Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Probabilidades de spin quântico em temperatura positiva

Dissertação de Mestrado

Jader Eckert Brasil

Porto Alegre, fevereiro de 2018.

Dissertação submetida por Jader Eckert Brasil [1] como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Artur O. Lopes (PPG-MAT-UFRGS)

Banca Examinadora:
Carlos Felipe Lardizabal (PPG-MAT-UFRGS)
Elismar Oliveira (UFRGS) membro externo
Jairo K. Mengue (PPG-MAT-UFRGS)

Data da Apresentação: 26 de fevereiro de 2018.

[1]Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES

Agradecimentos

A meu orientador Artur Oscar Lopes por sempre estar presente na minha formação, pelos conselhos, disposição e inúmeros ensinamentos.

Aos professores Carlos Felipe Lardizabal, Elismar Oliveira e Jairo K. Mengue pelas valiosas sugestões e correções.

À amiga e professora Elizabeth Quintana Ferreira da Costa por todos os conselhos e pelo incentivo para estudar matemática.

Aos meus pais, meu irmão e amigos pela paciência, compreensão, apoio e incentivo constante. Não teria conseguido sem vocês.

A todos os colegas e professores do Instituto de Matemática e Estatística. Em especial ao professor Eduardo Henrique de Mattos Brietzke a quem devo muito de minha formação.

Aos funcionários do IME pela atenção e paciência.

À CAPES pelo auxílio financeiro.

Muito Obrigado!

Resumo

Nesta dissertação estudamos uma probabilidade obtida a partir de conceitos da Mecânica Estatística Quântica do ponto de vista da Teoria Ergódica. A probabilidade é obtida a partir de um estado KMS sobre um lattice unidimensional de spins quânticos. Mostramos que esta probabilidade é mixing para o shift. Além disso, mostramos que vale um princípio dos grandes desvios para uma certa classe de funções e exploramos algumas propriedades do Jacobiano. Iremos considerar o estado KMS associado a um certo Hamiltoniano específico agindo sobre o lattice de spins quânticos. Nas seções iniciais vamos apresentar alguns conceitos e prerequisitos básicos (como operadores densidade, produto tensorial, C^*-algebras e estados KMS) para o entendimento do resultado principal

Palavras-chave: Operador Densidade, Estado KMS, Probabilidades de Spin Quântico, Princípio dos Grandes Desvios.

Abstract

In this dissertation we study a probability derived from Quantum Statistical Mechanics through the viewpoint of Ergodic Theory. The probability is obtained from a KMS state acting on a one dimensional lattice of quantum spins. We show that this probability is mixing for the shift map. Moreover, we show that a large deviation principle is true for a certain class of functions and we explore some properties of the Jacobian. We will consider the KMS state associated to a certain specific Hamiltonian acting on the quantum spin lattice. In the initial sections we will present some concepts and prerequisites (such as density operators, tensor product, C^*-algebras and KMS states) for the understanding of our main results.

Keywords: Density Operator, KMS State, Quantum Spin Probabilities, Large Deviation Principle.

Sumário

1 Introdução **1**

1.1 Preliminares . . . 1

1.2 C^*-Algebras e estados KMS . . . 9

2 Lattice de spins quânticos em temperatura positiva **19**

2.1 Estados C^*-dinâmicos em lattices de spin . . . 19

2.2 A Hipótese A . . . 21

2.3 A definição da probabilidade quântica μ_β . . . 22

2.4 Sobre a probabilidade de spin quântico em temperatura positiva 29

2.5 μ_β é mixing . . . 34

2.6 Grandes Desvios para a medida μ_β . . . 38

2.7 Uma expressão em fração contínua para o Jacobiano . . . 46

2.8 Um caso mais simples . . . 49

Referências Bibliográficas **51**

Capítulo 1

Introdução

No presente trabalho analisamos do ponto de vista da Teoria Ergódica uma probabilidade μ_β que aparece de maneira natural em um problema de natureza quântica. Primeiramente especificamos o problema na linguagem da Mecânica Estatística Quântica, depois construímos uma medida sobre o espaço de Bernoulli $\Omega = \{1, 2\}^{\mathbb{N}}$, que depende de um parâmetro β que é o inverso da temperatura, via Teorema da Extensão de Kolmogorov e por fim analisamos propriedades dessa medida μ_β. Mostramos que μ_β é mixing e também um Princípio de Grandes Desvios para esta medida. Como fonte de inspiração temos o artigo [3] onde o mesmo processo é feito para estudar medidas à temperatura zero. No presente trabalho, analisamos o caso de temperatura positiva.

Esta dissertação é estruturada em dois capítulos, neste primeiro vamos introduzir alguns conceitos importantes e relembrar alguns resultados clássicos. No capítulo seguinte apresentamos nosso objeto de estudo e exploramos suas propriedades.

1.1 Preliminares

Este capítulo tem o intuito de mostrar ou relembrar algumas definições e comentários que são importantes para o entendimento do que segue. Não faremos nenhuma discussão profunda já que este não é o nosso objetivo. Considere $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert sobre o corpo dos complexos munido com produto um interno $\langle \cdot | \cdot \rangle$. A norma que consideramos sobre $\mathcal{H}$ é tal que $\|\psi\| = \sqrt{\langle \psi \,|\, \psi \rangle}$.

Um vetor $\psi \in \mathcal{H}$ de norma 1 é denominado de estado. Ele vai descrever a distribuição estatística de uma determinada partícula quântica.

Por exemplo, se $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$, seja v_1, v_2 base ortonormal de $\mathbb{C}^2$. Suponha que a partícula quântica possa assumir só dois valores 1 e 2. Uma partícula quântica será descrita por um estado $\psi = a_1 v_1 + a_2 v_2$, tal que $|\psi| = 1$ e onde $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$. Neste caso a probabilidade da partícula ao ser observada resultar no valor 1 será $|a_1|^2$ e probabilidade da partícula ao ser observada resultar no valor 2 será $|a_2|^2$.

Definição 1.1.1. *Dizemos que $\{\varphi_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto ortonormal completo em $\mathcal{H}$ se,*

1. $\|\varphi_n\| = 1$, *para todo n;*

2. $\langle \varphi_n \,|\, \varphi_m \rangle = 0$, *para todo $n \neq m$;*

3. *Para todo $\psi \in \mathcal{H}$ existe uma escolha de $\alpha_n \in \mathbb{C}$, tal que*

$$\psi = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n \varphi_n.$$

Os espaços de Hilbert que vamos considerar em nossos resultados principais são de dimensão finita, ou seja $\mathcal{H} = \mathbb{C}^d$. Neste caso os operadores lineares $L : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ podem ser identificados com o conjunto das matrizes complexas d por d que denotaremos por $\mathcal{M}_d$.

De agora em diante, nesta seção, vamos considerar $\mathcal{H} = \mathbb{C}^d$.

Definição 1.1.2. *Seja $\rho : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ um operador autoadjunto, que possua um conjunto ortonormal completo de autovetores φ_n, $n \in \mathbb{N}$. Então seu traço $\mathrm{Tr}\,(\rho)$ é dado por*

$$\mathrm{Tr}\,(\rho) := \sum_n \langle \varphi_n \,|\, \rho\, \varphi_n \rangle.$$

Mais geralmente, dado um operador A (não necessariamente autoadjunto) por definição, o traço de A é dado por

$$\mathrm{Tr}\,(A) := \sum_n \langle \varphi_n \,|\, A\, \varphi_n \rangle,$$

onde $\{\varphi_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ *é um conjunto ortonormal completo. O fato de que o traço está bem definido, isto é, não depende do conjunto ortonormal completo escolhido é feito em [16].*

Definição 1.1.3. *Um operador autoadjunto* A *é positivo se* $\langle\, \psi \,|\, A\,\psi \,\rangle \geq 0$ *para todo* $\psi \in \mathcal{H}$ *e é estritamente positivo se* $\langle\, \psi \,|\, A\,\psi \,\rangle > 0$ *para todo* $\psi \neq 0$.

Definição 1.1.4. *Um operador* $\rho : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *é dito operador densidade se ele é autoadjunto, possui um conjunto ortonormal completo de autovetores, é positivo e possui traço igual a* 1.

Os operadores densidades correspondem na Mecânica Quântica às probabilidades clássicas. É natural associar o vetor ψ no espaço de Hilbert ao operador projeção ortogonal P_ψ, $\|\psi\| = 1$. Este é definido de forma que

$$P_\psi(v) = \langle\, v \,|\, \psi \,\rangle\, \psi.$$

Dado um operador densidade $\rho : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d$, pelo Teorema da decomposição espectral para matrizes complexas d por d, podemos escrever $\rho = \sum_{n=1}^{d} p_n P_{\varphi_n}$, onde $\sum p_n = 1$, $p_n \geq 0$, os operadores P_{φ_n} são projeções ortogonais e os vetores φ_n formam uma base ortonormal.

Operadores densidade P_ψ que são projeções ortogonais são denominados de estados puros. Assim, todo operador densidade é uma combinação convexa de estados puros.

Definição 1.1.5. *Um observável é um operador autoadjunto* A *agindo no espaço de Hilbert* $\mathcal{H}$.

Em física quântica, um observável descreve um tipo de medição, que extraí alguma informação sobre nosso sistema quântico.

Definição 1.1.6. *Dado um observável* A*, por definição,* $\mathrm{Tr}\,(A\rho)$ *é o valor esperado de* A *quando o sistema quântico é descrito pelo operador densidade* ρ*. É usual denotar por* $\langle A \rangle_\rho$ *ou* $E_\rho(A)$.

Os operadores autoadjuntos desempenham na Mecânica Quântica o papel das funções na Teoria das Probabilidades. Dessa forma, $E_\rho(A)$ corresponde a “integrar” a “função”A com respeito a ”probabilidade”ρ. Ainda, note que $\mathrm{Tr}\,(A\rho) = \mathrm{Tr}\,(\rho A)$. Além disso, como observado em [16], quando ρ é um operador densidade e A um operador positivo, então $\mathrm{Tr}\,(A\rho)$ é um número positivo. Uma discussão geral sobre a classe de operadores com traço (*trace class*) pode ser encontrada em [16] e não será feita aqui.

Definição 1.1.7. *Dado um operador densidade* $\rho = \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n P_{\varphi_n}$ *definimos a entropia de von Neumann de* ρ *como*

$$S(\rho) = -\mathrm{Tr}\,(\rho \log \rho)$$

onde $\log \rho$ *é o operador*

$$\log \rho = \sum_{n=0}^{\infty} (\log p_n) P_{\varphi_n}.$$

Alternativamente, podemos escrever

$$S(\rho) = -\sum_{n=0}^{\infty} p_n \log p_n,$$

isto é imediato já que $\{\varphi_n\}_n$ *são autovetores ortonormais de* ρ.

Note que a entropia de um estado puro, isto é, um operador projeção é sempre nula (a menor possível). No caso bidimensional, um $\rho = \frac{1}{2}P_{\varphi_1} + \frac{1}{2}P_{\varphi_2}$ sua entropia $\log 2$ é máxima.

Um Hamiltoniano é um operador autoadjunto $\mathbf{H} : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d$ que descreve o nosso sistema quântico. Dado um operador densidade ρ, o seu valor esperado é definido por $E(\rho) = \mathrm{Tr}\,(\mathbf{H}\rho) = \langle\, \mathbf{H}\,\rangle_\rho$.

Definição 1.1.8. *Fixada uma temperatura* T*, a energia livre de Helmholtz do operador* ρ *é, por definição,*

$$F_T(\rho) = E(\rho) - T\,S(\rho).$$

O operador de equilíbrio à temperatura T para $\mathbf{H}$ seria o operador densidade ρ que minimiza $F_T(\rho)$ entre todos os possíveis operadores densidade.

Equivalentemente, podemos enunciar este problema como maximizar

$$-\frac{1}{T}E(\rho) \,+\, S(\rho)$$

entre os possíveis ρ. Pode-se mostrar (feito na Seção 2.6 de [16]) que o operador densidade ρ_T que minimiza $F_T(\rho)$ é dado por

$$\rho_T = \frac{e^{-\frac{1}{T}\mathbf{H}}}{Z(T)},$$

onde, $Z(T) = \mathrm{Tr}\,(e^{-\frac{1}{T}\mathbf{H}})$.

É usual denotar $\beta = \frac{1}{T}$.

Agora definiremos formalmente o produto tensorial $V \otimes W$. Sejam V e W espaços vetoriais complexos de dimensão finita.

Indicamos ao leitor [23], [2] ou [16] para mais detalhes sobre o tópico a ser coberto no que segue.

No produto cartesiano $V \times W$ considere os pares (u, v) onde $u \in V$ e $w \in W$.

Seja $C(V, W)$ o subespaço gerado por todos os elementos da forma

$$\begin{gathered}(v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w)\\ (v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2)\\ (rv, w) - r(v, w)\\ (v, rw) - r(v, w)\end{gathered} \tag{1.1}$$

onde $v_i \in V$, $w_i \in W$ e $r \in \mathbb{R}$.

Agora definimos a relação de equivalência $z \sim y$ se $z - y \in C(V, W)$. Como é usual, a partir desta relação $\sim$ se pode criar classes de equivalência. Dados $v \in V$ e $w \in W$ a classe de (u, v) é denotada por $u \otimes w$.

O conjunto das classes é $V \otimes W$.

O objetivo de assumir a relação de equivalência é que neste novo espaço vetorial quociente serão verdadeiras certas propriedades desejadas. As operações nas classes estão bem definidas.

Um elemento $v \otimes w$ (uma classe de equivalência), $v \in V, w \in W$, no conjunto assim obtido $V \otimes W$, vai descrever o objeto matemático que buscamos.

O objetivo de considerar a relação de equivalência acima é que o produto tensorial é linear em cada entrada, ou seja, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\psi, \phi \in V$ e $\xi \in W$,

$$(\alpha\psi + \beta\phi) \otimes \xi = (\alpha\psi) \otimes \xi + (\beta\phi) \otimes \xi.$$

Ainda, $\alpha(\psi \otimes \phi) = (\alpha\psi) \otimes \phi = \psi \otimes (\alpha\phi)$.

Se 0 denota o elemento neutro em V ou W, então $0 \otimes 0$ é o neutro para a soma neste novo espaço.

Seja $\{v_i,\ i = 1, 2, .., n\}$, base ortogonal de $\mathbb{C}^n$ e w_j, $j = 1, 2, .., m$, base ortogonal de $\mathbb{C}^m$.

Um elemento genérico em $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ é da forma

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(v_i \otimes w_j), a_{ij} \in \mathbb{C}.$$

Note que $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ é isomorfo a $\mathbb{C}^{n\,m}$.

Suponha que o estado ϕ em $\mathbb{C}^2$ seja dado por $\phi = a_1 v_1 + a_2 v_2$, e o estado ψ em $\mathbb{C}^3$ seja dado por $\psi = \alpha_a w_a + \alpha_b w_b + \alpha_c w_c$.

Se considerarmos o estado composto obtido a partir de ϕ e ψ, em que podem ocorrer interferências das distintas probabilidades, devemos descrever um novo estado φ em $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$.

Seja o estado $\varphi = \phi \otimes \psi$, que pode ser expresso na forma

$$c_{1a}(v_1 \otimes w_a) + c_{1b}(v_1 \otimes w_b) + c_{1c}(v_1 \otimes w_c) + c_{2a}(v_2 \otimes w_a) + c_{2b}(v_2 \otimes w_b) + c_{2c}(v_2 \otimes w_c).$$

Então, por exemplo, a probabilidade de ocorrer $(v_i \otimes w_a)$ é $|c_{ia}|^2$. Esta afirmação descreve o que ocorre de fato no fenômeno físico associado quando consideramos o sistema composto. O produto tensorial permite descrever em termos matemáticos a interferência de medição no sistema composto.

Existe uma estrutura natural de produto interno em $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$: dados $(a_1 \otimes a_2)$ e $(b_1 \otimes b_2)$ em $\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$ definimos

$$\langle\, (a_1 \otimes a_2) \,|\, (b_1 \otimes b_2) \,\rangle \;=\; \langle\, a_1 \,|\, b_1 \,\rangle \, \langle\, a_2 \,|\, b_2 \,\rangle.$$

A operação acima deve ser estendida linearmente em $\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$.

Desta forma podemos definir uma norma $\|x\| = \sqrt{\langle\, x \,|\, x \,\rangle}$, para $x \in \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$, o que torna $\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$ um espaço de Hilbert.

Note que se ϕ_1, ϕ_2 é base ortonormal de $\mathbb{C}^2$ e ψ_1, ψ_2 também é base ortonormal de $\mathbb{C}^2$ então

$$\phi_1 \otimes \psi_1 \;, \phi_1 \otimes \psi_2 \;, \phi_2 \otimes \psi_1 \;, \phi_2 \otimes \psi_2$$

é base ortonormal em $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ segundo o produto interno acima definido.

Considere os operadores lineares $A_1 : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ e $A_2 : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, Então, por definição, o operador linear $A_1 \otimes A_2$ age em $\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$ da seguinte forma: dado $a_1 \otimes a_2$ temos

$$A_1 \otimes A_2(a_1 \otimes a_2) = A_1(a_1) \otimes A_2(a_2).$$

A ação deve ser estendida linearmente em $\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$.

Por exemplo, se $x = \sum_j c_j \,(a_1^j \otimes a_2^j) \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$, $c_j \in \mathbb{C}$, então,

$$A_1 \otimes A_2(x) = \sum_j c_j \,(A_1 \otimes A_2)(a_1^j \otimes a_2^j).$$

Usando o produto interno descrito acima podemos definir o conceito de dual. O operador dual de $(A_1 \otimes A_2)$ é o operador $(B_1 \otimes B_2)$ tal que para quaisquer $(a_1 \otimes a_2)$ e $(b_1 \otimes b_2)$ vale

$$\langle\, (A_1 \otimes A_2)(a_1 \otimes a_2) \,|\, (b_1 \otimes b_2) \,\rangle = \langle\, (a_1 \otimes a_2) \,|\, (B_1 \otimes B_2)\, (b_1 \otimes b_2) \,\rangle.$$

É fácil ver que o dual de $(A_1 \otimes A_2)$ é $(A_1^* \otimes A_2^*)$.

Se A_1 e A_2 forem autoadjuntos, então $A_1 \otimes A_2$ é autoadjunto. Ainda, se A_1 e A_2 forem positivos, então $A_1 \otimes A_2$ é positivo e assim por diante.

Por definição a composta do operador $A_1 \otimes A_2$ com $B_1 \otimes B_2$ age em $\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$ da seguinte forma: dado $a_1 \otimes a_2$ então

$$(A_1 \otimes A_2) \circ (B_1 \otimes B_2)\ (a_1 \otimes a_2) = (A_1 \circ B_1)(a_1) \otimes (A_2 \circ B_2)(a_2).$$

O elemento neutro para a operação de composição é $I \otimes I$. Se A_1 e A_2 são inversíveis então $(A_1^{-1} \otimes A_2^{-1})$ é o inverso de $(A_1 \otimes A_2)$. Com isso, se U_1 e U_2 são unitários então $(U_1 \otimes U_2)$ é unitário.

Observamos que se ϕ_1, ϕ_2 é base ortonormal de autovetores de $A_1 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, associados respectivamente aos autovalores λ_1, λ_2, e ψ_1, ψ_2 é base ortonormal de autovetores de $A_2 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, associados respectivamente aos autovalores β_1, β_2, então

$$\phi_1 \otimes \psi_1\ , \phi_1 \otimes \psi_2\ , \phi_2 \otimes \psi_1\ , \phi_2 \otimes \psi_2$$

é base ortonormal de autovetors de $A_1 \otimes A_2 : \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. Os correspondentes autovalores são $\lambda_1 \beta_1$, $\lambda_1 \beta_2$, $\lambda_2 \beta_1$ e $\lambda_2 \beta_2$.

Existe uma generalização natural de todas estas propriedades para um produto tensorial $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes ... \otimes \mathcal{H}_n$ de espaços de Hilbert $\mathcal{H}_j$, $j = 1, 2, .., n$. Deixamos a cargo o leitor estabelecer esta generalização.

Dado duas matrizes A (m por m) e B (n por n) que respectivamente descrevem operadores lineares então $A \otimes B$ também descreve uma matriz agindo em $\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$ que é isomorfo a $\mathbb{C}^{m\,n}$. É útil algumas vezes usar a expressão matricial de $A \otimes B$ em $\mathbb{C}^{m\,n}$.

Vamos apresentar a representação matricial, chamada **produto de Kronecker**. Sejam A uma matriz $m \times n$ e B uma matriz $p \times q$. Então temos a seguinte representação matricial:

$$A \otimes B := \begin{pmatrix} A_{11}B & A_{12}B & \cdots & A_{1n}B \\ A_{21}B & A_{22}B & \cdots & A_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1}B & A_{m2}B & \cdots & A_{mn}B \end{pmatrix}$$

Ou seja, o termo $A_{ij}B$ é o elemento A_{ij} da matriz A multiplicado pela matriz B.

Por exemplo, se

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

e

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

então

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} & A_{12}B_{11} & A_{12}B_{12} \\ A_{11}B_{21} & A_{11}B_{22} & A_{12}B_{21} & A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} & A_{21}B_{12} & A_{22}B_{11} & A_{22}B_{12} \\ A_{21}B_{21} & A_{21}B_{22} & A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{pmatrix}.$$

É fácil ver que neste caso o traço de $A \otimes B$ é igual a (traço $A \times$ traço B). O mesmo vale no caso geral.

1.2 C^*-Algebras e estados KMS

Referimos o leitor a [1] [22] [12] [2] para mais detalhes sobre o material apresentado na presente seção.

Definição 1.2.1. *Uma* **álgebra** *A sobre $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial complexo equipado com uma operação bilinear e associativa $\bullet : A \times A \to A$, dita multiplicação. Para $a, b \in A$, denotaremos $\bullet(a, b)$ simplesmente por ab.*

Nesta seção as definições e conceitos são para um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ geral. Dizemos que um operador $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é limitado ser for finito o valor

$$\sup_{v \neq 0} \frac{|A(v)|}{|v|}.$$

A álgebra que estaremos interessados aqui é a dos operadores lineares $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ agindo num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Neste caso a operação $\bullet$ corresponde a composição de operadores.

Definição 1.2.2. *Uma* **álgebra normada** *é uma álgebra A sobre $\mathbb{C}$ equipada com uma função norma $a \in A \mapsto \|a\| \in \mathbb{R}$, que torna A um espaço normado, ou seja, para $a, b \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, temos*

1. $\|a\| \geq 0$, *e* $\|a\| = 0 \Rightarrow a = 0$.
2. $\|\lambda a\| = |\lambda| \|a\|$, *onde* $|\lambda|$ *denota o módulo do número complexo* λ.
3. $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$. *(Desigualdade Triangular)*
4. $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$.

Se existir um elemento, denotado por 1 tal que, para qualquer a vale $a\,1 = a = 1\,a$, dizemos que ele é a identidade multiplicativa. Dado a, se existir b tal que $a\,b = 1 = b\,a$, dizemos que a é inversível.

Note que $a\,0 = 0 = 0\,a$, para qualquer $a \in A$.

Quando a álgebra normada for a dos operadores limitados $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ então a norma do operador $||A||$ é definida como

$$||A|| = \sup_{v \neq 0} \frac{|A(v)|}{|v|}.$$

No caso em que a álgebra é a dos operadores lineares agindo em $\mathbb{C}^d$ temos que todos os operadores são limitados.

Naturalmente, podemos nos referir à distância entre dois elementos de uma álgebra normada, bastando para isso considerar a métrica induzida pela norma.

Definição 1.2.3. *Uma* **álgebra de Banach** *é uma álgebra normada completa. Ou seja, toda sequência de Cauchy converge.*

Definição 1.2.4. *Seja A uma álgebra de Banach. Uma* **involução** *em A é uma função $* : A \to A$ tal que, para todo $a, b \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$, e denotando $c^* := *(c)$, $\forall\, c \in A$, temos*

1. $(a+b)^* = a^* + b^*$.

2. $(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*$.

3. $(ab)^* = b^* a^*$.

4. $(a^*)^* = a$.

5. $\|a^*\| = \|a\|$.

Note que a é inversível, se e só se, a^* é inversível.

Definição 1.2.5. *Uma* C^***-álgebra** *é uma álgebra de Banach equipada com uma involução para o qual vale*

$$\|a^* a\| = \|a\|^2, \; \forall \, a \in A.$$

Para álgebras de operadores a operação $*$ vai denotar o adjunto do operador.

Um exemplo que satisfaz o descrito acima seria a álgebra $\mathcal{M}_d$ das matrizes de ordem d com entradas em $\mathbb{C}$ que é uma C^*-álgebra se considerarmos as matrizes como sendo operadores no espaço euclideano $\mathbb{C}^d$ e se tomarmos a norma de operadores $\| \cdot \|$ sobre matrizes. A involução é dada pela matriz transposta conjugada.

Seja um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e o conjunto dos operadores limitados sobre $\mathcal{H}$, munidos da operação $*$ (A^* seria tomar o adjunto do operador A) e da norma de operadores (isto é, convergência no sentido forte). Neste caso, o conjunto dos operadores limitados com a operação de composição formam uma C^*-álgebra e o leitor deve tomar este como o exemplo canônico.

Outra C^*-álgebra importante é a dos operadores limitados (munida da norma de operador descrita anteriormente) agindo no espaço de Hilbert complexo $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ onde $*$ denota tomar o adjunto do operador. A operação $\bullet$ é a composta de operadores.

Um homomorfismo entre duas C^*-álgebras $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ é uma aplicação linear $G : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ tal que, para quaisquer a_1, $b_1 \in \mathcal{A}_1$ temos que $G(a_1 \bullet b_1) = G(a_1) \bullet G(b_1)$ e ainda que $G(a_1^*) = G(a_1)^*$.

No caso particular das C^*-álgebras de operadores limitados isto significa que para os operadores A_1 e B_1 vale $G(A_1 \circ B_1) = G(A_1) \circ G(B_1)$.

Um isomorfismo entre duas C^*-álgebras é um homomorfismo bijetivo.

A identidade multiplicativa (o elemento 1 na álgebra) é o operador identidade.

Note que se A é da forma $A = \sum_j \lambda_j P_{\psi_j}$, onde ψ_j, $j \in \mathbb{N}$, forma um conjunto ortonormal completo, então $A^* = \sum_j \overline{\lambda_j} P_{\psi_j}$ e $A\,A^* = \sum_j |\lambda_j|^2\, P_{\psi_j}$. Note que $\|A\| = \|A^*\|$.

Vamos voltar ao caso geral de um operador limitado A. Observamos que tomar o sup de $|A(w)|$, onde $w \in \mathcal{H}$ tem norma menor que um, significa maximizar

$$|A(w)|^2 = \langle A(w), A(w)\rangle = \langle A^* A(w), w\rangle \leq \|A\,A^*\| \leq \|A\|\,\|A^*\| = \|A\|^2.$$

Desta forma $\|A\,A^*\| = \|A\|^2$. Ou seja, estão satisfeitas as condições da definição 1.2.5 para o caso da álgebra das matrizes d por d.

Vamos falar agora de alguns resultados em Mecânica Estatística Quântica (maiores detalhes em [24] e [1]) que de certa forma generalizam os resultados e perguntas naturais oriundas da Mecânica Estatística.

Vamos denotar por $\mathcal{U}$ uma C^*-álgebra fixada.

Denotamos por $\mathrm{Aut}(\mathcal{U})$ o conjunto dos automorfismos lineares na C^*-álgebra $\mathcal{U}$.

Um elemento G em $\mathrm{Aut}(\mathcal{U})$ deve ser tal que $G(a\,b) = G(a)\,G(b)$. Ainda, assumimos que $G(a)^* = G(a^*)$.

Definição 1.2.6. *Dada uma C^*-álgebra $\mathcal{U}$, um homomorfismo de grupo é uma família continua σ_t, indexada por $t \in \mathbb{R}$ onde $\sigma_t \in Aut(\mathcal{U})$ e tal que, para quaisquer $t, s \in \mathbb{R}$ vale $\sigma_{t+s} = \sigma_t \circ \sigma_s$.*

σ_t, $t \in \mathbb{R}$, descreve o análogo não comutativo do que é um sistema dinâmico clássico.

Vamos apresentar um exemplo: seja H um operador autoadjunto então $e^{tH\,i}$ define um homomorfismo de grupo σ_t através de $\sigma_t(B) = e^{tH\,i} \circ B \circ$

$e^{-tH\,i}$ que age em operadores limitados B. Observe que, de fato, para todo t vale $\sigma_t(A\,B) = \sigma_t(A)\,\sigma_t(B)$. Ainda, para todo operador A vale $\sigma_{t+s}(A) = e^{tH\,i}\,(e^{sH\,i} \circ B \circ e^{-sH\,i}\,)\,e^{-tH\,i} = \sigma_t(\sigma_s(A))$. Ainda, $\sigma_t(A^*) = (\sigma_t(A))^*$.

Neste caso o gerador infinitesimal seria $A \to i\,[H, A]$.

Outro exemplo: podemos tomar H autoadjunto scomo o gerador infinitesimal. Este será o caso considerado aqui. Neste caso, em termos do formalismo de C^*-sistemas dinâmicos, o operador H define a evolução temporal $e^{t\,iH}$, para cada $t \in \mathbb{R}$. Fixado um valor positivo β real vamos analisar em breve o sistema para o operador $t\,i\,(\beta\,i)H$, ou seja, o sistema dinâmico $e^{-\,t\,\beta H}$. O valor β vai desempenhar o papel do valor do inverso da temperatura em Mecânica Estatística Quântica.

Definição 1.2.7. *Um elemento a na C^*-álgebra é positivo, se ele é da forma $a = bb^*$ onde b é um elemento da C^*-álgebra.*

Definição 1.2.8. *Por definição um estado C^*-dinâmico é um funcional linear $\phi : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$, tal que*

a) $\phi(I) = 1$.

b) $\phi(a)$ é um número positivo para cada elemento positivo a na C^*-álgebra $\mathcal{U}$.

Se ϕ é tal que $\phi(a\,a^*) = 0$, se e só se $a = 0$, dizemos que ϕ é fiel.

Um exemplo simples é o seguinte: seja a C^*-álgebra $\mathcal{M}_d$, $d \in \mathbb{N}$, das matrizes d por d com entradas em $\mathbb{C}$. Seja $\rho : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d$ um operador densidade fixado. Então defina $\phi : \mathcal{M}_d \to \mathbb{C}$ dado por

$$\phi(A) = \mathrm{Tr}\,(\rho\,A).$$

Tal ϕ é um estado C^*-dinâmico.

Note que se $\rho = P_\psi$ fosse operador projeção, então, como vimos

$$\phi(A) = \mathrm{Tr}\,(P_\psi\,A) = E(A)_\psi = \langle\, A(\psi) \,|\, \psi \,\rangle.$$

Um estado C^*-dinâmico ϕ agindo em uma C^*-Álgebra desempenha o papel de uma probabilidade ν na Mecânica Estatística ou no Formalismo

Termodinâmico. Podemos pensar que $\phi(A)$ é o valor obtido ao integrar o observável A pelo estado C^*-dinâmico ϕ.

O estado ϕ vai agir em observáveis a (operadores autoadjuntos que pertencem a C^*-álgebra $\mathcal{U}$). Note que $\phi(a)$ é real se a é autoadjunto (ver [1]).

Assim, $\phi(a)$ é a "integral"da "função"$a \in \mathcal{U}$ via a "probabilidade"ϕ (um estado C^*-dinâmico).

Dado um estado C^*-dinâmico ϕ agindo nos operadores lineares no espaço de Hilbert $\mathcal{H} = \mathbb{C}^d$, ou seja, $\phi : \mathcal{M}_d \to \mathbb{C}$, então existe uma matriz densidade $\rho_\phi : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d$ tal que para todo $A \in \mathcal{M}_d$ vale $\phi(A) = \mathrm{Tr}\,(\rho_\phi\, A)$.

Se o sistema quântico em consideração é descrito pelo estado C^*-dinâmico ϕ e vamos fazer medições utilizando um operador autoadjunto L que tem decomposição espectral $L = \sum_n \lambda_n\, P_{\phi_n}$, então $\phi(P_{\phi_n})$ é a probabilidade de se observar λ_n.

Vamos explicar este fato num caso bem simples (em dimensão 2). Seja $\rho = P_\psi$ e o estado C^*-dinâmico $\phi : \mathcal{M}_2 \to \mathbb{C}$ dado por

$$\phi(L) = \mathrm{Tr}\,(\rho L) = \langle\, L\psi \,|\, \psi \,\rangle.$$

Seja $L : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ operador autoadjunto tal que sua decomposição espectral é $L = \lambda_1 P_{\phi_1} + \lambda_2 P_{\phi_2}$.

Assim ϕ_1 é ortogonal a ϕ_2 e os dois vetores tem norma 1.

Seja $\psi = a_1\phi_1 + a_2\phi_2$, se o sistema está no estado ψ então a probabilidade de se medir λ_1 é $|a_1|^2$.

Por outro lado

$$\phi\,(P_{\phi_1}) = \mathrm{Tr}\,(\rho P_{\phi_1}) = \langle\, P_{\phi_1}\psi \,|\, \psi \,\rangle =$$

$$\langle\, a_1\phi_1 \,|\, a_1\phi_1 + a_2\phi_2 \,\rangle = \langle\, a_1\phi_1 \,|\, a_1\phi_1 \,\rangle = \|a_1\|^2.$$

Assim faz sentido dizer que se o C^*-estado é ϕ então $\phi(P_{\phi_1})$ é a probabilidade de ocorrer λ_1 através da medição via L.

Dizemos que $B : \mathbb{C} \to \mathcal{U}$ é uma função analítica se existem $a_j \in \mathcal{U}, j \in \mathbb{N}$, tais que para todo $z \in \mathbb{C}$

$$B(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\, z^j.$$

Definição 1.2.9. *Um elemento $a \in \mathcal{U}$ é dito analítico para o homomorfismo de grupo a um parâmetro definido por σ_t, $t \in \mathbb{R}$, se $\sigma_t(a)$ tem uma extensão analítica da variável $t \in \mathbb{R}$ para a variável $t \in \mathbb{C}$.*

A definição acima diz que a é analítico se a função de variável real $t \to \sigma_t(a) \in \mathcal{U}$ pode ser estendida a uma função $B(z)$ que é analítica em z.

Sob condições muito gerais os elementos analíticos $a \in \mathcal{U}$ são densos em $\mathcal{U}$ (ver [22]). Muitos resultados na teoria das C^*-álgebras são demonstrados da seguinte forma: se prova primeiro a propriedade para os a analíticos, e depois, via limite, se mostra a propriedade desejada para todos elementos de $\mathcal{U}$.

Em dimensão finita, isto é quando a C^*-algebra for a das matrizes d por d, todos os elementos são analíticos.

Note que se A é analítico e $\sigma_t(A) = e^{tH\,i}\, A\, e^{-tH\,i}$, $t \in \mathbb{R}$, então, fica bem definido $e^{-sH}\, A\, e^{sH}$, onde s é real. De fato, estenda o t de $e^{tH\,i}\, A\, e^{-tH\,i}$ ao complexo si.

Exemplo 1.2.10. *Considere o operador Hamiltoniano $\mathbf{H} = \frac{\mathcal{P}^2}{2\,m} + \frac{1}{2} m\, w^2\, \mathcal{X}^2$ obtido da quantização do oscilador harmônico.*

Neste caso a C^*-Álgebra $\mathcal{U}$ é o conjunto dos operadores lineares limitados $A : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)(dx) \to \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)(dx)$. A operação $*$ corresponde a tomar o adjunto do operador. O estado ϕ age em tais operadores.

Sabemos que $\mathbf{H}$ tem autovalores da forma $(n + 1/2)\, \hbar w$. Os autovalores de $e^{-\beta \mathbf{H}}$ são da forma $e^{-\,(n+1/2)\,\beta\,\hbar\, w}$.

Assim,

$$\mathrm{Tr}\, \left(e^{-\beta \mathbf{H}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\,(n+1/2)\,\hbar\, w} = \frac{e^{-(1/2)\,\beta\,\hbar\, w}}{1 - e^{-\,\beta\,\hbar\, w}}$$

é finito se $\beta > 0$.

Desta forma fica bem definido

$$C = \frac{e^{-\beta \mathbf{H}}}{\mathrm{Tr}\,(e^{-\beta \mathbf{H}})},$$

que tem traço 1 *e é positivo.*

C é um operador densidade. Desta forma $B \to \mathrm{Tr}\,(C\,B)$ define um estado C^*-dinâmico.

O resultado acima exibe um exemplo de grande importância na teoria da Mecânica Estatística Quântica.

Definição 1.2.11. *Se $\beta \in \mathbb{R}$ e σ_t é um grupo de automorfismos indexados por $t \in \mathbb{R}$, então, por definição, ϕ é um* **C^*-estado KMS associado ao grupo de automorfismos σ_t e a β** *na C^*-Álgebra $\mathcal{U}$, se ϕ é um estado C^*-dinâmico, tal que para todo $b \in \mathcal{U}$ e todo $a \in \mathcal{U}$ analítico, temos que*

$$\phi(a \cdot b) = \phi(b \cdot \sigma_{\beta i}(a)).$$

Para H fixado, se σ_t é da forma $A \to \sigma_t(A) = e^{tH\,i}\,A\,e^{-tH\,i}$, para todo t, então fixado β, é usual denotar por $\phi_{H,\beta}$ o estado KMS associado. Num certo sentido, como veremos, $\phi_{H,\beta}$ corresponde a medida de Gibbs associada ao potencial H na temperatura $\frac{1}{\beta}$ (ver [24]).

A sigla KMS se refere a Kubo, Martin and Schwinger que deram contribuições muito importantes na formalização desta Teoria.

Denotamos por ϕ um estado C^*-dinâmico qualquer.

Suponha fixado o grupo de automorfismos σ_t, $t \in \mathbb{R}$. É fácil ver que para β fixado, a condição

$$\phi(a \cdot b) = \phi(b \cdot \sigma_{\beta i}(a)),$$

é equivalente a: $\forall \tau \in \mathbf{C}$,

$$\phi(\sigma_\tau(a) \cdot b) = \phi(b \cdot \sigma_{\tau + \beta i}(a)).$$

Segue da Seção 8.12 em [22] que se ϕ é um estado KMS para β, então para todo $a \in \mathcal{U}$ analítico fixado, temos que $\tau \to \phi(\sigma_\tau(a))$ é uma função analítica limitada definida em todo plano, sendo portanto uma constante (ver [9]). Neste sentido podemos dizer que ϕ é estacionário (não muda com a variação de t). Fazendo um paralelo com o setting clássico, esta afirmação seria como dizer que para uma certa medida μ (que seria estacionária), para qualquer f continua, a integral $\int f \circ \sigma_\tau \, d\mu$, seria constante, independente de τ, onde σ_τ é o fluxo (sistema dinâmico) de alguma equação diferencial fixada. Assim, a "integral"$\phi(\sigma_\tau(a))$ da "função"$\sigma_\tau(a)$ (que descreve a evolução dinâmica da "função"a através do "fluxo"σ_τ) é constante, se a é um elemento analítico em $\mathcal{U}$.

Um estudo mais profundo dos estados KMS dentro da Mecânica Quântica pode ser encontrado em [12].

Vamos elaborar um pouco sobre a condição KMS para o homomorfismo de grupo σ_t, $t \in \mathbb{R}$, onde $\sigma_t(A) = e^{itH} A \, e^{-itH}$. Tome $t = \beta \, i$. Note que $\sigma_{\beta i}(A) = e^{-\beta H} A \, e^{\beta H}$. Vamos supor que $\frac{e^{-\beta H}}{\mathrm{Tr}\left(e^{-\beta H}\right)}$ seja um operador densidade como no exemplo acima.

Estamos interessados, para todo valor real β fixado, nos estados ρ tais que para todo A, B

$$\rho(A \, \sigma_{\beta i}(B)) = \rho(B \, A).$$

É natural esperar, para um β fixo, que isto vá estar de alguma forma associada ao operador densidade $\frac{1}{\mathrm{Tr}\,(e^{-\beta H})} \, e^{-\beta H}$. Isto de certa forma é o análogo do que acontece na Mecânica Estatística. O operador densidade $\frac{1}{\mathrm{Tr}\,(e^{-\beta H})} \, e^{-\beta H}$ se denomina de **operador densidade de Gibbs (operador KMS) associado a $-\beta H$** .

Isto é de fato verdade no seguinte sentido: considere o estado C^*- dinâmico ρ, tal que para todo $A \in \mathcal{U}$ temos

$$\rho(A) = \mathrm{Tr}\, \left(\frac{1}{\mathrm{Tr}\ (e^{-\beta H})} \, e^{-\beta H} \ A \right).$$

Então,

$$\rho(A \, \sigma^{\beta i}(B)) = \mathrm{Tr}\, \left(\frac{1}{\mathrm{Tr}\,(e^{-\beta H})} \, e^{-\beta H} A \quad e^{-\beta\, H} B \, e^{\beta\, H} \right) =$$

$$\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{\mathrm{Tr}\,(e^{-\beta H})}\, e^{-\beta H} A \quad \left[\, e^{-\beta\, H} B\, e^{\beta\, H}\, \right]\right)$$

$$\mathrm{Tr}\left(\left[\, e^{-\beta\, H} B\, e^{\beta\, H}\, \right]\ \frac{1}{\mathrm{Tr}\,(e^{-\beta H})}\, e^{-\beta H} A\ \right) = \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{\mathrm{Tr}\,(e^{-\beta H})}\ e^{-\beta\, H}\, B\, A\right) = \rho(B\, A).$$

Desta forma concluímos que é natural a introdução do estado KMS via o formalismo acima descrito.

Capítulo 2

Lattice de spins quânticos em temperatura positiva

2.1 Estados C^*-dinâmicos em lattices de spin

Vamos considerar operadores agindo em $\mathbb{C}^2$, denotamos $\mathcal{M}_2$ os operadores lineares agindo em $\mathbb{C}^2$. Neste caso iremos denotar por

$$\omega_n : \underbrace{\mathcal{M}_2 \otimes \mathcal{M}_2 \otimes ... \otimes \mathcal{M}_2}_{n} \longrightarrow \mathbb{C},$$

um estado C^*-dinâmico. Note que se $L_1, ..., L_n \in \mathcal{M}_2$ forem positivos, $\omega_n(L_1 \otimes ... \otimes L_n)$ deve ser positivo. Isto porque estamos considerando o produto interno natural, isto é, se $\mathcal{H}_1, ..., \mathcal{H}_n$ são espaços de Hilbert de dimensão finita com produto interno $\langle \cdot | \cdot \rangle_1, ..., \langle \cdot | \cdot \rangle_n$ (respectivamente) então, temos que $\langle a_1 \otimes ... \otimes a_n | b_1 \otimes ... \otimes b_n \rangle = \langle a_1 | b_1 \rangle_1 ... \langle a_n | b_n \rangle_n$ é o nosso produto interno e por isso $L_1 \otimes ... \otimes L_n$ é positivo em $\mathcal{H}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{H}_n$.

Para definir cada ω_n, antes vamos fixar a nossa temperatura $T > 0$, definimos $\beta = \frac{1}{T} > 0$ e fixamos $H : \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. Agora, para cada $n \geq 2$ natural, definimos

$$H_n = \sum_{j=0}^{n-2} I^{\otimes j} \otimes H \otimes I^{\otimes (n-j-2)}.$$

Associado ao Hamiltoniano H_n, que age em $(\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$, temos o estado KMS

$$\rho_{\beta,n} = \frac{1}{\mathrm{Tr}\,(e^{-\beta H_n})} e^{-\beta H_n},$$

finalmente, definimos ω_n o C^*-estado associado como

$$\begin{aligned}\omega_n(L_1 \otimes ... \otimes L_n) &= \frac{1}{\mathrm{Tr}\,(e^{-\beta H_n})} \mathrm{Tr}\,[e^{-\beta H_n}(L_1 \otimes ... \otimes L_n)] \\ &= \mathrm{Tr}\,(\rho_{\beta,n} L_1 \otimes ... \otimes L_n). \qquad (2.1)\end{aligned}$$

Uma cadeia quântica de Ising é definida por um Hamiltoniano da forma

$$H = -J(\sigma_1^x \otimes \sigma_2^x) - h(\sigma_1^z \otimes I),$$

onde as matrizes de Pauli são

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

enquanto σ_i^x, é a matriz de Pauli σ^x agindo na posição i do produto tensorial.

O n-Hamiltoniano associado é

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} [\, -J\,(\,\sigma_i^x \,\otimes\, \sigma_{i+1}^x\,) - h\,(\,\sigma_i^z \,\otimes\, I\,)\,].$$

No caso $h = 0$ dizemos que a cadeia quântica de Ising não possui termo magnético. Este será o caso que iremos considerar aqui.

Seja L um observável (operador autoadjunto) com autovalores λ_1, λ_2, e $\beta > 0$ fixado. Suponha que $\{\psi_1, \psi_2\}$ é uma base ortonormal de autovetores para L e que P_1, P_2 são as projeções ortogonais sobre os subespaços gerados por ψ_1 e ψ_2, respectivamente. Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, o observável

$$L^{\otimes\, n} := (L \otimes L \otimes\; .... \otimes L) : (\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d \otimes\; .... \otimes \mathbb{C}^d) \to (\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d \otimes\; .... \otimes \mathbb{C}^d),$$

tem autovetores $\psi_{j_1} \otimes ... \otimes \psi_{j_n}$ associado ao autovalor $\lambda_{j_1}\lambda_{j_2}...\lambda_{j_n}$. Qualquer autovalor de $L^{\otimes n}$ é desta forma.

O valor obtido por uma medição física (associada ao observável $L^{\otimes n}$) nas configurações da Mecânica Quântica finito-dimensional são os autovalores de $L^{\otimes}$. A informação importante é a probabilidade de cada possível resultado obtido pela medição por $L^{\otimes n}$. Neste caso, vamos denotar $\Omega_n = \{1,2\}^n$ e definir a probabilidade $\mu_{\beta,n}$ sobre Ω_n por

$$\begin{aligned}\mu_{\beta,n}(\, j_1, ..., j_n\,) &= \omega_{H,\beta,n}(\, P_{\psi_{j_1}} \otimes P_{\psi_{j_2}} \otimes ... \otimes P_{\psi_{j_n}}\,) \\ &= \frac{1}{Tr\,(e^{-\,\beta H_n})} \mathrm{Tr}[\, e^{-\,\beta H_n} (P_{\psi_{j_1}} \otimes P_{\psi_{j_2}} \otimes ... \otimes P_{\psi_{j_n}}).\end{aligned}$$

Com estas informações, vamos tentar produzir uma probabilidade μ_β sobre $\Omega = \{1,2\}^{\mathbb{N}}$. Isto será feito via Teorema da Extensão de Kolmogorov.

2.2 A Hipótese A

Neste trabalho estamos assumindo a cadeia quântica de Ising sem termo magnético que é definida pelo Hamiltoniano $H = \sigma_1^x \otimes \sigma_2^x$. Vamos considerar operadores auto-adjuntos (observáveis) da forma:

$$L = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) & 2\cos(\theta)\sin(\theta) \\ 2\cos(\theta)\sin(\theta) & \sin^2(\theta) - \cos^2(\theta) \end{pmatrix},$$

onde[1] $\theta \in (0, \pi/2)$.

Os autovalores são 1 e -1.

Os correspondentes autovetores são

$$v_1 = (\cos(\theta), \sin(\theta))$$

e

$$v_2 = (-\sin(\theta), \cos(\theta)).$$

De fato, o fundamental não é a escolha de L mas dos respectivos subespaços gerados por v_1 e v_2.

[1] O caso $\theta = 0$ corresponde a $L = \sigma^z$ e o caso $\theta = \pi/2$ corresponde a $L = -\sigma^z$, nós vamos excluir estes casos.

Vamos denotar $P_1 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ a projeção sobre v_1 e $P_2 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ a projeção sobre v_2. Desta forma

$$P_1 = \begin{pmatrix} \cos(\theta)^2 & \cos(\theta)\,\sin(\theta) \\ \cos(\theta)\,\sin(\theta) & \sin(\theta)^2 \end{pmatrix}$$

e,

$$P_2 = \begin{pmatrix} \sin(\theta)^2 & -\cos(\theta)\,\sin(\theta) \\ -\cos(\theta)\,\sin(\theta) & \cos(\theta)^2 \end{pmatrix}.$$

Note que Tr $P_1 =$ Tr $P_2 = 1$. Além disso,

$$\sigma^x(P_1) = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\sin(\theta) & \sin^2(\theta) \\ \cos^2(\theta) & \cos(\theta)\sin(\theta) \end{pmatrix},$$

tem traço $\beta_1 := \sin(2\,\theta) \in \mathbb{R}$ e,

$$\sigma^x(P_2) = \begin{pmatrix} -\cos(\theta)\sin(\theta) & \cos^2(\theta) \\ \sin^2(\theta) & -\cos(\theta)\sin(\theta) \end{pmatrix},$$

tem traço $\beta_2 := -\sin(2\,\theta) \in \mathbb{R}$. Portanto, $\mathrm{Tr}\,(\sigma^x(P_2)) = \beta_2 = -\beta_1$. Note que, se $\theta \neq \frac{\pi}{4}$, então β_1, β_2 tem módulo menor do que 1.

Definição 2.2.1.

$$\beta_1 := \sin(2\theta) \qquad e \qquad \beta_2 := -\sin(2\theta).$$

2.3 A definição da probabilidade quântica μ_β

Nesta seção, construímos uma medida μ_β sobre $\Omega = \{1,2\}^{\mathbb{N}}$ a partir das $\mu_{\beta,n}$ que já definimos. Para isso, usamos o Teorema da Extensão de Kolmogorov, neste caso as $\mu_{\beta,n}$ nos darão o valor da probabilidade μ_β em cada um dos cilindros e a Proposição 2.3.5 nos dará a hipótese que precisamos para utilizar o Teorema.

Inicialmente, vamos computar $U = e^{izH}$ para $H = \sigma^x \otimes \sigma^x$ e para z complexo. A relação $\sigma^x \circ \sigma^x = I$ será muito útil para esta tarefa. Note que

$$U = e^{i\,z\,(\sigma^x \otimes \sigma^x)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(iz)^j}{j\,!} (\sigma^x \otimes \sigma^x)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(iz)^j}{j\,!} ((\sigma^x)^j \otimes (\sigma^x)^j)$$

$$= \cos(z)\,(I \otimes I) \,+\, i\,\sin(z)\,(\sigma^x \otimes \sigma^x).$$

Em Mecânica Estatística Quântica (veja [1]) é natural tomar $z = i\beta$, onde β é um número real.

Neste caso,

$$B = e^{-\beta\,\sigma^x \otimes \sigma^x} = \cos(i\,\beta)\,(I \otimes I) \,+\, i\,\sin(i\,\beta)\,(\sigma^x \otimes \sigma^x).$$

Vamos fixar uma notação:

Notação 2.3.1. *Para $n \geq 3$ fixo,*

$$(\sigma_i^x \otimes \sigma_{i+1}^x)_n = \begin{cases} \sigma^x \otimes \sigma^x \otimes \underbrace{I \otimes ... \otimes I}_{n-2}, & i = 1 \\ \underbrace{I \otimes ... \otimes I}_{n-2} \otimes \sigma^x \otimes \sigma^x, & i = n-1 \\ \underbrace{I \otimes ... \otimes I}_{i-1} \otimes \sigma^x \otimes \sigma^x \otimes \underbrace{I \otimes ... \otimes I}_{n-i-1}, & 1 < i < n-1 \end{cases}.$$

Agora, podemos calcular $e^{-\beta H_n} : (\mathbb{C}^2)^{\otimes n} \to (\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$. Como $(\sigma_i^x \otimes \sigma_{i+1}^x)_n$ comuta com $(\sigma_j^x \otimes \sigma_{j+1}^x)_n$, $i, j \in \{1, ..., n-1\}$, temos

$$e^{-\beta H_n} = e^{-\beta\,[\sum_{i=1}^{n-1} (\sigma_i^x \otimes \sigma_{i+1}^x)_n]} = \prod_{i=1}^{n-1} e^{-\beta\,(\sigma_i^x \otimes \sigma_{i+1}^x)_n}$$

$$= \prod_{i=1}^{n-1} [\cos(i\beta)\,I^{\otimes n} \,+\, i\,\sin(i\beta)\,(\sigma_i^x \otimes \sigma_{i+1}^x)_n],$$

onde o produto acima é a composição de operadores.

Se $n = 4$, por exemplo, temos

$$
\begin{aligned}
e^{-\beta H_4} &= e^{-\beta\,[\,(\sigma^x\otimes\sigma^x\otimes I\otimes I)+(I\otimes\sigma^x\otimes\sigma^x\otimes I)+(I\otimes I\otimes\sigma^x\otimes\sigma^x)\,]} = \\
& e^{-\beta\,(\sigma^x\otimes\sigma^x\otimes I\otimes I)} \circ e^{-\beta\,(I\otimes\sigma^x\otimes\sigma^x\otimes I)} \circ e^{-\beta\,(I\otimes I\otimes\sigma^x\otimes\sigma^x)} = \\
& [\,\cos(i\beta)\,(I\otimes I\otimes I\otimes I) \,+\, i\,\sin(i\beta)\,(\sigma^x\otimes\sigma^x\otimes I\otimes I)\,]\circ \\
& [\,\cos(i\beta)\,(I\otimes I\otimes I\otimes I) \,+\, i\,\sin(i\beta)\,(I\otimes\sigma^x\otimes\sigma^x\otimes I)\,]\circ \\
& [\,\cos(i\beta)\,(I\otimes I\otimes I\otimes I) \,+\, i\,\sin(i\beta)\,(I\otimes I\otimes\sigma^x\otimes\sigma^x)\,].
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

Lema 2.3.2. *Se $H = \sigma^x \otimes \sigma^x$, então* $\mathrm{Tr}\,(e^{-\beta\,H_n}) = \cos^{n-1}(i\beta)2^n$.

Demonstração. Note que

$$
e^{-\beta H_n} = \prod_{i=1}^{n-1}[\cos(i\beta)\,I^{\otimes n} \,+\, i\,\sin(i\beta)\,(\sigma_i^x\otimes\sigma_{i+1}^x)_n],
$$

que resulta em uma soma com 2^{n-1} termos. Apenas o termo $\cos^{n-1}(i\beta)\,(I^{\otimes n})$ não contém um produto de σ^x. Como $\mathrm{Tr}\,(\sigma^x) = 0$ e

$$
\mathrm{Tr}\,(L_1\otimes ... \otimes L_n) = \mathrm{Tr}\,(L_1)\cdots\mathrm{Tr}\,(L_n),
$$

assim, todos os outros termos exceto $\cos^{n-1}(i\beta)\,(I^{\otimes n})$, produzirão traço nulo. Além disso, como $\mathrm{Tr}\,(I) = 2$, então

$$
\mathrm{Tr}\,(e^{-\beta H_n}) = \cos^{n-1}(i\beta)\mathrm{Tr}\,(I^{\otimes n}) = \cos^{n-1}(i\beta)2^n.
$$

□

Agora, considerando L como na Hipótese A, a probabilidade $\mu_{\beta,n}$ de um elemento $(j_1, ..., j_n) \in \{1,2\}^n$ é dada por

$$
\mu_{\beta,n}(j_1,,...,j_n) = \frac{1}{Tr\,(e^{-\beta H_n})}\mathrm{Tr}\,\left[e^{-\beta H_n}(P_{j_1}\otimes P_{j_2}\otimes ...\otimes P_{j_n})\right]
$$

$$
= \frac{1}{\cos^{n-1}(i\beta)2^n}\mathrm{Tr}\,\left[\prod_{i=1}^{n-1}[\cos(i\beta)\,I^{\otimes n} \,+\, i\,\sin(i\beta)\,(\sigma_i^x\otimes\sigma_{i+1}^x)_n](P_{j_1}\otimes P_{j_2}\,\otimes ...\otimes P_{j_n})\right].
$$

Definindo $\Phi_\beta = \dfrac{e^{-\beta}}{\cos(i\beta)}$, podemos obter uma forma mais conveniente para $\mu_{\beta,n}$. Note que, como $i\ \sin(\beta i) = -\cos(\beta i) + e^{-\beta}$, temos $\dfrac{i\ \sin(i\beta)}{\cos(i\beta)} = -1 + \Phi_\beta$.

Portanto podemos escrever $\mu_{\beta,n}$ da forma:

$$\mu_{\beta,n}(j_1,...,j_n) = \frac{1}{2^n}\mathrm{Tr}\left[\prod_{i=1}^{n-1}[I^{\otimes n} + (-1 + \Phi_\beta)(\sigma_i^x \otimes \sigma_{i+1}^x)_n](P_{j_1} \otimes P_{j_2} \otimes ... \otimes P_{j_n})\right]. \tag{2.3}$$

Isso nos permite calcular um exemplo simples:

Exemplo 2.3.3.

$$\mu_\beta(a,b) = \frac{1}{2^2}\mathrm{Tr}\ [(I \otimes I - (\sigma_1^x \otimes \sigma_2^x)_2 + \Phi_\beta(\sigma_1^x \otimes \sigma_2^x)_2)(P_a \otimes P_b)] =$$

$$\frac{1}{2^2}\mathrm{Tr}\ [P_a \otimes P_b] - \frac{1}{2^2}\mathrm{Tr}\ [\sigma_1^x P_a \otimes \sigma_2^x P_b] + \frac{1}{2^2}\Phi_\beta\ \mathrm{Tr}\ [\sigma_1^x P_a \otimes \sigma_2^x P_b] =$$

$$= \frac{1}{2^2}[1 - \beta_a\beta_b] + \frac{1}{2^2}\Phi_\beta\beta_a\beta_b.$$

Também não é difícil calcular para os cilindros de tamanho 3.

$$\mu_\beta(a,b,c) = \frac{1}{2^3}\mathrm{Tr}\left[\begin{array}{l}(I \otimes I \otimes I + (-1+\Phi_\beta)(\sigma_1^x \otimes \sigma_2^x)_3)\circ \\ (I \otimes I \otimes I + (-1+\Phi_\beta)(\sigma_2^x \otimes \sigma_3^x)_3)\circ \\ (P_a \otimes P_b \otimes P_c)\end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{2^3}\Big[1 + (-1+\Phi_\beta)\beta_a\beta_b + (-1+\Phi_\beta)\beta_b\beta_c + (-1+\Phi_\beta)^2\beta_a\beta_c\Big].$$

Observação 2.3.4. *Note que $0 < \Phi_\beta < 1$, para todo $\beta \in (0,\infty)$. De fato, visto que $e^\beta = \cos(i\beta) + i\sin(i\beta)$, temos*

$$\cos(i\beta) = \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2},$$

dessa forma,

$$\Phi_\beta = \frac{2e^{-\beta}}{e^{\beta} + e^{-\beta}} = \frac{2}{e^{2\beta} + 1} \in (0, 1).$$

Agora podemos provar o seguinte resultado

Proposição 2.3.5. *Para todo* $n \in \{2, 3, ...\}$,

$$\mu_{\beta,n+1}(j_1, ..., j_n, 1) + \mu_{\beta,n+1}(j_1, ..., j_n, 2) = \mu_{\beta,n}(j_1, ..., j_n).$$

Prova. Basta usar (2.3):

$$\begin{aligned}
&\mu_{\beta,n+1}(j_1,...,j_n,1)+\mu_{\beta,n+1}(j_1,...,j_n,2)\\
&\qquad=\frac{1}{2^{n+1}}\mathrm{Tr}\left[\begin{array}{l}\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[I^{\otimes n+1}\;+\;(-1\;+\;\Phi_\beta)\,(\sigma_i^x\otimes\sigma_{i+1}^x)_{n+1}]\circ\\(P_{j_1}\otimes P_{j_2}\;\otimes...\otimes P_{j_n}\;\otimes\;P_1)\end{array}\right]\\
&\qquad+\frac{1}{2^{n+1}}\mathrm{Tr}\left[\begin{array}{l}\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[I^{\otimes n+1}\;+\;(-1\;+\;\Phi_\beta)\,(\sigma_i^x\otimes\sigma_{i+1}^x)_{n+1}]\circ\\(P_{j_1}\otimes P_{j_2}\;\otimes...\otimes P_{j_n}\;\otimes\;P_2)\end{array}\right]\\
&\qquad=\frac{1}{2^{n+1}}\mathrm{Tr}\left[\begin{array}{l}\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[I^{\otimes n+1}\;+\;(-1\;+\;\Phi_\beta)\,(\sigma_i^x\otimes\sigma_{i+1}^x)_{n+1}]\circ\\(P_{j_1}\otimes P_{j_2}\;\otimes...\otimes P_{j_n}\otimes\;(P_1+P_2))\end{array}\right]\\
&\qquad=\frac{1}{2^{n+1}}\mathrm{Tr}\left[\begin{array}{l}\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[I^{\otimes n+1}\;+\;(-1\;+\;\Phi_\beta)\,(\sigma_i^x\otimes\sigma_{i+1}^x)_{n+1}]\circ\\(P_{j_1}\otimes P_{j_2}\;\otimes...\otimes P_{j_n}\;\otimes\;I)\end{array}\right]\\
&\qquad=\frac{1}{2^{n+1}}\mathrm{Tr}\left[\begin{array}{l}\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1}[I^{\otimes n+1}\;+\;(-1\;+\;\Phi_\beta)\,(\sigma_i^x\otimes\sigma_{i+1}^x)_{n+1}]\circ\\(P_{j_1}\otimes P_{j_2}\;\otimes...\otimes P_{j_n}\;\otimes\;I)\end{array}\right]\\
&\qquad+\frac{(-1\;+\;\Phi_\beta)}{2^{n+1}}\mathrm{Tr}\left[\begin{array}{l}\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1}[I^{\otimes n+1}\;+\;(-1\;+\;\Phi_\beta)\,(\sigma_i^x\otimes\sigma_{i+1}^x)_{n+1}]\circ\\(P_{j_1}\otimes P_{j_2}\;\otimes...\otimes P_{j_n}\;\otimes\;I)\circ\\(\sigma_n^x\otimes\sigma_{n+1}^x)_{n+1}\end{array}\right].
\end{aligned}$$

Observe que todos os produtos das ultimas duas parcelas terminam com um σ_x na última entrada. Nesse caso, como o traço separa o tensorial em produto, isto é $\mathrm{Tr}\,(L_1\otimes\cdots\otimes L_n)=\mathrm{Tr}\,(L_1)\cdots\mathrm{Tr}\,(L_n)$. E como $\mathrm{Tr}\,(\sigma_x)=0$, temos que:

$$\begin{aligned}
&\mu_{\beta,n+1}(j_1,...,j_n,1)+\mu_{\beta,n+1}(j_1,...,j_n,2)\\
&\quad=\frac{1}{2^{n+1}}\mathrm{Tr}\left[\begin{array}{l}\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1}\left[I^{\otimes n+1}\;+\;(-1\;+\;\Phi_\beta)\,(\sigma_i^x\otimes\sigma_{i+1}^x)_{n+1}\right]\circ\\ (P_{j_1}\otimes P_{j_2}\;\otimes...\otimes P_{j_n}\;\otimes\;I)\end{array}\right].
\end{aligned}$$

Agora observe que o último termo no tensorial é sempre a identidade e ainda que $\mathrm{Tr}\,(I)=2$. Daí:

$$\begin{aligned}
&\mu_{\beta,n+1}(j_1,...,j_n,1)+\mu_{\beta,n+1}(j_1,...,j_n,2)\\
&\quad=\frac{1}{2^{n}}\mathrm{Tr}\left[\begin{array}{l}\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1}\left[I^{\otimes n}\;-\;(\sigma_i^x\otimes\sigma_{i+1}^x)_n\;+\;\Phi_\beta\,(\sigma_i^x\otimes\sigma_{i+1}^x)_n\right]\circ\\ (P_{j_1}\otimes P_{j_2}\;\otimes...\otimes P_{j_n})\end{array}\right]\\
&\quad=\mu_{\beta,n}(j_1,...,j_n).
\end{aligned}$$

□

Analogamente pode-se provar que:

Proposição 2.3.6. *Para todo* $n\in\{2,3,...\}$,

$$\begin{aligned}
\mu_{\beta,n+1}(1,&j_1,...,j_n)+\mu_{\beta,n+1}(2,j_1,...,j_n)\\
&=\mu_{\beta,n+1}(\sigma^{-1}([j_1,...,j_n]))\\
&=\mu_{\beta,n}(j_1,...,j_n).
\end{aligned}$$

Teorema 2.3.7. *Suponha* H *e* L *satisfazem a Hipótese A. Então existe uma única probabilidade* μ_β *sobre* $\Omega:=\{1,2\}^{\mathbb{N}}$*, invariante pelo* σ *(shift), tal que, para qualquer* $n\in\{2,3,...\}$ *e qualquer cilindro* $[j_1,...,j_n]$*, temos que:*

$$\mu_\beta([j_1,...,j_n])=\mu_{\beta,n}(j_1,...,j_n).$$

Notação 2.3.8. $\mu_\beta(j_1,...,j_n):=\mu_\beta([j_1,...,j_n])$.

Demonstração. A existência e unicidade segue do Teorema da Extensão de Kolmogorov (ver [5]). A hipótese deste teorema é assegurada na Proposição 2.3.5. Com isso temos a existência e unicidade desta medida. A invariância pelo σ por outro lado, segue da Proposição 2.3.6. Esta garante que a medida é invariante para cilindros. Os cilindros formam uma semi-álgebra, o Lemma 1.1.3 em [5] prova que a álgebra gerada por uma semi-álgebra é simplesmente as uniões finitas de conjuntos dois a dois disjuntos. Note que se A, B são disjuntos, com funções característica $\mathcal{X}_A, \mathcal{X}_B$, e valem $\int \mathcal{X}_A \circ \sigma \, d\mu_\beta = \int \mathcal{X}_A \, d\mu_\beta$, $\int \mathcal{X}_B \circ \sigma \, d\mu_\beta = \int \mathcal{X}_B \, d\mu_\beta$. Como $\mathcal{X}_{A \cup B} = \mathcal{X}_A + \mathcal{X}_B$, vale que

$$\begin{aligned}\int \mathcal{X}_{A\cup B} \circ \sigma \, d\mu_\beta &= \int (\mathcal{X}_A + \mathcal{X}_B) \circ \sigma \, d\mu_\beta = \int \mathcal{X}_A \circ \sigma \, d\mu_\beta + \int \mathcal{X}_B \circ \sigma \, d\mu_\beta \\ &= \int \mathcal{X}_A \, d\mu_\beta + \int \mathcal{X}_A \, d\mu_\beta = \int \mathcal{X}_{A\cup B} \, d\mu_\beta.\end{aligned}$$

Por indução, vale para as uniões finitas de elementos dois a dois disjuntos. Então vale para a álgebra gerada pelos cilindros. Finalmente, dado que $\mu_\beta(\sigma^{-1}(A)) = \mu_\beta(A)$ para todos os elementos A na álgebra gerada pelos cilindros então pelo Lema 1.3.1 em [6] obtemos que μ_β é invariante na sigma-álgebra gerada pelos cilindros. □

Obtivemos assim a medida μ_β que será nosso objeto de estudo nas próximas sessões.

2.4 Sobre a probabilidade de spin quântico em temperatura positiva

Neste capítulo iremos explorar as propriedades da medida μ_β construída na Seção 2.3. Os resultados apresentados são de grande auxílio para as seções seguintes.

Teorema 2.4.1. *Suponha H e L de acordo com a Hipótese A. Seja μ_β a* *probabilidade definida no Corolário 2.3.7. Então, para $n \geq 2$, temos:*

$$\mu_\beta(k,j_1,...,j_n) =$$
$$\frac{\mu_\beta(j_1,...,j_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{(-1+\Phi_\beta)^i \beta_k \beta_{j_i}}{2^{i+1}} \mu_\beta(j_{i+1},...,j_n) + \frac{(-1+\Phi_\beta)^{n-1}\beta_k\beta_{j_{n-1}}}{2^{n+1}}$$
$$+ \frac{(-1+\Phi_\beta)^n \beta_k \beta_{j_n}}{2^{n+1}}.$$

Demonstração. Usando a equação (2.3) e que a μ_β coincide com a $\mu_{\beta,n}$ nos cilindros, temos:

$$\begin{aligned}
\mu_\beta(k,j_1,...,j_n) &= \frac{1}{2^{n+1}} \mathrm{Tr} \left[\begin{array}{l} \prod_{i=1}^{n} [I^{\otimes n+1} + (-1+\Phi_\beta)(\sigma_i^x \otimes \sigma_{i+1}^x)_{n+1}] \circ \\ (P_k \otimes P_{j_1} \otimes P_{j_2} \otimes ... \otimes P_{j_n}) \end{array} \right] \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \mathrm{Tr} \left[\begin{array}{l} \prod_{i=2}^{n} [I^{\otimes n+1} + (-1+\Phi_\beta)(\sigma_i^x \otimes \sigma_{i+1}^x)_{n+1}] \circ \\ (P_k \otimes P_{j_1} \otimes P_{j_2} \otimes ... \otimes P_{j_n}) \end{array} \right] + \\
&\quad \frac{(-1+\Phi_\beta)}{2^{n+1}} \mathrm{Tr} \left[\begin{array}{l} \prod_{i=2}^{n} [I^{\otimes n+1} + (-1+\Phi_\beta)(\sigma_i^x \otimes \sigma_{i+1}^x)_{n+1}] \circ \\ (\sigma_1^x \otimes \sigma_2^x)_{n+1} \circ \\ (P_k \otimes P_{j_1} \otimes P_{j_2} \otimes ... \otimes P_{j_n}) \end{array} \right] \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \mathrm{Tr} \left[\begin{array}{l} \prod_{i=1}^{n-1} [I^{\otimes n} + (-1+\Phi_\beta)(\sigma_i^x \otimes \sigma_{i+1}^x)_{n}] \circ \\ (P_{j_1} \otimes P_{j_2} \otimes ... \otimes P_{j_n}) \end{array} \right] + \\
&\quad \frac{(-1+\Phi_\beta)}{2^{n+1}} \mathrm{Tr} \left[\begin{array}{l} \prod_{i=2}^{n} [I^{\otimes n+1} + (-1+\Phi_\beta)(\sigma_i^x \otimes \sigma_{i+1}^x)_{n+1}] \circ \\ (\sigma_1^x \otimes \sigma_2^x)_{n+1} \circ \\ (P_k \otimes P_{j_1} \otimes P_{j_2} \otimes ... \otimes P_{j_n}) \end{array} \right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\mu_\beta(j_1,...,j_n)+ \\
&\frac{(-1\,+\,\Phi_\beta\,)}{2^{n+1}}\mathrm{Tr}\left[\begin{array}{l} \displaystyle\prod_{i=2}^{n}[I^{\otimes n+1}\,+\,(-1\,+\,\Phi_\beta\,)\,(\sigma_i^x\otimes\sigma_{i+1}^x)_{n+1}]\circ \\ (\sigma_1^x P_k\otimes\sigma_2^x P_{j_1}\otimes P_{j_2}\,\otimes ...\otimes P_{j_n}) \end{array}\right] \\
&= \frac{1}{2}\mu_\beta(j_1,...,j_n)+ \\
&\frac{(-1\,+\,\Phi_\beta\,)}{2^{n+1}}\mathrm{Tr}\left[\begin{array}{l} \displaystyle\prod_{i=3}^{n}[I^{\otimes n+1}\,+\,(-1\,+\,\Phi_\beta\,)\,(\sigma_i^x\otimes\sigma_{i+1}^x)_{n+1}]\circ \\ (\sigma_1^x P_k\otimes\sigma_2^x P_{j_1}\otimes P_{j_2}\,\otimes ...\otimes P_{j_n}) \end{array}\right]+ \\
&\frac{(-1\,+\,\Phi_\beta\,)^2}{2^{n+1}}\mathrm{Tr}\left[\begin{array}{l} \displaystyle\prod_{i=3}^{n}[I^{\otimes n+1}\,+\,(-1\,+\,\Phi_\beta\,)\,(\sigma_i^x\otimes\sigma_{i+1}^x)_{n+1}]\circ \\ (\sigma_2^x\otimes\sigma_3^x)_{n+1}\circ \\ (\sigma_1^x P_k\otimes\sigma_2^x P_{j_1}\otimes P_{j_2}\,\otimes ...\otimes P_{j_n}) \end{array}\right] \\
&= \frac{1}{2}\mu_\beta(j_1,...,j_n)+\frac{(-1\,+\,\Phi_\beta\,)\beta_k\beta_{j_1}}{2^2}\mu_\beta(j_2,...,j_n)+ \\
&\frac{(-1\,+\,\Phi_\beta\,)^2}{2^{n+1}}\mathrm{Tr}\left[\begin{array}{l} \displaystyle\prod_{i=3}^{n}[I^{\otimes n+1}\,+\,(-1\,+\,\Phi_\beta\,)\,(\sigma_i^x\otimes\sigma_{i+1}^x)_{n+1}]\circ \\ (\sigma_2^x\otimes\sigma_3^x)_{n+1}\circ \\ (\sigma_1^x P_k\otimes\sigma_2^x P_{j_1}\otimes P_{j_2}\,\otimes ...\otimes P_{j_n}) \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

$$\vdots$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\mu_\beta(j_1, ..., j_n) + \frac{(-1\ +\ \Phi_\beta\ )\beta_k\beta_{j_1}}{2^2}\mu_\beta(j_2, ..., j_n) + \\
&\quad ... + \frac{(-1\ +\ \Phi_\beta\ )^{n-2}\beta_k\beta_{j_{n-2}}}{2^{n-1}}\mu_\beta(j_{n-1}, j_n) + \\
&\quad \frac{(-1\ +\ \Phi_\beta\ )^{n-1}}{2^{n+1}}\mathrm{Tr}\left[\begin{array}{l}(I^{\otimes n+1}\ +\ (-1\ +\ \Phi_\beta\ )(\sigma_n^x \otimes \sigma_{n+1}^x)_{n+1}) \circ \\ (\sigma_1^x P_k \otimes P_{j_1} \otimes P_{j_2}\ \otimes ... \otimes \sigma_n^x P_{j_{n-1}} \otimes P_{j_n})\end{array}\right] \\
&= \frac{\mu_\beta(j_1, ..., j_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-2}\frac{(-1+\Phi_\beta)^i\beta_k\beta_{j_i}}{2^{i+1}}\mu_\beta(j_{i+1}, ..., j_n) + \\
&\quad \frac{(-1+\Phi_\beta)^{n-1}\beta_k\beta_{j_{n-1}}}{2^{n+1}} + \frac{(-1+\Phi_\beta)^n\beta_k\beta_{j_n}}{2^{n+1}}.
\end{aligned}
$$

□

Observação 2.4.2. *Usamos diversas vezes a propriedade já conhecida de que* $\mathrm{Tr}\,(L_1 \otimes \cdots \otimes L_n) = \mathrm{Tr}\,(L_1)\cdots\mathrm{Tr}\,(L_n)$ *e ainda a linearidade do traço.*

Proposição 2.4.3. *Para* $n \geq 1$*,*

$$
\begin{aligned}
\mu_\beta(k_0, k_1, ..., k_n) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\beta_{k_0}}{\beta_{k_1}}(-1+\Phi_\beta)\right)\mu_\beta(k_1, ..., k_n) + \\
\frac{\beta_{k_0}}{2}(-1+\Phi_\beta)\left(\frac{-1}{2\beta_{k_1}} + \frac{\beta_{k_1}}{2}\right)\mu_\beta(k_2, ..., k_n).
\end{aligned}
$$

Demonstração. Os casos $n = 1, 2$ correspondem às equações

$$
\mu_\beta(k_0, k_1) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\beta_{k_0}}{\beta_{k_1}}(-1+\Phi_\beta)\right)\mu_\beta(k_1) + \frac{\beta_{k_0}}{2}(-1+\Phi_\beta)\left(\frac{-1}{2\beta_{k_1}} + \frac{\beta_{k_1}}{2}\right)
$$

e

$$
\mu_\beta(k_0, k_1, k_2) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\beta_{k_0}}{\beta_{k_1}}(-1+\Phi_\beta)\right)\mu_\beta(k_1, k_2)+\frac{\beta_{k_0}}{2}(-1+\Phi_\beta)\left(\frac{-1}{2\beta_{k_1}}+\frac{\beta_{k_1}}{2}\right)\mu_\beta(k_2),
$$

que podem ser verificados diretamente do Exemplo 2.3.3 usando que $\mu_\beta(k) = 1/2,\ k = 1, 2$.

Para $n \geq 2$, do Teorema 2.4.1 obtemos as equações

$$\begin{aligned}
\frac{2\mu_\beta(k_0, k_1, ..., k_n)}{\beta_{k_0}} &= \frac{\mu_\beta(k_1, ..., k_n)}{\beta_{k_0}} + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{(-1+\Phi_\beta)^i \beta_{k_i} \mu_\beta(k_{i+1}, ..., k_n)}{2^i} + \\
&\quad \frac{(-1+\Phi_\beta)^{n-1}\beta_{k_{n-1}}}{2^n} + \frac{(-1+\Phi_\beta)^n \beta_{k_n}}{2^n} \\
&= \frac{\mu_\beta(k_1, ..., k_n)}{\beta_{k_0}} + \frac{(-1+\Phi_\beta)\beta_{k_1}\mu_\beta(k_2, ..., k_n)}{2} + \\
&\quad \sum_{i=2}^{n-2} \frac{(-1+\Phi_\beta)^i \beta_{k_i} \mu_\beta(k_{i+1}, ..., k_n)}{2^i} + \\
&\quad \frac{(-1+\Phi_\beta)^{n-1}\beta_{k_{n-1}}}{2^n} + \frac{(-1+\Phi_\beta)^n \beta_{k_n}}{2^n}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{(-1+\Phi_\beta)\mu_\beta(k_1, ..., k_n)}{\beta_{k_1}} &= \frac{(-1+\Phi_\beta)\mu_\beta(k_2, ..., k_n)}{2\beta_{k_1}} + \\
&\quad \sum_{i=1}^{n-3} \frac{(-1+\Phi_\beta)^{i+1} \beta_{k_{i+1}} \mu_\beta(k_{i+2}, ..., k_n)}{2^{i+1}} + \\
&\quad \frac{(-1+\Phi_\beta)^{n-1}\beta_{k_{n-1}}}{2^n} + \frac{(-1+\Phi_\beta)^n \beta_{k_n}}{2^n} \\
&= \frac{(-1+\Phi_\beta)\mu_\beta(k_2, ..., k_n)}{2\beta_{k_1}} + \\
&\quad \sum_{i=2}^{n-2} \frac{(-1+\Phi_\beta)^i \beta_{k_i} \mu_\beta(k_{i+1}, ..., k_n)}{2^i} + \\
&\quad \frac{(-1+\Phi_\beta)^{n-1}\beta_{k_{n-1}}}{2^n} + \frac{(-1+\Phi_\beta)^n \beta_{k_n}}{2^n},
\end{aligned}$$

Então

$$\frac{2\mu_\beta(k_0, k_1, ..., k_n)}{\beta_{k_0}} - \frac{(-1+\Phi_\beta)\mu_\beta(k_1, ..., k_n)}{\beta_{k_1}}$$

$$= \left(\frac{\mu_\beta(k_1, ..., k_n)}{\beta_{k_0}} + \frac{(-1+\Phi_\beta)\beta_{k_1}\mu_\beta(k_2, ..., k_n)}{2}\right) - \left(\frac{(-1+\Phi_\beta)\mu_\beta(k_2, ..., k_n)}{2\beta_{k_1}}\right).$$

Portanto,

$$\mu_\beta(k_0, k_1, ..., k_n) = \frac{1}{2}\bigg(1 + \frac{\beta_{k_0}}{\beta_{k_1}}(-1+\Phi_\beta)\bigg)\mu_\beta(k_1, ..., k_n) +$$
$$\frac{\beta_{k_0}}{2}(-1+\Phi_\beta)\bigg(-\frac{1}{2\beta_{k_1}} + \frac{\beta_{k_1}}{2}\bigg)\mu_\beta(k_2, ..., k_n).$$

□

2.5 μ_β é mixing

Nesta seção, vamos mostrar que a medida μ_β é mixing. Mais especificamente vamos mostrar o teorema abaixo.

Teorema 2.5.1. *Para quaisquer cilindros* $[a_1, ..., a_k]$ *e* $[b_1, ..., b_l]$ *temos*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j_1,...,j_n} \mu_\beta(a_1, ..., a_k, j_1, ..., j_n, b_1, ..., b_l) = \mu_\beta(a_1, ..., a_k)\mu_\beta(b_1, ..., b_l). \quad (2.4)$$

Em particular, μ_β *é mixing.*

Demonstração. Observe que se $A = [a_1, ..., a_k]$ e $B = [b_1, ..., b_l]$, a equação (2.4) significa
$$\lim_{n\to\infty} \mu(A \cap \sigma^{-n}B) = \mu(A)\mu(B).$$

É fácil estender essa expressão para conjuntos mensuráveis quaisquer. Isso mostra que μ_β é mixing.

Vamos provar (2.4) por indução em k. Para $k = 1$, do Teorema 2.4.1, como $\beta_2 = -\beta_1$, nós obtemos

$$\sum_{j_1,...,j_n} \mu_\beta(a_1, j_1, ..., j_n, b_1, ..., b_l) = \frac{\mu_\beta(b_1, ..., b_l)}{2} +$$
$$\sum_{i=1}^{l-2} \frac{(-1+\Phi_\beta)^{n+i}\beta_{a_1}\beta_{b_i}}{2^{i+1}}\mu_\beta(b_{i+1}, ..., b_l) + \frac{(-1+\Phi_\beta)^{n+l-1}\beta_{a_1}\beta_{b_{l-1}}}{2^{l+1}} +$$
$$\frac{(-1+\Phi_\beta)^{n+l}\beta_{a_1}\beta_{b_l}}{2^{l+1}}.$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j_1,\dots,j_n}\mu(a_1,j_1,...,j_n,b_1,...,b_l)=\frac{\mu_\beta(b_1,...,b_l)}{2}+$$
$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{l-2}\frac{(-1+\Phi_\beta)^{n+i}\beta_{a_1}\beta_{b_i}}{2^{i+1}}\mu_\beta(b_{i+1},...,b_l)\right]+$$
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(-1+\Phi_\beta)^{n+l-1}\beta_{a_1}\beta_{b_{l-1}}}{2^{l+1}}+\frac{(-1+\Phi_\beta)^{n+l}\beta_{a_1}\beta_{b_l}}{2^{l+1}}\right].$$

Note que, para $\beta\in(0,\infty)$,

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{l-2}\frac{(-1+\Phi_\beta)^{n+i}\beta_{a_1}\beta_{b_i}}{2^{i+1}}\mu_\beta(b_{i+1},...,b_l)\right]=0$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(-1+\Phi_\beta)^{n+l-1}\beta_{a_1}\beta_{b_{l-1}}}{2^{l+1}}+\frac{(-1+\Phi_\beta)^{n+l}\beta_{a_1}\beta_{b_l}}{2^{l+1}}\right]=0.$$

Uma vez que pela observação 2.3.4, $|-1+\Phi_\beta|<1$. Como $\mu_\beta(a_1)=\frac{1}{2}$, temos que para $k=1$ vale a equação (2.4).

Para $k=2$ obtemos

$$\sum_{j_1,\dots,j_n}\mu_\beta(a_1,a_2,j_1,...,j_n,b_1,...,b_l)$$
$$=\sum_{j_1,\dots,j_n}\frac{\mu_\beta(a_2,j_1,...j_n,b_1,...,b_l)}{2}+(-1+\Phi_\beta)\frac{\beta_{a_1}\beta_{a_2}}{4}\mu_\beta(b_1,...,b_l)+$$
$$\sum_{i=1}^{l-2}\frac{(-1+\Phi_\beta)^{1+n+i}\beta_{a_1}\beta_{b_i}}{2^{i+2}}\mu_\beta(b_{i+1},...,b_l)+$$
$$\frac{(-1+\Phi_\beta)^{n+l}\beta_{a_1}\beta_{b_{l-1}}}{2^{l+2}}+\frac{(-1+\Phi_\beta)^{1+n+l}\beta_{a_1}\beta_{b_l}}{2^{l+2}}.$$

Analogamente ao caso $k = 1$ obtemos:

$$\sum_{j_1,...,j_n} \mu_\beta(a_1, a_2, j_1, ..., j_n, b_1, ..., b_l) = \frac{\mu_\beta(b_1, ..., b_l)}{4} +$$
$$\sum_{i=1}^{l-2} \frac{(-1+\Phi_\beta)^{n+i}\beta_{a_2}\beta_{b_i}}{2^{i+2}}\mu_\beta(b_{i+1}, ..., b_l) + \frac{(-1+\Phi_\beta)^{n+l-1}\beta_{a_2}\beta_{b_{l-1}}}{2^{l+2}} +$$
$$\frac{(-1+\Phi_\beta)^{n+l}\beta_{a_2}\beta_{b_l}}{2^{l+2}} + (-1+\Phi_\beta)\frac{\beta_{a_1}\beta_{a_2}}{4}\mu_\beta(b_1, ..., b_l) +$$
$$\sum_{i=1}^{l-2} \frac{(-1+\Phi_\beta)^{1+n+i}\beta_{a_1}\beta_{b_i}}{2^{i+2}}\mu_\beta(b_{i+1}, ..., b_l) +$$
$$\frac{(-1+\Phi_\beta)^{n+l}\beta_{a_1}\beta_{b_{l-1}}}{2^{l+2}} + \frac{(-1+\Phi_\beta)^{1+n+l}\beta_{a_1}\beta_{b_l}}{2^{l+2}}.$$

Vemos que os termos vão pra zero, procedendo de modo similar ao caso anterior. Usando o exemplo 2.3.3 novamente, obtemos:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j_1,...,j_n} \mu_\beta(a_1, a_2, j_1, ..., j_n, b_1, ..., b_l) = \mu_\beta(a_1, a_2)\mu_\beta(b_1, ..., b_l).$$

Agora, supomos que para k_0 fixo e quaisquer $a_1, ..., a_k$, $k \leq k_0$, a equação (2.4) vale. Queremos provar que para qualquer $a \in \{1, 2\}$, e quaisquer $a_1, ..., a_k \in \{1, 2\}^k$, $2 \leq k \leq k_0$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j_1,...,j_n} \mu_\beta(a, a_1, a_2, ..., a_k, j_1, ..., j_n, b_1, ..., b_l) = \mu_\beta(a, a_1, ..., a_k)\mu_\beta(b_1, ..., b_l).$$

Da proposição 2.4.3,

$$\sum_{j_1,...,j_n} \mu_\beta(a, a_1, a_2, ..., a_k, j_1, ..., j_n, b_1, ..., b_l)$$
$$= \sum_{j_1,...,j_n} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\beta_a}{\beta_{a_1}}(-1+\Phi_\beta)\right)\mu_\beta(a_1, ..., a_k, j_1, ..., j_l, b_1, ..., b_l)$$
$$+ \sum_{j_1,...,j_n} \frac{\beta_a}{2}(-1+\Phi_\beta)\left(\frac{-1}{2\beta_{a_1}} + \frac{\beta_{a_1}}{2}\right)\mu_\beta(a_2, ..., a_k, j_1, ..., j_l, b_1, ..., b_l).$$

Usando a hipótese de indução e a Proposição 2.4.3 novamente, nós obtemos

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \sum_{j_1,...,j_n} \mu_\beta(a, a_1, a_2, ..., a_k, j_1, ..., j_n, b_1, ..., b_l) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\beta_a}{\beta_{a_1}}(-1 + \Phi_\beta)\right)\mu_\beta(a_1, ..., a_k)\mu_\beta(b_1, ..., b_l) + \\
&\quad \sum_{j_1,...,j_n} \frac{\beta_a}{2}(-1 + \Phi_\beta)\left(\frac{-1}{2\beta_{a_1}} + \frac{\beta_{a_1}}{2}\right)\mu_\beta(a_2, ..., a_k)\mu_\beta(b_1, ..., b_l) \\
&= \left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\beta_a}{\beta_{a_1}}(-1 + \Phi_\beta)\right)\mu_\beta(a_1, ..., a_k) + \right. \\
&\quad \left. \sum_{j_1,...,j_n} \frac{\beta_a}{2}(-1 + \Phi_\beta)\left(\frac{-1}{2\beta_{a_1}} + \frac{\beta_{a_1}}{2}\right)\mu_\beta(a_2, ..., a_k)\right]\mu_\beta(b_1, ..., b_l) \\
&= \mu_\beta(a, a_1, ..., a_k)\mu_\beta(b_1, ..., b_l).
\end{aligned}
$$

Isso mostra que a afirmação vale para todos os cilindros como nós queríamos. $\square$

2.6 Grandes Desvios para a medida μ_β

Nesta seção vamos propomos um princípio dos grandes desvios para μ_β. Inicialmente vamos definir precisamente o que isto significa.

Definição 2.6.1. *Sejam $x = (x_1, x_2, \cdots) \in \Omega = \{1,2\}^{\mathbb{N}}$ e $A : \Omega \to \mathbb{R}$, definimos a n-ésima soma de Birkhoff para A e x como*

$$S_n(A,x) := \sum_{j=0}^{n-1} A(\sigma^j(x)) = A(x) + A(\sigma(x)) + \cdots + A(\sigma^{n-1}(x)).$$

Definição 2.6.2 (Princípio dos Grandes Desvios)**.** *Dizemos que existe um* princípio dos grandes desvios *para a probabilidade μ_β sobre Ω e para a função $A : \Omega \to \mathbb{R}$, se existir uma função semicontínua inferiormente $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo que:*

a) para todo $K \subset \mathbb{R}$ fechado, temos

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(\mu_\beta\left\{x \ tal\ que\ \frac{1}{n}S_n(A,x) \in K\right\}\right) \leq -\inf_{s\in K} I(s).$$

b) para todo $B \subset \mathbb{R}$ aberto, temos

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(\mu_\beta\left\{x \ tal\ que\ \frac{1}{n}S_n(A,x) \in B\right\}\right) \geq -\inf_{s\in B} I(s).$$

I é denominada função de desvio.

O item a) pode ser provado com bastante generalidade através da Desigualdade de Chebyshev (veja [10] ou a Seção 5 em [18]).

Nos concentraremos em provar o item b). Uma vez que isso for feito, podermos enunciar o seguinte Teorema.

Teorema 2.6.3. *Suponha que H e L satisfazem a Hipótese A e tome μ_β a probabilidade definida pelo Corolário 2.3.7. No caso em que $A : \Omega \to \mathbb{R}$ satisfaz que $A(x_1, x_2, ...) = A(x_1)$ (isto é, depende apenas da primeira coordenada em Ω), então existe um princípio dos grandes desvios para μ_β e A.*

Antes de mostrar este Teorema, vamos a algumas definições importantes.

Definição 2.6.4. *Seja $A : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função. Definimos, para $t \in \mathbb{R}$,*

$$Q_n(t) := \int e^{t\, S_n(A,x)} d\mu_\beta(x).$$

Note que caso A dependa apenas da primeira coordenada, com $A(x_0, x_1, \cdots) = A(x_0)$, podemos escrever

$$Q_n(t) = \sum_{x_0} \sum_{x_1} ... \sum_{x_n} e^{t\,(A(x_0)+A(x_1)+...+A(x_n))}\, \mu_\beta(x_0, x_1, ...x_n).$$

Agora podemos definir a ferramenta que irá nos ajudar a provar o Teorema 2.6.3. Seja

$$c(t) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ \log \int e^{t\, S_n(A,z)} d\mu_\beta(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ \log Q_n(t),$$

para cada $t \in \mathbb{R}$.

A função $c(t)$ é chamada de energia livre no ponto t para a probabilidade μ_β e o observável clássico A (veja [10]). Um resultado clássico é que se c é diferenciável então vale um Princípio dos Grandes Desvios para μ_β e A (veja [18] para mais detalhes). Neste caso, a função de desvio I é a transformada de Legendre de $c(t)$ (veja [10] ou [18]).

Vamos exibir uma expressão explícita para $c(t)$ que é claramente uma função diferenciável. Antes disso, definimos

$$\delta(t) = \sum_j e^{t\ A(j)} \ \text{ e } \ \alpha(t) = \sum_j \beta_j\, e^{t\ A(j)}.$$

Observação 2.6.5. *Note que $|\alpha(t)| < |\delta(t)|$, uma vez que $|\beta_j| \leq 1$ e $\beta_1 = -\beta_2$. Além disso, note que $\delta(t) > 0$.*

Finalmente enunciamos a proposição.

Proposição 2.6.6. *Se $A : \{1,2\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ depende apenas da primeira coordenada de x, então para qualquer $t \in \mathbb{R}$,*

$$c(t) = \log\left(\frac{\Phi_\beta \delta(t) + \sqrt{\Phi_\beta^2 \delta(t)^2 + 4(-1+\Phi_\beta)(\alpha(t)^2 - \delta(t)^2)}}{4}\right).$$

Antes de prová-la, precisaremos de alguns resultados. Primeiramente vamos calcular um exemplo.

Exemplo 2.6.7. *Vamos computar $Q_3(t)$. Usando o Teorema 2.4.1, temos*

$$\begin{aligned}\mu_\beta(j_0,j_1,j_2,j_3) =& \frac{\mu_\beta(j_1,j_2,j_3)}{2} + \frac{(-1+\Phi_\beta)\beta_{j_0}\beta_{j_1}}{4}\mu_\beta(j_2,j_3) + \\ & \frac{(-1+\Phi_\beta)^2\beta_{j_0}\beta_{j_2}}{16} + \frac{(-1+\Phi_\beta)^3\beta_{j_0}\beta_{j_3}}{16},\end{aligned}$$

daí, obtemos

$$\begin{aligned}Q_3(t) &= \sum_{j_0}\sum_{j_1}\sum_{j_2}\sum_{j_3} e^{t\,(A(j_0)+A(j_1)+A(j_2)+A(j_3))}\,\mu_\beta(j_0,j_1,j_2,j_3)\\
&= \left[\frac{1}{2}\sum_{j_0} e^{t\,A(j_0)}\right]\sum_{j_1}\sum_{j_2}\sum_{j_3} e^{t\,(A(j_1)+A(j_2)+A(j_3))}\,\mu_\beta(j_1,j_2,j_3)\\
&+ \frac{(-1+\Phi_\beta)}{4}\left[\sum_{j_0} e^{t\,A(j_0)}\beta_{j_0}\right]\left[\sum_{j_1} e^{t\,A(j_1)}\beta_{j_1}\right]\sum_{j_2,j_3} e^{t\,(A(j_2)+A(j_3))}\mu_\beta(j_2,j_3)\\
&+ \frac{(-1+\Phi_\beta)^2}{16}\sum_{j_0}\sum_{j_1}\sum_{j_2}\sum_{j_3} e^{t\,(A(j_0)+A(j_1)+A(j_2))+A(j_3)}\beta_{j_0}\beta_{j_2}\\
&+ \frac{(-1+\Phi_\beta)^3}{16}\sum_{j_0}\sum_{j_1}\sum_{j_2}\sum_{j_3} e^{t\,(A(j_0)+A(j_1)+A(j_2))+A(j_3))}\beta_{j_0}\beta_{j_3}\\
&= \frac{1}{2}\delta(t)Q_2(t) + \frac{(-1+\Phi_\beta)}{4}\alpha(t)^2Q_1(t) + \frac{\Phi_\beta(-1+\Phi_\beta)^2}{16}\alpha^2(t)\delta^2(t).\end{aligned}$$

No caso geral, podemos notar que vale o seguinte Teorema.

Teorema 2.6.8. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $t \in \mathbb{R}$, vale que*

$$Q_n(t) = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2}\delta(t)\, Q_{n-1}(t) + \frac{(-1+\Phi_\beta)}{4}\alpha(t)^2\, Q_{n-2}(t) + \frac{(-1+\Phi_\beta)^2}{8}\delta(t)\,\alpha(t)^2\, Q_{n-3}(t) \\ +\frac{(-1+\Phi_\beta)^3}{16}\delta(t)^2\,\alpha(t)^2\; Q_{n-4}(t) + \frac{(-1+\Phi_\beta)^4}{32}\delta(t)^3\,\alpha(t)^2\; Q_{n-5}(t) + ...+ \\ +\frac{(-1+\Phi_\beta)^{n-3}}{2^{n-2}}\;\delta(t)^{n-4}\,\alpha(t)^2\; Q_2(t) + \frac{(-1+\Phi_\beta)^{n-2}}{2^{n-1}}\;\delta(t)^{n-3}\,\alpha(t)^2\; Q_1(t) \\ +\frac{\Phi_\beta(-1+\Phi_\beta)^{n-1}}{2^{n+1}}\alpha^2(t)\delta^{n-2}(t). \end{array} \right]. \tag{2.5}$$

Demonstração. Por definição

$$Q_n(t) = \sum_{j_0}\sum_{j_1} ... \sum_{j_n} e^{t\,(A(j_0)+A(j_1)+...+A(j_n))}\,\mu_\beta(j_0, j_1, ...j_n).$$

do Teorema 2.4.1

$$\mu_\beta(j_0, j_1, j_2, ..., j_n) \;=\; \frac{\mu_\beta(j_1, j_2, ..., j_n)}{2} + \frac{(-1+\Phi_\beta)\beta_{j_0}\,\beta_{j_1}}{2^2}\,\mu_\beta(j_2, ..., j_n) +$$
$$\frac{(-1+\Phi_\beta)^2\beta_{j_0}\beta_{j_2}}{2^3}\mu_\beta(j_3, j_4, ..., j_n) + \frac{(-1+\Phi_\beta)^3\beta_{j_0}\beta_{j_3}}{2^4}\mu_\beta(j_4, j_5, ..., j_n) + ...+$$
$$\frac{(-1+\Phi_\beta)^{n-2}\beta_{j_0}\beta_{j_{n-2}}}{2^{n-1}}\mu_\beta(j_{n-1}, j_n) + \frac{(-1+\Phi_\beta)^{n-1}\beta_{j_0}\beta_{j_{n-1}}}{2^{n+1}} + \frac{(-1+\Phi_\beta)^{n}\beta_{j_0}\beta_{j_n}}{2^{n+1}}.$$

Assim, obtemos

$$Q_n(t) = \frac{1}{2}\sum_{j_0} e^{t\,A(j_0)} \sum_{j_1,...,j_n} e^{t\,(A(j_1)+...+A(j_n))}\,\mu_\beta(j_1, ...j_n) +$$

$$+\frac{(-1+\Phi_\beta)}{2^2}\sum_{j_0} e^{t\,A(j_0)}\beta_{j_0}\sum_{j_1} e^{tA(j_1)}\beta_{j_1}\sum_{j_2,...,j_n} e^{t\,(A(j_2)+...+A(j_n))}\,\mu_\beta(j_2, ...j_n)$$

$$+\frac{(-1+\Phi_\beta)^2}{2^3}\sum_{j_0} e^{tA(j_0)}\beta_{j_0}\sum_{j_1} e^{tA(j_1)}\sum_{j_2} e^{tA(j_2)}\beta_{j_2}\sum_{j_3,...,j_n} e^{t\,(A(j_3)+...+A(j_n))}\,\mu_\beta(j_3, ...j_n)$$

$$... + \frac{(-1+\Phi_\beta)^n}{2^{n+1}}\sum_{j_0} e^{tA(j_0)}\beta_{j_0}\sum_{j_n} e^{tA(j_n)}\beta_{j_n}\sum_{j_2} e^{tA(j_2)} ... \sum_{j_{n-1}} e^{tA(j_{n-1})}$$

(usando a definição de $\alpha(t)$ e $\delta(t)$)

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\delta(t)\, Q_{n-1}(t) + \frac{(-1+\Phi_\beta)}{4}\alpha(t)^2\, Q_{n-2}(t) + \frac{(-1+\Phi_\beta)^2}{8}\delta(t)\,\alpha(t)^2\, Q_{n-3}(t) + \\
&\quad \frac{(-1+\Phi_\beta)^3}{16}\delta(t)^2\,\alpha(t)^2\; Q_{n-4}(t) + \frac{(-1+\Phi_\beta)^4}{32}\delta(t)^3\,\alpha(t)^2\; Q_{n-5}(t) + ...+ \\
&\quad \frac{(-1+\Phi_\beta)^{n-3}}{2^{n-2}}\,\delta(t)^{n-4}\,\alpha(t)^2\; Q_2(t) + \frac{(-1+\Phi_\beta)^{n-2}}{2^{n-1}}\,\delta(t)^{n-3}\,\alpha(t)^2\; Q_1(t) + \\
&\quad \frac{(-1+\Phi_\beta)^{n-1}}{2^{n+1}}\alpha(t)^2\delta(t)^{n-2} + \frac{(-1+\Phi_\beta)^{n}}{2^{n+1}}\alpha(t)^2\delta(t)^{n-2} \\
&= \frac{1}{2}\delta(t)\, Q_{n-1}(t) + \frac{(-1+\Phi_\beta)}{4}\alpha(t)^2\, Q_{n-2}(t) + \frac{(-1+\Phi_\beta)^2}{8}\delta(t)\,\alpha(t)^2\, Q_{n-3}(t) + \\
&\quad \frac{(-1+\Phi_\beta)^3}{16}\delta(t)^2\,\alpha(t)^2\; Q_{n-4}(t) + \frac{(-1+\Phi_\beta)^4}{32}\delta(t)^3\,\alpha(t)^2\; Q_{n-5}(t) + ...+ \\
&\quad \frac{(-1+\Phi_\beta)^{n-3}}{2^{n-2}}\,\delta(t)^{n-4}\,\alpha(t)^2\; Q_2(t) + \frac{(-1+\Phi_\beta)^{n-2}}{2^{n-1}}\,\delta(t)^{n-3}\,\alpha(t)^2\; Q_1(t) + \\
&\quad \frac{\Phi_\beta(-1+\Phi_\beta)^{n-1}}{2^{n+1}}\alpha^2(t)\delta^{n-2}(t).
\end{aligned}
$$

□

Proposição 2.6.9.

$$Q_{n+2}(t) = (-1+\Phi_\beta)\frac{\alpha(t)^2 - \delta(t)^2}{4}\, Q_n(t) + \frac{\Phi_\beta}{2}\delta(t)\, Q_{n+1}(t).$$

Demonstração. Pela proposição anterior, temos

$$
\begin{aligned}
Q_n(t) =& \frac{1}{2}\delta(t)\, Q_{n-1}(t) + \frac{(-1+\Phi_\beta)}{4}\alpha(t)^2\, Q_{n-2}(t) + \frac{(-1+\Phi_\beta)^2}{8}\delta(t)\,\alpha(t)^2\, Q_{n-3}(t) + \\
& \frac{(-1+\Phi_\beta)^3}{16}\delta(t)^2\,\alpha(t)^2\; Q_{n-4}(t) + \frac{(-1+\Phi_\beta)^4}{32}\delta(t)^3\,\alpha(t)^2\; Q_{n-5}(t) + ...+ \\
& \frac{(-1+\Phi_\beta)^{n-3}}{2^{n-2}}\,\delta(t)^{n-4}\,\alpha(t)^2\; Q_2(t) + \frac{(-1+\Phi_\beta)^{n-2}}{2^{n-1}}\,\delta(t)^{n-3}\,\alpha(t)^2\; Q_1(t) + \\
& \frac{\Phi_\beta(-1+\Phi_\beta)^{n-1}}{2^{n+1}}\alpha^2(t)\delta^{n-2}(t),
\end{aligned}
$$

usando novamente a proposição em $Q_{n-1}(t)$

$$
\begin{aligned}
Q_{n-1}(t) =& \frac{1}{2}\delta(t)\, Q_{n-2}(t) + \frac{(-1+\Phi_\beta)}{4}\alpha(t)^2\, Q_{n-3}(t) + \\
& \frac{(-1+\Phi_\beta)^2}{8}\delta(t)\,\alpha(t)^2\, Q_{n-4}(t) + \frac{(-1+\Phi_\beta)^3}{16}\delta(t)^2\,\alpha(t)^2\; Q_{n-5}(t) + \\
& \frac{(-1+\Phi_\beta)^4}{32}\delta(t)^3\,\alpha(t)^2\; Q_{n-6}(t) + \ldots + \frac{(-1+\Phi_\beta)^{n-4}}{2^{n-3}}\,\delta(t)^{n-5}\,\alpha(t)^2\; Q_2(t) + \\
& \frac{(-1+\Phi_\beta)^{n-3}}{2^{n-2}}\,\delta(t)^{n-4}\,\alpha(t)^2\; Q_1(t) + \frac{\Phi_\beta(-1+\Phi_\beta)^{n-2}}{2^n}\alpha^2(t)\delta^{n-3}(t).
\end{aligned}
$$

então

$$
\begin{aligned}
Q_n(t) - \frac{(-1+\Phi_\beta)}{2}\delta(t)Q_{n-1}(t) = & \frac{1}{2}\delta(t)\, Q_{n-1}(t) + \\
& \frac{(-1+\Phi_\beta)}{4}\alpha(t)^2\, Q_{n-2}(t) - \frac{(-1+\Phi_\beta)}{4}\delta(t)^2\, Q_{n-2}(t),
\end{aligned}
$$

e portanto,

$$
Q_n(t) = (-1+\Phi_\beta)\frac{\alpha(t)^2 - \delta(t)^2}{4}\, Q_{n-2}(t) + \frac{\Phi_\beta}{2}\delta(t)\, Q_{n-1}(t).
$$

□

A Proposição 2.6.9 é possivelmente a maior diferença em relação ao trabalho original. No caso de temperatura zero, o que seria equivalente a $\beta \to \infty$, os $\Phi_\beta \to 0$. E portanto teríamos

$$
Q_{n+2}(t) = \frac{\delta(t)^2 - \alpha(t)^2}{4}\, Q_n(t),
$$

que é um pouco mais fácil de resolver. No nosso caso, onde $\Phi_\beta > 0$, temos que olhar para uma equação de recorrência. Note que $(-1+\Phi_\beta)\frac{\alpha(t)^2-\delta(t)^2}{4}$ e $\frac{\Phi_\beta}{2}\delta(t)$ não dependem de n e constantes se fixado t e β. Assim, para cada t temos uma relação de recorrência de segunda ordem que vamos resolver usando o seguinte resultado apresentado por Scheinerman em [4].

Teorema 2.6.10. *Sejam s_1, s_2 números e que r_1, r_2 são raízes da equação $x^2 - s_1 x - s_2 = 0$. Se $r_1 \neq r_2$, então, toda a solução da recorrência*

$$
a_n = s_1 a_{n-1} + s_2 a_{n-2}
$$

é da forma

$$a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$$

com c_1, c_2 *constantes.*

Vejamos que a relação de recorrência definida pela Proposição 2.6.9 satisfaz as hipóteses desse teorema. As raízes de $x^2 - \frac{\Phi_\beta}{2}\delta(t)x - (-1+\Phi_\beta)\frac{\alpha(t)^2-\delta(t)^2}{4}$ são

$$\begin{aligned} r_1 = r_1(t) &= \frac{\frac{\Phi_\beta}{2}\delta(t) + \sqrt{\frac{\Phi_\beta^2}{4}\delta(t)^2 + 4(-1+\Phi_\beta)\frac{\alpha(t)^2-\delta(t)^2}{4}}}{2} \\ &= \frac{\Phi_\beta\delta(t) + \sqrt{\Phi_\beta^2\delta(t)^2 + 4(-1+\Phi_\beta)(\alpha(t)^2-\delta(t)^2)}}{4} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} r_2 = r_2(t) &= \frac{\frac{\Phi_\beta}{2}\delta(t) - \sqrt{\frac{\Phi_\beta^2}{4}\delta(t)^2 + 4(-1+\Phi_\beta)\frac{\alpha(t)^2-\delta(t)^2}{4}}}{2} \\ &= \frac{\Phi_\beta\delta(t) - \sqrt{\Phi_\beta^2\delta(t)^2 + 4(-1+\Phi_\beta)(\alpha(t)^2-\delta(t)^2)}}{4}. \end{aligned}$$

Pela observação 2.6.5 decorre que $\Phi_\beta\delta(t) > 0$ e além disso $4(-1+\Phi_\beta)(\alpha(t)^2 - \delta(t)^2) > 0$, uma vez que $\Phi_\beta \in (0,1)$. Com isso, $r_1 \neq r_2$. Além disso, $r_1 > -r_2 > 0$. Pois,

$$\sqrt{\Phi_\beta^2\delta(t)^2 + 4(-1+\Phi_\beta)(\alpha(t)^2-\delta(t)^2)} > \sqrt{\Phi_\beta^2\delta(t)^2} = \Phi_\beta\delta(t) > 0.$$

Com isso obtemos que

$$Q_n(t) = c_1(t)r_1(t)^n + c_2(t)r_2(t)^n.$$

Observação 2.6.11. *Note que* $Q_0(t) = \sum_{j_0} e^{tA(x_0)}\mu_\beta(j_0) = \frac{1}{2}\delta(t)$. *Além disso, podemos calcular* $Q_1(t)$ *usando o Exemplo 2.3.3.*

$$Q_1(t) = \sum_{j_0}\sum_{j_1} e^{t(A(x_0)+A(x_1))}\mu_\beta(j_0,j_1) = \frac{1}{4}\delta(t)^2 + \frac{(-1+\Phi_\beta)}{4}\alpha(t)^2.$$

Logo basta resolver o sistema

$$\begin{cases} c_1(t) + c_2(t) = \frac{1}{2}\delta(t) \\ c_1(t)r_1 + c_2(t)r_2 = Q_1(t) \end{cases}.$$

Cuja solução é

$$c_1(t) = \frac{-\delta(t)r_2(t) + 2Q_1(t)}{2(r_1 - r_2)}$$

e

$$c_2(t) = \frac{\delta(t)r_1(t) - 2Q_1(t)}{2(r_1 - r_2)}.$$

Com $c_1(t) > 0$ já que $Q_1(t) > 0$, $\delta(t) > 0$, $-r_2 > 0$ e $r_1 > r_2$. Assim, provamos a seguinte proposição.

Proposição 2.6.12. *Para todo $n \geq 0$ vale que*

$$Q_n(t) = \left(\frac{\delta(t)r_1(t) - 2Q_1(t)}{-\delta(t)r_2(t) + 2Q_1(t)} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n + 1 \right) \left(\frac{-\delta(t)r_2(t) + 2Q_1(t)}{2(r_1 - r_2)} \right) r_1^n.$$

Agora podemos provar a Proposição 2.6.6.

Demonstração da Proposição 2.6.6.

$$\log Q_n(t) = \log \left(\frac{\delta(t)r_1(t) - 2Q_1(t)}{-\delta(t)r_2(t) + 2Q_1(t)} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n + 1 \right) \left(\frac{-\delta(t)r_2(t) + 2Q_1(t)}{2(r_1 - r_2)} \right) r_1^n$$

$$= \log \left(\frac{\delta(t)r_1(t) - 2Q_1(t)}{-\delta(t)r_2(t) + 2Q_1(t)} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n + 1 \right) + \log \left(\frac{-\delta(t)r_2(t) + 2Q_1(t)}{2(r_1 - r_2)} \right) + \log r_1^n.$$

O primeiro termo é limitado, o segundo é o logaritmo de uma constante (para t fixo). Então

$$\begin{aligned} c(t) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log Q_n(t) = \log r_1(t) \\ &= \log \left(\frac{\Phi_\beta \delta(t) + \sqrt{\Phi_\beta^2 \delta(t)^2 + 4(-1 + \Phi_\beta)(\alpha(t)^2 - \delta(t)^2)}}{4} \right). \end{aligned}$$

$\square$

Como c é diferenciável pelo Teorema [40 da referência [18]], vale o Teorema 2.6.3.

2.7 Uma expressão em fração contínua para o Jacobiano

Continuamos supondo que H e L satisfazem a Hipótese A. Vamos explorar algumas propriedades sobre o Jacobiano da medida μ_β.

Denotamos

$$a(k_0, k_1) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\beta_{k_0}}{\beta_{k_1}}(-1 + \Phi_\beta)\right)$$

e

$$b(k_0, k_1) = \frac{\beta_{k_0}}{4}(-1 + \Phi_\beta)\left(\frac{-1}{\beta_{k_1}} + \beta_{k_1}\right),$$

onde $k_0, k_1 \in \{1, 2\}$, $\beta_1 = \sin(2\theta)$ e $\beta_2 = -\beta_1$ para $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ e $\theta \neq \frac{\pi}{4}$. Os

valores possíveis de $a(k_0, k_1)$ e $b(k_0, k_1)$ são:
a) Se $k_0 = k_1$, então

$$0 < a(k_0, k_1) = \frac{\Phi_\beta}{2} < \frac{1}{2}$$

e

$$0 < b(k_0, k_1) = \frac{\beta_{k_0}}{4}(-1 + \Phi_\beta)\left(\frac{-1}{\beta_{k_1}} + \beta_{k_1}\right) =$$

$$\frac{1}{4}(-1 + \Phi_\beta)(-1 + \beta_{k_1}^2) = \frac{1}{4}(1 - \Phi_\beta)(1 - \beta_{k_1}^2) < \frac{1}{4}.$$

b) Se $k_0 \neq k_1$, então

$$0 < a(k_0, k_1) = 1 - \frac{\Phi_\beta}{2} < 1$$

e

$$-\frac{1}{4} < b(k_0, k_1) = \frac{\beta_{k_0}}{4}(-1+\Phi_\beta)\left(\frac{-1}{\beta_{k_1}} + \beta_{k_1}\right)$$
$$= -\frac{1}{4}(-1+\Phi_\beta)(-1+\beta_{k_1}^2) = -\frac{1}{4}(1-\Phi_\beta)(1-\beta_{k_1}^2) < 0.$$

Da Proposição 2.4.3 obtemos que

$$\mu_\beta(k_0, k_1, ..., k_n) = a(k_0, k_1)\mu_\beta(k_1, ..., k_n) + b(k_0, k_1)\mu_\beta(k_2, ..., k_n).$$

Proposição 2.7.1. *Suponha $\theta \neq \frac{\pi}{4}$. Então μ_β é positiva em cilindros.*

Demonstração. Para cilindros de tamanho 1, 2 e 3 a prova é por exame direto (veja o exemplo 2.3.3). Suponha agora que μ_β seja positiva para qualquer cilindro de tamanho menor ou igual a n. Como a medida é σ-invariante, temos

$$\mu_\beta(x_0, x_1, ..., x_n) = \mu_\beta(1, x_0, ..., x_n) + \mu_\beta(2, x_0, ..., x_n) \geq \mu_\beta(x_0, x_0, x_1, ..., x_n)$$
$$= a(x_0, x_0)\mu_\beta(x_0, ..., x_n) + b(x_0, x_0)\mu_\beta(x_1, ..., x_n) > 0.$$

Assim o resultado segue por indução. □

Vamos obter também um corolário sobre o Jacobiano J da medida μ_β. Defina para $x = (x_0, x_1, ...) \in \Omega$,

$$J^n(x) := \frac{\mu_\beta(x_0, ..., x_n)}{\mu_\beta(x_1, ..., x_n)}.$$

Agora definimos

$$J_{\mu_\beta}(x) = J(x) := \lim_{n\to\infty} J^n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_\beta(x_0, ..., x_n)}{\mu_\beta(x_1, ..., x_n)},$$

quando o limite existe. É conhecido que para qualquer medida invariante ν, o Jacobiano J_ν é bem definido em *quase toda a parte* x e pode ser visto como a derivada de Radon-Nikodym de ν sobre os ramos inversos de σ (veja [26],

[20], [18] ou [27]). Além disso, a entropia $h(\mu_\beta) = -\int \log J_{\mu_\beta} d\mu_\beta$.

Da Proposição 2.4.3, segue que

$$\frac{\mu_\beta(k_0, k_1, ..., k_n)}{\mu_\beta(k_1, ..., k_n)} = a(k_0, k_1) \,+\, b(k_0, k_1)\frac{\mu_\beta(k_2, ..., k_n)}{\mu_\beta(k_1, ..., k_n)}. \tag{2.6}$$

Com isso temos o seguinte resultado.

Corolário 2.7.2. *Para todo $n \geq 1$, com $k_0, \ldots, k_n \in \{1, 2\}$, temos*

$$J^n(x_0, x_1, ...) = a(x_0, x_1) \,+\, b(x_0, x_1)\frac{1}{J^{n-1}(x_1, x_2, ...)}.$$

Além disso, tomando o limite $n \to \infty$ em (2.6), obtemos

$$J(k_0, k_1, ...) = a(k_0, k_1) \,+\, b(k_0, k_1)\frac{1}{J(k_1, k_2, ...)}.$$

Observação 2.7.3. *Note ainda que repetindo o argumento da prova da Proposição 2.7.1, temos*

$$J^n(x_0, x_1, ...) \geq b(x_0, x_0) > 0.$$

Além disso, note que $J^n(1, x_1, ...) + J^n(2, x_2, ...) = 1$. Assim, temos que

$$b(x_0, x_0) \leq J^n(x_0, x_1, ...) \leq 1 - b(x_0, x_0).$$

Finalmente, observe que $J(x) = \lim_{n\to\infty} J^n(x)$, se o limite existe. Portanto

$$\frac{1}{4}(1 - \Phi_\beta)(1 - \beta_{x_0}^2) \leq J(x) \leq 1 - \frac{1}{4}(1 - \Phi_\beta)(1 - \beta_{x_0}^2).$$

Lema 2.7.4. *Para todo $n \geq 1$, com $k_0, \ldots, k_n \in \{1, 2\}$, temos*

$$J(k_0, k_1, ...) = \lim_n \frac{\mu_\beta(x_0, ..., x_n)}{\mu_\beta(x_1, ..., x_n)}$$

$$= \lim_n \left[a(k_0, k_1) \,+\, b(k_0, k_1)\cfrac{1}{a(k_1, k_2) \,+\, b(k_1, k_2)\cfrac{1}{...a(k_{n-1}, k_n) + b(k_{n-1}, k_n)\frac{1}{1/2}}} \right]$$

Demonstração. Do Corolário 2.7.2 segue que

$$J^n(x_0, x_1, ...) = a(x_0, x_1) \; + \; b(x_0, x_1)\frac{1}{J^{n-1}(x_1, x_2, ...)}.$$

Note que da Proposição 2.4.3,

$$J^1(x_{n-1}, x_n, ...) = a(x_{n-1}, x_n) + b(x_{n-1}, x_n)\frac{1}{1/2}.$$

Agora lembre que $J(x) = \lim_{n\to\infty} J^n(x)$ e assim fica provado o Lema.

□

2.8 Um caso mais simples

Vamos abordar nesta seção o caso em que $\theta = \frac{\pi}{4}$ no observável. Neste caso $\beta_1 = -\beta_2 = \sin(2\theta) = 1$. Neste caso, temos que $b(k_0, k_1) = 0$, pois

$$b(k_0, k_1) = \frac{(-1 + \Phi_\beta)}{4}\left(\frac{-\beta_{k_0}}{\beta_{k_1}} + \beta_{k_0}\beta_{k_1}\right) = 0.$$

Vimos ainda na Seção 2.7 que a Proposição 2.4.3 equivale a

$$\mu_\beta(k_0, k_1, ..., k_n) = a(k_0, k_1)\mu_\beta(k_1, ..., k_n) + b(k_0, k_1)\mu_\beta(k_2, ..., k_n).$$

Portanto, no caso em que $\theta = \frac{\pi}{4}$, temos

$$\mu_\beta(k_0, k_1, ..., k_n) = a(k_0, k_1)\mu_\beta(k_1, ..., k_n).$$

Além disso, o Exemplo 2.3.3 nos diz que

$$\mu_\beta(k_0, k_1) = \frac{1}{2^2}[1 \; - \; \beta_{k_0}\beta_{k_1}] + \frac{1}{2^2}\Phi_\beta\beta_{k_0}\beta_{k_1}.$$

Assim, $\mu_\beta(1, 1) = \mu_\beta(2, 2) = \frac{\Phi_\beta}{4} > 0$ e $\mu_\beta(1, 2) = \mu_\beta(2, 1) = \frac{1}{2} - \frac{\Phi_\beta}{4} > 0$. Além disso, $a(k_0, k_1) > 0$ para quaisquer $k_0, k_1 \in \{1, 2\}$ e portanto μ_β é positiva em cilindros.

Mais do que isso,

$$\mu_\beta(k_0,...,k_n) = \frac{1}{2}a(k_0,k_1)a(k_1,k_2)\cdots a(k_{n-1},k_n).$$

De fato, pois vale para $n = 1$ e supondo $\mu_\beta(k_1,...,k_n) = \frac{1}{2}a(k_1,k_2)\cdots a(k_{n-1},k_n)$, é claro que $\mu_\beta(k_0,k_1,...,k_n) = a(k_0,k_1)\mu_\beta(k_1,...,k_n) = \frac{1}{2}a(k_0,k_1)a(k_1,k_2)\cdots a(k_{n-1},k_n)$.

Além disso temos uma expressão para o Jacobiano, onde

$$J(k_0,k_1,k_2,...) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_\beta(x_0,...,x_n)}{\mu_\beta(x_1,...,x_n)} = a(k_0,k_1).$$

Ou seja, neste caso o Jacobiano depende apenas das duas primeiras coordenadas.

Referências Bibliográficas

[1] O. Bratteli and D. Robinson, Operator algebras and quantum statistical mechanics, vols. 1 e 2. Second edition. Springer-Verlag, 1997.

[2] C. F. Lardizabal, Cadeias de Markov Clássicas e Quânticas, Dissertação de Mestrado, UFRGS (2006)

[3] A. Lopes, J. Mengue, J. Mohr, C. Moreira. Large Deviations for Quantum Spin probabilities at temperature zero

[4] E. Scheinerman, Mathematics: a Discrete Introduction. Terceira Edição. Boston: Cengage Learning 175-178(2013)

[5] Durrett, R. Probability: Theory and Examples. Quarta Edição. Cambridge University Press(2010)

[6] K. Oliveira e M. Viana, Fundamentos da Teoria Ergódica. Primeira Edição. SBM (2014)

[7] H. Araki, Gibbs states of a one dimensional quantum lattice, Comm. Math. Phys, 14, pp 120-157 (1969)

[8] T. Benoist, V. Jaksic, Y. Pautrat and C-A. Pillet, On entropy production of repeated quantum measurements I. General theory, Arxiv (2015)

[9] J. Conway, Functions of one Complex Variable, Springer Verlag, (1978).

[10] R. Ellis. Entropy, Large Deviations, and Statistical Mechanics. Springer Verlag. (2005)

[11] D. Evans, Quantum Symmetries on Operator Algebras, Oxford Press (1998)

[12] G, DellAntonio Lectures on the Mathematics of Quantum Mechanics I, Atlantis Press (2015)

[13] S. Gustafson and I. Sigal, Mathematical concepts of Quantum Mechanics, Springer Verlag (2000)

[14] F. Hiai, Fumio, M. Mosonyi and T. Ogawa, Large deviations and Chernoff bound for certain correlated states on a spin chain. J. Math. Phys. 48 (2007), no. 12, 123301, 19 pp.

[15] J. L. Lebowitz, M. Lenci and H. Spohn, Large deviations for ideal quantum systems, J. Math. Phys. 41: 1224–1243 (2000)

[16] A. O. Lopes, Introdução à Matemática da Mecânica Quântica - Notas de aula (2017)

http://mat.ufrgs.br/∼alopes/hom/livroquantum.pdf

[17] A. O. Lopes, Entropy, Pressure and Large Deviation. In: Goles E., Martínez S. (eds) Cellular Automata, Dynamical Systems and Neural Networks. Mathematics and Its Applications, vol 282. Springer, Dordrecht (1994)

[18] A. O. Lopes, Thermodynamic Formalism, Maximizing Probabilities and Large Deviations. manuscript (2017)

http://mat.ufrgs.br/∼alopes/hom/notesformtherm.pdf

[19] M. Lenci and L. Rey-Bellet, Large deviations in quantum lattice systems: one-phase region. J. Stat. Phys. 119 (2005), no. 3–4, 715-746.

[20] R. Mañé, Ergodic Theory and Differentiable Dynamics, Springer Verlag (2011)

[21] J. Parkinson and D. Farnell, An introduction to quantum spin systems, Springer Verlag (2010)

[22] G. Pedersen, C*-algebras and their automorphism groups, Academis Press, 1979

[23] D. Petz, Quantum Information Theory and Quantum Statistics, Springer Verlag (2008)

[24] M. Ohya and D. Petz, Quantum entropy and its use, Springer-Verlag, Berlin. 1993.

[25] Y. Ogata, Large deviations in quantum spin chains. Comm. Math. Phys. 296 (2010), no. 1, 35?68.

[26] W. Parry and M. Pollicott. Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics. *Asterisque*, 187–188, (1990).

[27] M. Pollicott and M. Yuri, Dynamical Systems and Ergodic Theory, Academic Press (1998)

[28] W. de Roeck, C. Maes, K. Netockny and M. Schitz, Locality and nonlocality of classical restrictions of quantum spin systems with applications to quantum large deviations and entanglement, Journal of Mathematical Physics 56, 023301 (2015)

[29] H. Wall, Analytic Theory of continued fractions, Chelsea Publishig (1967)

[30] T. Tao, An introduction to measure theory. Los Angeles: UCLA.