

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL - UFGRS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - IM
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA – PPGEnsiMat

Marcelo Becker

UMA ALTERNATIVA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA: VISUALIZAÇÃO
GEOMÉTRICA E REPRESENTAÇÕES DE SÓLIDOS NO PLANO

Porto Alegre
2009

Marcelo Becker

UMA ALTERNATIVA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA: VISUALIZAÇÃO
GEOMÉTRICA E REPRESENTAÇÕES DE SÓLIDOS NO PLANO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Porto Alegre
2009

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	11
1 O PROCESSO HISTÓRICO DO DESENVOLVIMENTO DO ENSINO DE GEOMETRIA.....	14
1.1 A reforma na Alemanha.....	14
1.2 A reforma na França.....	15
1.3 A reforma nos Estados Unidos.....	15
1.4 A reforma internacional.....	15
1.5 A educação matemática no Brasil.....	16
2 OS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS E OS LIVROS DIDÁTICOS.....	18
3 TEORIAS DE ENSINO APRENDIZAGEM.....	22
3.1 O Modelo van Hiele.....	22
3.2 A Visão de Gutiérrez sobre o tema.....	27
3.3 A criação da imagem mental, segundo Piaget.....	29
4 TÉCNICAS E MATERIAIS.....	35
4.1 Os participantes.....	35
4.2 A seleção das atividades.....	36
4.3 Coleta de dados e análise dos resultados.....	38
5 O PROJETO PILOTO.....	39
5.1.1 Teste em Alunos da Licenciatura em Matemática da UFRGS.....	39
5.1.2 Teste em Alunos do Colégio de Aplicação.....	45
5.1.3 Teste em Alunos do Ensino Médio.....	47
6 A SEQUÊNCIA FINAL.....	55
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	68
REFERÊNCIAS	70

LISTA DE FIGURAS

2.1	Abordagem de livro didático.....	19
2.2	Proposta de exercício.....	21
4.1	Sólido planejado sólido planejando.....	38
5.1.1	Aplicação da Caixa de Becker.....	39
5.1.2	Representação do sólido feita pelo aluno M1.....	40
5.1.3	Representação do sólido feita pelo aluno M2.....	40
5.1.4	Representação do sólido feita pelo aluno M3.....	40
5.1.5	Representação do sólido feita pelo aluno M4.....	41
5.1.6	Planificação feita pelo aluno M2.....	41
5.1.7	Planificação feita pelo aluno M5.....	42
5.1.8	Estratégia de planificação feita pelo aluno M6.....	42
5.1.9	Estratégia de planificação feita pelo aluno M7.....	43
5.1.10	Conjunto de planificações.....	44
5.2.1	Representações do aluno AM1.....	45
5.2.2	Representações feitas pelo aluno AM2.....	45
5.2.3	Representações feitas pelo aluno AM3.....	46
5.2.4	Representações feitas pelo aluno AM4.....	46
5.3.1	Poliedro L.....	47
5.3.2	Representação do poliedro L feita pelo aluno ST1.....	48
5.3.3	Representação do poliedro L feita pelo aluno ST2.....	48
5.3.4	Exercício proposto.....	49
5.3.5	Representação do poliedro feita pelo aluno ST3.....	50
5.3.6	Representação do poliedro feita pelo aluno ST4.....	50
5.3.7	Exercício proposto.....	50
5.3.8	Representação do poliedro feita pelo aluno ST5.....	51
5.3.9	Representação do poliedro feita pelo aluno ST6.....	51
5.3.10	Representação do poliedro feita pelo aluno ST3.....	51

5.3.11	Exercício proposto.....	52
5.3.12	Exercício proposto.....	52
5.3.13	Representação do poliedro feita pelo aluno ST3.....	51
5.3.14	Exercício proposto.....	51
6.1.	Composição de cubos.....	52
6.2	Representação feita pelo aluno F1.....	56
6.3	Representação feita pelo aluno F2.....	56
6.4	Representação feita pelo aluno F3.....	57
6.5	Realização da atividade 2.....	57
6.6	Realização da atividade 2 pelo grupo G1.	58
6.7	Realização da atividade 2 pelo grupo G2.	59
6.8	Realização da atividade 2 pelo grupo G3.	59
6.9	Realização da atividade 2 pelo grupo G4.	60
6.10	Realização da atividade 2 pelo grupo G5.	60
6.11	Realização da atividade 2 pelo grupo G6.	60
6.12	Realização da atividade 3 pelo grupo G1.....	61
6.13	Realização da atividade 3 pelo grupo G3.....	62
6.14	Realização da atividade 3 pelo grupo G2.....	62
6.15	Realização da atividade 3 pelo grupo G4.....	62
6.16	Realização da atividade 3 pelo grupo G5.....	63
6.17	Representações de sólidos feitas pelo aluno F2.	63
6.18	Representações de sólidos feitas pelo aluno F1.	64
6.19	Sólido escada.....	64
6.20	Construção do Sólido escada feita pelo aluno F1.....	65
6.21	Representações do Sólido escada feita pelo aluno F1 antes da construção.....	66
6.22	Representações do Sólido escada feita pelo aluno F1 após a construção.....	66
6.23	Representações do Sólido escada feita pelo aluno F2 antes da construção.....	66
6.24	Representações do Sólido escada feita pelo aluno F2 após a construção.	67

RESUMO

Essa dissertação aborda a visualização geométrica e a representação de objetos tridimensionais em diagramas bidimensionais. O objetivo da pesquisa é a criação de uma seqüência didática que atenda esses propósitos. Para desenvolver essa seqüência, foram realizadas diversas atividades piloto com sujeitos do ensino fundamental, médio e superior. A análise da produção dos alunos determinou a seleção e adaptação de atividades para compor a seqüência didática, testada em alunos do terceiro ano do ensino médio, apresentada com a respectiva análise dos resultados. Uma atividade teve destaque nesse trabalho, e por ser de criação própria, foi denominada Caixa de Becker, que consiste na interação com sólidos através do tato. Para análise dos dados, foram utilizadas as teorias de van Hiele, Gutiérrez e Piaget. Fez-se uma breve retomada na história do ensino de matemática, especificamente na área de geometria, para entender a forma em que esse conteúdo é abordado nos livros didáticos.

Palavras-chave: visualização geométrica, representação em diagramas, seqüência didática, Caixa de Becker.

ABSTRACT

This dissertation focuses on visualization and geometric representation of three dimensional objects in two-dimensional diagrams. The aim of this research is to establish a teaching sequence to create such diagrams. To achieve this objective several pilot activities were executed with primary, secondary and tertiary education students. The selection and adjustment of activities to compose the teaching sequence were determined by the analysis of the results from a test applied to students in the last year of the high school. The "Becker Box" which was a highlighted activity during the research and is my own invention, provides a way to interact with solid geometric forms by touch. The theories from Van Hiele, Gutiérrez and Piaget were used to make the data analysis. A summary of the mathematics education history were made to understand how this subject is presented and discussed in teaching books

Keywords: geometric visualization, representation by diagrams, didactic sequence, Becker's Box.

RESUMEN

Esa disertación aborda la visualización geométrica y la representación de los objetos tridimensionales en diagramas bidimensionales. El objetivo de la pesquisa es la creación de una secuencia didáctica que atienda esos propósitos. Para desenvolver esa secuencia, fueron realizadas diversas actividades piloto con sujetos de la enseñanza básica, media y superior. El análisis de la producción de los alumnos determinó la selección y la adaptación de las actividades para componer la secuencia didáctica, testada en alumnos del tercer año de la enseñanza media, con el respectivo análisis de los resultados. Una actividad tuvo destaque en ese trabajo, y por ser de creación propia, fue llamada Caja de Becker, que consiste en la interacción con sólidos por medio del tacto. Para análisis de los datos, fueron utilizadas las teorías de van Hiele, Gutiérrez y Piaget. Se hizo una breve retomada en la historia de la enseñanza de la matemática, específicamente en el área de geometría, para entender la forma en que ese contenido es abordado en los libros didácticos.

Palabras clave: Visualización geométrica, representación en diagramas, secuencia didáctica, Caja de Becker.

INTRODUÇÃO

Nós professores de Matemática, sabemos que um dos problemas relacionados com a educação no Brasil refere-se ao baixo rendimento dos alunos, principalmente no ensino de Geometria, conseqüência das dificuldades encontradas pelos professores em trabalhar esse assunto. Essas dificuldades se devem às sucessivas mudanças no ensino de geometria, que serão apontadas ao longo do texto.

Geralmente, o primeiro conteúdo a ser abordado no 3º ano do ensino médio é o de Geometria Espacial. Pressupõe-se que um aluno que chega a esta série possua uma bagagem relativamente grande de conceitos de Geometria, pois essa área da Matemática, segundo os PCN's, tem participação em muitas séries anteriores do processo escolar, principalmente no ensino fundamental. Infelizmente essa suposição não é verdadeira. Os professores que lecionam Matemática no 3º ano do ensino médio, freqüentemente se deparam com uma realidade desagradável. Os alunos chegam nessa etapa, muitas vezes sem entenderem conceitos importantes tais como paralelismo e perpendicularidade.

Tive a oportunidade de trabalhar com professores em um curso de especialização em Geometria. Esses professores, atuantes nas redes de ensino públicas e privadas em nível fundamental e médio, tiveram, na sua totalidade, formação em licenciatura em Matemática. Eles relataram durante as aulas, que tinham dificuldades em trabalhar com a Geometria, por terem uma formação deficiente e por apresentarem dificuldades em lidar com esse conteúdo.

Segundo Pavanello (1989), o problema com o ensino da geometria surge e se avoluma à medida que as escolas de nível médio passam a atender um número crescente de alunos das classes menos favorecidas. A geometria não apresenta um espaço significativo no currículo escolar. Os professores de matemática incluíam geometria entre os temas a serem abordados em suas aulas. Muitos chegavam a afirmar não se sentirem animados a fazê-lo porque não dominavam o conteúdo, alguns confessavam não haverem estudado ou o fizeram de modo insatisfatório, portanto não sabiam como desenvolvê-lo com seus alunos. Dentre os que incluíam a geometria entre os tópicos a serem desenvolvidos em sala de aula, muitos afirmavam que, por falta de tempo, não conseguiam chegar a abordá-la nem

parcialmente. O fato de reservarem, em geral, o último semestre para a abordagem desse conteúdo, levou Pavanello a crer que, conscientemente ou não, a falta de tempo estava sendo usada como desculpa para a não realização do trabalho com geometria.

Foi observado que em alguns livros didáticos de ensino médio, a Geometria Espacial é abordada com ênfase em cálculo de áreas e volumes. Sem um trabalho prévio que aprofunda o desenvolvimento da noção de formas e de espaço, os alunos acabam por não associar a álgebra relacionada com os objetos em questão, ou seja, pedem fórmulas e não mostram interesse em entender a dedução das mesmas.

A motivação desse estudo iniciou quando foram detectadas dificuldades com relação à visualização geométrica na turma de pós-graduação citada anteriormente. O curso foi esquematizado de acordo com o modelo van Hiele, em que o processo do aprendizado de Geometria é dividido em níveis. Essa teoria será descrita no terceiro capítulo. A disciplina que lecionei tratava especificamente do primeiro nível de van Hiele. Nesse nível, se dá o primeiro contato do indivíduo com os objetos, é o nível onde se desenvolve a visualização. Foram propostas algumas atividades e, em uma delas um sólido foi colocado dentro de uma caixa fechada com dois furos pequenos, os alunos deveriam desenhar o sólido sem vê-lo, apenas tateando a forma dentro da caixa. Em geral, a turma teve sucesso com os sólidos conhecidos tais como prismas e pirâmides, mas quando se tratava de sólidos “estranhos”, apareceram dificuldades quanto à forma, à representação em perspectiva e quanto proporções dos elementos dos sólidos.

Junto as dificuldades apresentadas pelos alunos desse pós-graduação, foram observadas dificuldades em turmas de ensino médio, terceiro ano, onde se trabalha a Geometria Espacial. A atuação em sala de aula permitiu observar que os alunos têm dificuldades em associar fórmulas de áreas de superfícies quando se tratam de sólidos, dificuldades em representar os sólidos, e compreender que são formados por entes menores: arestas, faces e vértices.

Pretendeu-se com este estudo desenvolver uma seqüência didática que atendesse dois principais objetivos: a) desenvolver a visualização geométrica; b) desenvolver a habilidade de representação de sólidos em diagramas bidimensionais.

No primeiro capítulo, faz-se uma breve retomada no processo histórico do ensino de Matemática no Brasil e no mundo, com ênfase na Geometria. O objetivo é entender o

porquê da forma como a Geometria é proposta nos livros didáticos atuais, analisados no segundo capítulo juntamente com os parâmetros curriculares nacionais.

No terceiro capítulo buscou-se um conhecimento mais aprofundado na teoria de van Hiele, dado que a escolha do tema surgiu de um fato referido a ela. Buscou-se apoio nos estudos de Gutiérrez, cujo grande parte da produção trata da visualização geométrica e da representação de sólidos em diagramas. A teoria de Piaget, que trata da construção do espaço, foi utilizada para dar suporte ao entendimento dos processos de aprendizagem envolvidos.

O quarto capítulo descreve a metodologia da pesquisa, os participantes, os materiais utilizados e a justificativa da escolha dos materiais e das atividades.

Finaliza-se o trabalho com a descrição das atividades propostas, primeiramente na forma de um projeto piloto, onde se fez a seleção das atividades a partir da análise da produção dos alunos, o que gerou uma seqüência didática aplicada em uma turma de ensino médio, também analisada no presente estudo.

1 O PROCESSO HISTÓRICO DO DESENVOLVIMENTO DO ENSINO DE GEOMETRIA

Inicialmente, buscou-se na história do ensino de matemática, uma justificativa para a forma em que a geometria é abordada nos livros didáticos, com o objetivo de explicar a preferência desta ser trabalhada com o uso excessivo de fórmulas. O capítulo que segue, mostra a transição do ensino da matemática formal para matemática aplicada, da forma em que é apresentada nos livros didáticos atuais.

Segundo Miorim (1998), o primeiro movimento de modernização internacional do ensino de geometria ocorreu no início do século XX. Antes disso, a matemática costumava servir como um paradigma para o pensamento lógico, os métodos de ensino enfatizavam os aspectos formais, a Matemática escolar tinha um caráter estático e desligado das aplicações práticas. A reforma foi influenciada pelas idéias de Félix Klein (1849 – 1925) e tinha como objetivo adaptar o ensino às novas exigências do desenvolvimento científico-tecnológico da época. Até então, apresentava-se aos alunos a geometria euclidiana tradicional, baseada em postulados e demonstrações. Segundo Vianna (1988, apud Carlovich, 2005) os livros didáticos da época mostravam uma seqüência numerada de teoremas demonstrados, dentro de uma cadeia lógica. Os exercícios propostos eram reproduções das demonstrações dos teoremas.

1.1 A reforma na Alemanha:

Felix Klein, desde 1880 procurava adaptar o ensino da Matemática nas universidades em proveito da geometria e suas aplicações, mas percebeu que não era suficiente realizar modificações apenas no setor universitário, pois a base para a educação superior estava no sistema escolar. Na década de 1890, procurou reformular a formação de professores colocando em evidência as aplicações práticas da matemática. Segundo Schubring (1996), Klein entendeu que o maior problema do ensino da matemática estava nas escolas técnicas, onde os professores ensinavam com alto grau de rigor. Os alunos não

conseguiam se adaptar ao método de ensino.

Felix organizou com os professores um suporte as idéias inovadoras, para a reformulação dos programas e métodos de ensino da matemática, introduzindo o ensino do cálculo no ensino escolar.

1.2 A reforma na França:

O ensino na França era pago, portanto exclusivo da elite. O objetivo era desenvolver o espírito e não ensinar como resolver problemas práticos. Uma nova classe média emergente de industriais, comerciantes e de quadros técnicos deu início a uma crise no sistema de ensino vigente. A nova classe visava um novo ensino secundário sem latim e com mais ciências. A reforma dividiu o ensino em dois ciclos, divididos em seções com latim e sem latim, permitindo reunir o clássico e o moderno. Segundo Belhoste (1996, apud Carlovich, 2005), a geometria passa a ser excessivamente experimental, e perde muito do seu rigorismo.

1.3 A reforma nos Estados Unidos:

Kilpatrik (1996, apud Carlovich, 2005) afirma que devido às dimensões do país e o número de alunos que estavam ingressando na escola secundária e ainda num país com a educação descentralizada e conservadora, era extremamente difícil conduzir uma reforma com efeito duradouro. As tentativas feitas tiveram vida curta e foram focalizadas em algumas instituições. Outro agravante foi o grande número de ingressos nas escolas o que gerou deficiência no número de professores capacitados para aplicar uma reformulação no ensino de matemática.

1.4 A reforma internacional:

Em 1908 cria-se o CIEM (Comissão Internacional de Ensino de Matemática). Essa comissão tinha a incumbência de entregar em 1912 um relatório contendo a descrição do ensino de matemática em diversas escolas secundárias, comparando os programas de ensino

em diversos países. Klein, Fehr e Greenhill propuseram que esses relatórios se estendessem aos outros níveis de ensino. Além disso, passaram a atuar, não só como coletores de informação, mas como agentes disseminadores da idéia de que a reforma de instrução Matemática era necessária e urgente. Os objetivos dessa reforma eram introduzir o conceito de função como variáveis dependentes e independentes desde o começo do curso e durante todo o seu desenvolvimento, e reorientar os métodos intuitivos e aplicações da matemática. Desejava-se que a geometria analítica se tornasse um dos principais objetos de ensino do curso.

1.5 A Educação Matemática no Brasil:

O Brasil não entregou relatórios ao CIEM (Commission Internationale l'Enseignement Mathématique) em 1912, mas contou com a participação de Raja Gabaglia que trouxe para o Brasil os antigos livros do F.I.C. (Frères de l'Instruction Chrétienne) para aritmética, álgebra e geometria. Em 1923 o livro de álgebra da F.I.C. É substituído por Lições de Aritmética de Euclides Roxo, que começa a se tornar peça fundamental na organização da reforma no Brasil. Em 1927, Roxo propõe à congregação do colégio Pedro Segundo a unificação das áreas da matemática, a aritmética, a álgebra e a geometria, fazendo referência ao movimento internacional orientado por Klein. Em 1929 fica estabelecido o novo programa de ensino de matemática que prevê a criação de uma nova disciplina única que envolve aritmética, álgebra e geometria. Antes essas disciplinas eram ministradas separadamente.

Em 1931, chega a reforma Francisco Campos, o que derruba em parte a idéia de Roxo que defendia que a inclusão do novo sistema deveria dar-se de forma paulatina. Na primeira série do secundário, no que diz respeito à geometria, tinha-se: principais noções sobre formas geométricas, áreas do quadrado, retângulo, paralelogramo, triângulo e trapézio, circunferência e área do círculo, Volumes do paralelepípedo retângulo, do cubo, do prisma retangular, do cilindro reto e do cone reto. O primeiro contato com as figuras geométricas já estava relacionado com cálculos de áreas e volumes, o que deu origem ao formato dos livros didáticos atuais os quais mostram a geometria como um campo de

aplicação de álgebra, com excesso de fórmulas e poucas relações entre propriedades geométricas.

Em 1960, retorna ao Brasil o professor Osvaldo Sangiorgi, trazendo as idéias propostas pelo Movimento da Matemática Moderna (MMM), movimento internacional que discutia novas mudanças no ensino de Matemática.

Em 1961 cria-se no Brasil o grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM) em São Paulo, sob a liderança de Sangiorgi. Participaram do Grupo professores universitários, professores dos ensinos secundário e primário, autores de livros didáticos, com o objetivo de incentivar, coordenar, divulgar e atualizar a matemática, bem como seu ensino, nos cursos primário, secundário e normal. Como consequência do movimento, o ensino de geometria foi interpretado distintamente nos livros didáticos, dependendo da coragem do autor em romper com os padrões tradicionais aceitos. Pires (1995) afirma que a implantação do movimento da Matemática Moderna no Brasil coloca a predominância dos termos algébricos sobre os geométricos, a geometria passa a ser um tema ilustrativo dos conjuntos ou da álgebra.

Para Miorim (1998), os objetivos do movimento não foram alcançados na sua totalidade. O movimento foi muito criticado, principalmente pela tradição do estilo euclidiano, mas as propostas do movimento influenciaram futuras discussões sobre a educação matemática. Segundo Pavanello (1995) a geometria deveria acentuar as noções de figura geométrica e de intersecções de figuras como conjuntos de pontos no plano, representando pela linguagem da teoria dos conjuntos, abordando a geometria com base nas transformações. Como consequência da mudança de abordagem para a geometria encontrada nos livros didáticos da época, os professores ficariam perdidos por possuírem formação deficiente e por isso, o ensino de geometria passou a ser abandonado nas escolas brasileiras até a década de 1980. Surgiram críticas contra o dedutivo no ensino, acusado de ser rigoroso e abstrato, tendo como consequência que os livros didáticos mantiveram algumas demonstrações dos teoremas escolhidos como mais importantes, mas deixaram de ser cobrados, passando a ter exercícios de caráter prático.

2 OS PARÂMETROS NACIONAIS CURRICULARES E OS LIVROS DIDÁTICOS

Os Parâmetros Curriculares Nacionais, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, seguem a evolução do ensino no Brasil. Na sua edição de 1997, serão observados apenas os tópicos que tratam do ensino de Geometria.

Nas séries iniciais do ensino fundamental, mostra-se uma maior preocupação em estabelecer o primeiro contato com as formas geométricas, bem como desenvolver a noção de posição relativa de um objeto no espaço.

Com relação à Geometria, os tópicos abordados são:

- Reconhecimento de semelhanças e diferenças entre corpos redondos, poliedros, e identificação de elementos como faces, vértices e arestas;
- Composição e decomposição de figuras tridimensionais, identificação de simetria, exploração de planificações;
- Identificação de figuras planas nas superfícies planas de figuras tridimensionais;
- Composição e decomposição de figuras planas e identificação de que qualquer polígono pode ser composto a partir de figuras triangulares;
- Exploração de características de algumas figuras planas, tais como: rigidez triangular, paralelismo e perpendicularismo de lados.

Nas séries finais do ensino fundamental, o objetivo é desenvolver o pensamento geométrico que permite ao aluno compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. São necessárias as questões relacionadas com formas e relações entre elas, com as possibilidades de ocupação do espaço e com a localização e o deslocamento de objetos no espaço.

Alguns dos tópicos abordados são:

- Representação e interpretação do deslocamento de um ponto num plano cartesiano e por um segmento de reta orientado.
- Secções de figuras tridimensionais por um plano e análise das figuras obtidas.
- Análise em poliedros da posição relativa de suas arestas e de suas faces.
- Representação de diversas vistas (lateral, superior, frontal) de figuras tridimensionais e reconhecimento da figura representada por diversas vistas.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais têm como objetivo orientar os educadores nas escolhas dos conteúdos a serem trabalhados, bem como orientar os produtores de livros didáticos na escolha dos conteúdos e na forma com que serão abordados. Espera-se então que os livros didáticos atendam as exigências dos Parâmetros Curriculares Nacionais.

Os objetivos do estudo dos espaços e das formas são: o domínio das materializações, o domínio das figuras geométricas e o domínio das representações gráficas. Com isso, deseja-se que se desenvolvam três habilidades: a percepção espacial, a elaboração de um sistema de propriedades geométricas e de uma linguagem que permita agir nesse modelo, e a decodificação de desenhos (PCN 5º a 8º, p. 126).

Para atingir esses objetivos, é necessário que os alunos interajam com os objetos, e segundo Piaget (2003), o desenho é uma representação, isto é, supõe-se a construção de uma imagem distinta da percepção. Nos livros didáticos, existe uma grande separação entre as formas e suas representações. Pouco se trabalha a criação da imagem a partir do contato com o sólido.


A figura 2.1 mostra um exemplo da forma como os conteúdos são abordados. O autor poderia propor uma atividade em que os alunos interagissem com o objeto, sugerindo, por exemplo que os alunos observassem uma caixa de creme dental, permitindo a criação e validação de suas hipóteses.



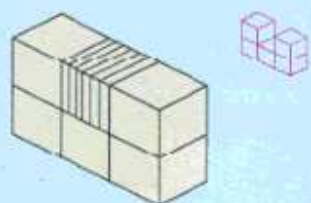
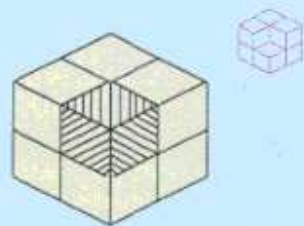
Figura 2.1 – Abordagem de livro didático
Fonte; Bigode 2004, p.73

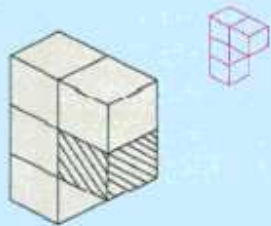
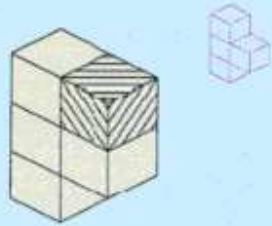
Segundo Gutiérrez (1991), é fundamental que o aluno adquira e desenvolva habilidades que o permitam entender e interpretar diferentes tipos de representações bidimensionais de objetos tridimensionais, ou seja, habilidades que permitam ao aluno criar, mover, transformar e analisar imagens mentais de objetos tridimensionais geradas por uma informação dada através de um desenho plano. Os tipos de atividades propostas nos livros não permitem o desenvolvimento dessas habilidades por não oportunizarem aos alunos a experiência e a possibilidade da criação de suas próprias hipóteses. A figura 2.2, mostra um exercício proposto por um livro didático em que se exige um certo nível de abstração, essa mesma atividade poderia ser proposta com o uso de material concreto.

2. Retirando um cubo da figura abaixo, obtém-se uma nova figura.



Com base no exemplo dado, desenhe numa rede pontilhada triangular a figura obtida quando retiramos o cubo hachurado.

a)  c) 

b)  d) 

3. Em relação à atividade anterior, responda: Quantos cubos são necessários para construir as figuras que você desenhou? a) 5 b) 4 c) 7 d) 4

4. Veja os L do desenho. Eles estão representados a partir de pontos de vista diferentes.

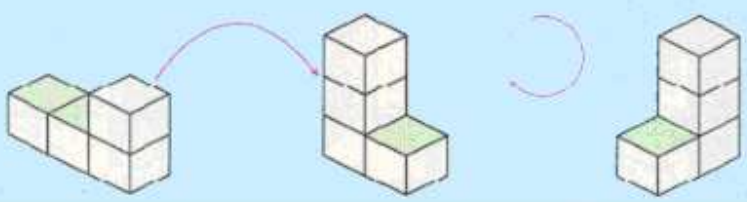


Figura 2.2 – Proposta de exercício
Fonte: Bigode 2004, p.30

Para Piaget (1993), não se pode interpretar o papel da imagem como simples cópia da realidade, como um dado perceptivo, pois a imagem representativa implica na assimilação do objeto. Ao agir sobre um objeto, o sujeito está ativamente reproduzindo e prolongando suas transformações, decompondo e recompondo o objeto.

3 TEORIAS DE ENSINO – APRENDIZAGEM

O presente estudo se apóia em três teóricos: van Hiele, Gutiérrez e Piaget. Inicialmente, devido às circunstâncias que motivaram a escolha do tema, buscou-se um maior aprofundamento na teoria de van Hiele. Dado que essa teoria trata de um modelo para o ensino de Geometria, com o objetivo de desenvolver o raciocínio lógico dedutivo, e que não se preocupa com os aspectos psicológicos envolvidos na aprendizagem, foi insuficiente para esse estudo. Buscou-se, então, apoio em Gutiérrez, que trata com maior profundidade a questão da representação de sólidos, e em Piaget, que descreve os processos psicológicos envolvidos nas questões de visualização e de aprendizagem.

3.1 O Modelo van Hiele

O Modelo van Hiele foi o resultado de um trabalho realizado pelos educadores Pierre Marie van Hiele e Dina Hiele-Geldof no final da década de 50 na Holanda. Esse modelo se caracteriza por descrever as diferenças no pensamento geométrico dos alunos e explica como um professor pode ajudar seus alunos a elevarem seu nível de raciocínio. O trabalho se baseia na idéia de que o pensamento geométrico se desenvolve em cinco níveis de forma seqüencial hierárquica desde a primeira relação com figuras geométricas até a compreensão dos diversos sistemas de geometria. Pierre e Dina também descreveram o comportamento dos alunos em cada nível, tornando possível identificar a situação de cada aluno.

As Estruturas:

De acordo com van Hiele (1986) uma estrutura capacita o homem a agir em situações não exatamente iguais a situações vividas anteriormente. Estruturas conservam o homem numa vida de tentativas e erros. Estruturas fazem as pessoas se entenderem.

Segundo van Hiele, estruturas podem ser fortes ou fracas. Ele considerou a matemática uma estrutura forte, pois não se contradiz e dá sustentação para ser desenvolvida.

A teoria de van Hiele se baseava em três elementos: a base estruturalista, a influência da psicologia da Gestalt e a preocupação com a didática da Matemática.

Van Hiele não definiu estruturas, mas, com base na psicologia da Gestalt, descreveu suas espécies e propriedades. As estruturas de “mundo 1” são as estruturas do mundo em que vivemos, as estruturas do “mundo 2” são as estruturas de nossa mente e as estruturas de “mundo 3” são as estruturas do conhecimento humano comum. Ele acreditava que as estruturas tinham quatro importantes propriedades:

1 – É possível estender uma estrutura, quem domina uma parte de uma estrutura conhece toda extensão dela. Toda a extensão de uma estrutura está sujeita as mesmas regras de uma parte dela.

2 – Uma estrutura pode ser vista como uma parte de uma outra estrutura mais fina, mas a estrutura original não é afetada por isso. As propriedades de uma estrutura não podem ser alteradas, mas as estruturas podem incorporar mais propriedades.

3 – Uma estrutura pode ser vista como parte de uma estrutura maior. Essa estrutura maior deverá ter mais regras e pode ser definida como estrutura original.

4 – Uma dada estrutura pode ser isomórfica à outra estrutura, nesse caso, as duas estruturas devem ser definidas por regras correspondentes, então conhecendo uma das estruturas, deve-se conhecer como a outra estrutura foi construída.

Van Hiele acreditava que as propriedades 1 e 4 de uma estrutura eram conhecimentos inatos, mas se auto-revelavam, enquanto as propriedades 2 e 3 precisavam ser estudadas. Ele concluiu que se a educação produziria o desenvolvimento de um insight, então os alunos poderiam ser estimulados a desenvolver sua reconhecimento e usar a segunda e a terceira propriedade de uma estrutura.

Para van Hiele, o modelo de aprendizagem passa por três etapas: Percepção da estrutura, insight e entendimento. A intenção precisa produzir uma ação adequada numa nova situação para conseguir o insight que deve ser entendido como resultado da percepção de uma estrutura. A aprendizagem é um processo recursivo que progride através de níveis de pensamento descontínuos, ou seja, existem saltos na curva de aprendizagem. A aprendizagem pode ser melhorada por um procedimento didático adequado.

Van Hiele dividiu o processo de desenvolvimento do conhecimento geométrico em cinco níveis numerados de 0 a 4, posteriormente nomeados por Hoffer (1979) e renumerados de 1 a 5, com a concordância de van Hiele

Nível 1: Visualização e Reconhecimento: nesse nível, os alunos têm seu primeiro contato com as figuras geométricas, que se dá de forma visual. Os estudantes identificam e operam com as figuras de acordo com sua aparência, elas são vistas como um todo, sem suas partes serem percebidas. Eles reconhecem as figuras pela sua aparência e devem ser capazes de representá-las mentalmente com imagens. Para identificar as figuras, o aluno usa protótipos visuais, por exemplo: dizem que uma figura é um retângulo por que parece com uma porta, mas no momento, não conseguem abstrair as propriedades ou características da classe da figura em questão. Nesse nível, os alunos conseguem diferenciar figuras, mesmo não sabendo seus nomes ou suas propriedades, somente pela sua forma. Também são capazes de perceber que duas figuras são congruentes sem usar critério algum, apenas por parecerem as mesmas. Nesse nível, se denominamos uma classe de quadriláteros como retângulos, o aluno pensará: essa figura é um retângulo por que eu aprendi a chamar esta figura de retângulo (apenas pela aparência, sem mencionar as propriedades).

Nível 2: Análise: nesse nível, os alunos reconhecem e podem caracterizar as figuras geométricas por suas propriedades a partir de atividades empíricas. No momento, o aluno pensa no retângulo como uma figura de quatro ângulos retos, portanto o nome retângulo se dá a uma classe de quadriláteros, com um conjunto de propriedades, chamados de retângulos. Ainda nesse nível, os alunos não observam relações entre classes de figuras, por exemplo: um quadrado não é retângulo por que é um quadrado. Nesse nível, os alunos associam um conjunto de propriedades à sua forma geométrica. Segundo P.M. van Hiele (1959), o aluno já pode fazer uma conjectura de que um losango é um quadrilátero equilátero com diagonais perpendiculares que se bissectam e que tem ângulos opostos congruentes, apenas pela observação.

Nível 3: Classificação: nesse nível, os alunos já entendem definições abstratas, distinguem condições necessárias e suficientes num conceito. Já podem classificar hierarquicamente figuras, entendem que o quadrado é um paralelogramo com mais propriedades impostas. Já podem descobrir informalmente algumas propriedades, por exemplo: todo quadrilátero tem a soma dos ângulos internos de 360° , dado que um quadrilátero é formado por dois triângulos cuja soma dos ângulos internos de cada um é de 180° . Os alunos começam a descobrir propriedades de várias figuras e sentem a

necessidade de organizar essas propriedades. Nesse nível começa a ficar claro que um quadrado é um retângulo e se entende que um retângulo é um quadrilátero com quatro ângulos retos. A organização lógica das idéias é a primeira manifestação da dedução, no entanto ainda não se entende que a dedução lógica é um método de construir novas relações geométricas. Os alunos conseguem entender o significado das demonstrações em geometria.

Nível 4: Dedução Formal: o aluno chega nesse nível quando é capaz de trabalhar com características de relações intrínsecas, por exemplo, distinguir uma proposição do seu inverso. Nesse nível, os alunos entendem a diferença entre termos, definições, axiomas e teoremas. São capazes de construir provas, podem construir uma seqüência lógica de indicações que justificam uma conclusão como conseqüência de hipóteses.

Nível 5: Rigor: nesse nível, os alunos desenvolvem o rigor matemático. Podem formalmente manipular indicações geométricas como axiomas, definições e teoremas. Já desenvolvem demonstrações próprias com o rigorismo matemático. As figuras são tratadas como conjuntos de propriedades e representadas por símbolos.

O modelo Van Hiele apresenta algumas propriedades:

Seqüencial: uma pessoa não pode estar no nível n sem ter passado anteriormente pelo nível $n - 1$.

Avanço: um aluno não pode estar num nível sem dominar todos os níveis anteriores.

Intrínseco e extrínseco: os objetos implícitos num nível tornam-se explícitos no nível seguinte.

Lingüística: cada nível possui seus próprios símbolos e sua própria linguagem e sua própria rede de relações que conecta esses símbolos.

Combinação Inadequada: duas pessoas que estão em níveis diferentes não conseguem se compreender. Uma conseqüência disso é que como o professor e o aluno raciocinam em níveis diferentes, não podem compreender-se mutuamente, portanto o professor, o conteúdo, o material didático e o vocabulário devem estar compatíveis com o nível do aluno.

Van Hiele (1959) acreditava que o processo de desenvolvimento cognitivo em geometria poderia ser acelerado. Para isso, descreveu como um professor deveria proceder para levar os alunos de um nível a outro. Esse processo foi dividido em cinco etapas não

absolutamente hierárquicas denominadas informação, orientação direta, explicitação, orientação livre e integração. Segundo P.M. van Hiele (1986) a conquista de um novo nível não pode ser efetuada pelo professor, mas com a escolha de certos exercícios, o professor pode criar a situação favorável para o aluno de forma que ele alcance níveis mais altos de pensamento. Van Hiele acreditava que os níveis de conhecimento eram discretos, portanto passadas as cinco fases do processo de um nível, o aluno daria um pulo ao próximo nível.

Para van Hiele, o processo de aprendizagem passa por 5 fases:

Fase 1: Informação: o professor e o aluno dialogam sobre o material de estudo. O professor deve perceber quais os conhecimentos anteriores do aluno sobre o conteúdo a ser estudado. É a fase em que o professor deve identificar o ponto de partida dos alunos para definir quais atividades serão propostas. O aluno interage com o objeto de estudo apenas por examinar exemplos.

Fase 2: Orientação Direta: os alunos exploram o assunto do estudo através do material selecionado pelo professor, devem realizar tarefas. As atividades deverão proporcionar respostas específicas e objetivas.

Fase 3: Explicitação: o professor orienta o aluno no uso da linguagem apropriada. O aluno começa a adquirir consciência das relações, tentando explicar elas com palavras e aprende a linguagem técnica que acompanha o problema. A partir de suas experiências anteriores, o aluno começa a revelar seus pensamentos, modifica seus pontos de vista sobre as estruturas trabalhadas e observadas.

Fase 4: Orientação Livre: tarefas constituídas de várias etapas, possibilitando diversas respostas a fim de que o aluno ganhe experiência e autonomia. O aluno deverá realizar diversas tarefas mais complexas para desenvolver sua rede de relações onde deverá procurar soluções próprias.

Fase 5: Integração: o professor auxilia no processo de síntese, fornecendo experiências e observações globais, sem apresentar novas e discordantes idéias. O aluno organiza todo o conhecimento adquirido, e refletindo suas ações, consegue obter uma vista panorâmica da nova rede de relações agora disponível.

Van Hiele acreditava que o avanço de um nível para outro não é um processo natural, o professor é a peça chave para auxiliar o aluno no seu desenvolvimento através de um programa adequado de ensino-aprendizagem.

3.2 A Visão de Gutiérrez sobre o tema:

Gutiérrez (1992) usou a teoria de van Hiele especificamente na Geometria Espacial e para isso, dividiu o problema do aprendizado considerando, por um lado, a aquisição das habilidades espaciais e, por outro lado, o entendimento das relações entre os conceitos geométricos.

Gutiérrez (1992) afirma que quando se trabalha Geometria Espacial, é fundamental que se tenha em mente a visualização. A capacidade de visualização é uma habilidade básica nesse campo de conhecimento. Uma pessoa que tem dificuldades em visualização terá problemas em entender contextos gráficos apresentados nos livros e apresentará dificuldades em expressar suas próprias idéias. Segundo o autor, o cotidiano envolve diversas relações entre representações planas e espaciais, mas quando um objeto é representado no plano, perde muitas de suas informações. Como os livros didáticos ainda são planos, especialmente na Geometria Espacial temos tal problema da perda de informação. A pessoa que vê as representações de um sólido deve ter a capacidade de recuperar a maior quantidade de informações perdidas nessa representação. É fundamental que o aluno adquira e desenvolva habilidades que o permitam entender e interpretar diferentes tipos de representações bidimensionais de objetos tridimensionais, ou seja, habilidades que permitam ao aluno criar, mover, transformar e analisar imagens mentais de objetos tridimensionais geradas por uma informação dada através de um desenho plano. A aprendizagem do uso de diferentes tipos de representações planas envolve dois processos: os alunos devem aprender como desenhar uma representação de um sólido dado e devem construir sólidos a partir de representações planas dadas.

Del Grande (1990, apud Gutiérrez, 1991) especificou as habilidades importantes devem integrar a percepção espacial de um indivíduo, num contexto mais amplo que a Geometria. São elas:

- 1) Coordenação motriz dos olhos: é a habilidade de observar e seguir com os olhos o movimento de objetos de forma ágil e eficaz.
- 2) Identificação visual: é a habilidade de reconhecer uma figura desligada de seu contexto.

3) Conservação da percepção: é habilidade de reconhecer que um objeto mantém sua forma ainda que se deixe de vê-lo totalmente ou parcialmente por se ter girado ou ocultado alguma parte dele.

4) Reconhecimento de posições no espaço: é a habilidade de relacionar posições de objetos de acordo com um referencial.

5) Reconhecimento de figuras espaciais: é a habilidade que permite identificar corretamente as características das relações situadas em diversos objetos situados no espaço, bem como as formas dos objetos.

6) Determinação visual: é a habilidade que permite comparar diversos objetos identificando suas semelhanças e diferenças visuais.

7) Memória visual: é a habilidade para recordar as características visuais e de posição que existiam num momento dado de um conjunto de objetos que estavam a vista e que foram ocultados ou mudados de posição.

A evolução da habilidade do desenho em perspectiva é proposta em quatro etapas, segundo Mitchelmore (1980, apud Gutiérrez, 1991):

1) Etapa da esquemática plana: Os objetos são representados pelo desenho de uma de suas faces ortogonalmente.

2) Etapa da esquemática espacial: As figuras representadas por várias de suas faces ortogonalmente, algumas vezes incluindo faces ocultas, mas ainda sem dar a sensação de profundidade.

3) Etapa pré-realista: Os desenhos mostram a intenção de representar os corpos de uma forma realista com a sensação de profundidade, ainda que sem conseguir plenamente.

4) Etapa realista: Os desenhos são corretos e seguem, mesmo que seja aproximadamente, as regras do desenho em perspectiva, em particular, a perspectiva com ponto de fuga.

Segundo Gutiérrez (1992), geralmente os alunos têm consciência das incorreções de seus desenhos. Em certas ocasiões, fazem e refazem os desenhos cometendo equívocos semelhantes por diversas vezes. Parcialmente o problema está na falta de coordenação dos alunos. A habilidade de desenhar uma é um fator que afeta a capacidade de se fazer representações de sólidos e esta habilidade se desenvolve de maneira espontânea, mais lenta do que se realizam as tarefas específicas em aula.

Quando se trata da representação isométrica, a maioria dos alunos tem dificuldades específicas quando enfrentam-nas pela primeira vez. São elas a obrigação de desenhar os vértices da figura sobre os pontos do papel isométrico, e a necessidade de posicionar o sólido de forma que fique visivelmente parecido com sua representação isométrica. Geralmente chega o momento em que parece que os alunos superaram certos tipos de dificuldades, mas pode não ser uma afirmação válida. Se as habilidades foram desenvolvidas de forma guiada, é possível que os alunos não consigam desenhar representações de forma autônoma. Os erros aparecem quando se propõem atividades mais complexas.

3.3 A criação da imagem mental, segundo Piaget:

Piaget inclui em sua obra, estudos que investigam a representação do espaço, assim como a do mundo e a gênese da geometria espontânea nas crianças. Investiga como a criança constrói a realidade, mediante o relacionamento do objeto com o espaço. O desenvolvimento mental é uma construção que se processa através de sucessivas adaptações entre o indivíduo e o meio. A adaptação mental é uma relação intelectual constituída por dois processos: assimilação e acomodação. Na assimilação, o indivíduo age sobre os objetos, incorporando estes nos esquemas de sua conduta. Na acomodação, o meio que age sobre o indivíduo, é o sujeito que se acomoda diante do objeto, coloca o objeto em esquemas já existentes que são modificados para se adequar às novas informações. O sujeito está permanentemente equilibrando a assimilação e a acomodação.

Piaget considera o desenho uma ação concreta que auxilia a criança a interpretar o mundo através da cópia do real. O desenho é uma acomodação imitativa.

Para Piaget, o desenvolvimento mental está dividido em três etapas: o período sensório-motor, o período pré-operatório e o período operatório, que resumidamente podem ser descritos como:

1 – Sensório-motor: do nascimento até o início da linguagem. É a ação do indivíduo sobre a própria realidade, não comporta distâncias muito longas entre a ação e a realidade.

2 – Pré-operatório: preparação e organização de operações concretas de classes, relações e números. Esse período apresenta duas etapas: o pensamento representativo que

se caracteriza pelas funções simbólicas e representativas; o pensamento intuitivo dado pelas percepções imediatas, no qual se prende a atenção e se caracteriza pela incapacidade de se guardar mais de uma relação ao mesmo tempo. É o período em que aparece a elaboração de noções tais como classes, séries e relações que permitirão à criança, na próxima etapa, operar com noções de número e espaço.

3 – Operatório: noção de invariância, conservação de substância, de peso e de volume. Está dividido em duas etapas: das operações concertas onde a criança opera sobre objetos ou sobre ações exercidas sobre objetos; das operações lógicas, quando o sujeito opera abstraindo o objeto.

A inteligência operatória concreta permite que o sujeito acompanhe as transformações sucessivas de um objeto, descentrando sua atenção e estabelecendo caminhos para entendê-lo como um todo. Mas enquanto o sujeito mantém relações com o objeto, se prende ao concreto e as ações exercidas sobre ele. É somente a inteligência operatória formal que permite ao sujeito se desprender do objeto para imaginar todas as possíveis relações entre o indivíduo e o objeto.

Para Piaget, construção do espaço se dá desde o nascimento da criança, paralela às demais construções mentais. Inicialmente, presa ao período sensório-motor, é constituída por interações entre o organismo e o meio, onde o sujeito se organiza e se adapta em relação ao objeto. No período pré-operatório, a construção do espaço passa a ser representativa, coincidindo com o aparecimento da imagem e do pensamento simbólico. É uma reconstrução do espaço representativo, mas não mais a partir das atividades sensório-motoras e sim das intuições elementares relativas às relações topológicas. A última etapa da construção do espaço se dá através de reconstruções sucessivas, sendo inicialmente concretas e posteriormente formais.

A primeira percepção do espaço na criança é dada de forma topológica, onde ela não é capaz de situar objetos, uns em relação aos outros. As fronteiras desse espaço são determinadas pelo campo perceptivo ou pelo campo de experiências de cada criança. Para que se tenha uma estrutura de espaço acabada, os espaços parcelados devem se tornar um espaço total, devendo considerar as distâncias objetivas e os diversos pontos de vista possíveis, tornando-se simultaneamente projetiva e euclidiana.

O desenho é uma representação, isto é, supõe-se a construção de uma imagem distinta da percepção, e segundo Piaget (1993), nada prova que as relações espaciais de que essa imagem é feita sejam do mesmo nível das relações que a percepção correspondente testemunha. Há um intervalo entre a imagem e o desenho. Podemos questionar se a imagem interior guarda as mesmas relações que a sua representação. Por exemplo, um indivíduo pode apresentar dificuldades em desenhar, a mão livre, um conjunto de retas paralelas, mas interiormente, ele guarda essa relação. Poderíamos dizer que o desenho nada nos ensina, mas permite a constatação do caráter espontâneo das estruturas próprias da representação, portanto a evolução do desenho fornece o quadro geral no qual poderão situar-se as análises.

Piaget define imagem como o produto do esforço de um sujeito em evocar objetos ausentes. No final do período sensório motor, surge no sujeito a necessidade de representar a realidade, mas não se pode interpretar o papel da imagem como simples cópia da realidade, como um dado perceptivo, pois a imagem representativa implica a assimilação do objeto. Ao agir sobre um objeto, o sujeito está ativamente reproduzindo e prolongando suas transformações, decompondo e recompondo o objeto.

Piaget (1966) classificou as imagens em dois grandes grupos: a) imagens reprodutoras, subdivididas em estáticas, cinéticas e de transformação; e b) imagens antecipadoras, subdivididas em cinéticas e de transformação.

As imagens reprodutoras estáticas surgem com o aparecimento da função simbólica, no final do período sensório-motor. As imagens cinéticas e de transformação, que ocorrem quando o objeto muda de posição ou de forma, só se desenvolvem no período pré-operatório, mesmo que já tenham sido percebidas. As imagens antecipadoras, capazes da evocação prévia de processos ainda não executados, só se desenvolvem a partir do nível das operações concretas.

A imagem, no estágio pré-operatório, tem a capacidade de reproduzir eventos, mas ainda de forma estática e sem continuidade, ou seja, não dando conta ainda de reproduzir as modificações, tanto de posição, quanto de forma daquilo que já foi percebido, limitando-se a evocar os resultados de ações já executadas. A partir do nível operatório, a imagem deixa de ser a única fonte de conhecimento e passa a ser utilizada para verificar as

ações feitas sobre o objeto concreto. A imagem consegue antecipar e reproduzir modificações, pois se apóia em operações mentais.

Para Piaget e Inhelder, o desenvolvimento dos conceitos espaciais envolve cada vez mais ações sistemáticas e coordenadas. Durante os primeiros estágios do desenvolvimento, a criança é basicamente passiva nas suas explorações. Por exemplo, quando uma criança toca uma parte de um objeto, sua ação resulta na percepção do tato com esta, mas se tocar em outra parte, sua nova ação resultará numa nova percepção a qual não terá relação com a primeira. Quando a criança regular suas ações através de relações entre suas experiências, uma representação exata do objeto poderá ser construída. Portanto, a abstração de uma forma não é uma abstração perceptiva de uma propriedade física, mas é o resultado de ações coordenadas da criança.

Piaget afirma que o desenvolvimento da noção de espaço e sua representação têm relação com a idade biológica do indivíduo. Sugere que o desenvolvimento do indivíduo passa por três estágios: incapacidade sintética, realismo intelectual e realismo visual.

O estágio da incapacidade sintética ocorre entre três e quatro anos e é caracterizado pelo desenho não caracterizar a percepção. É o estágio em que o indivíduo tem início das relações topológicas, mas sem conseguir dominá-las quando se trata de figuras mais complexas. Ainda não estão desenvolvidas as relações projetivas e euclidianas. As relações topológicas são: a) de vizinhança, que corresponde à proximidade dos elementos percebidos num mesmo campo visual; b) de separação, que depende de uma percepção analítica, dado que consiste em dissociar elementos vizinhos que podem se interpenetrar confundindo-se; c) de ordem, ou sucessão espacial, que se estabelece entre elementos vizinhos e separados, distribuídos em seqüência, arranjados de maneira constante e que é suscetível a desenvolvimentos indefinidos; d) de envolvimento, ou circunscrição, que dá condições de perceber elementos que estão “entre”, constituindo-se em uma relação; e) de continuidade, que faz com que o campo perceptivo evolua para a construção de um campo espacial contínuo (Piaget e Inhelder, 1993, pág. 64).

O desenvolvimento dessas relações e a coordenação crescente das ações do sujeito têm como conseqüência uma elaboração da constância da forma e grandeza do objeto. A atividade sensório-motora dirige-se para condutas de pesquisa e de experimentação e vê-se

aparecer gradativamente a imagem mental, afastando-se da imitação e criando-se os primeiros indícios da representação.

O segundo estágio, denominado realismo intelectual, é caracterizado pelo desenho não apresentar o que o “sujeito vê”, mas tudo o que está ali. É nesse estágio que se constitui um modo de representação espacial no qual as relações euclidianas e projetivas começam, mas de forma ainda incoerente nas suas conexões. As relações topológicas e de vizinhança são respeitadas corretamente, ou apenas procuradas. Em suma, esse estágio pode ser interpretado como início da construção projetiva e euclidiana. Essa estrutura gráfica particular exprime um espaço representativo cujo nível intuitivo é de caráter principalmente topológico. É por isso que encontramos nesse estágio, relações euclidianas e projetivas coerentes, mas ainda não está presente a coordenação de perspectiva de conjunto nem a compreensão das proporções, tampouco sistemas de coordenadas a serem aplicadas num plano de conjunto.

O estágio do realismo visual, terceiro estágio, ocorre por volta dos oito ou nove anos de idade. Ocorre quando o desenho apresenta uma forma em que se percebe a preocupação simultânea com perspectivas, proporções e medidas ou distâncias. O desenvolvimento das relações projetivas e euclidianas ocorre de forma solidária. Nas relações topológicas, a figura permanece compreendida como um todo, sem relações com as outras figuras. As relações projetivas determinam e conservam as posições reais da figura, umas em relação às outras, e as relações euclidianas determinam e conservam as distâncias recíprocas. Trata-se de sistemas de conjuntos.

O espaço projetivo inicia quando o sujeito passa a situar os objetos e suas configurações, uns em relação aos outros. Os objetos passam a ser considerados em relação a um ponto de vista, e as configurações são necessárias para desenvolver a capacidade de coordenar diversos pontos de vista, incluindo os que não são próprios do observador. As relações projetivas são geometricamente mais complexas do que as relações topológicas. A perspectiva intervém relativamente tarde no comportamento geométrico da criança. Ela se constitui no mesmo nível em que os sistemas de coordenadas são elaborados, como se o indivíduo dependesse de uma construção operatória de conjunto e não só das facilidades da intuição e da experiência.

As relações euclidianas, assim como as projetivas, evoluem das intuições topológicas elementares. Passam a constituir relações métricas gerais que constituem a métrica euclidiana. As relações euclidianas também evoluem a partir das coordenações que fazem a transição entre as noções projetivas e as noções métricas. A noção do espaço e a intuição geométrica não são geradas pela simples leitura das propriedades dos objetos, pois requerem uma ação exercida sobre eles. É a partir do nível das operações concretas que a noção do espaço e a intuição geométrica se constituem apoiados pelas relações projetivas e euclidianas que ultrapassam os dados perceptivos. Essas operações concretas constituem o espaço como tal, visto que se apóiam nos encaixes de partes de um mesmo objeto num objeto total.

4 TÉCNICAS E MATERIAIS

Como já foi citado anteriormente, o objetivo desse estudo é produzir um conjunto de atividades que auxiliarão alunos a desenvolver sua capacidade de visualização e representação de sólidos em diagramas bidimensionais. Esse capítulo descreve a metodologia da investigação, o processo realizado, as atividades propostas e os participantes.

4.1 Os Participantes

Primeiramente foram feitos testes com alunos de diferentes idades e faixas de escolaridade, dentre eles: alunos dos primeiros e terceiros anos do ensino médio de uma escola técnica, alunos de quintas e sextas séries do ensino fundamental do Colégio de Aplicação e graduandos do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS. Com essa diversidade, pretendeu-se observar a capacidade de visualização e representação de sólidos em diagramas bidimensionais em diferentes níveis etários e intelectuais.

A análise final foi feita com uma turma do terceiro ano do ensino médio com dezoito alunos em uma escola particular de Porto Alegre. A turma envolvida era formada por 16 indivíduos do sexo masculino e 2 indivíduos do sexo feminino. A fim de análise, os sujeitos que não acompanharam todas as atividades foram desconsiderados. A escolha desse público se deve, primeiramente ao fato de ser a série em que atuo profissionalmente, e também a série em que a geometria se estuda Geometria Espacial com maior profundidade.

4.2 A seleção das atividades

Num momento anterior ao início desse estudo, fui convidado para trabalhar em um curso de Pós-Graduação em Geometria, oferecido a professores de matemática. A estrutura do curso tinha como base o Modelo van Hiele, e me cabia trabalhar os aspectos pertinentes ao primeiro nível, ou seja o primeiro contato com as formas geométricas. Nesse nível, o indivíduo vê o objeto como um todo, não conseguindo identificar suas partes, e que o primeiro contato com os objetos se dá de forma visual. Motivado por esses tópicos, desenvolvi uma atividade que devido a sua repercussão, posteriormente chamei de Caixa de Becker. Essa atividade consiste no contato com sólidos através do tato, e para isso propus que se colocasse um sólido dentro de uma caixa com um orifício arredondado com tamanho suficiente para um indivíduo inserir sua mão, não permitindo o contato visual. Com isso, o sujeito, ao tatear o sólido, criaria uma imagem em sua mente, identificando o sólido e suas partes. A segunda parte da atividade consiste na representação do sólido por desenho.

Posteriormente à criação da Caixa de Becker, encontrou-se uma atividade semelhante proposta por Piaget (1993), em que o sujeito é colocado diante de um anteparo e atrás deste, são colocados objetos com os quais o sujeito interage apenas pelo tato. Piaget utilizou objetos usuais como lápis, chaves, pente, etc...estando as duplicatas dos objetos no campo visual do sujeito para a associação. Também utilizou objetos como cartões recortados em formas geométricas e formas de caráter topológico, como superfícies irregulares com furos, anéis enlaçados ou tiras de papelão abertas ou fechadas. Piaget denominou esse fenômeno Intuição das Formas e a Representação Estereognóstica.

Observar as dificuldades apresentadas por aquela turma despertou meu interesse no assunto, então se iniciou uma reflexão de forma mais profunda nas dificuldades apresentadas por alunos do ensino médio, em turmas que lecionei. O passo seguinte foi selecionar um conjunto de atividades que tratasse da visualização e da representação de sólidos em diagramas bidimensionais. Essas atividades, descritas detalhadamente no capítulo seguinte, tinham um caráter experimental, como uma pré-seleção. Os resultados obtidos determinaram quais seriam selecionadas para compor a seqüência didática final, após adaptações.

Por influência das leituras das propostas apresentadas por Gutiérrez, selecionou-se a representação isométrica como ferramenta inicial. Nas atividades, foram utilizados sólidos formados por composições de cubos. A escolha da representação isométrica se deu devido à escolha dos tipos de sólidos utilizados, à simplicidade da técnica e ao fato de não necessitar de materiais como régua ou compasso, considerando que é uma técnica que atende o objetivo da proposta. O Policubo¹ foi utilizado por ser um material simples de ser adquirido, construído e que permite a criação de diversos sólidos, os quais pode-se aumentar a complexidade durante o desenvolvimento das atividades. Ao longo do trabalho, deixou-se a representação com papel isométrico de lado, dando a liberdade do sujeito escolher a forma de se representar os sólidos.

Outro tópico observado nos testes preliminares foi a dificuldade dos alunos em planificar sólidos. Para desenvolver essa habilidade, foi criada uma atividade que toma como base a idéia proposta pelo software Poly, em que os sólidos se abrem mostrando uma possível planificação.

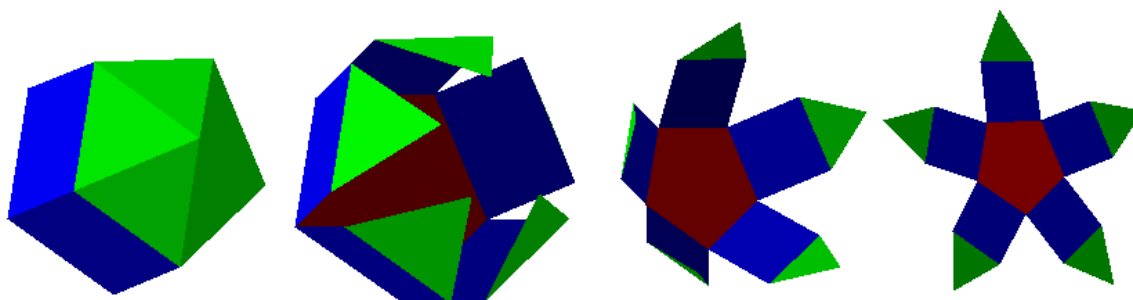


Figura 4.1 – Sólido planificando
Fonte: Poly

O software não foi utilizado, pois possui algumas restrições: o sujeito não tem a oportunidade de criar um sólido, existem modelos prontos e não podem ser alterados; O software apresenta apenas uma planificação para cada sólido.

A atividade desenvolvida referente à planificação de sólidos é composta de quatro etapas, descritas individualmente no capítulo que segue. Com essa atividade, é simulado o movimento sugerido no Poly com sólidos criados pelos próprios alunos em material concreto.

¹ Um Policubo é uma figura geométrica espacial formada por cubos iguais, conectados entre si de modo que pelo menos uma face de cada cubo coincida com uma face de outro cubo.

A última atividade proposta teve como objetivo representar sólidos guardando o máximo de informação possível quanto à sua forma. Para isso, se fez uso das linhas pontilhadas para representar as arestas “escondidas” do ponto de vista do sujeito. Foi utilizado um sólido com um nível de complexidade mais elevado. Os sujeitos representaram o sólido de diversos pontos de vista.

4.3 Coleta de dados e análise dos resultados

Todas as atividades, desde o projeto piloto, foram feitas com turmas em horário escolar, sendo assim, os resultados foram analisados considerando a evolução da turma como um todo. Os alunos foram separados em grupos, porém as atividades foram realizadas individualmente.

A produção dos alunos foi registrada pela coleta das tarefas realizadas pelos alunos e por registros fotográficos da realização das atividades. A análise do material foi feita com base nas teorias de Piaget, Gutiérrez e van Hiele. Essas teorias também tiveram um papel importante no desenvolvimento das atividades do projeto piloto e na escolha pelo assunto. No seguinte capítulo serão descritas detalhadamente as atividades propostas, seguidas de suas justificativas e da análise dos resultados.

5 O PROJETO PILOTO

5.1 Teste em Alunos da Licenciatura em Matemática da UFRGS

Surge a oportunidade de testagem em alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, na disciplina de Laboratório de Prática de Ensino – Aprendizagem em Matemática.

Na primeira atividade, os alunos foram organizados em grupos de aproximadamente cinco elementos, então lhes foi entregue uma caixa com um poliedro dentro. Foi solicitado aos alunos que colocassem as mãos dentro da caixa e sem ver o sólido, tentassem desenhá-lo numa representação em perspectiva.

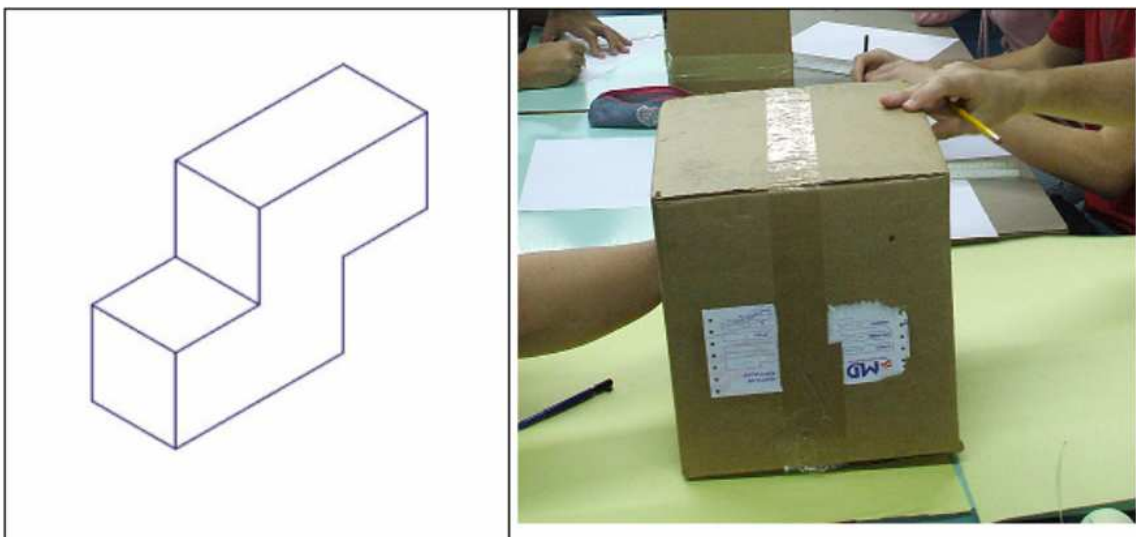


Figura 5.1.1: Aplicação da Caixa de Becker
Fonte: Própria

Os alunos conseguiram identificar a forma da figura, mas em muitos casos, houve distorções quanto às proporções, esses casos foram validados quando os alunos tiraram os sólidos das caixas e compararam com o seu desenho.

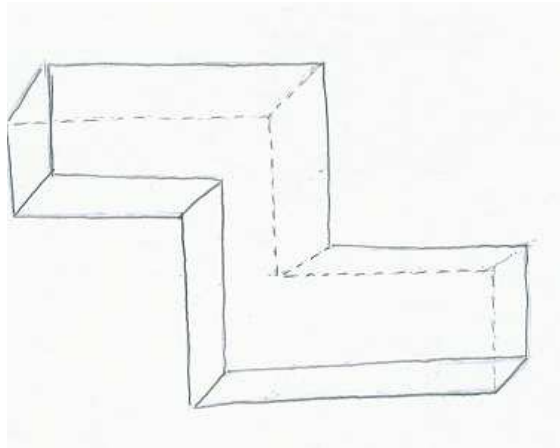


Figura 5.1.2 – Representação do sólido feita pelo aluno M1.

M1: “Eu não tive dificuldades em fazer a figura, mas ela não ficou correta”.

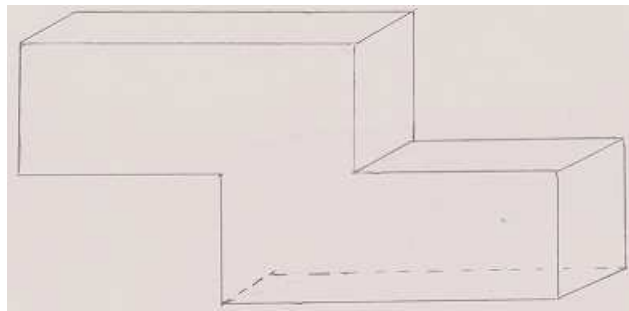


Figura 5.1.3 – Representação do sólido feita pelo aluno M2.

M2: “A atividade foi muito interessante, pois raramente é trabalhada a capacidade de visualização em nosso curso”.

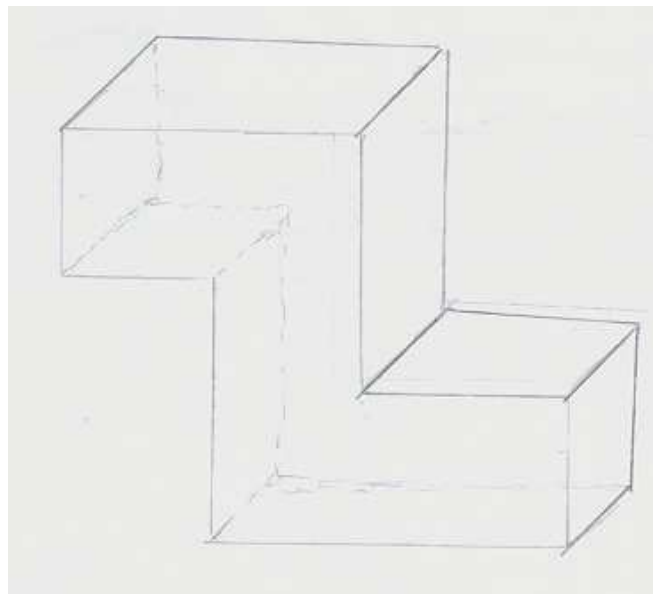


Figura 5.1.4 – Representação do sólido feita pelo aluno M3.

M3: “Eu estava convicta de que acertaria a forma da figura e foi uma surpresa vê-la e concluir que era diferente do que eu havia desenhado”.

Os resultados obtidos mostram que os alunos possuem uma visão projetiva desenvolvida, porém as relações euclidianas não estão sendo respeitadas nos desenhos. Podemos afirmar que os alunos identificaram a forma do objeto, mas o fato deles não terem identificado as proporções entre arestas fez com que o desenho não ficasse correto. Alguns alunos criaram estratégias para compreenderem bem o sólido, como decompô-lo em cubos figura 5.1.5. Outros alunos utilizaram os dedos para medir as arestas do objeto, fazendo com que a distância entre a ponta do polegar e do indicador servisse como um compasso.

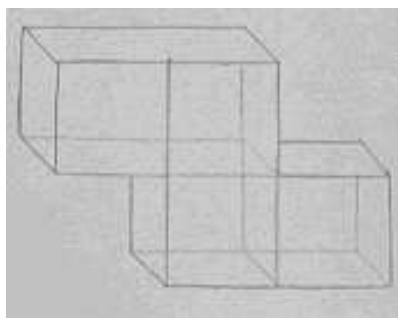


Figura 5.1.5 – Representação do sólido feita pelo aluno M4

Na seqüência, foi solicitado que os alunos fizessem uma possível planificação para esse sólido, então que recortassem e montassem para verificação. Nessa atividade, os alunos apresentaram mais dificuldades e na sua maioria, não conseguiram desenhar uma planificação correta. Seguem abaixo os registros das planificações corretas desenhadas pelos alunos:

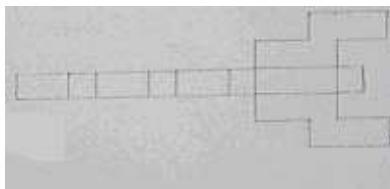


Figura 5.1.6 – Planificação feita pelo aluno M2



Figura 5.1.7 – Planificação feita pelo aluno M5

Grande parte do grupo não chegou a fazer a planificação, pois afirmava que não conseguiria. Alguns alunos criaram estratégias interessantes como numerar cada uma de suas faces, para então planificar corretamente o objeto, relacionando a localização de cada face de acordo com a posição da face vizinha.

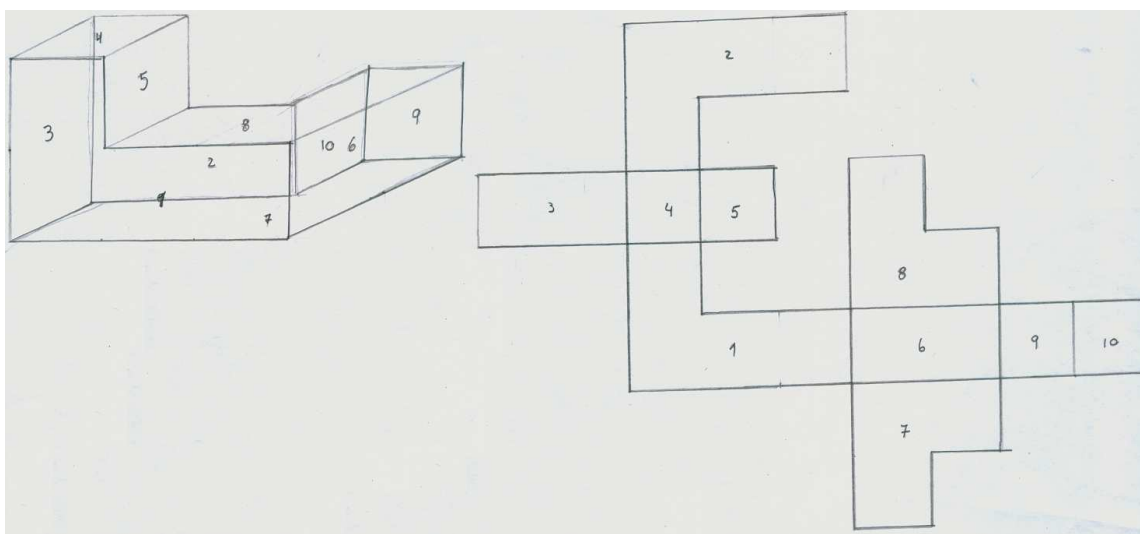


Figura 5.1.8 – Estratégia de planificação feita pelo aluno M6

O aluno que imaginou o sólido como uma composição de cubos se utilizou desse artifício para construir uma possível planificação. O aluno afirmou que não terminou a atividade por falta de tempo.

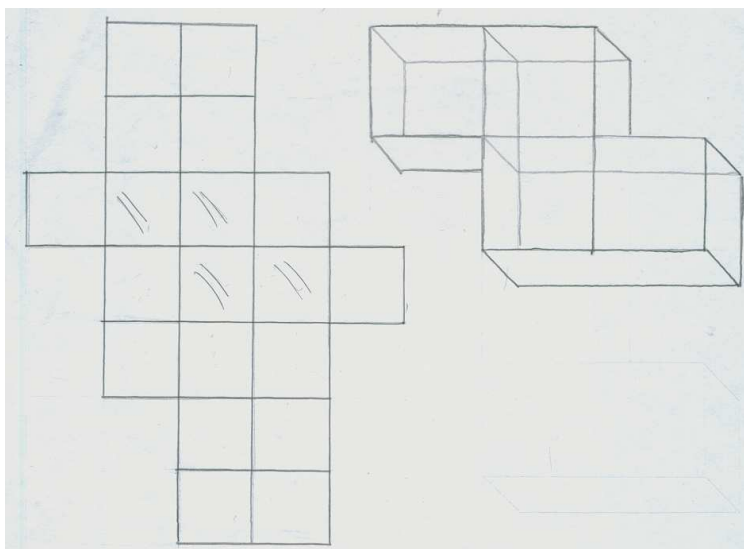


Figura 5.1.9 – Estratégia de planificação feita pelo aluno M7

As atividades realizadas com esse grupo de alunos confirmam a colocação de van Hiele cuja teoria justifica que cada indivíduo se encontra num nível de desenvolvimento do raciocínio geométrico. Quando os alunos criam estratégias para resolver um problema, estão adaptando esse problema num campo de conceitos no qual se pode encontrar a solução. Analisando com mais profundidade a produção do aluno que numerou as faces do objeto, chegaremos a conclusão que o aluno não decompôs o sólido com uma imagem de transformação cinética (o aluno não imaginou o sólido se abrindo em sua planificação), mas usou conceitos topológicos de relações de vizinhança. A aluna que decompôs o sólido em cubos resumiu seu problema em desenhar vários cubos, figura com uma representação bem compreendida.

Atividade 3: Foi entregue o conjunto de planificações (figura 5.1.1.10) aos alunos, e eles deveriam decidir quais delas poderiam ser planificações do sólido em estudo.

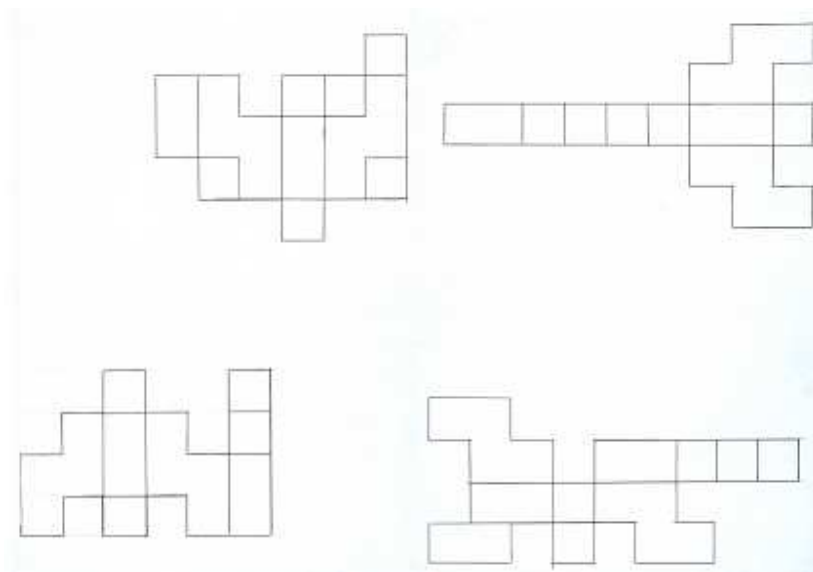


Figura 5.1.10 – Conjunto de planificações
Fonte Própria

Os alunos criaram uma estratégia de contar o número de faces do sólido e de cada planificação e isso os levou a uma análise correta de quais figuras seriam possíveis planificações para o sólido.

Finalizando a seqüência, foi solicitado que os alunos fizessem uma avaliação da proposta e comentassem como se sentiram fazendo as atividades.

M4: “Eu me senti desafiado por que não lembrava mais como planificar. Na verdade tenho dificuldades. No entanto, identificar qual fecha o sólido, eu contei as faces. (...)”.

M5: “Eu estava convicta de que acertaria a forma da figura e foi uma surpresa vê-la e concluir que era diferente do que eu havia desenhado. Foi fácil ver que as planificações com 9 faces não fechavam, pois o sólido tinha 10 faces.”

M6: “Para desenhar a figura em perspectiva, não tive dificuldades, mas achei bastante complicado de imaginar a planificação do sólido a ponto de não saber se fecharia com a figura desenhada na minha folha. A atividade é bem interessante e me fez perceber a dificuldade que tenho em imaginar a planificação de figuras geométricas.”

M7: “Não tive dificuldade em desenhar o plano, porém tive muita dificuldade em desenhar a planificação, tanto que não desenhei a planificação”.

Pela grade curricular do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, existe uma grande probabilidade de que todos os alunos da disciplina de Laboratório de Prática de Ensino – Aprendizagem em Matemática já tenham

cursado as disciplinas de Geometria I e Geometria II. Isso pode estar relacionado com o fato de que o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo trabalhado nessas disciplinas não está ligado diretamente com o desenvolvimento da representação da imagem mental.

5.2 Teste em alunos do Colégio de Aplicação

A satisfação dos alunos em realizar essa atividade fez com que um grupo deles, atuantes como voluntários no Colégio de Aplicação da UFRGS em aulas extra curriculares, levasse a proposta para turmas de quintas e sextas séries. A atividade proposta foi a da Caixa de Becker, mas devido à faixa etária dos alunos, os graduandos optaram por colocar sólidos mais simples dentro da caixa, sólidos esses encontrados no cotidiano dos alunos.

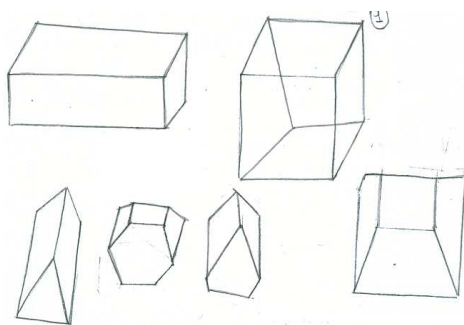


Figura 5.2.1 – Representações feitas pelo aluno AM1

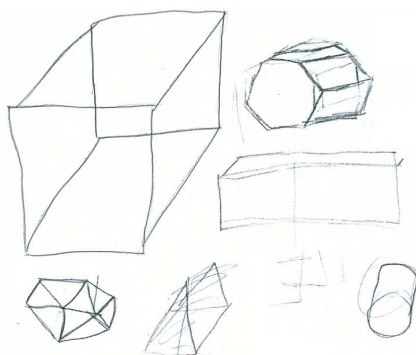


Figura 5.2.2 – Representações feitas pelo aluno AM2



Figura 5.2.3 – Representações feitas pelo aluno AM3

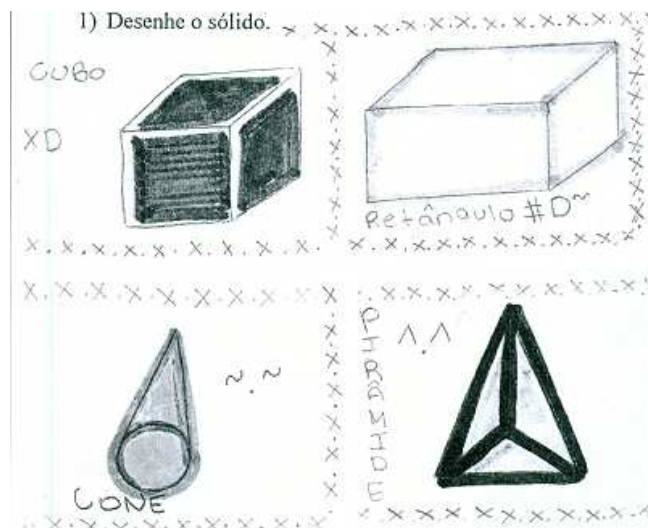


Figura 5.2.4 – Representações feitas pelo aluno AM4

5.3 Teste em Alunos do Ensino Médio

Em paralelo às atividades descritas anteriormente, foi testada uma seqüência mais elaborada em alunos do terceiro ano do ensino médio de uma escola técnica em Porto Alegre.

Na primeira atividade, os alunos foram organizados em grupos de aproximadamente cinco elementos, então lhes foi entregue uma caixa com um poliedro representado na Figura 5.1.2.1 dentro. Foi solicitado aos alunos que colocassem as mãos dentro da caixa e sem ver o sólido, tentassem desenhá-lo numa representação em perspectiva.

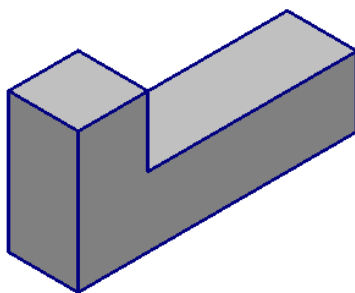


Figura 5.3.1 – Poliedro L

Análise dos Resultados:

A seqüência dos desenhos mostrados nas figuras 5.3.2 e 5.3.3 sugerem a evolução da construção da imagem mental a ser representada em desenho, como mostram os resultados abaixo, pois, segundo Piaget, desenho é uma representação, isto é, supõe-se a construção de uma imagem distinta da percepção. Gutiérrez (1992) afirma que geralmente os alunos têm consciência das incorreções de seus desenhos. Em certas ocasiões, fazem e refazem os desenhos cometendo equívocos semelhantes por diversas vezes. Parcialmente o problema está na falta de coordenação dos alunos. A habilidade de desenhar é um fator que afeta a capacidade de se fazer representações de sólidos e esta habilidade se desenvolve de maneira espontânea.

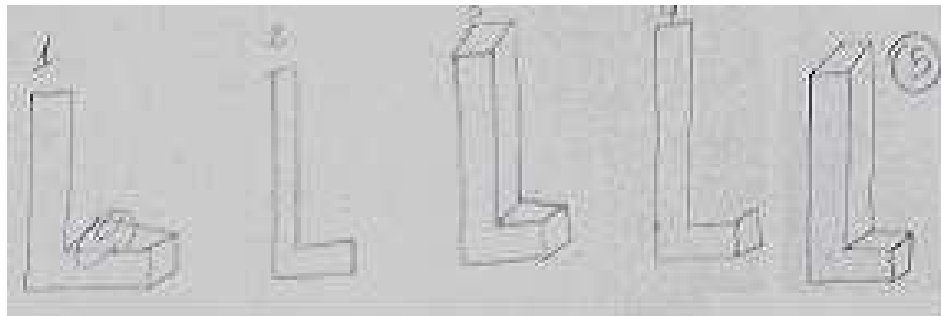


Figura 5.3.2 – Representação do poliedro L feita pelo aluno ST1

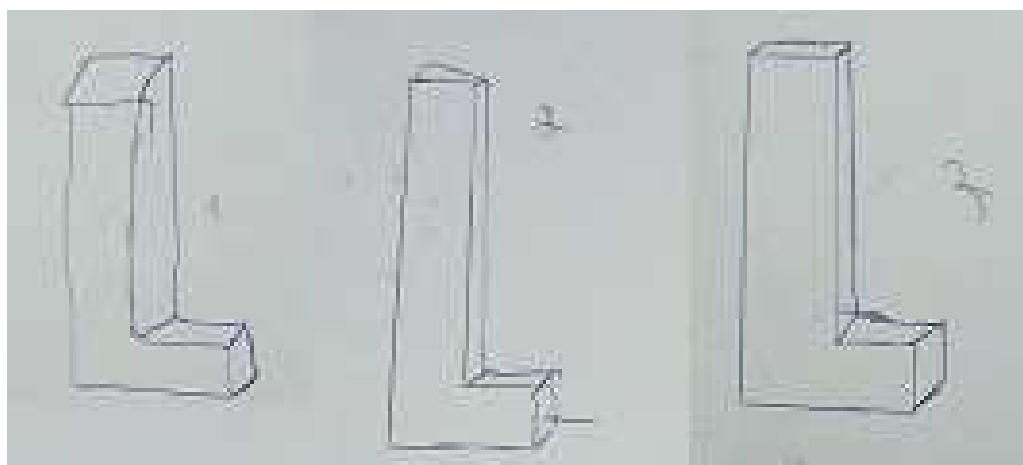
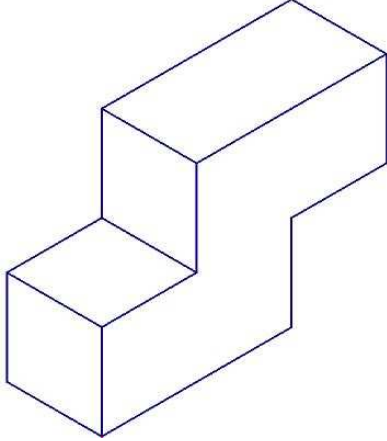


Figura 5.3.3 – Representação do poliedro L feita pelo aluno ST2

Nas atividades seguintes, os alunos receberam uma folha com as instruções que seguem:

Coloque o sólido em cima da mesa na posição representada no diagrama abaixo:



2.a) Reproduza o desenho no papel isométrico (Desenho 1).

2.b) Mude a posição do objeto na mesa e desenhe-o no papel isométrico na nova posição (Desenho 2).

Desenho 1

Desenho 2

Figura 5.3.4 – Exercício proposto
Fonte Própria

O fato de essa figura ter um nível de dificuldade mais elevado que o “Poliedro L” do exercício anterior causou um certo desconforto nos alunos. Eles identificaram corretamente a aparência da figura, mas em sua maioria, tiveram problemas com as proporções das partes. Em Alguns casos, o objetivo do uso do papel isométrico foi

ignorado. Segundo Gutiérrez, quando se trata da representação isométrica, a maioria dos alunos tem dificuldades específicas quando enfrentam-nas pela primeira vez. São elas a obrigação de desenhar os vértices da figura sobre os pontos do papel isométrico, e a necessidade de posicionar o sólido de forma que fique visivelmente parecido com sua representação isométrica.

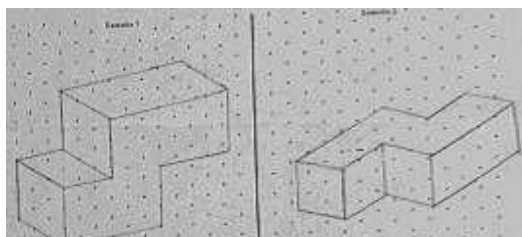


Figura 5.3.5 - Representação do poliedro feita pelo aluno ST3

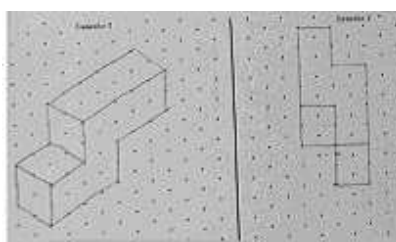
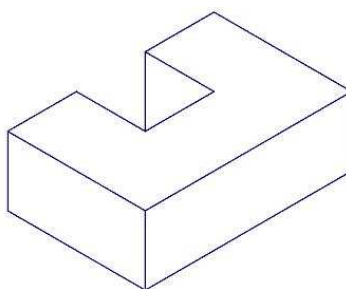


Figura 5.3.6 - Representação do poliedro feita pelo aluno ST4

Coloque o sólido em cima da mesa na posição representada no diagrama abaixo:



3.a) Reproduza o desenho no papel espaço abaixo (Desenho 1).

3.b) Imagine o objeto numa nova posição e desenhe-o nessa nova posição (Desenho 2).

Figura 5.3.7 – Exercício proposto

Fonte Própria

Pelos resultados obtidos, nota-se a influência do uso do papel isométrico, pois algumas figuras foram representadas na mesma perspectiva do exercício anterior, mesmo àqueles alunos que no exercício do “L” desenharam a figura com os lados paralelos aos lados da folha.

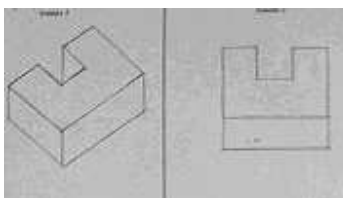


Figura 5.3.8 - Representação do poliedro feita pelo aluno ST5

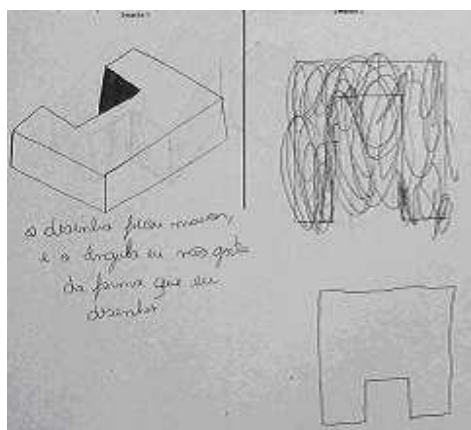


Figura 5.3.9 - Representação do poliedro feita pelo aluno ST6

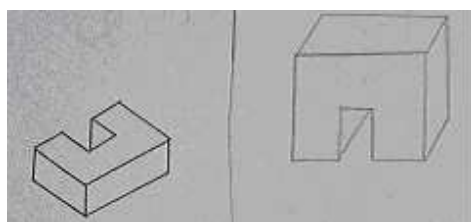


Figura 5.3.10 - Representação do poliedro feita pelo aluno ST3

Imagine o dado representado abaixo. Complete os quadrados abaixo com as letras correspondentes tendo o cuidado de que cada letra fique na posição correta.

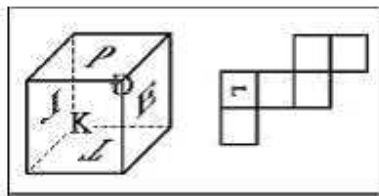


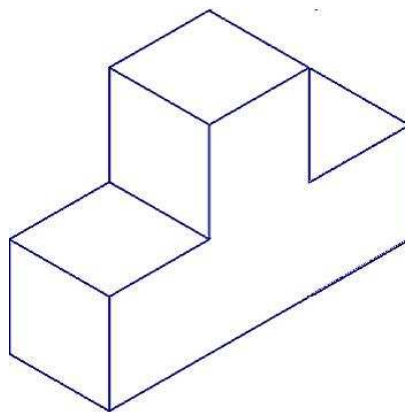
Figura 5.3.11 – Exercício proposto

Fonte www.matematica.com.pt/2007/12/default.aspx adaptado.

Nessa atividade, os alunos tiveram a oportunidade de recortar a figura para verificarem seus resultados. No primeiro momento, colocar as letras nos devidos lugares não causou maiores problemas, mas o fato de as letras aparecerem viradas no sólido montado gerou muita polêmica e discussão entre os alunos.

Imagine o sólido abaixo.

- 5.1) Quantas formas geométricas planas diferentes seriam usadas para montar esse sólido?
- 5.2) Quantas peças de cada tipo são necessárias para montar esse sólido?



- 5.3) Com essas peças, tente montar uma planificação para essa figura.
- 5.4) Agora, tente montar uma planificação que caiba no menor retângulo de papel possível.

Figura 5.3.12 – Exercício proposto

Fonte Própria

Determinar quantas formas de cada tipo compõe a figura não gerou problema. No momento da planificação, a tendência foi a planificação representada na figura 5.1.1.26. Alguns alunos colaram duas folhas como solução, pois essa planificação não cabia em uma única folha tamanho A4, com as peças distribuídas. Foi muito interessante a forma como os alunos tentavam resolver o problema 5.4, a oportunidade de interação com um material, que parecia com um quebra-cabeça, fez os alunos se sentirem desafiados. O fato do problema não ter uma única solução e o enunciado propor “o menor possível” gerou competitividade entre os alunos.

Alguns Resultados:

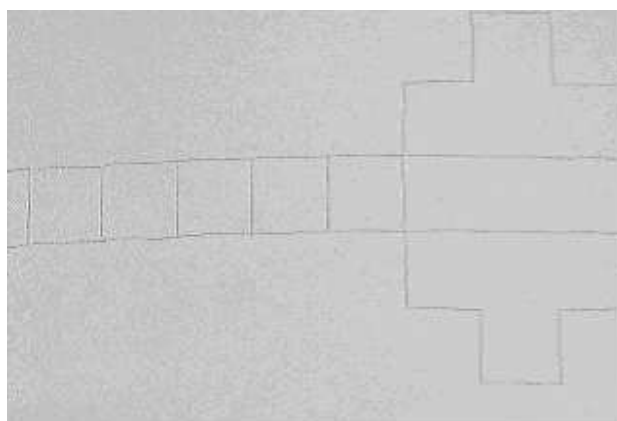


Figura 5.3.13 - Representação do Poliedro feita pelo aluno ST3

Coloque doze caixas de fósforo na mesa de forma que forme um retângulo 3x4. Quantas caixas são visíveis?

Empilhando-se mais um andar, quantas caixas ficam visíveis?

Imagine que sejam empilhados mais três andares. Quantas caixas ficariam visíveis?

Figura 5.3.14 – Exercício proposto
Fonte Própria

Embora as primeiras questões sejam de caráter empírico, quando se questiona quantas caixas ficam visíveis com cinco andares, força o sujeito a imaginar a figura, já que o número de caixas distribuídas não seria suficiente para fazer a construção. No primeiro momento, os alunos, sem pensar muito, responderam que 60 caixas ficariam visíveis, mas

logo se deram conta que deveriam descontar as caixas que ficavam “escondidas” no centro da figura.

6 A SEQÜÊNCIA FINAL

A seqüência didática final foi desenvolvida a partir da avaliação das atividades realizadas no projeto piloto. Foram escolhidos dois tópicos para serem trabalhados com os alunos: a habilidade de representar sólidos em perspectiva, e o desenvolvimento da imagem mental. A aplicação foi feita em alunos do terceiro ano do ensino médio de uma escola técnica em eletrônica, seguindo o conteúdo programático da disciplina de matemática.

Atividade 1: Foram apresentadas aos alunos duas composições de cubos, então foi solicitado que os alunos desenhassem esses sólidos.

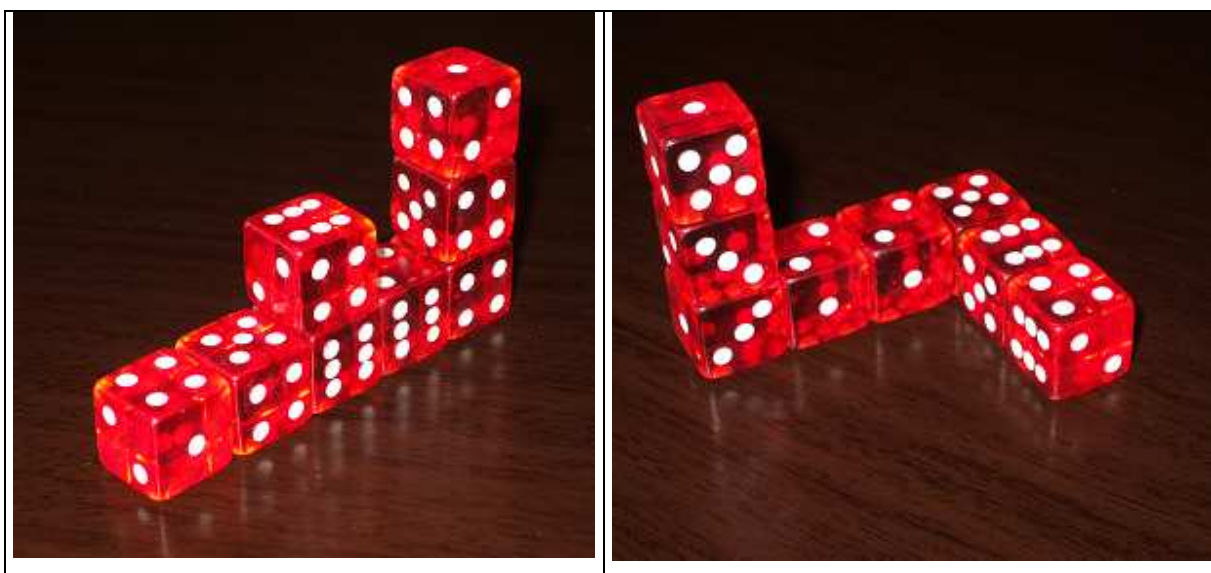


Figura 6.1 – Composição de cubos
Fonte Própria

Justificativa: Essa atividade tem como objetivo introduzir o uso do papel isométrico pelos alunos. Gutierrez (1992) afirma que a habilidade de usar o papel isométrico para desenhar sólidos se desenvolve de forma espontânea, mais lentamente do que as tarefas são propostas em aula. Por esse motivo, houve uma preocupação em trabalhar o uso do papel isométrico de forma paulatina.

Após uma breve explicação sobre o uso do papel isométrico, os alunos realizaram a tarefa sem maiores problemas. Quando se equivocavam, não ficavam satisfeitos com seu

desenho, e sem intervenção alheia, apagavam e refaziam, como mostram os traços “mal apagados” nas figuras 6.2 e 6.3.

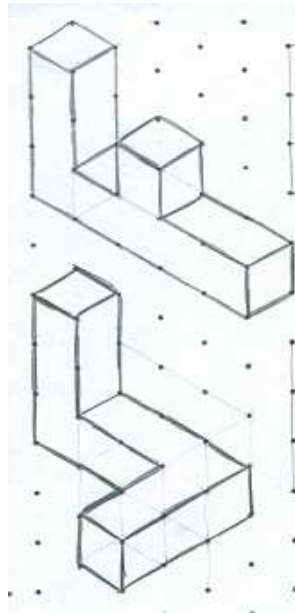
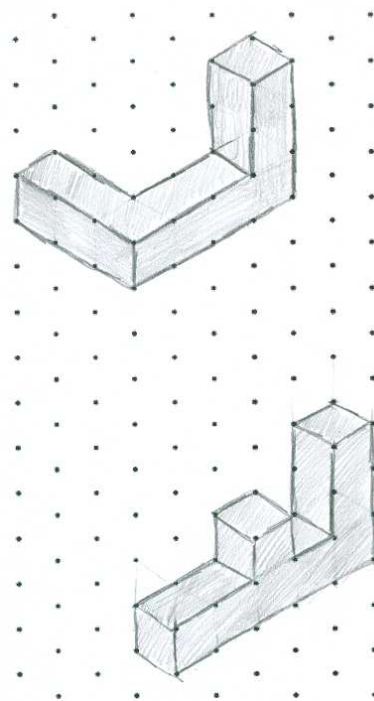


Figura 6.2 – Representação feita pelo aluno F1



Figura 6.3 – Representação feita pelo aluno F2



6.4 – Representação feita pelo aluno F3

Atividade 2: Foi solicitado que os alunos criassem um sólido formado por uma composição de cubos e então que os alunos individualmente desenhassem esta composição no papel isométrico.

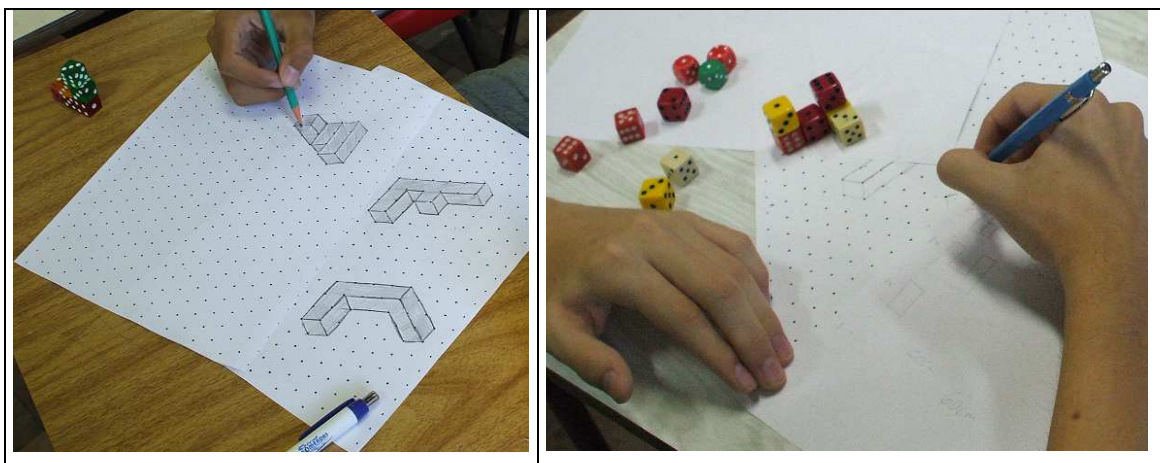


Figura 6.5 – Realização da atividade 2

Atividade 2.1: Foi solicitado que o grupo identificasse quais os diferentes tipos de faces desse sólido a quantidade em que cada uma delas ocorre. Feito isso, os alunos construíram essas faces em papel cartaz.

Justificativa: No primeiro momento, a atividade permite que os alunos reforcem a habilidade de usar o papel isométrico, dado que Gutierrez (1992) afirma que essa habilidade se desenvolve de forma espontânea. Segundo van Hiele (1959), no primeiro contato com a geometria os alunos vêem os sólidos como um todo, não conseguem identificar suas partes, as formas de suas faces. Essa atividade permite que os alunos decomponham o sólido em suas partes, identificando cada uma de suas faces, nos quesitos forma e quantidade.

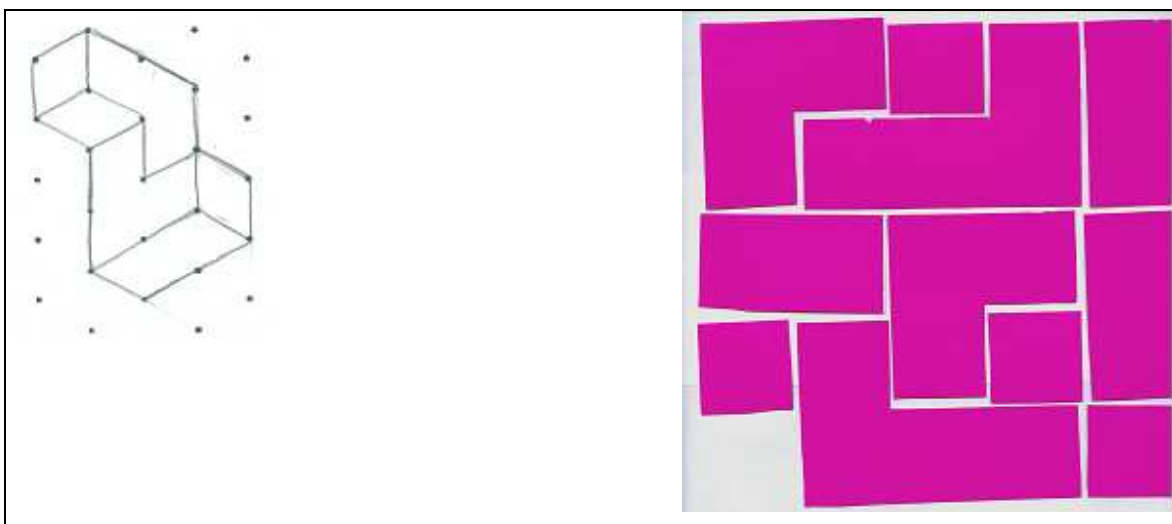


Figura 6.6 – Realização da atividade 2 pelo grupo G1.

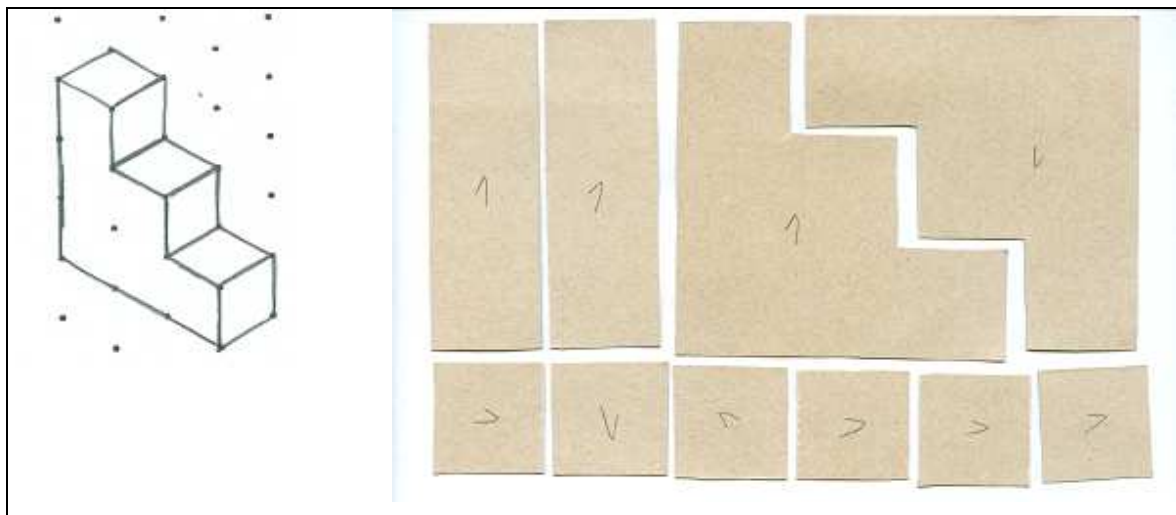


Figura 6.7 – Realização da atividade 2 pelo grupo G2.

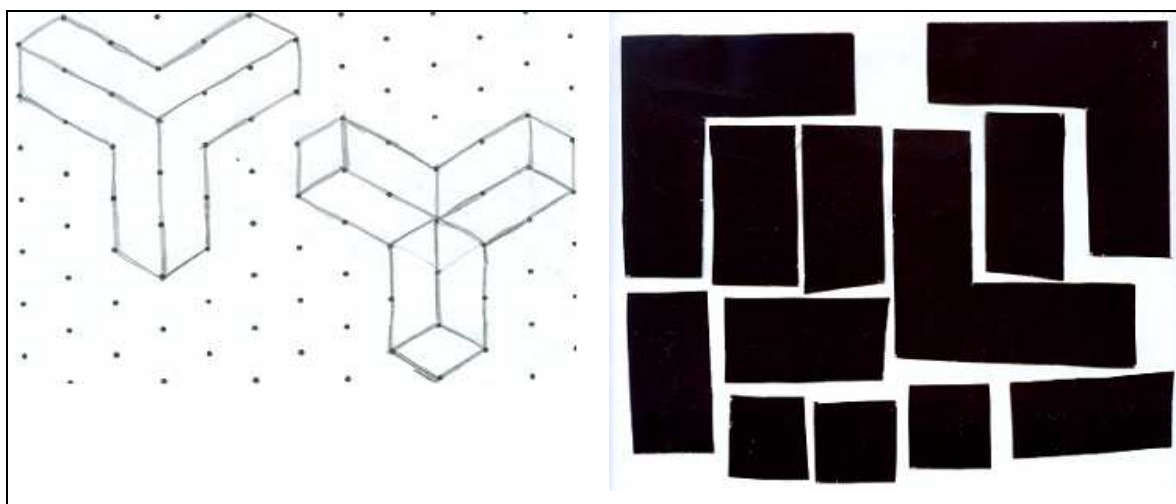


Figura 6.8 – Realização da atividade 2 pelo grupo G3.

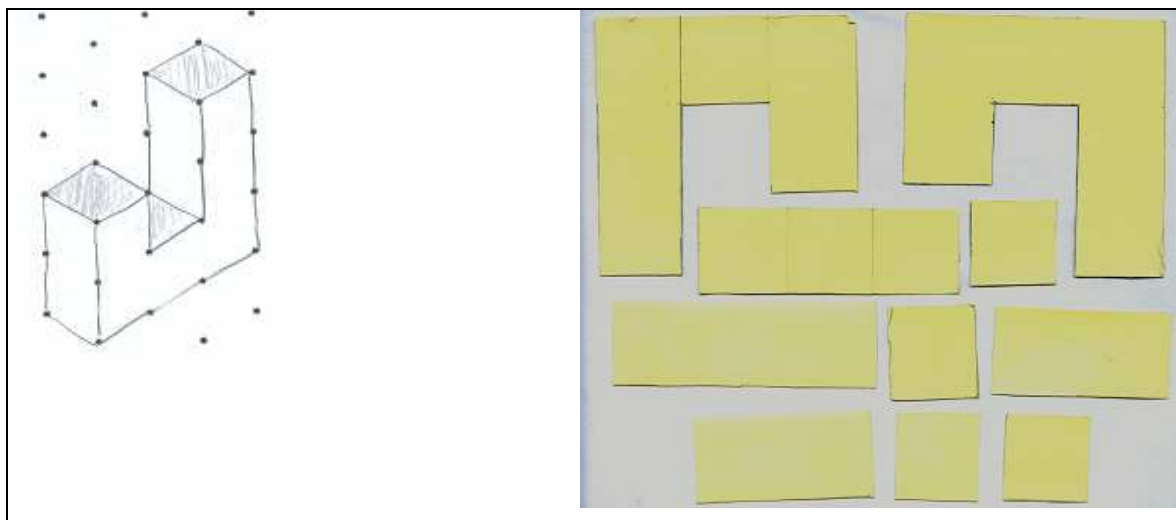


Figura 6.9 – Realização da atividade 2 pelo grupo G4.

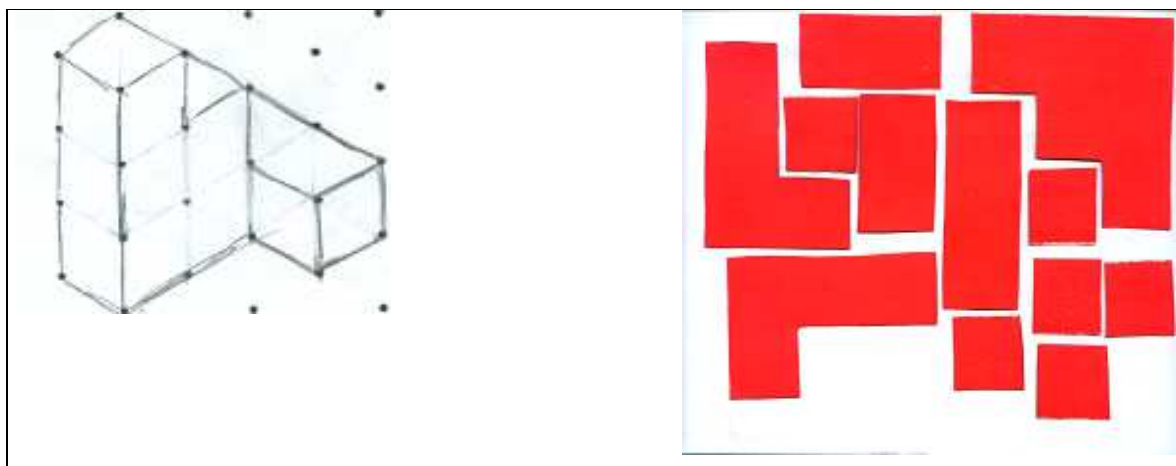


Figura 6.10 – Realização da atividade 2 pelo grupo G5.

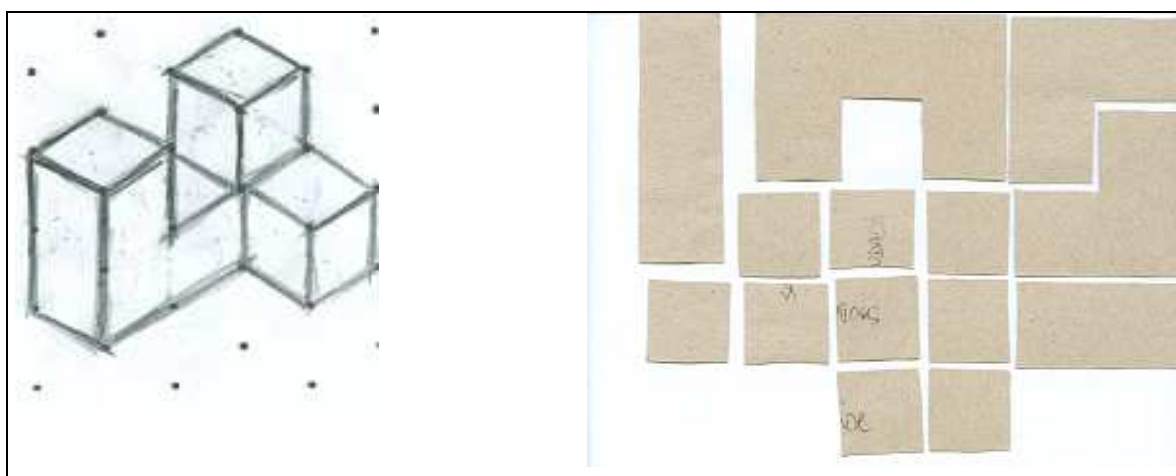


Figura 6.11 – Realização da atividade 2 pelo grupo G6.

Atividade 3: Nessa atividade, cada grupo entregou e, por tanto, recebeu de outro grupo o conjunto de peças que formam o sólido junto com a sua representação em papel isométrico. A tarefa do grupo foi de organizar essas peças numa possível planificação do sólido, reproduzir a planificação em papel cartaz e então construir esse sólido.

Durante essa atividade, foi observado que os alunos não estavam sendo econômicos em suas produções. Iniciavam o desenho no meio da folha, o que no final, gerava muitos “cantos” de papel inutilizado. Foi proposto então que os alunos buscassem planificações em que os resíduos fossem minimizados. Esse desafio foi muito bem recebido, e foi interessante a forma como os alunos montavam os sólidos com as peças e abriam sua planificação imaginando e testando possíveis posições pras faces.

Justificativa: Com essa atividade, os alunos desenvolvem uma noção de como um sólido pode ser planificado. Os alunos têm a oportunidade de simular um movimento do sólido se “abrindo” e com isso, conseguem perceber a posição em que cada face deve ocupar na planificação. O fato de os alunos terem de construir o sólido serve como validação de seus resultados. Essa atividade foi de suma importância, pois evitou que os alunos buscassem uma alternativa que fugiria do objetivo do trabalho, como por exemplo, a técnica utilizada pelo aluno da Licenciatura em Matemática que numerou as faces do sólido e utilizou apenas relações de vizinhança para a construção da planificação.

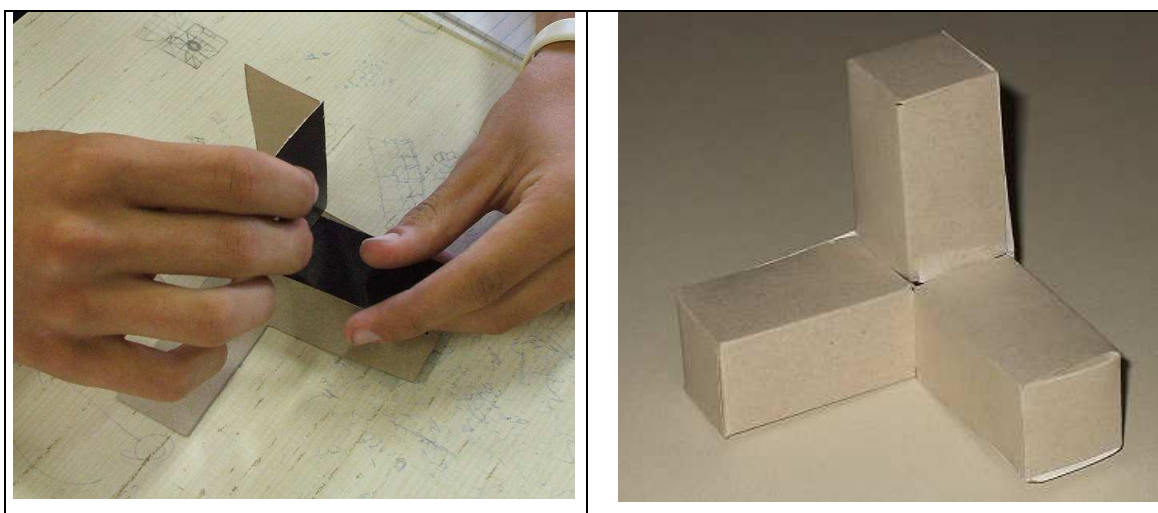


Figura 6.12 – Realização da atividade 3 pelo grupo G1

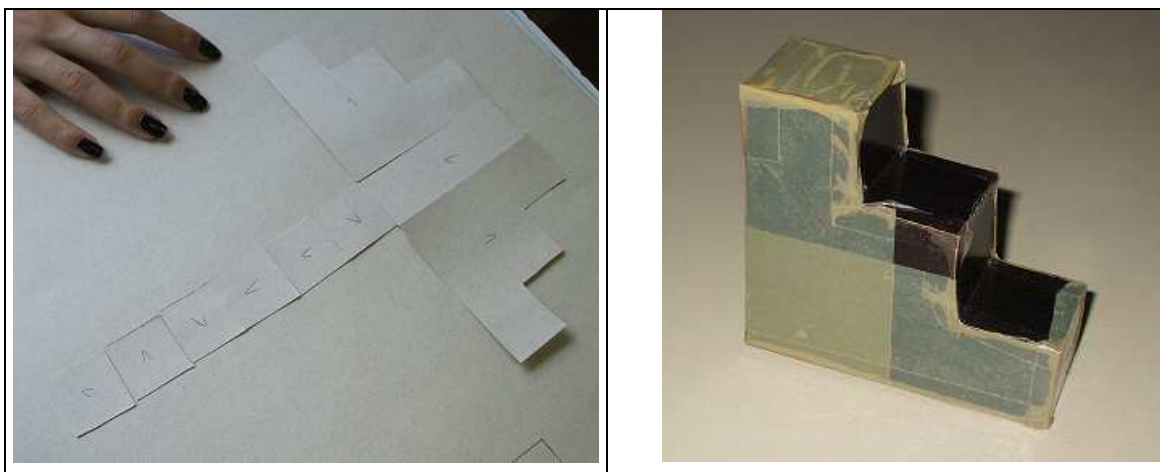


Figura 6.13 – Realização da atividade 3 pelo grupo G3

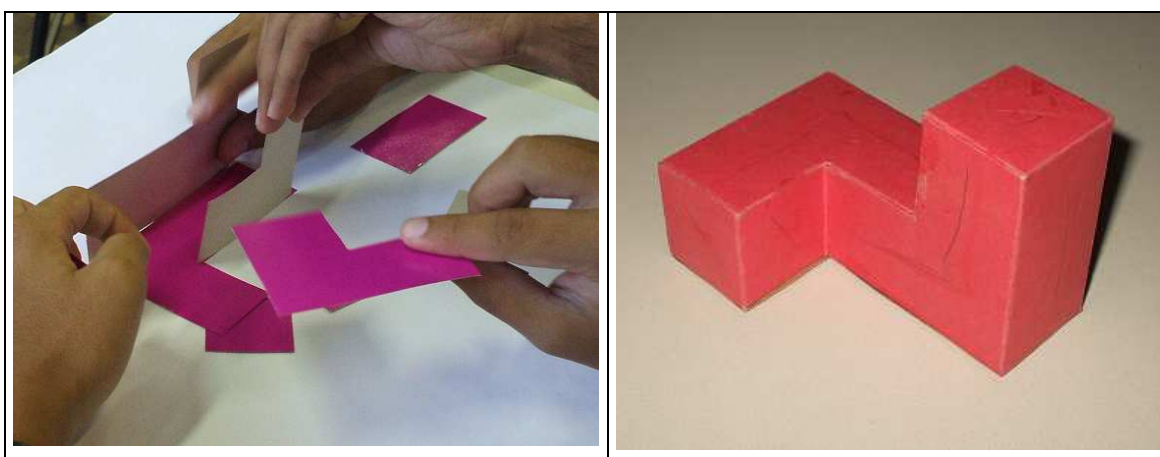


Figura 6.14 – Realização da atividade 3 pelo grupo G2

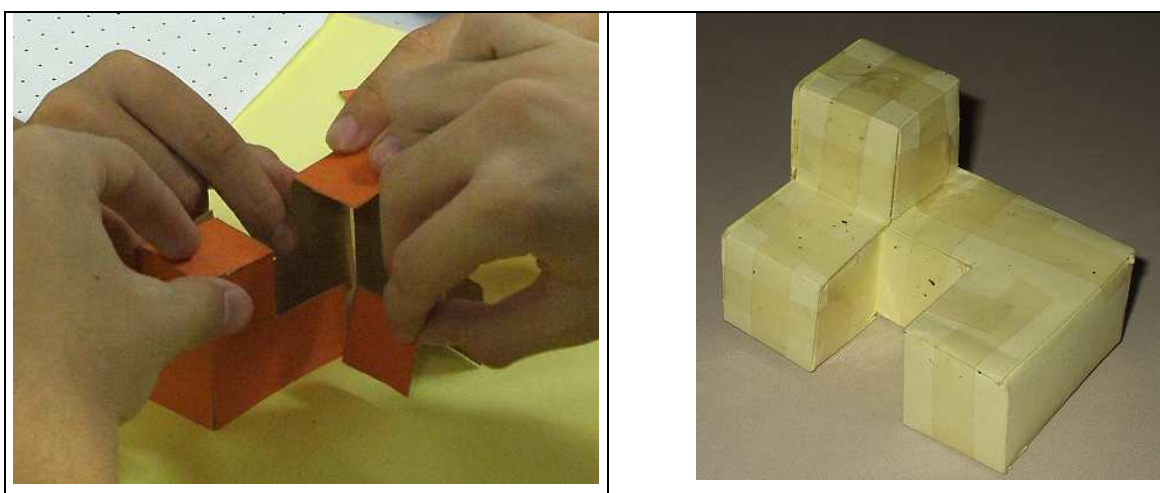


Figura 6.15 – Realização da atividade 3 pelo grupo G4

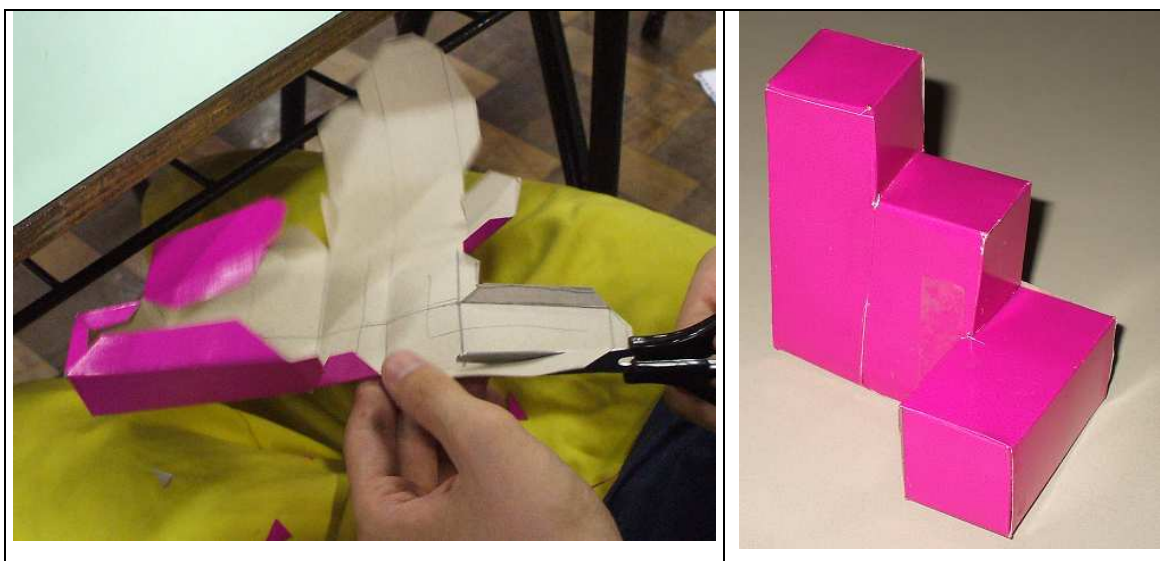


Figura 6.16 – Realização da atividade 3 pelo grupo G5

Atividade 4: A Caixa de Becker: Cada grupo recebeu uma caixa de papelão com furos em faces opostas. Essa caixa possui um sólido em seu interior. A tarefa dos alunos foi desenhar o sólido sem vê-lo. Desta vez, deixou-se de lado o papel isométrico. Observa-se que nos desenhos representados na Figura 6.17, ainda não estão bem desenvolvidas as relações euclidianas e projetivas, mas as figuras representam a forma do sólido. A Figura 6.18 mostra as relações respeitadas.

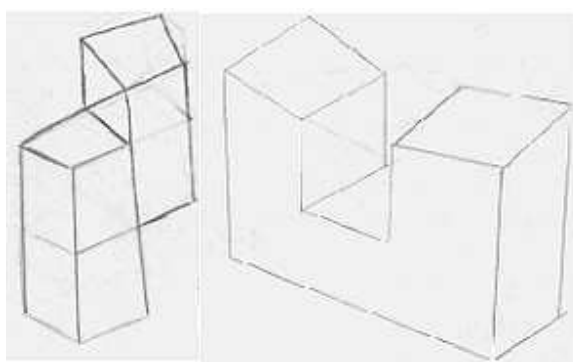


Figura 6.17 – Representações de sólidos feitas pelo aluno F2.

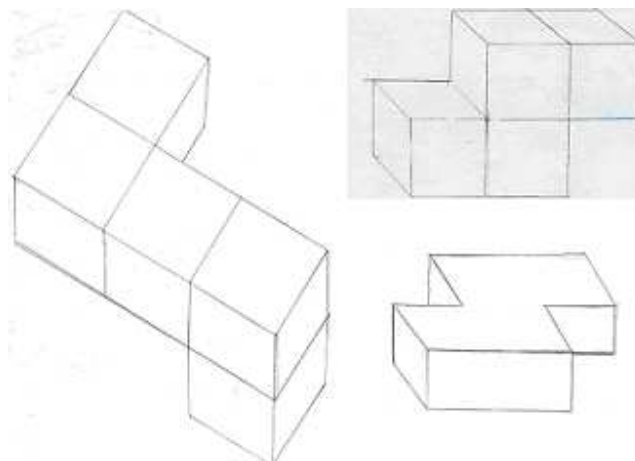


Figura 6.18 – Representações de sólidos feitas pelo aluno F1.

Justificativa: Para Piaget (1993), a imagem é o esforço do indivíduo em evocar objetos ausentes. O contato tátil com o objeto, implica numa assimilação diferente da provocada pelo contato visual. O objetivo dessa atividade é que os alunos criem uma imagem antecipadora através de ações sistemáticas e coordenadas sobre o objeto. Nesse processo, o indivíduo passa por três etapas: a interação com o objeto através do tato; a criação da imagem antecipadora; a reprodução da imagem antecipadora.

Atividade 5.1: Os alunos receberam o sólido (figura 6.19). Foi pedido que os alunos desenhassem em algumas posições diferente o sólido, de forma que sua representação mostrasse bem as características e a forma dele.

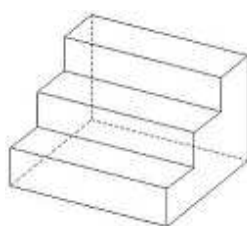


Figura 6.19 – Sólido escada
Fonte própria

Justificativa: A proposta dessa atividade é que os alunos sintam a necessidade de utilizar algum artifício para representar todas as faces do sólido, para seus diagramas caracterizarem satisfatoriamente o sólido.

De fato, as representações dos alunos mostravam a realidade que eles estavam observando, mas não reproduziam as características do sólido. Um aluno ainda brincou afirmando que se desenhasse um retângulo, estaria representando a figura de um certo ponto de vista. A afirmação estava correta, mas não satisfazia a proposta, que era que eles conseguissem representar a forma da figura, respeitando a maior parte de suas características.

Para introduzir o uso da linha pontilhada, foi pedido que os alunos construíssem o sólido em algum material transparente (chapa de radiografia ou folha de acetato). Nesse momento, já foi comprovado o desenvolvimento das habilidades dos alunos, pois construíram o sólido rapidamente, desde a sua planificação. Foi explicado então o uso das linhas pontilhadas para representar-se as arestas que não são diretamente visíveis, mas que ficam por trás do objeto, relativamente ao ponto de vista do sujeito.

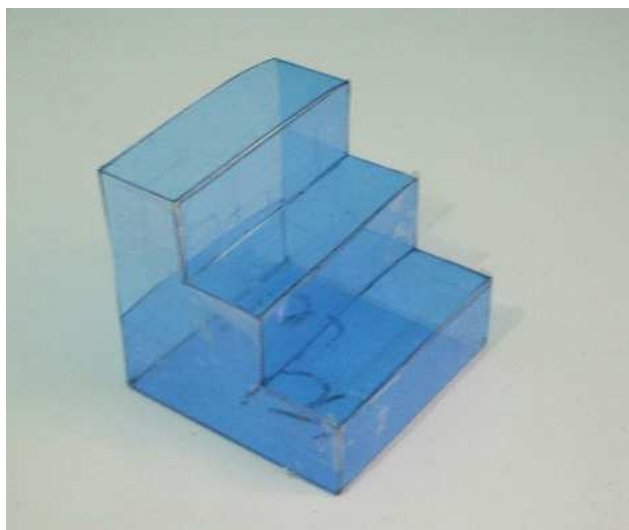


Figura 6.20 – Construção do sólido escada feita pelo aluno F1

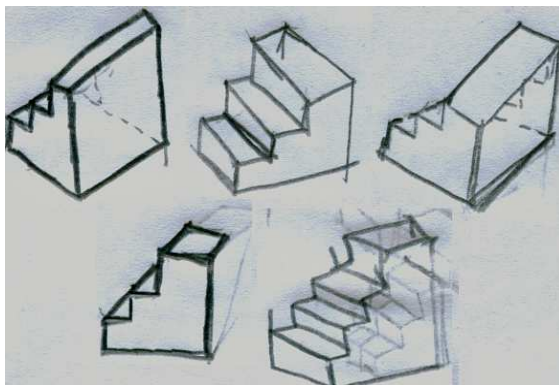


Figura 6.21 – Representações do sólido escada feita pelo aluno F1 antes da construção.

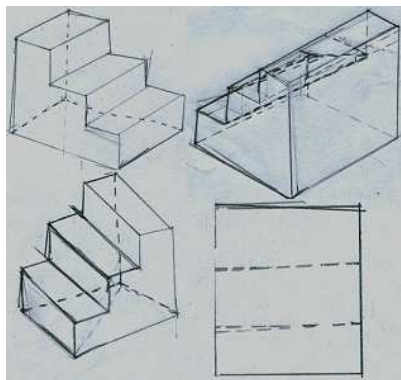


Figura 6.22 – Representações do sólido escada feita pelo aluno F1 após a construção.

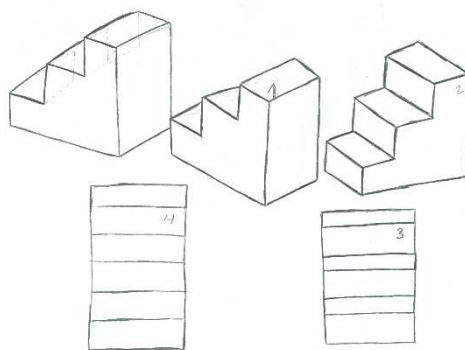


Figura 6.23 – Representações do sólido escada feita pelo aluno F2 antes da construção.

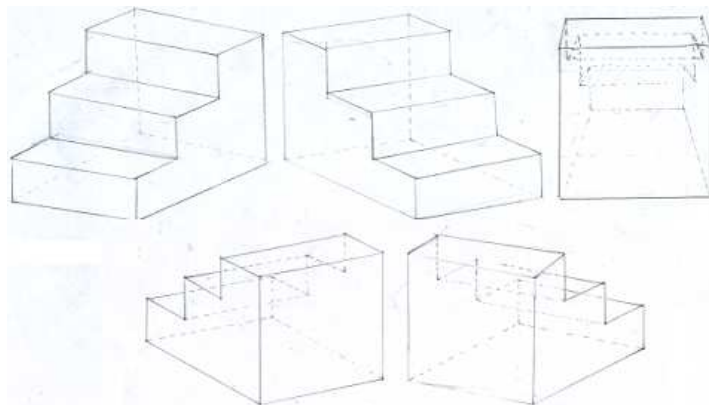


Figura 6.24 – Representações do sólido escada feita pelo aluno F2 após a construção.

Segundo Vladimirskii (1949), o uso de técnicas como o uso de linhas pontilhadas é fundamental para representar satisfatoriamente um sólido. Essa atividade permite que os alunos visualizem as arestas do sólido que ficam escondidas atrás do mesmo. O fato de solicitar cinco posições diferentes determina que o sujeito imagine o sólido em pontos de vista diferentes, e também a utilização de técnicas de representação diferenciadas, testando a possibilidade de se usar uma representação não isométrica. As representações surgiram de forma espontânea, sem orientação aos alunos.

Segundo Gutierrez (1992), é fundamental que o aluno adquira e desenvolva habilidades que o permitam entender e interpretar diferentes tipos de representações bidimensionais de objetos tridimensionais, ou seja, habilidades que permitam ao aluno criar, mover, transformar e analisar imagens mentais de objetos tridimensionais geradas por uma informação dada através de um desenho plano.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino de geometria tem passado por modificações sucessivas, adaptando-se aos interesses da sociedade que vê a escola como formadora de indivíduos capazes de solucionar problemas. No processo de evolução do ensino de geometria, verificou-se que a melhor forma de se trabalhar geometria não era o ensino da Geometria Euclidiana através do estudo de teoremas, pois se entendeu que os alunos, em geral, decoravam os teoremas e apenas os reproduziam, ao passo que o objetivo da disciplina era que eles entendessem as relações geométricas. O fato do ensino de geometria tomar como base a aplicabilidade não está sendo satisfatório para o desenvolvimento do raciocínio geométrico, pois a geometria passou a ser utilizada como uma segmentação do estudo da álgebra.

O objetivo desse estudo foi desenvolver uma seqüência didática que auxiliasse o desenvolvimento da visualização geométrica e da capacidade do indivíduo representar formas geométricas espaciais em diagramas bidimensionais. E escolha do tema se deu quando foram detectadas dificuldades em professores de matemática, que afirmaram não ter domínio do conteúdo e não saber como trabalhar a geometria em sala de aula.

Para desenvolver essa seqüência, primeiramente buscou-se entender a forma com que a geometria é trabalhada atualmente. Os acontecimentos históricos mostraram a transição do ensino lógico dedutivo para a geometria aplicada.

As teorias de van Hiele e de Gutiérrez auxiliaram no desenvolvimento das atividades. Para van Hiele, no primeiro nível do pensamento geométrico, o indivíduo vê o sólido como um todo, não percebendo suas partes. A partir desse fato, foi criada a Caixa de Becker, sendo essa, não somente uma caixa, mas um propósito de sua utilização. Seu objetivo é oportunizar uma percepção diferenciada dos sólidos, onde ao tatear o objeto, o sujeito reconhece cada uma das partes, decompondo e recompondo-as no objeto completo.

Observando-se os resultados obtidos, pôde-se perceber que a seqüência de atividades propostas auxiliou os alunos no desenvolvimento de sua capacidade de visualização geométrica e representação de objetos tridimensionais no plano, ou seja, os objetivos desse estudo foram alcançados.

Após a aplicação da seqüência, retomamos o conteúdo programático da disciplina, onde foram vistos os cálculos de área e de volume dos sólidos elementares. A facilidade com que os alunos aprenderam o conteúdo reafirmou o sucesso da proposta. Bastou apresentar os sólidos aos alunos, com suas propriedades, porém não foram atribuídas fórmulas específicas para o cálculo de áreas e volumes, como propõem os livros didáticos. A área de uma superfície foi entendida como a soma das áreas de cada uma das faces, por exemplo.

Com o desenvolvimento da capacidade de representar os sólidos bidimensionalmente, foi possível trabalhar com sólidos não elementares, os alunos compreendiam a forma da figura e associavam as informações enunciadas com os elementos da figura. Os diagramas foram entendidos pelos alunos como uma ferramenta para auxiliar na resolução de problemas, como uma forma de organizar os dados.

REFERÊNCIAS

- BIGODE, A.: A matemática hoje é feita assim. São Paulo: FTD, 2004.
- CARLOVICH, M (2005): A geometria dedutiva em livros didáticos das escolas públicas do estado de São Paulo para o 3º e 4º ciclos do ensino fundamental. Dissertação de Mestrado PUC-SP, 2005.
- CEIA, M.: A taxonomia SOLO e os níveis de van Hiele. ESEP.
- CENTURIAN, M.: Novo matemática na medida certa, vol 5, 6, 7, 8. São Paulo: Scipione, 2003.
- CORBERÁN, R. Et al. Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la Geometria en Enseñanza Secundária baseada en el modelo van Hiele. (C.I.D.E., M.E.C.:Madrid), pp. 31-88
- DING, L. e JONES, K.: using the van Hiele theory to analyse the teaching of geometrical proof at grade 8 in shangai. U.K, 2007.
- GUTIÉRREZ, A: las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. (Revista EMA 1998, vol. 3, nº 3, pp 193 – 220)
- GUTIERREZ, A.: procesos y habilidades en visualización espacial. Valencia 1991.
- GUTIERREZ, A.:Exploring the links between van Hiele levels and 3-dimensional Geometry. Departamento de Didáctica de la matemática, Universidad de Valencia, Sapain,1992.
- JAIME, A. GUTIÉRREZ, A.:una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometria: El modelo de van Hiele, en S. Llinares, M.V. Sánchez (eds.), teoria y práctica en educación matemática (Alfar: Sevilla, Spain), pp. 295 – 384 (fragmentos),1990.
- MIORIM, M. A. Introdução à história da educação Matemática. São Paulo: Atual, 1998.
- OLKUN, S., SINOPLU, N. e DERYAKULU, D.: Geometric explorations with dynamic geometry applications based on van Hiele levels. International journal for mathematics teaching and learning. International Journal for Mathematics Teaching and Learning, Turkey.
- PAVANELLO, R. M.: O abandono do Ensino da Geometria no Brasil, causas e conseqüências. Revista Zetetiké, UNICAMP, Campinas, ano I – n. 1, p. 7-17, 1993.

PERDIKARIS, S.: the problem of transition across levels in the van Hiele theory of geometric reasoning. 1996.

PIAGET, J. e INHELDER, B.: A imagem mental na Criança: estudo sobre o desenvolvimento das representações imagéticas. Porto: Livraria Civilização, 1977.

PIAGET, J. e INHELDER, B.: A Representação do Espaço na Criança. Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.

PIRES, I. M. P.: Livros Didáticos e a Matemática do Ginásio: um estudo vulgata para a reforma Francisco Campos, Dissertação de Mestrado. PUC-SP, 2004.

_____. Secretaria da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais. Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental, Livro 3. Brasília, 1998.

_____. Secretaria da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais. Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental, Matemática. Brasília, 1997.

_____. Secretaria da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 1998.

SILVA, M.: A geometria escolar moderna de Osvaldo Sangiorgi. GHEMAT – PUC/SP

VLADIMIRSKII, G.: na experimental verification of a method and system of exercises for developing spatial imagination. Moscow, 1948.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

- ALSINA: Materiales para construir la geometria. Madrid, Editorial Síntesis, 1988
- CLEMENTS, D. E BATTISTA, M.: geometry and spatial reasoning, New York, 1989.
- IMENES, L. Matemática para todos: vol. 5, 6 7 e 8/ Luiz Macio Imenes, Marcelo Lellis – São Paulo: Scipione, 2002.
- LIMA, M. Matemática -: você constrói, livro do professor/ Maria Aparecida Barroso de lima, Nicola Siani Filho, Thales de Couto Filho. Rio de Janeiro, Ediouro, 1996.
- MASON, M.: the van Hiele levels of geometric understanding. University of Virgínia.
- PEREIRA, G., SILVA, S. e MOTTA, W.: o modelo van Hiele de ensino de geometria aplicado à 5° e 6° séries do ensino fundamental. Famat em Revista, n° 5, setembro de 2005.
- TOSSATO, C. Manual do professor – matemática, vol 5, 6, 7 e 8, coleção idéias e relações / Claudia Miriam Tosato, Edileine do Pilar F. Peracchi, Violeta M. Estephan. São Paulo: Nova Didática.
- WERNECK, A.: Euclides Roxo e a reforma Francisco Campos: a gênese do primeiro programa de ensino de matemática brasileiro. Dissertação de Mestrado. PUC-SP, 2003.

ANEXOS

1 Proposta Didática para aplicação em Sala de Aula:

Ao leitor: segue uma sugestão de proposta didática para uso direto em sala de aula. Para entender-se o objetivo de cada atividade, bem como sua justificativa, sugiro a leitura dos capítulos 5 e 6.

Atividade 1:

Recursos: cubos, folha de papel isométrico.

Apresentar uma composição de cubos aos alunos. Cada aluno deve fazer uma representação do sólido.

(Sugestão de Sólidos: Figura 6.1)

Justificativa: Essa atividade tem como objetivo introduzir o uso do papel isométrico pelos alunos. Gutierrez (1992) afirma que a habilidade de usar o papel isométrico para desenhar sólidos se desenvolve de forma espontânea, mais lentamente do que as tarefas são propostas em aula. Por esse motivo, houve uma preocupação em trabalhar o uso do papel isométrico de forma paulatina.

Atividade 2:

Recursos: cubos, folha de papel isométrico, folha branca, papel cartaz, tesoura e régua.

2.1 Dividir a turma em pequenos grupos. Cada grupo deverá criar um sólido formado pela composição de cubos e então, individualmente, desenhar esse sólido. Feito isso, o grupo deverá identificar cada uma das diferentes faces que compõe o sólido, desenhando-as em uma folha em branco. Junto ao desenho, deverá aparecer a quantidade em que cada face está presente no sólido.

2.2 O grupo deverá construir cada uma dessas faces isoladamente em papel cartaz (não é planificação), recortando-as criando assim um tipo de “quebra-cabeças”.

O grupo deverá entregar ao professor um conjunto de peças e o desenho do sólido dentro de um envelope.

Justificativa: No primeiro momento, a atividade permite que os alunos reforcem a habilidade de usar o papel isométrico, dado que Gutierrez (1992) afirma que essa habilidade se desenvolve de forma espontânea. Segundo van Hiele (1959), no primeiro contato com a geometria os alunos vêem os sólidos como um todo, não conseguem identificar suas partes, as formas de suas faces. Essa atividade permite que os alunos decomponham o sólido em suas partes, identificando cada uma de suas faces, nos quesitos forma e quantidade.

Atividade 3:

Recursos: envelope com peças e desenho de um sólido, papel cartaz, tesoura, régua e cola.

O professor deverá redistribuir os envelopes entre os grupos. Os grupos deverão, com base no desenho, construir uma possível planificação do sólido com as peças recebidas, então deverão reproduzir planificação em papel cartaz e montar o sólido. Ao final da atividade, os sólidos deverão ser entregues ao professor.

Obs.: o professor poderá desafiar os alunos a fazerem uma planificação mais “econômica”, de forma que os resíduos de papel cartaz sejam minimizados.

Justificativa: Com essa atividade, os alunos desenvolvem uma noção de como um sólido pode ser planificado. Os alunos têm a oportunidade de simular um movimento do sólido se “abrindo” e com isso, conseguem perceber a posição em que cada face deve ocupar na planificação. O fato de os alunos terem de construir o sólido serve como validação de seus resultados. Essa atividade foi de suma importância, pois evitou que os alunos buscassem uma alternativa que fugiria do objetivo do trabalho, como por exemplo, a técnica utilizada pelo aluno da Licenciatura em Matemática que numerou as faces do sólido e utilizou apenas relações de vizinhança para a construção da planificação.

Atividade 4:

Recursos: sólido de papel cartaz, caixa de papelão, folha em branco.

O professor deve redistribuir os sólidos entre os grupos, dentro da caixa de papelão. A caixa deverá conter dois furos por onde os alunos colocarão as mãos e reconhecerão o

sólido apenas pelo tato. Os alunos, individualmente deverão representar o sólido na folha em branco.

Obs1.: Se necessário, retome o uso do papel isométrico, mas incentive os alunos a tentar fazer o desenho em folhas brancas.

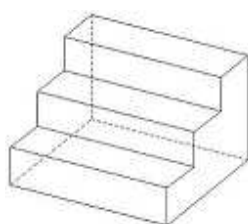
Obs2.: É importante que nas atividades anteriores, os alunos não vejam os sólidos produzidos pelos demais grupos, pois essa atividade é interessante quando não se imagina qual o objeto que está dentro da caixa.

Justificativa: Para Piaget, a imagem é o esforço do indivíduo em evocar objetos ausentes. O contato tátil com o objeto, implica numa assimilação diferente da provocada pelo contato visual. O objetivo dessa atividade é que os alunos criem uma imagem antecipadora através de ações sistemáticas e coordenadas sobre o objeto. Nesse processo, o indivíduo passa por três etapas: a interação com o objeto através do tato; a criação da imagem antecipadora; a reprodução da imagem antecipadora.

Atividade 5:

Recursos: sólido em forma de escada, folha em branco, papel acetato ou radiografia descolorida, tesoura, cola e régua.

5.1 Mostrar aos alunos o sólido representado abaixo.



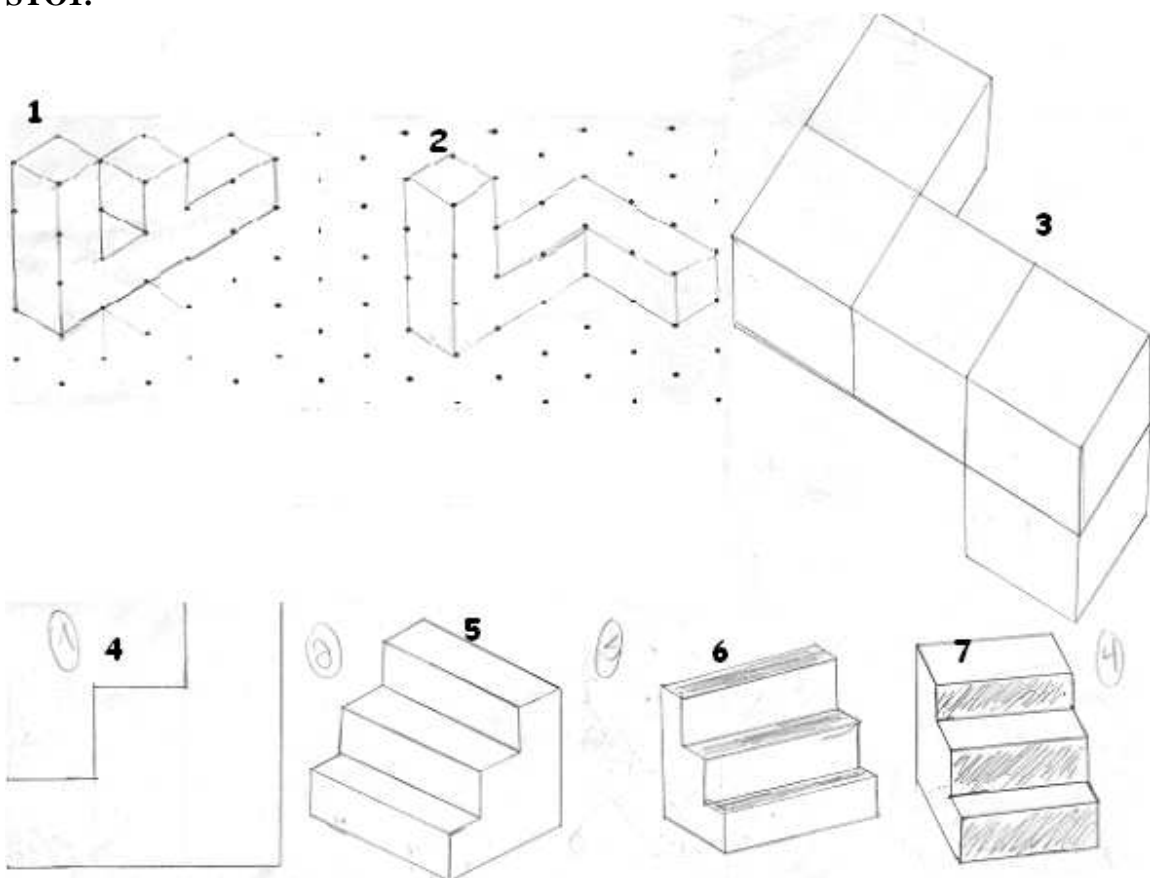
Pedir que os alunos reconstruam o sólido em papel acetato ou em folha de radiografia.

5.2 Cada aluno deverá representar o sólido em folha branca. O professor deve introduzir o uso de linhas pontilhadas para as arestas que não ficam visíveis na parte frontal do sólido.

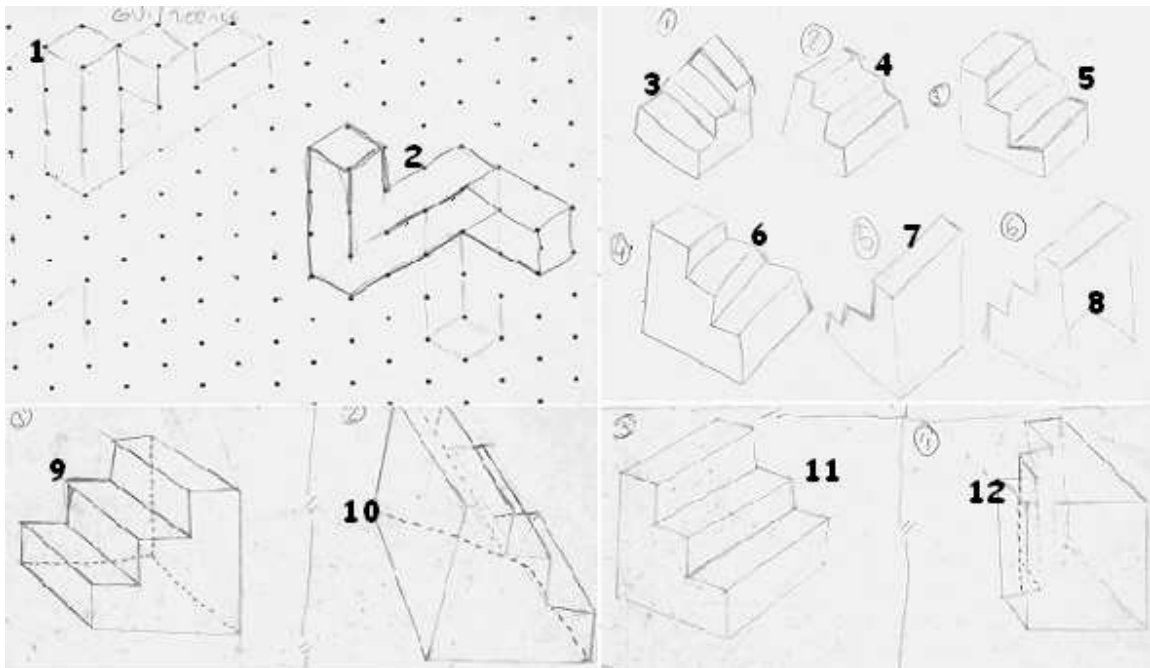
Justificativa: A proposta dessa atividade é que os alunos sintam a necessidade de utilizar algum artifício para representar todas as faces do sólido, para seus diagramas caracterizarem satisfatoriamente o sólido.

2 Produção individual de Alunos colhida na testagem da seqüência didática Final

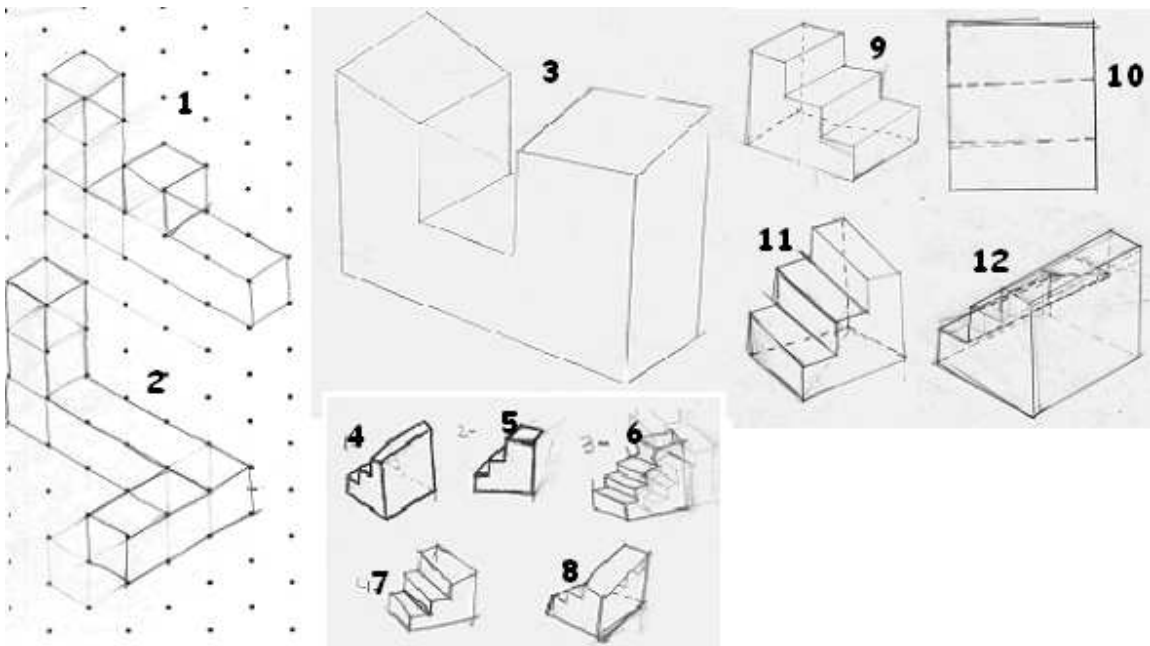
STO1:



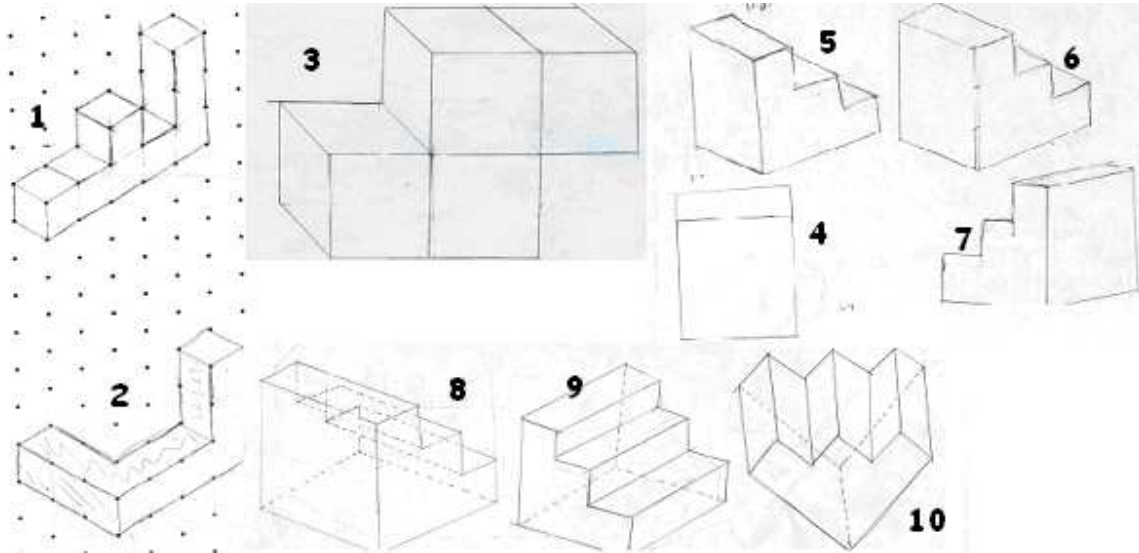
STO2:



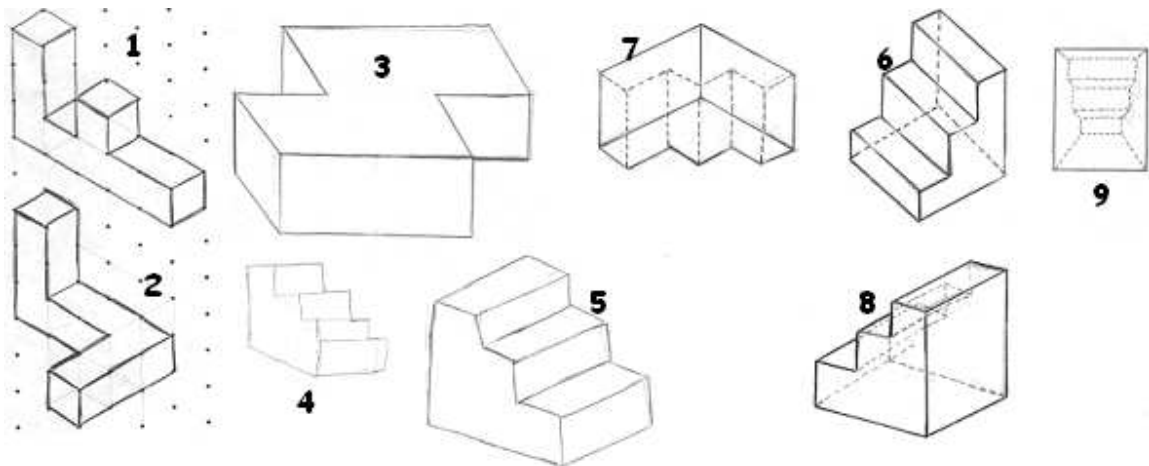
STO3:



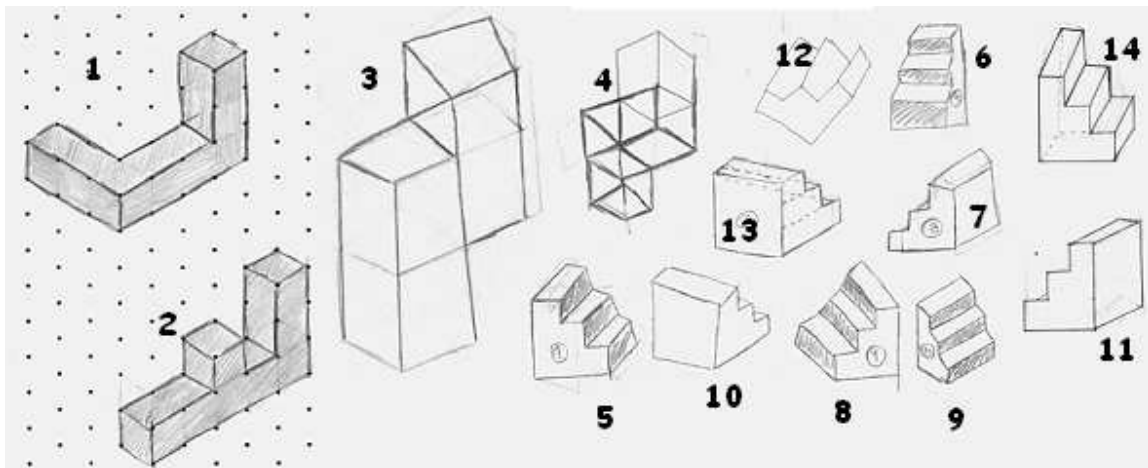
STO4:



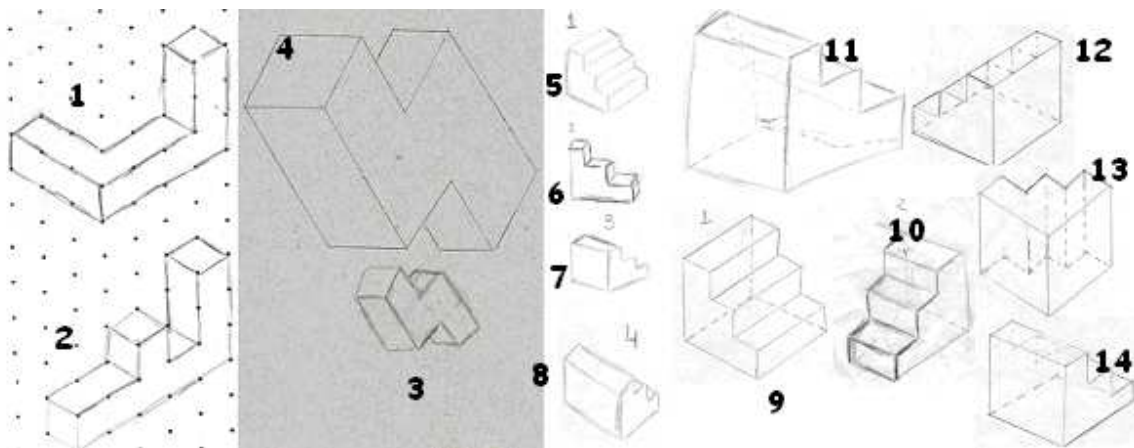
STO5:



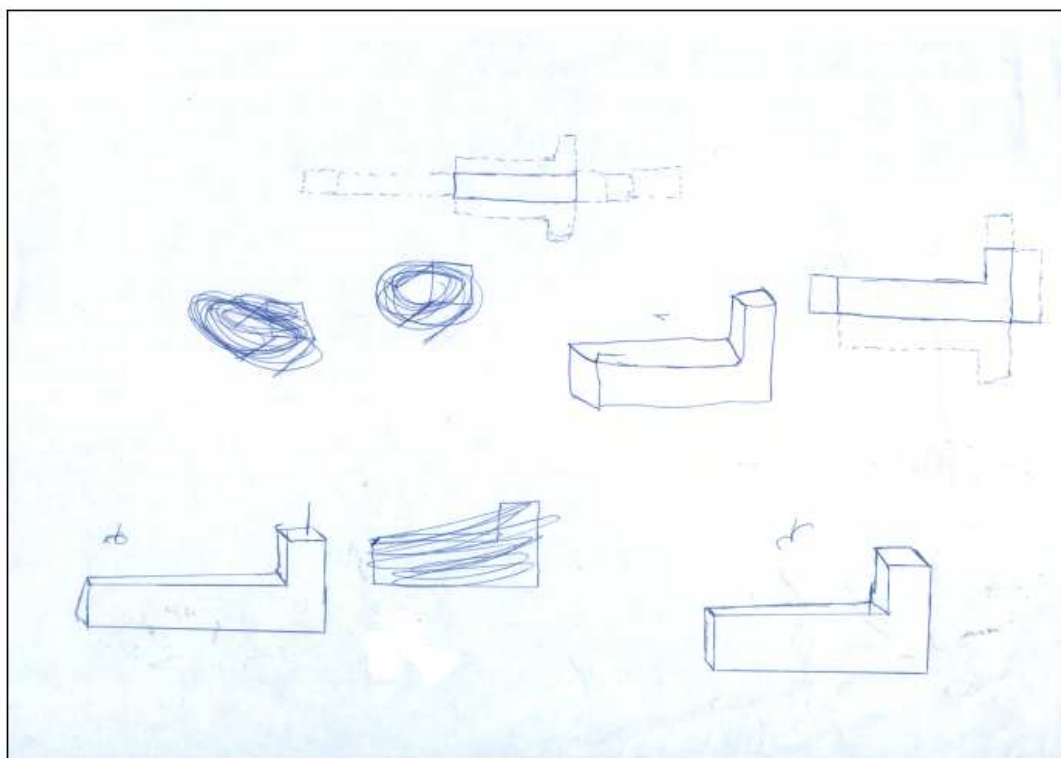
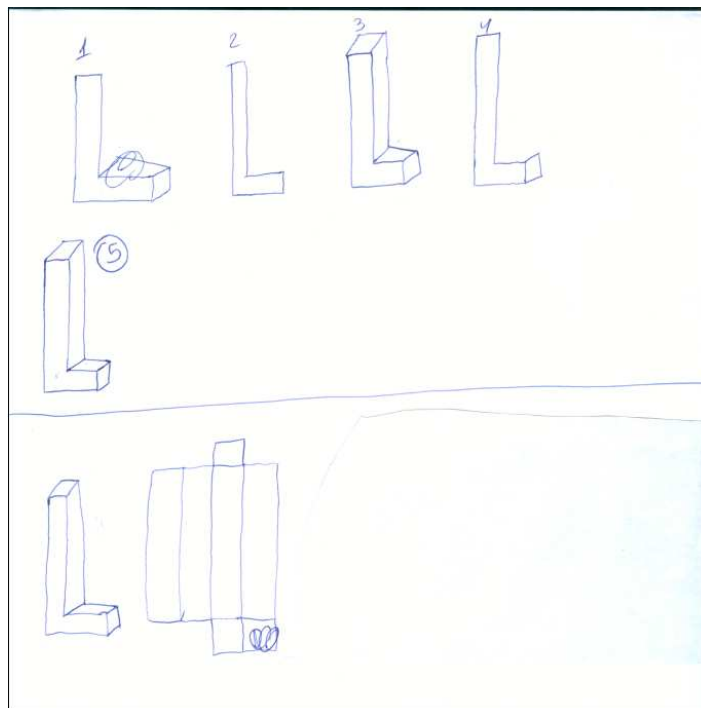
STO6:

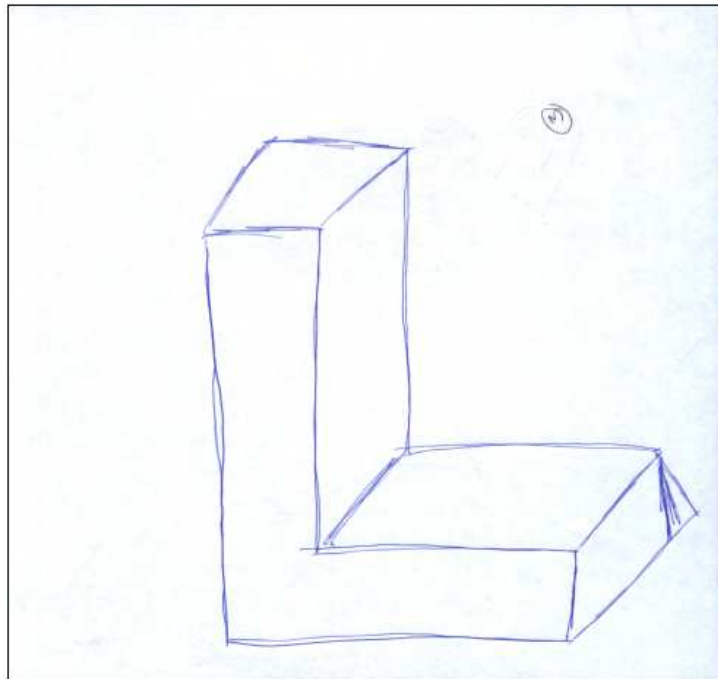
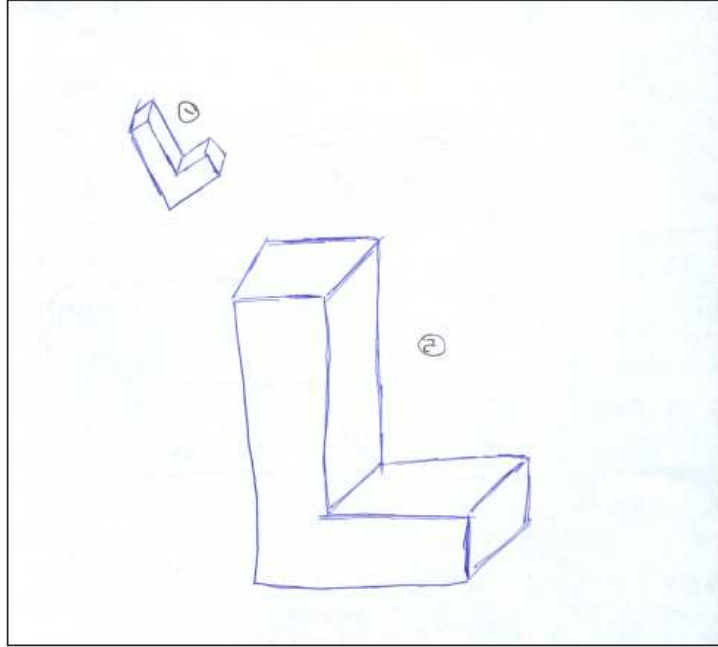


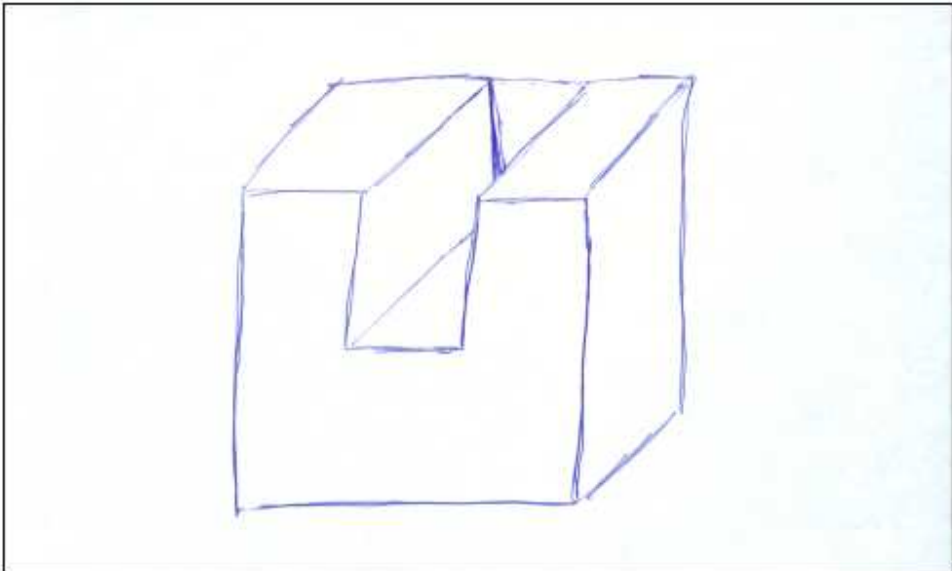
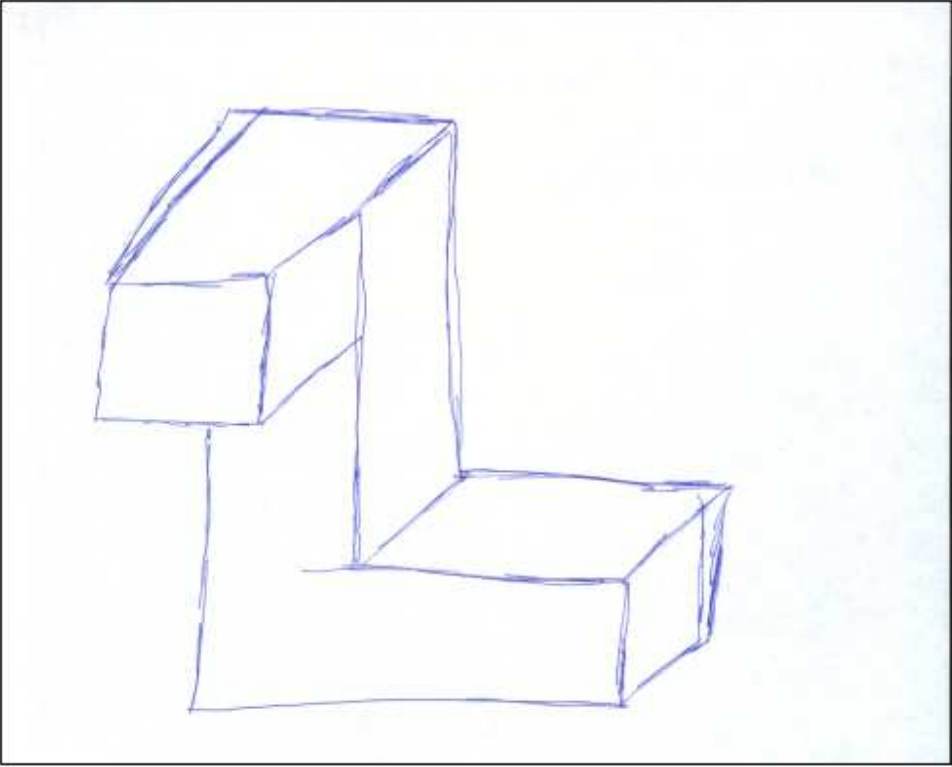
STO7:

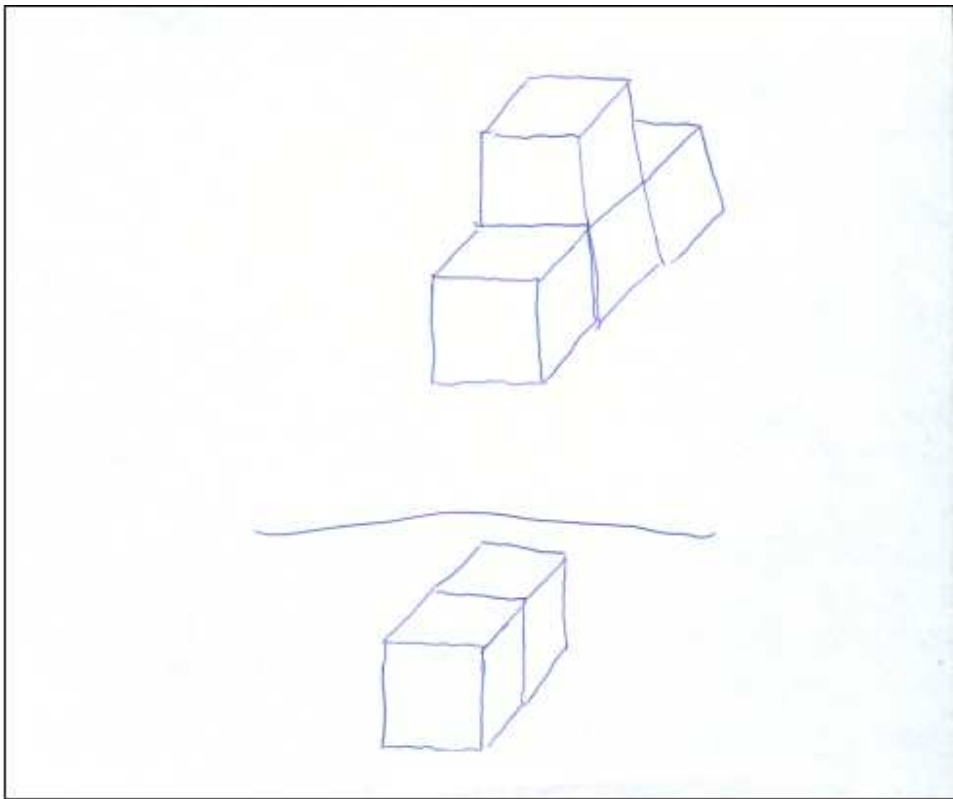
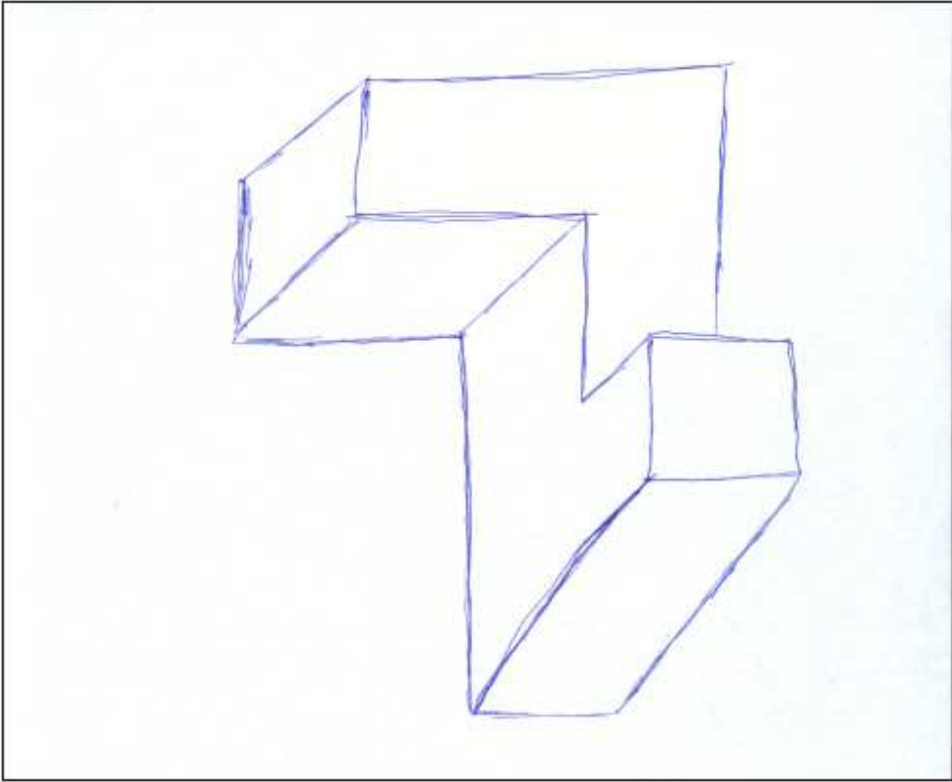


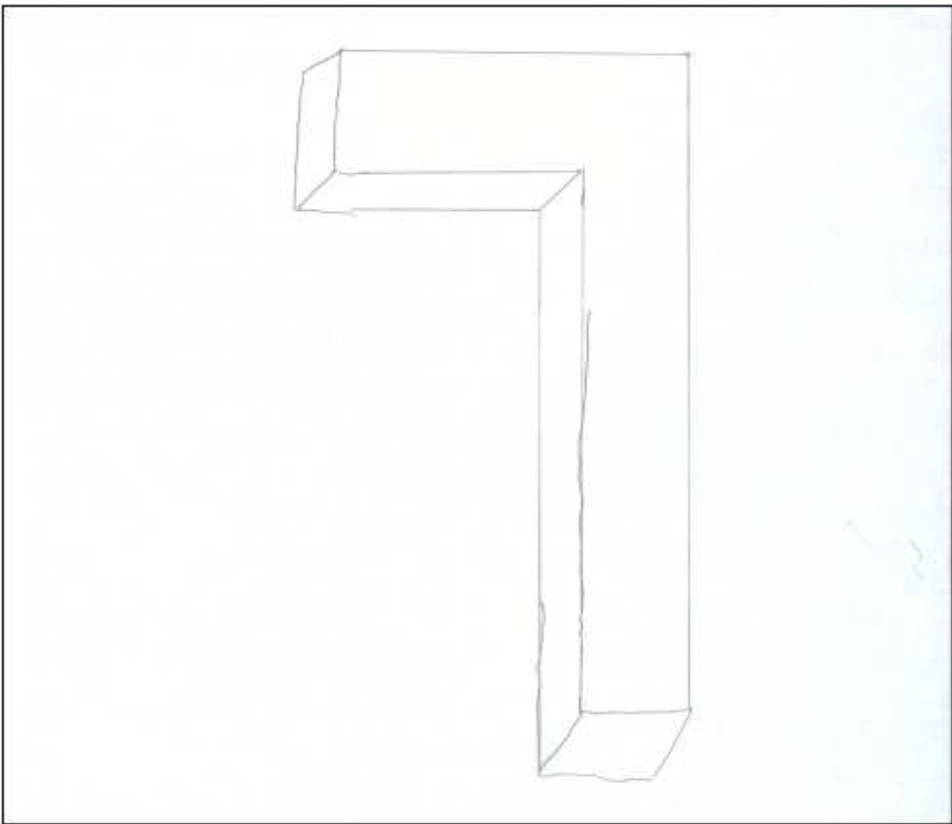
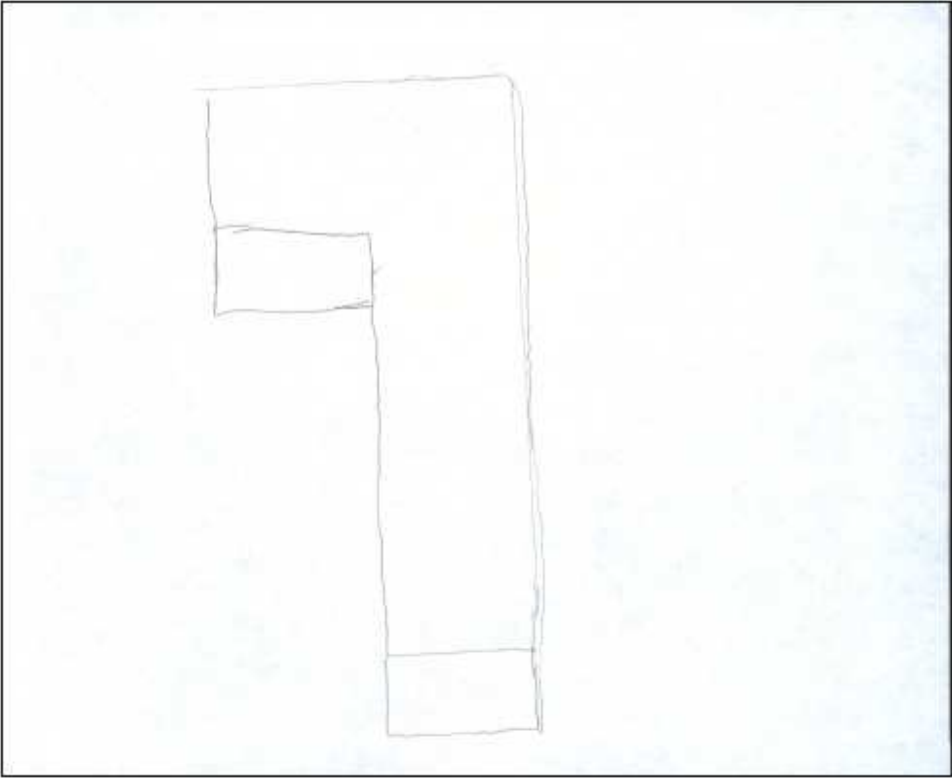
3 Aplicação da Caixa de Becker em Alunos do Ensino Médio





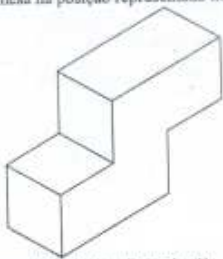







4 Atividade proposta a alunos do ensino Médio

Atividade 1:
Coloque o sólido em cima da mesa na posição representada no diagrama abaixo:

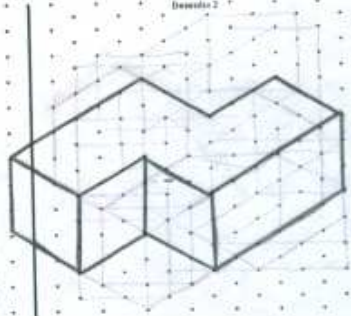


1.a) Reproduza o desenho no papel isométrico (Desenho 1).
1.b) Mude a posição do objeto na mesa e desenhe-o na nova posição (Desenho 2).

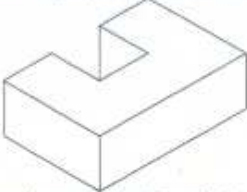
Desenho 1



Desenho 2




Atividade 2:
Coloque o sólido em cima da mesa na posição representada no diagrama abaixo:

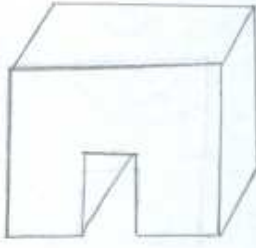


1.a) Reproduza o desenho no papel espaço abaixo (Desenho 1).
1.b) Mude a posição do objeto na mesa e desenhe-o na nova posição (Desenho 2).

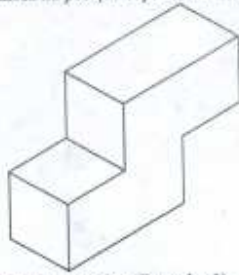
Desenho 1



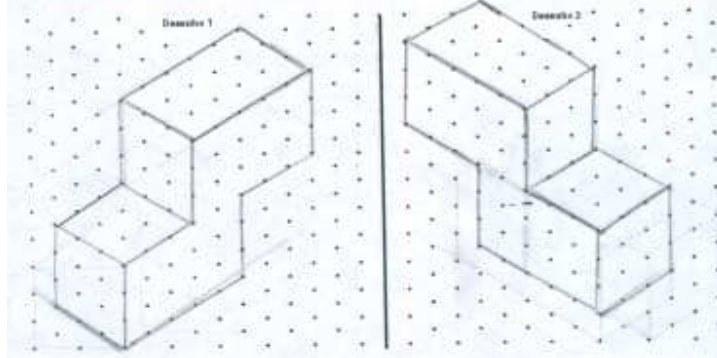
Desenho 2



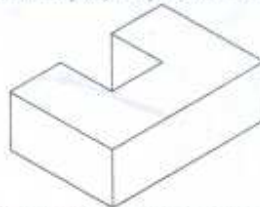
Atividade 1:
Coloque o sólido em cima da mesa na posição representada no diagrama abaixo:



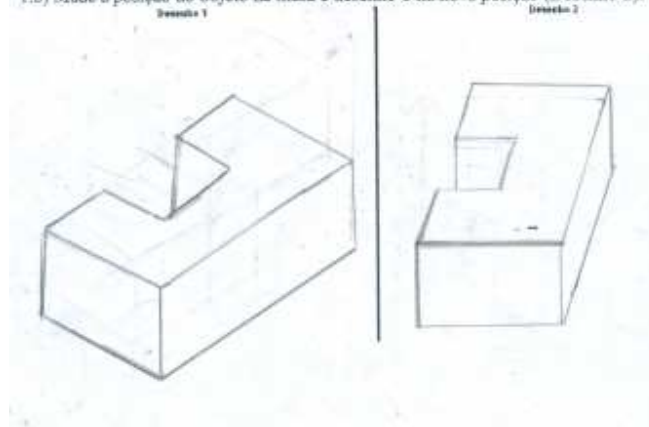
- 1.a) Reproduza o desenho no papel isométrico (Desenho 1).
- 1.b) Mude a posição do objeto na mesa e desenhe-o na nova posição (Desenho 2).



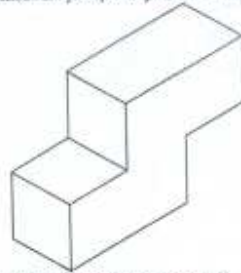
Atividade 2:
Coloque o sólido em cima da mesa na posição representada no diagrama abaixo:



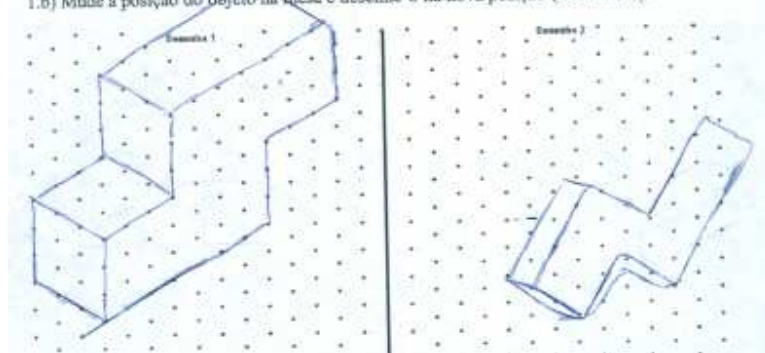
- 1.a) Reproduza o desenho no papel espaço abaixo (Desenho 1).
- 1.b) Mude a posição do objeto na mesa e desenhe-o na nova posição (Desenho 2).



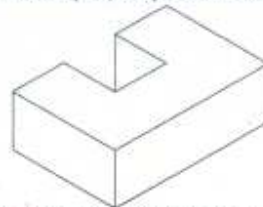
Atividade 1:
Coloque o sólido em cima da mesa na posição representada no diagrama abaixo:



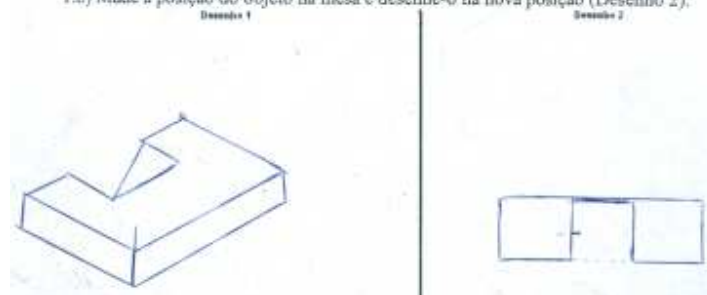
- 1.a) Reproduza o desenho no papel isométrico (Desenho 1).
- 1.b) Mude a posição do objeto na mesa e desenhe-o na nova posição (Desenho 2).



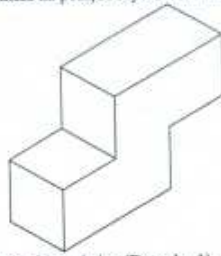
Atividade 2:
Coloque o sólido em cima da mesa na posição representada no diagrama abaixo:



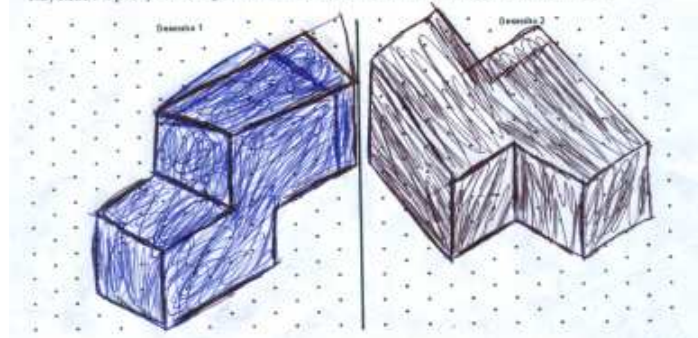
- 1.a) Reproduza o desenho no papel espaço abaixo (Desenho 1).
- 1.b) Mude a posição do objeto na mesa e desenhe-o na nova posição (Desenho 2).



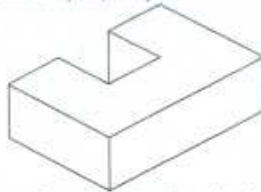
Atividade 1:
Coloque o sólido em cima da mesa na posição representada no diagrama abaixo:



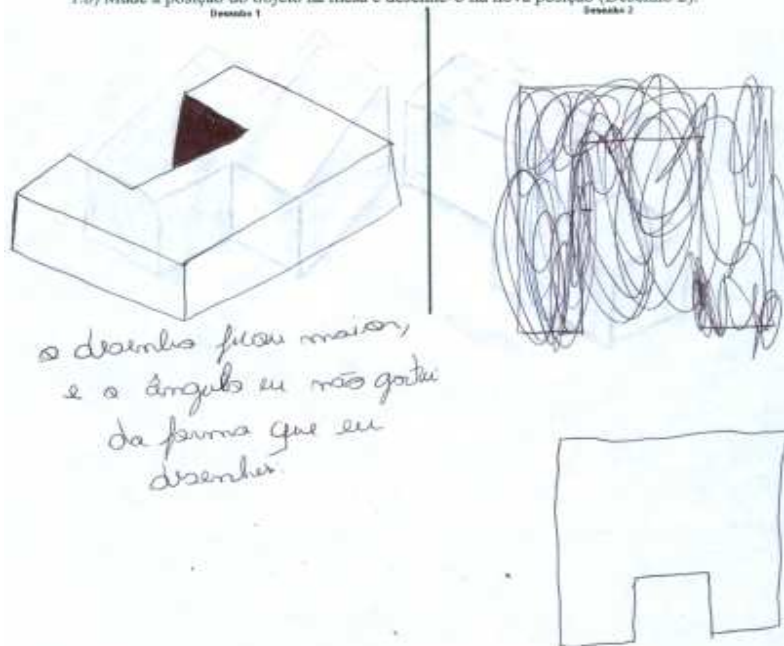
1.a) Reproduza o desenho no papel isométrico (Desenho 1).
1.b) Mude a posição do objeto na mesa e desenhe-o na nova posição (Desenho 2).



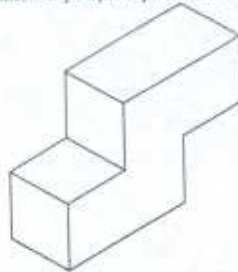
Atividade 2:
Coloque o sólido em cima da mesa na posição representada no diagrama abaixo:



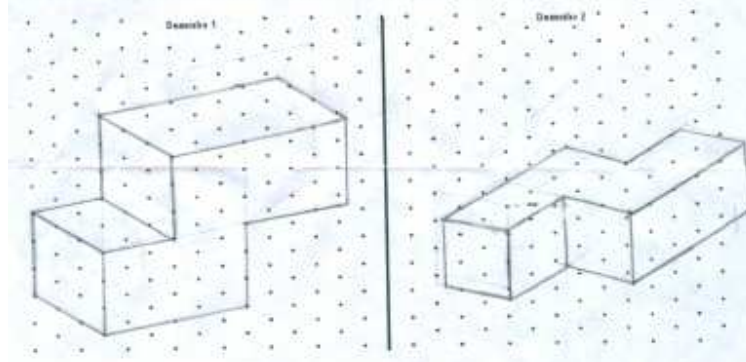
1.a) Reproduza o desenho no papel espaço abaixo (Desenho 1).
1.b) Mude a posição do objeto na mesa e desenhe-o na nova posição (Desenho 2).



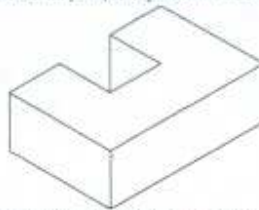
Atividade 1:
Coloque o sólido em cima da mesa na posição representada no diagrama abaixo:



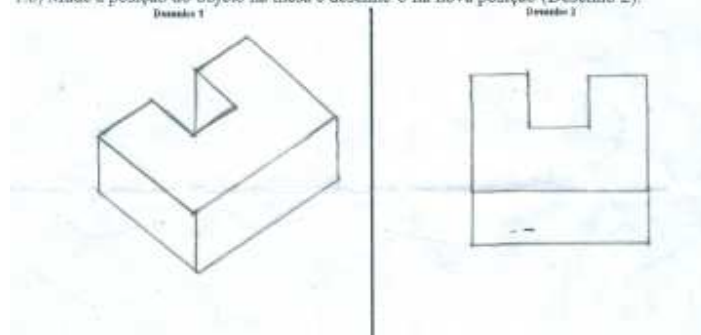
- 1.a) Reproduza o desenho no papel isométrico (Desenho 1).
- 1.b) Mude a posição do objeto na mesa e desenhe-o na nova posição (Desenho 2).



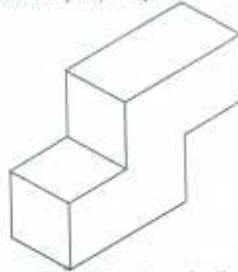
Atividade 2:
Coloque o sólido em cima da mesa na posição representada no diagrama abaixo:



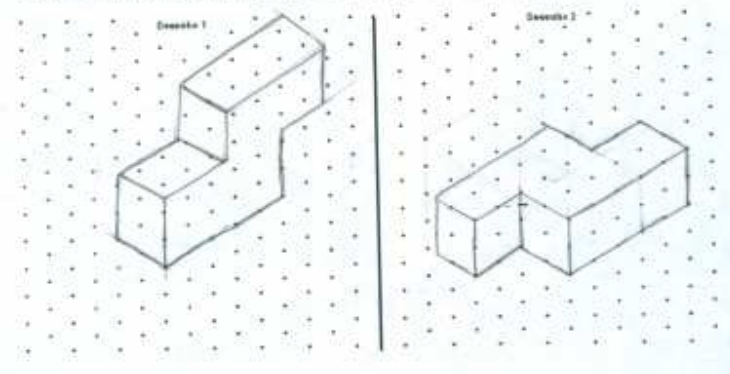
- 1.a) Reproduza o desenho no papel espaço abaixo (Desenho 1).
- 1.b) Mude a posição do objeto na mesa e desenhe-o na nova posição (Desenho 2).



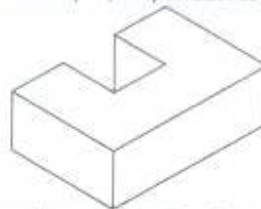
Atividade 1:
Coloque o sólido em cima da mesa na posição representada no diagrama abaixo:



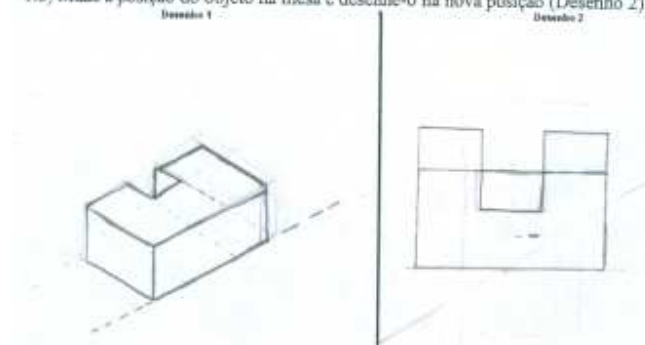
- 1.a) Reproduza o desenho no papel isométrico (Desenho 1).
- 1.b) Mude a posição do objeto na mesa e desenhe-o na nova posição (Desenho 2).



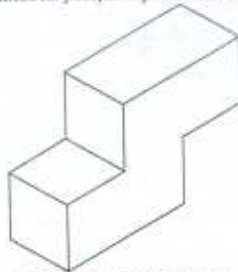
Atividade 2:
Coloque o sólido em cima da mesa na posição representada no diagrama abaixo:



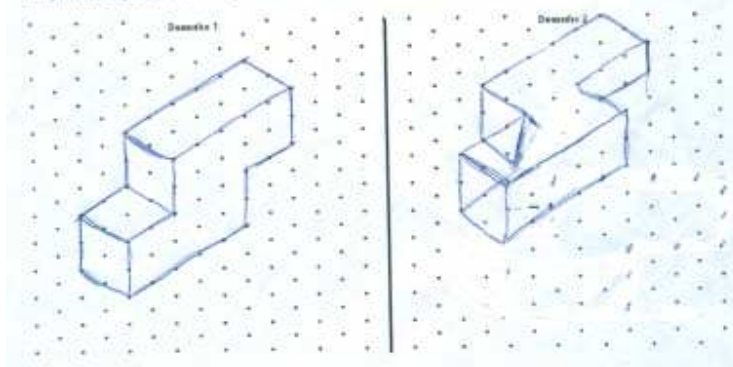
- 1.a) Reproduza o desenho no papel espaço abaixo (Desenho 1).
- 1.b) Mude a posição do objeto na mesa e desenhe-o na nova posição (Desenho 2).



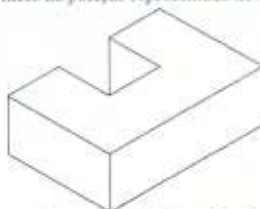
Atividade 1:
Coloque o sólido em cima da mesa na posição representada no diagrama abaixo:



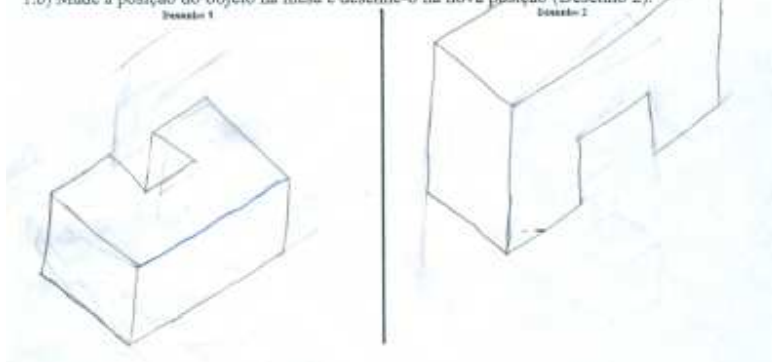
- 1.a) Reproduza o desenho no papel isométrico (Desenho 1).
- 1.b) Mude a posição do objeto na mesa e desenhe-o na nova posição (Desenho 2).



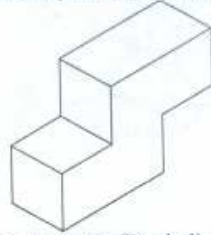
Atividade 2:
Coloque o sólido em cima da mesa na posição representada no diagrama abaixo:



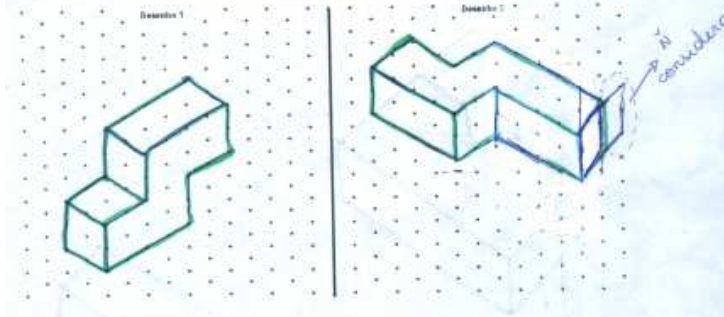
- 1.a) Reproduza o desenho no papel espaço abaixo (Desenho 1).
- 1.b) Mude a posição do objeto na mesa e desenhe-o na nova posição (Desenho 2).



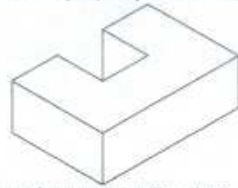
Atividade 1:
Coloque o sólido em cima da mesa na posição representada no diagrama abaixo:



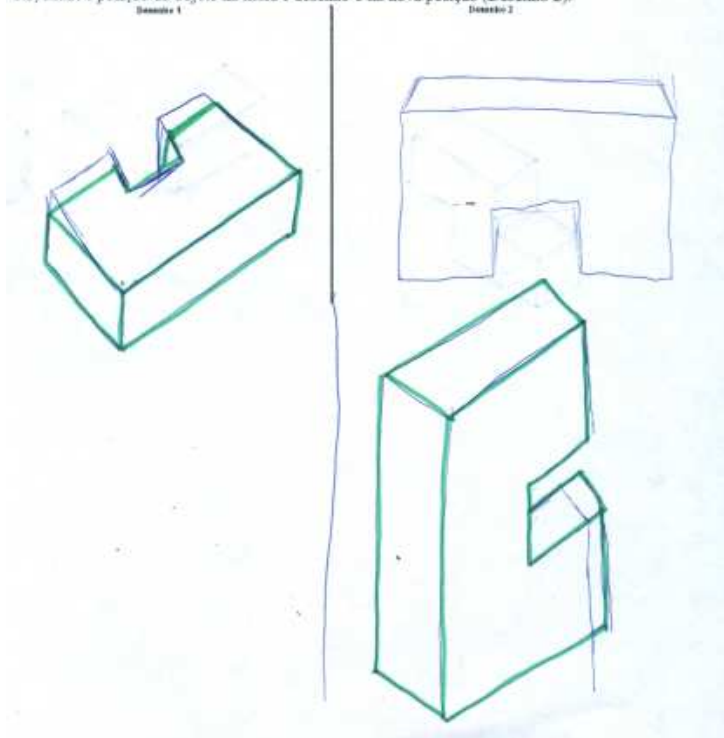
- 1.a) Reproduza o desenho no papel isométrico (Desenho 1).
- 1.b) Mude a posição do objeto na mesa e desenhe-o na nova posição (Desenho 2).



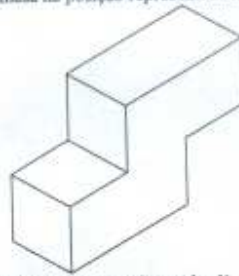
Atividade 2:
Coloque o sólido em cima da mesa na posição representada no diagrama abaixo:



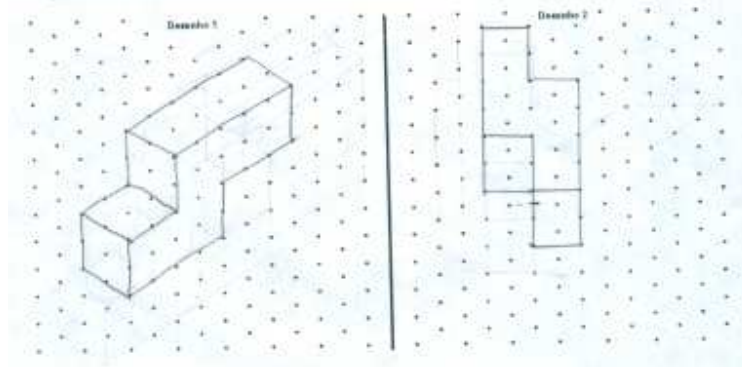
- 1.a) Reproduza o desenho no papel espaço abaixo (Desenho 1).
- 1.b) Mude a posição do objeto na mesa e desenhe-o na nova posição (Desenho 2).



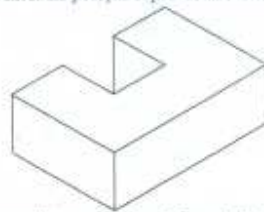
Atividade 1:
Coloque o sólido em cima da mesa na posição representada no diagrama abaixo:



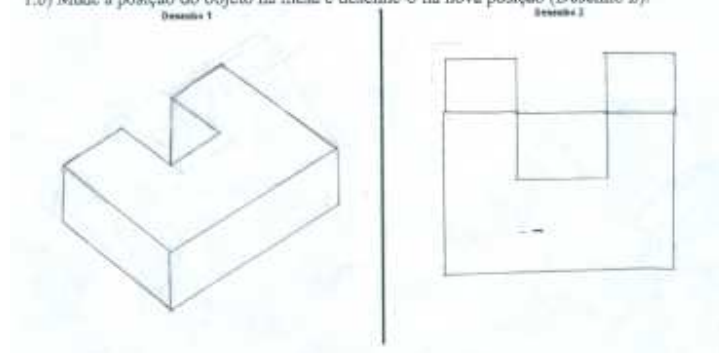
- 1.a) Reproduza o desenho no papel isométrico (Desenho 1).
- 1.b) Mude a posição do objeto na mesa e desenhe-o na nova posição (Desenho 2).



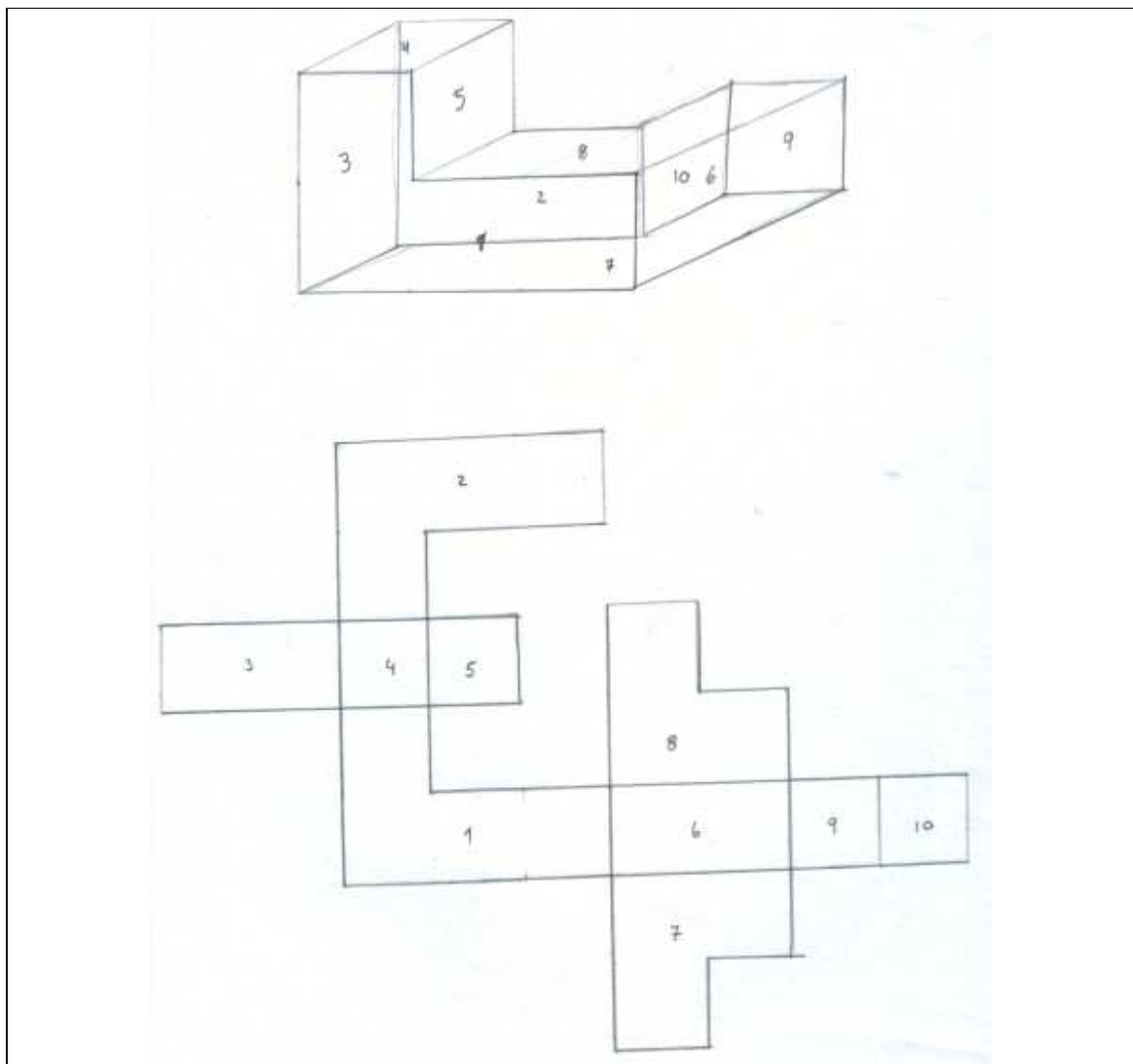
Atividade 2:
Coloque o sólido em cima da mesa na posição representada no diagrama abaixo:

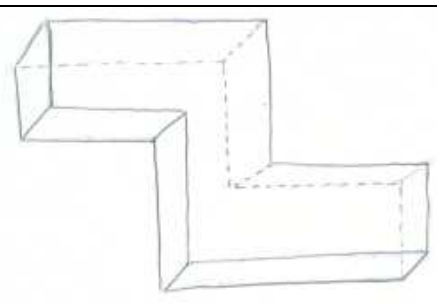
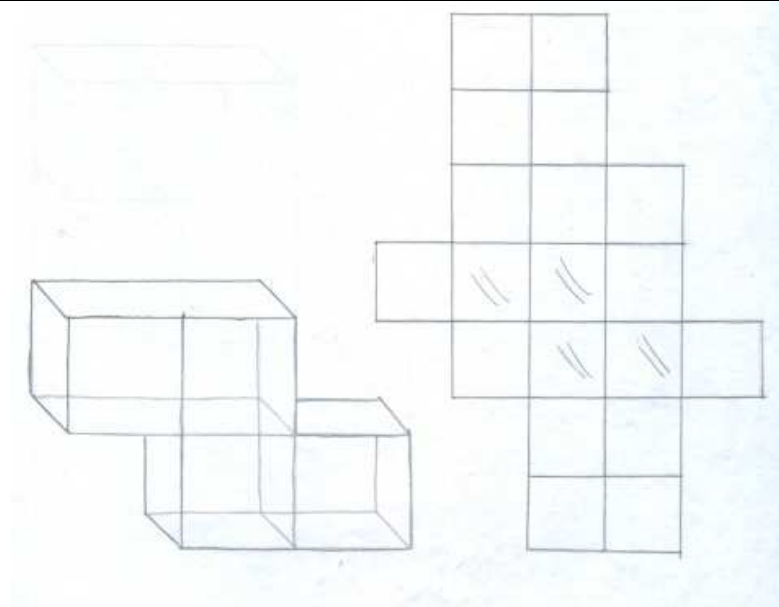


- 1.a) Reproduza o desenho no papel espaço abaixo (Desenho 1).
- 1.b) Mude a posição do objeto na mesa e desenhe-o na nova posição (Desenho 2).

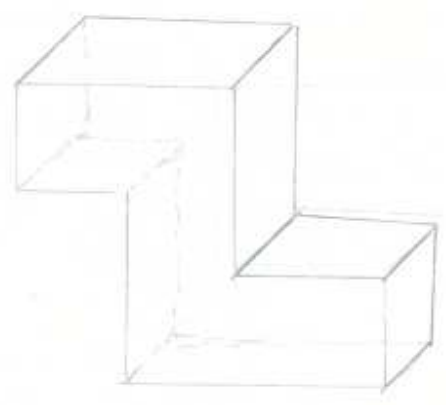


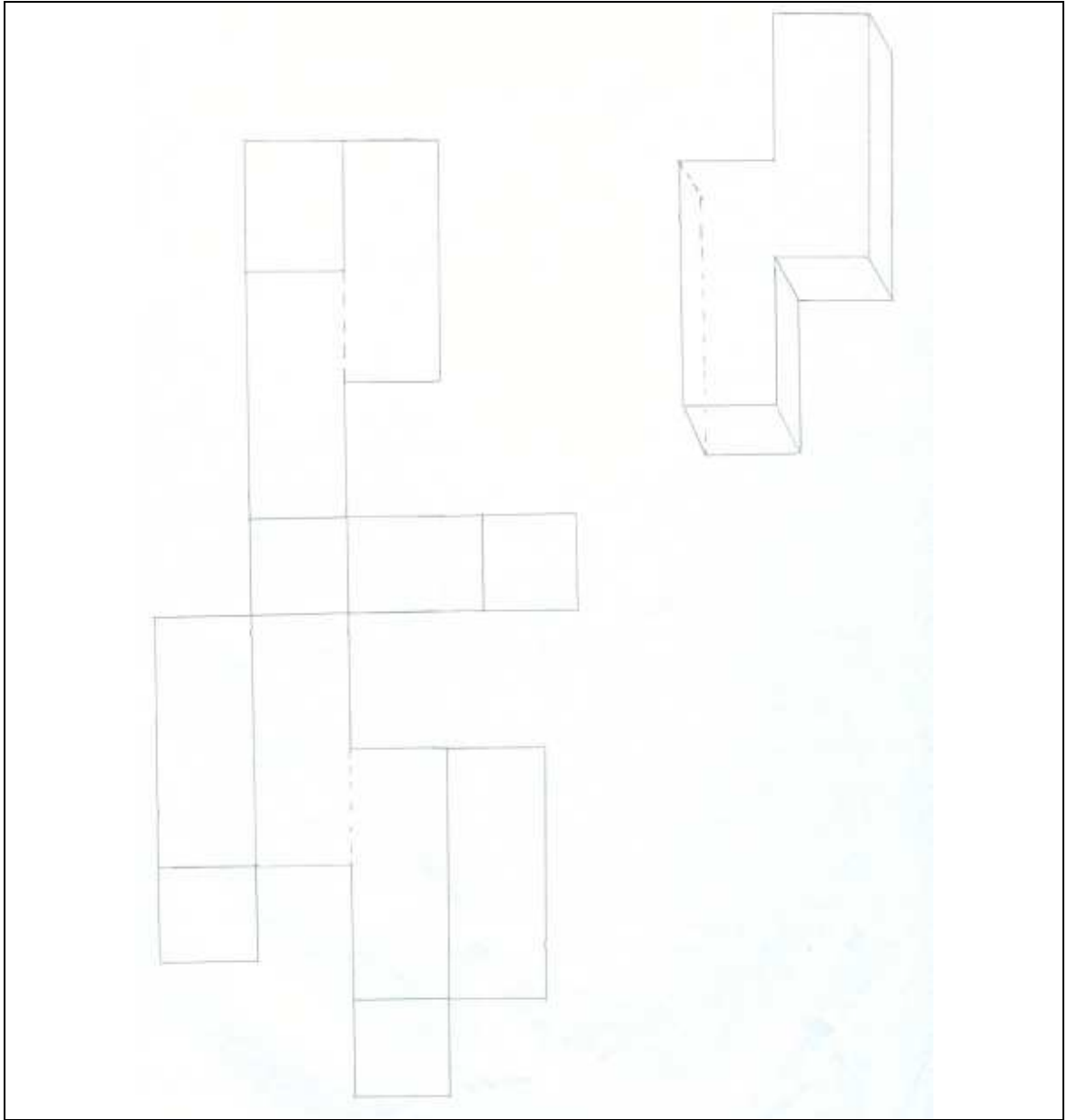
5 Aplicação da Caixa de Becker em Alunos do Curso de Licenciatura em Matemática – UFRGS

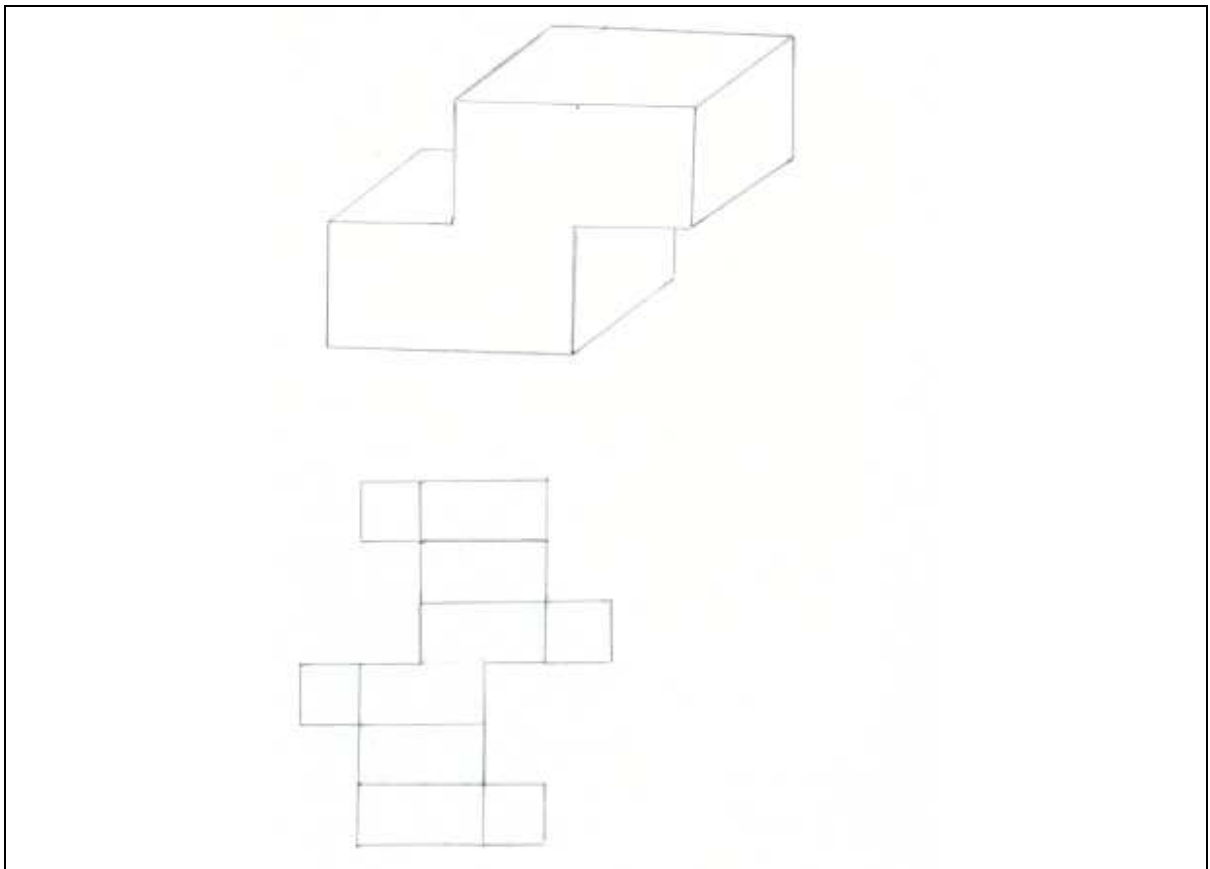
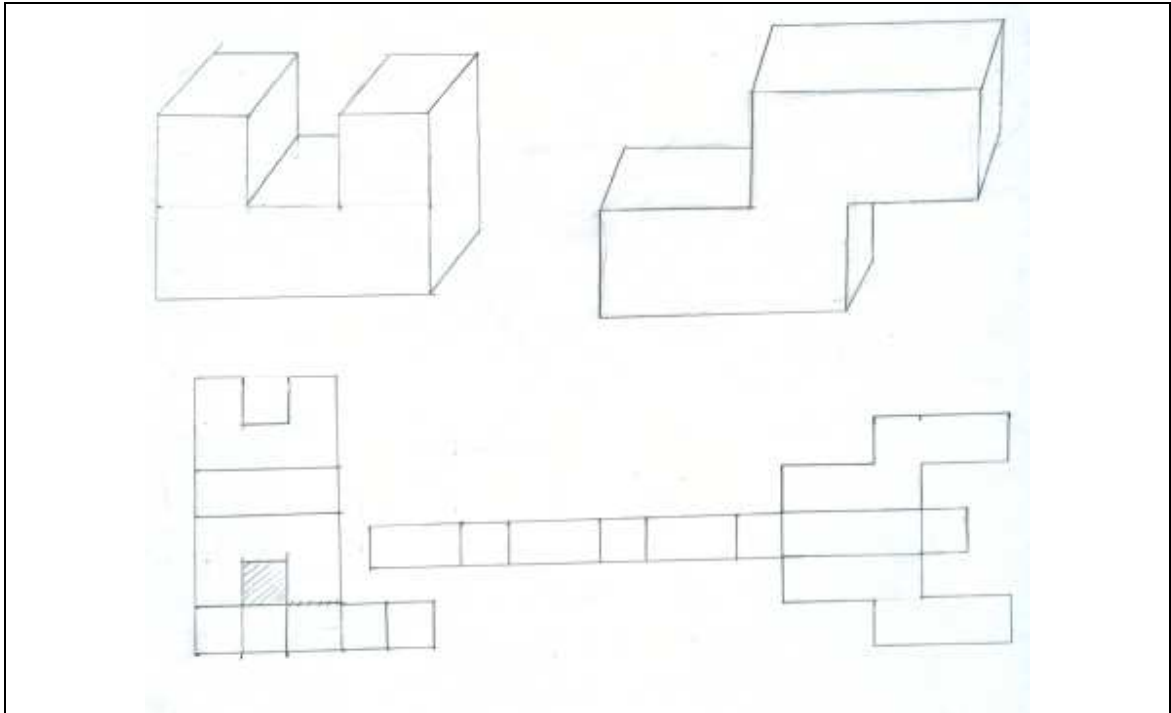


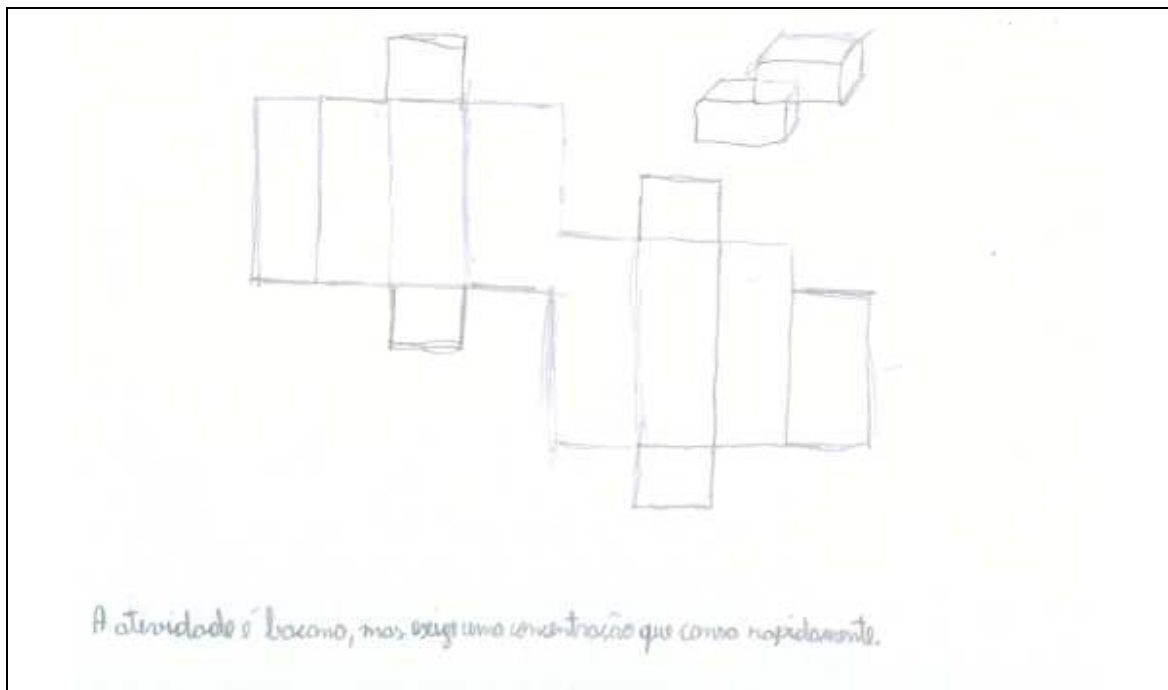
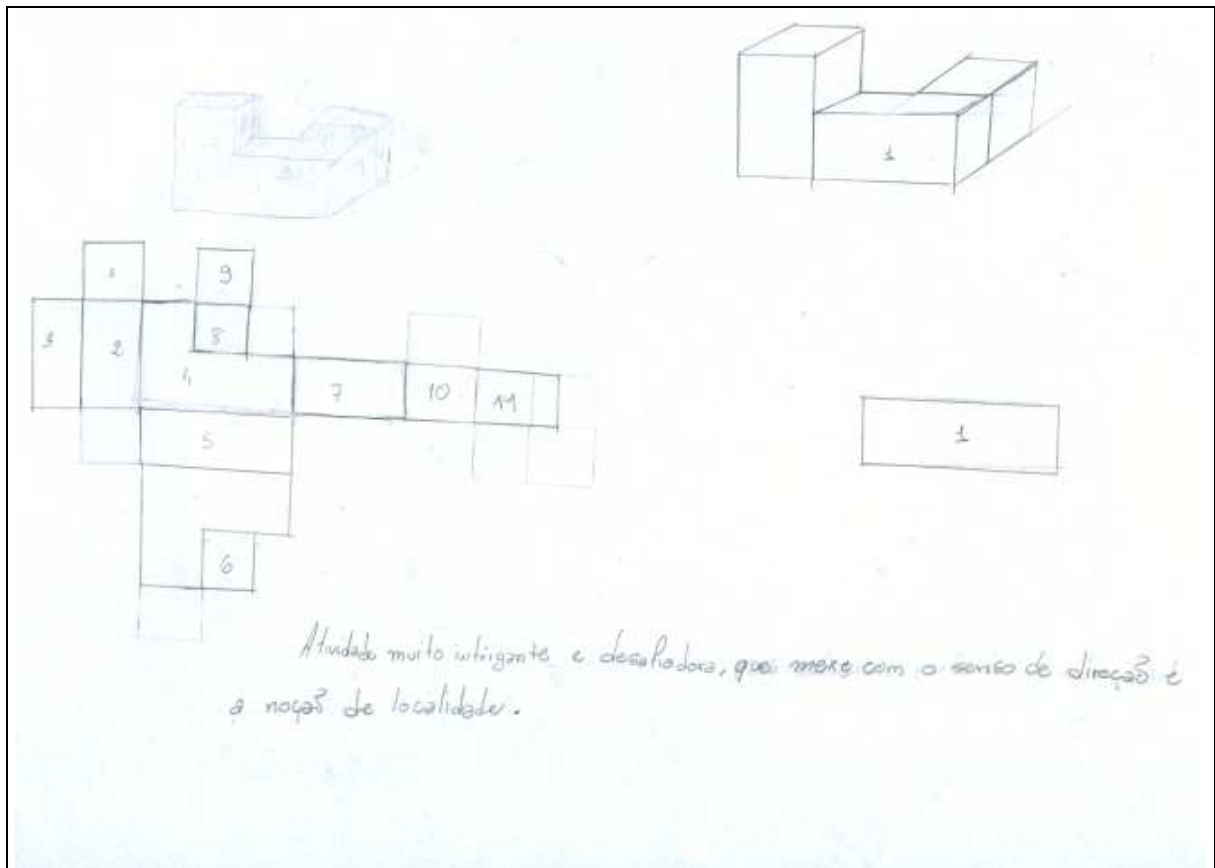


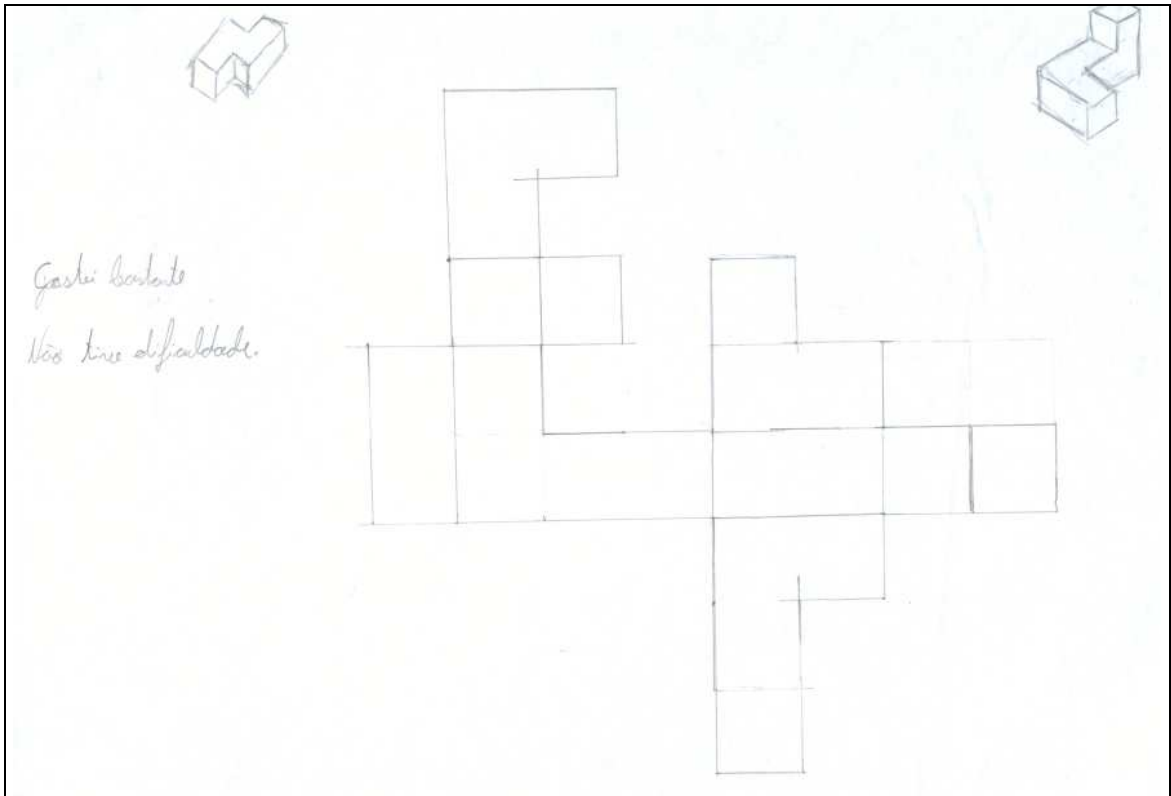
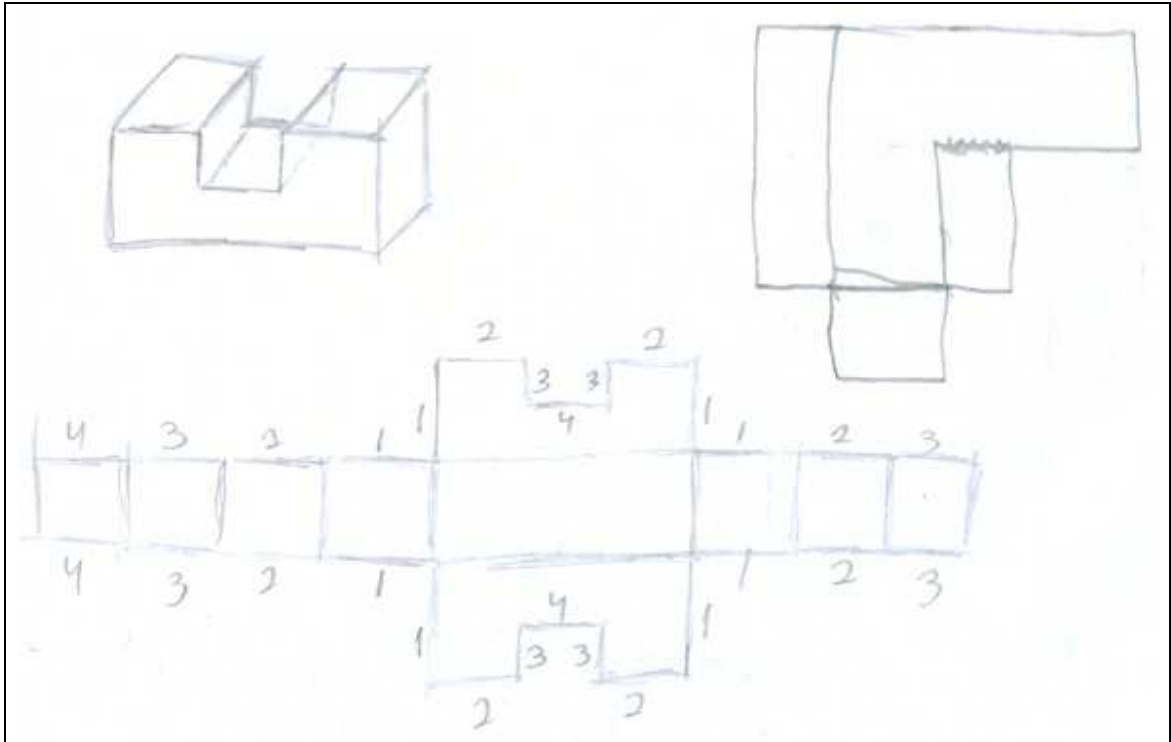
→ Eu não tive dificuldade em fazer esta figura, mas ela não ficou correta.
Achei a atividade interessante e criativa.

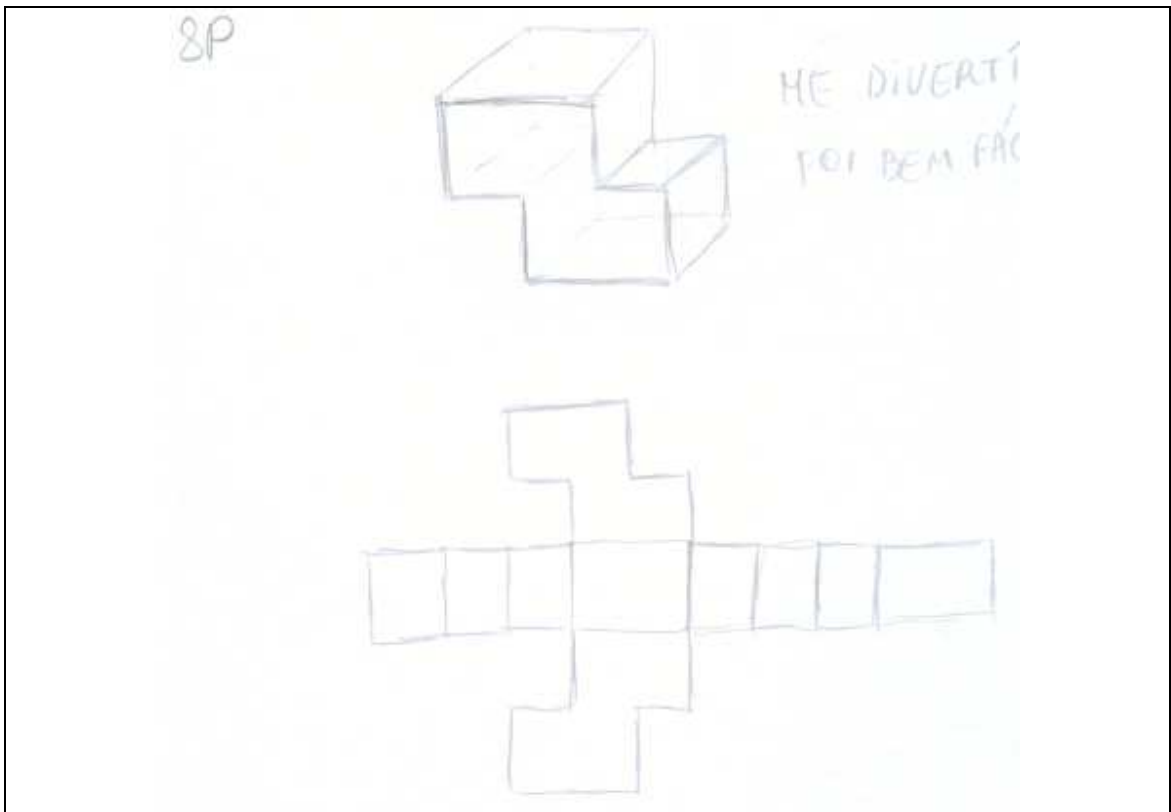
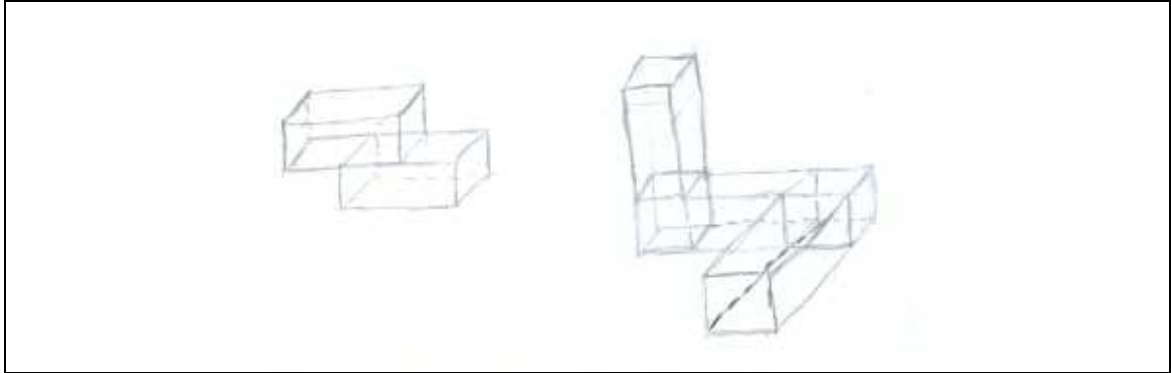


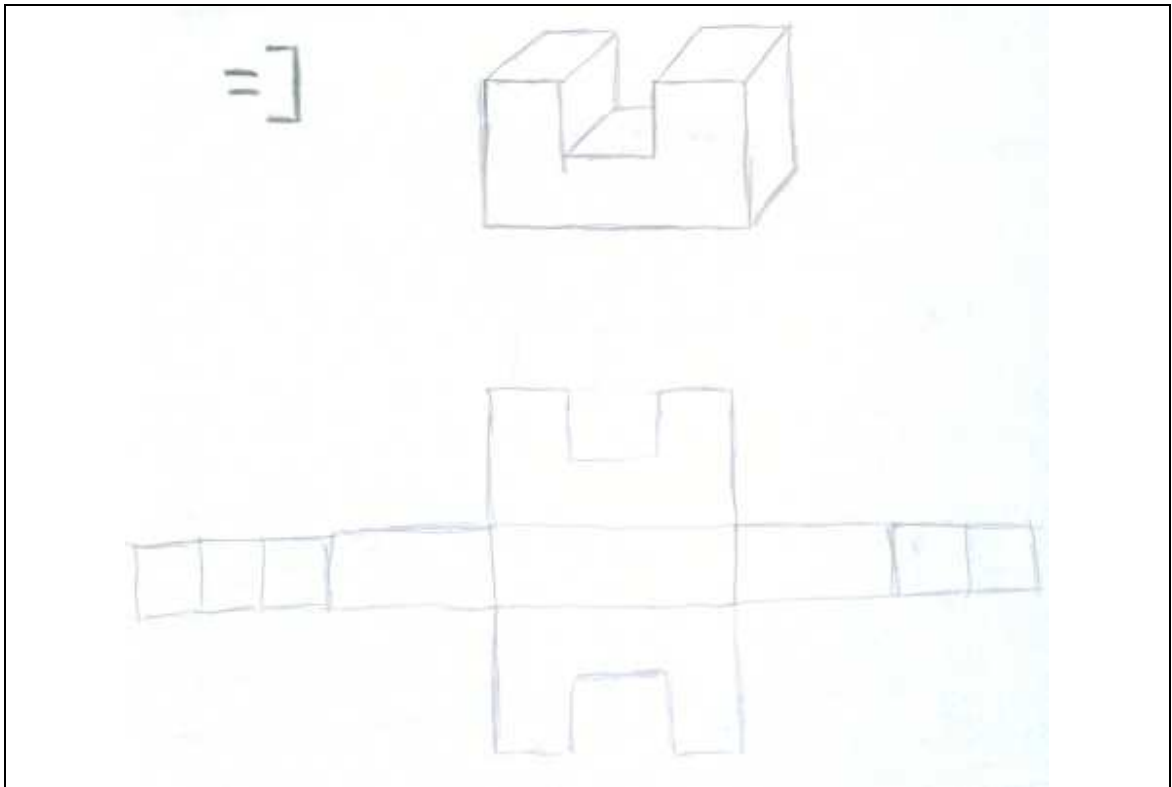
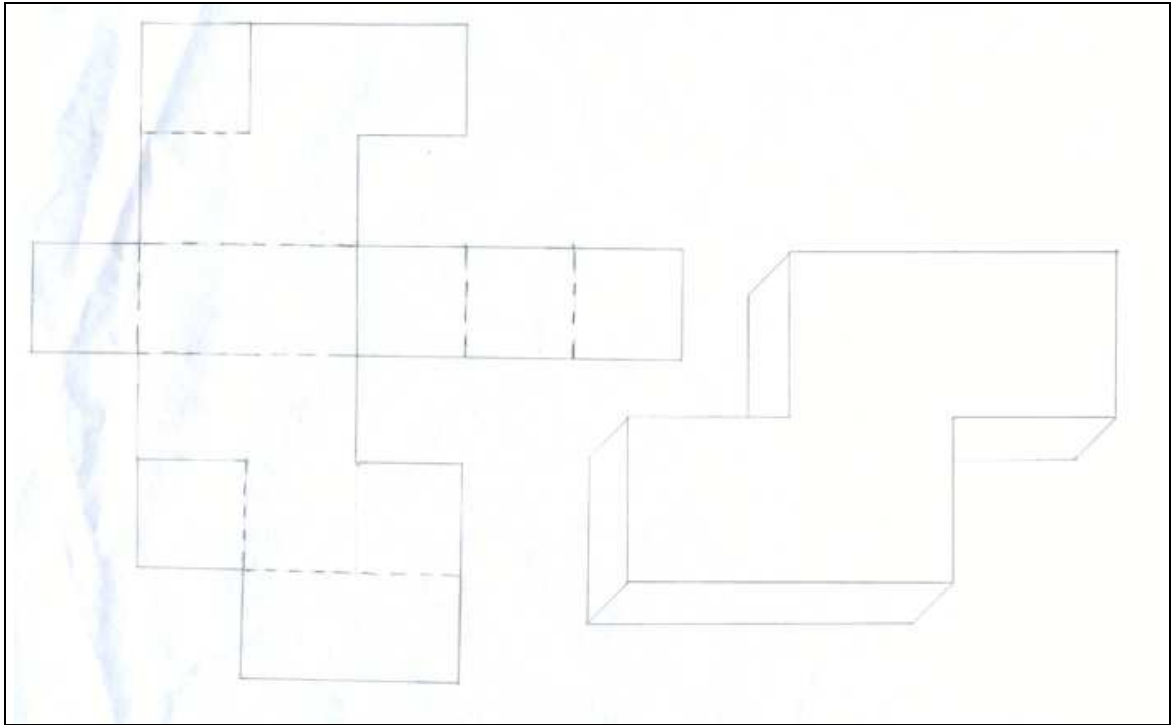




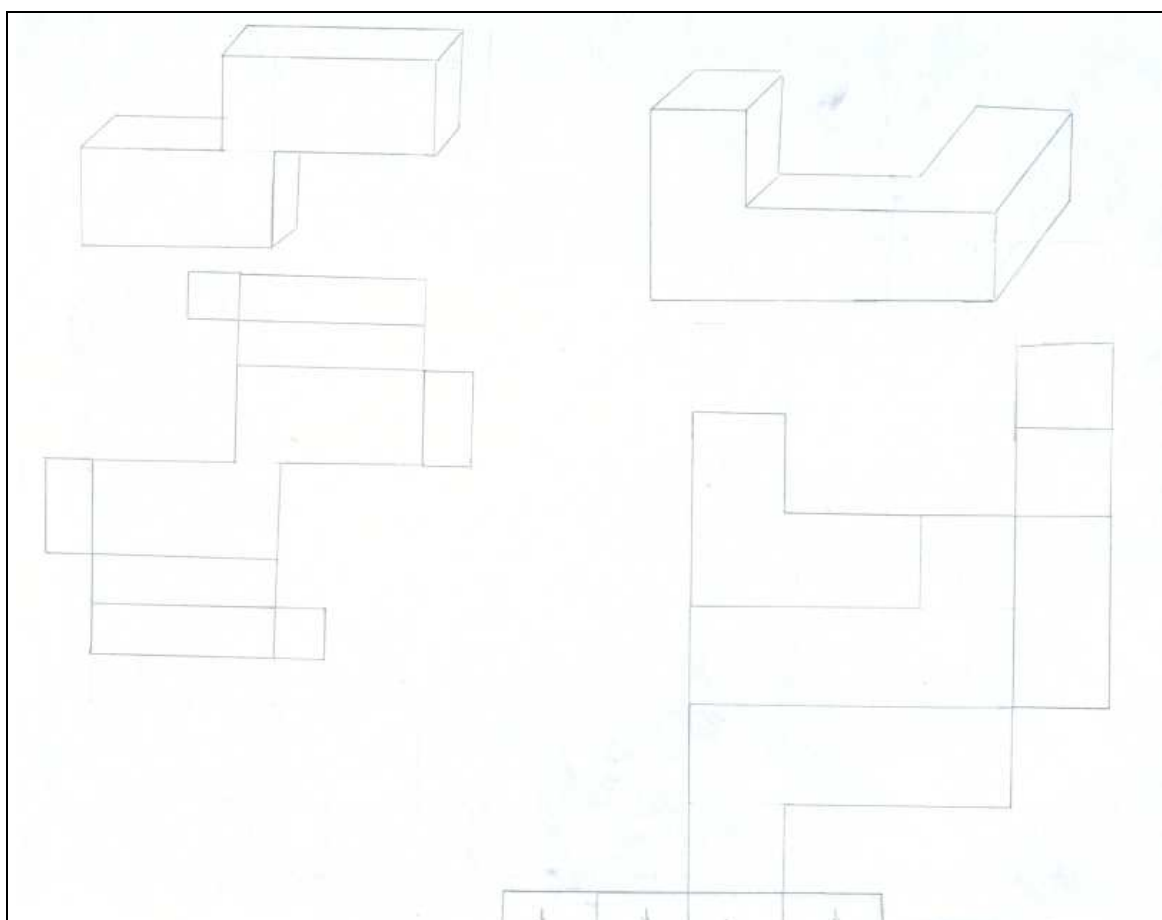
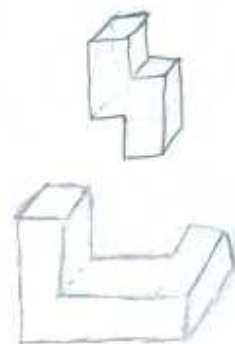




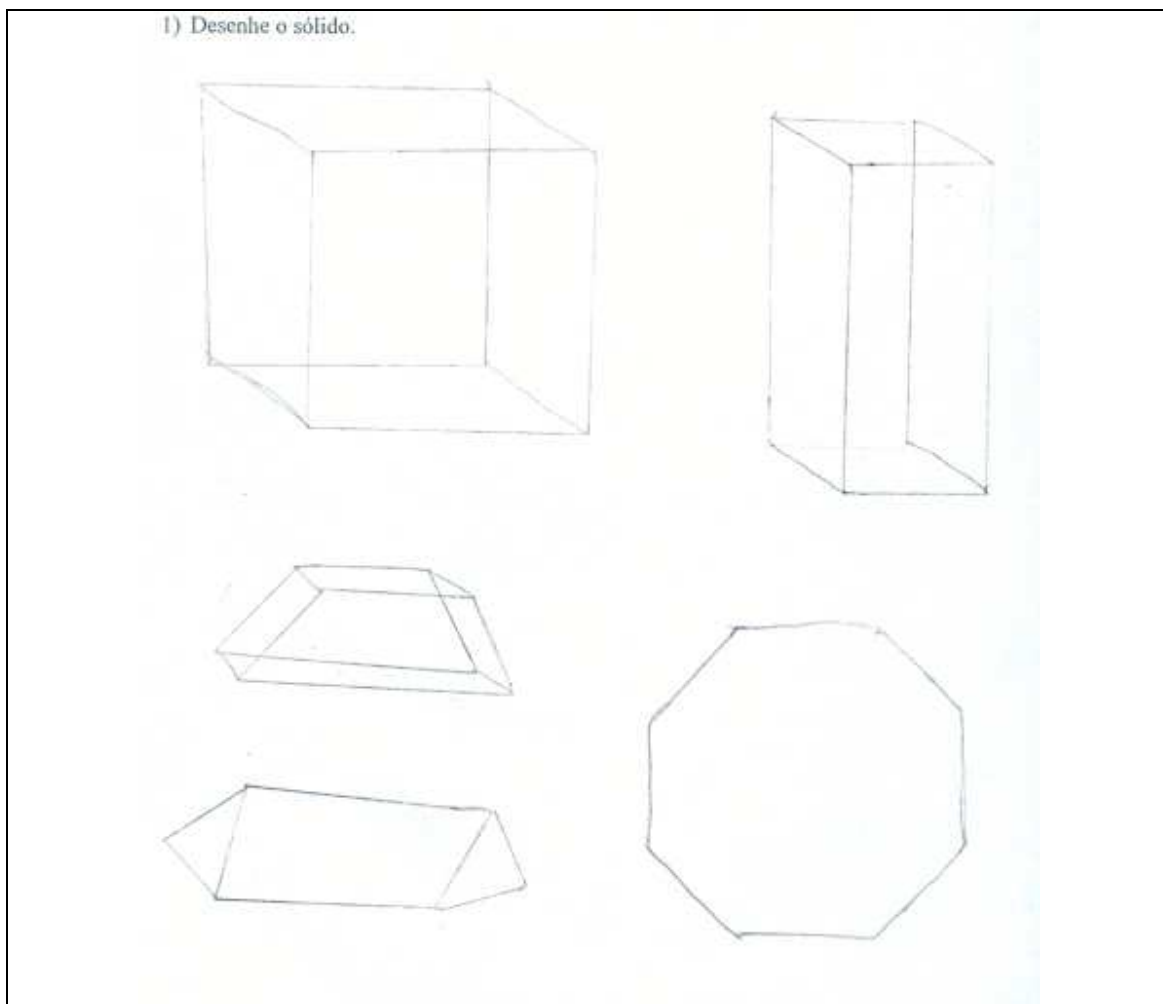
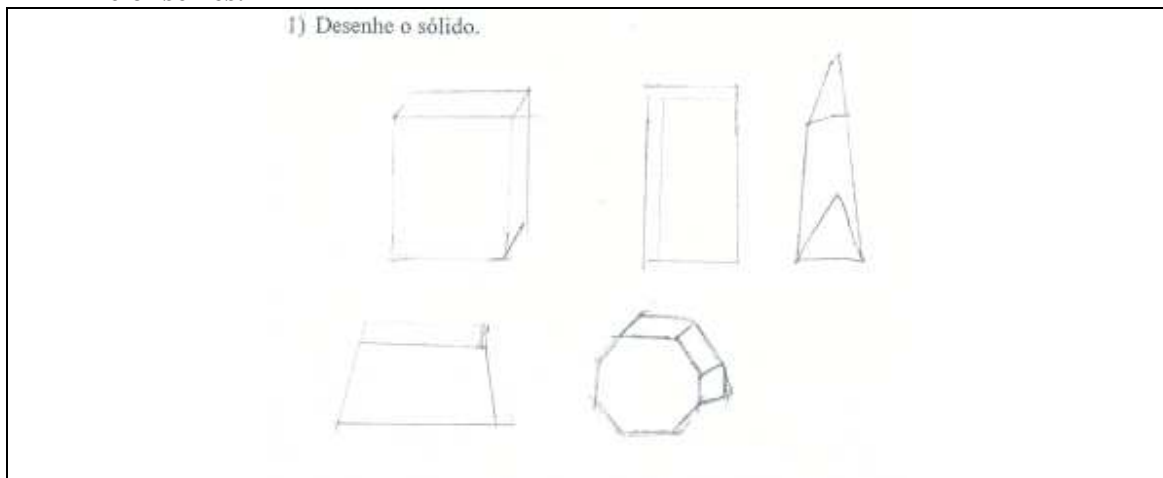




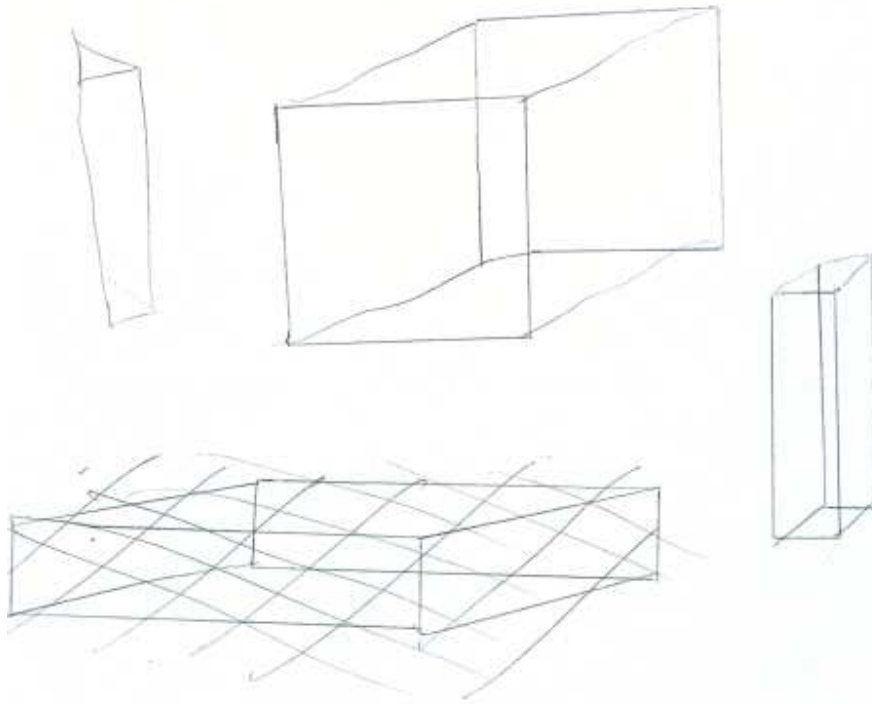
Eu tive dificuldade
em desenhar e
não consegui pla-
nificar e não gosto
de geometria.



6 Aplicação da caixa de Becker em Alunos do Colégio de Aplicação – UFGRS, 5ª e 6ª séries.



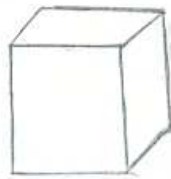
1) Desenhe o sólido.



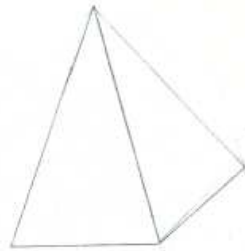
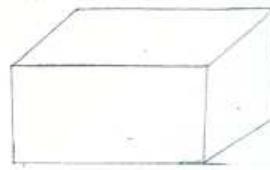
1) Desenhe o sólido.



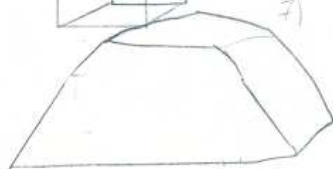
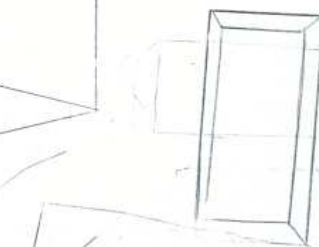
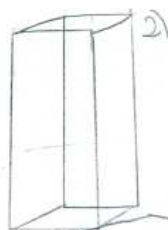
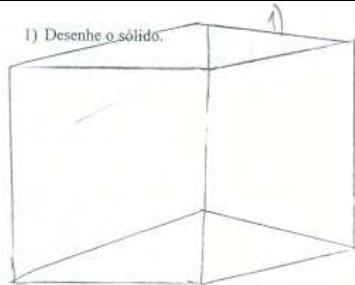
1) Desenhe o sólido.



QUADRADO



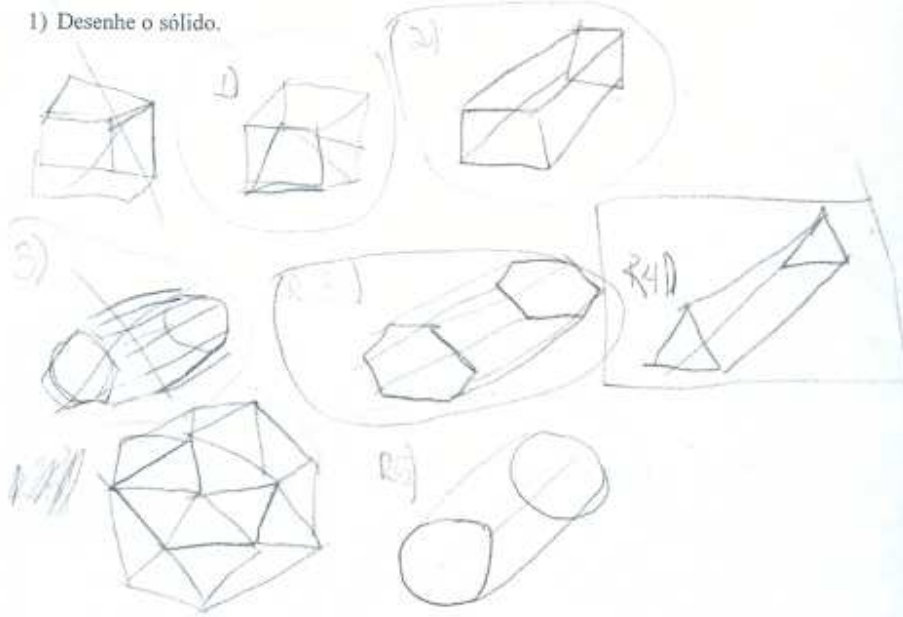
1) Desenhe o sólido.



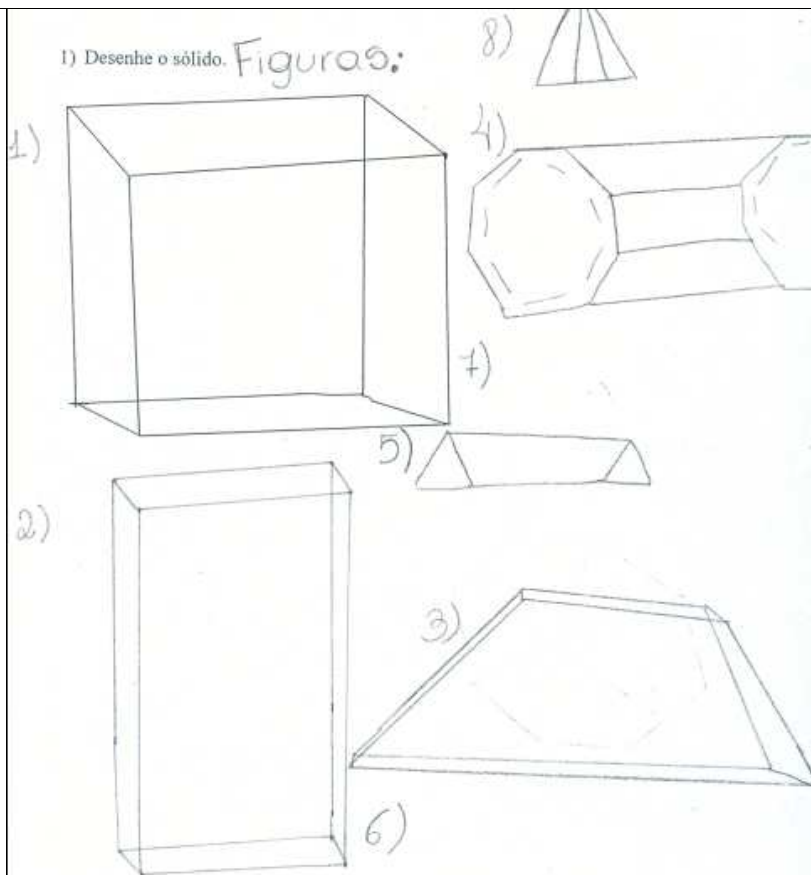
7)



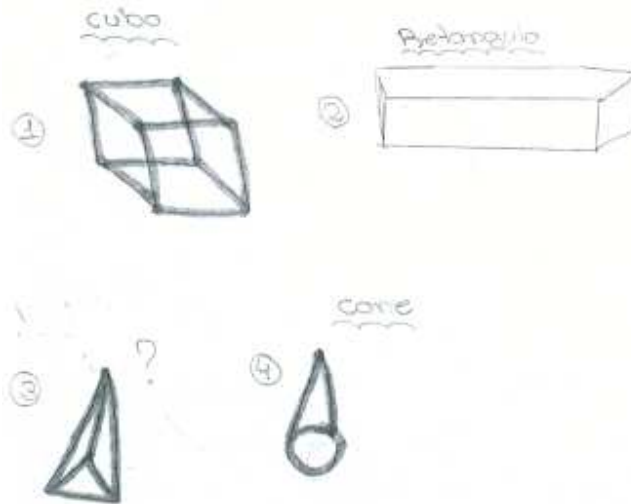
1) Desenhe o sólido.



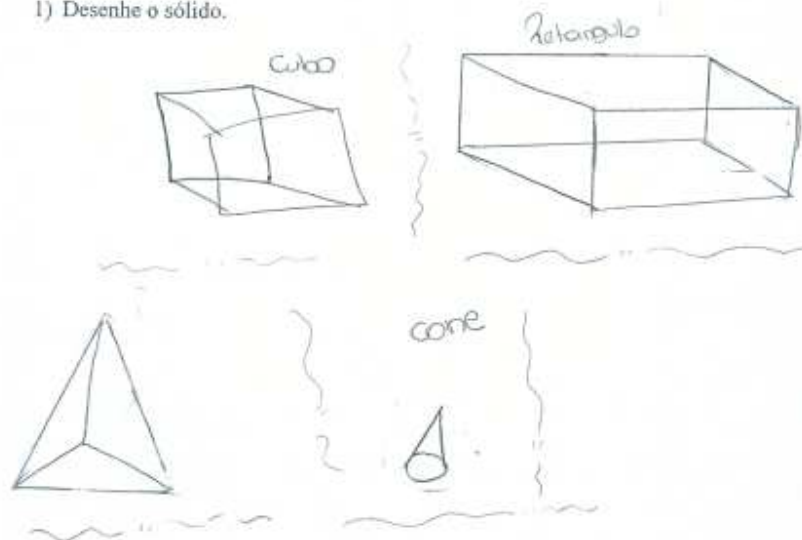
1) Desenhe o sólido. Figuras:



1) Desenhe o sólido.



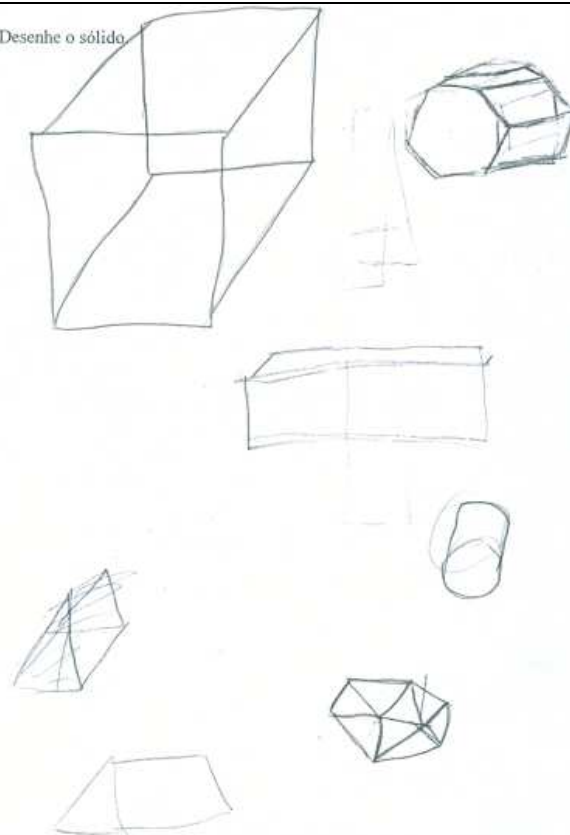
1) Desenhe o sólido.



1) Desenhe o sólido.



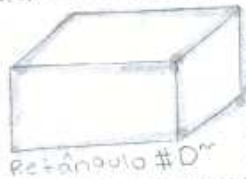
1) Desenhe o sólido



1) Desenhe o sólido.

Cubo

XD



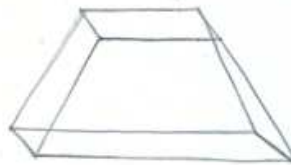
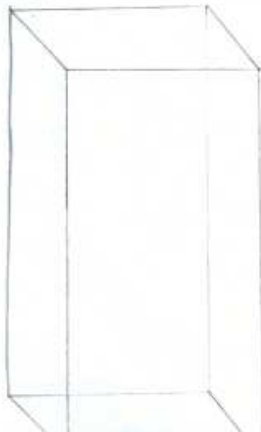
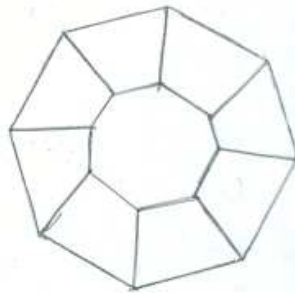
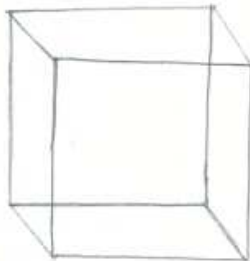
CONE



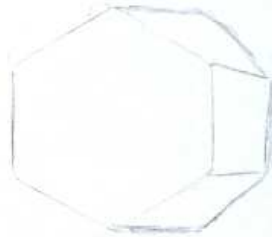
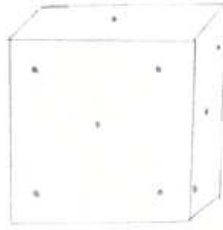
~ ~

CONE

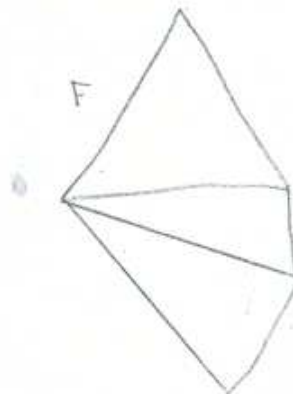
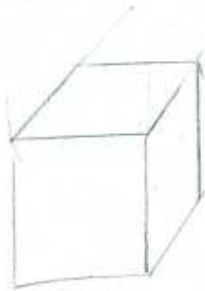
1) Desenhe o sólido.



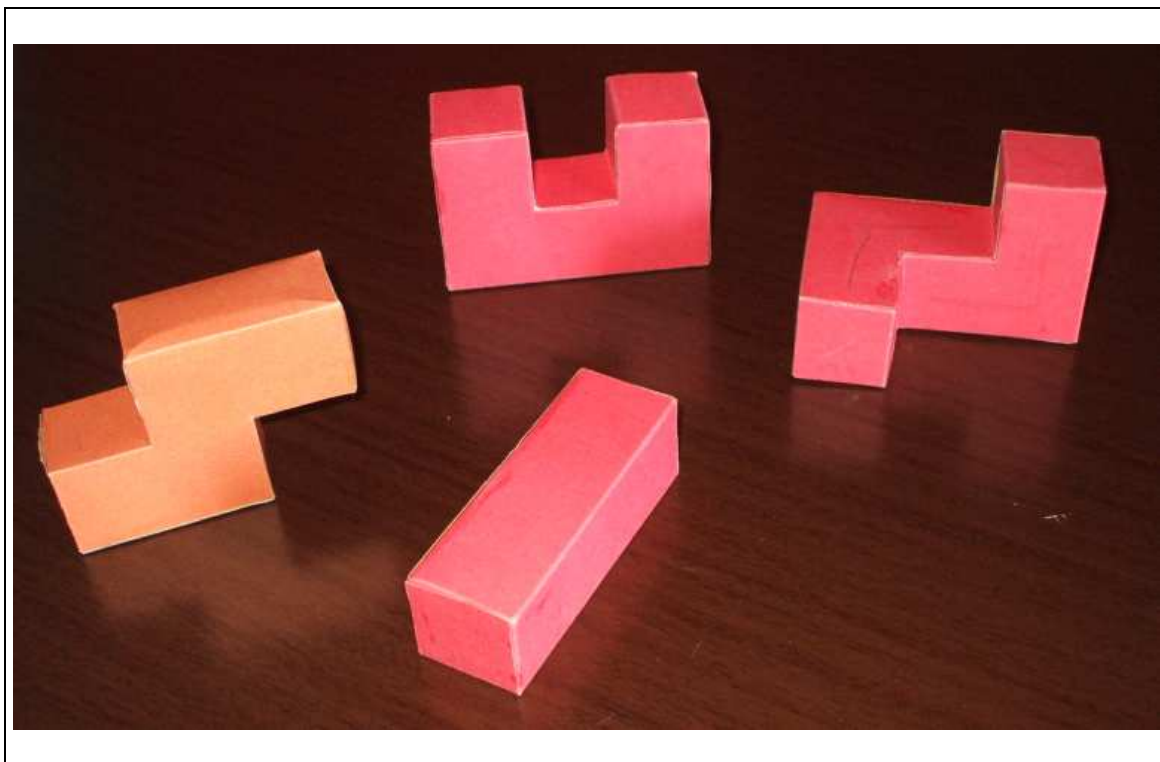
1) Desenhe o sólido.



1) Desenhe o sólido.



7 Os Sólidos que ajudaram a produzir esse Material



8 Os Sólidos produzidos pelos Alunos do Ensino Médio durante a aplicação da Sequência final.

