Teorema Fundamental de Teoria de Galois

Aluno: Darchan Ordovás Orientador: Alveri Alves Sant'Ana

O objetivo deste trabalho é introduzir o conceito de álgebras de Hopf. Uma álgebra de Hopf é um espaço vetorial com propriedades muito especiais.

Definição: Uma álgebra sobre um corpo K é um K-espaço vetorial A com uma multiplicação $m : A \otimes A \to A$, denotada por $m(a,b) = a.b$ e uma aplicação unidade $u : K \to A$ tais que sejam transformações K-lineares e satisfaçam os diagramas:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "I\otimes m"] \arrow[d, "m\otimes I"] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\ A \otimes A \arrow[r, "m"] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[dr, "m"] & A \otimes K \arrow[l, "I\otimes u"'] \arrow[d] \\ K \otimes A \arrow[u, "u\otimes I"] \arrow[r] & A \end{tikzcd}$$

ou seja, m é associativa, $a.(b.c) = (a.b).c$, e $u(1_K) = 1_A$.

Definição: Uma coálgebra sobre um corpo K é um K-espaço vetorial C com uma comultiplicação $\Delta : C \to C \otimes C$, denotada $\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2$, e uma counidade $\epsilon : C \to K$ tais que sejam transformações K-lineares e satisfaçam os diagramas:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] & C \otimes C \arrow[d, "I\otimes\Delta"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\Delta\otimes I"] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, "\Delta"] & C \otimes K \\ K \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\epsilon\otimes I"] \arrow[u, "I\otimes\epsilon"'] \end{tikzcd}$$

ou seja, Δ é coassociativa, $\sum a_1 \otimes a_{2_1} \otimes a_{2_2} = \sum a_{1_1} \otimes a_{1_2} \otimes a_2$, e $c = \sum \epsilon(c_1)c_2 = \sum c_1\epsilon(c_2)$.

Definição: Uma biálgebra sobre um corpo K é um K-espaço vetorial B que é uma álgebra e uma coálgebra com as seguintes propriedades de compatibilidade:
$\Delta(hg) = \sum h_1g_1 \otimes h_2g_2$, para todo $h,g \in B$
$\Delta(1) = 1 \otimes 1$
$\epsilon(hg) = \epsilon(h)\epsilon(g)$, para todo $h,g \in B$
$\epsilon(1) = 1$

Definição: Uma álgebra de Hopf H é uma biálgebra com uma transformação linear $S : H \to H$, chamada antípoda com a propriedade:

$\epsilon(h)1_H = \sum S(h_1)h_2 = \sum h_1S(h_2)$, para todo $h \in H$

Esta propriedade é equivalente a H ser a inversa da identidade em H em relação ao produto convolução, ou seja, $H * I = I * H = u\epsilon$.

A antípoda tem as seguintes propriedades:
$S(1) = 1$
$S(hg) = S(g)S(h)$, para todo $h,g \in H$
$\Delta(S(h)) = \sum S(h_2) \otimes S(h_1)$
$\epsilon(S(h)) = \epsilon(h)$

Exemplos

Álgebra de Grupo: Seja G um grupo e KG sua álgebra de grupo. KG é o K-espaço vetorial de base G, escrito na forma $\bigoplus_{g\in G} K$. KG é uma Hopf álgebra com:
$(\alpha g) \cdot (\beta h) = (\alpha\beta)(gh)$, $u(1_K) = e$
$\Delta(g) = g \otimes g$, $\epsilon(g) = 1$
$S(g) = g^{-1}$

Algébra tensorial: Seja V um K-espaço vetorial. A álgebra tensorial de V é $T(V) = \bigoplus_{n\geq 0} V^{\otimes n}$. $T(V)$ é uma álgebra de Hopf com:
$v_1 \otimes ... \otimes v_n \cdot w_1 \otimes ... \otimes w_m = v_1 \otimes ... \otimes v_n \otimes w_1 \otimes ... \otimes w_m$,
$u(1_K) = 1_K$
$\Delta(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes v$, $\epsilon(v) = 0$
$S(v) = -v$

Algebra de Hopf de Sweedler: Seja K com $char K \neq 2$. Seja H a álgebra dada pelos geradores c e x tais que $c^2 = 1$, $x^2 = 0$, $xc = -cx$. H tem dimensão 4 com geradores $1, c, x, cx$ e é uma Hopf álgebra com:
$u(1_K) = 1_H$
$\Delta(c) = c \otimes c$, $\Delta(x) = c \otimes x + x \otimes 1$, $\epsilon(c) = 1$, $\epsilon(x) = 0$
$S(c) = c^{-1}$, $S(x) = -cx$