

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM ENSINO DE MATEMÁTICA**

**ARTHUR BARCELLOS BERND**

**Registros dinâmicos de representação e aprendizagem de conceitos de  
Geometria Analítica**

**PORTO ALEGRE**

**2017**

**ARTHUR BARCELLOS BERND**

**Registros dinâmicos de representação e aprendizagem de conceitos de  
Geometria Analítica**

Dissertação de Mestrado elaborada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Maria Alice Gravina

**PORTO ALEGRE**

**2017**

**ARTHUR BARCELLOS BERND**

**Registros dinâmicos de representação e aprendizagem de conceitos de  
Geometria Analítica**

Dissertação de Mestrado elaborada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Maria Alice Gravina

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Débora da Silva Soares – IME/UFRGS

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Luisa Rodriguez Doering – IME/UFRGS

---

Prof. Dr. Vandoir Stormowski – PUCRS

**PORTO ALEGRE, agosto de 2017**

## **AGRADECIMENTOS**

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul, pelo ensino público e de qualidade, fundamental para minha formação inicial em Licenciatura em Matemática e, agora, para meu aperfeiçoamento acadêmico no Mestrado em Ensino de Matemática.

À minha orientadora, Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Maria Alice Gravina, por toda a dedicação e contribuição para a produção desta dissertação de mestrado, além dos valorosos ensinamentos desde meu período de formação inicial.

Aos demais professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da UFRGS, um grupo de docentes com amplo conhecimento técnico e competente em formar educadores matemáticos aptos a contribuir para melhorias na aprendizagem de matemática.

À minha família e aos meus amigos, que me deram todo o apoio necessário durante o período de realização do mestrado, que exigiu muito tempo e dedicação.

Aos estudantes do Colégio Monteiro Lobato, de Porto Alegre, que participaram da pesquisa componente desta dissertação com muito empenho e valorizando minha atuação docente.

Finalmente, a todas as pessoas que tiveram contribuição fundamental nesses últimos anos e às instituições nas quais trabalhei e que tiveram a compreensão necessária para o bom andamento do meu curso de pós-graduação.

## RESUMO

A Teoria dos Registros de Representação, de Duval, compreende e analisa a peculiaridade dos objetos matemáticos, acessíveis através de suas diferentes representações. Fischbein e Hershkowitz, entre outros teóricos, desenvolveram as noções de *Imagem Mental* e *Imagem Conceitual* como a interpretação de um dado conceito matemático por um sujeito. Esta dissertação estabelece conexões entre estas duas discussões teóricas e, a partir disto, faz uma proposta de ensino para alguns conceitos de Geometria Analítica através do uso dos registros dinâmicos no software GeoGebra. A proposta, na forma de sequência didática, foi implementada em turma do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola da rede particular de ensino do município de Porto Alegre. A análise da produção dos estudantes estabelece diálogo constante com os referenciais teóricos escolhidos. É uma pesquisa, sob a forma de estudo de caso, que busca investigar como ocorre o processo de aprendizagem de Geometria Analítica através utilização do software GeoGebra no ensino e aprendizagem de matemática, apresentando e discutindo os resultados obtidos de modo a contribuir para esta área de pesquisa.

**Palavras-chave:** Geometria dinâmica; registros de representação semiótica; imagem conceitual; GeoGebra; geometria analítica.

## ABSTRACT

The Registers of Representation Theory, from Duval, understands and analysis the peculiarity of mathematics objects, accessible through its different representations. Fischbein and Hershkowitz, among others researchers, developed the notions of Mental Image and Conceptual Image to explain the construction process of mathematical concepts by the subject. This dissertation establishes connections between these theories and uses this approach to propose a didactic sequence for teaching some concepts of Analytic Geometry using dynamic representation offered by the GeoGebra software. The proposal was implemented in a 3<sup>rd</sup> grade private high school. The research is a case study. The analysis of students' production establishes constant dialog with the theoretical approach and presents results that can be a contribution to research in the area of dynamic representations and learning of school mathematics.

**Keywords:** Dynamic geometry; registers of semiotic representation; conceptual images; GeoGebra; analytic geometry.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Circunferência $x^2 + y^2 = 4$ representada no plano cartesiano.....	21
Figura 2 – Janela de Visualização e Protocolo de Construção.....	24
Figura 3 – Janela de Álgebra e Janela de Visualização.....	25
Figura 4 – Registros dinâmicos no GeoGebra.....	25
Figura 5 – Paralelogramos equivalentes.....	28
Figura 6 – Altura de triângulo.....	29
Figura 7 – “Alturas” de triângulos desenhadas por um estudante.....	29
Figura 8 – Janela de Álgebra, Janela de Visualização e Vista de plano de corte.....	30
Figura 9 – Solução de questão do CV UFRGS 2014 no GeoGebra.....	34
Figura 10 – Conjunto de circunferências construídas com o recurso sequência.....	35
Figura 11 – Números complexos no GeoGebra.....	36
Figura 12 – Função trigonométrica no GeoGebra.....	38
Figura 13 – O recurso <i>controle deslizante</i> do software GeoGebra.....	47
Figura 14 – Ponto controlado por um número.....	48
Figura 15 – Função <i>habilitar rastro</i> .....	49
Figura 16 – Atividades 1, 2, 3, 4 e 5 do Momento 1.....	49
Figura 17 – Controle deslizante para a Atividade 3.....	50
Figura 18 – Construção por etapas da figura da Atividade 3 do Momento 1.....	50
Figura 19 – Construção do primeiro lado da figura da Atividade 3 do Momento 1.....	50
Figura 20 – Construção do segundo lado da figura da Atividade 3 do Momento 1.....	51
Figura 21 – Construção do terceiro lado da figura da Atividade 3 do Momento 1.....	51
Figura 22 – Atividade 1 do Momento 2.....	53
Figura 23 – Atividade 2 do Momento 2.....	53
Figura 24 – Atividade 3 do Momento 2.....	54
Figura 25 – Atividade 4 do Momento 2.....	54
Figura 26 – Atividade 5 do Momento 2.....	54
Figura 27 – Atividade 6 do Momento 2.....	54
Figura 28 – Atividade 1 do Momento 3.....	56
Figura 29 – Atividade 2 do Momento 3.....	56
Figura 30 – Sequência de imagens da manipulação na Atividade 2 do Momento 3.....	57
Figura 31 – Segunda sequência de imagens.....	57

Figura 32 – Atividade 3 do Momento 3.....	58
Figura 33 – Atividade 4 do Momento 3.....	59
Figura 34 – Sistematização do conceito de coeficiente linear.....	59
Figura 35 – Atividade 5 do Momento 3.....	60
Figura 36 – Atividade 6 do Momento 3.....	61
Figura 37 – Atividade 1 do Momento 4.....	62
Figura 38 – Manipulação da figura da Atividade 1 do Momento 4.....	62
Figura 39 – Atividade 2 do Momento 4.....	63
Figura 40 – Atividade 3 do Momento 4.....	64
Figura 41 – Atividade 4 do Momento 4.....	64
Figura 42 – Atividade 5 do Momento 4.....	65
Figura 43 – Atividade 5 do Momento 4.....	66
Figura 44 – Atividade 1 do Momento 5.....	68
Figura 45 – Manipulação na figura da Atividade 1 do Momento 5.....	68
Figura 46 – Atividade 2 do Momento 5.....	68
Figura 47 – Atividade 3 do Momento 5.....	69
Figura 48 – Manipulação da figura da Atividade 3 do Momento 5.....	69
Figura 49 – Atividade 4 do Momento 5.....	70
Figura 50 – Sequência de imagens da Atividade 4 do Momento 5.....	70
Figura 51 – Atividade 5 do Momento 5.....	71
Figura 52 – Resolução das Atividades 1, 2 e 3 do Momento 1 pelo Grupo 6.....	75
Figura 53 – Uso do controle deslizante pelo Grupo 6.....	76
Figura 54 – Resolução das Atividades 4 e 5 do Momento 1 pelo Grupo 6.....	76
Figura 55 – Uso do controle deslizante pelo Grupo 6 (2).....	76
Figura 56 – Resolução das atividades do Momento 1 pelo Grupo 1.....	77
Figura 57 – Resolução das atividades do Momento 1 pelo Grupo 1 (2).....	77
Figura 58 – Uso do controle deslizante pelo Grupo 1.....	78
Figura 59 – Estudantes em ação no Momento 1.....	79
Figura 60 – Resolução da Atividade 1 do Momento 3 pelo Grupo 1.....	83
Figura 61 – Sistematização do conceito de coeficiente angular.....	84
Figura 62 – Manipulação da figura dinâmica para sistematização do conceito de coeficiente angular.....	85
Figura 63 – Resolução da Atividade 3 do Momento 3 pelo Grupo 2.....	86
Figura 64 – Atividade 4 do Momento 3 (2).....	87



Figura 65 – Resolução da Atividade 4 do Momento 3 pelo Grupo 3.....	87
Figura 66 – Resolução da Atividade 4 do Momento 3 pelo Grupo 1.....	88
Figura 67 – Coeficiente linear por controle deslizante.....	88
Figura 68 – Resolução da Atividade 5 do Momento 3 pelo Grupo 5.....	90
Figura 69 – Resolução da Atividade 5 do Momento 3 pelo Grupo 1.....	91
Figura 70 – Resolução da Atividade 5 do Momento 3 pelo Grupo 6.....	91
Figura 71 – Conceito de coeficiente angular na equação “ $y = ax + b$ ”.....	92
Figura 72 – Conceito de coeficiente linear na equação “ $y = ax + b$ ”.....	93
Figura 73 – Atividade 1 do Momento 4 (2).....	94
Figura 74 – Resolução da Atividade 2 do Momento 4 pelo Grupo 6.....	95
Figura 75 – Resolução da Atividade 2 do Momento 4 pelo Grupo 2.....	96
Figura 76 – Resolução da Atividade 3 do Momento 4 pelo Grupo 3.....	97
Figura 77 – Resolução da Atividade 4 do Momento 4 pelo Grupo 4.....	98
Figura 78 – Resolução da Atividade 5 do Momento 4 pelo Grupo 3.....	99
Figura 79 – Resolução da Atividade 6 do Momento 4 pelo Grupo 4.....	100
Figura 80 – Atividade 2 do Momento 5 (2).....	103
Figura 81 – Resolução da Atividade 3 do Momento 5 pelo Grupo 3.....	103
Figura 82 – Sequência de etapas da resolução da Atividade 4 do Momento 5.....	104
Figura 83 – Resolução da Atividade 4 do Momento 5 pelo Grupo 2.....	105
Figura 84 – Atividade 5 do Momento 5 (2).....	106
Figura 85 – Resolução da Atividade 6 do Momento 5 pelo Grupo 4.....	107
Figura 86 – Resolução da Atividade 7 do Momento 5 pelo Grupo 1.....	107
Figura 87 – O uso de registros algébricos em paralelo ao uso do GeoGebra.....	108
Figura 88 – Escolha como professor paraninfo feita no GeoGebra.....	114

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Conteúdos, atividades e ações didáticas dos Momentos.....	45
Quadro 2 – Atividades do Momento 2.....	80

# SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>12</b>
<b>2. REFERENCIAL TEÓRICO.....</b>	<b>17</b>
2.1 Registros Dinâmicos de Representação .....	18
2.2 Imagem Conceitual e Imagem Mental .....	26
2.3 Trabalhos Correlatos.....	31
<b>3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....</b>	<b>40</b>
3.1 Contexto e metodologia de pesquisa.....	40
3.2 Sequência didática.....	43
3.1.1. <i>Momento 1</i> .....	47
3.1.2. <i>Momento 2</i> .....	52
3.1.3. <i>Momento 3</i> .....	55
3.1.4. <i>Momento 4</i> .....	62
3.1.5. <i>Momento 5</i> .....	67
<b>4. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.....</b>	<b>74</b>
4.1 Análise do Momento 1.....	75
4.2 Análise do Momento 2.....	80
4.3 Análise do Momento 3.....	83
4.4 Análise do Momento 4.....	93
4.5 Análise do Momento 5.....	101
<b>5. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>110</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>115</b>
<b>APÊNDICE A.....</b>	<b>118</b>
<b>APÊNDICE B.....</b>	<b>120</b>

## 1. INTRODUÇÃO

O presente trabalho representa a formalização de uma pesquisa em Educação Matemática que trata de assunto que permeia minha atuação profissional, desde o período de formação inicial em curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), concluído no final de 2011. Durante minha graduação tive a oportunidade de conhecer e me apropriar de diferentes recursos computacionais para a aprendizagem de matemática; desde aplicativos e ferramentas virtuais de repositórios nacionais e internacionais, até softwares de diferentes lógicas de funcionalidade. De forma muito especial, foi de extrema importância para minha formação inicial como professor – e seguiu sendo posteriormente – a utilização da matemática dinâmica proporcionada pelo software GeoGebra.

Mesmo buscando, obviamente, desenvolver uma formação completa em todas as áreas da matemática, foi a geometria que me motivou a desenvolver uma pesquisa para meu Trabalho de Conclusão de Curso, quando na graduação. A temática foi justamente a utilização de geometria dinâmica para o ensino de tópicos de geometria plana, através da noção de Imagem Conceitual – que será explorada a seguir neste trabalho.

Durante meus primeiros três anos após ter concluído o curso de licenciatura em matemática, trabalhei em três escolas da rede particular de ensino de Porto Alegre, além de um cursinho pré-vestibular, concomitantemente em pelo menos duas ou três destas instituições, em cada ano. Esta característica – trabalhar em mais do que uma instituição – é relativamente comum na forma como é estabelecido o ensino particular no Brasil, na qual docentes são horistas. Felizmente, é interessante registrar que as trocas entre as instituições sempre foram positivas do ponto de vista profissional, visando evolução na carreira e a vivência das melhores oportunidades, avaliadas por mim na época.

Neste referido período, nas escolas, trabalhei com turmas de oitava série do Ensino Fundamental – ainda antes da implementação do currículo de nove anos ter sido concluída – a terceiro ano do Ensino Médio. Desta forma, pode-se dizer que pude trabalhar alguns dos principais assuntos da matemática escolar e, em particular, da geometria escolar. Sempre que possível, dadas as condições de trabalho em cada

escola e suas respectivas peculiaridades, busquei inserir o uso da geometria dinâmica nas minhas salas de aula. O uso foi variado: desde explorações apenas por parte do professor, em aulas expositivas, até a realização de sequências de atividades pelos estudantes interagindo diretamente com o software GeoGebra.

A utilização da matemática dinâmica na prática docente reiteradamente rendeu frutos interessantes nas minhas aulas. Os estudantes demonstravam interesse pelo uso de recursos computacionais, e diversas vezes manifestaram que a forma como aprendiam com o GeoGebra contribuía para a compreensão dos conceitos.

Tal constatação se verificou não somente nas instituições de educação básica, mas também nas aulas que lecionei e ainda leciono em um curso preparatório para vestibulares e Enem. Nesta modalidade, caracterizada por ritmo acelerado de avanço nos assuntos, o dinamismo proporcionado nos arquivos explorados no GeoGebra contribuiu e segue contribuindo de modo determinante. Em especial, é uma ferramenta extremamente útil para a sistematização de assuntos e generalização de conceitos, sejam eles de natureza algébrica ou geométrica. Portanto, mesmo não se tratando da aprendizagem inicial dos estudantes na escola, mas sim num momento de revisão e aprofundamento de conhecimentos, o uso da matemática dinâmica contribui para a aprendizagem – aspecto apontado por meus estudantes no curso reiteradamente.

Quando decidi retomar os estudos acadêmicos, no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da UFRGS, no início de 2015, tinha diversos objetivos. Evidentemente, o retorno em si ao ambiente universitário era um destes objetivos, visto que estar em constante processo de aprimoramento profissional é fundamental para a ação docente. Além disso, tinha forte interesse em poder aprofundar os conhecimentos relativos ao uso de tecnologias no ensino e aprendizagem de matemática. Em particular, possivelmente dar continuidade à temática da pesquisa de meu trabalho acadêmico da época da graduação, com geometria dinâmica – evidentemente, com novos olhares e maior profundidade.

O período de três semestres da pós-graduação relativo a cursar disciplinas do programa foi extremamente proveitoso, tendo contribuído de forma determinante para o objetivo de aprimoramento acadêmico. Esta constatação se deve ao fato de ter permitido a aprendizagem de diversos aspectos importantes da Educação Matemática: novas tendências e estratégias de aprendizagem, aprofundamento de

áreas da matemática, estudo crítico sobre história da educação matemática, entre diversos outros.

Durante este período, conforme cronologicamente ficava mais próximo o momento de definir a temática de pesquisa para a dissertação, ficava também mais claro o desejo de tratar de geometria dinâmica, porém com novas concepções e objetivos, que foram sendo aos poucos sendo delimitados. As definições ocorreram com a contribuição de uma orientação precisa e competente, associada às minhas reflexões pessoais e busca por responder a meus questionamentos acerca do ensino de matemática.

A pesquisa que aqui apresento tem como tema a aprendizagem matemática associada ao uso de registros dinâmicos de representação, tendo como conteúdo tópicos de Geometria Analítica. Ela foi operacionalizada através de uma sequência didática realizada com alunos do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola da rede particular de ensino de Porto Alegre – da qual eu era, à época, docente – e fazendo uso do software GeoGebra. A sequência proposta teve o intuito de proporcionar aos estudantes a aprendizagem das primeiras noções de geometria analítica: coordenadas de pontos, equações da reta e posições relativas de retas e correspondentes equações.

Ambientes de matemática dinâmica, em particular o GeoGebra, têm potencial de proporcionar uma forma de aprendizagem distinta do que se pode fazer com lápis e papel. Em especial, quando tratamos de geometria, a visualização dos objetos matemáticos é um dos fatores mais determinantes para a efetiva compreensão dos conceitos. Neste sentido, defendo que a utilização deste software permite um estudo através de representações dinâmicas, ou seja, formas de representar objetos com um tipo de movimento peculiar. Um movimento associado às propriedades que o conceito representado possui, as evidenciando.

O complexo conjunto de ações e compreensões relativo a representar conceitos, em matemática, é um dos grandes interesses e objetivos da pesquisa. Assim, o referencial teórico aborda duas concepções a respeito do caráter cognitivo e psicológico da representação matemática. A primeira delas é a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, desenvolvida por Raymond Duval (2003, 2009, 2012). A segunda se constitui a partir das noções de Imagem Mental e Imagem Conceitual desenvolvidas, respectivamente, por Fischbein (1993) e Hershkowitz (1994); são noções similares e que esclarecem a compreensão do tema sob investigação.

O principal objetivo deste trabalho trata de investigar as possibilidades e contribuições do uso de softwares de geometria dinâmica para a aprendizagem de conceitos de Geometria Analítica. Assim, formulamos como pergunta norteadora para a pesquisa:

**Como ocorre o processo de aprendizagem da Geometria Analítica no Ensino Médio quando se faz uso de registros dinâmicos de representação?**

São objetivos deste trabalho: 1. Estabelecer conexões entre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica e as noções de Imagem Mental/Imagem Conceitual, e interpretar tais construtos teóricos no contexto da tecnologia digital com a introdução da noção de registros dinâmicos de representação.

2. A partir das referidas teorias apresentar uma sequência didática direcionada ao ensino e aprendizagem de conceitos de geometria analítica, fazendo uso do software GeoGebra.

3. Operacionalizar esta sequência didática numa escola da rede particular de ensino de Porto Alegre, na qual o pesquisador era docente, constituindo uma pesquisa na metodologia de *estudo de caso*.

4. Analisar os dados obtidos durante a realização da sequência didática de forma a trazer uma contribuição ao entendimento do processo de aprendizagem quando os estudantes fazem uso de registros dinâmicos de representação.

A dissertação se organiza em cinco capítulos, visando desenvolver a temática da pesquisa e tratar dos quatro objetivos elencados acima. Neste capítulo introdutório, o capítulo 1, apresentei minha trajetória profissional e, em linhas gerais, o contexto e objetivos da pesquisa.

O capítulo 2 contém a fundamentação teórica que sustentará a sequência didática elaborada, desenvolvida e analisada. Contempla, por um lado, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Duval (2003, 2009, 2012), com interesse particular em registros dinâmicos. Por outro lado, explora as noções de Imagem Mental e Imagem Conceitual, presentes nas obras de Fischbein (1993) e Hershkowitz (1994). Este capítulo, ainda, revisa a literatura – sobretudo nacional – buscando estabelecer conexões com a temática da pesquisa, especialmente quanto ao uso de registros dinâmicos de representação na aprendizagem de matemática.

O capítulo 3 apresenta a metodologia de pesquisa, sob a forma de estudo de caso, e a elaboração da sequência didática implementada. Além de fornecer com

clareza de informações todas as atividades que seriam realizadas ao longo da operacionalização da sequência didática, são também apresentados os sujeitos da pesquisa e o contexto no qual ela se desenvolveu.

O capítulo 4 trata da análise dos dados obtidos durante o desenvolvimento da sequência didática. A partir da produção dos alunos – acessadas a partir de arquivos salvos do software GeoGebra –, registros de falas via diário de bordo e imagens e vídeos registrados durante as aulas, analisei de que forma ocorreram as aprendizagens ao longo das atividades. Sobretudo, busquei estabelecer contínuas relações com a fundamentação teórica, verificando de que forma o dinamismo da representação contribui para a formação de imagens conceituais precisas das noções sob estudo.

O capítulo 5 traz as considerações finais da pesquisa e, como neste capítulo introdutório, faço uso deliberado da conjugação verbal na primeira pessoa do singular. Nele apresento minhas reflexões pessoais a respeito do desenvolvimento da pesquisa como um todo, retomo os elementos chave da fundamentação teórica e os relaciono com a sequência didática implementada.

Como apêndice, incluo o produto didático da dissertação, o qual fica à disposição de professores que venham a ter interesse em implementar um experimento similar em outros contextos escolares. Considero assim que esta dissertação também pode contribuir para a disseminação do uso de tecnologia digital no dia-a-dia da sala de aula.



## 2. REFERENCIAL TEÓRICO

As abordagens psicológicas da aprendizagem de matemática tiveram crescimento significativo durante o século XX, em especial nas suas últimas décadas, e assim continuaram durante o século XXI. Segundo Falcão (2000), tais abordagens têm raízes nas obras de Piaget e Vygotsky, que costumeiramente são a base para o desenvolvimento de correntes de pesquisa em Educação Matemática.

Por psicologia da educação matemática, entendemos a abordagem dada por Brito (2011), quando propõe que “a psicologia da educação matemática trata, basicamente, da aplicação da psicologia educacional à matemática, prioritariamente à matemática escolar”. A partir de nomenclaturas distintas e com diferentes concepções epistemológicas, a psicologia da educação matemática “discorre sobre temas como maturação, desenvolvimento, aprendizagem, ensino e solução de problemas” (Brito, 2011, p. 33).

Em particular, nos interessa investigar a aprendizagem de matemática do ponto de vista da forma de representar os conceitos matemáticos. É neste sentido que nossa fundamentação teórica se debruça sobre dois aspectos psicológicos da aprendizagem de matemática, abordados nas duas primeiras seções deste capítulo.

O primeiro trata das diferentes maneiras de representar um mesmo conceito, e se insere na temática desenvolvida por Duval na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (2003, 2009, 2012), com ênfase no uso de registros dinâmicos.

O segundo aborda as noções correlatas desenvolvidas por Fischbein (1993) e Hershkowitz (1994) denominados Imagem Mental e Imagem Conceitual, respectivamente, e suas conexões com a geometria dinâmica.

A terceira seção do capítulo será dedicada à análise de trabalhos correlatos – Bernd (2011, 2016), Borsoi (2016), Carlos (2017), Monzon (2012) e Neto (2010) – numa perspectiva que contribua para a nossa concepção teórica do assunto. Nestes trabalhos nossa ênfase será observar as potencialidades do uso do GeoGebra sob a ótica dos Registros de Representação Semiótica e a formação de imagens conceituais precisas.

## 2.1 Registros Dinâmicos de Representação

A aprendizagem de matemática apresenta características próprias. Mais precisamente, os objetos da matemática não são acessíveis de modo imediato – somente suas diferentes representações o são. São as diferentes representações, com significados e consequências distintas, que possibilitam ampliar o conhecimento relativo a um objeto e a ausência de representações distintas pode impedir tal avanço.

Moretti (2002, p. 344) nos lembra que “a história mostra vários exemplos em que determinadas noções só puderam alcançar um certo nível de desenvolvimento a partir do momento em que uma notação adequada foi criada”, ao registrar a dificuldade dos matemáticos da Grécia Antiga ao tratar com notações algébricas – o que ocasionou o não avanço em uma geometria de coordenadas.

Foi no contexto de estudo de notações matemáticas que Duval (2003, 2009, 2012) desenvolveu a Teoria dos Registros de Representações Semióticas, a partir do interesse em compreender a coordenação entre diferentes representações e suas implicâncias para o funcionamento do pensamento humano – em geral – e matemático – em particular.

Na teoria de Duval, um conceito chave na aprendizagem de matemática é o de representação. Sobre este conceito, Duval (2012) declara que

Há uma palavra às vezes importante e marginal em matemática, é a palavra “representação”. Ela é, na maioria das vezes, empregada sob a forma verbal “representar”. Uma escrita, uma notação, um símbolo representam um objeto matemático: um número, uma função, um vetor... Do mesmo modo, os traçados e figuras representam objetos matemáticos: um segmento, um ponto, um círculo. Isto quer dizer que os objetos matemáticos não devem ser jamais confundidos com a representação que se faz dele. (Duval, 2012, p. 268).

Segundo Duval (2003, p. 21), “o acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por representações semióticas”. Entendemos que Duval propõe, com tal afirmação, explicitar que a única forma de compreender um objeto ou conceito matemático – como uma reta, por exemplo – depende fundamentalmente da forma como esse objeto será representado. No caso da reta, podemos descrevê-la, no contexto da geometria analítica, como um conjunto de pares ordenados  $(x, y)$  em  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

que respeita uma equação do tipo  $y = ax + b$ . Já no contexto da geometria sintética trata-se de um desenho que respeita uma certa forma, uma idealização de objetos que estão no mundo físico.

Duval (2012) explica que objetos matemáticos não são perceptíveis de imediato, diferentemente do que ocorre com objetos “reais”. Neste sentido, se faz necessário significar com mais precisão o que são as representações semióticas de um objeto, segundo este autor:

São produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento. Uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são representações semióticas que exibem sistemas semióticos diferentes. (...) As representações não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais à atividade cognitiva do pensamento. (Duval, 2012, p. 269).

Aqui, lembrando do exemplo do conceito de reta, observamos atributos diferentes ao tratar a reta de forma algébrica ou de forma geométrica, proporcionando aprendizagens diferentes. Portanto, é importante frisar que o conceito *reta* não pode ser confundido com nenhuma dessas duas representações suas. Concordando com Duval (2003),

Podemos então formular o paradoxo da compreensão em matemática da seguinte forma: como podemos não confundir um objeto e sua representação se não temos acesso a esse objeto a não ser por meio de sua representação? (Duval, 2003, p. 21).

Duval (2006) propõe que a efetiva aprendizagem das propriedades de um objeto ocorre justamente na utilização de diferentes tipos de representação semiótica e, em especial, de tipos específicos, chamados *registros de representação*. Registro é uma forma bastante particular de representação. Conforme Duval, “nem todos os sistemas semióticos são registros, somente aqueles que permitem a transformação de representações” (Duval, 2006, p. 111).

Assim, Duval (2006) destaca uma instância fundamental da representação semiótica e sua importância para a matemática: “o fato de que elas podem ser

trocadas de uma para a outra, mantendo a mesma denotação” (p. 110). A noção de registro de representação é tão fundamental que Duval afirma que “o conteúdo de uma representação depende mais do registro de representação do que do objeto representado” (Duval 2006, apud Duval 1999, tradução nossa).

Duval (2012, p. 271) caracteriza a natureza dos registros através de três atividades cognitivas que se fazem presentes quando se trabalha com tal tipo de representação. Em primeiro lugar, deve existir a possibilidade de formação de uma representação identificável – seja numa língua natural específica, através de uma fórmula, por meio de uma figura geométrica.

As outras duas atividades cognitivas que caracterizam um tal sistema semiótico são os *transformações* de registros, seja de forma interna – os *tratamentos*, ou de forma externa – as *conversões*. A seguir, definiremos com maior clareza estas duas formas de transformação apresentando também exemplos.

Dada esta existência de diferentes registros de representação para um mesmo conceito, Duval (2012, p. 270) defende que “é essencial, na atividade matemática, poder mobilizar muitos registros de representação semiótica (figuras, gráficos, escrituras simbólicas, língua natural, etc...) no decorrer de um mesmo passo, poder escolher um registro no lugar de outro”.

Os diferentes registros de representação possuem regras de funcionamento particulares. Notare e Gravina (2013), neste sentido, destacam: em registros algébricos, as manipulações necessárias para a resolução de uma equação; em registros geométricos, a identificação dos elementos e a possibilidade de realizar o registro em natureza gráfica (que particularmente nos interessa); em registros em linguagem natural, os símbolos e regras de comunicação.

Conforme Duval (2009), existem dois tipos de transformações de representações:

- *Tratamentos*: são transformações que ficam dentro do mesmo sistema, como as sucessivas equivalências algébricas utilizadas na resolução de uma equação. Exemplificando: considere a equação  $2x + 3 = 7$ . Somando  $-3$  aos dois lados da equação, obtemos a equação equivalente  $2x = 4$ . Multiplicando por  $1/2$  os dois lados da equação, obtemos  $x = 2$ . É importante observar que essas sucessivas transformações sempre conservaram o objeto no mesmo sistema de representação; no caso, um sistema algébrico.

- Conversões: são transformações que mudam a representação do objeto, como por exemplo a conversão de linguagem algébrica para linguagem gráfica. Para ilustrar, considere a equação  $x^2 + y^2 = 4$  e um sistema de coordenadas cartesianas. Tal equação diz respeito a uma circunferência, com centro na origem do sistema de coordenadas e com raio com medida 2, gerando a seguinte representação gráfica (Figura 1).

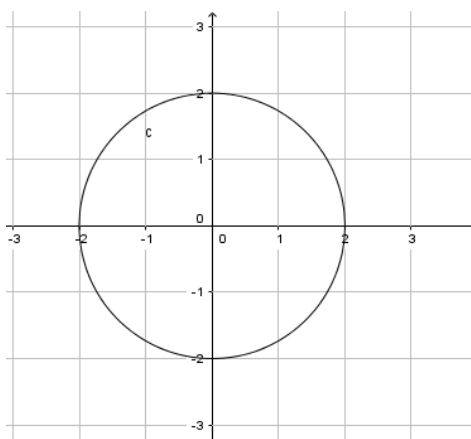


Figura 1 – Circunferência  $x^2 + y^2 = 4$  representada no plano cartesiano. Acervo pessoal.

A conversão – passagem de um registro para outro – constitui-se, para Duval, como a “a única possibilidade de que se dispõe para não confundir o conteúdo de uma representação com o objeto representado” (Duval, 2009, p. 22). De fato; um objeto, em formas de registros diferentes, apresenta atributos distintos. É a transformação de um tipo de registro para outro que ajuda na compreensão efetiva do objeto, de modo a não confundi-lo com sua representação ou mesmo limitá-lo a uma única representação. Duval (2009, p. 22) enfatiza que “é a articulação dos registros que constitui uma condição de acesso à compreensão em matemática, e não o inverso, qual seja, o “enclausuramento” de cada registro”.

Os diferentes registros de representação apresentam conteúdos e atributos distintos sobre um mesmo objeto. Assim, pode-se inferir que a compreensão em matemática contempla a utilização de diferentes formas de representações semióticas relativas a um mesmo conceito/objeto, bem como as transformações realizadas nestas representações.

Uma proposta didática que proporcione aos estudantes a coordenação entre diferentes registros de representações semióticas se baseia em dois importantes aspectos destacados por Duval (2012). Um deles é a economia de trabalho e explica

o autor que “a mudança de registro tem por objetivo permitir a realização de tratamentos de uma maneira mais econômica e mais potencializada” (p. 279). O outro aspecto, a complementaridade dos registros, e aqui o autor destaca que “toda representação é cognitivamente parcial em relação ao que ela representa, e que de um registro a outro não estão os mesmos aspectos do conteúdo de uma situação que estão representados” (p. 280).

Segundo Palles e Silva (2012, p. 1-2), pesquisas em Educação Matemática “têm indicado algumas tendências, principalmente, a respeito da influência da tecnologia no pensamento visual e dos aspectos semióticos e representacionais na visualização matemática”. Neste contexto de utilização de recursos tecnológicos na educação matemática, a geometria dinâmica surge como possibilidade para tratar da aprendizagem de matemática sob a ótica de registros semióticos. Não somente por permitir a conversão entre registros geométricos e algébricos, mas também por fazer uso de *registros dinâmicos*, conceito o qual definiremos com clareza a seguir.

A utilização de ferramentas tecnológicas no ensino e aprendizagem de matemática é uma tendência na Educação Matemática, não somente por estar associado ao contexto de inovações tecnológicas contemporâneas – e que inegavelmente está cada vez mais presente no ambiente escolar –, mas especialmente pelo rico potencial que sua utilização promove. Gravina e Basso (2010) explicam que,

A tecnologia digital coloca à nossa disposição ferramentas interativas que incorporam sistemas dinâmicos de representação na forma de objetos concretoabstratos. São concretos porque existem na tela do computador e podem ser manipulados e são abstratos porque respondem às nossas elaborações e construções mentais. (Gravina, Basso, 2010, p. 14).

Dentre as ferramentas interativas disponíveis, optamos pelo uso do software GeoGebra. O GeoGebra possui inúmeros recursos para trabalhar nas mais diferentes áreas da matemática. Inicialmente voltado ao estudo da geometria em duas dimensões e da álgebra utilizando sistemas de coordenadas cartesianas com dois eixos, atualizações mais recentes do software lhe conferem ambientes de geometria espacial e sistemas de coordenadas com três eixos, planilhas eletrônicas, conceitos de probabilidades, entre outros. Ainda, trata-se de um software livre e associado a ele

tem-se um site de compartilhamento de trabalhos – o GeoGebra Tube (disponível em [geogebra.org](http://geogebra.org)). Neste site tem-se um interessante repertório de construções que exploram conceitos em diferentes áreas da matemática.

Vamos agora tratar os Registros de Representações Semióticas sob a ótica do GeoGebra de forma a mostrar aspectos que podem muito contribuir no processo de aprendizagem da matemática. Conforme Stormowski e outros (2015), uma importante característica da utilização da geometria dinâmica se observa

(...) no dinamismo das representações, que se caracteriza pela possibilidade de mover elementos matemáticos representados, sem que estes percam as propriedades subjacentes (propriedades oriundas de sua representação no software). Na verdade, é movimentando os pontos e elementos representados (dinamismo), que as propriedades podem ser observadas, mesmo quando não são muito evidentes. (Stormowski e outros 2015, p. 4).

Os pesquisadores avançam no assunto, afirmando que as

(...) peculiaridades da representação dinâmica, conferem à ela uma distinção dos registros previamente apresentados (língua natural, geométrico, gráfico, sistemas de numeração). Para evidenciar estas peculiaridades, o mesmo será denominado de registro de representação dinâmica. (Stormowski, Gravina e Lima 2015, p. 6).

Assim, a partir deste momento, consideraremos que a utilização de ambientes dinâmicos de aprendizagem matemática – em particular ambientes de geometria dinâmica, como o GeoGebra – dá origem a um tipo distinto de representação: *registro de representação dinâmica* ou, de modo simplificado, *registro dinâmico*. Distinto pois tal forma de representação revela atributos do objeto que outros registros não apresentam – ao menos, não do mesmo modo ou com a mesma versatilidade.

Para aprofundar a concepção de registro dinâmico retomamos a caracterização de um registro, tratada anteriormente. Reiteramos: um registro é uma forma peculiar de representação, caracterizada pela existência de uma representação identificável, com transformações internas (tratamentos) e possibilidade de transformações externas (conversões) para outros registros.

Os registros dinâmicos, utilizadas em ambientes de matemática dinâmica como o GeoGebra, constituem uma representação identificável, no sentido de que um objeto representado sob a forma de registro dinâmico é identificado pelo sujeito que o visualiza – e o manipula.

A manipulação de uma construção dinâmica constitui a segunda instância que a caracteriza como registro: um contínuo *tratamento* dentro do registro geométrico. Cada movimento aplicado na construção promove uma nova representação que conserva os atributos críticos da ideia/conceito ali representados.

Para efeito de comparação, resgatemos a compreensão de que um *tratamento algébrico* em uma equação pode ser a obtenção de uma equação equivalente, porém simplificada. No caso de um tratamento dinâmico, no registro geométrico, pode ser a obtenção de uma figura equivalente, tendo os mesmos atributos críticos, porém em configurações que variam. E é justamente a modificação do desenho, mas com conservação de certas propriedades, que permite a identificação dos atributos relevantes para o conceito.

Para ilustrar as conversões de registros e os tratamentos dentro de um registro possíveis no GeoGebra, considere uma sequência de passos para a construção da circunferência circunscrita a um triângulo (Figura 2).

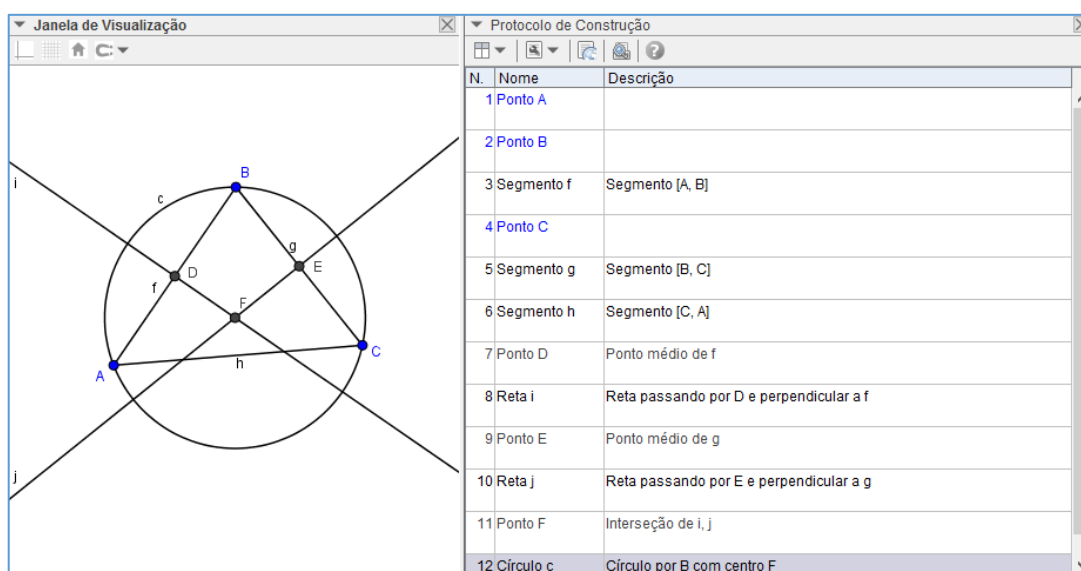


Figura 2 – Janela de Visualização e Protocolo de Construção. Acervo pessoal.

No GeoGebra tem-se a versatilidade de sincronização da Janelas de Visualização. A descrição dos passos exibida na janela Protocolo de Construção



realiza uma automática conversão do registro geométrico para o registro em língua natural. Assim, é possível dentro do próprio GeoGebra realizar conversões entre registros.

Ainda, tornando visível a Janela de Álgebra (Figura 3), temos a presença de registros algébricos referentes aos mesmos objetos representados: coordenadas dos vértices do triângulo, as equações das retas e a equação do círculo. Conforme é manipulado um vértice do triângulo, as informações no registro algébrico se atualizam.

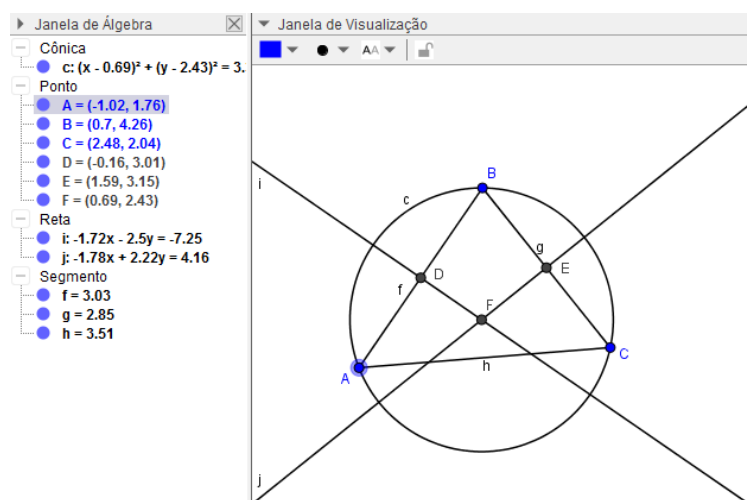


Figura 3 – Janela de Álgebra e Janela de Visualização. Acervo pessoal.

A figura da construção descrita acima passa a constituir um registro dinâmico no momento em que damos “movimento” à figura. Ao manipular um dos elementos primitivos da construção (um dos vértices A, B e C), o aspecto da figura é alterado, mas os atributos relevantes da construção são conservados. A seguir, temos outras configurações da mesma construção ao ser manipulada (Figura 4).

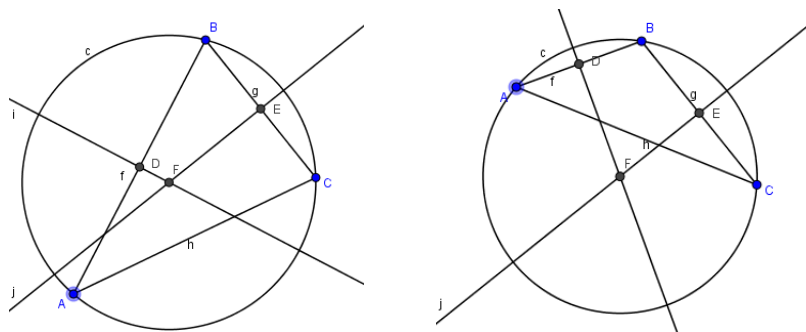


Figura 4 – Registros dinâmicos no GeoGebra. Acervo pessoal.

Para obter estas configurações manipulamos o vértice A, mas as propriedades da figura foram mantidas: as retas “continuam” perpendiculares aos lados e o triângulo “continua” inscrito na circunferência. Inclusive, a manipulação da figura dinâmica permite a compreensão do centro da circunferência em situações não usuais, como fora do triângulo. Assim, a exploração da figura constitui um contínuo tratamento no registro dinâmico, por caracterizar sucessivas transformações dentro do mesmo registro e que tem por consequência a observação dos atributos relevantes para o conceito.

Assim, finalizamos esta seção destacando as potencialidades observadas no uso dos registros dinâmicos no GeoGebra, que identificamos nas possibilidades de conversões e tratamentos em registros dentro do próprio software. Consideramos que o uso dos registros dinâmicos pode contribuir para a aprendizagem da matemática por potencializar o diálogo entre os diferentes registros, permitindo associar aspectos conceituais e as representações visuais associadas. É nessa perspectiva – compreender as relações entre conceitos e suas imagens – que avançamos na próxima seção.

## 2.2 Imagem Conceitual e Imagem Mental

A aprendizagem da matemática envolve processos mentais complexos que objetivam a formação de conceitos relativos a objetos, propriedades ou relações. Em outras palavras, construir um conceito com clareza de significado é fundamental para que se possa identificar aprendizagem matemática.

Fischbein (1993) explica que diversas teorias psicológicas – relacionadas direta ou indiretamente à educação matemática – têm buscado diferenciar *conceitos* e *imagens mentais*. De um modo simplificado, o teórico distingue estas duas noções, ao afirmar que

O que, então, caracteriza um conceito é o fato que ele expressa uma ideia, uma geral e ideal representação de uma classe de objetos, baseada em suas características comuns. Em contraste, uma imagem (nós aqui nos referimos a imagens mentais) é uma representação *sensorial* de um objeto ou fenômeno. (Fischbein, 1993, p. 139, tradução nossa)

Assim, compreendemos que esta distinção entre conceito e imagem mental é fundamental para a educação matemática e em particular para a geometria, por se tratar de uma área na qual a utilização desta forma sensorial – visual – de representação é fortemente presente na aprendizagem; e não poderia ser diferente, assim pensamos. Mais precisamente: pode-se dizer que o conceito está inserido em saber consolidado e que imagem mental é a interpretação sensorial do conceito por um sujeito.

Fischbein (1993) fornece mais subsídios para percebermos a diferença entre conceitos e imagens mentais através de uma série de considerações pertinentes. Entre elas, temos o fato de que entidades geométricas não possuem, efetivamente, uma correspondência com o mundo material; basta notar que pontos, linhas e planos não existem no “mundo real”. Paralelamente, também destaca que um triângulo, como conceito, jamais pode ser tratado com equivalência a uma cópia particular – imagem mental –, porque não existe possibilidade de um “certo triângulo” representar todos os atributos pertencentes a essa classe infinita.

Gravina (1996) também trata desta situação aparentemente conflitante entre um conceito e sua representação. A autora afirma que

Se por um lado o desenho é um suporte concreto de expressão e entendimento do objeto geométrico - o que fica transparente na nossa atitude frente à um problema: a primeira coisa que fazemos é desenhar a situação, quer numa folha de papel ou quer na tela de um computador - por outro lado, pode ser um obstáculo a este entendimento. (Gravina, 1996, p. 4).

A diferenciação entre conceito e imagem mental não é definitiva e nem conflitante. Na verdade, são noções que estão vinculadas e se “alimentam” mutuamente. Hershkowitz tem trabalhos (1994), além de produções com coautores (Hershkowitz e outros, 1994) que vão ao encontro da noção de imagem mental – a qual, em traduções, costuma ser denominada Imagem Conceitual – explorada por Fischbein.

Entre outros aspectos, Hershkowitz (1994) discute o papel da visualização na aprendizagem de geometria, explicando sua alta complexidade e que vai em dois caminhos não dicotômicos, mas que causam certa perplexidade, pois “por um lado,

nós não podemos formar uma imagem de um conceito e de seus exemplos sem visualizar seus elementos. Mas por outro lado, estes elementos visuais podem limitar e empobrecer a imagem conceitual” (Hershkowitz, 1994, p. 45).

Ao abordar a diferenciação entre conceito e imagem conceitual, Hershkowitz também busca caracterizar os elementos que compõe e dão significado ao conceito, e de que forma uma imagem conceitual está relacionada com a existência – ou não – destes elementos em completude. Utilizando a nomenclatura *atributos* para se referir a tais elementos, Hershkowitz (1994) afirma que um dado conceito

(...) possui atributos relevantes (críticos) – aqueles atributos que devem ser satisfeitos para termos um exemplo positivo do conceito – e atributos não-críticos – aqueles atributos que apenas alguns dos exemplos positivos possuem. (Hershkowitz, 1994, p. 16)

Acreditando que o uso do GeoGebra pode contribuir para a construção de imagens mentais adequadas, realizamos (2011) uma pesquisa com estudantes do Ensino Médio utilizando o GeoGebra para a aprendizagem de tópicos de geometria plana. Entre diversas atividades realizadas, destacamos uma sequência de construções que acompanhavam a sequência de teoremas da obra *Os Elementos*, de Euclides (Commandino, 2009). A proposição chave para a compreensão do conceito de altura em paralelogramos e triângulos é apresentada na Figura, que mostra – através de registros dinâmicos – que paralelogramos postos sobre a mesma base e compreendidos entre as mesmas retas têm mesma área.

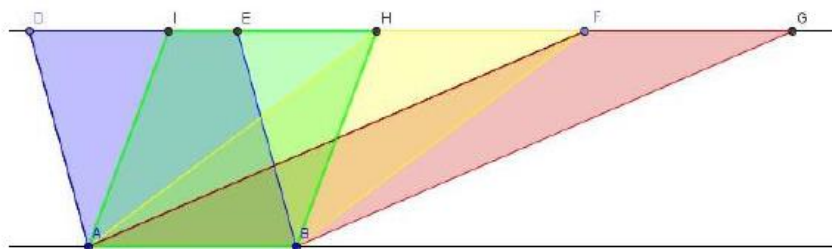


Figura 5 – Paralelogramos equivalentes. Fonte: Bernd, 2011.

Seguindo as proposições decorrentes dessa, o elemento altura é obtido. Os estudantes, manipulando um arquivo dinâmico, puderam perceber, afinal, quais são

os atributos críticos do conceito ‘altura de um triângulo’. Uma imagem retirada da construção dinâmica é apresentada na Figura 6.

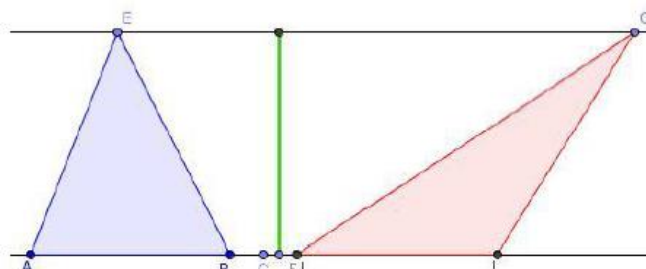


Figura 6 – Altura de triângulo. Fonte: Bernd, 2011.

Um dos fenômenos mais relevantes quando se trata dos aspectos psicológicos da aprendizagem da geometria, segundo Hershkowitz (1994), é o da formação de exemplos prototípicos. Segundo a autora,

Cada conceito possui um conjunto de atributos críticos (aspectos relevantes) e um conjunto de exemplos. Todos os exemplos do conceito são matematicamente equivalentes, no sentido de que eles satisfazem a definição do conceito e contém todos os seus atributos críticos, mas eles são diferentes uns dos outros visualmente e psicologicamente. Existem “super”-exemplos – protótipos – que tendem a ser muito mais populares do que todos os outros. (Hershkowitz, 1994, p. 47).

Para que se compreenda com clareza a diferença entre um dado conceito e uma imagem conceitual que um sujeito forma sobre o conceito, trazemos o experimento realizado por Gravina (1996) com estudantes de licenciatura em matemática. Aos participantes de uma das atividades da pesquisa, foi solicitado que fosse determinado o ‘segmento altura relativa ao lado AB’ em diferentes triângulos. A Figura 7 apresenta ‘soluções’ dadas por um dos estudantes.

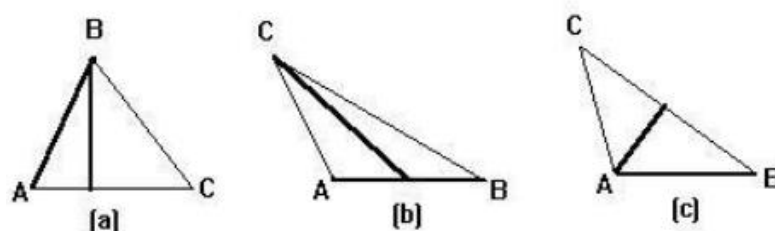


Figura 7 – “Alturas” de triângulos desenhadas por um estudante. Fonte: Gravina, 1996.

Claramente, observa-se uma imagem conceitual deturpada quanto ao conceito altura, em cada um dos erros deste estudante – e que são bastante comuns. No caso (a), temos a determinação do elemento altura como sendo um segmento vertical; portanto, um julgamento prototípico. Nos casos (b) e (c), temos a perturbação causada por um triângulo obtusângulo, no qual a altura não é um segmento interno ao triângulo.

É fundamental que no ensino e aprendizagem de geometria o educador esteja atento para evitar a formação de exemplos prototípicos, pois estes comprometem a efetiva compreensão do conceito, no momento em que “forçam” a existência de atributos não-críticos e, conseqüentemente, levam a formação de imagens conceituais imprecisas. Evidentemente é bastante complicado escapar da utilização destes super-exemplos; afinal, conforme apontado por Hershkowitz, é impossível tratar de um conceito sem visualizar seus elementos em algum exemplo.

Neste contexto, Fischbein (1993) propõe, para cada conceito geométrico, a existência de uma *componente conceitual* – que descreve o conceito a partir da sua definição, de sua idealização – e uma *componente figural* – uma representação particular deste conceito, sob a forma de desenho. As duas componentes atuam na formação da imagem mental do conceito. A componente conceitual define as propriedades que devem ser satisfeitas, enquanto a componente figural constitui o construto visual que deve contemplar as propriedades conceituais.

Essas componentes têm características distintas e, simultaneamente, é impossível tratar delas de forma isolada: não existe imagem pura ou conceito puro. Conforme bem esclarece Fischbein (1993), “conceitos não giram, não se movem, e imagens, da mesma forma, não possuem a perfeição, a generalização, a abstração, a pureza que são supostas quando realizamos cálculos” (p. 141-142, tradução nossa).

As componentes conceitual e figural, sempre associadas, possuem limitadores quando a aprendizagem é feita a partir de registros estáticos. Aqui, cabe lembrar do conceito altura de triângulo: registros estáticos tendem a se limitar ao caso prototípico de altura como um segmento interno ao triângulo. Desta forma, temos uma não correspondência entre as componentes conceitual e figural devido à insuficiência do registro utilizado.

A concepção quanto ao uso de registros dinâmicos através do uso de softwares de geometria dinâmica, que abordamos na seção anterior, possibilita a criação de um

vínculo significativo as componentes conceitual e figural de um conceito. Gravina (2015), em diálogo com as ideias de Fischbein (1993), propõe que

A manipulação da figura dinâmica introduz um novo tratamento para o registro desenho. A ‘estabilidade do desenho sob ação de movimento’ é um registro dinâmico que desafia para construções com controle geométrico e este processo propicia a fusão entre os componentes conceitual /proposicional e figural. Uma família de ‘desenhos em movimento’ substitui o particular desenho como expressão do componente figural, descaracterizando as particularidades não relevantes, tão presentes na formação de inadequadas imagens mentais. (Gravina, 2015, p.244).

A pesquisadora, na oportunidade em uma disciplina de um curso de formação inicial de professores, investigou sob a ótica do uso de registros dinâmicos de que forma o GeoGebra pode contribuir para o aprofundamento do pensamento geométrico dedutivo. As conclusões da experiência, apontam que o uso das figuras dinâmicas “transforma, de forma concomitante, as formas de pensar e as formas de veicular o conhecimento”, pois ao serem manipuladas num software como o GeoGebra, de “interface interativa, aberta à exploração e à experimentação, provoca experimento de pensamento, diferentes daqueles que acontecem com o suporte do lápis e papel” (Gravina, 2015, p. 252).

Tais considerações nos sugerem que o uso de registros dinâmicos, portanto, possibilita o estabelecimento de um vínculo muito bem delineado entre as componentes figural e conceitual, de uma forma que nenhum registro em forma de desenho – particular e estático – possibilitaria.

É nesta dificuldade imposta quanto ao aspecto de visualização que se insere a alternativa do uso de ambientes de geometria dinâmica. A utilização de registros dinâmicos permite uma visualização que jamais seria acessível de forma estática, pois permite que uma simples manipulação forneça uma variedade incrível de exemplos e, assim, criando ideias generalizadoras, ao invés de prototípicas.

## 2.3 Trabalhos Correlatos

Nesta seção, fazemos referências a trabalhos que tratam de experiências de ensino que fazem uso do GeoGebra e no quais identificamos o uso de registros

dinâmicos de representação. Estes trabalhos contribuem para ilustrar nossa discussão teórica no que diz respeito ao potencial dos registros dinâmicos em situações de aprendizagem.

Borsoi (2016) traz registros dinâmicos na aprendizagem matemática. A pesquisadora desenvolveu uma experiência com estudantes de Ensino Médio e sua investigação é no contexto da geometria espacial. As atividades propostas são do tipo que, quando representadas de forma estática, geram muitas dificuldades aos estudantes e a autora observa que as principais dificuldades dos alunos dizem respeito à visualização, pois a representação de objetos tridimensionais em perspectiva exige ações cognitivas bastante complexas.

Ao propor que o uso da geometria dinâmica pode contribuir nesta questão da representação e visualização 3D, ela traz, entre outras justificativas, a interface do software. A Figura 8, tomada de seu trabalho, mostra três janelas de representações de um sólido: a Janela de Álgebra, a Janela de Visualização 3D e a Vista de um plano de corte.

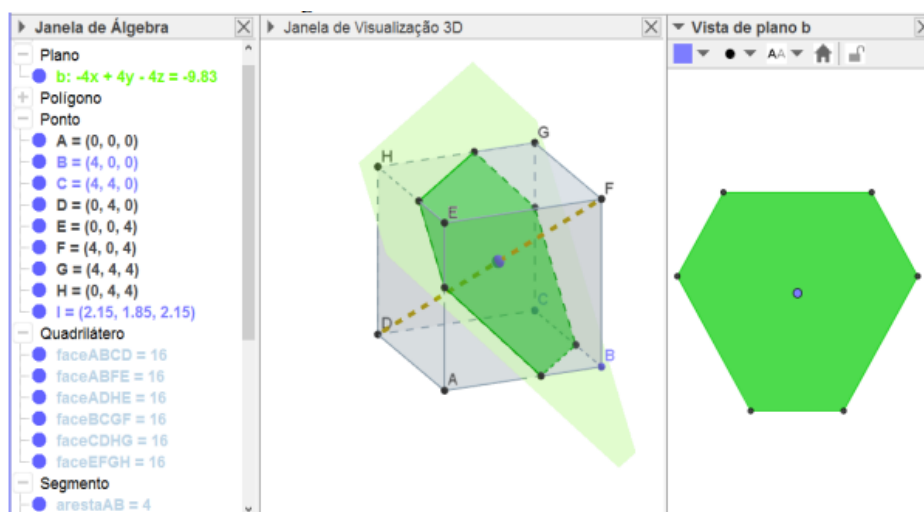


Figura 8 – Janela de Álgebra, Janela de Visualização e Vista de plano de corte. Fonte: Borsoi, 2016.

Aqui, destacamos a conversão dinâmica de registro algébrico para geométrico nas duas primeiras janelas proporcionada pelo GeoGebra. A manipulação do objeto a partir de rotações atualiza as coordenadas dos pontos e a equação do plano de corte, constituindo um efeito sincronizado que registros estáticos não poderiam reproduzir. Também temos a presença de tratamentos dinâmicos, que podem ser constatadas



quando a movimentação de pontos na visualização tridimensional (segunda janela) atualiza o plano de corte da terceira janela.

E mais, a riqueza de detalhes da construção tridimensional no software dificilmente seria executada com lápis e papel. A possibilidade de rotação do objeto espacial, fazendo o uso do dinamismo do software, também favorece a visualização. Conforme Borsoi (2016),

O software permite explorar e visualizar uma infinidade de situações espaciais, que são fonte de dificuldades quando tratadas em um suporte estático como o livro impresso. Por exemplo, através de rotações espaciais, pode-se explorar situações virtuais que acionam habilidades de visualização muito similares àquelas decorrentes da manipulação de objetos 3D no espaço real. (Borsoi, 2016, p. 25).

As transformações na Janela de Visualização 3D, quando se manipula a figura, constituem tratamentos nas figuras de registro dinâmico, pois fazem emergir os atributos dos objetos estudados, de uma forma distinta daquela que poderia ser realizada em registros estáticos.

Em Bernd (2016) tem-se um trabalho realizado com estudantes do ensino médio, tratando de geometria analítica, no qual foi incentivado a realização de conversões entre registros gráficos e algébricos. A título de exemplo trazemos uma das atividades proposta, uma questão do concurso vestibular da UFRGS de 2014:

Resolva a seguinte questão do CV UFRGS 2014  
Construídas no mesmo sistema de coordenadas cartesianas, as inequações  $x^2 + y^2 < 4$  e  $y < x + 1$  delimitam uma região no plano. O número de pontos que estão no interior dessa região e possuem coordenadas inteiras é  
(A) 5                      (B) 6                      (C) 7                      (D) 8                      (E) 9

O uso do GeoGebra na resolução da questão permitiu uma resolução dentro do registro geométrico, antes que fossem iniciadas, quase que de forma automática, as manipulações algébricas. Na Figura 9, apresentamos uma das soluções apresentadas por duas alunas – na rede quadriculada identificaram facilmente os pontos com coordenadas inteiras que pertencem a intersecção das duas regiões.

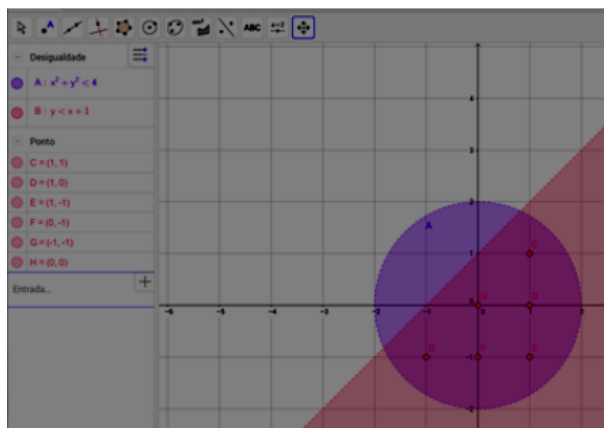


Figura 9 – Solução de questão do CV UFRGS 2014 no GeoGebra. Fonte: Bernd, 2016.

As estudantes declararam que “a solução deste problema somente é acessível, pensando numa resolução econômica, a partir da representação gráfica, pois não sabemos como seria a resolução algébrica”. Em outras palavras, a conversão do registro algébrico para o gráfico foi fundamental para a compreensão da situação dada e, conseqüentemente, para a resolução do problema. A importância do software, neste caso, reside na otimização do registro gráfico e, também, na forma de incentivar os estudantes a realizar este tipo de registro, que não é natural.

Carlos (2017) desenvolveu sua pesquisa sob a ótica dos Registros de Representação Semiótica, utilizando o GeoGebra para a aprendizagem de circunferência no âmbito da geometria analítica. As ações no software foram propostas no sentido da utilização de parâmetros, visando a formação de raciocínios generalizadores.

O uso de recursos digitais e, em especial, da geometria dinâmica contribuem na aprendizagem da matemática pois, conforme Carlos (2017), são “ferramentas que possibilitam exteriorizar, diversificar e ampliar os pensamentos”. Desta forma, as atividades propostas pela pesquisadora tinham como objetivo

“Explorar as generalizações de seqüências de circunferências que podem ser feitas por meio do GeoGebra, utilizando-o como uma *ferramenta para pensamentos*. Na cultura teórica, os alunos não teriam esta possibilidade de pensar Matemática utilizando ferramentas estáticas, como lápis e papel. (Carlos, 2017, p. 28).

Uma das atividades desenvolvidas por ela e seus estudantes na proposta didática utilizou um recurso do GeoGebra chamado *sequência*, um comando que permite a construção de uma sucessão de figuras dinâmicas a partir de parâmetros. O uso do recurso, enfatiza ela, permite “criar a representação geométrica de uma família de circunferências, provocando nos alunos o desenvolvimento de um raciocínio generalizador”. A Figura 10 apresenta o resultado de uma construção feita pelos estudantes utilizando o recurso, revelando o potencial dos registros das figuras no GeoGebra.

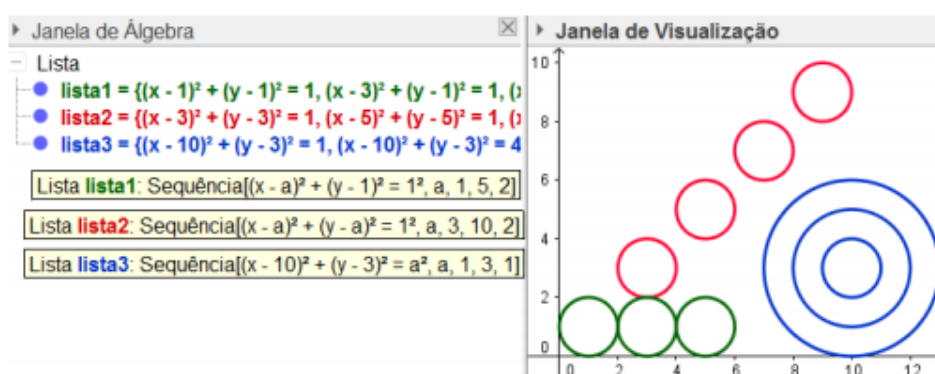


Figura 10 – Conjunto de circunferências construídas com o recurso sequência. Fonte: Carlos, 2017.

As possibilidades de uso do dinamismo do GeoGebra não se limitam, de modo algum, à aprendizagem de geometria – plana, espacial ou analítica. Monzon (2012) realizou uma proposta didática com estudantes de Ensino Médio abordando o assunto de funções de variável complexa, fazendo o uso deste software. Sua pesquisa foi fundamentada no potencial do GeoGebra em possibilitar o uso de registros dinâmicos na aprendizagem das funções de variável complexa, tendo ainda um olhar atendo às imagens mentais dos estudantes durante a realização das ações didáticas.

Os sujeitos participantes da pesquisa de Monzon (2012) fizeram o uso de objetos de aprendizagem criados no GeoGebra. Como ilustração de uma das atividades que utilizaram registros dinâmicos para a compreensão de conceitos, temos a imagem disposta na Figura 11.

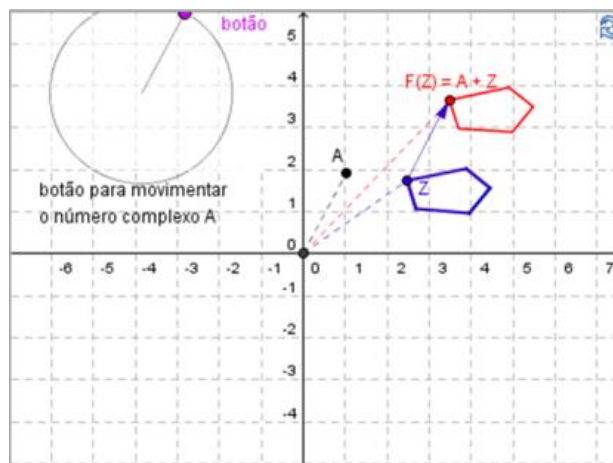


Figura 11 – Números complexos no GeoGebra. Fonte: Monzon, 2012.

Após a exploração do arquivo dinâmico, na qual cada manipulação gera uma nova configuração na figura – portanto, são efetuados sucessivos tratamentos no registro dinâmico – os alunos deveriam responder perguntas utilizando registros algébricos e na língua materna. Portanto, observamos a conversão entre registros diferentes, facilitadas pelo dinamismo do software, relacionando as componentes conceitual e figural do conceito em estudo.

Ainda, embora não seja a abordagem da pesquisadora, podemos inferir que a sequência de atividades proposta encaminha seus estudantes para a formação de imagens conceituais adequadas, uma vez que as figuras dinâmicas relacionam corretamente o conceito e sua representação figural. Conforme Monzon (2012), a utilização do objeto de aprendizagem construído no GeoGebra foi

Adequado para desencadear processo de aprendizagem que contempla trabalho com os registros algébrico e geométrico. E mais, foi possível observar que, via a manipulação das animações, os alunos foram constantemente provocados nas conversões de registro e assim desenvolveram esquemas de uso na direção do ensino almejado – entender as ideias matemáticas em diferentes sistemas de representação” (Monzon, 2012, p. 114).

Portanto, observamos nessa experiência o potencial dos registros dinâmicos para compreender conceitos que possuem um grau de complexidade relativamente alto, em especial pela dificuldade em se formar imagens conceituais adequadas através de desenhos estáticos.

Também observamos a utilização da Teoria de Registros de Representação Semiótica como subsídio teórico para a utilização do GeoGebra para a aprendizagem de matemática na pesquisa de Neto (2010). O pesquisador identifica dificuldades inerentes ao processo de aprendizagem de conceitos em matemática pelos estudantes, pois

O mundo que os cerca é cheio de objetos concretos para iniciarem sua aprendizagem, de maneira mais espontânea, nessa área do conhecimento. Porém ao se defrontarem com a necessidade de elaborar conceitos mais complexos e abstratos necessitam da “concretização mental”, que nem sempre é simples (Neto, 2010, p. 64)

A utilização de ambientes de matemática dinâmica é considerada, então, uma possibilidade de contribuir para os processos de concretização mental dos estudantes; aqui, compreendemos vínculo estreito entre essa noção e as noções de imagens mentais e imagens conceituais, que abordamos anteriormente. Para Neto (2010), a utilização do dinamismo possibilitada por este tipo de ambiente

apresenta algumas vantagens como por exemplo o fato de poder realizar vários experimentos em pouco tempo, diferentemente da manipulação concreta. Assim a ação pode favorecer ainda mais o processo de investigação e abstração, com a consequente construção de conceitos e relações. (Neto, 2010, p. 65)

Neto (2010) realizou uma oficina com estudantes de curso técnico integrado ao Ensino Médio durante a disciplina de Eletricidade. Utilizando o GeoGebra, foi desenvolvida uma sequência didática tratando de funções trigonométricas, funções em geral e o círculo trigonométrico.

Em uma das atividades da oficina, o software foi utilizado para, a partir do círculo trigonométrico, identificar a variação das funções seno e cosseno (Figura 12). Uma construção como essa, de modo estático, não somente seria extremamente trabalhosa, como não forneceria a riqueza de processos mentais vinculados aos registros dinâmicos envolvidos.

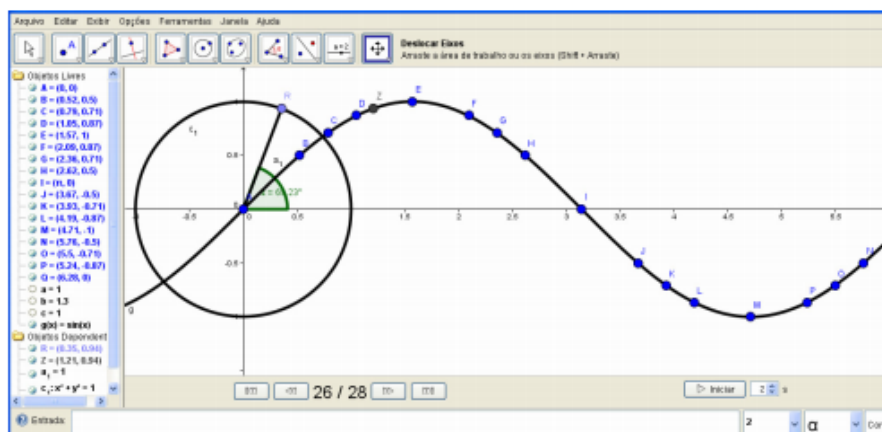


Figura 12 – Função trigonométrica no GeoGebra. Fonte: Neto, 2010.

Avaliando as experiências realizadas, Neto (2010) afirma que seus estudantes, manipulado de forma dinâmica objetos abstratos como são as funções trigonométricas, “puderam perceber que tais abstrações possuem uma ‘concretude’, que pode ser manipulada através das suas diferentes representações”. (Neto, 2010, p. 100).

Os diferentes estudos que analisamos – Bernd (2011, 2016), Borsoi (2016), Carlos (2017), Monzon (2012) e Neto (2010), dentre outros que contribuíram para o alinhamento teórico de nossa pesquisa – exemplificam de modo contundente a utilização da matemática dinâmica como uma ferramenta com muitas possibilidades de contribuição para a aprendizagem de matemática.

A geometria analítica, assunto que iremos abordar na nossa proposta didática, também pode fazer o uso do GeoGebra e seus recursos dinâmicos de representação para contribuir para a formação de imagens conceituais adequadas. Considerando que a geometria analítica relaciona a geometria com a álgebra, ponderamos que a escolha pelo software GeoGebra é pertinente.

Gravina e outros (2010) enfatizam as possibilidades do estudo de geometria analítica com a utilização deste software, destacando que isso se observa a partir do próprio nome do software que funde geometria (Geo) com álgebra (Gebra). Com o GeoGebra também é possível trabalhar as figuras sob o ponto de vista analítico. Para isso, basta selecionar os menus “Exibir Eixos” e “Exibir Janela de Álgebra” e aos objetos geométricos construídos são associados, por exemplo, as coordenadas dos

pontos, as equações das retas, as equações dos círculos. (Gravina e outros, 2010, p. 44).

Assim, concluímos nossa fundamentação teórica, compreendo-a como subsídio fundamental para a concepção da sequência didática proposta a seguir, bem como o referencial para sua devida análise e validação.

### 3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, inicialmente, descrevemos com detalhes o contexto da pesquisa: escola, estudantes, recursos e estruturas disponíveis para o desenvolvimento dos encontros. Definiremos, também, a metodologia de *estudo de caso* para o desenvolvimento da pesquisa, justificando tal escolha.

Na segunda seção do capítulo, apresentamos a sequência didática proposta. Para cada um dos momentos de aprendizagem, descreveremos as atividades que serão realizadas e os seus objetivos, sempre fazendo referências à fundamentação teórica estabelecida no capítulo 2.

#### 3.1 Contexto e metodologia da pesquisa

O público participante do experimento foi formado por alunos de uma escola da rede particular de ensino de Porto Alegre, da qual o autor da dissertação era, então, docente – o Colégio Monteiro Lobato. Esta escola situa-se no Bairro Boa Vista, bairro de classe média-alta do referido município. Em seus primórdios, em meados dos anos 1970, a escola – então chamada Trenzinho Alegre – oferecia apenas Educação Infantil. No início dos anos 1990, devido ao grande interesse por parte das famílias, teve seu nome alterado para o atual, Colégio Monteiro Lobato, e passou a oferecer a educação referente ao Ensino Fundamental e, ao final da mesma década, implantou o Ensino Médio.

Trata-se, portanto, de uma escola cuja história em Ensino Fundamental e Médio é bastante recente; especialmente, se comparada a outras escolas de mesmo porte econômico-social e da mesma região da cidade. Porém, desde sua concepção, o Projeto Político Pedagógico desta instituição era bastante inovador e diferenciado, fornecendo amplo espaço para o desenvolvimento de ações didáticas voltadas à pesquisa. Inclusive, tal marca é efetivamente atrelada ao nome da escola em slogans publicitários: “Colégio Monteiro Lobato – Aprender pela Pesquisa”.

Por conseguinte, avaliamos que o ambiente escolar no qual nossa pesquisa esteve inserida pode ser descrito com bastante propício para uma ação didática diferente do que costuma ser considerado convencional, dado que a própria instituição



valoriza e incentiva a realização de projetos. Não entraremos na discussão de que tipo de projetos são esses, enquanto concepção teórica; tal discussão indubitavelmente incorreria em outra dissertação.

A sequência didática projetada para o experimento trata de tópicos de Geometria Analítica. Foram estudados conceitos relativos a sistemas de coordenadas cartesianas, diferentes equações de retas e posições relativas entre retas. Explorando de forma lúdica os registros dinâmicos do GeoGebra, foi realizada uma primeira atividade que denominamos “números comandando pontos” – em associação às noções de geometria analítica que foram tratadas posteriormente na sequência didática.

Participaram do experimento vinte e dois alunos e a sequência didática foi desenvolvida durante o horário regular da turma. Na escola os estudantes costumemente sentam em duplas; nas nossas atividades, sentariam em grupos. Foram formados 6 grupos, com três ou quatro alunos cada, que seriam definidos por eles no início do trabalho. Utilizando notebooks e tablets, eles realizaram as diferentes atividades da sequência didática.

A sala de aula tem um computador com tela de grandes dimensões no fundo da sala, que permitiria, no âmbito do nosso projeto, uma visualização coletiva de construções no software. Este *telão* – como passaremos a nos referir – seria usado, em especial, no momento de sistematização e formalização de conceitos, com o professor manipulando construções e discutindo ideias com os estudantes utilizando seus dispositivos. Detalharemos esta ação didática mais adiante.

Os encontros de implementação da sequência didática tiveram diferentes momentos de aprendizagem, num total de 11 horas-aula. Algumas aulas tiveram a duração de 50 minutos – uma hora aula – e outras tiveram a duração de 100 minutos – duas horas aula, não necessariamente no mesmo dia. A peculiaridade da divisão das aulas foi motivada pelo horário da componente curricular Matemática para essa turma; 4 períodos semanais, sendo 2 num mesmo dia e 2 em dias distintos.

O experimento foi antecedido por um momento inicial de aprimoramento do conhecimento dos estudantes em relação ao GeoGebra, pois pouco sabiam sobre o software. No período letivo anterior, quando então no Segundo Ano do Ensino Médio, haviam utilizado esta ferramenta uma primeira vez, no estudo das funções trigonométricas. Naquela oportunidade, construíram no plano cartesiano os gráficos das funções e analisaram os movimentos de translação horizontal, translação vertical,

reflexão horizontal, reflexão vertical, e demais transformações típicas das funções seno e cosseno, de acordo com a alteração de parâmetros.

Ainda, durante o decorrer do ano letivo de 2016 – ano da realização da nossa prática e os alunos no Terceiro Ano do Ensino Médio – em diversas situações proveitosamente utilizamos o software GeoGebra em nossas aulas. Em certas ocasiões, tal utilização foi mediante exposição do professor, em complemento a demais ações didáticas dos assuntos estudados em Geometria Plana e em Geometria Espacial. Já em outras, os próprios estudantes exploraram o software, visando compreender algum tema em particular e que, por nosso julgamento, necessitava de manipulação e reflexão individual ou junto a seus pares.

No que diz respeito ao objeto de estudo da sequência didática – conceitos de Geometria Analítica –, destacamos que se trata de um conteúdo a ser introduzido, tendo como conhecimentos prévios dos estudantes as noções de plano cartesiano e de função afim trabalhadas no Primeiro Ano do Ensino Médio.

Importante também destacar que os estudantes, no mesmo ano letivo em que nossa sequência didática foi desenvolvida, já haviam estudado diversos conceitos de geometria plana – que é um assunto pertencente ao currículo do Terceiro Ano do Ensino Médio na escola em questão – e, portanto, já estavam familiarizados com as noções de paralelismo, concorrência e perpendicularidade entre retas no plano. Logo, as atividades propostas para este momento já partem diretamente para o estudo analítico de retas: primeiramente paralelas, seguido do caso de perpendiculares.

A coleta de dados ocorreu durante a operacionalização da sequência didática por parte do professor e autor desta pesquisa. Foram utilizados: diário de bordo, produções dos estudantes – incluindo os arquivos contendo as construções no software GeoGebra –, formalizações coletivas elaboradas por alunos e professor, imagens em geral, fotos e pequenos vídeos dos momentos de aprendizagem e declarações dos estudantes participantes.

Nossa pesquisa teve como opção metodológica o *estudo de caso*. Conforme Ponte (2006):

Na Educação Matemática, os estudos de caso têm sido usados para investigar questões de aprendizagem dos alunos bem como do conhecimento e das práticas profissionais de professores, programas de formação inicial e

continua de professores, projetos de inovação curricular, novos currículos, etc. (Ponte, 2006, p. 3).

Por estudo de caso no âmbito de pesquisas sobre aprendizagem matemática, consideramos a definição usada por Ponte (2006, p.7), como sendo “uma investigação de natureza empírica. Baseia-se fortemente em trabalho de campo ou em análise documental. Estuda uma dada entidade no seu contexto real”.

Não necessariamente, mas preferencialmente, uma pesquisa do tipo estudo de caso busca desenvolver, segundo Ponte (2016, p. 8) “um profundo alcance analítico, interrogando a situação, confrontando-a com outras situações já conhecidas e com as teorias existentes. Pode assim ajudar a gerar novas teorias e novas questões para futura investigação”. Contribuir para o debate no campo da Educação Matemática, a partir de uma experiência particular, mas estabelecendo vínculos com a fundamentação teórica estabelecida, determina nossa opção metodológica.

A escolha por tal metodologia, ainda, se fundamenta em aspectos do uso de tecnologias na educação matemática que serão explorados a partir dos referenciais teóricos da pesquisa. A saber, os registros de representação semiótica e, em especial, registros dinâmicos, assim como a análise das imagens conceituais que estariam sendo formadas pelos estudantes durante desenvolvimento de novas habilidades e conhecimentos matemáticos. Avaliamos que a análise destes aspectos cognitivos da aprendizagem matemática pode ser melhor desenvolvida num trabalho de campo com forte caráter documental e analítico, característicos do estudo de caso.

### 3.2 Sequência didática

Na aula imediatamente anterior à implementação da sequência didática, os estudantes fizeram pequenas atividades orientadas e outras ações de livre manipulação, além de terem acompanhado a apresentação, por parte do professor, de como proceder para fazer uso da ferramenta *controle deslizante*. A opção de realizar este momento anterior ao início efetivo da sequência se justifica pelo fato de os estudantes não conhecerem este comando do software. E, para tirar maior proveito da proposta de atividades para o início do experimento, optamos por proporcionar a

familiarização dos estudantes com essa ferramenta do GeoGebra – a qual será apresentada a seguir.

Nesta seção descreveremos as atividades que compõem a sequência didática implementada, bem como as correspondentes ações didáticas. As atividades serão agrupadas em *Momentos* – numerados de 1 a 5 –, de acordo com o tema em estudo. Os Momentos se caracterizam por diferentes ações didáticas, sempre visando a aprendizagem do tema em questão. Estas ações didáticas são caracterizadas a seguir.

- O trabalho referente a um dado tema inicia com a realização de atividades de cunho exploratório, que fazem uso de arquivos GeoGebra construídos previamente pelo professor. O objetivo é provocar, ainda de forma intuitiva, a formação de primeiras ideias sobre o assunto.

- Segue-se então a ação didática que propõe a realização de atividades que exigem pensamento generalizador, aqui com a produção de construções pelos estudantes ou exploração de outros arquivos. Estas atividades possuem maior grau de complexidade; os estudantes, junto a seus pares, devem encontrar soluções para as perguntas que conduzem à compreensão de determinados conceitos. Nesta fase o professor busca ter interferência mínima, tratando de responder as perguntas dos estudantes com novos questionamentos e provocações.

- A terceira ação didática é marcada pela sistematização e formalização de ideias. O professor tem um importante papel e geralmente faz uso do telão; ele busca incentivar os alunos para que apresentem suas conclusões quanto a conceito aprendido e as propriedades observadas e para que explicitem suas dúvidas. Sempre fazendo o uso de algum arquivo GeoGebra, o professor estimula a discussão para que desta forma se finalize o tema do Momento, na medida do possível, com a formação de imagens conceituais corretas.

Nem todos os Momentos de Aprendizagem possuem as três ações didáticas, que variam conforme as intencionalidades particulares de cada Momento. O Quadro 1 apresenta os conteúdos desenvolvidos ao longo do experimento, as atividades propostas e as ações didáticas necessárias em cada Momento de Aprendizagem.

MOMENTOS DE APRENDIZAGEM		
CONTEÚDOS	ATIVIDADES	AÇÕES DIDÁTICAS
Momento 1: Coordenadas de pontos no plano.	Atividades do tipo “Números comandando pontos”, com a	Utilização de controle deslizantes para a criação de

	construção de figuras a partir de pontos dinâmicos.	pontos que, variando conforme o número do controle deslizante, geram figuras. As ações variam de exploração intuitiva à utilização de pensamento generalizador. Devem ser criadas estratégias visando produzir os efeitos necessários para as figuras, utilizando a todo momento o conceito de coordenadas de pontos e a conversão entre registro algébrico e gráfico.
Momento 2: Equações de retas em casos particulares: retas verticais, retas horizontais, retas na forma “ $y = ax$ ” (sem fazer menção ao coeficiente angular).	Atividades de exploração de figuras dinâmicas construídas com controle deslizante, nas quais um ponto dá origem a uma linha reta, dando significado primitivo à equação da reta como “uma expressão que caracteriza os pontos que pertencem à reta”.	As ações são do tipo exploração intuitiva, visando formar as primeiras ideias a respeito de equações de retas. O dinamismo do software é utilizado para produzir o efeito de linha reta a partir de controles deslizantes, e o objetivo é obter de modo incipiente a expressão algébrica que caracteriza retas em casos particulares.
Momento 3: Significado do coeficiente angular e equações de retas na forma “ $y = ax$ ”, significado do coeficiente linear e equações de retas na forma “ $y = x + b$ ”, e equações de retas na forma “ $y = ax + b$ ”.	Atividades sequenciais, utilizando arquivos dinâmicos e construção de arquivos com conversões entre registros algébricos e registros gráficos, para identificação dos significados de coeficiente angular e de coeficiente linear, culminando na equação de reta na forma $y = ax + b$ , e a obtenção de equações de retas dados dois pontos.	As primeiras ações são de generalização de ideias sobre coeficiente angular, passando para ações de sistematização e formalização das ideias a partir do uso de registros dinâmicos. A seguir, tem-se ações em três etapas – exploração intuitiva, generalização e sistematização – para o conceito de coeficiente linear. As últimas ações são de sistematização de conceitos relativos a retas com equações na forma “ $y = ax + b$ ”, em discussão coletiva conduzida pelo professor.
Momento 4: Posições relativas entre retas: retas paralelas e retas perpendiculares.	Atividades sequenciais, utilizando arquivos dinâmicos e construção de arquivos com conversões entre registros algébricos e registros gráficos, para a identificação dos atributos analíticos que caracterizam retas paralelas e retas perpendiculares, e a obtenção de retas paralelas e retas perpendiculares a uma reta dada.	Para retas paralelas, as primeiras ações são de exploração intuitiva em figuras dinâmicas. Com as mesmas figuras, a partir da manipulação, tem-se a generalização e sistematização de ideias. Para retas perpendiculares, a exploração intuitiva é feita para casos particulares. A seguir, figuras dinâmicas dão suporte para as ações de generalização e sistematização de ideias.
Momento 5: Vetores no plano, ortogonalidade de vetores e equações de retas na forma “ $Ax + By + C = 0$ ” via vetor normal.	Atividades sequenciais conceituando vetores no plano e a obtenção da relação que caracteriza a ortogonalidade de vetores através de conversões	As primeiras ações são de exploração intuitiva do conceito de vetor através da manipulação de figuras dinâmicas. A seguir, o conceito

	<p>entre registros dinâmicos e registros algébricos e tratamentos nos dois tipos de registros.</p> <p>Após, exploração de arquivo dinâmico e tratamentos algébricos obtendo a equação de uma reta via vetor normal. Ao final, tem-se atividades de verificação de aprendizagem, com a construção de retas dado o vetor normal, através de conversões entre registros gráficos e algébricos.</p>	<p>é sistematizado em discussão coletiva conduzida pelo professor.</p> <p>A seguir, tem-se atividades de exploração intuitiva, seguidas de atividades de generalização de ideias, sobre ortogonalidade de vetores, através de registros dinâmicos e conversões para registro algébrico.</p> <p>Na sequência, ações de sistematização de ideias para a obtenção da equação na forma "<math>Ax + By + C = 0</math>" via vetor normal, em discussão coletiva conduzida pelo professor.</p>
--	---	---

Quadro 1 – Conteúdos, atividades e ações didáticas dos Momentos. Acervo pessoal.

Tem-se ao longo dos diferentes momentos, dois tipos de intervenção do professor. O primeiro tipo ocorre quando os alunos, organizados em grupos, exploram o tema e tratam de resolver as atividades propostas; aqui a ação do professor tem o intuito de verificar o desenvolvimento das atividades e ele circula pela sala registrando anotações no diário de bordo, capturando imagens ou vídeos, e, simultaneamente troca ideias com os estudantes sobre as atividades, mas sem fornecer respostas.

O segundo tipo de intervenção do professor é após os alunos terem feito as atividades que provocam a generalização de ideias e a construção de arquivos relativos as resoluções das questões propostas. É a etapa de sistematização das explorações feitas pelos alunos, intencionalmente, de forma bastante independente. Julgamos necessária esta ação docente, mais propositiva e de formalização, pois é aqui que o professor discute com os alunos os equívocos que podem comprometer a adequada construção de imagens conceituais.

Evidentemente, não se trata de situação de mera exposição feita pelo professor; os alunos são incentivados a participar e atuar ativamente, trazendo suas conclusões sobre os conceitos. É com a manipulação de arquivos construídos previamente – professor junto à tela de computador, e alunos nos seus dispositivos – acompanhada de discussão coletiva que é finalizado o tema do Momento.

A respeito dos arquivos "construídos previamente", uma expressão a ser usada na descrição de algumas atividades: tal expressão indica que a atividade consiste em explorar um arquivo GeoGebra já construído pelo professor. Ou seja, a figura dinâmica

pronta na tela do computador possui atributos de forma a evidenciar aspectos do objeto de estudo.

A seguir detalhamos as atividades dos cinco Momentos que constituem a sequência didática.

### 3.2.1 Momento 1

Este momento, com duração de duas horas-aula, é planejado objetivando a compreensão da representação de pontos no plano a partir da conversão entre registros algébricos (par ordenado) e gráficos (representação no plano cartesiano). No caso dos alunos da nossa sequência didática, o conceito de par ordenado já é conhecido. Além de ter sido abordado no estudo de funções, no Primeiro Ano do Ensino Médio, também foi usado durante a aprendizagem de funções trigonométricas, no Segundo Ano do Ensino Médio, ocasião em que fui professor da turma. Na época, foi enfatizado o caráter de localização que o par ordenado de números reais fornece a um ponto no plano, bem como a conversão entre o registro algébrico e o registro gráfico.

As atividades do Momento 1 propõem aos alunos uma série de construções do tipo *números comandando pontos*, a partir da criação de *controles deslizantes*. Este é um recurso disponível no menu de construções do GeoGebra (Figura 13), a ser apresentado aos alunos. De forma breve apresentamos este recurso, fazendo uso de uma sequência de imagens da tela do GeoGebra.

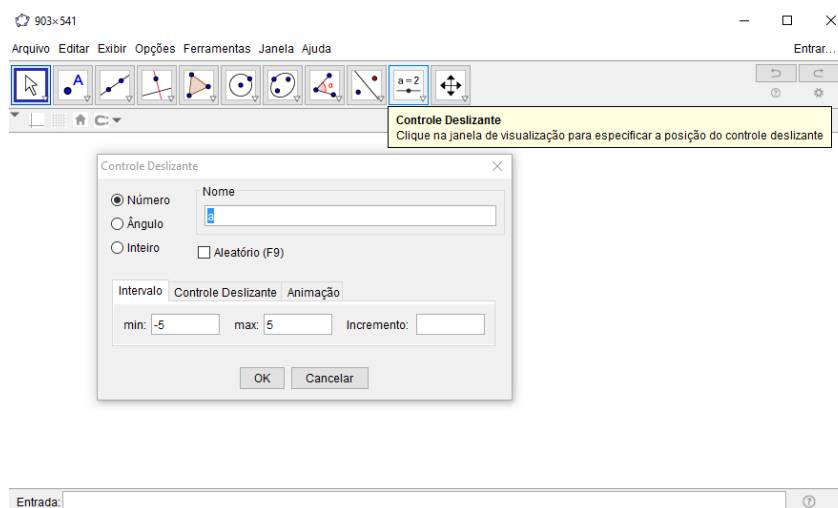


Figura 13 – O recurso *controle deslizante* do software GeoGebra. Acervo pessoal.

O controle deslizante é um número (pode ser um ângulo ou um número estritamente inteiro, mas não nos aprofundaremos nessa distinção). Seu uso é realizado da seguinte forma: uma vez criado o controle deslizante, podemos criar objetos que são controlados por este número. Estes objetos podem ser diversos: pontos, funções, segmentos com medida específica, círculo cujo raio é uma medida específica, conforme a intencionalidade da construção. Por exemplo, se o controle deslizante for denominado **a**, se construirmos o ponto  $(a, 2)$ , este ponto terá sua abscissa numericamente igual ao valor **a**; se o número **a** for alterado, o ponto  $(a, 2)$  tem suas coordenadas – e sua representação no plano – atualizadas automaticamente.

A seguir, deve ser criado um ponto no plano, de modo que uma de suas coordenadas seja determinada pelo número **a** do *controle deslizante* (Figura 14).

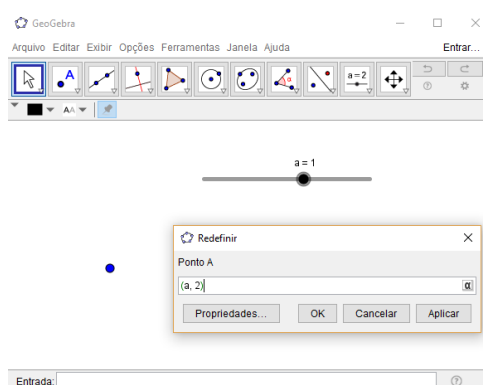


Figura 14 – Ponto controlado por um número. Acervo pessoal.

Ainda, podemos ativar a função *habilitar rastro*, que revela o percurso de um objeto que varia de acordo com um número, ou seja, mostra a sucessão de posições no plano ocupadas pelo objeto, cuja definição é estabelecida a partir do número definido pelo controle deslizante.

Modificando o valor do controle deslizante, observa-se o que ocorre com o ponto. (Figura 15). A intenção é criar uma linha reta com determinada “medida”, a partir de um ponto dinâmico controlado por um número que varia.



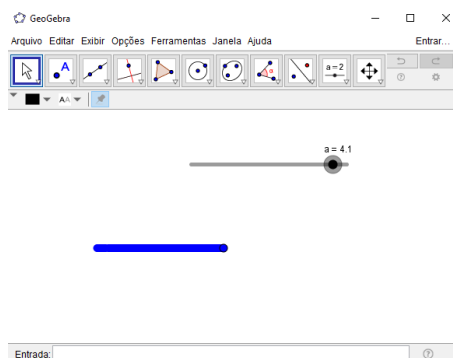


Figura 15 – Função *habilitar rastro*. Acervo pessoal.

É neste espírito de construção de segmentos a partir de pontos controlando por números que os estudantes devem reproduzir as diferentes imagens da Figura 16, que ficou disponível no telão durante a toda realização deste Momento. Não são dados os tamanhos dos lados das figuras e a proporção entre eles, decisão a ser tomada pelos estudantes, o que já constitui parte de estratégia de resolução.

Utilizando controles deslizantes, realize cada uma das construções sugeridas a partir das imagens abaixo.

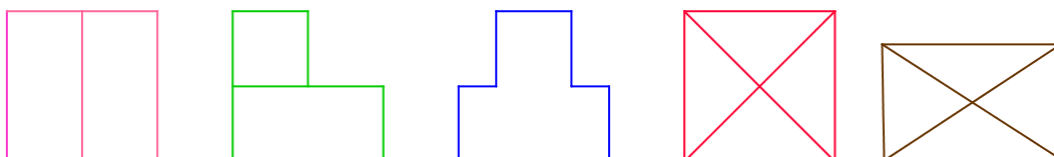


Figura 16 – Atividades 1, 2, 3, 4 e 5 do Momento 1. Acervo pessoal.

Esta atividade provoca o uso do dinamismo do software. Ainda, o seu dinamismo permite construção de pontos em variadas posições no plano cartesiano, abrangendo situações que geralmente geram dúvidas nos estudantes – pontos sobre o eixo  $OX$ ? pontos sobre o eixo  $OY$ ? ordem das coordenadas do par ordenado? coordenadas com sinais negativos? entre outras dúvidas.

Para melhor compreensão da atividade proposta, vamos detalhar a construção da terceira imagem, a de cor azul. Como é um polígono com oito lados, são necessários oito pontos a serem comandados por um único controle deslizante (Figura 17).

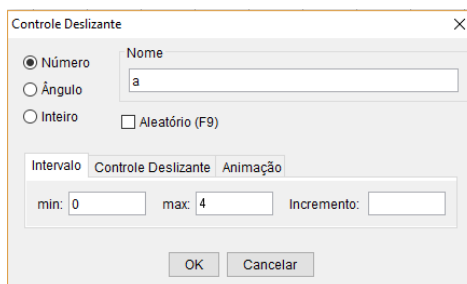


Figura 17 – Controle deslizante para a Atividade 3. Acervo pessoal.

Escolhemos o número variando entre 0 e 4 para permitir a construção de um lado com medida 4, cinco lados com medida 2 e dois lados com medida 1, seguindo a proporção que sugere a imagem orientadora da atividade. A Figura 18 ilustra a construção que a ser realizada.

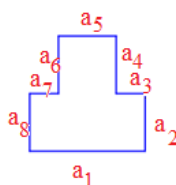


Figura 18 – Construção por etapas da figura da Atividade 3 do Momento 1. Acervo pessoal.

Inicialmente, construiremos o lado  $a_1$ . Como este lado é horizontal e com medida 4, construiremos um ponto dinâmico de coordenadas  $(a, 0)$ , de modo que a abscissa varie de 0 a 4 e a ordenada fique estática. Assim, temos o início da construção, conforme a Figura 19.

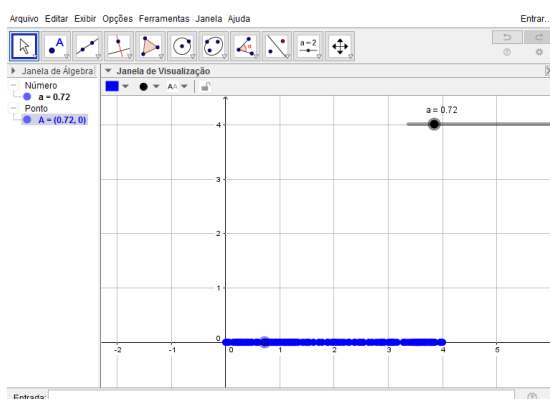


Figura 19 – Construção do primeiro lado da figura da Atividade 3 do Momento 1. Acervo pessoal.

A seguir, construiremos o lado  $a_2$  a partir de um ponto dinâmico com coordenadas  $(4, a/2)$ , de modo que a abscissa seja estática (e igual a 4, para encontrar o lado  $a_1$ ) e que a ordenada tenha medida 2 – pois com  $a$  variando de 0 a 4,  $a/2$  varia de  $0/2$  a  $4/2$ . A Figura 20 ilustra o resultado obtido.

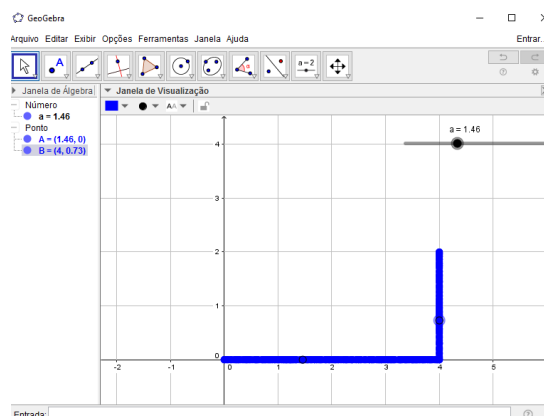


Figura 20 – Construção do segundo lado da figura da Atividade 3 do Momento 1. Acervo pessoal.

A seguir, devemos construir o lado  $a_3$ , com medida 1, e consecutivo ao lado  $a_2$ . Para tanto, construiremos um ponto dinâmico com coordenadas  $(4 - a/4, 2)$ , de modo que a abscissa varie entre 3 e 4, pois com  $a$  variando entre 0 e 4 temos que  $4 - a/4$  varia de 4 a 3, e que a ordenada fique estática e igual a 2. Fazendo isto, obtemos a imagem ilustrada a seguir (Figura 21).

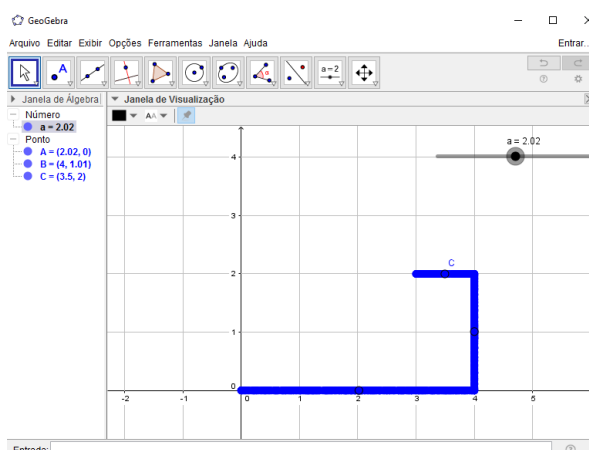


Figura 21 – Construção do terceiro lado da figura da Atividade 3 do Momento 1. Acervo pessoal.

As construções dos demais lados da figura segue a lógica das construções anteriores. Evidentemente, não há forma única de realizar cada uma das partes que

compõe a figura. Como ilustração desta afirmação, o lado  $a_3$  poderia ter sido construído utilizando um ponto de coordenadas  $(3 + a/4, 2)$ , pois a abscissa também iria variar entre 3 e 4, conforme desejado.

A expectativa com a resolução das atividades é que os estudantes desenvolvam um raciocínio generalizador que relacione com clareza pontos às suas coordenadas, no sentido de compreender o caráter algébrico, suas coordenadas, e gráfico, sua representação no plano. Neste Momento, as ações didáticas se caracterizam por construção de total autoria dos estudantes, pois são eles que devem criar os números – controles deslizantes – e os pontos controlados por eles, e devem fazê-lo com a intencionalidade de provocar o efeito geométrico solicitado pela tarefa.

Ainda, as ações dos estudantes neste Momento incluem sucessivas conversões entre registros algébricos e geométricos. Devem ser criados pontos com coordenadas que, alteradas por um número variável, realizem o desenho desejado. Avaliamos que se trata de um conjunto de ações de alto grau de complexidade quanto à conversão entre registros.

### 3.2.2 Momento 2

O Momento 2, com duração de duas horas-aula, é o início do estudo da equação da reta “ $y = ax$ ” no plano cartesiano. São seis atividades evoluindo quanto à complexidade, que tratam de caracterizar a reta como “um conjunto de pontos do plano, dados por pares ordenados de números, com certa característica”.

Este Momento tem como objetivo elaboração do conceito de coeficiente angular de modo bastante exploratório, empírico e ainda sem formalização explícita. Em outras palavras, trata da primeira das três etapas que compunham, de um modo geral, os nossos conjuntos de atividades: a exploração intuitiva por parte dos estudantes, fazendo uso do dinamismo do software e dando início a formação de suas primeiras conjecturas sobre o tema e, conseqüentemente, iniciando a formação das imagens conceituais das noções sob estudo.

Nas Atividades 1 e 2, ao manipular o *controle deslizante*, os alunos devem observar que o ponto A desenha linhas horizontais e verticais (Figuras 22 e 23). A pergunta colocada para os alunos é:

Como você poderia caracterizar o conjunto de pontos assumidos pelo ponto A?

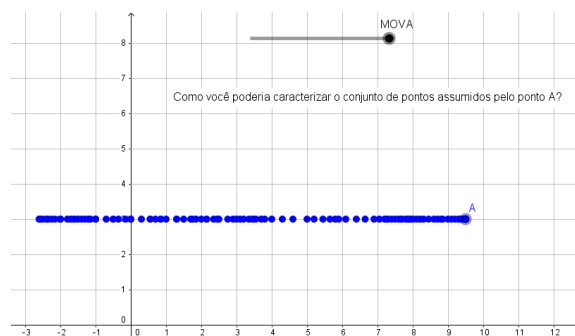
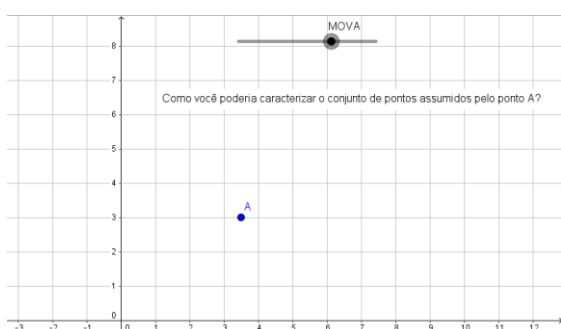


Figura 22 – Atividade 1 do Momento 2. Acervo pessoal.

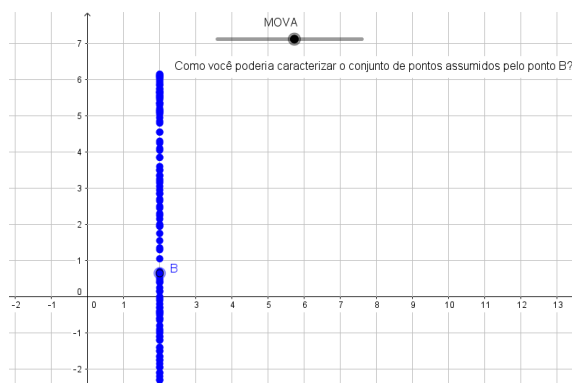
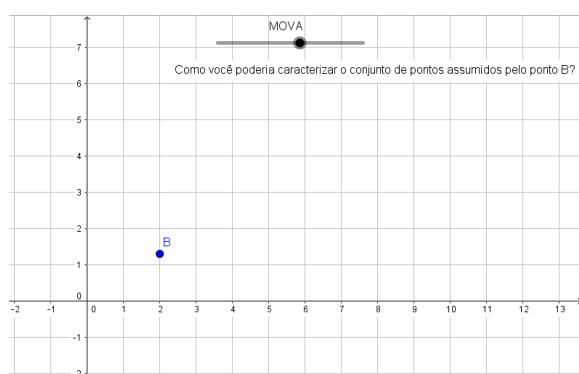


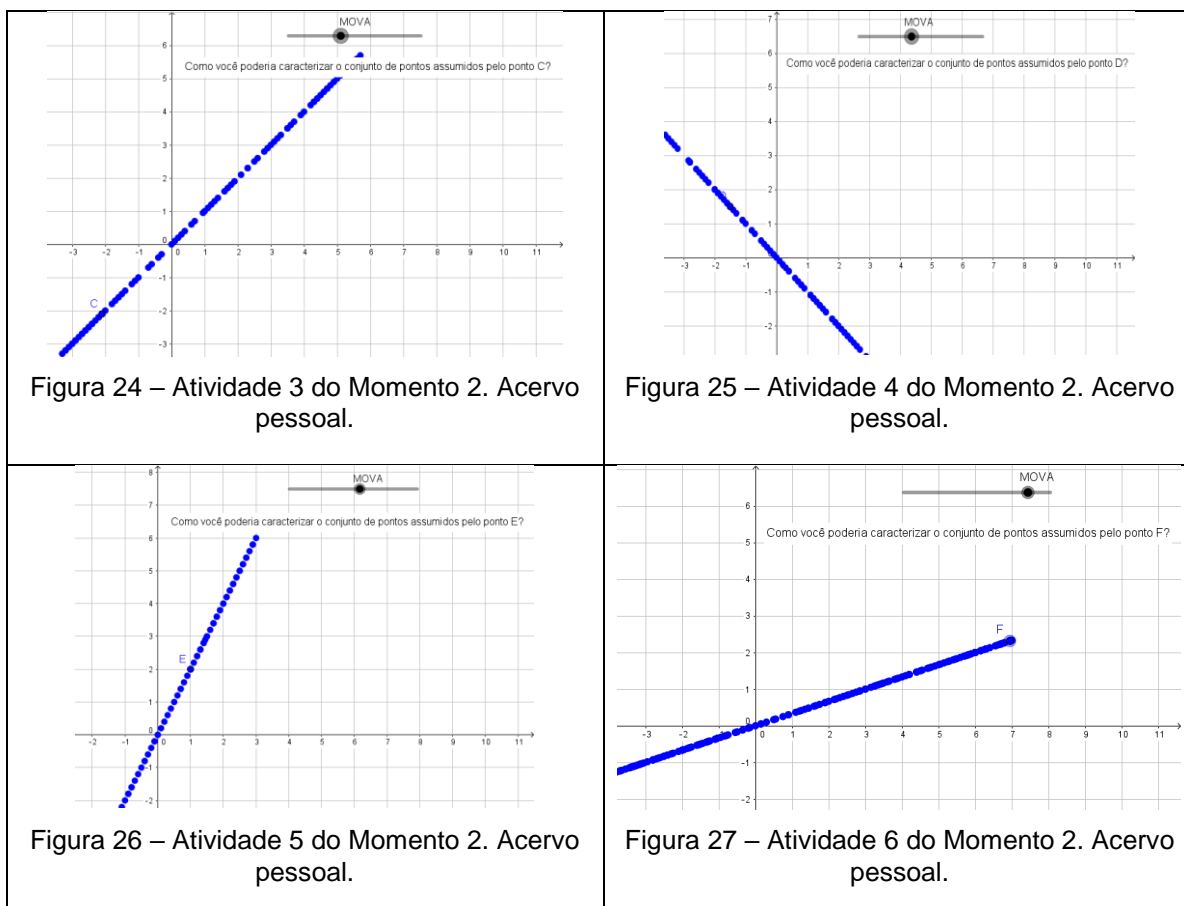
Figura 23 – Atividade 2 do Momento 2. Acervo pessoal.

Espera-se como respostas, no caso da linha horizontal: “pontos com y igual a 3” ou, então, a equação da reta “ $y = 3$ ”. Esta exploração intuitiva prepara para a ideia generalizadora de equação de reta horizontal “ $y = \text{constante}$ ”. No caso da linha vertical, espera-se: “pontos com x igual a 2” ou, então, a equação da reta “ $x = 2$ ”. De forma análoga, esta exploração intuitiva prepara para a ideia generalizadora de equação de reta vertical “ $x = \text{constante}$ ”.

Nas quatro atividades seguintes (3,4,5 e 6), de forma similar os alunos devem observar o desenho produzido pelo ponto A ao manipular o controle deslizante. Novamente, a pergunta colocada é:

Como você poderia caracterizar o conjunto de pontos assumidos pelo ponto A?

As Figuras 24, 25, 26 e 27 ilustram as linhas a serem observadas.



Na Atividade 3 (Figura 24) tem-se uma reta muito particular e espera-se que os estudantes, durante a ação de exploração intuitiva, possam concluir que todos os pontos gerados têm como característica “ordenada igual a abscissa” ou, ainda, “ $y = x$ ”.

Da mesma forma, na Atividade 4 (Figura 25) ainda se tem uma reta um tanto particular. Espera-se que aqui os estudantes possam responder de forma similar “ordenada igual ao oposto da abscissa” ou, ainda, “ $y = -x$ ”.

Na Atividade 5 (Figura 26) observa-se uma reta de tipo similar àquela da Atividade 3, mas com inclinação diferente. Espera-se que os estudantes, durante a ação de exploração intuitiva, possam constatar que todos os pontos gerados têm como característica “ordenada igual ao dobro da abscissa” ou, ainda, “ $y = 2x$ ”. Na Atividade 6 (Figura 27) ainda se tem uma reta do tipo crescente, e a agora a resposta dos alunos seria a equação “ $y = x/3$ ”.

Este Momento é marcado por ações didáticas caracterizadas por exploração intuitiva de arquivos construídos previamente (com a existência do ponto dinâmico e do controle deslizante que o altera). Portanto, cabe aos estudantes observar os registros dinâmicos – o que inclui a sequência de tratamentos no registro dinâmico – e, a partir desta observação, começar a formar as primeiras noções sobre o assunto sob estudo.

A sequência das atividades propostas até aqui objetiva que os estudantes comecem a formar ideias generalizadoras para retas na forma “ $y = ax$ ”. Nossa hipótese é de que a variedade de situações propostas e o aspecto visual da construção, proporcionado pelo dinamismo do software, permita aos estudantes conjecturar que retas com diferentes inclinações serão descritas algebricamente (ou em língua natural, se for o caso) de modo análogo.

Ainda, destacamos o papel do dinamismo do GeoGebra como facilitador da conversão entre registros gráficos – a linha reta desenhada no plano – e registros algébricos – a expressão que caracteriza os pontos que pertencem a essa linha reta.

### 3.3.3 Momento 3

Neste Momento de Aprendizagem, com duas horas-aula de duração, o conceito de equação de reta no plano cartesiano é entendido e definido com maior generalidade e rigor. A Atividade 1 é sobre a equação generalizadora “ $y = ax$ ” e visa a compreensão do conceito de coeficiente angular. Depois, é realizado o estudo de retas com equação “ $y = x + b$ ”. Ao final do momento, os estudantes identificam o significado dos coeficientes angular e linear para retas na forma “ $y = ax + b$ ”, com a sistematização dos conceitos.

A Atividade 1 (Figura 28) pede que os alunos agora escrevam as equações de uma família de retas que passam pela origem do sistema de coordenadas; ou seja, trata-se de conversão de registro geométrico para registro algébrico, porém agora na representação algébrica dada pela equação. A atividade, dada através de arquivo no GeoGebra, diz:

*Determine as equações que geram a composição indicada na figura abaixo.*

*Feita a construção, construa pontos dinâmicos sobre as retas.*

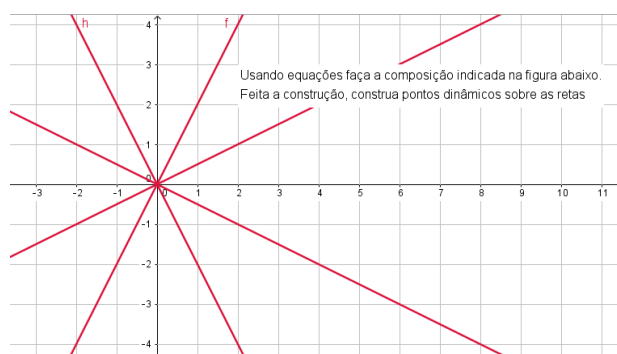


Figura 28 – Atividade 1 do Momento 3. Acervo pessoal.

Os alunos devem identificar a inclinação de cada uma das quatro retas e escrever suas equações na forma “ $y = ax$ ” (são as equações  $y = x$ ,  $y = -x$ ,  $y = 2x$  e  $y = x/2$ ). O objetivo é, portanto, realizar a conversão de registro gráfico para algébrico, contribuindo para a formação da imagem conceitual de coeficiente angular. O dinamismo do software é explorado, especialmente, na construção de pontos dinâmicos, cujas coordenadas variam de acordo com certa propriedade – por exemplo, para a reta “ $y = 2x$ ” o ponto dinâmico tem coordenadas  $(k, 2k)$ . Esta característica quanto às coordenadas do ponto dinâmico será incentivada, caso não ocorra com naturalidade

Na Atividade 2 (Figura 29), os alunos manipulam uma construção previamente feita pelo professor no GeoGebra. A atividade constitui a etapa de discussão coletiva na qual o objetivo é atribuir significado ao coeficiente ‘ $a$ ’ na equação da reta  $y = ax$ . Não há enunciado explícito para a atividade, que é explorada por professor e alunos.

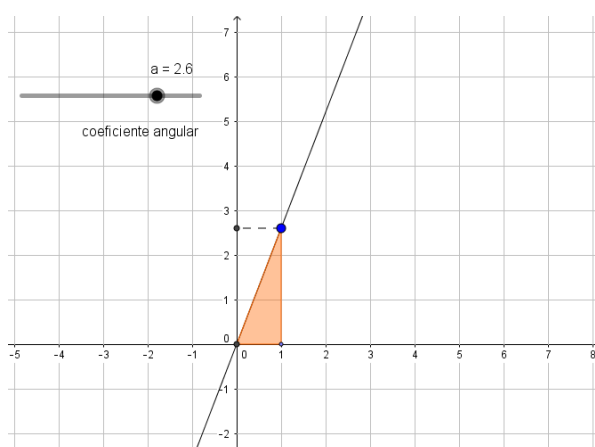


Figura 29 – Atividade 2 do Momento 3. Acervo pessoal.



Após a exploração feita pelos alunos, tem-se a ação didática de sistematização e formalização. O professor usa o telão e, em discussão com os alunos, manipula inicialmente o controle deslizante, enquanto os alunos fazem o mesmo nos seus laptops e tablets. É o momento de formalização do conceito de coeficiente angular. A Figura 30 representa uma sequência de possibilidades conforme é manipulado o arquivo.

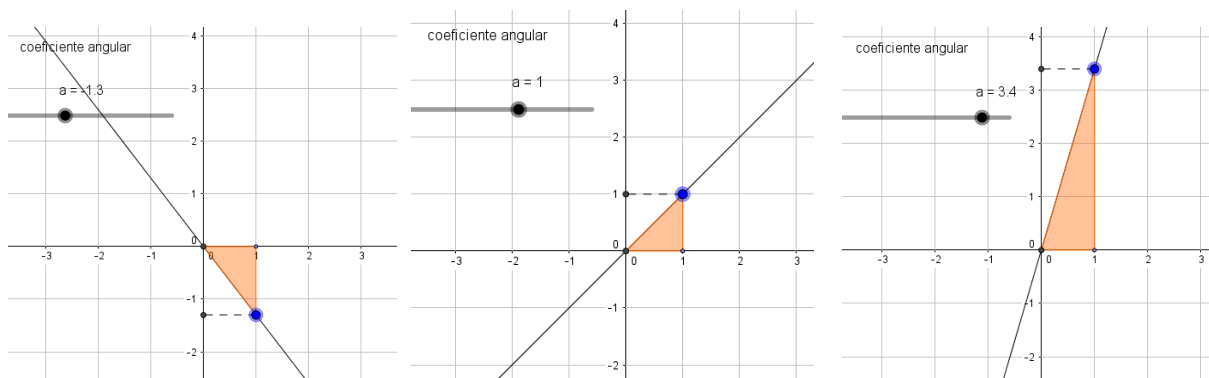


Figura 30 – Sequência de imagens da manipulação na Atividade 2 do Momento 3. Acervo pessoal.

A manipulação do controle deslizante muda a inclinação da reta: a informação da inclinação está no ponto  $(1, a)$ , destacado em azul, que determina um muito particular triângulo retângulo associado a reta. Para todas as retas sempre o triângulo tem cateto no eixo OX medindo 1 e o cateto paralelo ao eixo OY medindo  $a$ .

Depois o professor, junto com os alunos, aplica movimento no ponto vermelho sobre determinada reta. O objetivo é observar que existe proporção entre os “triângulos retângulos” determinados por diferentes pontos de uma mesma reta, obtidos a partir da manipulação do ponto vermelho em destaque (Figura 31). A malha quadriculada contribui para o entendimento.

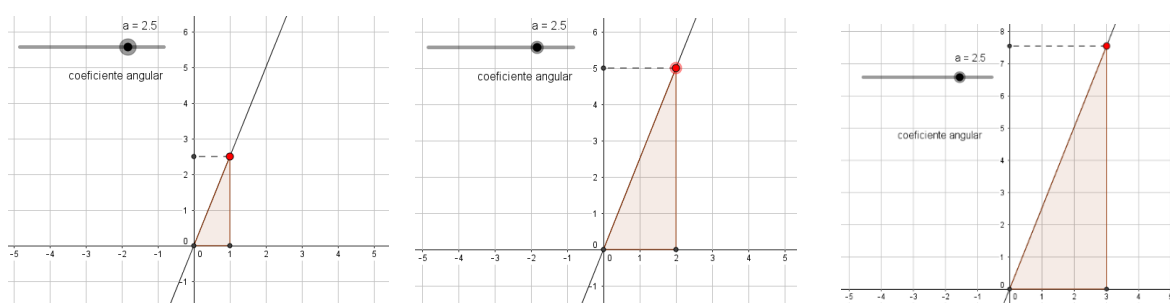


Figura 31 – Segunda sequência de imagens. Acervo pessoal.

Esta semelhança de triângulos prepara para a compreensão de que “para todos os pontos de uma mesma reta, tem-se uma razão constante entre variações de ordenadas e abcissas”. Esta estratégia é importante para a obtenção da equação de uma reta dados dois pontos, ação que será realizada na atividade a seguir.

Na Atividade 3 (Figura 32) os alunos são provocados a construir retas a partir de suas equações, dados dois de seus pontos. A atividade, disponibilizada via arquivo do GeoGebra, diz:

- a) *Construa, a partir da sua equação, a reta que passa pelos pontos (0,0) e (8, 24).*
- b) *Construa, a partir da sua equação, a reta que passa pelos pontos (0,0) e (36, 27).*
- c) *Construa, a partir da sua equação, a reta que passa pelos pontos (0,0) e (-30, 45).*

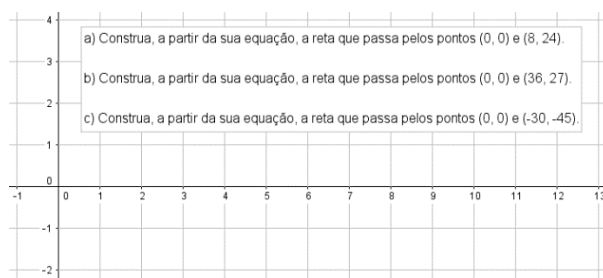


Figura 32 – Atividade 3 do Momento 3. Acervo pessoal.

A formalização do conceito de coeficiente angular, realizada na atividade anterior, contribui para a realização desta atividade. Os estudantes precisam observar a proporção da variação entre abcissas e ordenadas e, a partir desta proporção, determinar o coeficiente angular. Os pontos escolhidos têm coordenadas com valores numéricos “grandes” exigindo a utilização na noção de proporcionalidade.

Na Atividade 4 o objetivo é a compreensão do significado de coeficiente linear. Os alunos recebem um arquivo GeoGebra com um feixe de retas paralelas, uma delas passando pela origem (Figura 33), com a seguinte orientação:

- a) *Determinar as equações que geram a composição indicada na figura abaixo. Feita a construção, construa pontos dinâmicos sobre as retas.*
- b) *Determinar uma equação com o uso do recurso ‘controle deslizante’ gerando a composição indicada na figura.*

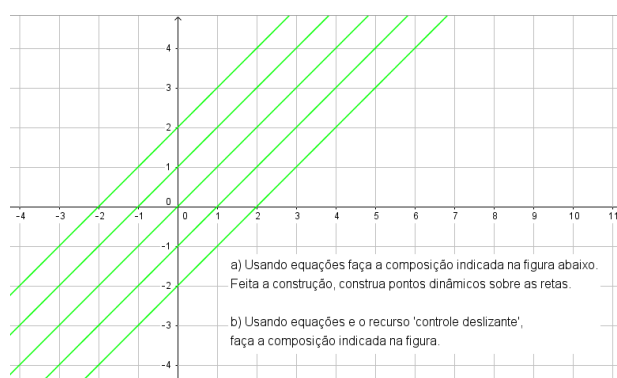


Figura 33 – Atividade 4 do Momento 3. Acervo pessoal.

A construção das retas a partir de suas equações tem como objetivo mostrar que as retas, por serem paralelas, têm o mesmo coeficiente angular. Neste feixe de retas os alunos devem identificar translações da reta de equação “ $y = x$ ”, ou seja, devem identificar as relações algébricas “ordenada igual a abscissa mais um”, “ordenada igual a abscissa menos 2”, etc., e obter as equações na forma “ $y = x + 1$ ”, “ $y = x - 2$ ”, etc. A atividade provoca a exploração intuitiva por parte dos estudantes – é de forma experimental que trabalham com conceito de coeficiente linear.

Já a construção por meio de *controle deslizante* tem o intuito de, através do dinamismo do software, mostrar que essa família de retas difere apenas por certo valor. Espera-se que os alunos, por si próprios, concluam que o valor coincide com a ordenada do ponto em que a reta intercepta o eixo OY. Portanto, esta segunda etapa constitui a etapa de generalização das ideias.

Na sequência, o professor conduz a ação didática de sistematizar e formalizar o conceito de coeficiente linear. O arquivo, previamente construído pelo professor, tem um controle deslizante que, ao ser manipulado, dá origem ao mesmo feixe de retas da atividade anterior. O professor usando o telão e os estudantes utilizando os seus dispositivos exploram a construção (Figura 34) a estabelecem a troca de ideias.

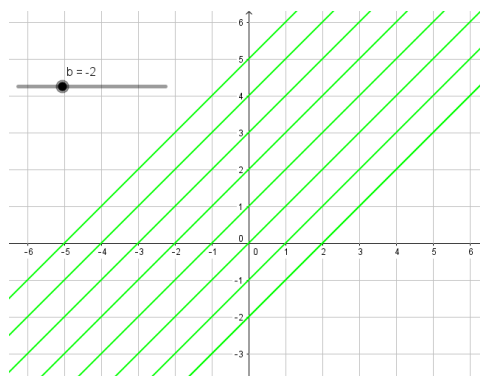


Figura 34 – Sistematização do conceito de coeficiente linear. Acervo pessoal.

A partir da discussão coletiva, o coeficiente **b** da equação “ $y = x + b$ ” é identificado como sendo o coeficiente linear da reta e é igual a ordenada do ponto em que a reta intercepta o eixo OY.

A Atividade 5 (Figura 35) pede a construção de retas conhecendo-se dois de seus pontos. Diz o enunciado da atividade, disponibilizado via arquivo GeoGebra:

- a) Construa, a partir da sua equação, a reta que passa pelos pontos (0, 3) e (11, 36).
- b) Construa, a partir da sua equação, a reta que passa pelos pontos (0, 2) e (30, -13).
- c) Construa, a partir da sua equação, a reta que passa pelos pontos (-4, 1) e (29, 45).

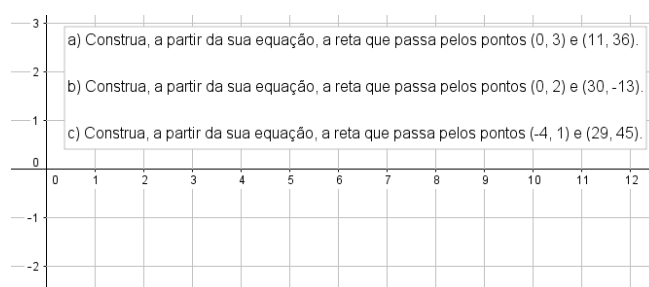


Figura 35 – Atividade 5 do Momento 3. Acervo pessoal.

Os estudantes devem identificar os coeficientes angular e linear e, então, escrever a equação da reta. Aqui, são utilizados os conceitos estudados ao longo das atividades anteriores iniciando o estudo do caso geral de retas na forma “ $y = ax + b$ ”. Nos três itens, o coeficiente angular deve ser obtido seguindo a estratégia utilizada na

Atividade 2 deste Momento. Nos itens (a) e (b) o coeficiente linear é dado a partir dos pontos na forma  $(0, b)$ .

O item (c) tem a exigência de etapas de resolução algébrica – tratamentos sobre o registro algébrico – para se obter o coeficiente linear. Ele deve ser obtido a partir do uso do coeficiente angular, determinado inicialmente, na variação entre o ponto  $(-4, 1)$  conhecido e o ponto  $(0, b)$  que se deseja determinar.

A Atividade 6 do Momento 3 (Figura 36) sistematiza e formaliza a equação da reta na sua forma reduzida “ $y = ax + b$ ”. Faz uso de um arquivo GeoGebra construído previamente, com dois controles deslizantes. Não há enunciado, pois se trata de momento coletivo em que o professor atua junto ao telão.

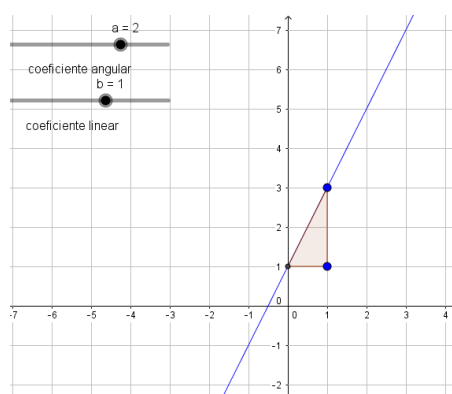


Figura 36 – Atividade 6 do Momento 3. Acervo pessoal.

Esta é a ação didática que constitui uma discussão coletiva: o professor manipula os controles, os alunos fazem o mesmo em seus dispositivos e se manifestam sobre o que está sendo observado na representação dinâmica. Os controles deslizantes, quando manipulados, mostram um registro dinâmico que pode ajudar os alunos na formação de imagem conceitual adequada para os coeficientes **a** e **b** da equação “ $y = ax + b$ ”.

Podemos resumir a proposta de trabalho para o Momento 3 da seguinte forma: entendimento do conceito de coeficiente angular; entendimento do conceito de coeficiente linear; equação de reta na forma “ $y = ax + b$ ”. Para os dois primeiros objetivos, são realizadas as ações didáticas de exploração intuitiva, generalização de ideias e sistematização do conceito. Para o terceiro, temos a realização de atividades clássicas da geometria analítica, seguida da sistematização do conceito a partir de discussão coletiva.

### 3.3.4 Momento 4

O Momento 4, composto por duas horas-aula, tem como assunto as posições relativas entre retas no plano cartesiano. A Atividade 1 trata de retas paralelas e é realizada a partir da manipulação de arquivo construído previamente no GeoGebra (Figura 37). Tem-se na tela um triângulo retângulo destacado nas retas  $r$  e  $s$ , inicialmente sobrepostas. É o triângulo retângulo como visto na última atividade do Momento 3. Tem-se, ainda, um controle deslizante que ao ser manipulado modifica a reta  $s$  a partir de translações verticais (Figura 38). O objetivo é que o dinamismo do software mostre que a família de retas paralelas gerada possui o mesmo coeficiente angular, dado que os triângulos retângulos destacados são congruentes. Diz o enunciado da atividade:

- 1) Qual a equação (na forma  $y = ax + b$ ) da reta  $r$ ?
- 2) Mova o controle deslizante  $b$  e observe a reta  $s$ , paralela à reta  $r$ . Que característica analítica você observa?
- 3) Qual a equação (na forma  $y = ax + b$ ) da reta  $s$ ?

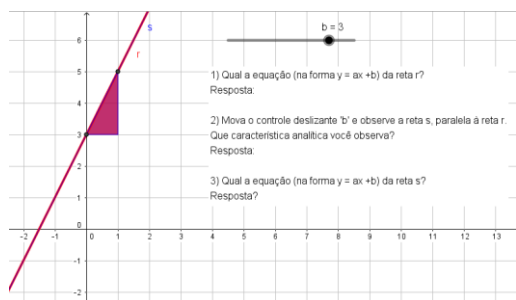


Figura 37 – Atividade 1 do Momento 4. Acervo pessoal.

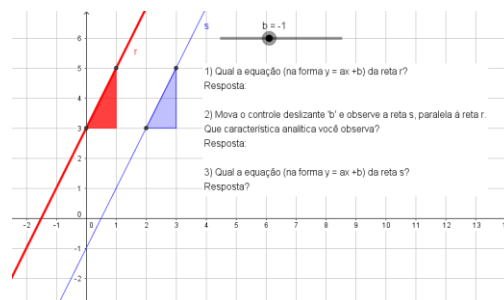


Figura 38 – Manipulação da figura da Atividade 1 do Momento 4. Acervo pessoal.

Esta atividade contempla duas etapas da formação da imagem conceitual relativa ao conceito de retas paralelas: exploração intuitiva e generalização de ideias. A resposta esperada para o primeiro questionamento é: “ $y = 2x + 3$ ”. Para o segundo questionamento, temos a realização de tratamentos no registro dinâmico, pois cada figura gerada durante a manipulação contribui para a compreensão do conceito. A resposta esperada é “as retas possuem mesmo coeficiente angular”, ou alguma sentença similar. Finalmente, para o item (3), espera-se que a resposta seja “ $y = 2x +$

b”, possibilitando que os estudantes compreendam que esta equação determina um feixe de retas paralelas com coeficiente angular igual a 2.

A Atividade 2 (Figura 39) tem como o objetivo a sistematização das ideias – pede que seja feita a construção de uma reta paralela a uma reta dada, passando por um ponto externo à reta dada. Diz o enunciado, disponibilizado via arquivo GeoGebra:

*Construir, a partir de sua equação, a reta que é paralela à reta  $r$  e passa pelo ponto dado, em cada caso:*

*a)  $(0, 0)$*

*b)  $(1, 3)$*

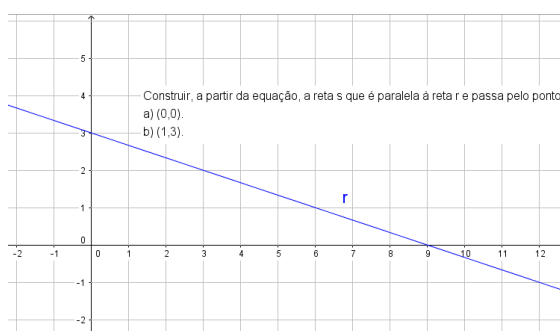


Figura 39 – Atividade 2 do Momento 4. Acervo pessoal.

Os alunos devem identificar que o atributo “coeficiente angular igual” é suficiente para que se tenha o paralelismo entre retas. A resolução da atividade exige a obtenção do coeficiente angular da reta  $r$  a partir da sua representação gráfica – uma conversão de registro gráfico para algébrico. Depois, em cada um dos itens, são necessários tratamentos algébricos, para obter a equação da reta  $s$  dado o seu coeficiente angular (igual ao de  $r$ ) e um de seus pontos.

A Atividade 3 (Figura 40) introduz a situação de retas perpendiculares. Por se tratar de um conceito mais complexo do que o anterior, aqui a exploração intuitiva parte do caso particular para, depois, tratar de generalizações. Diz o enunciado, disponibilizado via arquivo GeoGebra:

*Construir, a partir de sua equação, a reta que é perpendicular à reta  $r$  e passa pelo ponto, em cada caso:*

*a)  $(0, 0)$*

*b)  $(2, 2)$*

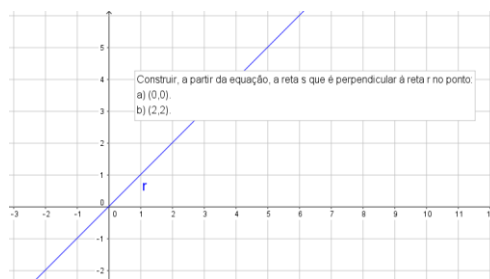


Figura 40 – Atividade 3 do Momento 4. Acervo pessoal.

Aqui, propomos que o estudo comece com a reta  $r$  na forma “ $y = x$ ”, pois se trata de uma situação bastante simples para determinar que reta perpendicular tem equação “ $y = -x$ ” e portanto seu coeficiente angular  $-1$ . Para a resolução do item (b), é esperado que os alunos concluam, dado o coeficiente angular  $-1$  e o ponto  $(2, 2)$ , que a reta deve passar pelos pontos  $(1, 3)$ ,  $(0, 4)$ , e assim sucessivamente, sendo o ponto  $(0, 4)$  o relevante para a equação.

Portanto, a resolução da atividade exige a obtenção do coeficiente angular da reta  $r$  em registro algébrico, a partir de uma dada reta em registro gráfico. Como no item (a) a reta passa pela origem, apenas no item (b) é necessária a estratégia referida acima.

A Atividade 4 (Figura 41) apresenta outra situação com uma reta  $r$  dada, agora com coeficiente angular  $2$ . O texto de orientação é similar ao anterior:

*Construir, a partir de sua equação, a reta que é perpendicular à reta  $r$  e passa pelo ponto, em cada caso:*

a)  $(0, 0)$

b)  $(2, 4)$

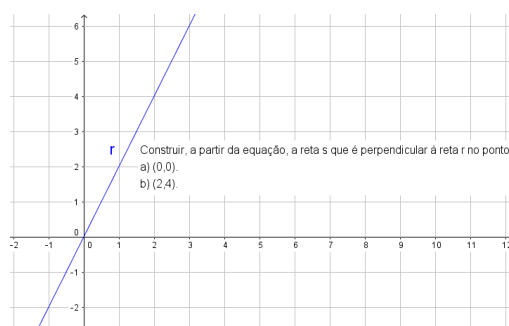


Figura 41 – Atividade 4 do Momento 4. Acervo pessoal.



Como neste caso o coeficiente angular da reta  $r$  é igual a 2, os estudantes precisam perceber que o coeficiente angular da reta  $s$ , em cada um dos itens, deverá ser  $-1/2$ . Temos a expectativa de que esta conclusão não seja imediata. Espera-se que a observação de que o coeficiente angular da reta  $s$  deve ser negativo. Concluída esta observação, acredita-se que o uso da malha quadriculada contribua para a constatação de qual deve ser o coeficiente angular correto. Espera-se uma estratégia do tipo “como na reta  $r$  a ordenada varia conforme o dobro da abscissa, na reta  $s$  a ordenada deve variar conforme a metade, porém com sinal contrário”.

Para o item (b), espera-se que com o uso da malha e a obtenção do coeficiente angular  $-1/2$  os estudantes observem que a reta deve passar pelo ponto  $(0, 5)$ . Assim como nas atividades anteriores, temos também aqui conversões de registro gráfico para algébrico e tratamentos em registro algébrico.

Após a realização de explorações em casos particulares, o estudo do caso de perpendicularidade entre retas passa à fase de generalização e sistematização de ideias. Temos, então, a Atividade 5, na qual, os estudantes devem manipular um controle deslizante em arquivo construído previamente (Figura 42) e responder questionamentos. Diz o enunciado, disponibilizado via arquivo GeoGebra:

- 1) Mova o controle deslizante  $a_r$ , coeficiente angular da reta  $r$  (azul), e observe a configuração das retas  $r$  e  $s$ .
- 2) Qual o coeficiente angular da reta  $s$  (vermelha) quando  $a_r = 3$ ?  
Resposta:
- 3) Qual o coeficiente angular da reta  $s$  (vermelha) quando  $a_r = -0.5$ ?  
Resposta:
- 3) Qual o coeficiente angular da reta  $s$  (vermelha) em função de  $a_r$ ?  
Resposta:

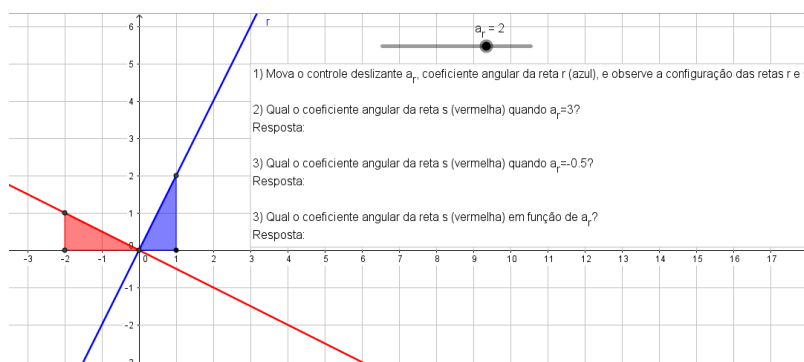


Figura 42 – Atividade 5 do Momento 4. Acervo pessoal.

A animação funciona da seguinte forma: à medida que o controle deslizante é alterado, a reta  $r$  tem o coeficiente angular atualizado (graficamente), assim como a reta  $s$  é atualizada (graficamente) para que a configuração de perpendicularidade se mantenha. Espera-se que a partir da orientação do item (1) os estudantes observem que as diversas configurações possíveis sempre apresentam as retas  $r$  e  $s$  perpendiculares.

Os itens 2 e 3 questionam os estudantes sobre o coeficiente angular da reta  $s$  em casos particulares da reta  $r$  – distintos daqueles das atividades anteriores. As respostas esperadas são, respectivamente, “ $y = -x/3$ ” e “ $y = 2x$ ”. Aqui, temos a etapa de generalização de ideias, pois o movimento da figura proporciona a visualização da propriedade sob estudo.

Após a exploração intuitiva das atividades anteriores e o efeito produzido a partir do controle deslizante – provocando transformações no registro dinâmico –, os estudantes respondem ao último questionamento. Esperamos, como resposta, a identidade “ $a_s = -1/a_r$ ” ou alguma equivalente. Aqui, se tem a sistematização do conceito.

O Momento 4 finaliza com a Atividade 6 (Figura 43), que verifica a compreensão da propriedade estudada na Atividade 5. Diz o enunciado, disponibilizado via arquivo GeoGebra:

*A reta  $r$  passa pelos pontos  $(-3, 5)$  e  $(12, 35)$ . A reta  $s$  é perpendicular à reta  $r$  e passa pelo ponto  $(1, 5)$ . Construa, a partir das equações, as retas  $r$  e  $s$ .*

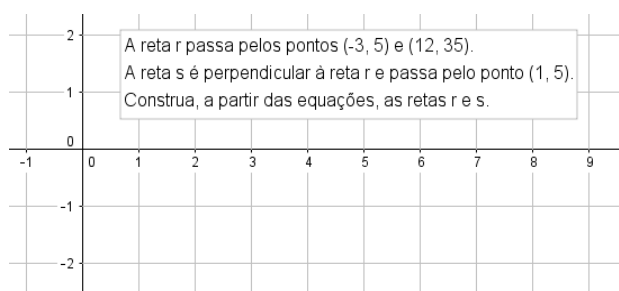


Figura 43 – Atividade 5 do Momento 4. Acervo pessoal.

Aqui, inicialmente, é retomado um dos assuntos do Momento 3: obtenção de equação de reta dados dois pontos. A seguir, são necessários tratamentos algébricos visando a obtenção da equação da reta  $s$ , fazendo uso da propriedade de retas perpendiculares verificada na atividade anterior.

Esta atividade final é um clássico problema da geometria analítica estática. Os objetivos aqui são de duas ordens. A primeira é relativa à verificação da aprendizagem dos conceitos, mostrando que as ações didáticas realizadas no GeoGebra são condizentes com as aplicações tradicionais do objeto de estudo. A segunda diz respeito ao fato de que a escola tem, entre suas intencionalidades, a preparação para concursos vestibulares, e os estudantes possuem a expectativa de constatar isso ao longo de suas aulas.

O Momento 4 foi estruturado para constituir o estudo de retas paralelas e retas perpendiculares seguindo as três etapas de ações didáticas: exploração intuitiva, generalização de ideias e sistematização do conceito. As estratégias e as formas de uso dos registros dinâmicos para cada um dos casos são distintas, em virtude das particularidades de cada caso e a maior complexidade do caso de retas perpendiculares.

### 3.3.5 Momento 5

O Momento 5 da sequência didática, composto por três horas-aula, propõe o estudo de vetores no plano cartesiano, culminando na obtenção de equações de retas via vetor normal. Esta proposta distingue-se bastante do que muitas vezes ocorre na aprendizagem de equações de retas em geometria analítica, na qual a equação na forma " $Ax + By + C = 0$ " não possui significado geométrico.

A Atividade 1 usa um arquivo construído previamente no GeoGebra (Figura 44), a ser manipulado pelos estudantes. Trata-se de uma construção dinâmica - uma "família de segmentos orientados equivalentes", para esta etapa inicial de exploração intuitiva do conceito. Diz o enunciado:

*Manipule o ponto "MOVA" e observe a configuração. Responda: que significado você atribui para um vetor no plano cartesiano?*

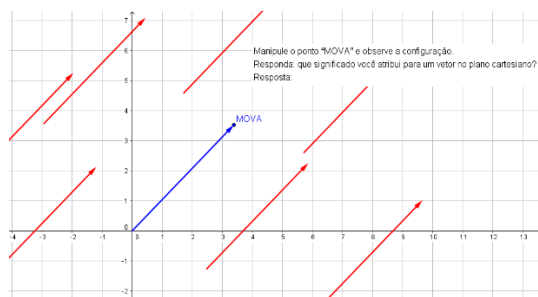


Figura 44 – Atividade 1 do Momento 5. Acervo pessoal.

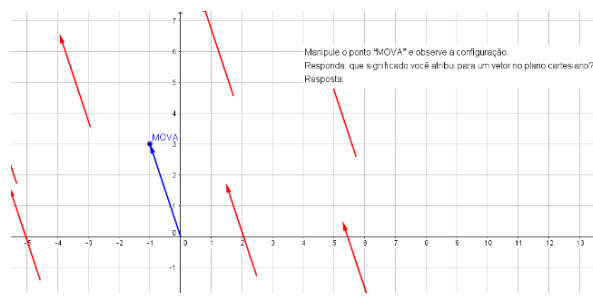


Figura 45 – Manipulação na figura da Atividade 1 do Momento 5. Acervo pessoal.

Quando a seta azul é manipulada, as setas vermelhas são atualizadas no registro dinâmico da janela de visualização. A Figura 45 exemplifica o efeito da manipulação, que constitui uma série de tratamentos no registro geométrico dinâmico. Este dinamismo pode contribuir para a formação da imagem conceitual do que é um vetor no plano. Espera-se que a resposta para o questionamento seja do tipo “um vetor é um conjunto de segmentos congruentes e com mesma orientação” ou similar.

A Atividade 2 trata de introduzir o conceito de vetor através de par coordenado no plano cartesiano – é o registro algébrico relativo ao conceito de vetor. Faz uso um arquivo GeoGebra construído previamente pelo professor (Figura 46). Diz o enunciado:

*Costumamos escrever um vetor no plano a partir de um número na forma*

$\begin{pmatrix} 1.64 \\ 3.42 \end{pmatrix}$ . O vetor escrito é apenas um exemplo para coincidir com a figura;

trata-se de um registro que é alterado, conforme será detalhado a seguir. (Grifo nosso).

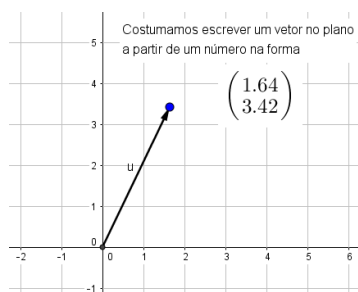


Figura 46 – Atividade 2 do Momento 5. Acervo pessoal.

Aqui, trata-se então de uma formalização do conceito, a partir do dinamismo da construção, que revela a importância da ordem, sinal e medidas das duas componentes, caracterizando o registro gráfico do vetor. Esta formalização ocorre a partir de discussão coletiva entre professor e alunos; o professor conduz a discussão e manipula o vetor no telão e os alunos manipulam e observam o efeito produzido. A manipulação do ponto azul modifica o vetor (registro gráfico) e atualiza o par coordenado (registro algébrico). Tem-se, ainda o objetivo de esclarecer que a escolha da construção do vetor com origem no ponto  $(0, 0)$  facilita a obtenção da extremidade.

A Atividade 3 (Figura 47) inicia a abordagem de vetores ortogonais, a partir da exploração intuitiva – ação didática característica da fase inicial do estudo de cada conceito novo. O conceito de vetores ortogonais vai ser fundamental para a interpretação da equação geral da reta “ $Ax + By + C = 0$ ” via vetor normal à reta. Diz o enunciado, disponibilizado a partir de arquivo GeoGebra construído previamente:

*Mova o ponto B e observe a configuração. O que se pode afirmar sobre os vetores u e v?*

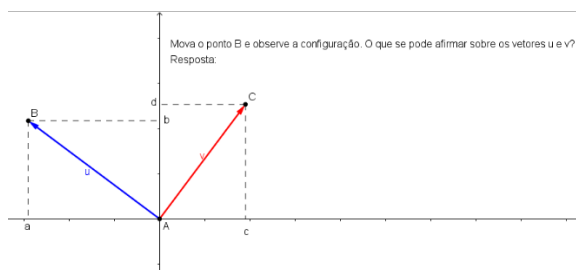


Figura 47 – Atividade 3 do Momento 5. Acervo pessoal.

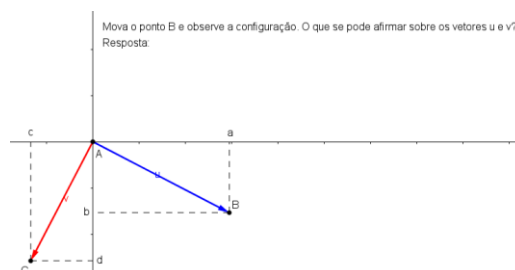


Figura 48 – Manipulação da figura da Atividade 3 do Momento 5. Acervo pessoal.

Ao manipular o ponto B, o vetor v (vermelho) é atualizado, e o vetor u (azul) é ajustado de modo a manter a configuração de ortogonalidade, conforme ilustra a Figura 48. Espera-se que os estudantes respondam ao questionamento na forma “os vetores são ortogonais” ou similar.

A Atividade 4 (Figura 49) trata da obtenção da relação algébrica característica da ortogonalidade entre vetores. Para tanto, os estudantes realizarão uma sequência de ações orientadas, com apoio no dinamismo do software e uso de diferentes registros de representação de vetores. Diz o enunciado, disponibilizado em arquivo GeoGebra construído previamente:

Responda as perguntas em uma folha para entregar.

- 1) Clique para exibir o triângulo de hipotenusa AB. Qual a medida de AB em função de 'a' e 'b'?
- 2) Clique para exibir o triângulo de hipotenusa AC. Qual a medida de AC em função de 'c' e 'd'?
- 3) Clique para exibir o triângulo de hipotenusa BC. Qual a medida de BC em função de 'a', 'b', 'c' e 'd'?
- 4) Aplique o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC, utilizando como lados medidas em função de 'a', 'b', 'c' e 'd'. Que relação é obtida?

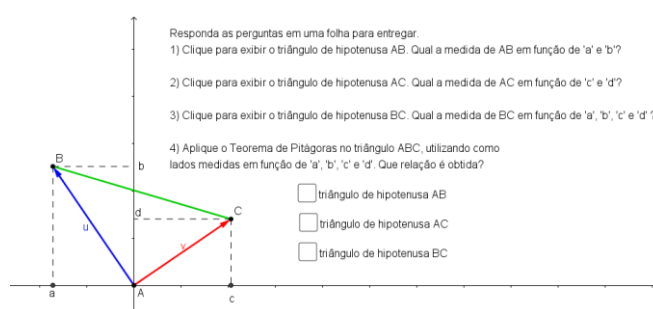


Figura 49 – Atividade 4 do Momento 5. Acervo pessoal.

Além do texto e da imagem inicial, a construção permite “Exibir/esconder” objetos a partir de comandos disponibilizados na Janela de Visualização, que serão selecionados conforme o avanço na atividade. A Figura 50 a seguir mostra as três situações, conforme a seleção: triângulo de hipotenusa AB, triângulo de hipotenusa AC ou triângulo de hipotenusa BC.

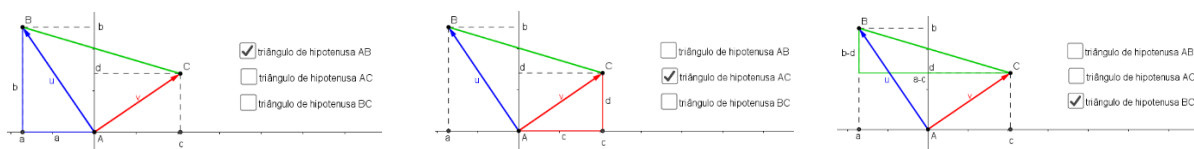


Figura 50 – Sequência de imagens da Atividade 4 do Momento 5. Acervo pessoal.

Em cada uma das quatro etapas desta atividade são necessários tratamentos em registros algébricos, além do ponto de partida inicial de cada uma delas: conversão de registro geométrico (triângulo retângulo) para algébrico (Teorema de Pitágoras).

Ao final da atividade, deve ser obtida a relação: “dois vetores  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$  são ortogonais se, e somente se,  $ac + bd = 0$ ”, escrita nessa forma ou similar.

A Atividade 5 trata da obtenção da equação de uma reta via vetor normal. Aqui, temos a grande finalidade deste Momento, a partir da exploração de arquivo construído previamente. A atividade é disponibilizada em arquivo GeoGebra (Figura 51), sem enunciado escrito, pois será tratada em discussão coletiva.

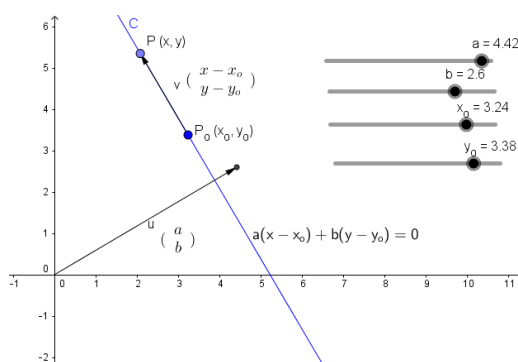


Figura 51 – Atividade 5 do Momento 5. Acervo pessoal.

O professor conduz a atividade manipulando a construção no telão, enquanto os estudantes em seus dispositivos observam a situação. A construção da figura será detalhada com os estudantes: deve ser considerada a existência de um vetor  $u$  dado, e o ponto  $P_0$ . A equação da reta é obtida a partir da ortogonalidade entre o vetor  $u$  e o vetor  $v$ , cujas componentes são obtidas a partir do ponto  $P_0$  e do ponto  $P(x, y)$  pertencente à reta. A manipulação dos controles deslizantes modifica a configuração da figura dinâmica, dando sentido aos papéis dos coeficientes dos vetores.

A obtenção da reta via vetor normal faz uso da relação de ortogonalidade obtida na atividade anterior e de tratamentos algébricos a partir da identidade “ $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ ”, culminando na equação “ $Ax + By + C = 0$ ”. Esta última utiliza letras maiúsculas  $A$  e  $B$  apenas para diferenciação em relação à equação “ $y = ax + b$ ”.

A sequência de tratamentos algébricos necessários é relativamente abstrata, por isso a atividade é pensada de modo a ser executada em discussão contínua entre professor e alunos, estabelecendo conexões com as propriedades verificadas anteriormente e utilizando conhecimentos algébricos prévios. Se trata, portanto, não de uma exposição centrada no professor, mas sim de uma construção coletiva mediada por este.

As Atividades 6 e 7 finalizam este Momento. Dizem os enunciados, respectivamente, em arquivos GeoGebra disponibilizados:

*Atividade 6*

1) Construa o vetor  $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

2) Construa, a partir da sua equação, a reta de vetor normal  $u$  e que passa pela origem.

3) Construa, a partir da sua equação, a reta de vetor normal  $u$  e que passa pelo ponto  $(3, 1)$ .

*Atividade 7*

1) Construa o vetor  $u = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

2) Construa, a partir da sua equação, a reta de vetor normal  $u$  e que passa pela origem.

3) Construa, a partir da sua equação, a reta de vetor normal  $u$  e que passa pelo ponto  $(2, -2)$ .

A resolução da atividade exige, inicialmente, a construção do vetor  $u$ : obtenção do registro gráfico através de conversão a partir do registro algébrico. Na sequência, são construídas duas retas que tem  $u$  como vetor normal, ações que exigem tratamentos no registro algébrico, fazendo uso da relação obtida na Atividade 5 e das estratégias de resolução aprendidas no Momento 4.

Após a realização das atividades, é realizada discussão coletiva, sistematizando a estratégia de resolução para construções do tipo proposto: obtenção de equações de retas via vetor normal. Estas atividades finais, clássicas da geometria analítica estática, se justificam da mesma forma que fizemos na atividade final do Momento 4: trata-se de uma verificação da aprendizagem do conceito sob estudo, com as intencionalidades referidas.

Assim, encerramos a descrição da sequência didática. A sequência, de uma forma geral, busca a aprendizagem dos conceitos de geometria analítica através de registros dinâmicos no GeoGebra. Conforme discutido no Capítulo 2, a expectativa é de que o uso do software contribua para a conversão entre os registros algébricos e gráficos, formando imagens conceituais adequadas aos assuntos sob estudo. As



atividades que formam os Momentos de Aprendizagem passam por etapas de exploração intuitiva, generalização de ideias e sistematização de conceitos, e os recursos do GeoGebra são utilizados conforme a necessidade de cada uma das etapas.

Passamos, no próximo capítulo, à análise dos resultados do experimento.

## 4. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo, passamos à análise do desenvolvimento da sequência didática operacionalizada. Utilizaremos: arquivos construídos/respondidos pelos estudantes; diálogos e observações do andamento dos momentos de aprendizagem, captados durante a prática por meio de diário de bordo; e fotos e vídeos dos estudantes em ação.

Esclarecemos a forma de análise desses diferentes tipos de dados, seguindo a hierarquia do mais relevante para o menos relevante. Em relação aos arquivos construídos, a ênfase será observar a existência dos atributos necessários às construções em questão e analisar tipos de erros, buscando identificar o que potencialmente os ocasionou. No caso de diálogos e observações das ações dos estudantes, iremos expor e analisar discursos dos estudantes, nos momentos em que tal ação analítica se mostrar interessante. As fotos e vídeos da realização dos encontros servirão como suporte para a análise, complementando os registros do diário de bordo.

Nossa análise será fundamentada em nossos referenciais teóricos, desenvolvidos no capítulo 2, a fim de buscar responder o problema de pesquisa delimitado no capítulo 1:

### **Como ocorre o processo de aprendizagem da Geometria Analítica no Ensino Médio através da utilização da geometria dinâmica?**

Queremos observar se as produções dos alunos e seus resultados estão alinhados com as expectativas que tínhamos para o desenvolvimento das atividades, estabelecidas no capítulo 3.

Nosso olhar analítico busca identificar e valorizar a construção de imagens conceituais. Em especial, queremos observar tais imagens no contexto dos registros dinâmicos e, na medida do possível, justificar a sua utilização como facilitador de relações entre componentes figural e conceitual que constituem um objeto geométrico. Queremos, ainda, analisar de que modo o dinamismo do GeoGebra favorece os tratamentos – transformações internas aos registros das figuras dinâmicas utilizadas – e, também, conversões entre registros algébricos, gráficos e na língua natural.

Lembramos que os estudantes se organizaram em 6 grupos de 3 ou 4 componentes, aos quais iremos nos referir como Grupo 1, Grupo 2, e assim sucessivamente. De um modo geral, nossa análise das produções dos estudantes seguindo esta hierarquia: primeiro discute-se os acertos, depois os erros (quando existirem); primeiro discute-se soluções simples, depois as mais complexas. Quando houver equivalência de soluções apresentadas, escolhe-se uma como exemplo.

#### 4. 1. Análise do Momento 1

Durante as duas horas-aulas que compuseram o *Momento 1*, os estudantes realizaram cinco construções, estudando conceitos relativos a coordenadas de pontos. As atividades, do tipo *números comandando pontos*, pediam aos estudantes a construção de figuras a partir de pontos modificados por controles deslizantes.

Os Grupos 2, 4, 5 e 6 resolveram as atividades do modo mais natural: um arquivo diferente por construção, com um controle deslizante em cada. A Figura 52 traz as construções do Grupo 6, para as três primeiras atividades.

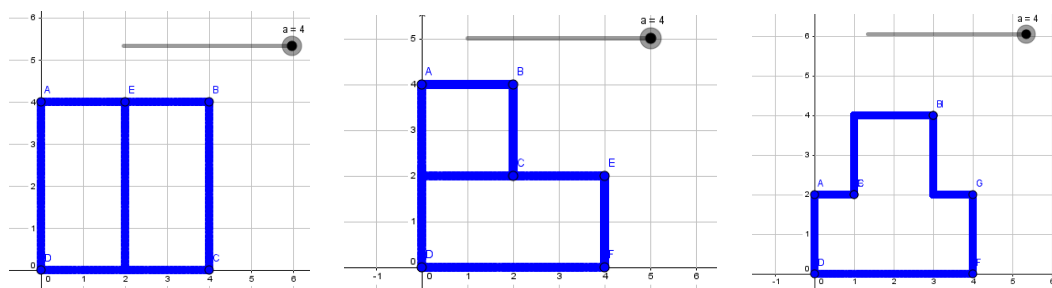


Figura 52 – Resolução das Atividades 1, 2 e 3 do Momento 1 pelo Grupo 6. Fonte: Produção do Grupo 6.

A Atividade 2 e a Atividade 3 tem grau de exigência maior, pois os lados com medidas menores devem surgir a partir de pontos com coordenadas que deem conta desta característica. Para ilustrar como os estudantes lidaram com esta situação, trazemos a definição que o Grupo 6 (Figura 53) atribuiu ao ponto E da Atividade 3 (o ponto que gera o segmento de extremidades  $(0, 2)$  e  $(1, 2)$ ). Como o número do controle deslizante varia de 0 a 4, as coordenadas do ponto E são  $(a/4, 2)$ , de modo que a abscissa varia 0 a 1 e a ordenada é fixa, igual a 2.

Nome:	E
Definição:	$(a / 4, 2)$

Figura 53 – Uso do controle deslizante pelo Grupo 6. Fonte: Produção do Grupo 6.

As atividades 4 e 5 tinham como diferencial a construção de segmentos diagonais. Desta forma, os pontos dinâmicos que dão origem a estes segmentos precisam ter ambas as coordenadas determinadas pelo número do controle deslizante. A Figura 54 traz as soluções do Grupo 6.

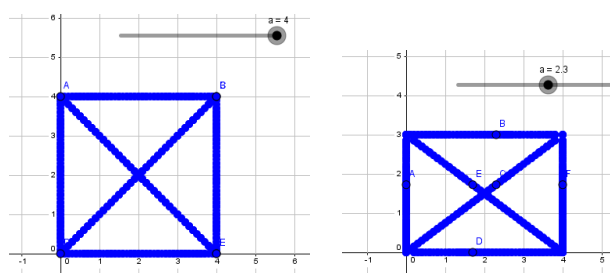


Figura 54 – Resolução das Atividades 4 e 5 do Momento 1 pelo Grupo 6. Fonte: Produção do Grupo 6.

Para ilustrar a estratégia utilizada pelos estudantes, a Figura 55 traz a definição dada pelo Grupo 6 para o ponto C – diagonal do retângulo, de extremidades (0,0) e (4, 3). O número do controle deslizante varia de 0 a 4, e as coordenadas do ponto dinâmico C são  $(a, 3a/4)$ , de modo que abscissa varia de 0 a 4, enquanto a ordenada varia de 0 a 3.

Nome:	C
Definição:	$(a, (3a) / 4)$

Figura 55 – Uso do controle deslizante pelo Grupo 6 (2). Fonte: Produção do Grupo 6.

Os Grupos 2, 4 e 5, que também criaram um arquivo para cada atividade, fizeram as construções definindo os pontos de modo similar ao que foi feito pelo Grupo 6. O Grupo 3 optou por utilizar um único arquivo para as cinco atividades, com um controle deslizante para cada. Esta estratégia tem como único complicador adicional o uso de coordenadas mais distantes da origem.

Já o Grupo 1 realizou todas as construções na mesma janela e utilizou três controles deslizantes para realizar as construções. As Figuras, retiradas do arquivo

construído pelo grupo, mostram as construções em dois momentos, para que se possa observar que os pontos efetivamente têm suas coordenadas modificadas a partir dos controles deslizantes. Nas imagens aparecem o plano cartesiano e, à direita, a Janela de Álgebra mostra os objetos criados.

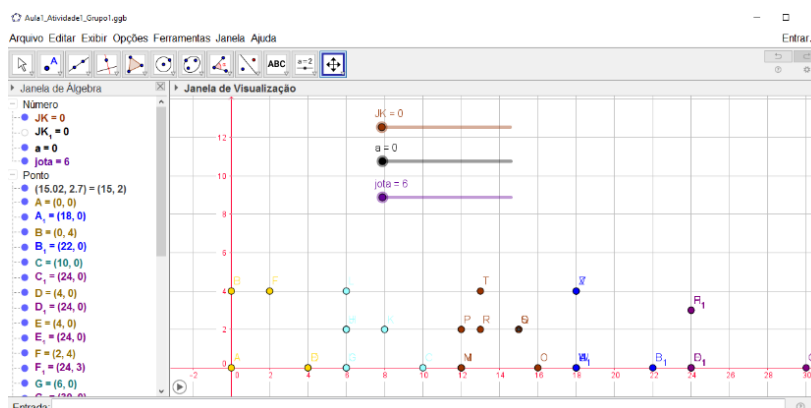


Figura 56 – Resolução das atividades do Momento 1 pelo Grupo 1. Fonte: Produção do Grupo 1.

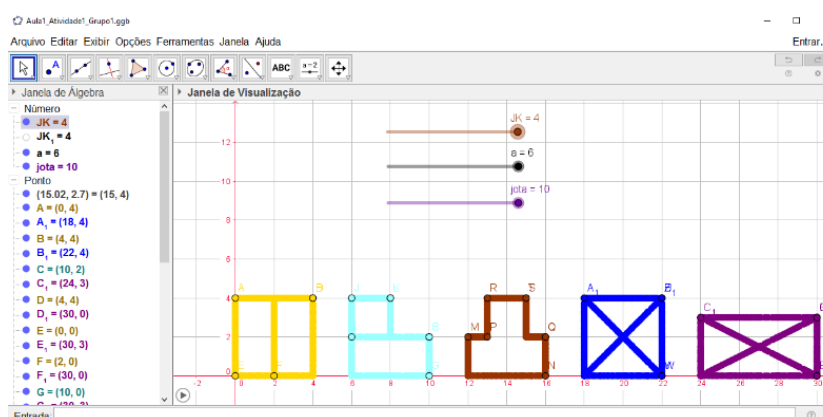


Figura 57 – Resolução das atividades do Momento 1 pelo Grupo 1 (2). Fonte: Produção do Grupo 1.

Esta escolha do Grupo 1 de realizar as construções no mesmo arquivo e com mais do que uma figura construída por um mesmo controle deslizante é mais complexa. Para compreendermos a construção feita, acessamos o arquivo dos alunos para identificar as expressões utilizadas. Como exemplo, temos a Figura 58, que revela a expressão utilizada para o ponto V (localizado, na imagem, próximo ao centro do quadrado azul) e que constrói a diagonal decrescente. Os estudantes utilizaram o controle deslizante JK para as três construções reveladas pela imagem. Os outros dois controles deslizantes foram utilizados para cada uma das duas outras construções.

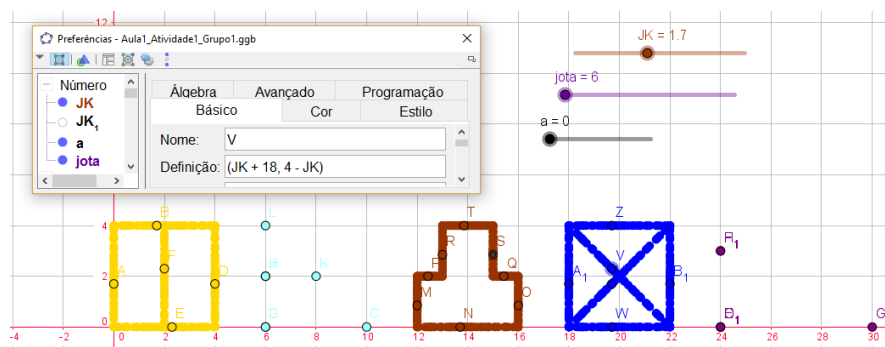


Figura 58 – Uso do controle deslizante pelo Grupo 1. Fonte: Produção do Grupo 1.

No caso do ponto O (que constrói um dos segmentos verticais do polígono marrom, no canto inferior direito do polígono) foi expresso na forma  $(16, JK - 1 / 2)$ , de modo que a ordenada é multiplicada por  $1/2$  para que o lado tenha metade da medida vertical. Outras estratégias de resolução tiveram que ser realizadas para cumprir as exigências das construções. Para lidar com o problema da diagonal, os estudantes criaram o ponto dinâmico V, com uma das coordenadas variando com sinal negativo: a expressão utilizada foi  $(JK + 18, 4 - JK)$ .

Na verdade, não havia regra explícita quanto a utilizar um mesmo arquivo. Por um lado, é possível inferir que a elaboração de todas as figuras no mesmo arquivo revela a compreensão de que as construções lado a lado não teriam mudanças estruturais significativas, apenas as coordenadas-base dos pontos deveriam variar. Por outro lado, a construção de cada imagem num arquivo distinto não implica necessariamente em desconhecimento do plano cartesiano, visto que coordenadas numericamente maiores significam apenas isso: números maiores, mas a estrutura de construção é idêntica.

Durante a observação das ações e estratégias dos grupos nesta atividade, constatamos a existência de diálogos constantes entre os componentes dos grupos e sua interação com o software nos diferentes dispositivos utilizados. Na Figura 59, temos uma imagem retirada de vídeo registrado durante o Momento. No vídeo observamos a manipulação da figura e a comunicação entre os estudantes.

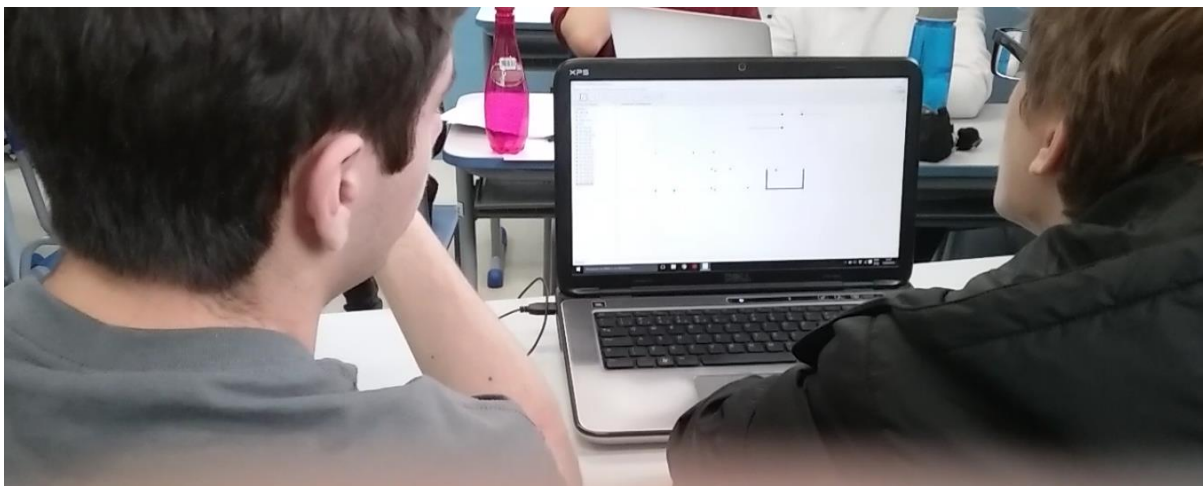


Figura 59 – Estudantes em ação no Momento 1. Acervo pessoal.

Nesta imagem, temos os estudantes conjecturando a respeito da definição dos pontos a partir do controle deslizante, de modo a gerar o efeito esperado na construção.

Todos os grupos conseguiram realizar todas as atividades propostas para o *Momento 1*, porém em tempos e tendo dificuldades diferentes. Em especial, as construções das quarta e quinta figuras – que possuíam diagonais – exigiam pontos com coordenadas variando simultaneamente e, portanto, já aproximando os estudantes, ainda que timidamente, da noção de reta. Estas duas últimas atividades geraram, portanto, maiores dificuldades.

Ainda, registramos falas revelando estranheza na construção do ponto que daria origem à diagonal decrescente: “como fazer uma aumentar e outra diminuir?” (Aluno 4B), tendo dificuldade na elaboração de uma ideia de par ordenada na forma  $(a, -a)$ , sendo  $a$  o controle deslizante utilizado.

Quanto aos diferentes registros usados, observamos que os estudantes fizeram conversões entre o algébrico e o gráfico especialmente do primeiro para o segundo. Os lados das figuras construídas, a partir de pontos comandados por números, conferem um novo significado ao objeto “ponto no plano cartesiano” em virtude de este registro dinâmico de representação ser completamente distinto do que seria feito numa construção com lápis e papel.

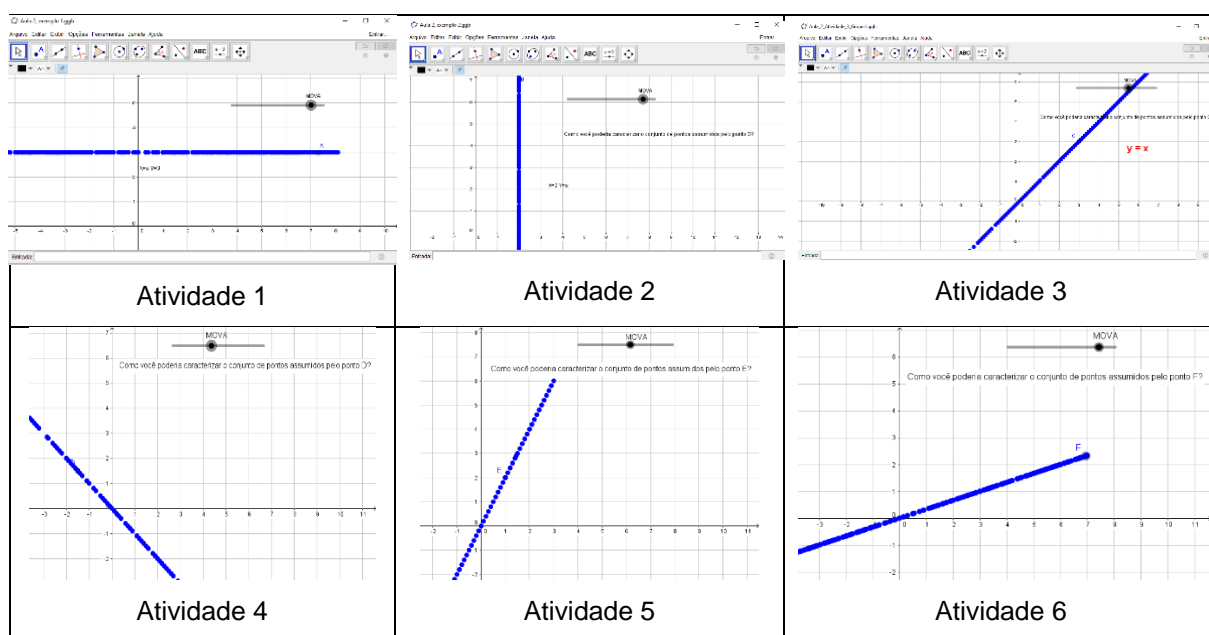
Quanto à formação com precisão teórica da imagem conceitual relativa ao conceito “ponto no plano cartesiano”, entendemos que os alunos formaram tal imagem de modo satisfatório, a partir das aprendizagens realizadas com tentativas e erros,

seguidos de novas interpretações, com posterior sucesso. As principais dificuldades – que podem sugerir uma imagem conceitual ainda pouco distante do conceito preciso – estiveram mais associadas à necessidade de fazer o ponto *mudar de lugar*, em alguns casos de modo nada imediato; em especial, o caso do ponto (a, -a) citado anteriormente. Aqui, consideramos que se trata, sim, de uma imagem conceitual ainda em formação, contudo a respeito de uma compreensão de coordenadas cartesianas bastante mais complexa do que a usual e mera representação de pontos estáticos a partir de suas coordenadas numéricas.

## 4. 2. Análise do Momento 2

Os alunos tinham que explorar seis construções, em arquivos criados previamente por nós, com retas com as seguintes características do ponto de vista de inclinação: horizontal, vertical, bissetriz dos quadrantes ímpares, bissetriz dos quadrantes pares, e duas outras retas com inclinações positivas.

As atividades, disponibilizadas em arquivos GeoGebra, traziam a pergunta “Como você poderia caracterizar o conjunto de pontos desenhado pelo ponto A?”. O Quadro 2 traz as seis atividades, com o resultado da manipulação dos controles deslizantes.



Quadro 2 – Atividades do Momento 2. Fonte: Acervo pessoal e Produção dos estudantes.



Quanto à Atividade 1, todos os grupos, à exceção do Grupo 6, responderam “ $y = 3$ ”. O Grupo 6 respondeu “ $x = a, y = 3$ ”, fazendo referência ao fato de que usualmente o controle deslizante utilizado nas construções das atividades do Momento 1 era denotado pela letra **a**. Aqui, percebemos que a resposta do Grupo 6 está de acordo com a pergunta, pois de fato o ponto que é deslocado e dá origem à figura tem coordenadas  $(a, 3)$ . Porém, tal resposta nos sugere que a imagem conceitual de equação da reta ainda não está formada para estes estudantes.

Por se tratar de uma fase ainda inicial de aprendizagem, julgamos ser normal alguns estudantes não terem desenvolvido com clareza este conceito. As ações didáticas de generalização de ideias e de sistematização de conceitos, que seguiriam logo ao início do Momento 3, constituem-se como potenciais espaços para formar de modo adequado a imagem conceitual relativa ao conceito de equação da reta. De toda forma, o registro dinâmico de pontos com coordenadas controladas por números se mostra evidente, o que constitui uma aprendizagem importante.

Na Atividade 2, novamente à exceção do Grupo 6, todos responderam “ $x = 2$ ”. O Grupo 6 repetiu o padrão de resposta verificado anteriormente, ao caracterizar sua observação afirmando ser “ $x = 2, y = a$ ”. Reiteramos que tal resposta faz sentido no que diz respeito à imagem conceitual de ponto dinâmico; todavia, segue sem apresentar uma característica analítica de reta – o que era esperado para este conjunto de atividades.

Neste momento de análise, emerge certa curiosidade sobre quais seriam as respostas dos grupos para as próximas situações de retas, agora com equação do tipo “ $y = ax$ ”. Em especial, como seria a resposta dos estudantes do Grupo 6, que nos casos anteriores, não haviam alcançado o registro algébrico esperado que se assemelhasse ao de equação de uma reta.

Na Atividade 3 os Grupos 1 e 3 responderam “ $y = x$ ” e os demais grupos responderam “ $x = y$ ”. Aqui, não nos parece haver diferença alguma na imagem conceitual dos estudantes que optaram por uma forma ou outra pois, na verdade, a escrita preferencial na forma “ $y = x$ ” é mera padronização. Julgamos que o sucesso nas respostas dos diferentes grupos tem como uma das razões o momento de exploração intuitiva em que fizeram uso do dinamismo do software – ouvimos reações dos alunos tais como “o  $y$  acompanha direitinho o  $x$ ”.

Na Atividade 4, constatamos que os grupos 1 e 6 responderam “ $y = -x$ ” e os demais grupos optaram pela resposta “ $x = -y$ ”. Novamente essa diferença nas repostas não nos sugere qualquer tipo de imagem conceitual equivocada. Ficava evidente a necessidade de, no momento de formalização e sistematização de conceitos, seria pertinente discutir com os alunos que uma padronização – típica da matemática – se fazia necessária.

Para a Atividade 5, os Grupos 1, 4 e 6 responderam corretamente “ $y = 2x$ ”. Aqui, pela primeira vez neste Momento, observamos equívocos efetivos na forma de registro algébrico. Os Grupo 2, 3 e 5, deram como resposta a equação “ $x = 2y$ ”. Avaliamos que os erros dos estudantes destes grupos podem estar relacionados com a dificuldade mais evidente na resolução das construções do Momento 1: as diagonais, especialmente no caso em que a proporção não era 1:1 entre abscissa e ordenada.

Com a intenção de mínima interferência na produção dos estudantes, durante nossa ação mediadora, circulando pelo ambiente de trabalho, constatamos afirmações do tipo “o  $y$  é o dobro de  $x$ ”. A Imagem Conceitual de que a correspondência era esta – ordenada sendo o dobro da abscissa – estava correta; ou seja, o registro em língua natural, obtido a partir do registro dinâmico na manipulação da construção, estava coerente. Porém, no momento da conversão para o registro algébrico, surgiram problemas, a serem solucionados no momento de sistematização de ideias.

Para a Atividade 6, as respostas dos grupos foram as mais variadas, sendo algumas corretas – mesmo que escritas de forma não convencional –, enquanto outras apresentando equívocos. Os Grupos 2 e 6 responderam corretamente, expressando suas equações nas formas “ $x = 3y$ ” e “ $y = x/3$ ” – ambas matematicamente corretas, embora a primeira numa forma não usual. Aqui, cabe a valorização desta forma não usual de escrita, pois indica uma correta imagem conceitual que não é igual à convencional.

Os Grupos 3, 4 e 5 responderam de modo idêntico: “ $3x = y$ ”. Para estes grupos, identificamos uma Imagem Conceitual parcialmente correta, pois a compreensão de que uma coordenada varia de acordo com o triplo da outra foi identificado pelos estudantes, porém houve erro na identificação de qual a correspondência correta.

Vê-se que os estudantes têm dificuldades na conversão do registro gráfico para o registro algébrico, mesmo tendo se expressado corretamente no registro língua

natural – durante suas trocas de ideias declararam que “x é o triplo de y” e escreveram de modo incorreto “ $3x = y$ ”.

Já o Grupo 1 respondeu “ $y = x/2$ ”, e analisar o que gerou este equívoco nos parece um tanto complicado. Talvez a resposta seja reflexo de uma exploração rápida por parte dos estudantes que, associada à atividade anterior envolvendo as equações “ $y = 2x$ ”, levou-os a concluir que se tratava de caso similar – inclusive pelo fato de este grupo ter respondido com precisão ao caso anterior.

A avaliação geral para o Momento 2 é a de que os casos de retas verticais, horizontais e nas formas “ $y = x$ ” e “ $y = -x$ ” estavam bem compreendidos. Os casos de retas com diferentes inclinações, na forma “ $y = ax$ ”, precisavam de melhor entendimento, o que ocorreria no desenvolvimento do Momento 3. De todo modo, julgamos que o uso dos registros dinâmicos, a partir da manipulação dos pontos, foi satisfatório: os estudantes estavam, aos poucos, formando a Imagem Conceitual de que a equação da reta é uma expressão algébrica que caracteriza os pontos que pertencem a ela.

#### 4. 3. Análise do Momento 3

Neste Momento 3 o objeto de estudo é o significado dos coeficientes angular e coeficiente linear com equação de retas na forma reduzida  $y = ax + b$ .

A Atividade 1 resgatava o assunto discutido ao longo das atividades do Momento 2. Tem-se na tela do GeoGebra uma configuração com diversas retas passando pela origem, que deveria ser reproduzida pelos alunos, usando equação de reta do tipo “ $y = ax$ ”. A Figura 60 foi retirada do arquivo gerado pelo Grupo 1.

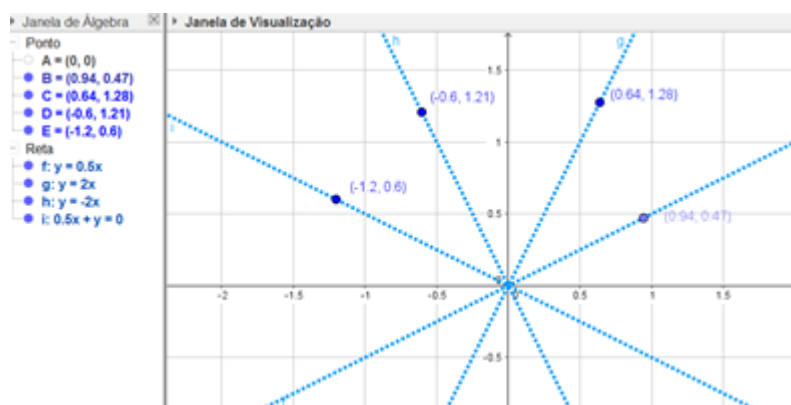


Figura 60 - Resolução da Atividade 1 do Momento 3 pelo Grupo 1. Fonte: Produção do Grupo 1.

Podemos observar a construção das retas realizada com precisão – cujas equações estão na Janela de Álgebra, à esquerda –, e a inclusão de pontos dinâmicos. Quando estes pontos são manipulados suas coordenadas são atualizadas, destacando que a equação da reta está diretamente associada aos números que caracterizam abscissa e ordenada de cada ponto. Ainda, o dinamismo contribui para um vínculo imediato entre o registro algébrico (coordenadas) e o registro gráfico (representação no plano).

Todos os grupos realizaram a atividade com sucesso, em construções que ficaram similares às do Grupo 1. Esse momento constituiu a segunda etapa do estudo sobre coeficiente angular: a elaboração de ideias generalizadoras, fazendo o uso do dinamismo do software.

A Atividade 2 continha a exploração de um arquivo construído previamente pelo professor, e que tinha como objetivo a sistematização e formalização do conceito de coeficiente angular. Professor no telão e estudantes em seus dispositivos utilizam os registros dinâmicos presentes na construção (Figura 61), contribuindo para a formação de Imagem Conceitual adequada.

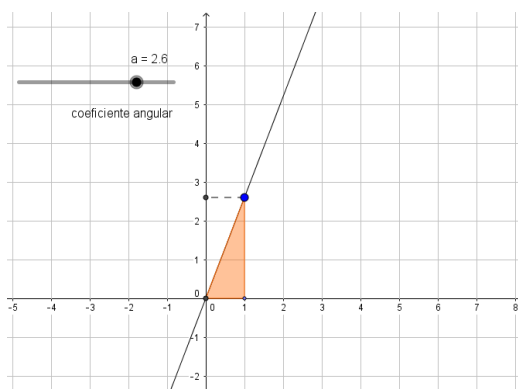


Figura 61 - Sistematização do conceito de coeficiente angular. Acervo pessoal.

A discussão coletiva, resultado das explorações e formulação de hipóteses dos estudantes, iniciadas desde o Momento 2, proporcionou a formalização do conceito de coeficiente angular. Tal conceito, compreendido no registro dinâmico da construção da figura, pôde ser convertido a registro em língua natural, como sendo “a variação do y para a variação de uma unidade em x”.

Esta definição foi sendo formada após algumas trocas de ideias e noções similares, com falas de estudantes nas formas: “é a proporção entre o y e o x”; “é o quanto multiplica o x para dar o y”. O papel do professor consistiu em auxiliar os estudantes a formalizarem o atributo verificado conforme exposto acima.

A exploração do arquivo gerava uma família de triângulos semelhantes, formados a partir dos pontos que pertencem à reta (Figura 62).

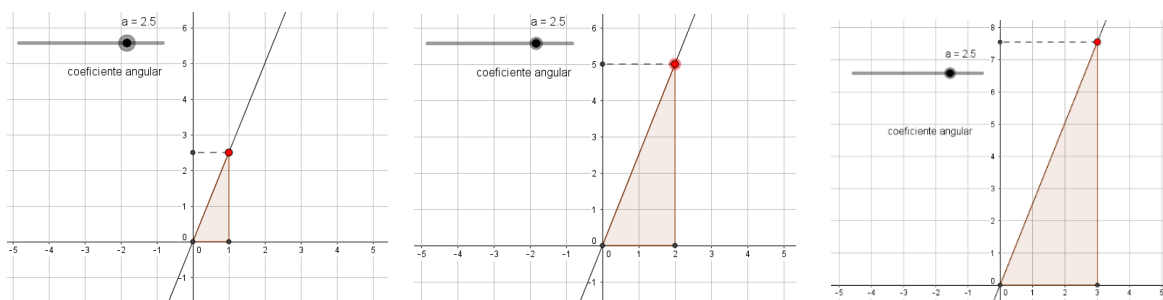


Figura 62 – Manipulação da figura dinâmica para sistematização do conceito de coeficiente angular. Acervo pessoal.

A discussão coletiva foi conduzida de modo a observar que as razões entre as variações de ordenadas e abscissas eram proporcionais. Os estudantes observavam, a partir da manipulação, que “para a variação de 1 unidade em x, o y varia 2,5, e para a variação de 2 unidades em x, o y varia 5, e assim por diante”. Nossa fala, então, foi no sentido de chamar a atenção para a relação entre essas razões e o valor numérico do coeficiente angular, definindo a ordem  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ . Este registro algébrico, com uma ideia de taxa de variação, seria importante para as atividades seguintes.

Na Atividade 3, os estudantes deveriam construir retas a partir de suas equações, sendo dados dois pontos. Tivemos o interesse de fornecer pontos que tivessem coordenadas que “fugissem ao campo de visão”, exigindo, assim, que os estudantes colocassem em prática a ideia de proporcionalidade, presente no registro algébrico. A Figura 63 mostra a construção feita pelo Grupo 2, na qual aparecem as equações das retas na Janela de Álgebra e suas respectivas representações gráficas na Janela de Visualização.

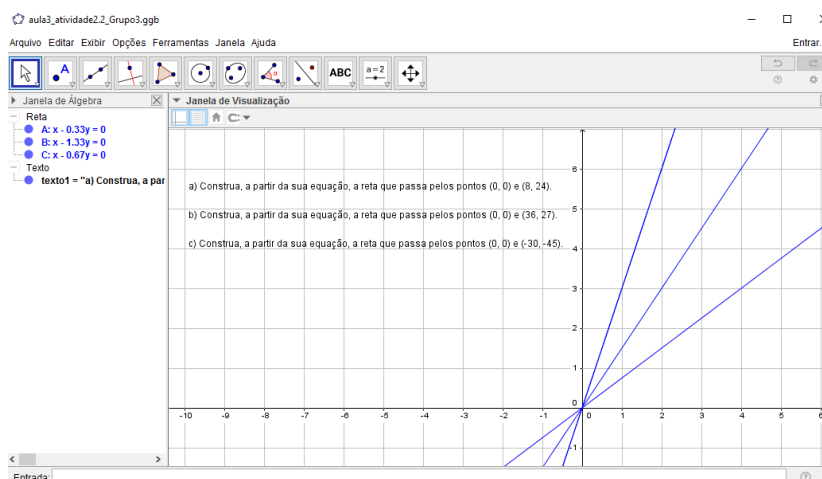


Figura 63 – Resolução da Atividade 3 do Momento 3 pelo Grupo 2. Fonte: Produção do Grupo 3.

Todos os grupos conseguiram realizar esta atividade, tendo apenas divergido quanto ao tempo necessário e eventuais dificuldades em compreender qual seria a proporção que forneceria o coeficiente angular das retas. Observando as ações dos estudantes, constatamos que a estratégia comum era: (I) verificar a variação entre as ordenadas; (II) verificar a variação entre as abscissas; (III) estabelecer a razão entre essas variações; (IV) a razão representa o coeficiente angular, e a equação é escrita na forma “ $y = ax$ ”.

Como autocrítica, refletimos e percebemos que no item (c) erramos; a proposta era, na verdade, que o segundo ponto fosse (-30, 45), para que em pelo menos uma das retas construídas o coeficiente angular fosse negativa. Durante o decorrer da atividade, ao perceber isto, foi comentado com os alunos qual era o real propósito do item (c), e discutimos sobre como se caracterizariam as coordenadas e, portanto, a equação da reta no caso de passar pela origem e pelo ponto (-30, 45).

A Atividade 4 deu início a abordagem a respeito do conceito de coeficiente linear. Propomos uma atividade de construção para os estudantes a partir do enunciado presente na Figura 64, em arquivo disponibilizado para os estudantes em arquivo GeoGebra.

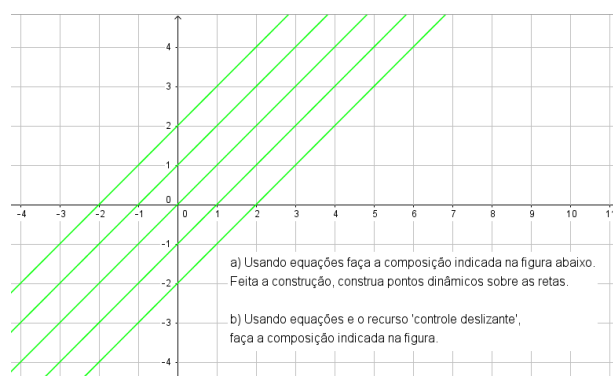


Figura 64 – Atividade 4 do Momento 3 (2). Acervo pessoal.

De um modo geral, os grupos conseguiram realizar tanto a construção a partir das equações quanto a construção a partir do controle deslizante. A explicitação da figura a ser obtida na tela do GeoGebra pode ter contribuído para o bom desempenho dos alunos, assim como para a construção dos mesmos feixes de retas por todos os grupos.

Durante a realização da atividade, vimos momentos de hesitação em alguns grupos, especialmente na construção a ser feita a partir das equações – uma conversão do registro algébrico para o gráfico. Falas na forma “o y é uma unidade maior do que o x, então é  $y + 1 = x$ ”, semelhantes ao que observamos em outros Momentos, estiveram presentes. Abaixo temos a Figura 65, que apresenta a construção do Grupo 3, usando equações para cada uma das retas e criando pontos dinâmicos sobre as retas.

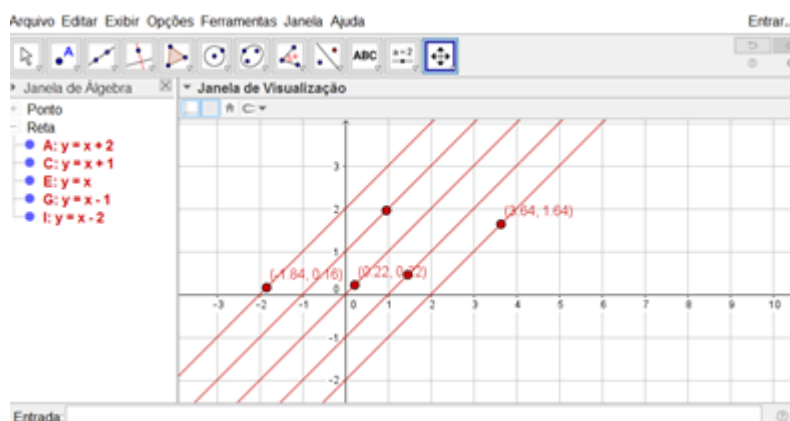


Figura 65 – Resolução da Atividade 4 do Momento 3 pelo Grupo 3. Fonte: Produção do Grupo 3.

A segunda etapa da atividade, que propunha a construção a partir de um controle deslizante alterando uma única equação – dando origem, consequentemente,

a uma única reta dinâmica – também foi realizada com bastante eficácia pelos grupos. Em nossa observação, percebemos os grupos criando o controle deslizante e escrevendo a equação da reta na forma a partir do número do controle. Como exemplo, temos a Figura 66, que mostra a construção feita pelo Grupo 1.

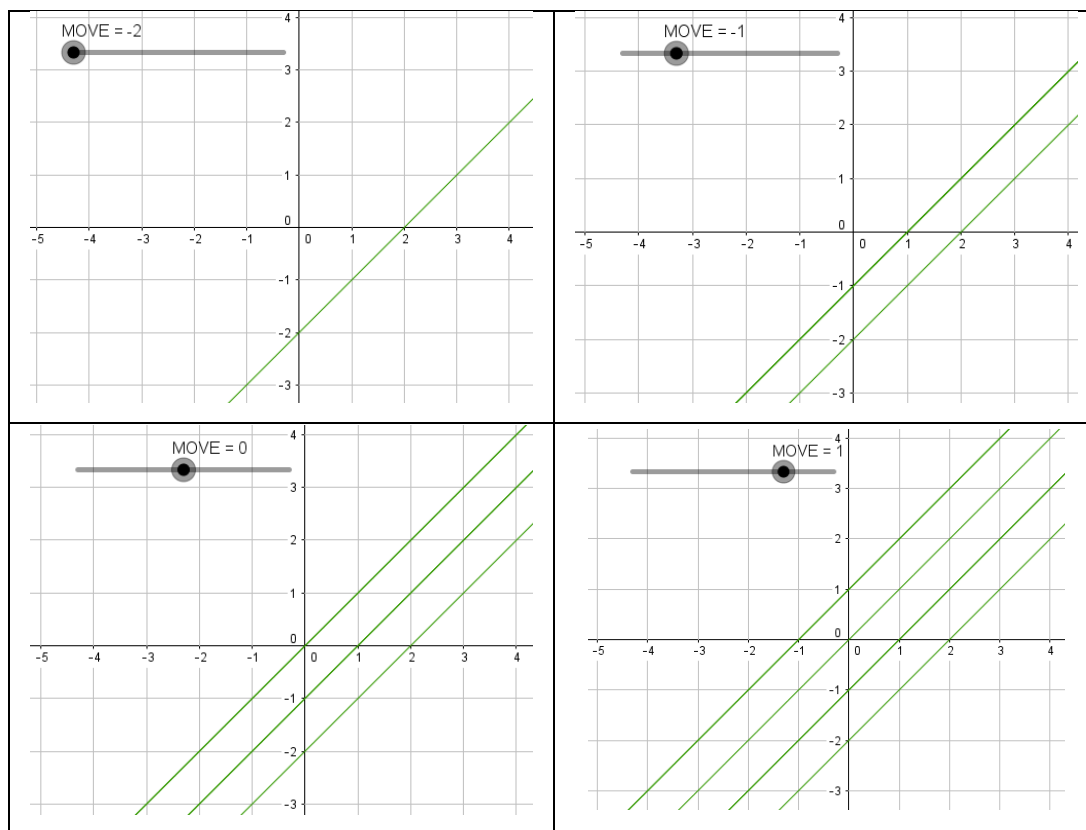


Figura 66 – Resolução da Atividade 4 do Momento 3 pelo Grupo 1. Fonte: Produção do Grupo 1.

As retas vão ‘aparecendo’ conforme o valor numérico do controle deslizante é alterado, a partir da função *habilitar rastro* selecionada. Ainda, os estudantes tiveram de modo bastante evidente a relação entre este coeficiente e a equação da reta determinada ao observar a *Janela de Álgebra*, na qual a equação acompanha o valor numérico deste coeficiente. Para criar esta construção dinâmica, os estudantes criaram o controle deslizante “MOVE” e a reta “A” definida conforme ilustra a Figura 67.

Nome:	A
Definição:	$y = x + \text{MOVE}$

Figura 67 – Coeficiente linear por controle deslizante. Fonte: Produção do Grupo 1.



De modo similar, todos os grupos construíram o controle deslizante e mostraram entendimento sobre a variação de certo elemento – a ser formalizado como *coeficiente linear*. Julgamos que o dinamismo do software e os consequentes registros dinâmicos permitiram uma compreensão, com maior clareza, da equação “ $y = x + b$ ” para as retas estudadas. A manipulação do controle deslizante constitui sucessivos tratamentos no registro dinâmico, contribuindo para a formação de uma imagem conceitual adequada para o conceito de coeficiente linear.

É importante destacar, novamente, esta característica do conjunto de janelas que constitui o ambiente de trabalho no GeoGebra. Os estudantes tiveram acesso aos registros algébricos e gráficos, de forma dinâmica, e assim estabeleceram vínculos entre componente figural e componente conceitual relativos a equação da reta e sua posição no plano cartesiano.

Após as explorações e generalizações vivenciadas pelos estudantes, o professor conduziu a ação de sistematização e formalização do conceito de coeficiente linear, em discussão apoiado em construção feita no GeoGebra com controle deslizante, similar àquela apresentada pelos estudantes. Professor, utilizando o telão, e estudantes, os seus dispositivos, exploraram o arquivo dinâmico e estabeleceram a discussão coletiva que formalizou o conceito de coeficiente linear.

Ouvimos dos estudantes considerações do tipo “o  $b$  mostra onde a reta corta o eixo  $y$ ” e, também, “é o quanto a reta sobe ou desce” (em relação à origem). Noções que, embora pouco formais, estavam corretas, e tiveram a devida formalização mediada pelo professor. Aqui, a observação que fizemos das manifestações dos diferentes grupos sugere a formação de imagens conceituais adequadas para o conceito de coeficiente linear, pois estavam de acordo com os atributos críticos do conceito.

A Atividade 5 era uma avaliação de conhecimentos, na forma como tipicamente aparece nos livros didáticos. Nesta atividade não são utilizados registros dinâmicos; o apoio do software se limita ao uso da malha quadriculada. O enunciado pedia a construção de retas a partir de suas equações, dados dois pontos.

A escolha de pontos com coordenadas cujos números não apareciam no ‘campo de visão’ foi proposital, exigindo a noção de proporcionalidade estudada. Além disso, o item (c) não fornecia o ponto que determina o coeficiente linear. Conforme

previmos, a resolução deste item não somente constituiu maiores dificuldades, como também construções que foram finalizadas apresentando erros.

Mostraremos as imagens obtidas a partir das construções dos grupos. Os Grupos 2, 3, 4 e 5, realizaram a atividade corretamente. A Figura 68, retirada do arquivo do Grupo 5, cuja construção está correta para os três itens da atividade. A imagem mostra as equações na Janela de Álgebra e as retas no plano, na Janela de Visualização.

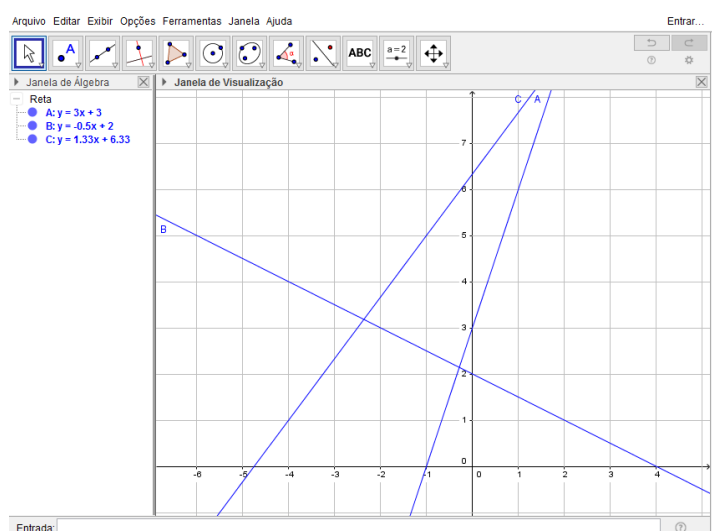


Figura 68 – Resolução da Atividade 5 do Momento 3 pelo Grupo 5. Fonte: Produção do Grupo 5.

Importante registrar que o referido grupo, assim como outros, contou com o auxílio do professor na resolução do item (c). O auxílio foi necessário na obtenção do ponto (0, b). Nossa interferência consistiu em sugerir aos alunos que era possível identificar o ponto (0, b) a partir de uma variação proporcional ao coeficiente angular tomada a partir do ponto (-4, 1).

O Grupo 1, cuja construção apresentamos na Figura 69, foi o único a construir corretamente o item (c) e, simultaneamente, apresentar uma configuração equivocada para uma das retas anteriores; no caso, a reta do item (b), que deveria ser decrescente.

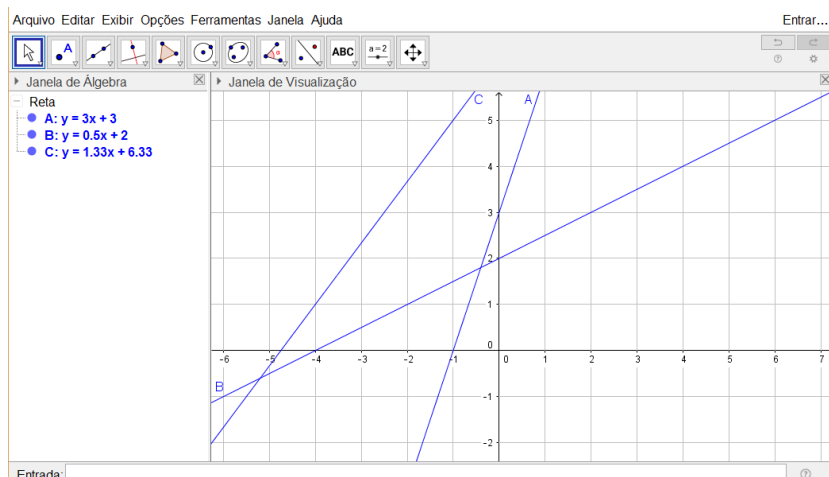


Figura 69 – Resolução da Atividade 5 do Momento 3 pelo Grupo 1. Fonte: Produção do Grupo 1.

Julgamos que este grupo, embora tenha observado que a variação de uma ordenada 2 para uma ordenada -13 é de 15 unidades, não levou em consideração o fato de tal variação ocorrer com sinal contrário ao da variação de abscissa 0 para abscissa 30. Fica a dúvida sobre o porquê de os estudantes não terem se questionado sobre a reta claramente não passar pelo ponto (30, -13), uma exigência no enunciado da atividade.

Diferentemente do Grupo 1, que apresentou erro no item (b), o Grupo 6 realizou corretamente as construções dos dois primeiros itens e apresentou dificuldades no item (c). A imagem que apresentamos na Figura 70 contém a construção do grupo.

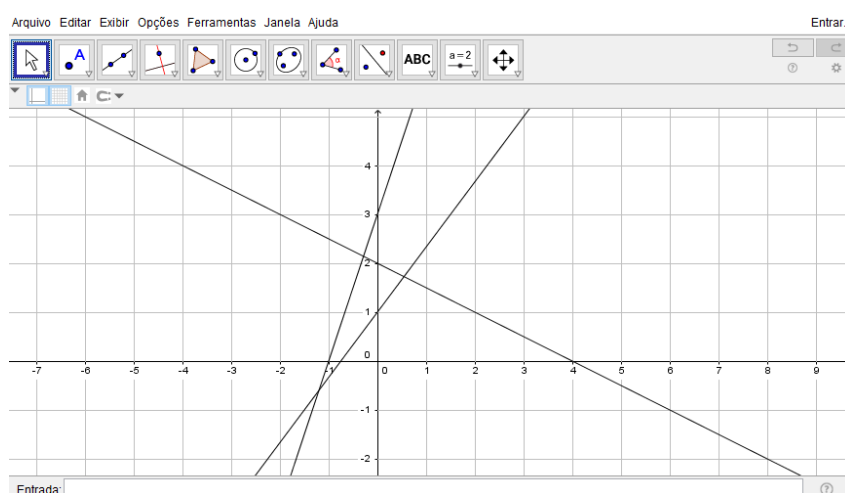


Figura 70 – Resolução da Atividade 5 do Momento 3 pelo Grupo 6. Fonte: Produção do Grupo 6.

Assim como o outro grupo, este também concluiu sua atividade com uma construção equivocada e os seus componentes não pareceram ter se questionado a

respeito do fato de que a reta construída claramente não passa pelo ponto  $(-4, 1)$ . Dado que a reta construída pelo grupo para este item tem coeficiente angular correto, avaliamos que a dificuldade foi na obtenção do ponto  $(0, b)$ , assim como os outros grupos que realizaram corretamente, porém com interferência do professor.

A Atividade 6 constituiu a etapa de formalização e sistematização de conceitos relativos a equações de reta na forma “ $y = ax + b$ ”. Nossa forma de promover esta etapa foi a partir da manipulação de um arquivo construído previamente, contendo controles deslizantes para os coeficientes angular e linear.

Professor no telão e estudantes nos seus respectivos dispositivos discutiram ideias e exploraram o arquivo dinâmico. A Figura 71 mostra uma sequência de imagens obtidas a partir da manipulação do controle deslizante referente ao coeficiente angular.

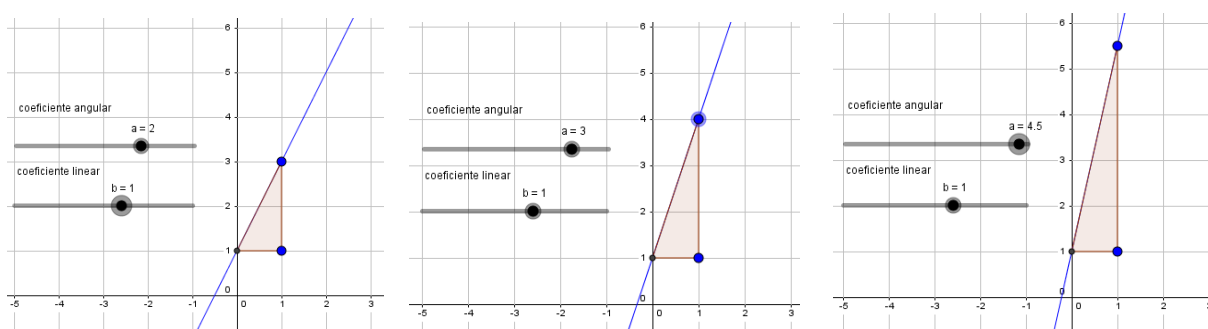


Figura 71 – Conceito de coeficiente angular na equação “ $y = ax + b$ ”. Acervo pessoal.

O diálogo tratou da observação de que o triângulo retângulo a ser observado tem sutil diferença em relação ao caso de retas na forma “ $y = ax$ ”. Aqui, comentaram os estudantes, “o triângulo é deslocado para cima ou para baixo”, de acordo com o coeficiente linear, mas o coeficiente angular segue representando “a variação da ordenada para uma unidade de variação na abscissa”.

A Figura 72 mostra uma sequência de imagens obtidas a partir da manipulação do controle deslizante referente ao coeficiente linear.

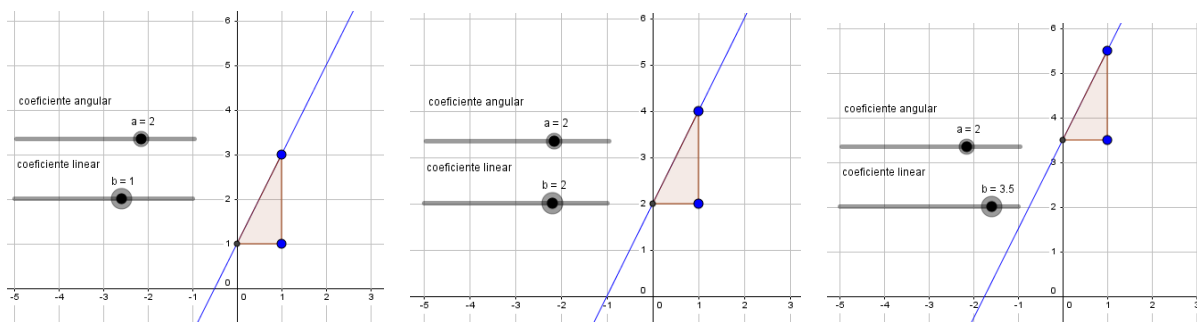


Figura 72 – Conceito de coeficiente linear na equação “ $y = ax + b$ ”. Acervo pessoal.

Aqui, a discussão coletiva destacou o fato de que o coeficiente linear segue representando a “ordenada do ponto em que a reta intercepta o eixo OY”.

Evidentemente, salientamos com os estudantes que poderiam ser incrementos com mais casas decimais, ou mesmo com números irracionais, mas que para uma exploração com melhor visualização numérica optamos por manter a precisão na primeira casa decimal. Podemos nos referir a esta preferência – associado ao devido esclarecimento junto aos alunos – como ‘suficientemente genérica’.

Na manipulação deste arquivo, o dinamismo do software nos permitiu usar registros dinâmicos para formalizar os conceitos de coeficiente angular e de coeficiente linear. As sucessivas manipulações geram tratamentos no registro dinâmico, permitindo a visualização de grande variedade de retas, e facilitam as conversões entre registro gráfico e algébrico.

#### 4. 4. Análise do Momento 4

O Momento 4 tratou de posições relativas entre retas. A Atividade 1 consistia em explorar uma construção que apresentava duas retas,  $r$  (vermelha) e  $s$  (azul), visualmente paralelas, e um controle deslizante que provocava uma translação na reta  $s$ . A partir dessa exploração, deveriam ser respondidas as perguntas disponíveis na Janela de Visualização, conforme a Figura 73.

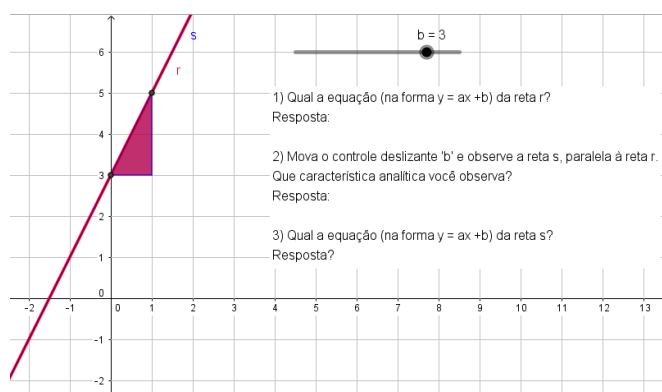


Figura 73 – Atividade 1 do Momento 4 (2). Acervo pessoal.

A primeira pergunta tinha o intuito de resgatar o assunto do Momento 3, a saber, equações de retas na forma ' $y = ax + b$ '. Em particular, exigia dos estudantes a conversão do registro gráfico para o algébrico, fazendo uso das aprendizagens relativas aos conceitos de coeficiente angular e coeficiente linear.

Todos os grupos responderam, com precisão, ' $y = 2x + 3$ ', o que nos sugere a evolução no sentido de formação de uma imagem conceitual adequada para os conceitos em questão. Não é possível afirmar com certeza absoluta que o momento coletivo de sistematização e formalização de conceitos tenha sido suficiente para a superação das dificuldades apresentadas durante o decorrer do Momento 3. Todavia, dadas as respostas corretas para esta atividade, consideramos que houve evolução.

Chamamos apenas atenção para os alunos Grupo 2, que não somente respondeu à pergunta, como também fizeram questão de revelar os tratamentos feitos no registro algébrico que permitiram identificar o coeficiente angular.

Já a segunda pergunta era relacionada à posição relativa entre as retas r e s; enquanto a reta r era estática, a reta s era dinâmica, alterada a partir do controle deslizante. Essa manipulação por parte dos alunos, gerando este registro dinâmico carregado de significado, permitiu que todos os grupos constatassem o atributo fundamental do conceito de paralelismo de retas: as retas precisam ter mesmo coeficiente angular.

A forma de redigir a propriedade verificada variou bastante. Para ilustrar, trazemos algumas respostas dos grupos. O Grupo 1 respondeu: "O coeficiente angular das retas é igual, enquanto o linear varia. Se o linear também fosse igual elas seriam retas coincidentes". A resposta do Grupo 2 foi: "O controle deslizante altera o coeficiente linear, enquanto o restante da equação permanece igual à reta r". A

resposta do Grupo 5 foi mais enxuta: “Tem o mesmo coeficiente angular”. A partir das respostas, julgamos que a formação da imagem conceitual do conceito de retas paralelas está pertinente, restando maior formalidade para que fique devidamente adequada.

Para a terceira pergunta, a maioria dos grupos respondeu que a equação da reta  $s$  é ' $y = 2x + b$ ', o que está correto. Nos impressionou bastante, contudo, a resposta do grupo 5, a saber, ' $y = x + 2$ '. Essa equação dada pelo grupo para a reta  $s$  não faz sentido com a resposta para o item anterior, para a qual os alunos foram enfáticos: “tem o mesmo coeficiente angular”. A não ser pela possibilidade de terem digitado errado, não sabemos avaliar outro motivo que justificasse este erro.

A Atividade 2 do Momento 4 buscava avaliar se os estudantes haviam compreendido a condição de paralelismo entre retas, de tal modo que seja possível construir uma reta  $s$  dada uma reta  $r$ , paralela à  $s$ , e um ponto não pertencente à reta.

Quase que imediatamente, diversos grupos apontaram para certa falta de clareza no enunciado; questionaram de modo semelhante ao aluno que disse “Professor, são duas retas ' $s$ ', certo? Pois não tem como passar pelos pontos  $(0, 0)$  e  $(1, 3)$  e ser paralela à reta  $r$ ”. Esta fala foi estendida como resposta para os demais grupos e, a partir deste momento, a atividade transcorreu normalmente, com todos os grupos resolvendo a atividade de modo correto – inclusive os grupos que tiveram dificuldades ou ausência de registro na atividade anterior. Apresentamos, na Figura 74, a construção do Grupo 6, semelhante às dos demais grupos.

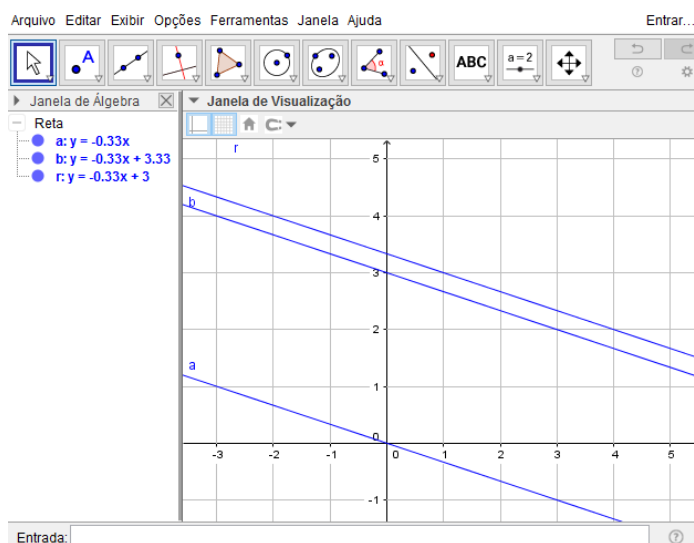


Figura 74 – Resolução da Atividade 2 do Momento 4 pelo Grupo 6. Fonte: Produção do Grupo 6.

A imagem apresenta as equações das retas e suas representações gráficas, todas corretas. A resolução da atividade exigiu conversões entre registros gráficos e algébricos, assim como tratamentos no registro algébrico. Observamos nas estratégias dos estudantes a utilização de procedimentos aprendidos nas tarefas do Momento 3, especialmente para o item (b). Em virtude de ser uma reta passando pelo ponto (1, 3), exigiu que os estudantes novamente lançassem mão da compreensão de coeficiente angular para estabelecer uma proporção que relacionasse os pontos (1, 3) e (0, b). Assim, julgamos que a sistematização de conceitos e a discussão com os estudantes no final do Momento 3 parece ter surtido efeito.

Em particular, o Grupo 2 novamente optou por preservar na sua construção o registro algébrico e os tratamentos utilizados, assim como a conversão entre o registro na língua materna e registro algébrico, conforme mostramos na Figura 75.

$r: (9,0) \text{ e } (0,3)$   
 $a = (3-0)/(0-9) = -1/3$   
 $b = 3$   
 $y = -x/3 + 3$   
 para ser paralela, mantêm-se a (coeficiente angular) e altera-se b (coeficiente linear).  
 $sA: (0,0) \text{ b} = 0$   
 $y = -x/3$   
 $sB: (1,3)$   
 $3 = -1/3 + b \text{ b} = 10/3$   
 $y = -x/3 + 10/3$

Figura 75 – Resolução da Atividade 2 do Momento 4 pelo Grupo 2. Fonte: Produção do Grupo 2.

Especialmente conforme a penúltima linha mostra, nos parece importante destacar que a escrita em forma de texto no software não é a mais adequada do ponto de vista de clareza visual. Contudo, isso em nada afeta a precisa sequência de tratamentos algébricos realizada pelos alunos deste grupo para resolver a atividade.

Para as atividades seguintes, nas quais o assunto seria a exploração inicial em relação a retas perpendiculares, invertemos a sequência de ações; primeiramente, ações em casos particulares; depois, exploração de uma figura dinâmica previamente construída.

A Atividade 3 propunha para os estudantes a criação de duas retas perpendiculares a uma reta  $r$  dada, a saber, a reta ' $y = x$ '. As retas a serem construídas deveriam passar pelos pontos (0, 0) e (2, 2). Todos os grupos realizaram a atividade



com precisão, porém com graus de dificuldade distintos, os quais avaliaremos a seguir. A Figura 76 mostra a construção do Grupo 3, similar a dos demais grupos.

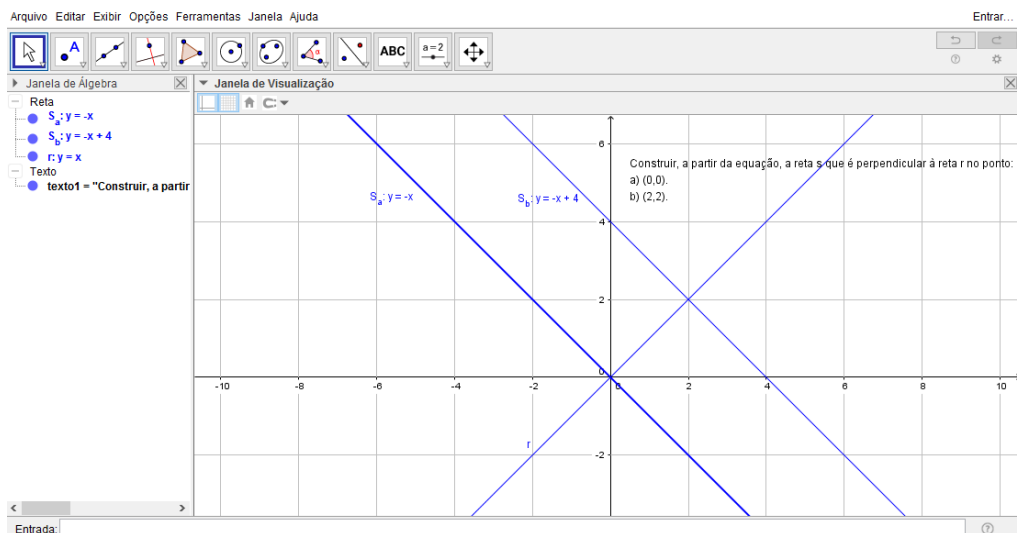


Figura 76 – Resolução da Atividade 3 do Momento 4 pelo Grupo 3. Fonte: Produção do Grupo 3.

A resolução do primeiro item ocorreu sem maiores dificuldades, pois os estudantes conseguiram observar com a ajuda da malha quadriculada qual deveria ser o coeficiente angular da reta perpendicular, e por ser uma reta passando pela origem, sua equação se torna imediata. Para a resolução do segundo item, alguns estudantes tiveram certas dificuldades, até concluir que deveriam repetir estratégias anteriores para obter o ponto  $(0, b)$  a partir do ponto conhecido e do coeficiente angular.

A Atividade 4 tinha enunciado similar ao da Atividade 3, mas com a reta dada tendo equação ' $y = 2x$ '. Para ilustrar o desenvolvimento da atividade, similar para todos os grupos, apresentamos a Figura 77, retirada a partir do arquivo do Grupo 4.

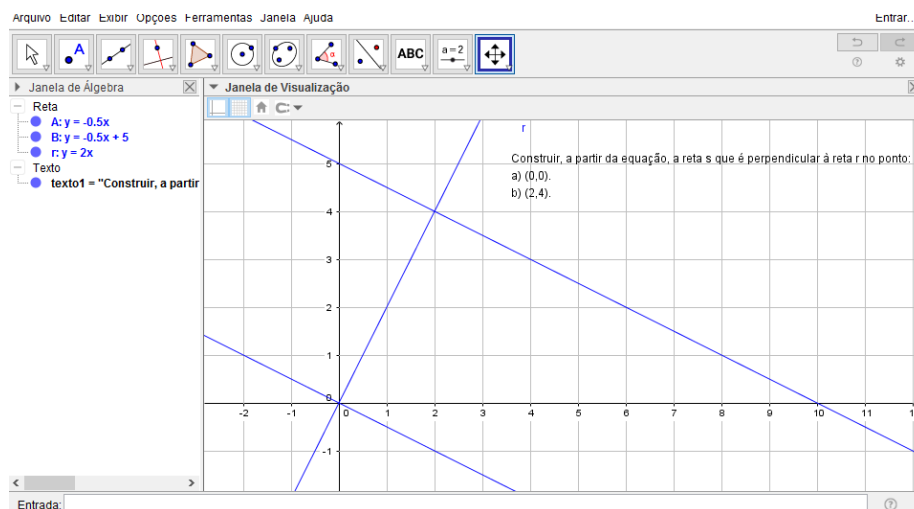


Figura 77 – Resolução da Atividade 4 do Momento 4 pelo Grupo 4. Fonte: Produção do Grupo 4.

A resolução desta atividade provocou dificuldades superiores às aquelas surgidas na atividade anterior. Aqui, constatamos que a identificação de que o coeficiente angular das retas a serem construídas deveria ser igual a  $-1/2$  não foi óbvia para alguns alunos. Na verdade, acompanhando a ação junto a alguns grupos, observamos tentativas iniciais como  $-1$  e  $-2$ .

Avaliamos que a realização dessas tentativas tem aspectos positivos, pois os alunos se põe a trabalhar como matemáticos, isto é, elaborando conjecturas, validando – ou não – suas hipóteses, enfim, tentando descobrir algum tipo de relação importante. Assim, mesmo que alguns grupos tenham obtido a resposta correta tendo, no seu percurso, utilizado ‘tentativa e erro’, consideramos que a atividade promoveu aprendizagens.

A Atividade 5 pedia que os estudantes explorassem uma construção dinâmica elaborada previamente e contendo perguntas sequenciais e que buscam levar os estudantes à obtenção da relação entre os coeficientes angulares de retas perpendiculares. Houve acertos e erros na resolução dos grupos.

Iniciamos apresentando o desenvolvimento correto da atividade a partir da Figura 78 conforme o arquivo salvo pelo Grupo 3, com suas respostas. Os Grupos 1, 4 e 6 apresentaram as mesmas respostas.



Figura 78 – Resolução da Atividade 5 do Momento 4 pelo Grupo 3. Fonte: Produção do Grupo 3.

O primeiro item da atividade possuía o caráter inicial de manipulação e observação; portanto, não se tratava de receber respostas dos grupos. Passando aos itens (2) e (3), temos perguntas para casos particulares, visando verificar se havia entendimento por parte dos alunos da relação numérica nestes casos – possibilitando, quem sabe, a generalização final, objetivo do item (4).

Analisando as respostas dos itens (2), (3) e (4) presentes nos arquivos salvos pelos seis grupos, observamos problemas nas respostas de 2 grupos. O Grupo 2, para o item (3), respondeu como ‘-2’ o coeficiente angular da reta  $s$ , quando a reta  $r$  tem coeficiente angular ‘-0,5’. Aqui, consideramos se tratar de um provável erro por falta de atenção, pois o mesmo grupo respondeu corretamente ao item (4); ou seja, determinou de forma precisa a relação entre os coeficientes angulares.

Por outro lado, três erros foram notados no arquivo do Grupo 5. Para o item (2), em que a reta  $r$  tem coeficiente angular 3, o grupo determinou como ‘-3’ o coeficiente angular de  $s$ . Já para o item (3), para a reta  $r$  com coeficiente angular ‘-0,5’, os alunos responderam ‘0,5’. Finalmente, o item (4) ficou com resposta em branco.

Uma possibilidade a ser avaliada é de que a atividade anterior, por ter apresentado retas perpendiculares com coeficientes angulares 1 e -1, possa ter caracterizado um exemplo prototípico. Ou seja, um exemplo muito particular, que tem atributos críticos do conceito, todavia apresenta atributos não-crítico. Como consequência desta imagem conceitual formada de modo incompleto, os alunos não souberam determinar corretamente a relação entre os coeficientes angulares.

A oportunidade de solução deste problema seria a etapa de discussão coletiva, com a sistematização e a formalização de conceitos. Neste Momento não havia atividade específica para a realização desta discussão coletiva; ela ocorreu após a

realização da Atividade 5, com professor manipulando a mesma figura dinâmica desta atividade no telão e dialogando com os estudantes.

A Atividade 6 pedia a construção de uma reta perpendicular a uma reta dada e passando por um ponto dado. Todos os grupos, inclusive o Grupo 5, realizaram corretamente a configuração exigida, cuja imagem apresentamos a seguir (Figura 79), retirada do arquivo do Grupo 4.

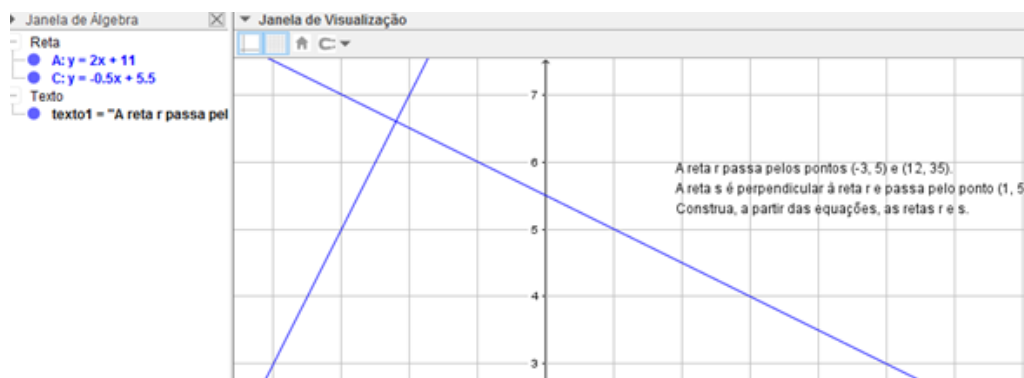


Figura 79 – Resolução da Atividade 6 do Momento 4 pelo Grupo 4. Fonte: Produção do Grupo 4.

A resolução desta atividade exigiu algumas etapas e estratégias. Inicialmente, os estudantes tiveram que obter a equação da reta  $r$  e representá-la no plano a partir de dois pontos. Esta etapa foi resolvida sem maiores dificuldades, provavelmente por envolver estratégias já utilizadas anteriormente.

A principal etapa da resolução desta atividade consistia em obter o coeficiente angular da reta  $s$  a partir do coeficiente angular da reta  $r$ , utilizando a propriedade tratada pela atividade anterior. Em nossa observação, constatamos diálogos nos grupos contendo falas como: “o coeficiente angular de  $r$  é 2, então o de  $s$  é -0.5”. Esta constatação, realizada pelos grupos com diferentes graus de dificuldade e tempo necessário, encaminhou a solução. O restante da resolução foi bem desenvolvido, visto que exigia a realização de estratégia utilizada anteriormente: obter a equação de uma reta conhecido o coeficiente angular e um ponto.

Encerramos a análise do Momento 4 avaliando que as dificuldades que surgiram em algumas atividades deste Momento foram mais significativas do que em Momentos anteriores. Julgamos que as dificuldades se justificam pela própria complexidade do assunto, especialmente o caso de retas perpendiculares. Além disso, alguma ação didática poderia ter sido encaminhada na fase inicial de

exploração intuitiva do caso de perpendicularidade; por exemplo, alguma modificação na figura dinâmica que sustenta a generalização de ideias sobre o conceito em estudo.

#### 4. 5. Análise do Momento 5

O Momento 5 da nossa sequência didática constituiu uma das principais abordagens diferenciadas que propusemos, a saber, o estudo de vetores visando a obtenção de equações de retas via vetor normal.

A Atividade 1 apresentava um arquivo construído previamente, contendo uma figura dinâmica que pedia aos estudantes que caracterizassem com suas palavras a noção de vetores no plano cartesiano.

Por se tratar de uma resposta qualitativa, na qual o grupo deveria expressar de modo ainda informal sua concepção do que se trata um vetor, julgamos ser interessante revelar as diferentes respostas dos grupos. Assim, podemos observar essa etapa inicial da formação das suas Imagens conceituais do objeto sob estudo.

A seguir transcrevemos as respostas dos grupos exatamente na forma como estavam nos arquivos salvos. Chamamos atenção, especialmente, à resposta do Grupo 1, que fez questão de registrar o diálogo dos componentes na sua elaboração coletiva, e à ausência de resposta do Grupo 5, cujos integrantes não estiveram presentes na primeira hora-aula deste Momento.

Grupo 1: “Não se trata de retas, uma vez que sua extensão é finita; no máximo, podemos compreendê-los como segmentos de reta com uma orientação, partindo de um ponto (mais tarde acrescido: com coordenadas definidas (,) portanto).

(R: Segmentos de reta com uma orientação não são vetores? L: não sei; acho que talvez seja mais do que isso; acho que, a partir do momento em que os vetores são trazidos para um contexto de geometria analítica, há certas formas de representá-los e de descrevê-los que a gente não tá sacando N: para onde eles apontam tem a ver com o sinal dos números L: concordamos creio).

R: possuem mesmas propriedades de direção e sentido.

L: você quer dizer orientação.

L: parecem paralelos, só que se encontram; eles parecem crescer “exponencialmente” conforme o ponto móvel...

Conclusão suprema: vetores apontam.

Grupo 2: Um vetor é um segmento de reta, um conjunto de pontos finito, com direção e sentido definidos.

Grupo 3: Vetor seria o indicador da direção, da inclinação e do comprimento de um segmento.

Grupo 4: O coeficiente angular é o mesmo em todos os vetores.

Grupo 6: Indica intensidade, direção e sentido.

O Grupo 1, embora tenha expressado algumas ideias utilizando termos confusos – como a expressão “crescer exponencialmente” –, demonstraram preocupação com a escrita que seria utilizada para vetores. Em outras palavras, os alunos deste grupo estavam interessados, desde já, em como seriam registrados os vetores de forma algébrica.

As respostas dos Grupos 2, 3 e 6 foram similares; acreditamos que os grupos elaboraram suas frases não somente baseados na composição da figura dinâmica, mas também em conhecimentos prévios da aprendizagem de vetores na componente curricular de Física. Apenas cabe a observação quanto a certo estranhamento que causa a leitura da expressão “conjunto finito de pontos” utilizada pelo Grupo 2. Nossa avaliação é de que o termo foi mal escolhido e que os alunos queriam afirmar que se trata de um elemento geométrico limitado em comprimento.

Finalmente, a resposta do Grupo 4 utilizou o conceito de coeficiente angular para se referir ao vetor. Matematicamente sua explicação do que é um vetor não está correta, mas tem certa utilidade, quando pensamos nas atividades seguintes para este Momento.

A Atividade 2 caracterizou o momento de discussão coletiva e elaboração do conceito de vetor formalmente, a partir da manipulação de figura dinâmica construída anteriormente, conforme a Figura 80, na qual a alteração do registro gráfico atualiza o registro algébrico.

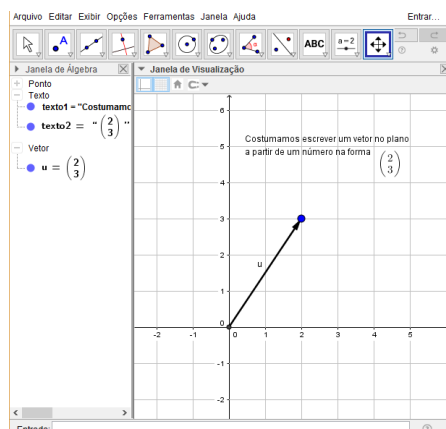


Figura 80 – Atividade 2 do Momento 5 (2). Acervo pessoal.

Professor manipulando a figura no telão e alunos nos seus respectivos dispositivos, interagiram com a construção e estabeleceram a discussão coletiva que sistematiza o assunto. Os estudantes descreveram a observação das sucessivas alterações no registro dinâmico na forma “o par coordenado determina o quanto o vetor ‘anda’ na horizontal e na vertical, e o sinal indica o sentido”. A formalização do conceito foi realizada aproveitando destes atributos relevantes constatados pelos estudantes.

A Atividade 3 consistia em exploração intuitiva de uma construção elaborada previamente referente a vetores ortogonais. O enunciado da atividade pedia que os estudantes dissessem o que se pode afirmar sobre os vetores conforme a manipulação ocorria. A Figura 81 tem uma imagem obtida a partir do arquivo salvo pelo Grupo 3, incluindo sua resposta, similar às dos demais grupos.

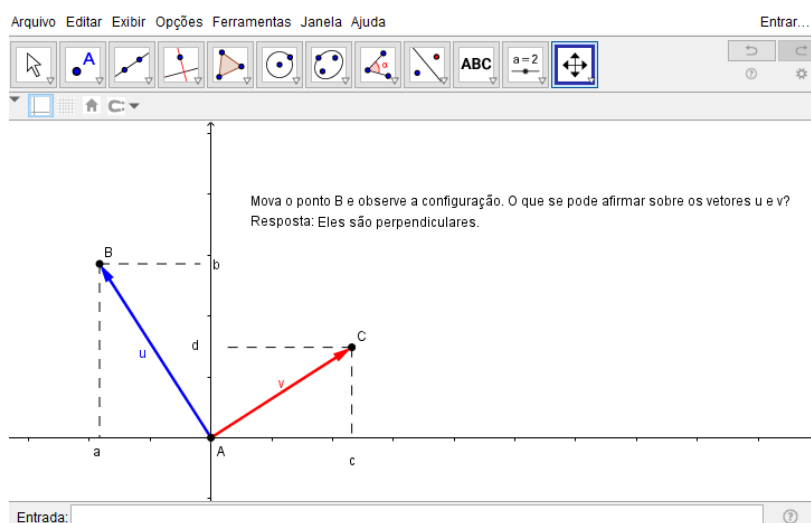


Figura 81 – Resolução da Atividade 3 do Momento 5 pelo Grupo 3. Fonte: Produção do Grupo 3.

Todos os grupos forneceram respostas similares ao questionamento, apenas diferenciando o grau de extensão da resposta; em maioria, a resposta foi como a do Grupo 3: “eles são perpendiculares”. O Grupo 2 esclareceu um aspecto importante e o expôs na discussão coletiva; afirmaram:

Independentemente da posição relativa do ponto b, o ângulo entre os vetores permanece de 90 graus; sendo assim, são vetores de orientação perpendicular, independentemente de sua extensão e de sua orientação absolutas: a inclinação de um em relação ao outro permanece constante.

Assim, esses estudantes contribuíram para o debate observando que não interessa o módulo dos vetores envolvidos, e sim o fato de formarem ângulo de  $90^\circ$ . Definimos, então, que vetores com esta característica são denominadas ortogonais, diferenciando do caso de perpendicularidade entre retas, pois vetores representam uma família de segmentos orientados e, possivelmente, os escolhidos não se interceptem. Inclusive, tratamos deste aspecto com estudantes, justificando o motivo pelo qual a configuração estudada no arquivo tratou de vetores com origem no ponto  $(0, 0)$  como uma escolha para simplificação.

A Atividade 4 era dividida em várias etapas que os estudantes percorreriam até encontrar a relação característica para vetores ortogonais. Relembramos a proposta desta atividade com a Figura 82, na qual temos a sequência de triângulos retângulos destacados e necessários para a resolução das etapas.

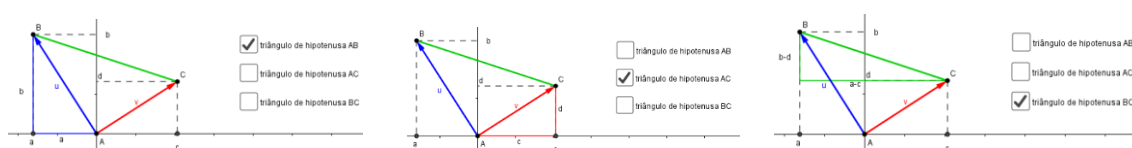


Figura 82 – Sequência de etapas da resolução da Atividade 4 do Momento 5. Acervo pessoal.

A cada visualização de um triângulo específico, os estudantes deveriam relacionar as medidas dos lados dos triângulos retângulos a partir do Teorema de Pitágoras. Em virtude de a ferramenta texto não ser de fácil utilização para escritas algébricas, os estudantes foram convidados a descrever os registros e necessários tratamentos algébricos em uma folha. O Grupo 2, optou por realizar a escrita utilizando a ferramenta texto. As respostas dos grupos foram similares, diferindo na quantidade



de passos omitidos na série de tratamentos algébricos necessários. A Figura 83 apresenta a resolução do Grupo 2.

Responda as perguntas em uma folha para entregar.

- 1) Clique para exibir o triângulo de hipotenusa AB. Qual a medida de AB em função de 'a' e 'b'?  
 $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$
- 2) Clique para exibir o triângulo de hipotenusa AC. Qual a medida de AC em função de 'c' e 'd'?  
 $AC = \sqrt{c^2 + d^2}$
- 3) Clique para exibir o triângulo de hipotenusa BC. Qual a medida de BC em função de 'a', 'b', 'c' e 'd'?  
 $BC = \sqrt{(b - d)^2 + (c - a)^2}$
- 4) Aplique o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC, utilizando como lados medidas em função de 'a', 'b', 'c' e 'd'. Que relação é obtida?  
 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (b - d)^2 + (c - a)^2$   
 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2bd - 2ac$   
 ou seja,  $- 2bd - 2ac = 0$   
 $- 2(ac + bd) = 0$   
 $ac + bd = 0$  (propriedade de vetores perpendiculares) e  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

Figura 83 – Resolução da Atividade 4 do Momento 5 pelo Grupo 2. Fonte: Produção do Grupo 2.

As ações dos grupos nos três primeiros itens da atividade ocorreram sem maiores dificuldades. Todos utilizaram o recurso de exibir o triângulo necessário e obtiveram, a partir do registro gráfico, a equação que representava a relação entre os lados dos triângulos via Teorema de Pitágoras.

Na resolução do último item, alguns grupos necessitaram de auxílio do professor; não foi natural, para esses estudantes, a utilização dos resultados anteriores escrevendo todos os lados em função de **a**, **b**, **c** e **d**. Julgamos que as dificuldades observadas nessa última conversão de registro gráfico para registro algébrico se devem, especialmente, pela complexidade do assunto.

A Atividade 5 era caracterizada por maior ação do professor conduzindo a discussão coletiva. O objetivo da atividade era a obtenção da equação de uma reta via vetor normal. A Figura 84 apresenta a construção utilizada com os estudantes.

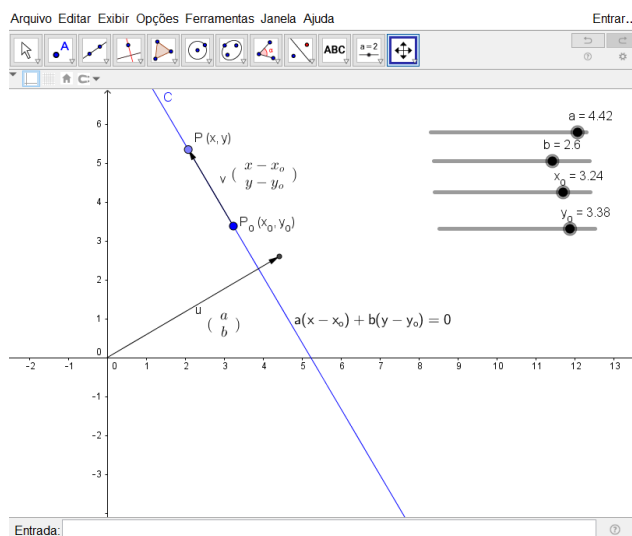


Figura 84 – Atividade 5 do Momento 5 (2). Acervo pessoal.

A ação inicial foi nossa, descrevendo para os estudantes o passo a passo da construção, fazendo referência aos conceitos vistos anteriormente (especialmente vetores ortogonais). Após esta ação, os estudantes foram incentivados a manipular a figura para realizar suas observações, sendo proposto a eles que verificassem de que modo os coeficientes dados pelos controles deslizantes modificavam a configuração da figura dinâmica.

A maior estranheza dos estudantes foi quanto à escrita do vetor  $\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$ , pois nos vetores trabalhados nas atividades anteriores estávamos tratando de vetores na qual a origem era o ponto  $(0, 0)$ . Esta dúvida foi solucionada no momento em que descrevemos os números que caracterizavam o par coordenado deste vetor:  $(x, y)$  é o ponto genérico da reta e  $(x_0, y_0)$  é o ponto conhecido da reta.

Superada esta dificuldade, a equação  $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$  foi compreendida com maior naturalidade, dada a relação obtida anteriormente para vetores ortogonais. Através de tratamentos algébricos nesta equação, obtemos a equação da reta na sua forma característica:  $Ax + By + C = 0$ .

O Momento 5 foi finalizado com as Atividades 6 e 7, cujos enunciados pediam a equação e representação gráfica de retas dado um ponto e o vetor normal a ela. Estas foram atividades de verificação de aprendizagem, promovendo familiarização com o processo de obtenção da equação de uma reta via vetor normal. Os arquivos de todos os grupos apresentaram construções corretas. A Figura 85 apresenta a

construção do Grupo 4 para a Atividade 6 e a Figura 86 apresenta a construção do Grupo 1 para a Atividade 7.

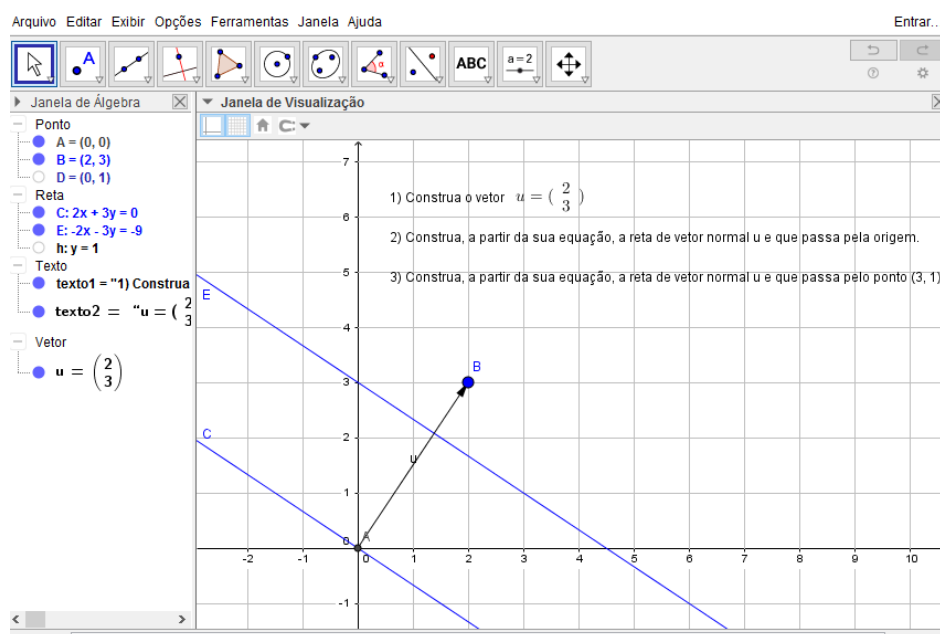


Figura 85 – Resolução da Atividade 6 do Momento 5 pelo Grupo 4. Fonte: Produção do Grupo 4.

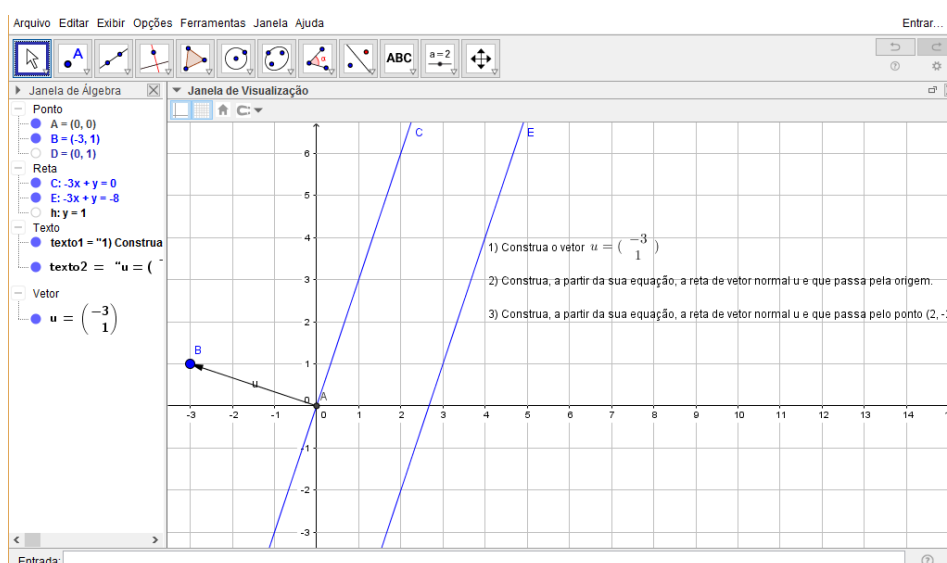


Figura 86 – Resolução da Atividade 7 do Momento 5 pelo Grupo 1. Fonte: Produção do Grupo 1.

Não observamos dificuldades significativas na resolução destas duas atividades durante seu desenvolvimento, bem como não houve construções apresentando erro nos arquivos dos estudantes. Nossa avaliação quanto a este fato é de que esta temática tem maior complexidade na obtenção teórica da equação, e não na resolução de ordem prática.

Durante a realização da atividade, em virtude dos tratamentos nos registros algébricos da equação via vetor normal, podemos observar os estudantes realizando suas ações de modo paralelo às suas ações no software, conforme a Figura 87.

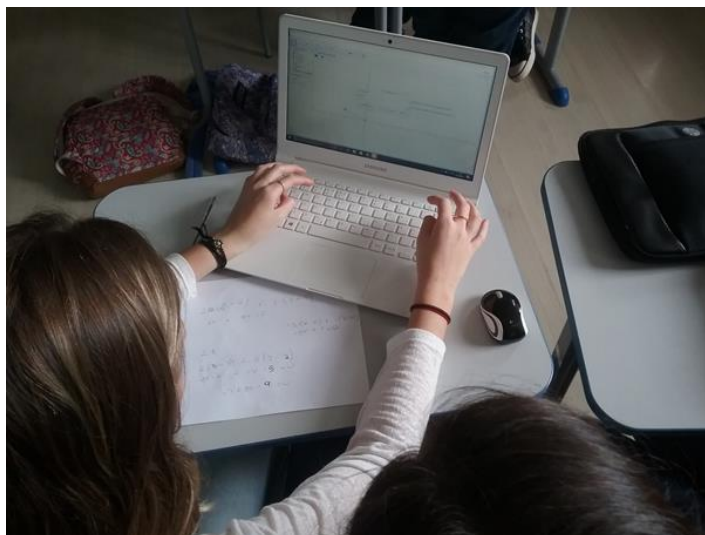


Figura 87 – O uso de registros algébricos em paralelo ao uso do GeoGebra. Acervo pessoal.

O design gráfico do software, em associação aos raciocínios empregados pelos estudantes no desenvolvimento das atividades – realizando as necessárias conversões e tratamentos – sugere que a formação de imagens conceituais ocorreu com sucesso, quando comparado a outros momentos de nossa sequência didática. Curiosamente, num assunto sobre o qual tínhamos incerteza sobre o andamento das atividades e, conseqüentemente, da sua aprendizagem.

Fica a reflexão do porquê este assunto não está comumente presente no ensino-aprendizagem de Geometria Analítica. Possivelmente, sua ausência pode ser justificada, entre outros assuntos, pela dificuldade dos registros estáticos em abordar este assunto. Os registros dinâmicos, com riqueza de significado e que formam imagens conceituais adequadas, nos sugerem ter grande potencial para contribuir para o estudo deste assunto.

Encerramos o Capítulo 4 avaliando que de um modo geral os Momentos de Aprendizagem tiveram bom andamento. Surgiram dificuldades de diferentes ordens na realização de algumas atividades, que exigiram interferência do professor e alguma reorganização das ações didáticas seguintes. Julgamos ser normal a ocorrência

destas dificuldades na implementação de um experimento que proponha atividades diferentes de abordagens convencionais, caso da nossa sequência didática.

Nossa análise objetivou observar na produção dos estudantes a utilização do GeoGebra na aprendizagem dos conceitos sob estudo. Sobretudo, nosso olhar foi relativo ao uso dos registros dinâmicos e sua contribuição para a aprendizagem. Em nossa avaliação, na maioria das ações didáticas, mesmo reconhecendo eventuais dificuldades, a contribuição foi significativa, auxiliando os estudantes na formação de imagens conceituais adequadas.

## 5. Considerações Finais

Neste trabalho desenvolvi uma pesquisa em Educação Matemática que fez uso da Teoria de Registros de Representação, das noções de Imagem Conceitual e Imagem Mental e do software de geometria dinâmica GeoGebra. O objetivo principal desta pesquisa foi responder à pergunta: “Como ocorre o processo de aprendizagem da Geometria Analítica no Ensino Médio quando se faz uso de registros dinâmicos de representação?”

Para responder a pergunta, dentro da particularidade da pesquisa, estabeleci como objetivos: fazer conexões entre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica e as noções de Imagem Conceitual/Imagem Mental; apresentar uma sequência didática direcionada ao ensino e aprendizagem de conceitos de geometria analítica, fazendo uso do software GeoGebra; operacionalizar esta sequência didática numa escola da rede particular de ensino de Porto Alegre; analisar os dados obtidos durante a realização da sequência didática de forma a trazer uma contribuição ao entendimento do processo de aprendizagem quando os estudantes fazem uso de registros dinâmicos de representação.

Minha avaliação, ao final do experimento realizado com turma de alunos do 3º ano do Ensino Médio, é de que a utilização do GeoGebra contribuiu para a formação de imagens conceituais adequadas, de um modo geral. Essa afirmação se baseia nas análises feitas a partir das construções dos estudantes e da observação de suas produções, as quais apresentavam significados precisos para os conceitos estudados. Como exemplo, lembro das respostas corretas dos estudantes na maioria das atividades do Momento 2, no qual estava sendo estudado de modo bastante incipiente o conceito de equação da reta. Nesse Momento, já foi possível observar o uso de diversos registros algébricos que estavam de acordo com os registros dinâmicos obtidos via manipulação no GeoGebra.

Ao longo dos momentos de aprendizagem que constituíram a sequência didática, foram realizadas diversas atividades dependentes do dinamismo do software, de forma a estabelecer muitas conexões entre componentes conceituais e figurais das noções em estudo. Essa avaliação se justifica na observada desenvoltura dos alunos quando fizeram uso dos registros dinâmicos, seja manipulando um arquivo

construído previamente pelo professor, seja criando um novo arquivo partir das ferramentas do software.

Durante o desenvolvimento da sequência, as ações didáticas propostas foram de três tipos. A primeira contemplou uma fase de exploração intuitiva, geralmente a partir da manipulação de arquivos construídos previamente, de modo a formar as primeiras concepções sobre o objeto estudado. A segunda ação contemplou o estudo com caráter mais generalizador, com maior autoria dos estudantes na produção de construções no GeoGebra. A terceira ação foi de discussão coletiva, na qual eu utilizando o telão disponível na sala e os estudantes nos seus dispositivos, manipulávamos os arquivos GeoGebra e trocávamos ideias na direção de sistematizar e formalizar os conceitos estudados.

Avalio que este tripé condutor dos momentos de aprendizagem foi fundamental para a formação das imagens conceituais dos alunos. Sustento essa avaliação levando em conta que esse processo sequencial de exploração, generalização e sistematização possibilita que o sujeito que está a aprender tenha acesso aos atributos críticos relativos aos conceitos estudados. Ainda, pelo fato do processo de aprendizagem ter ocorrido com o uso da geometria dinâmica, as componentes figurativa e conceitual dos objetos geométricos sob estudo foram reiteradamente solicitadas, contribuindo assim para a formação de imagens conceituais adequadas.

Com a análise as produções dos estudantes sob a ótica da Teoria de Duval, constatei a realização de conversões entre registros gráficos e algébricos de modo muito versátil e esta atitude dos alunos se tornou bastante natural. Importante destacar que as conversões ora ocorriam do registro algébrico para o gráfico, ora do gráfico para o algébrico; tal aspecto é fundamental na concepção de Duval para caracterizar uma aprendizagem que dê conta das diferentes características do objeto estudado.

Também observei a realização de diversos tratamentos nos registros dinâmicos, ou seja, transformações internas ao mesmo registro, que permitiram a identificação dos atributos relevantes dos objetos estudados. A sucessão de imagens com riqueza e clareza de significado contribuiu para as imagens conceituais adequadas às noções sob estudo, pois não se limita a situações particulares, permitindo a generalização de ideias – ação didática que esteve presente em diversas atividades durante os momentos de aprendizagem. Vê-se aqui ganhos de

aprendizagem em relação ao que observei enquanto professor ministrante de geometria analítica, em outros momentos fazendo uso de registros estáticos.

Destaco dois dos momentos de aprendizagem que dificilmente seriam executados sem o uso da geometria dinâmica, e que proporcionaram aprendizagens de conceitos de modo diferente. Um deles é o Momento 1, no qual os estudantes construíram figuras dinâmicas através do uso de controles deslizantes – são os números controlando pontos. Esta atividade exigiu criatividade e a compreensão da representação de pontos no plano via expressões algébricas.

O outro é o Momento 5, no qual foi dado significado geométrico à equação de reta na forma “ $Ax + By + C = 0$ ”, fazendo-se uso da noção de vetor normal a direção da reta – este um significado que usualmente não é trabalhado na escola. Julgo que o uso do GeoGebra favoreceu a compreensão dos conceitos de vetor, vetores ortogonais e vetor normal. Isso porque o seu dinamismo promove os necessários tratamentos nos registros dinâmicos, acompanhado de atualizações de equações na janela de álgebra, permitindo conversão entre registros gráficos e algébricos. Considero que tal tipo de sistematização permitida no GeoGebra dificilmente poderia ser reproduzido com registros estáticos.

Evidentemente, durante o desenvolvimento da sequência didática os alunos encontraram dificuldades. As razões para estas dificuldades foram diversas: não entendimento imediato da proposta; imagens conceituais ainda não formadas corretamente a respeito de conceitos prévios; algum tipo de inabilidade no uso dos comandos do GeoGebra (embora boa parte dos estudantes tenha mostrado boa desenvoltura neste aspecto). Mas são dificuldades que julgo serem inerente a qualquer tipo de ação didática. Quanto às minhas intervenções durante os encontros, busquei fazê-las de modo mínimo, respondendo questionamentos com novos questionamentos, oferecendo sugestões de encaminhamento ou propondo discussão coletiva entre alunos do grupo ou do coletivo da turma.

Considero que o período de estudo relativo a fundamentação teórica deste trabalho foi uma oportunidade de significativa aprendizagem enquanto educador matemático. Me dei conta de quão fundamental é para um educador buscar aperfeiçoamento, atualizar seus conhecimentos e entrar em contato com ideias desenvolvidas nas pesquisas em Educação Matemática. Nessa direção, foi também importante para meu aprimoramento profissional ter tido a oportunidade de cursar, ao longo dos dois anos de Mestrado, disciplinas de matemática, de tecnologia digital, de



história da educação matemática, de pesquisa em educação matemática, dentre outras.

Em particular, tive a oportunidade de aprofundar conhecimentos relativos a aspectos da psicologia da educação matemática, sobretudo aspectos relativos à representação em geometria. O fazer e o aprender matemática envolvem representações e, conforme Duval, registros de representações. É no conhecimento dos diferentes registros e na conversão entre eles que se desenvolvem os conceitos matemáticos. Neste sentido, julgo que o software GeoGebra é um facilitador nos processos cognitivos envolvidos na aprendizagem matemática, pois é ferramenta que propicia a realização de conversões e tratamentos de registros. Conforme já comentado no Capítulo 1 desta dissertação, a utilização deste software já fazia parte do cotidiano de minha sala de aula. Agora, posso seguir fazendo isso, contando com maior conhecimento teórico sobre o que fazer, e como fazer, de modo a promover a aprendizagem de meus estudantes.

A temática das imagens conceituais esteve presente nos meus estudos durante a época da graduação. Neste trabalho, foi possível me familiarizar ainda mais com alguns conceitos já conhecidos, além de compreender outros. A visualização em geometria é fundamental e, ao mesmo tempo um desafio, uma vez que é impossível tratar dos objetos de estudo apenas do ponto de vista conceitual. Mas as representações visuais podem comprometer o significado dos conceitos e aqui, mais uma vez, dou créditos ao GeoGebra, pois o dinamismo das representações promove a formação de imagens conceituais adequadas aos conceitos sob estudo.

A realização desta pesquisa também contribuiu para minha carreira como professor, de um modo geral. Pude colocar efetivamente em prática na sala de aula conhecimentos e tendências educacionais desenvolvidas no ambiente acadêmico, fazendo isso com estudantes de uma turma de educação básica, em horário regular de aula; e desenvolvendo assuntos que, entre outros aspectos, seriam objeto de avaliação da componente curricular de matemática. Em outras palavras, a sequência didática desenvolvida não somente rendeu frutos para essa dissertação, como também fez parte de um ambiente de sala de aula na sua realidade. E os resultados, conforme apontei ao longo do trabalho, foram muito proveitosos.

Julgo que a ação docente do professor vai além daquela de propiciar a aprendizagem de conteúdos, no meu caso de matemática; também são criados vínculos com os estudantes. Particularmente, ao longo da realização da sequência

didática estreitou-se a minha relação com essa turma – que era muito boa, e se tornou ainda mais harmoniosa. Considero como evidencia deste relacionamento o fato de ter sido escolhido professor paraninfo da turma. E a escolha ocorreu de modo muito simbólico: em certa aula, fui convidado a abrir um arquivo GeoGebra no computador da sala. Ao fazê-lo, surge o belo convite, a partir da manipulação de controles deslizantes no software, conforme mostramos na Figura 88, retirada de vídeo gravado pelos estudantes.

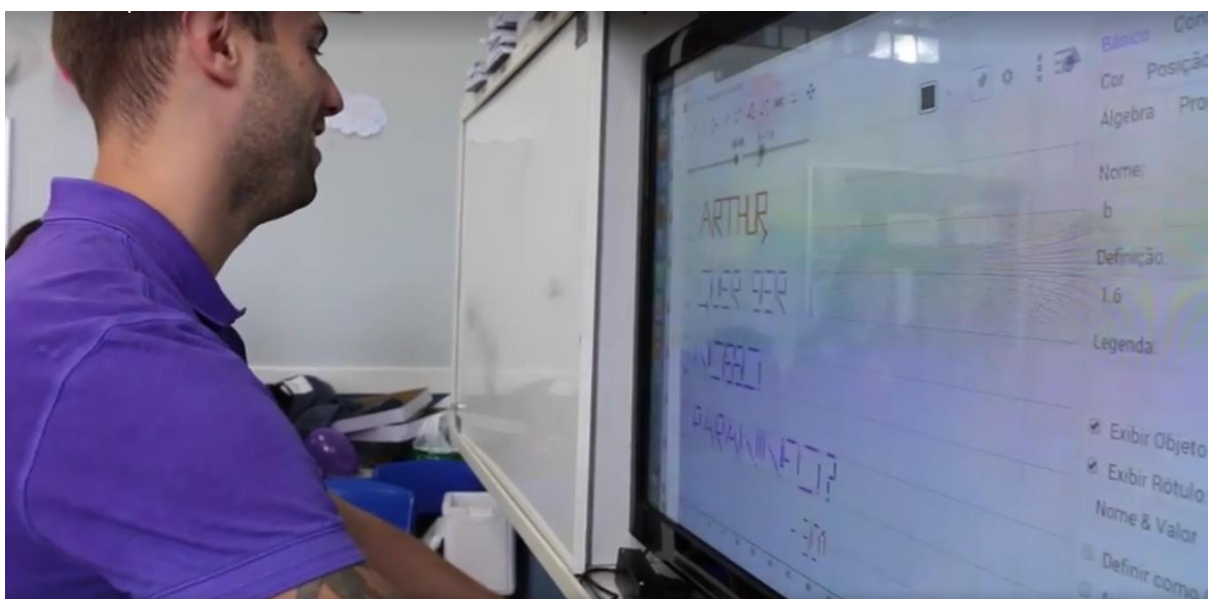


Figura 88 – Escolha do professor paraninfo, feita no GeoGebra. Fonte: Produção dos estudantes.

Finalmente, fica a minha expectativa de que este trabalho possa contribuir para a área da educação matemática. Fiz uma experiência que foi positiva e espero que, com adaptações conforme os diferentes contextos escolares existentes, possa ser replicada em outras salas de aula. Para além da sequência didática em si – que dá origem ao produto didático que é um apêndice dessa dissertação – espero que as discussões apresentadas na dissertação, possam contribuir para a pesquisa em educação matemática, com foco em experiências de ensino que façam uso de recurso digital como o GeoGebra.

## Referências Bibliográficas

ARTIGUE, M. **L'impact curriculaire des technologies sur l'éducation mathématique.** In: Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, Año 8, Número 11, pp 295-305, Costa Rica, 2013.

BERND, A. B. **As imagens conceituais e a geometria dinâmica.** Trabalho de Conclusão de Curso. UFRGS, 2011.

\_\_\_\_\_. **Registros de Representações Semióticas e a utilização de ambiente de geometria dinâmica na aprendizagem de conceitos de Geometria Analítica.** In: Revista Novas Tecnologias em Educação. Cinted, UFRGS, V. 14 Nº 2, dezembro, 2016.

BORSOI, C. **GeoGebra 3D no Ensino Médio: uma possibilidade para a aprendizagem da Geometria Espacial.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

BRITO, M. R. F. **Psicologia da educação matemática: um ponto de vista.** In: Educar em Revista, Curitiba, Brasil, n. Especial 1/2011, p. 29-45. Editora UFPR, 2011.

CARLOS, M. L. **Parâmetros no GeoGebra na construção de circunferências: um estudo sobre raciocínio generalizador com alunos do 3º ano do Ensino Médio.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.

DUVAL, R. Registros de representações semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S.D.A. (Org.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica.** Campinas: Papirus. p. 11- 33. 2003.

\_\_\_\_\_. **A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning oh mathematics.** In: Educational Studies in Mathematics 61: 103–131. 2006

\_\_\_\_\_. **Semiósis e pensamento humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais.** Tradução Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. 1. Ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

\_\_\_\_\_. Tradução: Mérciles Thadeu Moretti. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento.** Revemat: R. Eletr. de Edu. Matem. eISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 07, n. 2, p.266-297, 2012.

DRIJVERS, P.; KIERAN, C.; MARIOTTI, M. A. **Integrating Technology into Mathematics Education: Theoretical Perspectives**. In C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology – Rethinking the terrain. The 17th ICMI study*. (Vol. 13, New ICMI Study Series, pp. 329-345). NY: Springer, 2010.

FALCÃO, J. T. R. **Metodologia de pesquisa em psicologia da educação matemática: reflexões acerca de encaminhamentos possíveis e evoluções desejáveis**. In: *Psicologia da educação matemática – VIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa e Intercâmbio Científico*, Serra Negra, São Paulo, 2000.

FISCHBEIN, E. **The Theory of Figural Concepts**. In: *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 24, No. 2, pp. 139-162, 1993.

GRAVINA, M. A. **Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria**. In: *Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação*, Belo Horizonte, 1996.

\_\_\_\_\_. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético dedutivo**. Tese (Doutorado em Informática na Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

\_\_\_\_\_. **O Potencial semiótico do GeoGebra na aprendizagem da geometria: uma experiência ilustrativa**. In: *VIDYA*, v. 35, n. 2, p. 237-253, jul./dez., 2015 - Santa Maria, 2015.

HERSHKOWITZ, R. **Aspectos Psicológicos da Aprendizagem da Geometria**. *Boletim GEPEM*, n. 32, Rio de Janeiro, 1994.

HERSHKOWITZ, R.; BRUCKHEINMER, M.; VINNER, S. **Atividades com professores baseadas em pesquisa cognitiva**. In: LINDQUIST, M. M.; SCHULTE, A. P. *Aprendendo e ensinando geometria*. Tradução de Hygino H. Domingues, São Paulo, Ed. Atual, 1994.

MONZON, L. W. **Números Complexos e Funções de Variável Complexa no Ensino Médio – uma proposta didática com uso de objeto de aprendizagem**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

NETO, J. R. D. **Registros de Representação Semiótica e o GeoGebra: um ensaio para o ensino de Funções Trigonométricas**. Dissertação (Mestrado em Educação

Científica e Tecnológica). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2010.

NOTARE, M. R.; GRAVINA, M. A. **A formação continuada de professores de matemática e a inserção de mídias digitais na escola.** In: Anais do VI Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática (VI HTEM), UFSCar, São Carlos, 2013.

PALLES, C.; SILVA, M. J. F. **Visualização em Geometria Dinâmica.** In: Encontro de Produção Discente - PUC/SP-UNICSUL, 2012, São Paulo. Encontro de Produção Discente - PUC/SP-UNICSUL, 2012.

PONTE, J. P. **Estudos de caso em educação matemática.** In: Bolema, 25, p. 105-132, 2006.

STORMOWISK, V. **Formação de professores de matemática para o uso de tecnologia: uma experiência com o GeoGebra na modalidade EAD.** Tese (Doutorado em Informática na Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2015.

## APÊNDICE A

### TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, \_\_\_\_\_, R.G. \_\_\_\_\_, responsável pelo(a) aluno(a) \_\_\_\_\_, da turma \_\_\_\_\_, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada “O processo de gênese instrumental da geometria dinâmica” desenvolvida pelo pesquisador e professor do Colégio Monteiro Lobato Arthur Barcellos Bernd. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por Maria Alice Gravina a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do e-mail gravina@mat.ufrgs.br.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

- Estabelecer conexões entre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica e a Teoria da Abordagem Instrumental, no que diz respeito à utilização de/conversão entre diferentes registros no processo de gênese instrumental da geometria dinâmica;
- Operacionalizar uma sequência didática através da utilização do software GeoGebra no Colégio Monteiro Lobato, na qual o pesquisador é docente, constituindo uma pesquisa na metodologia de estudo de caso;
- Analisar os dados obtidos durante a realização da sequência didática e avaliar sua contribuição para o processo de gênese instrumental da geometria dinâmica para os estudantes participantes da pesquisa.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de entrevista/questionário escrito etc, bem como da participação nas aulas que compõe a sequência didática sobre o tema da pesquisa, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o pesquisador responsável no telefone (51) 9646-0102 / e-mail arthur.bernd@colegiomonteirolobato.com.br.

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.

Assinatura do Responsável: \_\_\_\_\_

Assinatura do(a) pesquisador(a): \_\_\_\_\_

Assinatura do Orientador da pesquisa: \_\_\_\_\_

## APÊNDICE B

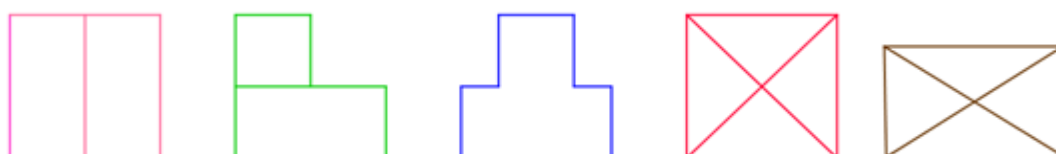
### Produto Didático

O Produto Didático desta dissertação é formado pelo conjunto de atividades que compuseram nossa sequência didática. São atividades propostas para o estudo dos seguintes assuntos de Geometria Analítica: coordenadas de pontos, equações de retas na forma “ $y = ax + b$ ”, posições relativas entre retas, vetores no plano cartesiano e equações de retas na forma “ $Ax + By + C = 0$ ” via vetor normal.

As atividades estão descritas a seguir, agrupadas em 5 Momentos, que estruturam a sequência didática implementada. Sob o título de “Ação Didática”, esclarecemos os papéis de professor e alunos no desenvolvimento de cada um dos Momentos. No caso de uso de arquivos GeoGebra, estes estão disponíveis nos endereços eletrônicos indicados.

#### **Momento 1: Estudo de coordenadas de pontos.**

- **Atividade:** Utilizando o comando *controle deslizante*, realize cada uma das construções sugeridas a partir das imagens abaixo.



Para gerar o efeito desejado (linha contínua), deve-se seguir a seguinte sequência de passos:

- 1 – Selecionar o comando *controle deslizante* e criar um número.
- 2 – Criar um ponto no plano, no qual suas coordenadas são dadas em função deste número do controle deslizante.
- 3 – Selecionar a opção *habilitar rastro* para o ponto criado.

- **Ação Didática:** as ações dos estudantes são de exploração intuitiva, pois se trata de familiarização com o objeto de estudo (coordenadas de pontos no plano), e, aos poucos, de generalização de ideias quanto a pontos dinâmicos (que será



importante para a continuidade da sequência didática). O papel do professor, aqui, consiste em mediar o processo de construção e facilitar a comunicação entre estudantes e software (especialmente em caso de pouca familiaridade), pois a autoria das produções cabe aos estudantes.

Momento 2: Estudo de casos particulares de retas

- **Atividade 1:** Explore o arquivo disponível em <https://ggbm.at/TqZnnZAx>.

Responda: Como você poderia caracterizar o conjunto de pontos assumidos pelo ponto A?

- **Atividade 2:** Explore o arquivo disponível em <https://ggbm.at/Jy6KC9KH>.

Responda: Como você poderia caracterizar o conjunto de pontos assumidos pelo ponto A?

- **Atividade 3:** Explore o arquivo disponível em <https://ggbm.at/Vr3hQGUF>.

Responda: Como você poderia caracterizar o conjunto de pontos assumidos pelo ponto A?

- **Atividade 4:** Explore o arquivo disponível em <https://ggbm.at/Uj8r3tG8>.

Responda: Como você poderia caracterizar o conjunto de pontos assumidos pelo ponto A?

- **Atividade 5:** Explore o arquivo disponível em <https://ggbm.at/RYMcuH4a>.

Responda: Como você poderia caracterizar o conjunto de pontos assumidos pelo ponto A?

- **Atividade 6:** Explore o arquivo disponível em <https://ggbm.at/EVz8PPuj>.

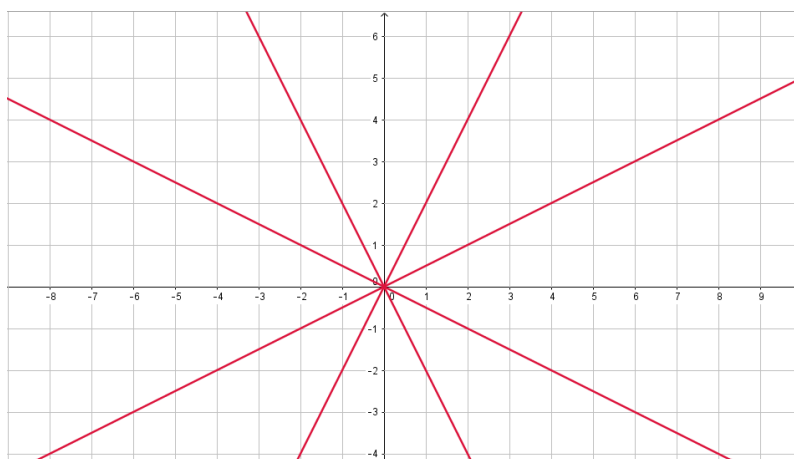
Responda: Como você poderia caracterizar o conjunto de pontos assumidos pelo ponto A?

- **Ação Didática:** Este Momento é inteiramente dedicado a exploração intuitiva a respeito de equações de retas (em casos particulares). Sendo assim, estudantes

tem ações exploratórias e de formulação das primeiras ideias sobre o objeto de estudo, enquanto ao professor cabe mediar o processo.

Momento 3: Estudo de equações de retas na forma “ $y = ax + b$ ”.

- **Atividade 1:** Determine as equações que geram a composição indicada na figura abaixo. Feita a construção, construa pontos dinâmicos sobre as retas.



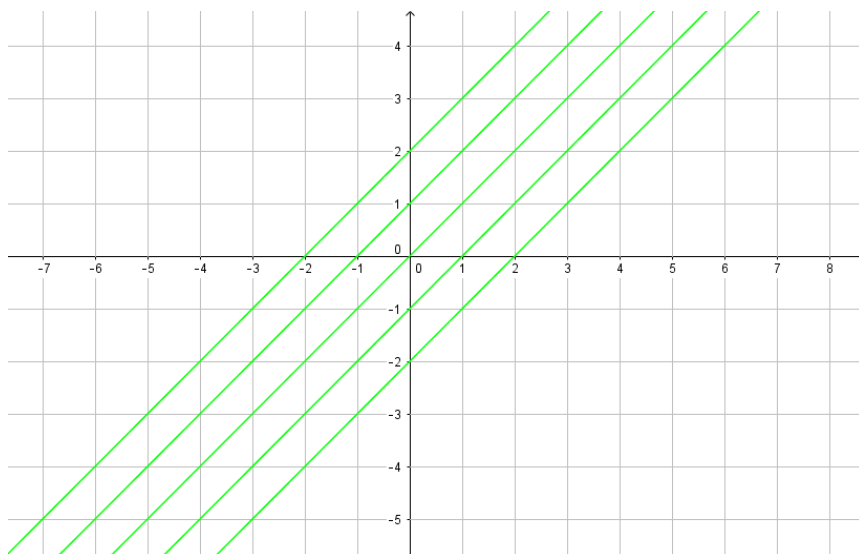
- **Atividade 2:** Explore o arquivo disponível em <https://ggbm.at/VzRvqHyB>. A partir da exploração, discutir qual o significado do coeficiente angular de uma reta na forma “ $y = ax$ ”.

- **Atividade 3:** Realize as seguintes construções no GeoGebra.

- Construa, a partir da sua equação, a reta que passa pelos pontos (0,0) e (8, 24).
- Construa, a partir da sua equação, a reta que passa pelos pontos (0,0) e (36, 27).
- Construa, a partir da sua equação, a reta que passa pelos pontos (0,0) e (-30, 45).

- **Atividade 4:** Realize as seguintes construções no GeoGebra.

- Determinar as equações que geram a composição indicada na figura abaixo. Feita a construção, construa pontos dinâmicos sobre as retas.
- Determinar uma equação com o uso do recurso ‘controle deslizante’ gerando a composição indicada na figura.



- **Atividade 5:** Realize as seguintes construções no GeoGebra.

- Construa, a partir da sua equação, a reta que passa pelos pontos (0, 3) e (11, 36).
- Construa, a partir da sua equação, a reta que passa pelos pontos (0, 2) e (30, -13).
- Construa, a partir da sua equação, a reta que passa pelos pontos (-4, 1) e (29, 45).

- **Atividade 6:** Explore o arquivo disponível em <https://ggbm.at/UP8MwNN9>. A partir da exploração, discutir quais os significados do coeficiente angular e do coeficiente linear de uma reta na forma “ $y = ax + b$ ”.

- **Ação Didática:** este Momento é caracterizado por grande diversidade de ações didáticas. A Atividade 1 objetiva que os estudantes retomem as equações de retas abordadas de modo intuitivo no Momento 2, tendo, portanto, que assumir a ação central na atividade. Nas Atividade 2 e 6, o professor deve conduzir uma discussão coletiva que sistematize as ideias e formalize o conceito de coeficiente angular (Atividade 2) e de equação de reta na forma  $y = ax + b$  (Atividade 6). Nas Atividades 3 e 5, a proposta é a realização de tarefas clássicas de geometria analítica, nas quais alunos produzem as construções solicitadas (que envolvem conversões entre registros gráficos e algébricos) e professor media o processo. Na Atividade 4, os estudantes desenvolvem ações tanto exploratórias quanto generalizadora de ideias quanto a coeficiente linear, cabendo ao professor também mediar o processo.

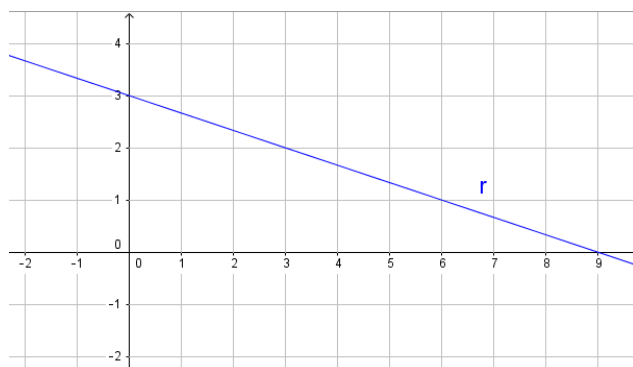
Momento 4: Posições relativas entre retas no plano cartesiano (retas paralelas e retas perpendiculares).

- **Atividade 1:** Explore o arquivo disponível em <https://ggbm.at/SRAew72D>. A partir da exploração, responda às seguintes perguntas:

- 1) Qual a equação (na forma  $y = ax + b$ ) da reta  $r$ ?
- 2) Mova o controle deslizante  $b$  e observe a reta  $s$ , paralela à reta  $r$ . Que característica analítica você observa?
- 3) Qual a equação (na forma  $y = ax + b$ ) da reta  $s$ ?

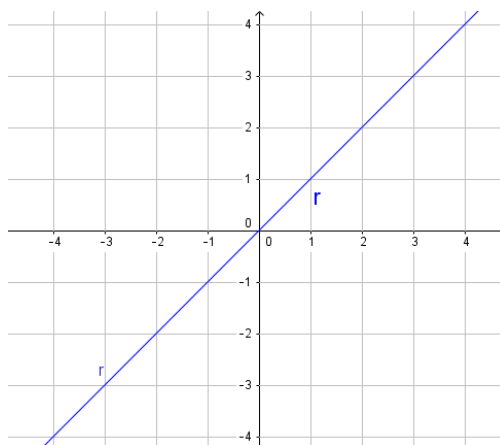
- **Atividade 2:** Construir no GeoGebra, a partir da equação, a reta que é paralela à reta  $r$  (dada na figura abaixo) e passa pelo ponto dado, em cada um dos casos a seguir.

- a)  $(0, 0)$
- b)  $(1, 3)$



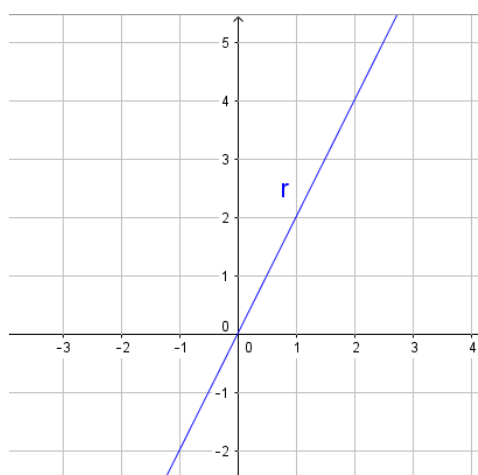
- **Atividade 3:** Construir no GeoGebra, a partir da equação, a reta que é perpendicular à reta  $r$  (dada na figura abaixo) e passa pelo ponto dado, em cada um dos casos a seguir:

- a)  $(0, 0)$
- b)  $(2, 2)$



- **Atividade 4:** Construir no GeoGebra, a partir da equação, a reta que é perpendicular à reta  $r$  (dada na figura abaixo) e passa pelo ponto dado, em cada um dos casos a seguir:

- a)  $(0, 0)$
- b)  $(2, 4)$



- **Atividade 5:** Explorar o arquivo disponível em <https://ggbm.at/AuMdyXqu>, seguindo a orientação do item 1 e respondendo os demais itens a seguir.

- 1) Mova o controle deslizante  $a_r$ , coeficiente angular da reta  $r$  (azul), e observe a configuração das retas  $r$  e  $s$ .
- 2) Qual o coeficiente angular da reta  $s$  (vermelha) quando  $a_r = 3$ ?
- 3) Qual o coeficiente angular da reta  $s$  (vermelha) quando  $a_r = -0.5$ ?
- 4) Qual o coeficiente angular da reta  $s$  (vermelha) em função de  $a_r$ ?

- **Atividade 6:** A reta  $r$  passa pelos pontos  $(-3, 5)$  e  $(12, 35)$ . A reta  $s$  é perpendicular à reta  $r$  e passa pelo ponto  $(1, 5)$ . Construa no GeoGebra, a partir das equações, as retas  $r$  e  $s$ .

- **Ação Didática:** neste Momento, a maior parte das ações didáticas são assumidas pelos estudantes. Nas Atividades 1 e 5, temos etapas de exploração intuitiva, passando à generalização de ideias, quanto aos conceitos de retas paralelas e retas perpendiculares, respectivamente. Apenas no item final de cada uma dessas atividades o professor pode conduzir o processo de discussão coletiva, a fim de sistematizar e formalizar os conceitos. As Atividades 2, 3, 4 e 6, são clássicas do estudo da geometria analítica, nas quais o foco é na obtenção das equações das retas paralelas e perpendiculares (registros algébricos) e suas representações no plano (registros gráficos).

*Momento 5: vetores no plano cartesiano e equações de retas na forma " $Ax + By + C = 0$ " via vetor normal*

- **Atividade 1:** Explorar o arquivo disponível em <https://ggbm.at/ANWp9pvJ>. Após a exploração, responda: que significado você atribui para um vetor no plano cartesiano?

- **Atividade 2:** Explorar o arquivo disponível em <https://ggbm.at/YpX2euAb>. Após a exploração, discutir a forma de escrever um vetor de forma algébrica.

- **Atividade 3:** Explorar o arquivo disponível em <https://ggbm.at/acRPusbt>, seguindo a seguinte orientação:  
Mova o ponto B e observe a configuração. O que se pode afirmar sobre os vetores  $u$  e  $v$ ?

- **Atividade 4:** Explorar o arquivo disponível em <https://ggbm.at/M7i9by7q>. A partir da exploração, responda as perguntas em uma folha para entregar.

1) Clique para exibir o triângulo de hipotenusa AB. Qual a medida de AB em função de 'a' e 'b'?

- 2) Clique para exibir o triângulo de hipotenusa AC. Qual a medida de AC em função de 'c' e 'd'?
- 3) Clique para exibir o triângulo de hipotenusa BC. Qual a medida de BC em função de 'a', 'b', 'c' e 'd' ?
- 4) Aplique o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC, utilizando como lados medidas em função de 'a', 'b', 'c' e 'd'. Que relação é obtida?

- **Atividade 5:** Explorar o arquivo disponível em <https://ggbm.at/tuku6NwV>. A partir da exploração:

- 1) escrever a relação algébrica de ortogonalidade para os vetores  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} x - x_o \\ y - y_o \end{pmatrix}$ .
- 2) obter a equação na forma  $Ax + By + C = 0$ , na qual  $A = a$  e  $B = b$ .
- 3) discutir o significado dos coeficientes A e B nesta equação.

- **Atividade 6:** No GeoGebra, construa:

- 1) o vetor  $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .
- 2) a partir da sua equação, a reta de vetor normal u e que passa pela origem.
- 3) a partir da sua equação, a reta de vetor normal u e que passa pelo ponto (3, 1).

- **Atividade 7:** No GeoGebra, construa:

- 1) o vetor  $u = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- 2) a partir da sua equação, a reta de vetor normal u e que passa pela origem.
- 3) a partir da sua equação, a reta de vetor normal u e que passa pelo ponto (2, -2).

- **Ação Didática:** as Atividades 1, 2 e 3 são caracterizadas por ações de exploração intuitiva dos estudantes, de modo a formar as primeiras ideias referentes a vetores no plano cartesiano. Nessas atividades, o professor media as ações, contribuindo conforme necessário no processo de familiarização com a notação de vetores (registro algébrico) e sua representação no plano (registro gráfico). A Atividade 4 é a etapa central deste Momento, na qual estudantes tem ações com resolução itens sequenciais visando generalização de ideias quanto a vetores ortogonais. Por envolver alguns tratamentos importantes (tanto no registro dinâmico

quanto no algébrico), o professor também media as interações dos estudantes com o software e com o objeto de estudo. Na Atividade 5, o professor conduz o processo de discussão coletiva, de modo a formalizar o conceito de vetores ortogonais visando a obtenção da equação da reta via vetor normal, que dá origem à equação da reta na forma  $Ax + By + C = 0$ . Nas Atividades 6 e 7, temos propostas de construção no software, envolvendo conversão entre registros gráficos e algébricos, nas quais os estudantes são autores da construção e professor media a resolução.