*

$$V\,(\mathfrak{a}) \;\subseteq\; \big\{\big(x-a_1\big), \ldots, \big(x-a_n\big)\big\}$$

e isso demonstra a afirmação.

Dado $f \in A$, denotaremos $D_A\,(f)$, ou simplesmente $D\,(f)$ quando estiver subentendido o anel a que estamos nos referindo, o aberto complementar de $V\,(f)$ em $\mathcal{S}pec\,(A)$.

Os abertos desse tipo formam uma base de abertos para a topologia de Zariski. De fato, por definição, um subconjunto de um espaço topológico é aberto se e somente se seu complementar é fechado. Assim todo aberto de $\mathcal{S}pec\,(A)$ é da forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}pec\,(A) - V(\mathfrak{a}) &= \mathcal{S}pec\,(A) - V\left(\bigcup_{f\in\mathfrak{a}}(f)\right) \\
&= \mathcal{S}pec\,(A) - \bigcap_{f\in\mathfrak{a}} V(f) \\
&= \bigcup_{f\in\mathfrak{a}} \big(\mathcal{S}pec\,(A) - V(f)\big) \\
&= \bigcup_{f\in\mathfrak{a}} D(f)
\end{aligned}$$

para algum ideal $\mathfrak{a}$ de A.

A proposição abaixo segue imediatamente da Proposição 1.2.3, tomando complementares.

Proposição 1.2.6. *Sejam* $f, g \in A$.

(i) $D(f) \cap D(g) = D(fg)$, *em particular* $D(f) = D(f^n)$ *para todo* $n \geq 1$;

(ii) $D(f) = \varnothing \iff f$ *é nilpotente;*

(iii) $D(f) = \mathcal{S}pec\,(A) \iff f$ *é invertível;*

(iv) $D(f) \subseteq D(g) \iff f \in \sqrt{(g)}$.

□

Seja $\varphi : A \to B$ um homomorfismo de anéis. Se $\mathfrak{p}$ é um ideal primo de B, então $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ é um ideal primo de A. Assim φ induz a aplicação

$$\begin{aligned}
\varphi^* : \mathcal{S}pec\,(B) &\to \mathcal{S}pec\,(A) \\
\mathfrak{p} &\mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{p})
\end{aligned}$$

É imediato verificar que se $\varphi : A \to B$ e $\psi : B \to C$ são homomorfismos, então $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$. Além disso, ${id_A}^* = id_{\mathcal{S}pec(A)}$ para todo anel A. Por essa razão diz-se que a correspondência

$$\begin{aligned} A &\mapsto \mathcal{S}pec\,(A) \\ A \xrightarrow{\varphi} B &\mapsto \mathcal{S}pec\,(B) \xrightarrow{\varphi^*} \mathcal{S}pec\,(A) \end{aligned}$$

é um *funtor contravariante.*

Exemplo 1.2.7. *Seja* $\mathfrak{a}$ *um ideal de* A *. A projeção canônica* $\pi : A \to A/\mathfrak{a}$ *induz a aplicação* $\pi^* : \mathcal{S}pec\,(A/\mathfrak{a}) \to \mathcal{S}pec\,(A)$ *, a qual leva fechados de* $\mathcal{S}pec\,(A/\mathfrak{a})$ *em fechados de* $\mathcal{S}pec\,(A)$ *. Mais precisamente, um ideal de* $A/\mathfrak{a}$ *é da forma* $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ *para algum ideal* $\mathfrak{b}$ *de* A *que contém* $\mathfrak{a}$ *, e* $\pi^*\left(V_{A/\mathfrak{a}}\,(\mathfrak{b}/\mathfrak{a})\right) = V_A\,(\mathfrak{b})$ *.*

Proposição 1.2.8. *Se* $f \in A$ *então*

$$(\varphi^*)^{-1}\,(D_A\,(f)) = D_B\,(\varphi\,(f))\,.$$

Em particular φ^* *é contínua.*

Além disso, se φ *é sobrejetiva, então* φ^* *é um homeomorfismo de* $\mathcal{S}pec\,(B)$ *sobre sua imagem* $V_A\,(\mathcal{K}er\,(\varphi))$ *. Assim, dado um ideal* $\mathfrak{a}$ *de* A *,* $\mathcal{S}pec\,(A/\mathfrak{a})$ *é naturalmente homeomorfo a* $V_A\,(\mathfrak{a})$ *. Em particular,* $\mathcal{S}pec\,(A)$ *é naturalmente homeomorfo a* $\mathcal{S}pec\,(A/\mathcal{N}\,(A))$ *, onde* $\mathcal{N}\,(A)$ *é o nilradical de* A *.*

Demonstração: $\mathfrak{p} \in (\varphi^*)^{-1}\,(D_A\,(f))$ se e somente se $\mathfrak{p}$ é um primo de B tal que $\varphi^*\,(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}\,(\mathfrak{p}) \in D_A\,(f)$, ou seja, tal que $\varphi^{-1}\,(\mathfrak{p})$ é um primo de A que não contém f . Mas $f \notin \varphi^{-1}\,(\mathfrak{p})$ se e somente se $\varphi\,(f) \notin \mathfrak{p}$. Logo $\mathfrak{p} \in (\varphi^*)^{-1}\,(D_A\,(f))$ se e somente se $\mathfrak{p} \in D_B\,(\varphi\,(f))$.

Dado então um aberto qualquer $\bigcup D_A\,(f)$ de $\mathcal{S}pec\,(A)$, sua imagem inversa

$$(\varphi^*)^{-1}\left(\bigcup D_A\,(f)\right) = \bigcup (\varphi^*)^{-1}\,(D_A\,(f)) = \bigcup D_B\,(\varphi\,(f))$$

é um aberto de $\mathcal{S}pec\,(B)$. Logo φ^* é contínua.

Supomos agora que φ é sobrejetiva. Temos um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & B \\ A/\mathcal{k}er\,(\varphi) \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

que induz o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}pec\,(A) & \mathcal{S}pec\,(B) \arrow[l, "\varphi^*"'] \arrow[dl, "\psi^*"] \\ \mathcal{S}pec\,(A/\mathcal{k}er\,(\varphi)) \arrow[u, "\pi^*"] & \end{tikzcd}$$

Como φ é sobrejetiva, ψ é um isomorfismo, donde segue imediatamente que ψ^* é um homeomorfismo. Por outro lado, pela parte já demonstrada, π^* é contínua e como leva fechados em fechados (exemplo 1.2.7) é um homeomorfismo sobre sua imagem $V\,(\mathcal{k}er\,(\varphi))$. Logo $\varphi^* = (\psi \circ \pi)^* = \pi^* \circ \psi^*$ é um homeomorfismo sobre sua imagem $V\,(\mathcal{k}er\,(\varphi))$. $\square$

Seja $\mathfrak{a}$ um ideal de A . Se $\mathfrak{a}^e = \varphi\,(\mathfrak{a}) \cdot B$ é a extensão de $\mathfrak{a}$ em B , está bem definido o homomorfismo

$$\begin{aligned} \overline{\varphi} :\ A/\mathfrak{a} &\rightarrow B/\mathfrak{a}^e \\ a + \mathfrak{a} &\mapsto \varphi\,(a) + \mathfrak{a}^e \end{aligned}$$

Temos então um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A/\mathfrak{a} \arrow[r, "\overline{\varphi}"'] & B/\mathfrak{a}^e \end{tikzcd}$$

que induz o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}pec\,(A) & \mathcal{S}pec\,(B) \arrow[l, "\varphi^*"'] \\ \mathcal{S}pec\,(A/\mathfrak{a}) \arrow[u] & \mathcal{S}pec\,(B/\mathfrak{a}^e) \arrow[l, "\overline{\varphi}^*"] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Seja $\mathcal{S}$ um subconjunto multiplicativo de A . O homomorfismo canônico

$$\begin{array}{rcl} \tau_{\mathcal{S}} : \ A & \to & \mathcal{S}^{-1}A \\ a & \mapsto & \dfrac{a}{1} \end{array}$$

induz a aplicação $\tau_{\mathcal{S}}^{*} : \mathcal{S}pec\,(\mathcal{S}^{-1}A) \to \mathcal{S}pec\,(A)$, a qual é uma bijeção entre os ideais primos de $\mathcal{S}^{-1}A$ e os ideais primos de A que não interseptam $\mathcal{S}$. Mais precisamente, um ideal de $\mathcal{S}^{-1}A$ é primo se e somente se é da forma

$$\mathcal{S}^{-1}\mathfrak{p} \ = \ \left\{ \ \frac{a}{s} \ \Big/ \ a \in \mathfrak{p} \ , \ s \notin \mathcal{S} \ \right\}$$

para algum ideal primo $\mathfrak{p}$ de A que não intersepta $\mathcal{S}$ e

$$\tau_{\mathcal{S}}^{*}\left(\mathcal{S}^{-1}\mathfrak{p}\right) \ := \ \tau_{\mathcal{S}}^{-1}\left(\mathcal{S}^{-1}\mathfrak{p}\right) \ = \ \mathfrak{p}$$

(ver [AM, Chapter 3, Proposition 3.11]).

Um caso particular importante é quando fixamos um elemento f de A e tomamos o subconjunto multiplicativo $\mathcal{S} := \{1, f, f^2, \ldots\}$. Nesse caso denotamos $A_f := \mathcal{S}^{-1}A$. Pelo exposto acima, existe uma correspondência biunívoca natural entre $\mathcal{S}pec\,(A_f)$ e o aberto $D\,(f)$ de $\mathcal{S}pec\,(A)$.

Outro caso particular importante é quando fixamos um primo $\mathfrak{p}$ de A e tomamos o subconjunto multiplicativo $\mathcal{S} := A - \mathfrak{p}$. Nesse caso denotamos $A_{\mathfrak{p}} := \mathcal{S}^{-1}A$. Pelo exposto acima, existe uma correspondência biunívoca natural entre $\mathcal{S}pec\,(A_{\mathfrak{p}})$ e o conjunto dos ideais primos de A contidos em $\mathfrak{p}$. Além disso, todo ideal próprio de $A_{\mathfrak{p}}$ deve estar contido na extensão $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ de $\mathfrak{p}$ em $A_{\mathfrak{p}}$ (ver [AM, Chapter 3, Proposition 3.11]). Assim, $A_{\mathfrak{p}}$ é um anel local com ideal maximal $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. Em particular $K\,(\mathfrak{p}) := A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ é um corpo, chamado *corpo de resíduos* de $A_{\mathfrak{p}}$.

Proposição 1.2.9. *A aplicação* $\tau_{\mathcal{S}}^{*} : \mathcal{S}pec\,(\mathcal{S}^{-1}A) \to \mathcal{S}pec\,(A)$ *é um homeomorfismo de* $\mathcal{S}pec\,(\mathcal{S}^{-1}A)$ *sobre sua imagem.*

Em particular, se f *é um elemento de* A *e* $\mathfrak{p}$ *é um ideal primo de* A *existem homeomorfismos naturais entre* $\mathcal{Spec}\,(A_f)$ *e* $D\,(f)$ *e entre* $\mathcal{Spec}\,(A_{\mathfrak{p}})$ *e o subconjunto dos ideais primos de* A *contidos em* $\mathfrak{p}$ *.*

Demonstração: Já sabemos que $\tau_{\mathcal{S}}^*$ é contínua e injetiva. Mostremos que a imagem de um aberto em $\mathcal{Spec}\,(\mathcal{S}^{-1}A)$ é um aberto em $\tau^*\left(\mathcal{Spec}\,(\mathcal{S}^{-1}A)\right)$.

Tomemos um aberto base $D_{\mathcal{S}^{-1}A}\,(a/s)$ de $\mathcal{Spec}\,(\mathcal{S}^{-1}A)$. Um ideal primo $\mathfrak{p}$ de A pertence à $\tau^*\left(D_{\mathcal{S}^{-1}A}\,(a/s)\right)$ se e somente se não intersepta $\mathcal{S}$ e $a/s \notin \mathcal{S}^{-1}\mathfrak{p}$. Mas $a/s \notin \mathcal{S}^{-1}\mathfrak{p}$ se e somente se $a \notin \mathfrak{p}$. Portanto $\mathfrak{p} \in \tau^*\left(D_{\mathcal{S}^{-1}A}\,(a/s)\right)$ se e somente se $\mathfrak{p} \in \tau^*\left(\mathcal{Spec}\,(\mathcal{S}^{-1}A)\right) \cap D_A\,(a)$.

Assim, a imagem de um aberto $\bigcup D_{\mathcal{S}^{-1}A}\,(a/s)$ de $\mathcal{Spec}\,(\mathcal{S}^{-1}A)$ é

$$\begin{aligned}
\tau^*\left(\bigcup D_{\mathcal{S}^{-1}A}\,(a/s)\right) &= \bigcup \tau^*\left(D_{\mathcal{S}^{-1}A}\,(a/s)\right) \\
&= \bigcup \left(\tau^*\left(\mathcal{Spec}\left(\mathcal{S}^{-1}A\right)\right) \cap D_A\,(a)\right) \\
&= \tau^*\left(\mathcal{Spec}\left(\mathcal{S}^{-1}A\right)\right) \cap \left(\bigcup D_A\,(a)\right)
\end{aligned}$$

que é um aberto em $\tau^*\left(\mathcal{Spec}\,(\mathcal{S}^{-1}A)\right)$. $\square$

Seja $\varphi : A \to B$ um homomorfismo de anéis. Fixemos um primo $\mathfrak{p}$ de A e tomemos $\mathcal{S} := A - \mathfrak{p}$. Denotaremos $B_{\mathfrak{p}}$ o localizado de B no subconjunto multiplicativo $\varphi\,(A - \mathfrak{p})$ e $\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}$ a extensão de $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ em $B_{\mathfrak{p}}$ via homomorfismo induzido

$$\begin{array}{rccc}
\varphi_{\mathfrak{p}}: & A_{\mathfrak{p}} & \to & B_{\mathfrak{p}} \\
 & \dfrac{a}{s} & \mapsto & \dfrac{\varphi\,(a)}{\varphi\,(s)}\,.
\end{array}$$

Proposição 1.2.10. *A fibra* $(\varphi^*)^{-1}\,(\mathfrak{p}) \subseteq \mathcal{Spec}\,(B)$ *de* φ^* *sobre* $\mathfrak{p}$ *é naturalmente homeomorfa a* $\mathcal{Spec}\,(B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}})$ *.*

Demonstração: O diagrama comutativo de anéis

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A_{\mathfrak{p}} \arrow[r, "\varphi_{\mathfrak{p}}"'] & B_{\mathfrak{p}} \end{tikzcd}$$

induz o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}pec\,(A) & \mathcal{S}pec\,(B) \arrow[l, "\varphi^*"'] \\ \mathcal{S}pec\,(A_{\mathfrak{p}}) \arrow[u] & \mathcal{S}pec\,(B_{\mathfrak{p}}) \arrow[l, "\varphi^*_{\mathfrak{p}}"] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Dado $\mathfrak{q} \in (\varphi^*)^{-1}(\mathfrak{p})$, temos $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) := \varphi^*(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$. Então $\varphi(A - \mathfrak{p}) \cap \mathfrak{q} = \varnothing$, donde $\mathfrak{q}B_{\mathfrak{p}}$ é um primo de $B_{\mathfrak{p}}$ cuja imagem em $\mathcal{S}pec\,(A)$ é $\mathfrak{p}$. Como o diagrama acima comuta, segue que $\varphi_{\mathfrak{p}}^{-1}(\mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}}) = \varphi_{\mathfrak{p}}^*(\mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}}) = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. Em particular $\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathfrak{q}B_{\mathfrak{p}}$. Portanto $\mathfrak{q}$ pertence a imagem de $V_{B_{\mathfrak{p}}}(\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}})$ em B .

Reciprocamente, suponhamos que $\mathfrak{q}$ é um primo de B que pertence a imagem de $V_{B_{\mathfrak{p}}}(\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}})$. Então $\mathfrak{q}B_{\mathfrak{p}}$ é um primo de $B_{\mathfrak{p}}$ que contém $\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}$, donde $\varphi_{\mathfrak{p}}^*(\mathfrak{q}B_{\mathfrak{p}}) := \varphi_{\mathfrak{p}}^{-1}(\mathfrak{q}B_{\mathfrak{p}})$ é um primo de $A_{\mathfrak{p}}$ que contém $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. Como $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ é maximal, segue que $\varphi_{\mathfrak{p}}^*(\mathfrak{q}B_{\mathfrak{p}}) = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. Assim, a imagem de $\mathfrak{q}B_{\mathfrak{p}}$ em A é $\mathfrak{p}$, donde $\varphi^*(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$ e portanto $\mathfrak{q} \in (\varphi^*)^{-1}(\mathfrak{p})$.

Resumindo, a imagem de $V_{B_{\mathfrak{p}}}(\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}})$ em $\mathcal{S}pec\,(B)$ é $(\varphi^*)^{-1}(\mathfrak{p})$. Como a aplicação $\mathcal{S}pec\,(B_{\mathfrak{p}}) \to \mathcal{S}pec\,(B)$ é um homeomorfismo de $\mathcal{S}pec\,(B_{\mathfrak{p}})$ sobre sua imagem, concluímos que $V_{B_{\mathfrak{p}}}(\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}})$ e $(\varphi^*)^{-1}(\mathfrak{p})$ são naturalmente homeomorfos.

Por outro lado, segue da Proposição 1.2.8 que $V_{B_{\mathfrak{p}}}(\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}})$ e $\mathcal{S}pec\,(B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}})$ são naturalmente homeomorfos. Isso completa a demonstração. □

Definiremos agora um feixe de anéis $\mathscr{O}_{\mathcal{S}pec(A)} =: \mathscr{O}$ no espaço topológico $\mathcal{S}pec\,(A)$ da seguinte maneira. Dado um subconjunto aberto não-vazio U de $\mathcal{S}pec\,(A)$, uma seção s em U é uma função de U na união disjunta $\coprod_{\mathfrak{p}\in U} A_{\mathfrak{p}}$, tal que $s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$, $\forall\ \mathfrak{p} \in U$, e s é localmente o quociente de elementos de A . Esta última condição significa que, para cada $\mathfrak{p} \in U$, existe uma vizinhança

V de $\mathfrak{p}$ contida em U e elementos $a_\mathfrak{p}, f_\mathfrak{p} \in A$ com $f_\mathfrak{p} \notin \bigcup_{\mathfrak{q}\in V} \mathfrak{q}$, tais que $s(\mathfrak{q}) = a_\mathfrak{p}/f_\mathfrak{p}$ em $A_\mathfrak{q}$ para todo $\mathfrak{q} \in V$.

Definimos então $\mathscr{O}$ pondo $\mathscr{O}(\varnothing) = 0$ e, se U é um aberto não vazio de $\mathcal{Spec}(A)$, pondo

$$\mathscr{O}(U) = \left\{ s : U \to \coprod_{\mathfrak{p}\in U} A_\mathfrak{p} \;\Big/\; s \text{ é uma seção em } U \right\} .$$

Temos uma maneira natural de definir as operações de soma e multiplicação em $\mathscr{O}(U)$: se $s, t \in \mathscr{O}(U)$, então $(s+t)(\mathfrak{p}) = s(\mathfrak{p}) + t(\mathfrak{p})$ e $(s \cdot t)(\mathfrak{p}) = s(\mathfrak{p}) \cdot t(\mathfrak{p})$ para todo $\mathfrak{p} \in U$. Ou seja, dado $\mathfrak{p} \in U$, se $s(\mathfrak{p}) = a/f$ e $t(\mathfrak{p}) = b/g$ em $A_\mathfrak{p}$, então $(s+t)(\mathfrak{p}) = a/f + b/g = (ag+bf)/fg$ e $(s \cdot t)(\mathfrak{p}) = a/f \cdot b/g = ab/fg$ em $A_\mathfrak{p}$.

A estrutura de anel em $A_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \in \mathcal{Spec}(A)$, induz uma estrutura de anel em $\mathscr{O}(U)$. Em particular, as funções $0_U, 1_U \in \mathscr{O}(U)$, definidas por $0_U(\mathfrak{p}) = 0/1$ e $1_U(\mathfrak{p}) = 1/1$ em $A_\mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p} \in U$, são os respectivos elementos neutros da soma e multiplicação. Analogamente, se $s \in \mathscr{O}(U)$ então a função $-s$ (definida por $(-s)(\mathfrak{p}) = -s(\mathfrak{p})$ para todo $\mathfrak{p} \in U$) é o elemento simétrico de s . Segue que $\mathscr{O}(U)$ é naturalmente um anel comutativo com unidade.

Definiremos agora as restrições de $\mathscr{O}$. Para isso sejam V e U abertos de $\mathcal{Spec}(A)$ com $V \subseteq U$. Se $V = \varnothing$ então existe um único homomorfismo $\mathscr{O}(U) \to \mathscr{O}(V) = 0$. Suponhamos que $V \neq \varnothing$, então também $U \neq \varnothing$. Dado $s \in \mathscr{O}(U)$, a restrição $s|_V$, que a $\mathfrak{p} \in V$ associa $s(\mathfrak{p})$ em $A_\mathfrak{p}$, é um elemento de $\mathscr{O}(V)$. Assim, fica bem definido o homomorfismo de restrição

$$\begin{aligned} \rho_{UV} : \mathscr{O}(U) &\to \mathscr{O}(V) \\ s &\mapsto s|_V . \end{aligned}$$

Claramente $\mathscr{O}$ satisfaz as condições da Definição 1.1.1, e portanto é um pré-feixe em $\mathcal{Spec}(A)$. Também é evidente que a condição (iv) da Definição 1.1.2 é satisfeita.

Quanto a condição (v), sejam U um subconjunto aberto de $\mathcal{Spec}(A)$ e $U = \bigcup U_i$ uma cobertura de U por meio de abertos U_i de $\mathcal{Spec}(A)$. Suponhamos dados $s_i \in \mathcal{O}(U_i)$ para cada i, tais que para todo i e todo j tem-se $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$. Isso quer dizer que, sempre que $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ tem-se $s_i(\mathfrak{p}) = s_j(\mathfrak{p})$ em $A_{\mathfrak{p}}$ para todo $\mathfrak{p} \in U_i \cap U_j$.

Nessas condições temos uma função $s : U \to \coprod_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}}$ definida por $s(\mathfrak{p}) = s_i(\mathfrak{p})$ para $\mathfrak{p} \in U_i$. Como cada s_i é localmente o quociente de elementos de A então s também é, donde $s \in \mathcal{O}(U)$. Além disso, é claro que $s|_{U_i} = s_i$ para todo i. Assim $\mathcal{O}$ também satisfaz a condição (v) da Definição 1.1.2 e por isso é um feixe de anéis em $\mathcal{Spec}(A)$. Em outras palavras, $(\mathcal{Spec}(A), \mathcal{O})$ é um espaço anelado.

Proposição 1.2.11.
(i) *Para qualquer* $\mathfrak{p} \in \mathcal{Spec}(A)$ *o stalk* $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ *é isomorfo ao anel local* $A_{\mathfrak{p}}$. *Em particular* $(\mathcal{Spec}(A), \mathcal{O})$ *é um espaço anelado local.*
(ii) *Para qualquer* $f \in A$, *o anel* $\mathcal{O}(D(f))$ *é isomorfo ao localizado* A_f. *Em particular* $\mathcal{O}(\mathcal{Spec}(A)) \cong A$.

Demonstração: (i) Por definição de $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$, temos uma aplicação natural

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} &\to A_{\mathfrak{p}} \\ \langle U, s \rangle &\mapsto s(\mathfrak{p}), \end{aligned}$$

que é um homomorfismo de anéis. Vejamos que φ é uma bijeção.

Para mostrar a sobrejetividade de φ fixemos $a/f \in A_{\mathfrak{p}}$, $a, f \in A$ e $f \notin \mathfrak{p}$. Então $D(f)$ é uma vizinhança de $\mathfrak{p}$. Além disso, a função

$$\begin{aligned} s : D(f) &\to \coprod_{\mathfrak{q} \in D(f)} A_{\mathfrak{q}} \\ \mathfrak{q} &\mapsto \frac{a}{f} \in A_{\mathfrak{q}} \end{aligned}$$

é claramente um elemento de $\mathscr{O}(D(f))$ e $\varphi(\langle D(f), s\rangle) = a/f$.

Quanto a injetividade de φ , sejam $\langle U, s\rangle, \langle V, t\rangle \in \mathscr{O}_{\mathfrak{p}}$ tais que $s(\mathfrak{p}) = \varphi(\langle U, s\rangle) = \varphi(\langle V, t\rangle) = t(\mathfrak{p}) = a/f$, $a, f \in A$ e $f \notin \mathfrak{p}$. Da definição do feixe $\mathscr{O}$, segue que existem vizinhanças U' e V' de $\mathfrak{p}$, com $U' \subseteq U$, $V' \subseteq V$, tais que $s(\mathfrak{q}) = a/f$ para todo $\mathfrak{q} \in U'$ e $t(\mathfrak{q}) = a/f$ para todo $\mathfrak{q} \in V'$. Então, tomando $W = U' \cap V'$ temos $s|_W = t|_W$. Portanto

$$\langle U, s\rangle = \langle W, s|_W\rangle = \langle W, t|_W\rangle = \langle V, t\rangle .$$

(ii) Definimos a aplicação $\psi : A_f \to \mathscr{O}(D(f))$ da seguinte maneira. Dado $a/f^n \in A_f$, $\psi(a/f^n)$ será o elemento de $\mathscr{O}(D(f))$ que a $\mathfrak{p} \in D(f)$ associa a/f^n em $A_{\mathfrak{p}}$. É fácil verificar que esta aplicação está bem definida e é um homomorfismo. Demonstremos que ψ é bijetiva.

Para a injetividade, sejam $a/f^n, b/f^m \in A_f$ tais que $\psi(a/f^n) = \psi(b/f^m)$. Então, para cada $\mathfrak{p} \in D(f)$, $a/f^n = b/f^m$ em $A_{\mathfrak{p}}$. Isso significa que, para cada $\mathfrak{p} \in D(f)$, existe $h_{\mathfrak{p}} \notin \mathfrak{p}$ tal que $h_{\mathfrak{p}}(af^m - bf^n) = 0$ em A , isto é, $h_{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{a} := \mathit{ann}(af^m - bf^n)$.

Resumindo, para todo $\mathfrak{p} \in D(f)$, $h_{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{a}\backslash\mathfrak{p}$ e portanto $\mathfrak{a} \nsubseteq \mathfrak{p}$. Em outras palavras, todo ideal primo de A que contém $\mathfrak{a}$ deve também conter f , ou seja, $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(f)$. Pela Proposição 1.2.3 temos $f \in \sqrt{(f)} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$. Assim, existe $k \geq 1$ tal que $f^k \in \mathfrak{a}$, ou seja, $f^k(af^m - bf^n) = 0$, donde $a/f^n = b/f^m$ em A_f .

Para a sobrejetividade, consideremos $s \in \mathscr{O}(D(f))$. Pela definição de $\mathscr{O}$, existe uma cobertura $D(f) = \bigcup U_i$ por abertos U_i de $\mathit{Spec}(A)$ de modo que, para todo i existem $a_i, g_i \in A$ com $g_i \notin \bigcup_{\mathfrak{p} \in U_i} \mathfrak{p}$, tais que $s(\mathfrak{p}) = a_i/g_i$ em $A_{\mathfrak{p}}$ para todo $\mathfrak{p} \in U_i$. Em particular temos $U_i \subseteq D(g_i)$ para todo i .

Por outro lado, os subconjuntos de $\mathit{Spec}(A)$ da forma $D(h)$ formam um base para a topologia de Zariski. Assim, para cada i , $U_i = \bigcup_j D(h_{ij})$ para certos $h_{ij} \in A$, donde concluímos que $D(f) = \bigcup_{i,j} D(h_{ij})$.

Agora observemos que $D(f)$ pode ser coberto por um número finito de abertos $D(h_{ij})$. De fato, a igualdade $D(f) = \bigcup_{i,j} D(h_{ij})$ é equivalente à $V(f) =$

$\bigcap_{i,j} V(h_{ij}) = V\left(\sum_{i,j}(h_{ij})\right)$, o que implica $f \in \sqrt{(f)} = \sqrt{\sum_{i,j}(h_{ij})}$ (Proposição 1.2.3). Assim, existe $m \geq 1$ tal que $f^m \in \sum_{i,j}(h_{ij})$. Isso significa que f^m pode ser expresso como uma soma finita de múltiplos de certos h_{ij} . Denotemos $h_1, \cdots, h_k$ tais elementos. Como $(f^m) \subseteq \sum_{r=1}^k(h_r)$, temos

$$V(f) = V(f^m) \supseteq V\left(\sum_{r=1}^k(h_r)\right) = V(h_1) \cap \ldots \cap V(h_k)$$

(Proposição 1.2.3) donde

$$D(f) \subseteq D(h_1) \cup \ldots \cup D(h_k) ,$$

e como $D(h_r) \subseteq D(f)$ para todo r

$$D(f) = D(h_1) \cup \ldots \cup D(h_k) .$$

Além disso, para cada $r \in \{1, \ldots, k\}$ existe i_r tal que $D(h_r) \subseteq U_{i_r} \subseteq D(g_{i_r})$, o que implica $h_r \in \sqrt{(g_{i_r})}$ (Proposição 1.2.6). Isso significa que existe $n_r \geq 1$ tal que $h_r^{n_r} \in (g_{i_r})$, ou seja, $h_r^{n_r} = c_r g_{i_r}$ para algum $c_r \in A$. Portanto $a_{i_r}/g_{i_r} = c_r a_{i_r}/h_r^{n_r}$ em $A_\mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p} \in D(h_r) \subseteq D(g_{i_r})$.

Pondo então $f_r := h_r^{n_r}$ e $b_r := c_r a_{i_r}$, obtemos

$$\begin{aligned} D(f) &= D(h_1) \cup \ldots \cup D(h_k) = D(h_1^{n_1}) \cup \ldots \cup D(h_k^{n_k}) \\ &= D(f_1) \cup \ldots \cup D(f_k) \end{aligned}$$

(Proposição 1.2.6) e

$$s(\mathfrak{p}) = \frac{a_{i_r}}{g_{i_r}} = \frac{c_r a_{i_r}}{h_r^{n_r}} = \frac{b_r}{f_r} \text{ em } A_\mathfrak{p} , \qquad \forall\ \mathfrak{p} \in D(h_r) = D(f_r)$$

para todo $r \in \{1, \ldots, k\}$.

Fixemos agora $r, \ell \in \{1, \ldots, k\}$. Se $f_r f_\ell$ não é nilpotente, então $D(f_r) \cap D(f_\ell) = D(f_r f_\ell) \neq \varnothing$ (Proposição 1.2.6). Segue que

$$\frac{b_r}{f_r} = s(\mathfrak{p}) = \frac{b_\ell}{f_\ell} \quad \text{em} \quad A_\mathfrak{p} \qquad \forall\ \mathfrak{p} \in D(f_r f_\ell) \subseteq D(f) .$$

Assim, b_r/f_r e b_ℓ/f_ℓ representam o mesmo elemento $s|_{D(f_r f_\ell)}$ no anel $\mathscr{O}(D(f_r f_\ell))$. Pela injetividade de ψ (demonstrada acima) aplicada a $D(f_r f_\ell)$

$$\frac{b_r}{f_r} \;=\; \frac{b_\ell}{f_\ell} \quad \text{em} \quad A_{f_r f_\ell}.$$

Isso significa que existe $n_{r\ell} \geq 1$ tal que

$$(f_r f_\ell)^{n_{r\ell}}(b_r f_\ell - b_\ell f_r) \;=\; 0 \quad \text{em} \quad A.$$

Caso $f_r f_\ell$ seja nilpotente, basta tomar $n_{r\ell}$ tal que $(f_r f_\ell)^{n_{r\ell}} = 0$ para obter a igualdade acima.

Tomando então $n := \max\left\{\, n_{r\ell} \;/\; r, \ell = 1, \ldots, k \,\right\}$, obtemos

$$(f_r f_\ell)^n (b_r f_\ell - b_\ell f_r) \;=\; 0\,, \qquad \forall\; r, \ell$$

ou seja,

$$f_\ell^{n+1}(b_r f_r^n) \;=\; f_r^{n+1}(b_\ell f_\ell^n)\,, \qquad \forall\; r, \ell.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} D(f) &= D(f_1) \cup \ldots \cup D(f_k) \\ &= D\left(f_1^{n+1}\right) \cup \ldots \cup D\left(f_k^{n+1}\right) \end{aligned}$$

(Proposição 1.2.6) e como vimos acima, isso implica que existem $m \geq 1$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in A$ tais que

$$f^m \;=\; \sum_{r=1}^{k} \alpha_r f_r^{n+1}\,.$$

Tomemos $a := \sum_{r=1}^{k} \alpha_r b_r f_r^n$. Para todo $\ell = 1, \ldots, k$ temos

$$a f_\ell^{n+1} \;=\; \sum_{r=1}^{k} \alpha_r b_r f_r^n f_\ell^{n+1} \;=\; \sum_{r=1}^{k} \alpha_r b_\ell f_\ell^n f_r^{n+1} \;=\; b_\ell f_\ell^n f^m$$

ou seja,

$$f_\ell^n (a f_\ell - b_\ell f^m) = 0\,.$$

Segue que, para todo $\ell = 1, \ldots, k$

$$\frac{a}{f^m} \;=\; \frac{b_\ell}{f_\ell} \;=\; s(\mathfrak{p}) \;\; \text{em} \;\; A_{\mathfrak{p}}\,, \qquad \forall\;\, \mathfrak{p} \in D(f_\ell)\;\,.$$

Como $D(f) = D(f_1) \cup \ldots \cup D(f_k)$

$$\frac{a}{f^m} \;=\; s(\mathfrak{p}) \;\text{ em }\; A_{\mathfrak{p}}\,, \qquad \forall\; \mathfrak{p} \in D(f)\;.$$

Assim $\psi(a/f^m) = s$. Isso mostra que ψ também é sobrejetiva, portanto um isomorfismo. $\square$

Definição 1.2.12. *O espaço anelado local* $\left(\mathcal{S}pec(A), \mathscr{O}\right)$ *é chamado* espectro *de* A *.*

Definição 1.2.13. *Um* esquema afim *é um espaço anelado local* $\left(X, \mathscr{F}\right)$ *que é isomorfo ao espectro de algum anel.*

Um esquema *é um espaço anelado local* $\left(X, \mathscr{F}\right)$ *em que cada ponto* p *de* X *possui uma vizinhaça* U *tal que* $\left(U, \mathscr{F}|_U\right)$ *é um esquema afim.*

1.2.2 Caso projetivo

Um anel comutativo com unidade S é dito *graduado* se admite uma decomposição da forma

$$S \;=\; \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} S_i \;=\; \cdots \oplus S_{-1} \oplus S_0 \oplus S_1 \oplus \cdots$$

onde cada S_i é um grupo abeliano e $S_i\, S_j \;\subseteq\; S_{i+j}$ para todo $i, j \in \mathbb{Z}$. Também serão considerados anéis graduados da forma

$$S \;=\; \bigoplus_{i=0}^{\infty} S_i \;=\; S_0 \oplus S_1 \oplus \cdots$$

ou seja, aqueles em que $S_i \;=\; 0$ para todo $i < 0$.

Dado um elemento

$$f \ = \ \cdots \oplus f_{-1} \oplus f_0 \oplus f_1 \oplus \cdots \ =: \ \cdots + f_{-1} + f_0 + f_1 + \cdots \ , \qquad f_i \in S_i$$

de S , diremos que f_i é a componente homogênea de grau i de f . Se, para algum inteiro k , tivermos $f_k \neq 0$ e $f_i = 0$ para todo $i \neq k$, então diremos que f é um elemento homogêneo de grau i e escreveremos $deg\,(f) = i$. Nesse caso algumas vezes abusaremos da notação e escreveremos $f =: f_i$ ou $f \in S_i$. O elemento nulo também será considerado homogêneo, porém sem grau definido.

Como conjunto, a soma direta $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} S_i$ pode ser considerado o subconjunto dos elementos do produto cartesiano $\prod_{i\in\mathbb{Z}} S_i$ que possuem apenas um número finito de componentes não-nulas. Por isso, muitas vezes escreveremos apenas $f = f_{i_1} + f_{i_2} + \ldots + f_{i_k}$, indicando que as demais componentes homogêneas de f são nulas.

Nesse sentido, se I é um ideal de S diremos apenas que f_i pertence à I para significar que pertence à I o elemento cuja componente homogênea de grau i é f_i e as demais são nulas.

Definição 1.2.14. *Um ideal de S é chamado* homogêneo *se ele é gerado por elementos homogêneos.*

Lema 1.2.15. *Um ideal I de S é homogêneo se e somente se cada elemento de I têm todas as suas componente homogêneas em I . Além disso, se I é um ideal homogêneo então $\sqrt{I}$ também é homogêneo.*

Demonstração: Suponhamos que I é um ideal homogêneo de S . Então, dado $f \in I$, existem elementos homogêneos $g_1, \ldots, g_r$ em I e elementos $a_1, \ldots, a_r$ em S tais que

$$f \ = \ \sum_{i=1}^{r} a_i\, g_i \ .$$

Decompondo cada a_i em componentes homogêneas $a_i = a_{i,j_1} + \cdots + a_{i,j_{k_i}}$ podemos escrever

$$f = \sum_{i=1}^{r} \sum_{\ell=1}^{k_i} a_{i,j_\ell}\, g_i \ .$$

Como cada g_i e cada a_{i,j_ℓ} é homogêneo, cada parcela $a_{i,j_\ell}\, g_i$ do somatório acima é um elemento homogêneo. Agrupando os termos do somatório segundo os graus e igualando às componentes de f, concluímos que cada componente de f é combinação linear de elementos de I, e portanto está em I.

Reciprocamente, suponhamos que cada elemento de I tem todas as suas componentes homogêneas em I. Então cada elemento de I é soma finita de elementos homogêneos de I. Assim I é gerado pelo conjunto dos seus elementos homogêneos, portanto é um ideal homogêneo.

Supomos agora que I é um ideal homogêneo de S. Pela parte já demonstrada, basta provar que dado $f \in \sqrt{I}$, cada componente homogênea de f está em $\sqrt{I}$. Faremos isso por indução no número de componentes não-nulas de f (pois as componentes nulas evidentemente estão em $\sqrt{I}$), e para isso, consideraremos a decomposição de f em elementos homogêneos não-nulos dada por

$$f = f_{i_1} + \cdots + f_{i_d} \ , \qquad f_{i_j} \in S_{i_j} \ , \quad i_1 < \ldots < i_d \ .$$

Se $d = 1$, ou seja, se f é homogêneo, o resultado é trivial. Suponhamos então $d > 1$. Existe $n \geq 1$ tal que $f^n \in I$. A decomposição de f^n em elementos homogêneos é da forma

$$f^n = {f_{i_1}}^n + \text{(elementos de grau maior)}.$$

Sendo I homogêneo segue que ${f_{i_1}}^n \in I$, donde $f_{i_1} \in \sqrt{I}$. Então

$$f - f_{i_1} = f_{i_2} + \cdots + f_{i_d} \in \sqrt{I}.$$

Pela hipótese de indução temos também $f_{i_2}, \ldots, f_{i_d} \in \sqrt{I}$. □

No lema a seguir veremos que, quando restritos a ideais homogêneos de um anel graduado, é possível caracterizar um ideal primo impondo a hipótese de primalidade apenas nos elementos homogêneos.

Lema 1.2.16. *Seja* $\mathfrak{P} \subseteq S$ *um ideal homogêneo. Suponhamos que* $ab \in \mathfrak{P}$ *implica* $a \in \mathfrak{P}$ *ou* $b \in \mathfrak{P}$ *, para quaisquer elementos homogêneos* a *e* b *de* S *. Então* $\mathfrak{P}$ *é primo.*

Demonstração: Sejam f, g elementos quaisquer de S que não pertencem $\mathfrak{P}$. Queremos demonstrar que $fg \notin \mathfrak{P}$.

Escrevamos

$$\begin{aligned} f &= a + a' \\ g &= b + b' \end{aligned}$$

com a e b sendo, respectivamente, a soma das componentes homogêneas de f e g que não pertencem à $\mathfrak{P}$. Como $a', b' \in \mathfrak{P}$, temos $fg \notin \mathfrak{P}$ se e somente se $ab \notin \mathfrak{P}$.

Podemos escrever

$$\begin{aligned} a &= a_{k_1} + \text{(termos de maior grau)} \\ b &= b_{n_1} + \text{(termos de maior grau)} \end{aligned}$$

com $a_{k_1}, b_{n_1} \notin \mathfrak{P}$, para certos $k_1, n_1 \in \mathbb{Z}$. Pela hipótese do Lema, isso implica $a_{k_1} b_{n_1} \notin \mathfrak{P}$. Como $\mathfrak{P}$ é homogêneo, obtemos

$$ab = a_{k_1} b_{n_1} + \text{(termos de maior grau)} \notin \mathfrak{P}$$

portanto $fg \notin \mathfrak{P}$. $\square$

Denotaremos $\mathcal{Proj}\,(S)$ o conjunto dos ideais primos homogêneos de S que não contém o *ideal irrelevante* $S_+ = S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots$. De maneira análoga ao caso afim, os subconjuntos de $\mathcal{Proj}\,(S)$ da forma

$$\mathcal{V}\,(I) \; := \; \left\{ \, \mathfrak{P} \in \mathcal{Proj}\,(S) \; / \; \mathfrak{P} \supseteq I \, \right\}$$

para algum ideal homogêneo I de S, satisfazem os axiomas de subconjuntos fechados de um espaço topológico, definindo assim uma topologia em $\mathcal{Proj}\,(S)$.

Evidentemente que se I é um ideal homogêneo de S então

$$\mathcal{V}\,(I) \; = \; V\,(I) \; \cap \; \mathcal{Proj}\,(S)$$

(onde $V\,(I) \; = \; \left\{ \, \mathfrak{p} \in \mathcal{Spec}\,(S) \; / \; \mathfrak{p} \supseteq I \, \right\}$ como antes). Por outro lado se $\mathfrak{a}$ é um ideal de S, tomando o ideal homogêneo J gerado pelo conjunto

$$F \; = \; \left\{ \, x \in S \; / \; x \text{ é componente homogênea de algum elemento de } \mathfrak{a} \, \right\},$$

temos

$$V\,(\mathfrak{a}) \; \cap \; \mathcal{Proj}\,(S) \; = \; \mathcal{V}\,(J) \; .$$

Assim esta topologia é a topologia induzida de $\mathcal{Spec}\,(S)$. Em particular, os subconjuntos abertos do tipo

$$\mathcal{D}\,(f) \; = \; \mathcal{Proj}\,(S) \; \cap \; D\,(f) \; = \; \left\{ \, \mathfrak{P} \in \mathcal{Proj}\,(S) \; / \; f \notin \mathfrak{P} \, \right\}$$

com f homogêneo, formam uma base de abertos para $\mathcal{Proj}\,(S)$. Com efeito, se $f \; = \; f_{i_1} + \ldots + f_{i_k}$ então

$$\mathcal{Proj}\,(S) \; \cap \; D\,(f) \; = \; \mathcal{Proj}\,(S) \; \cap \bigcup D\left(f_{i_j}\right) \; = \; \bigcup \left(\mathcal{Proj}\,(S) \; \cap \; D\left(f_{i_j}\right)\right) \; .$$

Sejam $S \; = \; \bigoplus_{i=0}^{\infty} S_i$ um anel graduado e $\mathcal{T}$ um subconjunto multiplicativo de S constituído por elementos homogêneos. O localizado $\mathcal{T}^{-1}S$ tem uma graduação natural:

$$\mathcal{T}^{-1}S \; = \; \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \left(\mathcal{T}^{-1}S\right)_k$$

onde

$$\left(\mathcal{T}^{-1}S\right)_k = \left\{ \, \frac{a_i}{f_j} \; \Big/ \; a_i \, \in \, S_i \, , \;\; f_j \, \in \, S_j \, \cap \, \mathcal{T} \, , \;\; i - j = k \, \right\}.$$

Análogo ao caso afim, temos dois casos particulares importantes. Um deles é quando fixamos $\mathfrak{P} \in \mathcal{Proj}\,(S)$ e tomamos $\mathcal{T}$ o subconjunto multiplicativo dos elementos homogêneos de S que não estão em $\mathfrak{P}$. Nesse caso denotamos

$$S_{\mathfrak{P}} \;:=\; \mathcal{T}^{-1}S.$$

É importante ressaltar aqui que $S_{\mathfrak{P}}$ é o localizado de S com denominadores no subconjunto multiplicativo dos elementos homogêneos de $S - \mathfrak{P}$, não o localizado de S com denominadores em $S - \mathfrak{P}$ como no caso afim, pois $S - \mathfrak{P}$ contém elementos que não são homogêneos.

O outro é quando fixamos um elemento homogêneo f de S e tomamos $\mathcal{T} = \{1, f, f^2, \ldots\}$. Neste caso denotamos

$$S_f \;:=\; \mathcal{T}^{-1}S.$$

Consideremos o homomorfismo canônico $\tau : S \to \mathcal{T}^{-1}S$. Já sabemos que a aplicação induzida $\tau^* : \mathcal{Spec}\,(\mathcal{T}^{-1}S) \to \mathcal{Spec}\,(S)$ é um homeomorfismo de $\mathcal{Spec}\,(\mathcal{T}^{-1}S)$ sobre sua imagem, a qual consiste dos ideais primos de S que não interseptam $\mathcal{T}$ (Proposição 1.2.9). A Proposição 1.2.17 abaixo mostra que a restrição $\tau^*|_{\mathcal{Proj}(\mathcal{T}^{-1}S)}$ tem propriedade análoga.

Proposição 1.2.17. *A restrição* $\tau^*|_{\mathcal{Proj}(\mathcal{T}^{-1}S)}$ *é um homeomorfismo de* $\mathcal{Proj}\,(\mathcal{T}^{-1}S)$ *sobre sua imagem, a qual consiste dos elementos de* $\mathcal{Proj}\,(S)$ *que não interseptam* $\mathcal{T}$ *.*

Em particular, se f *é um elemento homogêneo de* S *e* $\mathfrak{P}$ *é um elemento de* $\mathcal{Proj}\,(S)$ *, existem homeomorfismos naturais entre* $\mathcal{Proj}\,(S_f)$ *e* $\mathcal{D}\,(f)$ *e entre* $\mathcal{Proj}\,(S_{\mathfrak{P}})$ *e o subconjunto dos elementos de* $\mathcal{Proj}\,(S)$ *que estão contidos em* $\mathfrak{P}$ *.*

Demonstração: Sabemos que todo ideal primo de $\mathcal{T}^{-1}S$ é da forma $\mathcal{T}^{-1}\mathfrak{P}$ para algum primo $\mathfrak{P}$ de S que não intersecta $\mathcal{T}$, e que

$$\tau^*\left(\mathcal{T}^{-1}\mathfrak{P}\right) \;:=\; \tau^{-1}\left(\mathcal{T}^{-1}\mathfrak{P}\right) \;=\; \mathfrak{P}.$$

Como a topologia de $\mathcal{P}roj$ é a topologia iduzida de $\mathcal{S}pec$, basta então mostrar que um ideal primo $\mathcal{T}^{-1}\mathfrak{P}$ de $\mathcal{T}^{-1}S$ é homogêneo e não contém $(\mathcal{T}^{-1}S)_+$ se e somente se $\mathfrak{P}$ é homogêneo e não contém S_+ .

Observemos primeiramente que $\mathfrak{P} \not\supseteq S_+$ se e somente se $\mathcal{T}^{-1}\mathfrak{P} \not\supseteq (\mathcal{T}^{-1}S)_+$. Com efeito, se $\mathfrak{P} \not\supseteq S_+$, existe $a \in S_i \backslash \mathfrak{P}$ para algum $i \geq 1$, o que implica $a/1 \in (\mathcal{T}^{-1}S)_+ \backslash \mathcal{T}^{-1}\mathfrak{P}$, donde $\mathcal{T}^{-1}\mathfrak{P} \not\supseteq (\mathcal{T}^{-1}S)_+$. Reciprocamente, se $\mathcal{T}^{-1}\mathfrak{P} \not\supseteq (\mathcal{T}^{-1}S)_+$, existem $a \in S_i$ e $f \in \mathcal{T} \cap S_j$, com $i > j \geq 0$, tal que $a/f \notin \mathcal{T}^{-1}\mathfrak{P}$. Isso implica $a \in S_+ \backslash \mathfrak{P}$, donde $\mathfrak{P} \not\supseteq S_+$.

Além disso, se $\mathfrak{P}$ é um ideal homogêneo de S , então é gerado pelo conjunto dos seus elementos homogêneos. Segue imediatamente que $\mathcal{T}^{-1}\mathfrak{P}$ é o ideal de $\mathcal{T}^{-1}S$ gerado pelo conjunto de elementos homogêneos

$$\left\{ \frac{a}{f} \ \Big/ \ a \in \mathfrak{P} \, , \ f \in \mathcal{T} \right\} \, ,$$

portanto também é homogêneo.

Reciprocamente, suponhamos que $\mathcal{T}^{-1}\mathfrak{P}$ é um ideal homogêneo de $\mathcal{T}^{-1}S$. Dado

$$a_{i_1} + \cdots + a_{i_d} \in \mathfrak{P} \, , \qquad a_{i_k} \in S_{i_k} \quad \text{com} \quad i_1 < \cdots < i_d$$

temos

$$\frac{a_{i_1}}{1} + \cdots + \frac{a_{i_d}}{1} \in \mathcal{T}^{-1}\mathfrak{P} \, , \qquad \frac{a_{i_k}}{1} \in (\mathcal{T}^{-1}S)_{i_k} \quad \text{com} \quad i_1 < \cdots < i_d.$$

Como $\mathcal{T}^{-1}\mathfrak{P}$ é homogêneo cada $a_{i_k}/1$ pertence a $\mathcal{T}^{-1}\mathfrak{P}$, donde cada a_{i_k} pertence a $\mathfrak{P}$. Logo $\mathfrak{P}$ também é homogêneo. $\square$

Lembremos que se $\mathcal{T}$ é um subconjunto multiplicativo de S constituído por elementos homogêneos, $(\mathcal{T}^{-1}S)_0$ denota o subanel dos elementos de grau 0 de $\mathcal{T}^{-1}S$. Como casos particulares, dados $\mathfrak{P} \in \mathcal{P}roj\,(S)$ e $f \in S$ homogêneo, denotaremos $S_{(\mathfrak{P})} := (S_{\mathfrak{P}})_0$ e $S_{(f)} := (S_f)_0$, respectivamente.

A proposição a seguir mostra um fato importante que acontece quando o subconjunto multiplicativo $\mathcal{T}$ contém elementos de grau positivo.

Proposição 1.2.18. *Suponhamos que* $\mathcal{T}$ *contém algum elemento homogêneo de grau positivo. Então a aplicação*

$$\begin{aligned} \sigma : \mathit{Proj}\left(\mathcal{T}^{-1}S\right) &\to \mathit{Spec}\left((\mathcal{T}^{-1}S)_0\right) \\ \mathcal{T}^{-1}\mathfrak{P} &\mapsto \mathcal{T}^{-1}\mathfrak{P} \cap (\mathcal{T}^{-1}S)_0 \end{aligned}$$

é um homeomorfismo.

Em particular, se f *é um elemento homogêneo de grau positivo de* S *e* $\mathfrak{P}$ *é um elemento de* $\mathit{Proj}\,(S)$ *, existem homeomorfismos naturais entre* $\mathit{Spec}\left(S_{(f)}\right)$ *,* $\mathit{Proj}\,(S_f)$ *e* $\mathcal{D}\,(f)$ *e entre* $\mathit{Spec}\left(S_{(\mathfrak{P})}\right)$ *,* $\mathit{Proj}\,(S_{\mathfrak{P}})$ *e o subconjunto dos elementos de* $\mathit{Proj}\,(S)$ *que estão contidos em* $\mathfrak{P}$ *.*

Demonstração: A aplicação σ nada mais é do que a restrição à $\mathit{Proj}\,(\mathcal{T}^{-1}S)$ da aplicação induzida pela inclusão $(\mathcal{T}^{-1}S)_0 \hookrightarrow \mathcal{T}^{-1}S$. Segue então da Proposição 1.2.8 que σ é contínua. Assim, só falta mostrar que σ é uma bijeção e que a imagem de um fechado de $\mathit{Proj}\,(\mathcal{T}^{-1}S)$ é um fechado de $\mathit{Spec}\,((\mathcal{T}^{-1}S)_0)$.

Provaremos primeiro que σ é injetiva. Para isso, sejam $\mathcal{T}^{-1}\mathfrak{P}$ e $\mathcal{T}^{-1}\mathfrak{Q}$ elementos de $\mathit{Proj}\,(\mathcal{T}^{-1}S)$ tais que

$$\mathfrak{p} := \mathcal{T}^{-1}\mathfrak{P} \cap (\mathcal{T}^{-1}S)_0 = \mathcal{T}^{-1}\mathfrak{Q} \cap (\mathcal{T}^{-1}S)_0 \,.$$

Precisamos mostrar que $\mathcal{T}^{-1}\mathfrak{P} = \mathcal{T}^{-1}\mathfrak{Q}$. Mostraremos apenas que $\mathcal{T}^{-1}\mathfrak{P} \subseteq \mathcal{T}^{-1}\mathfrak{Q}$, pois a outra inclusão é análoga. Além disso, como ambos os ideais são homogêneos basta mostrar que todo elemento homogêneo de $\mathcal{T}^{-1}\mathfrak{P}$ pertence à $\mathcal{T}^{-1}\mathfrak{Q}$.

Seja então a um elemento homogêneo de $\mathcal{T}^{-1}\mathfrak{P}$, digamos $\mathit{deg}\,(a) = i$, e seja $f \in \mathcal{T} \cap S_j$, com $j \geq 1$. Temos $a^j/f^i \in \mathcal{T}^{-1}\mathfrak{P}$ com $\mathit{deg}\,(a^j/f^i) = 0$, portanto $a^j/f^i \in \mathfrak{p} \subseteq \mathcal{T}^{-1}\mathfrak{Q}$, donde $a^j = (a^j/f^i)f^i \in \mathcal{T}^{-1}\mathfrak{Q}$. Como $\mathcal{T}^{-1}\mathfrak{Q}$ é primo isso implica $a \in \mathcal{T}^{-1}\mathfrak{Q}$.

Para provar a sobrejetividade de σ devemos mostrar que, dado um ideal primo

$\mathfrak{p}$ de $(\mathcal{T}^{-1}S)_0$, existe um ideal primo homogêneo de $\mathcal{T}^{-1}S$ que não contém o ideal irrelevante $(\mathcal{T}^{-1}S)_+$, e cuja contração em $(\mathcal{T}^{-1}S)_0$ é $\mathfrak{p}$. Afirmamos que $\sqrt{\mathfrak{p}(\mathcal{T}^{-1}S)}$ é tal ideal.

Provaremos isso em etapas. Primeiro observemos que $\mathfrak{p}(\mathcal{T}^{-1}S)$ é um ideal homogêneo, pois é gerado por elementos de grau zero, o que implica que $\sqrt{\mathfrak{p}(\mathcal{T}^{-1}S)}$ é um ideal homogêneo (Lema 1.2.15).

Além disso, é claro que $\mathfrak{p} \subseteq \sqrt{\mathfrak{p}(\mathcal{T}^{-1}S)} \cap (\mathcal{T}^{-1}S)_0$. Quanto à inclusão contrária, se $a \in \sqrt{\mathfrak{p}(\mathcal{T}^{-1}S)} \cap (\mathcal{T}^{-1}S)_0$, então existe $n \geq 1$ tal que $a^n \in \mathfrak{p}(\mathcal{T}^{-1}S) \cap (\mathcal{T}^{-1}S)_0$. Isso quer dizer que existem $c \in \mathfrak{p}$ e $x \in \mathcal{T}^{-1}S$, tais que $a^n = cx$. Como $\mathit{deg}\,(a^n) = \mathit{deg}\,(c) = 0$, devemos ter também $\mathit{deg}\,(x) = 0$. Assim $x \in (\mathcal{T}^{-1}S)_0$, donde $a^n = cx \in \mathfrak{p}$. Sendo $\mathfrak{p}$ um ideal primo, temos $a \in \mathfrak{p}$. Logo $\sqrt{\mathfrak{p}(\mathcal{T}^{-1}S)} \cap (\mathcal{T}^{-1}S)_0 = \mathfrak{p}$.

Para mostrar que $\sqrt{\mathfrak{p}(\mathcal{T}^{-1}S)}$ é primo, tomemos elementos homogêneos $a, b \in \mathcal{T}^{-1}S$, digamos $\mathit{deg}\,(a) = i$ e $\mathit{deg}\,(b) = j$, tais que $ab \in \sqrt{\mathfrak{p}(\mathcal{T}^{-1}S)}$. Existe $n \geq 1$ tal que $(ab)^n \in \mathfrak{p}(\mathcal{T}^{-1}S)$. Por hipótese, existe também $f \in \mathcal{T} \cap S_k$, para algum $k \geq 1$. Temos então

$$\frac{a^{nk}}{f^{ni}} \cdot \frac{b^{nk}}{f^{nj}} = \frac{(ab)^{nk}}{f^{n(i+j)}} \in \mathfrak{p}(\mathcal{T}^{-1}S) \cap (\mathcal{T}^{-1}S)_0 \subseteq \sqrt{\mathfrak{p}(\mathcal{T}^{-1}S)} \cap (\mathcal{T}^{-1}S)_0 = \mathfrak{p} .$$

Como

$$\mathit{deg}\left(\frac{a^{nk}}{f^{ni}}\right) = \mathit{deg}\left(\frac{b^{nk}}{f^{nj}}\right) = 0$$

e $\mathfrak{p}$ é primo, isso implica

$$\frac{a^{nk}}{f^{ni}} \in \mathfrak{p} \qquad \text{ou} \qquad \frac{b^{nk}}{f^{nj}} \in \mathfrak{p}$$

donde

$$a^{nk} = \frac{a^{nk}}{f^{ni}} \cdot f^{ni} \in \mathfrak{p}(\mathcal{T}^{-1}S) \qquad \text{ou} \qquad b^{nk} = \frac{b^{nk}}{f^{nj}} \cdot f^{nj} \in \mathfrak{p}(\mathcal{T}^{-1}S)$$

e portanto $a \in \sqrt{\mathfrak{p}(\mathcal{T}^{-1}S)}$ ou $b \in \sqrt{\mathfrak{p}(\mathcal{T}^{-1}S)}$. Logo $\sqrt{\mathfrak{p}(\mathcal{T}^{-1}S)}$ é um ideal primo (Lema 1.2.16).

Para completar a prova da sobrejetividade de σ só nos falta mostrar que

$(\mathcal{T}^{-1}S)_+ \nsubseteq \sqrt{\mathfrak{p}(\mathcal{T}^{-1}S)}$. De fato, existe $f \in \mathcal{T} \cap S_k$, para algum $k \geq 1$. Então $f/1 \in (\mathcal{T}^{-1}S)_+$. Mas como $f/1$ é invertível em $\mathcal{T}^{-1}S$, não pode pertencer à nenhum ideal primo de $\mathcal{T}^{-1}S$. Em particular $f/1 \notin \sqrt{\mathfrak{p}(\mathcal{T}^{-1}S)}$.

Finalmente, provaremos que a imagem de um fechado de $\mathcal{P}roj\,(\mathcal{T}^{-1}S)$ é um fechado de $\mathcal{S}pec\,((\mathcal{T}^{-1}S)_0)$. Para isso fixemos um fechado $\mathcal{V}\,(\mathfrak{A})$ de $\mathcal{P}roj\,(\mathcal{T}^{-1}S)$, $\mathfrak{A}$ um ideal homogêneo de $\mathcal{T}^{-1}S$, e consideremos sua contração $\mathfrak{a} := \mathfrak{A} \cap (\mathcal{T}^{-1}S)_0$ em $(\mathcal{T}^{-1}S)_0$. É claro que se $\mathcal{T}^{-1}\mathfrak{P} \supseteq \mathfrak{A}$ então $\mathcal{T}^{-1}\mathfrak{P} \cap (\mathcal{T}^{-1}S)_0 \supseteq \mathfrak{a}$. Portanto $\sigma\,(\mathcal{V}\,(\mathfrak{A})) \subseteq V\,(\mathfrak{a})$.

Reciprocamente, suponhamos que $\mathfrak{p}$ é um ideal primo de $(\mathcal{T}^{-1}S)_0$ que contém $\mathfrak{a}$. Dado um elemento homogêneo a de $\mathfrak{A}$, digamos com $\mathit{deg}\,(a) = i$, tomamos $f \in \mathcal{T} \cap S_k$, $k \geq 1$. Temos $a^k/f^i \in \mathfrak{A}$ com $\mathit{deg}\left(a^k/f^i\right) = 0$, portanto $a^k/f^i \in \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}(\mathcal{T}^{-1}S)$. Assim, $a^k = (a^k/f^i)f^i \in \mathfrak{p}(\mathcal{T}^{-1}S)$, donde $a \in \sqrt{\mathfrak{p}(\mathcal{T}^{-1}S)}$. Resumindo, todo elemento homogêneo de $\mathfrak{A}$ pertence à $\sqrt{\mathfrak{p}(\mathcal{T}^{-1}S)}$. Sendo ambos ideais homogêneos, isso implica $\sqrt{\mathfrak{p}(\mathcal{T}^{-1}S)} \supseteq \mathfrak{A}$, donde $\sqrt{\mathfrak{p}(\mathcal{T}^{-1}S)} \in \mathcal{V}\,(\mathfrak{A})$. Além disso, vimos acima que $\sigma\left(\sqrt{\mathfrak{p}(\mathcal{T}^{-1}S)}\right) = \mathfrak{p}$. Isso mostra que também vale a inclusão $\sigma\,(\mathcal{V}\,(\mathfrak{A})) \supseteq V\,(\mathfrak{a})$, completando a demonstração. $\square$

Corolário 1.2.19. *Seja* $S = \bigoplus_{i=0}^{\infty} S_i$ *um anel graduado.* $\mathcal{P}roj\,(S) = \varnothing$ *se e somente se cada elemento de* $S_+ = \bigoplus_{i=1}^{\infty} S_i$ *é nilpotente.*

Demonstração: O conjunto dos elementos nilpotentes de S é a intersecção de todos os ideais primos de S . Assim, se cada elemento de S_+ é nilpotente, então todo ideal primo de S contém o ideal irrelevante S_+ , o que implica $\mathcal{P}roj\,(S) = \varnothing$.

Reciprocamente, suponhamos que existe $x \in S_+$ que não é nilpotente. Então x possui alguma componente homogênea x_i , a qual tem grau estritamente positivo, que não é nilpotente. Neste caso temos $S_{(x_i)} \neq 0$, e portanto $\mathcal{S}pec\left(S_{(x_i)}\right) \neq \varnothing$. Segue da Proposição 1.2.18 que $\mathcal{D}\,(x_i) \neq \varnothing$, donde $\mathcal{P}roj\,(S) \neq \varnothing$. $\square$

Análogo ao caso afim, definiremos um feixe de anéis $\mathscr{O}_{\mathcal{P}roj(S)} =: \mathscr{O}$ em $\mathcal{P}roj\,(S)$. Dado um subconjunto aberto não-vazio U de $\mathcal{P}roj\,(S)$, uma seção s em U é uma função de U na união disjunta $\coprod_{\mathfrak{P}\in U} S_{(\mathfrak{P})}$, tal que $s\,(\mathfrak{P}) \in S_{(\mathfrak{P})}$, $\forall\ \mathfrak{P} \in U$, e s é localmente o quociente de elementos homogêneos de mesmo grau de S . Esta última condição significa que, para cada $\mathfrak{P} \in U$, existe uma vizinhança V de $\mathfrak{P}$ contida em U e elementos homogêneos de mesmo grau $a_{\mathfrak{P}}, f_{\mathfrak{P}} \in S$ com $f_{\mathfrak{P}} \notin \bigcup_{\mathfrak{Q}\in V} \mathfrak{Q}$, tais que $s\,(\mathfrak{Q}) = a_{\mathfrak{P}}/f_{\mathfrak{P}}$ em $S_{(\mathfrak{Q})}$ para todo $\mathfrak{Q} \in V$.

Definimos então $\mathscr{O}$ pondo $\mathscr{O}\,(\varnothing) = 0$ e, se U é um aberto não-vazio de $\mathcal{P}roj\,(S)$, pondo

$$\mathscr{O}\,(U) = \left\{ s : U \to \coprod_{\mathfrak{P}\in U} S_{(\mathfrak{P})} \;\Big/\; s \text{ é uma seção em } U \right\}.$$

Como no caso afim, é fácil verificar que $\mathscr{O}$ com as restrições naturais é um feixe de anéis em $\mathcal{P}roj\,(S)$.

Proposição 1.2.20.

(i) *Para qualquer* $\mathfrak{P} \in \mathcal{P}roj\,(S)$ *o stalk* $\mathscr{O}_{\mathfrak{P}}$ *é isomorfo ao anel local* $S_{(\mathfrak{P})}$ *. Em particular* $\left(\mathcal{P}roj\,(S), \mathscr{O}\right)$ *é um espaço anelado local.*

(ii) *Para qualquer* $f \in S$ *homogêneo de grau positivo, o espaço anelado local* $\left(\mathcal{D}\,(f), \mathscr{O}|_{\mathcal{D}(f)}\right)$ *é isomorfo ao espectro de* $S_{(f)}$ *. Em particular* $\left(\mathcal{P}roj\,(S), \mathscr{O}\right)$ *é um esquema.*

Demonstração: (i) A demonstração de que a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi :\ \mathscr{O}_{\mathfrak{P}} &\to S_{(\mathfrak{P})} \\ \langle U, s\rangle &\mapsto s\,(\mathfrak{P}). \end{aligned}$$

é um isomorfismo é análoga à demonstração do item (i) da Proposição 1.2.11.

(ii) Como vimos nas Proposições 1.2.17 e 1.2.18 a aplicação

$$\begin{aligned} \phi :\ \mathcal{D}\,(f) &\to \mathcal{S}pec\left(S_{(f)}\right) \\ \mathfrak{P} &\mapsto \mathfrak{P}S_f \cap S_{(f)} \end{aligned}$$

é um homeomorfismo. Falta então definir um isomorfismo

$$\phi^{\#} : \mathscr{O}_{\mathcal{S}pec\left(S_{(f)}\right)} \;\rightarrow\; \phi_{*}\left(\mathscr{O}_{\mathcal{P}roj(S)}|_{\mathcal{D}(f)}\right)$$

de feixes em $\mathcal{S}pec\left(S_{(f)}\right)$ tal que, para cada $\mathfrak{P} \in \mathcal{D}(f)$, o homomorfismo induzido nos *stalks*

$$\phi^{\#}_{\mathfrak{P}} : \left(\mathscr{O}_{\mathcal{S}pec\left(S_{(f)}\right)}\right)_{\phi(\mathfrak{P})} \;\rightarrow\; \left(\mathscr{O}_{\mathcal{P}roj(S)}|_{\mathcal{D}(f)}\right)_{\mathfrak{P}}$$

é um homomorfismo local.

Primeiramente observemos que se $\mathfrak{P} \in \mathcal{D}(f)$, então os anéis $S_{(\mathfrak{P})}$ e $\left(S_{(f)}\right)_{\phi(\mathfrak{P})}$ são naturalmente isomorfos. De fato, $S_{(\mathfrak{P})}$ é contituído das frações a/b, com a e b elementos homogêneos de mesmo grau de S e $b \notin \mathfrak{P}$, e $\left(S_{(f)}\right)_{\phi(\mathfrak{P})}$ é contituído por frações do tipo $(a/f^n)/(b/f^m)$, com a e b elementos homogêneos de S tais que $\mathcal{deg}\,(a) = n\,\mathcal{deg}\,(f)$, $\mathcal{deg}\,(b) = m\,\mathcal{deg}\,(f)$ e $b/f^m \notin \phi(\mathfrak{P})$, ou seja, $b \notin \mathfrak{P}$.

Como $\mathfrak{P}$ não contém f é fácil verificar que a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \sigma_{\mathfrak{P}} :\; \left(S_{(f)}\right)_{\phi(\mathfrak{P})} & \rightarrow & S_{(\mathfrak{P})} \\ \dfrac{a/f^n}{b/f^m} & \mapsto & \dfrac{af^m}{bf^n} \end{array}$$

está bem definida e é um homomorfismo. Além disso, $(af^m)/(bf^n) = 0$ em $S_{(\mathfrak{P})}$ significa que existe um elemento homogêneo c em S que não pertence a $\mathfrak{P}$ tal que $c\,a f^{\,m} = 0$. Portanto, se $\mathcal{deg}\,(c) = k$ e $\mathcal{deg}\,(f) = r \geq 1$, temos

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{c^r f^m}{f^{k+m}} & \in & S_{(f)} \\ \dfrac{c^r f^m}{f^{k+m}} & \notin & \mathfrak{P}S_f \,\cap\, S_{(f)} \;=\; \phi(\mathfrak{P}) \qquad \text{e} \\ \dfrac{c^r f^m}{f^{k+m}} \cdot \dfrac{a}{f^{\,n}} & = & 0 \qquad \text{em } S_{(f)}\,, \end{array}$$

donde $(a/f^n)/(b/f^m) = 0$ em $\left(S_{(f)}\right)_{\phi(\mathfrak{P})}$. Logo $\sigma_{\mathfrak{P}}$ é injetiva.

Quanto à sobrejetividade, dado $a/b \in S_{(\mathfrak{P})}$, a e b homogêneos de mesmo grau ℓ, $b \notin \mathfrak{P}$, temos

$$\sigma_{\mathfrak{P}}\left(\frac{(a\,b^{r-1})/f^{\ell}}{b^r/f^{\ell}}\right) \;=\; \frac{a}{b}\,,$$

onde $r = \mathit{deg}\,(f) \geq 1$.

Agora observemos que, por ser ϕ um homeomorfismo, um subconjunto U de $\mathcal{S}pec\left(S_{(f)}\right)$ é aberto se e somente se $\phi^{-1}(U)$ é um aberto de $\mathcal{D}(f)$. Além disso, se U é um aberto de $\mathcal{S}pec\left(S_{(f)}\right)$ então, por definição, $\phi_*\left(\mathscr{O}_{\mathcal{P}roj(S)}|_{\mathcal{D}(f)}\right)(U) := \mathscr{O}_{\mathcal{P}roj(S)}|_{\mathcal{D}(f)}\left(\phi^{-1}(U)\right)$. Por isso $\phi_*\left(\mathscr{O}_{\mathcal{P}roj(S)}|_{\mathcal{D}(f)}\right)(U)$ é contituído pelas seções $s : \phi^{-1}(U) \to \coprod_{\mathfrak{P}\,\in\,\phi^{-1}(U)} S_{(\mathfrak{P})}$ que são localmente um quociente do tipo $s(\mathfrak{P}) = a/b$ com $a, b \in S$ homogêneos de mesmo grau e $b \notin \mathfrak{P}$. Analogamente, $\mathscr{O}_{\mathcal{S}pec\left(S_{(f)}\right)}(U)$ é contituído pelas seções $s : U \to \coprod_{\mathfrak{P}\,\in\,\phi^{-1}(U)} \left(S_{(f)}\right)_{\phi(\mathfrak{P})}$ que são localmente um quociente do tipo $s\left(\phi\left(\mathfrak{P}\right)\right) = (a/f^n)/(b/f^m)$ com $a, b \in S$ homogêneos, $\mathit{deg}\,(a) = n\,\mathit{deg}\,(f)$, $\mathit{deg}\,(b) = m\,\mathit{deg}\,(f)$ e $b \notin \mathfrak{P}$.

Assim, os homomorfismos $\sigma_{\mathfrak{P}}$ induzem, para cada aberto U de $\mathcal{S}pec\left(S_{(f)}\right)$, um homomorfismo $\phi^{\#}_U : \mathscr{O}_{\mathcal{S}pec\left(S_{(f)}\right)}(U) \to \phi_*\left(\mathscr{O}_{\mathcal{P}roj(S)}|_{\mathcal{D}(f)}\right)(U)$, que por ser $\sigma_{\mathfrak{P}}$ um isomorfismo para todo $\mathfrak{P} \in \mathcal{D}(f)$, cada $\phi^{\#}_U$ também é um isomorfismo. Além disso, é fácil verificar que para cada inclusão $V \subseteq U$ de abertos de $\mathcal{S}pec\left(S_{(f)}\right)$, o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{O}_{\mathcal{S}pec\left(S_{(f)}\right)}(U) & \xrightarrow{\phi^{\#}_U} & \phi_*\left(\mathscr{O}_{\mathcal{P}roj(S)}|_{\mathcal{D}(f)}\right)(U) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathscr{O}_{\mathcal{S}pec\left(S_{(f)}\right)}(V) & \xrightarrow[\phi^{\#}_V]{} & \phi_*\left(\mathscr{O}_{\mathcal{P}roj(S)}|_{\mathcal{D}(f)}\right)(V)
\end{array}$$

comuta. Logo $\phi^{\#} : \mathscr{O}_{\mathcal{S}pec\left(S_{(f)}\right)} \to \phi_*\left(\mathscr{O}_{\mathcal{P}roj(S)}|_{\mathcal{D}(f)}\right)$ é um isomorfismo de feixes em $\mathcal{S}pec\left(S_{(f)}\right)$.

Por outro lado, os *stalks* $\left(\mathscr{O}_{\mathcal{S}pec\left(S_{(f)}\right)}\right)_{\phi(\mathfrak{P})}$ e $\left(\mathscr{O}_{\mathcal{P}roj(S)}|_{\mathcal{D}(f)}\right)_{\mathfrak{P}}$ são naturalmentes isomorfos a $\left(S_{(f)}\right)_{\phi(\mathfrak{P})}$ e $S_{(\mathfrak{P})}$, respectivamente (Proposição 1.2.11 e parte (i)). Além disso, pela forma como são dados esses isomorfismos e pela forma como foi contruído o isomorfismo $\phi^{\#} : \mathscr{O}_{\mathcal{S}pec\left(S_{(f)}\right)} \to \phi_*\left(\mathscr{O}_{\mathcal{P}roj(S)}|_{\mathcal{D}(f)}\right)$, para cada $\mathfrak{P} \in \mathcal{D}(f)$, o homomorfismo induzido $\phi^{\#}_{\mathfrak{P}}$ é na verdade $\sigma_{\mathfrak{P}}$. Mais precisamente,

$$\begin{array}{rcl}
\phi^{\#}_{\mathfrak{P}} : \left(\mathscr{O}_{\mathcal{S}pec\left(S_{(f)}\right)}\right)_{\phi(\mathfrak{P})} \cong \left(S_{(f)}\right)_{\phi(\mathfrak{P})} & \to & \left(\mathscr{O}_{\mathcal{P}roj(S)}|_{\mathcal{D}(f)}\right)_{\mathfrak{P}} \cong S_{(\mathfrak{P})} \\
\dfrac{a/f^n}{b/f^m} & \mapsto & \dfrac{af^m}{bf^n} = \sigma_{\mathfrak{P}}\left(\dfrac{a/f^n}{b/f^m}\right).
\end{array}$$

Segue que cada $\phi^{\#}_{\mathfrak{P}}$ é um isomorfismo. Em particular cada $\phi^{\#}_{\mathfrak{P}}$ é um homomorfismo local. $\square$

Corolário 1.2.21. *Se existe algum elemento homogêneo* f *em* S_+ *que não pertence a nenhum elemento de* $\mathcal{P}roj\,(S)$ *, então* $\left(\mathcal{P}roj\,(S)\,,\mathscr{O}_{\mathcal{P}roj(S)}\right)$ *é um esquema afim isomorfo a* $\left(\mathcal{S}pec\left(S_{(f)}\right),\mathscr{O}_{\mathcal{S}pec\left(S_{(f)}\right)}\right)$.

Demonstração: Como nesse caso $\mathcal{D}\,(f) = \mathcal{P}roj\,(S)$, temos $\left(\mathcal{P}roj\,(S)\,,\mathscr{O}_{\mathcal{P}roj(S)}\right) = \left(\mathcal{D}\,(f)\,,\mathscr{O}_{\mathcal{P}roj(S)}|_{\mathcal{D}(f)}\right)$. Além disso, pela Proposição 1.2.20 $\left(\mathcal{D}\,(f)\,,\mathscr{O}_{\mathcal{P}roj(S)}|_{\mathcal{D}(f)}\right) \cong \left(\mathcal{S}pec\left(S_{(f)}\right),\mathscr{O}_{\mathcal{S}pec\left(S_{(f)}\right)}\right)$. $\square$

Capítulo 2

Expansão de Puiseux e normalização de curvas algebróides planas

2.1 Lema de Hensel e Teorema de Preparação de Weierstrass

Começaremos demonstrando dois lemas que serão úteis para a demonstração do Lema de Hensel.

Lema 2.1.1. *Seja R um anel comutativo com unidade e sejam $g, h \in R$ tais que*

$$g\,R \;+\; h\,R \;=\; R.$$

Suponhamos que g não é um divisor de zero e que foi fixado um subconjunto $E \subseteq R$ com exatamente um representante para cada classe residual de $R/(g)$. Então dado $f \in R$ existem únicos $v \in E$ e $u \in R$ tais que

$$f \;=\; u\,g \;+\; v\,h\;.$$

Demonstração: Existem $a, b \in R$ tais que $a\,g + b\,h = f$. Se $v \in E$ é o representante da classe residual de b em $R/(g)$, então $b = v + cg$ para algum

$c \in R$. Assim, tomando $u = a + c\,h$ temos

$$u\,g \;+\; vh \;=\; (a + c\,h)\,g \;+\; (b - c\,g)\,h \;=\; a\,g \;+\; b\,h \;=\; f$$

com $v \in E$ e $u \in R$.

Suponhamos agora que

$$f \;=\; u\,g \;+\; v\,h \;=\; u'g \;+\; v'h$$

com $v, v' \in E$ e $u, u' \in R$. Isso implica que

$$(u - u')\,g \;=\; (v' - v)\,h. \tag{2.1}$$

Tomando $r, s \in R$ tais que $r\,g + s\,h \;=\; 1$, temos

$$\begin{aligned} v' - v \;&=\; (v' - v)\,r\,g \;+\; (v' - v)\,s\,h \\ &=\; (v' - v)\,r\,g \;+\; (u - u')\,s\,g \\ &=\; [\,(v' - v)\,r \;+\; (u - u')\,s\,]\,g \end{aligned}$$

múltiplo de g , portanto $v' = v$. Da igualdade 2.1 obtemos $(u - u')\,g = 0$. Como g não é divisor de zero cuncluímos que $u - u' = 0$, ou seja, $u = u'$. $\square$

Lema 2.1.2. *Seja R um anel comutativo com unidade e seja $R[[x]]$ o anel das séries de potências com coeficientes em R . Se*

$$G(x) \;=\; \sum_{i=0}^{\infty} g_i\,x^i \quad , \qquad H(x) \;=\; \sum_{i=0}^{\infty} h_i\,x^i$$

são duas séries de potências em $R[[x]]$, então

$$g_0\,R \;+\; h_0\,R \;=\; R \qquad \Longrightarrow \qquad G(x)\,R[[x]] \;+\; H(x)\,R[[x]] \;=\; R[[x]]\,.$$

Demonstração: Dada $P(x) \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} p_j\,x^j \;\in\; R[[x]]$ devemos provar que existem

$$A(x) \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} a_j\,x^j \;\;,\;\; B(x) \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} b_j\,x^j \;\;\in\;\; R[[x]]$$

tais que

$$P(x) \ = \ A(x)\, G(x) \ + \ B(x)\, H(x) \ .$$

Faremos isso por indução.

Por hipótese, existem $a_0, b_0 \in R$ tais que

$$p_0 \ = \ a_0\, g_0 \ + \ b_0\, h_0 \ .$$

Suponhamos agora encontrados $a_0, \ldots, a_m, b_0, \ldots, b_m \ \in \ R$ tais que

$$p_j \ = \ (a_j\, g_0 \ + \ b_j\, h_0) \ + \ (a_{j-1}\, g_1 \ + \ b_{j-1}\, h_1) \ + \ \cdots \ + \ (a_0\, g_j \ + \ b_0\, h_j)$$

para cada $j = 0, 1, \ldots, m$. Existem $a_{m+1}, b_{m+1} \in R$ tais que

$$a_{m+1}g_0 + b_{m+1}h_0 = p_{m+1} - \left[\sum_{k=1}^{m+1} (a_{m+1-k}g_k + b_{m+1-k}h_k) \right] .$$

Isso implica

$$p_{m+1} = (a_{m+1}g_0 + b_{m+1}h_0) + (a_m g_1 + b_m h_1) + \cdots + (a_0 g_{m+1} + b_0 h_{m+1}) \ ,$$

como precisávamos. $\square$

Dados uma série de potência $F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i\, x^i \ \in R[[x]]$ e um inteiro não-negativo m , denotaremos

$$F_m(x) := \sum_{i=0}^{m} f_i\, x^i$$

a m-ésima soma parcial da série $F(x)$.

Teorema 2.1.3 (Lema de Hensel)**.** *Seja* R *um anel comutativo com unidade e seja* $F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i\, x^i \in R[[x]]$ *uma série de potência com coeficientes em* R *. Se*

$$f_0 \ = \ g_0\, h_0 \qquad e \qquad g_0\, R \ + \ h_0\, R \ = \ R$$

então existe uma fatoração

$$F(x) \ = \ G(x)\, H(x) \qquad com \qquad G(0) = g_0 \quad e \quad H(0) = h_0 \ . \tag{2.2}$$

Além disso, se g_0 *não for divisor de zero e* $E \subseteq R$ *é um conjunto com exatamente um representante para cada classe residual de* $R/(g_0)$ *, então a fatoração (2.2) é única se exigirmos* $g_i \in E$ *para todo* $i \geq 1$ *.*

Demonstração: A existência da fatoração é conseqüência da existência de elementos $g_1, g_2, \ldots \in E$ e $h_1, h_2, \ldots \in R$ tais que, se

$$G(x) = g_0 + \sum_{i=1}^{\infty} g_i\, x^i \qquad \text{e} \qquad H(x) = h_0 + \sum_{i=1}^{\infty} h_i\, x^i$$

então, para cada $m = 1, 2, \ldots$

$$G_m(x) H_m(x) \equiv F(x) \mod (x^{m+1}) \ .$$

Mostraremos isso por indução em m .

Pelo Lema 2.1.1 existem $g_1 \in E$ e $h_1 \in R$ tais que $h_1 g_0 + g_1 h_0 = f_1$, donde

$$G_1(x) H_1(x) \equiv F(x) \mod (x^2) \ .$$

Suponhamos agora $m \geq 1$. Suponhamos também que existem elementos $g_1, \ldots, g_m \in E$, $h_1, \ldots, h_m \in R$ tais que

$$G_m(x) H_m(x) := \left(g_0 + \sum_{i=1}^{m} g_i x^i\right) \left(h_0 + \sum_{i=1}^{m} h_i x^i\right) \equiv F(x) \mod (x^{m+1}) \ .$$

Isso significa que

$$G_m(x) H_m(x) \equiv F(x) + a x^{m+1} \mod (x^{m+2}) \ .$$

para algum $a \in R$. Novamente pelo Lema 2.1.1 sabemos que existem $g_{m+1} \in E$ e $h_{m+1} \in R$ tais que

$$h_{m+1} g_0 + g_{m+1} h_0 = -a \ .$$

Assim, se

$$G_{m+1}(x) = g_0 + \sum_{i=1}^{m+1} g_i x^i = G_m(x) + g_{m+1} x^{m+1}$$

$$H_{m+1}(x) = h_0 + \sum_{i=1}^{m+1} h_i x^i = H_m(x) + h_{m+1} x^{m+1}$$

então

$$G_{m+1}(x)H_{m+1}(x) \equiv F(x) \mod (x^{m+2}) \, .$$

Isso completa a demonstração da existência.

Para a parte da unicidade, observemos que devemos ter

$$f_1 = h_1 g_0 + g_1 h_0 \, .$$

Pelo Lema 2.1.1, $g_1 \in E$ e $h_1 \in R$ são os únicos tais que isso acontece. Isso determina de maneira única g_1 e h_1. Supomos agora que $m \geq 1$ e que já sabemos serem únicos os elementos $g_1, \ldots, g_m \in E$, $h_1, \ldots, h_m \in R$. Devemos ter

$$f_{m+1} = h_{m+1} g_0 + h_m g_1 + \cdots + h_1 g_m + h_0 g_{m+1}$$

ou seja,

$$f_{m+1} - (h_m g_1 + \cdots + h_1 g_m) = h_{m+1} g_0 + h_0 g_{m+1}$$

com $g_{m+1} \in E$ e $h_{m+1} \in R$. Novamente pelo Lema 2.1.1 concluímos que g_{m+1} e h_{m+1} também são únicos. Isso demonstra a unicidade. □

O Lema de Hensel pode ser generalizado para anéis de séries de potências em várias variáveis.

Corolário 2.1.4. *Seja R um anel comutativo com unidade e seja*

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i_1, \ldots, i_n} f_{i_1, \ldots, i_n} \, x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \ \in R[[x_1, \ldots, x_n]]$$

uma série de potência em n variáveis com coeficientes em R . Se

$$f_{0,\ldots,0} \ = \ g\,h \qquad e \qquad g\,R \,+\, h\,R \,=\, R$$

então existe uma fatoração

$$F(x_1, \ldots, x_n) \ = \ G(x_1, \ldots, x_n)\, H(x_1, \ldots, x_n) \tag{2.3}$$

com

$$G(0,\ldots,0) = g \qquad e \qquad H(0,\ldots,0) = h\ .$$

Além disso, se g *não for divisor de zero e* $E \subseteq R$ *é um conjunto com exatamente um representante para cada classe residual de* $R/(g)$ *, então a fatoração (2.3) é única se exigirmos* $g_{i_1,\ldots,i_n} \in E$ *sempre que* $(i_1,\ldots,i_n) \neq (0,\ldots,0)$ *.*

Demonstração: Demonstraremos primeiro a existência da fatoração (2.3), utilizando indução no número de variáveis n . O caso de uma variável é o Teorema 2.1.3.

Suponhamos agora o resultado válido para $n-1$ variáveis, e denotemos $S := R[[x_n]]$. Então $R[[x_1,\ldots,x_n]] = S[[x_1,\ldots,x_{n-1}]]$ e pondo

$$F_{i_1,\ldots,i_{n-1}}(x_n) \;=\; \sum_{i_n=0}^{\infty} f_{i_1,\ldots,i_{n-1},i_n}\, x_n^{i_n}$$

podemos escrever

$$F(x_1,\ldots,x_n) \;=\; \sum_{i_1,\ldots,i_{n-1}} F_{i_1,\ldots,i_{n-1}}(x_n)\;\, x_1^{i_1}\cdots x_{n-1}^{i_{n-1}}\ .$$

como um série de potência em $n-1$ variáveis com coeficientes em $S := R[[x_n]]$. Pelo Teorema 2.1.3 existem $G_0(x_n), H_0(x_n) \in S$ tais que

$$F_{0,\ldots,0}(x_n) \;=\; G_0(x_n)\, H_0(x_n)$$

com $G_0(0) = g$ e $H_0(0) = h$. Além disso, pelo Lema 2.1.2,

$$G_0(x_n)\, S \;+\; H_0(x_n)\, S \;=\; S\ .$$

Segue então da hipótese de indução que existem

$$G'(x_1,\ldots,x_{n-1}) = G(x_1,\ldots,x_n)$$
$$H'(x_1,\ldots,x_{n-1}) = H(x_1,\ldots,x_n)$$

em $S[[x_1,\ldots,x_{n-1}]] = R[[x_1,\ldots,x_n]]$ tais que

$$F(x_1,\ldots,x_n) \;=\; G'(x_1,\ldots,x_{n-1})\, H'(x_1,\ldots,x_{n-1})$$

com

$$G'(0,\ldots,0) = G_0(x_n) \qquad \text{e} \qquad H'(0,\ldots,0) = H_0(x_n)\ .$$

Portanto

$$F(x_1,\ldots,x_n) \;=\; G(x_1,\ldots,x_n)H(x_1,\ldots,x_n)$$

com

$$G(0,\ldots,0) = G_0(0) = g \qquad \text{e} \qquad H(0,\ldots,0) = H_0(0) = h\ .$$

Quanto a unicidade, procedemos por indução na soma dos índices dos coeficientes de G e H. Devemos ter

$$f_{1,0,\ldots,0} \;=\; h_{1,0,\ldots,0}\, g \;+\; g_{1,0,\ldots,0}\, h$$

e, pelo Lema 2.1.1, $g_{1,0,\ldots,0} \in E$ e $h_{1,0,\ldots,0} \in R$ são os únicos tais que isso acontece. Por argumento análogo demonstra-se a unicidade de cada coeficiente, tanto de H quanto de G, cuja soma dos índices é igual a 1.

Suponhamos agora $m \geq 1$ e demonstrada a unicidade de $g_{j_1,\ldots,j_n} \in E$ e $h_{k_1,\ldots,k_n} \in R$ sempre que $j_1 + \cdots + j_n \leq m$ e $k_1 + \cdots + k_n \leq m$. Um coeficiente $f_{i_1,\ldots,i_n}$ de F tal que $i_1 + \cdots + i_n = m+1$, é dado por

$$f_{i_1,\ldots,i_n} \;=\; h_{i_1,\ldots,i_n}\, g \;+\; g_{i_1,\ldots,i_n}\, h \;+ \sum_{\substack{j_r+k_r=i_r,\ r=1,\ldots,n \\ j_1+\cdots+j_n\leq m \\ k_1+\cdots+k_n\leq m}} g_{j_1,\ldots,j_n} h_{k_1,\ldots,k_n}\ .$$

Novamente pelo Lema 2.1.1, sabemos que $g_{i_1,\ldots,i_n} \in E$ e $h_{i_1,\ldots,i_n} \in R$ são únicos tais que isso acontece. Isso completa a demonstração. $\square$

O seguinte resultado é uma outra versão do Lema de Hensel.

Corolário 2.1.5. *Seja* K *um corpo e seja* $F(x_1,\ldots,x_n,y) \in K[[x_1,\ldots,x_n]][y] = K[y][[x_1,\ldots,x_n]]$ *um polinômio em* y *cujos coeficientes são séries de potências em* n *variáveis. Suponhamos que*

$$F(0,\ldots,0,y) \;=\; g(y)\, h(y)$$

com $g(y), h(y) \in K[y]$ *relativamente primos. Então existe uma fatoração*

$$F(\mathbf{x}, y) \;=\; G(\mathbf{x}, y)\, H(\mathbf{x}, y) \qquad \textit{com} \qquad G(\mathbf{0}, y) = g(y) \;\; \textit{e} \;\; H(\mathbf{0}, y) = h(y)\ .$$

Além disso, se exigirmos que seja

$$deg_y\,(G(\mathbf{x}, y) - g(y)) < deg_y\,(g(y))$$

então a fatoração é única.

Demonstração: Basta tomar $R := K[y]$, $g := g(y)$, $h := h(y)$ e $E = \Big\{ f(y) \in K[y] \;/\; deg_y\,(f(y)) < deg_y\,(g(y)) \Big\}$ no Lema 2.1.4, e observar que para todo polinômio $p(y) \in K[y]$ existe um único $r(y) \in K[y]$ tal que

$$deg_y\,(r(y)) < deg_y\,(g(y)) \qquad \text{e} \qquad p(y) \equiv r(y) \mod g(y)\ .$$

$\square$

Um corolário importante do Lema de Hensel é o seguinte:

Corolário 2.1.6 (Teorema de Preparação de Weierstrass)**.** *Seja* K *um corpo e seja*

$$F(x_1, \ldots, x_n, y) \;\in\; K[[x_1, \ldots, x_n, y]]$$

uma série de potência, tal que $F(0, \ldots, 0, 0) = 0$ *. Suponhamos que* y^m *aparece em* F *com coeficiente não nulo e que* m *é o menor inteiro para o qual isso acontece. Então* F *pode ser escrito de maneira única como*

$$F(\mathbf{x}, y) \;=\; [y^m + u_{m-1}(\mathbf{x})y^{m-1} + \cdots + u_0(\mathbf{x})] \cdot U(\mathbf{x}, y)$$

com $u_i(\mathbf{x}) \in K[[x_1, \ldots, x_n]]$ *e* $U(\mathbf{x}, y) \in K[[x_1, \ldots, x_n, y]]$ *invertível.*

Demonstração: Nessas condições nós podemos escrever $F(0, y) = y^m \cdot v(y)$, onde $v(y) \in K[[y]]$ é invertível. Tomamos $R := K[[y]]$, $g := y^m$, $h := v(y)$ e

$E = \Big\{\ f(y) \in K[y] \ / \ \mathit{deg}_y\,(f(y)) < m\ \Big\} \subseteq R$. O Corolário 2.1.4 afirma que existe uma única fatoração

$$F(\mathbf{x}, y) \ = \ G(\mathbf{x}, y)\, H(\mathbf{x}, y)$$

com

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, y) \ &= \ y^m \ + \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\neq(0,\ldots,0)} g_{i_1,\ldots,i_n}(y)\, x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \\ H(\mathbf{x}, y) \ &= \ v(y) \ + \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\neq(0,\ldots,0)} h_{i_1,\ldots,i_n}(y)\, x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \end{aligned}$$

se exigirmos que $\mathit{deg}_y\,(g_{i_1,\ldots,i_n}(y)) \leq m-1$ para todo $g_{i_1,\ldots,i_n}(y)$. Tomando então $U(\mathbf{x}, y) = H(\mathbf{x}, y)$ e reescrevendo $G(\mathbf{x}, y)$ como elemento de $K[[x_1, \ldots, x_n]][[y]]$ obtemos o resultado. $\square$

2.2 Extensões de $K((t))$ e Expansão de Puiseux

Seja K um corpo. Dado $c(t) \in K[[t]]\backslash\{0\}$, denotaremos

$$\mathit{mult}_0\,(c(t)) := \max\big\{\ \ell \geq 0 \ / \ c(t) \ = \ t^{\ell}\, b(t) \ \text{ para algum } \ b(t) \in K[[t]]\ \big\} \ .$$

Convencionaremos que $\mathit{mult}_0\,(0) = +\infty$.

Uma *série formal de Laurent* sobre K é uma expressão do tipo

$$\sum_{i=r}^{\infty} a_i\, t^i \ , \quad a_i \in K \ , \quad r \in \mathbb{Z} \ .$$

Lema 2.2.1. *O corpo de frações de* $K[[t]]$ *é o conjunto das séries formais de Laurent sobre* K *.*

Demonstração: Seja $\sum_{i=r}^{\infty} a_i\, t^i$ uma série formal de Laurent. Se $r \geq 0$ então esta série pertence a $K[[t]]$, donde pertence a $K((t)) = \mathit{Frac}\,(K[[t]])$. Se $r < 0$, então podemos escrever

$$\sum_{i=r}^{\infty} a_i\, t^i \;=\; \frac{\sum_{i=0}^{\infty} a_{i+r}\, t^i}{t^{-r}}$$

com $\sum_{i=0}^{\infty} a_{i+r}\, t^i\, , t^{-r} \;\in k[[t]]$. Portanto $\sum_{i=r}^{\infty} a_i\, t^i \in K((t))$ também nesse caso.

Reciprocamente, seja $a(t)/b(t) \in K((t))$, $a(t), b(t) \in K[[t]]$ com $b(t) \neq 0$. Se $\ell = \mathit{mult}_0\,(b(t))$, então

$$b(t) \;=\; t^{\ell} \sum_{i=0}^{\infty} b_i\, t^i$$

para certos $b_i \in K$ com $b_0 \neq 0$, donde $\sum_{i=0}^{\infty} b_i\, t^i$ é invertível em $K[[t]]$. Assim

$$\frac{a(t)}{b(t)} \;=\; \frac{a(t)\;\left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i\, t^i\right)^{-1}}{t^{\ell}} \;=\; \frac{\sum_{i=0}^{\infty} c_i\, t^i}{t^{\ell}} \;=\; \sum_{i=-\ell}^{\infty} c_{i+\ell}\, t^i$$

para certos $c_i \in K$, donde $a(t)/b(t)$ é uma série formal de Laurent. $\square$

Teorema 2.2.2. *Seja K um corpo algebricamente fechado com $\mathit{char}\,(K) = 0$. Se $L \supseteq K((t))$ é uma extensão finita de grau m , então*

$$L = K((t^{1/m}))\,.$$

Demonstração: Primeiramente mostraremos que $L \subseteq K((t^{1/N}))$ para $N = \prod_{i=1}^{m} i!$, utilizando indução no grau de $L/K((t))$. Se $m = 1$ o resultado é trivial. Suponhamos então $m > 1$ e o resultado válido para $\deg\,(L/K((t))) \leq m - 1$.

Todo $y \in L\backslash K((t))$ satisfaz uma equação (polinomial) minimal do tipo

$$y^n \;+\; a_{n-1}(t)\, y^{n-1} \;+\; \cdots \;+\; a_0(t) \;=\; 0\,, \qquad \text{com} \quad a_i(t) \in K((t))\,,$$

onde $2 \leq n \leq m$. Para algum $\ell \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, tem-se $t^{\ell}\, a_i(t) \in K[[t]]$, para todo i . Multiplicando então essa equação por $t^{n\ell}$ e pondo $y_1 := t^{\ell} y$, obtemos uma equação minimal para y_1 do tipo

$$y_1^n \;+\; b_{n-1}(t)\, y_1^{n-1} \;+\; \cdots \;+\; b_0(t) \;=\; 0\,, \qquad \text{com} \quad b_i(t) \in K[[t]]\,.$$

Tomando ainda $y_2 \;:=\; y_1 \;+\; (1/n)\, b_{n-1}(t)$, obtemos uma equação minimal para y_2 do tipo

$$y_2^n \;+\; c_{n-2}(t)\, y_2^{n-2} \;+\; \cdots \;+\; c_0(t) \;=\; 0\,, \qquad \text{com} \quad c_i(t) \in K[[t]]\,.$$

Evidentemente que $y \in K((t^{1/N}))\backslash K((t))$ se e somente se $y_2 \in K((t^{1/N}))\backslash K((t))$. Assim podemos supor que a equação minimal de y é

$$F(t,y) \ := \ y^n \ + \ c_{n-2}(t)\, y^{n-2} \ + \ \cdots \ + \ c_0(t) \ = \ 0 \ , \qquad \text{com} \quad c_i(t) \in K[[t]] \ .$$

Afirmamos que $F(0,y) = (y-\alpha)^n$ para algum $\alpha \in K$. De fato, se não fosse assim $F(0,y)$ possuiria pelo menos duas raízes distintas e daí admitiria uma fatoração $F(0,y) = g(y)\, h(y)$ com $g(y), h(y) \in K[y]$ relativamente primos. Pelo Lema de Hensel, $F(t,y)$ admitiria uma fatoração não trivial $F(t,y) = G(t,y)\, H(t,y)$, contradizendo o fato de $F(t,y)$ ser minimal. Portanto $F(0,y) = (y-\alpha)^n$ para algum $\alpha \in K$. Comparando os coeficientes de y^{n-1} , de $F(0,y)$ e de $(y-\alpha)^n$, concluímos que $\alpha = 0$, donde $F(0,y) = y^n$. Logo $t | c_i(t)$ para todo $i = 0, \dots, n-2$.

Como $y \notin K((t))$, devemos ter $c_i(t) \neq 0$ para algum i . Assim, fica bem definido

$$r = \min_{i=0,\dots,n-2} \left\{ \frac{\mathit{mult}_0\,(c_i(t))}{n-i} \right\} \in \mathbb{Q}.$$

Além disso, como $t | c_i(t)$ para todo $i = 0, \dots, n-2$, temos $r > 0$ e podemos escrever $r = u/v$ com u e v inteiros positivos relativamente primos. Dividindo a equação $F(t,y) = 0$ por t^{nr} obtemos

$$\left(\frac{y}{t^r}\right)^n \ + \ \frac{c_{n-2}(t)}{t^{2r}} \left(\frac{y}{t^r}\right)^{n-2} \ + \ \cdots + \frac{c_0(t)}{t^{nr}} \ = \ 0 \ .$$

Fixemos $i_0 \in \{0, \dots, n-2\}$ tal que $r = \mathit{mult}_0\,(c_{i_0}(t))\,/(n-i_0)$. Então $v|(n-i_0)$. Em particular $v|n!$, e portanto $t^r, t^{-r} \in K((t^{1/n!}))$. Assim

$$\frac{y}{t^r} \ = \ \frac{y}{(t^{1/v})^u} \ \in K((t^{1/n!})) \quad \Longleftrightarrow \quad y \in K((t^{1/n!})) \ .$$

Por outro lado, pela definição de r , temos

$$\frac{u(n-i)}{v} \ = \ r(n-i) \ \leq \ \mathit{mult}_0\,(c_i(t)) \ , \qquad i = 0, \dots, n-2 \ ,$$

valendo a igualdade quando $i = i_0$. Assim, pondo

$$d_i(t^{1/v}) := \frac{c_i(t)}{t^{r(n-i)}}$$

temos $d_i(t^{1/v}) \in K[[t^{1/v}]]$, para todo i , e $d_{i_0}(0) \neq 0$. Tomando então $s = t^{1/v}$ e $z = y/t^r$ obtemos a equação

$$G(s,z) \;:=\; z^n \;+\; d_{n-2}(s)\, z^{n-2} \;+\; \cdots \;+\; d_0(s) \;=\; 0\,, \qquad \text{com} \qquad d_i(s) \in K[[s]]\,.$$

Como $d_{i_0}(0) \neq 0$, temos $G(0,z) \neq z^n$. Pelo argumento utilizado anteriormente, sabemos que existem $G_1(s,z), G_2(s,z) \in K[[s]][z]$, com $\deg_z(G_j(s,z)) < n$ para $j = 1, 2$, tais que

$$G(s,z) \;=\; G_1(s,z)\, G_2(s,z)\,.$$

Em particular, se $n_1 = \deg(K((s))(z)/K((s)))$ então $n_1 \leq m-1$. Pela hipótese de indução

$$z \;\in\; K((s^{1/(\prod_{i=1}^{n_1} i!)})) \;=\; K((t^{1/(v\cdot\prod_{i=1}^{n_1} i!)})) \;\subseteq\; K((t^{1/(\prod_{i=1}^{n} i!)})) \;\subseteq\; K((t^{1/N}))\,,$$

portanto $y = t^r z \in K((t^{1/N}))$. Concluímos assim que $L \subseteq K((t^{1/N}))$.

Agora provaremos que $L = K((t^{1/m}))$. Ora, $K((t^{1/N}))$ é o corpo de decomposição do polinômio $y^N - t \in K((t))[y]$. Portanto, $K((t^{1/N}))/K((t))$ é uma extensão normal e finita (ver [St, Chapter 17, Theorem 17.10]). Além disso, como $\mathrm{char}(K) = 0$, esta extensão também é separável e portanto de Galois. O grupo de Galois correspondente é cíclico de ordem N . Como todo subgrupo de um grupo cíclico de ordem N é cíclico de ordem que divide N , da correspondência de Galois concluímos que todo corpo intermediário da extensão acima é o corpo de decomposição de um polinômio da forma $y^n - t \in K((t))[y]$, para algum $n \in \mathbb{N}$ tal que $n|N$ (ver [La, Chapter 6, Theorem 6.2]). Como $\deg(L/K((t))) = m$, devemos ter $L = K((t^{1/m}))$, conforme afirmado. $\square$

Com isso podemos obter uma resolução de singularidades utilizando séries de Puiseux.

Teorema 2.2.3 (Expansão de Puiseux). *Seja* $F(x,y) \in K[[x,y]]$ *uma série de potência irredutível sobre um corpo* K *algebricamente fechado com* $\mathrm{char}(K) = 0$ *,* *tal que* $F(0,0) = 0$ *. Suponhamos que* y^m *aparece em* $F(x,y)$ *com coeficiente não-nulo e que* m *é o menor inteiro tal que isso acontece. Então* $F(x,y) = 0$ *tem uma solução da forma*

$$y \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} a_i\, x^{i/m} \;\in K[[x^{1/m}]] \;.$$

Demonstração: Pelo Teorema de Preparação de Weierstrass

$$F(x,y) \;=\; \left[y^m \,+\, u_{m-1}(x)\, y^{m-1} \,+\, \cdots \,+\, u_0(x)\right] U(x,y) \;, \quad u_i(x) \in K[[x]]$$

com $U(x,y) \in K[[x,y]]$ invertível. Como F é irredutível em $K[[x,y]]$,

$$P(x,y) \;:=\; y^m \,+\, u_{m-1}(x)\, y^{m-1} \,+\, \cdots \,+\, u_0(x)$$

também é irredutível em $K[[x,y]]$. Isso implica que $P(x,y)$ é irredutível em $K[[x]][y]$.

De fato, suponhamos que

$$P(x,y) \;=\; G(x,y)\, H(x,y)$$

com

$$\begin{aligned} G(x,y) \;&=\; g_s(x)\, y^s \,+\, g_{s-1}(x)\, y^{s-1} \,+\, \cdots \,+\, g_0(x) \\ H(x,y) \;&=\; h_r(x)\, y^r \,+\, h_{r-1}(x)\, y^{r-1} \,+\, \cdots \,+\, h_0(x) \end{aligned}$$

$g_i(x), h_i(x) \in K[[x]]$ e $s + r = m$. Como $P(x,y)$ é mônico, podemos supor que $g_s(x) = h_r(x) = 1$. Sendo $P(x,y)$ irredutível em $K[[x,y]]$, devemos ter $G(x,y)$ ou $H(x,y)$ invertível em $K[[x,y]]$. Para fixar as idéias, supomos $H(x,y)$ invertível em $K[[x,y]]$. Então

$$F(x,y) \;=\; \left[y^s \,+\, g_{s-1}(x)\, y^{s-1} \,+\, \cdots \,+\, g_0(x)\right] H(x,y)\, U(x,y)$$

com $H(x,y)\, U(x,y)$ invertível em $K[[x,y]]$, ou seja, $H(0,0)\, U(0,0) \neq 0$. Assim, a hipótese que m é o menor inteiro tal que y^m aparece em $F(x,y)$ com coeficiente não-nulo implica $y^s \,+\, g_{s-1}(0)\, y^{s-1} \,+\, \cdots \,+\, g_0(0) = y^m$ e portanto $s = m$.

Segue então da unicidade demonstrada no Teorema de Preparação de Weierstrass que $P(x,y) = G(x,y)$ e $H(x,y) = 1$. Logo $P(x,y)$ é irredutível em $K[[x]][y]$.

Agora observemos que $K[[x]]$ é um domínio de ideais principais. De fato, $K[[x]]$ é noetheriano (ver [AM, Chapter 10, Corollary 10.27]). Dado então um ideal não-nulo $I = (f_1, \ldots, f_n)$ de $K[[x]]$, $f_i \neq 0$ para todo i , existem inteiros não-negativos $\ell_1, \ldots, \ell_n$ tais que $f_i(x) = x^{\ell_i} g_i(x)$ com $g_i(x)$ invertível, $i = 1, \ldots, n$. Temos então $I = (x^\ell)$, onde $\ell = \min\{\ell_1, \ldots, \ell_n\}$.

Segue do Lema de Gauss (ver [GL, Capítulo II, Teorema II.2.1 e Lema II.3.6]) que $P(x,y)$ é irredutível como polinômio em $K((x))[y]$. Assim, $K((x))(y)/K((x))$ é uma extensão de corpos de grau m e $P(x,y)$ é o polinômio minimal de y . Pelo Teorema 2.2.2, $y \in K((x^{1/m}))$, ou seja, $y = \sum_{i=r}^{\infty} a_i\, x^{i/m}$ para um certo $r \in \mathbb{Z}$ e certos $a_i \in K$.

Temos então $P(x, \sum_{i=r}^{\infty} a_i x^{i/m}) = 0$, o que implica $a_i = 0$ para todo $i < 0$, donde $y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, x^{i/m} \in K[[x^{1/m}]]$. Por outro lado $P(0,0) = 0$, ou seja, $y = 0$ é uma raíz do polinômio $P(0,y) = y^m + u_{m-1}(0)\, y^{m-1} + \cdots + u_0(0) \in K[y]$. Pelo Lema de Hensel, a irredutibilidade de $P(x,y)$ implica $P(0,y) = y^m$, ou seja, $u_i(0) = 0$ para $i = 0, 1, \ldots, m-1$. Portanto a equação $P(x, \sum_{i=r}^{\infty} a_i\, x^{i/m}) = 0$ implica também $a_0 = 0$. □

A solução dada pelo teorema acima é chamada a *expansão de Puiseux* de y em relação a F .

Corolário 2.2.4. *Nas hipóteses do Teorema 2.2.3 consideremos o homomorfismo* K*-linear*

$$\begin{array}{rcl} K[[x,y]] & \stackrel{\varphi}{\to} & K[[t]] \\ x & \mapsto & t^m \\ y & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i\, t^i \end{array}$$

onde $\sum_{i=1}^{\infty} a_i\, x^{i/m}$ *é a expansão de Puiseux de* y *em relação a* F *. Então*

$\ker(\varphi) = (F)$. Em particular $K[[t]]$ é a normalização de $K[[x,y]]/F(x,y)$.

Demonstração: Seja $G(x,y) \in K[[x,y]]\backslash\{0\}$ tal que $G(t^m, \sum_{i=1}^{\infty} a_i\, t^i) = 0$ e seja r o maior inteiro não negativo tal que

$$G(x,y) = x^r H(x,y)\ , \quad \text{com} \quad H(x,y) = \sum b_{j,\ell}\, x^j y^\ell \in K[[x,y]]\ .$$

Temos $H(t^m, \sum_{i=1}^{\infty} a_i t^i) = 0$, portanto $H(x, \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^{i/m}) = 0$. Em particular $b_{0,0} = 0$. Assim, existe um inteiro positivo mínimo n tal que y^n aparece em $H(x,y)$ com coeficiente não-nulo. Pelo Teorema de Preparação de Weierstrass podemos escrever

$$H(x,y) \ = \ \big[y^n \ + \ v_{n-1}(x)\, y^{n-1} \ + \ \ldots \ + \ v_0(x)\big] \cdot V(x,y)\ , \quad v_i(x) \in K[[x]]$$

com $V(x,y) \in K[[x,y]]$ invertível.

Denotemos $Q(x,y) := y^n + v_{n-1}(x)\, y^{n-1} + \ldots + v_0(x)$. Temos $Q(t^m, \sum_{i=1}^{\infty} a_i t^i) = 0$, o que implica $Q(x, \sum_{i=1}^{\infty} a_i\, x^{i/m}) = 0$. Assim, se $P(x,y)$ é o polinômio minimal de $y = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\, x^{i/m}$, devemos ter $Q(x,y)$ múltiplo de $P(x,y)$, portanto múltiplo de $F(x,y)$ (ver demonstração do Teorema 2.2.3). Segue que $G(x,y) = x^r\, Q(x,y)\, V(x,y)$ é múltiplo de $F(x,y)$, o que demonstra a primeira afirmação.

Mostraremos agora que $K[[t]]$ é a normalização de $K[[t^m, \sum_{i=1}^{\infty} a_i\, t^i]]$ em $K((t))$. Suponhamos primeiro que $p(t) = \sum_{i=r}^{\infty} b_i\, t^i \in K((t))$ é inteiro sobre $K[[t^m, \sum_{i=1}^{\infty} a_i\, t^i]]$. Então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$(p(t))^n \ + \ v_{n-1}\,(t^m, \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i\, t^i)\,(p(t))^{n-1} \ + \ \ldots \ + \ v_0\,(t^m, \sum_{i=1}^{\infty} a_i\, t^i) \ = \ 0\ ,$$

com $v_i(x,y) \in K[[x,y]]$. Analizando os coeficientes dos termos de menor grau desta equação é facil de ver que $b_i = 0$ para todo $i < 0$. Assim $p(t) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i\, t^i \ \in K[[t]]$.

Por outro lado, dado $p(t) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i\, t^i \in K[[t]]$, podemos escrever

$$p(t) \ = \ \sum_{i=0}^{\infty} b_{mi} t^{mi} \ + \ t \sum_{i=0}^{\infty} b_{mi+1} t^{mi} \ + \ \cdots \ + \ t^{m-1} \sum_{i=0}^{\infty} b_{m(i+1)-1} t^{mi}\ .$$

Como t^j é inteiro sobre $K[[t^m]]$ (pois satisfaz o polinômio mônico $y^m - t^{mj}$), para todo $j = 1, \ldots, m-1$, e a normalização de $K[[t^m, \sum_{i=1}^{\infty} a_i t^i]]$ é um anel (ver [AM, Chapter 5, Corollary 5.3]), segue que $p(t)$ é inteiro sobre $K[[t^m, \sum_{i=1}^{\infty} a_i t^i]]$. Isso completa a demonstração do corolário. $\square$

O morfismo de esquemas $\mathcal{S}pec\,(K[[t]]) \to \mathcal{S}pec\,(K[[x,y]]/F(x,y))$ definido por $t \mapsto (t^m, \sum_{i=1}^{\infty} a_i t^i)$ chama-se a *resolução das singularidades* da curva algebróide $F(x,y) = 0$.

Exemplo 2.2.5. *Seja* $F(x,y) = y^2 - x^3 \in \mathbb{C}[[x,y]]$. *Uma solução de* $F(x,y) = 0$ *é* $y = x^{3/2} \in \mathbb{C}[[x^{1/2}]]$ *e uma resolução da curva* $y^2 = x^3$ *é* $t \mapsto (t^2, t^3)$.

Exemplo 2.2.6. *Seja* $F(x,y) = y^2 - x(x^2-1) \in \mathbb{C}[[x,y]]$. *Uma solução de* $F(x,y) = 0$ *é*

$$y \;=\; i\,x^{1/2} \;-\; \frac{i}{2}\,x^{5/2} \;-\; \frac{i}{8}\,x^{9/2} \;-\; \frac{i}{16}\,x^{13/2} \;-\; \frac{5i}{64}\,x^{17/2} \;-\; \cdots$$

onde $i = \sqrt{-1}$. *Uma resolução da curva* $y^2 \;=\; x\,(x^2-1)$ *é*

$$t \mapsto (\,t^2\,,\, i\,t \;-\; \frac{i}{2}\,t^5 \;-\; \frac{i}{8}\,t^9 \;-\; \frac{i}{16}\,t^{13} \;-\; \frac{5i}{64}\,t^{17} \;-\; \cdots)\,.$$

Observemos que a série $i\,t - (i/2)\,t^5 - (i/8)\,t^9 - \cdots$ *tem raio de convergência positivo, definindo assim uma série convergente (não formal) numa vizinhança da origem.*

Capítulo 3

Normalização de domínios noetherianos semi-locais de dimensão 1

3.1 Blow-up

Seja S um domínio noetheriano semi-local de dimensão 1 com ideais maximais $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_k$, e seja $I = \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_k$ o radical de Jacobson de S . Se $\mathfrak{p}$ é um ideal primo de S que contém $I = \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_k$, então $\mathfrak{p}$ deve conter algum $\mathfrak{m}_i$ (ver [AM, Chapter 1, Proposition 1.11]) e portanto é maximal. Assim

$$V(I) = \{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_k\}$$

e, como S é um domínio de dimensão 1 , (0) é o único primo de S que não é maximal. Em particular $I \neq 0$ e para todo $a \in I \backslash \{0\}$

$$\{(0)\} = \mathcal{Spec}(S) \backslash V(I) = D(a) \ .$$

Além disso, é claro que podemos supor que $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_k$ são dois a dois distintos. Assim, se $i \neq j$, então $\mathfrak{m}_i$ e $\mathfrak{m}_j$ são *coprimos*, ou seja, $\mathfrak{m}_i + \mathfrak{m}_j = (1)$, pois

$\mathfrak{m}_i + \mathfrak{m}_j$ contém ambos os ideais $\mathfrak{m}_i$ e $\mathfrak{m}_j$ e estes são maximais e distintos. Por isso temos $I = \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_k = \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_k$ (ver [AM, Chapter 1, Proposition 1.10]).

Definição 3.1.1. *O Blow-up de I em S é o anel graduado*

$$B_I S \ = \ S \oplus I \oplus I^2 \oplus \cdots \ .$$

Consideremos agora a inclusão canônica

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & S & \rightarrow & B_I S \\ & a & \mapsto & a \oplus 0 \oplus 0 \oplus \cdots . \end{array}$$

Como vimos no Capítulo 1, φ induz uma aplicação natural $\mathcal{Spec}\,(B_I S) \rightarrow \mathcal{Spec}\,(S)$, a qual pode naturalmente ser restringida à $\mathcal{Proj}\,(B_I S)$:

$$\begin{array}{rccl} \varphi^* : & \mathcal{Proj}\,(B_I S) & \rightarrow & \mathcal{Spec}\,(S) \\ & \mathfrak{P} & \mapsto & \mathfrak{P} \cap S \ . \end{array}$$

Conforme definido no Capítulo 1, dado um ideal primo $\mathfrak{p}$ de S, como $\varphi\,(S \backslash \mathfrak{p}) \ = \ S \backslash \mathfrak{p} \oplus 0 \oplus 0 \oplus \cdots$ e $\varphi_{\mathfrak{p}}\,(\mathfrak{p} S_{\mathfrak{p}}) = \mathfrak{p} S_{\mathfrak{p}} \oplus 0 \oplus 0 \oplus \cdots$,

$$\begin{aligned} \frac{(B_I S)_{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{p}(B_I S)_{\mathfrak{p}}} &:= \frac{\left(\varphi\,(S\backslash\mathfrak{p})\right)^{-1}(B_I S)}{\varphi\,(\mathfrak{p} S_{\mathfrak{p}}) \cdot (B_I S)} \\ &= \frac{S_{\mathfrak{p}} \oplus I_{\mathfrak{p}} \oplus I_{\mathfrak{p}}^2 \oplus \cdots}{\mathfrak{p} S_{\mathfrak{p}} \oplus \mathfrak{p} I_{\mathfrak{p}} \oplus \mathfrak{p} I_{\mathfrak{p}}^2 \oplus \cdots} \\ &\cong \frac{S_{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{p} S_{\mathfrak{p}}} \oplus \frac{I_{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{p} I_{\mathfrak{p}}} \oplus \frac{I_{\mathfrak{p}}^2}{\mathfrak{p} I_{\mathfrak{p}}^2} \oplus \cdots \end{aligned}$$

Além disso, por construção, a aplicação $\mathcal{Spec}\,((B_I S)_{\mathfrak{p}} / \mathfrak{p}(B_I S)_{\mathfrak{p}}) \rightarrow \mathcal{Spec}\,(B_I S)$ leva ideais homogêneos em ideais homogêneos. Segue da Proposição 1.2.10 que a fibra $(\varphi^*)^{-1}\,(\mathfrak{p})$ é homeomorfa à

$$\mathcal{Proj}\left(\frac{S_{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{p} S_{\mathfrak{p}}} \oplus \frac{I_{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{p} I_{\mathfrak{p}}} \oplus \frac{I_{\mathfrak{p}}^2}{\mathfrak{p} I_{\mathfrak{p}}^2} \oplus \cdots\right) \ .$$

Se $\mathfrak{p} = (0)$, então $I_{\mathfrak{p}} = S_{\mathfrak{p}}$, já que $I \neq 0$ (ver [AM, Chapter 3, Proposition 3.11]), e $S_{\mathfrak{p}} = \mathcal{F}rac\,(S) =: K$ é o corpo de frações de S . Nesse caso temos

$$\begin{aligned} \frac{S_{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{p}S_{\mathfrak{p}}} \oplus \frac{I_{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{p}I_{\mathfrak{p}}} \oplus \frac{I_{\mathfrak{p}}^2}{\mathfrak{p}I_{\mathfrak{p}}^2} \oplus \cdots &= \frac{S_{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{p}S_{\mathfrak{p}}} \oplus \frac{S_{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{p}S_{\mathfrak{p}}} \oplus \frac{S_{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{p}S_{\mathfrak{p}}} \oplus \cdots \\ &\cong \frac{S_{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{p}S_{\mathfrak{p}}}[t] = K[t] . \end{aligned}$$

Assim, a fibra $(\varphi^*)^{-1}((0))$ é homeomorfa à $\mathcal{P}roj\,(K[t])$ o qual é homeomorfo à $\mathcal{S}pec\,(K)$, e portanto consiste de um único ponto.

Por outro lado, como S é domínio, $B_I S$ também é domínio. Em particular, o ideal nulo de $B_I S$ é primo. Além disso, este ideal é homogêneo, não contém o ideal irrelevante $\left(B_I S\right)_+$ e evidentemente se contrai no ideal nulo de S . Logo $(\varphi^*)^{-1}((0))$ é o ideal nulo de $B_I S$.

Se $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}_i$ é um ideal maximal de S , então $I_{\mathfrak{p}} = I_{\mathfrak{m}_i} = (\mathfrak{m}_i)_{\mathfrak{m}_i} =: \mathfrak{m}_i S_{\mathfrak{m}_i}$ (ver [AM, Chapter 3, Proposition 3.11]). Nesse caso, como $S_{\mathfrak{m}_i}/\mathfrak{m}_i S_{\mathfrak{m}_i} \cong (S/\mathfrak{m}_i)_{\mathfrak{m}_i} \cong S/\mathfrak{m}_i$ (ver [AM, Chapter 3, Corollary 3.4]), temos

$$\begin{aligned} \frac{S_{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{p}S_{\mathfrak{p}}} \oplus \frac{I_{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{p}I_{\mathfrak{p}}} \oplus \frac{I_{\mathfrak{p}}^2}{\mathfrak{p}I_{\mathfrak{p}}^2} \oplus \cdots &= \frac{S_{\mathfrak{m}_i}}{\mathfrak{m}_i S_{\mathfrak{m}_i}} \oplus \frac{\mathfrak{m}_i S_{\mathfrak{m}_i}}{\mathfrak{m}_i^2 S_{\mathfrak{m}_i}} \oplus \frac{\mathfrak{m}_i^2 S_{\mathfrak{m}_i}}{\mathfrak{m}_i^3 S_{\mathfrak{m}_i}} \oplus \cdots \\ &\cong \frac{S}{\mathfrak{m}_i} \oplus \frac{\mathfrak{m}_i}{\mathfrak{m}_i^2} \oplus \frac{\mathfrak{m}_i^2}{\mathfrak{m}_i^3} \oplus \cdots . \end{aligned}$$

Portanto, se $\mathfrak{m}_i$ é um maximal de S , então $(\varphi^*)^{-1}(\mathfrak{m}_i)$ é homeomorfo à $\mathcal{P}roj\,(S/\mathfrak{m}_i \oplus \mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_i^2 \oplus \mathfrak{m}_i^2/\mathfrak{m}_i^3 \oplus \cdots)$.

Lema 3.1.2. *$\mathcal{P}roj\,(S/\mathfrak{m}_i \oplus \mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_i^2 \oplus \mathfrak{m}_i^2/\mathfrak{m}_i^3 \oplus \cdots) \neq \varnothing$ para todo ideal maximal $\mathfrak{m}_i$ de S .*

Demonstração: Fixemos $i \in \{1, \ldots, k\}$. Como S é noetheriano, $\mathfrak{m}_i = \left(c_1, \ldots, c_r\right)$ para certos $c_1, \ldots, c_r \in S$.

Suponhamos, por absurdo, que $\mathcal{P}roj\,(S/\mathfrak{m}_i \oplus \mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_i^2 \oplus \mathfrak{m}_i^2/\mathfrak{m}_i^3 \oplus \cdots) = \varnothing$. Pelo Corolário 1.2.19, todo elemento homogêneo de grau positivo de $gr_{\mathfrak{m}_i} S = S/\mathfrak{m}_i \oplus \mathfrak{m}_i/{\mathfrak{m}_i}^2 \oplus {\mathfrak{m}_i}^2/{\mathfrak{m}_i}^3 \oplus \cdots$ é nilpotente. Portanto, para cada $j = 1, \ldots, r$, existe $\ell_j \geq 1$ tal que $c_j^{\ell_j} \in \mathfrak{m}_i^{\ell_j+1}$. Tomando $\ell = \ell_1 + \cdots + \ell_r$, obtemos $\mathfrak{m}_i^{\ell} = \mathfrak{m}_i^{\ell+1}$.

O anel $S_{\mathfrak{m}_i}$ é noetheriano local de dimensão 1 com ideal maximal $\mathfrak{m}_i S_{\mathfrak{m}_i}$. Por outro lado, a igualdade $\mathfrak{m}_i^{\ell} = \mathfrak{m}_i^{\ell+1}$ induz $(\mathfrak{m}_i S_{\mathfrak{m}_i})^{\ell} = (\mathfrak{m}_i S_{\mathfrak{m}_i})^{\ell+1}$ o que, pelo Lema de Nakayama (ver [AM, Chapter 2, Proposition 2.6]), implica $\mathfrak{m}_i S_{\mathfrak{m}_i} = 0$. Uma contradição já que $S_{\mathfrak{m}_i}$ tem dimensão 1 . □

Lema 3.1.3. *Seja A um anel noetheriano. Todo primo mínimo de A é associado. Em particular, se A é semi-local de dimensão 1, então $\mathcal{Spec}\,(A)$ é finito.*

Demonstração: Como todo ideal primo de A contém o zero, temos $A_{\mathfrak{p}} \neq 0$ para todo $\mathfrak{p} \in \mathcal{Spec}\,(A)$, portanto $\mathcal{Supp}\,(A) := \left\{ \mathfrak{p} \in \mathcal{Spec}\,(A) \;/\; A_{\mathfrak{p}} \neq 0 \right\} = \mathcal{Spec}\,(A)$. Por outro lado, o conjunto dos primos associados minimais A é finito e coincide com o conjunto dos elementos minimais de $\mathcal{Supp}\,(A)$ (ver [Ma, Chapter 2, Theorem 6.5]), donde segue a primeira afirmação.

Se A tem dimensão 1 , então um primo de A que não é minimal tem que ser maximal, donde segue a segunda afirmação. □

Lema 3.1.4. *Seja A um anel noetheriano semi-local de dimensão 1 . Dado um ideal maximal $\mathfrak{m}$, existe um ideal $\mathfrak{m}$-primário principal.*

Demonstração: Pelo Lema 3.1.3, $\mathcal{Spec}\,(A)$ é finito. Assim, existe $a \in A$ tal que $\mathfrak{m}$ é o único primo de A que contém $(a) = \mathcal{ann}\,(A/(a))$ (ver [AM, Chapter 1, Proposition 1.11]). Além disso, todo primo associado de $A/(a)$ deve conter (a) . Como $\mathcal{Ass}\,(A/(a)) \neq \varnothing$ (ver [Ma, Chapter 2, Theorem 6.1]) isso implica $\mathcal{Ass}\,(A/(a)) = \{\mathfrak{m}\}$, donde (a) é $\mathfrak{m}$-primário (ver [Ma, Chapter 2, Theorem 6.6]). □

Lema 3.1.5. *Sejam* $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_\ell$ *elementos distintos de* $\mathcal{P}roj\,(B_IS)$. *Então existe algum elemento homogêneo de grau positivo em* B_IS *que não pertence à união* $\bigcup_{i=1}^{\ell} \mathfrak{P}_i$.

Demonstração: Provaremos isso por indução em ℓ . Como o ideal irrelevante $\left(B_IS\right)_+$ não pode estar contido em $\mathfrak{P}_1$, deve existir algum elemento $f_{j_1} + \cdots + f_{j_d}$ em $\left(B_IS\right)_+$, $f_{j_r} \in I^{j_r}$ e $j_0 < \cdots < j_d$, que não pertence à $\mathfrak{P}_1$. Então algum f_{j_r} não pertence à $\mathfrak{P}_1$. Isso mostra que o resultado é válido para $\ell = 1$.

Suponhamos agora que $\ell > 1$ e o resultado é válido para $\ell - 1$ ideais. Então, para cada $i = 1, \ldots, \ell$ existe algum elemento homogêneo f_i em $\left(B_IS\right)_+$, digamos de grau n_i , tal que

$$f_i \notin \bigcup_{j \neq i} \mathfrak{P}_j \, .$$

Se, para algum i tivermos também $f_i \notin \mathfrak{P}_i$, então está terminado. Caso contrário, se $f_i \in \mathfrak{P}_i$ para todo i , então teremos, em particular,

$$f_1^{n_2 + \cdots + n_\ell} \in \mathfrak{P}_1 - \bigcup_{j=2}^{\ell} \mathfrak{P}_j \qquad \text{e} \qquad f_2^{n_1} \cdots f_\ell^{n_1} \in \bigcap_{j=2}^{\ell} \mathfrak{P}_j - \mathfrak{P}_1$$

com $\mathit{deg}\left(f_1^{n_2+\cdots+n_\ell}\right) = \mathit{deg}\left(f_2^{n_1} \cdots f_\ell^{n_1}\right) = n_1(n_2 + \cdots + n_\ell)$. É claro que nessas condições o elemento homogêneo (de grau positivo) $f_1^{n_2+\cdots+n_\ell} + f_2^{n_1} \cdots f_\ell^{n_1}$ não pertence à união $\bigcup_{i=1}^{\ell} \mathfrak{P}_i$. □

Proposição 3.1.6. $\mathcal{P}roj\,(S/\mathfrak{m}_i \oplus \mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_i^2 \oplus \mathfrak{m}_i^2/\mathfrak{m}_i^3 \oplus \cdots)$ *é finito.*

Demonstração: Seja $\mathfrak{q} = (a)$ um ideal $\mathfrak{m}_i$-primário (Lema 3.1.4) e seja $n \geq 1$ tal que $\mathfrak{m}_i^n \subseteq \mathfrak{q}$ (ver [AM, Chapter 7, Corollary 7.16]). Temos um homomorfismo canônico

$$\begin{aligned} \sigma :\ (S/\mathfrak{q})[t] &\ \rightarrow\ \frac{S}{\mathfrak{q}} \oplus \frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{q}^2} \oplus \frac{\mathfrak{q}^2}{\mathfrak{q}^3} \oplus \cdots =: \mathit{gr}_{\mathfrak{q}} S \\ t &\ \mapsto\ 0 \oplus \overline{a} \oplus 0 \oplus 0 \oplus \cdots \end{aligned}$$

que é sobrejetivo (onde t é uma indeterminada). Segue da Proposição 1.2.8 que $\mathcal{S}pec\left(gr_{\mathfrak{q}}S\right)$ é homeomorfo à um subconjunto fechado de $\mathcal{S}pec\,((S/\mathfrak{q})[t])$. Em particular $dim\left(gr_{\mathfrak{q}}S\right) \leq dim\,((S/\mathfrak{q})[t])$. Mas $S/\mathfrak{q}$ é um um anel noetherino (ver [AM, Chapter 6, Theorem 6.6]) de dimensão 0, já que $\mathcal{S}pec\,(S/\mathfrak{q}) = \{\mathfrak{m}_i/\mathfrak{q}\}$ devido a escolha de a. Logo $dim\,((S/\mathfrak{q})[t]) = 1$ (ver [AM, Chapter 11, Exercise 7]).

Além disso, como $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{m}_i$, fica bem definida a aplicação canônica de anéis graduados

$$gr_{\mathfrak{q}}S := \frac{S}{\mathfrak{q}} \oplus \frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{q}^2} \oplus \frac{\mathfrak{q}^2}{\mathfrak{q}^3} \oplus \cdots \ \rightarrow \ \frac{S}{\mathfrak{m}_i} \oplus \frac{\mathfrak{m}_i}{\mathfrak{m}_i{}^2} \oplus \frac{\mathfrak{m}_i{}^2}{\mathfrak{m}_i{}^3} \oplus \cdots =: gr_{\mathfrak{m}_i}S\,.$$

Esta aplicação tem como imagem o subanel

$$A := \frac{S}{\mathfrak{m}_i} \oplus \frac{\mathfrak{q}+\mathfrak{m}_i^2}{\mathfrak{m}_i{}^2} \oplus \frac{\mathfrak{q}+\mathfrak{m}_i^3}{\mathfrak{m}_i{}^3} \oplus \cdots \ \subseteq \ gr_{\mathfrak{m}_i}S\,,$$

assim pode ser fatorada como

$$gr_{\mathfrak{q}}S \ \xrightarrow{\phi}\ A \ \xrightarrow{\psi}\ gr_{\mathfrak{m}_i}S\,,$$

com ϕ sobrejetiva (e ψ injetiva). Utilizando novamente a Proposição 1.2.8 concluímos que $\mathcal{S}pec\,(A)$ é homeomorfo à um subconjunto fechado de $\mathcal{S}pec\left(gr_{\mathfrak{q}}S\right)$ e portanto $dim\,(A) \leq dim\left(gr_{\mathfrak{q}}S\right) \leq dim\,((S/\mathfrak{q})[t]) = 1$.

Mas S é noetheriano. Assim, para cada $j = 1, \ldots, n$, existem $x_{j,1}, \ldots, x_{j,r_j}$ em S tais que $\mathfrak{m}_i^j = \left(x_{j,1}, \ldots, x_{j,r_j}\right)$. Como $\mathfrak{m}_i^n \subseteq \mathfrak{q}$, denotando por $\mathbf{x}_{j,\ell}$ o elemento homogêneo de $gr_{\mathfrak{m}_i}S$ cuja componete homogênea de grau j é $x_{j,\ell}$ e as demais são nulas, o anel $gr_{\mathfrak{m}_i}S$ é finitamente gerado, como A-módulo, pelo conjunto finito $F = \left\{\, \mathbf{x}_{j,\ell} \;/\; 1 \leq j \leq n\,,\ 1 \leq \ell \leq r_j \,\right\}$. Logo a extensão $A \subseteq gr_{\mathfrak{m}_i}S$ é inteira (ver [AM, Chapter 5, Proposition 5.1]), donde $dim\left(gr_{\mathfrak{m}_i}S\right) = dim\,(A) \leq 1$ (ver [AM, Chapter 5, Corollary 5.9 and Theorems 5.10 and 5.11]).

Por outro lado, como $S/\mathfrak{m}_i$ é um corpo, o ideal irrelevante $\left(gr_{\mathfrak{m}_i}S\right)_+$ é o único ideal maximal de $gr_{\mathfrak{m}_i}S$, donde todo elemento de $\mathcal{P}roj\left(gr_{\mathfrak{m}_i}S\right)$ deve ser um primo mínimo de $gr_{\mathfrak{m}_i}S$ (já que não pode conter o ideal irrelevante). Sendo

$\mathcal{Proj}\left(gr_{\mathfrak{m}_i}S\right) \neq \varnothing$ (Lema 3.1.2), segue que $\mathit{dim}\left(gr_{\mathfrak{m}_i}S\right) = 1$.

Além disso, $gr_{\mathfrak{m}_i}S$ é noetheriano (ver [AM, Chapter 10, Proposition 10.7]). Pelo Lema 3.1.3 temos $\mathcal{Spec}\left(gr_{\mathfrak{m}_i}S\right)$ finito, donde $\mathcal{Proj}\left(gr_{\mathfrak{m}_i}S\right)$ é finito. $\square$

Em particular, a aplicação $\varphi^* : \mathcal{Proj}\left(B_I S\right) \to \mathcal{Spec}\left(S\right)$ é finita (ou seja, $(\varphi^*)^{-1}(\mathfrak{p})$ é finito para todo $\mathfrak{p} \in \mathcal{Spec}\left(S\right)$) e como $\mathcal{Spec}\left(S\right)$ é finito temos $\mathcal{Proj}\left(B_I S\right)$ também finito.

Corolário 3.1.7. *Existe* $f \in \left(B_I S\right)_+$ *homogêneo tal que* $\left(\mathcal{Proj}\left(B_I S\right), \mathscr{O}\right)$ *é isomorfo ao espectro de* $\left(B_I S\right)_{(f)}$ *. Em particular,* $\left(\mathcal{Proj}\left(B_I S\right), \mathscr{O}\right)$ *é um esquema afim.*

Demonstração: Como $\mathcal{Proj}\left(B_I S\right)$ é finito, segue do Lema 3.1.5 que existe algum elemento homogêneo $f \in \left(B_I S\right)_+$ que não pertence a união $\bigcup_{\mathfrak{P} \in \mathcal{Proj}(B_I S)} \mathfrak{P}$. O resultado segue então do Corolário 1.2.21. $\square$

Além disso, segue também do Corolário 1.2.21 que se g é outro elemento homogêneo de $\left(B_I S\right)_+$ que não pertence nenhum elemento de $\mathcal{Proj}\left(B_I S\right)$, então os espectros de $\left(B_I S\right)_{(f)}$ e de $\left(B_I S\right)_{(g)}$ são isomorfos.

Lema 3.1.8. *Seja* $\mathcal{Frac}\left(S\right)$ *o corpo de fração de* S *. Se* $f \in \left(B_I S\right)_+$ *é homogêneo e não-nulo, então a aplicação natural*

$$\begin{array}{rccc} \sigma_f : & \left(B_I S\right)_{(f)} & \to & \mathcal{Frac}\left(S\right) \\ & \dfrac{a}{f^n} & \mapsto & \dfrac{a}{f^n} \end{array}$$

é um isomorfismo sobre sua imagem $BS_f := \sigma_f\left(\left(B_I S\right)_{(f)}\right)$ *, a qual contém* S *.*

Além disso, se $g \in \left(B_I S\right)_+$ *é outro elemento homogêneo e não-nulo, tal que* $\mathcal{D}\left(f\right) \supseteq \mathcal{D}\left(g\right)$ *, então* $BS_f \subseteq BS_g$ *.*

Demonstração: Por definição,

$$\left(B_I S\right)_{(f)} := \left\{ \frac{a}{f^n} \;\Big/\; a \text{ é homogêneo com } \mathit{deg}\,(a) = n\,\mathit{deg}\,(f) \right\}.$$

Primeiramente mostremos que σ_f está bem definida. Para isso, suponhamos que $a/f^n = b/f^m$ em $\left(B_I S\right)_{(f)}$. Isso significa que existe um inteiro não negativo k tal que $f^k(af^m - bf^n) = 0$ em $B_I S$. Como todos estes elementos são homogêneos, podemos considerá-los como elementos de S e com tal consideração é claro que temos também $f^k(af^m - bf^n) = 0$ em S.

Sendo $f \neq 0$ (tanto como elemento de $B_I S$ como elemento de S) e sendo S um domínio, a igualdade $f^k(af^m - bf^n) = 0$ implica $af^m - bf^n = 0$ em S, donde $a/f^n = b/f^m$ em $\mathcal{Frac}\,(S)$. Logo σ_f está bem definida.

A verificação de que σ_f é um homomorfismo é fácil. Quanto a injetividade de σ_f, se a/f^n é um elemento de $\left(B_I S\right)_{(f)}$ tal que $a/f^n = 0$ em $\mathcal{Frac}\,(S)$ então devemos ter $a = 0$ como elemento de S, o que implica $a/f^n = 0$ em $\left(B_I S\right)_{(f)}$.

Além disso, é claro que S é a imagem do subconjunto de $\left(B_I S\right)_{(f)}$ dos elementos da forma $a/1$ com a elemento homogêneo de grau 0. Isso demonstra a primeira parte do lema.

Suponhamos agora que g é outro elemento homogêneo e não-nulo de $\left(B_I S\right)_+$, tal que $\mathcal{D}\,(f) \supseteq \mathcal{D}\,(g)$. Um elemento $a/f^n \in \left(B_I S\right)_{(f)}$ representa uma seção s de $\mathscr{O}\,(\mathcal{D}\,(f))$ (ver Proposições 1.2.11 e 1.2.20). Como $\mathcal{D}\,(f) \supseteq \mathcal{D}\,(g)$ temos um homomorfismo $\mathscr{O}\,(\mathcal{D}\,(f)) \to \mathscr{O}\,(\mathcal{D}\,(g))$ que leva s na restrição $s|_{\mathcal{D}(g)}$, a qual é representada por algum elemento b/g^m de $\left(B_I S\right)_{(g)}$ (Proposições 1.2.11 e 1.2.20). Então $a/f^n = b/g^m$ em $\left(B_I S\right)_{(\mathfrak{P})}$, para todo $\mathfrak{P} \in \mathcal{D}\,(g)$. (Notemos que sendo $B_I S$ um domínio e sendo $g \neq 0$ temos $\mathcal{D}\,(g) \neq \varnothing$). Segue que $\sigma_f\,(a/f^n) = \sigma_g\,(a/f^n) = \sigma_g\,(b/g^m)$, ou seja, $a/f^n = b/g^m \in BS_g \subseteq \mathcal{Frac}\,(S)$. $\square$

Denotaremos $BS := BS_f$, onde f é algum elemento homogêneo de $\left(B_I S\right)_+$ que não pertence a união $\bigcup_{\mathfrak{P} \in \mathcal{Proj}(B_I S)} \mathfrak{P}$. Pelo Teorema 3.1.8, o anel BS está bem definido. Além disso, segue do Corolário 1.2.21 que

$$\left(\mathcal{P}roj\,(B_I S)\,,\mathcal{O}_{\mathcal{P}roj(B_I S)}\right)\cong\left(\mathcal{S}pec\,(BS)\,,\mathcal{O}_{\mathcal{S}pec(BS)}\right)\,.$$

Proposição 3.1.9. *O anel* BS *é finito sobre* S *. Em particular* $\dim(BS)=\dim(S)$ *.*

Demonstração: Seja f como acima, e seja $m=\deg(f)$. Como S é noetheriano, existem $a_1,\ldots,a_n\in I^m$ não-nulos tais que $I^m=\left(a_1,\ldots,a_n\right)$. Então $BS=BS_f=S[a_1/f,\ldots,a_n/f]$ e BS é uma S-álgebra de tipo finito. Assim, basta mostrar que a extensão $S\subseteq BS$ é inteira, ou seja, que todo anel de valorização de $\mathcal{F}rac\,(S)$ que contém S contém também BS (ver [AM, Chapter 5, Corollary 5.22]).

Pois bem, seja R um anel de valorização de $\mathcal{F}rac\,(S)$ que contém S , e seja $v:\mathcal{F}rac\,(S)^*\to G$ uma valorização associada a R (G um grupo ordenado). Tomemos $a\in\{a_1,\ldots,a_n\}$ tal que $v(a)\leq v(a_i)$ para todo i . Então $v(a_i/a)=v(a_i)-v(a)\geq 0$ para todo i , portanto $a_i/a\in R$ para todo i , donde $BS_a=S[a_1/a,\ldots,a_n/a]\subseteq R$.

Como $\mathcal{D}(f)=\mathcal{P}roj\,(B_I S)$ é claro que $\mathcal{D}(f)\supseteq\mathcal{D}(a)$. Segue do Lema 3.1.8 que $BS=BS_f\subseteq BS_a\subseteq R$. Logo a extensão $S\subseteq BS$ é inteira e $\dim(BS)=\dim(S)$ (ver [AM, Chapter 5, Corollary 5.9 and Theorems 5.10 and 5.11]). $\square$

Proposição 3.1.10. $BS=S$ *se e somente se* S *regular.*

Demonstração: Suponhamos que S é regular, ou seja, que para todo $i=1,\ldots,k$, $\mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_i^2$ é um $S/\mathfrak{m}_i$-espaço vetorial de dimensão 1 . Isso implica que todo $\mathfrak{m}_i$ é principal (ver [AM, Chapter 2, Proposition 2.8]), digamos $\mathfrak{m}_i=(x_i)$. Tomando então $f:=x_1\cdots x_k$, temos $I=\mathfrak{m}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{m}_k=\mathfrak{m}_1\cdots\mathfrak{m}_k=(f)$. Segue que o elemento $f\in B_I S$, considerado como elemento homogêneo de grau 1 , gera o ideal irrelevante $\left(B_I S\right)_+$. Portanto $f \notin \bigcup_{\mathfrak{P} \in \mathcal{Proj}(B_I S)} \mathfrak{P}$, o que nos permite supor que $BS = BS_f$.

Como já sabemos que $S \subseteq BS_f$, só nos falta mostrar a inclusão contrária. Ora, um elemento de $BS_f := \sigma_f\left(\left(B_I S\right)_{(f)}\right)$ escreve-se da forma a/f^n para algum $a \in I^n$ (ver Lema 3.1.8). Sendo $I = (f)$, temos $I^n = (f^n)$, portanto existe $c \in S$ tal que $a = c\,f^n$. Isso implica $a/f^n = c$ em $\mathcal{Frac}\,(S)$. Em particular $a/f^n \in S$.

Reciprocamente, suponhamos que $BS = S$. Precisamos mostrar que cada $\mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_i^2 \cong \mathfrak{m}_i S_{\mathfrak{m}_i}/(\mathfrak{m}_i S_{\mathfrak{m}_i})^2$ é um espaço vetorial de dimensão 1 sobre o corpo $S/\mathfrak{m}_i \cong \left(S/\mathfrak{m}_i\right)_{\mathfrak{m}_i} \cong S_{\mathfrak{m}_i}/\mathfrak{m}_i S_{\mathfrak{m}_i}$ (ver [AM, Chapter 3, Corillary 3.4 and Proposition 3.11]). Como $S_{\mathfrak{m}_i}$ é um domínio noetheriano local de dimensão 1 , é suficiente mostrar que cada $\mathfrak{m}_i S_{\mathfrak{m}_i}$ é um ideal principal de $S_{\mathfrak{m}_i}$ (ver [AM, Chapter 9, Proposition 9.2]). Demonstraremos apenas para $i = 1$, pois os demais casos são análogos.

A igualdade $BS = S$ implica que, para cada $i = 1, \ldots, k$, existe um único $\mathfrak{M}_i \in \mathcal{Proj}\,(B_I S)$ que se contrai em $\mathfrak{m}_i$ via inclusão canônica $S \hookrightarrow B_I S$, e que os *stalks* $\left(B_I S\right)_{(\mathfrak{M}_i)}$ e $S_{\mathfrak{m}_i}$ são iguais (considerados como subanéis de $\mathcal{Frac}\,(S)$).

Para cada $i = 2, \ldots, k$, existe $y_i \in \mathfrak{m}_i \backslash \bigcup_{j \neq i} \mathfrak{m}_j$ (ver [AM, Chapter 1, Proposition 1.11]) e, como S é noetheriano, existem também $x_1, \ldots, x_n \in S$ tais que $\mathfrak{m}_1 = (x_1, \ldots, x_n)$. Considerando $y_2 \cdots y_k \in \bigcap_{i=2}^k \mathfrak{m}_i$ como elemento homogêneo de grau 0 e cada $x_j\,y_2 \cdots y_k \in I = \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_k$ como elemento homogêneo de grau 1 , temos que cada produto $x_j\,y_2^2 \cdots y_k^2$ pertence a $\bigcap_{i=2}^k \mathfrak{M}_i$.

Afirmamos que algum $x_j\,y_2^2 \cdots y_k^2$ não pertence a $\mathfrak{M}_1$. De fato, como $\mathfrak{M}_1$ não pode conter o ideal irrelevante, deve existir algum $z \in I = \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_k$ que não pertence a $\mathfrak{M}_1$ (z considerado como elemento homogêneo de grau 1). Sendo $\mathfrak{m}_1 = (x_1, \ldots, x_n)$, z é um somatório finito de termos da forma $c\,x_\ell\,y$, $y \in \mathfrak{m}_2 \cdots \mathfrak{m}_k$, $c \in S$ e $\ell \in \{1, \ldots, n\}$. Isso implica que algum termo $c\,x_j\,y$ deste somatório não pertence a $\mathfrak{M}_1$. Além disso, $y_i \notin \mathfrak{m}_1$, para todo $i = 2, \ldots, k$. Assim, $y_2^2 \cdots y_k^2$, considerado como elemento homogêneo de grau 0 , não pertence a $\mathfrak{M}_1$, e portanto $h := c\,x_j\,y\,y_2^2\cdots y_k^2 \notin \mathfrak{M}_1$. Mas h é também o produto de $c\,y$, considerado como elemento homogêneo de grau 0 , por $x_j\,y_2^2\cdots y_k^2$, considerado como elemento homogêneo de grau 1 . Segue que $x_j\,y_2^2\cdots y_k^2 \notin \mathfrak{M}_1$.

Trocando os índices se necessário, podemos supor que $f := x_1\,y_2^2\cdots y_k^2 \in \bigcap_{i=2}^{k}\mathfrak{M}_i\backslash\mathfrak{M}_1$. Assim $\mathcal{D}(f) = \{(0), \mathfrak{M}_1\}$, o que implica $BS_f := \sigma_f\left(\left(B_IS\right)_{(f)}\right) \subseteq \left(B_IS\right)_{(\mathfrak{M}_1)} = S_{\mathfrak{m}_1}$ (ver Lema 3.1.8).

Dado então $x/s \in \mathfrak{m}_1 S_{\mathfrak{m}_1}$, temos $x\,y_2^2\cdots y_k^2\,/\,f \in BS_f \subseteq S_{\mathfrak{m}_1}$ ($x\,y_2^2\cdots y_k^2$ considerado como elemento homogêneo de grau 1). Segue que existem $b, t \in S$, $t \notin \mathfrak{m}_1$, tais que $x\,y_2^2\cdots y_k^2/f = b/t$ em $\mathcal{F}rac\,(S)$, e portanto $x\,y_2^2\cdots y_k^2\,t = bf = b\,x_1\,y_2^2\cdots y_k^2$ em S . Como $y_2^2\cdots y_k^2 \notin \mathfrak{m}_1$, este elemento é invertível em $S_{\mathfrak{m}_1}$, donde obtemos $x/s = b\,x_1/s\,t = (b/s\,t)(x_1/1)$. Logo $\mathfrak{m}_1 S_{\mathfrak{m}_1} = (x_1/1)$ é principal. $\square$

3.2 Algoritmo de resolução

Seja S um domínio noetheriano semi-local de dimensão 1 com ideais maximais $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_k$, e seja B_IS o blow-up de $I = \mathfrak{m}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_k$ em S . Como vimos em 3.1, existe uma extensão natural $S \subseteq BS \subseteq \mathcal{F}rac\,(S)$, tal que $\left(\mathcal{P}roj\,(B_IS)\,, \mathcal{O}\right) \cong \left(\mathcal{S}pec\,(BS)\,, \mathcal{O}\right)$. Além disso, o anel BS é também um domínio noetheriano semi-local de dimensão 1 .

Isso nos permite definir uma seqüência de domínios noetheriano semi-locais de dimensão 1: $S_0 := S$ e, se S_i já está definido, $S_{i+1} := BS_i$.

Teorema 3.2.1. *Seja S um domínio noetheriano semi-local de dimensão 1 . As seguintes afirmações são equivalentes.*

i) *A seqüência $S_0 = S\,, S_1\,, S_2\,, \ldots$ estabiliza a partir de um certo ℓ e os domínios $S_\ell = S_{\ell+1} = \ldots$ são regulares.*

ii) *A normalização* $\overline{S}$ *de* S *é finita sobre* S *.*

Demonstração: Suponhamos que a seqüência $S_0 = S$, S_1 , S_2 , ... estabiliza e seja ℓ tal que os domínios $S_\ell = S_{\ell+1} = \ldots$ são regulares. Isso quer dizer que para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de S_ℓ o localizado $(S_\ell)_\mathfrak{m}$ é regular, ou seja,

$$dim_{\frac{(S_\ell)_\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}(S_\ell)_\mathfrak{m}}} \left(\frac{\mathfrak{m}(S_\ell)_\mathfrak{m}}{(\mathfrak{m}(S_\ell)_\mathfrak{m})^2} \right) = 1 \, .$$

Mas cada $(S_\ell)_\mathfrak{m}$ é um domínio noetheriano local de dimensão 1, portanto cada $(S_\ell)_\mathfrak{m}$ é integralmente fechado (ver [AM, Chapter 9, Proposition 9.2]), o que implica S_ℓ integralmente fechado (ver [AM, Chapter 5, Proposition 5.13]). Como S_ℓ é finito sobre S (ver Proposição 3.1.9 e [AM, Chapter 5, Corollary 5.4]), concluímos que

$$S_\ell \subseteq \overline{S} \subseteq \overline{S_\ell} = S_\ell \, .$$

Logo $\overline{S} = S_\ell$, donde $\overline{S}$ é finito sobre S .

Reciprocamente, suponhamos que $\overline{S}$ seja finito sobre S . Como cada S_i está contido em $\overline{S}$, o anel $\bigcup_{i=0}^{\infty} S_i$ é um S-submódulo de $\overline{S}$. Sendo S noetheriano e $\overline{S}$ um S-módulo finitamente gerado, segue que $\bigcup_{i=0}^{\infty} S_i$ é um S-módulo finitamente gerado (ver [AM, Chapter 6, Propositions 6.2 and 6.5]).

Sejam $x_1, \ldots, x_r \in \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i$ tais que

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} S_i = Sx_1 + \cdots + Sx_r$$

e sejam $\ell_1, \ldots, \ell_r$ tais que $x_1 \in S_{\ell_1}$, ... , $x_r \in S_{\ell_r}$. Tomando $\ell = \max\{\ell_1, \ldots, \ell_r\}$ temos $x_1, \ldots, x_r \in S_\ell$, donde

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} S_i = Sx_1 + \cdots + Sx_r \subseteq S_\ell \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i \, .$$

Logo a seqüência $S_0 = S$, S_1 , S_2 , ... estabiliza a partir de ℓ e, pela Proposição 3.1.10, os domínios $S_\ell = S_{\ell+1} = \ldots$ são regulares. $\square$

Exemplo 3.2.2. *Seja* $F \in K[[x,y]]$ *como no Teorema 2.2.3 e seja* $y = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^{i/m}$ *a expansão de Puiseux de* y *em relação a* F *. O anel* $S = K[[x,y]]/(F)$ *é um domínio de dimensão* 1 *e* $\overline{S} = K[[t]]$ *via* $t \mapsto \left(t^m, \sum_{i=1}^{\infty} a_i t^i\right)$ *.*

Exemplo 3.2.3. *Seja* A *um domínio noetheriano de dimensão* 1 *e sejam* $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_\ell$ *ideais maximais de* A *. Tomando o subconjunto multiplicativo* $\mathcal{S} = A \setminus \bigcup_{i=1}^{\ell} \mathfrak{m}_i$ *temos que* $S := \mathcal{S}^{-1}A$ *é um domínio noetheriano semi-local de dimensão* 1 *com ideais maximais* $\mathcal{S}^{-1}\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathcal{S}^{-1}\mathfrak{m}_\ell$ *. Se* $\overline{S}$ *é finito sobre* S *, podemos utilizar o alrgoritmo descrito acima para obter* $\overline{S}$ *.*

Exemplo 3.2.4. *Seja* $F(x,y) = y^2 - x^2(x+1) \in K[[x,y]]$ *,* K *um corpo algebricamente fechado de característica zero. Como série de potência,* F *não é irredutível, pois* $x+1$ *possui uma raiz quadrada em* $K[[x,y]]$ *,*

$$x + 1 \;=\; \left(1 + \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{8}\,x^2 + \cdots\right)^2 \;,$$

o que nos fornece a fatoração

$$y^2 - x^2(x+1) \;=\; \left(y - x\sqrt{x+1}\right)\left(y + x\sqrt{x+1}\right) \;.$$

Por isso Puiseux não pode ser aplicado a F *, mas sim a cada um de seus fatores, que agora são irredutíveis. (Note-se que mesmo sendo* $y = \pm\, x\sqrt{x+1}$ *soluções da equação* $F(x,y) = 0$ *em* $K[[x,y]]$ *, o Corolário 2.2.4 precisa da irredutibilidade de* F *para garantir que* $K[[t]]$ *seja a normalização de* $K[[x,y]]/(F)$ *).*

Entretanto, F *é irredutível como elemento de* $K[x,y]$ *, donde* $A := K[x,y]/(F)$ *é um domínio noetheriano de dimensão* 1 *. Além disso, como* A *é uma* K*-álgebra de tipo finito, é possível demonstrar que* $\overline{A}$ *é finito sobre* A *(ver, por exemplo,* [Ko, Chapter 1, Theorem 1.33]*). Segue que o anel* $S = \left(K[x,y]/(F)\right)_{(x,y)}$ *é um domínio noetheriano local de dimensão* 1 *cuja normalização* $\overline{S} = \overline{A_{(x,y)}} = \overline{A}_{(x,y)}$ *é* *finita (ver* [AM, Chapter 5, Proposition 5.12]*). Então podemos aplicar o algoritmo acima para obtermos uma normalização desse anel.*

Referências Bibliográficas

[AM] M. F. Atiyah e I. G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.

[GL] A. Garcia e Y. Lequain, *Elementos de Algebra*, 4.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[Ha] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics 52, Springer, New York, 1977.

[Ko] J. Kollár, *Lectures on Resolution of Singularities*, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2007.

[La] S. Lang, *Algebra*. Springer-Verlag, New York, NY, 2002.

[Ma] H. Matsumura, *Commutative Ring Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[Re] M. Reid, *Undergraduate Algebraic Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[St] I. Stewart, *Galois Theory* - 3rd ed. Chapman & Hall/CRC mathematics, Boca Raton, Flórida, 1945.