

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

AVALIAÇÃO DA INFLUÊNCIA DA CURVATURA DE ESTRUTURAS NAS FORÇAS E
MOMENTOS RESULTANTES EM ELEMENTOS FINITOS DE CASCA

por

Fabio Augusto Schuh

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, Outubro de 2017

AVALIAÇÃO DA INFLUÊNCIA DA CURVATURA DE ESTRUTURAS NAS
RESULTANTES DE FORÇAS E DE MOMENTOS EM ELEMENTOS FINITOS DE
CASCA

por

Fabio Augusto Schuh
Bacharel em Engenharia Mecânica

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da
Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos
necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Rogério José Marczak

Aprovada por:

Prof. Dr. Felipe Tempel Stumpf, UFRGS

Prof. Dr. Ignacio Iturrioz, PROMEC / UFRGS

Prof. Dr. Oscar Alfredo Garcia de Suarez, UCS

Prof. Dr. Jakson Manfredini Vassoler
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 27 de Outubro de 2017

AGRADECIMENTOS

À CAPES, pelo apoio financeiro e fomento à pesquisa;

À UFRGS, pelo excelente ensino;

Aos professores e colegas de GMap, pelos ensinamentos e suporte;

Ao professor e orientador Rogério José Marczak e aos professores Oscar Alfredo Garcia de Suarez, Ignacio Iturrioz, Felipe Tempel Stumpf e Leandro Luís Corso pelas contribuições ao trabalho e orientações no decorrer do mestrado;

À minha família e amigos pelo apoio, suporte e compreensão.

RESUMO

O trabalho realizado consiste no desenvolvimento das equações pertinentes à teoria de cascas, implementação de programas de elementos finitos em Matlab e resolução de problemas de casca numéricos e analíticos. No desenvolvimento da teoria de cascas é evidenciada a aplicação da curvatura da estrutura no cálculo das forças e momentos resultantes para uma superfície de casca simplificada a uma estrutura localmente bidimensional. O problema de casca é resolvido analiticamente para um caso de curvatura simples e comparado com a resolução por elementos finitos em um programa desenvolvido pelo autor, em que a utilização da curvatura para o cálculo das forças e momentos resultantes é inserida na programação. A análise de elementos finitos é realizada para casos de casca com curvatura simples e dupla curvatura e de duas formas, sendo que a primeira utiliza elementos cujas normais médias são empregadas na montagem da matriz de rigidez, constituindo um elemento de casca e a segunda aplica normais a cada nó de cada elemento, tendo-se assim uma superfície facetada, com comportamento de placa em cada elemento. Os resultados obtidos mostram que o impacto da aplicação da curvatura em geral é pequeno nas regiões mais críticas para as forças e momentos resultantes, como na região de engaste. Porém, algumas regiões da casca apresentam grandes variações, e caso sejam de importância para o usuário, cabe uma análise mais detalhada em que o emprego da curvatura possa ser considerado.

Palavras-chave: Cascas, Elementos finitos, Curvatura.

ABSTRACT

This work presents the development of the shell theory equations, implementation of finite element programs in Matlab and the resolution of numerical and analytical shell problems. Along with the development of the shell theory, the application of the curvature of the structure in the calculation of stress and couple resultants for a shell structure simplified to a bi-dimensional problem become clear. The shell problem is solved analytically, by means of the application of the shell equations in a shell with simple curvature, and this solution is compared with the numerical solution using the finite element program implemented, considering the curvature of the structure for the stress and couple resultants. Finite element analysis is performed for the simple and double curvature cases of shells, and in two distinct ways, the first one considering averaged normals for neighbor elements, which produces shell elements, the second one using normals to each node of each element, which results in locally flat elements, behaving as plates. Results obtained show that the impact of the application of the curvature in the resultants is usually small in the most critical points, such as the crimp. However, some regions of the shell present huge variation, and further analysis is recommended, since the application of the curvature can be important.

Keywords: Shells, Finite element, Curvature.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Revisão bibliográfica	1
1.2	Objetivos	2
2	TEORIA DE CASCAS	3
2.1	Geometria diferencial	3
2.1.1	Curvas no espaço	3
2.1.2	Superfícies.....	5
2.2	Equações fundamentais da teoria de cascas finas	13
2.2.1	Aproximações	13
2.2.2	Coordenadas de um ponto arbitrário da casca	15
2.2.3	Relações cinemáticas	17
2.2.4	Forças e momentos resultantes	25
2.2.5	Equações de equilíbrio.....	27
3	ELEMENTOS FINITOS DE CASCA	38
3.1	Teoria de Elementos Finitos	38
3.1.1	Trabalho virtual externo.....	39
3.1.2	Trabalho virtual interno	39
3.1.3	Definição da Matriz de Rigidez	40
3.2	Sistemas de coordenadas	41
3.2.1	Sistema de coordenadas global	42
3.2.2	Sistema de coordenadas curvilíneo natural.....	42
3.2.3	Sistema de coordenadas local	43
3.2.4	Sistema de coordenadas local nodal	44
3.3	Geometria e deslocamento do elemento	45
3.4	Tensões e deformações	46
3.5	Matriz de Rigidez.....	47
3.6	Integração Numérica.....	51
4	METODOLOGIA E RESULTADOS	53
4.1	Resolução pelo método de elementos finitos.....	53
4.1.1	Comparação com artigo de MacNeal & Harder	53
4.1.2	Comparação com software comercial de elementos finitos (ANSYS).....	67

4.1.3	Avaliação das forças e momentos resultantes em casos com curvatura e sem curvatura	76
4.1.4	Aplicação de carga na direção X em uma casca com curvatura em única direção	77
4.1.5	Aplicação de carga na direção X em uma casca com curvatura em duas direções.....	86
4.2	Resolução analítica	92
4.2.1	Casca com curvatura em único sentido	92
5	CONCLUSÕES	99

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Curva C, vetor posição $r(s)$ e vetores tangente (t), normal (n) e binormal (b).	4
Figura 2.3 - Superfície s	5
Figura 2.4 - Elemento diferencial de uma casca.....	17
Figura 2.5 - Deformação de uma casca	18
Figura 2.6 - Representação da deformação cisalhante no plano da superfície de referência ...	21
Figura 2.7 - Forças e momentos resultantes	27
Figura 3.1 - Representação de um vetor posição x , em um nó k , no referencial global de coordenadas (a), e referencial curvilíneo natural de um elemento de casca (b).....	42
Figura 3.2 - Referencial local em um ponto de um elemento finito de casca (a), elemento de casca curva (b), e coordenadas locais (c).	44
Figura 4.1 - Estrutura para o teste "Patch test".....	53
Figura 4.2 - Teste "Viga engastada" a, b e c.....	58
Figura 4.3 - Avaliação dos resultados de deslocamento obtidos com o aumento do número de elementos da estrutura.	59
Figura 4.4 - Estrutura para o teste "Viga curva".....	60
Figura 4.5 - Estrutura para o teste "Viga torcida".	61
Figura 4.6 - Estrutura para o teste "Placa retangular".	62
Figura 4.7 - Deslocamento para uma placa com $N \times N = 8$ e razão $b/a = 1$	63
Figura 4.8 - Estrutura para o teste "Telhado Scordelis-Lo".	64
Figura 4.9 - Estrutura para o teste "Casca esférica ".	65
Figura 4.10 - Casca dividida em 5 (a), 10 (b) e 50 elementos (c).	68
Figura 4.11 - Casca com restrição de deslocamentos e forças aplicadas na direção X.	69
Figura 4.12 - Comparação dos deslocamentos na direção X com o elemento AIZ de 4 nós e simulação no ANSYS com $R/h = 10$	69
Figura 4.13 - Comparativo de deslocamentos na direção X com o elemento AIZ de 4 nós e simulação no ANSYS com $R/h = 100$	70
Figura 4.14 - Casca com restrição de deslocamentos e forças aplicadas na direção Z.	71
Figura 4.15 - Comparação dos deslocamentos na direção Z com elemento AIZ de 4 nós e simulação no ANSYS com $R/h = 10$	72
Figura 4.16 - Comparação dos deslocamentos na direção Z com elemento AIZ de 4 nós e simulação no ANSYS com $R/h = 100$	72
Figura 4.17 - Casca com restrição de deslocamentos e forças aplicadas em sentidos opostos na direção X.....	74
Figura 4.18 - Comparação dos deslocamentos na direção X com elemento AIZ de 4 nós e simulação no ANSYS com $R/h = 10$	74
Figura 4.19 - Comparação dos deslocamentos na direção X com elemento AIZ de 4 nós e simulação no ANSYS com $R/h = 100$	75
Figura 4.20 - Normais sem suavização (a) e normais suavizadas (b).....	76
Figura 4.21 - Direções θ_1 e θ_2 e momentos resultantes na casca simulada.	77
Figura 4.22 - Direções θ_1 e θ_2 e forças resultantes na casca simulada.	77
Figura 4.23 – Momentos resultantes M_{11} , com normais suavizadas e sem curvatura (a), com curvatura (b) e variação (c).....	87
Figura 4.24 – Momentos resultantes M_{11} , com normais sem suavização e sem curvatura (a), com curvatura (b) e variação (c).....	87

Figura 4.25 – Momentos resultantes M_{22} , com normais suavizadas e sem curvatura (a), com curvatura (b) e variação (c).....	88
Figura 4.26 – Momentos resultantes M_{22} , normais sem suavização e sem curvatura (a), com curvatura (b) e variação (c).....	89
Figura 4.27 – Momentos resultantes M_{12} , com normais suavizadas e sem curvatura (a), com curvatura (b) e variação (c).....	90
Figura 4.28 – Momentos resultantes M_{12} , com normais sem suavização e sem curvatura (a), com curvatura (b) e variação (c).....	90
Figura 4.29 – Momentos resultantes M_{21} , com normais suavizadas e sem curvatura (a), com curvatura (b) e variação (c).....	91
Figura 4.30 – Momentos resultantes M_{21} , com normais sem suavização e sem curvatura (a), com curvatura (b) e variação (c).....	92
Figura 4.31 - Casca com curvatura constante em única direção.	93
Figura 4.32 - Resultantes de momento M_{11} obtidas ao longo de toda a estrutura.	97
Figura 4.33 - Resultantes de momento M_{11} obtidas de forma analítica e numérica.	98

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 - Coordenadas e pesos de integração para as duas primeiras ordens de integração da quadratura de Gauss-Legendre.	52
Tabela 4.1 - Coordenadas para os nós internos da placa.	54
Tabela 4.2 - Resultados de deformação ε_{11} para cada nó de cada elemento da estrutura de teste.	54
Tabela 4.3 - Resultados de deformação γ_{12} para cada nó de cada elemento da estrutura de teste.	55
Tabela 4.4 - Resultados de tensão σ_{11} para cada nó de cada elemento da estrutura de teste.	55
Tabela 4.5 - Resultados de tensão τ_{12} para cada nó de cada elemento da estrutura de teste.	55
Tabela 4.6 - Resultados de tensão σ_{11} para cada nó de cada elemento da estrutura de teste.	56
Tabela 4.7 - Resultados de tensão τ_{12} para cada nó de cada elemento da estrutura de teste.	56
Tabela 4.8 - Resultantes de momento M_{11} para cada nó de cada elemento da superfície de referência.	57
Tabela 4.9 - Resultantes de momento M_{22} para cada nó de cada elemento da superfície de referência.	57
Tabela 4.10 - Resultados obtidos com o elemento AIZ para o teste “Viga engastada (a)” 58	58
Tabela 4.11 - Resultados obtidos com o elemento AIZ para o teste “Viga engastada (b)” 59	59
Tabela 4.12 - Resultados obtidos com o elemento AIZ para o teste “Viga engastada (c)” 59	59
Tabela 4.13 - Resultados obtidos com o elemento AIZ para o teste “Viga curva” 61	61
Tabela 4.14 - Resultados obtidos com o elemento AIZ para o teste “Viga torcida” 61	61
Tabela 4.15 - Resultados obtidos com o elemento AIZ para o teste “Placa retangular”, com arestas fixas, $a = b = 2$	62
Tabela 4.16 - Resultados obtidos com o elemento AIZ para o teste “Placa retangular”, com arestas simplesmente apoiadas, $a = 2$ e $b = 2$	63
Tabela 4.17 - Resultados obtidos com o elemento AIZ para o teste “Placa retangular”, com arestas engastadas, $a = 2$ e $b = 10$	63
Tabela 4.18 - Resultados obtidos com o elemento AIZ para o teste “Placa retangular”, com arestas simplesmente apoiadas, $a = 2$ e $b = 10$	64
Tabela 4.19 - Resultados obtidos com o elemento AIZ para o teste “Telhado Scordelis-Lo”.	65
Tabela 4.20 - Resultados obtidos com o elemento AIZ para o teste “Spherical Shell”.	66
Tabela 4.21 - Notas e relativos percentuais de erro.	66
Tabela 4.22 - Notas atribuídas ao elemento AIZ com 4 nós e comparação com elementos QUAD2 e QUAD4.	67
Tabela 4.23 - Relação entre deslocamentos calculados na direção X com carga aplicada na mesma direção, para uma relação $R/h=10$	70
Tabela 4.24 - Relação entre deslocamentos calculados na direção X com carga aplicada na mesma direção, para uma relação $R/h=100$	71
Tabela 4.25 - Relação entre deslocamentos calculados na direção Z com carga aplicada na mesma direção, para $R/h=10$	73
Tabela 4.26 - Relação entre deslocamentos calculados na direção Z com carga aplicada na mesma direção, para $R/h=100$	73
Tabela 4.27 - Relação entre deslocamentos calculados na direção X com carga aplicada em sentidos opostos na mesma direção, para uma relação $R/h=10$	75

Tabela 4.28 - Relação entre deslocamentos calculados na direção X com carga aplicada em sentidos opostos na mesma direção, para uma relação $R/h=100$	76
Tabela 4.29 – Momentos resultantes na direção 1 - $M11$, com normais suavizadas.	78
Tabela 4.30 – Momentos resultantes na direção 1 - $M11$, com normais sem suavização.....	79
Tabela 4.31 – Momentos resultantes na direção 2 - $M22$, com normais suavizadas e sem curvatura.	80
Tabela 4.32 – Momentos resultantes na direção 2 - $M22$, com normais suavizadas considerando a curvatura da estrutura.	80
Tabela 4.33 - Variação dos valores dos momentos resultantes na direção 2 - $M22$, com e sem curvatura da estrutura.	81
Tabela 4.34 – Momentos resultantes na direção 2 - $M22$, com normais sem suavização, desconsiderando a curvatura da estrutura.	81
Tabela 4.35 – Momentos resultantes na direção 2 - $M22$, com normais sem suavização, considerando a curvatura da estrutura.	82
Tabela 4.36 - Variação dos momentos resultantes na direção 2 - $M22$, com e sem curvatura e com normais sem suavização.	82
Tabela 4.37 - Resultantes de momento $M12$, com normais suavizadas.....	83
Tabela 4.38 - Resultantes de momento $M12$, com normais sem suavização.	83
Tabela 4.39 - Resultantes de momento $M21$, com normais suavizadas e com curvatura.	84
Tabela 4.40 - Variação dos valores das resultantes de momento - $M21$, com e sem curvatura e com normais suavizadas.	85
Tabela 4.41 - Resultantes de momento $M21$, com normais sem suavização e com curvatura.	85
Tabela 4.42 - Variação dos valores das resultantes de momento - $M21$, com e sem curvatura e com normais sem suavização.	86

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

PROMEC	Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
AIZ	Ahmad, Irons e Zienkiewicz
MITC	Interpolação mista dos componentes tensoriais
SI	Sistema Internacional de Unidades

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathbf{n}	Vetor normal a uma superfície
\mathbf{N}	Vetor normal a uma curva
R_1	Raio de curvatura na direção 1, m
R_2	Raio de curvatura na direção 2, m
N_{ij}	Forças resultantes, N/m
M_{ij}	Momentos resultantes, N.m/m

1 INTRODUÇÃO

Desde o surgimento do método de elementos finitos, a análise de cascas utilizando esse método vem sendo pesquisada. Um grande avanço deu-se com a proposta do elemento AIZ (Ahmad, Irons e Zienkiewicz), formulado sobre um campo de deslocamentos proposto. Posteriormente desenvolveu-se o elemento MITC, que resolve o problema de travamento do elemento AIZ, e a aplicação desses elementos foi introduzida em problemas com não linearidades, porém não há abordagem dos efeitos da curvatura dos elementos nas forças e momentos resultantes.

As resultantes de força e de momento são aplicadas na análise de estruturas na área civil, sendo um parâmetro importante no dimensionamento e na avaliação desse tipo de estrutura.

As equações obtidas no desenvolvimento da teoria de cascas evidenciam a necessidade de considerar os raios de curvatura quando a casca não for geometricamente fina.

1.1 Revisão bibliográfica

O elemento proposto por Ahmad, et al., 1970, conhecido como elemento AIZ, ainda constitui a base para as análises de cascas por elementos finitos modernas. A formulação original foi posteriormente expandida para a não linearidade material e geométrica, ainda que sob a hipótese de deformações infinitesimais.

O elemento AIZ representou um avanço muito significativo na análise de cascas pelo método de elementos finitos, porém essa formulação sofre com o efeito de travamento, e muito esforço de pesquisa foi empregado para tentar desenvolver elementos do tipo AIZ que não apresentassem esse problema [Zienkiewicz e Taylor, 2000; Bathe, 1996].

A fim de resolver o problema de travamento, o elemento MITC4 foi desenvolvido na década de 1980 [Dvorkin e Bathe, 1984; Dvorkin e Bathe, 1985; Dvorkin e Bathe, 1986], e desde lá se tornou o elemento padrão para muitos programas de elementos finitos que fazem a análise de cascas.

Posteriormente, Toscano e Dvorkin desenvolveram um elemento que também é baseado na formulação MITC4 e modela deformações finitas usando um modelo 3D de material, o elemento MITC4-3D [Toscano e Dvorkin, 2007; Toscano e Dvorkin, 2008].

1.2 Objetivos

O objetivo geral do trabalho é comparar resultados de simulações de elementos finitos de estruturas com curvatura, com foco na influência da curvatura nas forças e momentos resultantes, utilizando elementos finitos de casca e de placa e desenvolvendo conhecimento sólido da formulação e implementação dos mesmos. A fim de atingir o objetivo geral, destacam-se alguns objetivos específicos:

- Implementação de programa de elementos finitos de cascas;
- Resolução de problemas de casca com solução teórica conhecida a fim de comparar com os resultados obtidos pelo programa de elementos finitos desenvolvido;
- Resolução de problemas de casca em *software* comercial de elementos finitos de casca, a fim de comparar com os resultados obtidos pelo programa desenvolvido;
- Realizar análise comparativa para casos similares, resolvidos com diferentes formulações, comparando resultados de esforços externos ao elemento, com e sem a consideração da curvatura do mesmo, no caso da formulação de casca;
- Resolução de forma analítica de casos simples de cascas, utilizando a teoria de cascas, e comparação com resolução pelo programa de elementos finitos desenvolvido.

2 TEORIA DE CASCAS

Uma casca possui três características fundamentais: a superfície de referência, a espessura e as bordas da casca. Dessas, a mais importante é a superfície de referência, por definir a forma e, conseqüentemente, o comportamento da casca. De forma geral, se a casca é composta por um único material homogêneo, a superfície média é escolhida como a superfície de referência. No caso de materiais laminados ou outras construções não homogêneas, a utilização de uma das superfícies da casca com espessura, a interna ou a externa, pode ser mais conveniente [Kraus, 1967; Dym, 1974; Marczak, 2016].

2.1 Geometria diferencial

2.1.1 Curvas no espaço

Inicia-se o estudo da geometria diferencial através das noções básicas da teoria de curvas espaciais, que servirá de base para o desenvolvimento da teoria de superfícies.

Considerando o vetor posição $\mathbf{r}(s)$, ilustrado na **Erro! Fonte de referência não encontrada.**, no sistema de coordenadas cartesianas, cujo ponto final está sobre a curva C, definido pela equação a seguir:

$$\mathbf{r}(s) = x_1(s)\mathbf{e}_1 + x_2(s)\mathbf{e}_2 + x_3(s)\mathbf{e}_3 \quad (2.1)$$

É definido um vetor \mathbf{t} , tangente à curva C nesse ponto, um vetor \mathbf{N} , que representa a curvatura da curva C no ponto e um vetor binormal \mathbf{b} , ortogonal aos vetores \mathbf{t} e \mathbf{N} , que completa um sistema local com três coordenadas. Esse conjunto de vetores pode ser visualizado na **Erro! Fonte de referência não encontrada.**

O vetor \mathbf{t} , tangente à curva C, é definido como a variação do vetor posição $\mathbf{r}(s)$ em função de s , conforme a equação a seguir:

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx_1}{ds}\mathbf{e}_1 + \frac{dx_2}{ds}\mathbf{e}_2 + \frac{dx_3}{ds}\mathbf{e}_3 \quad (2.2)$$

A variação do vetor \mathbf{t} , ou seja, a derivada do mesmo em relação a s permite obter o vetor curvatura \mathbf{k} , cujo módulo k representa o valor da curvatura da curva C no ponto definido por s . Dessa forma é possível obter o vetor normal \mathbf{N} , vetor unitário que define a direção do vetor curvatura \mathbf{k} .

$$\mathbf{k} = \mathbf{t}' = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = k\mathbf{N} \quad (2.3)$$

A derivada de um vetor é perpendicular a esse vetor, portanto o vetor \mathbf{N} é perpendicular ao vetor \mathbf{t} . Isso pode ser provado utilizando a derivada do produto escalar de um vetor, por exemplo, o vetor \mathbf{t} .

O produto escalar de um vetor unitário por ele mesmo tem como resultando uma constante, já que o resultado desse produto escalar é sempre igual a um.

$$\mathbf{t} * \mathbf{t} = 1 \quad (2.4)$$

Sabendo-se que o produto escalar é uma constante, a derivada desse produto escalar deve ser igual a zero, pois não há variação ao longo de s .

$$\frac{d(\mathbf{t} * \mathbf{t})}{ds} = 0 \quad (2.5)$$

Aplicando-se a regra do produto da derivação, chega-se ao seguinte resultado:

$$\mathbf{t}' * \mathbf{t} + \mathbf{t} * \mathbf{t}' = 2 * \mathbf{t} * \mathbf{t}' = 0 \quad (2.6)$$

Esse resultado só é válido caso os vetores \mathbf{t} e \mathbf{t}' sejam perpendiculares.

O vetor binormal \mathbf{b} , pode ser definido pelo produto vetorial do vetor \mathbf{t} com o vetor \mathbf{N} , dessa forma obtendo-se um sistema com três vetores mutuamente ortogonais, chamada de Tríade de Frenet-Serrat.

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{N} \quad (2.7)$$

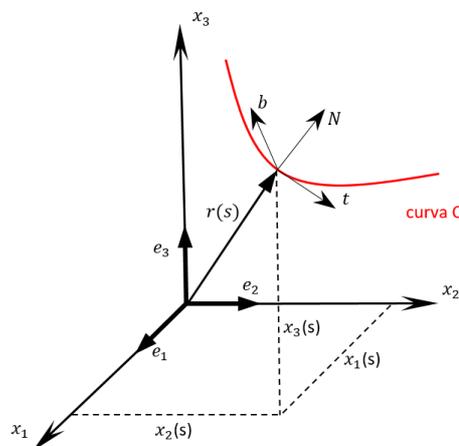


Figura 2.1 - Curva C, vetor posição $\mathbf{r}(s)$ e vetores tangente (\mathbf{t}), normal (\mathbf{n}) e binormal (\mathbf{b}).

2.1.2 Superfícies

Uma superfície s , no sistema de coordenadas cartesianas, como mostrado na Figura 2.2, pode ser descrita em função de dois parâmetros θ_1 e θ_2 , chamados de coordenadas curvilíneas da superfície, sendo relacionados ao sistema cartesiano por:

$$x_1 = f_1(\theta_1, \theta_2) \quad (2.8)$$

$$x_2 = f_2(\theta_1, \theta_2) \quad (2.9)$$

$$x_3 = f_3(\theta_1, \theta_2) \quad (2.10)$$

Um vetor \mathbf{r} , com início na origem do sistema cartesiano e final sobre a superfície s , pode ser definido em função das coordenadas curvilíneas da superfície, como:

$$\mathbf{r}(\theta_1, \theta_2) = f_1(\theta_1, \theta_2)\mathbf{e}_1 + f_2(\theta_1, \theta_2)\mathbf{e}_2 + f_3(\theta_1, \theta_2)\mathbf{e}_3 \quad (2.11)$$

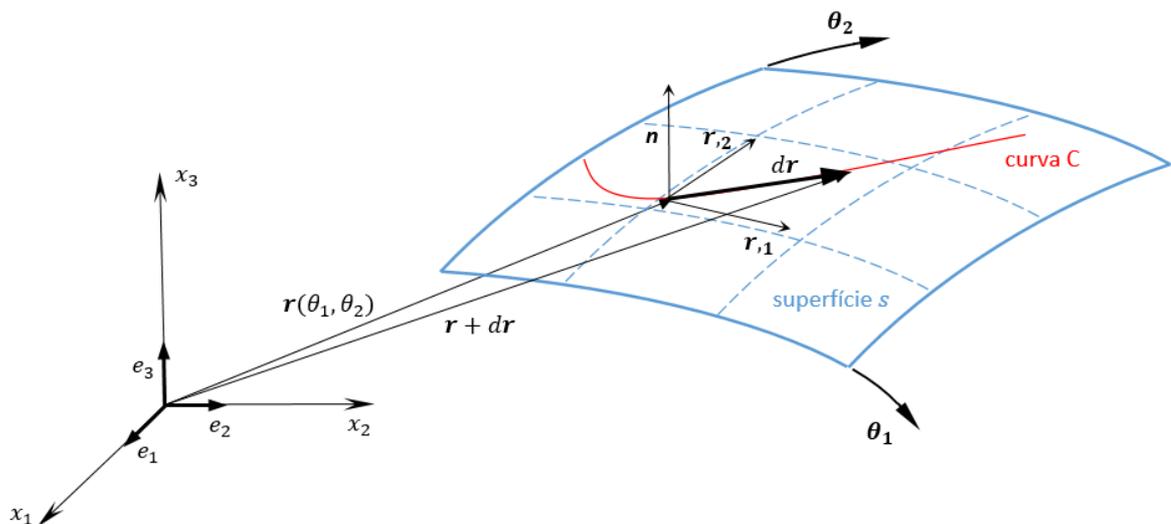


Figura 2.2 - Superfície s

2.1.2.1 Curvas paramétricas de uma superfície e a Primeira Forma Fundamental

Um vetor diferencial $d\mathbf{r}$ pode ser definido como a variação do vetor \mathbf{r} entre dois pontos separados por uma distância infinitesimal de uma curva C , sobre a superfície s .

O vetor $d\mathbf{r}$ pode ser escrito em função das coordenadas curvilíneas da superfície, como:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_{,1} d\theta_1 + \mathbf{r}_{,2} d\theta_2 \quad (2.12)$$

onde $\mathbf{r}_{,1} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta_1}$ e $\mathbf{r}_{,2} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta_2}$

De forma a determinar o comprimento infinitesimal ds , o quadrado do vetor infinitesimal $d\mathbf{r}$ é obtido fazendo o produto do vetor $d\mathbf{r}$ consigo mesmo. Assim, chega-se a:

$$(ds)^2 = d\mathbf{r} * d\mathbf{r} = \mathbf{r}_{,1} * \mathbf{r}_{,1} (d\theta_1)^2 + 2 \mathbf{r}_{,1} * \mathbf{r}_{,2} d\theta_1 d\theta_2 + \mathbf{r}_{,2} * \mathbf{r}_{,2} (d\theta_2)^2 \quad (2.13)$$

Que pode ser reescrito para representar a Primeira Forma Fundamental, como:

$$(ds)^2 = d\mathbf{r} * d\mathbf{r} = G_{11}(d\theta_1)^2 + 2G_{12}d\theta_1 d\theta_2 + G_{22}(d\theta_2)^2 \quad (2.14)$$

onde:

$$G_{11} = \mathbf{r}_{,1} * \mathbf{r}_{,1} \quad (2.15)$$

$$G_{12} = \mathbf{r}_{,1} * \mathbf{r}_{,2} \quad (2.16)$$

$$G_{22} = \mathbf{r}_{,2} * \mathbf{r}_{,2} \quad (2.17)$$

Ao longo das curvas paramétricas θ_1 e θ_2 , os comprimentos diferenciais das curvaturas assumem formas simplificadas.

Para uma curva com θ_2 constante, temos:

$$ds_1 = \sqrt{G_{11}} d\theta_1 \quad (2.18)$$

Para uma curva com θ_1 constante, temos:

$$ds_2 = \sqrt{G_{22}} d\theta_2 \quad (2.19)$$

Sabendo que $\mathbf{r}_{,1}$ e $\mathbf{r}_{,2}$ são tangentes às curvas com θ_2 e θ_1 constantes, respectivamente, é possível provar que o coeficiente G_{12} será igual a zero caso as linhas paramétricas formem um conjunto ortogonal, usando as propriedades do produto escalar, como mostrado a seguir:

$$G_{12} = \mathbf{r}_{,1} * \mathbf{r}_{,2} = |\mathbf{r}_{,1}| * |\mathbf{r}_{,2}| \sin \theta \quad (2.20)$$

Caso θ_1 e θ_2 sejam ortogonais, o ângulo entre eles será igual a 90° , e dessa forma fazendo o seno de 90° , teremos $G_{12} = 0$. Nesse caso, a Primeira Forma Fundamental pode ser reescrita, como:

$$(ds)^2 = A_1^2 (d\theta_1)^2 + A_2^2 (d\theta_2)^2 \quad (2.21)$$

sendo que $A_1 = \sqrt{G_{11}}$ e $A_2 = \sqrt{G_{22}}$, e $G_{12} = 0$.

2.1.2.2 Normal à superfície

Em qualquer ponto da superfície s existe um vetor unitário \mathbf{n} , perpendicular a ambos os vetores $\mathbf{r}_{,1}$ e $\mathbf{r}_{,2}$, e dessa forma perpendicular à superfície nesse ponto. O vetor unitário normal é portanto paralelo ao produto vetorial dos vetores $\mathbf{r}_{,1}$ e $\mathbf{r}_{,2}$ e pode ser definido pela equação a seguir:

$$\mathbf{n}(\theta_1, \theta_2) = \frac{(\mathbf{r}_{,1} \times \mathbf{r}_{,2})}{|\mathbf{r}_{,1} \times \mathbf{r}_{,2}|} \quad (2.22)$$

2.1.2.3 Segunda Forma Fundamental

Usando a proposta de uma curva C sobre uma superfície s , ilustrada na Figura 2.2, e considerando que o vetor \mathbf{N} , normal a uma curva C sobre a superfície e o vetor \mathbf{n} , normal à própria superfície não são necessariamente coincidentes, o vetor \mathbf{k} , apresentado na equação (2.3) terá seus componentes divididos em uma parcela normal à superfície s , representada por um vetor \mathbf{k}_n , e uma parcela tangencial à mesma superfície, representada pelo vetor \mathbf{k}_t . Dessa forma, pode ser escrito:

$$\mathbf{k} = \mathbf{t}' = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \mathbf{k}_n + \mathbf{k}_t \quad (2.23)$$

O vetor \mathbf{k}_n será denominado vetor de curvatura normal e o vetor \mathbf{k}_t será denominado vetor de curvatura tangencial. Sendo o vetor \mathbf{k}_n normal à superfície, o mesmo é coincidente ao vetor unitário \mathbf{n} , e portanto pode ser expresso como:

$$\mathbf{k}_n = -K_n \mathbf{n} \quad (2.24)$$

sendo K_n um escalar, que representa a magnitude da curvatura normal. O sinal negativo deve-se à convenção de que o vetor \mathbf{N} aponta para o centro da curvatura da curva C , enquanto o vetor \mathbf{n} tem convenção contrária, apontando para fora da curva.

Se o vetor \mathbf{n} é perpendicular ao vetor \mathbf{t} , a diferenciação do produto escalar $\mathbf{n} * \mathbf{t} = 0$ em relação a coordenada s da curva C resulta em:

$$\frac{d(\mathbf{n} * \mathbf{t})}{ds} = \frac{d\mathbf{n}}{ds} * \mathbf{t} + \frac{d\mathbf{t}}{ds} * \mathbf{n} = 0 \quad (2.25)$$

Rearranjando-se os termos da equação anterior pode ser definido:

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} * \mathbf{t} = -\mathbf{n} * \frac{d\mathbf{t}}{ds} \quad (2.26)$$

Usando a relação (2.23), e sabendo que \mathbf{k}_t é perpendicular ao vetor \mathbf{n} , chega-se a:

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} * \mathbf{t} = -\mathbf{n} * \mathbf{k}_n \quad (2.27)$$

Substituindo a equação (2.24), obtém-se:

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} * \mathbf{t} = K_n \quad (2.28)$$

Utilizando-se a equação (2.2) pode então ser escrito:

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} * \frac{d\mathbf{r}}{ds} = K_n \quad (2.29)$$

Sendo $(ds)^2 = d\mathbf{r} * d\mathbf{r}$, obtém-se:

$$K_n = \frac{d\mathbf{r} * d\mathbf{n}}{(ds)^2} = \frac{d\mathbf{r} * d\mathbf{n}}{d\mathbf{r} * d\mathbf{r}} \quad (2.30)$$

Utilizando-se a decomposição vetorial, é possível escrever:

$$d\mathbf{n} = \mathbf{n}_{,1} d\theta_1 + \mathbf{n}_{,2} d\theta_2 \quad (2.31)$$

Substituindo as equações (2.12), (2.31) e (2.14) (Primeira Forma Fundamental) na equação (2.30), obtém-se:

$$K_n = \frac{(\mathbf{n}_{,1} d\theta_1 + \mathbf{n}_{,2} d\theta_2) * (\mathbf{r}_{,1} d\theta_1 + \mathbf{r}_{,2} d\theta_2)}{G_{11}(d\theta_1)^2 + 2G_{12}d\theta_1 d\theta_2 + G_{22}(d\theta_2)^2} \quad (2.32)$$

Efetuada-se o produto escalar, chega-se a:

$$K_n = \frac{(\mathbf{n}_{,1} * \mathbf{r}_{,1})(d\theta_1)^2 + (\mathbf{n}_{,1} * \mathbf{r}_{,2} + \mathbf{n}_{,2} * \mathbf{r}_{,1})d\theta_1 d\theta_2 + (\mathbf{n}_{,2} * \mathbf{r}_{,2})(d\theta_2)^2}{G_{11}(d\theta_1)^2 + 2G_{12}d\theta_1 d\theta_2 + G_{22}(d\theta_2)^2} \quad (2.33)$$

A equação anterior pode ser reescrita como:

$$K_n = \frac{B_{11}(d\theta_1)^2 + B_{12}d\theta_1 d\theta_2 + B_{22}(d\theta_2)^2}{G_{11}(d\theta_1)^2 + 2G_{12}d\theta_1 d\theta_2 + G_{22}(d\theta_2)^2} \quad (2.34)$$

em que:

$$B_{11} = \mathbf{n}_{,1} * \mathbf{r}_{,1} \quad (2.35)$$

$$B_{12} = \mathbf{n}_{,1} * \mathbf{r}_{,2} + \mathbf{n}_{,2} * \mathbf{r}_{,1} \quad (2.36)$$

$$B_{22} = \mathbf{n}_{,2} * \mathbf{r}_{,2} \quad (2.37)$$

Assim, a Segunda Forma Fundamental é definida como o numerador da equação que define K_n , conforme apresentado a seguir:

$$K_n = \frac{2^\circ \text{ Forma Fundamental}}{1^\circ \text{ Forma Fundamental}} \quad (2.38)$$

Fazendo uso das propriedades do produto interno, e sabendo que os vetores $\mathbf{r}_{,1}$ e \mathbf{n} são perpendiculares, temos $\mathbf{r}_{,1} * \mathbf{n} = 0$, e portanto:

$$\frac{\partial(\mathbf{r}_{,1} * \mathbf{n})}{\partial \theta_1} = 0 \quad (2.39)$$

Assim, pode-se fazer:

$$\mathbf{r}_{,1} * \mathbf{n}_{,1} + \mathbf{n} * \mathbf{r}_{,11} = 0 \quad (2.40)$$

ou:

$$\mathbf{r}_{,1} * \mathbf{n}_{,1} = -\mathbf{n} * \mathbf{r}_{,11} \quad (2.41)$$

Chega-se assim a uma nova forma para B_{11} , em que não é necessário fazer a derivada de \mathbf{n} em relação a θ_1 :

$$B_{11} = -\mathbf{n} * \mathbf{r}_{,11} \quad (2.42)$$

em que $\mathbf{r}_{,11} = \frac{\partial \mathbf{r}_{,1}}{\partial \theta_1}$

De forma similar pode-se obter formas alternativas para B_{22} e B_{12} :

$$B_{22} = -\mathbf{n} * \mathbf{r}_{,22} \quad (2.43)$$

$$B_{12} = -\mathbf{n} * \mathbf{r}_{,12} \quad (2.44)$$

em que $\mathbf{r}_{,22} = \frac{\partial \mathbf{r}_{,2}}{\partial \theta_2}$ e $\mathbf{r}_{,12} = \frac{\partial \mathbf{r}_{,1}}{\partial \theta_2}$

Utilizando os vetores \mathbf{n} , $\mathbf{r}_{,1}$ e $\mathbf{r}_{,2}$, já definidos anteriormente é possível estabelecer um sistema de três eixos mutuamente ortogonais em um ponto P da superfície s , sendo \mathbf{n} perpendicular à superfície nesse ponto, e \mathbf{t}_1 e \mathbf{t}_2 tangentes às direções θ_1 e θ_2 , e obtidos pela normalização de $\mathbf{r}_{,1}$ e $\mathbf{r}_{,2}$, respectivamente. Dessa forma:

$$\mathbf{t}_1 = \frac{\mathbf{r}_{,1}}{\|\mathbf{r}_{,1}\|} \quad (2.45)$$

$$\mathbf{t}_2 = \frac{\mathbf{r}_{,2}}{\|\mathbf{r}_{,2}\|} \quad (2.46)$$

$$\mathbf{n} = (\mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2) = \frac{(\mathbf{r}_{,1} \times \mathbf{r}_{,2})}{A_1 A_2} \quad (2.47)$$

Utilizando-se as equações (2.14) a (2.21), pode-se fazer:

$$\mathbf{t}_1 = \frac{\mathbf{r}_{,1}}{A_1} \quad (2.48)$$

$$\mathbf{t}_2 = \frac{\mathbf{r}_{,2}}{A_2} \quad (2.49)$$

A magnitude desses vetores permanecerá constante (vetores unitários) e os mesmos terão sempre direções mutuamente ortogonais, porém deve-se prestar atenção às derivadas dos vetores unitários, uma vez que a orientação desse sistema mudará com a posição sobre a superfície de referência da casca.

Como já demonstrado anteriormente, a derivada de um vetor é perpendicular a esse vetor, dessa forma $\mathbf{n}_{,1}$ e $\mathbf{n}_{,2}$ são perpendiculares a \mathbf{n} e estão definidos no plano formado pelos vetores \mathbf{t}_1 e \mathbf{t}_2 , podendo ser decompostos nas componentes desses dois vetores, como apresentado a seguir para $\mathbf{n}_{,1}$:

$$\mathbf{n}_{,1} = a\mathbf{t}_1 + b\mathbf{t}_2 \quad (2.50)$$

em que a e b são variáveis que representam a projeção de $\mathbf{n}_{,1}$ sobre \mathbf{t}_1 e \mathbf{t}_2 .

A fim de determinar a e b , os seguintes produtos escalares são formados:

$$\mathbf{t}_1 * \mathbf{n}_{,1} = \frac{\mathbf{r}_{,1}}{\|\mathbf{r}_{,1}\|} * \mathbf{n}_{,1} = \frac{\mathbf{r}_{,1} * \mathbf{n}_{,1}}{A_1} = \frac{B_{11}}{A_1} = a(\mathbf{t}_1 * \mathbf{t}_1) + b(\mathbf{t}_1 * \mathbf{t}_2) \quad (2.51)$$

$$\mathbf{t}_2 * \mathbf{n}_{,1} = \frac{\mathbf{r}_{,2}}{\|\mathbf{r}_{,2}\|} * \mathbf{n}_{,1} = \frac{\mathbf{r}_{,2} * \mathbf{n}_{,1}}{A_2} = \frac{B_{12}}{A_2} = a(\mathbf{t}_2 * \mathbf{t}_1) + b(\mathbf{t}_2 * \mathbf{t}_2) \quad (2.52)$$

Como estamos trabalhando com um sistema ortogonal correspondente às linhas paramétricas, $B_{12} = 0$, e considerando a ortogonalidade dos vetores $\mathbf{t}_2 * \mathbf{t}_1 = 0$, portanto:

$$\frac{B_{11}}{A_1} = a \quad (2.53)$$

$$b = 0 \quad (2.54)$$

O vetor $\mathbf{n}_{,1}$ pode então ser expresso como:

$$\mathbf{n}_{,1} = \frac{B_{11}}{A_1} \mathbf{t}_1 \quad (2.55)$$

Utilizando a equação definida anteriormente:

$$K_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{B_{11}}{A_1^2} \quad (2.56)$$

Dessa forma, $\mathbf{n}_{,1}$ pode ser definido, de forma final, como:

$$\mathbf{n}_{,1} = \frac{A_1}{R_1} \mathbf{t}_1 \quad (2.57)$$

De forma similar ao desenvolvimento adotado para $\mathbf{n}_{,1}$, $\mathbf{n}_{,2}$ pode ser definido como:

$$\mathbf{n}_{,2} = \frac{A_2}{R_2} \mathbf{t}_2 \quad (2.58)$$

A fim de encontrar as derivadas de \mathbf{t}_1 e de \mathbf{t}_2 ao longo das linhas paramétricas o procedimento similar ao adotado para encontrar as derivadas do vetor \mathbf{n} é aplicado. Para funções com derivadas segundas contínuas, pode se definir $\mathbf{r}_{,12} = \mathbf{r}_{,21}$, e portanto, pode-se escrever:

$$(A_1 \mathbf{t}_1)_{,2} = (A_2 \mathbf{t}_2)_{,1} \quad (2.59)$$

Utilizando a regra do produto da diferenciação, obtém-se:

$$A_{1,2} \mathbf{t}_1 + A_1 \mathbf{t}_{1,2} = A_{2,1} \mathbf{t}_2 + A_2 \mathbf{t}_{2,1} \quad (2.60)$$

Que pode ser reescrito como:

$$\mathbf{t}_{2,1} = \frac{1}{A_2} [A_1 \mathbf{t}_{1,2} + A_{1,2} \mathbf{t}_1 - A_{2,1} \mathbf{t}_2] \quad (2.61)$$

Como um exemplo, pode-se definir $\mathbf{t}_{1,1}$. Conforme demonstrado anteriormente, a derivada de um vetor é perpendicular a esse vetor, dessa forma o vetor $\mathbf{t}_{1,1}$ deve estar no plano formado pelos vetores \mathbf{t}_2 e \mathbf{n} . Sendo assim, $\mathbf{t}_{1,1}$ pode ser expresso, como:

$$\mathbf{t}_{1,1} = c\mathbf{n} + d\mathbf{t}_2 \quad (2.62)$$

em que c e d são variáveis que representam as projeções de $\mathbf{t}_{1,1}$ em \mathbf{n} e \mathbf{t}_2 , respectivamente.

O produto escalar pode ser utilizado para determinar as variáveis c e d . Forma-se o produto escalar de $\mathbf{t}_{1,1}$ com \mathbf{n} e com \mathbf{t}_2 , como apresentado a seguir:

$$\mathbf{n} * \mathbf{t}_{1,1} = c(\mathbf{n} * \mathbf{n}) + d(\mathbf{n} * \mathbf{t}_2) \quad (2.63)$$

$$\mathbf{t}_2 * \mathbf{t}_{1,1} = c(\mathbf{t}_2 * \mathbf{n}) + d(\mathbf{t}_2 * \mathbf{t}_2) \quad (2.64)$$

Considerando a ortogonalidade entre os vetores \mathbf{n} e \mathbf{t}_2 , pode-se reescrever:

$$\mathbf{n} * \mathbf{t}_{1,1} = c \quad (2.65)$$

$$\mathbf{t}_2 * \mathbf{t}_{1,1} = d \quad (2.66)$$

Considerando a ortogonalidade entre os vetores \mathbf{n} e \mathbf{t}_1 , o produto escalar ($\mathbf{t}_1 * \mathbf{n} = 0$), e portanto:

$$(\mathbf{t}_1 * \mathbf{n})_{,1} = \frac{\partial(\mathbf{t}_1 * \mathbf{n})}{\partial \theta_1} = \mathbf{t}_1 * \mathbf{n}_{,1} + \mathbf{t}_{1,1} * \mathbf{n} = 0 \quad (2.67)$$

De forma similar, considerando a ortogonalidade de \mathbf{t}_1 e de \mathbf{t}_2 :

$$(\mathbf{t}_1 * \mathbf{t}_2)_{,1} = \frac{\partial(\mathbf{t}_1 * \mathbf{t}_2)}{\partial \theta_1} = \mathbf{t}_1 * \mathbf{t}_{2,1} + \mathbf{t}_{1,1} * \mathbf{t}_2 = 0 \quad (2.68)$$

Dessa forma:

$$c = \mathbf{n} * \mathbf{t}_{1,1} = -\mathbf{t}_1 * \mathbf{n}_{,1} = -\frac{A_1}{R_1} \quad (2.69)$$

$$d = \mathbf{t}_2 * \mathbf{t}_{1,1} = -\mathbf{t}_1 * \mathbf{t}_{2,1} \quad (2.70)$$

Utilizando a equação (2.61), podemos reescrever d como:

$$d = -\frac{\mathbf{t}_1}{A_2} [A_1 \mathbf{t}_{1,2} + A_{1,2} \mathbf{t}_1 - A_{2,1} \mathbf{t}_2] \quad (2.71)$$

Sendo $\mathbf{t}_{1,2}$ perpendicular a \mathbf{t}_1 , a equação anterior fica resumida a:

$$d = -\frac{A_{1,2}}{A_2} \quad (2.72)$$

O vetor $\mathbf{t}_{1,1}$ pode então ser reescrito como:

$$\mathbf{t}_{1,1} = -\frac{A_1}{R_1} \mathbf{n} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} \mathbf{t}_2 \quad (2.73)$$

De forma similar, pode-se determinar expressões para $\mathbf{t}_{1,1}$, $\mathbf{t}_{1,1}$ e $\mathbf{t}_{1,1}$, como apresentado nas equações a seguir:

$$\mathbf{t}_{1,2} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \theta_1} \mathbf{t}_2 \quad (2.74)$$

$$\mathbf{t}_{2,1} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} \mathbf{t}_1 \quad (2.75)$$

$$\mathbf{t}_{2,2} = -\frac{A_2}{R_2} \mathbf{n} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \theta_1} \mathbf{t}_1 \quad (2.76)$$

2.2 Equações fundamentais da teoria de cascas finas

2.2.1 Aproximações

A definição da teoria de cascas está baseada em alguns pontos simplificadores. As hipóteses de Love [Kraus, 1967] para a teoria de cascas finas são apresentadas a seguir:

- A casca é fina: uma das dimensões é consideravelmente menor que as outras duas;
- Os deslocamentos e deformações são pequenos, se comparados à espessura da casca;
- O esforço normal transversal, na direção normal à superfície de referência da placa, pode ser desconsiderado;
- Uma linha originalmente normal à superfície de referência se mantém normal e não sofre alteração no seu comprimento durante a deformação.

A primeira hipótese assumida é a base para toda a teoria, e possibilita que as demais hipóteses sejam verdadeiras. Mesmo que uma definição precisa de uma casca fina não seja possível, a relação entre a espessura da casca (h) e ao menos um dos raios de curvatura (R_i) deve ser pequena ($h/R_i \ll 1$). De maneira geral, recomenda-se que a teoria resultante seja aplicada somente a cascas cuja espessura seja menor que um décimo do raio de curvatura da superfície de referência, em todas as regiões dessa casca. Da mesma forma, para que a casca seja considerada fina, a espessura deve ser no máximo um décimo das demais dimensões da casca. Para relações maiores que essa recomenda-se o tratamento como casca semi espessa [Marczak, 2016].

A hipótese de pequenos deslocamentos permite referenciar toda a teoria à configuração indeformada da casca, dessa forma sendo desnecessário diferenciar entre as configurações

Euleriana e Lagrangeana. Dessa forma, utilizando-se em conjunto com a lei de Hooke, a teoria resultante é a linear elástica.

A terceira hipótese assumida atesta que a tensão σ_n , normal à superfície de referência, é muito menor que as tensões no plano σ_{11} e σ_{22} . Estabelecendo a Lei de Hooke para um material ortotrópico homogêneo, cujos três planos de elasticidade mutuamente perpendiculares são vinculados às direções perpendiculares θ_1 , θ_2 e com a direção normal à superfície de referência, as seguintes equações são obtidas:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E_{11}} - \frac{\nu_{12}}{E_{22}}\sigma_{22} - \frac{\nu_{1n}}{E_n}\sigma_n \quad (2.77)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E_{22}} - \frac{\nu_{21}}{E_{11}}\sigma_{11} - \frac{\nu_{2n}}{E_n}\sigma_n \quad (2.78)$$

$$\varepsilon_n = \frac{\sigma_n}{E_n} - \frac{\nu_{n1}}{E_1}\sigma_{11} - \frac{\nu_{n2}}{E_{22}}\sigma_{22} \quad (2.79)$$

$$\gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G_{12}} \quad (2.80)$$

$$\gamma_{1n} = \frac{\tau_{1n}}{G_{1n}} \quad (2.81)$$

$$\gamma_{2n} = \frac{\tau_{2n}}{G_{2n}} \quad (2.82)$$

em que σ_{11} , σ_{22} e σ_n são as tensões normais nas três direções mutuamente perpendiculares, ε_{11} , ε_{22} e ε_n são as deformações normais correspondentes, γ_{12} , γ_{1n} e γ_{2n} são as deformações cisalhantes e τ_{12} , τ_{1n} e τ_{2n} são as tensões cisalhantes correspondentes. E_{11} , E_{22} , E_n , G_{12} , G_{1n} , G_{2n} e ν_{12} , ν_{21} , ν_{1n} , ν_{2n} , ν_{n1} , ν_{n2} são as constantes elásticas (módulo de Young, módulo de cisalhamento e coeficiente de Poisson) nas direções das três coordenadas.

A quarta hipótese de Love está relacionada à preservação da normal, sendo uma analogia à hipótese de Euler na teoria de vigas. Assumir que a normal permanece indeformada durante a deformação tem por consequência que as componentes de deformação na direção normal à superfície de referência tenham valor nulo, portanto:

$$\varepsilon_n = \gamma_{1n} = \gamma_{2n} = \sigma_n = 0 \quad (2.83)$$

Em conjunto com a Lei de Hooke para materiais ortotrópicos, pode ser escrito:

$$\tau_{12} = G\gamma_{12} = 2G\varepsilon_{12} \quad (2.84)$$

e

$$\tau_{1n} = \tau_{2n} = 0 \quad (2.85)$$

Como consequência da terceira e quarta hipótese de Love, as relações tensão-deformação são reduzidas as seguintes relações constitutivas bidimensionais para uma casca fina:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E_{11}} - \frac{\nu_{12}}{E_{22}}\sigma_{22} \quad (2.86)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E_{22}} - \frac{\nu_{21}}{E_{11}}\sigma_{11} \quad (2.87)$$

$$\gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G_{12}} \quad (2.88)$$

E junto com as equações (2.83) formam o conjunto de equações que representam as relações tensão-deformação [Dym, 1974; Kraus, 1967; Ventsel e Krauthammer, 2001].

2.2.2 Coordenadas de um ponto arbitrário da casca

A hipótese da preservação da normal resulta em deslocamentos lineares ao longo da espessura da casca, dessa forma, o comportamento de um ponto qualquer na casca pode ser relacionado ao comportamento de um ponto equivalente na superfície de referência da casca utilizando uma distância ζ dessa superfície.

A fim de descrever a posição de um ponto arbitrário na casca, o vetor posição $\mathbf{R}(\theta_1, \theta_2, \zeta)$ é definido, como:

$$\mathbf{R}(\theta_1, \theta_2, \zeta) = \mathbf{r}(\theta_1, \theta_2) + \zeta\mathbf{n}(\theta_1, \theta_2) \quad (2.89)$$

Onde \mathbf{r} é o vetor posição de um ponto na superfície de referência, \mathbf{n} é o vetor unitário normal à superfície de referência em \mathbf{r} , e ζ é a distância entre o ponto e a superfície de referência seguindo \mathbf{n} . θ_1 e θ_2 são as linhas paramétricas da superfície de referência, e coincidem com as linhas ortogonais principais de curvatura.

A magnitude de um elemento diferencial de comprimento no espaço, definida pelo vetor $\mathbf{R}(\theta_1, \theta_2, \zeta)$ pode ser obtida utilizando-se a primeira forma fundamental de uma superfície

localizada a uma distância ζ da superfície de referência, conforme apresentado na equação a seguir:

$$(ds)^2 = d\mathbf{R} * d\mathbf{R} = (dr + \zeta d\mathbf{n} + \mathbf{n}d\zeta) * (dr + \zeta d\mathbf{n} + \mathbf{n}d\zeta) \quad (2.90)$$

Resolvendo o produto interno indicado, e considerando a ortogonalidade do sistema de coordenadas, obtém-se:

$$(ds)^2 = A_1^2 \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right)^2 (d\theta_1)^2 + A_2^2 \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right)^2 (d\theta_2)^2 + (d\zeta)^2 \quad (2.91)$$

em que $A_1 = \sqrt{G_{11}} = \sqrt{\frac{\partial r}{\partial \theta_1} * \frac{\partial r}{\partial \theta_1}}$ e $A_2 = \sqrt{G_{22}} = \sqrt{\frac{\partial r}{\partial \theta_2} * \frac{\partial r}{\partial \theta_2}}$

Uma vez que o sistema de coordenadas está estabelecido, um elemento de casca de espessura $d\zeta$, a uma distância ζ da superfície de referência pode ser definido, como ilustrado na Figura 2.3. Os comprimentos das arestas deste elemento fundamental podem ser definidos como:

$$ds_1(\zeta) = A_1 \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right) d\theta_1 \quad (2.92)$$

$$ds_2(\zeta) = A_2 \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) d\theta_2 \quad (2.93)$$

E as áreas diferenciais desse elemento são definidas como:

$$d\Sigma_1(\zeta) = A_1 \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right) d\theta_1 d\zeta \quad (2.94)$$

$$d\Sigma_2(\zeta) = A_2 \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) d\theta_2 d\zeta \quad (2.95)$$

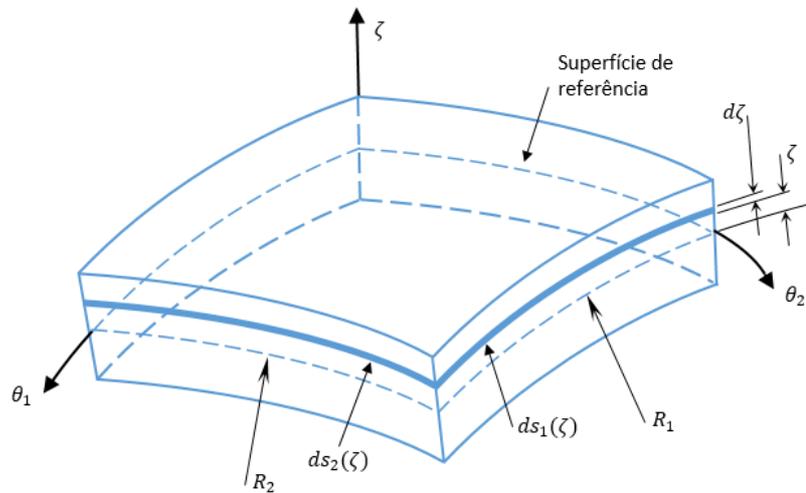


Figura 2.3 - Elemento diferencial de uma casca

A definição de um elemento fundamental e do sistema de coordenadas permite a obtenção das equações da teoria de cascas [Kraus, 1967; Dym, 1974].

2.2.3 Relações cinemáticas

A definição das equações que relacionam as deformações aos deslocamentos para a teoria de cascas é obtida a partir da definição de um vetor de deslocamentos $\mathbf{U}(\theta_1, \theta_2, \zeta)$, como mostrado a seguir:

$$\mathbf{U}(\theta_1, \theta_2, \zeta) = U_1(\theta_1, \theta_2, \zeta)\mathbf{t}_1 + U_2(\theta_1, \theta_2, \zeta)\mathbf{t}_2 + W(\theta_1, \theta_2, \zeta)\mathbf{n} \quad (2.96)$$

onde \mathbf{t}_1 , \mathbf{t}_2 e \mathbf{n} são os vetores unitários nas direções de θ_1 , θ_2 , e a normal à superfície de referência, e U_1 , U_2 e W são os componentes do vetor de deslocamentos no sistema de direções ortogonais correspondente.

Os componentes do vetor de deslocamentos podem ser descritos como:

$$U_1(\theta_1, \theta_2, \zeta) = u_1(\theta_1, \theta_2) - \zeta\beta_1(\theta_1, \theta_2) \quad (2.97)$$

$$U_2(\theta_1, \theta_2, \zeta) = u_2(\theta_1, \theta_2) - \zeta\beta_2(\theta_1, \theta_2) \quad (2.98)$$

$$W(\theta_1, \theta_2, \zeta) = w(\theta_1, \theta_2) \quad (2.99)$$

em que u_1 , u_2 e w são deslocamentos e β_1 e β_2 são rotações de um ponto da superfície de referência definido por (θ_1, θ_2) , e ζ representa o afastamento da superfície de referência, medido ao longo do vetor \mathbf{n} no mesmo ponto.

Um ponto qualquer da casca pode ser descrito por um vetor $\mathbf{p}(\theta_1, \theta_2, \zeta)$, composto por um vetor $\mathbf{r}(\theta_1, \theta_2)$ sobre a superfície de referência somado a um componente normal à essa superfície, conforme ilustrado na Figura 2.4 e descrito pela equação a seguir:

$$\mathbf{p}(\theta_1, \theta_2, \zeta) = \mathbf{r}(\theta_1, \theta_2) + \zeta \mathbf{n}(\theta_1, \theta_2) \quad (2.100)$$

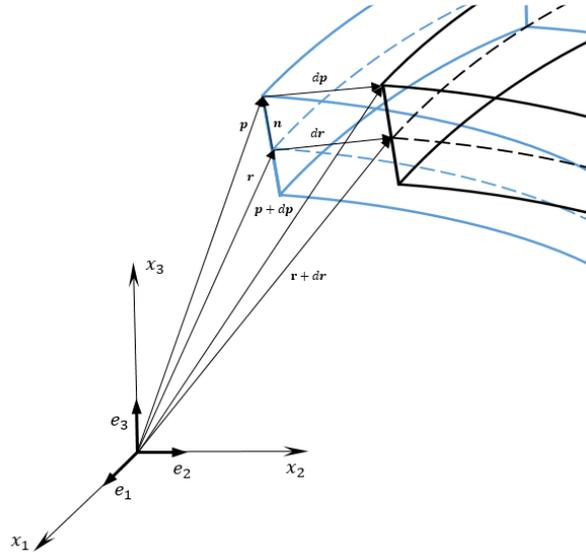


Figura 2.4 - Deformação de uma casca

2.2.3.1 Deformações Normais

A deformação na direção 1 pode ser descrita como a diferença entre a magnitude de uma curva após a deformação e a magnitude dessa mesma curva indeformada, na direção 1. Assim, pode-se escrever:

$$\varepsilon_{11} = \frac{d\bar{s}_{p1} - ds_{p1}}{ds_{p1}} \quad (2.101)$$

sendo que $d\bar{s}_{p1}$ representa a magnitude da curva após a deformação, e ds_{p1} representa a magnitude da curva indeformada.

A equação anterior pode ser multiplicada por um numerador e denominador iguais, sem que sofra alterações, portanto pode-se obter:

$$\varepsilon_{11} = \frac{d\bar{s}_{p1} - ds_{p1}}{ds_{p1}} * \frac{d\bar{s}_{p1} + ds_{p1}}{d\bar{s}_{p1} + ds_{p1}} = \frac{(d\bar{s}_{p1})^2 - (ds_{p1})^2}{2(ds_{p1})^2} \quad (2.102)$$

As magnitudes são determinadas por:

$$(d\bar{s}_{p_1})^2 = \bar{\mathbf{p}}_{,1} * \bar{\mathbf{p}}_{,1} \quad (2.103)$$

$$(ds_{p_1})^2 = \mathbf{p}_{,1} * \mathbf{p}_{,1} \quad (2.104)$$

E

$$\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{p} + \mathbf{U}(\theta_1, \theta_2, \zeta) \quad (2.105)$$

Chega-se então a:

$$\varepsilon_{11} = \frac{(\mathbf{p}_{,1} + \mathbf{U}_{,1}) * (\mathbf{p}_{,1} + \mathbf{U}_{,1}) - \mathbf{p}_{,1} * \mathbf{p}_{,1}}{2\mathbf{p}_{,1} * \mathbf{p}_{,1}} \quad (2.106)$$

Que pode ser resolvido para:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\mathbf{p}_{,1} * \mathbf{U}_{,1}}{\mathbf{p}_{,1} * \mathbf{p}_{,1}} + \frac{\mathbf{U}_{,1} * \mathbf{U}_{,1}}{2\mathbf{p}_{,1} * \mathbf{p}_{,1}} \quad (2.107)$$

E adotando a hipótese de pequenos deslocamentos, pode-se reduzir a:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\mathbf{p}_{,1} * \mathbf{U}_{,1}}{\|\mathbf{p}_{,1}\|^2} \quad (2.108)$$

Definindo-se um vetor \mathbf{t}_1 como o vetor unitário na direção de $\mathbf{r}_{,1}$, temos:

$$\mathbf{t}_1 = \frac{\mathbf{r}_{,1}}{\|\mathbf{r}_{,1}\|} \quad (2.109)$$

Utilizando a equação (2.18), pode-se fazer:

$$\mathbf{t}_1 = \frac{\mathbf{r}_{,1}}{A_1} \quad (2.110)$$

Lembrando que $\mathbf{p} = \mathbf{r} + \zeta\mathbf{n}$, de acordo com a equação (2.100), a derivada do vetor \mathbf{p} em relação a θ_1 pode ser escrita como:

$$\mathbf{p}_{,1} = \frac{d\mathbf{r}}{d\theta_1} + \zeta \frac{d\mathbf{n}}{d\theta_1} = \mathbf{r}_{,1} + \zeta\mathbf{n}_{,1} \quad (2.111)$$

Fazendo a substituição de $\mathbf{r}_{,1}$ conforme a equação (2.110) e de $\mathbf{n}_{,1}$ de acordo com a equação (2.57), na equação (2.111), obtém-se:

$$\mathbf{p}_{,1} = A_1\mathbf{t}_1 + \zeta \frac{A_1}{R_1}\mathbf{t}_1 = A_1 \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right)\mathbf{t}_1 \quad (2.112)$$

A magnitude do vetor $\mathbf{p}_{,1}$ pode ser definida como:

$$\|\mathbf{p}_{,1}\| = A_1 \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right) \quad (2.113)$$

A fim de determinar a deformação orientada com θ_1 , o vetor de deslocamento $\mathbf{U}(\theta_1, \theta_2, \zeta)$, apresentado na equação (2.96) é derivado em relação a θ_1 , assim obtendo-se:

$$\mathbf{U}_{,1} = U_{1,1} \mathbf{t}_1 + U_1 \mathbf{t}_{1,1} + U_{2,1} \mathbf{t}_2 + U_2 \mathbf{t}_{2,1} + W_{,1} \mathbf{n} + W \mathbf{n}_{,1} \quad (2.114)$$

Substituindo $\mathbf{t}_{1,1}$ e $\mathbf{t}_{2,1}$, a partir das equações (2.73) e (2.75), chega-se a:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{,1} = U_{1,1} \mathbf{t}_1 + U_1 \left(-\frac{A_1}{R_1} \mathbf{n} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} \mathbf{t}_2 \right) + U_{2,1} \mathbf{t}_2 + U_2 \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} \mathbf{t}_1 \right) + W_{,1} \mathbf{n} \\ + W \mathbf{n}_{,1} \end{aligned} \quad (2.115)$$

sendo que U_1 , U_2 e W , foram definidos anteriormente pelas equações (2.97), (2.98) e (2.99), respectivamente.

Substituindo $\mathbf{U}_{,1}$, $\mathbf{p}_{,1}$ e $\|\mathbf{p}_{,1}\|$, das equações (2.115), (2.112) e (2.113) na equação (2.108), chega-se:

$$\varepsilon_{11} = \frac{[A_1(1 + \frac{\zeta}{R_1}) \mathbf{t}_1] \cdot [U_{1,1} \mathbf{t}_1 + U_1(-\frac{A_1}{R_1} \mathbf{n} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} \mathbf{t}_2) + U_{2,1} \mathbf{t}_2 + U_2(\frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} \mathbf{t}_1) + W_{,1} \mathbf{n} + W \mathbf{n}_{,1}]}{[A_1(1 + \frac{\zeta}{R_1})]^2} \quad (2.116)$$

Fazendo os produtos escalares, e considerando a ortogonalidade dos vetores, chega-se a:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{A_1 \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right)} \left[\frac{\partial U_1}{\partial \theta_1} + \frac{U_2}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} + W \frac{A_1}{R_1} \right] \quad (2.117)$$

Em que U_1 , U_2 e W são os deslocamentos nas três direções do sistema cartesiano de coordenadas x_1 , x_2 e x_3 .

De forma similar, ε_{22} pode ser desenvolvido, obtendo-se:

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{A_2 \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right)} \left[\frac{\partial U_2}{\partial \theta_2} + \frac{U_1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \theta_1} + W \frac{A_2}{R_2} \right] \quad (2.118)$$

A deformação na direção normal à superfície de referência também pode ser definida, como:

$$\varepsilon_n = \varepsilon_{33} = \frac{\partial W}{\partial \zeta} = \frac{\partial (w(\theta_1, \theta_2))}{\partial \zeta} = 0 \quad (2.119)$$

2.2.3.2 Deformações Cisalhantes

As deformações cisalhantes podem ser definidas considerando-se a diferença de um ângulo θ , conforme ilustrado na Figura 2.5, na condição deformada e na condição indeformada, conforme a equação a seguir:

$$\gamma_{12} = \cos \bar{\theta} - \cos \theta \quad (2.120)$$

Considerando a propriedade do produto escalar $\mathbf{a} * \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta$, pode-se reescrever a equação anterior, como:

$$\gamma_{12} = \frac{\bar{\mathbf{r}}_{,1} * \bar{\mathbf{r}}_{,2}}{\|\bar{\mathbf{r}}_{,1}\| \|\bar{\mathbf{r}}_{,2}\|} - \frac{\mathbf{r}_{,1} * \mathbf{r}_{,2}}{\|\mathbf{r}_{,1}\| \|\mathbf{r}_{,2}\|} \quad (2.121)$$

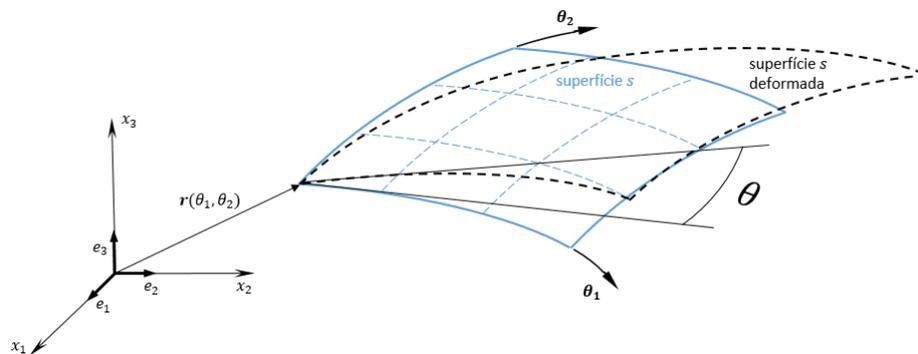


Figura 2.5 - Representação da deformação cisalhante no plano da superfície de referência

Considerando uma superfície com espessura, passa a considerar-se o vetor \mathbf{p} , conforme equação (2.100), em substituição ao vetor \mathbf{r} , dessa forma:

$$\gamma_{12} = \frac{\bar{\mathbf{p}}_{,1} * \bar{\mathbf{p}}_{,2}}{\|\bar{\mathbf{p}}_{,1}\| \|\bar{\mathbf{p}}_{,2}\|} - \frac{\mathbf{p}_{,1} * \mathbf{p}_{,2}}{\|\mathbf{p}_{,1}\| \|\mathbf{p}_{,2}\|} \quad (2.122)$$

Aplicando-se a equação (2.105) na equação anterior, e considerando que $\|\bar{\mathbf{p}}_{,1}\| \approx \|\mathbf{p}_{,1}\|$ e $\|\bar{\mathbf{p}}_{,2}\| \approx \|\mathbf{p}_{,2}\|$, pode-se reescrever:

$$\gamma_{12} = \frac{(\mathbf{p}_{,1} + \mathbf{U}_{,1}) * (\mathbf{p}_{,2} + \mathbf{U}_{,2}) - \mathbf{p}_{,1} * \mathbf{p}_{,2}}{\|\mathbf{p}_{,1}\| \|\mathbf{p}_{,2}\|} \quad (2.123)$$

Com a utilização da propriedade distributiva, chega-se a:

$$\gamma_{12} = \frac{(\mathbf{p}_{,1} * \mathbf{p}_{,2} + \mathbf{p}_{,1} * \mathbf{U}_{,2} + \mathbf{U}_{,1} * \mathbf{p}_{,2} + \mathbf{U}_{,1} * \mathbf{U}_{,2}) - \mathbf{p}_{,1} * \mathbf{p}_{,2}}{\|\mathbf{p}_{,1}\| \|\mathbf{p}_{,2}\|} \quad (2.124)$$

Que pode ser reescrito, como:

$$\gamma_{12} = \frac{(\mathbf{p}_{,1} * \mathbf{U}_{,2}) + (\mathbf{U}_{,1} * \mathbf{p}_{,2})}{\|\mathbf{p}_{,1}\| \|\mathbf{p}_{,2}\|} + \frac{\mathbf{U}_{,1} * \mathbf{U}_{,2}}{\|\mathbf{p}_{,1}\| \|\mathbf{p}_{,2}\|} \quad (2.125)$$

Admitindo-se a hipótese de pequenos deslocamentos, o segundo termo do lado direito da equação (2.125) pode ser desconsiderado, por ser insignificante se comparado ao primeiro termo, chegando-se assim a:

$$\gamma_{12} = \frac{(\mathbf{p}_{,1} * \mathbf{U}_{,2}) + (\mathbf{U}_{,1} * \mathbf{p}_{,2})}{\|\mathbf{p}_{,1}\| \|\mathbf{p}_{,2}\|} \quad (2.126)$$

Considerando $\mathbf{U}(\theta_1, \theta_2, \zeta)$ conforme a equação (2.96), $\mathbf{U}_{,2}$ pode ser definido como:

$$\mathbf{U}_{,2} = U_{1,2} \mathbf{t}_1 + U_1 \mathbf{t}_{1,2} + U_{2,2} \mathbf{t}_2 + U_2 \mathbf{t}_{2,2} + W_{,2} \mathbf{n} + W \mathbf{n}_{,2} \quad (2.127)$$

Substituindo-se $\mathbf{t}_{1,2}$ e $\mathbf{t}_{2,2}$ a partir das equações (2.74) e (2.76), obtém-se:

$$\mathbf{U}_{,2} = U_{1,2} \mathbf{t}_1 + U_1 \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \theta_1} \mathbf{t}_2 + U_{2,2} \mathbf{t}_2 + U_2 - \frac{A_2}{R_2} \mathbf{n} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \theta_1} \mathbf{t}_1 + W_{,2} \mathbf{n} + W \mathbf{n}_{,2} \quad (2.128)$$

O vetor $\mathbf{p}_{,2}$ pode ser definido, como:

$$\mathbf{p}_{,2} = \frac{d\mathbf{r}}{d\theta_2} + \zeta \frac{d\mathbf{n}}{d\theta_2} = \mathbf{r}_{,2} + \zeta \mathbf{n}_{,2} \quad (2.129)$$

Substituindo-se $\mathbf{r}_{,2}$ e $\mathbf{n}_{,2}$, de forma similar ao realizado na equação (2.111):

$$\mathbf{p}_{,2} = A_2 \mathbf{t}_2 + \zeta \frac{A_2}{R_2} \mathbf{t}_2 = A_2 \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) \mathbf{t}_2 \quad (2.130)$$

A magnitude de $\mathbf{p}_{,2}$, representada por $\|\mathbf{p}_{,2}\|$, pode ser então definida como:

$$\|\mathbf{p}_{,2}\| = A_2 \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) \quad (2.131)$$

Inserindo $\mathbf{U}_{,1}$, $\mathbf{U}_{,2}$, $\mathbf{p}_{,1}$, $\|\mathbf{p}_{,1}\|$, $\mathbf{p}_{,2}$ e $\|\mathbf{p}_{,2}\|$, das equações (2.115), (2.128), (2.112), (2.113), (2.130) e (2.131), na equação (2.126), chega-se a:

$$\begin{aligned}
\gamma_{12} &= \frac{\left((A_1 \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right) \mathbf{t}_1) * (U_{1,2} \mathbf{t}_1 + U_1 \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \theta_1} \mathbf{t}_2 + U_{2,2} \mathbf{t}_2 + U_2 - \frac{A_2}{R_2} \mathbf{n} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \theta_1} \mathbf{t}_1 + W_{,2} \mathbf{n} + W \mathbf{n}_2) \right)}{\left(A_1 \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right) \right) \left(A_2 \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) \right)} \\
&+ \frac{\left((U_{1,1} \mathbf{t}_1 + U_1 \left(-\frac{A_1}{R_1} \mathbf{n} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} \mathbf{t}_2 \right) + U_{2,1} \mathbf{t}_2 + U_2 \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} \mathbf{t}_1 \right) + W_{,1} \mathbf{n} + W \mathbf{n}_1 \right) * (A_2 \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) \mathbf{t}_2) \right)}{\left(A_1 \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right) \right) \left(A_2 \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) \right)}
\end{aligned} \tag{2.132}$$

Realizando os produtos escalares, e considerando a ortogonalidade dos vetores, obtém-se:

$$\gamma_{12} = \frac{A_2 \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right)}{A_1 \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right)} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left[\frac{U_2}{A_2 \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right)} \right] + \frac{A_1 \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right)}{A_2 \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right)} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left[\frac{U_1}{A_1 \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right)} \right] \tag{2.133}$$

De forma similar, pode-se desenvolver expressões para os cisalhamentos fora do plano da superfície de referência, conforme apresentado nas equações seguintes:

$$\gamma_{13} = \frac{(\mathbf{p}_{,1} * \mathbf{U}_{,3}) + (\mathbf{U}_{,1} * \mathbf{p}_{,3})}{\|\mathbf{p}_{,1}\| \|\mathbf{p}_{,3}\|} \tag{2.134}$$

$$\gamma_{23} = \frac{(\mathbf{p}_{,2} * \mathbf{U}_{,3}) + (\mathbf{U}_{,2} * \mathbf{p}_{,3})}{\|\mathbf{p}_{,2}\| \|\mathbf{p}_{,3}\|} \tag{2.135}$$

sendo $\mathbf{p}_{,3} = \mathbf{n}$.

Substituindo as expressões para $\mathbf{p}_{,1}$, $\mathbf{p}_{,2}$, \mathbf{n} , $\mathbf{U}_{,1}$ e $\mathbf{U}_{,3}$, chega-se a:

$$\gamma_{13} = \frac{1}{A_1 \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right)} \frac{\partial W}{\partial \theta_1} + A_1 \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{U_1}{A_1 \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right)} \right] \tag{2.136}$$

$$\gamma_{23} = \frac{1}{A_2 \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right)} \frac{\partial W}{\partial \theta_2} + A_2 \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{U_2}{A_2 \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right)} \right] \tag{2.137}$$

Como as hipóteses de Kirchhoff-Love ainda não foram aplicadas, as equações apresentadas até esse ponto são válidas tanto para as relações cinemáticas de cascas finas quanto para cascas semi-espessas.

Considerando-se a hipótese de preservação da normal, os deslocamentos são distribuídos linearmente ao longo da espessura da casca. Podem então ser assumidas as

seguintes equações para a representação das componentes de deslocamento para um ponto da casca:

$$U_1(\theta_1, \theta_2, \zeta) = u_1(\theta_1, \theta_2) + \zeta u_1'(\theta_1, \theta_2, 0) \quad (2.138)$$

$$U_2(\theta_1, \theta_2, \zeta) = u_2(\theta_1, \theta_2) + \zeta u_2'(\theta_1, \theta_2, 0) \quad (2.139)$$

$$W(\theta_1, \theta_2, \zeta) = w(\theta_1, \theta_2) \quad (2.140)$$

em que a apóstrofe representa a derivação em relação a ζ . u_1 , u_2 e w representam os componentes do vetor de deslocamentos e um ponto sobre a superfície de referência, e u_1' e u_2' representam as rotações das tangentes à superfície de referência, orientadas nas direções das linhas paramétricas θ_1 e θ_2 .

Essas rotações, a partir de agora, são representadas por respectivamente por β_1 e β_2 , e podem ser determinadas pela aplicação da hipótese $\gamma_{1n} = \gamma_{2n} = 0$ e substituição de U_1 , U_2 e W , obtendo-se as seguintes equações:

$$\beta_1 = \frac{u_1}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \theta_1} \quad (2.141)$$

$$\beta_2 = \frac{u_2}{R_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \theta_2} \quad (2.142)$$

A substituição das equações (2.138) a (2.140) nas equações (2.117) e (2.118), que relacionam deformações e deslocamentos, permite obter:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right)} (\varepsilon_1^0 + \zeta \kappa_1) \quad (2.143)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right)} (\varepsilon_2^0 + \zeta \kappa_2) \quad (2.144)$$

De forma similar, fazendo a substituição na equação (2.133), chega-se a:

$$\gamma_{12} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right)} (\omega_1 + \zeta \tau_1) + \frac{1}{\left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right)} (\omega_2 + \zeta \tau_2) \quad (2.145)$$

$$\varepsilon_n = \gamma_{1n} = \gamma_{2n} = 0 \quad (2.146)$$

onde:

$$\varepsilon_1^0 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \theta_1} + \frac{u_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} + \frac{w}{R_1} \quad (2.147)$$

$$\varepsilon_2^0 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial \theta_2} + \frac{u_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \theta_1} + \frac{w}{R_2} \quad (2.148)$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \beta_1}{\partial \theta_1} + \frac{\beta_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} \quad (2.149)$$

$$\kappa_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \beta_2}{\partial \theta_2} - \frac{\beta_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \theta_1} \quad (2.150)$$

$$\omega_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2}{\partial \theta_1} - \frac{u_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} \quad (2.151)$$

$$\omega_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_1}{\partial \theta_2} - \frac{u_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \theta_1} \quad (2.152)$$

$$\tau_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \beta_2}{\partial \theta_1} - \frac{\beta_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} \quad (2.153)$$

$$\tau_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \beta_1}{\partial \theta_2} - \frac{\beta_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \theta_1} \quad (2.154)$$

Os valores de ε_1^0 , ε_2^0 , ω_1 e ω_2 representam as deformações normais e cisalhantes da superfície de referência, o que pode ser confirmado ao definir $\zeta = 0$. Os valores de κ_1 e κ_2 representam a mudança nas curvaturas, enquanto τ_1 e τ_2 representam as torções da superfície de referência ao longo da deformação [Marczak, 2016; Kraus, 1967; Dym, 1974].

2.2.4 Forças e momentos resultantes

As deformações e, portanto, as tensões, são distribuídas linearmente através da superfície de uma casca elástica fina. De maneira a ter uma teoria completamente bidimensional, é conveniente integrar as tensões em relação à espessura, eliminando assim as variações em relação a ζ . Realizando essa integração são obtidas forças (N_{ij}) e momentos resultantes (M_{ij}) estaticamente equivalentes.

Utilizando-se as relações constitutivas, as tensões são calculadas a partir das deformações, conforme equacionado a seguir:

$$\sigma_{11} = E_{11}^* \varepsilon_{11} + \nu_{21} E_{22}^* \varepsilon_{22} \quad (2.155)$$

$$\sigma_{22} = E_{22}^* \varepsilon_{22} + \nu_{12} E_{11}^* \varepsilon_{11} \quad (2.156)$$

$$\tau_{12} = G_{12} \gamma_{12} \quad (2.157)$$

onde:

$$E_i^* = \frac{E_i}{\left(\frac{1}{\nu_{12}\nu_{21}}\right)}, \quad i = 1, 2 \quad (2.158)$$

As forças e momentos resultantes obtidas pela integração das distribuições de tensão ao longo da superfície da casca são definidas por unidade de comprimento do arco da superfície de referência.

As forças e momentos resultantes da componente de tensão σ_{11} , distribuída ao longo de uma face em que θ_1 é constante, são definidas por:

$$N_{11} = \int_{\zeta} \frac{\sigma_1 d\Sigma_2(\zeta)}{ds_2(0)} = \int_{\zeta} \sigma_1 \frac{A_2 \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) d\theta_2 d\zeta}{A_2 d\theta_2} = \int_{\zeta} \sigma_1 \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) d\zeta \quad (2.159)$$

$$M_{11} = \int_{\zeta} \frac{\zeta \sigma_1 d\Sigma_2(\zeta)}{ds_2(0)} = \int_{\zeta} \sigma_1 \frac{A_2 \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) d\theta_2 \zeta d\zeta}{A_2 d\theta_2} = \int_{\zeta} \sigma_1 \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) \zeta d\zeta \quad (2.160)$$

As reações restantes podem ser determinadas de maneira similar, dessa forma:

$$N_{12} = \int_{\zeta} \tau_{12} \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) d\zeta \quad (2.161)$$

$$Q_{1n} = \int_{\zeta} \tau_{1n} \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) d\zeta \quad (2.162)$$

$$N_{22} = \int_{\zeta} \sigma_{22} \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right) d\zeta \quad (2.163)$$

$$N_{21} = \int_{\zeta} \tau_{21} \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right) d\zeta \quad (2.164)$$

$$Q_{2n} = \int_{\zeta} \tau_{2n} \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right) d\zeta \quad (2.165)$$

$$M_{12} = \int_{\zeta} \tau_{12} \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) \zeta d\zeta \quad (2.166)$$

$$M_{22} = \int_{\zeta} \sigma_{22} \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right) \zeta d\zeta \quad (2.167)$$

$$M_{21} = \int_{\zeta} \tau_{21} \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right) \zeta d\zeta \quad (2.168)$$

Uma representação das forças e dos momentos resultantes é apresentada na Figura 2.6 (a) e (b), respectivamente.

É importante observar que a simetria do tensor de tensões ($\tau_{12} = \tau_{21}$) não implica necessariamente na igualdade de N_{12} e N_{21} , assim como M_{12} e M_{21} . Essas resultantes serão iguais somente para os casos em que os raios de curvatura R_1 e R_2 sejam iguais, como nos casos de cascas esféricas ou cascas planas [Kraus, 1967; Dym, 1974].

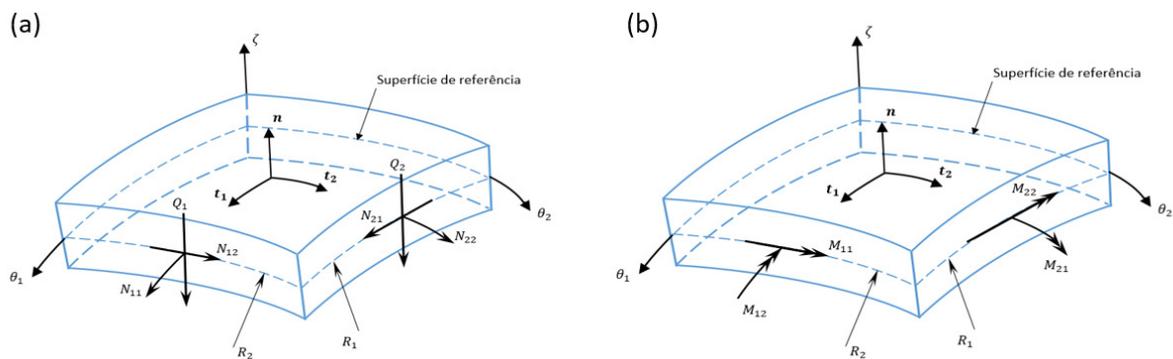


Figura 2.6 - Forças e momentos resultantes

2.2.5 Equações de equilíbrio

O princípio dos trabalhos virtuais (PTV) estabelece que o trabalho virtual interno deve ser igual ao trabalho virtual externo, portanto:

$$TVI = TVE \quad (2.169)$$

O trabalho virtual interno pode ser definido como a integral no volume do produto interno do tensor de tensões σ_{ij} e do tensor de deformações virtuais $\delta\varepsilon_{ij}$, da seguinte forma:

$$TVI = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} d\Omega \quad (2.170)$$

Já, o trabalho virtual externo pode ser definido como a integral no volume do produto interno do vetor das forças de corpo e vetor dos deslocamentos virtuais, somado à integral no contorno do produto interno do vetor das forças externas e do vetor de deslocamentos virtuais, portanto:

$$TVE = \int_{\Omega} \rho b_i \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma} t_i \delta u_i d\Gamma \quad (2.171)$$

Assim, o PTV, representado na equação (2.169) pode ser reescrito, como:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \rho b_i \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma} t_i \delta u_i d\Gamma \quad (2.172)$$

Podendo ser reescrito, para uma casca, como:

$$\begin{aligned} & \int_S \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_{11} \delta\varepsilon_{11} + \sigma_{22} \delta\varepsilon_{22} + \sigma_{33} \delta\varepsilon_{33} + \sigma_{12} \delta\gamma_{12} + \sigma_{23} \delta\gamma_{23} + \sigma_{13} \delta\gamma_{13}] d\zeta dS \\ &= \int_S \int_{-h/2}^{h/2} [\rho b_1 \delta U_1 + \rho b_2 \delta U_2 + \rho b_3 \delta U_3] d\zeta dS \\ &+ \int_{\Gamma} [t_1 \delta U_1 + t_2 \delta U_2 + t_3 \delta U_3] d\Gamma \end{aligned} \quad (2.173)$$

em que, σ_{ij} representa os componentes do tensor de tensões, ε_{ii} representa as deformações de alongamento, γ_{ij} representa as deformações cisalhantes, b_i representa as forças de corpo (ex. gravitacional, magnética, etc), ρ representa a densidade do meio, U_i representa os deslocamentos e t_i representa as forças aplicadas.

As deformações podem ser separadas em suas componentes de membrana e de flexão, e reescrevendo a equação anterior, chega-se a:

$$\begin{aligned}
& \int_S \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_{11}(\delta\epsilon_{11} + \zeta\delta K_{11}) + \sigma_{22}(\delta\epsilon_{22} + \zeta\delta K_{22}) + \sigma_{33}(\delta\epsilon_{33} + \zeta\delta K_{33}) \\
& \quad + \sigma_{12}(\delta\Gamma_{12} + \zeta\delta K_{12}) + \sigma_{23}\delta\gamma_{23} + \sigma_{13}\delta\gamma_{13}]d\zeta dS \\
& = \int_S \int_{-h/2}^{h/2} [\rho b_1\delta U_1 + \rho b_2\delta U_2 + \rho b_3\delta U_3]d\zeta dS \\
& \quad + \int_{\Gamma} [t_1\delta U_1 + t_2\delta U_2 + t_3\delta U_3]d\Gamma
\end{aligned} \tag{2.174}$$

em que ϵ_{ii} representa as componentes de alongamento das deformações de membrana, Γ_{ij} representa as componentes de cisalhamento das deformações de membrana e K_{ij} representa as deformações de flexão.

Resolvendo a integral na espessura, chega-se a:

$$\begin{aligned}
& \int_S \{[N_{11}\delta\epsilon_{11} + N_{22}\delta\epsilon_{22} + N_{12}\delta\Gamma_{12}] + [M_{11}\delta K_{11} + M_{22}\delta K_{22} + M_{12}\delta K_{12}] \\
& \quad + Q_1\delta\gamma_{13} + Q_2\delta\gamma_{23}\}dS \\
& = \int_S [p_1\delta u_1 + p_2\delta u_2 + p_3\delta u_3 - m_1\delta\beta_1 - m_2\delta\beta_2]dS \\
& \quad + \int_{\Gamma} [t_1\delta U_1 + t_2\delta U_2 + t_3\delta U_3]d\Gamma
\end{aligned} \tag{2.175}$$

onde $\beta_i = \frac{1}{A_i} \frac{\partial w}{\partial \theta_i} - \frac{u_i}{R_i}$

Para cascas fisicamente finas, cuja espessura é muito menor que as outras dimensões, o princípio dos trabalhos virtuais simplifica-se a:

$$\begin{aligned}
& \int_S [N_{11}\delta\epsilon_{11} + N_{22}\delta\epsilon_{22} + N_{12}\delta\Gamma_{12} + M_{11}\delta K_{11} + M_{22}\delta K_{22} + M_{12}\delta K_{12}]dS \\
& = \int_S [p_1\delta u_1 + p_2\delta u_2 + p_3\delta u_3 - m_1\delta\beta_1 - m_2\delta\beta_2]dS \\
& \quad + \int_{\Gamma} [t_1\delta U_1 + t_2\delta U_2 + t_3\delta U_3]d\Gamma
\end{aligned} \tag{2.176}$$

Assumindo a condição de casca geometricamente fina, os raios R_1 e R_2 passam a ter valor muito grande se comparados à espessura. Dessa forma, aplicando as equações (2.138) a (2.142), chega-se a:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{A_1} \left(\frac{\partial U_1}{\partial \theta_1} + \frac{U_2}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} + W \frac{A_1}{R_1} \right) - \frac{\zeta}{A_1} \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial \theta_1} + \frac{\beta_2}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} \right) \quad (2.177)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{A_2} \left(\frac{\partial U_2}{\partial \theta_2} + \frac{U_1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \theta_1} + W \frac{A_2}{R_2} \right) - \frac{\zeta}{A_2} \left(\frac{\partial \beta_2}{\partial \theta_2} + \frac{\beta_1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \theta_1} \right) \quad (2.178)$$

$$\varepsilon_{33} = 0 \quad (2.179)$$

$$\gamma_{12} = \left[\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\frac{U_2}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\frac{U_1}{A_1} \right) \right] - \zeta \left[\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\frac{\beta_2}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\frac{\beta_1}{A_1} \right) \right] \quad (2.180)$$

$$\gamma_{13} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial W}{\partial \theta_1} - \beta_1 - \frac{U_1}{A_1} \quad (2.181)$$

$$\gamma_{23} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial W}{\partial \theta_2} - \beta_2 - \frac{U_2}{A_2} \quad (2.182)$$

A relações cinemáticas para cascas geometricamente finas podem também ser divididas em uma parte relativa aos esforços de membrana e outra parte relativa aos esforços de flexão, para as deformações ε_{11} , ε_{22} e γ_{12} , de acordo com as seguintes equações:

$$\varepsilon_{11} = (\epsilon_{11} + \zeta K_{11}) \quad (2.183)$$

$$\varepsilon_{22} = (\epsilon_{22} + \zeta K_{22}) \quad (2.184)$$

$$\gamma_{12} = (\Gamma_{12} + \zeta K_{12}) \quad (2.185)$$

em que:

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{A_1} \left(\frac{\partial U_1}{\partial \theta_1} + \frac{U_2}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} + W \frac{A_1}{R_1} \right) \quad (2.186)$$

$$\epsilon_{22} = \frac{1}{A_2} \left(\frac{\partial U_2}{\partial \theta_2} + \frac{U_1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \theta_1} + W \frac{A_2}{R_2} \right) \quad (2.187)$$

$$\Gamma_{12} = \left[\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\frac{U_2}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\frac{U_1}{A_1} \right) \right] \quad (2.188)$$

$$K_{11} = -\frac{1}{A_1} \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial \theta_1} + \frac{\beta_2}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} \right) \quad (2.189)$$

$$K_{22} = -\frac{1}{A_2} \left(\frac{\partial \beta_2}{\partial \theta_2} + \frac{\beta_1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \theta_1} \right) \quad (2.190)$$

$$K_{12} = -\left[\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\frac{\beta_2}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\frac{\beta_1}{A_1} \right) \right] \quad (2.191)$$

Esse procedimento não é aplicável para as equações que definem ε_{33} , γ_{13} e γ_{23} , já que essas não possuem parcela de deformações de membrana.

Substituindo as expressões para deformação das equações (2.186) a (2.191), na equação (2.175), chega-se a:

$$\begin{aligned} & \int_S \left[N_{11} \frac{1}{A_1} \left(\frac{\partial \delta U_1}{\partial \theta_1} + \frac{\delta U_2}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} + \delta W \frac{A_1}{R_1} \right) + N_{22} \frac{1}{A_2} \left(\frac{\partial \delta U_2}{\partial \theta_2} + \frac{\delta U_1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \theta_1} + \delta W \frac{A_2}{R_2} \right) \right. \\ & \quad + N_{12} \left[\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\frac{\delta U_2}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\frac{\delta U_1}{A_1} \right) \right] - M_{11} \frac{1}{A_1} \left(\frac{\partial \delta \beta_1}{\partial \theta_1} + \frac{\delta \beta_2}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} \right) \\ & \quad - M_{22} \frac{1}{A_2} \left(\frac{\partial \delta \beta_2}{\partial \theta_2} + \frac{\delta \beta_1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \theta_1} \right) - M_{12} \left[\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\frac{\delta \beta_2}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\frac{\delta \beta_1}{A_1} \right) \right] \\ & \quad \left. + Q_1 \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \delta W}{\partial \theta_1} - \delta \beta_1 - \frac{\delta U_1}{A_1} \right) + Q_2 \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \delta W}{\partial \theta_2} - \delta \beta_2 - \frac{\delta U_2}{A_2} \right) \right] A_1 A_2 d\theta_1 d\theta_2 \\ & = \int_S [p_1 \delta u_1 + p_2 \delta u_2 + p_3 \delta u_3 - m_1 \delta \beta_1 - m_2 \delta \beta_2] A_1 A_2 d\theta_1 d\theta_2 \\ & \quad + \int_{\Gamma} [t_1 \delta U_1 + t_2 \delta U_2 + t_3 \delta U_3] d\Gamma \end{aligned} \quad (2.192)$$

Podemos então reescrever a equação anterior, abrindo os termos e multiplicando por $A_1 A_2$, como:

$$\begin{aligned}
& \int_S \left[\left(N_{11} \frac{\partial \delta U_1}{\partial \theta_1} A_2 + N_{11} \delta U_2 \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} + N_{11} \delta W \frac{A_1 A_2}{R_1} \right) \right. \\
& \quad + \left(N_{22} \frac{\partial \delta U_2}{\partial \theta_2} A_1 + N_{22} \delta U_1 \frac{\partial A_2}{\partial \theta_1} + N_{22} \delta W \frac{A_1 A_2}{R_2} \right) \\
& \quad + \left(N_{12} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\frac{\delta U_2}{A_2} \right) A_2^2 + N_{12} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\frac{\delta U_1}{A_1} \right) A_1^2 \right) \\
& \quad + \left(-M_{11} \frac{\partial \delta \beta_1}{\partial \theta_1} A_2 - M_{11} \delta \beta_2 \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} \right) + \left(-M_{22} \frac{\partial \delta \beta_2}{\partial \theta_2} A_1 - M_{22} \delta \beta_1 \frac{\partial A_2}{\partial \theta_1} \right) \\
& \quad + \left(-M_{12} A_2^2 \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\frac{\delta \beta_2}{A_2} \right) - M_{12} A_1^2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\frac{\delta \beta_1}{A_1} \right) \right) \\
& \quad + \left(Q_1 A_2 \frac{\partial \delta W}{\partial \theta_1} - Q_1 \delta \beta_1 A_1 A_2 - Q_1 \delta U_1 A_2 \right) \\
& \quad \left. + \left(Q_2 \frac{\partial \delta W}{\partial \theta_2} A_1 - Q_2 \delta \beta_2 A_1 A_2 - Q_2 \delta U_2 A_1 \right) \right] d\theta_1 d\theta_2 \\
& = \int_S [p_1 \delta u_1 + p_2 \delta u_2 + p_3 \delta u_3 - m_1 \delta \beta_1 - m_2 \delta \beta_2] A_1 A_2 d\theta_1 d\theta_2 \\
& \quad + \int_\Gamma [t_1 \delta U_1 + t_2 \delta U_2 + t_3 \delta U_3] d\Gamma
\end{aligned} \tag{2.193}$$

Aplicando a regra da derivação do quociente $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ aos termos $\frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\frac{\delta U_2}{A_2}\right)$, $\frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\frac{\delta U_1}{A_1}\right)$, $\frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\frac{\delta \beta_2}{A_2}\right)$ e $\frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\frac{\delta \beta_1}{A_1}\right)$, obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\frac{\delta U_2}{A_2} \right) = \frac{\frac{\partial \delta U_2}{\partial \theta_1} A_2 - \delta U_2 \frac{\partial A_2}{\partial \theta_1}}{A_2^2} \tag{2.194}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\frac{\delta U_1}{A_1} \right) = \frac{\frac{\partial \delta U_1}{\partial \theta_2} A_1 - \delta U_1 \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2}}{A_1^2} \tag{2.195}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\frac{\delta \beta_2}{A_2} \right) = \frac{\frac{\partial \delta \beta_2}{\partial \theta_1} A_2 - \delta \beta_2 \frac{\partial A_2}{\partial \theta_1}}{A_2^2} \tag{2.196}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\frac{\delta \beta_1}{A_1} \right) = \frac{\frac{\partial \delta \beta_1}{\partial \theta_2} A_1 - \delta \beta_1 \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2}}{A_1^2} \tag{2.197}$$

Substituindo as equações (2.194) a (2.197) na equação (2.193), chega-se a:

$$\begin{aligned}
& \int_S \left[\left(N_{11} \frac{\partial \delta U_1}{\partial \theta_1} A_2 + N_{11} \delta U_2 \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} + N_{11} \delta W \frac{A_1 A_2}{R_1} \right) + \left(N_{22} \frac{\partial \delta U_2}{\partial \theta_2} A_1 + N_{22} \delta U_1 \frac{\partial A_2}{\partial \theta_1} + N_{22} \delta W \frac{A_1 A_2}{R_2} \right) \right. \\
& + \left(N_{12} \left(\frac{\partial \delta U_2}{\partial \theta_1} A_2 - \delta U_2 \frac{\partial A_2}{\partial \theta_1} \right) A_2^2 + N_{12} \left(\frac{\partial \delta U_1}{\partial \theta_2} A_1 - \delta U_1 \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} \right) A_1^2 \right) \\
& + \left(-M_{11} \frac{\partial \delta \beta_1}{\partial \theta_1} A_2 - M_{11} \delta \beta_2 \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} \right) + \left(-M_{22} \frac{\partial \delta \beta_2}{\partial \theta_2} A_1 - M_{22} \delta \beta_1 \frac{\partial A_2}{\partial \theta_1} \right) \\
& + \left(-M_{12} A_2^2 \left(\frac{\partial \delta \beta_2}{\partial \theta_1} A_2 - \delta \beta_2 \frac{\partial A_2}{\partial \theta_1} \right) - M_{12} A_1^2 \left(\frac{\partial \delta \beta_1}{\partial \theta_2} A_1 - \delta \beta_1 \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} \right) \right) \\
& + \left(Q_1 A_2 \frac{\partial \delta W}{\partial \theta_1} - Q_1 \delta \beta_1 A_1 A_2 - Q_1 \delta U_1 A_2 \right) \\
& \left. + \left(Q_2 \frac{\partial \delta W}{\partial \theta_2} A_1 - Q_2 \delta \beta_2 A_1 A_2 - Q_2 \delta U_2 A_1 \right) \right] d\theta_1 d\theta_2 \\
& = \int_S [p_1 \delta u_1 + p_2 \delta u_2 + p_3 \delta u_3 - m_1 \delta \beta_1 - m_2 \delta \beta_2] A_1 A_2 d\theta_1 d\theta_2 \\
& + \int_{\Gamma} [t_1 \delta U_1 + t_2 \delta U_2 + t_3 \delta U_3] d\Gamma
\end{aligned} \tag{2.198}$$

Que pode ser reescrita, como:

$$\begin{aligned}
& \int_S \left[\left(N_{11} \frac{\partial \delta U_1}{\partial \theta_1} A_2 + N_{11} \delta U_2 \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} + N_{11} \delta W \frac{A_1 A_2}{R_1} \right) \right. \\
& + \left(N_{22} \frac{\partial \delta U_2}{\partial \theta_2} A_1 + N_{22} \delta U_1 \frac{\partial A_2}{\partial \theta_1} + N_{22} \delta W \frac{A_1 A_2}{R_2} \right) \\
& + \left(N_{12} \frac{\partial \delta U_2}{\partial \theta_1} A_2 - N_{12} \delta U_2 \frac{\partial A_2}{\partial \theta_1} + N_{12} \frac{\partial \delta U_1}{\partial \theta_2} A_1 - N_{12} \delta U_1 \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} \right) \\
& + \left(-M_{11} \frac{\partial \delta \beta_1}{\partial \theta_1} A_2 - M_{11} \delta \beta_2 \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} \right) + \left(-M_{22} \frac{\partial \delta \beta_2}{\partial \theta_2} A_1 - M_{22} \delta \beta_1 \frac{\partial A_2}{\partial \theta_1} \right) \\
& + \left(-M_{12} \frac{\partial \delta \beta_2}{\partial \theta_1} A_2 + M_{12} \delta \beta_2 \frac{\partial A_2}{\partial \theta_1} - M_{12} \frac{\partial \delta \beta_1}{\partial \theta_2} A_1 + M_{12} \delta \beta_1 \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} \right) \\
& + \left(Q_1 A_2 \frac{\partial \delta W}{\partial \theta_1} - Q_1 \delta \beta_1 A_1 A_2 - Q_1 \delta U_1 A_2 \right) \\
& \left. + \left(Q_2 \frac{\partial \delta W}{\partial \theta_2} A_1 - Q_2 \delta \beta_2 A_1 A_2 - Q_2 \delta U_2 A_1 \right) \right] d\theta_1 d\theta_2 \\
& = \int_S [p_1 \delta u_1 + p_2 \delta u_2 + p_3 \delta u_3 - m_1 \delta \beta_1 - m_2 \delta \beta_2] A_1 A_2 d\theta_1 d\theta_2 \\
& + \int_{\Gamma} [t_1 \delta U_1 + t_2 \delta U_2 + t_3 \delta U_3] d\Gamma
\end{aligned} \tag{2.199}$$

De forma a possibilitar que os termos δu , δv , δw , $\delta\beta_1$ e $\delta\beta_2$ sejam isolados e as equações de equilíbrio sejam obtidas, aplica-se a integração por partes aos termos em que os mesmo estejam envolvidos em derivadas. A integração por partes é realizada conforme a equação abaixo:

$$\int_A N_{ij}A_k \frac{\partial \delta u}{\partial \theta_l} d\theta_1 d\theta_2 = \int_{\partial A} N_{ij}A_k \delta u d\partial A - \int_A \frac{\partial(N_{ij}A_k)}{\partial \theta_l} \delta u d\theta_1 d\theta_2 \quad (2.200)$$

Com a aplicação da integração por partes nos termos envolvidos em derivadas, chega-se a:

$$\int_S N_{11}A_2 \frac{\partial \delta U_1}{\partial \theta_1} d\theta_1 d\theta_2 = \int_{\partial \Gamma} N_{11}A_2 \delta U_1 \partial \Gamma - \int_S \frac{\partial(N_{11}A_2)}{\theta_1} \delta U_1 d\theta_1 d\theta_2 \quad (2.201)$$

$$\int_S N_{22}A_1 \frac{\partial \delta U_2}{\partial \theta_2} d\theta_1 d\theta_2 = \int_{\partial \Gamma} N_{22}A_1 \delta U_2 \partial \Gamma - \int_S \frac{\partial(N_{22}A_1)}{\partial \theta_2} \delta U_2 d\theta_1 d\theta_2 \quad (2.202)$$

$$\int_S N_{12}A_2 \frac{\partial \delta U_2}{\partial \theta_1} d\theta_1 d\theta_2 = \int_{\partial \Gamma} N_{12}A_2 \delta U_2 \partial \Gamma - \int_S \frac{\partial(N_{12}A_2)}{\partial \theta_1} \delta U_2 d\theta_1 d\theta_2 \quad (2.203)$$

$$\int_S N_{12}A_1 \frac{\partial \delta U_1}{\partial \theta_2} d\theta_1 d\theta_2 = \int_{\partial \Gamma} N_{12}A_1 \delta U_1 \partial \Gamma - \int_S \frac{\partial(N_{12}A_1)}{\partial \theta_2} \delta U_1 d\theta_1 d\theta_2 \quad (2.204)$$

$$\int_S M_{11}A_2 \frac{\partial \delta \beta_1}{\partial \theta_1} d\theta_1 d\theta_2 = \int_{\partial \Gamma} M_{11}A_2 \delta \beta_1 \partial \Gamma - \int_S \frac{\partial(M_{11}A_2)}{\partial \theta_1} \delta \beta_1 d\theta_1 d\theta_2 \quad (2.205)$$

$$\int_S M_{22}A_1 \frac{\partial \delta \beta_2}{\partial \theta_2} d\theta_1 d\theta_2 = \int_{\partial \Gamma} M_{22}A_1 \delta \beta_2 \partial \Gamma - \int_S \frac{\partial(M_{22}A_1)}{\partial \theta_2} \delta \beta_2 d\theta_1 d\theta_2 \quad (2.206)$$

$$\int_S M_{12}A_2 \frac{\partial \delta \beta_2}{\partial \theta_1} d\theta_1 d\theta_2 = \int_{\partial \Gamma} M_{12}A_2 \delta \beta_2 \partial \Gamma - \int_S \frac{\partial(M_{12}A_2)}{\partial \theta_1} \delta \beta_2 d\theta_1 d\theta_2 \quad (2.207)$$

$$\int_S M_{12}A_1 \frac{\partial \delta \beta_1}{\partial \theta_2} d\theta_1 d\theta_2 = \int_{\partial \Gamma} M_{12}A_1 \delta \beta_1 \partial \Gamma - \int_S \frac{\partial(M_{12}A_1)}{\partial \theta_2} \delta \beta_1 d\theta_1 d\theta_2 \quad (2.208)$$

$$\int_S Q_1A_2 \frac{\partial \delta W}{\partial \theta_1} d\theta_1 d\theta_2 = \int_{\partial \Gamma} Q_1A_2 \delta W \partial \Gamma - \int_S \frac{\partial(Q_1A_2)}{\partial \theta_1} \delta W d\theta_1 d\theta_2 \quad (2.209)$$

$$\int_S Q_2 A_1 \frac{\partial \delta W}{\partial \theta_2} d\theta_1 d\theta_2 = \int_{\partial \Gamma} Q_2 A_1 \delta W \partial \Gamma - \int_S \frac{\partial(Q_2 A_1)}{\partial \theta_2} \delta W d\theta_1 d\theta_2 \quad (2.210)$$

Substituindo as equações (2.201) a (2.210) na equação (2.199), chega-se a:

$$\begin{aligned} \int_S \left[-\frac{\partial(N_{11}A_2)}{\theta_1} \delta U_1 + N_{11} \delta U_2 \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} + N_{11} \delta W \frac{A_1 A_2}{R_1} - \frac{\partial(N_{22}A_1)}{\partial \theta_2} \delta U_2 + N_{22} \delta U_1 \frac{\partial A_2}{\partial \theta_1} \right. \\ + N_{22} \delta W \frac{A_1 A_2}{R_2} - \frac{\partial(N_{12}A_2)}{\partial \theta_1} \delta U_2 - N_{12} \delta U_2 \frac{\partial A_2}{\partial \theta_1} - \frac{\partial(N_{12}A_1)}{\partial \theta_2} \delta U_1 - N_{12} \delta U_1 \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} \\ + \frac{\partial(M_{11}A_2)}{\partial \theta_1} \delta \beta_1 - M_{11} \delta \beta_2 \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} + \frac{\partial(M_{22}A_1)}{\partial \theta_2} \delta \beta_2 - M_{22} \delta \beta_1 \frac{\partial A_2}{\partial \theta_1} \\ + \frac{\partial(M_{12}A_2)}{\partial \theta_1} \delta \beta_2 + M_{12} \delta \beta_2 \frac{\partial A_2}{\partial \theta_1} + \frac{\partial(M_{12}A_1)}{\partial \theta_2} \delta \beta_1 + M_{12} \delta \beta_1 \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} \\ \left. - \frac{\partial(Q_1 A_2)}{\partial \theta_1} \delta W - Q_1 \delta \beta_1 A_1 A_2 - Q_1 \delta U_1 A_2 - \frac{\partial(Q_2 A_1)}{\partial \theta_2} \delta W - Q_2 \delta \beta_2 A_1 A_2 \right. \\ \left. - Q_2 \delta U_2 A_1 \right] d\theta_1 d\theta_2 \\ + \int_{\partial \Gamma} [N_{11} A_2 \delta U_1 + N_{22} A_1 \delta U_2 + N_{12} A_2 \delta U_2 + N_{12} A_1 \delta U_1 - M_{11} A_2 \delta \beta_1 \\ - M_{22} A_1 \delta \beta_2 - M_{12} A_2 \delta \beta_2 - M_{12} A_1 \delta \beta_1 + Q_1 A_2 \delta W + Q_2 A_1 \delta W] \partial \Gamma \\ = \int_S [p_1 \delta u_1 + p_2 \delta u_2 + p_3 \delta u_3 - m_1 \delta \beta_1 - m_2 \delta \beta_2] A_1 A_2 d\theta_1 d\theta_2 \\ + \int_{\Gamma} [t_1 \delta U_1 + t_2 \delta U_2 + t_3 \delta U_3] d\Gamma \end{aligned} \quad (2.211)$$

Separando as equações nos termos δU_1 , δU_2 , δW , $\delta \beta_1$ e $\delta \beta_2$, para a integral de superfície, chega-se a:

$$\begin{aligned} \int_S \left[-\frac{\partial(N_{11}A_2)}{\partial \theta_1} \delta U_1 + N_{22} \delta U_1 \frac{\partial A_2}{\partial \theta_1} - \frac{\partial(N_{12}A_1)}{\partial \theta_2} \delta U_1 - N_{12} \delta U_1 \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} \right. \\ \left. - Q_1 \delta U_1 A_2 \right] d\theta_1 d\theta_2 = \int_S p_1 \delta U_1 A_1 A_2 d\theta_1 d\theta_2 \end{aligned} \quad (2.212)$$

$$\begin{aligned} \int_S \left[N_{11} \delta U_2 \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} - \frac{\partial(N_{22}A_1)}{\partial \theta_2} \delta U_2 - \frac{\partial(N_{12}A_2)}{\partial \theta_1} \delta U_2 - N_{12} \delta U_2 \frac{\partial A_2}{\partial \theta_1} \right. \\ \left. - Q_2 \delta U_2 A_1 \right] d\theta_1 d\theta_2 = \int_S p_2 \delta U_2 A_1 A_2 d\theta_1 d\theta_2 \end{aligned} \quad (2.213)$$

$$\int_S \left[N_{11} \delta W \frac{A_1 A_2}{R_1} + N_{22} \delta W \frac{A_1 A_2}{R_2} - \frac{\partial(Q_1 A_2)}{\partial \theta_1} \delta W - \frac{\partial(Q_2 A_1)}{\partial \theta_2} \delta W \right] d\theta_1 d\theta_2 \quad (2.214)$$

$$= \int_S p_3 \delta W A_1 A_2 d\theta_1 d\theta_2$$

$$\int_S \left[\frac{\partial(M_{11} A_2)}{\partial \theta_1} \delta \beta_1 - M_{22} \delta \beta_1 \frac{\partial A_2}{\partial \theta_1} + \frac{\partial(M_{12} A_1)}{\partial \theta_2} \delta \beta_1 + M_{12} \delta \beta_1 \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} - Q_1 \delta \beta_1 A_1 A_2 \right] d\theta_1 d\theta_2 = \int_S -m_1 \delta \beta_1 A_1 A_2 d\theta_1 d\theta_2 \quad (2.215)$$

$$\int_S \left[-M_{11} \delta \beta_2 \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} + \frac{\partial(M_{22} A_1)}{\partial \theta_2} \delta \beta_2 + \frac{\partial(M_{12} A_2)}{\partial \theta_1} \delta \beta_2 + M_{12} \delta \beta_2 \frac{\partial A_2}{\partial \theta_1} - Q_2 \delta \beta_2 A_1 A_2 \right] d\theta_1 d\theta_2 = \int_S -m_2 \delta \beta_2 A_1 A_2 d\theta_1 d\theta_2 \quad (2.216)$$

E assim são obtidas as equações de equilíbrio:

$$-\frac{\partial(N_{11} A_2)}{\partial \theta_1} + N_{22} \frac{\partial A_2}{\partial \theta_1} - \frac{\partial(N_{12} A_1)}{\partial \theta_2} - N_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} - Q_1 A_2 = p_1 A_1 A_2 \quad (2.217)$$

$$N_{11} \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} - \frac{\partial(N_{22} A_1)}{\partial \theta_2} - \frac{\partial(N_{12} A_2)}{\partial \theta_1} - N_{12} \frac{\partial A_2}{\partial \theta_1} - Q_2 A_1 = p_2 A_1 A_2 \quad (2.218)$$

$$N_{11} \frac{A_1 A_2}{R_1} + N_{22} \frac{A_1 A_2}{R_2} - \frac{\partial(Q_1 A_2)}{\partial \theta_1} - \frac{\partial(Q_2 A_1)}{\partial \theta_2} = p_3 A_1 A_2 \quad (2.219)$$

$$\frac{\partial(M_{11} A_2)}{\partial \theta_1} - M_{22} \frac{\partial A_2}{\partial \theta_1} + \frac{\partial(M_{12} A_1)}{\partial \theta_2} + M_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} - Q_1 A_1 A_2 = -m_1 A_1 A_2 \quad (2.220)$$

$$-M_{11} \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} + \frac{\partial(M_{22} A_1)}{\partial \theta_2} + \frac{\partial(M_{12} A_2)}{\partial \theta_1} + M_{12} \frac{\partial A_2}{\partial \theta_1} - Q_2 A_1 A_2 = -m_2 A_1 A_2 \quad (2.221)$$

Separando as equações nos termos δU_1 , δU_2 , δW , $\delta \beta_1$ e $\delta \beta_2$, para a integral no contorno, chega-se a:

$$\int_{\partial\Gamma} [N_{11}A_2\delta U_1 + N_{12}A_1\delta U_1] \partial\Gamma = \int_{\Gamma} t_1\delta U_1 d\Gamma \quad (2.222)$$

$$\int_{\partial\Gamma} [N_{22}A_1\delta U_2 + N_{12}A_2\delta U_2] \partial\Gamma = \int_{\Gamma} t_2\delta U_2 d\Gamma \quad (2.223)$$

$$\int_{\partial\Gamma} [Q_1A_2\delta W + Q_2A_1\delta W] \partial\Gamma = \int_{\Gamma} t_3\delta W d\Gamma \quad (2.224)$$

$$\int_{\partial\Gamma} [-M_{11}A_2\delta\beta_1 - M_{12}A_1\delta\beta_1] \partial\Gamma = 0 \quad (2.225)$$

$$\int_{\partial\Gamma} [-M_{22}A_1\delta\beta_2 - M_{12}A_2\delta\beta_2] \partial\Gamma = 0 \quad (2.226)$$

E assim determinam-se as condições de contorno:

$$N_{11}A_2 + N_{12}A_1 = t_1 \quad (2.227)$$

$$N_{22}A_1 + N_{12}A_2 = t_2 \quad (2.228)$$

$$Q_1A_2 + Q_2A_1 = t_3 \quad (2.229)$$

$$-M_{11}A_2 - M_{12}A_1 = 0 \quad (2.230)$$

$$-M_{22}A_1 - M_{12}A_2 = 0 \quad (2.231)$$

As equações (2.217) a (2.221) e (2.227) a (2.231) representam as equações de equilíbrio e as condições de contorno, respectivamente [Marczak, 2016].

3 ELEMENTOS FINITOS DE CASCA

A resolução de problemas de casca utilizando a teoria tridimensional apresenta dificuldades devido ao elevado número de graus de liberdade, além de problemas numéricos quando a espessura se torna pequena se comparada às outras dimensões do elemento [Teixeira-Dias, et al., 2010].

Usando a formulação proposta por Ahmad, et al., 1970, os problemas tridimensionais de casca podem ser reduzidos a problemas bidimensionais. Esta formulação utiliza a restrição de normais retas, e dessa forma, a energia correspondente às tensões perpendiculares à superfície de referência é ignorada. A hipótese de que uma normal à superfície de referência continua normal após a deformação, aplicada na teoria de cascas finas, é propositalmente desconsiderada, o que permite que cascas semi-espessas apresentem deformações cisalhantes.

3.1 Teoria de Elementos Finitos

O método de elementos finitos pode ser justificado de diversas formas. Uma das formas bastante difundidas é a utilização do método aproximado de Galerkin [Fish e Belytschko, 2007], outra forma é a utilização do princípio da conservação de energia, como apresentado a seguir.

A explicação do método de elementos finitos utilizando-se os conceitos de energia, é baseada no equilíbrio entre o trabalho devido às forças atuando externamente na estrutura e que causam deslocamentos na mesma e o trabalho promovido pelas tensões internas e deformações do elemento [Filho, 2013]. Nesse contexto, o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) pode ser utilizado para estabelecer a equivalência energética entre as tensões internas atuantes no elemento e as forças nodais estaticamente equivalentes. Durante a aplicação de uma força externa e consequente deformação de um elemento, o trabalho externo é obtido por meio das forças nodais e dos respectivos deslocamentos, e esse trabalho deforma o elemento e gera tensões no mesmo, até que uma condição de equilíbrio entre a energia aplicada externamente e a energia armazenada internamente seja atingida. A energia de deformação, pode ser associada à condição deformada de um elemento. De forma geral, a equação de energia que deve ser obedecida pela estrutura como um todo é:

$$W_{EXTERNO} = W_{INTERNO} \quad (3.1)$$

Para a aplicação do PTV são definidos “deslocamento virtuais”, como uma condição externa arbitrária imposta ao elemento em forma de um conjunto de deslocamentos nodais.

Esses são representados com um asterisco sobre a representação dos deslocamentos. Ex: u_1^* , v_1^* , u_2^* , etc.

3.1.1 Trabalho virtual externo

O trabalho virtual externo é realizado pelas forças externas e os deslocamentos devido a essas forças em cada nó do elemento. Considerando um elemento finito de membrana formado por 4 nós, com 2 graus de liberdade por nó, podemos definir o trabalho virtual externo como o produto de cada grau de liberdade pela respectiva força atuante:

$$W_{EXTERNO} = f_{x1} * u_1^* + f_{y1} * v_1^* + f_{x2} * u_2^* + f_{y2} * v_2^* + f_{x3} * u_3^* + f_{y3} * v_3^* + f_{x4} * u_4^* + f_{y4} * v_4^* \quad (3.2)$$

A equação (3.2) pode ser reescrita em forma matricial, como:

$$W_{EXTERNO} = [u_1^* \quad v_1^* \quad u_2^* \quad v_2^* \quad u_3^* \quad v_3^* \quad u_4^* \quad v_4^*] * \begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \\ f_{x4} \\ f_{y4} \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

Podemos definir a primeira matriz do lado direito da equação (3.3) como o vetor transposto dos deslocamentos virtuais, e a segunda matriz representa as forças nodais atuantes no elemento. O trabalho virtual externo pode então ser reescrito como:

$$W_{EXTERNO} = \{\delta^*\}^T * \{f\} \quad (3.4)$$

3.1.2 Trabalho virtual interno

O trabalho virtual interno é definido como a integral no volume do produto interno entre os componentes de deformação e os respectivos componentes de tensão de um elemento, representado pela equação:

$$W_{INTERNO} = \int_{\Omega} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} d\Omega \quad (3.5)$$

O vetor dos componentes de deformação pode ser expresso como o produto de uma matriz $[B]$, que faz a relação entre os componentes de deformação e o vetor dos deslocamentos nodais do elemento, expressa como:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta^*\} \quad (3.6)$$

O vetor dos componentes de tensão pode ser expresso como o produto da matriz constitutiva $[D]$ e o vetor dos componentes de deformação, como:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (3.7)$$

A equação (3.5) pode então ser reescrita como:

$$W_{INTERNO} = \int_{\Omega} [[B]\{\delta^*\}]^T [D]\{\varepsilon\} d\Omega \quad (3.8)$$

Substituindo a equação (3.7) e rearranjando os dois primeiros termos, obtemos:

$$W_{INTERNO} = \int_{\Omega} \{\delta^*\}^T [B]^T [D] [B] \{\delta^*\} d\Omega \quad (3.9)$$

Sabendo que os deslocamentos nodais são independentes das coordenadas de volume do elemento, os vetores de deslocamentos nodais podem ser passados para a parte externa da integral, dessa forma é possível obter-se:

$$W_{INTERNO} = \{\delta^*\}^T * \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega * \{\delta^*\} \quad (3.10)$$

3.1.3 Definição da Matriz de Rigidez

Substituindo as equações (3.4) e (3.10) na equação (3.1), obtém-se:

$$\{\delta^*\}^T \{f\} = \{\delta^*\}^T \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega \{\delta^*\} \quad (3.11)$$

Excluindo-se o termo $\{\delta^*\}^T$, que representa o vetor transposto dos deslocamentos nodais, já que o mesmo está nos dois lados da igualdade, chega-se a:

$$\{f\} = \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega \{\delta^*\} \quad (3.12)$$

Sendo a matriz de rigidez do elemento, representada por $[K_e]$, definida como a matriz que relaciona um vetor de forças nodais $\{f\}$ com um vetor de deslocamentos nodais $\{\delta\}$ dos nós do elemento, pode-se escrever:

$$\{f\} = [K_e]\{\delta\} \quad (3.13)$$

Comparando a equação (3.12) com a equação (3.13), a matriz de rigidez do elemento $[K_e]$, pode ser definida, como:

$$[K_e] = \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega \quad (3.14)$$

Dessa forma, define-se a matriz de rigidez do elemento em forma de uma integral no volume, com termos da matriz que relaciona as deformações e deslocamentos nodais e a matriz constitutiva do material. A matriz de rigidez da estrutura completa, representada por $[K]$, será formada pela superposição das matrizes de rigidez $[K_e]$ de todos os elementos que compõem essa estrutura. Obtendo-se a matriz de rigidez da estrutura completa, é possível relacionar as forças nos nós da estrutura completa, representadas pelo vetor $\{F\}$, com os deslocamentos nesses mesmo nós, representados pelo vetor $\{U\}$, como:

$$\{F\} = [K]\{U\} \quad (3.15)$$

Portanto, de posse da matriz de rigidez da estrutura, é possível obter os deslocamentos de cada nó, a partir das forças aplicadas. Utilizando-se as relações (3.6) e (3.7), com a aplicação dos deslocamentos nodais, os campos de deformações e de tensões da estrutura serão determinados, e dessa forma o problema de mecânica dos sólidos é resolvido com a utilização do método de elemento finitos [Filho, 2013].

3.2 Sistemas de coordenadas

Para descrever e modelar o comportamento de uma estrutura formada por elementos finitos de casca é necessário definir sistemas de coordenadas adicionais ao referencial global implicitamente utilizado para os elementos uni, bi e tridimensionais. Para o elemento de casca utilizado, as relações cinemáticas baseadas no campo de deslocamentos determinam o comportamento do elemento finito. Além do referencial global, é necessário definir um sistema natural curvilíneo, um sistema de coordenadas local, associado a qualquer ponto da estrutura, e

um sistema de coordenadas local nodal, associado a cada nó de cada elemento [Teixeira-Dias, et al., 2010].

3.2.1 Sistema de coordenadas global

O sistema de coordenadas global é o sistema usualmente utilizado nos cálculos de engenharia e simulações e está relacionado ao referencial inercial externo ao elemento finito.

A geometria e posição do elemento é definida em relação a esse referencial. A representação de um vetor posição nodal em um nó genérico k de um elemento cujos nós estão localizados na sua superfície de referência, pode ser visto na Figura 3.1(a). Nessa figura estão representados, além dos eixos do referencial global x , y e z , os respectivos deslocamentos no referencial global u , v e w .

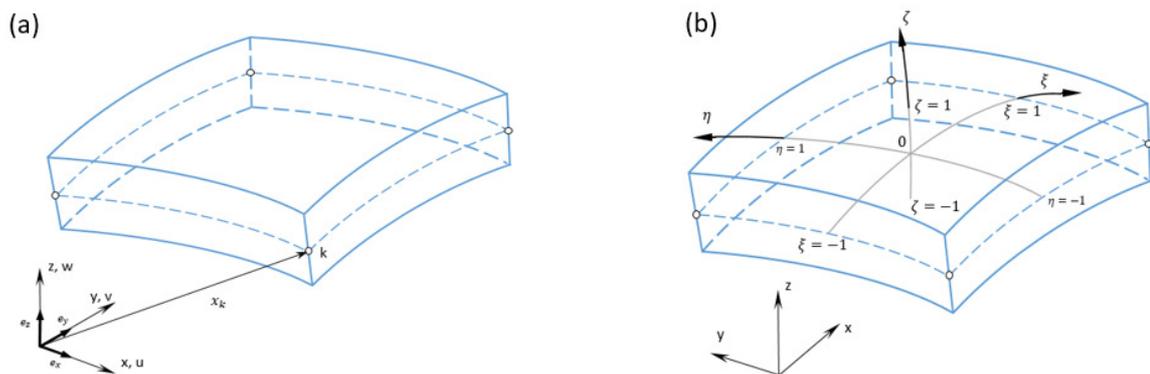


Figura 3.1 - Representação de um vetor posição x , em um nó k , no referencial global de coordenadas (a), e referencial curvilíneo natural de um elemento de casca (b).

3.2.2 Sistema de coordenadas curvilíneo natural

O sistema natural para um elemento de casca consiste em um par de coordenadas curvilíneas (ξ e η), que acompanha a superfície de referência do elemento e uma coordenada ζ ao longo da espessura do elemento, e dessa forma ortogonal à superfície de referência em um determinado ponto. As coordenadas no sistema natural variam no intervalo $[-1,1]$. Este referencial é equivalente ao referencial utilizado para elementos finitos isoparamétricos. A Figura 3.1(b) ilustra o sistema natural curvilíneo de um elemento de casca.

3.2.3 Sistema de coordenadas local

Um sistema de coordenadas local é necessário para o cálculo e representação de tensões e deformações dos elementos finitos de casca, uma vez que esse sistema é redefinido em cada ponto do elemento e dessa forma permite a análise de forma compreensível, enquanto a análise das tensões e deformações no sistema global tende a ser de difícil interpretação.

O sistema de coordenadas local pode ser definido em qualquer ponto de um elemento, sendo definido por suas coordenadas naturais (ξ, η, ζ) , e acompanha a deformação do elemento. A definição do sistema de eixos locais inicia pela determinação dos vetores tangentes aos eixos naturais curvilíneos sobre a superfície de referência do elemento.

Um eixo local z' , perpendicular à superfície de referência do elemento em um determinado ponto de coordenadas $(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$, pode ser definido utilizando-se o produto vetorial de dois vetores tangentes à superfície de referência nesse ponto. Esses vetores tangentes podem ser obtidos fazendo-se a derivada das componentes do vetor de coordenadas globais \mathbf{x} , ilustrado na Figura 3.2(a), em relação às coordenadas naturais ξ e η . O vetor que define o eixo local z' é obtido com a equação a seguir:

$$\mathbf{z}' = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

O vetor unitário \mathbf{n} , na direção do eixo local z' , pode então ser obtido pela normalização do vetor \mathbf{z}' , conforme equação a seguir:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{z}'}{\|\mathbf{z}'\|} = \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

O eixo local x' pode ser definido como a tangente do vetor de coordenadas globais em relação à coordenada natural ξ no ponto em análise, conforme equação a seguinte equação:

$$\mathbf{x}' = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

E o vetor unitário \mathbf{l} , na direção do eixo local x' é definido pela normalização do vetor \mathbf{x}' :

$$\mathbf{l} = \frac{\mathbf{x}'}{\|\mathbf{x}'\|} = \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

Um vetor unitário \mathbf{m} , correspondente à terceira direção local, pode ser obtido pelo produto vetorial dos vetores unitários \mathbf{n} e \mathbf{l} , dessa forma a terceira direção local é ortogonal às outras duas direções locais. O vetor unitário \mathbf{m} é definido por:

$$\mathbf{m} = \mathbf{n} \times \mathbf{l} = \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

A definição de um referencial local é ilustrada na Figura 3.2(a), podendo ser definido de forma similar para qualquer outro ponto do elemento.

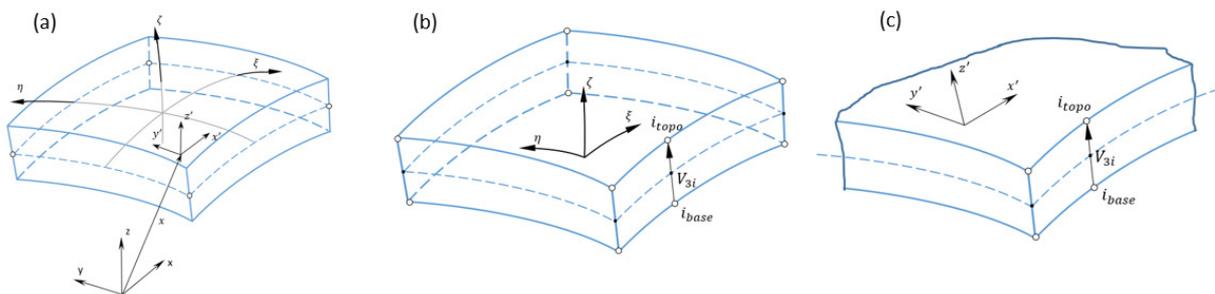


Figura 3.2 - Referencial local em um ponto de um elemento finito de casca (a), elemento de casca curva (b), e coordenadas locais (c).

3.2.4 Sistema de coordenadas local nodal

De forma análoga ao referencial local, definido anteriormente, o referencial local nodal é definido localmente, porém somente para as posições correspondentes aos nós k , que compõem o elemento de casca.

A determinação do sistema local nodal inicia pela obtenção do vetor normal no nó k , o vetor \mathbf{V}_{3k} . Uma das formas para a determinação desse vetor é a utilização das coordenadas globais do elemento finito tridimensional, em que os pontos na face interna e na face externa, relativos a um mesmo nó na superfície de referência são utilizados para a definição do vetor \mathbf{V}_{3k} . Dessa forma o vetor \mathbf{V}_{3k} não é necessariamente normal à superfície de referência. Outra forma de determinar o vetor \mathbf{V}_{3k} é a utilização das coordenadas do elemento de casca,

representado pela superfície de referência. Nesse caso são definidos vetores tangentes ao elemento finito de casca para posteriormente definir o vetor normal a partir desses, e não é necessário que haja um elemento finito tridimensional.

Considerando um vetor \mathbf{i} , como o vetor unitário na direção do eixo x das coordenadas globais, um vetor \mathbf{V}_1 , perpendicular ao plano formado pelos vetores \mathbf{V}_3 e \mathbf{i} pode ser definido pela equação a seguir:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{i} \times \mathbf{V}_3 \quad (3.21)$$

Caso a direção do vetor \mathbf{V}_3 seja a mesma do eixo x , o vetor unitário \mathbf{i} deve ser substituído por um vetor unitário \mathbf{j} , na direção do eixo y .

O vetor \mathbf{V}_2 deve ser ortogonal a ambos os vetores \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_3 , e portanto pode ser definido como:

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_3 \times \mathbf{V}_1 \quad (3.22)$$

Os vetores unitários nas três direções, \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 e \mathbf{v}_3 , são obtidos pela normalização dos vetores \mathbf{V}_1 , \mathbf{V}_2 e \mathbf{V}_3 , respectivamente.

3.3 Geometria e deslocamento do elemento

Observando um elemento de casca conforme apresentado na Figura 3.2(b), pode-se perceber que as faces do elemento são curvas, enquanto as seções ao longo da superfície são linhas retas, sendo a superfície de referência definida pela seção média. Um vetor \mathbf{V}_{3i} , normal à superfície de referência pode ser definido pela equação a seguir:

$$\mathbf{V}_{3i} = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{topo} - \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{base} \quad (3.23)$$

Definindo ξ e η como as duas coordenadas curvilíneas na superfície de referência da casca, e ζ como a coordenada na direção da normal à essa superfície, e assumindo que ξ , η e ζ variam entre -1 e 1, é possível definir uma relação entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas curvilíneas do sistema de coordenadas natural, como:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum N_i \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{ref} + \sum N_i \frac{\zeta}{2} \mathbf{V}_{3i} \quad (3.24)$$

sendo $N_i(\xi, \eta)$ as funções de forma, que assumem valor unitário em um nó (o nó i de cada função) e zero em todos os outros nós.

Os deslocamentos são definidos pelas três componentes cartesianas do nó da superfície de referência e duas rotações do vetor nodal \mathbf{V}_{3i} em torno das direções ortogonais ao mesmo. Considerando que essas duas direções sejam definidas pelos vetores unitários \mathbf{v}_{2i} e \mathbf{v}_{1i} , com rotações correspondentes α_i e β_i , é possível descrever os deslocamentos como:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum N_i \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}_{ref} + \sum N_i \zeta \frac{t_i}{2} [\mathbf{v}_{1i} - \mathbf{v}_{2i}] \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

Ou, na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n_{nos}} \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & \frac{a_i}{2} \zeta N_i \mathbf{v}_{1x}^i & \frac{a_i}{2} \zeta N_i \mathbf{v}_{2x}^i \\ 0 & N_i & 0 & \frac{a_i}{2} \zeta N_i \mathbf{v}_{1y}^i & \frac{a_i}{2} \zeta N_i \mathbf{v}_{2y}^i \\ 0 & 0 & N_i & \frac{a_i}{2} \zeta N_i \mathbf{v}_{1z}^i & \frac{a_i}{2} \zeta N_i \mathbf{v}_{2z}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

sendo u , v e w os deslocamentos nas direções dos eixos globais x , y e z , respectivamente.

3.4 Tensões e deformações

Em um ponto de uma superfície com ζ constante, uma normal z' é criada, assim como dois outros eixos x' e y' , ortogonais a z' e tangentes à superfície definida, como ilustrado na Figura 3.2(c). As componentes de deformação nesse ponto da superfície, em relação ao sistema de coordenadas local definido, são:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}'\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'x'} \\ \varepsilon_{y'y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{du'}{dx'} \\ \frac{dv'}{dy'} \\ \frac{du'}{dy'} + \frac{dv'}{dx'} \\ \frac{dw'}{dx'} + \frac{du'}{dz'} \\ \frac{dw'}{dy'} + \frac{dv'}{dz'} \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

É importante observar que a componente de deformação $\varepsilon_{z'z'}$, na direção z' , é desconsiderada, devido à hipótese assumida para cascas que a normal à superfície de referência se mantém indeformada, ou seja, não sofre alongamento.

A fim de obter o vetor de tensões locais $\{\boldsymbol{\sigma}'\}$, a matriz constitutiva local $[\mathbf{D}']$ é multiplicada pelo vetor de deformações local $\{\boldsymbol{\varepsilon}'\}$, como apresentado na equação a seguir:

$$\{\boldsymbol{\sigma}'\} = [\mathbf{D}'] \{\boldsymbol{\varepsilon}'\} \quad (3.28)$$

E a matriz constitutiva local $[\mathbf{D}']$ é definida como:

$$[\mathbf{D}'] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k(1-\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

sendo E o módulo de elasticidade e ν o coeficiente de Poisson. Um fator $k = 5/6$ é incluído nos dois últimos termos de cisalhamento, a fim de melhorar a aproximação dos deslocamentos cisalhantes. Esse fator surge devido à aproximação da distribuição de cisalhamento como uma constante ao longo da espessura, enquanto na realidade, a distribuição de tensões cisalhantes é aproximadamente parabólica para um material com comportamento elástico [Ahmad, et al., 1970; Zienkiewicz e Taylor, 2000].

3.5 Matriz de Rigidez

A matriz de rigidez $[\mathbf{K}]$ é obtida pela integral no volume do elemento, como explicado anteriormente, e mostrado na equação abaixo:

$$[\mathbf{K}] = \int_V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dx dy dz \quad (3.30)$$

onde $[\mathbf{B}]$ é a matriz que relaciona as deformações com os deslocamentos nodais no elemento, e é definida por:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{B}]\{\boldsymbol{\delta}\}^e \quad (3.31)$$

As equações dentro da integral que define a matriz de rigidez podem ser representadas por uma matriz $[\mathbf{S}]$, de acordo com a seguinte equação:

$$[\mathbf{S}] = [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] \quad (3.32)$$

De forma alternativa, a matriz de rigidez pode ser definida utilizando-se a matriz $[\mathbf{B}']$, que relaciona as deformações com os deslocamentos nodais no sistema local de coordenadas, e a matriz constitutiva local $[\mathbf{D}']$, sem alteração nos resultados [Teixeira-Dias, et al., 2010]. Dessa forma, a matriz $[\mathbf{S}]$ é escrita, como:

$$[\mathbf{S}] = [\mathbf{B}']^T [\mathbf{D}'] [\mathbf{B}'] \quad (3.33)$$

As equações a seguir justificam a igualdade entre a utilização da matriz $[\mathbf{S}]$ no sistema local ou global de coordenadas. Considerando-se uma matriz $[\mathbf{T}_{gl}]$, que faz a transformação do sistema global para o sistema local, pode-se escrever:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}'\} = [\mathbf{T}_{gl}] \{\boldsymbol{\varepsilon}\} \quad (3.34)$$

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{T}_{gl}]^T \{\boldsymbol{\sigma}'\} \quad (3.35)$$

$$[\mathbf{D}] = [\mathbf{T}_{gl}]^T [\mathbf{D}'] [\mathbf{T}_{gl}] \quad (3.36)$$

A equação (3.34) pode ser reescrita, como:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}'\} = [\mathbf{T}_{gl}] [\mathbf{B}] \{\boldsymbol{\delta}\}^e \quad (3.37)$$

sendo $\{\boldsymbol{\delta}\}$ o vetor de deslocamentos nodais dos nós do elemento.

Dessa forma, conclui-se que:

$$[\mathbf{B}'] = [\mathbf{T}_{gl}] [\mathbf{B}] \quad (3.38)$$

Considerando-se a ortogonalidade da matriz $[\mathbf{T}_{gl}]$, a equação (3.36) pode ser reescrita, como:

$$[\mathbf{D}'] = [\mathbf{T}_{gl}] [\mathbf{D}] [\mathbf{T}_{gl}]^T \quad (3.39)$$

Utilizando-se as equações (3.34) a (3.48), a equação (3.33) pode ser reescrita, como:

$$[\mathbf{S}] = \left[[\mathbf{T}_{gl}] [\mathbf{B}] \right]^T [\mathbf{T}_{gl}] [\mathbf{D}] [\mathbf{T}_{gl}]^T [\mathbf{T}_{gl}] [\mathbf{B}] \quad (3.40)$$

A equação (3.40) pode ser reescrita, como:

$$[\mathbf{S}] = [\mathbf{B}]^T [\mathbf{T}_{gl}]^T [\mathbf{T}_{gl}] [\mathbf{D}] [\mathbf{T}_{gl}]^T [\mathbf{T}_{gl}] [\mathbf{B}] \quad (3.41)$$

Considerando-se a ortogonalidade da matriz $[\mathbf{T}_{gl}]$, sabe-se que $[\mathbf{T}_{gl}]^T [\mathbf{T}_{gl}] = [\mathbf{I}]$, sendo $[\mathbf{I}]$ a matriz identidade. Dessa forma, a equação (3.41) fica resumida a:

$$[\mathbf{S}] = [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] \quad (3.42)$$

Observa-se que a equação (3.42) é igual a equação (3.32), dessa forma justificando a possibilidade de integração no sistema local ou global de coordenadas.

A integral que define a matriz de rigidez do elemento tem como limites de integração as dimensões que compõem o volume do elemento, portanto sendo definidas no sistema global de coordenadas. Para a resolução do problema de elementos finitos por meios computacionais, busca-se a integração numérica, que apresenta vantagens significativas em relação à integração analítica, e está definida no sistema natural. Dessa forma, é necessário expressar a matriz $[\mathbf{S}]$ em função das coordenadas curvilíneas do elemento, ou seja, no sistema natural de coordenadas, e transformar o volume infinitesimal definido por $dx dy dz$, a fim de aplicar a integração numérica. Os deslocamentos globais u , v e w são relacionados às coordenadas naturais ξ , η e ζ pela equação (3.26).

A relação entre a matriz das derivadas dos deslocamentos globais em relação às coordenadas globais x , y e z , e matriz das derivadas em relação às coordenadas curvilíneas naturais ξ , η e ζ é dada por:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = [\mathbf{J}]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Sendo, que os componentes da matriz Jacobiana $[\mathbf{J}]$, apresentada abaixo são definidos pelas relações apresentadas na equação (3.24).

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

As derivadas dos deslocamentos globais u , v e w em relação ao sistema global de coordenadas podem ser transformadas para as derivadas dos deslocamentos no sistema local, em relação ao sistema local de coordenadas ortogonais de acordo com a seguinte operação de rotação:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\theta}]^T \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} [\boldsymbol{\theta}] \quad (3.45)$$

Sendo a matriz dos cossenos $[\boldsymbol{\theta}]$ definida utilizando-se os vetores unitários nas direções dos eixos locais x' , y' e z' , conforme a equação a seguir:

$$[\boldsymbol{\theta}] = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3] \quad (3.46)$$

Assim, tendo obtido os componentes locais de deformação, a matriz $[\mathbf{B}']$ pode ser determinada por:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}'\} = [\mathbf{B}'] \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_1\} \\ \vdots \\ \{\delta_j\} \end{Bmatrix} \quad (3.47)$$

onde $\{\delta_i\}$ definido como:

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \quad (3.48)$$

e i representa cada nó do elemento.

O volume infinitesimal é transformado do sistema global para o sistema natural de coordenadas utilizando o Jacobiano, que é o determinante da matriz Jacobiana $[\mathbf{J}]$, como mostrado a seguir:

$$dxdydz = \det[\mathbf{J}] d\xi d\eta d\zeta \quad (3.49)$$

As derivadas dos deslocamentos globais em relação ao sistema natural são determinadas numericamente para cada ponto de coordenadas naturais, sendo os valores determinados pelos

pontos de Gauss na integração numérica. Essas são então transformadas para derivadas dos deslocamentos globais em relação aos eixos globais, e uma transformação posterior para as direções locais x' , y' e z' permite a determinação da matriz $[\mathbf{B}']$. A realização desses passos sucessivamente, para todos os pontos de Gauss leva a obtenção da matriz de rigidez $[\mathbf{K}]$, de cada elemento.

3.6 Integração Numérica

A determinação da matriz de rigidez de cada elemento é realizada pela integração no volume de funções relativas a cada grau de liberdade de cada nó de um elemento. Sendo que a integração analítica tem custo computacional bastante alto, utilizam-se métodos aproximados de integração, mais eficientes e de fácil implementação numérica.

Um dos métodos mais utilizados para esse fim é a quadratura de Gauss-Legendre. De acordo com esse método, pode-se determinar o valor integral de uma função genérica $f(\xi)$ como o somatório do resultado da substituição de valores nessa mesma função, denominados pontos de integração, multiplicados por pesos de integração relativos a cada ponto de integração, conforme a equação abaixo:

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^p f(\xi_i) w_i \quad (3.50)$$

em que p é a ordem da quadratura de Gauss-Legendre, correspondente ao número de pontos de integração, w_i é o peso de integração, correspondente ao ponto de integração e associado ao valor $f(\xi_i)$ [Teixeira-Dias, et al., 2010; Bathe, 1996].

Para o elemento de 4 nós utilizado no trabalho, foi utilizada a integração de Gauss com dois pontos em cada direção, para o caso de integração completa, e um único ponto em cada direção para o caso de sub-integração [Zienkiewicz, et al., 1971]. A Tabela 3.1 apresenta os pares de valores de pontos e pesos de integração para as duas primeiras ordens de integração, utilizadas no trabalho.

Tabela 3.1 - Coordenadas e pesos de integração para as duas primeiras ordens de integração da quadratura de Gauss-Legendre.

n	ξ_i	w_i
1	0	2
2	$\pm 0,577350269$	1

Fonte: adaptada de Teixeira-Dias, 2010.

4 METODOLOGIA E RESULTADOS

4.1 Resolução pelo método de elementos finitos

4.1.1 Comparação com artigo de MacNeal & Harder

O artigo de MacNeal e Harder, 1985, propõe uma série de testes padronizados a que os programas de elementos finitos devem ser submetidos, a fim de avaliar sua capacidade de calcular deslocamentos, deformações e tensões, em relação a condições externas previamente definidas. Os problemas propostos por MacNeal e Harder foram implementados e resolvidos no programa de elementos finitos implementado no Matlab e os resultados de cada teste são apresentados em sequência. Em alguns casos é feita comparação dos resultados obtidos com os resultados teóricos, sendo esses apresentados nas tabelas como Δ , sendo $\Delta = \frac{\text{resultado obtido}}{\text{resultado teórico}}$.

Os resultados de cada um dos testes são sintetizados e apresentados ao final do capítulo.

4.1.1.1 Patch test

O “Patch test” é um teste que tem por objetivo avaliar a capacidade de um elemento de calcular tensões e deformações a partir de um campo de deslocamentos e geometria de elementos definidos. Os elementos têm formato arbitrariamente deformado, conforme ilustrado na Figura 4.1 [MacNeal e Harder, 1985], a fim de evidenciar as dificuldades que os elementos possam ter em calcular os valores corretos de tensões e de deformações devido às deformações do elemento. O teste conta com duas configurações, uma para esforços de membrana e outra para flexão, sendo que o primeiro apresenta deslocamentos somente no plano XY, enquanto o segundo apresenta deslocamentos normais a esse plano.

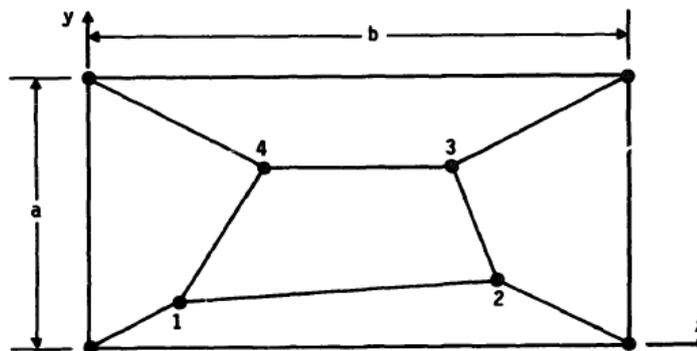


Figura 4.1 - Estrutura para o teste "Patch test".

As dimensões externas da placa são definidas como, $a = 0,12$ e $b = 0,24$. As coordenadas dos nós internos são apresentadas na Tabela 4.1. A espessura da placa é $t = 0,0001$ e o material da mesma tem módulo de elasticidade $E = 1E6$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,25$, sendo adotadas as unidades do SI para o teste.

Tabela 4.1 - Coordenadas para os nós internos da placa.

nó	x	y
1	0,04	0,02
2	0,18	0,03
3	0,16	0,08
4	0,08	0,08

As equações a seguir definem os deslocamentos a serem aplicados a cada nó em função de suas coordenadas, para a simulação com deformações de membrana:

$$u = 10^{-3} \left(x + \frac{y}{2} \right) \quad (4.1)$$

$$v = 10^{-3} \left(y + \frac{x}{2} \right) \quad (4.2)$$

A aplicação dos deslocamentos nos nós da estrutura de teste gera resultados de deformações e de tensões, cujos valores teóricos são $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \gamma_{12} = 1E10^{-3}$, $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 1333$ e $\tau_{12} = 400$. Os valores obtidos no teste são apresentados a seguir.

As deformações ε_{11} e γ_{12} são apresentadas na Tabela 4.2 e na Tabela 4.3, respectivamente.

Tabela 4.2 - Resultados de deformação ε_{11} para cada nó de cada elemento da estrutura de teste.

ε_{11}		Nós							
		1	2	3	4	5	6	7	8
Elementos	1	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010	0,0011	0,0011	0,0011	0,0011
	2	0,0014	0,0014	0,0014	0,0014	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006
	3	0,0011	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010
	4	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0014	0,0014	0,0014	0,0014
	5	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010
resultado teórico = 0,001									

Tabela 4.3 - Resultados de deformação γ_{12} para cada nó de cada elemento da estrutura de teste.

γ_{12}		Nós							
		1	2	3	4	5	6	7	8
Elementos	1	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010
	2	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006
	3	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010
	4	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006
	5	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010
		resultado teórico = 0,001							

Os resultados de deformação para ε_{22} são similares aos apresentados para ε_{11} , tendo então sido omitidos do trabalho.

As tensões σ_{11} e τ_{12} são apresentadas na Tabela 4.4 e na Tabela 4.5, respectivamente. As tensões σ_{22} são similares às tensões σ_{11} e por isso não são apresentadas.

Tabela 4.4 - Resultados de tensão σ_{11} para cada nó de cada elemento da estrutura de teste.

σ_{11}		Nós							
		1	2	3	4	5	6	7	8
Elementos	1	1333,3	1333,3	1333,3	1333,3	1390,2	1390,2	1390,2	1390,2
	2	1653,3	1653,3	1653,3	1653,3	1013,3	1013,3	1013,3	1013,3
	3	1390,2	1390,2	1390,2	1390,2	1333,3	1333,3	1333,3	1333,3
	4	1013,3	1013,3	1013,3	1013,3	1653,3	1653,3	1653,3	1653,3
	5	1333,3	1333,3	1333,3	1333,3	1333,3	1333,3	1333,3	1333,3
		resultado teórico = 1333							

Tabela 4.5 - Resultados de tensão τ_{12} para cada nó de cada elemento da estrutura de teste.

τ_{12}		Nós							
		1	2	3	4	5	6	7	8
Elementos	1	400,0	400,0	400,0	400,0	395,9	395,9	395,9	395,9
	2	240,0	240,0	240,0	240,0	240,0	240,0	240,0	240,0
	3	395,9	395,9	395,9	395,9	400,0	400,0	400,0	400,0
	4	240,0	240,0	240,0	240,0	240,0	240,0	240,0	240,0
	5	400,0	400,0	400,0	400,0	400,0	400,0	400,0	400,0
		resultado teórico = 400							

As equações a seguir definem os deslocamentos a serem aplicados a cada nó em função de suas coordenadas, para a simulação com deformações de flexão:

$$w = 10^{-3}(x^2 + xy + y^2)/2 \quad (4.3)$$

$$\theta_x = 10^{-3} \left(y + \frac{x}{2} \right) \quad (4.4)$$

$$\theta_y = 10^{-3} \left(-x - \frac{y}{2} \right) \quad (4.5)$$

Os resultados da estrutura de teste submetidos a deslocamentos normais ao plano são avaliados pelas tensões na região externa da placa e resultantes de momento da mesma. Os valores teóricos para as tensões são $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \pm 0,667$ e $\tau_{12} = \pm 0,200$, e os valores teóricos para as resultantes de momento são $M_{11} = M_{22} = 1,111E10^{-7}$.

As tensões σ_{11} e τ_{12} são apresentadas na Tabela 4.6 e na Tabela 4.7, respectivamente. As tensões σ_{22} foram omitidas por serem similares às tensões σ_{11} .

Tabela 4.6 - Resultados de tensão σ_{11} para cada nó de cada elemento da estrutura de teste.

σ_{11}		Nós							
		1	2	3	4	5	6	7	8
Elementos	1	0,6667	0,6667	-0,6667	-0,6667	0,6792	0,6792	-0,6792	-0,6792
	2	0,6857	0,6857	-0,6857	-0,6857	0,5068	0,5068	-0,5068	-0,5068
	3	0,6792	0,6792	-0,6792	-0,6792	0,6667	0,6667	-0,6667	-0,6667
	4	0,5068	0,5068	-0,5068	-0,5068	0,6857	0,6857	-0,6857	-0,6857
	5	0,6667	0,6667	-0,6667	-0,6667	0,6667	0,6667	-0,6667	-0,6667
resultado teórico = $\pm 0,667$									

Tabela 4.7 - Resultados de tensão τ_{12} para cada nó de cada elemento da estrutura de teste.

τ_{12}		Nós							
		1	2	3	4	5	6	7	8
Elementos	1	0,2000	0,2000	-0,2000	-0,2000	0,1995	0,1995	-0,1995	-0,1995
	2	0,1789	0,1789	-0,1789	-0,1789	0,1789	0,1789	-0,1789	-0,1789
	3	0,1995	0,1995	-0,1995	-0,1995	0,2000	0,2000	-0,2000	-0,2000
	4	0,1789	0,1789	-0,1789	-0,1789	0,1789	0,1789	-0,1789	-0,1789
	5	0,2000	0,2000	-0,2000	-0,2000	0,2000	0,2000	-0,2000	-0,2000
resultado teórico = $\pm 0,200$									

As resultantes de momento M_{11} e M_{22} são apresentadas na Tabela 4.8 e na Tabela 4.9, respectivamente.

Tabela 4.8 - Resultantes de momento M_{11} para cada nó de cada elemento da superfície de referência.

M_{11}		Nós			
		1	2	3	4
Elementos	1	-1,111E-07	-1,111E-07	-1,132E-07	-1,132E-07
	2	-1,143E-07	-1,143E-07	-8,45E-08	-8,45E-08
	3	-1,132E-07	-1,132E-07	-1,111E-07	-1,111E-07
	4	-8,45E-08	-8,45E-08	-1,143E-07	-1,143E-07
	5	-1,111E-07	-1,111E-07	-1,111E-07	-1,111E-07
resultado teórico = $1,111E10^{-7}$					

Tabela 4.9 - Resultantes de momento M_{22} para cada nó de cada elemento da superfície de referência.

M_{22}		Nós			
		1	2	3	4
Elementos	1	-1,111E-07	-1,111E-07	-1,085E-07	-1,085E-07
	2	-8,45E-08	-8,45E-08	-1,143E-07	-1,143E-07
	3	-1,085E-07	-1,085E-07	-1,111E-07	-1,111E-07
	4	-1,143E-07	-1,143E-07	-8,45E-08	-8,45E-08
	5	-1,111E-07	-1,111E-07	-1,111E-07	-1,111E-07
resultado teórico = $1,111E10^{-7}$					

4.1.1.2 Viga engastada

O teste da viga engastada, consiste em uma viga dividida em 6 elementos. Esse teste possui três diferentes configurações, de acordo com a orientação dos elementos que compõem a estrutura, conforme ilustrado na Figura 4.2. A viga reta é engastada em um lado e cargas unitárias em diferentes sentidos são aplicadas na outra extremidade [MacNeal e Harder, 1985].

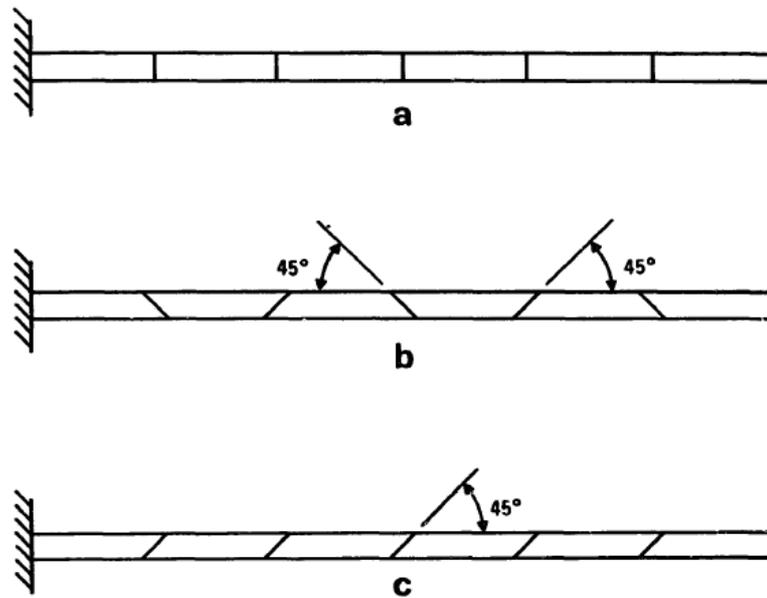


Figura 4.2 - Teste "Viga engastada" a, b e c.

A viga reta tem dimensão $L = 6$ na direção X, $M = 0,2$ na direção Y e $N = 0,1$ na direção Z. As propriedades do material são definidas como $E = 1E7$ e $\nu = 0,3$. As cargas unitárias são aplicadas no sentido da extensão, cisalhamento no plano e cisalhamento fora do plano da estrutura, sendo dessa forma aplicadas na direção X, Y e Z, respectivamente.

Os deslocamentos obtidos, deslocamentos teóricos e relações entre os mesmos são apresentados na Tabela 4.10, para a configuração (a) do teste.

Tabela 4.10 - Resultados obtidos com o elemento AIZ para o teste "Viga engastada (a)".

	Deslocamentos obtidos	Deslocamentos teóricos	Δ
Extensão	2,99E-05	3,00E-05	0,995
Cisalhamento no plano	0,0101	0,1081	0,093
Cisalhamento fora do plano	0,4235	0,4321	0,980

Observa-se boa correlação dos valores para extensão e cisalhamento fora do plano, e resultado ruim para o cisalhamento no plano. Os resultados apresentam resultados comparáveis aos apresentados em [MacNeal e Harder, 1985] para os elementos QUAD2 e QUAD4, que podem ser comparados ao elemento AIZ de 4 nós.

De forma a analisar melhor o comportamento do elemento quando submetido a uma força cisalhante no plano da viga, o número de elementos que compõem a estrutura foi variado de forma a chegar a um grande número de elementos. O resultado desse estudo é apresentado

na Figura 4.3, e evidencia a aproximação ao resultado teórico de deslocamento, com o aumento do número de elementos na estrutura.

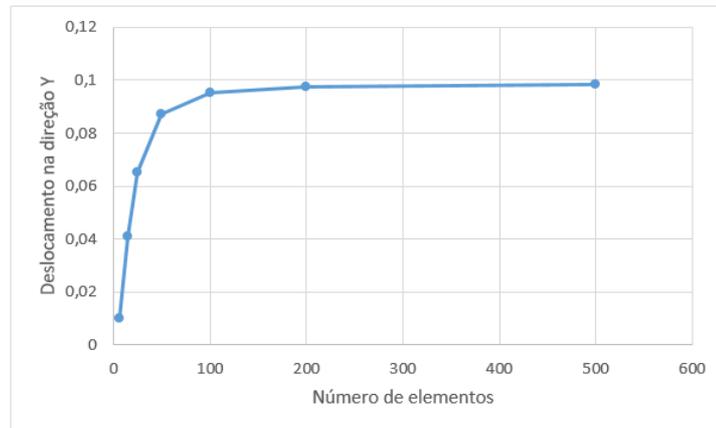


Figura 4.3 - Avaliação dos resultados de deslocamento obtidos com o aumento do número de elementos da estrutura.

Os resultados obtidos com a aplicação das cargas unitárias na configuração (b) da viga engastada são apresentados na Tabela 4.11. De forma similar à configuração (a), os resultados obtidos são comparáveis com a referência, ainda que os deslocamentos para forças de cisalhamento no plano estejam longe do resultado teórico.

Tabela 4.11 - Resultados obtidos com o elemento AIZ para o teste “Viga engastada (b)”

	Deslocamentos obtidos	Deslocamentos teóricos	Δ
Extensão	2,99E-05	3,00E-05	0,998
Cisalhamento no plano	0,0029	0,1081	0,027
Cisalhamento fora do plano	0,4241	0,4321	0,981

Os resultados obtidos com a aplicação das cargas unitárias na configuração (c) da viga engastada são apresentados na Tabela 4.12.

Tabela 4.12 - Resultados obtidos com o elemento AIZ para o teste “Viga engastada (c)”

	Deslocamentos obtidos	Deslocamentos teóricos	Δ
Extensão	2,98E-05	3,00E-05	0,994
Cisalhamento no plano	0,0037	0,1081	0,034
Cisalhamento fora do plano	0,4243	0,4321	0,982

De forma similar aos resultados obtidos para os testes de acordo com as configurações (a) e (b), os resultados aproximaram-se dos valores teóricos para alongamento e cisalhamento fora do plano e não foram bons para o cisalhamento no plano da viga.

4.1.1.3 Viga curva

O teste viga curva combina os principais modos de deformação pela aplicação de simples cargas de cisalhamento alinhadas ao plano ou normais ao plano da viga. A viga curva é ilustrada na Figura 4.4 [MacNeal e Harder, 1985].

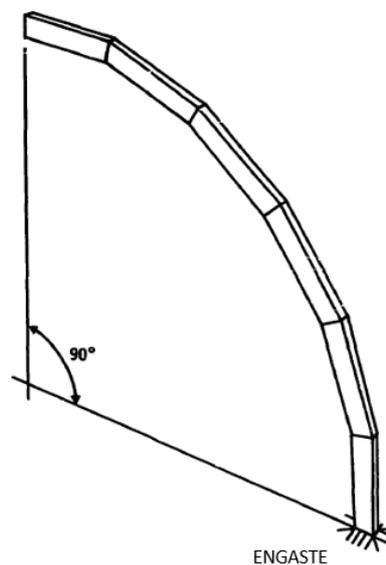


Figura 4.4 - Estrutura para o teste "Viga curva".

A estrutura de casca gerada para esse teste é formada por um arco de 90°, com diâmetro interno de 4,12, diâmetro externo de 4,32, módulo de elasticidade $E = 1,0E7$ e coeficiente de poisson $\nu = 0,25$. Foram assumidas as unidade no SI para o teste.

Os resultados obtidos com a aplicação das cargas unitárias são apresentados na Tabela 4.13.

Tabela 4.13 - Resultados obtidos com o elemento AIZ para o teste “Viga curva”.

	Deslocamentos obtidos	Deslocamentos teóricos	Δ
Cisalhamento no plano (força em X)	0,0031	0,08734	0,035
Cisalhamento no plano (força em Y)	0,0064	0,08734	0,073
Cisalhamento fora do plano	0,5722	0,5022	1,139

4.1.1.4 Viga torcida

O teste de viga com torção é aplicável a elementos de casca e testa os efeitos de empenamento dos elementos. A Figura 4.5 ilustra a estrutura do teste [MacNeal e Harder, 1985].

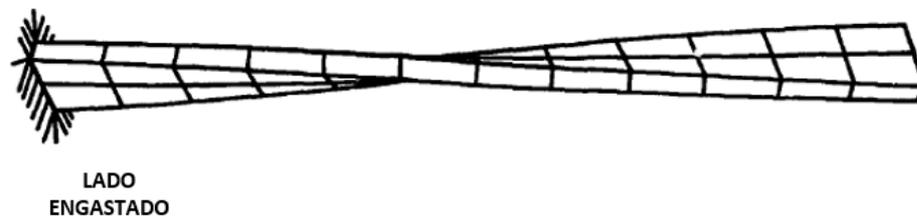


Figura 4.5 - Estrutura para o teste "Viga torcida".

A estrutura gerada para o teste possui comprimento $L = 12$, largura $M = 1,1$, e espessura $h = 0,32$. A estrutura apresenta rotação de 90° desde a base até a extremidade oposta, e o material é configurado com módulo de elasticidade $E = 29E6$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,22$. As unidades adotadas são as do SI.

A aplicação de cargas unitárias na extremidade da viga com torção gera os resultados de deslocamentos apresentados na Tabela 4.14.

Tabela 4.14 - Resultados obtidos com o elemento AIZ para o teste “Viga torcida”.

	Deslocamentos obtidos	Deslocamentos teóricos	Δ
Cisalhamento no plano	0,0055	0,005424	1,014
Cisalhamento fora do plano	0,002	0,001754	1,140

4.1.1.5 Placa retangular

O teste de placa retangular é apresentado em diferentes configurações. Uma imagem geral, retirada do artigo do MacNeal e Harder, 1985, é apresentada na Figura 4.6. A placa tem espessura $h = 0,0001$, dimensão $a = 2$ e $b = 2$ ou $b = 10$, de forma a possibilitar testes

com diferentes geometrias. As condições de contorno da placa são arestas fixas ou arestas simplesmente apoiadas, também gerando diferentes resultados, e os carregamento aplicado é uma carga distribuída com valor $q = 1E - 4$. O módulo de elasticidade é definido como $E = 1,7472E7$ e o coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$.

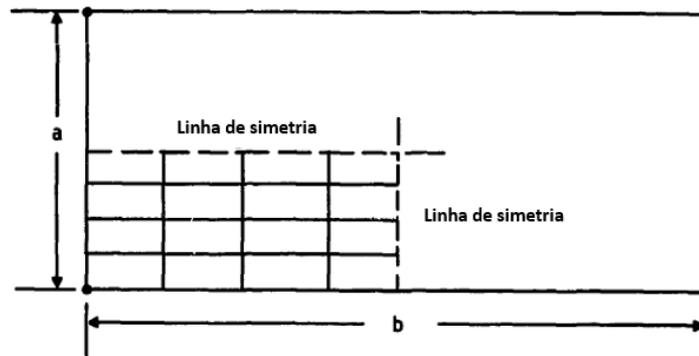


Figura 4.6 - Estrutura para o teste "Placa retangular".

A variação das configurações, assim como do número de elementos em cada $\frac{1}{4}$ da placa, definido como "NxN" gera diferentes resultados de deslocamentos no nó central da placa.

Na Tabela 4.15 são apresentados os resultados de deslocamento no nó central, para a configuração com $a = 2$, $b = 2$ e arestas engastadas e aplicação de carga distribuída. Os deslocamentos obtidos são comparados com os resultados teóricos na mesma tabela.

Tabela 4.15 - Resultados obtidos com o elemento AIZ para o teste "Placa retangular", com arestas fixas, $a = b = 2$.

NxN	Deslocamento obtido	Deslocamento teórico	Δ
2	1,2111	1,26	0,961
4	1,2507	1,26	0,993
8	1,2616	1,26	1,001

Os resultados para o teste com carga distribuída, $a = 2$, $b = 2$ e arestas com apoios simples são apresentados na Tabela 4.16. Os resultados teóricos e a normalização entre os valores obtidos e os teóricos também são apresentados.

Tabela 4.16 - Resultados obtidos com o elemento AIZ para o teste "Placa retangular", com arestas simplesmente apoiadas, $a = 2$ e $b = 2$.

NxN	Deslocamento obtido	Deslocamento teórico	Δ
2	4,3242	4,062	1,065
4	4,1279	4,062	1,016
8	4,0787	4,062	1,004

O deslocamento obtido para $\frac{1}{4}$ de placa com $N \times N = 8$, submetida a carga distribuída, com arestas simplesmente apoiadas e razão $b/a = 1$ é ilustrado na Figura 4.7.

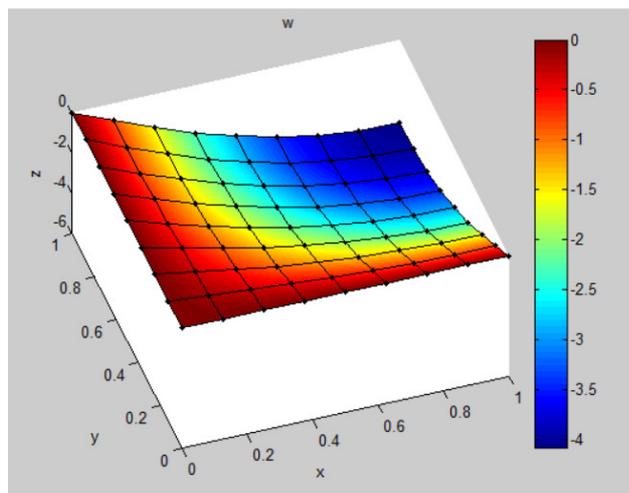


Figura 4.7 - Deslocamento para uma placa com $N \times N = 8$ e razão $b/a = 1$.

Na Tabela 4.17 são apresentados os resultados de deslocamento no nó central, deslocamentos teóricos e resultados normalizados para a configuração com $a = 2$, $b = 10$, arestas engastadas e aplicação de carga distribuída.

Tabela 4.17 - Resultados obtidos com o elemento AIZ para o teste "Placa retangular", com arestas engastadas, $a = 2$ e $b = 10$.

NxN	Deslocamento obtido	Deslocamento teórico	Δ
2	2,8769	2,56	1,124
4	2,8359	2,56	1,108
8	2,5923	2,56	1,013

Na Tabela 4.18 são apresentados os resultados de deslocamento no nó central, deslocamentos teóricos e resultados normalizados para a configuração com $a = 2$, $b = 10$, arestas simplesmente apoiadas e aplicação de carga distribuída.

Tabela 4.18 - Resultados obtidos com o elemento AIZ para o teste “Placa retangular”, com arestas simplesmente apoiadas, $a = 2$ e $b = 10$.

NxN	Deslocamento obtido	Deslocamento teórico	Δ
2	13,837	12,97	1,067
4	12,6894	12,97	0,978
8	12,9	12,97	0,995

4.1.1.6 Telhado Scordelis-Lo

O teste “Telhado Scordelis-Lo” é um problema de casca com curvatura em uma única direção, cujos deslocamentos dependem das deformações de flexão e de membrana. A Figura 4.8 ilustra o teste [MacNeal e Harder, 1985].

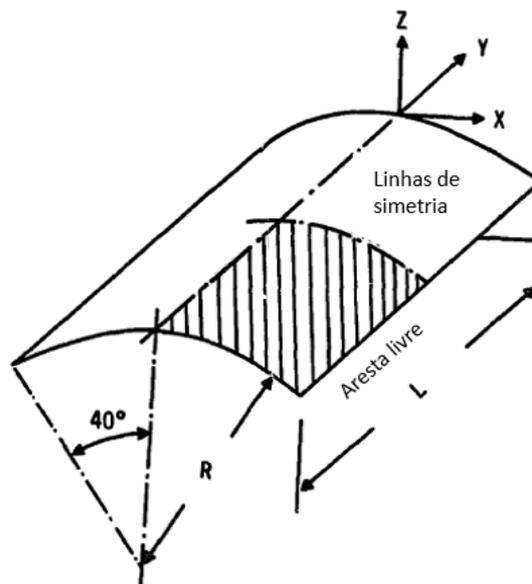


Figura 4.8 - Estrutura para o teste "Telhado Scordelis-Lo".

A estrutura gerada para o teste possui comprimento $L = 50$, raio $R = 25$, espessura $h = 0,25$. A estrutura possui ângulo de 40° de cada extremidade até o centro, conforme mostrado na Figura 4.8, e o material é configurado com módulo de elasticidade $E = 4,32E8$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,0$. Uma carga distribuída $C = 90,0$ por unidade de área é aplicada no sentido negativo da direção Z. As unidades adotadas são as do SI. A área com hachuras é dividida em um número de elementos definido como “NxN” que representa o número de divisões dessa área em cada sentido.

Os deslocamentos verticais obtidos em função do número de elementos “NxN” é apresentado na Tabela 4.19, assim como os deslocamentos teóricos e os resultados normalizados.

Tabela 4.19 - Resultados obtidos com o elemento AIZ para o teste “Telhado Scordelis-Lo”.

NxN	Deslocamento obtido	Deslocamento teórico	Δ
2	0,405	0,3086	1,312
4	0,2924	0,3086	0,948
8	0,2952	0,3086	0,957

4.1.1.7 Casca Esférica

O teste “Casca esférica”, consiste em uma casca com dupla curvatura, formando um hemisfério com cargas aplicadas sobre a aresta livre. Sobre essa aresta aplicam-se cargas pontuais a cada 90°. O teste é simplificado a ¼ de hemisfério, como ilustrado na Figura 4.9. Um furo é inserido no topo do hemisfério, de forma a evitar a necessidade de utilização de elementos triangulares para dividir a estrutura em elementos finitos. Nesse teste, tanto as deformações de membrana quanto de flexão contribuem para os deslocamentos no ponto de aplicação da carga [MacNeal e Harder, 1985]. Assim como nas outras simulações, aplicou-se a integração seletiva nesse caso.

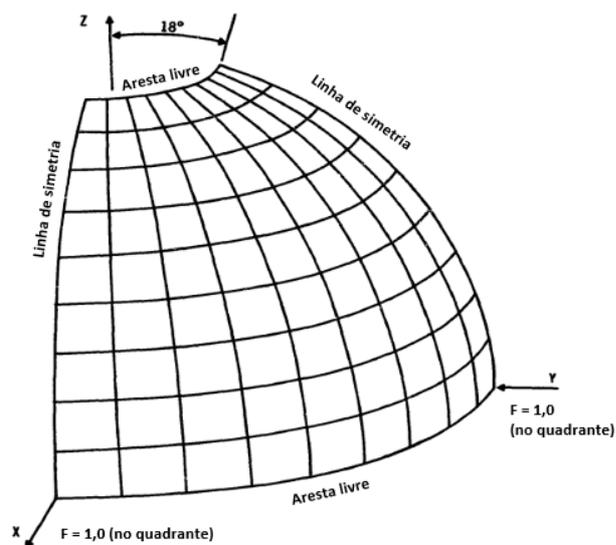


Figura 4.9 - Estrutura para o teste "Casca esférica".

Os deslocamentos máximos nas direções das cargas aplicadas obtidos em função do número de elementos “NxN” é apresentado na Tabela 4.20, assim como os deslocamentos teóricos e os resultados normalizados.

Tabela 4.20 - Resultados obtidos com o elemento AIZ para o teste “Spherical Shell”.

NxN	Deslocamento obtido	Deslocamento teórico	Δ
2	0,0633	0,0924	0,685
4	0,0775	0,0924	0,839
8	0,0754	0,0924	0,816

4.1.1.8 Avaliação dos resultados

O artigo de MacNeal e Harder, 1985, apresenta um sistema de classificação dos resultados dos testes, atribuindo uma nota ao resultado obtido, de acordo com o percentual de erro em relação ao valor teórico desse mesmo teste. A Tabela 4.21 apresenta as notas e os respectivos percentuais de erro, conforme descrito no artigo.

Tabela 4.21 - Notas e relativos percentuais de erro.

Nota	Regra
A	erro \leq 2%
B	10% \geq erro > 2%
C	20% \geq erro > 10%
D	50% \geq erro > 20%
F	erro > 50%

A fim de avaliar os testes aplicados ao elemento AIZ de 4 nós, o mesmo critério foi aplicado a esses resultados e é apresentado na Tabela 4.22. Na mesma tabela estão as notas apresentadas no artigo para os elementos QUAD2 e QUAD4.

Tabela 4.22 - Notas atribuídas ao elemento AIZ com 4 nós e comparação com elementos QUAD2 e QUAD4.

Nome do teste	Carga no plano do elemento	Carga normal ao elemento	Forma do elemento	Elemento AIZ de 4 nós	QUAD2	QUAD4
Patch test	X		Irregular	F	A	A
Patch test		X	Irregular	F	D	A
Viga engastada, tração	X		Ambas	A	A	A
Viga engastada, flexão	X		Regular	F	F	B
Viga engastada, flexão	X		Irregular	F	F	F
Viga engastada, flexão		X	Regular	A	B	A
Viga engastada, flexão		X	Irregular	B	B	B
Viga curva	X		Regular	F	F	C
Viga curva		X	Regular	D	D	B
Viga torcida	X	X	Regular	D	F	A
Placa retangular (NxN = 4)		X	Regular	C	C	B
Telhado Scordelis-Lo (NxN = 4)	X	X	Regular	B	D	B
Casca esférica (NxN = 8)	X	X	Regular	C	A	A

Observa-se que de forma geral os resultados apresentados pelo programa de elementos finitos implementados em Matlab foram piores que os obtidos com os elementos QUAD2 e QUAD4 e apresentados no artigo MacNeal e Harder, 1985.

4.1.2 Comparação com software comercial de elementos finitos (ANSYS)

Os casos de problemas de elementos finitos de casca descritos nos tópicos a seguir foram resolvidos utilizando-se os programas implementados no Matlab, para o elemento AIZ de 4 nós, e no ANSYS APDL versão 16.0, com o elemento SHELL181, que possui 4 nós e 6 graus de liberdade, sendo 3 de translação e 3 de rotação [ANSYS, Inc., 2009]. Dessa forma foi feita a comparação dos resultados obtidos com os programas desenvolvidos e a resolução dos mesmos problemas utilizando o ANSYS. Esse procedimento busca a validação dos programas desenvolvidos, comparando os resultados obtidos com um *software* de extensa aplicação comercial.

Para a comparação foi montada uma casca plana em uma direção, e comprimento definido ($L = 1\text{m}$) e com curvatura constante na outra direção ($R = 1\text{m}$), cuja dimensão é definida por um ângulo de 90° . Essa casca teve todos os graus de liberdade restringidos em uma extremidade e aplicação de forças na outra extremidade. A geração da malha de elementos finitos foi definida de forma a ter um único elemento na direção em que a curvatura é constante

e número de elementos variável ao longo da curvatura, conforme ilustrado na Figura 4.10. O material da casca foi definido por um módulo de elasticidade $E = 200\text{GPa}$, e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$.

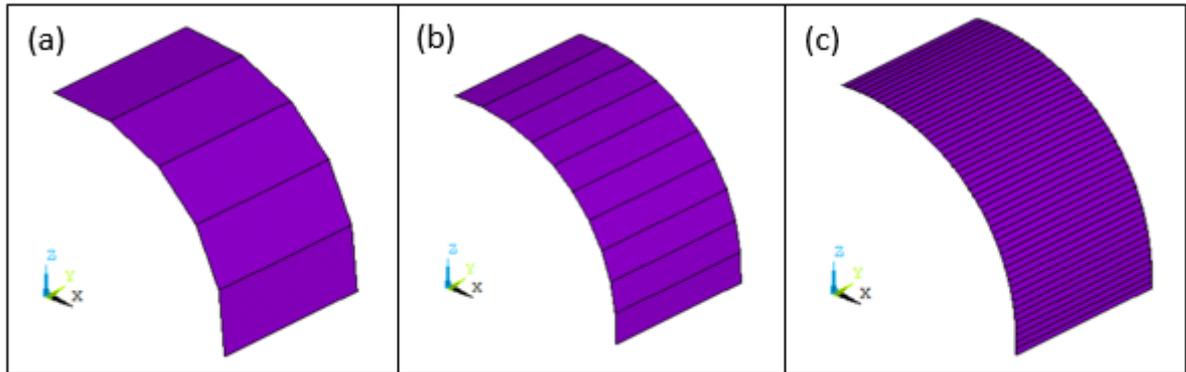


Figura 4.10 - Casca dividida em 5 (a), 10 (b) e 50 elementos (c).

Os casos de carga foram definidos de forma a explorar o comportamento do elemento em diferentes situações, conforme mostrado a seguir.

4.1.2.1 Aplicação de carga na direção X

Para o caso de aplicação de carga na direção X, a casca foi engastada em um lado (aresta em $X = 0$) e a carga foi aplicada na aresta oposta, conforme ilustrado na Figura 4.11. O valor de carga na aresta foi definido como $F = 1000\text{N}$, dessa forma o valor foi dividido igualmente entre os dois nós que correspondem à aresta em questão. As simulações foram realizadas para duas configurações de espessura ($h = 0,01\text{m}$ e $h = 0,1\text{m}$), que correspondem a duas razões de raio de curvatura x espessura ($R/h = 100$ e $R/h = 10$), respectivamente, assim como duas razões de comprimento x espessura ($L/h = 100$ e $L/h = 10$), respectivamente.

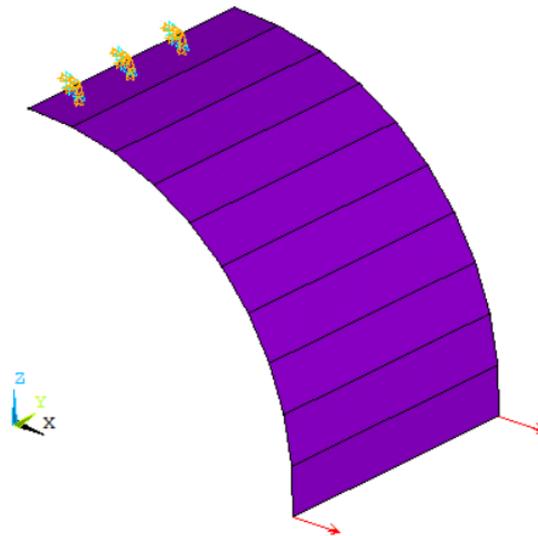


Figura 4.11 - Casca com restrição de deslocamentos e forças aplicadas na direção X.

O deslocamento máximo na direção X obtido para o elemento AIZ com 4 nós e resultados do ANSYS com espessura ($h = 0,1$), razão raio de curvatura x espessura ($R/h = 10$) e razão comprimento x espessura ($L/h = 10$) são comparados e apresentados no gráfico da Figura 4.12.

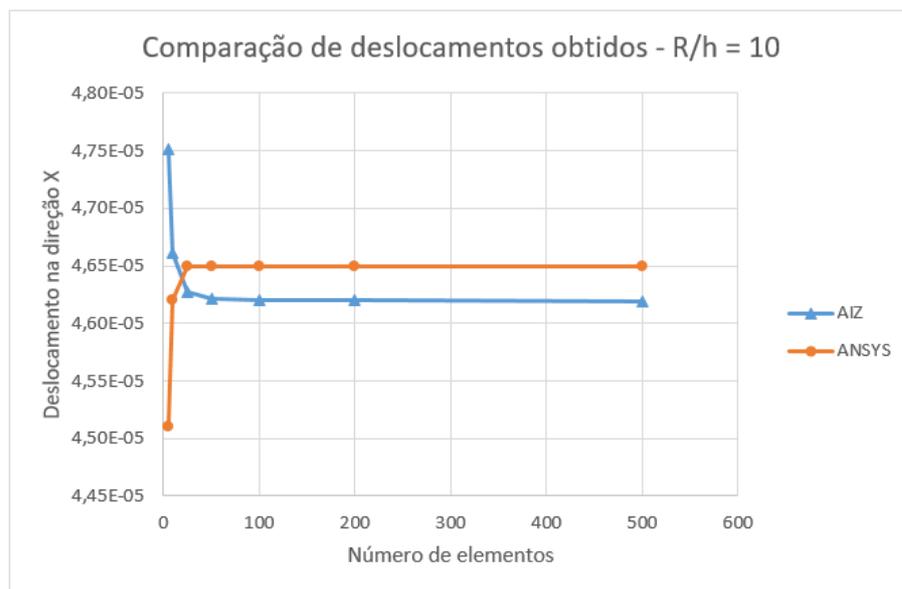


Figura 4.12 - Comparação dos deslocamentos na direção X com o elemento AIZ de 4 nós e simulação no ANSYS com $R/h = 10$.

De forma similar, o deslocamento máximo na direção X obtido para os mesmos elementos, porém com espessura ($h = 0,01$), razão raio de curvatura x espessura ($R/h = 100$) e razão comprimento x espessura ($L/h = 100$) são comparados e apresentados no gráfico da Figura 4.13.

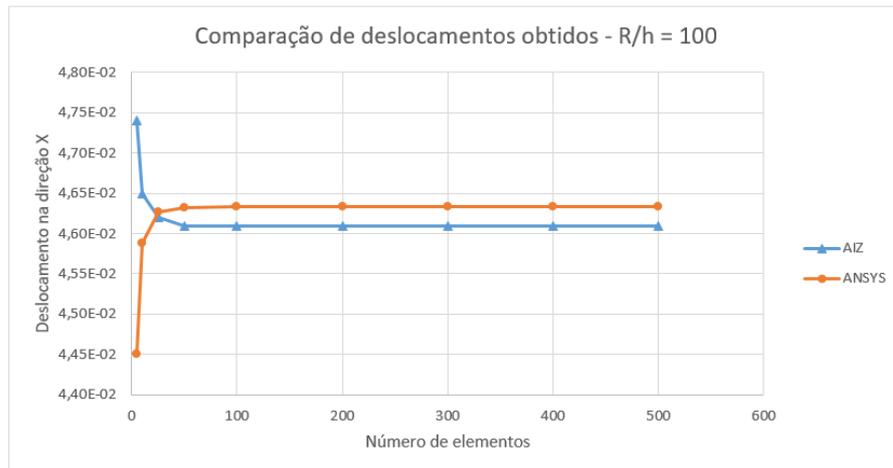


Figura 4.13 - Comparativo de deslocamentos na direção X com o elemento AIZ de 4 nós e simulação no ANSYS com $R/h = 100$.

Para o caso de aplicação de carga na direção X, observa-se uma boa aproximação dos deslocamentos na direção X obtidos com o elemento AIZ em relação aos resultados do ANSYS, para o caso em que $R/h = 10$. A Tabela 4.23 apresenta as relações percentuais entre os deslocamentos obtidos com o elemento AIZ e com o ANSYS. O deslocamento calculado com o elemento AIZ com tem diferença menor que 1% entre 10 e 500 elementos.

Tabela 4.23 - Relação entre deslocamentos calculados na direção X com carga aplicada na mesma direção, para uma relação $R/h=10$.

	Número de elementos						
	5	10	25	50	100	200	500
AIZ/ANSYS	105,35%	100,88%	99,51%	99,39%	99,36%	99,35%	99,35%

Nas análises com a relação $R/h = 100$, o elemento do tipo AIZ possui boa aproximação dos resultados, similar aos resultados apresentados para a relação $R/h = 10$, conforme pode-se observar na Tabela 4.24.

Tabela 4.24 - Relação entre deslocamentos calculados na direção X com carga aplicada na mesma direção, para uma relação $R/h=100$.

	Número de elementos						
	5	10	25	50	100	200	500
AIZ/ANSYS	106,50%	101,34%	99,86%	99,53%	99,50%	99,50%	99,49%

4.1.2.2 Aplicação de carga na direção Z

Para o caso de aplicação de carga na direção Z, a casca foi engastada em um lado (aresta em $X = 0$) e a carga foi aplicada na aresta oposta, conforme ilustrado na Figura 4.14. O valor de carga na aresta foi definido como $F = -1000\text{N}$ (direção negativa de Z), dessa forma o valor foi dividido igualmente entre os dois nós que correspondem à aresta em questão. As simulações foram realizadas para duas configurações de espessura ($h = 0,01\text{m}$ e $h = 0,1\text{m}$), que correspondem a duas razões de raio de curvatura x espessura ($R/h = 100$ e $R/h = 10$), respectivamente, assim como duas razões de comprimento x espessura ($L/h = 100$ e $L/h = 10$), respectivamente.

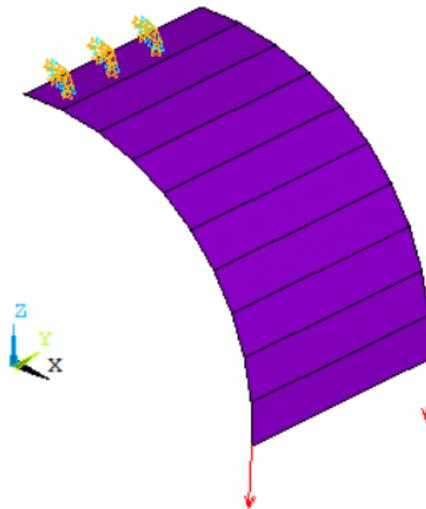


Figura 4.14 - Casca com restrição de deslocamentos e forças aplicadas na direção Z.

O deslocamento máximo na direção Z obtido para o elemento AIZ com 4 nós e resultados do ANSYS com espessura ($h = 0,1$), razão raio de curvatura x espessura ($R/h = 10$) e razão comprimento x espessura ($L/h = 10$) são comparados e apresentados no gráfico da Figura 4.15.

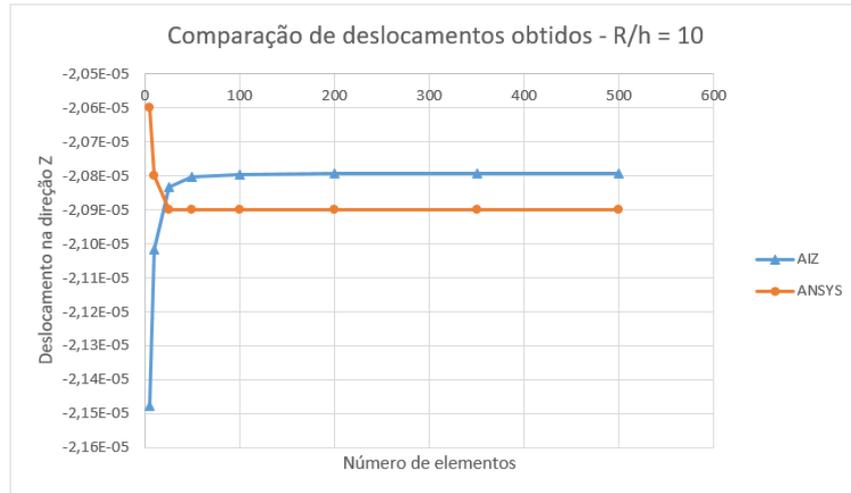


Figura 4.15 - Comparação dos deslocamentos na direção Z com elemento AIZ de 4 nós e simulação no ANSYS com $R/h = 10$.

De forma similar, o deslocamento máximo na direção Z obtido para os mesmos elementos, porém com espessura ($h = 0,01$), razão raio de curvatura x espessura ($R/h = 100$) e razão comprimento x espessura ($L/h = 100$) são comparados e apresentados no gráfico da Figura 4.16.

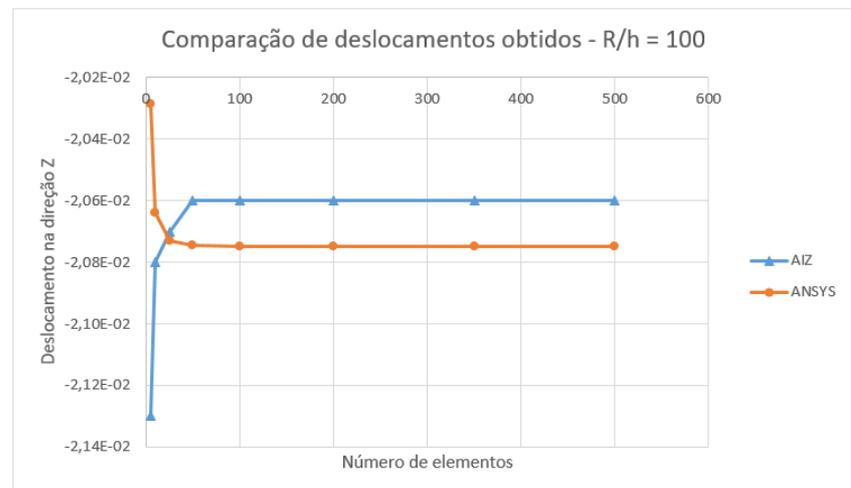


Figura 4.16 - Comparação dos deslocamentos na direção Z com elemento AIZ de 4 nós e simulação no ANSYS com $R/h = 100$.

A relação dos deslocamentos calculados na direção Z é apresentada na Tabela 4.25 para uma relação $R/h = 10$ e na Tabela 4.26 para uma relação $R/h = 100$. A avaliação dos deslocamentos calculados evidencia uma boa aproximação dos resultados com o elemento AIZ, sendo que os valores de deslocamento calculados por meio desse elemento tem diferença

próxima a 1% dos deslocamentos calculados com a utilização do ANSYS, com a divisão da estrutura a partir de 10 elementos.

Tabela 4.25 - Relação entre deslocamentos calculados na direção Z com carga aplicada na mesma direção, para $R/h=10$.

	Número de elementos							
	5	10	25	50	100	200	350	500
AIZ/ANSYS	104,26%	101,04%	99,68%	99,54%	99,50%	99,49%	99,48%	99,48%

A avaliação dos deslocamentos obtidos para a relação $R/h = 100$ evidencia um comportamento bastante parecido para o elemento AIZ, convergindo rapidamente para uma boa aproximação.

Tabela 4.26 - Relação entre deslocamentos calculados na direção Z com carga aplicada na mesma direção, para $R/h=100$.

	Número de elementos							
	5	10	25	50	100	200	350	500
AIZ/ANSYS	104,99%	100,77%	99,85%	99,30%	99,29%	99,28%	99,28%	99,28%

4.1.2.3 Aplicação de cargas alternadas orientadas na direção X

Para o caso de aplicação de cargas alternadas (sentidos opostos) na direção X, equivalente à aplicação de um momento orientado com o sentido negativo da direção Z, a casca foi engastada na aresta em $X = 0$, e as cargas alternadas foram aplicadas na aresta oposta, conforme ilustrado na Figura 4.17. O valor de carga em cada nó foi definido como $F = 0,5N$, respeitando os sentidos indicados na figura. As simulações foram realizadas para duas configurações de espessura ($h = 0,01m$ e $h = 0,1m$), que correspondem a duas razões de raio de curvatura x espessura ($R/h = 100$ e $R/h = 10$), assim como duas razões de comprimento x espessura ($L/h = 100$ e $L/h = 10$), respectivamente.

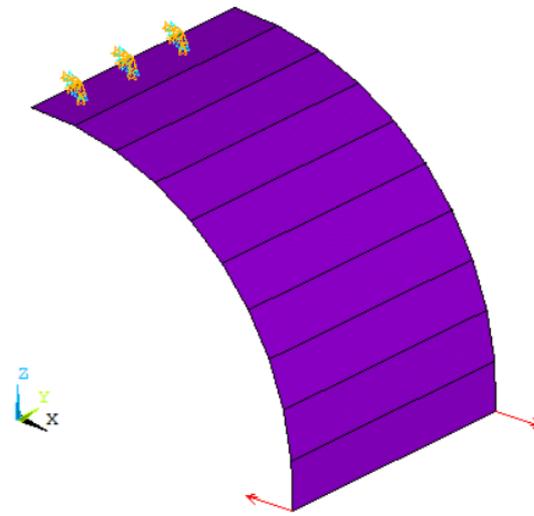


Figura 4.17 - Casca com restrição de deslocamentos e forças aplicadas em sentidos opostos na direção X.

O deslocamento máximo na direção X obtido para os elementos AIZ com 4 nós e resultados do ANSYS com espessura ($h = 0,1$), razão raio de curvatura x espessura ($R/h = 10$) e razão comprimento x espessura ($L/h = 10$) são comparados e apresentados no gráfico da Figura 4.18.

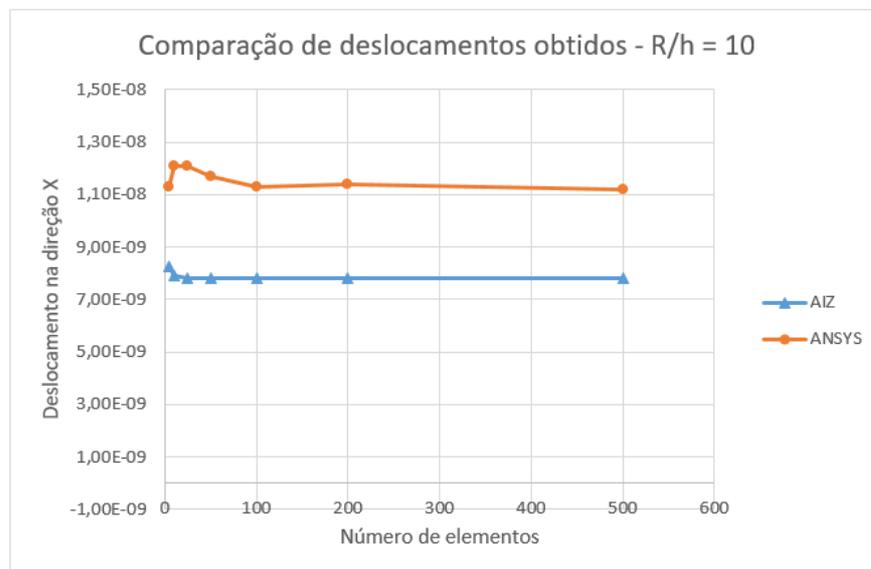


Figura 4.18 - Comparação dos deslocamentos na direção X com elemento AIZ de 4 nós e simulação no ANSYS com $R/h = 10$.

De forma similar, o deslocamento máximo na direção X obtido para os mesmos elementos, porém com espessura ($h = 0,01$), razão raio de curvatura x espessura ($R/h = 100$) e

razão comprimento x espessura ($L/h = 100$) são comparados e apresentados no gráfico da Figura 4.19.

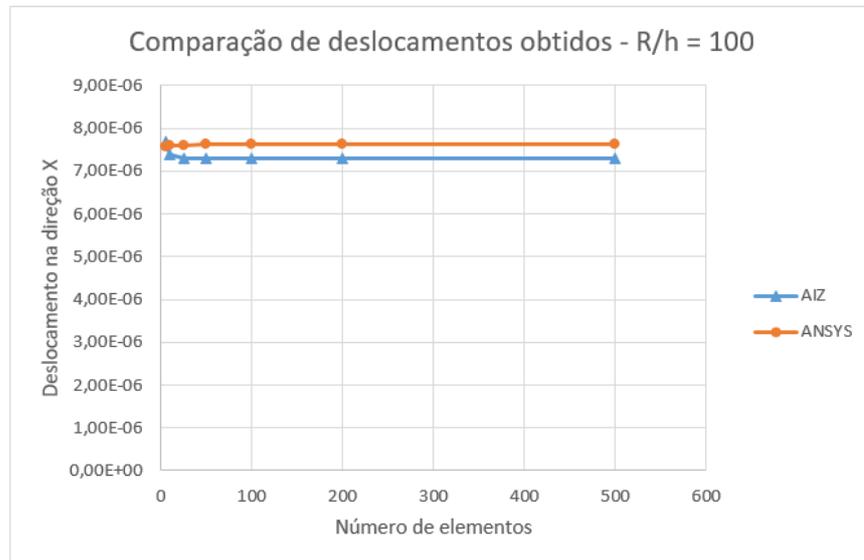


Figura 4.19 - Compara o dos deslocamentos na dire o X com elemento AIZ de 4 n s e simula o no ANSYS com $R/h = 100$.

A rela o dos deslocamentos calculados na dire o X   apresenta na Tabela 4.27 para uma rela o $R/h = 10$ e na Tabela 4.28 para uma rela o $R/h = 100$. Os deslocamentos calculados com o elemento AIZ se estabilizam em torno de 70% dos valores calculados com o ANSYS para $R/h = 10$.

Tabela 4.27 - Rela o entre deslocamentos calculados na dire o X com carga aplicada em sentidos opostos na mesma dire o, para uma rela o $R/h=10$.

	Número de elementos						
	5	10	25	50	100	200	500
AIZ/ANSYS	72,93%	65,71%	64,71%	66,80%	69,13%	68,51%	69,73%

A avalia o dos resultados para uma rela o $R/h = 100$, evidencia resultados melhores para o elemento AIZ, estabilizando em torno de 95% do valor calculado com o ANSYS.

Tabela 4.28 - Relação entre deslocamentos calculados na direção X com carga aplicada em sentidos opostos na mesma direção, para uma relação R/h=100.

	Número de elementos						
	5	10	25	50	100	200	500
AIZ/ANSYS	101,53%	97,18%	95,94%	95,63%	95,46%	95,45%	95,32%

4.1.3 Avaliação das forças e momentos resultantes em casos com curvatura e sem curvatura

A fim de inserir o efeito da curvatura no cálculo das forças e momentos resultantes, essas resultantes são calculadas com a utilização das equações (2.159) a (2.168) que incluem um termo dependente da curvatura da estrutura. Nos casos em que a curvatura é desconsiderada, pode-se assumir que os valores de R_i sejam infinitamente grandes, e dessa forma, as equações (2.159) a (2.168) são simplificadas, excluindo-se o termo que possui relação com a curvatura. Um exemplo para o cálculo de M_{11} é apresentado a seguir a:

$$M_{11} = \int_{\zeta} \sigma_1 \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) \zeta d\zeta \quad (4.6)$$

Fazendo-se $R_2 = \textit{infinito}$, a equação anterior torna-se:

$$M_{11} = \int_{\zeta} \sigma_1 \zeta d\zeta \quad (4.7)$$

É realizada também a avaliação da resposta do programa de elementos finitos em relação à suavização das normais de cada elemento. Os casos de normais a cada nó de cada elemento, sem suavização e o caso de normais suavizadas são apresentados na Figura 4.20. As normais ditas sem suavização são obtidas para cada nó de cada elemento, já as normais suavizadas são obtidas pela média das normais de cada elemento, utilizando-se a área de cada elemento como fator de ponderação.

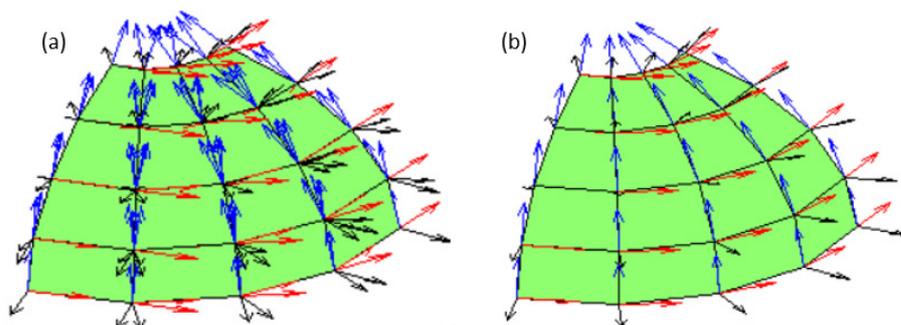


Figura 4.20 - Normais sem suavização (a) e normais suavizadas (b).

4.1.4 Aplicação de carga na direção X em uma casca com curvatura em única direção

O caso de carga que consiste na aplicação de força $F = 1000\text{N}$ na direção X, ilustrado na Figura 4.11 e explicado anteriormente, é aplicado a uma casca dividida em 10 elementos.

A direção θ_1 é alinhada com a direção X, dessa forma seguindo a curvatura da casca, e a direção 2 alinhada com a direção Y, conforme ilustrado juntamente com a orientação dos momentos resultantes, na Figura 4.21.

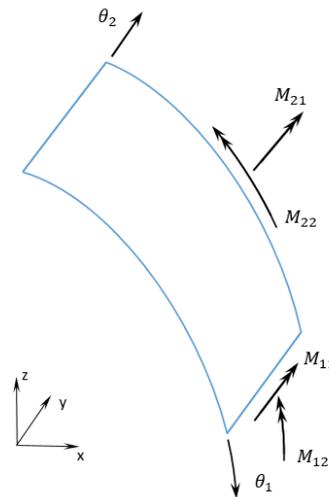


Figura 4.21 - Direções θ_1 e θ_2 e momentos resultantes na casca simulada.

A orientação das forças resultantes é apresentada na Figura 4.22 para o mesmo caso de casca.

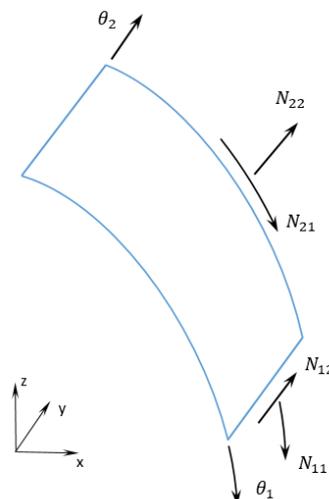


Figura 4.22 - Direções θ_1 e θ_2 e forças resultantes na casca simulada.

Os valores obtidos para as resultantes de momentos e de forças para uma casca com $R/h = 10$ ($h = 0,1\text{m}$) são apresentados a seguir.

4.1.4.1 Momentos resultantes M_{11}

Os momentos resultantes M_{11} , na direção 1, calculados utilizando normais suavizadas e com normais sem suavização são apresentados na Tabela 4.29 e na Tabela 4.30, respectivamente.

Para o cálculo dos momentos resultantes M_{11} com a consideração da curvatura da estrutura, aplica-se a equação (4.6). Para desconsiderar a curvatura da estrutura, aplica-se a equação (4.7).

Os resultados são idênticos para os cálculos com e sem curvatura, já que a curvatura envolvida no cálculo dessa resultante é a curvatura medida na direção 2, que possui valor zero. Dessa forma, não há variação dos valores calculados para M_{11} com e sem curvatura.

Tabela 4.29 – Momentos resultantes na direção 1 - M_{11} , com normais suavizadas.

M11		Nós			
		1	2	3	4
Elementos	1	-1028,50	-972,30	-1028,50	-972,30
	2	-993,10	-973,20	-993,10	-973,20
	3	-936,00	-932,30	-936,00	-932,30
	4	-860,10	-864,20	-860,10	-864,20
	5	-764,80	-773,00	-764,80	-773,00
	6	-651,40	-662,00	-651,40	-662,00
	7	-522,30	-534,30	-522,30	-534,30
	8	-380,90	-393,00	-380,90	-393,00
	9	-230,90	-241,30	-230,90	-241,30
	10	-76,70	-81,20	-76,70	-81,20

Tabela 4.30 – Momentos resultantes na direção 1 - M_{11} , com normais sem suavização.

M11		Nós			
		1	2	3	4
Elementos	1	-1021,70	-966,00	-1021,70	-966,00
	2	-979,10	-959,60	-979,10	-959,60
	3	-922,80	-919,20	-922,80	-919,20
	4	-848,00	-852,00	-848,00	-852,00
	5	-754,00	-762,10	-754,00	-762,10
	6	-642,20	-652,70	-642,20	-652,70
	7	-515,00	-526,80	-515,00	-526,80
	8	-375,50	-387,50	-375,50	-387,50
	9	-227,60	-237,90	-227,60	-237,90
	10	-76,00	-80,40	-76,00	-80,40

4.1.4.2 Momentos resultantes M_{22}

Para o cálculo dos momentos resultantes M_{22} com a consideração da curvatura da estrutura, aplica-se a equação (2.167), apresentada novamente a seguir.

$$M_{22} = \int_{\zeta} \sigma_{22} \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right) \zeta d\zeta \quad (4.8)$$

Desconsiderando-se a curvatura da estrutura, R_1 é assumido próximo a infinito, e dessa forma a equação anterior torna-se:

$$M_{22} = \int_{\zeta} \sigma_{22} \zeta d\zeta \quad (4.9)$$

Os momentos resultantes M_{22} , na direção 2, calculados utilizando-se normais suavizadas e sem aplicação da curvatura, são apresentados na Tabela 4.31. As mesmas resultantes, considerando a curvatura, são apresentadas na Tabela 4.32.

Tabela 4.31 – Momentos resultantes na direção 2 - M_{22} , com normais suavizadas e sem curvatura.

M22 - plano		Nós			
		1	2	3	4
Elementos	1	-308,55	-121,13	-308,55	-121,13
	2	-127,38	-61,16	-127,38	-61,16
	3	-49,99	-37,68	-49,99	-37,68
	4	-16,02	-29,49	-16,02	-29,49
	5	0,32	-26,96	0,32	-26,96
	6	9,52	-25,89	9,52	-25,89
	7	16,01	-23,93	16,01	-23,93
	8	22,11	-18,47	22,11	-18,47
	9	30,18	-4,50	30,18	-4,50
	10	44,86	30,09	44,86	30,09

Tabela 4.32 – Momentos resultantes na direção 2 - M_{22} , com normais suavizadas considerando a curvatura da estrutura.

M22 - curvo		Nós			
		1	2	3	4
Elementos	1	-308,04	-120,71	-308,04	-120,71
	2	-126,69	-60,51	-126,69	-60,51
	3	-49,37	-37,09	-49,37	-37,09
	4	-15,49	-28,96	-15,49	-28,96
	5	0,78	-26,50	0,78	-26,50
	6	9,89	-25,50	9,89	-25,50
	7	16,29	-23,62	16,29	-23,62
	8	22,30	-18,25	22,30	-18,25
	9	30,28	-4,38	30,28	-4,38
	10	44,80	30,05	44,80	30,05

De forma a avaliar o impacto da consideração da curvatura nas resultantes obtidas, a variação das resultantes com e sem curvatura é calculada, conforme a equação a seguir.

$$M_{22}^{variação} = \frac{M_{22}^{plano} - M_{22}^{curvo}}{M_{22}^{plano}} \quad (4.10)$$

A variação calculada para os momentos resultantes M_{22} com normais suavizadas, calculados com e sem a curvatura é apresentada na Tabela 4.33.

Tabela 4.33 - Variação dos valores dos momentos resultantes na direção 2 - M_{22} , com e sem curvatura da estrutura.

M22 - variação		Nós			
		1	2	3	4
Elementos	1	0,0017	0,0035	0,0017	0,0035
	2	0,0054	0,0105	0,0054	0,0105
	3	0,0123	0,0156	0,0123	0,0156
	4	0,0333	0,0178	0,0333	0,0178
	5	-1,4002	0,0171	-1,4002	0,0171
	6	-0,0389	0,0150	-0,0389	0,0150
	7	-0,0178	0,0129	-0,0178	0,0129
	8	-0,0088	0,0117	-0,0088	0,0117
	9	-0,0032	0,0253	-0,0032	0,0253
	10	0,0012	0,0014	0,0012	0,0014

Os momentos resultantes M_{22} , na direção 2, calculados utilizando normais a cada nó de cada elemento, sem suavização e sem aplicação da curvatura, são apresentadas na Tabela 4.34. As mesmas resultantes, considerando o efeito da curvatura, são apresentadas na Tabela 4.35.

Tabela 4.34 – Momentos resultantes na direção 2 - M_{22} , com normais sem suavização, desconsiderando a curvatura da estrutura.

M22 - plano		Nós			
		1	2	3	4
Elementos	1	-306,51	-120,78	-306,51	-120,78
	2	-124,72	-59,59	-124,72	-59,59
	3	-48,55	-36,54	-48,55	-36,54
	4	-15,17	-28,56	-15,17	-28,56
	5	0,85	-26,15	0,85	-26,15
	6	9,83	-25,19	9,83	-25,19
	7	16,13	-23,33	16,13	-23,33
	8	22,06	-18,03	22,06	-18,03
	9	29,95	-4,28	29,95	-4,28
	10	44,27	29,69	44,27	29,69

Tabela 4.35 – Momentos resultantes na direção 2 - M_{22} , com normais sem suavização, considerando a curvatura da estrutura.

M22 - curvo		Nós			
		1	2	3	4
Elementos	1	-306,26	-120,67	-306,26	-120,67
	2	-124,62	-59,54	-124,62	-59,54
	3	-48,51	-36,51	-48,51	-36,51
	4	-15,16	-28,53	-15,16	-28,53
	5	0,85	-26,13	0,85	-26,13
	6	9,82	-25,17	9,82	-25,17
	7	16,12	-23,31	16,12	-23,31
	8	22,04	-18,01	22,04	-18,01
	9	29,93	-4,27	29,93	-4,27
	10	44,23	29,66	44,23	29,66

A variação calculada para as resultantes de momento M_{22} calculadas com e sem curvatura e com normais sem suavização, utilizando a equação (4.10) é apresentada na Tabela 4.36.

Tabela 4.36 - Variação dos momentos resultantes na direção 2 - M_{22} , com e sem curvatura e com normais sem suavização.

M22 - variação		Nós			
		1	2	3	4
Elementos	1	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008
	2	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008
	3	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008
	4	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008
	5	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008
	6	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008
	7	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008
	8	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008
	9	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008
	10	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008

4.1.4.3 Momentos resultantes M_{12}

Para o cálculo dos momentos resultantes M_{12} considerando a curvatura da estrutura, aplica-se a equação (2.166), apresentada novamente a seguir.

$$M_{12} = \int_{\zeta} \tau_{12} \left(1 + \frac{\zeta}{R_2} \right) \zeta d\zeta \quad (4.11)$$

Desconsiderando-se a curvatura da estrutura, R_2 é assumido próximo a infinito, e dessa forma a equação anterior torna-se:

$$M_{12} = \int_{\zeta} \tau_{12} \zeta d\zeta \quad (4.12)$$

Os momentos resultantes M_{12} , calculados utilizando-se normais suavizadas e sem aplicação da curvatura, são apresentadas na Tabela 4.37. As mesmas resultantes, calculadas utilizando-se normais a cada nó de cada elemento, sem suavização, são apresentadas na Tabela 4.38. Esses dados não apresentam variação com a inclusão da curvatura no cálculo das resultantes, por depender apenas da curvatura na direção θ_2 , que tem valor nulo.

Tabela 4.37 - Resultantes de momento M_{12} , com normais suavizadas.

M12		Nós			
		1	2	3	4
Elementos	1	-209,19	-209,19	209,19	209,19
	2	-74,08	-74,08	74,08	74,08
	3	-13,80	-13,80	13,80	13,80
	4	15,05	15,05	-15,05	-15,05
	5	30,51	30,51	-30,51	-30,51
	6	39,62	39,62	-39,62	-39,62
	7	44,67	44,67	-44,67	-44,67
	8	45,39	45,39	-45,39	-45,39
	9	38,80	38,80	-38,80	-38,80
	10	16,49	16,49	-16,49	-16,49

Tabela 4.38 - Resultantes de momento M_{12} , com normais sem suavização.

M12		Nós			
		1	2	3	4
Elementos	1	-207,14	-207,14	207,14	207,14
	2	-72,64	-72,64	72,64	72,64
	3	-13,40	-13,40	13,40	13,40
	4	14,93	14,93	-14,93	-14,93
	5	30,11	30,11	-30,11	-30,11
	6	39,05	39,05	-39,05	-39,05
	7	44,01	44,01	-44,01	-44,01
	8	44,71	44,71	-44,71	-44,71
	9	38,17	38,17	-38,17	-38,17
	10	16,26	16,26	-16,26	-16,26

4.1.4.4 Momentos resultantes M_{21}

Para o cálculo dos momentos resultantes M_{21} considerando a curvatura da estrutura, aplica-se a equação (2.168), apresentada novamente a seguir.

$$M_{21} = \int_{\zeta} \tau_{21} \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right) \zeta d\zeta \quad (4.13)$$

Desconsiderando-se a curvatura da estrutura, R_1 é assumido próximo a infinito, e dessa forma a equação anterior torna-se:

$$M_{21} = \int_{\zeta} \tau_{21} \zeta d\zeta \quad (4.14)$$

As resultantes de momento M_{21} com normais suavizadas e sem aplicação da curvatura tem resultados iguais às resultantes de momento M_{12} na mesma condição, podendo ser observadas na Tabela 4.37. As mesmas resultantes, calculadas considerando-se a curvatura da estrutura são apresentadas na Tabela 4.39.

Tabela 4.39 - Resultantes de momento M_{21} , com normais suavizadas e com curvatura.

M21 - curvo		Nós			
		1	2	3	4
Elementos	1	-208,83	-208,83	208,83	208,83
	2	-73,85	-73,85	73,85	73,85
	3	-13,73	-13,73	13,73	13,73
	4	15,02	15,02	-15,02	-15,02
	5	30,42	30,42	-30,42	-30,42
	6	39,50	39,50	-39,50	-39,50
	7	44,53	44,53	-44,53	-44,53
	8	45,25	45,25	-45,25	-45,25
	9	38,68	38,68	-38,68	-38,68
	10	16,46	16,46	-16,46	-16,46

De forma a avaliar o impacto da consideração da curvatura nas resultantes obtidas, a variação das resultantes com e sem curvatura é calculada, conforme a equação a seguir.

$$M_{21}^{variação} = \frac{M_{21}^{plano} - M_{21}^{curvo}}{M_{21}^{plano}} \quad (4.15)$$

A variação para as resultantes de momento M_{21} calculadas com e sem curvatura e com normais suavizadas é apresentada na Tabela 4.40.

Tabela 4.40 - Variação dos valores das resultantes de momento - M_{21} , com e sem curvatura e com normais suavizadas.

M21 - variação		Nós			
		1	2	3	4
Elementos	1	0,0017	0,0017	0,0017	0,0017
	2	0,0031	0,0031	0,0031	0,0031
	3	0,0050	0,0050	0,0050	0,0050
	4	0,0018	0,0018	0,0018	0,0018
	5	0,0028	0,0028	0,0028	0,0028
	6	0,0030	0,0030	0,0030	0,0030
	7	0,0031	0,0031	0,0031	0,0031
	8	0,0030	0,0030	0,0030	0,0030
	9	0,0030	0,0030	0,0030	0,0030
	10	0,0021	0,0021	0,0021	0,0021

As resultantes de momento M_{21} com normais a cada nó de cada elemento, sem suavização e sem aplicação da curvatura tem resultados iguais às resultantes de momento M_{12} na mesma condição, podendo ser observadas na Tabela 4.38. As mesmas resultantes, considerando a curvatura da estrutura, são apresentadas na Tabela 4.41.

Tabela 4.41 - Resultantes de momento M_{21} , com normais sem suavização e com curvatura.

M21 - curvo		Nós			
		1	2	3	4
Elementos	1	-206,97	-206,97	206,97	206,97
	2	-72,58	-72,58	72,58	72,58
	3	-13,39	-13,39	13,39	13,39
	4	14,91	14,91	-14,91	-14,91
	5	30,08	30,08	-30,08	-30,08
	6	39,02	39,02	-39,02	-39,02
	7	43,97	43,97	-43,97	-43,97
	8	44,67	44,67	-44,67	-44,67
	9	38,14	38,14	-38,14	-38,14
	10	16,25	16,25	-16,25	-16,25

A variação para as resultantes de momento M_{21} calculadas com e sem curvatura e com normais sem suavização é apresentada na Tabela 4.42.

Tabela 4.42 - Variação dos valores das resultantes de momento - M_{21} , com e sem curvatura e com normais sem suavização.

M21 - variação		Nós			
		1	2	3	4
Elementos	1	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008
	2	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008
	3	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008
	4	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008
	5	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008
	6	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008
	7	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008
	8	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008
	9	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008
	10	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008

4.1.5 Aplicação de carga na direção X em uma casca com curvatura em duas direções

O caso de carga que consiste na aplicação de força $F = 1000\text{N}$ na direção X, ilustrado na Figura 4.11 e explicado anteriormente, é aplicado a uma casca com curvatura em duas direções, dividida em 10 elementos em cada uma dessas direções. A casca usada nessa simulação tem raio $R_1 = 10\text{m}$, medido na direção de θ_1 e $R_2 = 1\text{m}$, medido na direção de θ_2 .

4.1.5.1 Momentos resultantes M_{11}

Os momentos resultantes M_{11} , obtidos com normais suavizadas e sem curvatura são ilustradas na Figura 4.23(a). As mesmas resultantes, obtidas considerando a curvatura da estrutura são ilustradas na Figura 4.23(b). A inclusão da curvatura no cálculo dos momentos resultantes é realizada da mesma forma apresentada anteriormente para uma casca com curvatura simples, na equação (4.6) e na equação (4.7).

De forma a avaliar o impacto da consideração da curvatura nas resultantes obtidas, a variação das resultantes com e sem curvatura é calculada, conforme a equação a seguir.

$$M_{11}^{variação} = \frac{M_{11}^{plano} - M_{11}^{curvo}}{M_{11}^{plano}} \quad (4.16)$$

A variação calculada para os momentos resultantes M_{11} com normais suavizadas, calculados com e sem a curvatura é apresentada na Figura 4.23(c).

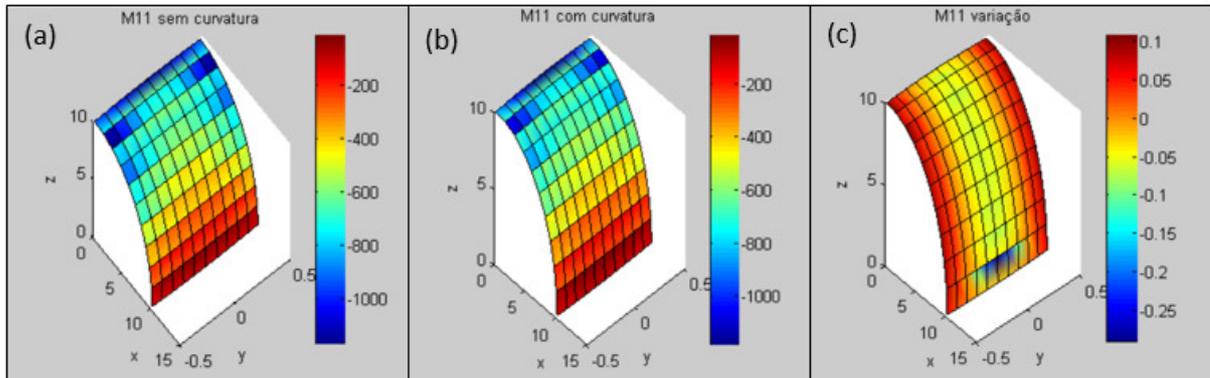


Figura 4.23 – Momentos resultantes M_{11} , com normais suavizadas e sem curvatura (a), com curvatura (b) e variação (c).

A variação máxima encontrada em toda a estrutura é de 29,02%, enquanto a variação na região de engaste é de 9,78%.

Os momentos resultantes M_{11} , obtidos com normais a cada nó de cada elemento, sem suavização e sem curvatura são ilustradas na Figura 4.24(a). As mesmas resultantes, obtidas considerando a curvatura da estrutura são ilustradas na Figura 4.24(b). A inclusão da curvatura no cálculo dos momentos resultantes é realizada da mesma forma apresentada anteriormente, assim como a variação calculada para os momentos resultantes M_{11} com normais sem suavização, com e sem a curvatura da estrutura e apresentada na Figura 4.24(c).

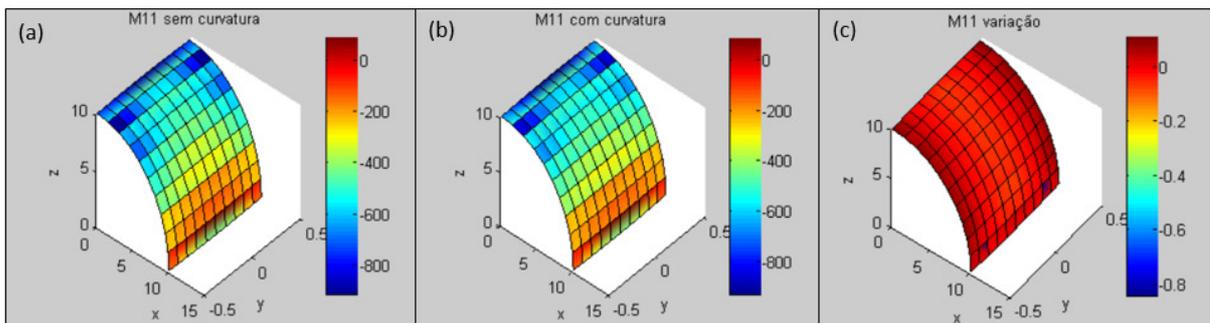


Figura 4.24 – Momentos resultantes M_{11} , com normais sem suavização e sem curvatura (a), com curvatura (b) e variação (c).

A variação máxima encontrada em toda a estrutura é de 84,40%, enquanto a variação na região de engaste é de 8,44%. Os valores máximos encontrados na estrutura são maiores que os

encontrados na análise com normais suavizadas, mas a variação na região de engaste é levemente menor que esse mesmo caso.

4.1.5.2 Momentos resultantes M_{22}

Os momentos resultantes M_{22} , obtidos com normais suavizadas e sem curvatura são ilustradas na Figura 4.25(a). As mesmas resultantes, obtidas considerando a curvatura da estrutura são ilustradas na Figura 4.25(b). A inclusão da curvatura no cálculo dos momentos resultantes é realizada da mesma forma apresentada anteriormente para uma casca com curvatura simples, na equação (4.8) e na equação (4.9).

De forma a avaliar o impacto da consideração da curvatura nas resultantes obtidas, a variação das resultantes com e sem curvatura é calculada, utilizando a equação (4.10), apresentada anteriormente. A variação calculada para os momentos resultantes M_{22} com normais suavizadas, com e sem a curvatura é apresentada na Figura 4.25(c).

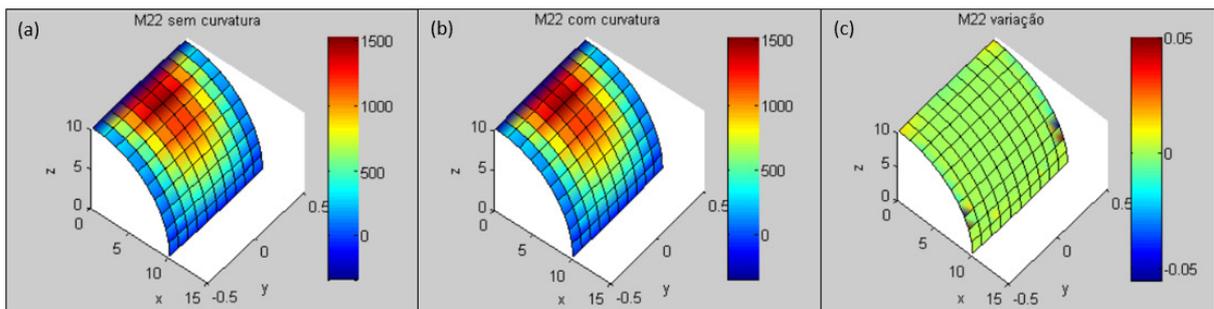


Figura 4.25 – Momentos resultantes M_{22} , com normais suavizadas e sem curvatura (a), com curvatura (b) e variação (c).

A variação máxima encontrada em toda a estrutura é de 5,49%, enquanto a variação na região de engaste é de 1,32%.

Os momentos resultantes M_{22} , obtidos com normais a cada nó de cada elemento, sem suavização e sem curvatura, são ilustrados na Figura 4.26(a). As mesmas resultantes, obtidas considerando a curvatura da estrutura são ilustradas na Figura 4.26(b). A inclusão da curvatura no cálculo dos momentos resultantes é realizada da mesma forma apresentada anteriormente para uma casca com curvatura simples, na equação (4.8) e na equação (4.9).

De forma a avaliar o impacto da consideração da curvatura nas resultantes obtidas, a variação das resultantes com e sem curvatura é calculada, utilizando a equação (4.10),

apresentada anteriormente. A variação calculada para os momentos resultantes M_{22} com normais sem suavização, com e sem a curvatura é apresentada na Figura 4.26(c).

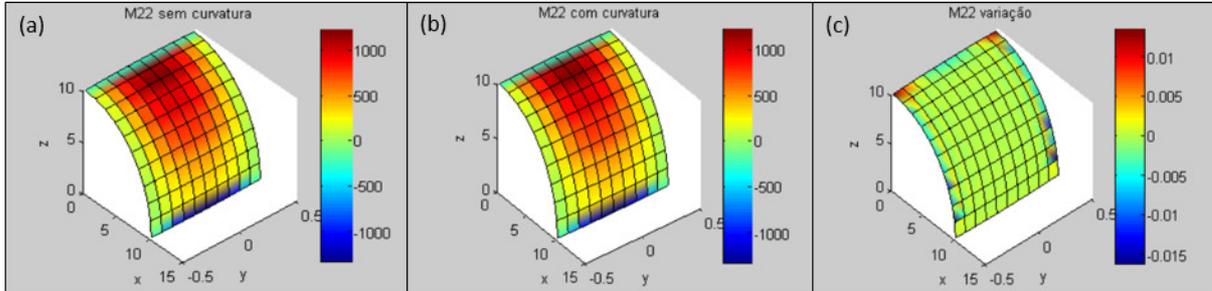


Figura 4.26 – Momentos resultantes M_{22} , normais sem suavização e sem curvatura (a), com curvatura (b) e variação (c).

A variação máxima encontrada em toda a estrutura é de 1,62%, enquanto a variação na região de engaste é de 1,36%.

4.1.5.3 Momentos resultantes M_{12}

Os momentos resultantes M_{12} , obtidos com normais suavizadas e sem curvatura são ilustradas na Figura 4.27(a). As mesmas resultantes, obtidas considerando a curvatura da estrutura são ilustradas na Figura 4.27(b). A inclusão da curvatura no cálculo dos momentos resultantes é realizada da mesma forma apresentada anteriormente para uma casca com curvatura simples, na equação (4.11) e na equação (4.12).

De forma a avaliar o impacto da consideração da curvatura nas resultantes obtidas, a variação das resultantes com e sem curvatura é calculada, conforme a equação a seguir.

$$M_{12}^{variação} = \frac{M_{12}^{plano} - M_{12}^{curvo}}{M_{12}^{plano}} \quad (4.17)$$

A variação calculada para os momentos resultantes M_{12} com normais suavizadas, calculados com e sem a curvatura é apresentada na Figura 4.27(c).

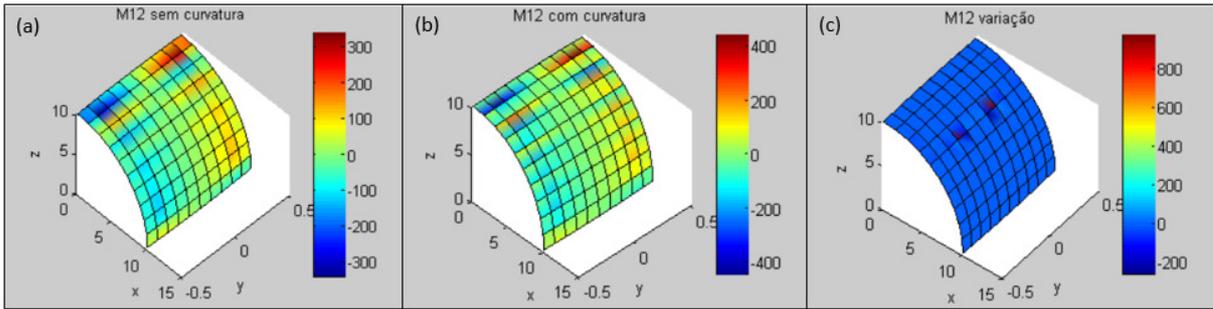


Figura 4.27 – Momentos resultantes M_{12} , com normais suavizadas e sem curvatura (a), com curvatura (b) e variação (c).

A variação máxima encontrada em toda a estrutura é de 98054%, porém ocorre em locais em que as resultantes M_{12} tem valores baixos, próximos a zero, não tendo grande importância para a casca. Nas demais regiões a variação é pequena, como pode-se observar na Figura 4.27(c). A variação na região de engaste é de 78,90%.

Os momentos resultantes M_{12} , obtidos com normais a cada nó de cada elemento, sem suavização e sem curvatura são ilustradas na Figura 4.28(a). As mesmas resultantes, obtidas considerando a curvatura da estrutura são ilustradas na Figura 4.28(b). A inclusão da curvatura no cálculo dos momentos resultantes é realizada da mesma forma apresentada anteriormente, assim como a variação calculada para os momentos resultantes M_{12} com normais sem suavização, com e sem a curvatura da estrutura e apresentada na Figura 4.28(c).

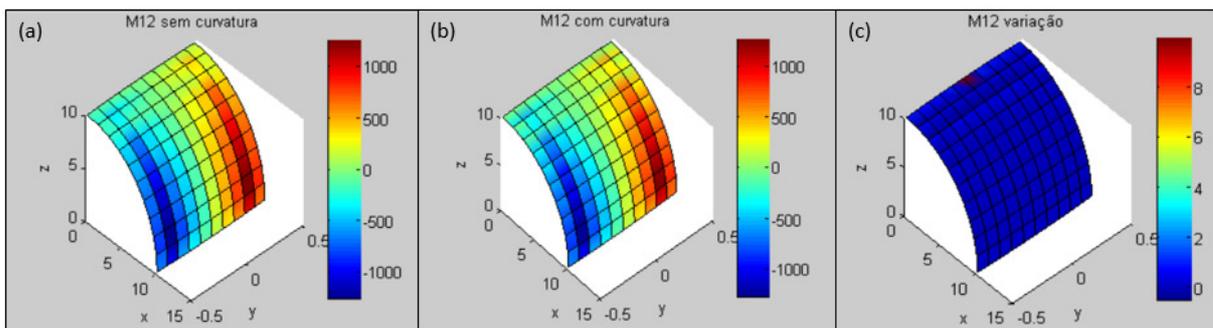


Figura 4.28 – Momentos resultantes M_{12} , com normais sem suavização e sem curvatura (a), com curvatura (b) e variação (c).

A variação máxima encontrada em toda a estrutura é de 999%. A variação na região de engaste é de 81,63%.

4.1.5.4 Momentos resultantes M_{21}

Os momentos resultantes M_{21} , obtidos com normais suavizadas e sem curvatura são ilustradas na Figura 4.29(a). As mesmas resultantes, obtidas considerando a curvatura da estrutura são ilustradas na Figura 4.29(b). A inclusão da curvatura no cálculo dos momentos resultantes é realizada da mesma forma apresentada anteriormente para uma casca com curvatura simples, na equação (4.13) e na equação (4.14).

De forma a avaliar o impacto da consideração da curvatura nas resultantes obtidas, a variação das resultantes com e sem curvatura é calculada, utilizando a equação (4.15), apresentada anteriormente. A variação calculada para os momentos resultantes M_{21} com normais suavizadas, com e sem a curvatura é apresentada na Figura 4.29(c).

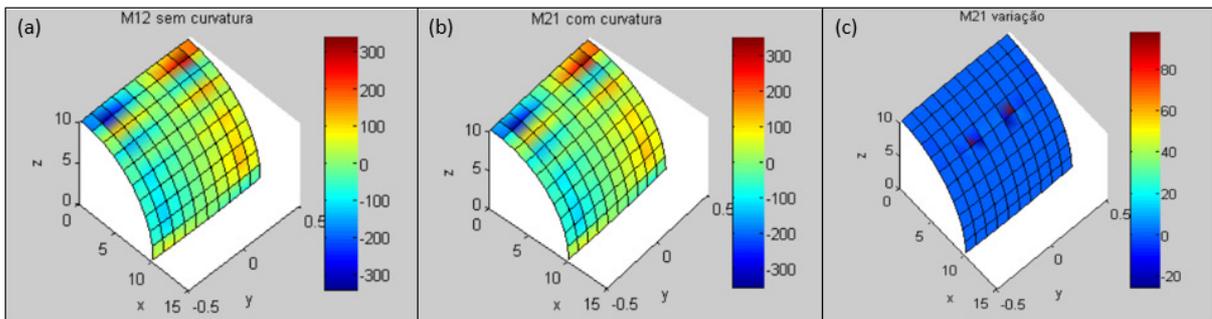


Figura 4.29 – Momentos resultantes M_{21} , com normais suavizadas e sem curvatura (a), com curvatura (b) e variação (c).

Os momentos resultantes M_{21} , obtidos com normais a cada nó de cada elemento, sem suavização e sem curvatura, são ilustrados na Figura 4.30(a). As mesmas resultantes, obtidas considerando a curvatura da estrutura são ilustradas na Figura 4.30(b). A inclusão da curvatura no cálculo dos momentos resultantes é realizada da mesma forma apresentada anteriormente para uma casca com curvatura simples, na equação (4.13) e na equação (4.14).

De forma a avaliar o impacto da consideração da curvatura nas resultantes obtidas, a variação das resultantes com e sem curvatura é calculada, utilizando a equação (4.15), apresentada anteriormente. A variação calculada para os momentos resultantes M_{21} com normais sem suavização, com e sem a curvatura é apresentada na Figura 4.30(c).

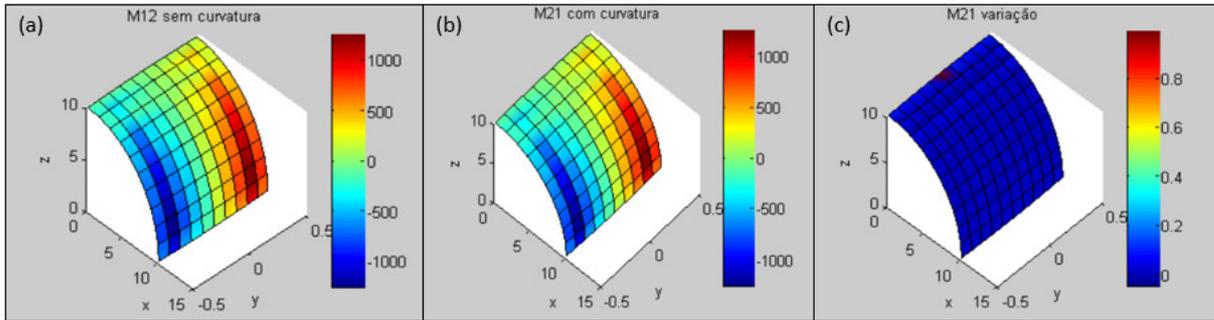


Figura 4.30 – Momentos resultantes M_{21} , com normais sem suavização e sem curvatura (a), com curvatura (b) e variação (c).

A variação máxima encontrada em toda a estrutura é de 99,9%. A variação na região de engaste é de 8,90%.

4.2 Resolução analítica

A aplicação da teoria de cascas a casos específicos de geometria e condições de contorno, permite obter resultados analíticos exatos nessas condições, com exceção aos erros inerentes às simplificações introduzidas no problema.

Um caso com curvatura em único sentido, ou seja, constante na direção 1 e plano na direção 2 é avaliado a seguir.

4.2.1 Casca com curvatura em único sentido

A aplicação da teoria de cascas ao caso de uma casca com curvatura constante na direção 1 e plana na direção 2 permite a obtenção dos resultados analíticos para esse caso. O caso de casca com curvatura em único sentido é ilustrado na Figura 4.31, e a orientação dos momentos e das forças resultantes são apresentados na Figura 4.21 e na Figura 4.22, respectivamente.

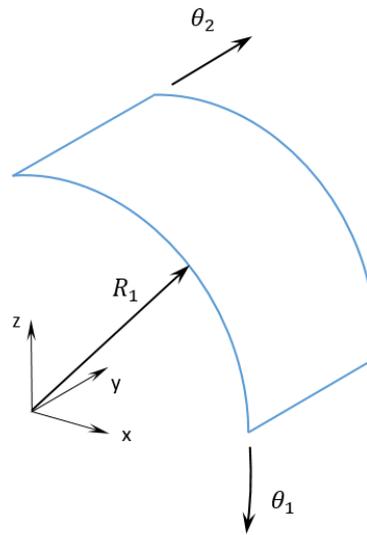


Figura 4.31 - Casca com curvatura constante em única direção.

A parametrização para essa casca pode ser definida conforme equações a seguir.

$$x_1 = R \sin \theta_1 \quad (4.18)$$

$$x_2 = \theta_2 \quad (4.19)$$

$$x_3 = R \cos \theta_1 - R \quad (4.20)$$

Aplicando as equações (4.18) a (4.20) nas definições apresentadas nas equações (2.11) a (2.17), obtém-se:

$$G_{11} = R^2 \quad (4.21)$$

$$G_{12} = 0 \quad (4.22)$$

$$G_{22} = 1 \quad (4.23)$$

Sendo $G_{12} = 0$, podemos definir, de acordo com a equação (2.21):

$$A_1 = R \quad (4.24)$$

$$A_2 = 1 \quad (4.25)$$

As equações de equilíbrio (2.117) a (2.121), obtidas no desenvolvimento teórico podem ser rearranjadas da seguinte forma:

$$\frac{\partial(N_{11}A_2)}{\partial\theta_1} + \frac{\partial(N_{12}A_1)}{\partial\theta_2} + N_{12}\frac{\partial A_1}{\partial\theta_2} - N_{22}\frac{\partial A_2}{\partial\theta_1} + A_1A_2\left(\frac{Q_1}{A_1} + p_1\right) = 0 \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial(N_{12}A_2)}{\partial\theta_1} + \frac{\partial(N_{22}A_1)}{\partial\theta_2} + N_{12}\frac{\partial A_2}{\partial\theta_1} - N_{11}\frac{\partial A_1}{\partial\theta_2} + A_1A_2\left(\frac{Q_2}{A_2} + p_2\right) = 0 \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial(Q_1A_2)}{\partial\theta_1} + \frac{\partial(Q_2A_1)}{\partial\theta_2} - \left(\frac{N_{11}}{R_1} + \frac{N_{22}}{R_2}\right)A_1A_2 + p_3A_1A_2 = 0 \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial(M_{11}A_2)}{\partial\theta_1} + \frac{\partial(M_{12}A_1)}{\partial\theta_2} + M_{12}\frac{\partial A_1}{\partial\theta_2} - M_{22}\frac{\partial A_2}{\partial\theta_1} - Q_1A_1A_2 = -m_1A_1A_2 \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial(M_{12}A_2)}{\partial\theta_1} + \frac{\partial(M_{22}A_1)}{\partial\theta_2} + M_{12}\frac{\partial A_2}{\partial\theta_1} - M_{11}\frac{\partial A_1}{\partial\theta_2} - Q_2A_1A_2 = -m_2A_1A_2 \quad (4.30)$$

Sabendo que $R_1 = R$ e $R_2 = \infty$, e utilizando-se as expressões para A_1 e A_2 obtidas nas equações (4.24) e (4.25), as equações de equilíbrio podem ser reescritas, para a geometria dessa casca, como:

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial\theta_1} + R\frac{\partial N_{12}}{\partial\theta_2} + Q_1 + Rp_1 = 0 \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial\theta_1} + R\frac{\partial N_{22}}{\partial\theta_2} + RQ_2 + Rp_2 = 0 \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial\theta_1} + R\frac{\partial Q_2}{\partial\theta_2} - N_{11} + p_3R = 0 \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial\theta_1} + R\frac{\partial M_{12}}{\partial\theta_2} - Q_1R = -m_1R \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial M_{12}}{\partial\theta_1} + R\frac{\partial M_{22}}{\partial\theta_2} - Q_2R = -m_2R \quad (4.35)$$

Definindo a condição de momento distribuído m_1 constante, define-se:

$$p_1 = p_2 = p_n = m_2 = 0 \quad (4.36)$$

Considerando as cargas aplicadas pode-se definir que as resultantes de momentos na direção θ_2 sejam nulas, ao menos longe do engaste e das bordas. Da mesma forma as resultantes de força na direção podem ser consideradas nulas, portanto:

$$M_{12} = M_{21} = M_{22} = 0 \quad (4.37)$$

$$N_{12} = N_{21} = N_{22} = 0 \quad (4.38)$$

As equações diferenciais (4.31) a (4.35) podem então ser simplificadas a:

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial \theta_1} + Q_1 = 0 \quad (4.39)$$

$$R \frac{\partial N_{22}}{\partial \theta_2} + RQ_2 = 0 \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \theta_1} + R \frac{\partial Q_2}{\partial \theta_2} - N_{11} = 0 \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_1} - Q_1 R = -m_1 R \quad (4.42)$$

$$-Q_2 R = 0 \quad (4.43)$$

Na equação (4.43) fica evidente que com as condições assumidas, $Q_2 = 0$, e portanto as equações diferenciais reduzem-se a:

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial \theta_1} + Q_1 = 0 \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \theta_1} - N_{11} = 0 \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_1} - Q_1 R = -m_1 R \quad (4.46)$$

Substituindo Q_1 , obtido da equação (4.44) na equação (4.45), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 N_{11}}{\partial \theta_1^2} - N_{11} = 0 \quad (4.47)$$

Substituindo Q_1 , obtido da equação (4.44) na equação (4.46), obtém-se:

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_1} + R \frac{\partial N_{11}}{\partial \theta_1} = -m_1 R \quad (4.48)$$

4.2.1.1 Obtenção de uma expressão analítica para $N_{11}(\theta_1)$

A resolução da equação diferencial (4.47) leva a:

$$N_{11}(\theta_1) = C_1 \sin(\theta_1) + C_2 \cos(\theta_1) \quad (4.49)$$

Sabendo que em $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, $N_{11} = 0$, é possível obter C_1 :

$$N_{11}\left(\theta_1 = \frac{\pi}{2}\right) = C_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + C_2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (4.50)$$

$$C_1 = 0 \quad (4.51)$$

Como há somente momentos aplicados, o valor de N_{11} quando $\theta_1 = 0$, também deve ser igual a zero. Dessa forma, C_1 deve ser igual a zero. Portanto:

$$N_{11}(\theta_1) = 0 \quad (4.52)$$

4.2.1.2 Obtenção de uma expressão analítica para $M_{11}(\theta_1)$

A equação diferencial (4.48) pode ser simplificada a:

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_1} = -m_1 R \quad (4.53)$$

A resolução da equação diferencial (4.53) permite obter uma expressão para M_{11} em função de θ_1 , R e m_1 , como apresentado na equação a seguir:

$$M_{11}(\theta_1) = -m_1 R \theta_1 + C_1 \quad (4.54)$$

Sabendo que o valor de M_{11} quando $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ é igual a m_1 , pode-se determinar uma expressão para C_1 , como mostrado a seguir:

$$M_{11}\left(\theta_1 = \frac{\pi}{2}\right) = -m_1 R \frac{\pi}{2} + C_1 = m_1 \quad (4.55)$$

$$C_1 = m_1 + m_1 R \frac{\pi}{2} \quad (4.56)$$

$$C_1 = m_1 \left(1 + R \frac{\pi}{2}\right) \quad (4.57)$$

A expressão para M_{11} pode então ser reescrita, como:

$$M_{11}(\theta_1) = -m_1 R \theta_1 + m_1 \left(1 + R \frac{\pi}{2}\right) \quad (4.58)$$

A substituição dos valores de θ_1 na equação (4.58) permite a geração do gráfico que ilustra os valores de M_{11} em função de θ_1 .

4.2.1.3 Comparação da resolução analítica de casca com curvatura em único sentido com resolução pelo método de elemento finitos

De forma a comparar a resolução analítica com a resolução por elementos finitos, uma estrutura similar à resolvida analiticamente foi montada como programa de elementos finitos. A estrutura foi dividida em 10 elementos em cada aresta, sendo formada dessa forma por 100 elementos.

Os resultados obtidos para os momentos resultantes M_{11} com o programa de elementos finitos é apresentado na Figura 4.32.

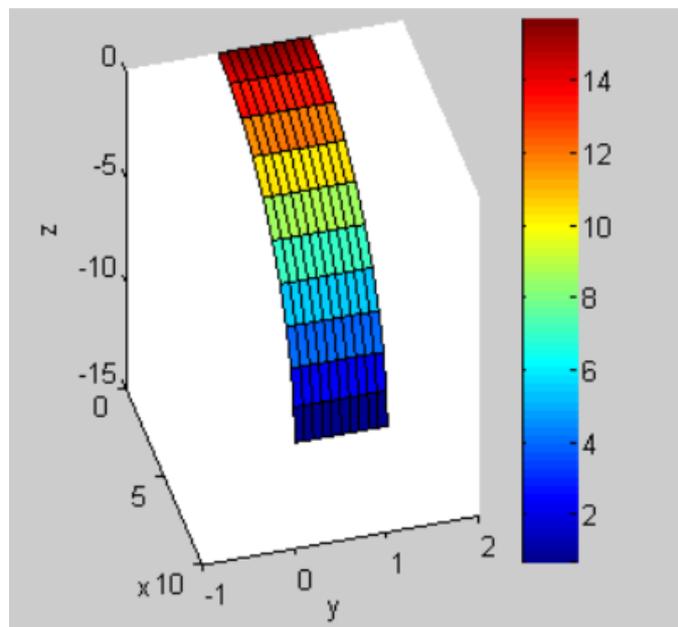


Figura 4.32 - Resultantes de momento M_{11} obtidas ao longo de toda a estrutura.

Os valores das resultantes de momento M_{11} no centro da estrutura foram plotados de forma a permitir a comparação com os valores calculados analiticamente.

As resultantes de momento M_{11} obtidas de forma analítica e as obtidas de forma numérica, pelo método de elementos finitos, são plotadas juntas no gráfico da Figura 4.33.

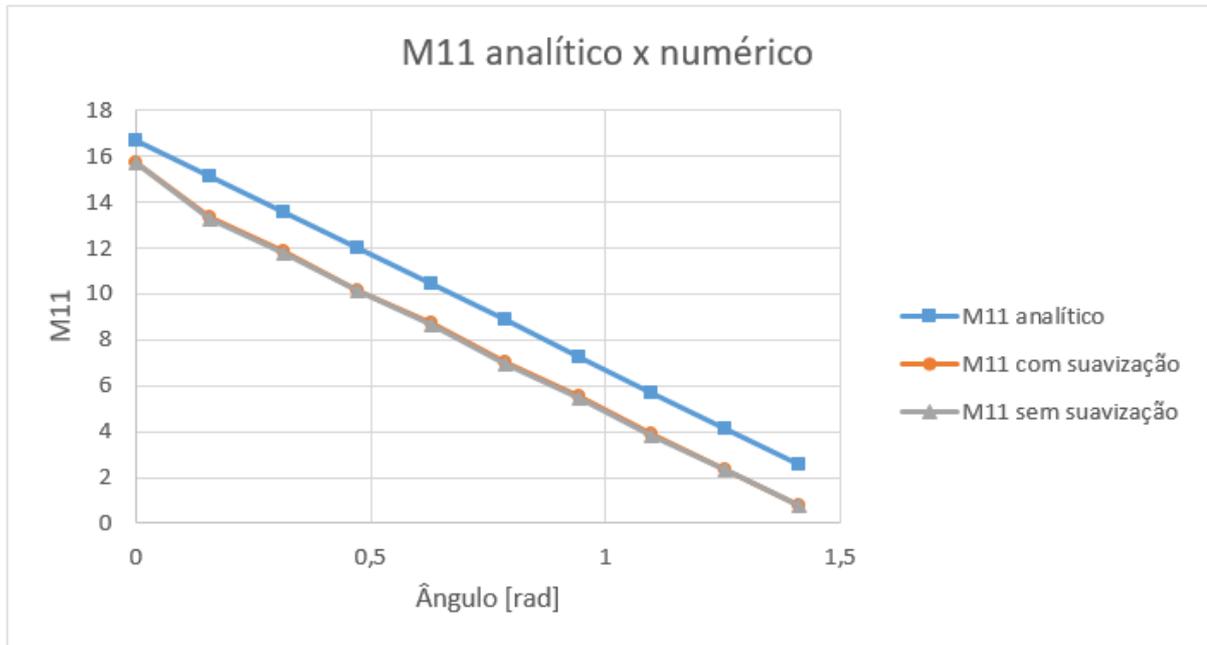


Figura 4.33 - Resultantes de momento M_{11} obtidas de forma analítica e numérica.

5 CONCLUSÕES

A resolução dos testes propostos no artigo de MacNeal e Harder, 1985, com o programa de elementos finitos implementado em Matlab mostrou que o mesmo resolve de forma eficiente os problemas de casca propostos. Os resultados obtidos não apresentam resultados exatos, porém os testes propostos são formados de maneira a expor os possíveis problemas dos programas de elementos finitos, sendo dessa forma de elevado nível de dificuldade. Dessa forma, as falhas apresentadas estão dentro do esperado para o elemento utilizado, uma vez que o mesmo foi implementado diretamente a partir da teoria apresentada por Ahmad, Irons e Zienkiewicz [Ahmad, et al., 1970; Zienkiewicz e Taylor, 2000].

A inclusão da curvatura no cálculo das forças e momentos resultantes de forma geral não trouxe variações percentuais significativas na aproximação dos resultados. Em alguns pontos das cascas simuladas houve grandes variações percentuais, porém nessas mesmas regiões a magnitude dos momentos resultantes não apresentam valores muito significativos. Na região de engaste, que na maioria dos casos requerem atenção por concentrar esforços, em geral foram observadas variações percentuais mais moderadas em relação às demais regiões da casca, ao considerar-se a curvatura da estrutura no cálculo dos momentos resultantes.

A resolução do problema de casca com curvatura única, de forma analítica, e a comparação dos resultados com a resolução por elementos finitos, com e sem a consideração da curvatura da estrutura, apresentou resultados próximos, porém os resultados obtidos com a resolução numérica não apresentaram melhora com a inserção da curvatura no cálculo dos momentos resultantes.

Os resultados apresentados sugerem que a inserção da curvatura no cálculo de resultantes de forças e de momentos não resultam ganho significativo de precisão no cálculo dessas resultantes, porém em alguns casos há diferenças nos resultados, sendo recomendável que haja avaliação para determinar se são essas diferenças possam ser importantes para o problema em questão. Cabe salientar que os problemas avaliados são bastante simples, possuindo curvatura em uma ou duas direções, porém em casos de cascas com grande complexidade e curvaturas maiores, o efeito da curvatura pode ser mais acentuado. A exploração de cascas com geometrias complexas é uma sugestão para futuros trabalhos nessa área. Um segundo ponto importante é a observação de que a curvatura foi inserida apenas nas equações para o cálculo das forças e momentos resultantes, não tendo efeito sobre a matriz de

rigidez dos elementos de casca. Dessa forma, uma segunda sugestão para futuros trabalhos é a inserção da curvatura nas equações que descrevem a cinemática e deformação dos elementos, dessa forma inserindo a curvatura na matriz de rigidez da estrutura gerada pelo método de elementos finitos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ahmad, S., Irons, B. M. e Zienkiewicz, O. C., 1970. Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Volume 2, pp. 419-451.

ANSYS, Inc., 2009. **Theory Reference for the Mechanical APDL and Mechanical Applications**. 12.0 ed. Canonsburg: ANSYS, Inc.;

Bathe, K.-J., 1996. **Finite Element Procedures**. Saddle River(New Jersey): Prentice Hall.

Dvorkin, E. N. e Bathe, K.-J., 1984. A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis.. **Eng Comput**, Volume 1, pp. 77-88.

Dvorkin, E. N. e Bathe, K.-J., 1985. A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and mixed interpolation.. **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, Volume 21, pp. 367-383.

Dvorkin, E. N. e Bathe, K.-J., 1986. A formulation of general shell elements - the use of mixed interpolation of tensorial components.. **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, Volume 22, pp. 697-722.

Dym, C. L., 1974. **Introduction to the Theory of Shells**. Oxford: Pergamon Press.

Filho, A. A., 2013. **Elementos Finitos: A Base da Tecnologia CAE**. São Paulo: Editora Erica Ltda.

Fish, J. e Belytschko, T., 2007. **A First Course in Finite Elements**. s.l.:John Wiley & Sons, Ltd.

Kraus, H., 1967. **Thin Elastic Shells**. New York: John Wiley & Sons, Inc..

MacNeal, R. H. e Harder, R. L., 1985. A Proposed Set of Problems to Test Finite Element Accuracy. **Finite Elements in Analysis and Design** 1, pp. 3-20.

Marczak, R. J., 2016. **Plates & Shells**. s.l.:Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS.

Sokolnikoff, I. S., 1946. **Mathematical Theory of Elasticity**. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc..

Teixeira-Dias, F., Pinha-da-Cruz, J., Fontes Valente, R. A. e Alves de Sousa, R. J., 2010. **Método dos Elementos Finitos**. Lisboa: ETEP - Edições Técnicas e Profissionais.

Toscano, R. G. e Dvorkin, E. N., 2007. A shell element for finite strain analyses. Hyperelastic material models.. **Eng. Comput.**, Volume 24, pp. 514-535.

Toscano, R. G. e Dvorkin, E. N., 2008. A new shell element for elasto-plastic finite strain analyzes. Application to the collapse and post-collapse analysis of marine pipelines.. Ithaca, **Proceedings of the 6th International Conference on Computation of Shell and Spatial Structures.**

Ventsel, E. e Krauthammer, T., 2001. **Thin Plates and Shells: Theory, Analysis, and Applications.** New York: Marcel Dekker, Inc..

Zienkiewicz, O. C. e Taylor, R. L., 2000. **The Finite Element Method.** 5 ed. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann.

Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. e Too, J. M., 1971. Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Volume 3, pp. 275-290.