



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
Programa de Pós-Graduação em Física  
Dissertação de Mestrado

# **Quebra de dinâmica ponderomotiva como um eficiente mecanismo de aceleração e focagem de partículas carregadas**

Felipe Russman

Dissertação<sup>1</sup> apresentada ao Programa de Pós-Graduação na modalidade Mestrado Acadêmico Stricto Sensu de Física Teórica do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul por Felipe Russman sob orientação do Prof. Dr. Felipe Rizzato como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física.

**Porto Alegre, Março de 2018**

---

<sup>1</sup>Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

**Área de Concentração**

Física Teórica: Teoria Eletromagnética, Física de Plasmas, Ondas não lineares, Aceleradores de partículas, Potencial ponderomotivo.

**Título:** Quebra de dinâmica ponderomotiva como um eficiente mecanismo de aceleração e focagem de partículas carregadas.

**Aluno:** Felipe Russman

Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS.

**Orientador:** Prof. Dr. Felipe Rizzato

Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS.



**Orientador:** \_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Felipe Rizzato



**Aluno:** \_\_\_\_\_  
Felipe Russman

## AGRADECIMENTOS

Agradeço

- aos meus pais, pelo presente da vida;
- ao meu orientador Prof. Dr. Felipe Rizzato, pela excelente orientação, oportunidade, amigável atenção e dedicação, pela agradável convivência e pelos valiosos ensinamentos da vida profissional.
- aos colegas de grupo de trabalho, os quais foram indispensáveis para este, pela *melhor-impossível* recepção, dicas valiosíssimas, ajuda sempre presente, incentivo e amizade;
- aos colegas de curso, por toda amizade e inestimável ajuda dedicada;
- à Universidade Federal do Rio Grande do Sul, por ser, há anos, uma segunda casa;
- ao CNPq, que financiou o meu mestrado

e, finalmente, à sociedade brasileira, que financia o ensino público.

## RESUMO

A presente dissertação estuda a dinâmica uni e tridimensional de uma partícula solitária eletricamente carregada sob a ação de uma onda eletrostática de alta frequência lentamente modulada. A onda dota a partícula de energia potencial elétrica e o seu movimento é conhecido através do emprego do formalismo hamiltoniano, onde se faz a consideração de efeitos relativísticos devido às altas velocidades envolvidas no processo. Enquanto a velocidade máxima experimentada pela partícula permanece suficientemente abaixo da velocidade de fase característica da onda que a acelera, sua dinâmica pode ser bem descrita por uma refinada aproximação ponderomotriz. Com esta abordagem, prevê-se corretamente a velocidade média, máxima e mínima desenvolvida pela partícula ao longo de seu movimento através das curvas que permeiam e envelopam o perfil de velocidade. Os limites de validade da aproximação são bem estabelecidos e, uma vez ultrapassados, a partícula com velocidade ressonante é capturada pela onda. Sob as adequadas condições calculadas neste trabalho, o mecanismo de captura instala, espontaneamente, a partícula em fase ótima relativa a onda e a acelera a velocidades muito próximas da velocidade da luz no vácuo. Em consonância, o processo de aceleração é otimizado com a focagem da partícula em direção ao eixo de propagação da onda durante um certo intervalo de tempo e de comprimento aproveitáveis.

**Palavras-chave:** onda eletrostática, aceleradores, dinâmica não linear, potencial ponderomotriz

## ABSTRACT

The present dissertation studies the one and three-dimensional dynamics of an electrically charged solitary particle under the action of a slowly modulated high frequency electrostatic carrier wave. The wave gives the particle electrical potential energy and its movement is known through the use of Hamiltonian formalism, where relativistic effects are considered due to the high velocities involved in the process. Meanwhile the maximum speed experienced by the particle remains sufficiently below the characteristic phase velocity of the accelerating carrier wave, its dynamics can be well described by a refined ponderomotive approach. With this approach, the average, maximum and minimum speed developed by the particle along its movement through the curves that permeate and envelop the velocity profile. The limits of validity of the approximation are well established and, once exceeded, the particle with resonant velocity is captured by the wave. Under the appropriate conditions calculated in this work, the capture mechanism spontaneously installs the optimum phase particle relative to the wave and accelerates towards the speed of light in the vacuum. At same time, the acceleration process is optimized by focusing the particle towards the wave propagation axis for a certain usable time interval and length.

**key-words:** electrostatic wave, accelerators, nonlinear dynamics, ponderomotive potential

# Sumário

Agradecimentos	i
Resumo	ii
Abstract	iii
Lista de Figuras	v
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Modelo unidimensional</b>	<b>3</b>
2.1 O modelo de potencial unidimensional . . . . .	3
2.1.1 Equações de evolução do sistema unidimensional . . . . .	7
2.1.2 Simulações das soluções numéricas do modelo unidimensional . . . . .	9
2.2 Aproximação ponderomotriz para o sistema unidimensional . . . . .	17
2.2.1 Equações de evolução da aproximação ponderomotriz unidimensional . . . . .	23
2.2.2 Simulações de solução ponderomotriz e comparação de resultados . . . . .	26
<b>3 Modelo tridimensional</b>	<b>29</b>
3.1 O modelo de potencial tridimensional . . . . .	29
3.1.1 Equações de evolução do sistema tridimensional . . . . .	32
3.1.2 Simulação numérica de soluções das equações do modelo tridimensional . . . . .	33
3.2 Aproximação ponderomotriz do sistema tridimensional . . . . .	42
3.2.1 Equações de evolução da aproximação ponderomotriz tridimensional . . . . .	46
3.2.2 Simulação de soluções ponderomotriz e comparação de resultados . . . . .	49
<b>4 Considerações finais e perspectivas futuras</b>	<b>51</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>52</b>

## Lista de Figuras

2.1	Potencial unidimensional. Comparação para $\sigma = 10$ e $\sigma = 100$ .	4
2.1.1	Mapa de parâmetros da velocidade de ejeção 1D	11
2.1.2	Evolução de velocidade e espaço de fase dos pontos $2a$ e $2b$	12
2.1.3	Evolução de velocidade e espaço de fase dos pontos $3a$ e $3b$	13
2.1.4	Evolução de velocidade e espaço de fase dos pontos $4a$ e $4b$	14
2.1.5	Evolução de velocidade do ponto 5	16
2.2.6	Comparação entre a solução do sistema original e ponderomotriz	27
2.2.7	Comparação entre a solução do sistema original e ponderomotriz	28
3.1.1	Mapa de parâmetros $r_0$ vs. $v_{0z}$ vs. $v_{zf}$	35
3.1.2	Evolução temporal de velocidades. $v_{0z} = 0.3$	36
3.1.3	Evolução temporal de velocidades. $v_{0z} = 0.4$	36
3.1.4	Evolução temporal de velocidades. Mecanismo de captura. $v_{0z} = 0.57c$	37
3.1.5	Evolução temporal de velocidades de captura sem aceleração	38
3.1.6	Ganho percentual de energia cinética para $v_{0z} = 0.4\alpha^{-1/2}$ .	39
3.1.7	Ganho percentual de energia cinética $v_{0z} \in (0.4; 0.9)$	39
3.1.8	Mapa de parâmetros do valor mínimo do quociente $r(t)/r_0$	40
3.1.9	Mapa de parâmetros $\varphi_0$ vs. $v_{0z}$ vs. $v_{zf}$	41
3.2.1	Comparação entre a solução do sistema original e ponderomotriz	49
3.2.2	Comparação entre a solução do sistema original e ponderomotriz	49
3.2.3	Comparação entre a solução do sistema original e ponderomotriz	50

# 1 Introdução

O processo de aceleração de partículas carregadas demanda, em geral, o controle minucioso da escolha adequada da escala de comprimento que atenda à velocidade final desejada para as partículas. Esta característica é herdada desde os primeiros modelos de aceleradores eletrostáticos como, por exemplo, os aceleradores Cockcroft-Walton[1] e Van de Graaff[2] cujo comprimento característico mencionado é a distância entre os eletrodos. Já para os aceleradores eletromagnéticos[3], o comprimento ideal pode ser o tamanho característico dos guias de ondas - para os que aproveitam de frequências na escala de radio, por exemplo[4; 5] - ou mesmo a distância percorrida pelas partículas capturadas em aceleradores baseados na excitação de campos em plasmas (*wakefields accelerators*)[6]. A dispersão do feixe carregado nestes aceleradores eletromagnéticos é um fenômeno natural. Ao longo da viagem que visa acelerá-las, as partículas são arremessadas perpendicularmente à direção de propagação da onda aceleradora tipicamente por *space-charge* ou efeitos ponderomotivos transversais. Este comportamento é muito indesejado. As partículas precisam ficar próximas ao eixo do dispositivo acelerador. É onde os campos são mais intensos e a aceleração é coerentemente guiada e controlada. É comum a utilização de estruturas magnéticas inteligentemente arrançadas nos dispositivos aceleradores para evitar tal comportamento e manter o feixe alinhado ao eixo de transporte[7; 8; 9; 10].

Existem muitos processos na dinâmica de plasmas que envolvem o conceito de força ou potencial ponderomotivo, que representa o efeito de campos eletromagnéticos de alta frequência no movimento lento das partículas que compõe o plasma[11]. A força ponderomotiva governa a dinâmica do centro de oscilação das partículas e pode ser deduzida por análise perturbativa de primeira ordem na força de Lorentz em torno do centro de oscilação[12]. Considerando os efeitos de segunda ordem com relação ao campo elétrico, essa força tem lugar quando a escala rápida de tempo (referente às variáveis de alta frequência) é mais curta do que a escala modulacional (ou lenta). Deve-se isto ao fato de a força ponderomotiva impor aos elétrons que sejam acelerados na mesma direção do gradiente do módulo quadrado da amplitude do campo elétrico, mas no sentido contrário. Ou seja, os elétrons do plasma tendem a afastar-se de regiões onde o campo elétrico é mais intenso, daí a dispersão e reflexão de um feixe que tenta penetrar em uma região de intensidade de campo elétrico crescente[12; 13].

A aproximação ponderomotiva, proposta para tratar a dinâmica não linear da partícula em interação com o campo elétrico de alta frequência, sugere uma mudança de perspectiva e provê a descrição do sistema em termos de um conjunto autoconsistente de variáveis de baixa frequência. Uma vez que a força ponderomotriz - responsável por este estágio da dinâmica - é um campo vetorial gradiente[14], o sistema gerado por ela é conservativo. Desta maneira, observa-se a simetria temporal nos entes destinados a descrever o movimento da partícula única e exclusivamente em função das variáveis de baixa frequência. A aproximação tem limite de validade bem estabelecido e corresponde muito bem à dinâmica completa enquanto as partículas encontram-se em regime distante do ressonante com a onda aceleradora. A correspondência entre as descrições suporta a compreensão da fenomenologia não linear encarada neste estudo como fruto da força ponderomotiva. O procedimento de obtenção da aproximação baseia-se na remoção dos termos de alta frequência do hamiltoniano. O sucesso do procedimento se dá através de uma transformação canônica cuidadosamente construída para este fim. Os termos remanentes que formulam o hamiltoniano transformado, i.e, os que sobrevivem à remoção de toda e qualquer menção a escalas rápidas de tempo, configuram um sistema conservativo cuja simplicidade propicia, além da previsão de alguns resultados imediatos sobre, até mesmo, dinâmica completa, a conclusão da impossibilidade de ganho líquido de energia cinética (quando comparados o estado inicial e final de movimento) pelas partículas durante a regência do regime ponderomotivo. Entretanto, este período causa um ajuste espontâneo da fase da partícula em relação a onda e, otimizando os parâmetros do problema, a aceleração da partícula é observada quando a dinâmica ponderomotiva não é mais válida. A este evento chamamos de quebra da dinâmica ponderomotiva.

O presente trabalho discorre sobre a proposta[15] de um sistema alternativo de aceleração de partículas. Uma partícula solitária<sup>1</sup> é posta a interagir com uma onda eletrostática de alta frequência com ampli-

<sup>1</sup>Embora a presente dissertação trate da dinâmica de uma partícula, referir-se-á, possivelmente, a esta como um plasma.

---

tude lentamente modulada. Tanto para dinâmica unidimensional tratada no Capítulo 2 quanto para a tridimensional tratada no Capítulo 3, a interação proporciona à partícula três regimes possíveis de movimento. Cada um destes regimes é visitado de acordo com o ajuste dos parâmetros e condições iniciais impostas à partícula. O regime mais fecundo a ser explorado é aquele que resulta na captura da partícula pela onda após um período ponderomotivo inicial que, espontaneamente, coloca-a em condição ressonante. Quando ajustada às condições ótimas, a quebra da dinâmica ponderomotiva pode ejetar elétrons com energia cinética que se aproxima da escala de GeV, mesmo para moderados valores de amplitude máxima da onda[16]. Além disso, este ajuste pode, espontaneamente e simultaneamente à eficiente aceleração, focar a partícula na direção do eixo de propagação da onda aceleradora por um certo período de tempo e comprimento aproveitáveis. E ainda, destacando-se dos *beat wave accelerators*[7; 17; 18], o sistema proposto causa a aceleração independentemente da fase inicial da partícula com relação a onda.

Dividiu-se a dissertação na exploração, em primeiro, na forma unidimensional - destinada a desenvolver familiaridade com os possíveis regimes da dinâmica, seu alcance e principais características - e, em segundo, na forma tridimensional que adiciona um perfil transversal à onda. O mecanismo de troca de energia cinética entre as dimensões do espaço de configuração é o foco principal desta dissertação e visa a ampliação do estudo unidimensional atribuindo realidade às soluções simuladas numericamente.

## 2 Modelo unidimensional

O presente capítulo destina-se ao estudo da dinâmica unidimensional de uma partícula carregada sob regime relativístico interagindo com uma onda eletrostática de alta frequência e lentamente modulada. A simplicidade visa apresentar o problema e sintetizar familiaridade para com os aspectos do movimento, possíveis regimes e principais resultados.

### 2.1 O modelo de potencial unidimensional

Seja um sistema constituído de uma onda eletrostática e uma partícula de teste carregada e solitária. A onda eletrostática viaja ao longo de um eixo de referência inercial nomeado pela coordenada  $x$  onde se localiza a partícula. A partícula, com velocidade diferente de zero, penetra na região onde há a influência do potencial providenciado pela onda com total chance de choque, uma vez que é injetada considerando-se apenas uma dimensão. A onda será representada pelo potencial

$$\varphi(x, t) = \varphi_0 e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \cos(kx - \omega t), \quad (2.1.1)$$

de onde o campo elétrico longitudinal escolhido, viajando no sentido de crescimento do eixo  $x$ , é obtido via  $\vec{E}(x, t) = -\nabla\varphi(x, t)$ . A física desse tipo de onda eletrostática modulada é similar a de partículas submetidas a ação combinada de campos eletromagnéticos colineares e de *wiggler*. Esse tipo de arranjo é comumente visto em dispositivos de *free-electron laser*. [19; 20; 21]. O fator de amplitude  $\varphi_0$  é uma constante positiva e corresponde ao valor máximo de potencial que pode ser experimentado pela partícula<sup>1</sup>. Os parâmetros da onda são o número de onda  $k$  e a frequência angular  $\omega$ . A modulação é representada pelo fator exponencial gaussiano, onde o parâmetro  $\sigma$  é o comprimento característico do envelope de onda. A escolha dos parâmetros deve ser tal que o potencial comece a apresentar sinais de modulação para pontos muito distantes da origem espacial do sistema de referências em que está assentado. Este regime é conhecido como de lenta modulação. Para garanti-lo, observemos o comportamento da função de potencial em sua representação em série de potências. Basta que a expansão seja feita na coordenada espacial para concluir o que se quer. Utilizando a identidade trigonométrica que se refere a função cosseno calculada para uma soma, podemos identificar

$$\cos(kx - \omega t) = \sin(\omega t) \sin(kx) + \cos(\omega t) \cos(kx).$$

Usando as expansões conhecidas para as funções seno e cosseno em série de potência até 4<sup>a</sup> ordem - o que é suficiente para a presente análise - segue

$$\cos(kx - \omega t) = \cos(\omega t) + kx \sin(\omega t) - \frac{1}{2}(kx)^2 \cos(\omega t) - \frac{1}{6}(kx)^3 \sin(\omega t) + \frac{1}{24}(kx)^4 \cos(\omega t) + \dots$$

A expansão em série de mesma natureza para a função envolvida com o potencial  $e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \cos(kx - \omega t)$  é facilmente obtida e o resultado é

$$e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \cos(kx - \omega t) = \cos(\omega t) + kx \sin(\omega t) - \frac{1}{2}(kx)^2 \left(1 + \frac{2}{(k\sigma)^2}\right) \cos(\omega t) + \\ - \frac{1}{6}(kx)^3 \left(1 + \frac{6}{(k\sigma)^2}\right) \sin(\omega t) + \frac{1}{24}(kx)^4 \left(1 + \frac{12}{(k\sigma)^2} + \frac{12}{(k\sigma)^4}\right) \cos(\omega t) + \dots$$

---

<sup>1</sup>  $\left| e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \cos(kx - \omega t) \right| \leq 1 \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^2.$

Está-se interessado em calcular alguma relação entre os parâmetros presentes na função de potencial de modo que Para que a imagem da função modulada  $e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cos(kx - \omega t)$  varie pouco significativamente da imagem da função não modulada  $\cos(kx - \omega t)$  numa vizinhança suficientemente próxima da origem espacial (regime de modulação lenta) parece conveniente que, para essa vizinhança, os coeficientes das potências de mesmo grau de ambas as funções variem pouco significativamente também. Assim, os termos de baixa potência em  $(kx)$  (que, afinal, tem decisão sobre a imagem da função nas vizinhanças da origem) de ambas as funções devem ter coeficientes cujo valor é próximo. Comparando termo a termo das expansões, o quanto antes as potências de  $(k\sigma)$  crescerem em valor será o quanto antes os coeficientes se assemelham. Uma condição que produz o regime de interesse é, portanto,  $k\sigma \rightarrow \infty$ . Isso parece garantir que os coeficientes da função modulada convirjam rapidamente para os coeficientes da função não modulada em uma vizinhança tão grande quanto se queira da origem. Supomos, portanto, que  $\sigma \gg 1/k$  de modo a valer a condição de modulação lenta. Abaixo são mostrados dois gráficos que ilustram o potencial (2.1.1) para o instante de tempo fixo  $t = 0$ . O gráfico em azul exibido no quadro (a) da FIG 2.1 foi gerado para (usando o SI)  $\sigma = 10$  m,  $k = 1$  m<sup>-1</sup>,  $\omega = 1$  s<sup>-1</sup> e  $\varphi_0 = 1$  V e mostra que na ausência da condição de modulação lenta a onda eletrostática não apresenta valores significativos de potencial já para o intervalo  $|x| > 2\sigma$ . Já o gráfico em azul exibido no quadro (b) desta mesma figura, onde  $\sigma = 100$  m,  $k = 1$  m<sup>-1</sup>,  $\omega = 1$  s<sup>-1</sup> e  $\varphi_0 = 1$  V e, portanto, faz-se valer a condição de modulação lenta, a onda não se parece modulada suficientemente perto da origem. Se parece, na verdade, com a própria função  $\cos(x)$ . Os sintomas de modulação são evidenciados somente alguns comprimentos de onda à direita e à esquerda da origem. As curvas pontilhadas em preto em ambos os gráficos são os envelopes da curva de potencial construídos apenas pelo gráfico da gaussiana não modulada pelo cosseno. O aspecto observado entre a curva de potencial e os envelopes é assim porque, para  $x \ll \sigma$ , os pontos de máximo e mínimo da função de potencial, isto é, o conjunto  $\{x_0 \in \mathbb{R} \mid \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, t) = 0\}$ , acabam sendo a interseção entre a imagem do potencial e da própria curva gaussiana.

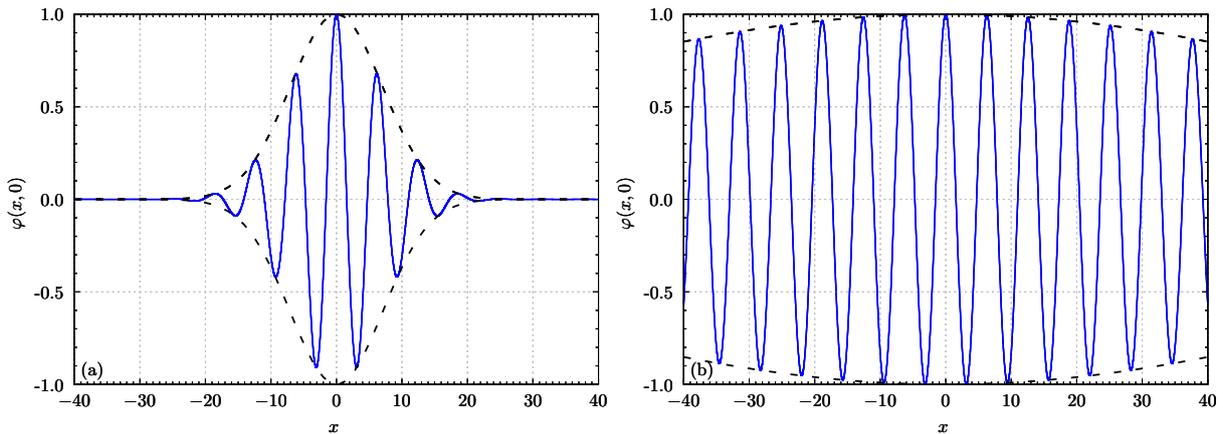


FIG. 2.1: Gráficos do potencial (2.1.1) no instante de tempo  $t = 0$  s. Os gráficos foram construídos para  $k = 1$  m<sup>-1</sup>,  $\omega = 1$  s<sup>-1</sup>,  $\varphi_0 = 1$  V, (a)  $\sigma = 10.0$  e (b)  $\sigma = 100.0$ . O eixo horizontal mostra a coordenada  $x$  medida em metros e o eixo vertical o potencial medido em volts.

Conhecida a forma funcional do potencial, emprega-se o formalismo hamiltoniano a fim de obter as equações na forma canônica de Hamilton que ditam a evolução das variáveis dinâmicas que identificam univocamente uma dada configuração do sistema (posição e velocidade da partícula). Para fazê-lo, identifica-se a função lagrangiana que o representa.

Seja uma partícula dotada de carga  $q$  e massa  $m$  localizada pelo vetor  $\mathbf{x}$  em um referencial inercial. Uma vez considerados efeitos relativísticos, tal partícula sob influência de uma energia potencial do tipo  $U(\mathbf{x}, t)$  tem sua dinâmica regida pelo Princípio de Mínima Ação via um funcional lagrangiano do tipo[22]

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{c^2}} - U(\mathbf{x}, t).$$

A forma funcional do termo cinético (que contém a velocidade  $\dot{\mathbf{x}} = d\mathbf{x}/dt$  da partícula) motiva-se porque: (i) no limite não-relativístico, onde se pode considerar a velocidade da partícula muito inferior a

velocidade da luz no vácuo  $c^1$ , a expansão de tal termo em série de potências em torno de  $\dot{\mathbf{x}}/c \ll 1$  gera

$$-mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{c^2}} = -mc^2 + \frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2} + \mathcal{O}(\dot{\mathbf{x}}^4)$$

que fornece exatamente o termo cinético usual ao lagrangiano na teoria não-relativística; e (ii) as equações de Euler-Lagrange são capazes de reproduzir o resultado

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\dot{\mathbf{x}}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{c^2}}} \right) = -\nabla U(\mathbf{x}, t)$$

que é a Segunda Lei de Newton com a devida correção relativística na massa da partícula. A adição de uma constante real ao lagrangiano não modifica as equações de movimento. Portanto, a parcela  $-mc^2$  presente na expansão é ignorável pois gera apenas um lagrangiano equivalente ao usual.

Dito isto, a partícula carregada sob ação do potencial (2.1.1) tem sua dinâmica regida pelo lagrangiano

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}} - q\varphi_0 e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \cos(kx - \omega t). \quad (2.1.2)$$

É conveniente, antes de prosseguir, que as coordenadas eleitas para descrever a dinâmica bem como seus parâmetros característicos passem por um processo de adimensionalização. Esta estratégia é corriqueira e melhor exhibe os resultados sem a preocupação com sistemas de unidades. As coordenadas e os parâmetros adimensionais serão, por ora, indicados por uma barra subscrita. Definindo

$$\bar{x} = kx, \quad \bar{t} = \omega t, \quad \text{e} \quad \bar{\sigma} = k\sigma,$$

decorre a velocidade adimensional  $\dot{\bar{x}}$  como

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} \Rightarrow \dot{x} = v_\phi \dot{\bar{x}}.$$

I.e, a velocidade da partícula é adimensionalizada pela velocidade de fase da onda eletrostática. Segue que: (i) se  $\dot{\bar{x}} < 1$ , então um referencial ligado a partícula percebe uma fase fixa da onda passando por si; (ii) se  $\dot{\bar{x}} = 1$  o regime é ressonante, a partícula acompanha a fase fixa da onda; e (iii) se  $\dot{\bar{x}} > 1$  o referencial ligado a partícula encontra-se em posição adiantada à fase fixa e, portanto, percebe essa fase se afastando de si no sentido de decrescimento do eixo  $x$ . A unidade de energia do lagrangiano vem do fator  $mc^2$ , que é a mesma unidade do fator de amplitude  $q\varphi_0$ . Prosseguindo com o processo, tomando as adimensionalizações

$$\mathcal{L} = mc^2 \bar{\mathcal{L}} \quad \text{e} \quad q\varphi_0 = mc^2 \bar{\varphi}_0$$

bem como um novo parâmetro ( $\alpha$ ) convenientemente definido por

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{v_\phi^2}{c^2}, \quad (2.1.3)$$

o lagrangiano se reescreve para

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}(x, \dot{x}, t) &= -\sqrt{1 - \frac{v_\phi^2}{c^2} \dot{\bar{x}}^2} - \bar{\varphi}_0 e^{-\frac{\bar{x}^2}{\bar{\sigma}^2}} \cos(\bar{x} - \bar{t}) \\ &= -\sqrt{1 - \alpha \dot{\bar{x}}^2} - \bar{\varphi}_0 e^{-\frac{\bar{x}^2}{\bar{\sigma}^2}} \cos(\bar{x} - \bar{t}) \end{aligned}$$

e sua versão adimensional, definindo o *fator relativístico de Lorentz* por

$$\gamma(\dot{\bar{x}}) = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha \dot{\bar{x}}^2}} \quad (2.1.4)$$

é, portanto,

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = -\frac{1}{\gamma(\dot{\bar{x}})} - \bar{\varphi}_0 e^{-\frac{\bar{x}^2}{\bar{\sigma}^2}} \cos(\bar{x} - \bar{t}). \quad (2.1.5)$$

A partir de agora a barra sobrescrita será omitida para economizar a notação, mas todas as variáveis e quantidades tratadas devem ser entendidas - a menos que se enuncie o contrário - como adimensionais. O próximo passo é obter o hamiltoniano fazendo uma transformação de Legendre no lagrangiano (2.1.5).

<sup>1</sup>A notação  $c$  irá significar a velocidade da luz no vácuo toda vez que for mencionada nesta dissertação. No SI,  $c = 3 \times 10^8 \text{m/s}$ .

O processo de adimensionalização que levou ao lagrangiano (2.1.5) garante que toda sequência do formalismo se dará na mesma natureza. O momento conjugado  $p$  à coordenada  $x$ , adimensional, portanto, é obtido via

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \\ &= -\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \sqrt{1 - \alpha \dot{x}^2} \\ &= -\frac{\partial \sqrt{1 - \alpha \dot{x}^2}}{\partial (1 - \alpha \dot{x}^2)} \frac{\partial (1 - \alpha \dot{x}^2)}{\partial \dot{x}} \\ &= \frac{\alpha \dot{x}}{\sqrt{1 - \alpha \dot{x}^2}} \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

e, então, a relação entre o momento conjugado e a velocidade da partícula se dá pela expressão

$$p = \alpha \dot{x} \gamma(\dot{x}). \quad (2.1.7)$$

A inversão da equação (2.1.7) é capaz de expressar a velocidade da partícula única e exclusivamente como função da coordenada de momento conjugado. Porém, é mais conveniente que, antes, reescreva-se o fator relativístico unicamente como função do momento conjugado. Isto porque a dependência funcional do lagrangiano na velocidade da partícula é concentrada no fator relativístico. Supondo conhecido  $\gamma = \gamma(p)$ , i.e, o fator de Lorentz como função unicamente do momentum, de (2.1.7) podemos reescrever  $\dot{x} = p/\gamma\alpha$  que, substituído em (2.1.4) dá uma equação que pode ser resolvida dando sequência a

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \alpha \left(\frac{p}{\alpha\gamma}\right)^2} \Rightarrow \gamma^2 = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - \frac{p^2}{\alpha}} \Rightarrow \gamma^2 - \frac{p^2}{\alpha} = 1$$

onde o fator relativístico é dado pela expressão

$$\gamma(p) = \sqrt{1 + \frac{p^2}{\alpha}}. \quad (2.1.8)$$

Com (2.1.8), pode-se atualizar (2.1.7) e obter a velocidade da partícula unicamente em função do momento conjugado:

$$p = \alpha\gamma(p)\dot{x} \Rightarrow \dot{x}(p) = \frac{p}{\alpha\gamma(p)}. \quad (2.1.9)$$

O hamiltoniano  $\mathcal{H}(x, p, t)$  é obtido através de

$$\mathcal{H}(x, p, t) = \dot{x}(p).p - \mathcal{L}(x, \dot{x}(p), t).$$

Efetuando as operações, segue de (2.1.5) e de (2.1.9) que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x, p, t) &= \frac{p^2}{\alpha\gamma(p)} + \frac{1}{\gamma(p)} + \varphi_0 e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \cos(x - t) \\ &= \frac{1}{\gamma(p)} \left( \frac{p^2}{\alpha} + 1 \right) + \varphi_0 e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \cos(x - t) \\ &= \frac{1}{\gamma(p)} \gamma(p)^2 + \varphi_0 e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \cos(x - t) \\ &= \gamma(p) + \varphi_0 e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \cos(x - t) \end{aligned}$$

e, finalmente,

$$\mathcal{H}(x, p, t) = \sqrt{1 + \frac{p^2}{\alpha}} + \varphi_0 e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \cos(x - t) \quad (2.1.10)$$

é o hamiltoniano para o sistema tratado. É simples notar que o hamiltoniano, embora não conservado, ainda é a energia total do sistema pois é a soma da energia cinética da partícula ( $\gamma$ ) com a energia potencial que experimenta ( $\varphi$ ).

### 2.1.1 Equações de evolução do sistema unidimensional

Em mãos do hamiltoniano (2.1.10) estamos aptos a obter as equações que ditam a evolução dinâmica da posição da partícula bem como de seu momento conjugado. As equações de movimento na forma canônica de Hamilton são

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \quad \text{e} \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}. \quad (2.1.11)$$

A primeira equação, que dá a velocidade da partícula, invoca apenas uma derivação parcial com respeito ao momento conjugado  $p$  da partícula cuja dependência explícita na hamiltoniana concentra-se apenas no fator relativístico (2.1.8). Assim sendo, segue imediatamente que

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \gamma}{\partial p}.$$

Usando (2.1.8) podemos concluir que

$$2\gamma \frac{\partial \gamma}{\partial p} = \frac{\partial \gamma^2}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial p} = \frac{\partial \gamma^2}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \left( 1 + \frac{p^2}{\alpha} \right) = \frac{2p}{\alpha} \Rightarrow \frac{\partial \gamma}{\partial p} = \frac{p}{\alpha \gamma}$$

e a primeira equação de Hamilton é, portanto,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{\sqrt{\alpha^2 + \alpha p^2}} \quad (2.1.12)$$

que é a própria equação (2.1.9) obtida anteriormente. É seguro reparar que esta relação é exatamente a obtida entre a velocidade e o momento linear de uma partícula na dinâmica relativística. A outra equação de Hamilton exige derivação parcial com relação à posição, cuja dependência se concentra na parcela referente a energia potencial. Assim, segue que

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ \varphi_0 e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \cos(x-t) \right] \\ &= -\varphi_0 \left\{ \cos(x-t) \frac{\partial e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}}{\partial x} + e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \frac{\partial \cos(x-t)}{\partial x} \right\} \\ &= \varphi_0 e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \left[ \frac{2x}{\sigma^2} \cos(x-t) + \sin(x-t) \right]. \end{aligned}$$

Desta maneira, o movimento da partícula carregada estará completamente conhecido uma vez solucionadas as equações

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{\sqrt{\alpha^2 + \alpha p^2}} \quad (2.1.13)$$

e

$$\frac{dp}{dt} = \varphi_0 e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \left[ \frac{2x}{\sigma^2} \cos(x-t) + \sin(x-t) \right]. \quad (2.1.14)$$

O texto a seguir destina-se a estudar brevemente alguns aspectos analíticos interessantes do sistema constituído pelas equações (2.1.13) e (2.1.14). Primeiramente, a velocidade da partícula define-se para qualquer valor real de momentum. Isto porque  $\alpha^2 + \alpha p^2 > 0$ . Como  $p^2 \geq 0$ ,  $\alpha > 0$  e o sinal de desigualdade não é alterado pela multiplicação por um fator não-negativo podemos usar que  $\alpha p^2 \geq 0$ . Somando  $\alpha^2$  e salvando o adendo que tanto  $\alpha^2$  quanto  $\alpha p^2$  são parcelas positivas e, portanto, é impossível que  $\alpha^2 + \alpha p^2 = 0$ , o sinal de desigualdade apenas se altera de  $\geq$  para  $>$  e a raiz quadrada pode ser tomada livremente. Garantida a existência, nota-se ainda que a velocidade é uma função monótona do momentum. Isto porque, de (2.1.13),

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \frac{p}{\sqrt{\alpha^2 + \alpha p^2}} = \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + \alpha p^2)^{\frac{3}{2}}} > 0, \quad \forall p \in \mathbb{R},$$

garante o regime estritamente crescente da velocidade com o momentum conjugado. Na teoria relativística é bem observado o limite de velocidade inferior a  $c$ . Portanto, sem surpresa, a velocidade é uma função limitada do momentum. De fato, somando a parcela positiva  $\alpha p^2$  em ambos os membros da

desigualdade  $\alpha^2 > 0$ , obtém-se  $\alpha^2 + \alpha p^2 > \alpha p^2$ . Aliada ao fato de no intervalo  $y \in (0, +\infty)$  as funções  $\sqrt{y}$  e  $1/y$  serem ambas monótonas e, respectivamente, estritamente crescente e estritamente decrescente, nota-se que  $\sqrt{\alpha^2 + \alpha p^2} > |p| \sqrt{\alpha} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \alpha p^2}} < \frac{1}{|p| \sqrt{\alpha}}$ . Multiplicando ambos os membros por  $|p|$  segue  $\frac{|p|}{\sqrt{\alpha^2 + \alpha p^2}} < \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ . Como, por definição,  $0 < \sqrt{\alpha^2 + \alpha p^2}$ , o lado esquerdo da última expressão nada mais é do que o módulo da velocidade da partícula. Logo:

$$|\dot{x}| < \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \Rightarrow \dot{x} \in \left( -\frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right). \quad (2.1.15)$$

Este fato poderia ter sido previsto desde o processo de adimensionalização feito anteriormente. A velocidade dimensional  $\dot{x}$  da partícula foi atada à adimensional  $\dot{\bar{x}}$  pela velocidade de fase da onda de potencial através da expressão

$$\dot{x} = v_\phi \dot{\bar{x}}.$$

Munindo a expressão de adimensionalização reexibida acima com a sólida previsão  $|\dot{x}| < c$  da teoria relativística, seguramente

$$|\dot{\bar{x}}| < \frac{c}{v_\phi}$$

que se simplifica para (2.1.15) se lembrarmos da definição do parâmetro  $\alpha$  em (2.1.3).

Observemos a equação (2.1.14) para  $x < 0$ . À medida que a posição  $x$  da partícula aumenta, o valor do fator exponencial aproxima-se de 1, porque depende do quadrado de  $x$  que é decrescente para  $x < 0$ . Enquanto isto, a parcela da função  $\cos(x - t)$  perde amplificação cada vez que  $\cos(x - t) < 0$  e a parcela referente ao  $\varphi_0 \sin(x - t)$  ganha dominância sobre a taxa de variação do momentum. Desta maneira, o momentum deve oscilar com amplitude cada vez maior à medida que a partícula se aproxima da origem. Pela dependência explícita na equação (2.1.13), a velocidade da partícula, portanto, deve comportar-se da mesma maneira. Na vizinhança da origem, o termo que acompanha o  $\cos(x - t)$  na equação (2.1.14) é desprezível e o momentum (e a velocidade, portanto) passam a oscilar com a dominância completa de comportamento do termo  $\varphi_0 \sin(x - t)$ . Assim, a amplitude de oscilação de velocidade será sempre maior quanto mais próximo da origem a partícula chegar. Supondo que até esse trecho a partícula não tenha entrado em ressonância com a onda, dois comportamentos podem ocorrer: ou  $x$  continua aumentando e a partícula atravessa a origem assumindo  $x > 0$ , ou  $x$  volta a diminuir e permanece o regime  $x < 0$ . A primeira situação deve ocorrer quando a velocidade inicial da partícula for tal que a dote de energia cinética suficiente para ultrapassar qualquer barreira de potencial que possa experimentar na vizinhança da origem. Já a segunda é quando tal barreira é intransponível e a partícula é refletida. Em qualquer uma das opções, o fator exponencial vai sendo novamente atenuado de maneira que a amplitude da velocidade tenderá a diminuir. Portanto, seja qual for o destino da partícula, sua dinâmica encerra com a velocidade constante. Como será discutido com mais detalhes na próxima seção, a partícula é injetada na região de interação com o potencial em um ponto muito distante da origem, fazendo valer  $x_0 < 0$ . Assim, devido à forte modulação que o potencial é fadado nessa região, inicialmente sua energia é puramente concentrada na forma cinética. Ainda, qualquer que seja o destino da partícula (um dentre três possíveis, como será mostrado), o regime final de sua dinâmica se dá, também, muito distante da origem e vale o mesmo argumento para a concentração da energia puramente na forma cinética. Assim, o ganho líquido de energia poderia ser calculado como

$$\Delta \mathcal{H} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{H}(t) - \mathcal{H}(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) - \gamma(0) = \Delta \gamma. \quad (2.1.16)$$

Portanto, a variação global de energia (que é a variação global da energia cinética da partícula) pode ser positiva, negativa ou mesmo nula. Outra ressalva importante se dá para o intervalo de tempo particular em que a partícula está interagindo com a onda nas proximidades da origem. Nesta, a onda está livre de modulações. Para analisar corretamente as implicações disto, vamos criar o funcional definido por  $S(\mathcal{H}, p) = \mathcal{H} - p$  e estudar sua taxa de variação temporal na vizinhança da origem. Tomando a derivada temporal e lembrando do resultado bem conhecido de que a taxa total com que o hamiltoniano varia no tempo se confunde com a taxa parcial, segue

$$\frac{d}{dt} S = \frac{d\mathcal{H}}{dt} - \dot{p} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \Rightarrow \frac{d}{dt} S = -\varphi_0 \frac{2x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \cos(x - t). \quad (2.1.17)$$

Porém, contabilizando que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} = 0,$$

então, durante a viagem próxima à origem, vale

$$\frac{dS}{dt} = 0. \quad (2.1.18)$$

I.e, à dinâmica na vizinhança da origem, está associada a quantidade (aproximadamente) conservada  $S(\mathcal{H}, p) = H - p$ . Esta característica nos permitirá futuramente fazer conclusões importantes acerca do fenômeno de captura da partícula.

### 2.1.2 Simulações das soluções numéricas do modelo unidimensional

Esta seção destina-se a explorar simulações de soluções numéricas do sistema físico em estudo. A solução das equações de movimento foram obtidas por uma rotina escrita em Fortran90 que implementa o famoso método de solução de sistemas de equações diferenciais ordinárias conhecido como Runge Kutta de 4ª ordem e um programa escrito no software *Mathematica*.

#### Parâmetros

Começemos discutindo as escolhas de valores dos parâmetros sobreviventes a adimensionalização. Como anteriormente enfatizado, está-se interessado no regime de modulação lenta. O carácter oscilatório da energia potencial deve ser atenuado lentamente a medida que a região de interação entre a partícula e o potencial afasta-se do ponto de origem do sistema de referências. A simulação de tal situação é deixada à cargo do valor do parâmetro  $\sigma$  que, por essa razão, deve ser cuidadosamente escolhido. Como discutido anteriormente, a condição  $\sigma k \gg 1$  (aqui usa-se o  $\sigma$  dimensional) reproduz a situação desejada. Fazendo a adimensionalização  $\bar{\sigma} = k\sigma$ , segue imediatamente que  $\bar{\sigma} \gg 1$ . Por essa razão, o valor do comprimento característico de envelope foi tomado  $\sigma = 100$  (valendo aqui a omissão da barra sobrescrita) para todas as simulações subsequentes. Temos a liberdade desta escolha pois este é apenas um fator de escala do problema. O parâmetro  $\alpha$  relaciona-se com as características da onda eletrostática. Como mencionado, na aceleração da partícula é crucial o atingimento do regime de ressonância entre a velocidade de fase da onda e a velocidade da partícula. Portanto, devemos observar sempre  $v_\phi < c$  uma vez que do contrário a ressonância seria impossível. Assim, conforme (2.1.3), o parâmetro  $\alpha$  deve respeitar a condição  $0 < \alpha < 1$ <sup>1</sup>. Por estar envolvido com a limitação de velocidade conforme exibido em (2.1.15), devemos investigar o efeito da faixa de valores possíveis escolhida para  $\alpha$  nesta limitação. Uma vez que ambas as funções  $1/\sqrt{y}$  e  $-y$  são monótonas estritamente decrescentes em  $y \in (0, 1)$ , é fato que

$$0 < \alpha < 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\alpha}} > 1 \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{\alpha}} < -1.$$

Portanto, para cada valor dado de  $\alpha$ , o respectivo valor máximo de velocidade imposto pela teoria relativística aqui normalizada ( $|\dot{x}_{\max}(\alpha)| = 1/\sqrt{\alpha}$ ) obedece:

$$\dot{x}_{\max}(\alpha) \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \Rightarrow |\dot{x}_{\max}(\alpha)| > 1. \quad (2.1.19)$$

Portanto, qualquer que seja o valor de  $\alpha \in (0, 1)$  é seguro que nenhum valor de velocidade inicial ( $v_0$ ) condicionada a  $|v_0| < 1$  supere o limite máximo de velocidade real.

#### Condições iniciais

Estamos interessados na situação em que a partícula penetre na região de choque de maneira a interagir lentamente com o potencial da onda. Para tanto, é conveniente que escolhamos a posição inicial das partículas que serão injetadas muito distante de onde a energia potencial começa a afetar significativamente, i.e, muito distante da origem  $x = 0$ . Corroborado por (2.1.14) para o instante inicial ( $t = 0$ ), esta condição garante que estaremos a estudar os efeitos do potencial de forma não tendenciosa uma vez que a partícula penetrará na região de choque como uma partícula livre. Portanto, uma posição inicial - em módulo - da ordem de grandeza de alguns  $\sigma$ 's garante máximo aproveitamento do estudo das influências do potencial proposto. De acordo com (2.1.1), a onda desloca-se para o sentido de crescimento do eixo de propagação. A fim de fazer com que a partícula tente penetrar a região de máxima amplitude

<sup>1</sup>Observando o comportamento monotônico das funções  $y^2$  e  $y/c$  ( $c \in \mathbb{R}^+$ ) em  $y \in [0, \infty)$ , segue que  $v_\phi < c \Rightarrow 0 < (v_\phi/c)^2 < 1$

da onda, nas futuras simulações a posição inicial da partícula será  $x_0 = -3.5 \sigma$ . Isso garante que todos os resultados futuramente apresentados são independentes de qualquer fase relativa inicial entre a onda e a partícula. (As características listadas da condição inicial de posição são, além de importantes no presente estudo, necessárias porque existem inhomogeneidades espaciais na função de potencial. Se assim não o fosse, uma alteração na condição inicial de posição nada mais seria do que uma translação rígida no sistema de coordenadas.) Assim posto, vê-se que a condição de posição inicial é decisiva para a solução do sistema dinâmico. Portanto, as características listadas acima serão mantidas para todas as simulações de movimento das partículas, uma vez que situações diferentes não são de interesse da presente dissertação.

Tão importante quanto a condição de posição inicial é a condição inicial de velocidade das partículas analisadas. Como será mostrado a diante, a condição inicial de velocidade é um valor decisivo para os três regimes possíveis identificados para o movimento. Em consonância com a condição inicial de posição muito à esquerda da origem, a velocidade inicial das partículas será tomada como positiva uma vez que devem ir de encontro às regiões de inatividade da modulação do potencial da onda eletromagnética. Portanto, e conforme exibido em (2.1.19), é seguro limitar os valores iniciais de velocidade sempre ao intervalo  $v_0 \in (0, 1)$ .

As simulações feitas exploram a evolução dinâmica da partícula sob influência do potencial (2.1.1) à luz de três aspectos: evolução temporal da velocidade, evolução do espaço de fase e influência dos diferentes valores atribuídos aos parâmetros sobreviventes à adimensionalização. A menos que se anuncie o contrário, estaremos usando os valores  $\sigma = 100.0$  e  $x_0 = -3,5 \sigma$  em todas as simulações. O efeito de mudá-los - dentro da exigência que lhes cabe - seria apenas uma alteração na escala do problema. Uma vez fixada a posição inicial e o comprimento característico de envelope da onda, a solução das equações (2.1.13) e (2.1.14) foi gerada para diversos valores de velocidade inicial e demais parâmetros.

Primeiramente, começamos as simulações fixando o valor  $\alpha = 0.81$ . Lembrando de sua definição em (2.1.3), a escolha deste valor significa que estamos a considerar que a velocidade de fase da onda é, exatamente, 90% da velocidade da luz no vácuo. Isto porque

$$v_\phi = c\sqrt{\alpha} = c\sqrt{0.81} = 0,9c = 90\%c.$$

A escolha do valor do parâmetro  $\alpha$  deve ser sempre assistida pela conexão com a velocidade de fase. Observadas as condições que devem ser exigidas aos citados parâmetros, quer-se, então, solucionar numericamente as equações do sistema em presente estudo para diferentes valores de velocidade inicial a fim de investigar o destino das partículas à medida que interagem com a onda. Aproveitando da limitação de velocidade adimensional (2.1.15) podemos notar que

$$\dot{x} \in \left(-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) \Rightarrow \sqrt{\alpha}\dot{x} \in (-1, 1).$$

Ou seja, se expressarmos a velocidade adimensional em unidades de  $\alpha^{-1/2}$ , ganharemos a normalização da velocidade para o intervalo  $(-1, 1)$  que é o equivalente à normalização da velocidade dimensional com a velocidade da luz no vácuo. É claro, pois a velocidade dimensional  $v_{\text{dim}}$  é adimensionalizada pela velocidade de fase. Normalizando-a com a velocidade da luz no vácuo, a velocidade adimensional normaliza-se com o fator  $\alpha^{-1/2}$ :

$$c > v_{\text{dim}} = v_\phi v \Rightarrow \frac{v_{\text{dim}}}{c} = \frac{v_\phi}{c} v < 1 \Rightarrow \frac{v_{\text{dim}}}{c} = \frac{v}{\alpha^{-1/2}} < 1.$$

Portanto, expressar as velocidades adimensionais em unidades de  $\alpha^{-1/2}$  é o mesmo que normalizar as dimensionais pela velocidade da luz no vácuo. Assim, exploraram-se nas simulações numéricas as velocidades em unidades de  $\alpha^{-1/2}$ .

### Mapa de Parâmetros

A fim de estudar os possíveis regimes do movimento de acordo com a escolha de condições iniciais e parâmetros, fez-se um mapa de parâmetros da velocidade de ejeção da partícula para cada dada velocidade inicial e amplitude máxima de potencial da onda. O mapa - obtido numericamente e construído com, aproximadamente, 1.200.000 pontos-solução do sistema das equações (2.1.13) e (2.1.14) - é exibido na FIG 2.1.1. Destacam-se três regiões: (i) Uma vez que a velocidade inicial da partícula é sempre positiva, a região de coloração azulada representa um **regime reflexivo**, pois as velocidades de ejeção ali assinaladas são negativas; (ii) Na ausência de aceleração significativa, i.e., para velocidades de ejeção inferiores a  $90\%c$ , destaca-se na região acinzentada um **regime passante**. Nesta, a velocidade de ejeção da partícula é a mesma de injeção; (iii) O **regime de aceleração** é representado pela região amarelada/alaranjada/avermelhada que exhibe as velocidades de ejeção  $v_f > 0.9c$ . As regiões de maior eficiência, i.e., assinaladas por velocidades de ejeção superiores a  $99\%c$ , estão representadas pela coloração avermelhada mais intensa.

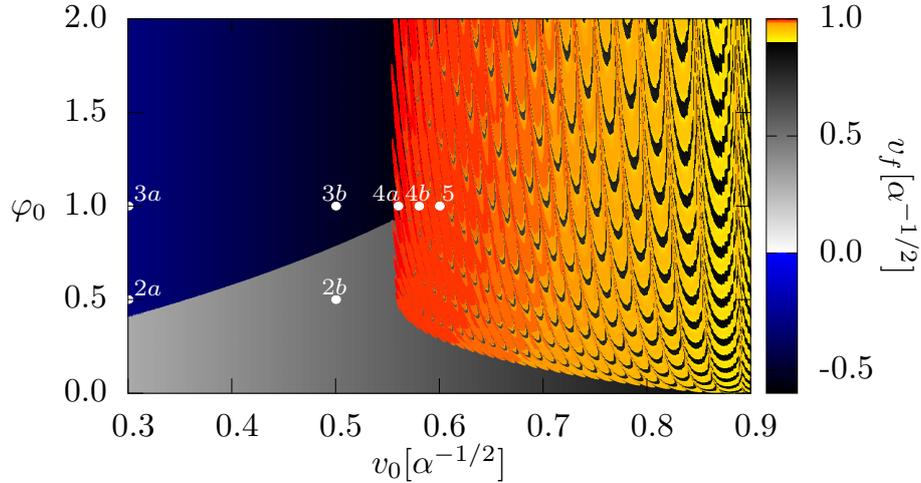


FIG. 2.1.1: Mapa da velocidade de ejeção da partícula para  $\sigma = 100.0$ ,  $\alpha = 0.81$ . A coloração azulada (acinzentada) representa o regime reflexivo (passante), amarelada/alaranjada velocidades entre  $0.9c$  e  $0.99c$  e a coloração avermelhada representa as velocidades superiores a  $0.99c$ . Os pontos rotulados representam regimes do movimento explorados em mais detalhes.

O mapa permite uma visão global do movimento da partícula. O valor máximo de amplitude da onda só é decisivo no processo de determinação da velocidade mínima necessária para a qual a partícula encontra-se no regime de aceleração, aproximadamente, na região  $(\varphi_0, v_0) \in (0.0, 0.4) \times (0.55, 0.9)$ . Nesta, a velocidade mínima referida decresce com o aumento de amplitude máxima, ou seja, quanto menor a amplitude máxima maior é a velocidade mínima necessária para acelerar a partícula. A partir deste, a fronteira entre os regimes reflexivo/passante do de aceleração se apresenta para uma reta vertical imaginária em  $v_0 \approx 0.55\alpha^{-1/2}$  e independe da amplitude máxima. Como evidenciado pela coloração vermelha intensa, a zona de maior eficiência em caráter acelerativo<sup>1</sup> é a vizinhança de uma reta vertical imaginária centrada em  $v_0 \approx 0.6\alpha^{-1/2}$ . A eficiência se mantém inalterada à medida que a amplitude máxima de potencial cresce, denunciando que o ajuste deste parâmetro para o melhor aproveitamento da região de aceleração é limitado. A região do regime de aceleração é poluída por uma matriz de regiões escuras de alta ineficiência acelerativa, que tem a forma de meias-luas. As meias-luas escuras são intercaladas por meias-luas claras, que acusam o regime acelerativo. A quantidade destas que acima um dado ponto do mapa faz referência, como se verá mais adiante, ao número de oscilações característico do movimento da partícula. Os vértices dessas meias-luas parecem seguir linhas imaginárias ao longo do eixo de variação da amplitude máxima de potencial. Um vez nesta região, a partícula é capturada pela onda mas não apresenta velocidade final configurada como acelerada. Estas regiões fazem parte da região de regime passante. O regime passante na ausência de captura se extingue para a região  $\varphi_0 \geq 1.0$ . Tal regime só é visitado uma vez que a partícula seja lançada com velocidade inicial tal que se encontre em uma das regiões escuras em formato de meia-lua presentes na região de aceleração, mas nestas sofre a captura.

<sup>1</sup>De fato, a velocidade máxima obtida pela simulação é  $0.9952c$  para a velocidade inicial  $0.5622c$  e amplitude máxima de  $0.6420$ .

## Simulações

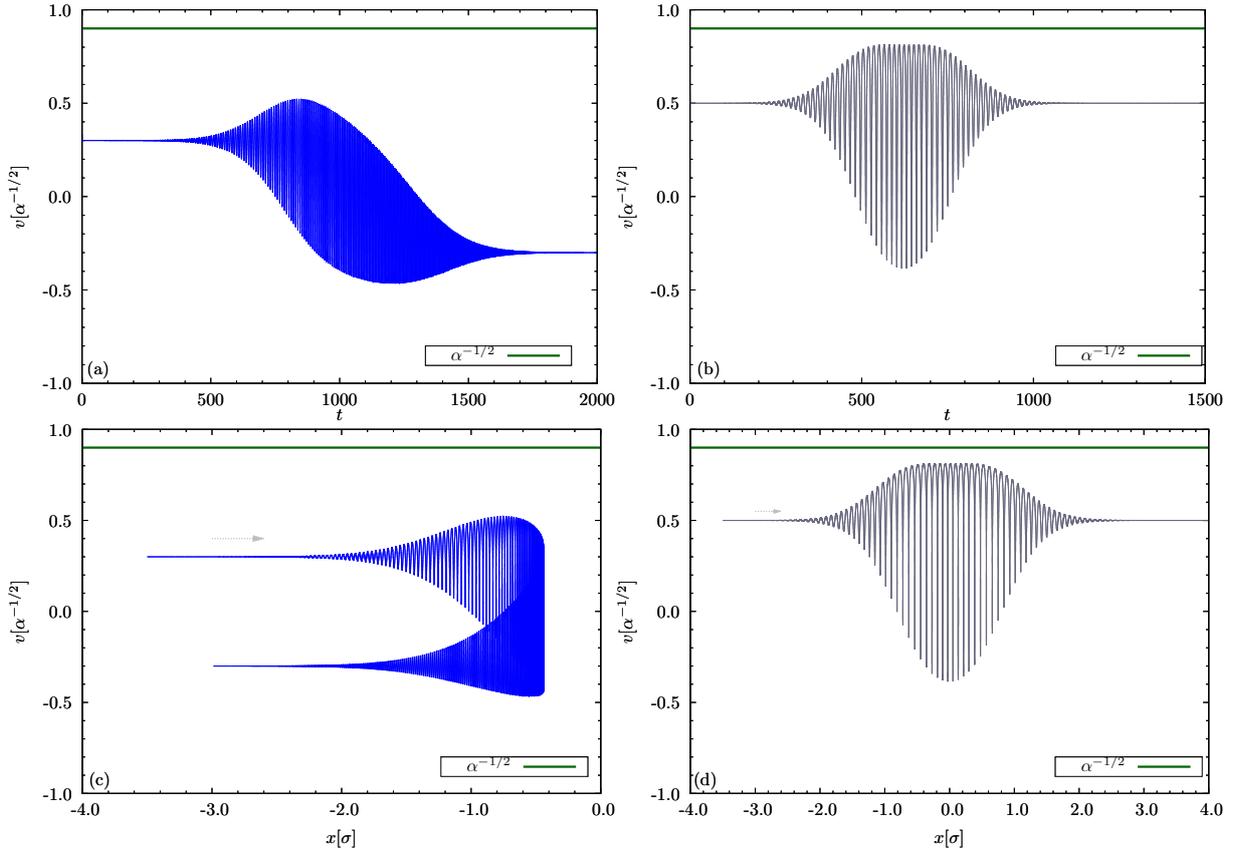


FIG. 2.1.2: Nos quadros (a) e (b) é exibida a evolução temporal da velocidade da partícula lançada com, respectivamente (a)  $v_0 = 0.3\alpha^{-1/2}$  e (b)  $v_0 = 0.5\alpha^{-1/2}$ . O eixo horizontal representa o instante de tempo e o vertical a velocidade em unidades de  $\alpha^{-1/2}$ . Nos quadros (c) e (d) é exibido o espaço de fase do movimento da partícula lançada com, respectivamente (c)  $v_0 = 0.3\alpha^{-1/2}$  e (d)  $v_0 = 0.5\alpha^{-1/2}$ . O eixo horizontal representa a posição da partícula em unidades de  $\sigma$  e o vertical a velocidade em unidades de  $\alpha^{-1/2}$ . A linha verde em todos os quadros representa a velocidade de ressonância. Os parâmetros utilizados em todos os quadros são  $\sigma = 100.0$ ,  $\alpha = 0.81$  e  $\varphi_0 = 0.5$  com a condição inicial  $x_0 = -3.5\sigma$ .

Os gráficos exibidos na FIG. 2.1.2 exploram em detalhes a dinâmica da partícula referente aos pontos 2a e 2b do mapa FIG. 2.1.1. O quadro (a) mostra a evolução temporal da velocidade da partícula desde a sua injeção com velocidade inicial  $v_0 = 0.3\alpha^{-1/2}$  até a ejeção, denunciada pela estabilidade da velocidade final. De fato, a velocidade final estabiliza para o mesmo valor em módulo da de injeção, mas com sinal contrário. A partícula é refletida pela onda, portanto. Pelo espaço de fase do movimento para a mesma velocidade de injeção exibido no quadro (c) desta figura, a partícula começa movimentando-se em direção a origem do sistema de referências. Aproximando-se o suficiente da origem - onde o potencial perde modulação - interage fortemente com os valores apreciáveis de mínimos e máximos de potencial e tem sua velocidade variando com alta frequência, como é a de variação do potencial uma vez negligenciada a modulação. Até que, em certo ponto, é refletida, passa a afastar-se da origem e segue viagem encaminhando-se para sua velocidade terminal  $v_0 = -0.3\alpha^{-1/2}$ . Nesse regime, a partícula é privada de ganho líquido de energia. A energia cinética, que é puramente o fator  $\gamma$  no sistema de unidades normalizado em uso, depende apenas do módulo quadrado da velocidade. Assim, segundo (2.1.16), calculamos  $\Delta\mathcal{H} = \Delta\gamma = 0$ . A energia cinética que encerra sua dinâmica é a mesma do início de seu movimento. A mesma ausência de ganho líquido de energia cinética acontece para o movimento iniciado com a velocidade de injeção  $v_0 = 0.5\alpha^{-1/2}$ . Os quadros (b) e (d) são referentes a esta velocidade inicial. O quadro (b) exibe a evolução temporal da velocidade da partícula e mostra que a partícula é ejetada com a mesma velocidade com que foi injetada. Por esta razão, chamamos de passante o presente regime. Do quadro (d), conclui-se que a velocidade inicial é suficiente para dotar a partícula de tal energia cinética que não encontra nenhuma barreira de potencial intransponível, mesmo na vizinhança da origem onde o potencial assume seus valores máximos. De um modo geral, nos presentes regimes, a partícula globalmente avança em direção à origem executando movimento vibratório de baixíssima amplitude e altíssima frequência (a densidade dos gráficos nestes quadros deixa clara a assinatura de alta frequência de oscilação) em

torno de uma presente posição (centro-guia) quando, então, ou é refletida por uma barreira de potencial intransponível e passa a globalmente afastar-se da origem pela esquerda com a mesma natureza de movimento vibratório ou tem energia cinética o suficiente para vencer qualquer barreira de potencial que encontra pela frente e segue viagem afastando-se da origem pela direita. Em ambos os casos, não atinge a velocidade de ressonância exibida pela linha verde sólida nos quadros da figura. É perceptível que o aumento de velocidade inicial acarreta o aumento da velocidade máxima experimentada pela partícula, haja visto que para os quadros (b,d) os maiores valores de velocidade são mais próximos da linha verde de ressonância do que para os quadros (a,c). Este fato é previsível pela maior proximidade do ponto  $2b$  da região de aceleração da partícula.

Agora, vamos experimentar gerar simulações de solução para o dobro do valor da amplitude máxima de potencial usada nas simulações anteriores. A fim de estudar o destino das partículas sob este ajuste, tomou-se os mesmos valores de parâmetros utilizados até o momento, exceto modificando  $\varphi_0 = 1.0$ , que é referente aos pontos  $3a$  e  $3b$  do mapa FIG. 2.1.1. Os gráficos exibidos na FIG. 2.1.3 exploram em de-

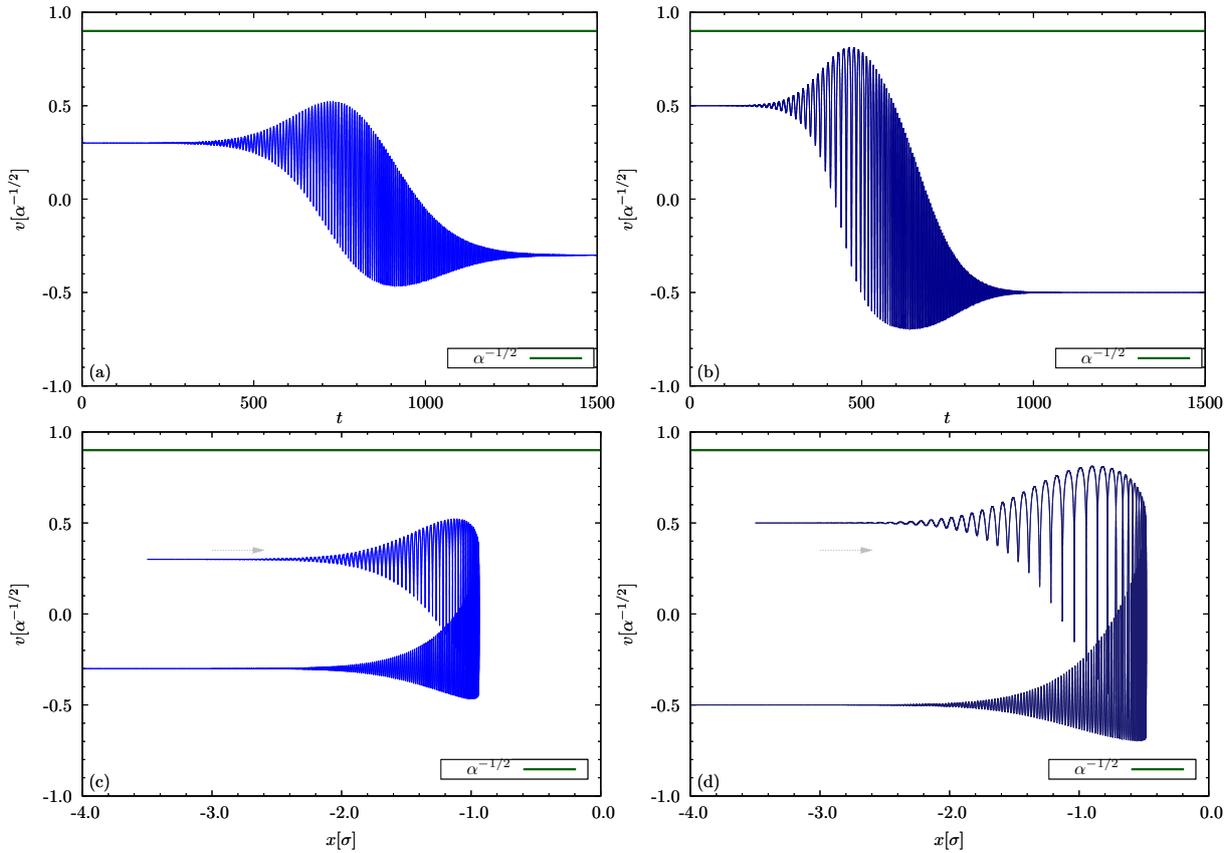


FIG. 2.1.3: Nos quadros (a) e (b) é exibida a evolução temporal da velocidade da partícula lançada com, respectivamente (a)  $v_0 = 0.3\alpha^{-1/2}$  e (b)  $v_0 = 0.5\alpha^{-1/2}$ . O eixo horizontal representa o instante de tempo e o vertical a velocidade em unidades de  $\alpha^{-1/2}$ . Nos quadros (c) e (d) é exibida o espaço de fase do movimento da partícula lançada com, respectivamente (c)  $v_0 = 0.3\alpha^{-1/2}$  e (d)  $v_0 = 0.5\alpha^{-1/2}$ . O eixo horizontal representa a posição da partícula em unidades de  $\sigma$  e o vertical a velocidade em unidades de  $\alpha^{-1/2}$ . A linha verde em ambos os quadros representa a velocidade de ressonância. Os parâmetros utilizados são  $\sigma = 100.0$ ,  $\alpha = 0.81$  e  $\varphi_0 = 1.0$  com a condição inicial  $x_0 = -3.5\sigma$ .

talhes a dinâmica da partícula referente aos pontos  $3a$  e  $3b$  do mapa FIG. 2.1.1. Como previsto, em ambas as experiências, a partícula encontra-se em regime de reflexão. Observa-se novamente a ausência de ganho líquido de energia ( $v_f = -v_0 \Rightarrow \Delta\mathcal{H} = 0$ ). A velocidade inicial  $v_0 = 0.5\alpha^{-1/2}$  que anteriormente (para o caso de  $\varphi_0 = 0.5$ , FIG. 2.1.2(b)) era capaz de evitar a reflexão da partícula, agora (para o caso de  $\varphi_0 = 1.0$ ), já não é capaz de fazê-lo. A energia cinética aproveitada pela partícula injetada com essa velocidade inicial não é mais suficiente para permiti-la cruzar as barreiras de potencial impostas a sua frente, que agora são maiores devido ao aumento da amplitude máxima da onda. O aumento da amplitude máxima acarreta, também, a reflexão prematura da partícula. Para a presente situação, como se vê nos quadros (a) e (c), o tempo  $t = 1500$  é mais do que suficiente para que a partícula seja ejetada (estabilize sua velocidade final para  $v_f = -v_0$ ). É refletida já pela vizinhança de  $x = -1.0\sigma$ , enquanto

que, para a simulação exibida em FIG. 2.1.2(a,c), é preciso esperar até pouco antes  $t = 2000$  para observar a ejeção da partícula somente na vizinhança de  $x = -0.4\sigma$  já que, nesse caso, a barreira intransponível de potencial está localizada mais próxima da origem devido ao valor reduzido de amplitude máxima. Percebe-se, também, no quadro (d) da figura FIG. 2.1.3 que a proximidade da velocidade máxima da partícula a velocidade de ressonância causa um aumento na amplitude de seu movimento nas vizinhanças desse ponto. Isto é acusado pela perda de densidade do gráfico, que é bastante clara.

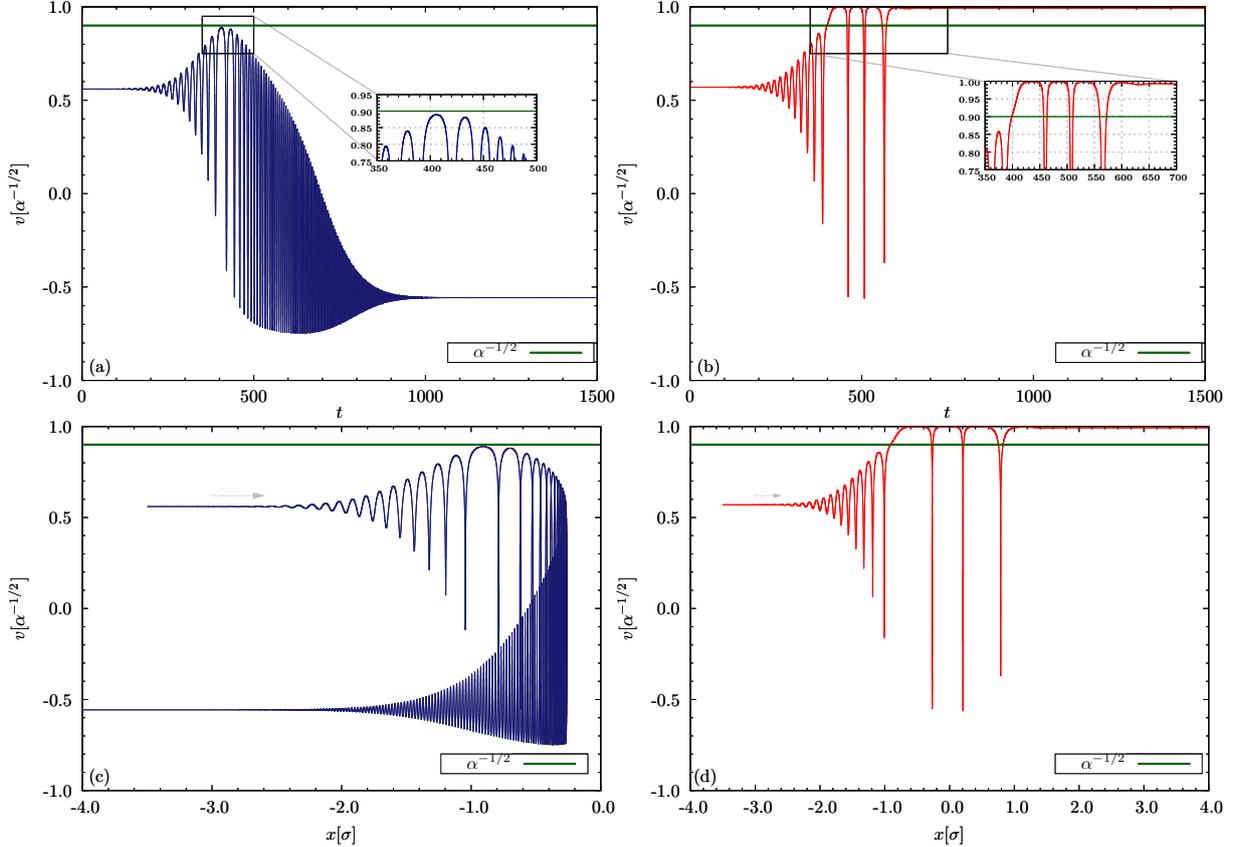


FIG. 2.1.4: Nos quadros (a) e (b) é exibida a evolução temporal da velocidade da partícula lançada com, respectivamente (a)  $v_0 = 0.56\alpha^{-1/2}$  e (b)  $v_0 = 0.57\alpha^{-1/2}$ . O eixo horizontal representa o instante de tempo e o vertical a velocidade em unidades de  $\alpha^{-1/2}$ . Nos quadros (c) e (d) é exibido o espaço de fase do movimento da partícula lançada com, respectivamente (c)  $v_0 = 0.56\alpha^{-1/2}$  e (d)  $v_0 = 0.57\alpha^{-1/2}$ . O eixo horizontal representa a posição da partícula em unidades de  $\sigma$  e o vertical a velocidade em unidades de  $\alpha^{-1/2}$ . A linha verde em ambos os quadros representa a velocidade de ressonância. Os parâmetros utilizados são  $\sigma = 100.0$ ,  $\alpha = 0.81$  e  $\varphi_0 = 1.0$  com a condição inicial  $x_0 = -3.5\sigma$ .

Os gráficos exibidos na FIG. 2.1.4 exploram em detalhes a dinâmica da partícula referente aos pontos 4a e 4b do mapa FIG. 2.1.1. O aumento de velocidade inicial faz com que a partícula se aproxime do regime de aceleração, pois, como exibido no quadro (a) desta figura, a velocidade máxima que experimenta quase alcança a velocidade de fase da onda. O ponto 4a está exatamente na divisa entre os regimes reflexivo e acelerador. A mudança de comportamento da amplitude de movimento agrava-se em comparação ao mostrado pelo gráfico FIG. 2.1.3(d). Como exibido no quadro (c), a amplitude sofre um grande aumento próximo ao ponto de máximo da velocidade da partícula. É neste limiar que a dinâmica ponderomotiva se quebra, pois, elevando ligeiramente a velocidade de injeção, a partícula, em dado ponto, atinge a velocidade de fase da onda, como mostrado no quadro (b). Este quadro exhibe a evolução da velocidade da partícula quando lançada com velocidade inicial  $v_0 = 0.57\alpha^{-1/2}$ , um centésimo a mais do que a experiência dos quadros (a) e (c). Uma vez alcançada a velocidade de fase, a partícula é capturada pela onda. Sua velocidade passa a oscilar em conformidade com a oscilação do potencial. Enquanto atravessa a origem, onde o potencial está livre de modulações, é que podemos observar as altíssimas oscilações de velocidade (vide quadro (d)). Quando começa a afastar-se o suficiente da origem, o potencial experimentado pela partícula volta a apresentar modulação e não é mais capaz de alterar sua dinâmica, ejetando-a com velocidade superior a 99%  $c$ . Nesta situação, a velocidade final atingida é, aproximadamente,  $0.993c$  o que calcula um ganho de, aproximadamente,  $\Delta v/v_0 = 74.2\%$  de velocidade. O ganho percentual de energia cinética fica em torno de  $\Delta\gamma/\gamma(0) = 597\%$ .

Visto isso, é tempo de atentarmos o fato de que, conforme exibido pelo mapa FIG. 2.1.1, a presente velocidade só é capaz de fazer com que a partícula seja capturada pela onda a partir de um certo valor de amplitude máxima de potencial. É interessante que consigamos dar uma boa justificativa para este fato. Assim, como anteriormente prometido, retornemos a observação feita em (2.1.18). Concluimos que, na vizinhança da origem, a dinâmica da partícula é governada à luz da conservação do funcional que se definiu como  $S(\mathcal{H}, p) = \mathcal{H} - p$ . Como a captura acontece exatamente na região de validade desta conservação, seremos capazes de, empregando-a, obter uma relação entre os parâmetros  $\varphi_0$  e  $\alpha$  e a velocidade final de ejeção. Podemos calcular a expressão de  $S(\mathcal{H}, p)$  quando a partícula está no pico de potencial e atinge a ressonância e igualá-la à expressão calculada quando a partícula está no vale de potencial com alguma certa velocidade, que tomaremos como a de ejeção. Quando ressonante e localizada no pico de potencial, a partícula tem velocidade  $\dot{x} = 1$  (devido a normalização) e percebe o potencial  $\varphi = \varphi_0$ . Lembrando que  $p = \alpha\dot{x}\gamma$ , neste ponto, portanto,

$$S = \gamma + \varphi_0 - \alpha\gamma = \frac{1 - \alpha}{\sqrt{1 - \alpha}} + \varphi_0 = \sqrt{1 - \alpha} + \varphi_0.$$

Após a captura, no vale de potencial  $\varphi = -\varphi_0$ , temos

$$S = \frac{1 - \alpha\dot{x}}{\sqrt{1 - \alpha\dot{x}^2}} - \varphi_0$$

de modo que, valendo a conservação,

$$\frac{1 - \alpha\dot{x}}{\sqrt{1 - \alpha\dot{x}^2}} - \varphi_0 = \sqrt{1 - \alpha} + \varphi_0. \quad (2.1.20)$$

Como a velocidade da partícula após a captura é próxima a velocidade limite  $c$ , podemos expandir a expressão (2.1.20) em torno de  $\dot{x} = 1/\sqrt{\alpha}$ , que é o limite de velocidade normalizado. O resultado é

$$\frac{1 - \alpha\dot{x}}{\sqrt{1 - \alpha\dot{x}^2}} \approx \frac{1 - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{2 - 2\sqrt{\alpha}\dot{x}}} \gg \sqrt{1 - \alpha}.$$

Assim, concluimos que

$$\varphi_0 \approx \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1 - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{1 - v/c}}, \quad (2.1.21)$$

onde  $v$  é a velocidade dimensional da partícula<sup>1</sup>. Isolando o fator que nos interessa

$$\frac{v}{c} = 1 - \frac{(1 - \sqrt{\alpha})^2}{8\varphi_0^2} \quad (2.1.22)$$

e impondo que a partícula experimente o regime de ressonância muito eficientemente, i.e.,  $v/c > 0.99$ , podemos concluir que a relação que deve ser observada entre a amplitude máxima de potencial e o fator  $\alpha$  para isso é

$$\frac{(1 - \sqrt{\alpha})^2}{8\varphi_0^2} = 1 - \frac{v}{c} \Rightarrow \frac{(1 - \sqrt{\alpha})^2}{8\varphi_0^2} \leq \frac{1}{100} \Rightarrow \left| \frac{1 - \sqrt{\alpha}}{\varphi_0} \right| \leq \frac{\sqrt{2}}{5} \approx 0.2828. \quad (2.1.23)$$

Substituindo o valor do parâmetro que se utilizou até agora  $\alpha = 0.81$ , verifica-se  $\varphi_0 \geq 0.3535$  que é, mais ou menos, o que observamos no mapa de parâmetros. Mais importante do que isso, essa expressão nos informa que o fator  $\alpha$ , assim como  $\sigma$ , é um fator de escala do problema[16]. A precisão exigida pode ser estendida até  $v/c > 0.99 \dots 9$ , isto é, com  $n$  algarismos 9 após a vírgula ( $n \in \mathbb{N}$ ). Escrevendo  $0.99 \dots 9$  como uma soma, segue facilmente que, da soma da progressão geométrica  $\{10^{-j}\}_1^n$ ,

$$\frac{v}{c} \geq 0.99 \dots 9 = 9 \sum_{j=1}^n 10^{-j} = 1 - 10^{-n} \Rightarrow 1 - \frac{v}{c} \leq 10^{-n}.$$

Portanto, de (2.1.22), segue que, para precisão de ordem  $n$  e observando que a presença da notação de módulo pode ser omitida porque  $\alpha \in (0, 1)$  e  $\varphi_0 > 0$ ,

$$\frac{v}{c} = 1 - \frac{(1 - \sqrt{\alpha})^2}{8\varphi_0^2} \Rightarrow \frac{(1 - \sqrt{\alpha})^2}{8\varphi_0^2} = 1 - \frac{v}{c} \leq 10^{-n} \Rightarrow 0 < \frac{1 - \sqrt{\alpha}}{\varphi_0} \leq \frac{2\sqrt{2}}{10^{\frac{n}{2}}}. \quad (2.1.24)$$

<sup>1</sup>Usamos aqui que  $\sqrt{\alpha}\dot{x} = v/c$

Conclui-se, portanto, que a escolha do fator  $\alpha$  apenas localiza a região de aceleração no mapa de parâmetros feito em FIG. 2.1.1. Supondo  $\varphi_0$  fixo em (2.1.21), a diminuição de  $\alpha$  desloca o ponto de intersecção entre os três regimes para menores velocidades iniciais.

Voltando a analisar o quadro (d) dos gráficos de FIG. 2.1.4, é importante perceber que a ejeção eficiente ( $v_f > 99\% c$ ) só acontece porque é manifestada em tempo que a partícula atinge uma região de modulação significativa do potencial (que não é capaz de freá-la, portanto) e está experimentando um ponto de máximo da oscilação de velocidade. Pode ser que a captura ocorra da mesma maneira, mas que a partícula atinja a região de modulação significativa de potencial em tempo que experimenta uma velocidade em um dos picos baixíssimos de oscilação. Nesse caso, a captura não é eficiente em termos acelerati-

vos. A partícula é ejetada com a mesma velocidade de injeção. É devido a este fato que existe a matriz de regiões escuras aderida à região de aceleração presente no mapa FIG. 2.1.1. Estas regiões correspondem aos regimes àqueles onde a partícula é capturada, i.e, sua velocidade ressona com a de fase da onda, mas a velocidade final, a de ejeção, estabiliza para a inicial. Essas regiões são de regime passante, mas a partícula é capturada pelo potencial antes de ser ejetada. Isto não acontece na grande região cinza do regime passante. Uma dessas regiões ineficientes é explorada pelo ponto rotulado por **5** do mapa FIG. 2.1.1 e é exibido na FIG 2.1.5. A partícula é injetada com velocidade inicial  $v_0 = 0.6\alpha^{-1/2}$ . Ao atingir a velocidade de fase da onda, é capturada por ela e gentilmente ejetada com a mesma velocidade de injeção. A velocidade de ejeção é a mesma de injeção porque nesse tipo de regime não há ganho líquido de energia cinética no movimento.

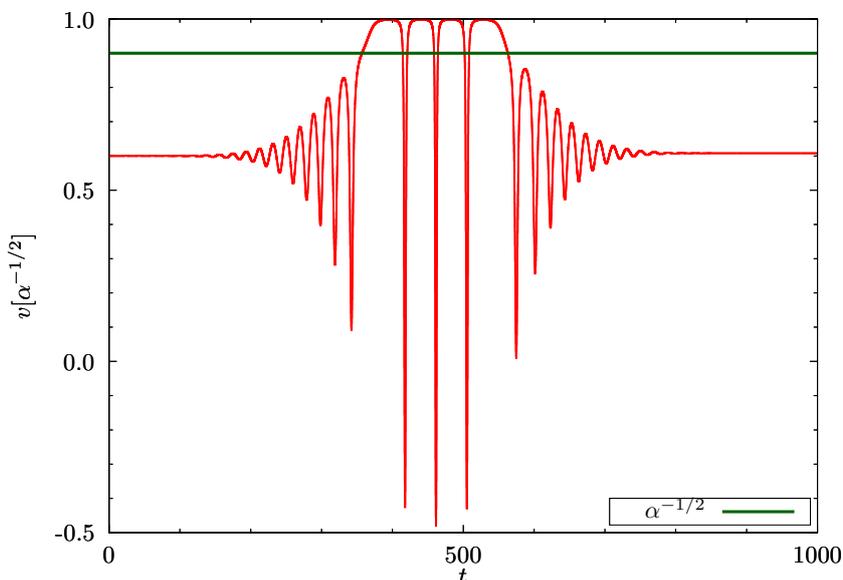


FIG. 2.1.5: Evolução temporal da velocidade da partícula lançada com  $v_0 = 0.6 \alpha^{-1/2}$ . Parâmetros utilizados:  $\sigma = 100.0$ ,  $\varphi_0 = 1.0$  e  $\alpha = 0.81$

## 2.2 Aproximação ponderomotriz para o sistema unidimensional

Observando o comportamento das soluções obtidas na seção anterior, fora do regime de aceleração, é natural inferir que as variáveis dinâmicas apresentam a comunhão de dois comportamentos: um médio, de baixa frequência, e outro, que o acompanha, de frequência mais elevada. A presente seção destina-se a mudar o foco da discussão e a tentar descrever o comportamento do sistema em regime não ressonante frente aproximação ponderomotriz. Nesta, é nosso objetivo explicitar as soluções por intermédio de novas variáveis cuja frequência de oscilação seja baixa comparada às frequências de oscilação das variáveis originais do sistema. Por este motivo, o comportamento das novas variáveis deve assemelhar-se ao comportamento médio das variáveis originais. Para tanto, é pertinente que tratemos o caso com a introdução de quantidades caracterizadas pela missão de eliminar os componentes da escala rápida de tempo do sistema - onde o comportamento médio não é evidente - bem como outras que façam o contrário, explicitem os componentes de escala lenta de tempo, de baixa frequência. A descrição da dinâmica do sistema será responsabilizada, portanto, a um novo par conjugado de coordenadas  $(X, P)$  que represente a evolução média, respectivamente, de posição  $(X)$  e momentum  $(P)$  de modo que se verifique

$$\begin{cases} x = X + h_x \\ p = P + h_p. \end{cases} \quad (2.2.1)$$

As variáveis minúsculas  $(x$  e  $p)$  são as variáveis originais. As maiúsculas  $(X$  e  $P)$  são as novas variáveis cuja frequência de oscilação é lenta e  $h_x$  e  $h_p$  são funções dos componentes de escala rápida de tempo, respectivamente à posição  $x$  e ao momento  $p$ , introduzidas agora que retiram de responsabilidade das variáveis médias o trato das altas frequências. Pela responsabilidade que lhe cabe, o novo par conjugado de coordenadas deve ser determinado de modo a manter inalterada a forma canônica das equações de Hamilton. Para tanto, é necessário que façamos uso do formalismo das Transformações Canônicas.

### Transformação Canônica

Uma transformação de variáveis no espaço de fase é dita canônica se preservar a forma canônica das equações de movimento de Hamilton. Esse tipo de formalismo tem larga aplicação na solução das equações de movimento de um sistema, tendo seu ápice de eficiência na Teoria de Hamilton-Jacobi. Tome um sistema de  $n$  graus de liberdade onde se efetuará a transformação

$$(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n) \rightarrow (Q_1, Q_2, \dots, Q_n, P_1, P_2, \dots, P_n).$$

Esta transformação é canônica desde que exista uma função

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}(Q_1, Q_2, \dots, Q_n, P_1, P_2, \dots, P_n, t)$$

tal que as equações de movimento do sistema para as novas variáveis sejam

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P_i} \quad \text{e} \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q_i}. \quad (i = 1, \dots, n).$$

Uma das maneiras seguras de fabricar uma transformação canônica qualquer é por intermédio de uma Função Geradora. Uma função geradora é qualquer função suficientemente derivável das variáveis originais e transformadas a partir da qual fica automaticamente estabelecida uma transformação canônica. Na presente dissertação, estamos interessados em uma classe de transformações canônicas feitas por uma função geradora do tipo  $F = F(q, P, t)$ <sup>1</sup>, i.e, que utiliza as coordenadas originais e os novos momenta conjugados como independentes. As equações que fabricam a transformação canônica a partir de tal função geradora são[22]

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F}{\partial P_i} \quad \text{e} \quad \mathcal{K} = \mathcal{H} + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Uma famosa transformação canônica desse tipo é a Transformação Identidade  $q_i = Q_i$ ,  $p_i = P_i$ , trivialmente canônica como é evidente. Pode-se gerá-la com o uso de uma função geradora cuja forma funcional é

$$F(q, P) = \sum_{k=0}^n q_k P_k.$$

<sup>1</sup>A notação  $(q, P)$  quer economizar espaço, mas equivale a  $(q_1, q_2, \dots, q_n, P_1, P_2, \dots, P_n, t)$ .

Dar-se-á proveito à transformação  $(x, p) \xrightarrow{\mathcal{F}} (X, P)$  utilizando uma função geradora  $\mathcal{F}$ . O relacionamento entre as variáveis originais e transformadas da forma (2.2.1) sugere uma semelhança com a Transformação Identidade, porque tomando as funções de alta frequência  $h_x$  e  $h_p$  identicamente nulas a transformação deixa tudo como está. Porém, evidentemente, é preciso incluir um ingrediente extra que acrescente as referidas funções de alta frequência à transformação. Tomam-se as variáveis  $(x, P)$  como independentes e propõe-se uma função geradora na forma

$$\mathcal{F}(x, P, t) = xP + f(x, P, t) \quad (2.2.2)$$

que, a menos da parcela  $f(x, P, t)$ , seria a identidade. É desta parcela que se aguarda o sucesso de nossa estratégia e é ela que resguardará os componentes de escala rápida de tempo. A função  $f(x, P, t)$  é, por hipótese, contínua e suficientemente diferenciável de maneira que podemos operá-la com liberdade. As equações que a fabricam a transformação são

$$X = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial P}, \quad p = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} \quad \text{e} \quad \mathcal{K} = \mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}. \quad (2.2.3)$$

Da função geradora (2.2.2), segue

$$X = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P}[xP + f(x, P, t)] = x + \frac{\partial f}{\partial P}, \quad (2.2.4)$$

$$p = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[xP + f(x, P, t)] = P + \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (2.2.5)$$

e

$$\mathcal{K} = \mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \mathcal{H} + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (2.2.6)$$

Como a função  $f(x, P, t)$  contém os componentes de alta frequência, é precipitado mas muito pertinente que tomemos a aproximação  $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial t}$ . Futuramente esta tomada será bem justificado. Por ora, sob o cuidado da função geradora escolhida, a transformação canônica gerada é dada pelas equações

$$\begin{aligned} X &= x + \frac{\partial f}{\partial P} \\ P &= p + \frac{\partial f}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Cruzando-as com a observação feita em (2.2.1), percebe-se que as quantidades destinadas pela contenção das escalas lentas de tempo -  $h_x$  e  $h_p$  - são reconhecidas nesse formalismo como sendo as derivadas da função  $f(x, P, t)$ , respectivamente com relação a  $P$  e a  $t$  (a rigor, se não fosse a aproximação  $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial t}$ , esta última seria com relação a  $x$ ). Ou seja, identifica-se

$$h_x = -\frac{\partial f}{\partial P} \quad \text{e} \quad h_p = -\frac{\partial f}{\partial t}. \quad (2.2.8)$$

As quantidades médias não devem conter termos de altas frequências. Assim, como previamente proposto, a função  $f(x, P, t)$  tem a missão de resguardar em si todo e qualquer termo desta natureza. É sob esta premissa que a construiremos.

Para fazê-lo, o primeiro passo é investigar como se modifica o fator relativístico  $\gamma(p)$  frente a transformação exibida em (2.2.7). Partindo de (2.1.8) e aplicando a transformação, segue que

$$\gamma = \sqrt{1 + \frac{1}{\alpha} (P - h)^2}, \quad (2.2.9)$$

onde se definiu  $h = \partial f / \partial t$  e se optou por não distinguir o fator transformado do original para economizar a notação, mas deseja-se que a diferença seja evidente. A ideia agora é expandir o fator  $\gamma$  em uma série polinomial em torno da região que contém os pontos críticos da função  $f$ . Dessa maneira,

$$\gamma(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n(P) h^n$$

onde, naturalmente, cada coeficiente da série é uma função obtida pelo processo:

$$\gamma_n(P) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial h^n} \gamma(P).$$

Da transformação (2.2.6), o hamiltoniano ponderomotriz deve apresentar-se como

$$\mathcal{K} = \gamma + \varphi(X, t) + \frac{\partial f}{\partial t} = \gamma_0 + (\gamma_1 + 1) \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right) + \sum_{n=2}^{\infty} \gamma_n \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)^n + \varphi(X, t). \quad (2.2.10)$$

A fim de sistematizar sua obtenção sob a premissa que lhe cabe, a função  $f(x, P, t)$  será expandida em série de potências em torno da amplitude máxima de potencial nula. Será construída sob a hipótese de convergência da série

$$f(x, P, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x, P, t) \varphi_0^n = f_1 \varphi_0 + f_2 \varphi_0^2 + \dots + f_n \varphi_0^n + \dots \quad (2.2.11)$$

onde os coeficientes  $f_n(x, P, t)$  são funções dos argumentos explicitados. O termo independente da amplitude máxima de potencial poderia ser incorporado pelo termo  $f_0(x, P, t) = xP$ , que completa a função geradora. Por essa razão, daqui em diante, referir-nos-emos à função  $f$  como a função geradora. É perceptível que, segundo esta técnica, o hamiltoniano transformado tem a estrutura

$$\mathcal{K}(X, P) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(X, P) \varphi_0^n = K_0 + K_1 \varphi_0 + K_2 \varphi_0^2 + \dots + K_n \varphi_0^n + \dots$$

porque o processo culmina na expansão da própria função hamiltoniana em uma série de potências em torno da amplitude máxima de energia potencial nula. Não é grande surpresa visto que o fizemos para definir a função geradora. Porém, a ideia é considerar a aproximação até ordem de  $\varphi_0^n$  de tal maneira que a ordem  $n$  seja suficiente para descrever bem o comportamento médio das variáveis do sistema. Para isso, temos de nos preocupar em como determinar a  $n$ -ésima potência da função geradora. Uma fórmula conhecida é<sup>1</sup>:

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)^n = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m,$$

onde

$$c_0 = a_0^n \text{ e } c_m = \frac{1}{m a_0} \sum_{k=1}^m (kn - m + k) a_k c_{m-k}.$$

Felizmente, a aproximação mostrou-se muito satisfatória considerando somente até ordem de  $\varphi_0^2$ . Vale ressaltar que essa ordem é exatamente correspondente à segunda ordem na amplitude do campo elétrico que casa perfeitamente com a proposta de potencial ponderomotriz. Assim, simplesmente, a contribuição de segunda ordem proveniente das potências da função geradora é

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 = \left( \frac{\partial f_1}{\partial t} \right)^2 \varphi_0^2$$

e reescrevemos (2.2.10) para

$$\mathcal{K}(X, P) = K_0(X, P) + K_1(X, P) \varphi_0 + K_2(X, P) \varphi_0^2, \quad (2.2.12)$$

onde

$$\begin{aligned} K_0(X, P) &= \gamma_0(P), \\ K_1(X, P) &= (\gamma_1 + 1) \frac{\partial f_1}{\partial t} + e^{-\frac{(x-h_x)^2}{\sigma^2}} \cos(X - h_x - t) \text{ e} \\ K_2(X, P) &= (\gamma_1 + 1) \frac{\partial f_2}{\partial t} + \gamma_2 \left( \frac{\partial f_1}{\partial t} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

É importante destacar a dependência funcional  $K_n = K_n(X, P)$ . Embora as funções  $f_1(x, P, t)$  e  $f_2(x, P, t)$  estejam presentes no termo geral, a expansão do hamiltoniano transformado é isenta das variáveis de alta frequência porque, por construção, tais funções devem banir todos os termos desta natureza. É exatamente a sua presença que se encarrega de fazê-lo. Temos, então, de determiná-las de modo a exibir cada uma das funções  $K_1$  e  $K_2$  única e exclusivamente como função das novas variáveis lentas.

<sup>1</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Formal\\_power\\_series#Power\\_series\\_raised\\_to\\_powers](https://en.wikipedia.org/wiki/Formal_power_series#Power_series_raised_to_powers).  
Ver também <http://arxiv.org/abs/1011.0525v1>.

O comportamento da função  $e^{-\frac{(X-h_x)^2}{\sigma^2}} \cos(X-h_x-t)$  em torno  $h_x = 0$  pode ser observado por meio de sua respectiva expansão em Série de Taylor. Até primeira ordem em  $h_x$  - que é quanto basta para concluir o que se quer - a função se comporta como

$$e^{-\frac{(X+h_x)^2}{\sigma^2}} \cos[(X+h_x-t)] = e^{-\frac{X^2}{\sigma^2}} \cos[(X-t)] + h_x e^{-\frac{X^2}{\sigma^2}} \left\{ \sin[(X-t)] - \frac{2X}{\sigma^2} \cos[(X-t)] \right\} + O(h_x^2).$$

Percebe-se que não há termo de baixa frequência para esta função em torno da região que extremiza a função geradora. Assim, devemos investigar a possibilidade de banir o termo de alta frequência que aparece com o  $\cos(x-t)$  no hamiltoniano buscando uma função  $f_1$  de modo que

$$(\gamma_1 + 1) \frac{\partial f_1}{\partial t} + e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \cos(x-t) = 0.$$

Imediatamente, segue (supondo  $1 + \gamma_1 \neq 0$ ),

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = -\frac{e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \cos(x-t)}{(1 + \gamma_1)} \quad (2.2.14)$$

de onde, integrando com relação ao tempo, uma solução possível apresenta-se como

$$f_1(x, P, t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}}{(1 + \gamma_1)} \sin(x-t). \quad (2.2.15)$$

Um comentário anteriormente prometido acerca da proporcionalidade entre as derivadas de  $f$ . A suposição acerca da proporcionalidade entre as derivadas parciais que se assumiu no início desta seção é, de fato, razoável. Tomando a derivada parcial com respeito a  $x$  em (2.2.14) segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= -\frac{1}{(1 + \gamma_1)} \left[ \sin(x-t) \frac{\partial}{\partial x} e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} + e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \frac{\partial}{\partial x} \sin(x-t) \right] \\ &= -\frac{e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}}{(1 + \gamma_1)} \left[ -\frac{4x}{\sigma^2} \sin(x-t) + \cos(x-t) \right] \\ &= -\frac{4x}{\sigma^2} f_1 - \frac{\partial f_1}{\partial t} \end{aligned}$$

e, como  $\sigma \gg 1$ , o termo proporcional ao próprio coeficiente  $f_1$  é desprezível frente a soma e recupera-se a relação de proporção que se supos *a priori*.

Assim, devemos contabilizar que  $K_1 = 0$ , ou seja, que os termos de primeira ordem não influenciam no fenômeno ponderomotivo. Para obter o próximo coeficiente  $f_2$  da expansão e atualizar o hamiltoniano com a função  $K_2$ , é preciso alimentar a sua expressão com a função  $f_1(x, P, t)$  calculada em (2.2.14). Segue

$$K_2 = (1 + \gamma_1) \frac{\partial f_2}{\partial t} + \gamma_2 \frac{e^{-\frac{2x^2}{\sigma^2}} \cos^2(x-t)}{(1 + \gamma_1)^2}$$

que, uma vez utilizando da identidade trigonométrica  $\cos^2(x-t) = \frac{1}{2} [1 + \cos[2(x-t)]]$ , é, portanto,

$$K_2 = (1 + \gamma_1) \frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{\gamma_2}{2} \frac{e^{-\frac{2x^2}{\sigma^2}}}{(1 + \gamma_1)^2} + \frac{\gamma_2}{2} \frac{e^{-\frac{2x^2}{\sigma^2}} \cos[2(x-t)]}{(1 + \gamma_1)^2}.$$

Nesse ponto é preciso estudar novamente os efeitos em  $K_2$  da transformação  $x = X + h_x$ . Os termos dependentes de  $x$  envolvem as funções  $e^{-\frac{2x^2}{\sigma^2}}$  e  $e^{-\frac{2x^2}{\sigma^2}} \cos[2(x-t)]$  que, frente a transformação, são  $e^{-\frac{2(X+h_x)^2}{\sigma^2}}$  e  $e^{-\frac{2(X+h_x)^2}{\sigma^2}} \cos[2(X+h_x-t)]$ . Expandindo em Série de Taylor em torno de  $h_x = 0$ , obtemos

$$e^{-\frac{2(X+h_x)^2}{\sigma^2}} = e^{-\frac{2X^2}{\sigma^2}} - \left( \frac{4Xh_x}{\sigma^2} \right) e^{-\frac{2X^2}{\sigma^2}} + O(h_x^2)$$

e

$$e^{-\frac{2(X+h_x)^2}{\sigma^2}} \cos[2(X+h_x-t)] = e^{-\frac{X^2}{\sigma^2}} \cos[2(X-t)] + \\ + 2h_x e^{-\frac{X^2}{\sigma^2}} \left\{ \sin[2(X-t)] - \frac{2X}{\sigma^2} \cos[2(X-t)] \right\} + O(h_x^2).$$

Para a exponencial pura, o primeiro termo que é o de ordem dominante é independente do componente de alta frequência. Assim, podemos trocar  $x$  por  $X$  nessa função e considerá-la de baixa frequência. Já para a outra função, o termo de primeira ordem em  $h_x$  ainda traz uma parcela significativa de modo que não iremos utilizar de expansão para essa função. Só se pode, então, reescrever  $K_2$  como sendo

$$K_2(X, P) = (1 + \gamma_1) \frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{\gamma_2}{2} \frac{e^{-\frac{2X^2}{\sigma^2}}}{(1 + \gamma_1)^2} + \frac{\gamma_2}{2} \frac{e^{-\frac{2x^2}{\sigma^2}} \cos[2(x-t)]}{(1 + \gamma_1)^2}.$$

É preciso novamente estudar para que caso a função  $f_2(x, P, t)$  se encarrega de banir os termos de alta frequência da função  $K_2$  que, afinal, nos conecta a função hamiltoniana. É fácil de perceber que impondo

$$(1 + \gamma_1) \frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{\gamma_2}{2} \frac{e^{-\frac{2x^2}{\sigma^2}} \cos[2(x-t)]}{(1 + \gamma_1)^2} = 0 \quad (2.2.16)$$

o objetivo é atingido, uma vez que, nesse caso, atualizamos  $K_2$  para

$$K_2 = \frac{\gamma_2}{2(1 + \gamma_1)^2} e^{-\frac{2x^2}{\sigma^2}}$$

que fica explícita única e exclusivamente por termos de baixa frequência. Resolvendo a equação (2.2.16) mediante integração direta, segue que o coeficiente quadrático da expansão da função geradora é

$$f_2(x, P, t) = \frac{\gamma_2}{4(1 + \gamma_1)^3} e^{-\frac{2x^2}{\sigma^2}} \sin[2(x-t)]. \quad (2.2.17)$$

É tempo de terminarmos a determinação do hamiltoniano ponderomotivo calculando os coeficientes  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ . Usando (2.1.8), o termo independente da série é, simplesmente,

$$\gamma_0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{0!} \gamma = \sqrt{1 + \frac{1}{\alpha} (P-0)^2} = \sqrt{1 + \frac{P^2}{\alpha}}$$

de onde o definiremos  $\Gamma(P) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{1 + \frac{P^2}{\alpha}}$ , pois será uma quantidade recorrente e é análoga ao fator relativístico nas coordenadas originais. Os demais coeficientes requerem derivadas do fator  $\gamma$  transformado, cujo quadrado é uma função polinomial na variável com a qual se efetuará as derivadas. A fim de facilitar a obtenção, notemos que

$$\frac{\partial \gamma^2}{\partial h} = 2\gamma \frac{\partial \gamma}{\partial h} \Rightarrow \frac{\partial \gamma}{\partial h} = \frac{1}{2\gamma} \frac{\partial \gamma^2}{\partial h} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \gamma}{\partial h^2} = -\frac{1}{4\gamma^3} \left( \frac{\partial \gamma^2}{\partial h} \right)^2 + \frac{1}{2\gamma} \frac{\partial^2 \gamma^2}{\partial h^2}.$$

Usando

$$(i) \frac{\partial \gamma^2}{\partial h} = -\frac{2}{\alpha} (P-h); \quad (ii) \frac{\partial^2 \gamma^2}{\partial h^2} = \frac{2}{\alpha}; \quad (iii) \lim_{h \rightarrow 0} \gamma = \Gamma \quad \text{e} \quad (iv) 1 - \frac{P^2}{\alpha \Gamma^2} = \frac{1}{\Gamma^2},$$

o coeficiente linear é, então,

$$\gamma_1 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{1!} \frac{\partial \gamma}{\partial h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\gamma} \left[ -\frac{2}{\alpha} (P-h) \right] = -\frac{P}{\alpha \Gamma}$$

enquanto o quadrático é

$$\gamma_2 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{4\gamma^3} \frac{4(P-h)^2}{\alpha^2} + \frac{1}{2\gamma} \frac{2}{\alpha} \right] = \frac{1}{2\alpha \Gamma} \left( 1 - \frac{P^2}{\alpha \Gamma^2} \right) = \frac{1}{2\alpha \Gamma^3}.$$

Em mãos os resultados precedentes, está-se apto a concluir que a função geradora da transformação canônica construída a partir do objetivo central é

$$\mathcal{F}(x, P, t) = xP + \alpha\varphi_0 \frac{\Gamma e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \sin(x-t)}{(\alpha\Gamma - P)} + \frac{\alpha^2 \varphi_0^2}{8} \frac{e^{-\frac{2x^2}{\sigma^2}} \sin(2x-2t)}{(\alpha\Gamma - P)^3} \quad (2.2.18)$$

bem como o hamiltoniano obtido através da transformação gerada por esta é

$$\mathcal{K}(X, P) = \Gamma(P) + \frac{\alpha\varphi_0^2}{4} \frac{e^{-\frac{2X^2}{\sigma^2}}}{\Gamma(P - \alpha\Gamma)^2}. \quad (2.2.19)$$

Como esperado, visto que a força ponderomotriz responsável pelo movimento é um campo vetorial gradiente, após a remoção dos componentes de alta frequência, o sistema restante é conservativo<sup>1</sup>. Das simulações de soluções feitas na seção anterior, sob as condições de não aceleração (onde deve ser válido tal formalismo, portanto), concluímos a igualdade entre a energia cinética de injeção e de ejeção. Nestes extremos a energia experimentada pela partícula é puramente cinética porque a parcela referente a energia potencial é esmagadoramente atenuada pela grande distância entre a partícula e a origem. Na presente versão média do hamiltoniano podemos concluir exatamente o mesmo. A energia cinética da partícula ( $\Gamma$ ) é conservada para os instantes extremos, depois de passado o efeito transiente, porque para  $|X| \gg \sigma$  o hamiltoniano é dado só pela parcela cinética:  $\mathcal{K}(X, P) = \Gamma(P)$ . Nestes extremos as variáveis dinâmicas originais assumem seus valores finais e confundem-se com as novas variáveis lentas associadas. Portanto, da constância do hamiltoniano transformado e da observação de insignificância da energia potencial para os instantes extremos da dinâmica da partícula, segue

$$\mathcal{K}(t = 0) = \mathcal{K}(t \rightarrow \infty) \Rightarrow \Gamma(t = 0) = \Gamma(t \rightarrow \infty)$$

de onde, pela confusão que se estabelece entre as variáveis nesses extremos, concluímos que

$$\Gamma(t = 0) = \Gamma(t \rightarrow \infty) \Rightarrow \gamma(t = 0) = \gamma(t \rightarrow \infty) \Rightarrow v_0^2 = v_f^2,$$

isto é, o valor do quadrado da velocidade inicial é transmitido para o quadrado da velocidade final. Assim, das duas uma: ou a partícula é refletida,  $v_f = -v_0$ , ou ejetada gentilmente pela onda,  $v_f = v_0$ . O primeiro caso, dos que identificamos, enquadra-se no regime de reflexão e o segundo no regime de passagem. Voltando a (2.1.16), o ganho de energia é, em ambos os casos, nulo:  $\Delta\mathcal{H} = \Delta\gamma = 0$ . Com isso podemos prever o resultado de que o módulo da velocidade final observada é o mesmo que o da inicial de injeção, podendo ser em sentido oposto. A concordância da previsão feita pela aproximação ponderomotiva na intersecção de regimes em que é válida ao mesmo tempo que a dinâmica do sistema completo acusa um sintoma de que a fenomenologia observada é proveniente do seu caráter.

### 2.2.1 Equações de evolução da aproximação ponderomotriz unidimensional

A continuidade do estudo se dá obtendo as equações de movimento para as variáveis médias por intermédio do hamiltoniano exibido em (2.2.19). Pela tecnologia das transformações canônicas, as equações de Hamilton mantêm a mesma exata forma. Para obter as equações que ditam a evolução dinâmica das variáveis médias basta que se resolvam

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial X} \quad \text{e} \quad \frac{dX}{dt} = \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial P}. \quad (2.2.20)$$

A primeira equação acima, que calcula a variação temporal do momentum conjugado médio, invoca uma derivação parcial com respeito a  $X$ . Tal derivação é simples de fazer, uma vez que a dependência em  $X$  no hamiltoniano concentra-se unicamente no fator exponencial. Assim sendo, a evolução temporal do momentum conjugado se dá por

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial X} \Rightarrow \dot{P} = -\frac{\varphi_0^2\alpha}{4} \frac{1}{\Gamma(P - \alpha\Gamma)^2} \frac{\partial}{\partial X} e^{-\frac{2X^2}{\sigma^2}} = \frac{\varphi_0^2\alpha}{4} \frac{e^{-\frac{2X^2}{\sigma^2}}}{\Gamma(P - \alpha\Gamma)^2} \left( \frac{4X}{\sigma^2} \right),$$

que pode ser reescrito usando o hamiltoniano (que é uma constante de movimento) como

$$\dot{P} = \frac{4X}{\sigma^2} (\mathcal{K} - \Gamma).$$

O valor do hamiltoniano é determinado pelas condições iniciais. A segunda equação (que calcula a velocidade média da partícula) invoca uma derivação parcial com respeito a  $P$  que não é tão simples de ser feita visto que há dependências explícitas e implícitas em  $P$  no hamiltoniano. O termo de contenção das altas frequências respectivo à posição da partícula também envolve uma derivação parcial com respeito a  $P$  e, portanto, tal processo merece especial atenção. A fim de sistematizar a derivação com respeito a  $P$ , é conveniente que se identifique uma regularidade na dependência funcional com respeito a esta variável. Será criada uma família auxiliar de funções definida como

$$M_{(n,m)}(P) \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma^n (P - \alpha\Gamma)^m \quad (2.2.21)$$

<sup>1</sup>É parte do formalismo hamiltoniano o resultado  $\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t} = \frac{d\mathcal{H}}{dt}$ . Isto é, uma vez que a função hamiltoniana é invariante frente translação temporal, então a própria é uma constante de movimento.[22]

onde  $n, m \in \mathbb{Z}$ . A conveniência desta criação se dá visto o fato de que o hamiltoniano (2.2.19) e a função geradora (2.2.18) podem ser reescritos em termos destas funções como

$$\mathcal{K}(X, P) = M_{(1,0)}(P) + \frac{\alpha\varphi_0^2}{4} e^{-\frac{2X^2}{\sigma^2}} M_{(-1,-2)}(P)$$

e

$$\mathcal{F}(x, P, t) = xP + \alpha\varphi_0 \sin(t-x) e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} M_{(1,-1)}(P) + \frac{\alpha^2\varphi_0^2}{8} \sin[2(t-x)] e^{-\frac{2x^2}{\sigma^2}} M_{(0,-3)}(P).$$

A derivada parcial com respeito a  $P$  no hamiltoniano e na função geradora surtirá efeito somente nas funções  $M_{n,m}(P)$  e, portanto, é nelas que nos atentaremos. O primeiro resultado necessário mesmo para a determinação da derivada genérica  $\frac{\partial}{\partial P} M_{(n,m)}$  é obter a derivada  $\frac{\partial \Gamma}{\partial P}$ . Usando a técnica de derivação de funções composta, podemos identificar, da definição de  $\Gamma = \Gamma(P)$ ,

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial P} = \frac{1}{2\Gamma} \frac{\partial \Gamma^2}{\partial P} = \frac{1}{2\Gamma} \frac{\partial}{\partial P} \left( 1 + \frac{1}{\alpha} P^2 \right) = \frac{1}{2\Gamma} \frac{2P}{\alpha} = \frac{P}{\alpha\Gamma}. \quad (2.2.22)$$

Feito isto, a obtenção da derivada com respeito a  $P$  das funções auxiliares começa com

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{(n,m)}}{\partial P} &= \frac{\partial}{\partial P} [\Gamma^n (P - \alpha\Gamma)^m] \\ &= \frac{\partial \Gamma^n}{\partial P} (P - \alpha\Gamma)^m + \Gamma^n \frac{\partial}{\partial P} (P - \alpha\Gamma)^m \\ &= n\Gamma^{n-1} (P - \alpha\Gamma)^m \frac{\partial \Gamma}{\partial P} + \Gamma^n m (P - \alpha\Gamma)^{m-1} \left( 1 - \alpha \frac{\partial \Gamma}{\partial P} \right) \end{aligned}$$

que, substituindo o resultado calculado em (2.2.22), se torna

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{(n,m)}}{\partial P} &= \frac{nP}{\alpha} \Gamma^{n-2} (P - \alpha\Gamma)^m + \Gamma^n m (P - \alpha\Gamma)^{m-1} \left( 1 - \frac{P}{\Gamma} \right) \\ &= \Gamma^{n-2} (P - \alpha\Gamma)^{m-1} \left[ \frac{nP}{\alpha} (P - \alpha\Gamma) + m\Gamma(\Gamma - P) \right]. \end{aligned}$$

Ou também, da definição (2.2.21),

$$\frac{\partial M_{(n,m)}}{\partial P} = M_{(n-2,m-1)} \left[ \frac{nP}{\alpha} (P - \alpha\Gamma) + m\Gamma(\Gamma - P) \right].$$

Atentando para o último fator, podemos simplificá-lo<sup>1</sup> para

$$\begin{aligned} \left[ \frac{nP}{\alpha} (P - \alpha\Gamma) + m\Gamma(\Gamma - P) \right] &= n \frac{P^2}{\alpha} - nP\Gamma + m\Gamma^2 - mP\Gamma \\ &= (n+m)[\Gamma^2 - P\Gamma] - n. \end{aligned}$$

Assim, finalmente, a derivada com respeito a  $P$  das funções auxiliares é

$$\frac{\partial M_{(n,m)}}{\partial P} = [(n+m)(\Gamma^2 - P\Gamma) - n] M_{(n-2,m-1)}. \quad (2.2.23)$$

Precisamos obter as derivadas para os pares  $(-1, -2)$ ,  $(1, -1)$  e  $(0, -3)$  que estão envolvidos no hamiltoniano e na função geradora. A derivada do par  $(1, 0)$  já foi obtida em (2.2.22) já que segue de sua definição (2.2.21) que  $M_{(1,0)}(P) = \Gamma(P)$ . Segue, de (2.2.23), então

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{(-1,-2)}}{\partial P} &= [(-1-2)(\Gamma^2 - P\Gamma) + 1] M_{(-1-2,-2-1)} \\ &= \frac{1 + 3P\Gamma - 3\Gamma^2}{\Gamma^3(P - \alpha\Gamma)^3} \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{(1,-1)}}{\partial P} &= [(-1+1)(\Gamma^2 - P\Gamma) - 1] M_{(1-2,-1-1)} \\ &= -\frac{1}{\Gamma(P - \alpha\Gamma)^2} \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

---

<sup>1</sup> $\Gamma^2 = 1 + P^2/\alpha \Rightarrow P^2/\alpha = \Gamma^2 - 1$

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_{(0,-3)}}{\partial P} &= [(0-3)(\Gamma^2 - P\Gamma) - 0] M_{(0-2,-3-1)} \\ &= \frac{3(P - \Gamma)}{\Gamma(P - \alpha\Gamma)^4}.\end{aligned}\quad (2.2.26)$$

Com estes resultados, se pode explicitar a equação de movimento para a velocidade média:

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P} \Rightarrow \dot{X} &= \frac{\partial M_{(1,0)}}{\partial P} + \frac{\alpha\varphi_0^2}{4} e^{-\frac{2X^2}{\sigma^2}} \frac{\partial M_{(-1,-2)}}{\partial P} \\ &= \frac{P}{\alpha\Gamma} + \frac{\varphi_0^2\alpha}{4} e^{-\frac{2X^2}{\sigma^2}} \left( \frac{1 + 3\Gamma P - 3\Gamma^2}{\Gamma^3(P - \alpha\Gamma)^3} \right).\end{aligned}$$

Reescrevendo essa última equação aproveitando a constância do hamiltoniano, portanto, a aproximação ponderomotriz considerando termos de até ordem  $\varphi_0^2$ , é regida pelas equações

$$\dot{X} = \frac{P}{\alpha\Gamma} + (\mathcal{K} - \Gamma) \left( \frac{1 + 3\Gamma P - \Gamma^2}{\Gamma^2(P - \alpha\Gamma)} \right) \quad (2.2.27)$$

e

$$\dot{P} = \frac{4X}{\sigma^2} (\mathcal{K} - \Gamma). \quad (2.2.28)$$

As derivadas respectivas aos pares  $(1, -1)$  e  $(0, -3)$  são utilizadas para prever a correção entre a posição instantânea e a do centro-guia da partícula via  $x = X + \partial f / \partial P$ . Em primeira aproximação, quando a velocidade da partícula se aproxima da velocidade de ressonância, i.e,  $\dot{x} \rightarrow 1$ , o fator  $P - \alpha\Gamma$  converge para 0. Isto porque, de (2.1.7), temos  $p(\dot{x} = 1) = \alpha\gamma \Rightarrow p(1) - \alpha\gamma = 0$ . Daí, as quantidades calculadas que dependem deste fator divergem e o formalismo perde sentido. Organizando o denominador do hamiltoniano (2.2.19) para  $1 - P/\alpha\Gamma$  encontra-se, em primeira aproximação, o denominador  $1 - \dot{x}$  que revela o efeito Doppler presente no formalismo e nas equações que o regem. Portanto, a aproximação ponderomotriz promete descrever bem o sistema quando ele está longe do regime de ressonância entre a velocidade das partículas e a de fase da onda. Ainda, quando nos instantes extremos, as equações (2.2.27) e (2.2.28) se simplificam para, respectivamente,  $\dot{X} = \frac{P}{\alpha\Gamma}$  e  $\dot{P} = 0$  pois a energia da partícula  $\mathcal{K}$  é puramente cinética e, portanto,  $\mathcal{K} - \Gamma = 0$ . Ou seja, o esperado é que a velocidade média final da partícula estabilize para um certo valor constante dado por  $\frac{P}{\alpha\Gamma}$ .

### 2.2.2 Simulações de solução ponderomotriz e comparação de resultados

O objetivo desta seção é expor as soluções numéricas obtidas para a evolução temporal das variáveis médias definidas para o sistema na seção anterior e compará-las com as obtidas para as variáveis originais. Para tanto, utilizou-se um rotina escrita em Fortran90 implementando, mais uma vez, o famoso método de solução de sistemas de equações diferenciais ordinárias conhecido como Runge Kutta de 4ª ordem. Também, utilizaram-se soluções obtidas pelo software *Mathematica*.

A aproximação ponderomotriz promete descrever o comportamento médio das variáveis dinâmicas do sistema. Para os instantes iniciais, as variáveis originais não sofrem a ação do caráter de alta frequência da onda pois a partícula é injetada de muito longe da origem. Assim, as condições iniciais impostas às variáveis médias ( $X(t=0)$  e  $P(t=0)$ ) são idênticas às das variáveis originais:  $X(t=0) = x_0$  e  $P(t=0) = p(v_0)$ . Esta consideração se explica também via a confusão entre as variáveis originais e transformadas para os instantes iniciais porque, como se mostrou nas simulações de solução do sistema completo, a velocidade demora um certo tempo para começar a apresentar sinais de variação. Manteve-se o valor  $\sigma = 100.0$  e a condição inicial  $x_0 = -3.5 \sigma$  a fim de fazer uso dos gráficos de solução obtidos anteriormente. A análise de correspondência entre a solução do sistema completo e a presente aproximação ponderomotriz será feita através de duas comparações. Comparou-se a evolução da velocidade  $\dot{X}$  ponderomotriz com a velocidade original  $\dot{x}$  e com a média desta última calculada numericamente por médias móveis. As relações (2.2.7) informam que é papel das derivadas parciais da função geradora atualizar os valores das variáveis originais para as transformadas. Assim, maximizando e minimizando essas derivadas, somos capazes de calcular os valores máximos e mínimos das variáveis transformadas em cada instante de tempo. Isso acaba por gerar duas curvas que envelopam a forma característica dos gráficos de velocidade versus tempo. Da relação  $v = v(p)$  obtida em (2.1.13) e da lei de transformação  $p = P - \frac{\partial f}{\partial t}$ , os envelopes superior e inferior foram calculados segundo, respectivamente, as substituições de velocidade  $v_{\text{sup}} = v(p_{\text{sup}})$  e  $v_{\text{inf}} = v(p_{\text{inf}})$ , onde

$$p_{\text{sup}} = P + \max \left\{ -\frac{\partial f}{\partial t} \right\} \quad \text{e} \quad p_{\text{inf}} = P + \min \left\{ -\frac{\partial f}{\partial t} \right\}.$$

Os únicos termos que podem adicionar sinal à derivada  $\frac{\partial f}{\partial t}$ , tal qual exibida em (2.2.18), além das funções trigonométricas, são as potências ímpares do fator  $(\alpha\Gamma - P)^{-1}$ , que é não nulo<sup>1</sup>. A premissa de continuidade (que vale porque a função geratriz é diferenciável em todo o domínio de interesse) em comunhão com a não nulidade permite concluir que tal fator não pode mudar de sinal ao longo do movimento da partícula. Devido a confusão entre as variáveis originais e transformadas nos instantes iniciais, pode-se determinar o seu sinal por

$$(\alpha\Gamma - P)^{-1}|_{t=0} = (\alpha\gamma_0 - p_0)^{-1}.$$

Usando que  $p_0 = \alpha\gamma_0 v_0$  e a escolha antes justificada de  $v_0 \in (0, 1)$ , garantimos que

$$(\alpha\gamma_0 - p_0)^{-1} = (\alpha\gamma_0(1 - v_0))^{-1} > 0.$$

Portanto, o fator  $(\alpha\Gamma - P)^{-1}$  é positivo durante toda a viagem da partícula. Sendo assim, é possível estimar os máximos e mínimos de (2.2.18) referidos anteriormente investigando, em simultâneo, o comportamento minimal e maximal de  $\cos(x-t)$  e de  $\cos[2(x-t)]$ . Em ambas as ocasiões, quando a função  $\cos(x-t)$  é máxima (+1.0) ou é mínima (-1.0), a função  $\cos[2(x-t)]$  assume o seu valor máximo 1.0. Portanto, o máximo e o mínimo acontecem quando se toma, respectivamente, os valores

$$\cos(x-t) = \cos[2(x-t)] = 1$$

e

$$\cos(x-t) = -\cos[2(x-t)] = -1.$$

A FIG. 2.2.6 refere-se aos pontos 2a e 2b do mapa FIG. 2.1.1 e contrasta a evolução da velocidade da partícula prevista pelas equações (2.1.13) e (2.1.14) do sistema completo com a previsão da aproximação ponderomotriz (equações (2.2.27) e (2.2.28)). A curva em laranja exibida em todos os quadros é a velocidade média desenvolvida pela partícula calculada com a média móvel dos valores de velocidade previstos pelas equações do sistema completo. Vê-se nos quadros (a) e (c) desta figura que a velocidade prevista

<sup>1</sup> Este fato pode ser justificado levando em conta que a solução de  $\alpha\Gamma - P = 0$  leva a conclusão  $P = \alpha/\sqrt{1-\alpha}$  que, em primeira aproximação, indica que a partícula está com velocidade ressonante, o que é um absurdo.

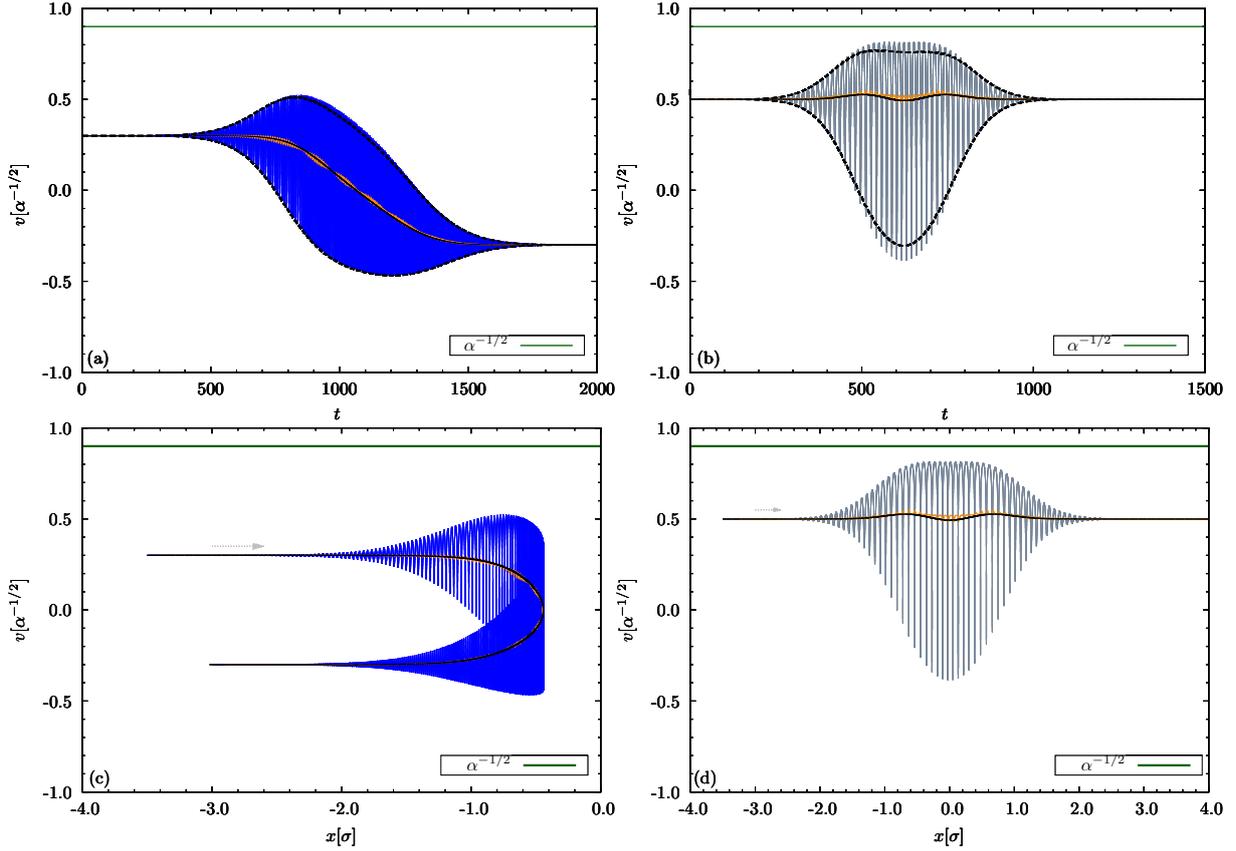


FIG. 2.2.6: Os quadros (a) (velocidade inicial  $v_0 = 0.3\alpha^{-1/2}$ ) e (b) (velocidade inicial  $v_0 = 0.5\alpha^{-1/2}$ ) mostram a comparação entre a evolução temporal da velocidade da partícula prevista pela dinâmica completa (gráfico em azul para (a) e cinza para (b)) e a ponderomotiva (linha preta sólida para ambos os quadros (a) e (b)). Os quadros (c) (velocidade inicial  $v_0 = 0.3\alpha^{-1/2}$ ) e (d) (velocidade inicial  $v_0 = 0.5\alpha^{-1/2}$ ) mostram a comparação entre a evolução do espaço de fase da partícula previsto pela dinâmica completa (azul para (c) e cinza para (d)) e a ponderomotiva (linha preta sólida para ambos os quadros (c) e (d)). A linha sólida em laranja é a média móvel da velocidade prevista pela dinâmica do sistema completo. As linhas pontilhadas nos quadros (a) e (b) são os envelopes da curva de velocidade previstos pela aproximação ponderomotiva. A linha sólida verde indica a velocidade de fase da onda. Parâmetros  $\sigma = 100.0$ ,  $\alpha = 0.81$ ,  $\varphi_0 = 0.5$  e condição inicial  $x_0 = -3.5\sigma$ .

para a partícula injetada com  $v_0 = 0.3\alpha^{-1/2}$  e amplitude máxima de potencial  $\varphi_0 = 0.5$  pela aproximação ponderomotiva modela muito satisfatoriamente a velocidade média desenvolvida pela partícula para estes mesmos parâmetros. Nos instantes iniciais e finais a velocidade uniforme da partícula confirma a confusão citada entre as variáveis nesses instantes. As curvas que envelopam o gráfico de velocidade, que preveem os máximos e mínimos de velocidade experimentados pela partícula, são igualmente satisfatórias. Foram calculados, convém lembrar, segundo explicado anteriormente. Entretanto, como se vê no quadro (b) desta figura, para a velocidade de injeção  $v_0 = 0.5\alpha^{-1/2}$ , os envelopes começam a apresentar sintomas de ineficiência em sua previsão, embora, ainda se possa confiar na velocidade média prevista pela dinâmica ponderomotiva.

Fazendo a mesma experiência para o ajuste  $\varphi_0 = 1.0$  perde-se a confiança nessa última, como é mostrado nos gráficos da FIG. 2.2.7. Esta figura refere-se aos pontos 3a e 3b do mapa FIG. 2.1.1 e fornece o mesmo tipo de comparação que foi feito na FIG. 2.2.6, porém, para o valor de amplitude máxima de potencial ajustado para  $\varphi_0 = 1.0$ . Como mostrado nos quadros (a) e (c) desta figura, a velocidade prevista pelo formalismo ponderomotriz previsto ainda é muito satisfatória com relação à média de velocidade desenvolvida pela partícula quando é injetada com velocidade inicial  $v_0 = 0.3\alpha^{-1/2}$ .

Igualmente se pode dizer dos envelopes superior e inferior de velocidade. As curvas modulam muito satisfatoriamente a forma do gráfico de velocidade, prevendo os mínimos e máximos deste gráfico. Porém, conforme exibido nos quadros (b) e (d), não se pode concluir de forma semelhante quando a partícula é injetada com velocidade inicial  $v_0 = 0.5\alpha^{-1/2}$ . Nesta situação, a partir de um certo instante, o erro entre a previsão de velocidades extremas e a dos envelopes é grande e a previsão da velocidade ponderomotriz comparada à média é grosseiramente insatisfatória. O erro passa a ser significativo e perceptível pouco depois de a partícula experimentar a velocidade máxima. Esbarramos, portanto, no limite de validade da aproximação ponderomotriz. À medida que a partícula aproxima-se do regime de ressonância entre

sua velocidade e a velocidade de fase da onda que a acelera, a dinâmica ponderomotriz perde qualidade. Dizemos então que, neste limite, há a quebra da dinâmica ponderomotriz.

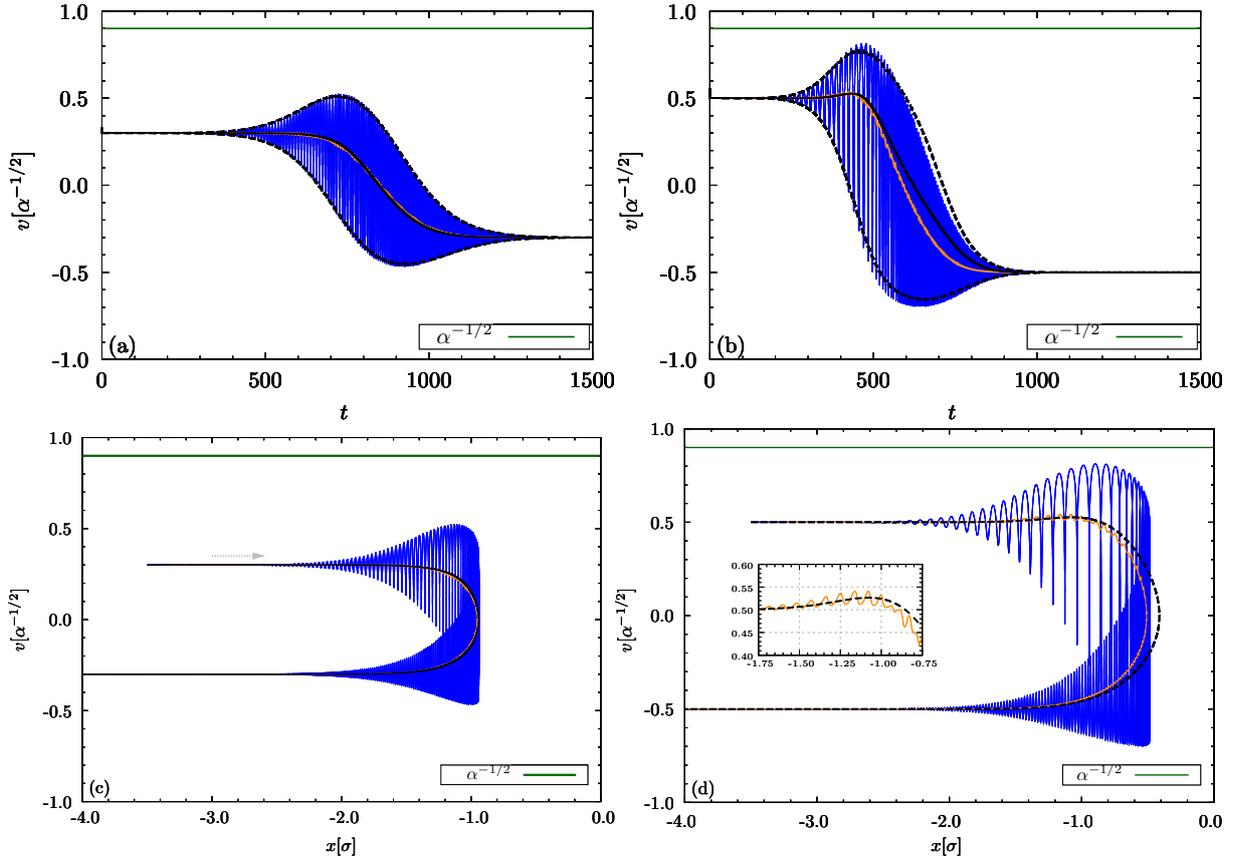


FIG. 2.2.7: Os quadros (a) (velocidade inicial  $v_0 = 0.3\alpha^{-1/2}$ ) e (b) (velocidade inicial  $v_0 = 0.5\alpha^{-1/2}$ ) mostram a comparação entre a evolução temporal da velocidade da partícula prevista pela dinâmica completa (gráfico em azul para (a) e cinza para (b)) e a ponderomotriz (linha preta sólida para ambos os quadros (a) e (b)). Os quadros (c) (velocidade inicial  $v_0 = 0.3\alpha^{-1/2}$ ) e (d) (velocidade inicial  $v_0 = 0.5\alpha^{-1/2}$ ) mostram a comparação entre a evolução do espaço de fase da partícula previsto pela dinâmica completa (azul para (c) e cinza para (d)) e a ponderomotriz (linha preta sólida para ambos os quadros (c) e (d)). A linha sólida em laranja é a média móvel da velocidade prevista pela dinâmica do sistema completo. As linhas pontilhadas nos quadros (a) e (b) são os envelopes da curva de velocidade previstos pela aproximação ponderomotriz. A linha sólida verde indica a velocidade de fase da onda. Parâmetros  $\sigma = 100.0$ ,  $\alpha = 0.81$ ,  $\varphi_0 = 1.0$  e condição inicial  $x_0 = -3.5\sigma$ .

Um fato interessante que se faz claro no quadro (b) da FIG. 2.2.7 e mais ainda na do quadro (d) é a correta previsão por parte da aproximação ponderomotriz do comportamento não monotônico da velocidade média da partícula. Seguindo a evolução do gráfico no quadro (d) (melhor exposta pelo *zoom* agregado a figura), a partícula experimenta um máximo de velocidade em algum ponto do intervalo  $-1.25 < x/\sigma < -1.0$  e, a partir deste, sua velocidade volta a decrescer passando novamente pelo valor  $v_0 = 0.5\alpha^{-1/2}$ . Este fenômeno é conhecido como "uphill acceleration"[12]. É importante que qualquer formalismo que se proponha a descrever o comportamento ponderomotivo instalado no movimento da partícula seja capaz de prever este fenômeno. Ele implica que o centro-guia da posição da partícula experimenta a mesma velocidade média para dois valores diferentes de intensidade de campo elétrico[14]. Esta conduta é fruto puramente da dinâmica não linear.

### 3 Modelo tridimensional

A presente seção destina-se a apresentar e estudar de uma extensão tridimensional do sistema físico tratado unidimensionalmente no Capítulo 3. A versão unidimensional nos propiciou um *feelling* sobre as propriedades de comportamento dinâmico do sistema mediante variações nas condições iniciais bem como nos parâmetros que o caracterizavam. A esperança é que o tratamento tridimensional, mais realístico, portanto, enriqueça nosso conhecimento. Neste, a partícula penetra na região de interesse munida de uma seção de choque finita. Esta situação é muito mais realística, visto que se espera a existência de regiões onde a penetração da partícula é mais eficaz em termos do destino esperado. Como mencionado anteriormente, é nosso interesse final mostrar e estudar a existência de possíveis focos de aceleração. Tais focos são regiões onde a partícula é acelerada no sentido de propagação da onda e, concomitantemente, mantém uma distância ao eixo de propagação da onda relativamente pequena e fixa por um período finito, porém, aproveitável. Para o estudo de tais condições elegeu-se o sistema de referência usando o sistema cilíndrico de coordenadas.

**Sistema Cilíndrico de Coordenadas** No sistema cilíndrico circular de coordenadas um ponto genérico do espaço  $\mathbb{R}^3$  é caracterizado pela terna  $(r, \theta, z)$ . A coordenada  $z$  é idêntica à do sistema retangular  $(x, y, z)$  e mede a distância até a origem perpendicularmente ao plano  $z = 0$ . A coordenada  $r$  refere-se à distância perpendicular de um ponto ao eixo  $z$ . A coordenada angular  $\theta$  é o ângulo em radianos formado entre o eixo  $x$  do sistema retangular e ao segmento de reta que liga um ponto do plano  $z = 0$  à origem. Os limites de  $r, \theta$  e  $z$  são

$$0 \leq r \leq \infty, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad \text{e} \quad -\infty \leq z \leq \infty$$

e as equações de transformação do um sistema cilíndrico para o retangular são como segue:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad \text{e} \quad z = z.$$

#### 3.1 O modelo de potencial tridimensional

No modelo tridimensional a onda que dota a partícula de energia potencial ainda se propagará sobre e no sentido de crescimento de um único eixo, que agora será o eixo  $z$  (axial). Contemplará, também, um perfil transversal a esta direção através da adesão de um novo parâmetro  $\sigma_r$  que desempenhará o mesmo papel de comprimento característico que seu par  $\sigma_z$  no envelope que modula a onda. Dessa forma, a onda eletrostática tridimensional será representada pela função

$$\varphi(r, z, t) = \varphi_0 \exp\left(-\frac{z^2}{\sigma_z^2} - \frac{r^2}{\sigma_r^2}\right) \cos(kz - \omega t). \quad (3.1.1)$$

Novamente interessados na modulação lenta, tomaremos o regime  $\sigma_r \sigma_z \gg 1/k^2$  pelo mesmo motivo justificado anteriormente na discussão sobre este regime feita no Capítulo 2. Seja  $v$  o módulo da velocidade da partícula localizada em  $(r, \theta, z)$  o instante  $t$  medido no referencial inercial. No sistema retangular o módulo da velocidade da partícula é calculado via  $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$  de onde podemos obtê-la no sistema circular cilíndrico (i.e, em função unicamente das velocidades  $\frac{dr}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{r}$ ,  $\frac{d\theta}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\theta}$  e  $\frac{dz}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{z}$ ) utilizando as leis de transformação de um sistema para o outro. A coordenada  $z$  é idêntica em ambos sistemas de coordenadas e por isso não é preciso se preocupar com ela. Segue das transformações que

$$\dot{x} = \frac{d}{dt}(r \cos \theta) = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \quad \text{e} \quad \dot{y} = \frac{d}{dt}(r \sin \theta) = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta$$

de onde a soma dos quadrados é

$$\begin{aligned}\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 &= \dot{r}^2 \cos^2 \theta - 2r\dot{r}\dot{\theta} \cos \theta \sin \theta + r^2\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + \\ &+ \dot{r}^2 \sin^2 \theta + 2r\dot{r}\dot{\theta} \cos \theta \sin \theta + r^2\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + \dot{z}^2 \\ &= \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\end{aligned}$$

aproveitando da identidade  $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$ ,  $u \in \mathbb{R}$ . Dessa maneira, o quadrado do módulo da velocidade da partícula no sistema cilíndrico é dado pela expressão

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2. \quad (3.1.2)$$

A versão tridimensional do lagrangiano que rege a dinâmica tridimensional de uma partícula de massa  $m$  e carga  $q$  sob influência da onda eletrostática (3.1.1) é, portanto,

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2}{c^2}} - q\varphi_0 \exp\left(-\frac{z^2}{\sigma_z^2} - \frac{r^2}{\sigma_r^2}\right) \cos(kz - \omega t). \quad (3.1.3)$$

Uma vez identificado o funcional lagrangiano do sistema, seguiremos com o processo de adimensionalizá-lo fazendo-o para todas as variáveis e parâmetros envolvidos. Começemos por adimensionalizar a coordenada  $z$  e a medida de tempo  $t$ . As variáveis adimensionais serão previamente indicadas pela barra sobrescrita. Esta notação será omitida posteriormente. Usando o número de onda  $k$  e a frequência  $\omega$ , tomamos

$$\bar{z} = kz \quad \text{e} \quad \bar{t} = \omega t$$

e, por conseguinte, a adimensionalização da componente de velocidade em  $z$  se dá pela velocidade de fase da onda eletrostática:

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} \frac{d\bar{z}}{d\bar{t}} \Rightarrow \dot{z} = v_\phi \dot{\bar{z}}.$$

Usaremos  $k$  também para adimensionalizar a coordenada  $r$  e os parâmetros  $\sigma_r$  e  $\sigma_z$ . Como a coordenada  $\theta$  não se apresenta explicitamente em nossa formulação e somente a sua velocidade associada, basta que adimensionalizemos a última. Tomou-se a adimensionalização da velocidade com relação à coordenada  $\theta$  utilizando a frequência  $\omega$ . Segue

$$\bar{r} = kr, \quad \bar{\sigma}_r = k\sigma_r, \quad \bar{\sigma}_z = k\sigma_z, \quad \text{e} \quad \dot{\bar{\theta}} = \dot{\theta}/\omega$$

que resulta em

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{\omega}{k} \frac{d\bar{r}}{d\bar{t}} \Rightarrow \dot{r} = v_\phi \dot{\bar{r}}$$

e

$$-\frac{z^2}{\sigma_z^2} - \frac{r^2}{\sigma_r^2} = -\frac{\bar{z}^2}{\bar{\sigma}_z^2} - \frac{\bar{r}^2}{\bar{\sigma}_r^2}.$$

Lembrando da definição do parâmetro  $\alpha$  que foi introduzido na formulação unidimensional exibida em (2.1.3) segue

$$\frac{\dot{r}^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} \left( v_\phi \frac{d\bar{r}}{d\bar{t}} \right)^2 = \alpha \dot{\bar{r}}^2, \quad \frac{r^2\dot{\theta}^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} \left( \frac{\bar{r}^2}{k^2} \omega^2 \dot{\bar{\theta}}^2 \right) = \alpha \bar{r}^2 \dot{\bar{\theta}}^2 \quad \text{e} \quad \frac{\dot{z}^2}{c^2} = \left( \frac{v_\phi}{c} \dot{\bar{z}} \right)^2 = \alpha^2 \dot{\bar{z}}^2.$$

O fator relativístico escrito em termos das variáveis adimensionais é, portanto,

$$\gamma(r, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{z}) = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha \left( \dot{\bar{r}}^2 + \bar{r}^2 \dot{\bar{\theta}}^2 + \dot{\bar{z}}^2 \right)}}. \quad (3.1.4)$$

É interessante notar que o fator relativístico não é mais somente função das velocidades generalizadas, pois depende explicitamente da coordenada generalizada  $r$ . O funcional lagrangiano adimensionalizado será da forma

$$L(r, z, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{z}, t) = -\frac{1}{\gamma(r, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{z})} - \varphi_0 \exp\left(-\frac{z^2}{\sigma_z^2} - \frac{r^2}{\sigma_r^2}\right) \cos(z - t) \quad (3.1.5)$$

onde - assim como feito na formulação unidimensional - adimensionalizamos o próprio funcional lagrangiano pelo fator  $mc^2$ , bem como a amplitude  $\varphi_0$  pelo fator  $mc^2/q$  e omitimos a notação com a barra.

A fim de obter as equações de movimento da partícula devemos efetuar uma transformação de Legendre no lagrangiano (3.1.5) para obter o funcional hamiltoniano. Definindo  $p_r$  como o momentum conjugado à coordenada  $r$ ,  $p_\theta$  o conjugado à coordenada  $\theta$  e  $p_z$  à coordenada  $z$  (todos adimensionais) como

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}}, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \quad \text{e} \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}, \quad (3.1.6)$$

a transformação apresenta-se mediante

$$\mathcal{H}(r, p_r, p_\theta, z, p_z, t) = \dot{r}(p)p_r + \dot{\theta}(p)p_\theta + \dot{z}(p)p_z - L(r, z, \dot{r}(p), \dot{\theta}(p), \dot{z}(p), t). \quad (3.1.7)$$

Estudando o lagrangiano (3.1.5), os momenta conjugados são identificados pelas funções

$$p_r = \gamma\alpha\dot{r}, \quad p_\theta = \gamma\alpha r^2\dot{\theta} \quad \text{e} \quad p_z = \gamma\alpha\dot{z}$$

de onde obtemos, supondo que se conheça  $\gamma = \gamma(p_r, r, p_\theta, p_z)$ , as inversões:

$$\dot{r} = \frac{1}{\gamma\alpha}p_r, \quad \dot{\theta} = \frac{1}{\gamma\alpha r^2}p_\theta \quad \text{e} \quad \dot{z} = \frac{1}{\gamma\alpha}p_z. \quad (3.1.8)$$

Obtenhamos primeiramente a versão tridimensional do fator relativístico em função dos momenta. Segue, de (3.1.4), e usando (3.1.8) que

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= \frac{1}{1 - \alpha(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)} \\ &= \frac{1}{1 - \alpha\left[\left(\frac{1}{\gamma\alpha}p_r\right)^2 + r^2\left(\frac{1}{\gamma\alpha r^2}p_\theta\right)^2 + \left(\frac{1}{\gamma\alpha}p_z\right)^2\right]} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha\gamma^2}\left[p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + p_z^2\right]} \end{aligned}$$

de onde

$$\gamma^2 - \frac{1}{\alpha}\left[p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + p_z^2\right] = 1$$

e, portanto, o fator relativístico escrito única e exclusivamente em função dos momenta conjugados e da coordenada  $r$  é

$$\gamma(r, p_r, p_\theta, p_z) = \sqrt{1 + \frac{1}{\alpha}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + p_z^2\right)}. \quad (3.1.9)$$

Ainda de uso das equações (3.1.8) e da recém obtida (3.1.9), o hamiltoniano atualiza-se para

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(r, p_r, p_\theta, z, p_z, t) &= \frac{1}{\gamma\alpha}p_r^2 + \frac{1}{\gamma\alpha r^2}p_\theta^2 + \frac{1}{\gamma\alpha}p_z^2 + \frac{1}{\gamma(r, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{z})} + \varphi_0 \exp\left(-\frac{z^2}{\sigma_z^2} - \frac{r^2}{\sigma_r^2}\right) \cos(z - t) \\ &= \frac{1}{\gamma}\left[1 + \frac{1}{\alpha}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + p_z^2\right)\right] + \varphi_0 \exp\left(-\frac{z^2}{\sigma_z^2} - \frac{r^2}{\sigma_r^2}\right) \cos(z - t) \\ &= \gamma + \varphi(r, z, t). \end{aligned}$$

ou, explicitando as dependências, o hamiltoniano do sistema é

$$\mathcal{H}(r, p_r, p_\theta, z, p_z, t) = \sqrt{1 + \frac{1}{\alpha}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + p_z^2\right)} + \varphi_0 \exp\left(-\frac{z^2}{\sigma_z^2} - \frac{r^2}{\sigma_r^2}\right) \cos(z - t). \quad (3.1.10)$$

O hamiltoniano do sistema é a sua energia total, a soma da energia cinética ( $\gamma$ ) desenvolvida pela partícula com a energia potencial ( $\varphi(r, z, t)$ ) aproveitada por ela. Não há dependência explícita nas velocidades em parte da energia potencial e a energia cinética (compreendida tão somente pelo fator de Lorentz) é puramente quadrática nas velocidades generalizadas.

### 3.1.1 Equações de evolução do sistema tridimensional

Em mãos o hamiltoniano, está-se apto a obter as equações que ditam a evolução dinâmica das coordenadas da partícula bem como de seus momenta conjugados. Começemos por obter as equações que explicitam a derivada temporal total das coordenadas. São estas

$$\dot{r} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r}, \quad \dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} \quad \text{e} \quad \dot{z} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_z}.$$

Porém, não é preciso que nos demos o trabalho de deduzi-las. As equações (3.1.8) já são as equações de Hamilton para as velocidades generalizadas. Portanto, atentemos agora às equações de Hamilton que explicitam as derivadas temporais totais dos momenta conjugados da partícula. São elas

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r}, \quad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} \quad \text{e} \quad \dot{p}_z = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}.$$

A primeira delas, de (3.1.10), segue

$$\begin{aligned} \dot{p}_r &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} \\ &= -\frac{\partial}{\partial r} \left[ \sqrt{1 + \frac{1}{\alpha} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + p_z^2 \right)} + \varphi_0 \exp \left( -\frac{z^2}{\sigma_z^2} - \frac{r^2}{\sigma_r^2} \right) \cos(z-t) \right] \\ &= \frac{p_\theta^2 / \alpha r^3}{\sqrt{1 + \frac{1}{\alpha} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + p_z^2 \right)}} + \frac{2r}{\sigma_r^2} \varphi_0 \exp \left( -\frac{z^2}{\sigma_z^2} - \frac{r^2}{\sigma_r^2} \right) \cos(z-t) \\ &= \frac{p_\theta^2}{\alpha \gamma r^3} + \frac{2r}{\sigma_r^2} \varphi_0 \exp \left( -\frac{z^2}{\sigma_z^2} - \frac{r^2}{\sigma_r^2} \right) \cos(z-t), \end{aligned}$$

enquanto a última é, também de (3.1.10),

$$\begin{aligned} \dot{p}_z &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} \\ &= -\frac{\partial}{\partial z} \left[ \sqrt{1 + \frac{1}{\alpha} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + p_z^2 \right)} + \varphi_0 \exp \left( -\frac{z^2}{\sigma_z^2} - \frac{r^2}{\sigma_r^2} \right) \cos(z-t) \right] \\ &= \varphi_0 \exp \left( -\frac{z^2}{\sigma_z^2} - \frac{r^2}{\sigma_r^2} \right) \left[ \frac{2z}{\sigma_z^2} \cos(z-t) + \sin(z-t) \right]. \end{aligned}$$

A equação de Hamilton que dá a variação temporal do momento conjugado à coordenada  $\theta$  é trivialmente obtida por

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} \Rightarrow \dot{p}_\theta = 0$$

uma vez que é uma coordenada ausente no hamiltoniano e, portanto, é cíclica ou ignorável[22]. A ausência de tal dependência constitui uma simetria em  $\theta$  e o momentum conjugado  $p_\theta$  é uma *constante de movimento* para o sistema.

O sistema completo das equações de Hamilton que ditam a evolução temporal das coordenadas e momenta da partícula é, portanto,

$$\begin{aligned} \dot{p}_z &= \varphi_0 \exp \left( -\frac{z^2}{\sigma_z^2} - \frac{r^2}{\sigma_r^2} \right) \left[ \frac{2z}{\sigma_z^2} \cos(z-t) + \sin(z-t) \right], & \dot{z} &= \frac{p_z}{\alpha \gamma}, \\ \dot{p}_r &= \frac{p_\theta^2}{\alpha \gamma r^3} + \frac{2r}{\sigma_r^2} \varphi_0 \exp \left( -\frac{z^2}{\sigma_z^2} - \frac{r^2}{\sigma_r^2} \right) \cos(z-t), & \dot{r} &= \frac{p_r}{\alpha \gamma}, \\ \dot{p}_\theta &= 0, & \dot{\theta} &= \frac{1}{r^2} \frac{p_\theta}{\alpha \gamma}. \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

### 3.1.2 Simulação numérica de soluções das equações do modelo tridimensional

Esta subseção se destina ao estudo das soluções numéricas das equações de Hamilton (3.1.11) que descrevem a dinâmica das variáveis pertinentes ao sistema físico em presente estudo através de simulações computacionais. Estamos interessados, em último, em explorar soluções que apresentem focagem da partícula acelerada, fato que merece atenção devido sua novidade. O ponto ou região do espaço onde a partícula em observação converge será entendido como um foco. Tal partícula pode apresentar três comportamentos à medida que se propaga. Em relação ao eixo axial: (i) afastar-se desse eixo, que significa sua coordenada  $r$  estar em regime crescente ( $\dot{r} > 0$ ); (ii) manter-se, aproximadamente, a uma mesma distância, que significa sua coordenada  $r$  está em regime estacionário ( $\dot{r} = 0$ ); ou (iii) aproximar-se do eixo axial de modo que sua coordenada  $r$  está em regime decrescente ( $\dot{r} < 0$ ). O último caso é o de especial interesse, pois representa a existência (na verdade é uma condição necessária, embora, como se verá, não suficiente) de focos convergentes na geometria do movimento.

#### Parâmetros e Condições iniciais

Começemos a discussão com o momentum conjugado à coordenada  $\theta$ . O momentum  $p_\theta$  que encerra o trio de momenta é uma constante de movimento para a partícula carregada e o consideraremos como um parâmetro. É inteligente, portanto, escolher seu valor adequadamente. Quer-se organizar a emissão da partícula carregada na região de choque o mais imparcialmente possível. É razoável, portanto, querer que, inicialmente, a partícula não experimente força na direção radial porque isto garante uma penetração não tendenciosa. Outra condição que contribui para a boa ordem da emissão é a componente nula de velocidade inicial na direção radial. Essa combinação de condições ( $\dot{r}(t=0) = 0$  e  $F_r(t=0) = 0^1$ ) parece garantir que, assim que a partícula penetra na região de choque, o faça livre da tendência de aproximar-se ou afastar-se do eixo axial. Em outras palavras, experimentando equilíbrio na direção radial. O valor inicial da coordenada  $r$  representa a distância inicial que a partícula se encontra do eixo axial. A equação de Hamilton que fornece a derivada temporal completa do momentum conjugado à coordenada  $r$  é a expressão da componente radial da força experimentada pela partícula. Como obtemos anteriormente e exibido em (3.1.11), tal expressão é

$$F_r = \frac{p_\theta^2}{\alpha\gamma r^3} + \frac{2r}{\sigma_r^2} \varphi_0 \exp\left(-\frac{z^2}{\sigma_z^2} - \frac{r^2}{\sigma_r^2}\right) \cos(z-t).$$

Calculando a força no instante inicial (i.e, substituindo todas as variáveis envolvidas por seus valores iniciais identificados pelo subscrito 0) e impondo ao resultado o valor nulo, obtém-se uma equação para  $p_\theta$  - valendo lembrar que há dependência em  $p_\theta$  no fator relativístico calculado no instante inicial ( $\gamma_0$ ):

$$\frac{p_\theta^2}{\alpha\gamma_0 r_0^3} + \frac{2r_0}{\sigma_r^2} \varphi_0 \exp\left(-\frac{z_0^2}{\sigma_z^2} - \frac{r_0^2}{\sigma_r^2}\right) \cos(z_0) = 0.$$

Mais significativo para análise física do que o momentum conjugado à  $\theta$  é a velocidade inicial na sua direção. Vamos transportar a dependência explícita em  $p_\theta$  para a velocidade inicial na direção  $\theta$  usando a equação de Hamilton que expressa a conservação do momentum angular da partícula aplicada no instante inicial:  $\dot{\theta}_0 r_0^2 \gamma_0 \alpha = p_\theta$ . Isolando a velocidade angular e fazendo a substituição citada, segue

$$\dot{\theta}_0^2 = -\frac{1}{\gamma_0} \frac{2\varphi_0}{\alpha\sigma_r^2} \exp\left(-\frac{z_0^2}{\sigma_z^2} - \frac{r_0^2}{\sigma_r^2}\right) \cos(z_0).$$

Lembrando da dependência explícita da velocidade angular no fator relativístico tal qual exibido em (3.1.4), é interessante elevar toda a expressão imediatamente acima ao quadrado da forma

$$\dot{\theta}_0^4 = \frac{1}{\gamma_0^2} \frac{4\varphi_0^2}{\alpha^2\sigma_r^4} \exp\left(-\frac{2z_0^2}{\sigma_z^2} - \frac{2r_0^2}{\sigma_r^2}\right) \cos^2(z_0)$$

para constatar, definindo uma grandeza auxiliar

$$Q_0^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\alpha^2\sigma_r^4}{4\varphi_0^2 \cos^2(z_0)} \exp\left(\frac{2z_0^2}{\sigma_z^2} + \frac{2r_0^2}{\sigma_r^2}\right), \quad (3.1.12)$$

<sup>1</sup>A notação  $F_r$  quer indicar o módulo da componente radial da força experimentada pela partícula no instante inicial, aonde é injetada.

que

$$Q_0^2 \dot{\theta}_0^4 = 1 - \alpha (r_0^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}_0^2) \Rightarrow Q_0^2 \dot{\theta}_0^4 + \alpha r_0^2 \dot{\theta}_0^2 + \alpha \dot{z}_0^2 - 1 = 0$$

onde tomamos o cuidado de considerar  $\dot{r}_0 = 0$  porque encerra o par de condições iniciais relacionadas a direção radial que estamos a considerar. Dada natureza polinomial quadrática em  $\dot{\theta}_0^2$ , suas possíveis soluções apresentam-se da forma

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_0^2 &= -\frac{\alpha r_0^2}{2Q_0^2} \pm \frac{1}{2Q_0^2} \sqrt{\alpha^2 r_0^4 - 4Q_0^2(\alpha \dot{z}_0^2 - 1)} \\ &= \frac{\alpha r_0^2}{2Q_0^2} \left\{ -1 \pm \sqrt{1 - \frac{4Q_0^2}{\alpha^2 r_0^4} (\alpha \dot{z}_0^2 - 1)} \right\}. \end{aligned}$$

Interessa-nos apenas a escolha do sinal positivo (em  $\pm$ ) já que o lado esquerdo da solução (o próprio  $\dot{\theta}_0^2$ ) é um número positivo e tal escolha garante este fato. Assim, filtramos a solução para

$$\dot{\theta}_0^2 = \frac{\alpha r_0^2}{2Q_0^2} \left\{ -1 + \sqrt{1 - \frac{4Q_0^2}{\alpha^2 r_0^4} (\alpha \dot{z}_0^2 - 1)} \right\}$$

Substituindo (3.1.12) e extraíndo as raízes obtemos, finalmente, duas possíveis soluções (que diferem apenas em sinal) para a velocidade angular na direção de  $\theta$  para que as partículas penetrem na região de choque livres de forças radiais. As soluções são

$$\dot{\theta}_0 = \pm \frac{r_0 \sqrt{2\alpha}}{2|Q_0|} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \frac{(1 - \alpha \dot{z}_0^2) \sigma_r^4}{r_0^4 \varphi_0^2 \cos^2(z_0)} \exp\left(\frac{2z_0^2}{\sigma_z^2} + \frac{2r_0^2}{\sigma_r^2}\right)}}. \quad (3.1.13)$$

De última e importante análise, a condição  $\alpha \dot{z}_0^2 < 1$  garante que não há nenhuma operação impossível de ser feita em (3.1.13). Isto porque, seja  $u \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\begin{aligned} \alpha \dot{z}_0^2 < 1 &\Leftrightarrow -u(\alpha \dot{z}_0^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow 1 - u(\alpha \dot{z}_0^2 - 1) > 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 < \sqrt{1 - u(\alpha \dot{z}_0^2 - 1)} \Leftrightarrow 0 < -1 + \sqrt{1 - u(\alpha \dot{z}_0^2 - 1)}. \end{aligned}$$

e encerra-se a explicação identificando  $u = \frac{\sigma_r^4 \exp\left(\frac{2z_0^2}{\sigma_z^2} + \frac{2r_0^2}{\sigma_r^2}\right)}{r_0^4 \varphi_0^2 \cos^2(z_0)}$  em (3.1.13). Portanto, a condição

$$\alpha \dot{z}_0^2 < 1, \quad \dot{r}_0 = 0$$

garante a existência de um valor absoluto de velocidade tangencial inicial para a qual  $F_r(t=0) = 0$  e deve, por essa razão, ser sempre exigida. A escolha  $\dot{\theta}_0 > 0$  ou  $\dot{\theta}_0 < 0$  apenas garante a liberdade de a partícula penetrar com velocidade tangencial anti-horária ou horária, respectivamente. Definiremos, portanto, a condição inicial para a velocidade angular como uma das opções

$$\begin{cases} \dot{\theta}_{0+} &= \frac{r_0 \sqrt{2\alpha}}{2|Q_0|} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \frac{(1 - \alpha \dot{z}_0^2) \sigma_r^4}{r_0^4 \varphi_0^2 \cos^2(z_0)} \exp\left(\frac{2z_0^2}{\sigma_z^2} + \frac{2r_0^2}{\sigma_r^2}\right)}} \\ \dot{\theta}_{0-} &= -\frac{r_0 \sqrt{2\alpha}}{2|Q_0|} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \frac{(1 - \alpha \dot{z}_0^2) \sigma_r^4}{r_0^4 \varphi_0^2 \cos^2(z_0)} \exp\left(\frac{2z_0^2}{\sigma_z^2} + \frac{2r_0^2}{\sigma_r^2}\right)}} \end{cases} \quad (3.1.14)$$

A partícula deve interagir lentamente como o potencial. Assim, para todas as simulações que seguem, fixou-se as dimensões do sistema com  $\sigma_z = 100.0$  e  $z_0 = -3.5 \sigma_z$ . A dimensão transversal do perfil tridimensional da onda foi escolhida mais curta  $\sigma_r = 50.0$  e manteve-se a velocidade de fase com mesma proporção  $\alpha = 0.81$ . A velocidade angular inicial foi escolhida sempre como a solução positiva  $\dot{\theta}_{0+}$  exibida acima em (3.1.14). As condições iniciais de posição radial  $r_0$  e velocidade longitudinal  $v_{z0}$  foram manipuladas e estudaram-se os efeitos da escolha de seus valores assim como os da amplitude máxima de potencial da onda.

### Simulações

O estudo das soluções do sistema (3.1.11) começa com um mapa da velocidade final de ejeção da partícula que confronte a escolha de velocidade inicial longitudinal com diferentes valores de  $r_0$ . Eis o mapa.

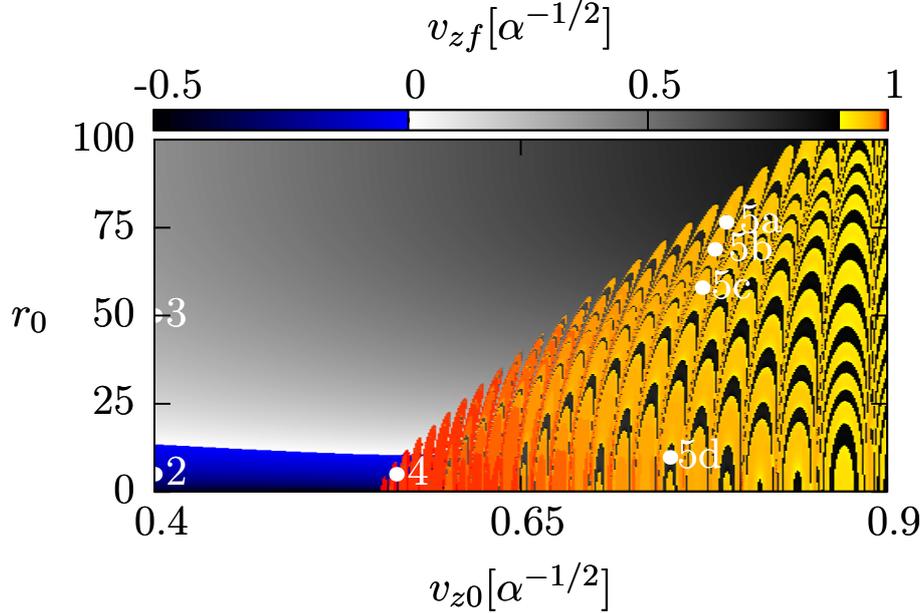


FIG. 3.1.1: Mapa da velocidade longitudinal de ejeção para  $\sigma = 100.0$ ,  $\sigma_r = 50.0$ ,  $\alpha = 0.81$  e  $\varphi_0 = 1.0$ . O eixo horizontal exibe a velocidade inicial de injeção da partícula enquanto o eixo vertical a coordenada radial inicial. As velocidades são exibidas em unidades de  $\alpha^{-1/2}$ .

O mapa mostrado na FIG. 3.1.1 foi feito utilizando, aproximadamente, 1.200.000 pontos-solução do sistema (3.1.11) e exibe a velocidade de ejeção da partícula para o intervalo de velocidades iniciais de injeção  $v_{0z} \in [0.4, 0.9]$  e distância radial inicial  $r_0 \in (0.0, 100.0]$ . Percebe-se que a dinâmica do sistema contempla três regiões de comportamento. A azulada corresponde a velocidades de ejeção negativas e caracteriza a região de reflexão, portanto. A em tons de cinza caracteriza o regime passante, onde a velocidade longitudinal de ejeção da partícula não foge muito à longitudinal inicial. Já as regiões amarelada/alaranjada/avermelhada são as regiões de aceleração, onde a velocidade de ejeção é igual ou superior a velocidade de fase da onda de  $0.9c$ . Em torno da região centralizada em  $v_{0z} = 0.6\alpha^{-1/2}$  e  $r_0 = 12.5$ , mais à direita se formos mais atentos, os tons avermelhados, que indicam máxima aceleração, prevalecem na região de aceleração. Assim, essa região é a de maior eficiência em quesito de aceleração da partícula. Mesclada à região de aceleração há uma matriz de regiões escuras que identificam bolhas de ineficiência para aceleração. Quando em uma destas regiões, a partícula responde à dinâmica em que é capturada pelo potencial, porém, sendo ejetada sem apresentar aceleração. Esta característica foi observada anteriormente no movimento unidimensional. A aceleração é experimentada para qualquer distância radial inicial (salvo as exceções da matriz de regiões escuras), desde que a velocidade de injeção seja superior a  $v_{0z} \approx 0.55 \alpha^{-1/2}$ . Faz-se presente uma linha oblíqua esbranquiçada localizada um pouco acima dos pontos rotulados por 2 e 4. Esta linha indica velocidades longitudinais de ejeção próximas de zero. Ou seja, quando em um ponto nesta linha, a partícula responde à dinâmica de frenagem, pois é bruscamente freada pelo potencial da onda. Sua existência prediz que a dimensão longitudinal pode, por algum mecanismo que é nosso interesse conhecer, perder quase toda parcela de energia cinética outrora contida somente em si. Como veremos, a adesão do perfil transversal à dinâmica longitudinal possibilita esse tipo de fenômeno. Inclusive, este será uma peça importante para o propósito final de nosso estudo. É justamente o mecanismo de troca de energia cinética entre as dimensões do espaço de configuração do sistema que acarreta na aceleração simultânea à focagem da partícula.

A seguir exploramos em detalhes a dinâmica de cada um dos pontos rotulados por **2**, **3**, **4**, **5a**, **5b**, **5c** e **5d**. Expôs-se a evolução temporal das velocidade longitudinal e radial bem como dos espaços de fase respectivos a cada uma destas duas dimensões. Estes pontos foram assim escolhidos porque ilustram os aspectos principais do comportamento da partícula em cada uma das regiões que se localizam.

Começemos explorando o ponto rotulado por **2** exibido no mapa FIG. 3.1.1. A dinâmica referente a este ponto é exibida na FIG. 3.1.2 ao lado. O quadro (a) dessa figura mostra a evolução temporal das velocidades longitudinal (vermelho) e radial (azul) da partícula lançada com  $v_{0z} = 0.4c$ . Os painéis (b) e (c) da mesma figura mostram, respectivamente, o espaço de fase radial e longitudinal. As setas em cinza nestes quadros querem significar a ordem correta de evolução do gráfico. Como previsto pelo mapa, na presente velocidade de injeção com os parâmetros ajustados para  $\varphi_0 = 1.0$  e  $r_0 = 5.0$ , instala-se o regime de reflexão. Na vizinhança de  $z = -80$  a partícula encontra uma barreira de potencial intransponível oferecida pela onda e acaba por terminar seu movimento afastando-se de  $z = 0$ , i.e, com velocidade longitudinal negativa, mas menor em módulo do que sua inicial. A presença da dinâmica radial resguarda parte da energia cinética e causa esse efeito antes ausente na dinâmica unidimensional. O crescimento da velocidade radial comunga com o decrescimento da velocidade longitudinal, como se vê claramente no quadro (a). A frequência associada ao movimento longitudinal é esmagadoramente superior a associada ao radial, acusado pelo contraste da grande forma de variação da velocidade longitudinal com a velocidade radial.

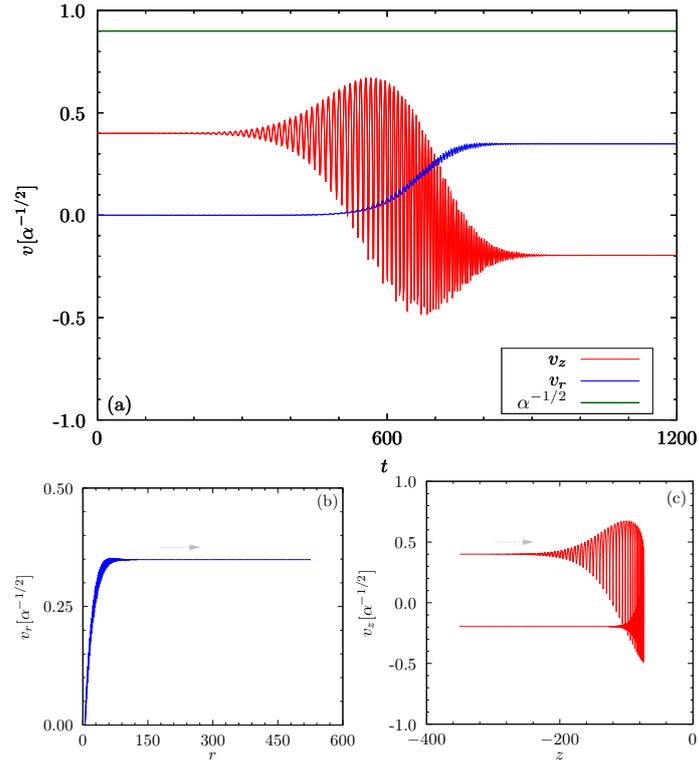


FIG. 3.1.2: (a) Evolução temporal das velocidades radial (azul) e longitudinal (vermelho). Espaço de fase (b) radial e (c) longitudinal. Parâmetros utilizados:  $v_{0z} = 0.4$ ,  $\sigma_z = 100.0 = 2\sigma_r$ ,  $\alpha = 0.81$ ,  $\varphi_0 = 1.0$  e  $r_0 = 5.0$ .

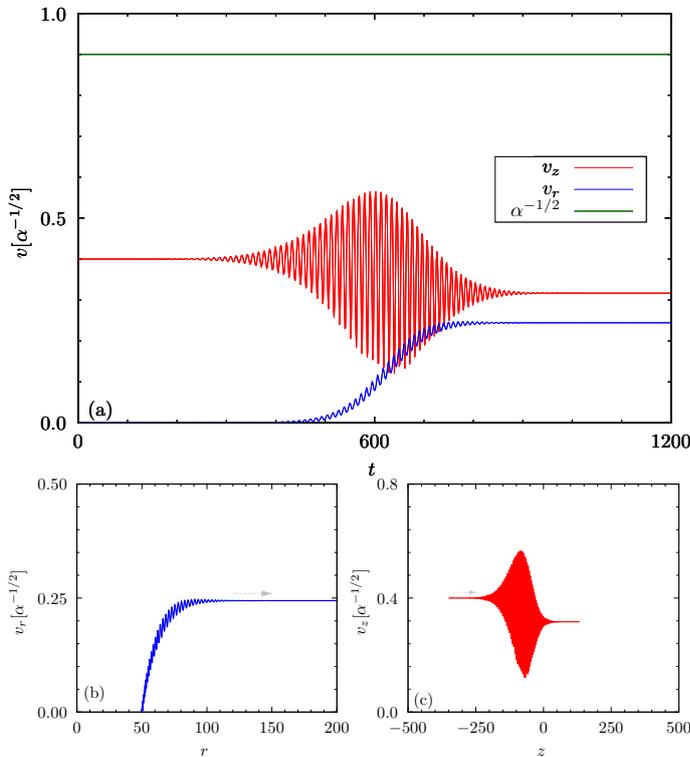


FIG. 3.1.3: (a) Evolução temporal das velocidades radial (azul) e longitudinal (vermelho). Espaço de fase (b) radial e (c) longitudinal. Parâmetros utilizados:  $v_{0z} = 0.4$ ,  $\alpha^{-1/2}$ ,  $\sigma = 100.0$ ,  $\sigma_r = 50.0$ ,  $\alpha = 0.81$  e  $r_0 = 50.0$ .

Os gráficos da FIG. 3.1.3 exploram em detalhes o ponto rotulado por **3** mostrado no mapa FIG. 3.1.1. A simulação consiste em injetar a partícula com a mesma velocidade inicial de  $v_{0z} = 0.4$ , porém, dez vezes mais distante inicialmente do eixo de propagação da onda aceleradora, com coordenada radial inicial  $r_0 = 50.0$ . Como previsto pelo mapa, a partícula encontra-se no regime passante. A velocidade longitudinal final é positiva o que indica que a partícula não foi refletida. A façanha de cruzar o ponto  $z = 0$ , onde há a máxima barreira de potencial possível oferecida, assegura que a partícula não encontrará outra barreira intransponível em seu caminho. Isto porque avança e a amplitude de potencial decresce com  $|z|$ . Sendo assim, quando chega longe o suficiente da origem, com o potencial totalmente atenuado, a partícula é ejetada com uma velocidade longitudinal positiva e menor do que a de injeção inicial. Deve-se isto, uma vez mais, à transferência da energia cinética da direção longitudinal para a radial observada por meio do crescimento da velocidade radial em comunhão do decrescimento da velocidade longitudinal. A

estabilidade da velocidade radial assegura que a coordenada radial da partícula seguirá crescendo indefinidamente e não há para o conjunto de parâmetros utilizados nas situações exibidas na FIG.3.1.2 e FIG.3.1.3 a ocorrência da focagem da partícula.

O ponto rotulado por 4 no mapa de parâmetros da FIG.3.1.1 representa a vizinhança da região de maior eficiência aceleradora (coloração avermelhada). A evolução dinâmica referente a este ponto é exibida em detalhes na FIG. 3.1.4. Vê-se no quadro (a) dessa figura que a velocidade inicial  $v_{0z} = 0.57 \alpha^{-1/2}$  é suficiente para a velocidade longitudinal máxima desenvolvida pela partícula cruze a linha verde, i.e, atinja a velocidade de fase da onda. Do ponto de vista do referencial fixo ligado a partícula, ela interage com máximos de potencial sucessivos. Atingindo a velocidade de ressonância, a partícula é capturada pelo potencial da onda. A captura ocorre na vizinhança de  $z = 0$ , onde a partícula experimenta a maior amplitude de potencial possível. Em vez de refletida, é acelerada e avança sua posição ultrapassando essa vizinhança. À medida que avança, as barreiras de potencial que encontra são menores que a máxima experimentada na origem porque a amplitude do potencial decresce com o aumento de  $|z|$ . Portanto, o próximo

máximo de potencial após a captura não é capaz de retardar o movimento da partícula e empurrá-la de volta a região  $z < 0$ . Assinatura da quebra do regime ponderomotivo, a velocidade longitudinal oscila com altíssima frequência três vezes em torno da velocidade de ressonância até que, quando longe o suficiente da influência do potencial da onda, a partícula encerra sua dinâmica com uma velocidade longitudinal constante de  $v_z \approx 0.9925 \alpha^{-1/2}$ . A oscilação em torno da velocidade de ressonância é detalhada no zoom do quadro (a) da figura. Explorar-se-á o número de oscilações em torno da velocidade de ressonância como uma característica previsível do sistema tratado em breve. É interessante notar que este mecanismo de captura automaticamente situa a partícula em fase com a onda aceleradora sem que seja necessária a preocupação com a fase inicial relativa entre elas. Um aspecto mais interessante do presente conjunto de parâmetros, entretanto, é o movimento da partícula na direção radial. Assim que a partícula é capturada, a velocidade radial tende a diminuir e, pouco depois do evento, a relação  $\dot{r} < 0$  é satisfeita. Isto pode ser entendido como um efeito de focagem, já que a coordenada radial começa a decrescer. Acompanhando o espaço de fase radial, a coordenada radial é crescente desde seu valor inicial ( $r_0 = 5.0$ ) até as redondezas de  $r = 8.0$  onde, então, passa a ser decrescente. Ao invés de afastar-se do eixo de propagação da onda, a partícula começa a aproximar-se dele. Em seguida de um pico intenso de decrescimento, a velocidade radial estabiliza para um valor negativo da ordem de  $v_r \approx -0.01$  desde  $r = 4.0$  até a vizinhança de  $r = 0.0$ . Na iminência de chegar ao ponto de divergência, a velocidade radial dá um salto e estabiliza novamente, porém para um valor positivo de  $v_r \approx 0.01$ . Daí em diante, a partícula torna a afastar-se indefinidamente do eixo axial. O regime de foco é aproveitável, aproximadamente, desde  $t = 480$  até  $t = 920$ . O deslocamento aproveitável de foco é da ordem de  $\Delta z = 5\sigma_z$ . Em suma, a experiência exibida na FIG. 3.1.4 mostra que a partícula é acelerada de menos de 60% para mais de 99% de  $c$  e permanece a uma distância radial menor do que 10%  $\sigma_r$  por um intervalo longitudinal da ordem de  $5\sigma_z$  durante, aproximadamente,  $\Delta t = 440$ . Levando os números para o SI, supondo o intervalo de microondas para a onda, com o número de onda ajustado para a ordem de  $k \sim 10^2 \text{ m}^{-1}$  e, portanto, a frequência para  $\omega \sim 10^{10} \text{ rad/s}$  calcula-se, aproximadamente, um deslocamento longitudinal da ordem

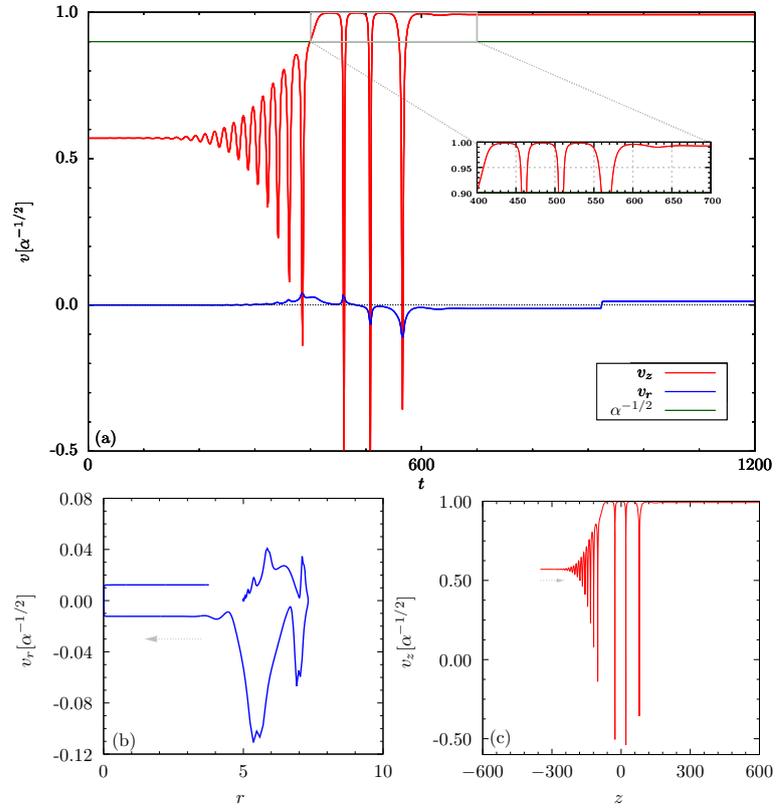


FIG. 3.1.4: (a) Evolução temporal das velocidades radial (azul) e longitudinal (vermelho). Espaço de fase (b) radial e (c) longitudinal. Parâmetros utilizados:  $v_{0z} = 0.57 \alpha^{-1/2}$ ,  $\sigma = 100.0$ ,  $\sigma_r = 50.0$ ,  $\alpha = 0.81$  e  $r_0 = 5.0$ . ( $r_{\min} = 0.0096$ )

de  $\Delta z \sim 5$  m durante pouco mais de  $0.04 \mu\text{s}$ , dos quais a partícula permanece a menos de  $r_0 = 5$  cm do eixo axial por  $0.03 \mu\text{s}$ . A distância radial mínima calculada pela simulação foi de  $130 \mu\text{m}$  ao eixo de propagação da onda na iminência do salto de velocidade radial de negativa para positiva.

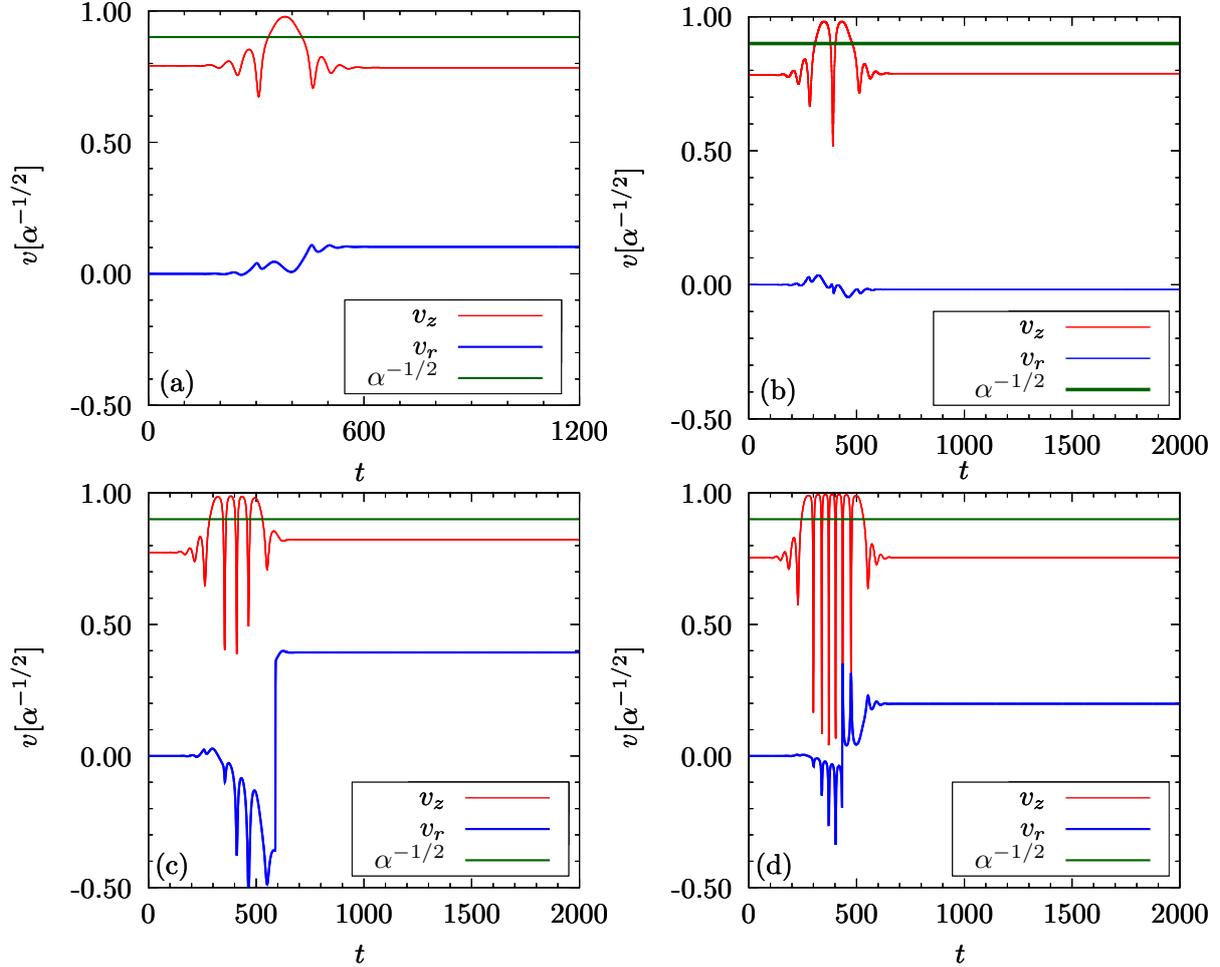


FIG. 3.1.5: Os quadros (a), (b), (c) e (d) mostram a evolução temporal da velocidade longitudinal (vermelho) e radial (azul) da partícula para os parâmetros  $\alpha = 0.81$ ,  $\varphi_0 = 1.0$ ,  $\sigma_z = 100$ ,  $\sigma_r = 50$ , (a)  $r(t=0) = 76.59$  e  $v_z(t=0)[\alpha^{-1/2}] = 0.791$ , (b)  $r(t=0) = 68.86$  e  $v_z(t=0)[\alpha^{-1/2}] = 0.7824$ , (c)  $r(t=0) = 57.98$  e  $v_z(t=0)[\alpha^{-1/2}] = 0.7738$  e (d)  $r(t=0) = 8.8$  e  $v_z(t=0)[\alpha^{-1/2}] = 0.7544$ . Esse conjunto de parâmetros é representado pelos pontos 5a, 5b, 5c e 5d no mapa FIG. 3.1.1.

A ejeção extremamente eficiente em termos acelerativos ocorre porque a partícula atinge a região de equilíbrio (onde o potencial é atenuado e passa a não mais afetar seu movimento) em tempo que experimenta velocidade próxima a um dos picos de oscilação em torno da linha de ressonância. Porém, pode ser que isto não ocorra. Se a partícula atingir a região de equilíbrio com velocidade longe do máximo da oscilação em torno da velocidade de ressonância, não estará experimentando o regime acelerado mas, sim, o passante. A seguir, há quatro situações em que este fenômeno é observado. Os quadros (a), (b), (c) e (d) da FIG 3.1.5 correspondem, respectivamente, aos pontos rotulados de **5a**, **5b**, **5c** e **5d** presentes no mapa FIG. 3.1.1. Os quatro pontos localizam-se sobre a matriz de regiões escuras que poluem o regime de aceleração. Como esperado, em todos os casos a velocidade longitudinal final da partícula não é superior a velocidade de ressonância e é próxima a velocidade longitudinal inicial de injeção. Ou seja, se o propósito é acelerar a partícula, são pontos que representam a dinâmica ineficiente e devem ser evitados. Como prometido, os presentes gráficos permitem o estudo do número de oscilações em torno da velocidade de ressonância após a captura. A ordem alfabética do rótulo dos pontos é acompanhada pela ordem decrescente da velocidade longitudinal inicial e da coordenada radial inicial. Como anteriormente mencionado, a matriz intercalada de meias-luas claras e escuras parece desenhar linhas oblíquas para a direita que passam pelos vértices dessas figuras. Os pontos tratados foram escolhidos de maneira a seguir uma dessas linhas. O número de oscilações em torno da velocidade de ressonância após a captura é revelado ao contar com atenção quantas meias-luas claras encimam cada um dos pontos. Uma oscilação para o ponto **5a** que encima uma meia-lua clara, duas oscilações para o ponto **5b** que encima duas

meias-luas claras, quatro oscilações para o ponto **5c** que encima quatro meias-luas claras e, finalmente, sete oscilações para o ponto **5d** que encima sete meias-luas claras. Ou seja, seguindo uma das linhas imaginárias, o número de oscilações após a captura é acrescido de uma unidade para cada uma meia-lua clara que encima a meia-lua escura visitada.

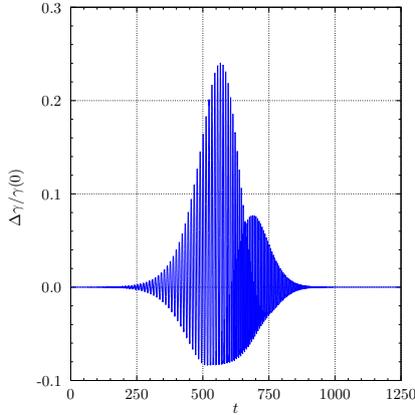


FIG. 3.1.6: Evolução temporal do ganho percentual de energia cinética da partícula para  $\sigma = 100.0$ ,  $\sigma_r = 50.0$ ,  $\alpha = 0.81$ ,  $v_{0z} = 0.4\alpha^{-1/2}$  e  $r_0 = 5.0$ .

partícula ( $t \rightarrow \infty$ ) e o valor calculado no instante inicial ( $t = 0$ ), i.e,  $\Delta\gamma = \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) - \gamma(0)$ . Portanto, lembrando da expressão (3.1.4),  $\gamma(0) = \gamma(\infty) \Rightarrow v_{0z}^2 = v_{fz}^2 + v_{fr}^2$ . As componentes poloidais inicial e final da velocidade da partícula não precisam ser, literalmente, levadas em conta pois seus valores são desprezíveis frente aos atuais valores de velocidade nas outras dimensões. De fato, da FIG 3.1.2, os valores finais das componentes de velocidade longitudinal e radial são, respectivamente,  $v_z \approx -0.19$  e  $v_r \approx 0.35$  que quando operados da maneira  $\sqrt{(-0.19)^2 + (0.35)^2} \approx 0.4$  reproduzem exatamente a velocidade longitudinal inicial da partícula. Para a situação da FIG 3.1.3 observa-se o mesmo. Enquanto a velocidade radial cresce para  $v_r \approx 0.24$  a longitudinal decresce até atingir  $v_z \approx 0.32$  de modo que se calcula  $(0.4)^2 = (0.32)^2 + (0.24)^2$  e se sustenta a conservação supracitada entre a energia cinética inicial e final da partícula. Tal fato não é mera coincidência. A experiência exibida na FIG.3.1.7 nos permite concluir que, desde que no regime reflexivo ou passante, a partícula não apresenta ganho líquido de energia cinética. Isto se justificará pelo formalismo da futura versão 3D da aproximação ponderomotriz, já que a velocidade longitudinal máxima experimentada pela partícula é muito menor do que a velocidade de ressonância e, portanto, vigora o regime ponderomotivo.

Concordando com o mapa FIG.3.1.1, na FIG. 3.1.7 (cujo gráfico foi gerado utilizando 3000 pontos) nota-se principalmente que: (i) até as proximidades de  $v_{0z} = 0.55$  não há ganho líquido de energia cinética e este corresponde exatamente ao intervalo de velocidades de injeção para as quais a partícula não experimenta o regime de aceleração; (ii) na vizinhança de  $v_{0z} = 0.6$  o ganho percentual de energia cinética é máximo (atingindo até 750%) e (iii) a medida que a velocidade de injeção cresce o ganho decresce, com exceção de alguns pontos isolados que caem em  $\Delta\gamma = 0$ . Estes correspondem exatamente àquelas regiões escuras de ineficiência que poluem a região de aceleração vistas anteriormente. Tais regiões são, na verdade, regiões de regime passante. Portanto, está-se diante de um sintoma de conservação que é uma característica intrínseca da natureza do sistema. Nos regimes reflexivos e passante, a energia cinética não é um valor conservado ao longo de todo movimento, mas, sim, entre o estágio inicial e final da dinâmica.

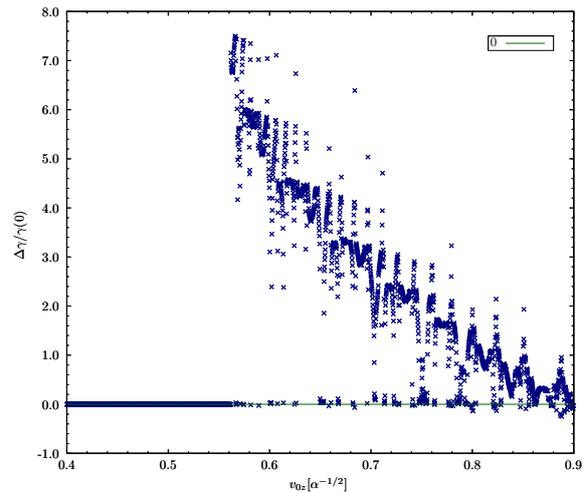


FIG. 3.1.7: Ganho percentual de energia cinética vs. velocidade inicial da partícula. Parâmetros:  $\sigma = 100.0$ ,  $\sigma_r = 50.0$ ,  $\alpha = 0.81$ ,  $\varphi_0 = 1.0$  e  $r_0 = 5.0$ .

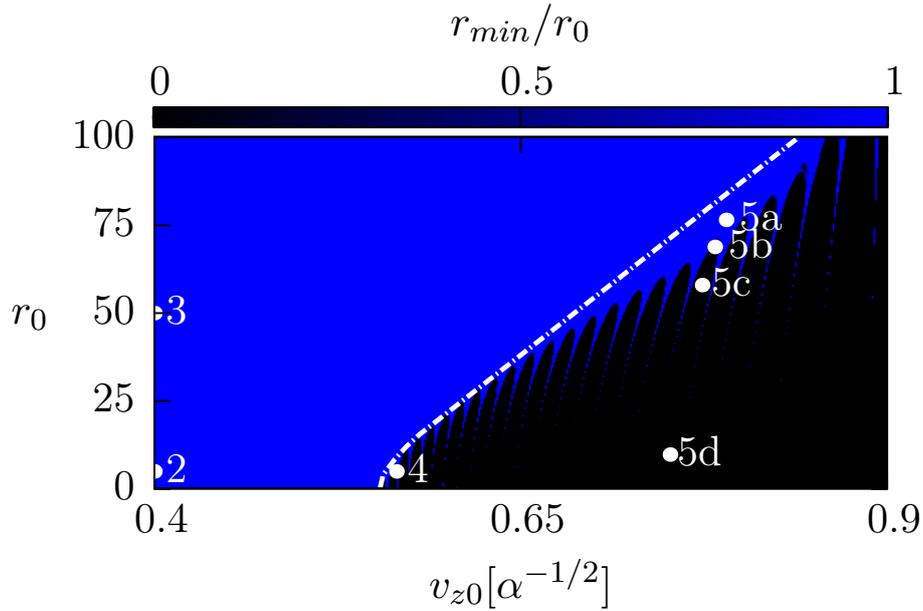


FIG. 3.1.8: Mapa de parâmetros do valor mínimo do quociente  $r(t)/r_0$  para o conjunto de parâmetros  $\alpha = 0.81$ ,  $\varphi_0 = 1.0$ ,  $\sigma_z = 100$  e  $\sigma_r = 50$ . No eixo horizontal está representado a velocidade longitudinal inicial da partícula e no vertical a coordenada radial inicial. A cor preta (azul) corresponde à dinâmica de focagem (não focagem). A linha pontilhada branca é a linha de transição entre os regimes de reflexão/passagem e de aceleração.

A menos do ponto **5a**, cuja dinâmica se expõe no quadro (a) da FIG. 3.1.5, os demais pontos apresentam o regime  $\dot{r} < 0$  de focagem por um certo intervalo de tempo. Esta observação levanta as questões: Para quais conjuntos de parâmetros é possível observar a focagem da partícula? E destes, quais se enquadram, também, no regime de aceleração? Para responder, fez-se um mapa de parâmetros que exhibe o valor mínimo do quociente  $r(t)/r_0$  ao longo da dinâmica para cada par de valores da coordenada radial inicial e velocidade longitudinal inicial. O resultado é exibido na FIG. 3.1.8. A proximidade da cor azulada indica que o valor mínimo de distância ao eixo axial que a partícula experimenta é o próprio valor inicial da coordenada radial, i.e, a partícula só faz afastar-se dele e, portanto, está fora do regime de focagem. Já a proximidade da cor preta indica que a coordenada radial mínima experimentada pela partícula é próxima a  $r = 0.0$ , o limite imposto pelo sistema de coordenadas cilíndrico, e indica que a dinâmica da partícula respectiva a esta cor é a de focagem, portanto. Os pontos rotulados em branco são exatamente os mesmos presentes no mapa FIG 3.1.1, bem como a linha pontilhada branca é a linha de transição entre os regimes de reflexão/passagem e de aceleração vista nesse mapa. Observando o mapa da FIG. 3.1.8, é claro que prevalecem as situações extremas azul ou preto. O mais notável é o seguinte: o regime de focagem está em absoluto contido na região de aceleração e a domina quase que unanimemente, a exceção de uma zona estreita próxima à beira da linha de transição. É previsível, portanto, que a dinâmica da partícula referente ao ponto **5a** do mapa FIG 3.1.1 não apresente focagem para intervalo de tempo algum, pois este ponto localiza-se exatamente sobre a região de aceleração não contemplada pela coloração azul que indica a focagem. Diferentemente, prevê-se para os demais pontos **5b**, **5c** e **5d** o regime de focagem, pois estão numa região preenchida pelo preto. É claro que estamos, imprudentemente, referindo-nos à região à direita da linha branca como região de aceleração. De fato é, mas deve ser resguardada aquela matriz de regiões que correspondem ao regime passante. É o caso para a dinâmica representada pelos quatro pontos **5** explorados. De sorte, a pequena zona de não focagem inserida dentro da de aceleração é mais volumosa em pontos distantes da região de maior eficiência aceleradora, que é a região imaginária centrada em  $(r_0, v_{z0}) = (12.5, 0.6\alpha^{-1/2})$ . Próximo a essa região de máxima eficiência, a boa notícia é que a área correspondente a focagem é maior do que a sua inversa. Assim, entende-se que a situação mais geral é a aceleração em comunhão da focagem. A aceleração desacompanhada de focagem é uma exceção ao movimento acelerado. Na pequena região onde este fenômeno faz-se presente, durante a captura da partícula (na vizinhança de  $z = 0$ ) o valor médio do termo  $\cos(z - t)$  é negativo e o potencial tem caráter atrativo. Isto implica que o valor médio de  $dp_r/dt$  é também negativo. Mas, como tanto a velocidade radial quanto a coordenada radial antes da captura são consideradas grandes nessa região, o valor médio negativo não é suficiente para diminuir o valor da coordenada radial e focar a partícula. Esta parece ser uma boa justificativa para a existência dessa região. Corroborando com esta análise, se o valor da coordenada radial inicial decresce, então a

partícula é acelerada e focalizada simultaneamente. O mapa FIG. 3.1.8 permite concluir que, além de ser acelerada espontaneamente independentemente de fases iniciais, a partícula é, também, espontaneamente focada em direção ao eixo axial por um certo intervalo de tempo aproveitável. A situação excelente seria aquela onde a focagem da partícula se estendesse pelo maior intervalo de tempo possível dentro de um intervalo de distância longitudinal fisicamente aceitável.

Até aqui, a amplitude máxima de potencial foi considerada fixa em  $\varphi_0 = 1.0$ . Porém, para uma exploração completa do sistema tratado neste capítulo é preciso que estudemos os efeitos da mudança deste parâmetro. Para tanto, fez-se um mapa que exhibe a velocidade longitudinal de ejeção da partícula para diferentes valores de  $\varphi_0 \in (0, 2]$  e de velocidade longitudinal inicial no intervalo  $v_{z0} \in [0.4, 0.9]$ . O resultado é mostrado na FIG 3.1.9. O mapa foi construído utilizando o conjunto de parâmetros  $\alpha = 0.81$ ,  $\sigma_z = 100.0$ ,  $\sigma_r = 50.0$  e  $r_0 = 5.0$ . As mesmas três regiões de comportamento são encontradas. Devido a semelhança entre o presente mapa e o feito anteriormente para a versão unidimensional (FIG 2.1.1), as regiões de mesma cor do mapa caracterizam o mesmo regime: azulada, o reflexivo; tons de cinza, o passante e amarelada/alaranjada/avermelhada, o acelerador. A mesma matriz de meias-luas claras e escuras respectivas ao regime passante é observada na região aceleradora.

Mais uma vez, como na versão unidimensional do sistema, o valor máximo de amplitude da onda só é decisivo no processo de determinação da velocidade mínima necessária para a qual a partícula encontra-se no regime de aceleração, aproximadamente, na região  $(\varphi_0, v_{z0}) \in (0.0, 0.4) \times (0.55, 0.9)$ . E nesta, a velocidade mínima referida decresce com o aumento da amplitude máxima de potencial. Fora desta, o limite entre os regimes reflexivo, passante e acelerador independe da amplitude de potencial e é uma reta vertical imaginária que passa por, aproximadamente,  $v_{z0} = 0.55\alpha^{-1/2}$ . O regime passante se extingue para  $\varphi_0 > 1.0$  e só se faz presente acima disso nas regiões escuras em forma de meia-lua mescladas à região de aceleração. O olhar atento verá uma região branca delgada e oblíqua presente no mapa caracterizada pelo valor próximo ao zero de velocidade longitudinal final. Quando nesta região, a partícula presencia a transferência total de energia cinética na forma longitudinal para a radial ( $v_{fz} = 0$  e  $v_{rf} = v_{z0}$ ). Nesse caso, a partícula é altamente frenada na direção longitudinal.

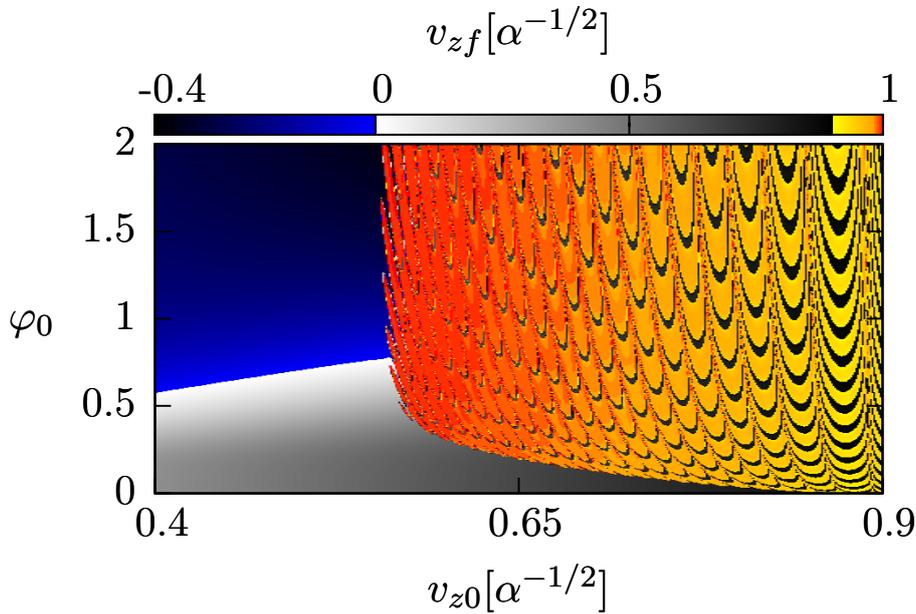


FIG. 3.1.9: Mapa da velocidade longitudinal de ejeção vs.  $\varphi_0$  para  $\sigma_z = 100.0$ ,  $\sigma_r = 50.0$ ,  $\alpha = 0.81$  e  $r_0 = 5.0$ . O eixo horizontal exibe a velocidade inicial de injeção da partícula enquanto o eixo vertical a amplitude máxima de potencial. As velocidades são exibidas em unidades de  $\alpha^{-1/2}$ .

Durante as simulações, fixou-se  $\alpha = 0.81$ . Como mostrado na versão unidimensional do presente sistema, se o valor da velocidade de fase da onda é acrescido, isto é, aumentando o valor de  $\alpha$ , o menor valor necessário para localizar a partícula no regime acelerador diminui. Apesar de os limites entre as regiões de diferentes comportamentos serem modificados, a física por trás de todo processo não é modificada. Por esta razão, o parâmetro  $\alpha$ , assim como os parâmetros  $\sigma_z$  e  $\sigma_r$ , deve ser encarado e entendido como um fator de escala.

### 3.2 Aproximação ponderomotriz do sistema tridimensional

As soluções de posição e momentum da partícula calculadas na seção anterior, dentro do regime não ressonante, apresentam um sintoma generalizado: assim como na precedente versão unidimensional, existe uma sequência de pequenas vizinhanças de pontos no espaço de configuração e de fase onde há grande variação da referida variável em estudo. Essa observação nos permite inferir novamente que há um comportamento médio, de baixa frequência, ligados a outro comportamento de frequência superior. Reservou-se esta seção ao interesse de investigar as soluções por intermédio de um conjunto autossuficiente de novas variáveis cuja frequência de oscilação é baixa comparada às frequências de oscilação das variáveis do sistema original. A descrição da dinâmica será responsabilizada única e exclusivamente a um novo conjunto de coordenadas que devem representar os valores médios das soluções. Essas novas coordenadas serão eleitas, mais uma vez, via tecnologia das Transformações Canônicas. Indicaremos os novos momenta conjugados transformados às coordenadas  $r$ ,  $\theta$  e  $z$ , respectivamente, como  $P_r$ ,  $P_\theta$  e  $P_z$  e as novas coordenadas como  $R$ ,  $\Theta$  e  $Z$  cada uma fazendo correspondência com a sua coordenada escrita na forma minúscula. Porém, deve-se fazer algumas observações importantes para simplificar a discussão. No formalismo do sistema original, o momentum conjugado à coordenada  $\theta$  mostrou-se uma constante de movimento e não há situação mais simples do que esta. Portanto, é inteligente construir a transformação canônica de tal modo que o momento conjugado a coordenada  $\theta$  não se modifique, para que não percamos essa informação valiosa de simetria. Também, o movimento médio da partícula ao longo das coordenadas  $\theta$  e  $r$  mostrou-se fracamente oscilatório no entorno de uma, então, posição média. Ao menos, menos significativamente do que para a outra coordenada do trio, que é o que interessa. Dessa maneira, não é nosso interesse que modifiquemos estas coordenadas também. Em suma, a transformação canônica deve introduzir uma nova coordenada e momentum somente com respeito à coordenada  $z$  e momentum  $p_z$ . Quer-se verificar, então, que haja um termo responsável por introduzir informações do caráter lento de escala de tempo somente para a coordenada  $z$  e momentum  $p_z$ . A transformação canônica deve manter inalteradas as coordenadas  $r$  e  $\theta$  bem como os momenta conjugados a estas. Ou seja, se quer a identidade das variáveis originais e transformadas para

$$r = R, \quad p_r = P_r, \quad \theta = \Theta, \quad \text{e} \quad p_\theta = P_\theta,$$

e associar para a coordenada  $z$  e momentum  $p_z$  variáveis de baixa frequência que, mediante adequada correção que mencione as escalas lentas de tempo, reproduzam os valores das originais. O que se fará a seguir é a dedução da aproximação ponderomotriz feita no Capítulo 2 em uma versão tridimensional. Introduzir-se-á, mais uma vez, novas funções  $h_z$  e  $h_{p_z}$  que contém somente informações da escala rápida de tempo, respectivamente à posição  $z$  e ao momentum  $p_z$ , identificadas como

$$z = Z + h_z \quad \text{e} \quad p_z = P_z + h_{p_z}. \quad (3.2.1)$$

tais que tiram de responsabilidade das variáveis médias o trato das altas frequências. Demos proveito à transformação

$$(r, \theta, z, p_r, p_\theta, p_z) \rightarrow (R, \Theta, Z, P_r, P_\theta, P_z)$$

utilizando uma função geradora escolhida como

$$F(r, \theta, z, P_r, P_\theta, P_z, t) = rP_r + \theta P_\theta + zP_z + f(r, z, P_r, P_\theta, P_z, t) \quad (3.2.2)$$

que, mais uma vez, a menos da parcela  $f(r, z, P_r, P_\theta, P_z, t)$ , é a Transformação Canônica Identidade. A função  $f(r, z, P_r, P_\theta, P_z, t)$  é, por hipótese, contínua e suficientemente derivável e, novamente, é sob ela que se deposita a esperança de obter uma função hamiltoniana transformada que seja isenta de termos que mencionem a escala rápida de tempo. As equações que fabricarão a transformação canônica dada a função geradora são

$$Z = \frac{\partial F}{\partial P_z}, \quad p_z = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad R = \frac{\partial F}{\partial P_r}, \quad p_r = \frac{\partial F}{\partial r}, \quad \Theta = \frac{\partial F}{\partial P_\theta}, \quad p_\theta = \frac{\partial F}{\partial \theta}, \quad \text{e} \quad \mathcal{K} = \mathcal{H} + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (3.2.3)$$

Aqui,  $\mathcal{K}$  é a função hamiltoniana transformada. Como previsto, esta função geradora dará origem a uma transformação canônica que manterá inalterado o momentum  $p_\theta$ . Isto é evidente, porque a parcela  $f(r, z, P_r, P_\theta, P_z, t)$  não depende explicitamente da coordenada  $\theta$ . Mas não é gratuitamente que ganhamos o mesmo para o momento  $p_r$  e nem para as coordenadas  $r$  e  $\theta$ . O problema se resolveria se considerássemos que é possível atingir nosso objetivo fazendo uso de uma função que tivesse unicamente a dependência  $f = f(z, P_z, t)$ . Uma restrição dessa magnitude, infelizmente, mostrou-se inviável. Alternativamente, a consideração de que certas derivadas da função  $F$  tal qual exibida em (3.2.2) são de

ordens de grandeza muito inferior à outras, resolveu o problema. Assim, não se reproduzirá, a rigor, uma transformação identidade para as coordenadas desejadas, mas algo próximo e, o que é importante, eficaz. A alteração significativa se dará para a coordenada  $z$  e seu respectivo momentum. Evocando a função geradora (3.2.2), segue a transformação como

$$Z = \frac{\partial F}{\partial P_z} = z + \frac{\partial f}{\partial P_z}, \quad p_z = \frac{\partial F}{\partial z} = P_z + \frac{\partial f}{\partial z} \quad (3.2.4)$$

e para as demais, a rigor, seguiria a transformação

$$R = \frac{\partial F}{\partial P_r} = r + \frac{\partial f}{\partial P_r}, \quad p_r = \frac{\partial F}{\partial r} = P_r + \frac{\partial f}{\partial r}, \quad \Theta = \frac{\partial F}{\partial P_\theta} = \theta + \frac{\partial f}{\partial P_\theta}, \quad \text{e } p_\theta = \frac{\partial F}{\partial \theta} = P_\theta.$$

Porém, considerando que as derivadas  $\frac{\partial f}{\partial P_r}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial r}$  e  $\frac{\partial f}{\partial P_\theta}$ , que têm o papel de corrigir os valores das respectivas variáveis originais para o valor das transformadas, tem ordem de grandeza muito inferior tanto a, respectivamente,  $r$ ,  $P_r$  e  $\theta$ , quanto a  $\frac{\partial f}{\partial P_z}$  e  $\frac{\partial f}{\partial z}$ , a transformação se simplifica para a identidade na forma

$$r = R, \quad p_r = P_r, \quad \theta = \Theta, \quad \text{e } p_\theta = P_\theta,$$

que é exatamente a de interesse, onde há identidade entre as variáveis do sistema completo e do mediante aproximação ponderomotriz. O hamiltoniano se transformará da forma

$$\mathcal{K} = \mathcal{H} + \frac{\partial F}{\partial t} = \mathcal{H} + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (3.2.5)$$

Como encorajado pela versão unidimensional da presente aproximação, tomemos  $\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{\partial f}{\partial t}$ . Cruzando estas equações com a observação feita em (3.2.1), percebe-se que as quantidades responsáveis pela contenção das escalas lentas de tempo -  $h_z$  e  $h_{pz}$  - são identificadas como sendo as derivadas da função  $f(r, z, P_r, P_\theta, P_z, t)$ , respectivamente com relação a  $P_z$  e a  $t$  (a rigor, está última seria com relação a  $z$ ) exatamente como na versão 1D. Ou seja, identifica-se

$$h_z = -\frac{\partial f}{\partial P_z} \quad \text{e} \quad h_{pz} = -\frac{\partial f}{\partial t}. \quad (3.2.6)$$

As quantidades médias, como enfaticamente lembrado, não devem conter termos de alta frequências. Assim, essa versão tridimensional da função  $f$  tem também a missão de resguardar em si todo e qualquer termo desta natureza. A sua construção procede identicamente à da sua antiga versão. O andamento da versão tridimensional da aproximação ponderomotiva se dá de maneira idêntica a do unidimensional feita no Capítulo 2. A versão tridimensional do fator relativístico  $\gamma(r, p_r, p_\theta, p_z)$  se transforma como, partindo de (3.1.9) e usando (3.2.1)

$$\gamma(r, p_r, p_\theta, P_z) = \sqrt{1 + \frac{1}{\alpha} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + (P_z - h)^2 \right)}, \quad (3.2.7)$$

onde definiu-se  $h = \partial f / \partial t$ . A ideia é, mais uma vez, expandir em Série de Taylor o fator  $\gamma$  em torno da região que contém os extremos da função geradora. Dessa maneira,  $\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n h^n$  onde, naturalmente, cada coeficiente da série é uma função dos momenta e de  $r$  obtida por  $\gamma_n = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \gamma}{\partial h^n}$ . Aliada à esta, a expansão da função geradora em torno da amplitude máxima de potencial nula culmina na mesma natureza de expansão para o próprio hamiltoniano. Considerando termos somente até segunda ordem na amplitude máxima, os componentes de alta frequência podem ser removidos do hamiltoniano (3.2.5) através da solução de

$$(\gamma_1 + 1) \frac{\partial f_1}{\partial t} + e^{\left( -\frac{2z^2}{\sigma_z^2} - \frac{2r^2}{\sigma_r^2} \right)} \cos(z - t) = 0 \quad (3.2.8)$$

e

$$(1 + \gamma_1) \frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{\gamma_2}{2} \frac{e^{\left( -\frac{2z^2}{\sigma_z^2} - \frac{2r^2}{\sigma_r^2} \right)} \cos[2(z - t)]}{(1 + \gamma_1)^2} = 0. \quad (3.2.9)$$

Via integração direta com relação ao tempo, obtém-se<sup>1</sup>

$$f_1(z, r, P, t) = \frac{\cos(z - t)}{(\gamma_1 + 1)} e^{\left( -\frac{2z^2}{\sigma_z^2} - \frac{2r^2}{\sigma_r^2} \right)} \quad (3.2.10)$$

<sup>1</sup>A notação P na lista de argumentos das funções quer resumir o conjunto  $\{p_r, p_\theta, P_z\}$ . Como não se faz necessário a consideração de soluções gerais para as funções  $f_n$ , opta-se por escolher as soluções como exibido em (3.2.9).

e

$$f_2(z, r, P, t) = \frac{\gamma_2}{4} \frac{\sin[2(x-t)]}{(1+\gamma_1)^3} e^{\left(-\frac{2z^2}{\sigma_z^2} - \frac{2r^2}{\sigma_r^2}\right)} \quad (3.2.11)$$

donde se conclui a função geradora como

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(z, r, P, t) &= rP_r + \theta P_\theta + zP_z + \varphi_0 \frac{1}{1+\gamma_1} \sin(z-t) \exp\left(-\frac{z^2}{\sigma_z^2} - \frac{r^2}{\sigma_r^2}\right) + \\ &+ \frac{\varphi_0^2}{4} \frac{\gamma_2}{1+\gamma_1} \sin(2z-2t) \exp\left(-\frac{2z^2}{\sigma_z^2} - \frac{2r^2}{\sigma_r^2}\right). \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

A função geradora (3.2.12) fabrica a versão tridimensional do hamiltoniano ponderomotriz tal qual

$$\mathcal{K} = \gamma_0 + \frac{\varphi_0^2}{4} \frac{\gamma_2}{1+\gamma_1} \exp\left(-\frac{2Z^2}{\sigma_z^2} - \frac{2r^2}{\sigma_r^2}\right). \quad (3.2.13)$$

que é isento de qualquer uma das variáveis de alta frequência. Os coeficientes da expansão do fator relativístico são funções apenas dos momenta e da coordenada  $r$ , todos de baixa frequência. Para encerrar sua dedução, só basta calcular a versão tridimensional dos coeficientes da expansão do fator de Lorentz. Para economizar a notação, usar-se-á a definição

$$P^2(r, p_r, p_\theta, P_z) \stackrel{\text{def}}{=} p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + P_z^2. \quad (3.2.14)$$

O termo independente da série é, simplesmente,

$$\gamma_0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{0!} \gamma = \sqrt{1 + \frac{1}{\alpha} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + (P_z - 0)^2 \right)} = \sqrt{1 + \frac{P^2}{\alpha}} \quad (3.2.15)$$

donde se definirá como

$$\sqrt{1 + \frac{P^2}{\alpha}} \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma(P). \quad (3.2.16)$$

pois será, mais uma vez, uma quantidade recorrente e é análoga ao fator relativístico nas coordenadas originais. O coeficiente linear é, então,

$$\gamma_1 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{1!} \frac{\partial \gamma}{\partial h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1/2)}{\sqrt{1 + \frac{1}{\alpha} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + (P_z - h)^2 \right)}} \left[ -\frac{2}{\alpha} (P_z - h) \right] = -\frac{P_z}{\alpha \Gamma} \quad (3.2.17)$$

enquanto o quadrático desenvolve-se como

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1)}{2\alpha\gamma^2} \left[ \gamma \frac{\partial(P_z - h)}{\partial h} - (P_z - h) \frac{\partial \gamma}{\partial h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\alpha\gamma^2} \left[ \gamma - \frac{(P_z - h)^2}{\alpha\gamma} \right] \\ &= \frac{1}{2\alpha\Gamma} \left[ 1 - \frac{P_z^2}{\alpha\Gamma^2} \right] \end{aligned}$$

e conclui-se que os coeficientes da expansão do fator de Lorentz transformado são<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \Gamma, \\ \gamma_1 &= -\frac{P_z}{\alpha\Gamma}, \\ \gamma_2 &= \frac{1}{2\alpha^2\Gamma^3} (\alpha + p_r^2 + p_\theta^2/r^2). \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

<sup>1</sup>De (3.2.16), segue  $\alpha\Gamma^2 - P_z^2 = \alpha + p_r^2 + p_\theta^2/r^2$

Levando os coeficientes (3.2.18) para (3.2.13), a versão tridimensional do hamiltoniano ponderomotivo é

$$K(r, Z, P) = \Gamma + \frac{\varphi_0^2}{4} \frac{\alpha + p_r^2 + p_\theta^2/r^2}{\Gamma (P_z - \alpha\Gamma)^2} \exp\left(-\frac{2r^2}{\sigma_r^2} - \frac{2Z^2}{\sigma_z^2}\right). \quad (3.2.19)$$

Após a remoção dos componentes de alta frequência, o sistema é regido por um hamiltoniano explicitamente independente do tempo. O sistema descrito pelas variáveis de baixa frequência é (assim como previsto, também, pela versão unidimensional do formalismo e esperado genericamente), portanto, conservativo. Conforme visto nas simulações de soluções do sistema completo, a partícula começa e encerra sua dinâmica muito afastada da origem. Nestes extremos,  $Z \gg \sigma_z$  de modo que a parcela de energia potencial é atenuada e a partícula experimenta somente energia significativa na forma cinética. Por isso, no desfecho de sua dinâmica, sua velocidade deixa de oscilar e assume um valor final bem definido. Pela confusão que há entre as variáveis originais e transformadas nestes extremos, podemos empregar o formalismo descrito aqui para estudá-los. Da constância do hamiltoniano transformado segue que, para quaisquer dois instantes de tempo  $t_1 > t_2$ ,

$$\Delta\mathcal{K} = \mathcal{K}(t_2) - \mathcal{K}(t_1) = 0$$

Utilizando os instantes de tempo extremos, conclui-se que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{K}(t) - \mathcal{K}(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma(t) - \Gamma(0) = \Delta\Gamma = 0.$$

Ou seja, quando vigora o regime ponderomotivo, o valor inicial de energia cinética é transmitido para o valor final. Pela confusão entre as variáveis,  $\Gamma(0) = \gamma(0)$  e  $\Gamma(\infty) = \gamma(\infty)$  de modo que, de (3.1.9),

$$\Delta\Gamma = 0 \Rightarrow \Delta\gamma = 0 \Rightarrow v_{0z}^2 = v_{fz}^2 + v_{fr}^2$$

e obtemos a expressão prevista nas simulações: o valor do módulo da velocidade da partícula é transmitido do valor inicial para o final. A velocidade na direção  $\theta$  é desprezível comparada aos valores de velocidade nas outras direções, e, por isso, não a levamos em conta. Com essa interpretação, de que o regime não ressonante é fruto do potencial ponderomotivo, conseguimos entender corretamente como é feita a transferência da velocidade longitudinal inicial para a velocidade radial final da partícula.

### 3.2.1 Equações de evolução da aproximação ponderomotriz tridimensional

Calculada a versão tridimensional do hamiltoniano que rege a dinâmica da aproximação ponderomotiva, atentemos a obtenção das equações de evolução temporal das variáveis de baixa frequência do sistema. Pela tecnologia das transformações canônicas, as equações de Hamilton mantém a mesma exata forma. Desta maneira, para obter as equações que ditam a evolução dinâmica das variáveis médias  $Z$  e  $P_z$  basta que resolvamos

$$\frac{dP_z}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Z} \quad \text{e} \quad \frac{dZ}{dt} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P_z}. \quad (3.2.20)$$

Será nosso interesse, também, obter a velocidade radial prevista pelo formalismo ponderomotivo a fim de compará-la com a mesma previsão feita pelo sistema original. Tal velocidade será referida por  $V_r$  e a equação que a calcula é

$$V_r = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial p_r}. \quad (3.2.21)$$

Começemos pelo movimento longitudinal. A equação que dá a variação temporal do momentum conjugado é mais simples de ser obtida. Envolve apenas uma derivação com respeito a  $Z$  do hamiltoniano, cuja dependência nesta coordenada se concentra unicamente no fator exponencial. Desta maneira, segue diretamente

$$\begin{aligned} \frac{dP_z}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Z} &\Rightarrow \dot{P}_z = -\frac{\varphi_0^2 \alpha}{4} \frac{1}{\Gamma(P_z - \alpha\Gamma)^2} \frac{\partial}{\partial Z} \exp\left(-\frac{2r^2}{\sigma_r^2} - \frac{2Z^2}{\sigma_z^2}\right) \\ &= \frac{\varphi_0^2 \alpha}{4} \frac{\exp\left(-\frac{2r^2}{\sigma_r^2} - \frac{2Z^2}{\sigma_z^2}\right)}{\Gamma(P_z - \alpha\Gamma)^2} \left(\frac{4Z}{\sigma_z^2}\right), \end{aligned}$$

que pode ser reescrito observando a constância do hamiltoniano como

$$\dot{P}_z = \frac{4Z}{\sigma_z^2} (\mathcal{K} - \Gamma).$$

Para efetuar a derivação parcial com respeito a  $P_z$  no hamiltoniano e, eventualmente, na função geradora nos apoiaremos novamente na definição de funções auxiliares. As funções auxiliares no presente caso tridimensional serão análogas a suas precedentes (2.2.21). Definiremos, *mutatis mutandis*,

$$\widetilde{M}_{(n,m)} \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma^n (P_z - \alpha\Gamma)^m, \quad (n, m \in \mathbb{Z}), \quad (3.2.22)$$

onde o diacrítico til quer distinguir a presente versão tridimensional dessas funções de suas correspondentes unidimensionais. Em termos destas funções podemos reescrever o hamiltoniano (3.2.19) como

$$\mathcal{K}(r, Z, P) = \widetilde{M}_{(1,0)} + \frac{\varphi_0^2}{4} (\alpha + p_r^2 + p_\theta^2/r^2) \widetilde{M}_{(-1,-2)} \exp\left(-\frac{2r^2}{\sigma_r^2} - \frac{2Z^2}{\sigma_z^2}\right). \quad (3.2.23)$$

A obtenção da derivada com respeito a  $P_z$  das funções auxiliares exige que saibamos derivar do fator  $\Gamma$ . Facilmente, percebe-se que, da definição (3.2.16),

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial P_z} = \frac{P_z}{\alpha\Gamma}. \quad (3.2.24)$$

A derivada genérica da função auxiliar começa como

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{(n,m)}}{\partial P_z} &= \frac{\partial}{\partial P_z} [\Gamma^n (P_z - \alpha\Gamma)^m] \\ &= \frac{\partial \Gamma^n}{\partial P_z} (P_z - \alpha\Gamma)^m + \Gamma^n \frac{\partial}{\partial P_z} (P_z - \alpha\Gamma)^m \\ &= n\Gamma^{n-1} (P_z - \alpha\Gamma)^m \frac{\partial \Gamma}{\partial P_z} + \Gamma^n m (P_z - \alpha\Gamma)^{m-1} \left(1 - \alpha \frac{\partial \Gamma}{\partial P_z}\right). \end{aligned}$$

Substituindo o resultado (3.2.24), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{(n,m)}}{\partial P_z} &= \frac{nP_z}{\alpha} \Gamma^{n-2} (P_z - \alpha\Gamma)^m + \Gamma^n m (P_z - \alpha\Gamma)^{m-1} \left(1 - \frac{P_z}{\Gamma}\right) \\ &= \Gamma^{n-2} (P_z - \alpha\Gamma)^{m-1} \left[ \frac{nP_z}{\alpha} (P_z - \alpha\Gamma) + m\Gamma(\Gamma - P_z) \right]. \end{aligned}$$

Ou também, da definição (3.2.22),

$$\frac{\partial \widetilde{M}_{(n,m)}}{\partial P_z} = \widetilde{M}_{(n-2,m-1)} \left[ \frac{n}{\alpha} P_z^2 - (n+m) P_z \Gamma + m \Gamma^2 \right]. \quad (3.2.25)$$

A exploração do movimento radial exige que saibamos as derivadas de  $\widetilde{M}_{(n,m)}$  com respeito ao momentum  $p_r$ . Efetuando a derivação, segue

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{M}_{(n,m)}}{\partial p_r} &= \frac{\partial}{\partial p_r} [\Gamma^n (P_z - \alpha \Gamma)^m] \\ &= \frac{\partial \Gamma^n}{\partial p_r} (P_z - \alpha \Gamma)^m + \Gamma^n \frac{\partial}{\partial p_r} (P_z - \alpha \Gamma)^m \\ &= \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial p_r} \right) [n \Gamma^{n-1} (P_z - \alpha \Gamma)^m - \alpha \Gamma^n m (P_z - \alpha \Gamma)^{m-1}] \\ &= \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial p_r} \right) \Gamma^{n-1} (P_z - \alpha \Gamma)^{m-1} [n P_z - \alpha(n+m) \Gamma]. \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

A derivada  $\frac{\partial \Gamma}{\partial p_r}$  é análoga a (3.2.24) e, portanto, segue facilmente que

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial p_r} = \frac{p_r}{\alpha \Gamma}. \quad (3.2.27)$$

Assim, atualizamos (3.2.26) para

$$\frac{\partial \widetilde{M}_{(n,m)}}{\partial p_r} = M_{(n-2,m-1)} p_r \left[ \frac{n P_z}{\alpha} - (n+m) \Gamma \right]. \quad (3.2.28)$$

Para obter as velocidades médias longitudinal e radial basta que atentemos às derivadas da função auxiliar cujo par de índices é  $(-1, -2)$ . Segundo (3.2.25),

$$\frac{\partial \widetilde{M}_{(-1,-2)}}{\partial P_z} = \frac{-\frac{1}{\alpha} P_z^2 + 3 P_z \Gamma - 2 \Gamma^2}{\Gamma^3 (P_z - \alpha \Gamma)^3}, \quad (3.2.29)$$

e, segundo (3.2.28),

$$\frac{\partial \widetilde{M}_{(-1,-2)}}{\partial p_r} = \frac{p_r (-P_z + 3 \alpha \Gamma)}{\alpha \Gamma^3 (P_z - \alpha \Gamma)^3}. \quad (3.2.30)$$

Com estas derivadas, podemos obter a equação de evolução dinâmica da posição média como

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dt} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P_z} &\Rightarrow \dot{Z} = \frac{\partial \Gamma}{\partial P_z} + \frac{\varphi_0^2}{4} (\alpha + p_r^2 + p_\theta^2/r^2) \exp \left( -\frac{2r^2}{\sigma_r^2} - \frac{2Z^2}{\sigma_z^2} \right) \frac{\partial}{\partial P_z} \widetilde{M}_{(-1,-2)} \\ &= \frac{P_z}{\alpha \Gamma} + \frac{\varphi_0^2}{4} (\alpha + p_r^2 + p_\theta^2/r^2) \exp \left( -\frac{2r^2}{\sigma_r^2} - \frac{2Z^2}{\sigma_z^2} \right) \left( \frac{-\frac{1}{\alpha} P_z^2 + 3 P_z \Gamma - 2 \Gamma^2}{\Gamma^3 (P_z - \alpha \Gamma)^3} \right) \\ &= \frac{P_z}{\alpha \Gamma} + (\Gamma - K) \left( \frac{\frac{1}{\alpha} P_z^2 - 3 P_z \Gamma + 2 \Gamma^2}{\Gamma^2 (P_z - \alpha \Gamma)} \right). \end{aligned}$$

A velocidade radial média é obtida pela derivação

$$V_r = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial p_r} \Rightarrow V_r = \frac{\partial \Gamma}{\partial p_r} + \frac{\varphi_0^2}{4} \left[ (\alpha + p_r^2 + p_\theta^2/r^2) \frac{\partial \widetilde{M}_{(-1,-2)}}{\partial p_r} + 2 p_r \widetilde{M}_{(-1,-2)} \right] \exp \left( -\frac{2r^2}{\sigma_r^2} - \frac{2Z^2}{\sigma_z^2} \right)$$

que se simplifica para

$$V_r = \left( \frac{p_r}{\alpha \Gamma} \right) \left\{ 1 + (\mathcal{K} - \Gamma) \left[ \frac{3 \Gamma - P_z/\alpha}{\Gamma (P_z - \alpha \Gamma)} + \frac{2 \alpha \Gamma}{(\alpha + p_r^2 + p_\theta^2/r^2)} \right] \right\}. \quad (3.2.31)$$

As equações que ditam a evolução dinâmica da posição média bem como do momentum conjugado a esta ao longo do eixo de propagação da onda e da velocidade na direção radial segundo a aproximação ponderomotriz são

$$\dot{P}_z = \frac{4Z}{\sigma_z^2} (\mathcal{K} - \Gamma), \quad (3.2.32)$$

$$\dot{Z} = \frac{P_z}{\alpha\Gamma} + (\Gamma - \mathcal{K}) \left( \frac{\frac{1}{\alpha}P_z^2 - 3P_z\Gamma + 2\Gamma^2}{\Gamma^2(P_z - \alpha\Gamma)} \right) \quad (3.2.33)$$

e

$$\dot{r} = \left( \frac{p_r}{\alpha\Gamma} \right) \left\{ 1 + (\mathcal{K} - \Gamma) \left[ \frac{3\Gamma - P_z/\alpha}{\Gamma(P_z - \alpha\Gamma)} + \frac{2\alpha\Gamma}{(\alpha + p_r^2 + p_\theta^2/r^2)} \right] \right\}. \quad (3.2.34)$$

Analisando as equações obtidas podemos entender alguns comportamentos gerais do movimento da partícula quando em vigor o regime ponderomotivo. Nos instantes extremos, injeção ( $t = 0$ ) e ejeção ( $t \rightarrow \infty$ ), a energia da partícula é puramente cinética. Portanto, segue que nestes instante  $\mathcal{K} - \Gamma = 0$ . Isso implica que, de (3.2.32),  $\dot{P}_z = 0$ . I.e., o movimento médio da partícula na direção longitudinal deve se dar fracamente oscilatório nos instantes iniciais e de igual natureza nos finais, porque a velocidade média nesses instantes deve ser constante. De fato, é o observado. Essa velocidade constante, por sua vez, é calculada através de (3.2.33) que se simplifica apenas para  $\dot{Z} = P_z/\alpha\Gamma$ . O movimento na direção radial deve se confundir com o previsto pelas equações do sistema completo, porque, de (3.2.34), na situação em que  $\mathcal{K} - \Gamma = 0$ , a velocidade radial da partícula obedece a mesma equação (3.1.11) prevista pelo sistema original. Ainda, como não há previsão de altas frequências associadas ao movimento radial, a equação da velocidade radial da presente aproximação e do sistema original devem diferir por um valor muitíssimo pequeno mesmo para os instantes de tempo intermediários entres os extremos. Este valor deverá referir-se, exatamente, ao pequeno desvio da média que a velocidade radial da partícula experimenta.

### 3.2.2 Simulação de soluções ponderomotriz e comparação de resultados

Esta subseção destina-se a expor a solução numérica das equações (3.2.32), (3.2.33) e (3.2.34) e comparar com a solução das equações das variáveis do sistema original. Ao lado, a FIG 3.2.1 compara as soluções de velocidade longitudinal e radial do sistema original (curvas, respectivamente, em vermelho e em azul) com as respectivas velocidades calculadas pela solução das equações obtidas pela aproximação ponderomotriz para  $v_{0z} = 0.3 \alpha^{-1/2}$ . As curvas pontilhadas superior e inferior são os envelopes da curva de velocidade longitudinal previstos pela, respectivamente, maximização e minimização das derivadas temporais parciais da função geradora. Estas curvas são calculadas exatamente da mesma maneira que na versão unidimensional. A curva pontilhada sobre a curva azul (a velocidade radial do sistema original) é a curva de velocidade radial prevista pela aproximação ponderomotriz. Percebemos que as curvas concordam muito satisfatoriamente. Esta concordância assegura a tomada do setor de variáveis radiais como diretamente de baixa frequência. Igualmente satisfatório é o casamento entre a curva em cinza com a curva em preto sólida. Estas curvas, são, respectivamente, a média móvel da velocidade longitudinal calculada pelo sistema original e a velocidade longitudinal prevista pelo hamiltoniano ponderomotivo.

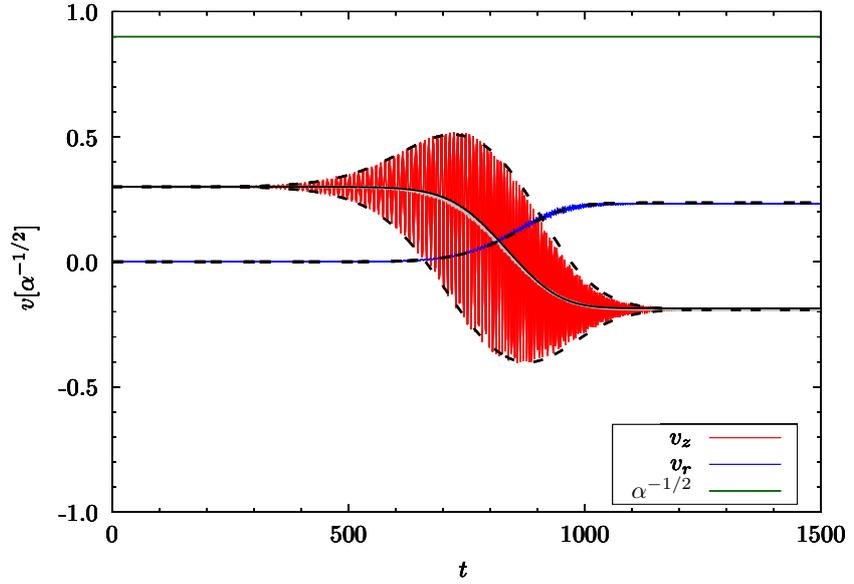


FIG. 3.2.1: Comparação entre a evolução temporal da velocidade longitudinal (vermelho) e radial (azul) da partícula prevista pelo sistema original e ponderomotivo (curvas pretas sólida e pontilhadas). Parâmetros  $\alpha = 0.81$ ,  $\varphi_0 = 1.0$ ,  $\sigma_z = 100$ ,  $\sigma_r = 50$  e velocidade inicial  $v_{0z} = 0.3 \alpha^{-1/2}$ .

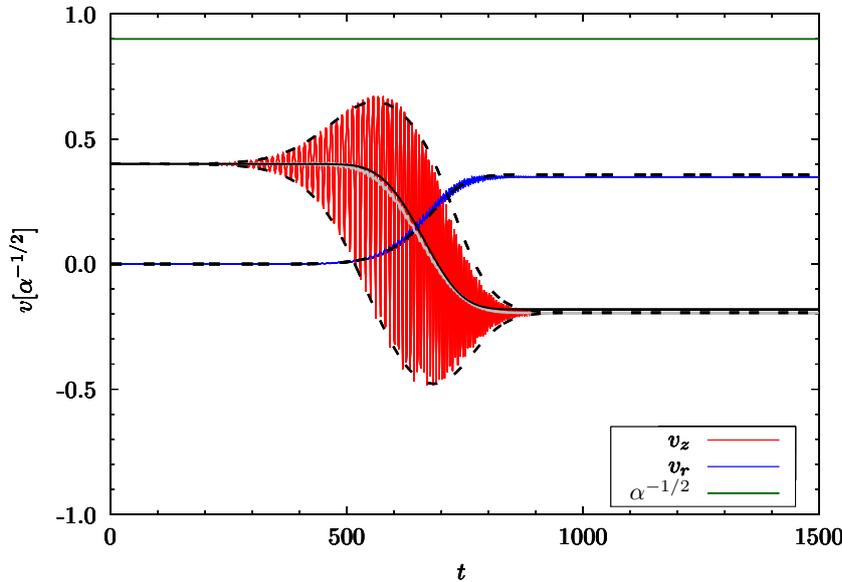


FIG. 3.2.2: Comparação entre a evolução temporal da velocidade longitudinal (vermelho) e radial (azul) da partícula prevista pelo sistema original e ponderomotivo (curvas pretas sólida e pontilhadas). Parâmetros  $\alpha = 0.81$ ,  $\varphi_0 = 1.0$ ,  $\sigma_z = 100$ ,  $\sigma_r = 50$  e velocidade inicial  $v_{0z} = 0.4 \alpha^{-1/2}$ .

A previsão ponderomotiva de velocidade radial acompanha muito bem a previsão do hamiltoniano original, bem como a curva da média móvel de velocidade longitudinal (em cinza) prevista pelo hamiltoniano original acompanha a curva de velocidade longitudinal ponderomotiva. A maior proximidade da velocidade longitudinal máxima a velocidade de ressonância atingida pela partícula lançada com

A FIG 3.2.2 exhibe o mesmo tipo de comparação entre as dinâmicas do sistema original e ponderomotivo para o ponto rotulado por **2** do mapa FIG. 3.1.1. Trata-se da mesma figura mostrada no quadro (a) da FIG. 3.1.2, mas em contraste das curvas revistas pelo hamiltoniano ponderomotivo, mostrado pelas linhas pontilhadas em preto. A partícula é lançada com velocidade longitudinal inicial igual a  $v_{0z} = 0.4 \alpha^{-1/2}$ . Mais uma vez, os envelopes previstos pelo hamiltoniano ponderomotivo correspondem muito satisfatoriamente ao envólucro da curva de velocidade longitudinal prevista pelo hamiltoniano original.

$v_{0z} = 0.4c$  do que com  $v_{0z} = 0.3c$  acarreta em uma pequena perda de qualidade na descrição ponderomotiva. Tal resultado é esperado visto que flagra a validade da aproximação que se propõe. Mesmo assim, a previsão ainda é boa o suficiente. É possível que a consideração de maiores ordens na aproximação seja capaz de curar tal perda. Entretanto, não se pode garantir a cura uma vez que a falha da aproximação ponderomotiva é devida ao afastamento da dinâmica a este regime.

A comparação entre as dinâmicas referente ao ponto rotulado por **3** no mapa de parâmetros FIG. 3.1.1 é exibido na FIG. 3.2.3. Trata-se da mesma figura mostrada no quadro (a) da FIG. 3.1.6, mas em contraste das curvas revistas pelo hamiltoniano ponderomotriz. As curvas pontilhadas superior e inferior são os envelopes de velocidade e a que acompanha a curva azul é a velocidade radial prevista pelo hamiltoniano ponderomotriz. A partícula é lançada com a mesma velocidade  $v_{0z} = 0.4 \alpha^{-1/2}$ , porém, à distância inicial do eixo de propagação da onda de  $r_0 = 50.0$ . A partícula encontra-se em regime pas-

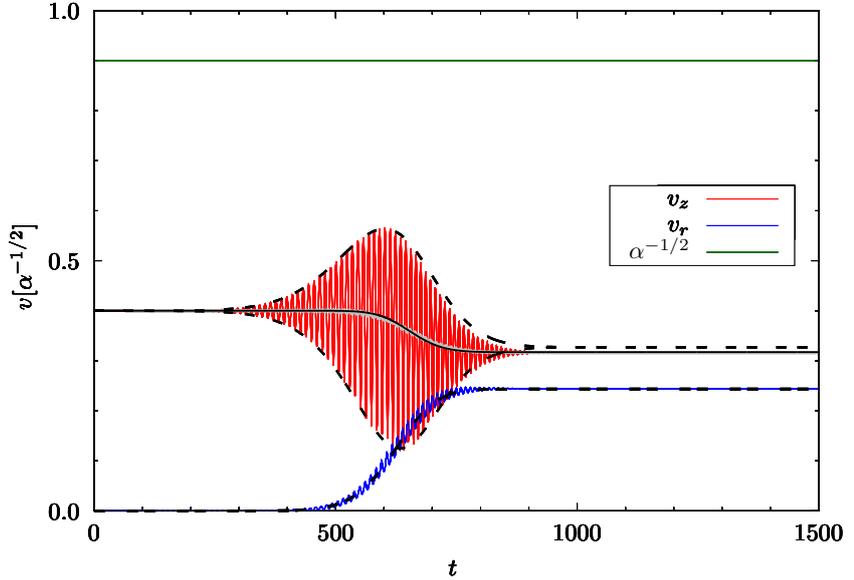


FIG. 3.2.3: Comparação entre a evolução temporal da velocidade longitudinal (vermelho) e radial (azul) da partícula prevista pelo sistema original e ponderomotivo (curvas pretas sólida e pontilhadas). Parâmetros  $\alpha = 0.81$ ,  $\varphi_0 = 1.0$ ,  $\sigma_z = 100$ ,  $\sigma_r = 50$  e velocidade inicial  $v_{0z} = 0.4 \alpha^{-1/2}$ .

sante e o gráfico mostra que a aproximação ponderomotriz descreve satisfatoriamente o movimento da partícula também neste regime. A curva cinza e em preto sólido, que representam, respectivamente, a média móvel da velocidade longitudinal e a mesma prevista pelo hamiltoniano ponderomotivo, concordam muito satisfatoriamente. A distância significativa entre a velocidade máxima longitudinal experimentada pela partícula da velocidade de fase da onda recupera uma certa qualidade entre a média móvel e a previsão de média do formalismo ponderomotivo.

Na situação em que a partícula é capturada pelo potencial e acelerada até próximo a velocidade da luz no vácuo a aproximação ponderomotiva deixa de ter validade, pois nesse regime a dinâmica ponderomotiva dá lugar à dinâmica de aceleração. Os gráficos referentes a essa situação, como FIG. 3.1.3 e FIG. 3.1.4 mostram claramente o limite de validade do regime ponderomotivo e denunciam que o mecanismo de captura se dá devido a quebra deste regime.

## 4 Considerações finais e perspectivas futuras

Nesta dissertação se propôs um modelo alternativo tridimensional de aceleração de partículas carregadas, motivado pela feliz análise do mesmo modelo em sua versão unidimensional. O processo de aceleração de uma partícula de teste baseou-se na presença de uma onda eletrostática de alta frequência e lentamente modulada. A modulação de sua amplitude se dá ao longo da direção de propagação da onda. A onda possui, também, um perfil e amplitude transversal de variação lenta. Ambos perfis de modulação são feitos por funções Gaussianas. Peça-chave da análise do movimento da partícula teste sob a ação da onda aceleradora, os mapas de parâmetros preparados nesta dissertação nos permitiram identificar três possíveis regimes: o regime **reflexivo**, onde a onda funciona como um espelho que reflete a partícula; o regime **passante**, no qual a partícula atravessa a onda eletrostática sem apresentar aceleração significativa; e, por fim, o regime **acelerativo**, em que a partícula é eficientemente acelerada por um ajuste automático da fase relativa de movimento entre ela e a onda.

Uma vez estabelecidos os parâmetros e condições iniciais que localizam a partícula em regime reflexivo ou passante, se propôs uma descrição de movimento baseada em uma aproximação ponderomotiva. Nesta, os componentes de alta frequência responsáveis pelas variações em escala rápida de tempo foram suprimidos. Em seu lugar, os componentes de escala lenta de tempo passam a descrever o movimento da partícula através de um sistema físico remanescente conservativo (como era de se esperar, visto a regência ponderomotiva). Tal sistema provê satisfatórias previsões do valor médio das velocidades longitudinal e radial da partícula. Com este, fomos capazes, também, de prever corretamente a relação entre a sua velocidade de injeção e ejeção. A validade da aproximação ponderomotiva é limitada às regiões que a localizam longe do regime ressonante. A aproximação falha quando a velocidade longitudinal máxima da partícula aproxima-se da velocidade de fase da onda que a acelera. O mecanismo de aceleração manifesta-se através da quebra do regime ponderomotivo. Quando a velocidade longitudinal máxima da partícula alcança a velocidade de fase da onda, a partícula é capturada pelo campo elétrico da onda e acelerada até muitíssimo próximo a velocidade da luz no vácuo. Concomitante à aceleração eficiente, observou-se um comportamento adicional característico deste processo: a focagem da partícula em direção ao eixo de propagação da onda. Sob condições adequadas, enquanto a velocidade da partícula atinge valores tão próximos da velocidade da luz (em tese) quanto se queira, a partícula instala-se muito próxima ao eixo de propagação da onda por um intervalo de tempo aproveitável.

Alguns efeitos devem ser adicionados ao modelo proposto em virtude de dotá-lo da capacidade de prover descrições mais realísticas e prever resultados melhor condizentes com a experimentação. Os efeitos de “*space-charge*” são importantes de levar em conta quando considerarmos um feixe denso de partículas ao invés de uma partícula-teste solitária. A focagem presente no regime de aceleração deverá competir contra a repulsão coulombiana entre as partículas do feixe. A densidade de carga poderia modificar significativamente a intensidade do campo elétrico. Nesse caso, deve-se considerar a dinâmica auto consistente dos campos e densidades de carga. Além disso, o problema de radiação deve ser levado em conta em função dos gradientes de aceleração das partículas. O comportamento batizado de “*uphill acceleration*” por Bauer et al [12] é satisfatoriamente previsto pela abordagem hamiltoniana feita neste trabalho. Por isso, é interessante que futuramente se explore esse aspecto exibindo-o em mais detalhes.

Apesar da simplicidade do modelo proposto, seu estudo providencia sólidas direções de como explorar os aspectos de aceleração concomitante a focagem de uma partícula carregada e revela a fecunda fenomenologia da quebra do regime ponderomotivo.

---

## Referências Bibliográficas

- [1] J. D. Cockcroft and E. T. S. Walton, *Nature* **129**, 649 (1932).
- [2] R. J. Van de Graaff, K. T. Compton and L. C. Van Atta, *Phys. Rev.* **43**, 149 (1933).
- [3] D. W. Kerst, *Phys. Rev.* **60**, 47 (1941).
- [4] R. Bingham, J. T. Mendonça and P. K. Shukla, *Plasma Phys. Control. Fusion* **46**, R1 (2004).
- [5] R. Bingham, *Phil. Trans. R. Soc. A* **366**, 1749 (2008).
- [6] C. Kamperidis, C. Bellei, N. Bourgeois, M. C. Kaluza, K. Krushelnick, S. P. D. Mangles, J. R. Marques, S. R. Nagel and Z. Najmudin, *Phys. Plasmas* **78**, 433 (2012).
- [7] T. P. Hughes and B. Godfrey, *Phys. Fluids* **29**, 1698 (1986).
- [8] A. Steinhof, *Phys. Res. A* **397**, 371 (1997).
- [9] V. Shiltsev, Y. Alexahin, A. Burov and A. Valishev, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 134802 (2017).
- [10] R. Pakter and F. B. Rizzato, *Phys. Rev. E* **65**, 056503 (2002).
- [11] C. Grebogi and R. G. Littlejohn, *Phys. Fluids* **27**, 1996 (1984).
- [12] D. Bauer, P. Mulser, and W. -H. Steeb *Relativistic Ponderomotive Force, Uphill Acceleration, and Transition to Chaos*, *Physical Review Letters*, Volume 75, Number 25 (1995)  
*Phys. Letts.* **138**, 1 (1986).
- [13] *Introduction to Plasma Physics*, Francis F. Chen (auth.); Springer US, 1995
- [14] R.A. Cairns, D.A. Burton, B. Ersfeld, A. Noble, S. Yoffe, D.A. Jaroszynski. *Ponderomotive force in a travelling wave*, 44<sup>th</sup> EPS Conference on Plasma Physics.
- [15] Russman, F.; Marini, S. ; Peter, E. ; De Oliveira, G. I. ; Rizzato, F. B. . Self focusing in a spatially modulated electrostatic field particle accelerator. *Physics of Plasmas* , v. **25**, p. 023110, 2018.
- [16] S. Marini, E. Peter, G. I. de Oliveira and F. B. Rizzato, *Phys. Plasmas* **24**, 093113 (2017).
- [17] P. K. Shukla, N. N. Rao, M. Y. Yu, and N. L. Tsintsadze, *Phys. Rep.* **138**, 1 (1986).
- [18] J. T. Mendonça, *Theory of Photon Acceleration*. IOP Publishing, Bristol (2001).
- [19] A. van Steenbergen, J. Gallardo, J. Sandweiss, and J.-M. Fang, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2690 (1996).
- [20] L. F. Monteiro, A. Serbeto, K. H. Tsui, J. T. Mendonça, and R. M. O. Galvão, *Phys. Plasmas* **20**, 073101 (2013).
- [21] E. Peter, A. Endler, and F. B. Rizzato, *Phys. Plasmas* **21**, 113104 (2014).
- [22] *Classical Mechanics* (3rd Edition), Herbert Goldstein, Charles P. Poole, John L. Safko; Addison Wesley, 2001