Teste de Propriedade: testando k-coloração em grafos

Yuri Wladimir Pitthan
Orientador: Carlos Hoppen
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Introdução

Um problema de decisão é um problema cuja resposta é sim ou não. Deseja-se estudar problemas de decisão em grafos, por exemplo, dado um grafo arbitrário G e um inteiro k é possível colorir G com até k cores? De forma mais geral, dada uma propriedade $\mathcal{P}$ e um grafo G o objetivo é determinar se o grafo G satisfaz $\mathcal{P}$ ou não. A fim de responder a essa questão, em geral, um algoritmo realiza a computação sobre toda a instância de entrada, neste caso o grafo, e decide de forma exata entre sim ou não.

Naturalmente, em função do tamanho da instância dada, pode ser inviável, do ponto de vista do custo, ou até mesmo impossível usar um algoritmo exato. Desta forma, uma abordagem alternativa, são os algoritmos testadores, pois usam apenas uma porção da entrada.

Definição 1. *Uma propriedade $\mathcal{P}$ é dita testável se, dado G e $\epsilon > 0$, existe um algoritmo testador satisfazendo:*

- *Se $G \in \mathcal{P}$ o algoritmo aceita com probabilidade de pelo menos 2/3.*
- *Se $dist(G, \mathcal{P}) \geq \epsilon$ o algoritmo rejeita com probabilidade de pelo menos 2/3.*
- *O algoritmo realiza $f(\epsilon)$ consultas nas arestas de G.*

Surpreendentemente diversas propriedades em grafos são testáveis, tais como, ρ-corte, ρ-clique, bipartição e k-coloração. Apesar de haver um erro associado a decisão, pelo fato de decidir se $G \in \mathcal{P}$ tomando apenas uma parte de G, os algoritmos testadores fornecem uma resposta com alta precisão. Dado um parâmetro de distância o algoritmo testador gera a partição:

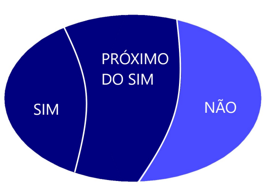

Figura 1 Partição: Sim, Próximo do Sim e Não

Coloração

Definição 2. *Uma coloração (dos vértices) de um grafo $G = (V, E)$ com conjunto de cores S é uma função $c : V \to S$ tal que $c(v) \neq c(w)$ sempre que v e w são adjacentes. Uma k-coloração de G é uma coloração onde $|S| = k$.*

Testando k-coloração

Quando a propriedade a ser testada é a k-coloração, define-se a noção de distância da seguinte maneira:

Definição 3. *Dados um inteiro k e um $\epsilon > 0$ um grafo G com n vértices é ϵ-distante de ser k colorível, se após remover qualquer conjunto com menos de ϵn^2 arestas o subgrafo resultante continua não admitindo uma k-coloração.*

Originalmente, os algoritmos para testar k-coloração e bipartição foram propostos por Goldreich (1998), posteriormente Alon (2002) refina consideravelmente o trabalho, melhorando as cotas, obtendo $\exp(\tilde{O}(k/\epsilon^2))$ para o tempo de excussão do algoritmo testador.

Testando uma Bipartição

Seja $G = (V, E)$ um grafo, uma consulta a um par de vértices determina se existe uma aresta entre eles ou não em G. O algoritmo para testar bipartições é dado por:

Algorithm 1 Testando Bipartições

procedure TESTADORBIPARTICAO(G, ϵ)
  Seleciona uma amostra U de $\Theta(\epsilon^{-1}\log(1/\epsilon))$ vértices $u_1, \ldots, u_s$, com probabilidade uniforme, e uma amostra W de $\Theta(\epsilon^{-2}\log(1/\epsilon))$ vértices $w_1, \ldots, w_t$, com probabilidade uniforme.
  Consultando todos os pares $(u_i, u_j) \in U \times U$, $(u_i, w_k) \in U \times W$ e todos os pares (w_{2l-1}, w_{2l}) onde $1 \leq l \leq \lfloor t/2 \rfloor$. Defina como H o subgrafo obtido.
  Executa busca em largura em H: se for bipartido então aceita, caso contrário rejeita.

Referências

Alon, Noga e Krivelevich, M. (2002). Testing k-colorability. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 15(2):211–227.

Goldreich, Oded e Goldwasser, S. e. R. D. (1998). Property testing and its connection to learning and approximation. *Journal of the ACM (JACM)*, 45(4):653–750.

Ron, D. (2010). Algorithmic and analysis techniques in property testing. *Foundations and Trends® in Theoretical Computer Science*, 5(2):73–205.

UFRGS
UNIVERSIDADE FEDERAL
DO RIO GRANDE DO SUL

FAPERGS
Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul