

SÍNTESE DE UMA CLASSE DE REDES RC COM CAPACITÂNCIA TOTAL
MÍNIMA

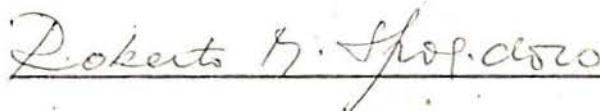
Carlos Inácio Zanchin

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS
DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO
DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTEN
ÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc).

Aprovada por:


Presidente





Rio de Janeiro
Estado da Guanabara - BRASIL
DEZEMBRO DE 1971

.i.

ESCOLA DE ENGENHARIA
BIBLIOTECA

à Noeli
a meus pais

AGRADECIMENTOS

Ao professor Jacques Szczupak pela orientação, dedicação e interêsse, responsável em grande parte pela conclusão dêste trabalho.

A Helena pelos excelentes serviços datilográficos.

A CAPES e Universidade Federal do Rio Grande do Sul pelo apôio financeiro.

SINOPSE

No trabalho é estudada uma classe de rêdes RC, de n-acessos. A classe é caracterizada por ter todos os capacitores e acessos conectados a um terminal comum. Apresenta-se um resumo da teoria que mostra que essa classe é realizável com capacitância total mínima. Desenvolvem-se as condições necessárias e suficientes para sintetizar a classe de modo a obter a capacitância total mínima com o número mínimo de capacitores.

ABSTRACTS

The work studies a class of RC n-port networks. This class has the characteristic of having all the capacitors and ports connected to a common terminal. A brief resume of the theory shows that this class is realizable with minimum total capacitance. Necessary and sufficient conditions are developed for the synthesis of this class with minimum total capacitance for a minimum number of capacitors.

ÍNDICE

	Sinopse	iv
	Índice	v
Cap.	I - Introdução	1
Cap.	II - Caracterização de Rêdes RC com Capacitância Total Mínima.....	4
Cap.	III - Síntese de n-Acessos RC	15
Cap.	IV - Síntese de uma Classe de Rêdes RC com Capacitância Total Mínima	25
Cap.	V - Conclusões	72
	Apêndice A	74
	Apêndice B	77
	Apêndice C	81
	Apêndice D	83
	Notas Bibliográficas	86
	Simbologia	89

A síntese de redes RC de n-acessos foi considerada até a pouco tempo a pedra angular na resolução de problemas, principalmente os decorrentes da moderna síntese ativa! Os métodos clássicos de solução seguiram três linhas básicas, que podem ser caracterizadas através dos estudos de Biorci e Civalleri², Cederbaum³ e Guillemin⁴. O aspecto comum a estes métodos é a redução do problema de síntese de redes de mais de um tipo de elemento à síntese de redes puramente resistivas. Por outro lado, a existência de um terra comum aos n-acessos, particularmente desejável no campo da eletrônica, restringe os processos de síntese mencionados, apresentando dificuldades tais como, encontrar matrizes cujos elementos das inversas obedecem relações de módulo conhecidas e baseados numa distribuição de sinais característica a uma árvore estrela². Também nestas soluções aparecem, em geral, a obrigatoriedade de que cada tipo de elemento forme árvore no grafo da rede a ser sintetizada. Apesar de todos os esforços, o assunto continua em aberto, contrariando hipóteses otimistas de Weinberg¹, podendo o grau de dificuldade ser aquilatado pela diminuição "exponencial" do número de artigos na área.

Recentemente o desenvolvimento tecnológico, notadamente da microeletrônica, impôs novas linhas à pesquisa posto em questão aspectos de sensibilidade, minimização, limite superior e inferior dos valores dos elementos, além de aspectos econômicos. Sob o ponto de vista de redes RC integradas, o desejável para redução máxima do custo é minimizar a função $R + LC$, onde R e C são respectivamente os custos por unidade de área de ohms e picofarads e o fator L reflete o cus

to adicional em área do capacitor sôbre o resistor. Contribuições estão atualmente sendo realizadas na minimização isolada de R e C ,^{5,6} sem que se tenha ainda determinado o efeito da minimização isolada de um dos elementos sôbre o outro.

O presente trabalho trata da síntese de uma classe de rêsdes RC, de n -acessos, com terminal comum em que foi constatada a possibilidade de realização através de rêsdes com capacitância total mínima, dentro do espírito de minimizar separadamente cada elemento. A pesquisa relativa à verificação de que a classe tem a propriedade desejada foi realizada principalmente por Frish e Hagopian⁷ em artigos, alguns ainda não publicados, e que por isto e numa tentativa de unificar a nomenclatura e conceitos, aparece desenvolvidas no Capítulo II. Estas rêsdes podem apresentar algumas vantagens na sua construção em microeletrônica, com relação ao "lay-out" e ao espaço ocupado por terem capacitância total mínima e todos os capacitores conectados a um terminal comum.

O Capítulo III apresenta um processo de síntese de rêsdes RC, de n -acessos, sem transformador. Este método, devido a Kinarivala⁸ destinava-se originalmente à síntese de rêsdes RC, não tendo a preocupação de um terminal comum. Dêle, entretanto, retira-se a técnica de partição da matriz da rêsde em matrizes de um único tipo de elemento. O método, desenvolvido neste capítulo, procura apenas realçar passagens matemáticas de interêsse na adaptação ao processo de síntese da classe de rêsdes de capacitância total mínima. Os Capítulos II e III constituem-se, portanto, em uma introdução à pesquisa.

O Capítulo IV reúne idéias dos capítulos II e III, adaptando o método de Kinariwala à classe de rêsdes proposta. Sãõ apresentadas propriedades das rêsdes, um caso imediato, particular, ẽ estudado e o caso geral ẽ finalmente discutido. Em ambos os casos sãõ apresentados exemplos.

No ultiõmo capitulo, a parte de conclusãõ comenta os resultados obtidos, chama a atençãõ para questões surgidas no desenvolvimento, procura abrir perspectivas para continuaçãõ do trabalho e cita tẽcnicas de ataque que nãõ surtiram efeito na soluçãõ do problema.

Neste capítulo serão estabelecidas condições para que uma rede RC tenha capacitância total mínima. Inicialmente será considerado o caso de um-acesso sendo após estendido o estudo a n-acessos.

1. ESTUDO PARA UM-ACESSO⁶

1.1. Teorema 1

Definição

Define-se como capacitância total mínima com que pode ser realizada uma impedância RC, $z(s)$, a menor capacitância total que pode ser obtida numa realização N desta impedância.

A realização N, de uma impedância $z(s)$, de um-acesso RC, tem capacitância total mínima se e somente se aplicada à sua entrada uma tensão constante V_0 , a tensão no regime permanente, em cada capacitor for, em módulo, igual a V_0 .

Prova:

1.1.1. Necessidade

Seja N uma realização de $z(s)$ que tenha m capacitores e capacitância total mínima. Seja V_0 uma tensão constante aplicada à sua entrada e seja V_j a tensão em C_j^N , j-ésimo capacitor de N. Como a rede é RC sabe-se que⁹

$$|V_j| \leq |V_0| \quad j = 1, \dots, m \quad (2.1)$$

Supondo que para algum j

$$|V_j| < |V_o| \quad (2-2)$$

Pode-se considerar o desenvolvimento de $z(s)$ pela 2^a forma de Foster, obtendo-se uma r ede F2 com n capacitores, $(C_i^{F2}, i = 1, \dots, n)$, em cuja entrada aplica-se a mesma tensão V_o . Como em F2, no regime permanente, todos os capacitores t em tensão V_o , a energia capacitiva armazenada nesta r ede  e

$$E_{F2} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} C_i^{F2} V_o^2 \quad (2-3)$$

Pelo teorema de Tellegen sabe-se que circuitos RC com a mesma imped ncia de acesso e submetidos   mesma excita o, armazenam a mesma energia capacitiva, portanto

$$E_{F2} = E_N = \sum_{j=1}^m \frac{1}{2} C_j^N V_j^2 \quad (2-4)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} C_i^{F2} V_o^2 = \sum_{j=1}^m \frac{1}{2} C_j^N V_j^2 < \sum_{j=1}^m \frac{1}{2} C_j^N V_o^2$$

ou

$$\sum_{i=1}^n C_i^{F2} < \sum_{j=1}^m C_j^N \quad (2-5)$$

o que contradiz a hipótese de que N tem capacitância total m nima.

Portanto

$$|V_j| = |V_o| \quad j = 1, \dots, m \quad (2-6)$$

1.1.2. Suficiência

Admita-se agora que

$$|v_j| = |v_o| \quad j = 1, \dots, m$$

para a realização \tilde{N} .

Seja N' outra realização de $z(s)$ com k capacitores, $(C_i^{N'}, i = 1, \dots, k)$, e aplique-se à sua entrada a tensão v_o . Seja $|v_i| < |v_o|$ para algum i .

Então:

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{2} C_j^N v_o^2 = \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} C_i^{N'} v_i^2 < \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} C_i^{N'} v_o^2$$

$$\sum_{j=1}^m C_j^N < \sum_{i=1}^k C_i^{N'} \quad (2-7)$$

Seja N'' outra realização de $z(s)$ com p capacitores, $(C_\ell^{N''}, \ell = 1, \dots, p)$, e aplique-se à sua entrada a tensão constante v_o . Admita-se que a tensão em cada capacitor no regime permanente v_ℓ , é tal que

$$|v_\ell| = |v_o| \quad \ell = 1, \dots, p$$

Então

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{2} C_j^N v_o^2 = \sum_{\ell=1}^p \frac{1}{2} C_\ell^{N''} v_o^2$$

ou

$$\sum_{j=1}^m C_j^N = \sum_{\ell=1}^p C_\ell^{N''} \quad (2-8)$$

Portanto N tem capacitância total mínima.

Corolário:

A 2^a forma de Foster tem capacitância total mínima.

Como consequência do corolário, pode-se estabelecer uma fórmula para o cálculo da capacitância total mínima com que pode ser realizada uma impedância RC.

Seja $z(s)$ uma impedância RC

$$z(s) = \frac{a_p s^p + \dots + a_1 s + a_0}{b_p s^p + \dots + b_1 s + b_0} \quad (2-9)$$

1.2. Teorema 2

A capacitância total mínima que pode ser obtida na realização de $z(s)$ é:

$$C_{Tmin} = \frac{b_1 a_0 - a_1 b_0}{a_0^2} \quad (2-10)$$

A prova está desenvolvida no Apêndice A.

A seguir procurar-se-á caracterizar a topologia das redes com capacitância total mínima.

1.3. Teorema 3

A realização N de uma impedância RC, $z(s)$, tem capacitância total mínima se e somente se N é o paralelo de uma rede resistiva de um-acesso N_R , com uma rede RC de um-acesso \hat{N} , satisfazendo:

a) A impedância de acesso de N_R é $z(0)$.

b) O grafo da parte resistiva de \hat{N} , \hat{G} , pode ser descrito como sendo duas componentes* G_1 e G_2 , separadas por um cut-set capacitivo que contém todos os capacitores de \hat{N} e que também separa os terminais de entrada de \hat{N} . Isto é, \hat{N} tem a forma apresentada na figura (2-1).

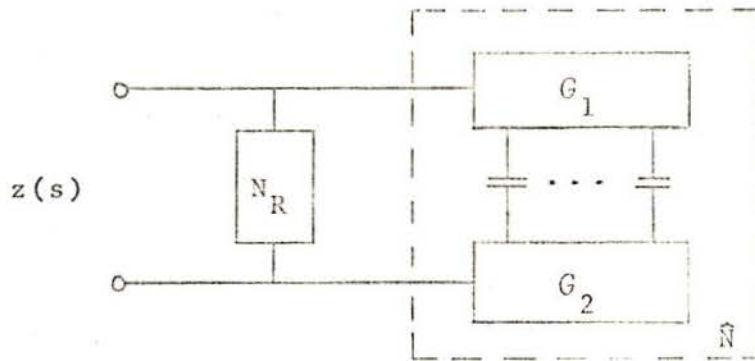


Fig. (2-1)

Prova

1.3.1. Necessidade:

Admita-se que N tem capacitância total mínima e aplique-se uma tensão V_0 à sua entrada. Então, no regime permanente, cada capacitor tem tensão V_0 . Retire-se agora todos os m capacitores de N para formar uma rede resistiva N_R , de $(m + 1)$ -acessos. Seja (o, o') o acesso de entrada de N_R e sejam $(1, 1'), \dots, (\phi, \phi'), \dots, (m, m')$ os m acessos definidos pelos capacitores. A rede N pode ser representada como é vista na figura (2-2).

* Uma componente é um nó ou um circuito resistivo conectado.

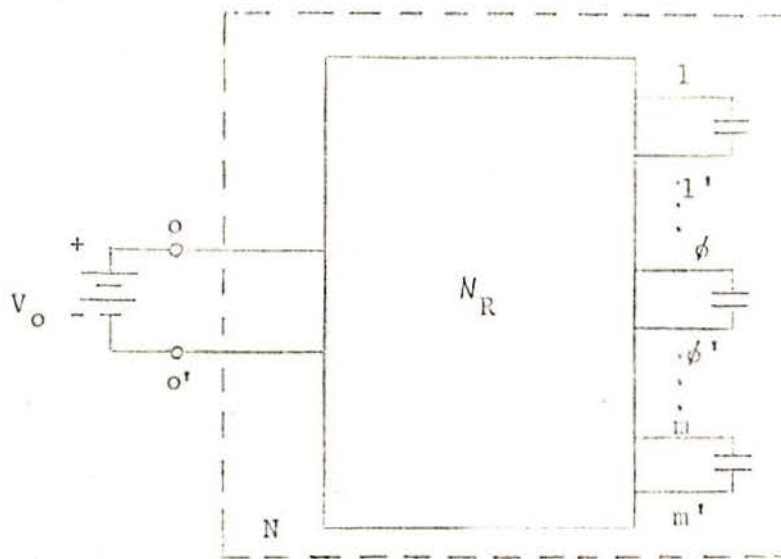


Fig. (2-2)

Seja A_v o ganho de tensão do dois acessos definido pelo par de terminais de entrada (o, o') e o par de terminais de saída (ϕ , ϕ'). Da análise topológica de rês, sabe-se que A_v pode ser expresso como a razão das somas de produtos de árvores módulo dois:¹⁰

Especificamente:

$$A_v = \frac{T_{o\phi, o'\phi'} - T_{o\phi', \phi o'}}{T_{o, o'}} \quad (2-11)$$

onde $T_{rs, pq}$ é uma soma de produtos das condutâncias dos ramos das árvores módulo 2, que separam os vértices r e s dos vértices p e q. Sabe-se que

$$T_{o, o'} \geq \max [T_{o\phi, o'\phi'}, T_{o\phi', \phi o'}]$$

e

$$\min [T_{o\phi, o'\phi'}, T_{o\phi', \phi o'}] \geq 0$$

além de

$$A_v = 1$$

donde

$$T_{o\phi', \phi o'} = 0$$

e de (2-11)

$$T_{o\phi, o'\phi'} = T_{o, o'} \quad (2-12)$$

O resultado apresentado por (2-12) traduz-se em palavras por: Todas as árvores que separam o de o' , separam também $o\phi$ de $o'\phi'$, isto é, não existe caminho algum entre ϕ e ϕ' ($\phi = 1, \dots, m$) que não passe por o e o' . Como consequência a rede N_R pode ser representada pela conexão de três redes resistivas a saber: N_{R1} que contém os vértices ϕ ($\phi = 1, \dots, m$); N_{R2} que contém os vértices ϕ' ($\phi' = 1, \dots, m$) e N_{R3} ligando o a o' . Então cada capacitor de N tem um terminal em N_{R1} e outro em N_{R2} . Os m capacitores, N_{R1} e N_{R2} formam \tilde{N} que satisfaz a condição (b). Obviamente $z(0)$ é a impedância de acesso de N_{R3} que é a própria rede N_R satisfazendo a condição (a).

1.3.2. Suficiência

Admita-se que a realização N tenha a forma apresentada na figura (2-1). Coloque-se uma tensão constante V_o na sua entrada. No regime permanente cada capacitor terá tensão V_o . Então N tem capacitância total mínima como visto no teorema 1.

Definição:

Define-se como capacitância total mínima, C_{Tmin} , com que pode ser realizada uma matriz RC de n-acessos, $Z_n(s)$, a menor capacitância total que pode ser obtida por alguma realização N dessa matriz*.

Para que a análise anterior possa ser estendida imediatamente ao caso de rêsdes de n-acessos, deve-se definir o que serã entendido por limite inferior da capacitância total mĩnima de uma rêsde RC com n-acessos.

2.1. Definição

Limite inferior da capacitância total mĩnima.

Considere-se uma matriz impedância, $Z_n(s)$, correspondente a uma rêsde RC de n-acessos. Às impedâncias vistas de cada um dos acessos, com os demais em aberto, correspondem por sua vez elementos da diagonal principal de $Z_n(s)$. De uma forma geral, ao acesso genérico i associa-se a impedância $z_{ii}(s)$, onde $i = 1, \dots, n$. Se C_{ii} for o menor valor da capacitância total na realização de $z_{ii}(s)$, diz-se que o limite inferior da capacitância total que pode ser obtido na realização de $Z_n(s)$ é dado por:

$$(C_{Tmin})_{LI} = \max \{C_{ii}, i = 1, \dots, n\} \quad (2-13)$$

* A capacitância total mĩnima para n-acessos, $n \neq 1$, não tem sua existẽncia provada em geral, sendo êste um dos atuais assuntos de pesquisa. Entretanto, a aparente liberdade da definição não afetará o desenvolvimento do trabalho, como se verá a seguir.

A capacitância total mínima com que uma matriz $Z_n(s)$ pode ser realizada, atinge seu limite inferior quando $C_{Tmin} = (C_{Tmin})_{LI}$. Nem sempre isto ocorre. Em geral, $C_{Tmin} > (C_{Tmin})_{LI}$.

No restante do trabalho, considerar-se-ão apenas rêsdes em que o limite inferior é alcançado e portanto confundir-se-á C_{Tmin} com $(C_{Tmin})_{LI}$.

Definido o parâmetro de interesse, C_{Tmin} , passa-se à caracterização das rêsdes RC que possam ser realizadas dentro deste limite de capacitância total.

2.2. Teorema 4

A realização N de uma matriz impedância $Z_n(s)$, correspondente a uma rêsde RC de n-acessos, tem capacitância total mínima se e somente se, a aplicação de uma tensão constante V_0 em algum de seus acessos, estando os demais em aberto, faz com que a tensão em regime permanente, sobre cada capacitor seja, em módulo, igual a V_0 .

Prova:

2.2.1. Necessidade

Por hipótese supõe-se que a rêsde N pode ser realizada com capacitância total mínima, mas que em nenhum de seus acessos a condição do teorema é verificada. Admita-se agora que uma outra realização, N' , de $Z_n(s)$ satisfaz a condição do teorema no acesso k. Utilizando o teorema 1 no acesso k de N e N' , vem que $C_T^{N'} < C_T^N$, o que contradiz a hipótese de que N tem capacitância total mínima. Portanto, pelo menos no acesso k, N deve também satisfazer a condição do teorema.

2.2.2. Suficiência

Admita-se que a rãde N satisfaz a condiãõ do teorema no acesso k e que N', outra realizaãõ de $Z_n(s)$, nã satisfaz a condiãõ do teorema em qualquer acesso. Pelo teorema 1, aplicado ao acesso k de N e N', segue-se que $C_T^N < C_T^{N'}$. Se N'' ã outra realizaãõ de $Z_n(s)$ que satisfaz a condiãõ do teorema no acesso k, pelo teorema 1 aplicado ao acesso k de N e N'', vem que $C_T^N = C_T^{N''}$. Portanto N tem capacitãncia total mĩnima.

Segue uma caracterizaãõ topolãgica das rãdes de n-acessos de capacitãncia total mĩnima.

2.3. Teorema 5

A realizaãõ N de uma matriz impedãncia $Z_n(s)$, correspondente a uma rãde RC de n-acessos tem capacitãncia total mĩnima, se e sãmente se para algum acesso k, a rãde vista dẽste acesso, com todos os demais a circuito aberto, puder ser representada como a conexãõ paralela de uma rãde resistiva de um-acesso, N_R , e uma rãde RC de um-acesso \hat{N} , satisfazendo:

- a) A impedãncia de acesso de N_R ã $z_{kk}(0)$.
- b) O grafo resistivo, \hat{G} de \hat{N} tem duas componentes, G_1 e G_2 , e cada capacitor de N tem um terminal em G_1 e outro em G_2 .

Prova:

2.3.1. Necessidade:

Se a rãde N tem capacitãncia total mĩnima, pelo menos em algum dos seus acessos satisfaz a condiãõ de tensãõ

do teorema.4. Seja k este acesso. Considere-se a rede vista deste acesso com todos os demais em aberto. O teorema 3 garante (a) e (b) neste acesso.

2.3.3. Suficiência.

Se para algum acesso, k , a rede tiver a representação dada por (a) e (b), então neste acesso, aplicada a tensão V_0 constante, a tensão em regime permanente sobre cada capacitor será V_0 , garantindo que N tem capacitância total mínima.

Os teoremas 4 e 5 permitem uma importante conclusão que será fundamental para a sequência de estudo das redes RC de capacitância total mínima.

Corolário:

Se $Z_n(s)$ tem uma realização N , de $(n + 1)$ -terminais, com todos os capacitores conectados ao terminal comum e se $z_{ii}(0) = \infty$ ($i = 1, \dots, n$), então qualquer outra realização de $Z_n(s)$ que tenha $(n + 1)$ -terminais e todos os capacitores conectados ao terminal comum, tem capacitância total mínima.

Neste capítulo se apresentará um método de síntese de rêsdes de n-acessos RC, baseado no conhecimento da matriz admitância de curto circuito $Y_n(s)$ das mesmas.⁸ Tendo em vista o tipo de rêsdes para as quais posteriormente será aplicado o processo aqui apresentado, admitir-se-á que a matriz $Y_n(s)$ não tem polo no infinito. Entretanto tal hipótese não é essencial ao método. Além disto, as rêsdes obtidas na realização de $Y_n(s)$ não constituirão a classe geral de rêsdes que realizam $Y_n(s)$ sem transformador, mas apenas uma subclasse em que a rêsde é obtida com o número mínimo de capacitores e sem transformador.

Dada uma matriz admitância de curto circuito $Y_n(s)$, com p-polos, correspondente a uma rêsde RC de n-acessos, supõe-se ser possível sua realização com um número mínimo, m, de capacitores. O objetivo do processo será encontrar uma matriz condutância G_k de um circuito resistivo de (n + m) - acessos que quando terminado nos seus m-acessos por capacitores unitários, reproduz nos seus n-acessos a matriz $Y_n(s)$. Seja $Y_{n+m}(s)$ a matriz admitância de (n+m)-acessos obtida quando a rêsde resistiva G_k tem em paralelo com seus m-acessos, capacitores unitários. As figuras (3-1) a (3-3) mostram respectivamente as rêsdes η_{G_k} , $\eta_{Y_{n+m}}$ e η_{Y_n} correspondendo às matrizes dos seus índices.

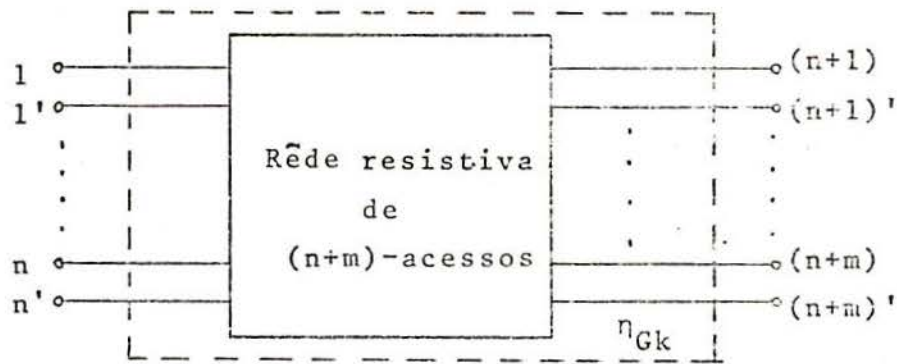


Fig. (3-1)



Fig.(3-2)



Fig.(3-3)

Seja

$$G_k = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \bar{A}_{12} & A_{22} \end{bmatrix}$$

(3-1)

onde

A_{11} é simétrica de dimensão $n \times n$

A_{12} é de dimensão $n \times m$

\bar{A}_{12} indica a transposta de A_{12}

A_{22} é simétrica de ordem $m \times m$

A matriz $Y_{n+m}(s)$ é então dada por

$$Y_{n+m}(s) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \bar{A}_{12} & A_{22} \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} O_n & O_{nm} \\ O_{mn} & U_m \end{bmatrix} \quad (3-2)$$

onde

U_m é a matriz identidade de dimensão $m \times m$

ou

$$Y_{n+m}(s) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \bar{A}_{12} & A_{22} + sU_m \end{bmatrix} \quad (3-3)$$

Chamando V_n o vetor coluna de dimensão $n \times 1$ das tensões nos n -acessos, V_m o vetor coluna de dimensão $m \times 1$ das tensões nos m -acessos, I_n o vetor coluna de dimensão $n \times 1$ das correntes nos n -acessos e I_m o vetor coluna de dimensão $m \times 1$ das correntes nos m -acessos, em $Y_{n+m}(s)$, temos:

$$Y_{n+m}(s) \begin{bmatrix} V_n \\ V_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n \\ I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \bar{A}_{12} & A_{22} + sU_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_n \\ V_m \end{bmatrix} \quad (3-4)$$

Sabe-se que a matriz $Y_n(s)$ é obtida nos n-acessos de $Y_{n+m}(s)$ quando seus m-acessos estão abertos, ou seja, quando $I_m = 0$. Substituindo em (3-4)

$$I_n = A_{11} V_n + A_{12} V_m \quad (3-5)$$

$$0_m = \bar{A}_{12} V_n + \{A_{22} + sU_m\} V_m \quad (3-6)$$

Supondo a existência da inversa de $A_{22} + sU_m$, pode-se calcular V_m em (3-6)

$$V_m = - \{A_{22} + sU_m\}^{-1} \bar{A}_{12} V_n$$

levando em (3-5)

$$I_n = A_{11} V_n - A_{12} \{A_{22} + sU_m\}^{-1} \bar{A}_{12} V_n$$

$$I_n = \{A_{11} - A_{12} (A_{22} + sU_m)^{-1} \bar{A}_{12}\} V_n \quad (3-7)$$

Examinando (3-7) conclui-se que

$$Y_n(s) = A_{11} - A_{12} \{A_{22} + sU_m\}^{-1} \bar{A}_{12} \quad (3-8)$$

A operação expressa por (3-8) é definida como a "redução" de Y_{n+m} a seus n-acessos. Por outro lado, sendo $Y_n(s)$ a matriz admitância de curto circuito de uma rede RC sem polo no infinito, pode ser escrita como:

$$Y_n(s) = K_\infty - \sum_{v=1}^p \frac{K_v}{s + \sigma_v} \quad (3-9)$$

A expansão (3-9) não é a expansão usual da matriz $Y_n(s)$ em termos das parcelas $\{s/(s+\sigma_v)\}$, mas para ela valem as considerações abaixo:

K_∞ é uma matriz semidefinida positiva e corresponde ao "resíduo" de $Y_n(s)$ no infinito. Os elementos da diagonal são positivos e sua dimensão é $n \times n$.

K_ν é a matriz semidefinida positiva do resíduo de $Y_n(s)$ no polo σ_ν . Tem os elementos da diagonal positivos, sua dimensão é $n \times n$, e se o rank for unitário os polos são ditos compactos.

(σ_ν) é o valor do polo, onde $\sigma_\nu > 0$

$Y_n(0)$ é uma matriz semidefinida positiva em virtude da necessidade de realização física da rede.

Sabe-se que K_ν pode ter rank r_ν , $1 \leq r_\nu \leq n$. Mas toda a matriz semidefinida positiva de rank r_ν pode ser escrita como o produto de uma matriz M_ν , de rank r_ν , pela sua transposta \bar{M}_ν^{11} .

$$K_\nu = M_\nu \bar{M}_\nu \quad (3-10)$$

Tomando para M_ν uma matriz com o número mínimo de colunas de modo a que o rank r_ν seja obtido, fica evidente que a ordem de M_ν , neste caso, é $n \times r_\nu$. Escrevendo

$$M_\nu = \left[\bar{M}_{\nu 1}, \bar{M}_{\nu 2}, \dots, \bar{M}_{\nu r_\nu} \right] \quad (3-11)$$

onde $\bar{M}_{\nu 1}, \bar{M}_{\nu 2}, \dots, \bar{M}_{\nu r_\nu}$ são vetores de dimensão $n \times 1$. A matriz K_ν pode ser escrita

$$K_\nu = \left[\bar{M}_{\nu 1}, \bar{M}_{\nu 2}, \dots, \bar{M}_{\nu r_\nu} \right] \left[\bar{M}_{\nu 1}, \bar{M}_{\nu 2}, \dots, \bar{M}_{\nu r_\nu} \right] \quad (3-12)$$

ou

$$K_v = M_{v1} \bar{M}_{v1} + M_{v2} \bar{M}_{v2} + \dots + M_{vr_v} \bar{M}_{vr_v} = \sum_{\phi=1}^{r_v} M_{v\phi} \bar{M}_{v\phi} \quad (3-13)$$

Na forma (3-13) a matriz K_v , de rank r_v , está decomposta na soma de r_v matrizes de rank 1. Deve-se notar que esta decomposição não é única, mas que qualquer outra decomposição obtida terá como vetores coluna uma combinação linear dos vetores $M_{v1}, M_{v2}, \dots, M_{vr_v}$ já que estes formam uma base na geração de K_v . Portanto pode ser obtida de M_v por uma transformação de congruência que como se sabe, gera todas as combinações lineares possíveis sobre M_v . Um processo de decompor K_v na forma (3-13) é apresentado no Apêndice B.

Chamando $K_{v\phi}$ a cada uma das matrizes de rank 1 apresentadas na forma (3-13), pode-se escrever $Y_n(s)$ como

$$Y_n(s) = K_\infty - \sum_{v=1}^p \frac{\sum_{\phi=1}^{r_v} K_{v\phi}}{s + \sigma_v} \quad (3-14)$$

onde cada parcela do somatório tem para numerador uma matriz de rank 1 e em algumas parcelas σ_v está repetido. A forma (3-9) é obtida de (3-14) colecionando-se as parcelas de igual σ_v .

O objetivo a seguir é identificar a forma (3-14) com aquela de (3-8). Fazendo s tender a infinito em (3-14) e (3-8), segue-se como única identificação possível:

$$A_{11} = K_\infty \quad (3-15)$$

A identificação dos elementos restantes, exige alguma manipulação algébrica, como foi visto,

$$K_{v\phi} = M_{v\phi} \bar{M}_{v\phi} \quad 1 \leq \phi \leq r_v \quad (3-16)$$

então

$$K_v = \sum_{\phi=1}^{r_v} M_{v\phi} \bar{M}_{v\phi} = M_v \bar{M}_v \quad (3-17)$$

onde

$$M_v = [M_{v1}, M_{v2}, \dots, M_{vr_v}] \quad (3-18)$$

é de dimensão $n \times r_v$. Usando (3-17) pode-se escrever

$$\frac{K_v}{s + \sigma_v} = M_v D_{r_v} \bar{M}_v \quad (3-19)$$

onde

$$D_{r_v} = \text{diag.} \left(\frac{1}{s + \sigma_v}, \dots, \frac{1}{s + \sigma_v} \right) \quad (3-20)$$

é uma matriz diagonal com todos elementos desta iguais a $\frac{1}{s + \sigma_v}$, e de dimensão $r_v \times r_v$. Então, de (3-19) vem que:

$$\sum_{v=1}^p \frac{K_v}{s + \sigma_v} = \sum_{v=1}^p M_v D_{r_v} \bar{M}_v = M D_r \bar{M} \quad (3-21)$$

onde

$$M = [M_1, M_2, \dots, M_p] \quad (3-22)$$

é uma matriz de dimensão $n \times \sum_{v=1}^p r_v$ e como se verá m, o número de capacitores mínimo da realização de $Y_n(s)$ é

$$m = \sum_{v=1}^p r_v \quad (3-23)$$

e

$$D_r = \text{diag. } (D_{r_1}, \dots, D_{r_v}, \dots, D_{r_p}) \quad (3-24)$$

é uma matriz diagonal de dimensão $m \times m$. Levando (3-21) e (3-15) em (3-14), temos:

$$Y_n(s) = A_{11} - M D_r \bar{H} \quad (3-25)$$

Comparando (3-25) com (3-8) pode-se identificar:

$$A_{12} = M \quad (3-26)$$

$$D_r = \{ A_{22} + sU_m \}^{-1} \quad (3-27)$$

ou

$$D_r^{-1} = A_{22} + sU_m \quad (3-28)$$

A inversa de D_r existe e é obtida facilmente porque D_r é diagonal conforme (3-24). Então:

$$D_r^{-1} = \text{diag. } \{ (s+\sigma_1), \dots, (s+\sigma_1), (s+\sigma_2), \dots, (s+\sigma_p), \dots, (s+\sigma_p) \} \quad (3-29)$$

ou

$$D_r^{-1} = sU_m + D_\sigma \quad (3-30)$$

onde D_σ é uma matriz diagonal em que o polo σ_v está repetido - tantas vezes na diagonal quanto for o valor de seu rank r_v . Comparando (3-28) e (3-30) obtêm-se:

$$A_{22} = D_\sigma \quad (3-31)$$

Finalmente pode-se resumir o que foi obtido no processo de identificação de (3-14) com (3-8):

$$Y_n(s) = K_\infty - M[D_\sigma + sU_m]^{-1} \bar{M} \quad (3-32)$$

$$A_{11} = K_\infty \quad (3-33)$$

$$A_{12} = M \quad (3-34)$$

$$A_{22} = D_\sigma \quad (3-35)$$

As três matrizes são obtidas quase imediatamente da expansão de $Y_n(s)$ segundo (3-14) e permitem escrever G_k de (3-1) como:

$$G_k = \begin{bmatrix} K_\infty & M \\ \bar{M} & D_\sigma \end{bmatrix} \quad (3-36)$$

Ao escrever (3-36) deve-se ter o cuidado de fazer corresponder em D_σ , a cada vetor coluna de M o σ correspondente ao polo do qual êle proveio. Note-se ainda de (3-32) que

$$Y_n(0) = K_\infty - M D_\sigma^{-1} \bar{M} \quad (3-37)$$

Uma vez obtida a matriz G_k , sendo possível realizá-la sem transformador, para obter $Y_n(s)$, basta colocar em paralelo com seus m acessos, capacitores unitários. A matriz $Y_n(s)$ será obtida nos n -acessos restantes. Porém uma condição necessária para que G_k seja realizável como matriz condutância de uma rede resistiva é que ela seja semidefinida positiva. A prova de que a matriz G_k tem esta propriedade encontra-se no Apêndice C.

Observe-se o fato de que as identificações feitas através de (3-34) e (3-35) não são únicas. Como se verá mais tarde é possível, através de transformações de congruência, obter outras identificações. Pelo mesmo processo também se retirará a restrição sobre o uso de capacitores unitários, nos m acessos, passando os capacitores a ter um valor qualquer. De G_k , equação (3-36), nota-se ser o número de capacitores idêntico ao número de acessos extra criados e igual à dimensão de D_σ , ou seja, ao número de colunas da matriz M , razão pela qual se disse em (3-23) que $m = \sum_{v=1}^p r_v$, é o número mínimo¹² de capacitores na realização de $Y_n(s)$.

Neste capítulo realizar-se-á o estudo de uma classe de rêsdes RC que apresentam capacitância total mínima. Para tal se caracterizará perfeitamente a classe em têsmos do que se viu no capítulo II que trata das rêsdes RC de capacitância total mínima de forma geral. O estudo segue, discutindo propriedades de interêsse das rêsdes e suas matrizes admitâncias. Para o objetivo do presente capítulo, síntese desta classe de rêsdes RC, supõe-se conhecida a matriz admitância da rêsde e procura-se verificar quando ela pertence a classe proposta. Em caso afirmativo sintetiza-se a rêsde.

O passo seguinte dentro do capítulo é a apresentação de um caso em que a síntese pode ser obtida diretamente da matriz do método de Kinariwala, descrito no capítulo anterior, desde que algumas condições sejam satisfeitas. Este caso dito imediato, leva a rêsdes que formam uma subclasse das rêsdes propostas. A finalidade de sua apresentação é mostrar sua simplicidade e formar uma familiarização com a mecânica do processo envolvido na síntese da classe estudada. A seguir, faz-se o estudo do caso geral. Este último envolve uma transformação da matriz obtida por Kinariwala e apresentada na fórmula (3-36). Seguem-se exemplos de síntese para diversas situações propostas.

1. CARACTERIZAÇÃO DE UMA CLASSE DE RÊDES RC DE CAPACITÂNCIA TOTAL MÍNIMA

A classe de rêsdes a ser estudada está caracterizada no corolário dos teoremas 4 e 5 do capítulo II. Todas as realizações desta classe possuem um terminal comum, onde estão conectados os capacitores e onde não se conectam resistores. Es

ta última propriedade é exigida porque o corolário obriga $z_{ii}(0) = \infty$ ($i = 1, \dots, n$). Para esta classe existe certamente uma realização que atinge o limite inferior da capacitância total mínima, conforme definido na equação (2-13). Com estas características a estrutura apresenta vantagens para sua construção e controle em microeletrônica como pode ser visto no capítulo de introdução. A rede geral tem o aspecto apresentado pela figura (4-1), onde os

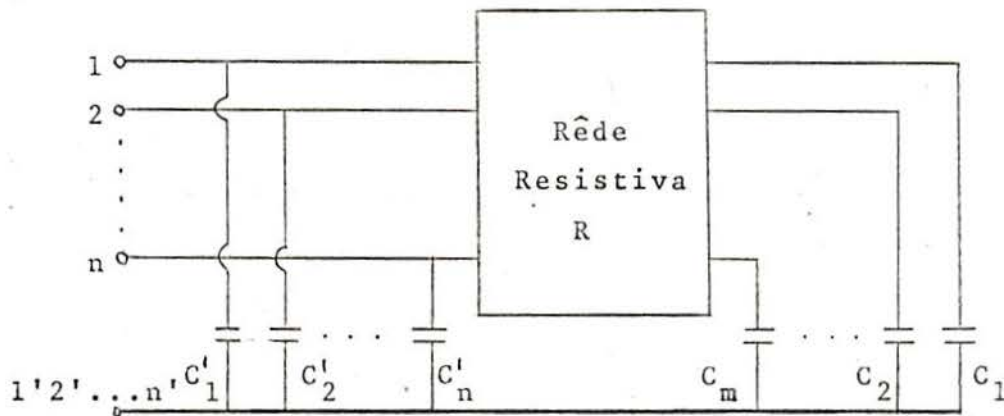


Fig. (4-1)

n-acessos são $11', 22', \dots, nn'$, ($1' \equiv 2' \equiv \dots \equiv n'$ é o terminal comum). A rede contém m capacitores conectados em nós da rede R, que não são acessos e pode conter até n capacitores conectados em paralelo com os n-acessos da rede.

A classe de redes com a topologia apresentada tem capacitância total mínima porque aplicada uma tensão constante, V_0 , a um de seus acessos, em regime permanente a tensão sobre cada capacitor é V_0 . De acordo com o teorema 4 do capítulo II isto implica que a rede atinja o limite inferior da capacitância total mínima. No caso da classe estudada, como a condição do teorema 4 vale para qualquer um de seus acessos,

verifica-se que toda realização da rede que pertença à classe é de capacitância total mínima.

2. ALGUMAS PROPRIEDADES DE INTERESSE DAS REDES PERTENCENTES À CLASSE

Propriedade 1:

Existência da matriz admitância dos nós, $Y_n(s)$, e da matriz impedância das malhas, $Z_n(s)$.

Como os n -acessos não formam um laço e nem constituem um cut-set, $Z_n(s)$ e $Y_n(s)$ existem e não são singulares^{1,3}. Isto permite trabalhar sobre a matriz $Y_n(s)$ das redes, para a qual o método de síntese descrito no capítulo II é apropriado.

Propriedade 2:

Se a matriz $Y_n(s)$ da rede apresentar polo no infinito, este polo é provocado por capacitor ou capacitores em paralelo com um ou mais acessos. Portanto constituem-se em polos privados destes acessos e podem ser retirados dos elementos da diagonal de $Y_n(s)$. Por esta razão o estudo feito no capítulo III fez a hipótese que a matriz admitância não possuía polo no infinito. No restante do trabalho supor-se-á que a matriz $Y_n(s)$ é a matriz admitância da rede, na qual foram retirados os polos privados não tendo, portanto, polo no infinito.

Propriedade 3:

A matriz $Y_n(s)$ satisfaz as condições necessárias para realização com terminal comum^{1,4}.

Conforme foi dito na propriedade 2, $Y_n(s)$ é suposta não tendo polos privados e então pode ser colocada na forma de modo a que todos os seus elementos tenham o mesmo denominador, suposto com todos os coeficientes positivos. Nestas condições os coeficientes do numerador de $y_{ij}(s)$ que são todos negativos estão limitados superiormente, em módulo, pelo respectivo coeficiente do numerador de $y_{ii}(s)$ ou $y_{jj}(s)$, o que for menor. Os coeficientes do numerador de $y_{ii}(s)$ e $y_{jj}(s)$ são todos positivos.

Propriedade 4:

A matriz "resíduo" no infinito, K_∞ , de $Y_n(s)$ é hiperdominante.

Definição:

Matriz hiperdominante¹⁵ é uma matriz simétrica em que os elementos da diagonal são positivos, os elementos fora da diagonal são negativos ou nulos e ainda o elemento da diagonal é maior ou igual ao negativo da soma dos elementos da respectiva linha ou coluna. Quando cada elemento da diagonal for igual ao negativo da soma dos elementos da respectiva linha ou coluna a matriz é dita hiperdominante irreduzível.

Pela propriedade 3, K_∞ que é uma matriz de condutâncias, tem os elementos da diagonal positivos e os elementos fora da diagonal negativos ou nulos e como deve ser realizável*, segue-se que deve ser hiperdominante. Como se sabe

* O fato será mais explícito após a leitura da propriedade 7.

a hiperdominância é condição suficiente para realizar uma matriz como matriz admitância de nós de uma rede resistiva de n -acessos com $(n + 1)$ nós.

Propriedade 5:

A matriz $Y_n(0)$ é hiperdominante irreduzível.

Na figura (4-1), para $s = 0$ obtém-se um n -acesso resistivo com um terminal comum isolado que está representado na figura (4-2).

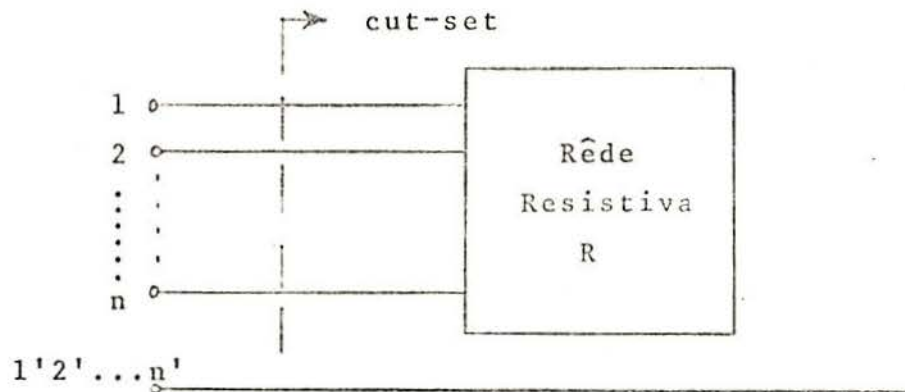


Fig. (4-2)

Como se está tratando da matriz condutância da rede, aos n -acessos estão conectadas fontes de corrente e existe um cut-set que contém as n fontes. A matriz condutância $Y_n(0)$ é singular e pelos motivos expostos na propriedade 4 é hiperdominante. Seja j ($1 \leq j \leq n$), um acesso genérico de $Y_n(0)$ e i_j a corrente nele. Seja v_j a tensão em j com todos os demais acessos em curto circuito. Nestas condições sejam $i_1, \dots, i_{j-1}, i_{j+1}, \dots, i_n$ respectivamente as correntes nos terminais $1' \dots, (j-1)(j-1)', (j+1)(j+1)', \dots, nn'$, curto circuitados. A situação está repre

sentada na figura (4-3).

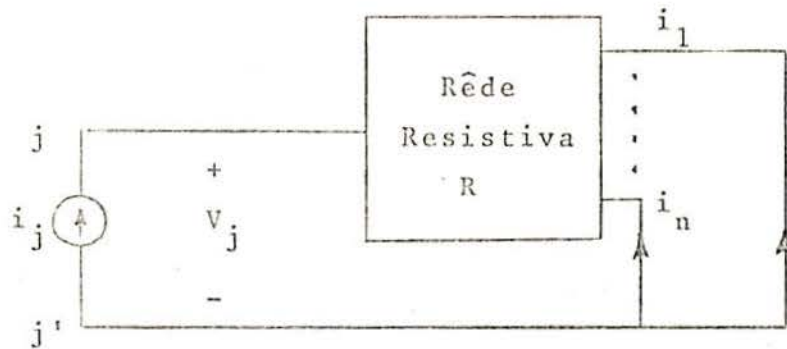


Fig. (4-3)

Pode-se escrever

$$i_j = - (i_1 + \dots + i_{j-1} + i_{j+1} + \dots + i_n) \quad (4-1)$$

Dividindo ambos os membros por v_j

$$\frac{i_j}{v_j} = - \left(\frac{i_1}{v_j} + \dots + \frac{i_{j-1}}{v_j} + \frac{i_{j+1}}{v_j} + \dots + \frac{i_n}{v_j} \right) \quad (4-2)$$

mas

$$\frac{i_j}{v_j} = y_{jj} \quad (0)$$

$$\frac{i_1}{v_j} = y_{1j} \quad (0)$$

·
·
·

$$\frac{i_{j-1}}{v_j} = y_{(j-1)j} \quad (0)$$

$$\frac{i_{j+1}}{v_j} = y_{(j+1)j} \quad (0)$$

·
·
·

$$\frac{i_n}{v_j} = y_{nj} \quad (0)$$

(4-3)

Substituindo-se (4-3) em (4-2)

$$y_{jj} = - (y_{1j}(0) + \dots + y_{(j-1)j}(0) + y_{(j+1)j}(0) + \dots + y_{nj}(0))$$

$$y_{jj} = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n y_{ij}(0) \quad (4-4)$$

A condição expressa por (4-4) é exatamente a satisfeita por uma matriz hiperdominante irredutível. A matriz $Y_n(0)$ é hiperdominante irredutível.

Propriedade 6:

Se a rēde da figura (4-1) for considerada sem os polos privados e se sōbre cada um de seus capacitores definir-se um acesso extra, tem-se uma rēde $Y_{n+m}(s)$ de $(n+m)$ -acessos. Se desta ūltima retirar-se os m capacitores, obtēm-se uma rēde resistiva de $(n+m)$ -acessos, com terminal comum isolado, mostrada na figura (4-4), cuja matriz admitância G ē hiperdominante irredutível. A prova desta propriedade ē imediata jã que a rēde ē análoga àquela da propriedade 5, apenas com m acessos adicionais.

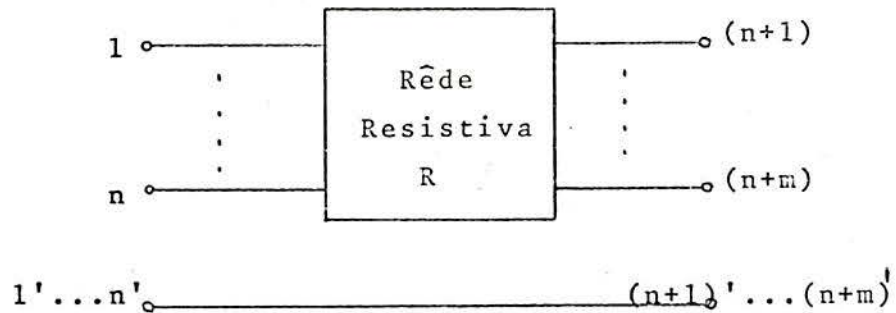


Fig. (4-4)

A forma de G ē:

$$G = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ \bar{B}_{12} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \quad (4-5)$$

$\begin{matrix} n & m \\ n & m \end{matrix}$

Propriedade 7:

A classe geral das rêdes resistivas com a topologia apresentada na figura (4-4), não necessita de nós adicionais além dos definidos pelos seus $(n+m)$ -acessos e cujo número é de $(n+m+1)$. Em outras palavras, é possível realizar a rêde R sem recorrer ao emprêgo de nós internos, isto é, nós que não sejam acessos. A prova pode ser feita admitindo-se a existência de um nó interno em R. Dêste nó partem resistores que o conectam a alguns ou todos os $(n+m)$ -terminais de R que são acessos. Conexões ao terminal comum não são permitidas como foi visto. O nó interno e suas conexões, formam uma rêde estrêla cujo equivalente é uma rêde malha, obtida pela conhecida transformação estrêla-malha. Nesta última o nó interno desaparece surgindo conexões entre os $(n+m)$ -terminais para formar a rêde malha. Se existir mais de um nó interno, repete-se o processo tantas vêzes quantas forem necessárias até que todos os nós internos sejam absorvidos. Esta propriedade é importante porque garante, quando dada uma rêde de $(n+m)$ -acessos com a topologia apresentada na figura (4-4), que existe uma rêde equivalente, com a mesma topologia, e que contém o número mínimo de $(n+m+1)$ nós. Êste número de nós é mínimo porque com $(n+m+1)$ nós é possível ter-se um máximo de $(n+m)$ tensões independentes e êste é justamente o número de tensões independentes em G.

3.

SÍNTESE DO CASO IMEDIATO

Ê dada a matriz admitância, $Y_n(s)$, com p -polos, de uma rêde de n -acessos RC. Supõe-se que ela satisfaça as condições necessárias para ser sintetizada por uma rêde pertencente à classe definida em (IV-1) e representada pelas propriedades 3 e 5. Mostra-se que é suficiente para realização dentro da classe que as matrizes resíduos K_v , conforme definidas

em (3-9), tenham seus elementos positivos ou nulos. Seja $Y_n(s)$, suposta sem polos privados, apresentada segundo a expansão (3-9) a seguir repetida:

$$Y_n(s) = K_\infty - \sum_{v=1}^p \frac{K_v}{s + \sigma_v} \quad (4-6)$$

Como foi visto no decorrer do método de Kinariwala é possível obter uma matriz condutância G_k de $(n+m)$ -acessos, segundo as identificações apresentadas de (3-33) até (3-36).

$$G_k = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} \overline{K}_\infty & \overline{M} \\ \overline{M} & \overline{D}_\sigma \end{array} \right] & \begin{array}{l} n \\ m \end{array} \end{array} \quad (4-7)$$

Se a matriz G_k assim obtida tivesse a propriedade 6, isto é, fosse hiperdominante irredutível, bastaria conforme foi visto no capítulo III, realizar G_k e colocar um paralelo com cada um dos m -acessos capacitores unitários para obter nos n -acessos a matriz $Y_n(s)$.

Proposição:

É sempre possível tornar G_k hiperdominante irredutível para este caso.

Pela propriedade 4, K_∞ é tal que:

$$K_{\infty} = \begin{bmatrix} K_{11}^{\infty} & -K_{12}^{\infty} & \dots & -K_{1n}^{\infty} \\ -K_{12}^{\infty} & K_{22}^{\infty} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -K_{1n}^{\infty} & \dots & \dots & K_{nn}^{\infty} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ n \end{matrix} \quad (4-8)$$

1.....j.....n

onde

$$K_{ii}^{\infty} > 0 \quad \text{e} \quad K_{ij}^{\infty} \geq 0 \quad \text{para} \quad i \neq j \quad (4-9)$$

Por outro lado D_{σ} é uma matriz diagonal de elementos positivos. Conforme foi visto de (3-16) a (3-18) e (3-22), M é uma matriz de dimensão $n \times m$, onde m é o número mínimo de capacitores definido em (3-23), composta de vetores coluna $M_{v\phi}$ tais que:

$$K_{v\phi} = M_{v\phi} \bar{M}_{v\phi} = \begin{bmatrix} K_{11}^{\phi} & \dots & K_{1n}^{\phi} \\ \vdots & & \vdots \\ K_{in}^{\phi} & \dots & K_{nn}^{\phi} \end{bmatrix} \quad 1 \leq \phi \leq m \quad (4-10)$$

$K_{v\phi}$ é de rank 1 e tem todos os seus elementos positivos por hipótese. Desta forma pode-se escrever $M_{v\phi}$ como:

$$M_{v\phi} = \begin{bmatrix} m_1^{\phi} \\ m_2^{\phi} \\ \vdots \\ m_n^{\phi} \end{bmatrix} \quad (4-11)$$

tal que

$$m_i^\phi \geq 0 \quad 1 \leq i \leq n \quad (4-12)$$

Pode-se escrever (4-10) como

$$K_{v\phi} = (-M_{v\phi})(-\bar{M}_{v\phi}) \quad (4-13)$$

Como (4-13) vale para todo $1 \leq v \leq p, 1 \leq \phi \leq r_v$ tendo em vista (4-11) e (4-12) verifica-se que é possível obter a matriz M com seus elementos negativos ou nulos. Conclui-se que é possível obter a matriz G_k com os elementos da diagonal positivos e os elementos fora da diagonal negativos ou nulos. Apesar desta distribuição de sinais, não é possível garantir sequer a hiperdominância de G_k . Esta será obtida através da seguinte operação,

$$G_k = \begin{bmatrix} K_\infty & M \\ \bar{M} & D_\sigma \end{bmatrix} = \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} K_{11}^\infty \dots -K_{1n}^\infty \\ \vdots \\ -K_{1n}^\infty \dots K_{nn}^\infty \end{array} & \begin{array}{c} -m_1^1 \dots \dots -m_1^m \\ \vdots \\ \dots -m_i^\phi \dots \\ \vdots \\ -m_n^1 \dots \dots -m_n^m \end{array} \\ \hline \bar{M} & \begin{array}{c} \sigma_1 \dots \dots 0 \\ \vdots \\ \dots \sigma_\phi \dots \\ 0 \dots \dots \sigma_m \end{array} \end{array} \quad (4-14)$$

1...j...n 1...φ...m

efetuada sobre (4-14): seja h_ϕ ($\phi=1, \dots, m$) um número real não nulo. Multiplique-se a coluna ϕ de M , a linha ϕ de \bar{M} por h_ϕ e σ_ϕ por h_ϕ^2 . Construa-se agora, análogamente a G_k , a matriz G' mostrada na figura (4-15). Seja h_ϕ escolhido de modo a tornar o elemento ϕ da diagonal de G' igual ao negativo da soma dos elementos fora da diagonal da respectiva linha (coluna).

$$G' = \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{ccc} K_{11}^{\infty} & \dots & -K_{1n}^{\infty} \\ \vdots & & \vdots \\ -K_{1n}^{\infty} & \dots & K_{nn}^{\infty} \end{array} & \begin{array}{ccc} -h_{1m}^1 & \dots & -h_{m1}^m \\ \vdots & & \vdots \\ \dots & -h_{\phi}^{m\phi} & \dots \\ \vdots & & \vdots \\ -h_{1n}^1 & \dots & -h_{mn}^m \end{array} \\ \hline & \begin{array}{ccc} h_{1\sigma_1}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \dots & h_{\phi\phi}^2 & \dots \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & h_{m\sigma_m}^2 \end{array} \end{array} \right] \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ n \\ \\ m \end{array} \quad (4-15)$$

$1 \dots j \dots n$
 $1 \dots \phi \dots m$

Então

$$h_{\phi\phi}^2 \sigma_{\phi} = \sum_{i=1}^n h_{\phi}^{m\phi} \sigma_i \quad 1 \leq \phi \leq m \quad (4-16)$$

ou

$$h_{\phi\phi}^2 \sigma_{\phi} = \sum_{i=1}^n m_i^{\phi} \sigma_i \quad 1 \leq \phi \leq m \quad (4-17)$$

Prova-se que com a operação acima efetuada, a matriz G_k foi tornada hiperdominante irredutível. Isto é, G' é hiperdominante irredutível. Para tal deve-se provar que em (4-15) vale

$$K_{ii}^{\infty} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n K_{ij}^{\infty} + \sum_{\phi=1}^m h_{\phi}^{m\phi} \sigma_i \quad 1 \leq i \leq n \quad (4-18)$$

A equação (4-18) expressa que os restantes elementos da diagonal, isto é os elementos ii ($i = 1, \dots, n$), de G' também devem ser iguais ao negativo da soma dos elementos da respectiva linha (ou coluna). Considere-se $Y_n(0)$ na forma (4-19).

$$Y_n(0) = K_\infty - \sum_{\phi=1}^m \frac{K_\phi}{\sigma_\phi} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & \dots & j & \dots & n \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} y_{11}(0) & \dots & -y_{1n}(0) \\ \vdots & & \vdots \\ -y_{1n}(0) & \dots & y_{nn}(0) \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ n \end{matrix} \end{matrix} \quad (4-19)$$

Sendo $Y_n(0)$ hiperdominante irreduzível, de (4-19) vem que:

$$y_{ii}(0) = \sum_{j=1}^n y_{ij}(0) \quad 1 \leq i \leq n \quad (4-20)$$

$$y_{ii}(0) = K_{ii}^\infty - \sum_{\phi=1}^m \frac{K_{ii}^\phi}{\sigma_\phi} \quad 1 \leq i \leq n \quad (4-21)$$

e

$$y_{ij}(0) = K_{ij}^\infty + \sum_{\phi=1}^m \frac{K_{ij}^\phi}{\sigma_\phi} \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ i \neq j \end{matrix} \quad (4-22)$$

levando (4-22) e (4-21) em (4-20), obtêm-se:

$$K_{ii}^\infty = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n K_{ij}^\infty + \sum_{\phi=1}^m \frac{K_{ii}^\phi}{\sigma_\phi} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \sum_{\phi=1}^m \frac{K_{ij}^\phi}{\sigma_\phi} \quad (4-23)$$

Comparando (4-23) com (4-18), que se quer provar, verifica-se que (4-24) deve ser uma identidade.

$$\sum_{\phi=1}^m h_{\phi i}^{m\phi} = \sum_{\phi=1}^m \frac{K_{ii}^\phi}{\sigma_\phi} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \sum_{\phi=1}^m \frac{K_{ij}^\phi}{\sigma_\phi} \quad 1 \leq i \leq n \quad (4-24)$$

De (4-13) vem que:

$$K_{ij}^{\phi} = m_i^{\phi} m_j^{\phi} \quad (4-25)$$

e

$$K_{ii}^{\phi} = (m_i^{\phi})^2 \quad (4-26)$$

Trocando a ordem do somatório em (4-24) e substituindo nela (4-25) e (4-26) vem:

$$\sum_{\phi=1}^m h_{\phi} m_i^{\phi} = \sum_{\phi=1}^m \left\{ \frac{(m_i^{\phi})^2}{\sigma_{\phi}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{m_i^{\phi} m_j^{\phi}}{\sigma_{\phi}} \right\} \quad (4-27)$$

Observando que o somatório interno do segundo membro de (4-27) é efetuado sôbre j pode-se escrever:

$$\sum_{\phi=1}^m h_{\phi} m_i^{\phi} = \sum_{\phi=1}^m \frac{m_i^{\phi}}{\sigma_{\phi}} \left\{ m_i^{\phi} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_j^{\phi} \right\}$$

ou

$$\sum_{\phi=1}^m h_{\phi} m_i^{\phi} = \sum_{\phi=1}^m \frac{m_i^{\phi}}{\sigma_{\phi}} \sum_{j=1}^n m_j^{\phi} \quad (4-28)$$

Tendo em vista (4-17), (4-28) fica:

$$\sum_{\phi=1}^m h_{\phi} m_i^{\phi} = \sum_{\phi=1}^m \frac{m_i^{\phi}}{\sigma_{\phi}} \cdot h_{\phi} \sigma_{\phi} \quad 1 \leq i \leq n \quad (4-29)$$

(4-29) é identidade e prova que (4-24) é verdadeira. Após a operação de multiplicação pelos h_{ϕ} a matriz G_k foi tornada hiperdominante irreductível.

Mostra-se que a operação para tornar G_k hiperdeterminante irreduzível, na realidade corresponde a uma alteração no valor dos capacitores utilizados em paralelo com os m -acessos. O capacitor unitário colocado no acesso ϕ , foi substituído por um de valor h_ϕ^2 . A matriz $Y_n(s)$ não sofre com isto alteração alguma.

Do capítulo anterior, conforme (3-1), (3-2) e (3-36) sabe-se que

$$Y_{n+m}(s) = \begin{bmatrix} K_\infty & M \\ \bar{M} & D_\sigma \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix} \quad (4-30)$$

ou

$$Y_{n+m}(s) = \begin{bmatrix} K_\infty & M \\ \bar{M} & D_\sigma + sU \end{bmatrix} \quad (4-31)$$

e que

$$Y_n(s) = K_\infty - M \{D_\sigma + sU\}^{-1} \bar{M} \quad (4-32)$$

Por outro lado sabe-se que é possível gerar através de transformações de congruências apropriadas, circuitos equivalentes sob o ponto de vista dos n -acessos partindo-se de $Y_{n+m}(s)$. Para tal propõe-se uma transformação de variáveis nas tensões, criando-se novas variáveis através de combinações lineares das existentes. Seja T a matriz transformação

$$T = \begin{bmatrix} U_n & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} \quad (4-33)$$

onde U_n é a matriz identidade de dimensão $n \times n$ utilizada para não alterar as tensões nos n -acessos de $Y_{n+m}(s)$, e

$$H = \bar{H} = \text{diag.} (h_1, \dots, h_\phi, \dots, h_m)$$

é uma matriz diagonal de dimensão $m \times m$. Operando (4-33) segundo uma congruência sobre (4-31) obtém-se:

$$Y'_{n+m}(s) = \bar{T} Y_{n+m}(s) T = \begin{bmatrix} \bar{K}_\infty & MH \\ \bar{H}\bar{M} & \bar{H}\{D_\sigma + sU\}H \end{bmatrix} \quad (4-34)$$

ou

$$Y'_{n+m}(s) = \begin{bmatrix} \bar{K}_\infty & MH \\ \bar{H}\bar{M} & H D_\sigma H \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H^2 \end{bmatrix} \quad (4-35)$$

Observando (4-35) verifica-se que o efeito da congruência é multiplicar a coluna ϕ de M por h_ϕ , o elemento σ_ϕ por h_ϕ^2 e mudar o capacitor a ser colocado no acesso ϕ do antigo valor unitário, conforme (4-30), para h_ϕ^2 . Conclui-se de (4-35) que, se H satisfizer (4-17), então de (4-15) e (4-35), identifica-se :

$$G' = \begin{bmatrix} \bar{K}_\infty & MH \\ \bar{H}\bar{M} & HD_\sigma H \end{bmatrix} \quad (4-36)$$

Sabe-se que a congruência utilizada, não modifica a matriz quando reduzida a seus n -acessos.⁴

Note-se que como $HD_{\sigma} H$ é obrigatoriamente diagonal, as rēdes sintetizadas neste caso imediato, nāo possuem conexões resistivas diretas entre os m-acessos, isto é, entre os acessos dos capacitores. Justamente êste fato é o que caracteriza a subclasse analisada nēste ítem.

4. EXEMPLOS DE SÍNTESE NO CASO IMEDIATO

Exemplo 1:

Sintetizar

$$Y_n(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 4} \begin{bmatrix} \left(\frac{13}{4}s^2 + \frac{57}{4}s + 8\right) & -\left(\frac{1}{2}s^2 + \frac{11}{2}s + 8\right) \\ -\left(\frac{1}{2}s^2 + \frac{11}{2}s + 8\right) & (4s^2 + 15s + 8) \end{bmatrix} \quad (4-37)$$

que satisfaz as condições necessārias de Fialkow-Gerst (propriedade 3) e para $s = 0$

$$Y_n(0) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad (4-38)$$

é hiperdominante irredutível (propriedade 5). A expansão segundo (4-6) é:

$$Y_n(s) = \begin{bmatrix} \frac{13}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 4 \end{bmatrix} - \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{s+4} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (4-39)$$

Identificação:

$$K_{\infty} = \begin{bmatrix} \frac{13}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 4 \end{bmatrix} \quad (4-40)$$

$$\sigma_1 = 1 \quad \sigma_2 = 4$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad K_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

As matrizes resíduos têm os seus elementos todos positivos e de acôrdo com (4-13) podem ser escritas

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

A matriz M é dada por:

$$M = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad (4-41)$$

e D_{σ} por:

$$D_{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (4-42)$$

Tendo em vista (4-40) a (4-42) e (4-7) pode-se escrever G_k como:

$$G_k = \left[\begin{array}{cc|cc} \frac{13}{4} & -\frac{1}{2} & -1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 4 & -1 & -2 \\ \hline -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \end{array} \right] \begin{array}{l} n \\ \\ m \\ m \end{array} \quad (4-43)$$

Mostrou-se que é possível tornar G_k hiperdominante irredutível. Para tal calculam-se os h_ϕ de (4-17) como segue:

$$\phi = 1 \quad h_1 \sigma_1 = \sum_{i=1}^n m_i^1$$

$$\phi = 2 \quad h_2 \sigma_2 = \sum_{i=1}^n m_i^2$$

ou

$$h_1 \times 1 = 1 + 1 = 2 \quad \therefore h_1 = 2$$

$$h_2 \times 4 = 1 + 2 = 3 \quad \therefore h_2 = \frac{3}{4}$$

Multiplicando-se a coluna 1 de M por $h_1 = 2$, a coluna 2 de M por $h_2 = \frac{3}{4}$, operando análogamente com as linhas 1 e 2 de \bar{M} e ainda multiplicando σ_1 por $h_1^2 = 4$ e σ_2 por $h_2^2 = \frac{9}{16}$ obtém-se G' apresentada em (4-44)

$$G' = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (1) & (2) & (3) & (4) \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} \frac{13}{4} & -\frac{1}{2} & -2 & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} & 4 & -2 & -\frac{3}{2} \\ \hline -2 & -2 & 4 & 0 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{9}{4} \end{array} \right] \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array} \end{array} \quad (4-44)$$

Como se verifica fãcilmente, G' é hiperdominante irredutível . A operação efetuada trocou o capacitor unitário do acesso (3) em (4-44) para um de valor $h_1^2 = 4$ e o do acesso (4) para um valor $h_2^2 = \frac{9}{16}$ de acôrdo com (4-35). A partir de (4-44) obtêm-se a rêde da figura (4-5).

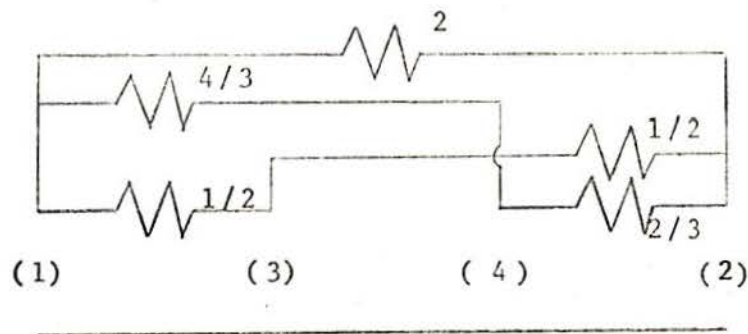


Fig. (4-5)

A rêde que realiza $Y_n(s)$ é obtida colocando-se em paralelo com os acessos (3) e (4), capacitores apropriados, como mostra a figura (4-6) .

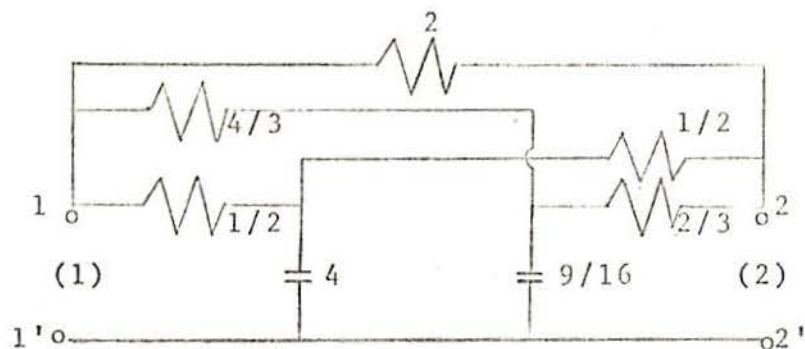


Fig. (4-6)

Exemplo 2:

Sintetizar:

$$Y_n(s) = \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} -(11s+9) & -(s+4) & -(s+5) \\ -(s+4) & (16s+6) & -7 \\ -(s+5) & -7 & (22s+12) \end{bmatrix} \quad (4-45)$$

que satisfaz as propriedades 3 e 5. A expansão é:

$$Y_n(s) = \begin{bmatrix} 11 & -1 & -1 \\ -1 & 16 & 0 \\ -1 & 0 & 22 \end{bmatrix} \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 7 & 10 \end{bmatrix} \quad (4-46)$$

Identificação:

$$K_\infty = \begin{bmatrix} 11 & -1 & -1 \\ -1 & 16 & 0 \\ -1 & 0 & 22 \end{bmatrix} \quad (4-47)$$

$$K_v = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

Observe-se que K_v é de rank 2 e deve ser partido na soma de duas matrizes de rank 1. O processo para tal é apresentado no Apêndice B.

$$K_v = K_{v1} + K_{v2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & \frac{9}{2} & 6 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$K_{v1} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ -\frac{4}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -\frac{3}{\sqrt{2}} & -\frac{4}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$K_{v2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

então

$$M = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{4}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(4-48)

e como $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$

$$D_{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-49)$$

De (4-47) a (4-49) e (4-7)

$$G_k = \left[\begin{array}{ccc|cc} 11 & -1 & -1 & -\sqrt{2} & 0 \\ -1 & 16 & 0 & \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 0 & 22 & \frac{4}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2} \\ \hline -\sqrt{2} & -\frac{3}{\sqrt{2}} & -\frac{4}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2} & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} n \\ m \end{array} \quad (4-50)$$

Para tornar G_k hiperdominante irreductível:

$$h_1 \times 1 = \sqrt{2} + \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}} \quad \therefore h_1 = \frac{9}{\sqrt{2}}$$

$$h_2 \times 1 = 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \quad \therefore h_2 = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Donde

$$G' = \begin{array}{ccccc|cc} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & & \\ \hline 11 & -1 & -1 & -9 & 0 & (1) & \\ -1 & 16 & 0 & -\frac{27}{2} & -\frac{3}{2} & (2) & \\ -1 & 0 & 22 & -18 & -3 & (3) & \\ \hline -9 & -\frac{27}{2} & -18 & \frac{81}{2} & 0 & (4) & \\ 0 & -\frac{3}{2} & -3 & 0 & \frac{9}{2} & (5) & \\ \hline \end{array} \quad (4-51)$$

Os novos capacitores são:

$$\text{No acesso (4) : } C = h_1^2 = \frac{81}{2}$$

$$\text{No acesso (5) : } C = h_2^2 = \frac{9}{2}$$

Realizando (4-51) e colocando-se os capacitores, obtêm-se a rede que realiza $Y_n(s)$ apresentado na figura (4-7).

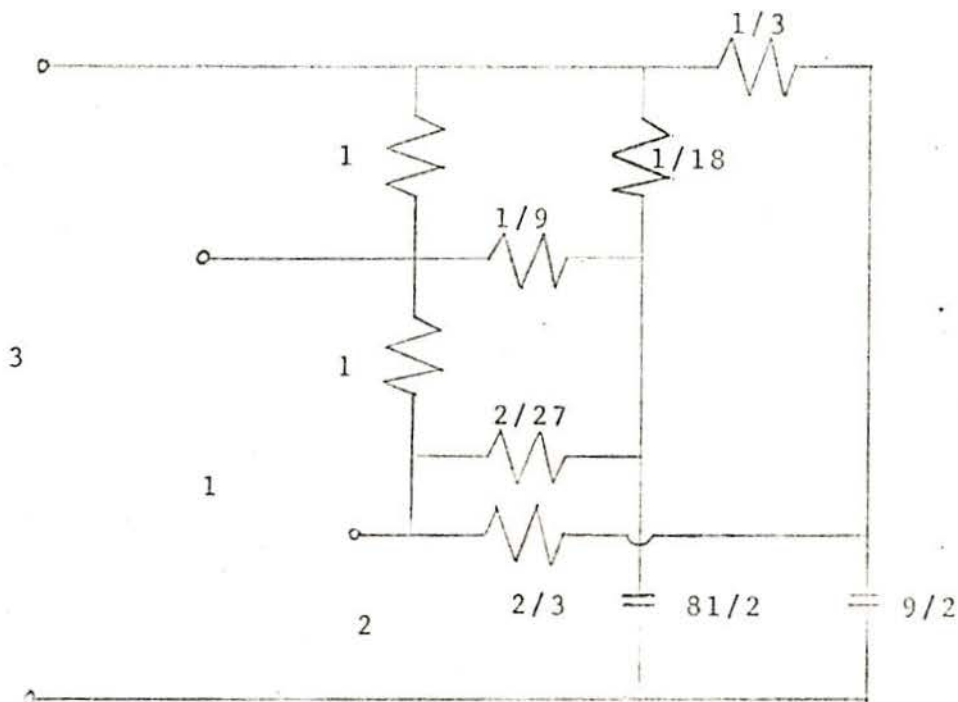


Fig. (4-7)

Observe-se que as r edes dos exemplos 1 e 2, conforme se havia dito, não possuem conexões resistivas diretas - entre os capacitores. Todos os caminhos que levam de um capacitor a outro passam por um não intermediário que   acesso da matriz $Y_n(s)$.

5.

S INTESE DO CASO GERAL

Passa-se agora a estabelecer condi es para que uma matriz admitância $Y_n(s)$, com p-polos, correspondente a uma r ede RC de n-acessos, suposta sem polos privados e satisfazendo as propriedades 3 e 5 pertenc a   classe definida em (1).

Comparando com o caso imediato, já desenvolvido nota-se que a exigência de matrizes resíduo K_v com elementos positivos ou nulos foi retirada. Permite-se agora matrizes K_v em que aparec am elementos negativos. Verificar-se-  que quando for êste o caso, a r ede sintetizada conter  conexões resistivas diretas entre os capacitores. Se a matriz $Y_n(s)$ for sintetizável por uma r ede pertencente   classe, a propriedade 6 garante para esta r ede a exist ncia da matriz condutância G cuja forma, conforme (4-5)  :

$$G = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} B_{11} & B_{12} \\ \bar{B}_{12} & B_{22} \end{array} \right] & \begin{array}{l} n \\ m \end{array} \\ \begin{array}{cc} n & m \end{array} & \end{array} \quad (4-52)$$

onde:

B_{11}   $n \times n$ e hiperdominante, B_{12}   $n \times m$ e tem os elementos negativos ou nulos, B_{22}   $m \times m$ e hiperdominante, G   hiperdominante irredutível, n são os acessos de $Y_n(s)$ e m o número de

capacitores. Sejam $C_1, \dots, C_\phi, \dots, C_m$ os m capacitores da realização de $\tilde{Y}_n(s)$. Escreve-se C , uma matriz diagonal, tal que:

$$C = \begin{bmatrix} \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & D_C \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \quad (4-53)$$

onde

$$D_C = \text{diag.} (C_1, \dots, C_\phi, \dots, C_m) \quad (4-54)$$

Seja $Y_{n+m}(s)$ uma matriz de $(n+m)$ -acessos obtida com a colocação dos capacitores $C_1, \dots, C_\phi, \dots, C_m$ em paralelo com os acessos $1, \dots, \phi, \dots, m$ de G , então:

$$Y_{n+m}(s) = \begin{bmatrix} \overline{B}_{11} & B_{12} \\ \overline{B}_{12} & B_{22} \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & D_C \end{bmatrix} \quad (4-55)$$

A redução de $Y_{n+m}(s)$ a seus n -acessos reproduz, evidentemente, $Y_n(s)$.

Logo

$$Y_n(s) = \overline{B}_{11} - B_{12} \{B_{22} + s D_C\}^{-1} \overline{B}_{12} \quad (4-56)$$

Proposição:

Existe uma matriz $\tilde{Y}_{n+m}(s)$ de $(n+m)$ -acessos, análoga a $Y_{n+m}(s)$, cuja redução a seus n -acessos conduz a resultado idêntico ao de (4-56), porém na qual os capacitores são to-

dos unitários. Sua matriz condutância \hat{G} , tem a mesma distribuição de sinais de G , mas não é mais obrigatoriamente hiperdominante irreduzível.

Prova:

Considere-se a matriz gerada por uma transformação de congruência, obtida através da matriz transformação T de (4-57), operando sobre $Y_{n+m}(s)$. A redução desta matriz a seus n -acessos conduz a $Y_n(s)$.

$$T = \begin{bmatrix} \overline{U} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{D_C} \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \quad (4-57)$$

onde

$$\overline{D_C} = \text{diag.} \left(\frac{1}{\sqrt{C_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{C_\phi}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{C_m}} \right) \quad (4-58)$$

Verifica-se a seguir que esta matriz é $\hat{Y}_{n+m}(s)$.

$$\overline{T} Y_{n+m}(s) T = \begin{bmatrix} \overline{B}_{11} & \overline{B}_{12} \overline{D_C} \\ \overline{D_C} \overline{B}_{12} & \overline{D_C} \overline{B}_{22} \overline{D_C} \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{U} \end{bmatrix} \quad (4-59)$$

ou

$$\hat{Y}_{n+m}(s) = \hat{G} + s \begin{bmatrix} \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\overline{B}}_{11} & \hat{\overline{B}}_{12} \\ \hat{\overline{B}}_{12} & \hat{\overline{B}}_{22} \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{U} \end{bmatrix} \quad (4-60)$$

onde

$$\begin{aligned}\hat{B}_{11} &= B_{11}, \text{ dimensão } n \times n \\ \hat{B}_{12} &= B_{12} D_{\bar{C}}, \text{ dimensão } n \times m \\ \hat{B}_{22} &= D_{\bar{C}} B_{22} D_{\bar{C}}, \text{ dimensão } m \times m\end{aligned}\tag{4-61}$$

Observando G e \hat{G} , conclui-se que ambas têm a mesma distribuição de sinais, uma vez que $D_{\bar{C}}$ é uma matriz diagonal de elementos positivos. No caso geral \hat{G} não será hiperdominante irredutível, não podendo por isso ser realizada dentro da classe que interessa, a não ser quando $Y_n(s)$, pertencente à classe, necessitar somente capacitores unitários para sua realização. A forma (4-60) será utilizada para análise do caso geral dada a facilidade que apresenta a matriz unitária dos capacitores. Pode-se trabalhar apenas com sua matriz condutância, \hat{G} . Para a realização final da rede a passagem de \hat{G} para G deve ser efetuada. Esta operação corresponde, simplesmente, a tornar \hat{G} hiperdominante irredutível, num processo totalmente análogo àquele efetuado no caso imediato.

Dada a matriz $Y_n(s)$ mostra-se a seguir como a matriz \hat{G} pode ser obtida.

Considere-se a expansão de $Y_n(s)$ na forma (4-6) e dela obtida a matriz G_k como em (4-7), então:

$$Y_k = \begin{bmatrix} \bar{K}_\infty & \bar{M} \\ \bar{M} & \bar{D}_{\bar{C}} \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{U} \end{bmatrix}\tag{4-62}$$

onde, agora, \bar{M} é constituída por elementos de sinais quaisquer podendo incluir elementos nulos. Suponha aplicada a $Y_k(s)$ a transformação de congruência T que gera a classe geral de matrizes Y equivalente a $Y_k(s)$ nos n -acessos.⁴

então:

$$T = \begin{bmatrix} \bar{U} & \bar{O} \\ \bar{Y} & \bar{X} \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ \psi \end{matrix} \quad (4-63)$$

onde as dimensões de \bar{U} , \bar{O} , \bar{Y} e \bar{X} são apresentadas em (4-63) e \bar{O} é uma matriz nula. Operando, obtém-se:

$$Y_1(s) = \bar{Y} Y_k(s) T = \begin{bmatrix} \bar{K}_\infty + \bar{Y}\bar{M} + \bar{M}\bar{Y} + \bar{Y}\bar{D}_\sigma \bar{Y} & \bar{M}\bar{X} + \bar{Y}\bar{D}_\sigma \bar{X} \\ \bar{X}\bar{M} + \bar{X}\bar{D}_\sigma \bar{Y} & \bar{X}\bar{D}_\sigma \bar{X} \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} \bar{Y}\bar{Y} & \bar{Y}\bar{X} \\ \bar{X}\bar{Y} & \bar{X}\bar{X} \end{bmatrix} \quad (4-64)$$

onde:

$$G_1 = \begin{bmatrix} \bar{K}_\infty + \bar{Y}\bar{M} + \bar{M}\bar{Y} + \bar{Y}\bar{D}_\sigma \bar{Y} & \bar{M}\bar{X} + \bar{Y}\bar{D}_\sigma \bar{X} \\ \bar{X}\bar{M} + \bar{X}\bar{D}_\sigma \bar{Y} & \bar{X}\bar{D}_\sigma \bar{X} \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ \psi \end{matrix} \quad (4-65)$$

e

$$C_1 = \begin{bmatrix} \bar{Y}\bar{Y} & \bar{Y}\bar{X} \\ \bar{X}\bar{Y} & \bar{X}\bar{X} \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ \psi \end{matrix} \quad (4-66)$$

Por construção, $Y_1(s)$ é equivalente a $Y_n(s)$ quando reduzida a seus n -acessos. Se G_1 for realizável, a rede necessitará de um número mínimo de $(n+\psi+1)$ nós. Mas se $Y_n(s)$ pertencer a classe estudada, pela propriedade 7, existe uma rede equivalente que usa somente $(n+m+1)$ nós. Conclui-se então que se $\psi = m$, a matriz de congruência T ainda gera a classe geral das redes estudadas, desde que $Y_n(s)$ pertença a ela. Isto é, a ordem da matriz quadrada X é igual ao número mínimo de capacitores necessários à realização de $Y_n(s)$, obtido segundo (3-23). Por outro lado, se $Y_n(s)$ pertence à classe então C_1 pode ser obti-

da com a forma de C em (4-53), ou seja, a transformação T ainda é geral para a classe se $Y = 0$. Se $Y \neq 0$ a realização obtida cairia forçosamente fora da classe proposta. $Y_1(s)$ pode ser escrita a partir de (4-64) e das considerações acima, como:

$$Y_1(s) = \begin{bmatrix} \overline{K_\infty} & \overline{MX} \\ \overline{\overline{XM}} & \overline{\overline{XD}_\sigma X} \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \overline{\overline{XX}} \end{bmatrix} \quad (4-67)$$

onde

$$G_1 = \begin{bmatrix} \overline{K_\infty} & \overline{MX} \\ \overline{\overline{XM}} & \overline{\overline{XD}_\sigma X} \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \quad (4-68)$$

e

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \overline{\overline{XX}} \end{bmatrix} \quad (4-69)$$

Proposição:

Dadas as seguintes condições:

- a) - X é ortogonal,
 - b) - MX é uma matriz de elementos negativos ou nulos,
 - c) - $\overline{\overline{XD}_\sigma X}$ é uma matriz com diagonal de elementos positivos e elementos fora da diagonal negativos ou nulos,
- se for possível encontrar X satisfazendo (a), (b) e (c) é possível tornar G_1 hiperdominante irredutível e, portanto, identifi

cável com \bar{G} .

Prova:

Seja aplicada sôbre G_1 a transformação de congruência T de (4-70)

$$T = \begin{array}{cc} \begin{array}{|c|c|} \hline \bar{U} & \bar{O} \\ \hline \end{array} & n \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \bar{O} & \bar{H} \\ \hline \end{array} & m \\ \hline n & m \end{array} \quad (4-70)$$

onde

$$H = \bar{H} = \text{diag.}(h_1, \dots, h_\phi, \dots, h_m) \quad (4-71)$$

então:

$$G = \bar{T}G_1T = \begin{array}{cc} \begin{array}{|c|c|} \hline K_\infty & MXH \\ \hline \end{array} & \\ \begin{array}{|c|c|} \hline H\bar{X}\bar{M} & H\bar{X}D_\sigma XH \\ \hline \end{array} & \end{array} \quad (4-72)$$

Seja l_q uma matriz de uma coluna e q linhas com todos os elementos unitários e \bar{l}_p uma matriz de uma linha e p colunas com todos os elementos unitários. Então:

$$\bar{l}_n \quad MXH \quad (4-73)$$

$\bar{1}_m$ é uma matriz de uma linha e m colunas onde o elemento ϕ ($\phi = 1, \dots, m$) representa a soma da coluna ϕ de MXH , e

$$\bar{1}_m \quad H\bar{X}D_{\sigma}XH \quad (4-74)$$

é uma matriz de uma linha e m colunas onde o elemento ϕ representa a soma da coluna ϕ de $H\bar{X}D_{\sigma}XH$. Escolhendo H tal que (4-73) seja igual ao negativo de (4-74) garante-se que a soma dos elementos da coluna ϕ de (4-72) seja nula. Logo,

$$\bar{1}_n \quad MXH = -\bar{1}_m \quad H\bar{X}D_{\sigma}XH \quad (4-75)$$

De (4-75), obtém-se

$$H = -\bar{1}_n \quad MD_{\sigma}^{-1}X \quad (4-76)$$

onde

$$H = \bar{1}_m \quad H = [h_1, h_2, \dots, h_{\phi}, \dots, h_m] \quad (4-77)$$

é uma matriz de dimensão $1 \times m$. Se H for escolhido de acordo com (4-76), implica em (4-72) ser hiperdominante irredutível. Para tal resta provar que a soma de cada coluna j de (4-72) é nula, ou o que é equivalente, a soma de cada linha i é nula. Novamente,

$$K_{\infty} \quad \bar{1}_n \quad (4-78)$$

é uma matriz de uma coluna e n linhas em que o elemento i é a soma dos elementos da linha i de K_{∞} e

$$MXH \quad \bar{1}_m \quad (4-79)$$

é uma matriz de uma coluna e n linhas em que o elemento i é a soma dos elementos de linha i de MXH . Para a hiperdominância irredutível de G_1 deve-se ter a igualdade de (4-78) com o negativo de (4-79).

$$K_\infty 1_n = -MXH 1_m \quad (4-80)$$

mas

$$H 1_m = \bar{H} \quad (4-81)$$

levando (4-81) e (4-76) em (4-80), vem que

$$K_\infty 1_n = MD_\sigma^{-1} M 1_n \quad (4-82)$$

ou

$$\left[K_\infty - MD_\sigma^{-1} M \right] 1_n = 0 \quad (4-83)$$

Tendo em vista (3-37), (4-83) fica:

$$Y_n(0) 1_n = 0 \quad (4-84)$$

Como por hipótese $Y_n(0)$ satisfaz a propriedade 5 (é hiperdominante irredutível), segue-se que (4-84) é verdadeira. Portanto, para tornar G_1 hiperdominante irredutível deve-se aplicar a congruência definida por (4-70), com \bar{H} calculado segundo (4-76). A congruência (4-72) alterou os capacitores de $Y_1(s)$ de unitários para:

$$\bar{T}C_1T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H^2 \end{bmatrix} \quad (4-85)$$

De (4-85) verifica-se que o capacitor unitário do acesso ϕ ($\phi = 1, \dots, m$) foi substituído por um capacitor de valor h_{ϕ}^2 , dado por (4-76). De (4-85) e (4-54) conclui-se

$$D_C = H^2$$

e de (4-60) e (4-67) com as restrições (a), (b) e (c) que

$$\begin{aligned} \hat{B}_{11} &= K_{\infty} \\ \hat{B}_{12} &= MX \\ \hat{B}_{22} &= \bar{X}D_{\sigma}X \end{aligned} \quad (4-86)$$

Tendo em vista (4-86) é possível escrever H de (4-76) como

$$H = -\bar{I}_n MD_{\sigma}^{-1}X = -\bar{I}_n MX\bar{X}D_{\sigma}^{-1}X = -\bar{I}_n \hat{B}_{12} \hat{B}_{22}^{-1} \quad (4-87)$$

Resumindo a solução do caso geral pode-se dizer que ela consiste em: obter a matriz apresentada por Kinariwala conforme (3-36) e encontrar, se possível, a matriz X satisfazendo (a), (b) e (c). Obtém-se, a seguir, G_1 conforme (4-68). Calcula-se H de (4-76) ou (4-87), torna-se G_1 hiperdominante irreduzível e colocam-se os capacitores dados por (4-85) em paralelo com os m -acessos de G_1 . Acrescentam-se os polos privados, se houver, e obtém-se nos n -acessos a matriz $Y_n(s)$.

A etapa mais trabalhosa do processo é a obtenção de X . Para o caso de matrizes D_{σ} com σ distintos, obtém-se um sistema de m^2 incógnitas (os elementos de X), $(m^2+m)/2$ equações da ortogonalidade de X , $(m^2-m)/2$ inequações de $\bar{X}D_{\sigma}X$ e $(m \times n)$ inequações dos elementos de MX . Para alguns σ idênticos, o número de restrições impostas por $\bar{X}D_{\sigma}X$ diminui. No caso extremo de todos os σ iguais ela não põe restrição adicional alguma.

No Apêndice D, é apresentada uma classe de matrizes, proposta por A.J.Schneider¹⁶ que satisfazem sempre (a) e (c). Quando esta classe for empregada como possível solução, deve-se apenas obrigar a verificação da condição (b). A matriz proposta por Schneider é sempre solução para matrizes X de ordem 2 por 2, como se mostra no Apêndice D.

6. EXEMPLOS DO CASO GERAL

Exemplo 1:

Sintetizar

$$Y_n(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} (s^2 + \frac{9}{5}s + \frac{1}{5}) & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & (\frac{1}{5}s^2 + \frac{7}{15}s + \frac{1}{5}) \end{bmatrix} \quad (4-88)$$

que satisfaz as propriedades 3 e 5.

Expandindo $Y_n(s)$, obtêm-se:

$$Y_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} - \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{15} \end{bmatrix} - \frac{1}{s+2} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{15} \end{bmatrix} \quad (4-89)$$

Identificando

$$\sigma_1 = 1 \quad \sigma_2 = 2$$

$$K_\infty = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \quad (4-90)$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \\ -\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{15}} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} & -\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{15}} \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \\ +\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{15}} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} & +\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{15}} \end{bmatrix}$$

então

$$M = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{15}} & +\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{15}} \end{bmatrix} \quad (4-91)$$

e

$$D_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (4-92)$$

De (4-90), (4-91) e (4-92)

$$G_k = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{15}} & +\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{15}} \\ \hline -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} & -\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{15}} & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} & +\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{15}} & 0 & 2 \end{array} \right] \quad (4-93)$$

Seja X, conforme o Apêndice D, dado por:

$$X = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4-94)$$

$$0 \leq \theta \leq \pi/2$$

Aplicando sôbre G_k a congruência dada por T, onde

$$T = \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix} \quad (4-95)$$

deve-se obter \hat{G} . Para tal sô deverá ainda ser satisfeita a condição (b) para X. É em função desta restrição que se calcula em que intervalos de θ há solução. Então,

$$MX = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \text{sen } \theta - \cos \theta & -(\text{sen } \theta + \cos \theta) \\ -\frac{1}{3}(\text{sen } \theta + \cos \theta) & -\frac{1}{3}(\text{sen } \theta - \cos \theta) \end{bmatrix} \quad (4-96)$$

e θ deve ser tal que os elementos de MX sejam negativos ou nulos. Para êste caso é fácil ver que a única solução se verifica para $\theta = 45^\circ$, onde $\text{sen } \theta = \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

substituindo, tem-se:

$$MX = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \\ -\frac{\sqrt{6/5}}{3} & 0 \end{bmatrix} \quad (4-97)$$

então,

$$\bar{X}D_\sigma X = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad (4-98)$$

A matriz \hat{G} é,

$$\hat{G} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{\sqrt{6/5}}{3} & 0 \\ \hline 0 & -\frac{\sqrt{6/5}}{3} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array} \right] \quad (4-99)$$

Para torná-la hiperdominante irredutível usa-se a matriz H dada por (4-87) na transformação de congruência efetuada pela matriz de (4-70).

De (4-87)

$$H = -\bar{I}_n \hat{B}_{12} \hat{B}_{22}^{-1} = -\bar{I}_n \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \\ -\frac{\sqrt{6/5}}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}^{-1}$$

ou

$$H = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} & \frac{5}{6} \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{5}{6} \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \quad (4-100)$$

Então de (4-71), (4-77) e (4-100)

$$H = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \quad (4-101)$$

Operando (4-70) com os valores dados por (4-101) sobre \hat{G} , obtém-se:

$$G = \overline{TGT} = \begin{array}{cccc|cccc} & (1) & (2) & & (3) & & (4) & \\ \hline & 1 & 0 & | & 0 & & -1 & (i) \\ & 0 & \frac{1}{5} & | & -\frac{1}{5} & & 0 & (2) \\ \hline & 0 & -\frac{1}{5} & | & \frac{9}{20} & & -\frac{1}{4} & (3) \\ & -1 & 0 & | & -\frac{1}{4} & & \frac{5}{4} & (4) \\ \hline \end{array} \quad (4-102)$$

Verifica-se que G é hiperdominante irredutível e está realizada na figura (4-8).

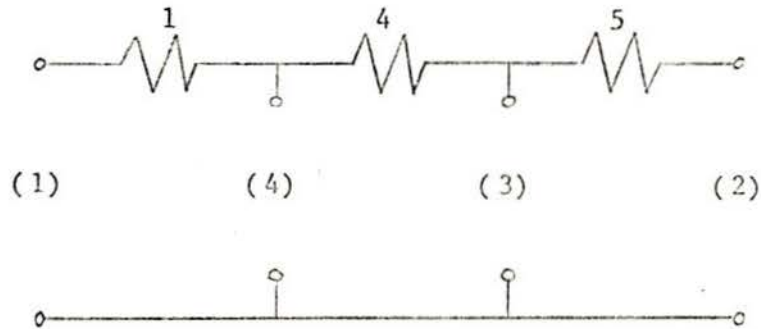


Fig. (4-8)

Os valores dos capacitores são:

$$\text{No acesso (3): } C_1 = h_1^2 = \left(\frac{1}{2} \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{3}{10}$$

$$\text{No acesso (4): } C_2 = h_2^2 = \left(\frac{5}{6} \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{5}{6}$$

A rede que realiza $Y_n(s)$ está apresentada na figura (4-9).

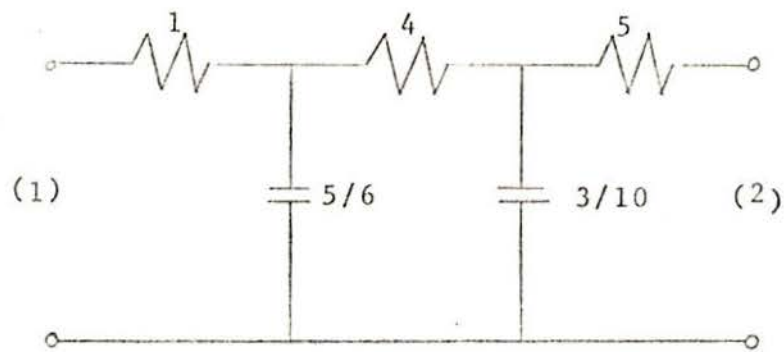


Fig. (4-9)

Exemplo 2:

Sintetizar

$$Y_n(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{7}{2}s + \frac{5}{2}} \begin{bmatrix} (2s^2 + \frac{11}{2}s + \frac{3}{2}) & -(\frac{1}{2}s + \frac{3}{2}) \\ -(\frac{1}{2}s + \frac{3}{2}) & (s^2 + 3s + \frac{3}{2}) \end{bmatrix} \quad (4-103)$$

que satisfaz as propriedades 3 e 5.

Expandindo $Y_n(s)$, obtêm-se:

$$Y_n(s) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} - \frac{1}{s+\frac{5}{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \quad (4-104)$$

Identificando:

$$K_{\infty} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-105)$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{1/3} & \\ -\sqrt{1/3} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2\sqrt{1/3} & -\sqrt{1/3} \\ & \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{1/6} & \\ +\sqrt{1/6} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{1/6} & +\sqrt{1/6} \\ & \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1 = 1 \quad \sigma_2 = \frac{5}{2}$$

Então:

$$M = \begin{bmatrix} -2\sqrt{1/3} & -\sqrt{1/6} \\ -\sqrt{1/3} & +\sqrt{1/6} \end{bmatrix} \quad (4-106)$$

e

$$D_{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \quad (4-107)$$

Donde,

$$G_k = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -2\sqrt{1/3} & -\sqrt{1/6} \\ 0 & 1 & -\sqrt{1/3} & +\sqrt{1/6} \\ \hline -2\sqrt{1/3} & -\sqrt{1/3} & 1 & 0 \\ -\sqrt{1/6} & +\sqrt{1/6} & 0 & 5/2 \end{array} \right] \quad (4-108)$$

Usando para X a matriz (4-94) e aplicando a restrição (b), obtêm-se:

$$\begin{aligned} -2\sqrt{1/3} \cos\theta + \sqrt{1/6} \operatorname{sen}\theta &\leq 0 & (i) \\ -2\sqrt{1/3} \operatorname{sen}\theta - \sqrt{1/6} \cos\theta &\leq 0 & (ii) \\ -\sqrt{1/3} \cos\theta - \sqrt{1/6} \operatorname{sen}\theta &\leq 0 & (iii) \\ -\sqrt{1/3} \operatorname{sen}\theta + \sqrt{1/6} \cos\theta &\leq 0 & (iv) \end{aligned}$$

(ii) e (iii), valem para qualquer θ entre zero e $\pi/2$. De (i)

$$\operatorname{tg}\theta \leq 2\sqrt{2} \quad (4-109)$$

de (iv)

$$\operatorname{tg}\theta \geq 1/\sqrt{2} \quad (4-110)$$

De (4-109) e (4-110) conclui-se que as possíveis soluções do problema são obtidas para θ restrito conforme (4-111)

$$\begin{aligned} 1/\sqrt{2} &\leq \operatorname{tg}\theta \leq 2\sqrt{2} \\ 0 &\leq \theta \leq \pi/2 \end{aligned} \quad (4-111)$$

Resolve-se, como exemplo, para os limites de (4-111)

$$\text{Caso 1: } \operatorname{tg}\theta = 1/\sqrt{2}$$

$$X = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} & \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (4-112)$$

Caso 2: $\text{tg}\theta = 2\sqrt{2}$

$$X = \begin{bmatrix} 1/3 & 2\sqrt{2}/3 \\ -2\sqrt{2}/3 & 1/3 \end{bmatrix} \quad (4-113)$$

Para o caso 1, usando-se a transformação de congruência dada por (4-95), obtêm-se,

$$G_1 = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -\sqrt{2}/2 & -1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \hline -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 3/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -1 & 0 & -\sqrt{2}/2 & 2 \end{array} \right] \quad (4-114)$$

A transformação (4-70) com H dado por (4-87), torna G_1 hiperdominante irredutível. De (4-87),

$$H = -\bar{1}_n \hat{B}_{12} \hat{B}_{22}^{-1} = -\bar{1}_n \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & -1 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

ou

$$H = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

então

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-115)$$

Usando (4-115) em (4-70) e aplicando sôbre G_1 , obtêm-se, conforme (4-72):

$$TG_1T = \begin{array}{cccc|cc} (1) & (2) & & (3) & (4) & \\ \hline 2 & 0 & & -1 & -1 & (1) \\ 0 & 1 & & -1 & 0 & (2) \\ \hline & & & 3 & -1 & (3) \\ -1 & -1 & & -1 & 2 & (4) \\ \hline \end{array} \quad (4-116)$$

(4-116) é uma matriz hiperdominante irredutível. Realizando-a e colocando-se no acesso (3) o capacitor $C_1 = h_1^2 = 2$ e no acesso (4) o capacitor $C_2 = h_2^2 = 1$, obtêm-se uma rêde que realiza $Y_n(s)$ conforme a figura (4-10).

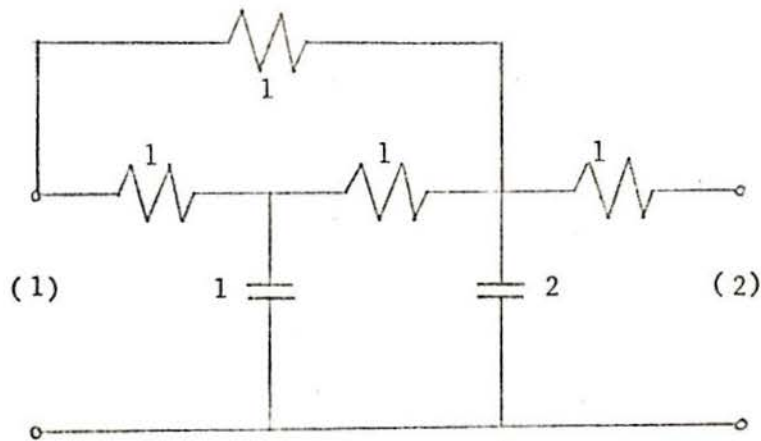


Fig. (4-10)

Para o caso 2, obtêm-se, análogamente:

$$G_1 = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & -3/\sqrt{6} \\ 0 & 1 & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ \hline 0 & -1/\sqrt{3} & 7/3 & -\sqrt{2}/3 \\ -3/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -\sqrt{2}/3 & 7/6 \end{array} \right] \quad (4-117)$$

$$H = -\bar{I}_n \begin{bmatrix} 0 & -3/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7/3 & -\sqrt{2}/3 \\ -\sqrt{2}/3 & 7/6 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 4/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

Então

$$H = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 4/\sqrt{6} \end{bmatrix} \quad (4-118)$$

e

$$\bar{T}G_1T = \begin{array}{cccc|cccc} & (1) & (2) & & (3) & (4) & & \\ \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 0 & | & 0 & -2 \\ 0 & 1 & | & -1/3 & -2/3 \\ \hline 0 & -1/3 & | & 7/9 & -4/9 \\ -2 & -2/3 & | & -4/9 & 28/9 \end{bmatrix} & & & & & & \end{array}$$

No acesso (3)

$$C_1 = h_1^2 = 1/3$$

No acesso (4)

$$C_2 = h_2^2 = 8/3$$

A figura (4-11) mostra a realização de $Y_n(s)$ para o caso 2.

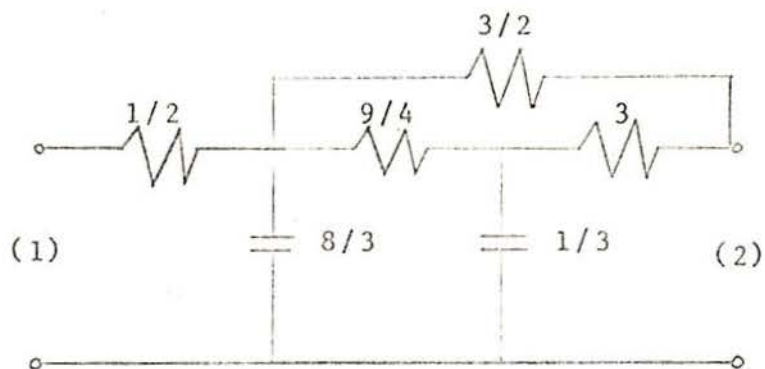


Fig. (4-11)

Observe-se que para o caso 1 a capacitância total vale

$$C_{T1} = 1+2 = 3$$

e para o caso 2 ela vale

$$C_{T2} = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} = 3$$

isto é

$$C_{T1} = C_{T2} = C_{Tmin} = (C_{Tmin})_{LI}$$

O trabalho apresentou como resultado a síntese de uma classe de rêsdes RC com capacitância total m nima e o número mínimo de capacitores, conectados ao terminal comum dos n-acessos. O processo de síntese baseia-se no desenvolvimento da matriz admitância da r de pelo método de Kinariwala. Reconhece-se, a partir d este desenvolvimento, um caso imediato de síntese. Para as r des realizáveis na configura o proposta, condi es necess rias e suficientes são apresentadas, para a síntese do caso geral. A primeira vantagem, decorrente do método e da estrutura topol gica da r de RC,   a de utilizar matrizes com inversa de exist ncia garantida por constru o. Além desta, o processo difere de outros também baseados em congruência, por não necessitar a exist ncia de árvores para cada tipo de elementos.¹⁸

Dentre os problemas surgidos na evolu o da pesquisa deve-se realçar o da exist ncia da matriz X preenchendo os requisitos de suficiência para a realiza o da r de. Esta questão, relaciona-se íntimamente com o desenvolvimento de um teste que aplicado a uma matriz admitância permita, a priori, verificar a necessidade de existirem capacitores sem conexão ao terminal comum, na sua realiza o. Talvez seja possível relacionar esta condi o   distribui o de sinais nos elementos das matrizes resíduos, obtidas da decomposi o da matriz admitância. Constatada a dificuldade na resolu o do  tem proposto, um caminho paralelo seria o da pesquisa direta da matriz X com base nas condi es suficientes que ela deve obedecer, provavelmente por um processo de computa o. A êstes problemas, somam-se os já mencionados na introdu o, decorrentes da própria conceitua o do tipo de r des RC em questão. A exist ncia de uma capacitância total m nima e a de um mínimo para a fun o custo, descrita na introdu o, preocupam os pesquisadores.

Um seguimento imediato ao trabalho, talvez não o definitivo, seria a procura de um processo mediante o qual se garantiria a realização da rede nas condições estipuladas, restringindo simultaneamente o valor máximo do maior dos resistores, a um limite compatível com as técnicas de integração. Por outro lado, justifica-se a esta altura uma sequência de pesquisas visando aproveitar ao máximo a topologia destas redes em microeletrônica. A este estudo corresponderia, no plano teórico, a pesquisa de uma decomposição de um sistema geral em pequenos blocos RC do tipo estudado e outros blocos característicos de interesse do projetista.

É válido mencionar algumas técnicas utilizadas para tentar a solução do problema de síntese e que por particularidades não trouxeram contribuições. Inicialmente o processo proposto por Cederbaum³ que consiste na decomposição única da matriz, em um triplice produto matricial do tipo $\bar{A}DA$, onde D é a matriz diagonal das condutâncias dos elos e A é uma matriz unimodular que reflete as relações de incidência no grafo da rede. O inconveniente encontrado relaciona-se com a liberdade de conexões resistivas entre os conjuntos de acessos n e m e entre o próprio conjunto m . Após, o processo de aumento de um nó na matriz G_k , baseado no método de Guillemin⁴, tentando fazer o caso geral recair no caso imediato, não surtiu efeito, porque sendo G_k não realizável, o seu aumento obtido pela soma de matriz de rank 1, não pode gerar uma matriz aumentada, realizável, com a forma requerida para o caso imediato.

A pesquisa efetuada não encerrou o assunto, mostrando vários novos pontos de ataque, mas apresentou resultados parciais que se espera, contribuam para o desenvolvimento da área.

A P Ê N D I C E A

Fórmula para calcular a capacitância total mínima da realização de uma impedância RC.

Desenvolvendo $z(s)$ de (2-9) pela 2^a forma de Foster vem:

$$y(s) = \frac{1}{z(s)} = \frac{b_p s^p + \dots + b_1 s + b_0}{a_p s^p + \dots + a_1 s + a_0} = K_0 + \sum_{v=1}^p \frac{K_v s}{s + \sigma_v} \quad (\text{a-1})$$

onde

$$K_0 = \lim_{s \rightarrow 0} y(s) = \frac{b_0}{a_0} \quad (\text{a-2})$$

e

$$C_{Tmin} = \sum_{v=1}^p C_v^{F2} \quad (\text{a-3})$$

$$C_v^{F2} = \frac{K_v}{\sigma_v} \quad (\text{a-4})$$

ou

$$C_{Tmin} = \sum_{v=1}^p \frac{K_v}{\sigma_v} \quad (\text{a-5})$$

$$\sum_{v=1}^p \frac{K_v s}{s+\sigma_v} = \frac{b_p s^p + \dots + b_1 s + b_0}{a_p s^p + \dots + a_1 s + a_0} - \frac{b_0}{a_0} \quad (a-6)$$

$$\sum_{v=1}^p \frac{K_v s}{s+\sigma_v} = \frac{(a_0 b_p - a_p b_0) s^p + \dots + (a_0 b_1 - a_1 b_0) s}{a_0 a_p s^p + \dots + a_0 a_1 s + a_0^2} \quad (a-7)$$

$$\sum_{v=1}^p \frac{K_v s}{s+\sigma_v} = \frac{\left(\frac{a_0 b_p - a_p b_0}{a_0^2}\right) s^p + \dots + \left(\frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{a_0^2}\right) s}{\frac{a_p}{a_0} s^p + \dots + \frac{a_1}{a_0} s + 1} \quad (a-8)$$

Desenvolvendo o primeiro membro de (a-8) temos:

$$\sum_{v=1}^p \frac{K_v s}{s+\sigma_v} = \frac{K_1 s}{s+\sigma_1} + \dots + \frac{K_p s}{s+\sigma_p} =$$

$$= \frac{\sum_{v=1}^p K_v s^p + (\text{coef.}) s^{p-1} + \dots + (K_v \prod_{j \neq v}^p \sigma_j) s}{s^p + \dots + \prod_{j=1}^p \sigma_j} =$$

$$= \frac{\sum_{v=1}^p \frac{K_v}{\prod_{j=1}^p \sigma_j} s^p + (\text{coef.}) s^{p-1} + \dots + \left(\frac{K_v \prod_{j=1}^p \sigma_j}{\prod_{j=1}^p \sigma_j}\right) s}{\frac{1}{\prod_{j=1}^p \sigma_j} s^p + \dots + 1} \quad (a-9)$$

Compare-se (a-9) com (a-8). Pela igualdade dos coeficientes vem

$$\frac{a_0 b_1 - b_0 a_1}{a_0^2} = \sum_{v=1}^p \frac{K_v \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq v}}^p \sigma_j}{\prod_{j=1}^p \sigma_j} = \sum_{v=1}^p \frac{K_v}{\sigma_v} \quad (\text{a-10})$$

Comparando (a-10) com (a-5) conclui-se

$$C_{Tmin} = \frac{a_0 b_1 - b_0 a_1}{a_0^2} \quad (\text{a-11})$$

A P Ê N D I C E B

Processo para decompor uma matriz simétrica de rank r na soma de r matrizes de rank 1.

O processo, descrito a seguir, foi proposto por D. Basson e C.C. Halkias.¹⁷

Seja K , conforme (b-1), uma matriz simétrica de dimensão $n \times n$ e rank r .

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13}, \dots, K_{1n} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23}, \dots, K_{2n} \\ K_{13} & K_{23} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{1n} & K_{2n} \dots \dots \dots K_{nn} \end{bmatrix} \quad (b-1)$$

Seja M , uma matriz coluna de dimensão $n \times 1$ tal que K' definido em (b-2),

$$K'_1 = M_1 \bar{M}_1 \quad (b-2)$$

tenha a primeira linha (coluna) idêntica a K . Então:

$$M_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{K_{11}} \\ K_{12}/\sqrt{K_{11}} \\ K_{13}/\sqrt{K_{11}} \\ \vdots \\ K_{1n}/\sqrt{K_{11}} \end{bmatrix} \quad (b-3)$$

Observe-se que M_1 foi obtido a partir da coluna 1 de K . O elemento 1 de M_1 é a raiz quadrada do elemento 11 de K , e os de -

mais elementos de M_1 são os respectivos elementos da 1^a coluna de K , divididos pela raiz do elemento 11. Subtraindo K' de K , obtêm-se K_1 .

$$K_1 = K - K'_1 = \left[\begin{array}{c|cccccccc} 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & \end{array} \right] \quad (b-4)$$

onde K_1 tem a primeira coluna (linha) nula, os elementos da diagonal são positivos porque são formados dos determinantes principais de ordem 2 da matriz K e cujo rank é $(r-1)$. Seja M_2 uma matriz coluna de dimensão $n \times 1$ tal que K'_2 definido por (b-5)

$$K'_2 = M_2 \bar{M}_2 \quad (b-5)$$

tenha a segunda coluna (linha) igual à segunda coluna (linha) de K_1 . O processo de obtenção de M_2 é análogo ao de M_1 . Repete-se para M_2 a segunda coluna de K_1 , extrai-se a raiz do elemento 22 e divide-se os demais elementos pela raiz do elemento 22. Note que o 1º elemento de M_2 é zero. Subtrai-se a matriz K'_2 de K_1 e obtêm-se K_2 com as duas primeiras linhas (colunas) nulas e rank $(r-2)$. Repete-se o processo r vezes. A matriz K pode ser escrita como

$$K = \sum_{\delta=1}^r M \bar{M} = \sum_{\delta=1}^r K' \quad (b-6)$$

onde (b-6) apresenta K escrito como a soma de r matrizes de dimensão $n \times n$ e rank 1. A vantagem da decomposição apresentada está no fato de a matriz M , definida por (b-7),

$$M = [M_1, M_2, \dots, M_0, \dots, M_r] \quad (b-7)$$

ser obtida com o maior número de elementos nulo possível.

Exemplo

$$K = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

K é uma matriz 3 x 3 de rank 2.

Conforme (b-3):

$$M_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 3/\sqrt{2} \\ 4/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

e de (b-2)

$$K'_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 3/\sqrt{2} \\ 4/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 3/\sqrt{2} & 4/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & \frac{9}{2} & 6 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

De (b-4)

$$K_1 = K - K'_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$K_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = K_1 - K_2' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

então de (b-6)

$$K = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & \frac{9}{2} & 6 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

A P Ê N D I C E C

Prova que G_k é semidefinida positiva.

Seja Q a forma quadrática de G_k dada por (3-36).

Então

$$Q = \begin{bmatrix} \bar{x} & \bar{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{\infty} & M \\ \bar{M} & D_{\sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (c-1)$$

onde $\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}$ é um vetor coluna real qualquer

$$Q = \bar{x}K_{\infty}x + \bar{x}My + \bar{y}\bar{M}x + \bar{y}D_{\sigma}y \quad (c-2)$$

somando e subtraindo $\bar{x}MD_{\sigma}^{-1}\bar{M}x$ em (c-2)

$$Q = \bar{x}K_{\infty}x - \bar{x}MD_{\sigma}^{-1}\bar{M}x + \begin{bmatrix} \bar{x}M + \bar{y}D_{\sigma} \end{bmatrix} D_{\sigma}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{M}x + D_{\sigma}y \end{bmatrix} \quad (c-3)$$

$$Q = \bar{x} \left[K_{\infty} - MD_{\sigma}^{-1}\bar{M} \right] x + \begin{bmatrix} \bar{x}M + \bar{y}D_{\sigma} \end{bmatrix} D_{\sigma}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{M}x + D_{\sigma}y \end{bmatrix} \quad (c-4)$$

mas de (3-37)

$$K_{\infty} - MD_{\sigma}^{-1}\bar{M} = Y_n(0)$$

e verifica-se que $\bar{M}x + D_{\sigma}y$ é um vetor coluna que será chamado w e que é qualquer já que x e y o são.

$$w = \bar{M}x + D_{\sigma}y \quad (c-5)$$

$$\bar{w} = \bar{x}M + \bar{y}D_{\sigma} \quad (c-6)$$

usando (c-5) e (c-6) em (c-4) tem-se:

$$Q = \bar{x} Y_n(0)x + \bar{w} D_\sigma^{-1} w \quad (c-7)$$

Mas $Y_n(0)$ é semidefinida positiva por hipótese e D_σ^{-1} é semidefinida positiva por ser uma matriz diagonal de elementos positivos e como uma transformação de congruência não altera o caráter semidefinido positivo de uma matriz, conclui-se que

$$\bar{x} Y_n(0)x \geq 0 \quad (c-8)$$

e

$$\bar{w} D_\sigma^{-1} w \geq 0 \quad (c-9)$$

donde $Q \geq 0 \quad (c-10)$

De (c-10) sabe-se que G_k é semidefinida positiva e cumpre as condições necessárias para ser realizada como matriz condutância de um circuito resistivo.

A P Ê N D I C E D

Obtenção de uma classe de matrizes ortogonais que numa operação de congruência sôbre uma matriz diagonal, sejam matrizes com elementos da diagonal positivos e elementos fora da diagonal negativos ou nulos.

Êste Apêndice baseia-se num trabalho publicado por A.J. Schneider.¹⁶ Mostrar-se-ão apenas as conclusões que nos interessam. Dada uma matriz diagonal de dimensão $m \times m$, de elementos positivos

$$D_{\sigma} = \text{diag. } (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m) \quad (d-1)$$

onde

$$0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3 \leq \dots \leq \sigma_m \quad (d-2)$$

Constrói-se a matriz

$$G_m = \bar{X}_s D_{\sigma} X_s \quad (d-3)$$

onde

$$X_s = X_1 X_2 \dots X_k \dots X_{m-1} \quad (d-4)$$

$$X_k = \text{diag. } (U, P_k, U) \quad (d-5)$$

$$P_k = \begin{bmatrix} \cos \theta_k & \text{sen } \theta_k \\ -\text{sen } \theta_k & \cos \theta_k \end{bmatrix} \quad (d-6)$$

$$0 \leq \theta_k \leq \pi/2 \quad (d-7)$$

U é a matriz identidade e os elementos de P_k aparecem nas linhas e colunas K e $(K+1)$ de X_k .

O trabalho citado, mostra que D_G , sujeita à congruência (d-3) com a matriz ortogonal X_s , gera matrizes G_m com a distribuição de sinais proposta, para qualquer θ_k restrito por (d-7). Pode-se mostrar que a matriz proposta por Schneider é sempre solução para as condições (a), (b) e (c) citadas em (IV-5), quando $m = 2$. Como as condições (a) e (c) são satisfeitas por construção, basta mostrar que (b) é satisfeita. Observe-se, inicialmente, que X em (b) pode ser suposta com determinante unitário sem perda de generalidade. Seja

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \quad (d-8)$$

uma matriz ortogonal, que satisfaz (b). Então é possível encontrar θ , restrito por (d-7), tal que: $X = X_s$.

De (d-8)

$$x_1^2 + x_3^2 = 1 \quad (d-9)$$

$$x_2^2 + x_4^2 = 1 \quad (d-10)$$

$$x_1 x_2 + x_3 x_4 = 0 \quad (d-11)$$

$$x_1 x_4 - x_2 x_3 = 1 \quad (d-12)$$

De (d-9) e (d-10) verifica-se que

$$|x_1|, |x_2|, |x_3|, |x_4| \leq 1 \quad (d-13)$$

De (d-11) e (d-12), obtêm-se:

$$x_2 = -x_3 \quad (d-14)$$

e

$$x_1 = x_4 \quad (d-15)$$

Usando (d-13) a (d-15), (d-8) fica

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{bmatrix} \quad (d-16)$$

e (d-9) fica

$$x_1^2 + x_2^2 = 1 \quad (d-17)$$

se $x_1 \geq 0$, a identificação

$$x_1 = \cos \theta \quad (d-18)$$

e

$$x_2 = \text{sen } \theta \quad (d-19)$$

é sempre possível.

Se $x_1 < 0$, multiplica-se M e X por (-1) e x_1 torna-se > 0 permitindo as identificações (d-18) e (d-19). Então

$$X = X_s = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (d-20)$$

que é a matriz proposta por Schneider.

NOTAS BIBLIOGRÁFICAS

1. The Realization of n-Port Networks Without Transformers - A Panel Discussion - IRE Trans. on Circuit Theory, CT-9 , n° 3, 1962.
2. Biorci, G. e Civalleri, P.P. - Conditions for the Realizability of a Conductance Matrix, IRE Trans. on Circuit Theory, CT-8, n° 3, setembro, 1961.
3. Cederbaum, I. - Application of Matrix Algebra to Network Theory, IRE Trans. on Circuit Theory, IRE trans. on Circuit Theory, CT-6, Special Supplement, 1959.
4. Guillemin, E.A. - Theory of Linear Physical Systems, Wiley 1963.
5. Hagopian, J.D. e Frish, I.T. - Capacitance and Resistance Minimization in One-Port RC Networks, IEEE Trans. on Circuit Theory, vol. CT-17, n° 3, agosto, 1970.
6. Boesch, F.T. - Minimum Total Capacitance RC Realizations, IEEE Trans. on Circuit Theory CT-18, n° 2, março, 1971
7. Hagopian, J.D. e Frish, I.T. - Capacitance and Resistance Minimization in n-Port RC Networks. Ainda não publicado.
8. Kinariwala, B.K. - Synthesis of Active RC Networks, the Bell System Technical Journal, setembro, 1959.
9. Biorci, G. e Civalleri, P.P. - On the Synthesis of Resistive n-Port Networks, IRE Trans. on Circuit Theory, CT-8, n° 1, março, 1961.

10. Shu-Park Chan - Introductory Topological Analysis of Electrical Networks, Capítulo 6, pg. 214, HRW, 1969.
11. Ayres, F.Jr. - Theory and Problems of Matrices, Schaum's Outline Series, Capítulo 17, pg. 134, McGraw-Hill, 1962
12. Newcomb, R.W. Linear Multiport Synthesis, Capítulo 6, pg. 176, McGraw-Hill, 1966
13. Seshu, S. e Reed, M.B. - Linear Graphs and Electrical Networks, Capítulo 6, pg. 142, Addison-Wesley, 1961.
14. Fialkow, A. e Gerst, I. - The transfer Function of General Two Terminal Pair RC Networks, Quart. Appl. Math. 10, Pgs. 113-127, 1952.
15. Boesch, F.T. - Synthesis of $(n+1)$ -Node Resistor n -Port, - IEEE Trans. on Circuit Theory, CT-12, nº 4, dezembro, 1965.
16. Schneider, A.J. - Construction of Matrices Having Certain Sign Patterns and Prescribed Eigenvalues by Orthogonal Transformations, IEEE Trans. on Circuit Theory, CT-12, nº 3, setembro, 1965.
17. Basson, D. e Halkias, C.C. - The Realization of RC n -Ports, IEEE Trans, on Circuit Theory, CT-12, nº 2, junho, 1965.
18. Stein, R.A. e Moore, A.D. - On the Synthesis of RC Multiport Networks by linear Transformations, IEEE Trans. on Circuit Theory, CT-18, nº 2, março, 1971.
19. Biorci, G. - Network and Switching Theory, Academic Press 1968.

20. Kalman, R.E. e DeClaris, N. - Aspects of Network and System Theory, HRW, 1971

S I M B O L O G I A

- A_V - Ganho de tensão. {def. -(2-11)}
- A_{11}, A_{12}, A_{22} - Partes de G_k . {def. -(3-1)}
- a_0, a_1 - Coeficientes de $z(s)$. {def. -(2-9)}
- B_{11}, B_{12}, B_{22} - Partes de G . {def. -(4-52)}
- $\hat{B}_{11}, \hat{B}_{12}, \hat{B}_{22}$ - Partes de \hat{G} . {def. -(4-61)}
- b_0, b_1 - Coeficientes de $z(s)$. {def. (2-9)}
- C - Matriz diagonal. {def. (4-53)}
- C_1 - Matriz diagonal. {def. (4-66)}
- C_T^N - Capacitância total da realização N.
- $(C_{Tmin})_{LI}$ - Limite inferior para a capacitância total mínima .
{def. (2-13)}
- C_j^N - Capacitor j da realização N.
- C_{Tmin} - Capacitância total mínima da realização N.
- C_ϕ - Capacitor colocado no acesso ϕ de G ($\phi = 1, \dots, m$).
- D_{r_V} - Matriz diagonal ($r_V \times r_V$). {def. -(3-20)}
- D_r - Matriz diagonal ($m \times m$). {def. -(3-24)}
- D_σ - Matriz diagonal dos σ . {def. (3-29), (3-30)}
- D_C - Matriz diagonal. {def. -(4-54)}
- $D_{\hat{C}}$ - Matriz diagonal. {def. -(4-58)}
- E_N - Energia capacitiva armazenada no regime permanente na rê-
de N.
- F2 - Rêde que realiza $z(s)$ segundo a 2^a forma de Foster.
- G - Matriz condutância de $(m+n)$ -acessos hiperdominantes irredu-
tível. {def. -(4-5)}
- G' - Matriz condutância obtida de G_k através de h_ϕ . {def.
-(4-15)}

- \hat{G} - Matriz condutância de $\hat{Y}_{n+m}(s)$. {def. (4-60)}
 G_1 - Matriz condutância de $Y_1(s)$. {def. (4-65)}
 G_k - Matriz condutância de $(n+m)$ -acessos. {def. (3-1)}
 G - Grafo da parte resistiva de \hat{N} .
 G_1, G_2 - Partes de G .
 H - Matriz diagonal. {def. (4-33)}
 h_{ϕ} - Número real não nulo que multiplica a linha e a coluna ϕ de G_k ; {def. (4-17)} ou G_1 {def. (4-71)}
 H - Matriz $(1 \times m)$ dos elementos h_{ϕ} de H . {def. (4-77)}
 I_n, I_m - Vetor das correntes respectivamente no acesso n e m .
 i - Índice.
 i_j - Corrente no acesso j .
 j - Índice.
 K_v - Resíduo da admitância ou da matriz admitância no polo σ_v . {def. (a-1) e (3-9)}
 k - Acesso genérico de N .
 $K_{\infty} - \lim_{s \rightarrow \infty} Y_n(s)$
 $K_0 - \lim_{s \rightarrow 0} y(s)$
 $K_{v\phi}$ - Matriz $(n \times n)$ de rank 1. {def. (3-16)}
 $K_{ij}^{\infty}, K_{ij}^{\phi}$ - Elemento da linha i e coluna j respectivamente de K_{∞} e $K_{v\phi}$
 m - Número mínimo de capacitores da rede. {def. (3-23)}
 M_v - Matriz de rank r_v . {def. (3-10)}

- $M_{V\phi}$ - Matriz de rank 1. {def. (3-13) }
 M - Matriz ($n \times m$). {def. (3-22)}
 m_i^ϕ - Elemento de $M_{V\phi}$. {def. (4-11)}
 N - Rêde que realiza $z(s)$, $Z_n(s)$ ou $Y_n(s)$.
 N_R - Rêde resistiva de 1-acesso.
 \hat{N} - Rêde RC.
 N_R - Rêde resistiva de $(m + 1)$ -acessos.
 N_{R1}, N_{R2}, N_{R3} - Partes de N_R .
 n - Número de acessos da matriz $Y_n(s)$ ou $Z_n(s)$.
 P_k - Matriz (2×2). {def. (d-6) }
 p - Número de polos de $y(s)$ ou $Y_n(s)$.
 Q - Forma quadrática de G_k . {def. (c-1)}
 q - Índice.
 R - Rêde resistiva.
 r - Rank da matriz.
 r_V - Rank da matriz K_V ou M_V .
 s - Variável complexa, $s = \sigma + j\omega$.
 T - Matriz transformação utilizada nas congruências.
 $T_{rs,pq}$ - Soma dos produtos das admitâncias das árvores de módulo 2 que separam os nós rs dos nós pq .
 U - Matriz identidade .
 U_m - Matriz identidade ($m \times m$).
 V_o - Tensão constante.
 V_j - Tensão no capacitor j .

- V_n, V_m - Vetor tensão respectivamente nos n e m acessos.
- X - Matriz $(n \times m)$, parte da transformação geral, definida pelas restrições (a) (b) e (c).
- X_k - Componente da matriz transformação X . {def. (d-4) e (d-5)}
- x - Vetor coluna de elementos reais quaisquer. {def. (c-1) }
- $Y_n(s)$ - Matriz admitância RC $(n \times n)$.
- $Y_{n+m}(s)$ - Matriz admitância RC $\{(m+n) \times (n+m)\}$
- $y(s)$ - Admitância RC .
- $y_{ij}(s)$ - Elemento da linha i e da coluna j de $Y_n(s)$.
- $\hat{Y}_{n+m}(s)$ - Matriz equivalente a $Y_{n+m}(s)$ nos n -acessos, porém todos seus capacitores são unitários.
- y - Vetor coluna de elementos reais quaisquer. {def. (c-1)}
- w - Vetor coluna de elementos reais quaisquer. {def. (c-5)}
- $Z_n(s)$ - Matriz impedância RC $(n \times n)$.
- $z(s)$ - Impedância RC.
- $z_{ij}(s)$ - Elemento da linha i e coluna j da matriz $Z_n(s)$.
- σ_v - Polo da admitância ou da matriz admitância. { def. (a-1) e (3-9) }
- θ_k - Parâmetro da matriz X_k . { def. (b-6) }
- ϕ - Índice que percorre os capacitores de $y(s)$ ou $Y_n(s)$.
- v - Índice dos polos de $y(s)$ ou $Y_n(s)$.
- ϕ - Índice que percorre o rank r da matriz resíduo do polo v .
- Σ - Somatório .
- Π - Produtório .

$\bar{1}_q$ - Matriz (q x 1) de elementos unitários.
 $\bar{1}_p$ - Matriz (1 x p) de elementos unitários.