

ANÁLISE ESTATICA E DINAMICA COM SUBESTRUTURAÇÃO EM
MÚLTIPLOS NÍVEIS

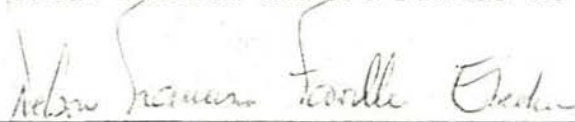
Ronald José Ellwanger

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSARIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

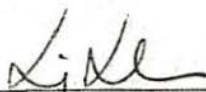
Aprovada por:



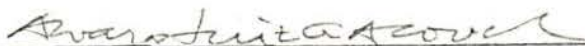
Prof. Edison Castro Prates de Lima - D.Sc.



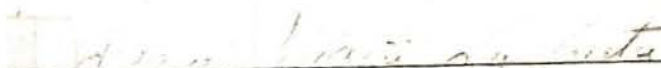
Prof. Nelson F. Favilla Ebecken - D.Sc.



Prof. Luiz Landau - D.Sc.



Prof. Alvaro Luiz G.A. Coutinho - D.Sc.



Prof. Alvaro Maia da Costa - D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

AGOSTO DE 1989

ELLWANGER, RONALD JOSÉ

Análise Estática e Dinâmica com Subestruturação em Múltiplos Níveis [Rio de Janeiro] 1989

VIII, 126 p., 29,7 cm (COPPE/UFRJ),
D.Sc., Engenharia Civil, 1989)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Análise Matricial de Estruturas
I. COPPE/UFRJ II. Título (série).

Este trabalho é dedicado

à Marisa,
ao Rafael,
aos meus pais,

que comigo participaram destes anos de sacrifícios.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Édison C. Prates de Lima, pela prestimosa orientação, essencial à elaboração desta tese.

Aos colegas Marcos de Paula Jung e Jorge Augusto P. Ceratti, pelo espírito de camaradagem e colaboração prestados ao longo do curso.

Aos colegas docentes Ademar G. Groehs, Maria Inês G. dos Santos e Armando M. Awruch, pelo apoio e estímulo recebidos ao longo deste projeto.

A CAPES e à UFRGS, pelo respaldo financeiro.

Ao NCE/UFRJ e ao CPD/UFRGS, pelo apoio computacional.

Aos colegas professores do Curso de Pós-Graduação e do Departamento de Engenharia Civil da UFRGS, pelo espírito de compreensão e estímulo à conclusão deste trabalho.

A Coordenação dos Programas de Pós-Graduação de Engenharia da UFRJ, que me propiciou a oportunidade, e a todos os que, de alguma forma, contribuíram para a realização do presente trabalho.

Resumo da tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Doutor em Ciências (D. Sc.).

ANÁLISE ESTATICA E DINAMICA COM SUBESTRUTURAÇÃO EM
MÚLTIPLOS NÍVEIS

Ronald José Ellwanger

Agosto, 1989

Orientador: Prof. Edison C. Prates de Lima

Programa: Engenharia Civil

Este trabalho trata de um sistema computacional destinado à análise estática e dinâmica de estruturas, dotado da capacidade de subestruturação em múltiplos níveis.

Inicialmente, apresenta-se a formulação da análise com subestruturação, abordando condensação, definição do sistema de referência local de um superelemento e aplicação de restrições nodais generalizadas. Em seguida, mostra-se a formulação da análise dinâmica, por meio de superposição modal utilizando o método de Lanczos-Ritz. A condensação dinâmica e sua generalização para múltiplos níveis são também deduzidas.

A seguir, comenta-se a organização do algoritmo computacional, com as operações matriciais mais importantes e a utilização de memória periférica. Como exemplos de aplicação, são analisadas algumas estruturas e feita a discussão dos resultados obtidos. Finalmente, são apresentadas algumas conclusões.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D. Sc.).

STATIC AND DYNAMIC ANALYSIS WITH MULTI-LEVEL SUBSTRUCTURING

Ronald José Ellwanger

August, 1989

Thesis Supervisor: Prof. Edison C. Prates de Lima

Department: Engenharia Civil

This thesis presents a computational system for static and dynamic analysis, with a multi-level substructuring capability.

The substructuring formulation for structural analysis encompass static condensation, local reference system definition and generalized constraints. The dynamic analysis formulation is evaluated, by the modal superposition method using the Lanczos-Ritz basis vectors. The dynamic condensation and its generalization for multiple levels are also established.

The computational algorithm's organization, with the more important matrix operations and the use of peripheral memory are commented. The proposed methodology was applied to the analyses of some structures. The main results are discussed and the final conclusions are drawn.

INDICE DO TEXTO

	Pág.
I - Introdução	1
I.1 - Subestruturação e superelementos	1
I.2 - Subestruturação em múltiplos níveis	3
I.3 - Vantagens da subestruturação	4
I.4 - As características dos superelementos	7
I.5 - A subestruturação na análise dinâmica	8
I.6 - Classes e sistemas de numeração	9
I.7 - Geração dos superelementos	11
I.8 - Identificação dentro dos múltiplos níveis	12
I.9 - Objetivos e definição do trabalho	14
I.10 - Organização do texto	15
II - Os superelementos na análise estrutural	17
II.1 - Equações de equilíbrio	17
II.2 - Condensação de um superelemento	18
II.3 - O sistema de referência local de um superelemento	21
II.3.1 - Definição dos eixos locais	21
II.3.2 - Caso de nós de contorno colineares	26
II.3.3 - Transformações intermediárias	29
II.4 - Rotação de eixos de referência	32
II.5 - Restrições generalizadas	37
III - Análise dinâmica com subestruturação	40
III.1 - Equações de equilíbrio - superposição modal	40
III.2 - Algoritmo de Lanczos-Ritz	45
III.3 - Método de superposição modal - superelementos	48
III.3.1 - Obtenção das cargas dinâmicas de um superelemento	55
III.4 - Subestruturação em múltiplos níveis	56

III.5 - Resposta permanente a um carregamento harmônico	64
IV - Algoritmo computacional	69
IV.1 - Análise estática	69
IV.2 - Condensação	71
IV.3 - Solução	75
IV.4 - Determinação dos esforços	75
IV.5 - Análise dinâmica	78
IV.6 - Matrizes de massa	79
IV.7 - Pré-análise dos superelementos	79
IV.8 - Solução do sistema expandido	82
IV.9 - Superposição modal e resultados finais	84
IV.10 - Controle e numeração dos graus de liberdade	85
IV.11 - Organização geral do sistema	90
V - Exemplos	93
V.1 - Pórtico plano com seis andares	94
V.1.1 - Descrição	94
V.1.2 - Análise das frequências	96
V.1.3 - Análise da resposta	96
V.1.4 - Teste sem amortecimento	99
V.1.5 - Teste com massas concentradas no andar de topo	101
V.2 - Pórtico com superelementos de junta	104
V.3 - Estrutura com vigas furadas	108
VI - Conclusão	117
VI.1 - Potencialidades do método	117
VI.2 - Análise dinâmica	119
VI.3 - Complementação do sistema e implantações futuras	120
Referências bibliográficas	124

Capítulo I

I - INTRODUÇÃO

I.1 - SUBESTRUTURAÇÃO E SUPERELEMENTOS

Ao aplicar o método da rigidez na análise de estruturas muito complexas, como grandes edificações, problemas de engenharia naval e aero-espacial etc., a quantidade de elementos finitos necessários para a discretização estrutural frequentemente excede a capacidade computacional disponível, ou torna esta análise economicamente proibitiva. Para fazer frente a esta situação, vários recursos tem sido utilizados, baseados em diferentes métodos numéricos [1].

O advento dos computadores com arquitetura de processamento em paralelo está causando uma intensa reavaliação de critérios na elaboração de algoritmos numéricos, com o objetivo de tirar maior proveito das características destas máquinas [2, 3]. Um dos métodos de análise estrutural mais apropriados para implementação em processamento paralelo é a técnica da subestruturação, a qual será enfatizada no presente trabalho.

A subestruturação é conceituada como a divisão da estrutura em regiões menores ou subestruturas. Os contornos destas subestruturas podem, em princípio, ser especificados arbitrariamente, embora seja preferível que a

estrutura global fique racionalmente dividida em regiões naturais [4].

Uma subestrutura poderá ter pontos nodais nela incidindo de duas maneiras:

- nós internos: situados no seu interior, portanto só a ela pertencendo;

- nós externos ou de contorno: situados no limite da região delimitada pela subestrutura, podendo ser comuns a ela e a outras subestruturas, ou ao contorno da estrutura global.

Definem-se ainda os graus de liberdade internos e externos de uma subestrutura como sendo os graus de liberdade relativos, respectivamente, aos seus nós internos e aos de contorno.

Uma vez feita a divisão da estrutura, cada subestrutura é analisada separadamente, por meio de um processo de condensação. Mediante este processo, estabelecem-se relações entre deslocamentos, acelerações e forças aplicadas nos seus nós de contorno, constituindo-se as matrizes de rigidez e de massa condensadas nos seus graus de liberdade externos. Além disso, a partir das cargas aplicadas ao longo de toda a subestrutura, determinam-se forças equivalentes atuando nos nós de contorno.

Realizada a condensação de todas as subestruturas, pode-se efetuar a montagem das respectivas matrizes e vetores, obtendo-se as matrizes de rigidez, de massa e as cargas nodais equivalentes da estrutura global. Assim, o sistema de equações a ser resolvido tem como incógnitas somente os deslocamentos dos nós situados nas interfaces entre as subestruturas.

Com a solução do sistema de equações, determinam-se os deslocamentos nodais das interfaces, podendo-se então retomar a análise separada de cada subestrutura. Conhecidos os deslocamentos dos seus nós de contorno, calculam-se os dos nós internos e, em seguida, os esforços nos seus elementos constituintes.

Pelas idéias até agora expostas, nota-se a direta correspondência entre os nós de contorno de uma subestrutura e os nós incidentes de um elemento finito, no que diz respeito à matriz de rigidez e às forças nodais equivalentes. Portanto, as subestruturas podem ser tratadas como elementos finitos complexos ou "superelementos". Neste trabalho, subestrutura e superelemento terão o mesmo significado. Assim, as definições até aqui feitas para as subestruturas (nós, graus de liberdade etc.) são inteiramente válidas para os superelementos.

A técnica de análise recém descrita deixa transparecer nitidamente a vantagem de sua implementação em processamento paralelo. Assim, as várias subestruturas são condensadas ao mesmo tempo, usando os diversos processadores disponíveis. Após a solução da estrutura, repete-se o procedimento, realizando-se a análise interna das subestruturas também de forma simultânea.

1.2 - SUBESTRUTURAÇÃO EM MÚLTIPLOS NÍVEIS

Até aqui, tratou-se de superelementos formados exclusivamente por elementos estruturais básicos, dando origem à chamada subestruturação em um único nível. Todavia, muitas vezes é conveniente que determinados superelementos também sejam divididos em sub-regiões, formando outros superelementos os quais, por sua vez, podem igualmente ser subdivididos. Constitui-se, assim, a subestruturação em múltiplos níveis [5], na qual um superelemento pode ser formado tanto por elementos básicos, como por outros superelementos.

Diz-se então que os superelementos que compõem diretamente a estrutura pertencem ao nível mais alto ou primeiro nível da subestruturação. À medida que as subdivisões se aprofundam para o interior dos superelementos, formam-se os níveis sucessivamente mais baixos da su-

bestruturação, ou seja, segundo, terceiro nível etc. É óbvio que o último nível deve possuir superelementos formados exclusivamente por elementos.

Com relação à análise anteriormente descrita, no caso de subestruturação em múltiplos níveis, ao se realizar a condensação de determinada subestrutura, devem estar previamente condensados os superelementos que a constituem. Por outro lado, ao calcular deslocamentos nodais de um superelemento, deverão estar previamente determinados os da subestrutura da qual ele faz parte.

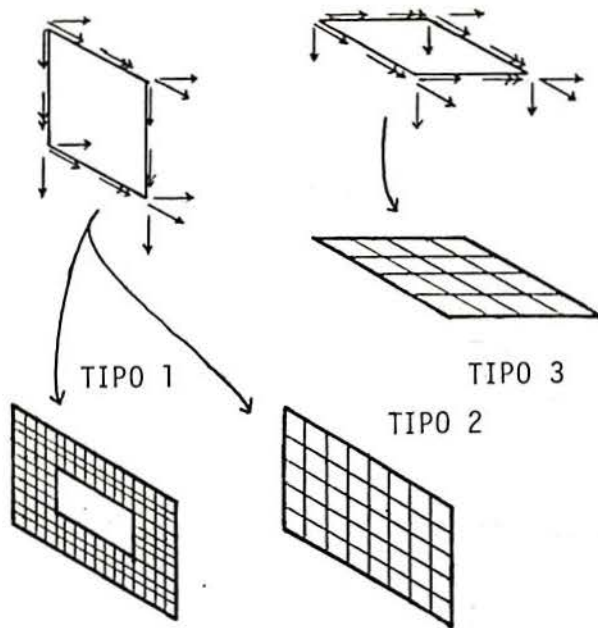
A figura I.1 mostra um exemplo de subestruturação em dois níveis. Os superelementos do segundo nível que aparecem na figura I.1-b (tipos 1, 2 e 3), são formados exclusivamente por elementos básicos. As subestruturas do primeiro nível - tipos 4 e 5 da figura I.1-c - constituem-se de superelementos do nível inferior. Já a estrutura é uma montagem dos superelementos tipo 4 e 5, embora pudessem dela participar diretamente elementos básicos e subestruturas de qualquer nível.

I.3 - VANTAGENS DA SUBESTRUTURAÇÃO

Existem diversas vantagens em se realizar subestruturação, em comparação com as técnicas convencionais de análise estrutural. Muitas vezes, um modelo em elementos finitos de uma estrutura muito complexa pode vir a exigir demasiadamente da capacidade disponível de um computador. Mediante o uso do processo de subestruturação, provavelmente o problema não só poderá ser resolvido, como também a solução poderá ser obtida a um custo razoável.

As grandes vantagens do uso da subestruturação (traduzidas pela redução do custo computacional e simplificação no fornecimento dos dados) residem nas seguintes aplicações:

- análise de estruturas tendo sub-regiões idênticas,



a) elementos finitos básicos

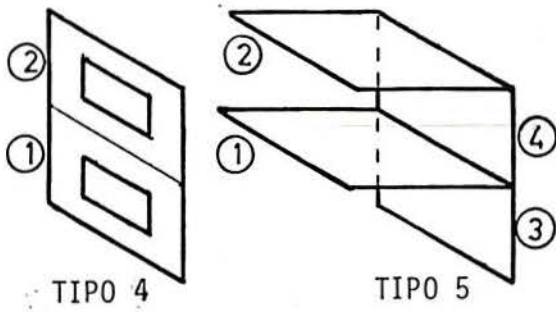
b) superelementos do segundo nível

Numeração dos elementos:

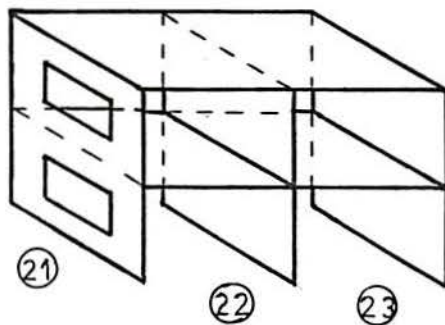
Tipo 1: 1 a 128

Tipo 2: 201 a 240

Tipo 3: 301 a 316



c) superelementos do primeiro nível



d) estrutura

Figura I.1

acarretando repetidas ocorrências de determinados superelementos;

- casos nos quais se requer resultados somente para determinadas regiões da estrutura;

- reanálise com modificações em algumas partes do sistema estrutural.

Uma subestrutura requer o fornecimento das coordenadas dos seus nós e de incidências definindo o tamanho, orientação e conectividade dos seus elementos. No caso dela ocorrer repetidas vezes ao longo da estrutura ou de superelementos de nível superior, estes dados só precisam ser fornecidos uma única vez. Apenas as incidências dos seus nós de contorno necessitam ser especificadas a cada ocorrência. Além disso, conjuntos de cargas aplicadas nos nós e elementos de uma subestrutura repetida são também definidos somente uma vez. Por outro lado, a publicação dos resultados pode ser feita de uma forma mais racional, facilitando a sua interpretação.

Os fatos acima expostos são importantes à medida que a preparação e checagem dos dados, bem como a interpretação dos resultados constituem grande parte da tarefa de análise. Com exceção dos problemas mais triviais, os gastos com o trabalho de profissionais são muito superiores aos custos computacionais [6].

A subestruturação reduz a demanda computacional ao eliminar o cálculo e armazenamento múltiplo da matriz de rigidez, de massa e as cargas nodais equivalentes de superelementos repetidos. A condensação única de um superelemento repetido implica na eliminação simultânea dos nós internos em todas as ocorrências do mesmo. Com isso, fica bastante reduzido o número de nós da estrutura final, diminuindo drasticamente o tempo de solução.

Na análise de uma estrutura complexa, geralmente se necessita obter resultados somente em determinadas regiões da mesma. Assim, após a solução da estrutura global, efetuar-se-á a determinação de deslocamentos inter-

nos e esforços nos elementos apenas para alguns superelementos, resultando em mais economia de tempo de máquina. Além disso, a subestruturação favorece a reanálise, na medida em que somente os superelementos que sofrem modificações necessitam ser recondensados.

1.4 - AS CARACTERÍSTICAS DOS SUPERELEMENTOS

A técnica de dividir imaginariamente o contínuo em regiões tem tido, normalmente, a sua aplicação basicamente restrita a procedimentos simples de condensação. Eles se limitam, na maioria das vezes, a um único nível, tendo poucos recursos de imposição de restrições generalizadas que permitam a combinação de superelementos de diferentes origens.

A principal característica dos superelementos se baseia na direta correspondência entre um superelemento e um elemento finito. Para que se consiga esta correspondência de maneira realmente efetiva, deve-se ter um sistema de análise estrutural dotado das seguintes facilidades:

- subestruturação em vários níveis: a partir de superelementos simples, podem-se construir sucessivamente superelementos mais complexos, até modelar completamente a estrutura global, havendo, por outro lado, a possibilidade de limitar a obtenção dos resultados apenas para algumas regiões da estrutura.

- orientação automática dos graus de liberdade: mediante a geração de matrizes de rotação locais, um mesmo superelemento pode ser utilizado em diversas partes da estrutura e com diferentes orientações. Além disso, deve-se proporcionar ao usuário uma maneira simples de definir as múltiplas incidências dos superelementos ao longo da estrutura, evitando assim o que tem ocorrido algumas vezes, quando a complexidade ao especificar estas incidências tem levado o usuário a desistir do uso da subestruturação. Conforme será

visto mais adiante, a incidência e a orientação de um superelemento podem ser definidas pela simples especificação dos seus nós de contorno.

- geração de restrições generalizadas: uma estrutura pode ser formada por superelementos de diferentes tipos (estado plano, flexão de placas etc.). Para combinar estes superelementos, muitas vezes é necessário impor certas restrições generalizadas nas suas interfaces.

Os recursos acima mencionados tem como objetivo possibilitar um projeto racional e confiável, sem a necessidade de criar modelos simplificados de confiabilidade duvidosa; evita-se, por exemplo, a necessidade de expandir e interpolar resultados para posterior utilização em modelos de detalhes estruturais nos quais se deseja analisar concentrações de tensões [7].

1.5 - A SUBESTRUTURAÇÃO NA ANÁLISE DINÂMICA

Até recentemente, a subestruturação vinha sendo utilizada em análise dinâmica principalmente mediante a adoção de alguma modalidade da redução de GUYAN [8, 9]. Todavia, tem-se constatado que esta formulação pode produzir erros significativos nos resultados da análise. Esta perda de precisão deve-se ao fato de a formulação de Guyan não dispor de expressões exatas para duas importantes etapas do processo de análise descrito na seção I.1: a condensação da matriz de massa e a obtenção dos deslocamentos internos de um superelemento.

Uma nova formulação, proposta por WILSON E BAYO [10], preenche estas lacunas. Ela está baseada na formação de um sistema de equações de equilíbrio dinâmico, contendo simultaneamente incógnitas referentes a graus de liberdade geométricos da estrutura global e a graus de liberdade modais dos seus superelementos formadores.

Na determinação dos deslocamentos internos de um superelemento, é incluída uma parcela dinâmica, obtida por meio da superposição dos seus modos de vibração internos. Estes modos são determinados pelo algoritmo de Lanczos-Ritz [11-13], a partir das forças internas do superelemento. Neste trabalho, soma-se às forças internas também o efeito das acelerações dos nós de contorno, o que não é feito na formulação de Wilson e Bayo.

I.6 - CLASSES E SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

Nesta seção e nas duas subsequentes, serão abordadas algumas questões referentes à definição de um sistema estrutural com subestruturação em múltiplos níveis. Conforme a função que irão desempenhar durante a análise, os superelementos podem ser separados em duas classes:

a) superelementos tipo - são superelementos de referência, formando uma espécie de biblioteca. Cada um deles poderá incidir uma ou repetidas vezes ao longo da estrutura a analisar. A forma de descrever estas incidências é vista mais adiante. Serão os superelementos tipo que efetivamente terão calculadas a sua matriz de rigidez e a de massa por meio do processo de condensação.

b) superelementos construtivos: são os superelementos que efetivamente vão participar da formação do sistema estrutural nos seus diversos níveis de subestruturação. Cada um deles estará sempre referenciado a um superelemento tipo do qual obtém as matrizes de rigidez e de massa. Ao contrário dos superelementos tipo, serão os construtivos que terão calculados os deslocamentos em seus nós e os esforços em seus elementos.

Portanto, uma estrutura será formada por superelementos construtivos, referenciados a determinados superelementos tipo. Estes serão formados por outros superelementos construtivos de nível inferior que, por sua vez, estarão também referenciados a superelementos tipo. As

sim, o processo de formação se repete ao longo de níveis sucessivamente inferiores, até atingir superelementos tipo formados exclusivamente por elementos.

Os superelementos são identificados por números inteiros maiores que zero, existindo um único sistema de numeração para os superelementos tipo. Além disso, na definição de cada tipo, existe um sistema de numeração para os seus superelementos construtivos, sendo que este sistema se repetirá cada vez que o superelemento tipo for referenciado ao longo da estrutura. A mesma repetição dos sistemas de numeração ocorre em relação aos elementos e aos nós pertencentes a um superelemento tipo.

A título de ilustração, seja o exemplo da figura I.1, onde estão mostradas as constituições de cinco superelementos tipo (numerados de 1 a 5) e da estrutura:

tipos 1, 2 e 3 - formados por elementos retangulares, numerados, respectivamente, de 1 a 128, de 201 a 240 e de 301 a 316.

tipo 4 - formado pelos superelementos construtivos 1 e 2, ambos referenciados ao superelemento tipo 1.

tipo 5 - formado por superelementos construtivos numerados de 1 a 4. 1 e 2 são cópias do superelemento tipo 3, enquanto 3 e 4 são cópias do tipo 2.

estrutura - formada pelos superelementos construtivos 21 (tipo 4), 22 e 23 (tipo 5).

Vemos, portanto, que existe um sistema de numeração para os superelementos tipo (1 até 5) e três sistemas para os superelementos construtivos: (1, 2) na definição do tipo 4, (1 até 4) na do tipo 5 e (21, 22, 23) na da estrutura. Assim, por exemplo, o sistema de numeração (1 até 4) vai aparecer duas vezes na estrutura, enquanto os sistemas de numeração de elementos (201 até 240) e (301 até 316) vão se repetir por quatro vezes.

I.7 - GERAÇÃO DOS SUPERELEMENTOS

Trata-se a seguir dos dados necessários à geração de um superelemento tipo e à definição da estrutura a analisar. Esses dados consistem basicamente na relação dos elementos e superelementos construtivos. Para a geração do tipo, são necessários ainda seu número e a relação dos seus nós de contorno.

Sempre que se estiver gerando um superelemento tipo, se estará trabalhando dentro de um sistema de referência de definição. Assim, todos os nós e elementos aqui especificados estarão diretamente referenciados a este sistema, pois, na verdade, terão sido previamente gerados dentro dele. Os outros superelementos tipo, aqui referenciados, poderão ter sido previamente gerados dentro do atual sistema ou fora dele. Os superelementos construtivos farão a referência aos respectivos tipos por meio da especificação de seus atuais nós de contorno os quais, como já foi dito, foram gerados em relação ao atual sistema de definição.

Propõe-se a seguir uma sequência de fornecimento de dados, a qual poderia estar inserida em uma linguagem orientada ou em um sistema de planilhas eletrônicas. A geração é iniciada por um registro contendo os dados abaixo esquematizados:

TIPO < i_1 > NOS <lista1> ELEMENTOS <lista2>

ou ESTRUTURA ELEMENTOS <lista2>

Os itens entre < > indicam os dados numéricos a serem fornecidos. i_1 é o número do superelemento tipo que está sendo gerado, lista1 contem os seus nós de contorno e lista2 os seus elementos construtivos (caso existam). Quando se estiver gerando a estrutura, obviamente não se fornecem i_1 nem lista1.

Se existirem também superelementos construtivos, fornece-se para cada um deles um registro com o seguinte formato:

SUPERELEMENTO < i_2 > TIPO < i_3 > NOS <lista3>

onde i_2 é o número do superelemento construtivo; i_3 é o número do superelemento tipo por ele referenciado. A lista3 é de nós de contorno, fornecidos em ordem tal que haja a exata correspondência com os nós especificados na geração do respectivo tipo.

Portanto, o superelemento tipo i_3 incide no tipo i_1 , com o número i_2 , assumindo novos nós de contorno dados pela lista3. Observa-se assim a simplicidade em definir a incidência e a orientação de um superelemento dentro de qualquer nível da subestruturação. Convém destacar que a sequência de registros aqui apresentada gera tanto os superelementos tipo como os construtivos, e o seu uso permite definir completamente a hierarquia da subestruturação.

I.8 - IDENTIFICAÇÃO DENTRO DOS MÚLTIPLOS NÍVEIS

Conforme foi visto na seção 1.6, existe uma multiplicidade de sistemas de numeração para superelementos construtivos, elementos e nós internos. Existem situações, como na saída de resultados, em que a identificação de um nó, elemento ou superelemento necessita definir sua localização dentro da hierarquia da subestruturação. Desta forma, a identificação de cada um deles deverá conter as seguintes informações:

- número que é atribuído ao superelemento construtivo, elemento ou nó interno, na formação do superelemento tipo do qual faz parte.
- número do superelemento construtivo de nível superior no qual ele está diretamente contido.

- números dos superelementos construtivos dos níveis sucessivamente superiores nos quais ele está indiretamente contido.

As alternativas aqui propostas para esta identificação consistem em especificar os números acima citados, de forma que o n.º de um superelemento (ou elemento, ou nó) aparece entre parênteses, precedido ou sucedido do n.º do superelemento no qual ele está contido. Aplicando esta regra de maneira recursiva, resulta a seguinte construção sintática:

$$i_N (i_{N-1} (\dots (i_2 (i_1)) \dots))$$

ou, alternativamente: $((\dots((i_1) i_2) \dots) i_{N-1}) i_N$

i_1 é o número do elemento, nó ou superelemento que está sendo identificado; i_2 é o número do superelemento do qual i_1 faz parte; por sua vez, i_2 está contido no superelemento de número i_3 , e assim por diante, até i_N que é o número de um superelemento pertencente ao mais alto nível da subestruturação.

Adotaram-se os parênteses, por serem os símbolos gráficos que melhor representam as relações de conter e estar contido, existentes entre os superelementos. Por exemplo, seja a situação da figura I.1. O superelemento representando a parede interna do andar superior será identificado pela expressão $22(4)$. Por outro lado, o elemento 96, integrante da parede com janela do andar inferior, será identificado por $21(1(96))$. Alternativamente, poder-se-iam fazer as respectivas identificações usando-se $(4)22$ e $((96)1)21$.

I.9 - OBJETIVOS E DEFINIÇÃO DO TRABALHO

O presente trabalho tem por principais objetivos os seguintes:

- apresentar uma formulação de análise estrutural pelo método da rigidez, contendo a capacidade de subestruturação em múltiplos níveis.

- comprovar a eficiência do método baseado no sistema expandido ou misto de equações de equilíbrio na análise dinâmica com subestruturação.

- organizar as referidas formulações em um algoritmo computacional, concebido conforme a filosofia dos superelementos e capaz, portanto, de proporcionar os recursos mencionados na seção I.4.

Uma subestrutura é tratada como um elemento finito complexo (superelemento), tendo o seu sistema de referência local definido automaticamente a partir dos seus nós de contorno. Isto permite que, uma vez definido, um superelemento (tipo) possa ser utilizado em diferentes partes da estrutura e com diferentes orientações.

A análise de estruturas mistas, com a compatibilização entre diferentes tipos de elementos finitos e reticulados, é facilitada por duas características do método. Uma é a possibilidade de definir diferentes conjuntos de graus de liberdade significantes para cada nó. A outra é o recurso das restrições generalizadas, usando a técnica de eliminação de graus de liberdade a nível de subestrutura [14].

Na análise dinâmica, é adotado o método da superposição modal, sendo a matriz de transformação constituída pelos chamados vetores de Lanczos-Ritz. O presente estudo limita-se ao caso de carregamento harmônico.

O sistema computacional foi desenvolvido inicialmente no computador B-6700 do NCE/UFRJ e, após, no A-10 do CPD/UFRGS. Está codificado em FORTRAN e usa o procedimento de alocação dinâmica de memória. Possui uma estrutura modular, composta por 92 sub-rotinas, além do pro-

grama principal. O sistema se estende atualmente por quase oito mil linhas de programação.

Sua estrutura de dados conta com uma série de arquivos de memória periférica, permitindo que um problema possa ser analisado em múltiplas rodadas. Assim, por exemplo, um superelemento, depois de condensado, pode participar também de análises posteriores da mesma ou de outras estruturas. O recurso das múltiplas rodadas também torna mais eficiente o procedimento de reanálise.

Devido à não disponibilidade de máquinas de processamento paralelo, o programa foi desenvolvido no sistema de programação linear. Todavia, está construído de forma a ser facilmente adaptado para funcionar com processamento paralelo.

I.10 - ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

O texto encontra-se dividido em seis capítulos, o primeiro dos quais constitui a presente introdução.

No segundo capítulo, apresenta-se a formulação da análise de estruturas formadas por superelementos. Mostram-se as equações gerais do método da rigidez e descreve-se o processo de condensação de uma subestrutura.

São também apresentadas a definição do sistema de referência local de um superelemento e a determinação de sua matriz de cossenos diretores; a partir desta, é deduzida a matriz de rotação, demonstrando-se o seu uso nas transformações que sofrem as matrizes dos superelementos com a mudança de eixos de referência. Por último, expõe-se a formulação de restrições generalizadas.

A análise dinâmica com subestruturação tem a sua formulação estabelecida no terceiro capítulo. São apresentados a superposição modal e o algoritmo de Lanczos

Ritz.

Mostra-se a contribuição de um superelemento na formação do sistema misto de equações, a solução do mesmo e a obtenção das forças dinâmicas e dos deslocamentos internos dos superelementos. Em seguida, é feita a generalização do método para a subestruturação em múltiplos níveis. No final, apresenta-se o formulário referente à resposta a carregamento harmônico.

O quarto capítulo trata do algoritmo computacional destinado a aplicar o formulário estabelecido nos capítulos precedentes. Com o auxílio de diagramas, procuram-se mostrar as operações matriciais mais importantes e a utilização da memória secundária ou periférica. Descrevem-se também detalhes acerca da numeração automática de graus de liberdade e aspectos gerais do sistema desenvolvido.

A seguir, no quinto capítulo, são mostradas algumas aplicações do método de análise de estruturas formadas por superelementos. Inicialmente, é feita uma aferição da precisão do método. Nos exemplos seguintes, é dada ênfase a algumas potencialidades do sistema, como subestruturação em múltiplos níveis, compatibilização entre elementos finitos e reticulados, e validade da formulação da análise dinâmica.

Finalmente, no sexto capítulo, é feita a discussão dos resultados obtidos e procuram-se tirar algumas conclusões. Além disso, são sugeridas tarefas que possam vir a contribuir para a complementação e o aperfeiçoamento do presente trabalho; traçam-se também perspectivas de continuidade neste campo de pesquisa.

Capítulo II

II - OS SUPERELEMENTOS NA ANÁLISE ESTRUTURAL

II.1 - EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Na análise estática de uma estrutura pelo método da rigidez, o sistema de equações de equilíbrio a ser resolvido pode ser expresso na forma matricial abaixo:

$$K U = P \quad (II.1)$$

U é o vetor das incógnitas, constituído pelos deslocamentos nodais, P é o vetor de cargas, constituído de forças agindo na direção dos deslocamentos U . K é a matriz de rigidez.

Geralmente, a matriz K e o vetor P são obtidos a partir da soma de contribuições individuais de elementos ou super elementos integrantes do modelo físico do sistema estrutural:

$$K = \sum_{i=1}^{NP} K_i^P \quad (II.2)$$

$$P = \sum_{i=1}^{NP} P_i^P \quad (II.3)$$

NP é o número de partes ou regiões em que foi dividido o sistema estrutural para fins de análise.

A obtenção de K_1^P e P_1^P , para elementos tipo barra e elementos finitos, é assunto bastante conhecido. No caso de um superelemento, essas matrizes são expressas em termos dos graus de liberdade relativos aos seus nós de contorno; elas são obtidas por meio de um processo de condensação, descrito na seção II.2.

Uma vez obtidos os deslocamentos U , por meio da solução de (II.1), podem-se determinar as forças atuantes sobre cada elemento isolado, Q_1^P . Isso é feito a partir da seguinte equação matricial:

$$Q_1^P = P_1^P + K_1^P U \quad (II.4)$$

No caso de um elemento tipo barra, Q_1^P é o vetor de ações em suas extremidades.

Até aqui, foi tacitamente assumido que as matrizes K_1^P e P_1^P são determinadas em relação ao sistema de referência global da estrutura. Na prática, todavia, isso só acontece no caso particular em que o sistema de referência local do elemento ou superelemento coincide em orientação com o sistema global. Caso contrário, tornam-se necessárias transformações antes de se obter P_1^P , K_1^P e Q_1^P . Isso será tratado mais detalhadamente na seção II.4.

II.2 - CONDENSAÇÃO DE UM SUPERELEMENTO

Seja uma região de uma estrutura, destinada a constituir um superelemento. Esta região pode estar dividida, para fins de análise, em elementos e/ou superelementos de nível inferior. As equações que governam o equilí

brío do superelemento em questão podem ser ordenadas de forma a separar graus de liberdade internos e externos, assumindo a seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ab}^T & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_a \\ U_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_a \\ P_b \end{Bmatrix} \quad (\text{II.5})$$

onde os sub-índices a e b referem-se, respectivamente, aos graus de liberdade internos e externos. As submatrizes K_{aa} , K_{ab} e K_{bb} da matriz de rigidez são obtidas pelas contribuições das partes constituintes (elementos e outros superelementos) do superelemento em estudo. U_a e P_a são, respectivamente, deslocamentos e forças nodais equivalentes dos nós internos, tendo U_b e P_b o mesmo significado para os nós de contorno.

Adota-se aqui o método de solução de Gauss com a utilização da técnica de armazenamento de colunas ativas, no qual a solução é obtida em duas etapas distintas, correspondentes a uma decomposição na forma $L D L^T$ e a uma redução associada a uma retro-substituição do vetor de cargas. Maiores detalhes deste método podem ser encontrados em [15].

Fatorando K_{aa} na forma recém mencionada e escrevendo as equações resultantes de (II.5) por extenso, obtém-se:

$$L D L^T U_a + K_{ab} U_b = P_a \quad (\text{II.6})$$

$$K_{ab}^T U_a + K_{bb} U_b = P_b \quad (\text{II.7})$$

Pré-multiplicando (II.6) por L^{-1} e rearranjando os termos, obtém-se:

$$D L^T U_a = L^{-1} P_a - L^{-1} K_{ab} U_b \quad (II.8)$$

$$\text{ou} \quad D L^T U_a = V_a - S_{ab} U_b \quad (II.9)$$

$$\text{onde} \quad V_a = L^{-1} P_a \quad (II.10)$$

$$\text{e} \quad S_{ab} = L^{-1} K_{ab} \quad (II.11)$$

Convem destacar que a obtenção de V_a corresponde à redução do vetor de cargas. S_{ab} é determinado pelo mesmo processo; neste caso, cada coluna é obtida independentemente, por meio da redução da coluna correspondente de K_{ab} . Por outro lado, a equação (II.9) mostra que, uma vez obtido U_b por meio da solução da estrutura global, U_a pode ser determinado pelo processo de retro-substituição [15]. Assim, determinados U_a e U_b , pode-se constituir o vetor U da equação (II.4) e calcular as forças atuantes sobre cada elemento formador do atual superelemento.

Pré-multiplicando (II.9) sucessivamente por D^{-1} e $(L^T)^{-1}$, obtem-se:

$$U_a = (L^T)^{-1} D^{-1} V_a - (L^T)^{-1} D^{-1} S_{ab} U_b \quad (II.12)$$

Substituindo-se (II.12) em (II.7), e re-arranjando, obtem-se:

$$\begin{aligned} (K_{bb} - K_{ab}^T (L^T)^{-1} D^{-1} S_{ab}) U_b &= \\ &= P_b - K_{ab}^T (L^T)^{-1} D^{-1} V_a \end{aligned} \quad (II.13)$$

A partir de (II.11), pode-se deduzir que:

$$S_{ab}^T = K_{ab}^T (L^T)^{-1} \quad (II.14)$$

Assim, a equação (II.13) fica:

$$(K_{bb} - S_{ab}^T D^{-1} S_{ab}) U_b = P_b - S_{ab}^T D^{-1} V_a \quad (II.15)$$

$$\text{ou} \quad \bar{K}_{bb} U_b = \bar{P}_b \quad (II.16)$$

$$\text{onde} \quad \bar{K}_{bb} = K_{bb} - S_{ab}^T D^{-1} S_{ab} \quad (II.17)$$

$$\text{e} \quad \bar{P}_b = P_b - S_{ab}^T D^{-1} V_a \quad (II.18)$$

Com o estabelecimento da equação (II.16), conseguimos expressar o equilíbrio do superelemento, em termos somente dos graus de liberdade referentes aos seus nós de contorno. Portanto, \bar{K}_{bb} e \bar{P}_b , dados por (II.17) e (II.18), são, respectivamente, a matriz de rigidez e o vetor de cargas nodais equivalentes, condensados nos seus graus de liberdade externos.

II.3 - O SISTEMA DE REFERÊNCIA LOCAL DE UM SUPERELEMENTO

II.3.1 - Definição dos eixos locais

Para cada superelemento, existe um sistema de eixos locais de referência, definidos a partir dos seus nós de contorno. Em princípio, se pesquisa, entre

eles, três nós não colineares que possam definir um plano.

Para que o sistema local de certo superelemento seja univocamente determinado, é necessário que a referida pesquisa obedeça a uma determinada ordem. Por exemplo, seja um superelemento com NC nós de contorno, identificados pelos números n_1, n_2, \dots, n_{NC} , e fornecidos nesta ordem pelo usuário. A pesquisa consiste em encontrar um terceiro nó que forme, com os dois primeiros, um triângulo com área não nula. Assim, para este caso, se pesquisariam sucessivamente os conjuntos $(n_1, n_2, n_3), (n_1, n_2, n_4), \dots, (n_1, n_2, n_{NC})$.

A fim de definir os eixos locais de um superelemento, seja a figura II.1, onde aparecem um sistema de eixos globais de definição $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ e um sistema de eixos locais (x, y, z) associados a um conjunto de três nós de contorno de um superelemento. Os pontos 1 e 2 referem-se, respectivamente, aos nós n_1 e n_2 mencionados anteriormente. O ponto 3 é o terceiro nó resultante da pesquisa antes descrita.

Assim, o sistema local terá a origem em 1, com o eixo x orientado de 1 para 2. O eixo z é normal ao plano 1-2-3 e com a mesma orientação positiva do vetor rotação correspondente à sequência 1, 2, 3. O eixo y , contido no plano e perpendicular a x e z , é orientado de forma que x, y e z , nesta ordem, constituam um triedro direto.

A matriz de cossenos diretores dos eixos x, y e z , em relação ao sistema $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, pode ser expressa conforme segue:

$$R = \begin{bmatrix} \cos(x, \bar{x}) & \cos(x, \bar{y}) & \cos(x, \bar{z}) \\ \cos(y, \bar{x}) & \cos(y, \bar{y}) & \cos(y, \bar{z}) \\ \cos(z, \bar{x}) & \cos(z, \bar{y}) & \cos(z, \bar{z}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix} \quad (\text{II.19})$$

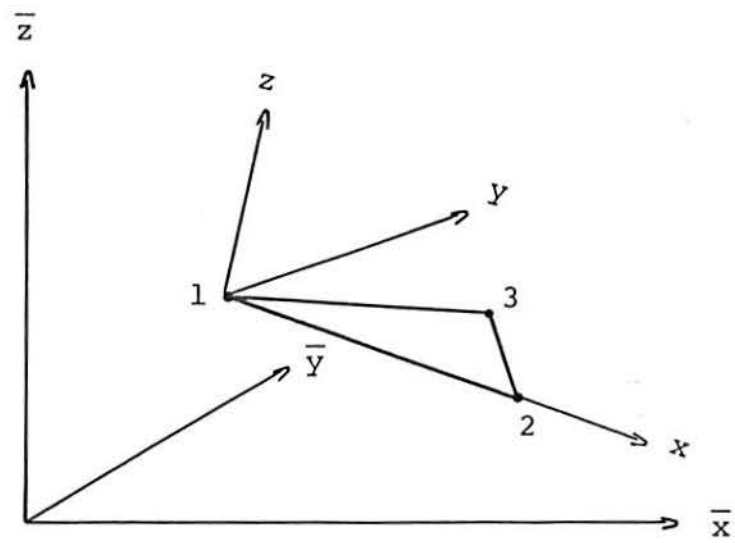


Figura II.1

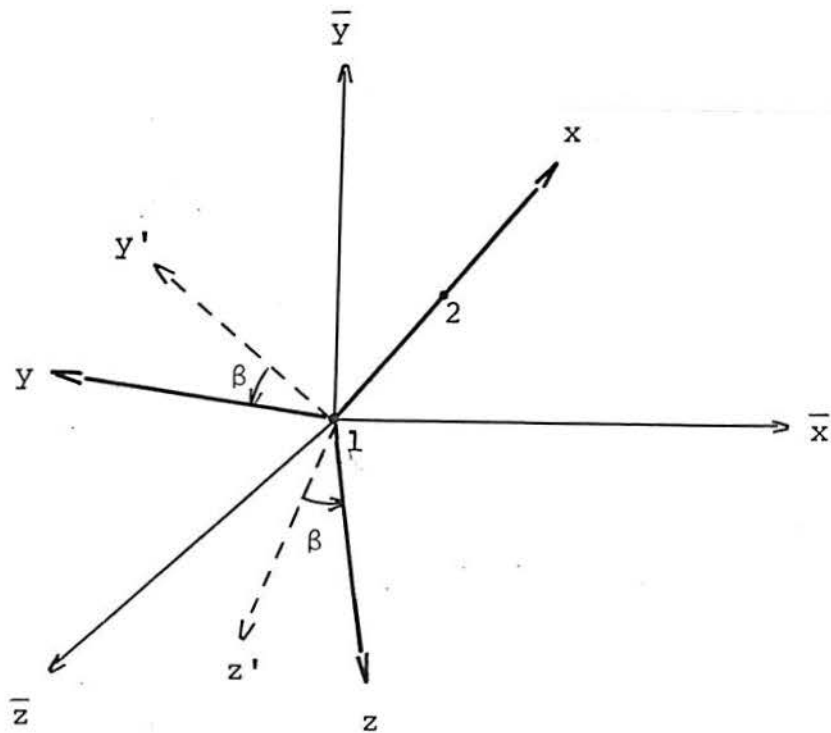


Figura II.2

A seguir, trata-se da determinação de R , a partir das coordenadas dos nós que definem o sistema de referência local do superelemento. As coordenadas dos três nós da figura II.1, em relação ao sistema global, podem ser postas na forma:

$$\bar{X}_i = \begin{Bmatrix} \bar{x}_i \\ \bar{y}_i \\ \bar{z}_i \end{Bmatrix} \quad i = 1, 2, 3 \quad (II.20)$$

Seja a seguinte notação:

$$\bar{X}_{1j} = \bar{X}_1 - \bar{X}_j = \begin{Bmatrix} \bar{x}_1 - \bar{x}_j \\ \bar{y}_1 - \bar{y}_j \\ \bar{z}_1 - \bar{z}_j \end{Bmatrix} \quad (II.21)$$

Os cossenos diretores para o eixo x serão dados pelas razões entre as projeções do segmento de reta 1-2 sobre os eixos x , y , z , e o comprimento l_{12} do referido segmento; este comprimento é dado por:

$$\begin{aligned} l_{12} &= \sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2} = \\ &= \sqrt{\bar{X}_{21}^T \bar{X}_{21}} \quad (II.22) \end{aligned}$$

Desta forma:

$$C_x = \bar{X}_{21}^T / \sqrt{\bar{X}_{21}^T \bar{X}_{21}} \quad (II.23)$$

Considerando os segmentos de reta 1-2 e 1-3 como vetores orientados, respectivamente, de 1 para 2 e de 1 para 3, a área A do triângulo 1-2-3 pode ser expressa da seguinte forma:

$$2A = | (\bar{X}_{21} \times \bar{X}_{31}) | \quad (II.24)$$

Sendo o eixo z normal aos segmentos 1-2 e 1-3, seus cossenos diretores serão dados pelo seguinte produto vetorial:

$$C_z^T = (\bar{X}_{21} \times \bar{X}_{31}) / 2A = \frac{1}{2A} \begin{Bmatrix} \bar{y}_{21} \bar{z}_{31} - \bar{z}_{21} \bar{y}_{31} \\ \bar{z}_{21} \bar{x}_{31} - \bar{x}_{21} \bar{z}_{31} \\ \bar{x}_{21} \bar{y}_{31} - \bar{y}_{21} \bar{x}_{31} \end{Bmatrix} \quad (II.25)$$

Finalmente, considerando que C_x e C_z são vetores unitários, e que y é normal a x e z, os cossenos diretores para o eixo y são dados por:

$$C_y = C_z \times C_x \quad (II.26)$$

Devido a erros de arredondamento ao fornecer as coordenadas, pode acontecer que o programa defina indevidamente um sistema local a partir de nós que, na verdade, são colineares. A fim de evitar esta ocorrência, torna-se necessário estabelecer um critério pelo qual três nós, situados aproximadamente sobre uma reta, sejam conside

rados colineares.

O critério aqui adotado é de tomar o quociente entre $2A$ e l_{12}^2 , dados respectivamente por (II.24) e (II.22), e compará-lo com uma tolerância. Assim, os pontos serão considerados como colineares sempre que:

$$2A / l_{12}^2 \leq \text{TOL} = 10^{-3} \quad (\text{II.27})$$

II.3.2 - Caso de nós de contorno colineares

Quando não for possível definir um plano a partir dos nós de contorno, torna-se necessário o fornecimento de um parâmetro adicional o qual denominaremos de ângulo β .

A figura II.2 ilustra a situação. Para facilidade de entendimento, considera-se aqui o sistema de eixos $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ como paralelo ao sistema global e com a origem coincidente com a do sistema de eixos locais do superelemento, x, y, z .

Também aqui o eixo x está orientado do nó 1 para o nó 2. Já os eixos y e z , perpendiculares entre si e ao eixo x , são tais que y resulta ao se girar y' segundo um ângulo β , no sentido do triedro direto. O eixo auxiliar y' é também perpendicular a x e está contido no plano $x-\bar{y}$.

Também neste caso, C_x é dado pela expressão (II.23). Para a determinação de C_y e C_z , procede-se primeiro a uma transformação intermediária, obtendo os cossenos diretores dos eixos auxiliares y' e z' . Em seguida, a matriz destes cossenos é pré-multiplicada por outra, em função de β . O resultado desta operação é a matriz dos cossenos diretores de (x, y, z) em relação a $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, a qual é mostrada a seguir:

$$R = \begin{bmatrix} \cos(x, \bar{X}) & \cos(x, \bar{Y}) & \cos(x, \bar{Z}) \\ r_{21} & a \cos \beta & r_{23} \\ r_{31} & -a \sin \beta & r_{33} \end{bmatrix} \quad (II.28)$$

$$\text{onde: } a = \sqrt{\cos^2(x, \bar{X}) + \cos^2(x, \bar{Z})} \quad (II.28-a)$$

$$r_{21} = (-\cos(x, \bar{X}) \cos(x, \bar{Y}) \cos \beta - \cos(x, \bar{Z}) \sin \beta) / a \quad (II.29)$$

$$r_{31} = (\cos(x, \bar{X}) \cos(x, \bar{Y}) \sin \beta - \cos(x, \bar{Z}) \cos \beta) / a \quad (II.30)$$

$$r_{23} = (-\cos(x, \bar{Y}) \cos(x, \bar{Z}) \cos \beta + \cos(x, \bar{X}) \sin \beta) / a \quad (II.31)$$

$$r_{33} = (\cos(x, \bar{Y}) \cos(x, \bar{Z}) \sin \beta + \cos(x, \bar{X}) \cos \beta) / a \quad (II.32)$$

Todos os elementos de R estão expressos em função de β e dos componentes de C_x , dado por (II.23).

No caso particular em que o eixo local x é paralelo ao eixo global \bar{y} , não é possível definir um plano x - \bar{y} , conforme a situação da figura II.2. Nessas condições, mede-se o ângulo β do eixo auxiliar z' (paralelo e com a mesma orientação de \bar{Z}) ao eixo local z . A figura II.3 mostra as duas situações possíveis. A matriz R, nesta situação, será dada por:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & \cos(x, \bar{Y}) & 0 \\ -\cos(x, \bar{Y}) \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ \cos(x, \bar{Y}) \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (II.33)$$

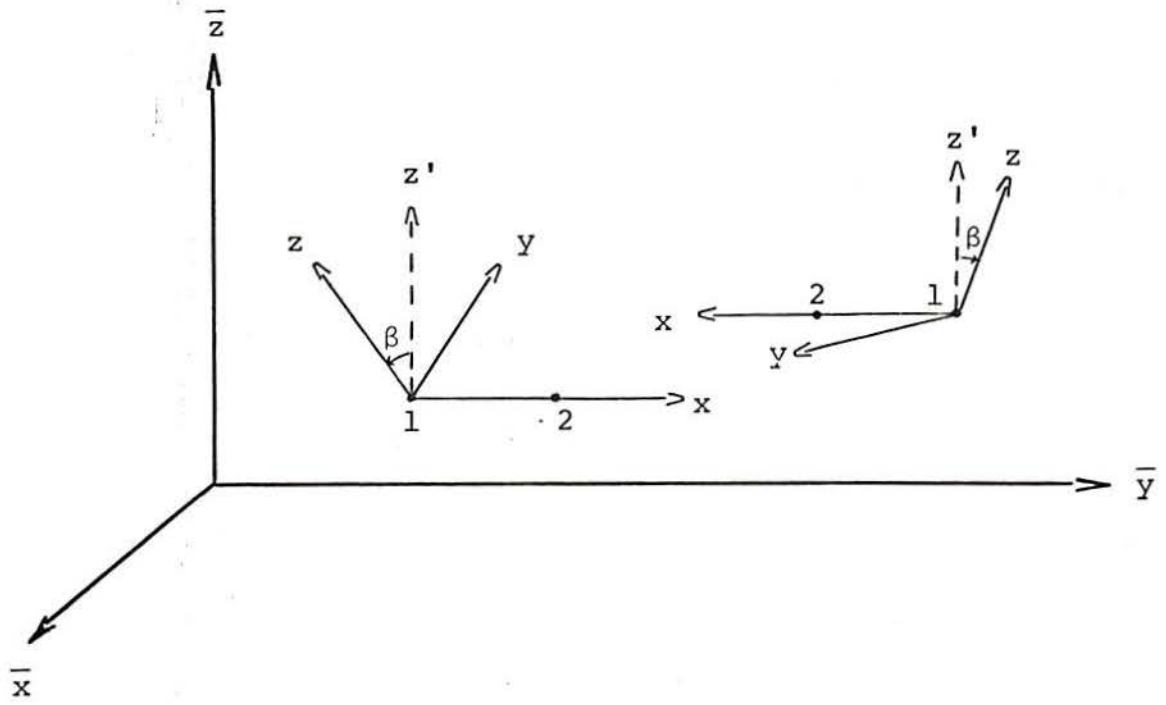


Figura II.3

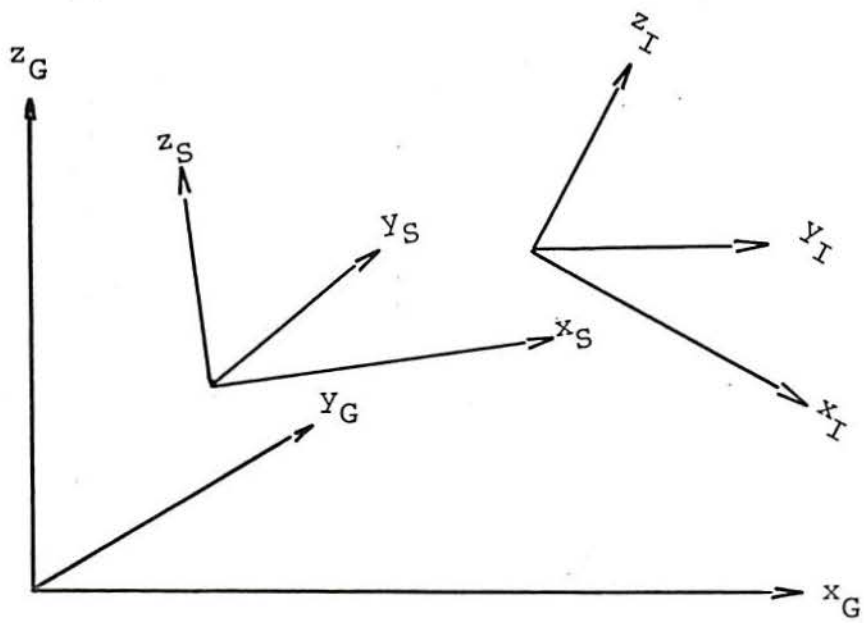


Figura II.4

II.3.3 - Transformações intermediárias

Existem situações nas quais, dadas as matrizes de cossenos diretores de dois superelementos em relação a um sistema global, se deseja conhecer os cossenos diretores de um superelemento em relação ao outro.

A figura II.4 ilustra a situação, onde $x_G y_G z_G$ é o sistema global. Sejam $x_S y_S z_S$ e $x_I y_I z_I$ os sistemas locais, respectivamente, de um superelemento de nível superior e de um inferior. Suponha que se conheçam as matrizes de cossenos diretores R_{SG} e R_{IG} dos superelementos superior e inferior em relação ao sistema global, dados por:

$$R_{SG} = \begin{bmatrix} \cos(x_S, x_G) & \cos(x_S, y_G) & \cos(x_S, z_G) \\ \cos(y_S, x_G) & \cos(y_S, y_G) & \cos(y_S, z_G) \\ \cos(z_S, x_G) & \cos(z_S, y_G) & \cos(z_S, z_G) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{xSG} \\ C_{ySG} \\ C_{zSG} \end{bmatrix} \quad (II.34)$$

$$R_{IG} = \begin{bmatrix} \cos(x_I, x_G) & \cos(x_I, y_G) & \cos(x_I, z_G) \\ \cos(y_I, x_G) & \cos(y_I, y_G) & \cos(y_I, z_G) \\ \cos(z_I, x_G) & \cos(z_I, y_G) & \cos(z_I, z_G) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{xIG} \\ C_{yIG} \\ C_{zIG} \end{bmatrix} \quad (II.35)$$

Deseja-se agora determinar a matriz R_{IS} dos cossenos diretores do sistema $x_I y_I z_I$ em relação a $x_S y_S z_S$. Esta matriz tem sua constituição mostrada a seguir:

$$R_{IS} = \begin{bmatrix} \cos(x_I, x_S) & \cos(x_I, y_S) & \cos(x_I, z_S) \\ \cos(y_I, x_S) & \cos(y_I, y_S) & \cos(y_I, z_S) \\ \cos(z_I, x_S) & \cos(z_I, y_S) & \cos(z_I, z_S) \end{bmatrix} \quad (II.36)$$

Dado que as linhas de R_{SG} e R_{IG} são vetores unitários, os cossenos que aparecem em (II.36) podem ser obtidos pelo simples produto escalar destes vetores. Assim, R_{IS} fica com a seguinte expressão:

$$R_{IS} = \begin{bmatrix} C_{xIG} & C_{xSG}^T & C_{xIG} & C_{ySG}^T & C_{xIG} & C_{zSG}^T \\ C_{yIG} & C_{xSG}^T & C_{yIG} & C_{ySG}^T & C_{yIG} & C_{zSG}^T \\ C_{zIG} & C_{xSG}^T & C_{zIG} & C_{ySG}^T & C_{zIG} & C_{zSG}^T \end{bmatrix} \quad (II.37)$$

A expressão acima pode ser posta na forma:

$$R_{IS} = \begin{bmatrix} C_{xIG} \\ C_{yIG} \\ C_{zIG} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{xSG}^T & C_{ySG}^T & C_{zSG}^T \end{bmatrix} \quad (II.38)$$

ou, ainda, em forma compacta:

$$R_{IS} = R_{IG} R_{SG}^T \quad (II.39)$$

Portanto, a equação (II.39) nos dá os cossenos diretores do superelemento inferior em relação ao superior, a partir das matrizes destes dois superelementos em relação ao sistema global.

Por outro lado, pode ocorrer a situação inversa, isto é, conhecendo-se apenas os cossenos diretores do superelemento de nível inferior em relação ao superior e os cossenos deste em relação ao sistema global, deseja-se conhecer a matriz dos cossenos do superelemento inferior em relação ao sistema global.

Tomando-se a equação (II.39) e considerando a propriedade segundo a qual a transposta de um produto matricial é igual ao produto das transpostas das matrizes fatores, com a ordem inversa, podemos escrever:

$$R_{IS}^T = R_{SG} R_{IG}^T \quad (II.40)$$

Pré-multiplicando ambos os membros por R_{SG}^{-1} , temos:

$$R_{SG}^{-1} R_{IS}^T = R_{IG}^T \quad (II.41)$$

Considerando a ortogonalidade de R_{SG} , sua inversa é igual à transposta, de forma que:

$$R_{SG}^T R_{IS}^T = R_{IG}^T \quad (II.42)$$

Levando novamente em conta a propriedade da transposta de um produto matricial, a equação (II.42) pode ser modificada, conforme segue:

$$R_{IG} = R_{IS} R_{SG} \quad (II.43)$$

Portanto, a equação (II.43) nos dá os cossenos diretores do sistema $x_I y_I z_I$ em relação a $x_G y_G z_G$, a partir dos cossenos de $x_I y_I z_I$ em relação a $x_S y_S z_S$ e os deste em relação a $x_G y_G z_G$.

II.4 - ROTAÇÃO DE EIXOS DE REFERÊNCIA

Considere o vetor V , mostrado em três dimensões na figura II.5. Os dois conjuntos de eixos ortogonais x_G, y_G, z_G e x_L, y_L, z_L serão designados, respectivamente, por sistemas de referência global e local.

O vetor V pode ser representado por um conjunto de três componentes ortogonais V_{xG}, V_{yG} e V_{zG} nas direções de x_G, y_G e z_G , respectivamente, conforme é mostrado na figura II.5. Da mesma forma, o mesmo vetor pode-se representar por um segundo conjunto de componentes V_{xL}, V_{yL} e V_{zL} , nas direções de x_L, y_L e z_L , também mostradas na mesma figura. As últimas componentes podem ser relacionadas com as primeiras, valendo-se de considerações puramente geométricas. Por exemplo, V_{xL} é igual à soma das projeções de V_{xG}, V_{yG} e V_{zG} sobre o eixo x_L . As componentes V_{yL} e V_{zL} podem ser expressas numa forma similar, resultando a seguinte relação matricial:

$$V_L = \begin{Bmatrix} V_{xL} \\ V_{yL} \\ V_{zL} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x, \bar{x}) & \cos(x, \bar{y}) & \cos(x, \bar{z}) \\ \cos(y, \bar{x}) & \cos(y, \bar{y}) & \cos(y, \bar{z}) \\ \cos(z, \bar{x}) & \cos(z, \bar{y}) & \cos(z, \bar{z}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_{xG} \\ V_{yG} \\ V_{zG} \end{Bmatrix} \quad (II.44)$$

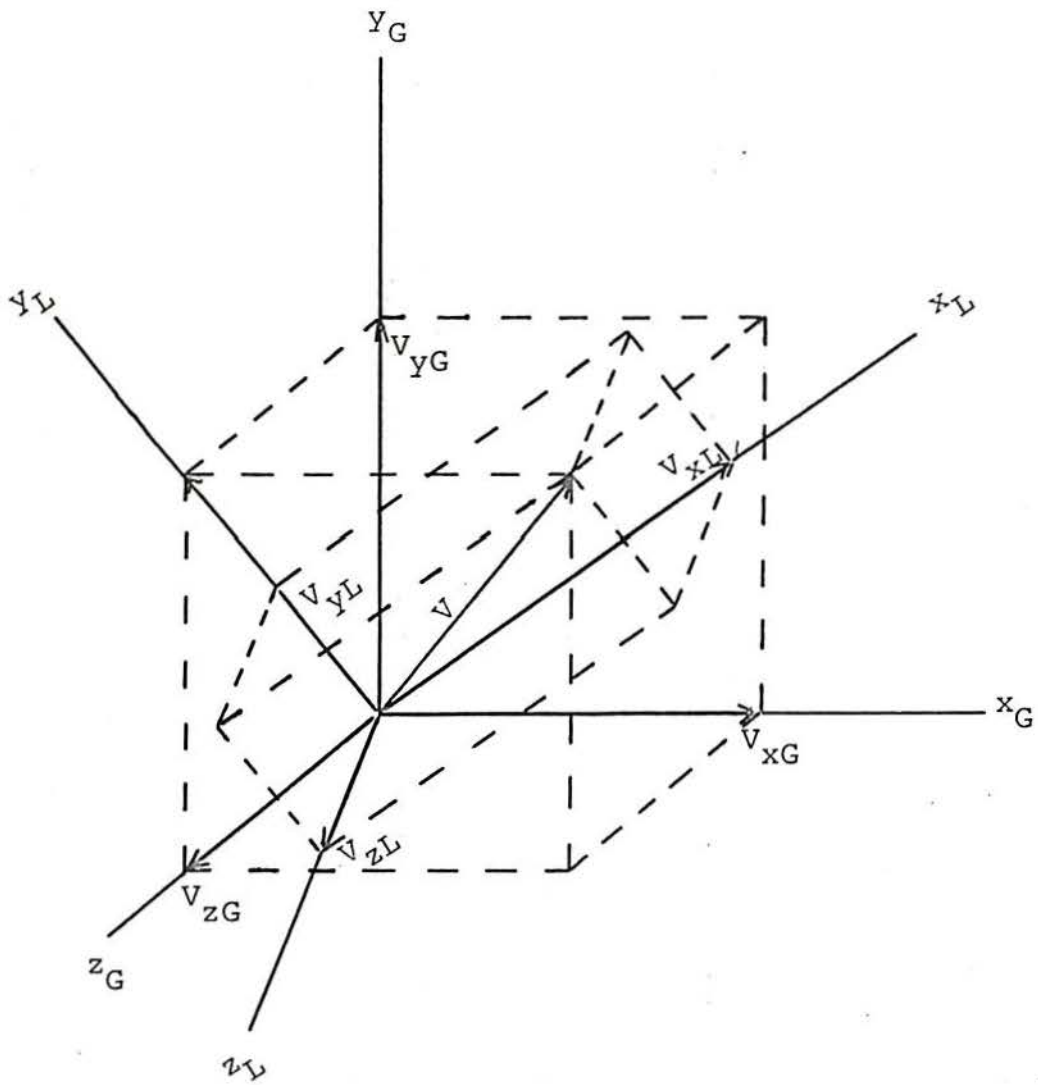


Figura II.5

ou, em forma compacta:

$$V_L = R V_G \quad (II.45)$$

onde R é a matriz de cossenos diretores do sistema local em relação ao global, conforme foi definida em (II.19). É também possível exprimir o conjunto de componentes do vetor V segundo x_G , y_G e z_G em função do conjunto de componentes sobre os eixos x_L , y_L e z_L . Usando o mesmo processo de soma de projeções, chega-se à seguinte expressão matricial:

$$V_G = \begin{Bmatrix} V_{xG} \\ V_{yG} \\ V_{zG} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x, \bar{x}) & \cos(y, \bar{x}) & \cos(z, \bar{x}) \\ \cos(x, \bar{y}) & \cos(y, \bar{y}) & \cos(z, \bar{y}) \\ \cos(x, \bar{z}) & \cos(y, \bar{z}) & \cos(z, \bar{z}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_{xL} \\ V_{yL} \\ V_{zL} \end{Bmatrix} \quad (II.46)$$

Esta equação pode ser escrita na seguinte forma compacta:

$$V_G = R^T V_L \quad (II.47)$$

Convém destacar que as relações até aqui deduzidas são válidas também para sistemas global e local com as origens não coincidentes. Assim, em relação à situação da figura II.5, valem as mesmas considerações para qualquer outro sistema local, com origem em qualquer ponto, bastando que seus eixos sejam paralelos, respectivamente, a x_L , y_L e z_L .

No caso de um superelemento com N nós de contorno, serão válidas as seguintes relações:

$$U_{bL} = \bar{R} U_b \quad (II.48)$$

$$\bar{P}_{bL} = \bar{R} \bar{P}_{bG} \quad (II.49)$$

onde

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} R & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & R \\ 1 & 2 & \dots & 2N \end{bmatrix} \quad (II.50)$$

Suprimiu-se o índice G dos deslocamentos U_b no sistema global, ficando entendido que, daqui por diante, U_b terá este significado sempre que se apresentar nesta forma. \bar{R} é definida como a matriz de rotação do superelemento. Ela é composta de submatrizes R, dadas por (II.19), agrupadas em torno da diagonal e se repetindo por 2N vezes. As submatrizes restantes são nulas. Assim, \bar{R} é de ordem $6N \times 6N$. Pode-se demonstrar que \bar{R} é ortogonal [16].

A matriz \bar{R} , aqui deduzida para os nós de contorno, é inteiramente válida para transformações envolvendo nós internos e também nós incidentes de um elemento simples. Basta que se redefina, em cada caso, a quantidade de N.

Considere a equação (II.16), com os vetores de forças e deslocamentos referenciados ao sistema local do superelemento:

$$\bar{K}_{bb} U_{bL} = \bar{P}_{bL} \quad (II.51)$$

A correspondente equação referida ao sistema global de coordenadas ficará, portanto, com o seguinte aspecto:

$$\bar{K}_{bbG} U_b = \bar{P}_{bG} \quad (II.52)$$

$$\text{com } \bar{K}_{bbG} = \bar{R}^T \bar{K}_{bb} \bar{R} \quad (II.53)$$

$$\text{e } \bar{P}_{bG} = \bar{R}^T \bar{P}_{bL} \quad (II.54)$$

Obtivemos agora uma relação envolvendo forças e deslocamentos no sistema global. Portanto, \bar{K}_{bbG} , dada por (II.53), é a matriz de rigidez do superelemento, referenciada ao sistema global. É essa matriz que vai contribuir para o assembling da estrutura global ou de um superelemento de nível superior.

A solução de (II.1) vai fornecer os deslocamentos referenciados ao sistema global da estrutura. Assim, para um dado superelemento, estarão disponíveis os deslocamentos globais dos seus nós de contorno, U_b . Para a obtenção dos deslocamentos dos nós internos, por meio da equação (II.9), é preciso transformar os deslocamentos dos nós de contorno, de globais para locais, usando-se a equação (II.48). Desta forma, a equação (II.9) fica modificada, como segue:

$$D L^T U_a = V_a - S_{ab} U_{bL} = V_a - S_{ab} \bar{R} U_b \quad (II.55)$$

Assim, U_a é obtido no sistema local do superelemento. Para referenciar estes deslocamentos ao sistema global, torna-se necessária a seguinte transformação:

$$U_{aG} = \bar{R}^T U_a \quad (II.56)$$

onde \bar{R}^T é definida a partir de (II.50), sendo N o número de nós internos.

Quanto às solicitações atuantes sobre cada elemento isolado, a aplicação da equação (II.4) fornece as mesmas no sistema global. A determinação destas solicitações no sistema local do elemento requer a seguinte modificação na equação (II.4):

$$Q_{L1}^P = \bar{R} Q_{G1}^P = \bar{R} (P_1^P + K_1^P U) \quad (II.57)$$

II.5 - RESTRIÇÕES GENERALIZADAS

Descreve-se a seguir a técnica de aplicação de restrições nodais generalizadas, com a eliminação de equações a nível de subestrutura. As equações expressando restrições generalizadas para um superelemento podem ser escritas na forma:

$$\begin{Bmatrix} u_h \\ u_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ C_{ih} & C_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_h \\ u_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} O \\ u_o \end{Bmatrix} \quad (II.58)$$

onde: u_h - deslocamentos independentes, associados a GL (graus de liberdade) pertencentes ao superelemento.

u_i - deslocamentos associados a GL pertencentes ao superelemento, tornados dependentes através do estabelecimento de RG (restrições generalizadas).

u_j - deslocamentos independentes, associados a GL fora do superelemento.

C_{ih} e C_{ij} - matrizes de coeficientes das equações de

RG.

u_0 - termos independentes das equações de RG.

A equação (II.16) (condensação de um subelemento nos seus GL externos) pode ser reescrita de forma a separar GL dependentes e independentes de RG, assumindo a forma:

$$\begin{bmatrix} K_{hh} & K_{hi} \\ K_{hi}^T & K_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_h \\ u_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_h \\ P_i \end{Bmatrix} \quad (\text{II.59})$$

onde os índices h e i identificam partições de \bar{K}_{bb} , \bar{P}_b e U_b relacionadas, respectivamente, a GL independentes e dependentes de RG. Introduzindo (II.58) em (II.59), chega-se a uma equação equivalente à (II.16), envolvendo, porém, somente GL independentes:

$$\begin{bmatrix} K_{hh}^* & K_{hj}^* \\ K_{hj}^{*T} & K_{jj}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_h \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_h^* \\ P_j^* \end{Bmatrix} \quad (\text{II.60})$$

onde:

$$K_{hh}^* = K_{hh} + K_{hi} C_{ih} + C_{ih}^T K_{hi}^T + C_{ih}^T K_{ii} C_{ih} \quad (\text{II.61})$$

$$K_{hj}^* = K_{hi} C_{ij} + C_{ih}^T K_{ii} C_{ij} \quad (\text{II.62})$$

$$K_{jj}^* = C_{ij}^T K_{ii} C_{ij} \quad (\text{II.63})$$

$$P_h^* = P_h - K_{hi} u_0 + C_{ih}^T P_i - C_{ih}^T K_{ii} u_0 \quad (II.64)$$

$$P_j^* = C_{ij}^T P_i - C_{ij}^T K_{ii} u_0 \quad (II.65)$$

A sistemática de aplicação de RG consiste em obter \bar{K}_{DB} e \bar{P}_D pelas equações (II.17) e (II.18), e reordená-las de acordo com (II.59). Posteriormente, quando o superelemento atual participar da montagem de outro superelemento ou da estrutura global, serão efetuadas as operações (II.61) a (II.65) e as matrizes resultantes serão então somadas nas posições correspondentes aos GL relativos a u_h e u_j .

Observa-se, portanto, que, por ocasião da condensação do superelemento atual, são eliminados os GL dependentes de RG relativos apenas aos nós internos. Os GL referentes aos nós de contorno só serão eliminados quando os mesmos se constituírem em nós internos de uma subestrutura de nível superior.

Capítulo III

III - ANÁLISE DINÂMICA COM SUBESTRUTURAÇÃO

III.1 - EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO - SUPERPOSIÇÃO MODAL

Na análise dinâmica linear de uma estrutura pelo método da rigidez, o sistema de equações, expressando o equilíbrio no instante t , pode ser posto na seguinte forma matricial:

$$M \ddot{U}(t) + C \dot{U}(t) + K U(t) = P(t) \quad (\text{III.1})$$

onde M , C e K são, respectivamente, as matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez do sistema estrutural. $\ddot{U}(t)$, $\dot{U}(t)$ e $U(t)$ são os vetores (dependentes do tempo) de acelerações, velocidades e deslocamentos dos pontos nodais, segundo direções associadas aos graus de liberdade que definem o comportamento da estrutura; $P(t)$, também variável com o tempo, é o vetor das forças externas, aplicadas segundo as mesmas direções. Todos os vetores e matrizes (quadradas) envolvidas em (III.1) são de ordem n (número de graus de liberdade).

O vetor $P(t)$ e as matrizes M e K podem ser obtidas mediante a soma de contribuições individuais de elementos ou superelementos integrantes do sistema estrutu-

ral:

$$P(t) = \sum_{J=1}^{NP} P_J^P(t) \quad (III.2)$$

$$M = \sum_{J=1}^{NP} M_J^P \quad (III.3)$$

$$K = \sum_{J=1}^{NP} K_J^P \quad (III.4)$$

NP é o número de partes ou regiões em que foi dividida a estrutura.

A obtenção de $P_J^P(t)$, M_J^P e K_J^P para elementos finitos é assunto bastante conhecido. Como, no presente trabalho, se adota o modelo de massas discretas, M_J^P será uma matriz diagonal, considerando-se nula a inércia à rotação. No caso de superelementos, estas matrizes são obtidas por meio de um processo de condensação, descrito na seção III.3.

No caso de se usar superposição modal, a matriz C não é formada. O efeito do amortecimento é levado em conta mediante a adoção de taxas de amortecimento modal, conforme será tratado mais adiante.

Uma vez obtidos os deslocamentos $U(t)$, por meio da solução de (III.1), podem-se determinar as solicitações atuantes sobre cada elemento isolado, $Q_J^P(t)$. Isso é feito a partir da seguinte equação matricial:

$$Q_J^P(t) = -P_J^P(t) + K_J^P U(t) \quad (III.5)$$

Note-se que a expressão acima é inteiramente análoga à da análise estática, observando-se aqui ape

nas a dependência do tempo nas variáveis envolvidas.

Matematicamente, (III.1) representa um sistema de equações diferenciais lineares de segunda ordem. Na análise estrutural, devido às peculiaridades das matrizes M , C e K , são usados principalmente dois métodos de solução: integração direta e superposição modal.

O método da superposição modal consiste em efetuar uma transformação nas equações de equilíbrio (III.1), de forma a torná-las desacopladas; assim, cada uma delas poderá ser integrada isoladamente. A referida transformação é estabelecida a partir das soluções em deslocamentos do problema de vibrações livres sem amortecimento, expresso por:

$$M \ddot{U}(t) + K U(t) = 0 \quad (\text{III.6})$$

A solução para (III.6) pode ser posta na forma:

$$U(t) \stackrel{r}{=} \varphi e^{i\omega t} \quad (\text{III.7})$$

onde φ é um vetor de ordem n , ω uma constante que representa a frequência de vibração (em rad/s) do vetor φ , e $i = \sqrt{-1}$. Substituindo (III.7) em (III.6), obtém-se o problema de autovalores generalizado, expresso por:

$$K \varphi = \omega^2 M \varphi \quad (\text{III.8})$$

A solução de (III.8) fornece as n soluções (ω_j^2, φ_j) , $j = 1, 2, \dots, n$, onde os autovetores são M-ortonormalizados. O vetor φ_j é chamado de j -ésimo modo de

vibração e w_j é a correspondente frequência de vibração, em rad/s.

Sejam ϕ uma matriz cujas colunas são os autovetores ϕ_j e Ω uma matriz diagonal que contem os autovalores w_j^2 , isto é:

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_n \end{bmatrix} \quad (\text{III.9-a})$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} w_1^2 & & & \\ & w_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & w_n^2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.9-b})$$

Podem-se escrever as n soluções para (III.8) como segue:

$$K \phi = M \phi \Omega \quad (\text{III.10})$$

Uma vez que os autovetores são M-ortonormais, tem-se que:

$$\phi^T M \phi = I ; \quad \phi^T K \phi = \Omega \quad (\text{III.11})$$

O desacoplamento das equações (III.1) é conseguido mediante a transformação de coordenadas expressa por:

$$U(t) = \phi Y(t) \quad (\text{III.12})$$

onde $Y(t)$ é um vetor cujas componentes são conhecidas como coordenadas generalizadas ou modais. Entrando com (III.12), pré-multiplicando (III.1) por ϕ^T e levando em conta (III.11), obtemos equações de equilíbrio correspondendo aos deslocamentos em coordenadas modais:

$$\ddot{Y}(t) + \phi^T C \phi \dot{Y}(t) + \Omega Y(t) = \phi^T P(t) \quad (\text{III.13})$$

Geralmente, não é possível construir a matriz C de forma explícita, mas somente incluir os efeitos do amortecimento de maneira aproximada. No método da superposição modal, é feita a hipótese de amortecimento proporcional, caso em que:

$$\phi_J^T C \phi_J = 2 w_J \xi_J \delta_{JK} \quad (\text{III.14})$$

onde ξ_J é a taxa de amortecimento modal e δ_{JK} é o delta de Kronecker. Portanto, ao usar (III.14), supõe-se que os autovetores ϕ_J são ortogonais também em relação a C , fazendo com que o sistema (III.13) se reduza a um conjunto de n equações desacopladas da forma:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_J(t) + 2 w_J \xi_J \dot{y}_J(t) + w_J^2 y_J(t) &= \dots \\ \dots &= p_J(t) = \phi_J^T P(t) \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

onde $y_J(t)$ é um componente individual do vetor $Y(t)$. Observe-se que (III.15) representa a equação de equilíbrio de um sistema com um único grau de liberdade, cuja solução é dada por fórmulas conhecidas, dependendo do tipo de carregamento

e da existência de condições iniciais. Na seção III.5, apresenta-se a solução para o caso de carregamento harmônico.

Em resumo, o método da superposição modal consiste em resolver o problema de autovalores (III.8), obter o vetor de coordenadas generalizadas $Y(t)$ por meio da solução das n equações desacopladas (III.15) e determinar a resposta em deslocamento nas coordenadas geométricas $U(t)$, aplicando-se a equação (III.12). Observe-se que esta equação pode ser posta na forma:

$$U(t) = \phi Y(t) = \phi_1 y_1(t) + \phi_2 y_2(t) + \dots \\ \dots + \phi_n y_n(t) \quad (III.16)$$

ou seja, $U(t)$ é obtido pela superposição das parcelas correspondentes a cada um dos modos ϕ_j .

III.2 - ALGORITMO DE LANCZOS-RITZ

A matriz modal ϕ não fornece a única base possível para a transformação de coordenadas expressa por (III.12). Na verdade, a sua utilização apresenta diversos inconvenientes, destacando-se o grande esforço computacional decorrente do caráter iterativo da solução do problema de autovalores. Convém lembrar que o sistema (III.1) pode apresentar um grande número de graus de liberdade. Existe ainda a possibilidade de serem gerados vários autovetores ortogonais ao carregamento aplicado ou com pequenos fatores de participação.

Um método que evita os inconvenientes acima citados consiste em utilizar uma transformação de coordenadas baseada na construção de um conjunto de vetores ortogonais, por meio do algoritmo de Lanczos, o qual forne-

ce uma aproximação de Rayleigh-Ritz para os autovalores e autovetores exatos. O referido algoritmo gera os denominados vetores de Lanczos-Ritz, a partir da seguinte relação de recorrência:

$$K x_1^* = M x_{i-1} \quad i = 2, \dots, L \quad (\text{III.17})$$

onde L é o número de vetores de Lanczos-Ritz a serem obtidos, K e M são as matrizes de rigidez e de massa, x_{i-1} é o vetor obtido no ciclo anterior. O vetor x_1^* é obtido pela solução do sistema (III.17) e a seguir ortogonalizado em relação aos dois últimos vetores de Lanczos-Ritz, por meio das operações expressas por:

$$x_1^{**} = x_1^* - \sum_{j=i-2}^{i-1} c_j x_j \quad (\text{III.18})$$

onde $c_j = x_j^T M x_1^* \quad j = i-2, i-1 \quad (\text{III.19})$

Em alguns casos, dependendo do número de vetores calculados, a adoção das equações acima pode levar à perda de ortogonalidade, obrigando a que a ortogonalização seja feita em relação a todos os vetores já obtidos. O vetor de partida x_1 pode ser obtido pela solução estática da estrutura submetida às amplitudes P_0 do carregamento, conforme segue:

$$K x_1^{**} = P_0 \quad (\text{III.20})$$

Depois de obtido e ortogonalizado, cada vetor de Lanczos-Ritz é normalizado com respeito à matriz de massa, segundo as operações expressas a seguir:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{\Gamma}} x_1^{**} \quad (\text{III.21})$$

onde

$$r = x_1^{**T} M x_1^{**} \quad (\text{III.22})$$

Os vetores x_1 podem ser agrupados numa matriz $X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_L]$, formando uma base ortogonal à matriz de massa M . Todavia, a base X ainda não desacopla o sistema de equações (III.1), uma vez que os vetores x_1 não são ortogonais com respeito à matriz de rigidez. Este desacoplamento pode ser conseguido projetando-se a matriz K no subespaço formado pela base X ,

$$K^* = X^T K X \quad (\text{III.23})$$

e resolvendo o problema de autovalores neste subespaço:

$$[K^* - \hat{w}_1^2 I] z_1 = 0 \quad (\text{III.24})$$

onde \hat{w}_1 é uma frequência exata do sistema reduzido e uma frequência aproximada do sistema global. Os L autovetores do sistema reduzido, z_1 , podem ser agrupados numa matriz $Z = [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_L]$.

Finalmente, a base que desacopla as equações de equilíbrio é determinada pelo seguinte produto matricial:

$${}^0X = X Z \quad (\text{III.25})$$

onde 0X contem os vetores de Lanczos-Ritz finais, ou seja, aproximações de Rayleigh-Ritz dos autovetores do problema de autovalores dado por (III.8). Desta forma, serão os valores de \hat{w}_j e os vetores contidos em 0X que serão usados, respectivamente, como frequências e modos de vibração, na análise por superposição modal vista na seção anterior.

III.3 - MÉTODO DE SUPERPOSIÇÃO MODAL - SUPERELEMENTOS

Seja uma região de uma estrutura, destinada a constituir um superelemento. As equações de equilíbrio dinâmico (III.1), particularizadas para esta região, podem ser ordenadas de forma a separar graus de liberdade internos e externos, assumindo a seguinte forma matricial:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ab}^T & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_a(t) \\ U_b(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{aa} & C_{ab} \\ C_{ab}^T & C_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_a(t) \\ \dot{U}_b(t) \end{Bmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} M_{aa} & M_{ab} \\ M_{ab}^T & M_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_a(t) \\ \ddot{U}_b(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_a(t) \\ P_b(t) \end{Bmatrix} \quad (III.26)
 \end{aligned}$$

onde os sub-índices a e b referem-se, respectivamente, aos graus de liberdade internos e externos. As partições K_{aa} , K_{ab} e K_{bb} da matriz de rigidez, bem como M_{aa} , M_{ab} e M_{bb} da matriz de massa são obtidas mediante o assembling das partes constituintes (elementos e outros superelementos). U_a , \dot{U}_a , \ddot{U}_a e P_a são, respectivamente, deslocamentos, velocidades, acelerações e forças aplicadas nos nós internos, tendo U_b , \dot{U}_b , \ddot{U}_b e P_b o mesmo significado para os nós de contorno. C_{aa} , C_{ab} e C_{bb} são partições da matriz de amortecimento.

Os deslocamentos internos U_a podem ser expressos mediante a soma abaixo:

$$U_a(t) = U_a^d(t) + U_a^e(t) \quad (\text{III.27})$$

onde $U_a^d(t)$ é a parcela dinâmica, devida ao efeito das forças internas $P_a(t)$ e das acelerações de contorno $\ddot{U}_D(t)$ (atualmente desconhecidas). $U_a^d(t)$ pode ser expresso em coordenadas modais pela seguinte equação:

$$U_a^d(t) = \varphi_a Y_a(t) \quad (\text{III.28})$$

onde $Y_a(t)$ é o vetor das coordenadas modais do superelemento, sendo determinado por ocasião da solução da estrutura global. φ_a são os vetores de Ritz internos do superelemento, sendo obtidos pelo algoritmo da seção anterior, entrando-se com M_{aa} e K_{aa} como matrizes de massa e de rigidez, e com um vetor de cargas dinâmicas $R_a(t)$ que será tratado na sub-seção III.3.1.

A parcela estática $U_a^e(t)$ corresponde a deslocamentos internos devidos a "movimentos de apoio" $U_D(t)$. Eles são expressos a partir dos deslocamentos U_D pela relação:

$$U_a^e(t) = T_{ab} U_D(t) \quad (\text{III.29})$$

onde
$$T_{ab} = -K_{aa}^{-1} K_{ab} \quad (\text{III.30})$$

Substituindo (III.28) e (III.29) em (III.27), obtém-se a expressão dos deslocamentos internos de um superelemento:

$$U_a(t) = \varphi_a Y_a(t) + T_{ab} U_b(t) \quad (\text{III.31})$$

Escrevendo as equações de equilíbrio (III.26) por extenso e substituindo, na primeira delas, $U_a(t)$ pela expressão (III.31), obtém-se:

$$\begin{aligned} & K_{aa} \varphi_a Y_a(t) + K_{aa} T_{ab} U_b(t) + K_{ab} U_b(t) + \\ & + C_{aa} \varphi_a \dot{Y}_a(t) + C_{aa} T_{ab} \dot{U}_b(t) + C_{ab} \dot{U}_b(t) + \\ & + M_{aa} \varphi_a \ddot{Y}_a(t) + M_{aa} T_{ab} \ddot{U}_b(t) + M_{ab} \ddot{U}_b(t) = \\ & = P_a(t) \end{aligned} \quad (\text{III.32})$$

Considerando (III.30), os termos $K_{aa} T_{ab} U_b(t)$ e $K_{ab} U_b(t)$ cancelam-se mutuamente, acontecendo o mesmo em relação a $C_{aa} T_{ab} \dot{U}_b(t)$ e $C_{ab} \dot{U}_b(t)$, se levarmos em conta a proporcionalidade entre K e C . Pré-multiplicando se (III.32) por φ_a^T e levando em conta (III.11), resulta:

$$\begin{aligned} \Omega_a Y_a(t) + C_{aa}^* \dot{Y}_a(t) + I_a \ddot{Y}_a(t) + \bar{M}_{ab} \ddot{U}_b(t) = \\ = \varphi_a^T P_a(t) \end{aligned} \quad (\text{III.33})$$

onde $\Omega_a = \varphi_a^T K_{aa} \varphi_a$ - matriz diagonal contendo os quadrados das frequências de vibração dos modos φ_a .

$I_a = \varphi_a^T M_{aa} \varphi_a$ - matriz identidade.

$$\bar{M}_{ab} = \varphi_a^T (M_{aa} T_{ab} + M_{ab}) \quad (\text{III.34})$$

Entrando também com (III.31) na segunda das equações (III.26) e somando com a (III.32) pré-multiplicada por T_{ab}^T , resulta:

$$\begin{aligned} \bar{K}_{bb} U_b(t) + C_{bb}^* \dot{U}_b(t) + \bar{M}_{ab}^T \ddot{Y}_a(t) + \bar{M}_{bb} \ddot{U}_b(t) &= \\ &= \bar{P}_b(t) \end{aligned} \quad (III.35)$$

$$\text{sendo:} \quad \bar{K}_{bb} = K_{bb} + K_{ab}^T T_{ab} \quad (III.36)$$

$$\bar{M}_{bb} = M_{bb} + M_{ab}^T T_{ab} + T_{ab}^T (M_{aa} T_{ab} + M_{ab}) \quad (III.37)$$

$$\bar{P}_b(t) = P_b(t) + T_{ab}^T P_a(t) \quad (III.38)$$

Agrupando (III.33) e (III.35), obtém-se:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Omega_a & 0 \\ 0 & \bar{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_a(t) \\ U_b(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{aa}^* & 0 \\ 0 & C_{bb}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{Y}_a(t) \\ \dot{U}_b(t) \end{Bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} I_a & \bar{M}_{ab} \\ \bar{M}_{ab}^T & \bar{M}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{Y}_a(t) \\ \ddot{U}_b(t) \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \varphi_a^T P_a(t) \\ \bar{P}_b(t) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (III.39)$$

A equação acima expressa a condensação do superelemento. Os graus de liberdade internos geométricos foram substituídos por graus de liberdade modais, em quantidade igual ao número de vetores de Ritz φ_a , necessários para representar o comportamento dinâmico do superelemento. As matrizes C_{aa}^* e C_{bb}^* , no método de superposição mo-

dal, não são formadas, sendo o seu efeito levado em conta por meio das taxas de amortecimento modal, conforme foi visto na seção III.1.

A equação (III.39) expressa, assim, a contribuição do superelemento na montagem da estrutura global. Desta forma, as matrizes globais de rigidez, de massa e o vetor global de cargas serão dados respectivamente por:

$$K = \begin{bmatrix} \Omega_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \Omega_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \Omega_{NS} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & K_g \end{bmatrix} \quad (III.40)$$

$$M = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & \dots & 0 & \bar{M}_{ab1} \\ 0 & I_2 & \dots & 0 & \bar{M}_{ab2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & I_{NS} & \bar{M}_{abNS} \\ \bar{M}_{ab1}^T & \bar{M}_{ab2}^T & \dots & \bar{M}_{abNS}^T & M_g \end{bmatrix} \quad (III.41)$$

$$P(t) = \left\{ \begin{array}{l} \varphi_{a1}^T P_{a1}(t) \\ \varphi_{a2}^T P_{a2}(t) \\ \dots \\ \varphi_{aNS}^T P_{aNS}(t) \\ P_g(t) \end{array} \right\} \quad (III.42)$$

onde NS é o número de superelementos formadores da estrutura. As matrizes Ω_1 , I_1 , \overline{M}_{ab1} , φ_{a1} e os vetores $P_{a1}(t)$ ($i=1, 2, \dots, NS$) referem-se, respectivamente, a Ω_a , I_a , \overline{M}_{ab} , φ_a e $P_a(t)$ dos superelementos formadores. Por sua vez, $P_g(t)$, M_g e K_g são dados pelas expressões (III.2) a (III.4), sendo $P_J^P(t)$, M_J^P e K_J^P representados respectivamente por $\overline{P}_b(t)$, \overline{M}_{bb} e \overline{K}_{bb} .

As matrizes dadas por (III.40) a (III.42) conduzem a um sistema de equações de equilíbrio, contendo graus de liberdade geométricos e modais. O algoritmo de Lanczos-Ritz, visto na seção anterior, necessita de algumas poucas alterações a fim de ser aplicado ao sistema (III.39). Assim, um determinado vetor de Lanczos-Ritz x_1 se encontra particionado de forma semelhante ao vetor $P(t)$ da equação (III.42):

$$x_1 = \left\{ \begin{array}{c} x_{11} \\ x_{12} \\ \dots \\ \dots \\ x_{1NS} \\ x_{1g} \end{array} \right\} \quad (\text{III.43})$$

onde os x_{1j} ($j=1, 2, \dots, NS$) se referem às coordenadas modais dos NS superelementos formadores e x_{1g} às coordenadas geométricas da estrutura global.

Nas multiplicações da matriz de massa por um dado vetor de Ritz, que aparecem nas equações (III.

17), (III.19) e (III.22), o produto $M x_1$ terá a seguinte expressão:

$$M x_1 = \left\{ \begin{array}{l} x_{11} + \overline{M_{ab1}} x_{1g} \\ x_{12} + \overline{M_{ab2}} x_{1g} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_{1NS} + \overline{M_{abNS}} x_{1g} \\ M_g x_{1g} + \sum_{j=1}^{NS} \overline{M_{abj}^T} x_{1j} \end{array} \right\} \quad (III.44)$$

Na obtenção do vetor de partida, expresso pela equação (III.20), as partições referentes às coordenadas modais são obtidas pela simples divisão dos termos dos vetores $\varphi_{a1}^T P_{a10}$ pelos respectivos elementos diagonais das matrizes Ω_1 ; P_{a10} é o vetor de amplitudes de $P_{a1}(t)$. A partição referente às coordenadas geométricas é obtida pelo processo habitual de retro-substituição das amplitudes de $P_g(t)$ em relação a K_g . Na obtenção dos vetores x_1^* (equação (III.17)), é observado procedimento semelhante.

Cumpra destacar que a formulação aqui desenvolvida recai na redução de Guyan no caso particular em que nenhuma coordenada modal de superelemento é incluída nas equações de equilíbrio globais. Nesta situação, a obtenção dos deslocamentos internos de um superelemento é dada por:

$$U_a(t) = T_{ab} U_b(t) \quad (III.45)$$

III.3.1 - Obtenção das cargas dinâmicas de um superelemento

A aplicação do processo de Lanczos-Ritz para a obtenção dos modos de vibração φ_a de um superelemento requer a determinação prévia do seu vetor de cargas dinâmicas $R_a(t)$. Considerando um carregamento harmônico com frequência $\bar{\omega}$, as acelerações no contorno de um superelemento são dadas por:

$$\ddot{U}_b(t) = -\bar{\omega}^2 U_b(t) \quad (\text{III.46})$$

As cargas dinâmicas do superelemento podem ser deduzidas, considerando-se a equação (III.32) com as simplificações indicadas e substituindo-se $\varphi_a Y_a(t)$ por $U_a^d(t)$, conforme a definição da equação (III.28):

$$K_{aa} U_a^d(t) + C_{aa} \dot{U}_a^d(t) + M_{aa} \ddot{U}_a^d(t) + (M_{aa} T_{ab} + M_{ab}) \ddot{U}_b(t) = P_a(t) \quad (\text{III.47})$$

Passando a parcela em $\ddot{U}_b(t)$ para o membro da direita, resulta:

$$K_{aa} U_a^d(t) + C_{aa} \dot{U}_a^d(t) + M_{aa} \ddot{U}_a^d(t) = R_a(t) = P_a(t) - (M_{aa} T_{ab} + M_{ab}) \ddot{U}_b(t) \quad (\text{III.48})$$

Tem-se assim uma equação de equilíbrio dinâmico envolvendo as parcelas dinâmicas dos deslocamentos, velocidades e acelerações internas. Desta maneira, o vetor de cargas dinâmicas será $R_a(t)$, o qual, levando em conta (III.46), será expresso por:

$$R_a(t) = P_a(t) + \frac{-2}{\bar{w}} (M_{aa} T_{ab} + M_{ab}) U_D(t) \quad (\text{III.49})$$

Observa-se assim que a aplicação da expressão acima requer que estejam determinados os deslocamentos no contorno, $U_D(t)$. Como estes deslocamentos são ainda desconhecidos, faz-se necessária uma análise aproximada inicial, para a qual são aqui preconizadas duas alternativas. A primeira consiste numa análise estática, onde, a partir da solução da estrutura, se podem obter os deslocamentos dos nós de contorno dos superelementos dos níveis sucessivamente mais baixos, de acordo com a formulação do capítulo II.

A segunda alternativa é uma solução inercial, resolvendo-se o sistema de equações abaixo:

$$M \ddot{U}(t) = P(t) \quad (\text{III.50})$$

Considerando carregamento harmônico, tem-se:

$$U(t) = - \frac{1}{\bar{w}^2} M^{-1} P(t) \quad (\text{III.51})$$

A escolha de uma ou outra alternativa é feita pelo usuário, com base na relação entre os valores de \bar{w} e as frequências da estrutura.

III.4 - SUBESTRUTURAÇÃO EM MÚLTIPLOS NÍVEIS

A formulação desenvolvida na seção III.3 pode ser estendida de forma a permitir a subestruturação em

múltiplos níveis. Vamos considerar o sistema misto de equações dinâmicas para um superelemento, com os nós de contorno engastados, e sendo formado por outros superelementos:

$$\begin{bmatrix} \Omega_a & 0 \\ 0 & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_a(t) \\ U_b(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} I_a & M_{ab}^* \\ M_{ab}^{*T} & M_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{Y}_a(t) \\ \ddot{U}_b(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_a^*(t) \\ P_b(t) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.53})$$

onde

$$\Omega_a = \begin{bmatrix} \Omega_{a1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Omega_{a2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \Omega_{aNS} \end{bmatrix} \quad (\text{III.54-a})$$

$$M_{ab}^* = \begin{bmatrix} \overline{M}_{ab1} \\ \overline{M}_{ab2} \\ \dots \\ \overline{M}_{abNS} \end{bmatrix} \quad (\text{III.54-b})$$

$$Y_a(t) = \left\{ \begin{array}{c} Y_{a1}(t) \\ Y_{a2}(t) \\ \dots \\ Y_{aNS}(t) \end{array} \right\} \quad (\text{III.55-a})$$

$${}^{\prime\prime}Y_a(t) = \left\{ \begin{array}{c} {}^{\prime\prime}Y_{a1}(t) \\ {}^{\prime\prime}Y_{a2}(t) \\ \dots \\ {}^{\prime\prime}Y_{aNS}(t) \end{array} \right\} \quad (\text{III.55-b})$$

$$P_a^*(t) = \left\{ \begin{array}{c} \varphi_{a1}^T P_{a1}(t) \\ \varphi_{a2}^T P_{a2}(t) \\ \dots \\ \varphi_{aNS}^T P_{aNS}(t) \end{array} \right\} \quad (\text{III.55-c})$$

Os tipos de GL (graus de liberdade) são identificados pelos sub-índices:

- a - GL internos aos superelementos formadores do superelemento atual.
- b - GL externos aos superelementos formadores e internos ao superelemento atual.
- c - GL externos ao superelemento atual e internos ao superelemento que contem o atual.

NS é o número de superelementos formadores do superelemento atual. Todas as outras variáveis aqui envolvidas já foram definidas na seção III.3. As matrizes de rigidez e de massa, bem como o vetor de cargas que aparecem em (III.53) são inteiramente semelhantes aos K, M e P (t) da estrutura global, dados pelas equações (III.40) a (III.42). No caso atual, K_{bb} , M_{bb} e $P_b(t)$ é que serão dados pelas expressões (III.2) a (III.4), sendo K_j^P , M_j^P e $P_j^P(t)$ representados pelos \bar{K}_{bb} , \bar{M}_{bb} e $\bar{P}_b(t)$ dos superelementos formadores.

Se considerarmos o superelemento atual sem as restrições nos seus nós de contorno, o sistema de equações (III.53) deve ser expandido, de forma a incluir os deslocamentos $U_c(t)$ e acelerações $\ddot{U}_c(t)$ destes nós:

$$\begin{bmatrix} r_a & 0 & 0 \\ 0 & K_{bb} & K_{bc} \\ 0 & K_{bc}^T & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_a(t) \\ U_b(t) \\ U_c(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} I_a & M_{ab}^* & 0 \\ M_{ab}^{*T} & M_{bb} & M_{bc} \\ 0 & M_{bc}^T & M_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{Y}_a(t) \\ \ddot{U}_b(t) \\ \ddot{U}_c(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_a^*(t) \\ P_b(t) \\ P_c(t) \end{Bmatrix} \quad (III.56)$$

Aglutinando os graus de liberdade tipo a e tipo b, as equações (III.56) assumem a forma:

$$\begin{bmatrix} K_{bb}^* & K_{bc}^* \\ K_{bc}^{*T} & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_b^*(t) \\ U_c(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{bb}^* & M_{bc}^* \\ M_{bc}^{*T} & M_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_b^*(t) \\ \ddot{U}_c(t) \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} P_b^*(t) \\ P_c(t) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.57})$$

onde

$$K_{bb}^* = \begin{bmatrix} \Omega_a & 0 \\ 0 & K_{bb} \end{bmatrix} \quad (\text{III.58-a})$$

$$K_{bc}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ K_{bc} \end{bmatrix} \quad (\text{III.58-b})$$

$$M_{bb}^* = \begin{bmatrix} I_a & M_{ab}^* \\ M_{ab}^{*T} & M_{bb} \end{bmatrix} \quad (\text{III.58-c})$$

$$M_{bc}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ M_{bc} \end{bmatrix} \quad (\text{III.58-d})$$

$$U_b^*(t) = \begin{Bmatrix} Y_a(t) \\ U_b(t) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.59-a})$$

$$\ddot{U}_b^*(t) = \begin{Bmatrix} \ddot{Y}_a(t) \\ \ddot{U}_b(t) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.59-b})$$

$$P_b^*(t) = \begin{Bmatrix} P_a^*(t) \\ P_b(t) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.59-c})$$

Com base na equação (III.30), podemos definir uma matriz de transformação T_{bc}^* , conforme segue:

$$T_{bc}^* = -K_{bb}^{*-1} K_{bc}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -K_{bb}^{-1} K_{bc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ T_{bc} \end{bmatrix} \quad (\text{III.60})$$

A aplicação do algoritmo de Lanczos-Ritz ao sistema misto de equações (III.53) é feita, entrando-se com as matrizes K_{bb}^* , M_{bb}^* e o vetor $P_b^*(t)$. São geradas frequências Ω_b e modos de vibração expandidos φ_b , particionados na forma:

$$\varphi_b^* = \begin{Bmatrix} \varphi_y \\ \varphi_b \end{Bmatrix} \quad (\text{III.61})$$

onde φ_y está relacionado aos deslocamentos modais $Y_a(t)$, enquanto φ_b se refere aos deslocamentos geométricos $U_b(t)$. Assim, o vetor $U_b^*(t)$ pode ser expresso mediante a aplicação da equação (III.31) para o caso atual:

$$U_b^*(t) = \varphi_b^* Y_b(t) + T_{bc}^* U_c(t) \quad (\text{III.62})$$

onde $Y_b(t)$ é o vetor das coordenadas generalizadas ou modais do superelemento atual, sendo determinado na análise do superelemento que contém o atual. Devido a (III.60), as partições de $U_b^*(t)$ ficam com as seguintes expressões:

$$Y_a(t) = \varphi_y Y_b(t) \quad (\text{III.63})$$

$$U_b(t) = \varphi_b Y_b(t) + T_{bc} U_c(t) \quad (\text{III.64})$$

Observe-se que a equação (III.64) é inteiramente equivalente a (III.31). O mesmo acontece com o sistema (III.57) em relação ao (III.26), já excluído o termo relativo ao amortecimento. Se aplicarmos a ele as mesmas transformações feitas na seção III.3, obteremos:

$$\begin{bmatrix} R_b & 0 \\ 0 & \bar{K}_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_b(t) \\ U_c(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} I_b & \bar{M}_{bc} \\ \bar{M}_{bc}^T & \bar{M}_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{Y}_b(t) \\ \ddot{U}_c(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_b^{*T} P_b^*(t) \\ \bar{P}_c(t) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.65})$$

Esta equação expressa a condensação de um superelemento formado por outros superelementos, sendo semelhante a (III.39) a qual é válida para superelementos formados exclusivamente por elementos. Levando em consideração (III.58) a (III.62), têm-se as seguintes expressões para as sub-matrizes e vetores envolvidos em (III.65):

$$\overline{K}_{CC} = K_{CC} + K_{Dc}^T T_{Dc} \quad (\text{III.66})$$

$$\overline{M}_{CC} = M_{CC} + M_{Dc}^T T_{Dc} + T_{Dc}^T (M_{Dc} T_{Dc} + M_{Dc}) \quad (\text{III.67})$$

$$\overline{P}_C(t) = P_C(t) + T_{Dc}^T P_D(t) \quad (\text{III.68})$$

$$\overline{M}_{Dc} = \psi_Y^T M_{ab}^* T_{Dc} + \psi_D^T (M_{Dc} T_{Dc} + M_{Dc}) \quad (\text{III.69})$$

$$\psi_D^{*T} P_D^*(t) = \psi_Y^T P_a^*(t) + \psi_D^T P_D(t) \quad (\text{III.70})$$

Observa-se assim o caráter recursivo do formulário aqui desenvolvido. Os resultados da condensação em um certo nível servem automaticamente como dados para os níveis superiores. Numa análise inicial, determinam-se os \overline{K}_{CC} , \overline{M}_{CC} e $\overline{P}_C(t)$ dos superelementos pertencentes aos níveis sucessivamente mais altos na subestruturação. Posteriormente, seguindo-se a mesma ordem, aplica-se o algoritmo de Lanczos-Ritz, obtendo-se Ω_D , ψ_Y e ψ_D e efetuando-se as operações (III.69) e (III.70).

A mesma recursividade está presente na obtenção dos deslocamentos internos e das coordenadas modais dos superelementos. Esta obtenção é feita na ordem inversa a da condensação. Assim, na solução do sistema global, além dos deslocamentos da estrutura, são obtidas as coordenadas modais dos seus superelementos formadores. Em seguida, operando-se em níveis sucessivamente mais baixos, determinam-se para cada superelemento os seus deslocamentos internos e os deslocamentos modais dos seus superelementos formadores, por meio da aplicação das equações (III.64) e (III.63).

III.5 - RESPOSTA PERMANENTE A UM CARREGAMENTO HARMÔNICO

Será apresentada a obtenção das coordenadas generalizadas $y_j(t)$ (solução das equações desacopladas (III.15)) para o caso de carregamento harmônico dado por $P(t) = P_0 \cos \bar{\omega} t$ [17-19]; $\bar{\omega}$ é a frequência do carregamento e P_0 o vetor de amplitudes. Em notação complexa, o referido carregamento é expresso como sendo a parte real de:

$$P(t) \stackrel{r}{=} P_0 e^{i\bar{\omega}t} \quad (\text{III.71})$$

onde $i = \sqrt{-1}$. Assim, a coordenada generalizada de ordem J será dada por:

$$y_J(t) \stackrel{r}{=} \frac{P_J}{w_J^2} \frac{e^{i\bar{\omega}t}}{1 - \beta_J^2 + i2\xi_J\beta_J} \quad (\text{III.72})$$

$$\text{onde } \beta_J = \bar{\omega} / w_J; \quad p_J = \phi_J^T P_0 \quad (\text{III.73})$$

$y_J(t)$ também pode ser posto na forma:

$$y_J(t) \stackrel{r}{=} e^{i\bar{\omega}t} (Y_{RJ} + i Y_{CJ}) \quad (\text{III.74})$$

$$\text{onde } Y_{RJ} = \frac{P_J}{w_J^2} \frac{1 - \beta_J^2}{(1 - \beta_J^2)^2 + (2\xi_J\beta_J)^2} \quad (\text{III.75-a})$$

$$Y_{CJ} = \frac{P_J}{w_J^2} \frac{-2\xi_J\beta_J}{(1 - \beta_J^2)^2 + (2\xi_J\beta_J)^2} \quad (\text{III.75-b})$$

Os deslocamentos $U(t)$ da estrutura, bem como as coordenadas modais $Y_{a1}(t)$ dos superelementos formadores, são obtidos por meio de superposição modal, expressa por:

$$\begin{Bmatrix} Y_{a1}(t) \\ \dots \\ Y_{aNS}(t) \\ U(t) \end{Bmatrix} = \varphi_1 y_1(t) + \varphi_2 y_2(t) + \dots + \varphi_L y_L(t) \quad (\text{III.76})$$

onde L é o número de modos considerados na superposição. Substituindo (III.74) em (III.76), resulta:

$$\begin{Bmatrix} Y_{a1}(t) \\ \dots \\ Y_{aNS}(t) \\ U(t) \end{Bmatrix} \stackrel{r}{=} e^{i\bar{\omega}t} [\varphi_1 Y_{R1} + \dots + \varphi_L Y_{RL} + i (\varphi_1 Y_{C1} + \dots + \varphi_L Y_{CL})] \quad (\text{III.77})$$

$$\text{ou} \quad \begin{Bmatrix} Y_{a1}(t) \\ \dots \\ Y_{aNS}(t) \\ U(t) \end{Bmatrix} \stackrel{r}{=} e^{i\bar{\omega}t} \left(\begin{Bmatrix} Y_{aR1} \\ \dots \\ Y_{aRNS} \\ U_R \end{Bmatrix} + i \begin{Bmatrix} Y_{aC1} \\ \dots \\ Y_{aCNS} \\ U_C \end{Bmatrix} \right) \quad (\text{III.78})$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{c} Y_{aR1} \\ \dots \\ Y_{aRNS} \\ U_R \end{array} \right\} = \sum_{J=1}^L \varphi_J Y_{RJ} \quad (\text{III.79-a})$$

$$\left\{ \begin{array}{c} Y_{aC1} \\ \dots \\ Y_{aCNS} \\ U_C \end{array} \right\} = \sum_{J=1}^L \varphi_J Y_{CJ} \quad (\text{III.79-b})$$

Pode-se mostrar que uma componente individual $u_k(t)$ do vetor $U(t)$ pode ser expressa por:

$$u_k(t) \stackrel{r}{=} \rho e^{i(\bar{\omega}t - \theta)} \quad (\text{III.80})$$

sendo a amplitude ρ e o ângulo de fase θ dados por:

$$\rho = \sqrt{u_{RK}^2 + u_{CK}^2}; \quad \theta = \arctg(-u_{CK} / u_{RK}) \quad (\text{III.81})$$

sendo u_{RK} e u_{CK} os correspondentes elementos individuais de U_R e U_C . Um superelemento terá os seus vetores de deslocamentos externos $U_D(t)$, U_{DR} e U_{DC} formados diretamente por elementos de $U(t)$, U_R e U_C , no caso de ser formador da estrutura; ou por elementos de $U_a(t)$, $U_D(t)$, U_{aR} , U_{DR} , U_{aC} e U_{DC} do superelemento no qual ele está contido. Já os seus

deslocamentos internos $U_a(t)$ serão determinados a partir da equação (III.31):

$$U_a(t) = \varphi_a Y_a(t) + T_{ab} U_b(t) = e^{i\omega t} (U_{aR} + i U_{aC}) \dots \dots \dots (III.82)$$

onde $U_{aR} = \varphi_a Y_{aR} + T_{ab} U_{bR} \dots \dots \dots (III.83-a)$

$$U_{aC} = \varphi_a Y_{aC} + T_{ab} U_{bC} \dots \dots \dots (III.83-b)$$

As amplitudes e ângulos de fase para $U_a(t)$ serão dados por expressões análogas às (III.81):

$$P = \sqrt{u_{aRK}^2 + u_{aCK}^2}; \quad \theta = \arctg(-u_{aCK} / u_{aRK}) \dots \dots \dots (III.84)$$

No caso de um superelemento ser formado por outros, as coordenadas modais $Y_{a1}(t)$ destes superelementos formadores serão dadas por equações semelhantes às (III.77) a (III.79), sem a presença dos sub-vetores U , U_R e U_C . Os modos de vibração φ_j estarão aqui representados pelas partições φ_{Yj} da equação (III.61). Além disso, as coordenadas Y_{Rj} e Y_{Cj} estarão representadas pelos componentes dos sub-vetores Y_{aR} e Y_{aC} do superelemento atual.

Finalmente, os esforços nos elementos $Q_j^P(t)$ são obtidos de acordo com a equação (III.5). Considerando o caso de carregamento harmônico, eles podem ser expressos na forma:

$$Q_j^P(t) \stackrel{r}{=} e^{i\omega t} (Q_{jR}^P + i Q_{jC}^P) \dots \dots \dots (III.85)$$

onde

$$Q_{JR}^P = -P_{OJ}^P + K_J^P U_R^P ; \quad Q_{JC}^P = K_J^P U_C^P \quad (III.86)$$

onde K_J^P é a matriz de rigidez do elemento de ordem J , P_{OJ}^P o vetor de amplitudes das suas cargas nodais equivalentes; U_R^P e U_C^P são componentes dos deslocamentos de seus nós incidentes, podendo ser formados a partir de U_R , U_C , U_{aR} , U_{aC} , conforme for o caso. Uma componente individual $q_k(t)$ do vetor $Q_J^P(t)$ pode ser expressa por:

$$q_k(t) = \rho e^{i(\omega t - \theta)} \quad (III.87)$$

sendo a amplitude ρ e o ângulo de fase θ dados por:

$$\rho = \sqrt{q_{RK}^2 + q_{CK}^2} ; \quad \theta = \text{arctg}(-q_{CK} / q_{RK}) \quad (III.88)$$

onde q_{RK} e q_{CK} são os correspondentes elementos individuais de Q_{JR}^P e Q_{JC}^P .

Capítulo IV

IV - ALGORITMO COMPUTACIONAL

Foram reunidos neste capítulo os assuntos relativos ao desenvolvimento de um sistema computacional destinado a aplicar a formulação apresentada nos capítulos precedentes. Nas seções IV.1 a IV.4, são expostas as operações da análise estática. As seções IV.5 a IV.9 tratam do algoritmo da análise dinâmica. A seção IV.10 mostra detalhes de software relativos à numeração dos graus de liberdade. Finalmente, na seção IV.11, são apresentadas, em linhas gerais, a organização e as potencialidades do sistema desenvolvido.

IV.1 - ANÁLISE ESTÁTICA

A primeira etapa é a leitura dos dados. Com referência aos pontos nodais, é necessário especificar seu número, suas coordenadas, restrições e graus de liberdade de ativos. Para os elementos, devem-se fornecer o tipo, os nós incidentes, e as propriedades físicas e geométricas. Os superelementos ficam definidos pela especificação dos seus nós de contorno e de seus elementos e/ou outros superelementos constituintes.

É necessário ainda especificar quais elementos e/ou superelementos vão constituir diretamente a estrutura a ser analisada. Esta última informação, junto com a referente aos superelementos, define completamente todos os níveis e a hierarquia da subestruturação adotada. Finalmente, devem-se fornecer o número de carregamentos e as cargas que os constituem. Estas cargas podem ser nodais ou aplicadas nos elementos.

Em seguida, vem a etapa de condensação dos superelementos. Inicia-se por aqueles formados apenas por elementos, prosseguindo-se por condensar os superelementos de níveis sucessivamente mais altos. Desta forma, ao condensar determinado superelemento, já estarão previamente condensados os que o formam.

A próxima etapa é a da solução. São formados a matriz de rigidez e os vetores de cargas globais, por meio do assembling dos elementos e superelementos formadores da estrutura. Com a solução do sistema de equações, são determinados os deslocamentos dos nós da estrutura.

Finalmente, tem-se a determinação dos esforços. Após a solução recém mencionada, estão disponíveis os deslocamentos dos nós de contorno dos superelementos do nível mais alto. A partir deles, determinam-se os deslocamentos dos seus nós internos, os quais, por sua vez, se constituirão em deslocamentos de nós de contorno dos superelementos do segundo nível. Aplicando este procedimento de forma recursiva, são obtidos os deslocamentos nodais de todos os superelementos, o que permite calcular os esforços atuantes nos elementos.

A seguir, serão descritas em maiores detalhes as operações efetuadas nas etapas acima mencionadas, a saber, condensação, solução e determinação de esforços.

IV.2 - CONDENSAÇÃO

Durante sua condensação, um superelemento tem as coordenadas dos seus pontos nodais referenciadas a um sistema global de definição. Na situação da figura II.4, este sistema é o $x_G y_G z_G$. Por outro lado, o superelemento possui um sistema local, representado neste caso por $x_S y_S z_S$. Além disso, cada elemento ou superelemento formador do superelemento em questão terá seu próprio sistema local, simbolizado por $x_I y_I z_I$.

As operações aqui descritas são apresentadas de forma esquemática na figura IV.1. A primeira operação é determinar, a partir das coordenadas de seus nós de contorno, a matriz de cossenos diretores do superelemento; trata-se da matriz R_{SG} , expressa por (II.34) e calculada pelo formulário apresentado nas sub-seções II.3.1 e II.3.2.

O próximo passo é a formação das submatrizes K_{aa} , K_{ab} e P_a que aparecem na equação (II.5). Isso é feito mediante o assembling das partes (elementos e superelementos de níveis inferiores) constituintes. Assim, para cada parte, são efetuadas as seguintes operações:

- calcular, a partir das coordenadas dos seus nós de contorno, atualmente disponíveis, sua matriz de cossenos diretores R_{IG} , em relação ao sistema global de definição.

- calcular e armazenar a matriz de cossenos diretores R_{IS} , em relação ao sistema local do superelemento em condensação, aplicando a equação (II.39).

- obter sua matriz de rigidez e seu vetor de cargas nodais equivalentes, no seu sistema local $x_I y_I z_I$. No caso de superelemento, eles são lidos da memória periférica, pois o mesmo já foi previamente condensado. No caso de elemento, eles são calculados usando o formulário apropriado ao respectivo tipo.

- fazer a rotação da matriz de rigidez e dos vetores de cargas do sistema $x_I y_I z_I$ para o $x_S y_S z_S$. Esta rotação é expressa pelas equações (II.53) e (II.54). Na verdade, estas multiplicações são realizadas por blocos, operando-se diretamente com as submatrizes de \bar{R} , representadas, neste

CONDENSAÇÃO DE UM SUPERELEMENTO

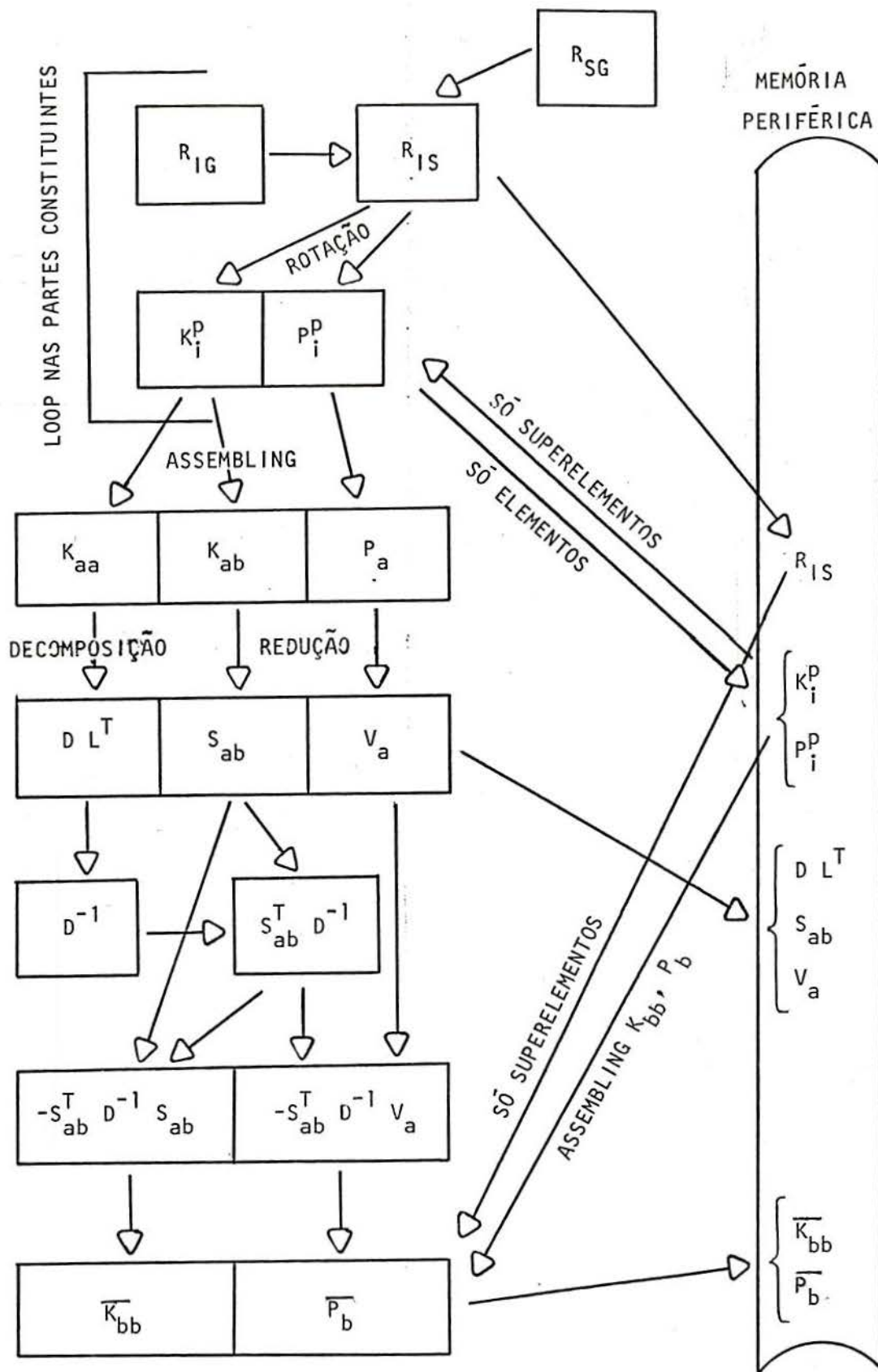


Figura IV.1

caso, por R_{IS} . O resultado desta operação são os próprios K_1^P e P_1^P das equações (II.2) e (II.3).

- no caso de elementos, armazenar K_1^P e P_1^P . Quanto aos superelementos, permanecem armazenadas as matrizes originais, referenciadas aos respectivos sistemas $X_1Y_1Z_1$.

- somar nas submatrizes K_{aa} , K_{ab} e P_a os elementos de K_1^P e P_1^P que contribuem para a formação das mesmas. No caso de existirem restrições generalizadas, esta soma é precedida pelo procedimento descrito na seção II.5.

Desta forma, efetuadas as operações acima para todas as partes constituintes do superelemento, ficam determinados K_{aa} , K_{ab} e P_a . O passo seguinte é a aplicação do processo de solução de Gauss com colunas ativas sobre estas matrizes. As operações são as seguintes:

- decompor K_{aa} , modificando-se diretamente os elementos da matriz. Desta forma, o fator $D L^T$, aqui obtido, resulta ocupando o espaço da memória antes ocupado por K_{aa} .

- reduzir os vetores de carga P_a e as colunas de K_{ab} , obtendo-se, respectivamente, V_a e S_{ab} .

- armazenar $D L^T$, S_{ab} e V_a na memória secundária.

A próxima etapa consiste numa série de operações matriciais, a seguir relacionadas, que culminam com a obtenção de \bar{K}_{bb} e \bar{P}_b :

- inverter os elementos diagonais de $D L^T$, obtendo-se D^{-1} .

- realizar o produto $S_{ab}^T D^{-1}$.

- usar este produto nas multiplicações $-S_{ab}^T D^{-1} S_{ab}$ e $-S_{ab}^T D^{-1} V_a$. Os resultados destas duas multiplicações vão ocupar as áreas da memória que conterão mais tarde, respectivamente, as matrizes \bar{K}_{bb} e \bar{P}_b .

- obter as submatrizes K_{bb} e P_b (equação (II.5)) por meio de um processo de assembling semelhante ao utilizado na obtenção de K_{aa} e P_a . A única diferença é que aqui não se necessita calcular nem rotar as matrizes dos elementos, pois elas agora se encontram armazenadas na memória periférica. Além disso, as contribuições das partes constituintes para K_{bb} e P_b são somadas aos produtos matriciais obtidos

na operação anterior, de maneira que, no fim do assembling, \overline{K}_{bb} e \overline{P}_D já se encontram formados, conforme é expresso por (II.17) e (II.18).

- armazenar \overline{K}_{bb} e \overline{P}_D na memória secundária, completan-do-se, assim, o processo de condensação.

Como observações complementares e ainda com referência ao esquema da figura (IV.1), vale destacar que os elementos de $D L^T$, uma vez armazenados na memória pe riférica, são removidos da memória central, deixando seu es paço livre para o desenvolvimento das operações que culmina rão com a obtenção de \overline{K}_{bb} e \overline{P}_D .

Uma vez que as matrizes de rigidez e os vetores de carga são transformados para o sistema local do superelemento atual antes do assembling, as matrizes $D L^T$, S_{ab} , V_a , \overline{K}_{bb} e \overline{P}_D ficam automaticamente determinadas em re lação ao mesmo sistema. As matrizes e vetores de elementos ficam assim referenciadas ao sistema local do superelemento do qual fazem parte.

Ainda com relação a \overline{K}_{bb} e \overline{P}_D , as mesmas poderão, mais adiante, vir a desempenhar o papel de K_1^P e P_1^P , no caso de o superelemento atual contribuir para o as sembling de um superelemento de nível superior ou da pró pria estrutura. Associadas a \overline{K}_{bb} , ficam armazenadas as ma trizes de cossenos diretores do sistema local de cada parte em relação ao sistema do superelemento no qual ela está con tida. Estas matrizes de cossenos, obviamente, só podem ser determinadas por ocasião do assembling do superelemento de nível superior.

A condensação de \overline{K}_{bb} e \overline{P}_D , aqui mostra da de forma conjunta, é, na verdade, realizada em ciclos se parados. \overline{K}_{bb} é obtido para cada superelemento tipo, enquan to \overline{P}_D é obtido para cada superelemento construtivo. Junta mente com a obtenção de \overline{P}_D , é calculada e armazenada a ma triz R_{IG} de cossenos diretores de cada superelemento cons trutivo em relação ao sistema global (da estrutura), apli cando-se a equação (II.43).

IV.3 - SOLUÇÃO

A estrutura, por sua vez, pode ser considerada como o único superelemento do mais alto nível e desprovido de nós de contorno. Desta maneira, a formação da sua matriz de rigidez K e do seu vetor de cargas P é inteiramente equivalente ao assembling das submatrizes K_{aa} e P_a , descrito na seção anterior. As operações de rotação resultam simplificadas, pois, para este caso, as matrizes R_{IG} e R_{IS} se confundem. Como o presente assembling leva em conta a existência de restrições externas, o sistema expresso por (II.1) está apto a ser resolvido.

A seguir, é realizada a solução pelo processo de Gauss com colunas ativas, efetuando-se as seguintes operações:

- decompor K , obtendo $D L^T$.
- reduzir P , obtendo V .
- realizar a retro-substituição, obtendo e armazenando os deslocamentos U .

A última operação é formar, a partir de U , e armazenar os vetores de deslocamentos U_b dos nós de contorno dos superelementos formadores da estrutura.

IV.4 - DETERMINAÇÃO DOS ESFORÇOS

O primeiro passo é obter os esforços nos elementos formadores da estrutura, pela aplicação da equação (II.57). Estes esforços são inicialmente obtidos em relação ao sistema global e a seguir rotados para o sistema local de cada elemento.

Para se obter esforços em elementos pertencentes a um superelemento, é preciso antes determinar os deslocamentos dos seus nós internos. Estes são calculados

em função dos deslocamentos dos seus nós de contorno, de acordo com a equação (II.55). Estes nós de contorno, por sua vez, podem ter a função de nós internos de um superelemento de nível superior e assim por diante.

Desta maneira, no cálculo de deslocamentos de nós internos, deve-se iniciar pelos superelementos formadores da estrutura e prosseguir pelos superelementos construtivos dos níveis sucessivamente mais baixos na subestruturação. Observe-se que esta ordem é exatamente a inversa daquela seguida na condensação.

As operações efetuadas na determinação de deslocamentos dos nós internos de um superelemento, apresentadas esquematicamente na figura IV.2, são a seguir relacionadas:

- ler R_{SG} e U_b da memória secundária, e fazer a rotação, obtendo-se os deslocamentos dos nós de contorno no sistema local, U_{bL} (equação (II.48) com \bar{R} formada pelas submatrizes R_{SG}).

- ler V_a e S_{ab} da memória periférica, e obter o membro da direita de (II.55).

- ler $D L^T$ e realizar a retro-substituição, obtendo os deslocamentos internos U_a no sistema local.

- obter os esforços Q_{Li}^P nos elementos formadores do superelemento, aplicando também a equação (II.57), onde U é formado a partir de U_a e U_{bL} . Uma vez que K_i^P e P_i^P também estão referenciados ao sistema do superelemento, os esforços são inicialmente obtidos em relação a este sistema. Em seguida, é realizada a rotação para o sistema local de cada elemento, sendo \bar{R} formada pelas submatrizes R_{iS} .

- rotar U_a para o sistema global, por meio da aplicação da equação (II.56), com \bar{R}^T formada por submatrizes R_{SG}^T , e armazenar na memória secundária.

- a partir de U_{aG} e U_b , formar e armazenar os vetores U_{bi}^P de deslocamentos dos nós de contorno dos superelementos formadores.

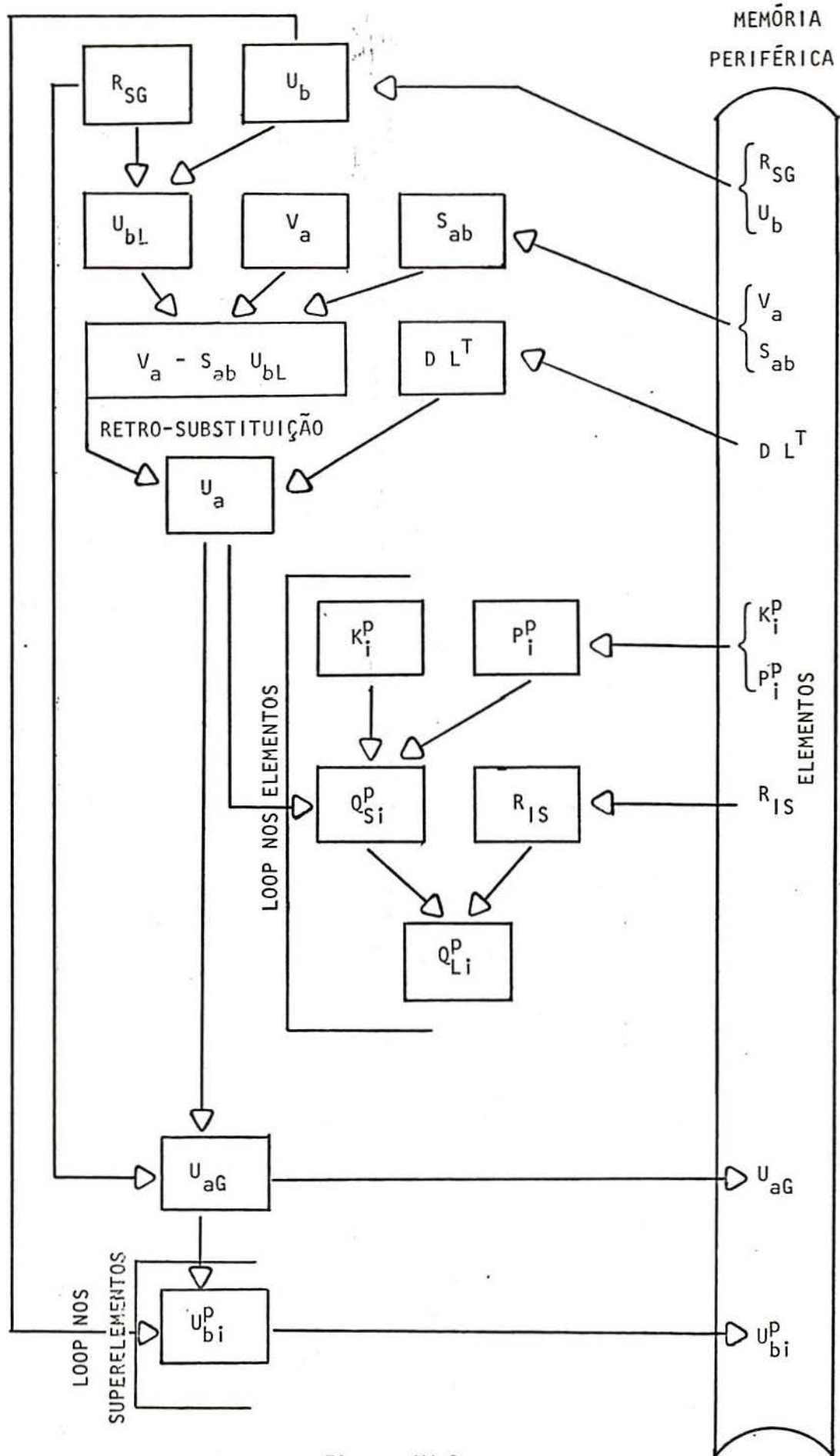


Figura IV,2

IV.5 - ANÁLISE DINÂMICA

A análise dinâmica é precedida pela formação e condensação das matrizes de rigidez e dos vetores de amplitudes das cargas nodais equivalentes dos superelementos. Como são operações típicas de análise estática, observa-se a sequência de operações mostrada na seção IV.2. São também formados a matriz de rigidez e o vetor de cargas da estrutura, e realizada a solução estática, que servirá como vetor de partida no algoritmo de Lanczos-Ritz.

Além daqueles dados normalmente lidos na análise estática, necessita-se aqui ainda do fornecimento da frequência do carregamento, da massa específica, das massas concentradas porventura existentes e das taxas de amortecimento modal.

A análise dinâmica propriamente dita inicia com a formação e condensação das matrizes de massa de cada superelemento. Após a obtenção da aproximação inicial dos deslocamentos nos contornos dos superelementos, realiza-se uma pré-análise dos mesmos, obtendo-se os seus modos de vibração internos e suas contribuições para o sistema expandido de equações.

Em seguida, é aplicado o algoritmo de Lanczos-Ritz ao sistema expandido, obtendo-se as frequências e os modos de vibração da estrutura. Por meio da superposição modal, determinam-se os deslocamentos da estrutura e as coordenadas modais dos seus superelementos formadores. Finalmente, é efetuada, para cada superelemento, a obtenção dos deslocamentos de seus nós internos, dos esforços em seus elementos e das coordenadas modais de seus superelementos formadores. Será feita a seguir uma descrição mais detalhada das etapas recém mencionadas.

IV.6 - MATRIZES DE MASSA

O algoritmo para a condensação da matriz de massa de um superelemento, apresentado esquematicamente na figura IV.3, requer que tenham sido previamente determinadas e estejam armazenadas na memória periférica as matrizes $D L^T$ (decomposição de K_{aa}) e S_{ab} (redução de K_{ab}), onde K_{aa} e K_{ab} são partições da matriz de rigidez do superelemento. Requer, igualmente, que tenham sido condensadas as matrizes de massa dos seus superelementos formadores.

O primeiro passo é a formação das submatrizes M_{aa} , M_{ab} e M_{bb} que aparecem na equação (III.26). Elas são inicializadas pelos valores das massas concentradas nodais e a seguir incrementadas pelo assembling das matrizes M_j^P das partes constituintes. No caso de superelementos de nível inferior, M_j^P é lida da memória periférica. Uma vez obtidas, M_{aa} e M_{ab} são armazenadas na memória secundária.

Em seguida, tem-se a obtenção de T_{ab} , mediante a retro-substituição de $-S_{ab}$ em relação a $D L^T$ (S_{ab} e $D L^T$ lidos da memória secundária). Após sua determinação, T_{ab} também é armazenado.

A seguir, realiza-se a condensação propriamente dita. São efetuadas as operações $M_{bb} + M_{ab}^T T_{ab}$ e $M_{ab} + M_{aa} T_{ab}$ e, finalmente, obtida a matriz \bar{M}_{bb} pela aplicação da equação (III.37). Uma vez determinada, \bar{M}_{bb} é impressa e armazenada na memória secundária. Convém destacar que \bar{M}_{bb} poderá vir a desempenhar o papel de M_j^P no caso do superelemento atual contribuir para o assembling da estrutura ou de um superelemento de nível superior.

IV.7 - PRÉ-ANÁLISE DOS SUPERELEMENTOS

A pré-análise de um superelemento tem as suas operações mostradas no esquema da figura IV.4. Da

CONDENSAÇÃO DA MATRIZ DE MASSA DE UM
SUPERELEMENTO

MEMÓRIA
 PERIFÉRICA

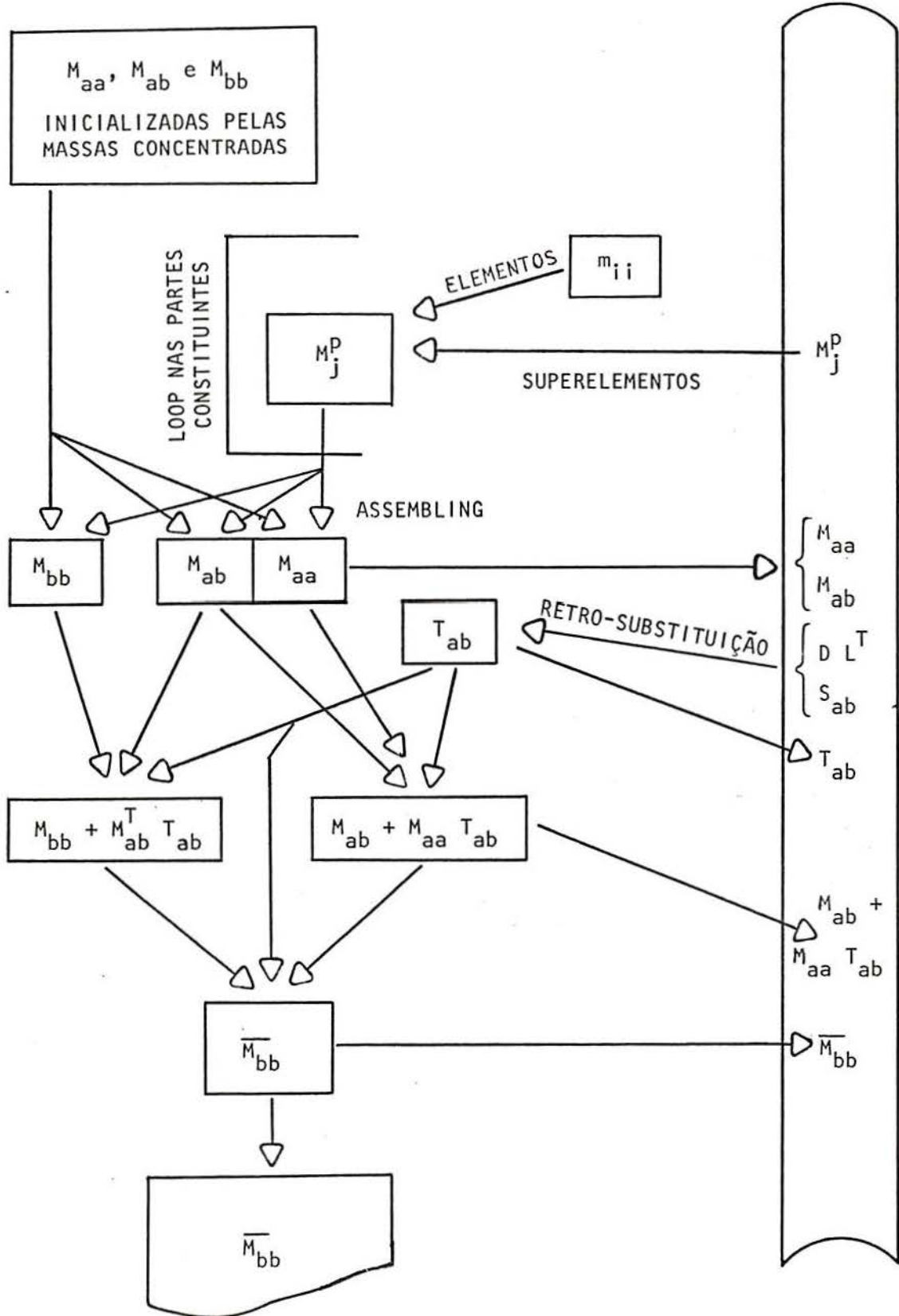


Figura IV.3

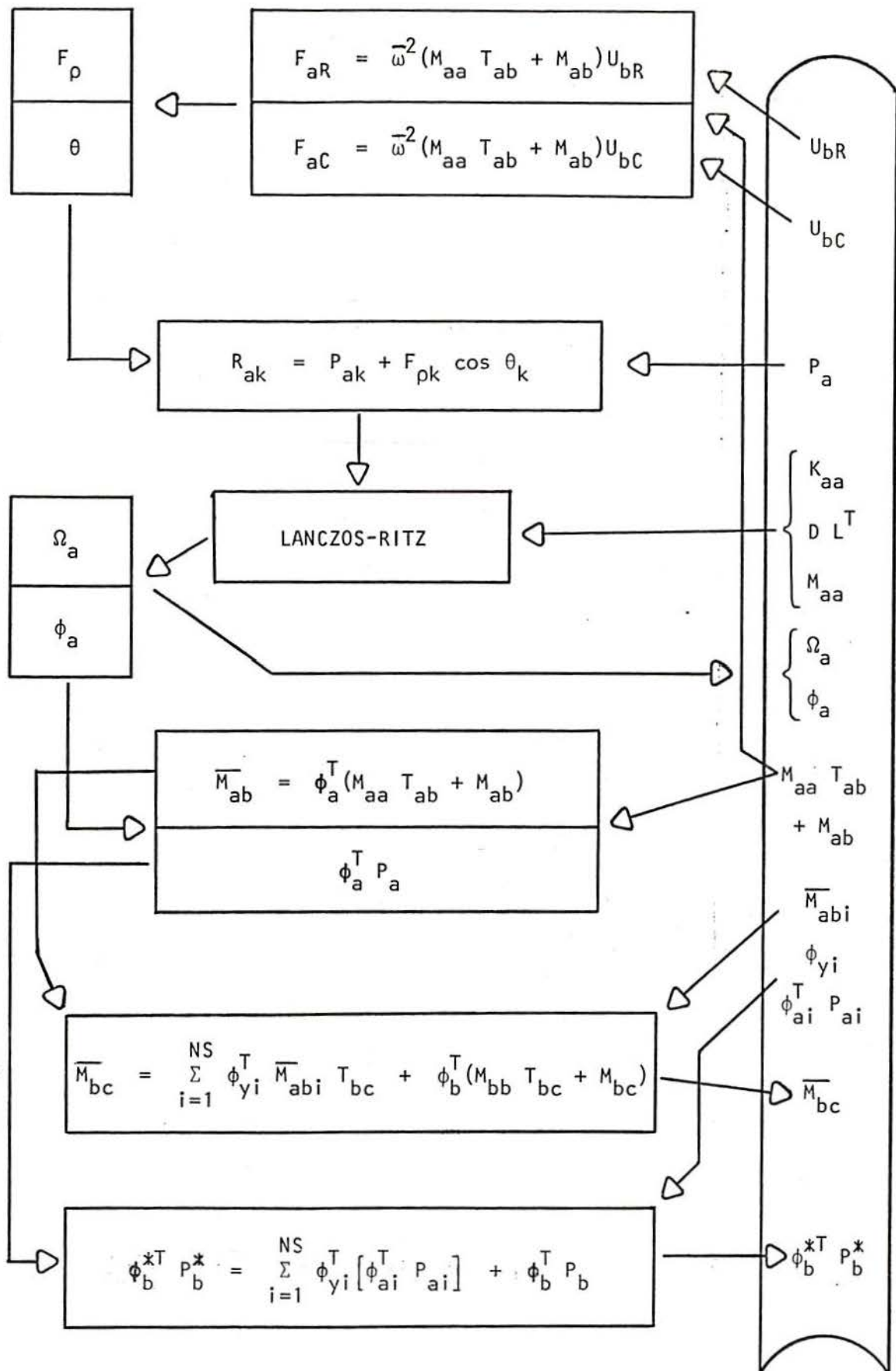


Figura IV.4

mesma forma que, na condensação, também aqui devem ter sido previamente pré-analisados os superelementos formadores do superelemento atual.

O primeiro passo é a obtenção das cargas dinâmicas, expressas pela equação (III.49). São lidos da memória os vetores U_{bR} , U_{bC} e a matriz resultante da operação $(M_{aa} T_{ab} + M_{ab})$. São obtidas as componentes F_{aR} , F_{aC} e, a partir delas, as amplitudes F_p e os ângulos de fase θ . Obtém-se então cargas dinâmicas R_a , lendo-se as amplitudes P_a da memória e somando-as com os elementos de F_p , multiplicados pelos respectivos $\cos \theta_k$.

Em seguida, é aplicado o algoritmo de Lanczos-Ritz (cujas operações são apresentadas na seção IV.8), considerando-se o superelemento como uma estrutura independente e com os seus nós de contorno engastados. As matrizes K_{aa} , $D L^T$ e M_{aa} são lidas da memória. O vetor de cargas é R_a , recém obtido. A aplicação do algoritmo gera as frequências e os modos do superelemento, agrupados em Ω_a e φ_a , os quais são armazenados na memória.

A pré-análise é encerrada com a obtenção do vetor φ_b^{*T} P_b^{*T} e da matriz \overline{M}_{bc} , os quais são armazenados na memória para serem utilizados na montagem da estrutura global ou de um superelemento de nível superior. São inicialmente obtidos $\varphi_a^T P_a$ e a matriz \overline{M}_{ab} os quais, com a troca de notação, correspondem, respectivamente, às segundas parcelas das equações (III.70) e (III.69). As primeiras parcelas destas equações correspondem a um somatório nos superelementos formadores. Assim, para cada superelemento formador, são lidos φ_{yi} , \overline{M}_{abi} e $\varphi_{ai}^T P_{ai}$ e efetuadas as operações mostradas na figura IV.4.

IV.8 - SOLUÇÃO DO SISTEMA EXPANDIDO

A aplicação do algoritmo de Lanczos-Ritz para o sistema expandido inicia com a leitura da matriz de

rigidez triangularizada $D L^T$ e com a formação da matriz de massa M_g da estrutura, por um processo equivalente ao da obtenção da submatriz M_{aa} de um superelemento, visto na seção IV.6.

Cada vetor de Lanczos-Ritz terá as partições da equação (III.43). A obtenção do vetor de partida x_1^{**} é feita em duas operações:

- "loop" percorrendo os superelementos formadores da estrutura, lendo na memória seus vetores ϕ_b^{*T} P_b^{*T} e suas frequências Ω_a ; a divisão dos elementos individuais de ϕ_b^{*T} P_b^{*T} pelos correspondentes elementos diagonais de Ω_a fornece as partições x_{1j} ($j=1, \dots, NS$).

- leitura, na memória periférica, da solução estática, fornecendo a partição x_{1g} .

Seguem-se as seguintes operações:

- normalizar x_1^{**} , aplicando as equações (III.21) e (III.22), obtendo x_1 (primeiro vetor de Ritz).

- determinar os demais vetores de Ritz, efetuando-se para cada um deles:

- multiplicação $M x_{i-1}$;
- redução e retro-substituição - equação (III.17)
 - obtendo x_i^* ;
- ortogonalização - equações (III.18) e (III.19)
 - obtendo x_i^{**} ;
- normalização - equações (III.21) e (III.22) - obtendo x_i .

- obter a matriz de rigidez reduzida K^* , por meio da multiplicação matricial (III.23), onde X contém os vetores de Ritz x_i .

- resolver o problema de autovalores (III.24), usando o método de Jacobi. Ficam assim determinadas as aproximações \hat{w}_i para as frequências de vibração da estrutura. Os vetores z_i são agrupados numa matriz Z a ser usada na operação a seguir.

- realizar a multiplicação $X Z$ (equação (III.25)), obtendo a matriz 0X a qual vai conter as aproximações para os modos de vibração da estrutura.

Com relação às operações recém mencionadas, convem observar que as retro-substituições são precedidas por divisões entre elementos individuais, de maneira semelhante à obtenção do vetor de partida. Por outro lado, na multiplicação da matriz de massa por determinado vetor de Ritz, a operação $M_g x_{ig}$ é precedida por um loop percorrendo os superelementos do primeiro nível, onde são obtidas as parcelas $(x_{ij} + \overline{M}_{abj} x_{ig})$ e $\overline{M}_{abj}^T x_{ij}$ que aparecem na equação (III.44).

IV.9 - SUPERPOSIÇÃO MODAL E RESULTADOS FINAIS

Obtidas as frequências e os modos de vibração, realiza-se a determinação dos deslocamentos nodais e esforços nos elementos integrantes da estrutura global. Isto é feito por meio das seguintes operações:

- para cada modo j , obter as componentes Y_{Rj} e Y_{Cj} da coordenada generalizada, por meio das equações (III.75).

- realizar a superposição modal, determinando e armazenando na memória as componentes U_R e U_C do vetor de deslocamentos da estrutura, bem como as componentes Y_{aRi} e Y_{aCi} ($i=1, \dots, NS$) das coordenadas modais dos superelementos formadores; isto é efetuado pela aplicação das equações (III.79).

- obter e publicar as amplitudes e ângulos de fase dos deslocamentos $U(t)$, aplicando as equações (III.81).

- determinar os esforços nos elementos formadores da estrutura, caso existam; são determinadas, para cada elemento, as componentes Q_{JR}^P e Q_{JC}^P das equações (III.86) e, a seguir, obtidas e publicadas as respectivas amplitudes e ângulos de fase, por meio da aplicação das equações (III.88).

- a partir de U_R e U_C , formar e armazenar os vetores U_{dR} e U_{dC} dos superelementos formadores da estrutura.

Em seguida, tem-se um loop obtendo resultados para os superelementos dos níveis sucessivamente mais baixos. Cada superelemento tem os seus resultados de-

terminados mediante a seguinte sequência de operações:

- leitura, na memória secundária, das matrizes φ_a , T_{ab} e dos vetores Y_{aR} , Y_{aC} , U_{bR} e U_{bC} .
- aplicação das equações (III.83), obtendo-se as componentes U_{aR} e U_{aC} dos deslocamentos dos nós internos.
- determinação e impressão das amplitudes e ângulos de fase destes deslocamentos, aplicando-se a equação (III.84).
- realização de uma superposição modal, obtendo e armazenando as componentes Y_{aRi} e Y_{aCi} de coordenadas modais dos superelementos formadores. São aplicadas as equações (III.79), onde Y_{Rj} e Y_{Cj} são elementos de Y_{aR} e Y_{aC} do superelemento atual, enquanto os φ_j são partições dos modos internos φ_a .
- obtenção e impressão dos esforços nos elementos, pelo mesmo processo usado nos elementos formadores da estrutura.

IV.10 - CONTROLE E NUMERAÇÃO DOS GRAUS DE LIBERDADE

O presente algoritmo considera a existência de até seis graus de liberdade (GL) por nó, conforme é mostrado na figura IV.5. Para levar em conta a possibilidade de variação dos GL ativos nó a nó, desenvolveu-se uma técnica inspirada nas idéias apresentadas por BATHE [15].

Portanto, deve existir um arranjo que identifique, para cada nó, quais dentre os seis possíveis GL efetivamente participarão da análise. Na verdade, além da estrutura global, cada superelemento tipo deve possuir este arranjo identificador, o qual será denominado de ID. Assim, ID terá NN (número de nós da estrutura ou do superelemento considerado) colunas e seis linhas.

Na leitura dos dados referentes aos pontos nodais, ID é preenchido com códigos, na seguinte forma: $ID(I, J)=0$ se for ativo o GL de ordem I (numeração da figura IV.5), pertencente ao nó de ordem J; $ID(I, J)=1$ se o GL for

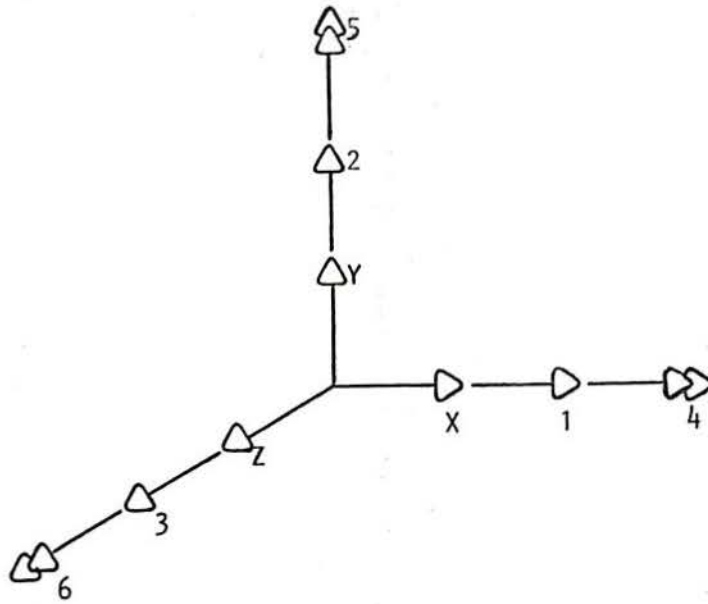


Figura IV.5

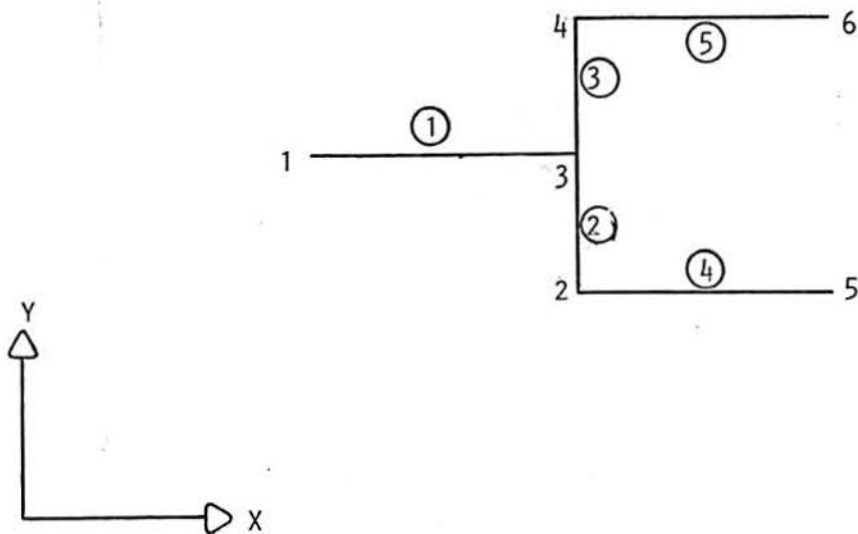


Figura IV.6

inativo, isto é, não participar da análise.

Por exemplo, seja o superelemento tipo mostrado na figura IV.6, o qual é constituído por elementos de pórtico plano e o seu contorno formado pelos nós 1, 5 e 6. Imediatamente após a entrada de dados, ocorre um pré-processamento no qual o sistema realiza uma reordenação destes nós, deixando por último os do contorno. Assim, após esta reordenação e considerando o tipo de elemento adotado, a matriz ID terá a seguinte constituição:

$$\text{ID} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nós 2 3 4 1 5 6

O próximo passo é atribuir números às equações correspondentes aos GL ativos. Para isso, faz-se uma varredura nas colunas de ID, substituindo os zeros por números inteiros crescentes a partir de 1, nas colunas referentes aos nós internos; e por números inteiros decrescentes a partir de -1, nas referentes aos nós de contorno. Ao mesmo tempo, os códigos originalmente unitários dos GL inativos são substituídos por zeros. Após estas operações, a matriz ID ficará assim constituída:

$$\text{ID} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & -1 & -4 & -7 \\ 2 & 5 & 8 & -2 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & -3 & -6 & -9 \end{bmatrix}$$

Com relação à matriz ID da estrutura global, são numerados negativamente os graus de liberdade com restrições externas.

Ao somar a participação de um elemento na estrutura global ou em um superelemento, é necessária a existência de um arranjo contendo, para cada GL do elemento, a ordem do correspondente GL no sistema da estrutura ou do superelemento. Este arranjo, chamado de LM, é determinado a partir dos seus nós incidentes e do arranjo identificador ID. Por exemplo, os elementos 1, 3 e 5 da figura IV.6 terão seus respectivos LM assim constituídos:

Elemento 1 - conexividades 1 3:

$$LM^T = [-1 \quad -2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -3 \quad 4 \quad 5 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 6]$$

Elemento 3 - conexividades 3 4:

$$LM^T = [4 \quad 5 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 9]$$

Elemento 5 - conexividades 4 6:

$$LM^T = [7 \quad 8 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 9 \quad -7 \quad -8 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -9]$$

O sinal positivo ou negativo dos integrantes de LM serve para designar, por exemplo, se determinado componente da matriz de rigidez do elemento vai ser somado na submatriz K_{aa} , ou em K_{ab} , ou em K_{bb} do superelemento. Desta forma, LM é armazenado juntamente com as matrizes de massa, de rigidez e o vetor de cargas do elemento.

De maneira análoga, cada superelemento também possui seu arranjo LM, determinado a partir de seus nós de contorno e da matriz ID da estrutura ou do superelemento no qual ele está contido.

O arranjo LM é utilizado também na formação do vetor de deslocamentos dos nós de contorno de um superelemento ou dos nós incidentes de um elemento (operações que antecedem a obtenção dos deslocamentos internos de um superelemento ou dos esforços em um elemento).

No caso da existência de restrições generalizadas (RG), é realizada uma renumeração dos GL da estrutura global, deixando por último os GL dependentes de RG. Observa-se o mesmo procedimento em relação aos GL internos de um superelemento. Por exemplo, suponha que no superelemento da figura IV.6, os deslocamentos segundo Y dos nós 2 e 3 sejam dependentes do deslocamento em Y do nó 4. Nestas condições, a matriz ID ficaria com a seguinte constituição:

$$ID = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 & -4 & -7 \\ 8 & 9 & 6 & -2 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & -3 & -6 & -9 \end{bmatrix}$$

Nós 2 3 4 1 5 6

Em consequência, os vetores LM dos elementos também resultariam alterados, em função da nova numeração das equações, armazenada em ID.

Por outro lado, a transformação do sistema de equações (II.16) para o (II.60) implica numa mudança nos GL envolvidos na contribuição de um elemento ou superelemento para a montagem da estrutura ou de um superelemento de nível superior. São suprimidos os GL dependentes e adicionados os GL independentes e não pertencentes ao elemento ou superelemento.

Assim, torna-se necessária a existência de um outro arranjo, chamado LMRG, para desempenhar o papel de LM no caso de restrições generalizadas. Este arranjo possui, nas primeiras NH posições, a ordem dos seus GL independentes no sistema de equações; e nas NJ posições seguintes, a ordem dos GL não pertencentes ao elemento ou superelemento, porém envolvidos em RG do mesmo. Ainda considerando o exemplo da figura IV.6, os elementos 2 e 3 ficariam com os seus LMRG assim constituídos:

$$\text{Elemento 2: } \text{LMRG}^T = [\underbrace{1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 4}_{\text{NH} = 10} \ \underbrace{6}_{\text{NJ} = 1}]$$

$$\text{Elemento 3: } \text{LMRG}^T = [\underbrace{3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 4 \ 5 \ 6 \ 0 \ 0 \ 0 \ 7}_{\text{NH} = 11} \ \underbrace{}_{\text{NJ} = 0}]$$

IV.11 - ORGANIZAÇÃO GERAL DO SISTEMA

Em seu atual estágio de desenvolvimento, o sistema realiza a análise estática linear, com possibilidade de subestruturação em múltiplos níveis, bem como de execução em múltiplas rodadas. A análise dinâmica encontra-se ainda implantada para subestruturação em nível único.

O programa proporciona quatro opções de execução, correspondendo a cada uma delas um valor da variável MODEX, conforme o esquema abaixo:

Problema novo - MODEX = 1

"Restart"	{	Problema novo - MODEX = 2	
		<table style="border: none;"> <tr> <td rowspan="2" style="font-size: 3em; vertical-align: middle; padding-right: 10px;">{</td> <td style="padding-left: 20px;">com modificações - MODEX = 3</td> </tr> <tr> <td style="padding-left: 20px;">sem modificações - MODEX = 4</td> </tr> </table>	{
{	com modificações - MODEX = 3		
	sem modificações - MODEX = 4		

A primeira opção consiste na execução em rodada única ou rodada inicial de um problema para posterior restart. É feita a leitura dos dados do problema e são executadas ou não uma ou mais etapas da análise, dependendo dos dados de controle fornecidos.

Na opção MODEX = 2, também é resolvido um problema novo. Porém, aqui, existe a possibilidade de se usar matrizes de superelementos condensados em rodada anterior. O fornecimento dos dados do problema e dos de controle é análogo à primeira opção.

A terceira opção corresponde à reanálise de um problema solucionado anteriormente, com algumas modificações nos dados. Fornecem-se as modificações (dados novos ou alterados), bem como novos dados de controle. Assim, as etapas da análise aqui executadas podem ser diferentes das executadas na rodada anterior.

A opção MODEX = 4 refere-se à situação em que se reinicia a solução de um problema no mesmo ponto em que foi interrompida na rodada anterior. Assim, aqui somente podem ser fornecidos dados de controle, para especificar quais as etapas a serem executadas na rodada atual.

O sistema conta com um programa-controle que tem por funções:

- recuperar (MODEX > 1) ou não (MODEX = 1) informação armazenada em rodada anterior.
- ler os dados de controle de execução.
- ler (modex < 3) ou não (MODEX = 4) os dados do problema.
- ler as modificações nos dados ou os dados novos (MODEX = 3).
- executar ou não uma ou mais etapas da análise, conforme os dados de controle fornecidos.
- armazenar toda a informação para posterior restart.

A análise encontra-se dividida nas seguintes etapas:

ETACON - condensação da matriz de rigidez e dos vetores de

cargas dos superelementos.

- ETADES - obtenção dos deslocamentos dos nós da estrutura.
- ETAESF - obtenção dos deslocamentos dos nós internos dos su perelementos, bem como dos esforços nos elementos.
- ETADIN - análise dinâmica, incluindo condensação das matrizes de massa, formação e solução do sistema expandido, superposição modal e obtenção dos resultados finais.

O sistema está codificado em FORTRAN, sendo composto por um programa principal e 92 sub-rotinas, totalizando cerca de 7800 linhas de programação. A memória periférica está organizada em 12 arquivos, sendo quatro referentes a superelementos, quatro a elementos e dois referentes a nós; existe ainda um arquivo de cargas e um de armazenamento do conteúdo da memória central para fins de res tart.

Capítulo V

V - EXEMPLOS

Neste capítulo, são apresentados alguns exemplos de análise estrutural com subestruturação. O primeiro é um exemplo teórico de um pórtico plano, para aferição de precisão. No segundo exemplo, também constituído por um pórtico, as regiões correspondentes às juntas são modeladas por malhas de elementos finitos bidimensionais de membrana e de treliça. É realizada uma análise dinâmica e a compatibilização entre as juntas e as barras do pórtico é efetuada pela aplicação de restrições generalizadas em nós da estrutura global.

O terceiro exemplo consiste na análise estática de uma estrutura com vigas vasadas, as quais também são modeladas por elementos finitos bidimensionais de membrana e de treliça. Ressaltam-se, neste exemplo, as potencialidades da subestruturação em múltiplos níveis e da aplicação de restrições generalizadas a nível de subestrutura, de maneira que, a nível de estrutura global, a viga vasada é tratada como um elemento comum de pórtico plano.

V.1 - PÓRTICO PLANO COM SEIS ANDARES

V.1.1 - Descrição

Com o objetivo de aferir a precisão do método de subestruturação atualmente implantado, foi analisado o pórtico plano constituído de seis andares e dois vãos, mostrado na figura V.1. A numeração dos nós e elementos também consta na figura, além das constantes do material (módulos de elasticidade longitudinal e transversal, e a massa específica), bem como as propriedades prismáticas de vigas e pilares.

Os pilares são todos engastados na base e o carregamento é constituído por forças horizontais atuando no nível dos pisos, o que também é mostrado na figura V.1. Os valores destas forças foram também adotados como amplitudes do carregamento harmónico considerado na análise dinâmica.

Para testar a utilização de superelementos, subestruturou-se o pórtico conforme os três modelos mostrados na figura V.2:

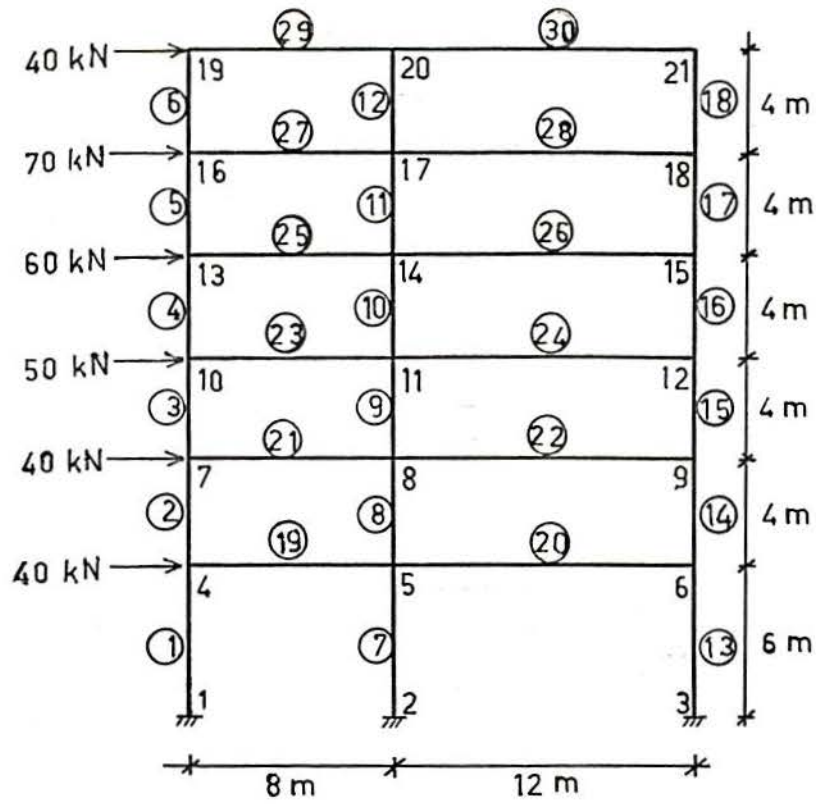
Modelo 1 - foram condensados todos os nós, exceto os do pilar central e os engastes. O pórtico fica assim reduzido a um "pilar equivalente".

Modelo 2 - condensação do 5.º e do 6.º pisos, os quais ficam constituindo um superelemento tendo por contorno os nós 13, 14 e 15.

Modelo 3 - condensação do 3.º ao 6.º piso, os quais ficam também constituindo um único superelemento, cujos nós de contorno são 7, 8 e 9.

Realizaram-se as análises estática e dinâmica do pórtico tal como ele se apresenta na figura V.1 (sem subestruturação), bem como dos três modelos da figura V.2.

Os resultados das análises estáticas para cada um dos modelos mostraram-se coincidentes (seis alga



$E = 2,5 \times 10^4 \text{ MPa}$ $G = 10^4 \text{ MPa}$ $\rho = 250 \text{ kg/m}^3$
 Vigas: $A = 0,12 \text{ m}^2$ $I = 0,00360 \text{ m}^4$
 Pilares: $A = 0,06 \text{ m}^2$ $I = 0,00045 \text{ m}^4$

Figura V.1

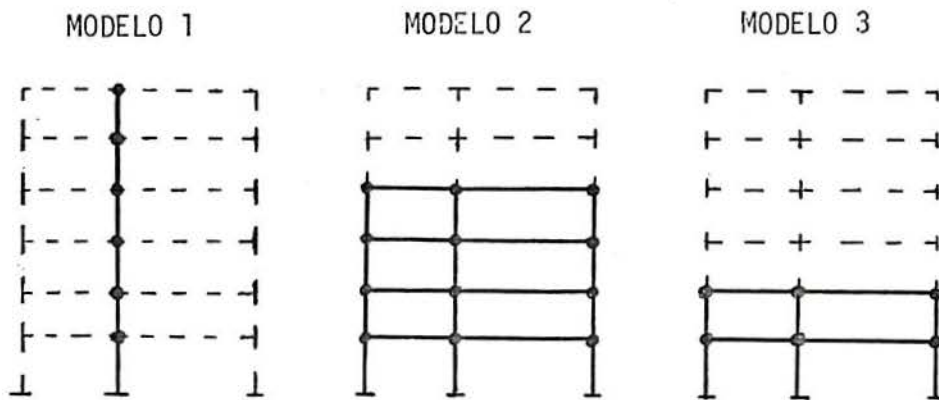


Figura V.2

rismos significativos). Isto, obviamente, era de se esperar, pois a subestruturação na análise estática segue uma formulação exata.

V.1.2 - Análise das frequências

A análise dinâmica foi efetuada com a participação de seis modos de vibração. Foi assumido para todos os modos a taxa de amortecimento $\zeta_1 = 2\%$. Foram feitas análises com a frequência de excitação \bar{w} do carregamento assumindo, respectivamente, os valores de 1.5, 4.5 e 14 rad/s.

Os resultados em termos das frequências naturais da estrutura encontram-se resumidos na tabela V.1. Pode-se notar a excelente concordância da formulação proposta com o sistema original não condensado. Os valores obtidos para as seis frequências naturais são praticamente coincidentes com as "exatas" (sem subestruturação) nos três modelos testados.

Tabela V.1 - Frequências da estrutura, em rad/s

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6
Sem sub.	4,59	14,63	25,84	37,06	50,75	419,56
Modelo 1	4,59	14,64	25,87	37,13	50,97	420,06
Modelo 2	4,59	14,64	25,84	37,06	50,75	419,60
Modelo 3	4,59	14,64	25,84	37,06	50,75	419,74

V.1.3 - Análise da resposta

Cada um dos modelos da figura V.2 foi analisado respectivamente para os três valores da frequência de excitação do carregamento, citados na sub-seção V.1.

2. A resposta foi obtida em termos de amplitudes e ângulos de fase dos deslocamentos nodais e esforços nos elementos.

Em seguida, realizou-se a análise da resposta. Este estudo consistiu em verificar as diferenças decorrentes da adoção dos modelos subestruturados da figura V.2, confrontando seus resultados com os obtidos pelo modelo sem subestruturação. Para tanto, foram considerados os resultados do pórtico original, para cada frequência do carregamento, apresentados nas tabelas V.2, V.3 e V.4.

Os referidos resultados consistem nas amplitudes dos deslocamentos horizontais de alguns pisos e dos esforços cortantes dos pilares da base, bem como amplitudes de esforços normais e de momentos fletores escolhidos entre barras muito, medianamente e pouco solicitadas. Na identificação destes resultados, u_i é o deslocamento horizontal do nó i , N_i e Q_i são, respectivamente, os esforços normal e cortante da barra i ; $M_{i,j}$ é o momento fletor da barra i , na extremidade identificada pelo nó j . A numeração de nós e barras é a da figura V.1. As unidades utilizadas são o m e o kN.

Os resultados obtidos com o pórtico sem subestruturação, por servirem como padrão de comparação, serão daqui por diante tratados como valores "exatos". Para cada valor da frequência $\bar{\omega}$ do carregamento, foram construídas as tabelas V.2, V.3 e V.4, onde estes valores exatos estão listados na primeira coluna. Nas colunas seguintes, listam-se os erros percentuais dos resultados de cada modelo subestruturado em relação aos valores "exatos".

Conforme se pode verificar nas referidas tabelas, ocorreram diferenças significativas apenas nos esforços normais de barras pouco solicitadas. Para os demais resultados, o patamar de 0,5 % jamais é ultrapassado.

Os menores erros ocorreram na análise com $\bar{\omega} = 1,5 \text{ rad/s}$, o que se explica pelo fato desta frequência corresponder a um comportamento quase estático.

Tabela V.2 - Erros (%) na análise com $\bar{\omega} = 1,5 \text{ rad/s}$

	Valor	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3
u_4	0,2039 m	0	0	0
u_{11}	0,3383 "	0	0	0
u_{21}	0,4287 "	0	0	0
N_1	306,74 kN	0	0	0
N_2	204,00 "	0	0	0
N_6	5,87 "	0	0,02	0
N_7	131,49 "	0	0	0
N_{12}	1,14 "	0	1,93	0,02
N_{19}	20,74 "	0,01	0	0
N_{22}	4,08 "	0	0	0
N_{24}	13,01 "	0	0	0,01
Q_1	109,70 "	0	0	0
Q_7	121,51 "	0	0	0
Q_{13}	104,07 "	0	0	0
$M_{2,7}$	187,48 kN.m	0	0	0
$M_{3,7}$	150,58 "	0	0	0
$M_{7,2}$	370,43 "	0	0	0
$M_{18,18}$	20,89 "	0	0	0
$M_{19,4}$	482,03 "	0	0	0
$M_{22,8}$	208,47 "	0	0	0
$M_{29,20}$	17,23 "	0	0	0

As dificuldades de precisão com os esforços normais apareceram nas análises com $\bar{\omega} = 4,5$ e 14 rad/s , principalmente no modelo 1; em alguns casos isolados, estes erros chegam a ultrapassar os 10 %. Realizando-se uma análise do modelo 1 com o dobro de vetores de Ritz (12 modos de vibração), estes erros diminuíram sensivelmente, conforme se pode verificar nas tabelas V.3 e V.4.

Tabela V.3 - Erros (%) na análise com $\bar{\omega} = 4,5 \text{ rad/s}$

	Valor	Mod.1	Mod.1 (*)	Mod.2	Mod.3
u_4	3,307 m	0	0	0	0
u_{11}	5,542 "	0	0	0	0
u_{21}	7,131 "	0	0	0	0
N_1	5178,91 kN	0	0	0	0
N_2	3496,59 "	0	0	0	0
N_7	2220,11 "	0	0	0	0
N_{12}	33,85 "	0,01	0,01	1,05	1,50
N_{15}	1327,90 "	0,02	0	0	0,17
N_{24}	29,98 "	3,83	0,61	0,03	0,08
N_{30}	20,20 "	14,16	0,02	10,04	0,24
Q_1	1776,09 "	0	0	0	0
Q_7	1969,95 "	0	0	0	0
Q_{13}	1685,40 "	0	0	0	0
$M_{2,7}$	3114,99 kN.m	0	0	0	0
$M_{18,18}$	484,36 "	0,02	0	0,02	0,01
$M_{19,4}$	7887,96 "	0	0	0	0
$M_{20,6}$	6855,27 "	0	0	0	0
$M_{24,12}$	3868,37 "	0	0	0	0
$M_{29,20}$	392,76 "	0,01	0	0,01	0,01

(*) Modelo 1 com 12 modos de vibração

V.1.4 - Teste sem amortecimento

Com a finalidade de investigar a influência do amortecimento no presente estudo, realizou-se um teste com a condição extrema de coeficientes de amortecimento modal nulos. Analisou-se o mesmo pórtico, testando-se o modelo 1.

Para a frequência $\bar{\omega} = 1,5 \text{ rad/s}$, os resultados, tanto para o modelo 1 como os "exatos", são coincidentes em quatro algarismos significativos com os do pór-

Tabela V.4 - Erros (%) na análise com $\bar{\omega} = 14 \text{ rad/s}$

	Valor	Mod. 1	Mod. 1 (*)	Mod. 2	Mod. 3
u_4	0,01625 m	0,21	0,10	0	0
u_{11}	0,02004 "	0,15	0,08	0	0
u_{21}	0,08081 "	0,03	0,01	0	0
N_1	100,52 kN	0,03	0,06	0	0
N_2	99,86 "	0,02	0,04	0	0
N_7	43,13 "	0,03	0,01	0	0,02
N_{12}	3,80 "	0,02	0,01	3,06	4,97
N_{22}	10,46 "	11,45	4,65	0	0
N_{24}	14,61 "	4,03	2,26	0	0,04
N_{27}	56,20 "	0,32	0,25	0,03	0
Q_1	9,76 "	0,16	0,07	0	0
Q_7	10,14 "	0,20	0,10	0	0
Q_{13}	9,43 "	0,30	0,05	0	0
$M_{12,20}$	60,30 kN.m	0,02	0,01	0,01	0,01
$M_{14,9}$	15,96 "	0,02	0,07	0,01	0,01
$M_{18,18}$	34,57 "	0,03	0	0,01	0,02
$M_{20,5}$	13,27 "	0,50	0,37	0	0
$M_{23,10}$	111,21 "	0,01	0	0	0,01
$M_{25,13}$	124,63 "	0,01	0	0	0,02

(*) Modelo 1 com 12 modos de vibração

tico tendo coeficientes de amortecimento $\xi_1 = 2\%$. Assim, os erros são os mesmos da tabela V.2.

A tabela V.5 mostra os erros ocorridos nas análises com $\bar{\omega} = 4,5$ e 14 rad/s , juntamente com as respectivas amostras de valores "exatos". As diferenças observadas são muito pequenas, não excedendo a $0,6\%$.

Tabela V.5 - Erros (%) para o mod. 1 com amortecimento nulo

 $\bar{\omega} = 4,5 \text{ rad/s}$ $\bar{\omega} = 14 \text{ rad/s}$

	Valor	Erro		Valor	Erro
u_4	4,789 m	0	u_4	0,01458 m	0,01
u_{11}	8,025 "	0	u_{11}	0,01439 "	0
u_{21}	10,326 "	0	u_{21}	0,08606 "	0
N_1	7499,93 kN	0	N_1	109,20 kN	0
N_2	5063,69 "	0	N_2	109,09 "	0
N_7	3215,09 "	0	N_{12}	4,14 "	0
N_{10}	720,16 "	0	N_{18}	6,87 "	0,03
N_{21}	29,07 "	0,57	N_{23}	36,20 "	0,14
N_{30}	26,12 "	0,07	N_{25}	46,56 "	0,07
Q_{13}	2440,69 "	0	Q_{13}	8,91 "	0,01
$M_{2,7}$	4510,97 kN.m	0	$M_{2,7}$	18,28 kN.m	0
$M_{18,18}$	701,43 "	0,02	$M_{18,18}$	37,56 "	0
$M_{19,4}$	11422,90 "	0	$M_{19,5}$	0,58 "	0,28
$M_{20,6}$	9927,40 "	0	$M_{20,6}$	0,66 "	0,36
$M_{21,8}$	6255,51 "	0	$M_{23,10}$	121,73 "	0
$M_{29,20}$	568,78 "	0,01	$M_{25,13}$	136,62 "	0

V.1.5 - Teste com massas concentradas no andar de topo

O pórtico da figura V.1 foi analisado aplicando-se massas concentradas de 800 kg em cada um dos nós 19, 20 e 21. Foi testado o modelo da figura V.3, resultante da condensação dos 3., 4. e 5. andares (modelo 4).

A tabela V.6 apresenta as frequências obtidas pelo pórtico sem subestruturação e pelo modelo 4, observando-se a coincidência quase total entre os respectivos valores.

Tabela V.6 - Freqüências naturais, em rad/s

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6
Sem sub.	3,36	11,83	22,82	34,69	48,22	355,75
Modelo 4	3,36	11,83	22,82	34,69	48,18	355,44

Tabela V.7 - Erros para o modelo 4

$\bar{w} = 1,2 \text{ rad/s}$		$\bar{w} = 3,6 \text{ rad/s}$		$\bar{w} = 10 \text{ rad/s}$	
u_4	0	u_4	0	u_4	0
u_{11}	0	u_{11}	0	u_{11}	0
u_{21}	0	u_{21}	0	u_{21}	0
N_1	0	N_1	0	N_2	0
N_2	0	N_2	0	N_3	0,04
N_4	0	N_{11}	0,05	N_{14}	0
N_{10}	0,02	N_{17}	0,01	N_{22}	0,03
N_{12}	1,01	N_{24}	0,17	N_{24}	0,07
N_{22}	0	N_{26}	0,08	N_{27}	0,01
Q_7	0	Q_7	0	Q_7	0
$M_{4,13}$	0	$M_{3,10}$	0	$M_{2,4}$	0,04
$M_{7,2}$	0	$M_{11,14}$	0	$M_{3,7}$	0
$M_{10,14}$	0	$M_{18,18}$	0,01	$M_{14,6}$	0,06
$M_{18,18}$	0	$M_{19,4}$	0	$M_{24,11}$	0
$M_{19,4}$	0	$M_{20,6}$	0	$M_{27,16}$	0
$M_{29,20}$	0	$M_{29,20}$	0	$M_{28,18}$	0

Foram efetuadas análises com a frequência do carregamento assumindo os valores de 1.2, 3.6 e 10 rad/s. Os erros nos resultados ocorridos com o modelo 4 tem suas amostras apresentadas na tabela V.7. Quanto à qualida-

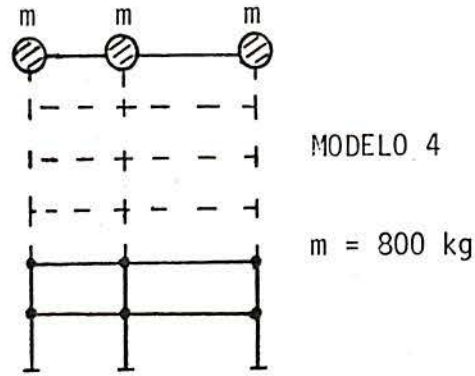


Figura V.3

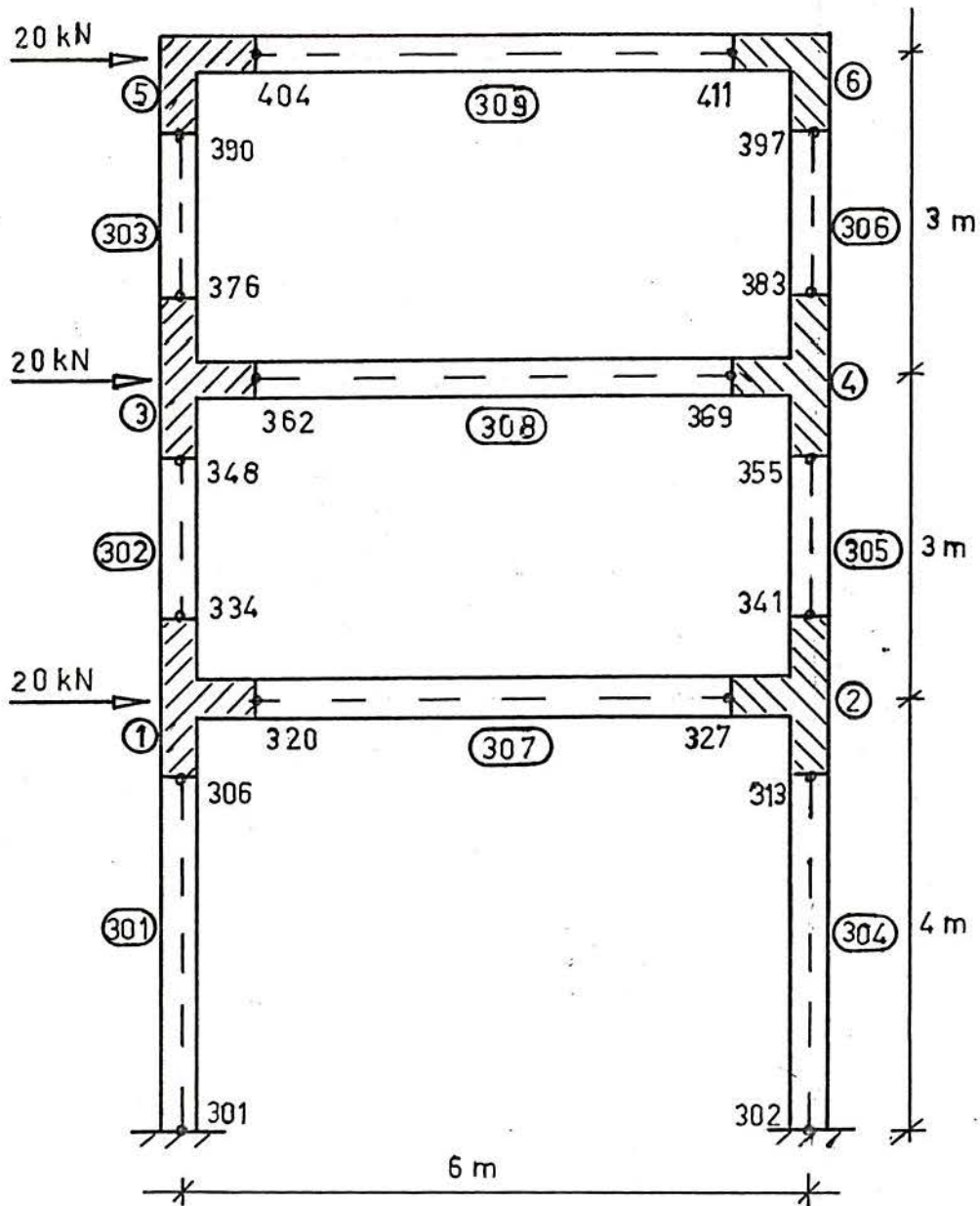


Figura V.4

de destes resultados, repete-se aqui o ocorrido nos casos anteriores, ou seja, as diferenças observadas são quase desprezíveis.

V.2 - PÓRTICO COM SUPERELEMENTOS DE JUNTA

A figura V.4 mostra um pórtico plano, cujas barras são todas constituídas pelo perfil metálico I 381 x 81,4. Com o objetivo de estudar a concentração de tensões nas ligações entre as barras, foram estabelecidos os seis superelementos de junta, correspondentes às regiões sombreadas da figura V.4. Estas regiões foram discretizadas em elementos de membrana, modelando a alma, e elementos tipo haste (treliça) simulando a mesa do perfil I.

Conforme se pode observar na mesma figura, existem duas configurações para as referidas regiões. Isto tornará necessária a geração e condensação de dois superelementos tipo: o primeiro deles representando a conexão entre três barras (conexão em T) e o segundo, a conexão L, entre duas barras. Estes superelementos, denominados, respectivamente, de tipos 1 e 2, tem as suas malhas mostradas nas figuras V.5 e V.6.

O superelemento tipo 1 possui 133 nós internos e 21 no seu contorno, formado pelos planos de contato com as demais barras do pórtico. A malha é constituída por 252 elementos triangulares de membrana e 42 de treliça. O tipo 2 possui 105 nós internos e 14 de contorno, sendo constituído por 192 elementos de membrana e 32 de treliça.

A estrutura global possui 114 nós, numerados de 301 a 414. Para compatibilizar as seções de contato dos superelementos com as barras do pórtico, é necessária a imposição de restrições generalizadas estabelecendo a condição de seções planas. Em consequência, os nós correspondentes aos graus de liberdade independentes ficam reduzidos a 16. A numeração destes nós independentes aparece na

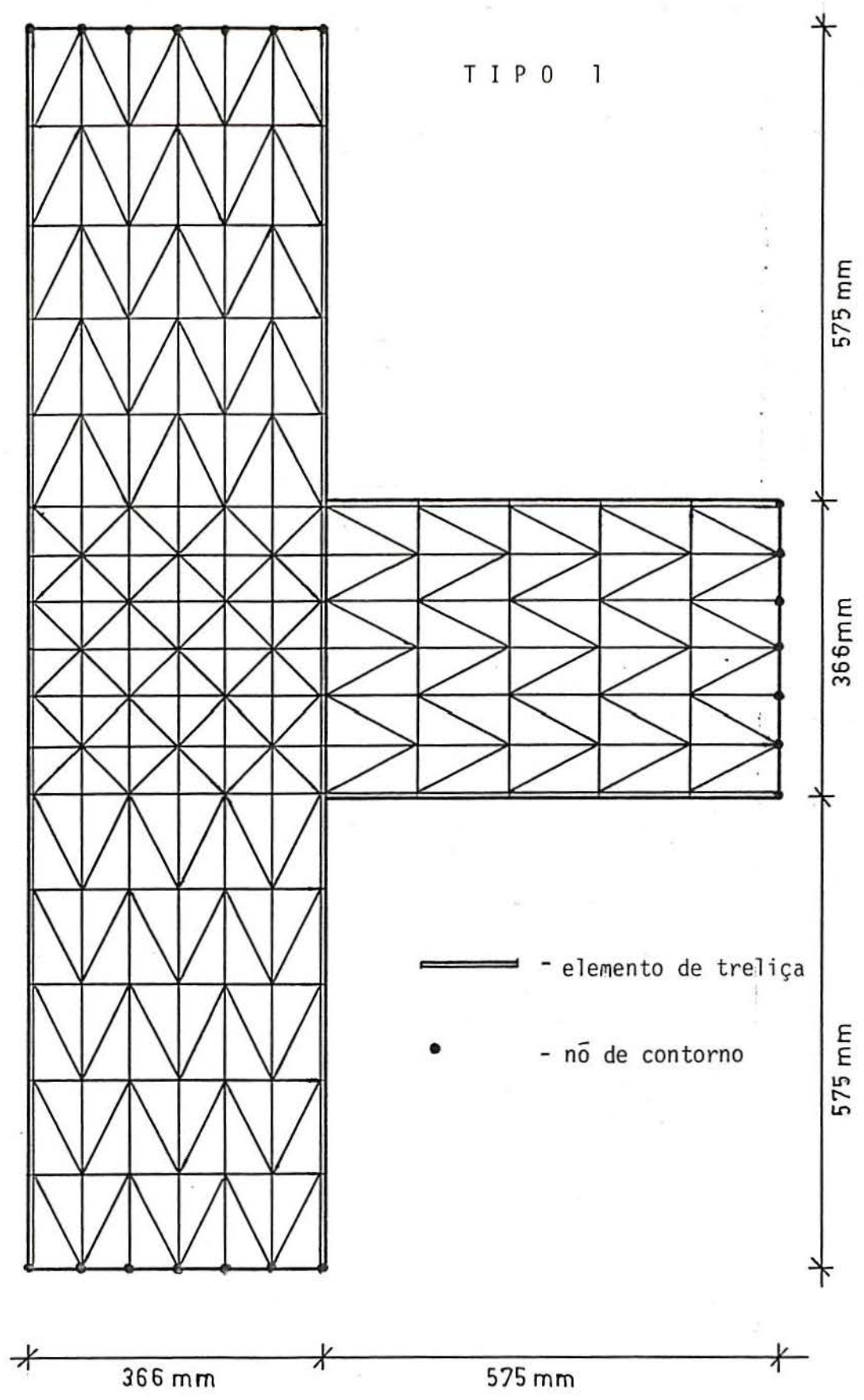


Figura V.5

TIPO 2

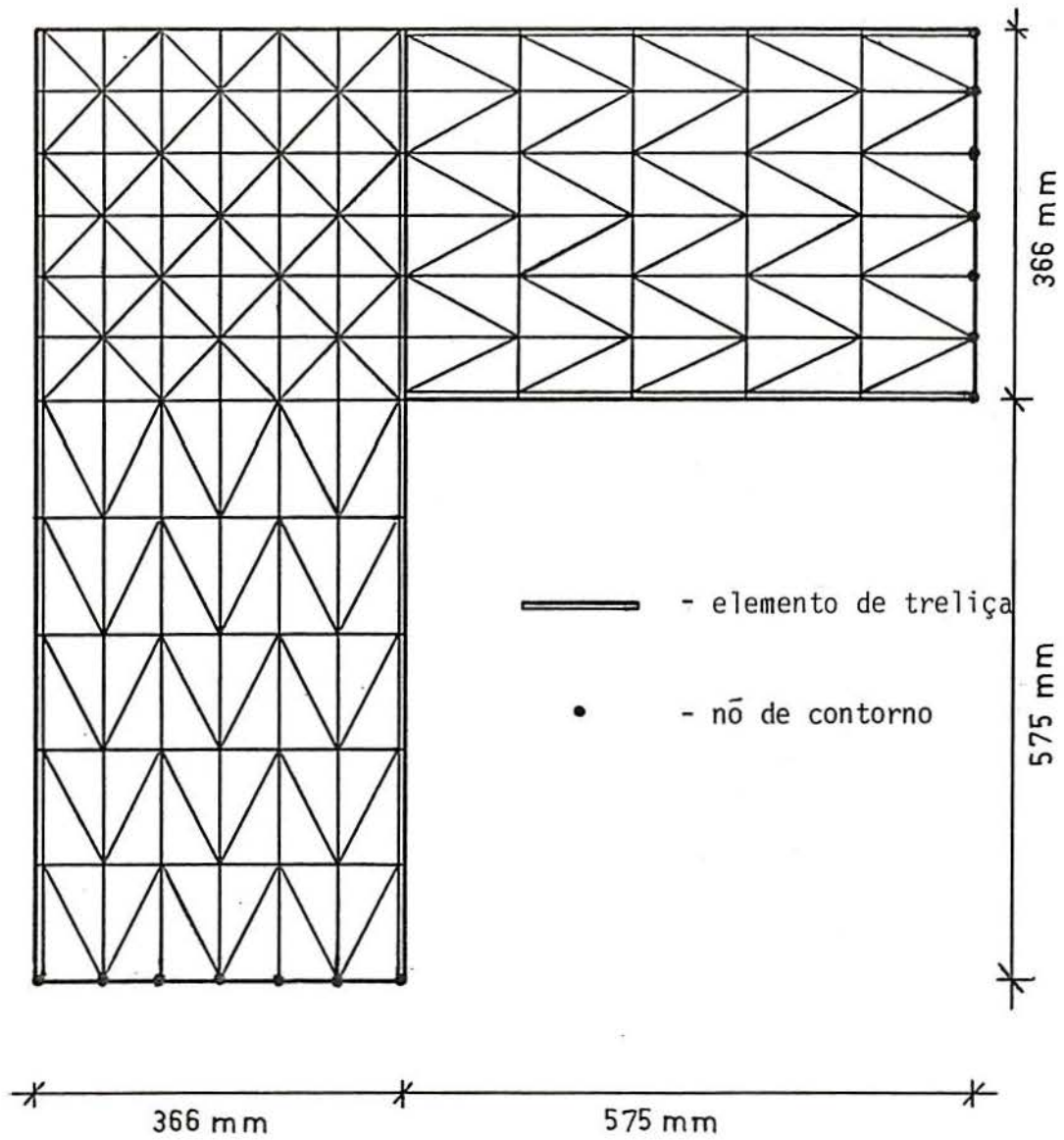


Figura V.6

figura V.4, juntamente com as das barras de pórtico (301 a 309) e dos superelementos (1 a 6).

Foi realizada uma análise dinâmica do pórtico em questão, considerando um carregamento harmônico, com a frequência de 1,65 rad/s e com as amplitudes mostradas na figura V.4.

Foram determinados dois modos de vibração internos para os superelementos. Para a estrutura, determinaram-se seis frequências naturais e modos de vibração, considerando-se, para todos eles, a taxa de amortecimento de 2 %. Adotou-se uma massa específica de 780 kg/m³. As frequências obtidas encontram-se listadas abaixo:

$$\begin{array}{ll} w_1 = 1,43 \text{ rad/s} & w_2 = 5,01 \text{ rad/s} \\ w_3 = 10,47 \text{ rad/s} & w_4 = 15,78 \text{ rad/s} \\ w_5 = 34,52 \text{ rad/s} & w_6 = 139,97 \text{ rad/s} \end{array}$$

As amplitudes de deslocamentos horizontais ocorridos no 1.º, 2.º e 3.º pisos foram, respectivamente, 18, 33 e 42 mm. De uma forma geral, os resultados apresentaram um fator de amplificação dinâmica variando em torno de 3 e um ângulo de fase de 172°.

Com o objetivo de testar a precisão do modelo adotado, analisou-se a estrutura sem os superelementos de junta, ou seja, constituída somente por elementos de pórtico plano. Comparados os resultados de ambos os modelos, em termos das frequências naturais e da resposta da estrutura global, não se pode observar nenhuma divergência significativa entre os mesmos.

A fim de determinar a concentração de tensões no interior dos superelementos de junta, foram computadas as amplitudes das tensões principais. Procurando dar uma idéia da magnitude destas concentrações, listam-se a seguir os valores dos picos de tensões principais em cada superelemento, de acordo com a numeração da figura V.4:

Superelemento 1:	262 MPa
Superelemento 2:	260 MPa
Superelemento 3:	205 MPa
Superelemento 4:	202 MPa
Superelemento 5:	114 MPa
Superelemento 6:	110 MPa

O superelemento 1 tem a variação das amplitudes de suas tensões principais mostradas de forma gráfica na figura V.7. Podem-se observar nitidamente duas regiões de concentração de tensões, localizadas na alma, em torno das junções entre as mesas dos perfis. Vale destacar que as tensões nas mesas atingiram o valor máximo de 139 MPa.

V.3 - ESTRUTURA COM VIGAS FURADAS

Este exemplo consta de um pórtico plano construído em aço, o qual está mostrado na figura V.8-a. As vigas do vão central apresentam aberturas para passagem de tubulação, conforme detalhado na figura V.8-b.

Cada uma das referidas vigas se constituirá em superelemento do primeiro nível. O segundo e o terceiro níveis da subestruturação são estabelecidos dividindo-se sucessivamente a viga furada nas componentes mostradas nas figuras V.8-c e d. Alternativamente, poder-se-ia formar a subestrutura da figura V.8-b diretamente a partir de componentes do tipo da figura V.8-d, estabelecendo-se uma subestruturação em somente dois níveis.

Adotou-se a primeira alternativa, com três níveis de subestruturação, para executar a análise do presente exemplo. O primeiro superelemento tipo a ser gerado é o referente à figura V.8-d (quarto de segmento). 208 elementos triangulares de membrana modelam a alma, enquanto 19 elementos de treliça simulam a mesa do perfil I. A figura V.9 mostra a malha adotada. Devido à limitação de espa-

Amplitudes de tensões principais
para o superelemento 1

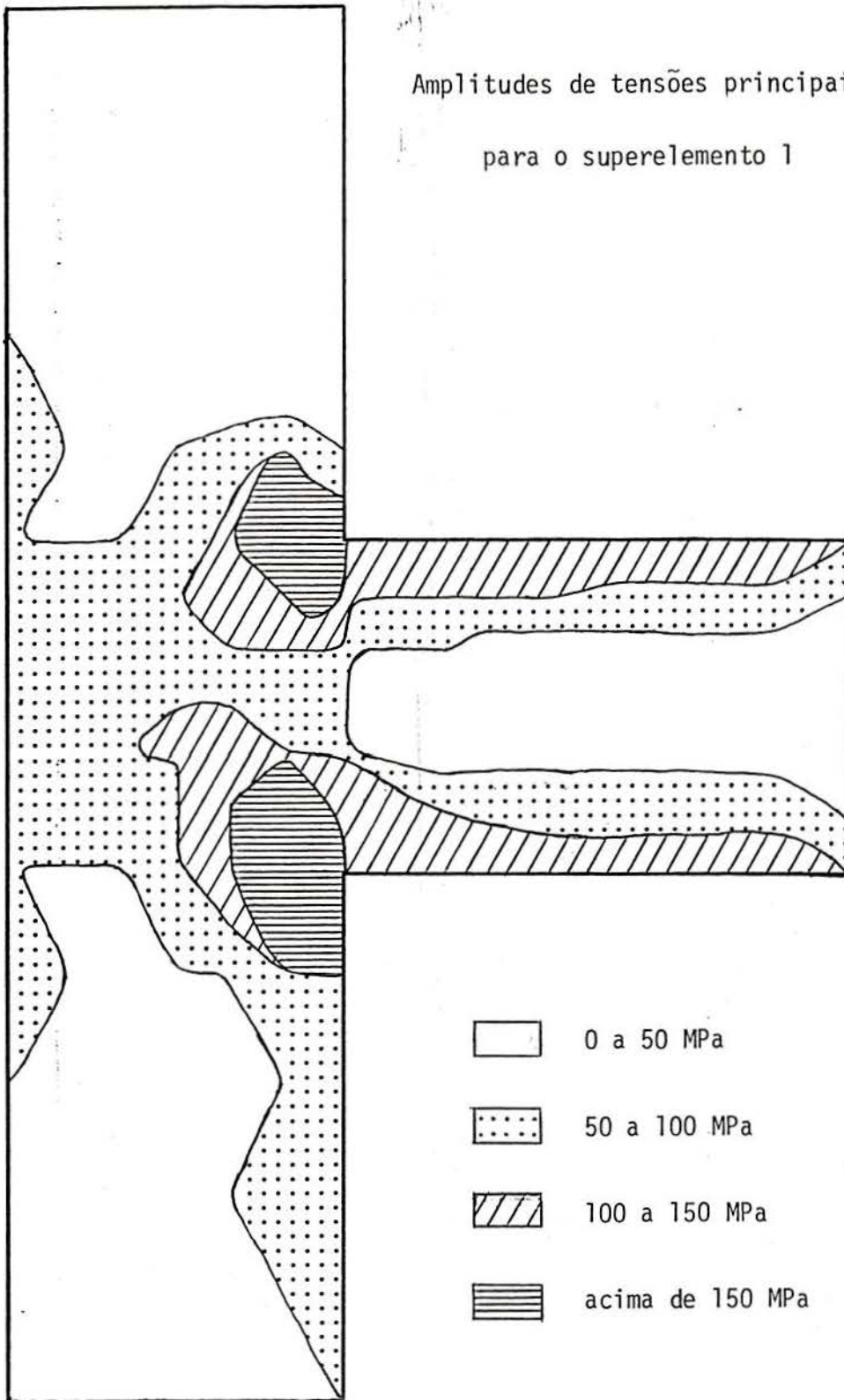


Figura V.7

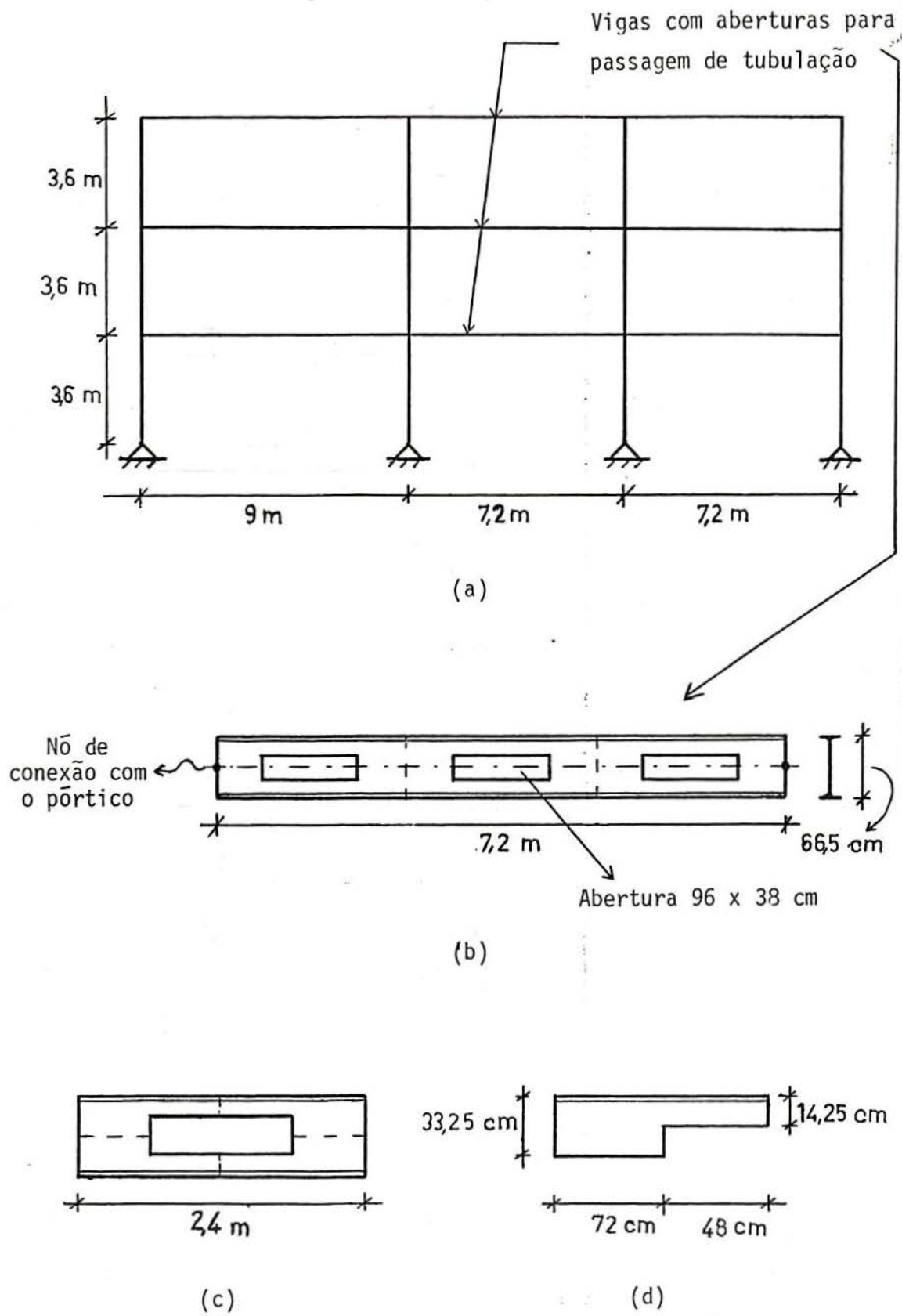


Figura V.8

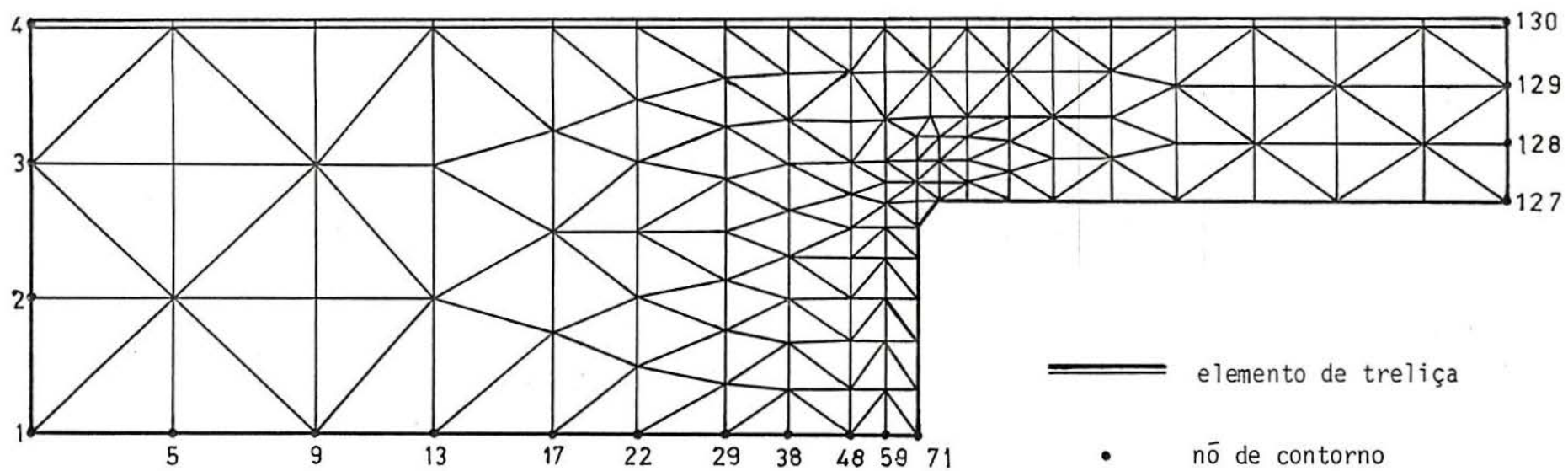


Figura V.9

ço aparece no desenho a numeração somente dos nós de contorno.

O superelemento tipo 1 da figura V.10-a é a versão condensada da subestrutura da figura V.9, de cujos 130 nós permaneceram somente os 18 de contorno. Devido ao fato de se estar trabalhando num problema plano, efetuou-se também a geração do tipo 2, a partir de uma malha simétrica à da figura V.9. Esta segunda malha tem os seus nós numerados de 501 a 630. Na verdade, a matriz de rigidez deste superelemento poderia ser obtida por simples cópia do tipo 1.

A subestrutura da figura V.8-c (segmento de viga furada) vem a ser o superelemento tipo 3, apresentando duas incidências do tipo 1 e duas do tipo 2, conforme a figura V.10-b.

A subestrutura representando uma viga furada é mostrada na figura V.10-c, sendo constituída por três superelementos tipo 3. Ela se constituirá no superelemento tipo 4 e, depois de condensada, permanecerão apenas 2 dos seus 28 nós (figura V.10-d). Para a compatibilização com os elementos do pórtico, é necessária a imposição de restrições generalizadas nos nós 301 a 307 e 322 a 328, a fim de estabelecer a condição de seções planas. Cumpre salientar que este procedimento automaticamente introduz nos nós 304 e 325 a componente de rigidez à flexão, até então não definida na malha de elementos de membrana.

A estrutura final é composta por 18 elementos de pórtico plano e três cópias do superelemento tipo 4. Ela tem a numeração dos seus elementos e superelementos mostrada na figura V.10-e.

A massa de informações gerada por uma análise deste porte é por demais extensa para ser reproduzida aqui integralmente. Assim, no que se refere aos resultados da condensação dos superelementos, listam-se a seguir os elementos não nulos da matriz \bar{K}_{bb} do superelemento tipo 4 (viga furada). Procurando dar uma idéia da perda de rigi-

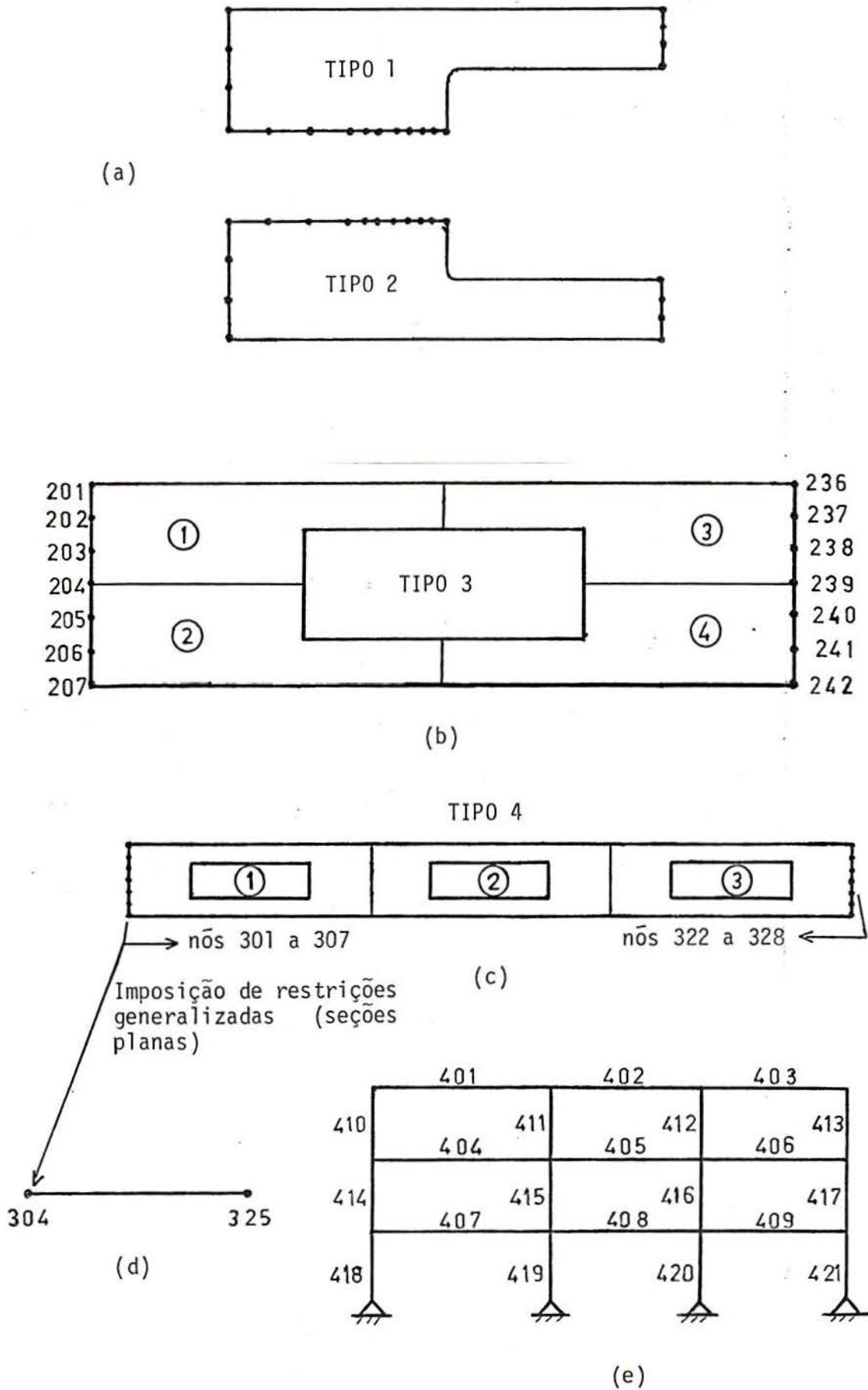


Figura V.10

dez causada pelos furos, estes elementos estão expressos em função dos coeficientes de rigidez correspondentes à viga sem os furos (formulação comum da barra de pórtico plano):

$$K_{11} = -K_{14} = -K_{41} = K_{44} = 0,814 EA/L$$

$$K_{22} = -K_{25} = -K_{52} = K_{55} = 0,518 \times 12EI/L^3$$

$$K_{23} = K_{26} = K_{32} = -K_{35} = -K_{53} = -K_{56} = \\ = K_{62} = -K_{65} = 0,518 \times 6EI/L^2$$

$$K_{33} = K_{66} = 0,635 \times 4EI/L$$

$$K_{36} = K_{63} = 0,285 \times 2EI/L$$

onde E - módulo de elasticidade longitudinal

A - área da seção transversal

I - momento de inércia à flexão

L - comprimento da barra.

Realizou-se a análise estática do pórtico, com todas as suas vigas submetidas a uma carga vertical uniforme de taxa 14 kN/m. Como era de se esperar, as maiores flechas ocorreram no centro das vigas furadas, tendo sido verificado o valor máximo de 0,21 cm no centro do superelemento 402.

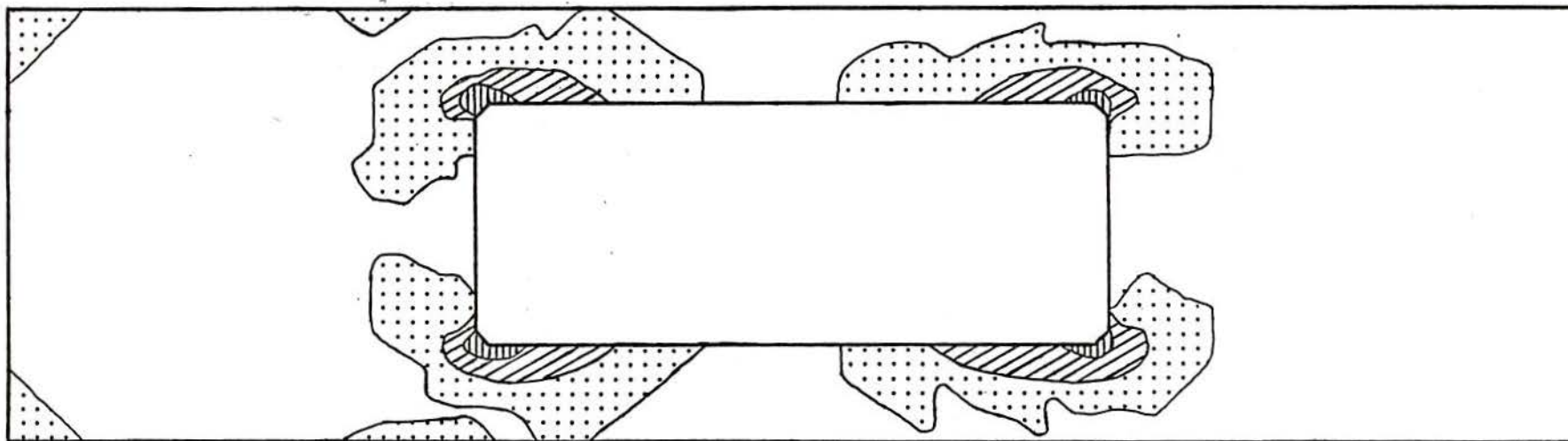
Um dos objetivos mais importantes de uma análise deste tipo é verificar a concentração de tensões junto aos cantos dos furos. A tabela V.8 contém um resumo desta informação, apresentando o valor da maior tensão principal (em valor absoluto), em MPa, junto aos quatro cantos de cada furo existente na estrutura. A numeração das vigas, segmentos e cantos corresponde à da figura V.10.

Tabela V.8 - Tensões principais máximas, em MPa

Viga	Segmento	Canto 1	Canto 2	Canto 3	Canto 4
402	1	169	166	149	155
	2	21	15	13	8
	3	141	146	161	159
405	1	164	164	148	147
	2	14	15	14	15
	3	147	146	163	164
408	1	165	166	152	149
	2	15	18	10	13
	3	147	143	161	162

Conforme se pode constatar, esta concentração de tensões é realmente significativa junto aos furos extremos de cada viga (picos de tensões variando entre 141 e 169 MPa), sendo menos importante junto aos furos centrais.

O segmento 1 da viga 402, o qual apresentou os maiores picos de tensões, tem a variação de suas tensões principais mostradas de forma gráfica na figura V. 11. Pode-se observar o caráter altamente localizado destas concentrações de tensões.



Tensões principais máximas para o segmento 1 do superelemento 402

- 0 a 20 MPa
- ▤ 20 a 50 MPa
- ▨ 50 a 100 MPa
- ▩ acima de 100 MPa

Figura V.11

Capítulo VI

VI - CONCLUSÃO

Neste capítulo, são feitas as considerações finais sobre o método de subestruturação presentemente desenvolvido. Inicialmente, é feita uma avaliação do mesmo, a partir da discussão de resultados obtidos nos exemplos do capítulo anterior. Posteriormente, são relacionadas as tarefas a serem executadas para a complementação do atual sistema computacional, bem como são levantadas idéias para o aperfeiçoamento do mesmo.

VI.1 - POTENCIALIDADES DO MÉTODO

A análise da estrutura com vigas furadas, apresentada na seção V.3, serve para ilustrar as potencialidades do método da subestruturação.

Cumprе salientar que a referida estrutura possui um total de 8.190 elementos e 4.378 nós. Uma análise sem utilizar o recurso da subestruturação implicaria na solução de um sistema de equações com quase 9.000 incógnitas.

O emprego de superelementos tornou necessária a geração de apenas 3 % destes elementos e de 5 %

do total de nós. A maior parte do esforço de análise esteve concentrada na solução de dois sistemas de equações com 224 incógnitas, referentes à condensação dos tipos 1 e 2. A condensação dos demais tipos e a solução da estrutura implicaram nas tarefas triviais de resolver sistemas com, respectivamente, 56, 28 e 44 incógnitas.

Por outro lado, a ocupação da memória central esteve sempre abaixo de 21.000 palavras. Diga-se de passagem que, numa análise sem subestruturação, esta quantidade de memória seria insuficiente até mesmo para armazenar os dados do problema. Na verdade, foi a técnica da subestruturação que tornou viável a análise desta estrutura, bem como a do pórtico com superelementos de junta (análise dinâmica envolvendo 1.700 graus de liberdade).

Cumprе destacar também a efetividade do processo de compatibilização entre diferentes tipos de elementos estruturais, por meio da técnica de aplicação de restrições generalizadas a nível de subestrutura. Isto permitiu que o superelemento viga furada, representado pela formulação de estado plano de tensões, fosse tratado a nível de estrutura como um elemento comum de pórtico plano, inclusive com a componente de rigidez à rotação em suas extremidades.

A definição das múltiplas incidências dos superelementos na hierarquia da subestruturação, de acordo com o formato descrito na seção 1.7, teve a sua simplicidade comprovada nos vários exemplos do capítulo V. A ocorrência de um superelemento dentro da estrutura ou de um dado superelemento tipo é descrita da mesma maneira que a incidência de um elemento finito comum.

A possibilidade de selecionar as regiões para as quais se quer obter resultados também é realçada no exemplo das vigas furadas. Assim, necessitam ser pós-analisados apenas os superelementos referentes aos segmentos nos quais se deseja estudar as concentrações de tensões.

VI.2 - ANÁLISE DINÂMICA

Uma vez que o emprego da subestruturação em análise dinâmica apresenta aproximações em certas etapas de sua atual formulação, torna-se necessário investigar a repercussão das mesmas na qualidade dos resultados obtidos.

O que se observa de imediato é que erros na obtenção das frequências e modos de vibração repercutem e se amplificam na resposta final. Assim, a boa ou má qualidade dos resultados depende antes de mais nada da precisão na obtenção dos modos de vibração. Esta precisão, por sua vez, requer uma correta representação da distribuição das massas no modelo de subestruturação adotado.

Na formulação de Guyan, esta representação é restrita ao termo \overline{M}_{bb} . Nestas condições, ao se condensar determinada região de uma estrutura, modifica-se a distribuição de suas massas. Caso esta alteração interferir significativamente com o funcionamento da mesma (inércia dos deslocamentos dominantes), as frequências e modos de vibração apresentarão erros.

A formulação baseada no sistema expandido ou misto de equações de equilíbrio dinâmico, desenvolvida no capítulo III, representa sem dúvida um importante avanço para a viabilização do uso da subestruturação em análise dinâmica. A introdução do termo cruzado \overline{M}_{ab} , em adição a \overline{M}_{bb} (ver equação III.39), corrige a insuficiência na representação das massas, recém mencionada. Desta maneira, fica resolvida a questão da precisão na obtenção das frequências e modos de vibração. Isto pode ser comprovado pelos valores de frequências obtidos no exemplo de aferição, os quais estão listados nas tabelas V.1 e V.6.

Outro aspecto a destacar é a inclusão do efeito das acelerações de contorno, na obtenção das cargas dinâmicas de um superelemento. Ao se construir um algoritmo de aplicação generalizada, a inclusão de tal efeito

se torna indispensável. A determinação dos modos de vibração internos de um superelemento, pelo método de Lanczos-Ritz, é feita tendo como ponto de partida um vetor de forças. Se este vetor estiver limitado às forças internas, os modos gerados refletirão somente um efeito localizado, deixando de representar a interação dinâmica do superelemento com o restante da estrutura. Além disso, em muitos casos, os superelementos podem estar desprovidos destas forças internas, tornando impossível a aplicação do referido método.

A questão é que estas acelerações são obtidas de maneira aproximada, mediante uma solução estática ou uma inercial, conforme é preconizado na sub-seção III.3.1. Portanto, podem ser produzidos erros até mesmo grosseiros. Todavia, constatou-se no exemplo de aferição que estes erros quase não se refletem na utilização destas acelerações pelo método do sistema expandido. Ocorreu alguma imprecisão apenas em casos isolados de esforços normais de baixo valor.

O bom desempenho do presente método na análise do pórtico da figura V.1 deve ser encarado com reservas. Obviamente, tornam-se necessárias pesquisas adicionais, principalmente para enfrentar a questão dos erros isolados em regiões pouco solicitadas. Há a necessidade de se aperfeiçoar a obtenção da aproximação inicial das acelerações de contorno ou, até mesmo, investigar formas alternativas de obtê-las.

VI.3 - COMPLEMENTAÇÃO DO SISTEMA E IMPLANTAÇÕES FUTURAS

Em seu atual estágio de desenvolvimento, o sistema computacional possui algumas lacunas a serem ainda preenchidas, como a consideração de cargas aplicadas em elementos, obtenção de reações externas e inclusão de outros tipos de elementos finitos. Trata-se de uma tarefa de execução imediata, uma vez que a atual estrutura de dados

já está preparada para estas implantações.

Além disso, deve ser introduzida a declaração de superelementos (tipo) simétricos. Este expediente evitará a repetição de cálculos que ocorreu, por exemplo, na condensação dos quartos de segmento simétricos das vigas furadas (tipos 1 e 2), os quais possuem a mesma matriz de rigidez. Por meio desta declaração, um superelemento, disposto simetricamente em relação a outro, simplesmente alocará a matriz de rigidez deste.

Outra tarefa que já está sendo executada é a implantação da análise dinâmica com subestruturação em múltiplos níveis, o que é facilitado pelo caráter recursivo do formulário desenvolvido na seção III.4. Outros temas para investigação são o aperfeiçoamento da obtenção da aproximação inicial das acelerações no contorno dos superelementos, conforme foi destacado na seção anterior, e a inclusão de outras modalidades de carregamento dinâmico.

Merece destaque também a aplicação da subestruturação na análise de estruturas com não-linearidade localizada. Existem inúmeras situações (estruturas suportadas por cabos, problemas de contato, problemas de interação solo-estrutura, casos de concentração de tensões com escoamento localizado etc.) nas quais o comportamento não linear ocorre apenas em pequenas regiões isoladas. Assim, as regiões lineares, que constituem a maior parte do sistema estrutural, são subestruturadas e condensadas, de forma que a solução iterativa necessita ser feita somente para a região não-linear.

Bastaria, portanto, adicionar ao atual sistema um módulo de análise não-linear como, por exemplo, o algoritmo de Newton-Raphson. Merece ser investigado também o recurso das "fronteiras móveis" entre as regiões de comportamento linear e não-linear, principalmente nos casos de não-linearidade física. Isto pode representar um ganho em eficiência, já que, nos incrementos iniciais, se pode iterar sobre uma região bem menor.

O passo mais importante a ser dado para a plena operacionalização do sistema é o aperfeiçoamento da sua entrada de dados. Propõe-se que isto seja feito com o aproveitamento de sistemas já existentes, já que o conjunto de dados para uma análise convencional pouco difere em relação ao da análise com subestruturação.

Assim, pensa-se em utilizar um sistema de comandos de linguagem orientada como o LEBRE [20] e adicionar a ele comandos de fornecimento de dados típicos de subestruturação. Outra alternativa seria adotar um sistema de planilhas eletrônicas como o gerador de malhas GAELI [21,22], atualmente implantado em microcomputadores. Isto permitiria gerar o arquivo de dados e testar a consistência dos mesmos utilizando um microcomputador, ficando a necessidade de acesso ao computador de grande porte restrita à tarefa de análise.

A sequência dos dados para a geração de um superelemento foi proposta na seção 1.7. No caso de superelementos com ocorrências repetidas, ou dispostos simetricamente, se podem utilizar os mesmos comandos de simetria e semelhança de conectividades para elementos, existentes nos sistemas recém citados. Um recurso que também necessita ser implantado é a geração automática de equações de restrições generalizadas para situações que são típicas, como condição de seções planas, rigidez axial infinita, tramos rígidos, apoios inclinados etc.

A atual saída de resultados, dotada de seletividade por regiões, pode ser aperfeiçoada implantando-se a seletividade por faixa de valores. O avanço seguinte seria a obtenção de uma saída gráfica, o que permitiria o traçado automático de deformadas, modos de vibração e diagramas de variação de tensões como os que aparecem nas figuras V.7 e V.11, entre outras aplicações.

Um importante salto de qualidade será obtido com a utilização de sistemas em processamento paralelo. FARHAT & WILSON [3] relatam um ganho em eficiência de

91 % em um problema de 16.000 graus de liberdade, com a utilização desta técnica. A questão que se coloca de imediato é o critério de divisão das tarefas para os diversos processadores.

Uma possibilidade seria a divisão automática em subdomínios. Neste caso, cada superelemento sofreria uma "subestruturação implícita", feita de forma automática, utilizando algum método como o "multicolour", ou o "arrow" [2, 3]. Além disso, haveria a necessidade de uma reformulação do algoritmo de solução de sistemas de equações.

Finalizando, pode-se dizer que as aplicações do método dos elementos finitos, quer estruturais, quer não estruturais, apresentam um grau de discretização cada vez maior, exigindo um constante aperfeiçoamento dos respectivos algoritmos numéricos. A este contexto de exigências, o método que melhor se adequa é, sem dúvida, o da subestruturação em múltiplos níveis, atualmente funcionando em programação linear, porém plenamente apto a ser implantado em processamento paralelo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] JENNINGS, A.; Matrix Computation for Engineers and Scientists, Chichester, John Wiley and Sons, 1978.
- [2] FARHAT, C. e WILSON, E.; "Modal Superposition Dynamic Analysis on Concurrent Multiprocessors", Eng. Comp., vol. 3, pp. 305-311, 1986.
- [3] FARHAT, C. e WILSON, E.; "Concurrent Iterative Solution of Large Finite Element Systems", Comm. in Applied Numerical Methods, vol. 3, pp. 319-326, 1987.
- [4] PRZEMIENIECKI, J.S.; Theory of Matrix Structural Analysis, New York, McGraw-Hill, 1968.
- [5] NOOR, A.K., KAMEL, H.A. e FULTON, R.E.; "Substructuring Techniques - Status and Projections", Computers and Structures, vol. 8, pp. 621-632, 1977.
- [6] DODDS JR., R.H. e LOPEZ, L.A.; "Substructuring in Linear and Non-Linear Analysis", Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, vol.15, pp. 583-597, 1980.
- [7] ELLWANGER, R.J. e LIMA, E.C.P.; "A Utilização de Superelementos na Análise Estrutural", Anais do Colloquia 1987, vol. 4, pp. 153-168.
- [8] GUYAN, R.J.; "Reduction of Stiffness and Mass Matrices", American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, vol. 3, n. 2, p. 380, 1965.
- [9] MILLER, C.A.; "Dynamic Reduction of Structural Models", Journal of the Structural Division, ASCE, vol. 106, n. ST10, pp. 2097-2108, 1980.

- [10] WILSON, E.L. e BAYO, E.P.; "Use of Special Ritz Vectors in Dynamic Substructure Analysis", Journal of Structural Engineering, ASCE, vol. 112, n. 8, pp. 1944-1954, 1986.
- [11] WILSON, E.L. et alii; "Dynamic Analysis by Direct Superposition of Ritz Vectors", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol. 10, pp. 813-821, 1982.
- [12] LIMA, E.C.P. et alii; "A Utilização dos Vetores de Lanczos-Ritz para a Transformação de Coordenadas em Análise Dinâmica de Estruturas", Revista Brasileira de Engenharia, vol. 3, n. 1, pp. 49-69, 1985.
- [13] COUTINHO, A.L.G.A. et alii; "The Application of the Lanczos Mode Superposition Method in Dynamic Analysis of Off-shore Structures", Computers and Structures, vol. 25, n. 4, pp. 615-625, 1987.
- [14] PETERSSON, H. e POPOV, E.P.; "Substructuring and Equation System Solutions in Finite Element Analysis", Computers and Structures, vol. 7, pp. 197-206, 1977.
- [15] BATHE, K.J.; Finite Elements Procedures in Engineering Analysis, New Jersey, Prentice Hall Inc., 1982.
- [16] GERE, J.M. e WEAVER JR., W.; Analysis of Framed Structures, New York, Van Nostrand Reinhold Ltd., 1965.
- [17] MEIROVITCH, L.; Analytical Methods in Vibrations, London, MacMillan, 1967.
- [18] CLOUGH, R.W. e PENZIEN, J.; Dynamics of Structures, New York, McGraw Hill Inc., 1975.
- [19] LIMA, E.C.P.; LORANE-DINA: Uma Linguagem Orientada para a Análise Dinâmica de Estruturas (Tese de Doutorado), Rio de Janeiro, COPPE, 1977.
- [20] FERRANTE, A.J. et alii; Sistema LEBRE - Manual do Usuário, Porto Alegre, CPGEC/UFRGS, 1979.
- [21] GROEHS, A.G.; "Geração de Malhas no Sistema GAELI", Anais do Colloquia 1988, vol. 3, p. 661.

- [22] KREBS, M.; Geração e Representação de Malhas no Sistema GAELI (Tese de Mestrado), Porto Alegre, CPGEC/UFRGS, 1988.