

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
Dissertação de Mestrado

FABIOLA GRASNIEVICZ PRANTS

**Complexidade dinâmica de um laser de  
estado sólido de dois modos com  
realimentação óptica de frequência  
modificada**

Porto Alegre - RS  
2017

FABIOLA GRASNIEVICZ PRANTS

**Dynamical complexity of a two-mode solid  
state laser with frequency-shifted optical  
feedback**

Dissertação submetida ao Programa  
de Pós-Graduação em Física do Insti-  
tuto de Física da UFRGS, como que-  
sito parcial para obtenção do título  
de Mestre em Física.

Orientador: Cristian Bonatto.

Porto Alegre - RS

2017



# Agradecimentos

Aos meus colegas da pós graduação, em especial, ao Alisson, Livia e Wallace, por toda ajuda, momentos de descontração e grande companheirismo durante a jornada;

As minhas amigas Amanda, Carol, Fernanda, Liana, Nayra e Pietra que, mesmo distante, me proporcionaram vários momentos de alegria;

Aos meus professores da graduação que me ajudaram chegar até aqui, principalmente ao Dr. Paulo César Rech que me orientou durante esse período;

Ao grupo de pesquisa em ótica pelos seminários;

Aos professores Antônio Endler e Ricardo Rego Bordalo Correia por toda ajuda e suporte que me deram;

Ao meu orientador Cristian Bonatto por toda sua orientação e paciência ao longo desses dois anos;

À UFRGS e ao IF pela estrutura fornecida e ao CNPq pelo auxílio financeiro aos estudos;

À minha família que sempre acreditou em mim e me deu todo o suporte para que eu chegasse até aqui, em especial aos meus pais, serei eternamente grata à eles por tudo que fizeram por mim;

Aos meus filhos felinos, Gandalf, Sophia e Gibbs pela diversão e alegria que me proporcionam todos os dias;

E por fim, ao grande amor da minha vida, Willian Tiago Prants, sem ele, nada disso faria sentido.

# Resumo

Nesse trabalho estudamos um laser de estado sólido sujeito a realimentação óptica de frequência modificada de um ponto de vista da teoria de bifurcações. Fizemos uma análise bastante ampla da dinâmica desse laser no espaço de dois parâmetros de injeção (a dessintonização de frequência e a intensidade da injeção) utilizando métodos de integração direta e continuação numérica. Enquanto o método de integração numérica nos possibilitou analisar as dinâmicas mais complexas, incluindo transições para o caos e hipercaos, o método de continuação numérica nos permitiu estudar curvas de bifurcações estáveis e instáveis. A análise foi realizada estudando os efeitos causados pela mudança dos parâmetros que representam o tempo de vida da inversão populacional e a saturação cruzada, responsável pelo acoplamento dos campos dentro do meio ativo. Mostramos que o parâmetro que descreve o tempo de vida da inversão populacional é responsável pelo surgimento de diversas instabilidades no sistema, como o fenômeno de multiestabilidade, surgimento de órbitas periódicas e quase-periódicas, assim como rotas para o caos via dobramento de período e torus. Para o parâmetro de acoplamento dos campos, mostramos que ele possibilita a presença de hipercaos em nosso sistema, este podendo se apresentar no que denominamos de hipercaos “fraco” e “forte”. Dentro da região de hipercaos “forte”, mostramos transições determinísticas de dois regimes, em que num deles o laser opera no modo de Q-switching, enquanto que no outro o laser apresenta pequenas oscilações irregulares. Por fim, mostramos a existência de uma estatística de eventos extremos dentro do regime hipercaótico.

**Palavras-chave:** Laser de estado sólido, realimentação óptica, lasers de dois modos, hipercaos, eventos extremos, bifurcação.

# Abstract

In this work we studied a solid state laser subjected to frequency-shifted optical feedback from a bifurcation theory point of view. We performed a very broad analysis of the dynamics of this laser in the space of two injection parameters (frequency detuning and injection intensity) using direct integration and numerical continuation methods. While the numerical integration method allowed us to analyze the more complex dynamics, including chaos and hyperchaos transitions, the numerical continuation method allowed us to study stable and unstable bifurcation curves. The analysis was carried out by studying the effects caused by the change of the parameters that represent the life time of the population inversion and the cross saturation, responsible for the coupling of the fields within the active medium. We show that the parameter that describes the life time of the population inversion is responsible for the appearance of several instabilities in the system, such as the multistability phenomenon, the appearance of periodic and quasi-periodic orbits, as well as routes to chaos via period doubling and torus. For the field coupling parameter, we show that it allows the presence of hyperchaos in our system, which may present in what we call "weak" and "strong" hyperchaos. Within the "strong" hyperchaos region, we show deterministic transitions of two regimes, in which one laser operates in the Q-switching mode, while in the other the laser presents small irregular oscillations. Finally, we have shown the existence of an extreme events statistic within the hyperchaotic regime.

**Keywords:** Solid state laser, optical feedback, two-frequency laser, hyperchaos, extreme events, bifurcation.

# Sumário

<b>Agradecimentos</b>	<b>iii</b>
<b>Resumo</b>	<b>iv</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Sumário</b>	<b>vi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Aspectos Teóricos</b>	<b>5</b>
2.1 Lasers . . . . .	5
2.2 Sistemas dinâmicos . . . . .	9
2.2.1 Atrator . . . . .	9
2.2.2 Bifurcações . . . . .	10
2.2.3 Expoentes de Lyapunov . . . . .	20
2.3 Metodologia . . . . .	21
2.3.1 Integração direta . . . . .	21
2.3.2 Continuação numérica . . . . .	23
<b>3 Laser de estado sólido com realimentação óptica de frequência modifi-</b> <b>cada</b>	<b>25</b>

3.1	Configuração experimental . . . . .	25
3.2	Modelo teórico . . . . .	27
3.2.1	Cálculo da frequência de oscilação de relaxação . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Resultados</b>	<b>36</b>
4.1	Estados estacionários . . . . .	36
4.2	Dinâmica periódica, quase periódica e caótica . . . . .	46
4.3	Dinâmica hipercaótica . . . . .	58
4.3.1	Hipercaos “fraco” . . . . .	58
4.3.2	Hipercaos “forte” . . . . .	65
4.4	Eventos extremos . . . . .	74
4.4.1	Caso $\beta = 0,6$ . . . . .	74
4.4.2	Caso $\beta = 0,5$ . . . . .	75
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>78</b>
<b>A</b>	<b>Equação de campo redimensionalizada</b>	<b>81</b>
<b>B</b>	<b>Transformação das equações de campo para intensidade e fase</b>	<b>84</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>91</b>

# Introdução

Desde o primeiro laser de rubi inventado em 1960 por Maiman [1], lasers passaram a ser amplamente aplicados, já que eles são dispositivos confiáveis, de fácil reprodução e possibilitam aplicações nas mais diversas áreas, como comunicação, indústria, armazenamento, entretenimento, medicina, criptografia, entre outros [2]. A luz emitida pelo laser é caracterizada por ter baixa divergência e alta coerência e em qualquer laser, um tipo de energia, seja química, elétrica, e assim por diante, é convertida em energia de radiação luminosa [3]. Para isso, necessita-se de um “meio ativo”, composto por substâncias que geram luz quando excitadas por uma fonte de energia externa. Dependendo do meio ativo utilizado, podemos classificar os lasers como sendo de gás, estado sólido, semiconductor, corante, químico ou excímero. Recentemente tem havido grande interesse em lasers microchip de estado sólido, como os de Nd:Yag e Nd:YVO<sub>4</sub>. Seu processo de fabricação é bastante simples, necessitando de muito pouco material para sua construção, possibilitando dessa maneira a produção em massa de lasers compactos com baixo custo [4]. As excelentes propriedades termo-mecânicas e ópticas do laser de estado sólido de neodímio, permitiram um rápido desenvolvimento da tecnologia laser [3], beneficiando muitos campos de aplicação [5, 6]. Em nossa dissertação, focamos no estudo de um modelo de laser de estado sólido, que em particular pode ser utilizado para descrever um laser de microchip que utiliza um cristal de estado sólido como meio ativo.

Lasers de estado sólido são bastantes estáveis. Uma classe importante de lasers de estado sólido consiste em lasers sintonizáveis [7] e ultra-rápidos [8, 9], que podem operar em regimes de ondas contínuas, pulsadas ou destravada (Q-switched). Uma maneira de estabilizar ainda mais a saída do laser e proporcionar benefícios adicionais é utilizando perturbação externas. Cientistas perceberam que utilizando-se estas perturbações de maneira controlada, elas podem ser extremamente úteis e isso atraiu muita atenção na área

---

de estreitamento da largura de linha [10], controle de caos [11], geração de bits aleatórios [12], estabilização de frequência [13], medição de precisão [14], entre outros [15]. Em contrapartida, a inserção de forçamentos externos faz com esses sistemas possam se desestabilizar, fazendo com que a dinâmica do laser apresente diversas instabilidades, produzindo uma variedade de condutas dinâmicas e fenômenos não lineares, como oscilações periódicas, quase periódicas, multiestabilidade, e rotas para o caos, como cascatas de dobramento de período, intermitência e rompimento de torus [15, 16]. Vários tipos de perturbações foram consideradas por diversos pesquisadores, como modulações, injeções ópticas externas, realimentações ópticas, entre outros. A riqueza de comportamentos que perturbações possibilitam, faz com que instabilidades em lasers continuem a ser escopo de diversos trabalhos ainda hoje [16–18]. Além disso, hoje em dia dinâmicas caóticas já são bem conhecidas e estudos a respeito desse fenômeno continuam sendo de grande interesse pelos pesquisadores e também pela indústria, já que possibilitam aplicações em criptografia, radares caóticos, entre outros [19].

O estudo de instabilidades em lasers monomodos sujeito a perturbações externas já foi muito investigado [20]. Em 1989 estudos sobre laser microchip de estado sólido monomodo surgiram com Zayhowski e Mooradin [21]. Na sequência diversos trabalhos de lasers de microchip de estado sólido estudaram as instabilidades dinâmicas utilizando uma variedade de meios ativos [22–29]. Em 1998 Yeung *et al.* [30] mostraram, para um laser de estado sólido sujeito a injeção óptica, critérios analíticos para a existência, estabilidade e bifurcações de estados de travamento de fase e além disso, mostraram três mecanismos de destravamento de fase distintos. Em 2005 Valling *et al.* [31, 32] mostraram que mapas gerados numericamente com os parâmetros de injeção concordam com os gerados experimentalmente se o parâmetro de reforço de linha  $\alpha$  for aproximadamente  $\alpha \approx 0,35$ . Em 2007 Valling *et al.* [33] apresentaram um método para a construção automática de diagramas de bifurcações experimentais. Por meio desse método, obtiveram bifurcações de sela-nó, Hopf, dobramento de período e torus no diagrama de bifurcação utilizando os parâmetros de força de injeção e a diferença de frequência (detuning). Recentemente, em 2009 Toomey *et al.* [34] mostraram experimentalmente a complexidade das dinâmicas não lineares também produzidas por injeção óptica em um outro modelo de laser de estado sólido.

Um tipo específico de perturbação externa que começou a atrair atenção em diversas áreas é a realimentação óptica de frequência modificada [35–39]. O processo de realimentação óptica é o fenômeno físico em que uma parcela da saída do laser é refletida de volta dentro da cavidade. Na realimentação óptica de frequência modificada, a frequência da

---

saída do laser que retorna, é modificada antes de causar a perturbação. Como comentado em [38], lasers submetidos a realimentação óptica de frequência modificada, apresentam uma rica variedade de características operacionais, que vão desde pulsos curtos regulares até comportamentos caóticos, além do fato desses dispositivos poderem ser projetados com vários layouts, com aplicações em bombeamento óptico [40], resfriamento a laser [41] e outras aplicações [42–44].

Em nosso trabalho focamos no estudo de um laser de dois modos sujeito a realimentação óptica de frequência modificada. O problema de estabilidade em lasers de dois modos já é bem antiga. Murray *et al.* em 1974, já discutiam no capítulo IX do livro que escreveram, o caso da estabilidade de um laser de dois modos sem levar em conta a variável da população [45]. Recentemente investigações em torno de dinâmicas mais complexas em laser microchip de estado sólido de dois modos com realimentação óptica de frequência modificada tem sido realizadas. Em 1987 Brunel *et al.* [46] construíram um laser microchip de estado sólido de duas frequências sujeito a realimentação óptica de frequência modificada para medir o tempo de vida atômica. Em 2012, Thévenin *et al.* [47] encontraram um bom acordo entre previsões teóricas e experimentais em lasers desse tipo, mostrando tanto teoricamente quanto experimentalmente, diversos tipos de comportamento dinâmicos, como modulação de intensidade fraca, auto-pulsação e caos. Em 2014, Romanelli *et al.* [48] mostraram que a estabilidade de fase a longo prazo do oscilador mestre é transferida para o “escravo”, mesmo na ausência do regime de travamento de fase próximo a um ponto de bifurcação de Hopf e além disso, seus estudos sugerem que esse é um comportamento universal para qualquer oscilador forçado periodicamente. Na sequência, em 2015 [49], mostraram evidências teóricas e experimentais de um comportamento similar a sistemas excitáveis em atratores caóticos, mostrando que os pulsos emitidos, embora caóticos, eram bastante regulares, com amplitudes semelhantes e quase periódicas no tempo. Em 2016, Thorette *et al.* [50], mostraram a presença de dinâmica caótica nesse modelo.

Até a presente data, para o modelo teórico do laser que investigamos, os estudos foram dirigidos principalmente para alguns valores de parâmetros que modelam um dispositivo específico. Uma análise mais abrangente levando em conta a variação dos parâmetros dos materiais ainda não foi realizada. Deste modo, a presente dissertação busca atacar esta problemática, ou seja, uma investigação mais extensiva de lasers microchip de estado sólido sujeitos a realimentação óptica de frequência modificada, onde complexidades adicionais são esperadas quando comparadas aos casos de lasers monomodos.



---

Por fim, analisamos a estatística de eventos extremos. O problema de eventos extremos em óptica iniciou em 2007 com Solly *et al.* [51]. Desde então, diversos trabalhos em óptica surgiram investigando esse fenômeno [52, 53]. Inicialmente eventos extremos foram investigados em sistemas de alta dimensionalidade, modelados principalmente pela equação de Schrödinger não linear. Também pensou-se que o ruído era importante para a ocorrência dos eventos extremos. Mas em 2011 foi mostrado evidências numéricas e experimentais de que eventos extremos podem ocorrer por processos não lineares determinísticos em sistemas de baixa dimensionalidade [54]. Na sequência, diversos trabalhos surgiram explorando o mecanismo de formação de eventos extremos como sendo crises de atratores caóticos [55–58].

A dissertação está organizada da seguinte maneira: no capítulo 2 apresentaremos alguns aspectos teóricos do nosso modelo e a metodologia empregada em nosso trabalho. No que diz respeito aos aspectos teóricos, separamos a descrição em lasers e sistemas dinâmicos. Em lasers faremos uma breve revisão histórica do surgimento do laser e apresentaremos os componentes básicos necessários para o seu funcionamento. Em sistemas dinâmicos apresentaremos de forma sucinta as teorias utilizadas em nosso trabalho para descrever a dinâmica do modelo de laser.

O capítulo 3 está dedicado à apresentação do modelo que estudamos. Descreveremos o sistema que estamos trabalhando, apresentando seu arranjo experimental e sua formulação matemática.

No capítulo 4, os resultados obtidos serão apresentados. Mostraremos as instabilidades que surgem no modelo estudado ao modificar os parâmetros que descrevem o tempo de vida de inversão  $\epsilon$  e o acoplamento dentro do meio ativo pela saturação cruzada  $\beta$ . Além disso, mostraremos alguns resultados novos, como regiões de hipercaos que não haviam sido encontrados ainda, delimitando as transições de caos e hipercaos. Além disso, apresentaremos evidências da presença do fenômeno de Q-Switching e eventos extremos.

Por fim, no capítulo 5 apresentaremos as conclusões do nosso trabalho, bem como as perspectivas futuras.

## Aspectos Teóricos

*Este capítulo está organizado da seguinte maneira: na próxima seção apresentamos uma breve revisão histórica do surgimento do laser e apresentamos os componentes básicos para o seu funcionamento. Na sequência apresentamos de forma sucinta as teorias e metodologias utilizadas em nosso trabalho para descrever a dinâmica do modelo de laser.*

### 2.1 Lasers

Em 1954, Gordon *et al.* [59] motivados pelo conceito de emissão estimulada, processo em que o átomo quando perturbado por um fóton que incide sobre ele emite outro fóton, introduzido por Einstein em 1917 [60], publicaram um artigo sobre um dispositivo capaz de gerar um feixe coerente de microondas, que passou a ser conhecido como MASER (do inglês *Microwave Amplification by Stimulation Emission of Radiation*), que significa amplificação de microondas por emissão estimulada da radiação. Como esse dispositivo estava limitado a baixas frequências do espectro eletromagnético, logo começou uma busca por um dispositivo que emitisse um feixe coerente com frequência na região da luz visível. Em 1958, Shawlow e Townes propuseram um dispositivo que continha um meio ativo e dois espelhos, podendo assim fazer algo semelhante para a parte infravermelha e visível do espectro [61]. Theodore Maiman, motivado pelo trabalho de Shawlow e Townes, foi então o primeiro a ter sucesso ao amplificar a radiação do espectro visível cujo meio ativo era um cristal de rubi [1]. De acordo com Maiman [62]:

“Uma fonte de luz, na forma do poderoso clarão de uma lâmpada, irradia um cristal de rubi sintético [com duas faces paralelas cobertas de prata], que absorveu energia sobre uma ampla banda de frequências. Essa energia ótica excitou os átomos até um estado de maior energia, do qual a energia foi irradiada novamente em uma estreita banda de frequências. Os átomos excitados foram acoplados a um ressonador óptico e estimulados a emitir juntos a radiação ...” (1960, p.6, tradução nossa).

A esse novo dispositivo foi dado o nome de LASER (do inglês *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*), abreviação para amplificação de luz por emissão estimulada de radiação. O laser tem três partes fundamentais: o meio ativo, a fonte de energia responsável pelo bombeamento e um ressonador (cavidade óptica).

O meio ativo pode ser composto por substâncias gasosas, líquidas ou sólidas, e é nele em que acontecerão as inversões de população, fenômeno que acontece quando a densidade de moléculas no estado de maior energia é maior do que no estado de menor energia. Frequentemente o meio ativo é utilizado para descrever o tipo de laser a ser utilizado, sendo: de gás [63], estado sólido [1], semicondutor [64–67], corante (dye) [68, 69], químico [70] ou excímero [71]. Os lasers de gás são bombeados por descargas no gás e podem ser de átomos, íons ou moléculas. Os de estado sólido tem como fonte de potência as lâmpadas de flash e o material utilizado é distribuído numa matriz sólida. Os de semicondutores são junções p-n que tem como fonte de bombeamento corrente elétrica. Os de corante, como o próprio nome sugere, usam corantes orgânicos complexos numa solução líquida ou suspensão e uma de suas vantagens é a ampla gama de comprimentos de onda que pode ser utilizada. Os químicos são bombeados com energia gerada a partir de reações químicas e a sua saída pode gerar ondas eletromagnéticas com potências de megawatts. Por fim, os excímeros, usam gases nobres com gases reativos produzindo moléculas instáveis chamadas dímeros, que, ao se romper, liberam radiação eletromagnética.

O bombeamento é a fonte da qual o laser retira a potência necessária para o seu funcionamento, podendo a operação ser contínua, pulsada ou destravada (Q-switched). A emissão contínua é resultado da excitação contínua do meio ativo. A emissão pulsada ou também conhecida como relaxada, é resultado do forçamento pulsado no meio ativo. Esse meio é progressivamente bombardeado até chegar em um nível de excitação suficiente para produzir emissão de luz no laser. Por fim, a emissão destravada (Q-switched) ocorre em lasers pulsados, ocorrendo quando o bombardeamento é feito além do limiar do funcionamento, permitindo que a emissão ocorra quando tiver alcançado um nível suficiente, produzindo dessa maneira um pulso de energia de curta duração com picos bem maiores. Em todos os casos, o forçamento externo é responsável por excitar os elétrons, fazendo

com que o meio ativo tenha mais elétrons excitados do que no estado fundamental de energia, ocorrendo então a inversão populacional.

O ressonador (cavidade óptica) faz com que os fótons criados durante o processo retornem ao meio ativo excitando mais e mais átomos, levando a uma reação em cadeia e a emissão laser. Para isso, o laser possui dois espelhos nas extremidades do meio ativo (que provocam a reflexão dos fótons de volta ao meio), onde um deles é parcialmente refletor, a fim de permitir a saída da luz.

Lasers são sistemas físicos bastantes complexos, podemos utilizar diversos modelos, acoplamentos e configurações, gerando uma vasta gama de comportamentos dinâmicos diferentes, que estão longe de estarem totalmente descritos. Felizmente, conseguimos boa concordância entre experimento e teoria com modelos simples e confiáveis. Uma descrição mais completa para o sistema laser requer uma abordagem de mecânica quântica [45, 72, 73], porém abordaremos o problema do ponto de vista da abordagem semi-clássica [45, 74], onde flutuações quânticas e estatísticas de fótons não são levadas em consideração. A dinâmica de um laser de modo único, na teoria semi-clássica pode ser descrita por meio das equações de Maxwell-Bloch, a partir de diversas suposições e aproximações [16, 74, 75]. As equações de Maxwell-Bloch descrevem a evolução do campo elétrico  $E$ , da polarização do meio ativo  $P$  e da diferença de população  $N$  entre os dois níveis de energia dos átomos que constituem o meio ativo, cada um deles associado a um termo de taxa de decaimento  $\Gamma_E$ ,  $\Gamma_P$  e  $\Gamma_N$  respectivamente.

Dependendo da magnitude das taxas de decaimentos, *Arecchi et al.* [76, 77] classifica os lasers em três classes: A, B e C. Em lasers da classe A tanto a polarização como a inversão populacional decaem em uma escala de tempo muito menor que o campo elétrico, logo, as taxas de decaimento da polarização e da inversão populacional são muito maiores do que a do campo elétrico ( $\Gamma_P, \Gamma_N \gg \Gamma_E$ ). Desta maneira, podemos eliminar adiabaticamente as variáveis que representam a polarização e a inversão populacional e o laser é descrito por apenas uma equação diferencial não linear, dada pelo campo elétrico. Já nos lasers da classe B, apenas a polarização decai numa escala de tempo muito menor, fazendo com que a taxa de decaimento da polarização seja muito maior do que a da inversão populacional e do campo elétrico ( $\Gamma_P \gg \Gamma_N, \Gamma_E$ ). Neste caso, elimina-se adiabaticamente a variável da polarização e o laser fica então descrito por duas equações diferenciais não lineares acopladas, dadas pela inversão populacional e pelo campo elétrico. Por fim, nos lasers da classe C, temos que a polarização, a inversão populacional e o campo elétrico decaem em uma escala de tempo similar, logo as taxas de decaimento são da mesma ordem de magnitude ( $\Gamma_P \approx \Gamma_N \approx \Gamma_E$ ) e portanto é necessário o conjunto

completo das equações de Maxwell-Bloch para descrever o laser.

Lasers de classe A e B sem nenhum forçamento externo, só podem apresentar dinâmicas estacionárias e periódicas, enquanto que os de classe C, podem apresentar dinâmica caótica sem a necessidade de adicionar forçamentos externos em sua configuração. Isso se deve ao fato de que, para o sistema apresentar dinâmicas mais complexas, como a dinâmica caótica, é necessário pelo menos três graus de liberdade. Como para descrever os lasers de classe C é necessário o conjunto completo de equações de Maxwell-Bloch, então naturalmente já temos um sistema com pelo menos três graus de liberdade, possibilitando que o sistema apresente dinâmica caótica.

Dependência nas condições iniciais do sistema, ou seja, dinâmica caótica, já é bem conhecida [78]. A conversão de energia incoerente em radiação coerente que acontece em lasers é frequentemente acompanhada pelo surgimento de pulsações espontâneas na saída do laser [79]. No entanto, a falta de conhecimento na época, fez com que essas observações fossem deixadas inexplicadas ou erroneamente atribuídas ao ruído. Apenas em 1960, com a descoberta de Lorenz [80] a cerca da sensibilidade das condições iniciais, que estudos começaram a ser realizados em torno disso. Caos em lasers começou a ser estudado em 1975 [81], quando Haken mostrou a analogia entre as equações de Lorenz e as equações de Maxwell-Bloch.

Lasers de classe A e B, podem exibir dinâmica caótica se adicionarmos algum forçamento externo. Uma maneira de fazer isso é por meio de injeção óptica externa, em particular, por realimentação óptica, onde, neste último caso, uma parcela de luz emitida é inserida de volta dentro da cavidade do laser. É bem estabelecido que lasers são extremamente sensíveis a realimentação óptica [15]. Em nosso trabalho analisamos a dinâmica de um laser de classe B de estado sólido sujeito a uma realimentação óptica de frequência modificada de um ponto de vista de sistemas dinâmicos. Nas próximas seções descreveremos brevemente alguns conceitos de sistemas dinâmicos, importantes para o desenvolvimento do nosso trabalho.

## 2.2 Sistemas dinâmicos

Conforme a referência [82], um sistema dinâmico consiste na formulação matemática do conceito científico geral de um processo determinístico. Os estados futuro e passado de um sistema dinâmico podem ser previstos para uma certa extensão conhecendo seu estado presente e as leis que governam sua evolução. Comprovado que estas leis não mudam no tempo, o comportamento de tal sistema pode ser considerado como completamente definido pelo seu estado inicial. Assim, a definição de um sistema dinâmico inclui um conjunto de seus estados possíveis (espaço de estados) e uma lei de evolução do estado no tempo. Nas subseções abaixo discutiremos brevemente alguns elementos que caracterizam a dinâmica de um sistema.

### 2.2.1 Atrator

Dado um conjunto fechado de pontos  $A$  no espaço de fases de um sistema dinâmico, Monteiro [83] define o atrator como:

- $A$  é um conjunto invariante: ou seja, qualquer trajetória  $\vec{x}(t)$  que começa em  $A$ , permanece em  $A$  por todo o tempo;
- $A$  atrai um conjunto aberto de condições iniciais: isso é, há um hipervolume  $B$ , que contém  $A$ , tal que para qualquer condição inicial  $\vec{x}(0)$  pertencente a  $B$ , então a distância entre a trajetória  $\vec{x}(t)$  e  $A$  tende a zero, quando  $t \rightarrow \infty$ . O maior conjunto de condições iniciais que satisfaz essa propriedade é chamado bacia de atração de  $A$ ;
- $A$  é mínimo: ou seja, não há subconjunto de  $A$  que satisfaça as duas condições anteriores.

Para um sistema dinâmico de tempo contínuo, autônomo e bidimensional, pelo teorema de Poincaré-Bendixson [84] temos duas possibilidades de atrator, que são:

- ponto de equilíbrio, qualquer condição inicial na sua vizinhança, a trajetória da solução convergirá para esse ponto, nesse caso temos um equilíbrio estável, no contrário, o equilíbrio é instável;
- ciclo-limite, qualquer condição inicial na sua vizinhança, a trajetória da solução convergirá para um conjunto de pontos que apresentam um comportamento periódico, nesse caso temos um ciclo-limite estável, no contrário, o ciclo-limite é instável.

Para um sistema dinâmico de tempo contínuo, autônomo e  $n$ -dimensional, com  $n > 2$ , podemos encontrar mais tipos de atratores, que são:

- superfície toroidal, exibe um comportamento periódico ou quase periódico com  $n$  frequências, sendo  $n > 2$ , fundamentais independentes. No comportamento quasi-periódico, temos que as órbitas nunca se fecham sobre si;
- atrator caótico, apresenta dependência sensível às condições iniciais, ou seja, a distância entre duas trajetórias vizinhas no espaço de fases diverge exponencialmente conforme o sistema evolui no tempo.
- atrator hipercaótico, exibe um comportamento caótico com pelo menos dois expoentes positivos de Lyapunov. Combinado com um expoente nulo e um negativo, a dimensão mínima para um sistema com evolução contínua no tempo é 4.

### 2.2.2 Bifurcações

Uma bifurcação de um sistema dinâmico é uma mudança estrutural no espaço de fases, produzida pela variação de seus parâmetros ao passar por um valor crítico, chamado de ponto de bifurcação.

Podemos classificar as bifurcações como sendo bifurcações locais ou globais. Bifurcações que não podem ser detectadas a partir de uma análise local são chamadas de bifurcações globais, como as bifurcações homoclínicas e heteroclínicas. Bifurcações que podem ser previstas estudando o campo vetorial na vizinhança de um ponto de equilíbrio ou de um ciclo limite são ditas bifurcações locais, como as bifurcações de codimensão um e codimensão dois. Quando é necessário pelo menos um parâmetro para ocorrer uma bifurcação, temos as bifurcações de codimensão um, como as bifurcações de Hopf e sela-nó para o equilíbrio, e sela-nó, dobramento de período e Neimark-Sacker para ciclo limite. Quando são necessários pelo menos dois parâmetros, temos as bifurcações de codimensão dois, como a bifurcação de Bautin, de Bogdanov-Takens, cúspide, fold-Hopf e Hopf-Hopf. Abaixo listaremos uma série de bifurcações que ocorrem tipicamente em lasers, descrevendo-as brevemente com base na referência [82].

### Bifurcações de codimensão um para o equilíbrio

Bifurcação de sela-nó: caracterizada por um autovalor nulo da matriz Jacobiana no ponto de bifurcação. Sua forma normal é dada por:

$$\dot{x} = \alpha + x^2 \equiv f(x, \alpha) \quad (2.1)$$

Antes da bifurcação ( $\alpha < 0$ ) o sistema apresenta dois pontos de equilíbrio, um estável e um instável, que colidem no ponto de bifurcação ( $\alpha = 0$ ), e desaparecem após a bifurcação ( $\alpha > 0$ ), como pode ser visto na figura 2.1.

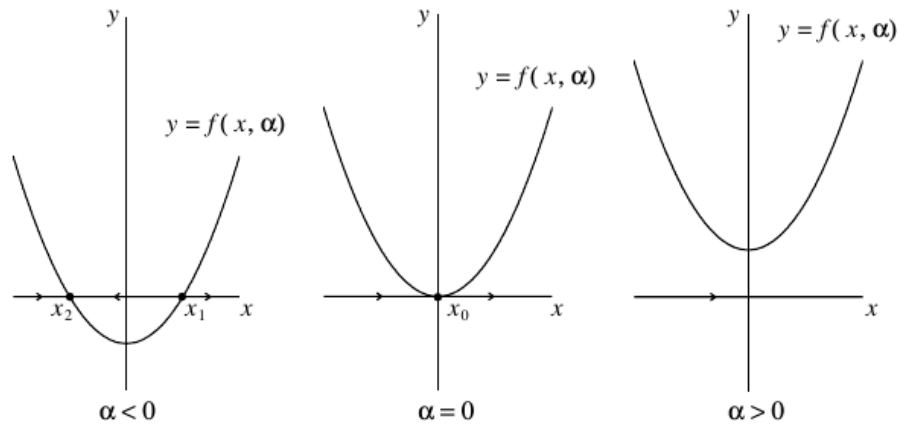


Figura 2.1: Bifurcação de sela-nó, retirada da referência [82].

Bifurcação de Hopf: também conhecida como bifurcação de Andronov-Hopf, é caracterizada por dois autovalores puramente imaginários da matriz Jacobiana no ponto de bifurcação e pode se apresentar na forma subcrítica e supercrítica. A forma normal da Hopf supercrítica é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \alpha x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Na forma supercrítica, temos um ponto de equilíbrio estável ( $\alpha < 0$ ) perdendo estabilidade no ponto de bifurcação ( $\alpha = 0$ ), enquanto um ciclo-limite estável surge ( $\alpha > 0$ ), como pode ser visto na figura 2.2.



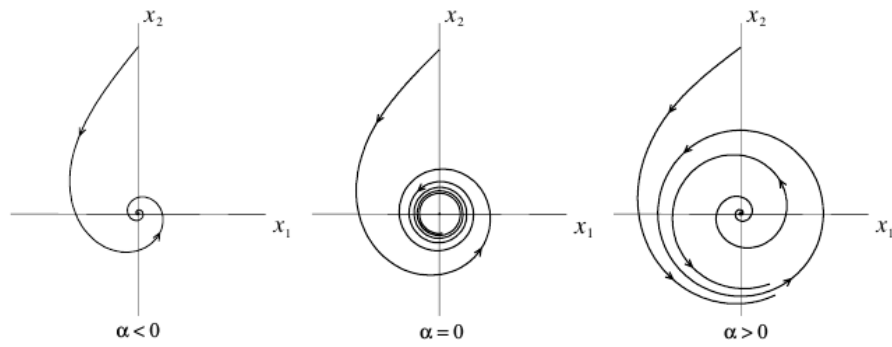


Figura 2.2: Bifurcação de Hopf supercrítica, retirada da referência [82].

A forma normal da Hopf subcrítica é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha x_1 - x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \alpha x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Na forma subcrítica, temos um ponto de equilíbrio estável ( $\alpha < 0$ ) perdendo estabilidade no ponto de bifurcação ( $\alpha = 0$ ), enquanto um ciclo-limite instável desaparece ( $\alpha > 0$ ), como pode ser visto na figura 2.3.

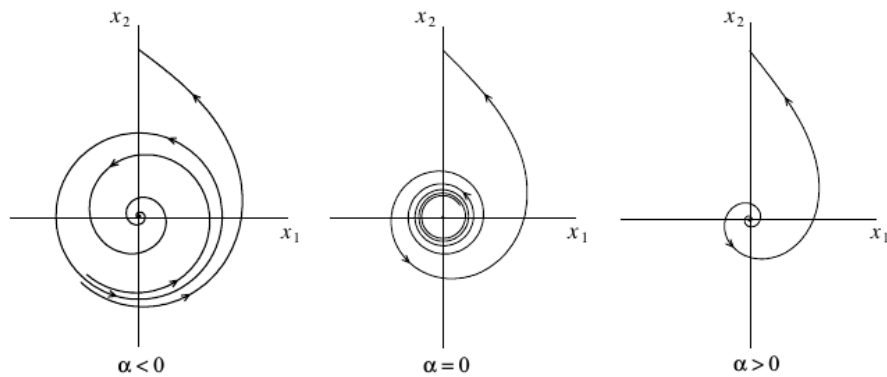


Figura 2.3: Bifurcação de Hopf subcrítica, retirada da referência [82].

### Bifurcações de codimensão um para órbitas periódicas

Dada a forma normal:

$$\dot{u} = \alpha + \sigma u^2 \quad (2.4)$$

com  $\sigma = \pm 1$ . Podemos ter as seguintes bifurcações:

Bifurcação de dobramento de período: corresponde à criação ou destruição de uma órbita periódica com o dobro do período da órbita original como pode ser visto na figura 2.4.

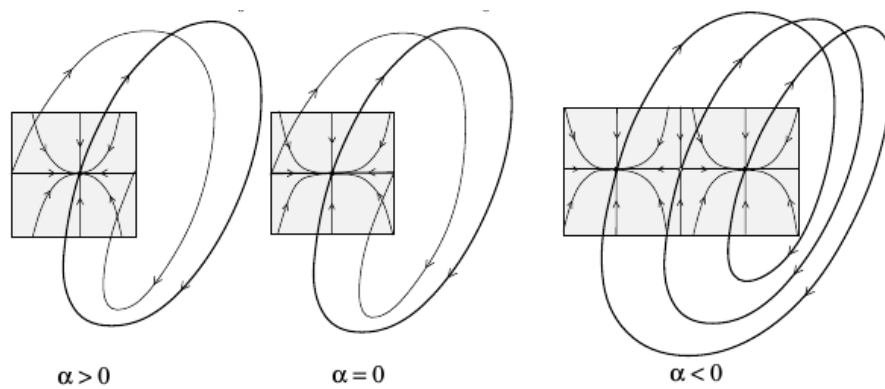


Figura 2.4: Bifurcação de dobramento de período supercrítica, figura retirada da referência [82].

Pode se apresentar na forma subcrítica e supercrítica. Na forma supercrítica, temos uma órbita periódica estável de período  $\tau$  ( $\alpha < 0$ ) perdendo estabilidade no ponto de bifurcação ( $\alpha = 0$ ), enquanto um ciclo-limite estável de período  $2\tau$  surge ( $\alpha > 0$ ), exemplificado na figura 2.5.

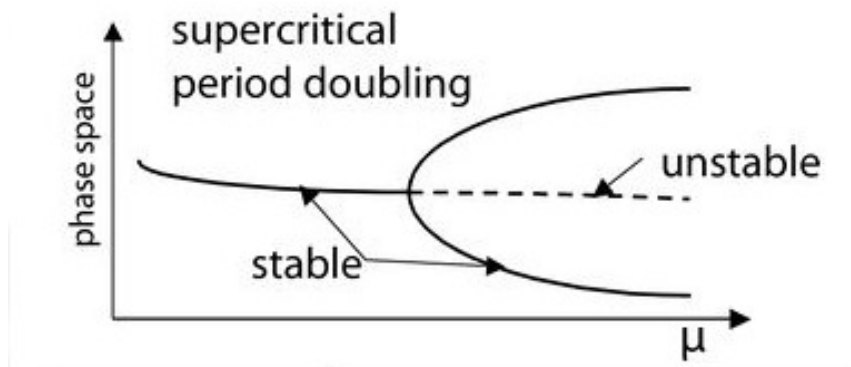


Figura 2.5: Bifurcação de dobramento de período supercrítica, figura retirada da referência [85].

Na forma subcrítica, temos uma órbita periódica estável de período  $\tau$  ( $\alpha < 0$ ) perdendo estabilidade no ponto de bifurcação ( $\alpha = 0$ ), enquanto um ciclo-limite instável de período  $2\tau$  desaparece ( $\alpha > 0$ ), exemplificado na figura 2.6.

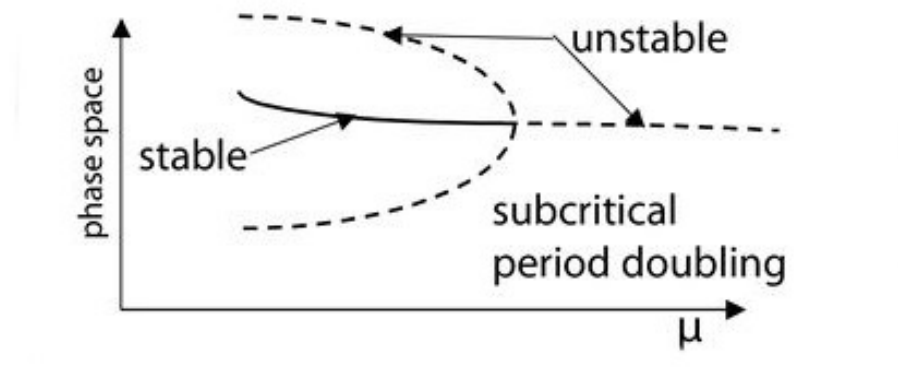


Figura 2.6: Bifurcação de dobramento de período subcrítica, retirada da referência [85].

Em geral, após o primeiro dobramento, pode surgir uma série de  $n$  duplicações com período  $2^n\tau$ . Este ciclo limite de período  $2\tau$  pode se tornar instável e dar lugar a um novo ciclo limite de período  $4\tau$ . Esse processo de dobramento de período pode continuar até o período se tornar infinito, com a trajetória nunca se repetindo, portanto, tornando o regime caótico. Esse processo de dobramentos é conhecido como rota para o caos via duplicação de período ou cenário de Feigenbaum.

Bifurcação de sela-nó: apresenta dois ciclo limites, um estável e um instável ( $\alpha < 0$ ), que colidem no ponto de bifurcação ( $\alpha = 0$ ), e desaparecem após a bifurcação ( $\alpha > 0$ ), como pode ser visto na figura 2.7. É o processo análogo ao caso para o ponto de equilíbrio.

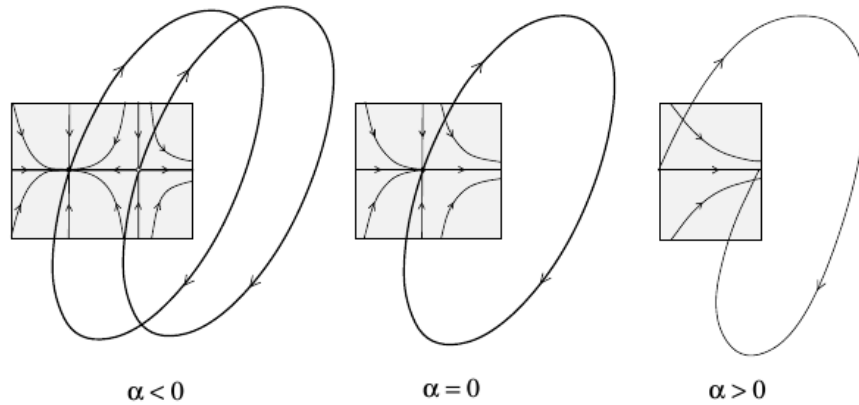


Figura 2.7: Bifurcação de sela-nó para órbitas periódicas, retirada da referência [82].

Bifurcação de Torus: também conhecida como bifurcação de Hopf secundária para sistemas a tempo contínuo e Neimark-Sacker para mapas (sistema a tempo discreto), corresponde ao aparecimento de uma solução quase periódica estável ou instável, como pode ser visto na figura 2.8. Se a bifurcação for supercrítica, um ciclo limite estável ( $\alpha > 0$ ) transforma-se em um atrator quase periódico estável ( $\alpha < 0$ ), se for subcrítico, um ciclo limite instável ( $\alpha > 0$ ) transforma-se em um atrator quase periódico instável ( $\alpha < 0$ ).

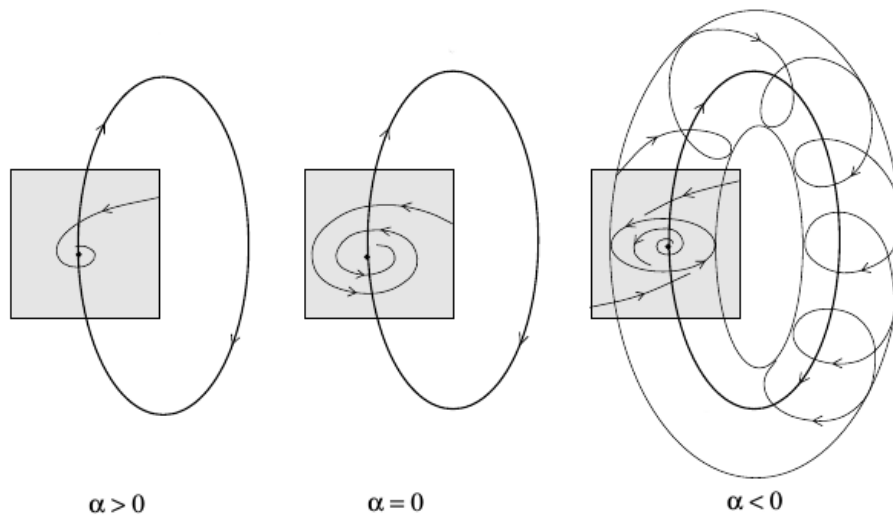


Figura 2.8: Bifurcação de sela-nó para órbitas periódicas, retirada da referência [82].

### Bifurcações de codimensão dois

Bifurcação de cúspide: caracterizada por um autovalor nulo da matriz Jacobiana no ponto de bifurcação e sem o coeficiente quadrático da bifurcação de sela-nó. A forma normal é dada por:

$$\dot{\eta} = \beta_1 + \beta_2\eta + s\eta^3 \quad (2.5)$$

onde  $s = \pm 1$ . O ponto de bifurcação de cúspide é o ponto em que dois ramos da curva de bifurcação de sela-nó se encontram tangencialmente, formando uma parábola semicúbica, como mostrado na figura 2.9. Esta bifurcação implica a presença do fenômeno de histerese.

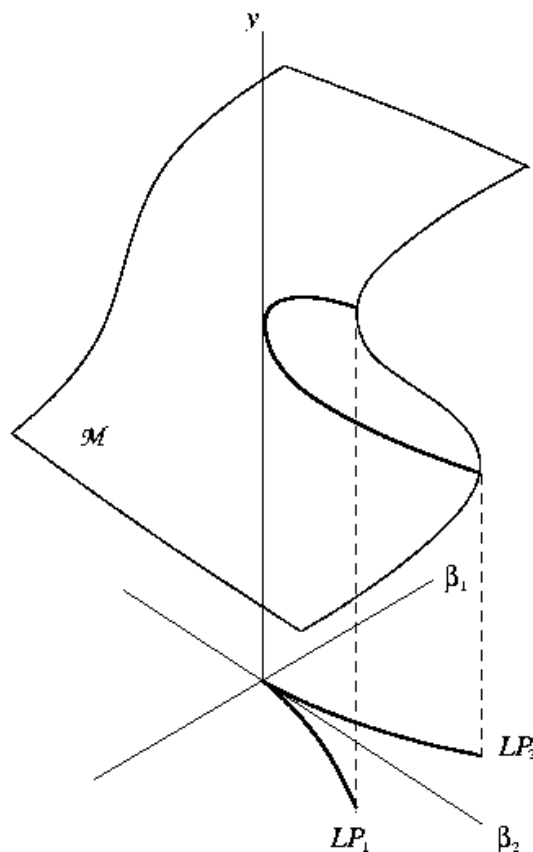


Figura 2.9: Bifurcação de cúspide, retirada da referência [86].

Bifurcação de Bautin: também conhecida como bifurcação de Hopf generalizada, é uma bifurcação de um ponto de equilíbrio, caracterizada por um par de autovalores puramente imaginários da matriz Jacobiana no ponto de bifurcação. A forma normal é dada por:

$$\dot{z} = (\beta_1 + i)z + \beta_2 z|z|^2 + sz|z|^4 \quad (2.6)$$

onde  $s = \pm 1$ . O ponto de bifurcação separa o ramo subcrítico do supercrítico da bifurcação de Hopf. A figura 2.10 mostra o que acontece na vizinhança desse ponto de bifurcação, representado pela origem (0) da figura. A curva em vermelho (LPC) representa uma curva de bifurcação de sela-nó para órbitas periódicas,  $H^+$  uma curva de bifurcação de Hopf subcrítica e  $H^-$  uma curva de bifurcação de Hopf supercrítica.

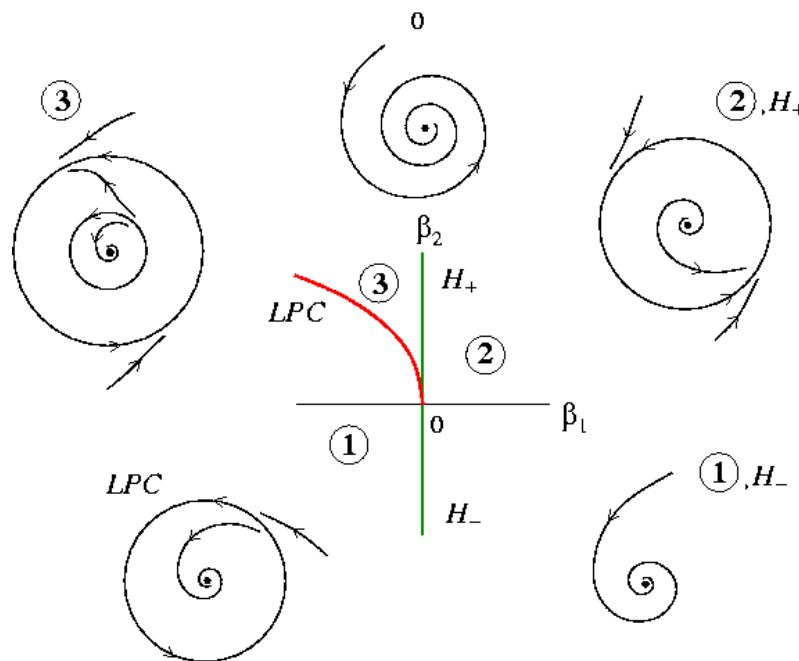


Figura 2.10: Bifurcação de Bautin, retirada da referência [87].

Na região 1, temos apenas um equilíbrio estável e subindo para a região 2 temos a criação de um ciclo limite estável. Indo para a região 3 este ciclo limite estável permanece, assim como o ponto de equilíbrio estável, só que agora um ciclo limite instável é criado. Esses dois ciclos desaparecem na curva de sela-nó de órbitas periódicas, permanecendo apenas o equilíbrio estável.

Bifurcação de Bogdanov-Takens: é uma bifurcação de um ponto de equilíbrio, caracterizada por um autovalor nulo de multiplicidade algébrica dois da matriz Jacobiana no ponto de bifurcação. A forma normal é dada por:

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_1 &= \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 &= \beta_1 + \beta_2\eta_1 + \eta_1^2 + s\eta_1\eta_2\end{aligned}\tag{2.7}$$

onde  $s = \pm 1$ . No ponto de bifurcação de Bogdanov-Takens a curva de Hopf deixa de existir. A figura 2.11 mostra o que acontece próximo do ponto de bifurcação, representado pela origem (0) da figura, onde H representa a curva de bifurcação de Hopf,  $T^+$  e  $T^-$  são os dois ramos da curva de bifurcação de sela-nó de órbitas periódicas e P é a curva de bifurcação de órbitas homoclínicas. Para valores próximos do ponto de bifurcação, o sistema tem dois equilíbrios que colidem e desaparecem via uma bifurcação de sela-nó (região 1). Por outro lado, o equilíbrio de nó (região 2) sofre uma bifurcação de Hopf gerando um ciclo limite (região 3), que degenera em uma órbita homoclínica para a sela e desaparece via uma bifurcação homoclínica de sela (região 4).

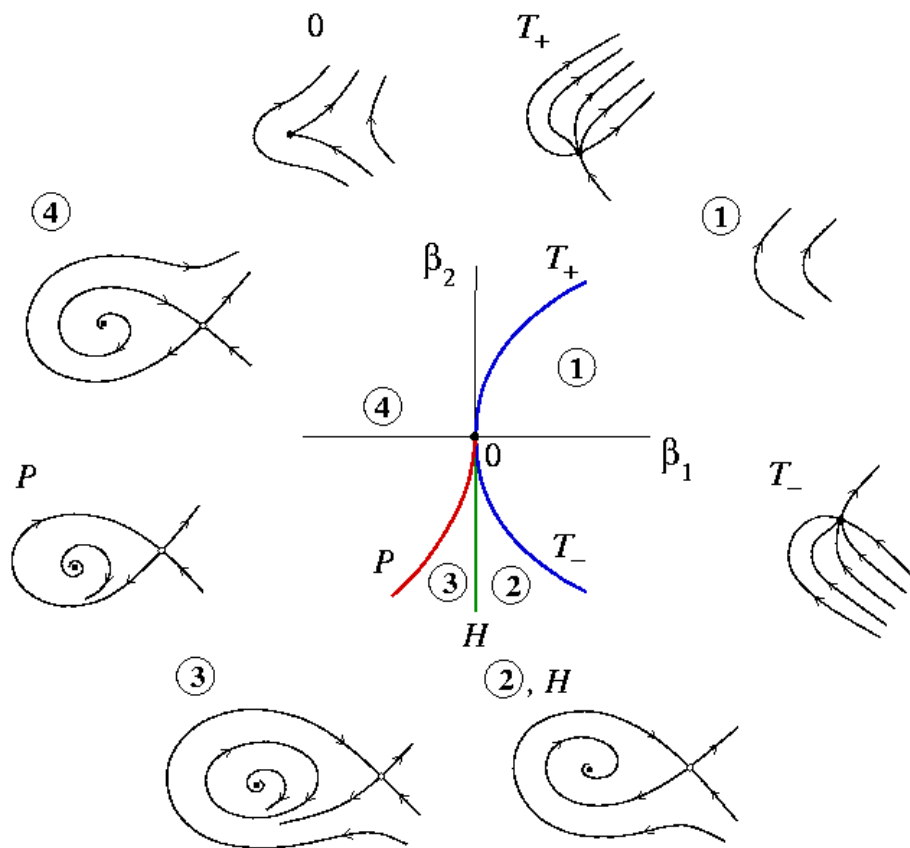


Figura 2.11: Bifurcação de Bogdanov Takens, retirada da referência [88].

Bifurcação de fold-Hopf: também conhecida como bifurcação zero-Hopf, Hopf sela-nó ou Gavrilov-Guckenheimer, é uma bifurcação de um ponto de equilíbrio, caracterizada por um autovalor nulo e um par de autovalores puramente imaginários da matriz Jacobiana no ponto de bifurcação. A forma normal em coordenadas polares é dada por:

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \beta_1 + \xi^2 + s\rho^2 \\ \dot{\rho} &= \rho(\beta_2 + \theta\xi + \xi^2)\end{aligned}\tag{2.8}$$

onde  $s = \pm 1$  e  $\theta$  pode assumir valores negativos e positivos, possibilitando dessa maneira quatro configurações diferentes:  $s = 1$  e  $\theta < 0$ ,  $s = 1$  e  $\theta > 0$ ,  $s = -1$  e  $\theta < 0$  e  $s = -1$  e  $\theta > 0$ . Na referência [82] pode ser encontrado em detalhes o que acontece na vizinhança do ponto de bifurcação em cada caso. De maneira geral, no ponto de bifurcação ocorre uma intersecção tangencial de curvas de bifurcações de sela-nó e de Hopf.



### 2.2.3 Expoentes de Lyapunov

O expoente de Lyapunov caracteriza os diferentes comportamentos que o sistema pode apresentar e descreve a taxa com a qual dois pontos próximos no espaço de fases se aproximam ou se afastam. Para definir o expoente de Lyapunov, vamos partir da definição utilizada na referência [83]. Seja um sistema de  $n$  equações diferenciais ordinárias, considera-se uma hiper-esfera de condições iniciais centrada num ponto  $\vec{x}(t_0)$ , e analisa-se a evolução dela no tempo. Considerando que o raio inicial  $d_j(t_0)$  varie exponencialmente no tempo ao longo da  $j$ -ésima dimensão ( $j = 1, \dots, n$ ), temos:

$$d_j(t) = d_j(t_0)e^{\lambda_j(t-t_0)}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.9)$$

Essa relação pode ser reescrita como:

$$\lambda_j = \frac{\ln[d_j(t)/d_j(t_0)]}{t - t_0}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.10)$$

Para cada direção no espaço de fases é associado um expoente de Lyapunov  $\lambda_j$ , se o somatório dos expoentes de Lyapunov for negativo, o sistema é dissipativo. Para sistemas com  $N$  dimensões existem  $N$  expoentes de Lyapunov associados a cada direção e podemos obter os seguintes tipos de atratores:

- ponto de equilíbrio: tem-se  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_j < 0$ , já que a hiper esfera deve se contrair ao longo das  $N$  direções do espaço de fases, a fim de que a trajetória convirja para o ponto;
- ciclo limite: tem-se  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2, \dots, \lambda_n < 0$ , sendo que o expoente nulo corresponde a direção ao longo da trajetória fechada;
- torus  $d$ -dimensional: tem-se no máximo  $\lambda_1 < 0$  e  $\lambda_2, \dots, \lambda_d = 0$ , caracterizando um torus  $d$ -dimensional, e no mínimo  $\lambda_1, \lambda_2 = 0$  e  $\lambda_3, \dots, \lambda_d < 0$ , caracterizando um torus bidimensional, sendo  $d = N - 1$ , de modo que as trajetórias atratoras situam-se sobre uma superfície;
- atrator caótico: tem-se um expoente maior que zero e um nulo, e o restante negativo, de modo que a soma de todos seja menor que zero. O expoente positivo está associado a dependência sensível às condições iniciais.
- atrator hipercaótico: tem-se pelo menos dois expoentes maior que zero e um nulo, e

o restante negativo, de modo que a soma de todos seja menor que zero. A dimensão mínima que um sistema deve ter para poder apresentar dinâmica hipercaótica é 4.

## 2.3 Metodologia

Para descrever a dinâmica de um laser utilizamos técnicas de continuação numérica e integração direta, de modo a obter uma melhor compreensão dos fenômenos que aparecem em nosso modelo. Por um lado, com a continuação numérica conseguimos descrever soluções instáveis, descrever regiões multiestáveis em um único diagrama e identificar os tipos de bifurcação que aparecem com poucos recursos computacionais. Por outro lado, com a integração direta conseguimos localizar as soluções caóticas que não são possíveis de serem obtidas com a continuação numérica. Porém, essa metodologia demanda muito mais recurso computacional. Abaixo faremos uma descrição mais detalhada dos métodos utilizados para obtenção dos resultados da dissertação.

### 2.3.1 Integração direta

Como vimos em seções anteriores, os parâmetros do sistema desempenham um papel importante na dinâmica do sistema. Esta influência dos parâmetros na dinâmica do sistema pode ser estudada ao variar dois parâmetros, para isso, construímos espaços de parâmetros, que consistem num diagrama de fases com a variação de dois parâmetros e uma escala de cores que representam a estimativa numérica dos expoentes de Lyapunov. A análise da dinâmica por meio da codificação de cores do maior expoente de Lyapunov já é bem conhecida [89, 90], porém, utilizaremos a metodologia introduzida em 2008 por Bonatto [91]. Ela possibilita que em um mesmo diagrama tenhamos informações do primeiro e segundo maiores expoentes de Lyapunov, podendo assim identificar curvas de bifurcações no espaço de parâmetros e ainda obter informações de como o expoente de Lyapunov varia em regiões periódicas.

Para a construção dos espaços de parâmetros, as equações diferenciais são resolvidas numericamente utilizando o método de Runge-Kutta padrão de quarta ordem com passo fixo igual a 0,1 e os expoentes de Lyapunov são computados utilizando o método proposto por Wolf *et al.* [92], ambos utilizando a linguagem fortran. O valor do passo de integração foi determinado por meio de alguns testes de convergência, monitorando a evolução do sistema por meio de séries temporais. Além disso, as equações foram integradas descartando um transiente de 35000 passos de integração e utilizando 700000 passos

de integração para a análise da série temporal. Por fim, como comentado acima, a análise da estabilidade é feita estudando o comportamento do sistema ao variar dois parâmetros. Para isso, essa variação foi feita em uma malha  $M \times M$ , enquanto os outros permaneciam fixos, sendo  $M=600$ .

Os diagramas de estabilidade foram produzidos ao variar dois parâmetros de injeção e para a escala de cores, testando o primeiro expoente de Lyapunov, se ele fosse zero, o segundo expoente de Lyapunov assume o seu lugar. Dessa maneira, podemos localizar as curvas de bifurcações no espaço de parâmetros e ainda obter informações do expoente de Lyapunov nas regiões periódicas. Após estabelecer os valores de Lyapunov associados a variação dos parâmetros, determina-se o maior e o menor valor dos expoentes, atribuindo uma cor para cada um. Os valores intermediários assumem cores de modo a formar um gradiente entre as cores atribuídas para o maior e menor valor de expoente obtido. Essa codificação de cores é de extrema importância, a partir dela poderemos discriminar as condutas caóticas e não caóticas. Em nossos diagramas, atribuímos a cor vermelha para o maior expoente de Lyapunov e a branca para o menor. O expoente nulo ganhou uma cor específica também, foi associado a ele a cor preta, dessa maneira, é possível localizar as curvas de bifurcações no espaço de parâmetros.

Quanto às condições iniciais, começamos de um valor arbitrário para cada variável e integramos o sistema, sempre tomando o último ponto da integração como condição inicial para um novo valor de parâmetro. Essa técnica é conhecida como “perseguição ao atrator”. Caso não seguissemos o atrator, a mesma condição inicial seria utilizada para todos os novos valores de parâmetros durante a integração. Optamos pela técnica de seguir o atrator, pois dessa forma evitamos um tempo gasto de transiente que teria que ser computado toda vez que um novo parâmetro fosse integrado, portanto, o resultado é uma convergência melhor para o expoente de Lyapunov. Um ponto de que deve ser ressaltado aqui, é que em regiões de multiestabilidade, apenas um dos atratores é identificado, tendo em vista que, a partir do momento que o sistema converge para um atrator, ele continua nele durante toda a integração. Logo, para obter-se todos os atratores do sistema, deve-se começar de condições iniciais diferentes, resultando em novos espaços de parâmetros. Veremos na seção 4 que uma maneira de discriminar as regiões de multiestabilidade é integrando o sistema incrementando ou decrementando os valores dos parâmetros.

### 2.3.2 Continuação numérica

Como enfatizamos na subseção anterior, não é possível seguir curvas instáveis no espaço de parâmetros, descrever regiões multiestáveis num mesmo diagrama e, por mais que localizemos as bifurcações, não é possível determinar que tipo de bifurcação ela é com integração direta. Dessa forma, utilizamos continuação numérica para contornar esse problema. Dentre diversos métodos, optamos trabalhar com o programa AUTO. Conforme a referência [93] pág. 19, o programa pode:

- Computar famílias de órbitas periódicas, sejam elas estáveis ou instáveis e, computar os multiplicadores de Floquet (autovalores do sistema), que determinam a estabilidade ao longo dessas famílias.
- Localizar dobras, pontos de ramificações, bifurcações de dobramento de período e bifurcações toroidas ao longo de uma família de soluções periódicas;
- Continuar dobras, bifurcações de dobramento de período e bifurcações toroidas em dois parâmetros;
- Continuar órbitas de pontos fixos em dois parâmetros;
- Continuar pontos de ramificações em dois parâmetros que são caracterizados por simetrias específicas do problema. Em problemas não simétricos é necessários três parâmetros para continuar o ponto de ramificação;
- Fazer cada uma das opções acima para rotações, ou seja, quando alguns dos componentes da solução periódica tem um ganho de fase de um múltiplo de  $2\pi$ ;
- Seguir curvas de órbitas homoclínicas e detectar e continuar diversas bifurcações de codimensão dois;
- Localizar extremos de um objetivo funcional integral ao longo de uma família de soluções periódicas e sucessivamente continuar tais extremos em mais parâmetros;
- Calcular curvas de soluções em  $[0,1]$ , sujeitas a limites não-lineares gerais e condições integrais. As condições não precisam ser separadas, isto é, podem envolver ambas condições simultaneamente;
- Determinar dobras e pontos de ramificações ao longo de famílias de bifurcações para o problema de valores de contorno acima.

---

Para utilizar tais recursos, devemos iniciar de uma solução estacionária ou periódica e então escolher uma direção de variação do parâmetro. O programa evolui até encontrar uma bifurcação e, a partir dela, é possível segui-la ao longo do espaço de parâmetro, possibilitando assim seguir as curvas instáveis. Como o programa calcula os autovalores da matriz Jacobiana também é possível determinar o tipo de bifurcação. Descrever as regiões multiestáveis também é possível porque podemos fazer uma superposição de curvas no espaço de parâmetros. Para o nosso modelo utilizamos o programa para seguir curvas de pontos fixos e órbitas periódicas em dois parâmetros, podendo assim determinar as bifurcações de codimensão um e dois presentes na dinâmica do sistema.

# Laser de estado sólido com realimentação óptica de frequência modificada

*Este capítulo está organizado da seguinte maneira: na próxima seção apresentamos a configuração experimental de um modelo de laser de estado sólido, detalhando as principais características dele e na sequência apresentamos o modelo teórico correspondente, introduzindo as equações diferenciais que modelam o laser de estado sólido com realimentação óptica que investigamos.*

## 3.1 Configuração experimental

A implementação experimental de um laser de estado sólido sujeito a uma realimentação óptica de frequência modificada é reportada em diversos trabalhos na literatura [47–49, 94]. Nestes trabalhos que mencionamos, o laser utilizado tem como meio ativo um cristal de Nd:YAG (granada de ítrio e alumínio dopados com Neodímio) e é bombeado por um laser de diodo. Além disso, a injeção é feita injetando o campo  $e_x$  em  $e_y$ . Os campos  $e_x$  e  $e_y$  polarizados ao longo de  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  com autofrequências  $\nu_x$  e  $\nu_y$  respectivamente, oscilam simultaneamente. A potência típica emitida pelo laser é de  $10mW$  quando bombeado por  $500mW$ . Além disso, o campo reinjetado tem sua frequência modificada em  $f_{AO} \approx 100MHz$  usando um modulador acústico óptico (AOM, também conhecida como Bragg Cell). A figura 3.1, mostra esquematicamente a configuração experimental do modelo.

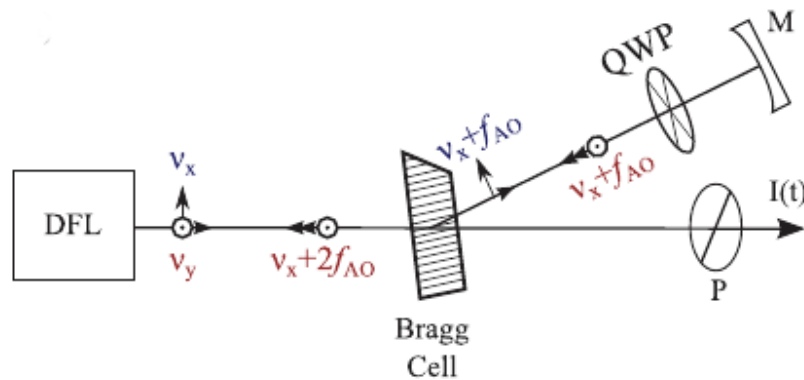


Figura 3.1: Configuração experimental. QWP: do inglês, quarter-wave plate, é uma placa de quarto de onda; M: do inglês mirror, é um espelho e P: é um polarizador. Figura retirada de [94]

A cavidade de realimentação, contém uma célula Bragg, movida por um sintetizador de rádio frequência (RF) estável, que fornece uma referência de fase externa. Em seguida, uma placa de um quarto de onda a  $45^\circ$  seguida por um espelho gira as polarizações em  $x$  e  $y$ , e finalmente, o feixe de laser é reinjetado na cavidade do laser depois de atravessar novamente a célula de Bragg. Como resultado, temos o campo polarizado em  $\hat{x}$  oscilando com uma frequência de  $\nu_y + 2f_{AO}$  e o campo polarizado em  $\hat{y}$  oscilando com uma frequência de  $\nu_x + 2f_{AO}$  sendo reinjetado no laser. Eles notaram que o campo reinjetado em  $e_x$  não tem efeito na dinâmica pois a diferença entre as frequências  $\nu_x$  e  $\nu_y + 2f_{AO}$  é muito grande, dessa forma, como já citado anteriormente, temos apenas o campo  $e_x$  sendo reinjetado em  $e_y$  com a frequência descrita acima. Por fim, a saída do laser é detectada por um fotodiodo rápido, responsável por converter a luz em corrente elétrica.

## 3.2 Modelo teórico

O modelo final de equações partiu das equações de Lang-Kobayashi, introduzidas na referência [47], que é composto por 6 equações diferenciais ordinárias não lineares acopladas:

$$\begin{aligned}\frac{dE_x}{dt} &= [-\Gamma_x + \kappa(n_x + \beta n_y)]\frac{E_x}{2} + 2i\pi\nu_x E_x + \tilde{E}_x, \\ \frac{dE_y}{dt} &= [-\Gamma_y + \kappa(n_y + \beta n_x)]\frac{E_y}{2} + 2i\pi\nu_y E_y + \gamma_e E_x(t - \tau)e^{4i\pi f_{AO}y + i\psi} + \tilde{E}_y, \\ \frac{dn_{x,y}}{dt} &= \gamma_{\parallel} P_{x,y} - [\gamma_{\parallel} + \zeta(|E_{x,y}|^2 + \beta|E_{y,x}|^2)]n_{x,y} + \tilde{n}_{x,y},\end{aligned}\quad (3.1)$$

Nas equações 3.1,  $E_{x,y}$  são os dois modos do campo laser e  $n_{x,y}$  as duas inversões de população correspondente. O parâmetro  $\Gamma_{x,y}$  representa o tempo de vida da cavidade,  $\gamma_{\parallel}$  é proporcional ao tempo de vida da inversão populacional,  $\kappa$  e  $\zeta$  são os coeficientes de acoplamento átomo-campo respectivamente,  $\beta$  corresponde à saturação cruzada no meio ativo e  $P_{x,y}$  representa as taxas de bombeamento. Além disso,  $\tilde{E}_{x,y}$  e  $\tilde{n}_{x,y}$  são os termos de ruídos representando as emissões espontâneas e  $\tau$  representa o tempo de atraso (delay). Para esse modelo, foram assumidas taxas de perdas e bombeamento idênticas, ou seja,  $\Gamma_x = \Gamma_y = \gamma$  e  $P_x = P_y = P$ . Os termos de ruídos  $\tilde{E}_{x,y}$  e  $\tilde{n}_{x,y}$  que representam as emissões espontâneas foram negligenciados, visto que estamos interessados apenas em estudar a dinâmica determinística do sistema. Além disso, o tempo de atraso  $\tau$  também foi negligenciado, já que a dinâmica do sistema envolve uma escala de tempo muito mais lenta. Note que esta é uma boa aproximação para lasers de estado sólido, mas em lasers de semicondutores este não seria o caso, visto que a dinâmica desses lasers envolvem escalas de tempo muito mais rápidas. Dessa forma, as equações que descrevem o sistema podem ser escritas como:



$$\begin{aligned}
\frac{dE_x}{dt} &= [-\gamma + \kappa(n_x + \beta n_y)] \frac{E_x}{2} + 2i\pi\nu_x E_x, \\
\frac{dE_y}{dt} &= [-\gamma + \kappa(n_y + \beta n_x)] \frac{E_y}{2} + 2i\pi\nu_y E_y + \gamma_e E_x e^{4i\pi f_{A0} y + i\psi}, \\
\frac{dn_{x,y}}{dt} &= \gamma_{\parallel} P - [\gamma_{\parallel} + \zeta(|E_{x,y}|^2 + \beta|E_{y,x}|^2)] n_{x,y},
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Podemos reescrever as equações acima de uma maneira mais conveniente para integração numérica (ver apêndice A):

$$\begin{aligned}
\frac{de_x}{ds} &= \frac{(m_x + \beta m_y)}{2(1 + \beta)} e_x, \\
\frac{de_y}{ds} &= \frac{(m_y + \beta m_x)}{2(1 + \beta)} e_y + i\Delta e_y + \Gamma e_x,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\frac{dM_{x,y}}{ds} = 1 - (|e_{x,y}|^2 + \beta|e_{y,x}|^2) - \epsilon M_{x,y} [1 + (\eta - 1) \times (|e_{x,y}|^2 + \beta|e_{y,x}|^2)].$$

Onde  $e_{x,y}$  e  $M_{x,y}$  são os campos e as inversões da população reescaladas. O tempo  $s$  é reescalado e sua relação com o tempo físico  $t$  é  $s = \Omega_r t = 2\pi f_r t$ , onde  $f_r$  representa a frequência de oscilação de relaxação do sistema. Nessas equações,  $e_{x,y}$  e  $M_{x,y}$  são os novos campos laser e inversão de população, respectivamente. Quanto aos parâmetros, temos que:

- $\eta$  representa o parâmetro de bombeamento, que controla o ganho do laser;
- $\epsilon$  é o tempo de vida da inversão, ou seja, o tempo que o elétron excitado leva para decair ao seu estado de energia mais baixa;
- $\beta$  representa a razão da saturação cruzada e a auto saturação no meio ativo. A saturação cruzada representa o quanto um campo laser influencia o outro, enquanto que a autosaturação quanto ele influencia ele mesmo. As duas estão conectas por meio da constante de acoplamento de Lamb's, como mostrado e calculado na referência [95]. Essa constante governa os regimes de simultaneidade e bistabilidade em lasers de dois modos. Como é explicado em detalhes na referência [45], pág.

125, dependendo do valor dessa constante podemos ter três tipos de acoplamento: acoplamento fraco, neutro e forte. No acoplamento fraco temos  $\beta < 1$ , no neutro  $\beta = 1$  e no forte  $\beta > 1$ . Em nosso trabalho, trabalhamos com o caso de acoplamento fraco.

- $\Delta$  é a dessintonização de frequência, que é a diferença de frequência entre  $\nu_x$  e  $\nu_y$ . Para o modelo que estudamos,  $\Delta = (\nu_y - \nu_x - 2f_{AO})/\Omega_r$ , dessa maneira, escolhendo  $f_{AO}$  da ordem de  $100MHz$ , temos que  $\Delta$  será da ordem da frequência de oscilação de relaxação do sistema. Além disso, o parâmetro  $\Delta$  é adimensional, visto que foi normalizado em função de  $\Omega_r$ .
- $\Gamma$  é a intensidade da injeção.

Os parâmetros que descrevem a intensidade da injeção  $\Gamma$ , a dessintonização  $\Delta$  e o bombeamento  $\eta$  podem ser diretamente controlados em um experimento real, atuando como parâmetros de controle. Em nosso trabalho, manteremos  $\eta$  fixo enquanto variamos os parâmetros  $\Gamma$  e  $\Delta$ , assim como a maioria dos trabalhos.

Podemos escrever o conjunto de equações 3.3 em termos de suas componentes reais e imaginárias.

$$e_x = e_{xr} + ie_{xi}, \quad (3.4)$$

$$e_y = e_{yr} + ie_{yi}, \quad (3.5)$$

onde  $e_{xr}$ ,  $e_{yr}$  e  $e_{xi}$ ,  $e_{yi}$  os campos em  $x$  e  $y$  com suas partes reais e imaginárias, respectivamente.

Dessa forma, podemos reescrever as equações 3.3 da seguinte maneira:

$$\frac{de_{xr}}{ds} = \frac{m_x + \beta m_y}{2(1 + \beta)} e_{xr},$$

$$\frac{de_{xi}}{ds} = \frac{m_x + \beta m_y}{2(1 + \beta)} e_{xi},$$

$$\frac{de_{yr}}{ds} = \frac{m_y + \beta m_x}{2(1 + \beta)} e_{yr} - \Delta e_{yi} + \Gamma e_{xr},$$

(3.6)

$$\frac{de_{yi}}{ds} = \frac{m_y + \beta m_x}{2(1 + \beta)} e_{yi} + \Delta e_{yr} + \Gamma e_{xi},$$

$$\frac{dM_x}{ds} = 1 - (|e_x|^2 + \beta |e_y|^2) - \epsilon M_x [1 + (\eta - 1) \times (|e_x|^2 + \beta |e_y|^2)].$$

$$\frac{dM_y}{ds} = 1 - (|e_y|^2 + \beta |e_x|^2) - \epsilon M_y [1 + (\eta - 1) \times (|e_y|^2 + \beta |e_x|^2)].$$

Como mostramos no apêndice B, o campo em x tem a fase constante, dessa maneira podemos considerar, sem perda de generalidade, que  $e_x$  é puramente real, de modo que a fase em y corresponde à fase relativa entre os dois osciladores. Dessa maneira, em nosso trabalho, reduzimos a análise de 6 equações para 5, desconsiderando a componente imaginária do campo em x. As equações 3.7 mostram o conjunto de equações que utilizamos para analisar o modelo de laser.

$$\begin{aligned}\frac{de_x}{ds} &= \frac{m_x + \beta m_y}{2(1 + \beta)} e_x, \\ \frac{de_{yr}}{ds} &= \frac{m_y + \beta m_x}{2(1 + \beta)} e_{yr} - \Delta e_{yi} + \Gamma e_x, \\ \frac{de_{yi}}{ds} &= \frac{m_y + \beta m_x}{2(1 + \beta)} e_{yi} + \Delta e_{yr},\end{aligned}\tag{3.7}$$

$$\frac{dM_x}{ds} = 1 - (e_x^2 + \beta |e_y|^2) - \epsilon M_x [1 + (\eta - 1) \times (e_x^2 + \beta |e_y|^2)].$$

$$\frac{dM_y}{ds} = 1 - (|e_y|^2 + \beta e_x^2) - \epsilon M_y [1 + (\eta - 1) \times (|e_y|^2 + \beta e_x^2)].$$

O conjunto de equações 3.7 é extremamente útil para se utilizar na integração numérica, mas eles também podem ser decompostos em amplitude e fase do laser (ver apêndice B):

$$\begin{aligned}\frac{1}{\gamma} \frac{dI_x}{dt} &= (N_x + \beta N_y - 1) I_x, \\ \frac{1}{\gamma} \frac{dI_y}{dt} &= (N_y + \beta N_x - 1) I_y + 4\pi K \sqrt{I_x I_y} \cos \phi, \\ \frac{1}{\gamma} \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi}{dt} &= \Delta - K \sqrt{\frac{I_x}{I_y}} \sin \phi, \\ \frac{1}{\gamma} \frac{dN_{x,y}}{dt} &= \epsilon \left[ \frac{\eta}{1 + \beta} - (1 + I_{x,y} + \beta I_{y,x}) N_{x,y} \right].\end{aligned}\tag{3.8}$$

Onde  $I_x$  e  $I_y$  representam a intensidade de cada modo do laser, definidas como:

$$\begin{aligned}I_x &= e_x^2, \\ I_y &= e_{yr}^2 + e_{yi}^2.\end{aligned}\tag{3.9}$$

A intensidade total é definida como:

$$I = |e_x + e_y|^2 = e_x^2 + e_{yr}^2 + e_{yi}^2 + 2 \times e_x \times e_{yr} \quad (3.10)$$

Ainda,  $\phi$  representa a fase do laser e  $N_{x,y}$  são as duas inversões de população reescaladas. Como comentamos, o conjunto de equações 3.3 escritas em tempos do campo laser são mais simples para a integração numérica do que o conjunto de equações 3.8, porém, as equações descritas em termos da intensidade e fase do laser são muito úteis para obter a frequência de oscilação de relaxação do sistema.

### 3.2.1 Cálculo da frequência de oscilação de relaxação

Vamos analisar a estabilidade do sistema de equações 3.8 utilizando a técnica de estabilidade linear [96]. De modo a simplificar os cálculos, vamos determinar a frequência de oscilação de relaxação do sistema de equações 3.8 operando livremente, ou seja, os parâmetros de acoplamento  $\Delta$  e  $\Gamma$  são nulos. Além disso, vamos supor  $\beta = 0$ , já que como pode ser visto na figura 3.2, cada modo da intensidade do laser, assim como a intensidade total, relaxam da mesma maneira. Na figura 3.2,  $I_x$  e  $I_y$  mostram o comportamento de cada modo do laser sem injeção óptica, enquanto que  $I$  mostra o comportamento do laser com os dois modos interagindo devido a injeção óptica. Note que, a magnitude das intensidade modifica-se, porém o cenário dinâmico não.

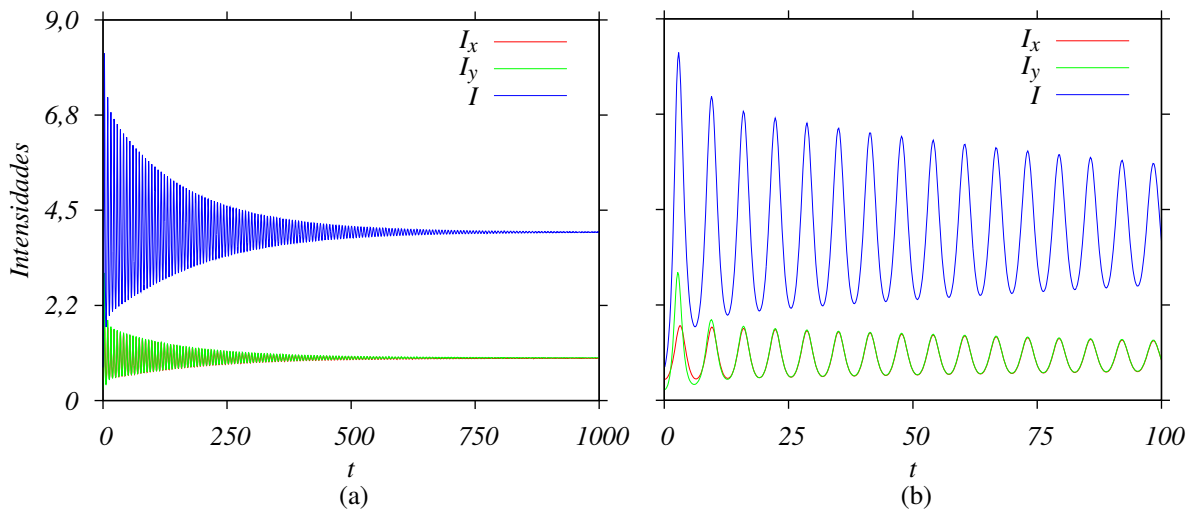


Figura 3.2: (a) Variação das intensidade  $I_x$ ,  $I_y$  e a total  $I$  no tempo. (b) Ampliação da figura (a).

Dessa forma, o conjunto de equações 3.8 simplificam-se à:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \gamma(N - 1)I, \\ \dot{N} &= \gamma_{\parallel}[\eta - (1 + I)N], \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde o ponto representa a derivada temporal no tempo sem a normalização.

Inicialmente devemos encontrar os pontos fixos do sistema  $I_0$  e  $N_0$ , para isso, igualamos o conjunto de equações 3.11 à zero:

$$\begin{aligned} 0 &= (N - 1)I, \\ 0 &= \eta - (1 + I)N. \end{aligned} \quad (3.12)$$

A solução trivial é dada por:

$$I_0 = 0, N_0 = \eta. \quad (3.13)$$

Neste caso, a solução é instável, o laser está desligado e a inversão de população é igual ao bombeamento. Outra possível solução é:

$$\begin{aligned} N_0 &= 1 \\ I_0 &= \eta - 1 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Determinado os valores do ponto fixo, podemos determinar a frequência de oscilação de relaxação do sistema, para isso, utilizaremos o método de estabilidade linear, em que se supõe pequenas perturbações em torno do ponto de equilíbrio:

$$\begin{aligned} I &= I_0 + \delta I, \\ N &= N_0 + \delta N. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Substituindo o conjunto de equações 3.15 em 3.11:

$$\begin{aligned}\dot{\delta I} &= \gamma(N_0 + \delta N - 1)(I_0 + \delta I), \\ \dot{\delta N} &= \gamma_{\parallel}[\eta - (1 + I_0 + \delta I)(N_0 + \delta N)],\end{aligned}\tag{3.16}$$

Os termos cruzados  $\delta I \delta N$  serão descartados pois suas contribuições são infinitesimais. Substituindo os pontos fixos  $I_0$  e  $N_0$  encontrados:

$$\dot{\delta I} = \gamma(\eta - 1)\delta N \tag{3.17}$$

$$\dot{\delta N} = -\gamma_{\parallel}(\delta I + \eta\delta N). \tag{3.18}$$

Fazendo a segunda derivada do conjunto de equações 3.17 e substituindo a equação 3.18:

$$\ddot{\delta I} = -\gamma(\eta - 1)\gamma_{\parallel}(\delta I + \eta\delta N), \tag{3.19}$$

mas da equação 3.17 temos:

$$\delta N = \frac{\dot{\delta I}}{\gamma(\eta - 1)}, \tag{3.20}$$

então,

$$\ddot{\delta I} + \eta\gamma_{\parallel}\dot{\delta I} + \gamma\gamma_{\parallel}(\eta - 1)\delta I = 0. \tag{3.21}$$

Supondo uma solução do tipo  $\delta I = e^{\lambda}$  encontramos,

$$\lambda^2 + \eta\gamma_{\parallel}\lambda + \gamma\gamma_{\parallel}(\eta - 1) = 0, \tag{3.22}$$

cuja solução é dada por:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\eta\gamma_{\parallel}}{2} \pm \sqrt{\frac{(\eta\gamma_{\parallel})^2}{4} - \gamma\gamma_{\parallel}(\eta - 1)}. \quad (3.23)$$

Caso  $\gamma\gamma_{\parallel}(\eta - 1) < \frac{(\eta\gamma_{\parallel})^2}{4}$  o laser terá uma dinâmica super amortecida, dessa maneira, depois de uma perturbação ele retornará ao ponto estacionário sem qualquer oscilação.

Sob condições realísticas,  $\gamma\gamma_{\parallel}(\eta - 1) > \frac{(\eta\gamma_{\parallel})^2}{4}$ , de modo que a equação 3.23 será sempre da forma  $\lambda_{1,2} = -\Gamma_r \pm i\omega_r$ . Conseqüentemente, qualquer pequena perturbação na intensidade irá induzir oscilações em torno do ponto de equilíbrio  $I_0$  com frequência angular igual à:

$$\omega_r = \sqrt{\Omega_r^2 - \Gamma_r^2}. \quad (3.24)$$

Portanto, a frequência de oscilação de relaxação será:

$$\Omega_r = \sqrt{\gamma\gamma_{\parallel}(\eta - 1)}. \quad (3.25)$$

Para valores numéricos dos parâmetros iguais à  $\gamma = 2,31 \times 10^8$ ,  $\gamma_{\parallel} = 4,35 \times 10^3$  e  $\eta = 1,2$  a frequência de oscilação de relaxação tem o valor de  $\Omega_r = 4,49 \times 10^5$ . Esses valores foram os que utilizamos em nosso trabalho, retirados da referência [94].



## Resultados

*Neste capítulo apresentamos os resultados obtidos em nosso trabalho a partir da análise da dinâmica do laser no espaço de dois parâmetros de injeção. Estudamos os efeitos causados pela mudança dos parâmetros que representam o tempo de vida da inversão populacional e da saturação cruzada. Na primeira seção fazemos uma análise dos estados de equilíbrio do laser, descrevendo como estes se desestabilizam. Em seguida, analisamos as dinâmicas periódicas, quase periódicas e caóticas que encontramos, assim como as regiões de dinâmica hipercaótica, separando o estudo dessa última no estudo do que denominamos de hipercaos “fraco” e “forte”. Por fim, fizemos uma análise de uma interessante alternância de dois comportamentos determinísticos que encontramos na região hipercaótica, onde em uma o laser apresenta oscilações de Q-switching com grandes amplitudes e na outra oscilações irregulares de menor amplitude. Um estudo nessa região da estatística de eventos extremos que encontramos também foi realizada.*

### 4.1 Estados estacionários

O sistema de equações 3.7 que analisamos contém cinco parâmetros: o parâmetro de bombeamento  $\eta$ , o tempo de vida de inversão da população  $\epsilon$ , a saturação cruzada no meio ativo  $\beta$ , a intensidade da injeção  $\Gamma$  e a dessintonização  $\Delta$ . Para analisar a dinâmica desse sistema variamos os parâmetros  $\Gamma$  e  $\Delta$ , já que num modelo real eles são parâmetros que podem ser facilmente ajustados. Mesmo que o parâmetro  $\eta$  também seja facilmente ajustado em um laser real, não estudamos a influência dele nesta dissertação e em todos os casos, mantivemos fixo o valor  $\eta = 1, 2$ , mesmo valor utilizado na referência [94]. Nosso estudo foi desenvolvido analisando a influência dos parâmetros  $\epsilon$  e  $\beta$ , percebemos que estes desempenham um papel importante na dinâmica do sistema. Começaremos a análise pelo

parâmetro  $\epsilon$ .

Partindo de valores maiores do parâmetro  $\epsilon$ , temos que as oscilações das populações não contribuem muito, e o modelo assemelha-se ao caso de lasers da classe A, como pode ser visto na figura 4.1 que apresenta três espaços de parâmetros, construídos utilizando  $\beta = 0,6$ ,  $\eta = 1,2$  e  $\epsilon = 0,5$ ,  $\epsilon = 0,4$  e  $\epsilon = 0,3$  para as figuras 4.1 (a), (b) e (c) respectivamente, enquanto  $\Delta$  e  $\Gamma$  são variados. As regiões pretas representam transições dinâmicas de estados estacionários e periódicos. Dentro da região semelhante a um triângulo temos soluções de equilíbrio e fora dela soluções oscilatórias. Uma análise completa da caracterização dos pontos de equilíbrio e suas bifurcações será realizada no decorrer deste capítulo, através de técnicas de continuação numérica.

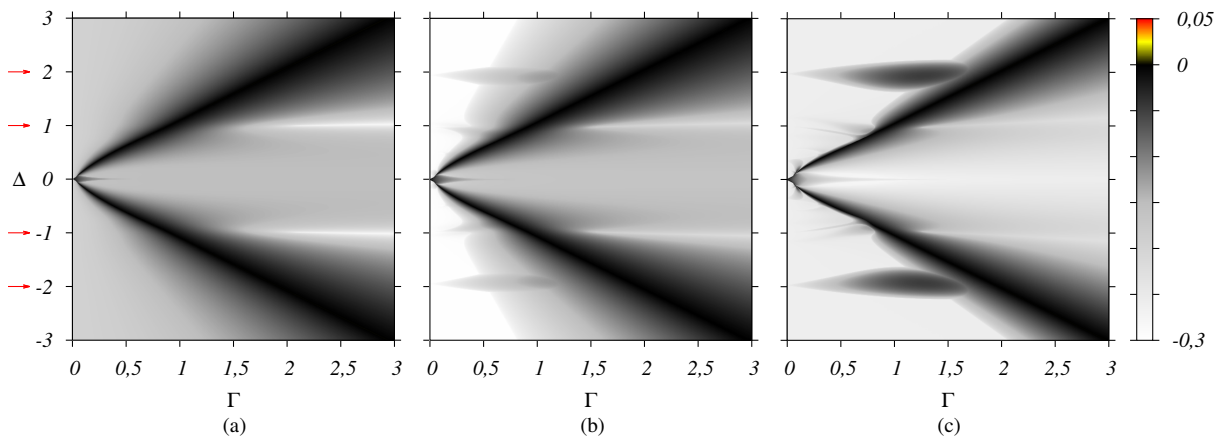


Figura 4.1: Espaço de parâmetros para  $\beta = 0,6$ ,  $\eta = 1,2$ , (a)  $\epsilon = 0,5$ , (b)  $\epsilon = 0,4$  e (c)  $\epsilon = 0,3$ . As flechas em vermelho indicam o valor do parâmetro em que as regiões de instabilidades começam a surgir. As regiões em preto representam transições dinâmicas de estados estacionários e periódicos, com as soluções estacionárias dentro da região que assemelha-se a um triângulo e as oscilatórias fora dela.

Conforme diminuimos o valor do parâmetro  $\epsilon$  o sistema vai se tornando cada vez mais instável. Enquanto que para  $\epsilon = 0,5$  não há nenhuma dinâmica complexa, para  $\epsilon = 0,4$  e  $\epsilon = 0,3$  vemos indícios, nas regiões indicadas pelas flechas em vermelho, de que curvas de bifurcação, com dinâmicas cada vez mais complexas irão surgir se diminuirmos ainda mais o valor do parâmetro, já que o expoente nessas regiões está ficando cada vez mais perto do zero, resultando regiões de cores mais escuras no espaço de parâmetros, o que indica a ocorrência de instabilidades, visto que nas bifurcações o expoente de Lyapunov é zero. Além disso, nessas regiões temos a ocorrência de ressonâncias, responsáveis pela organização dessas instabilidades nessa região ao invés de em outros locais no espaço de parâmetros.

Na figura 4.2, construímos diagramas de bifurcações para alguns valores do parâmetro  $\epsilon$  com o auxílio do programa de continuação numérica AUTO, podemos perceber que a

dinâmica do sistema é composta por três curvas de bifurcação de ponto fixo: a sela-nó, em preto, a Hopf supercrítica, em vermelho sólido, e a Hopf subcrítica em vermelho pontilhado. Além disso, dependendo o valor do parâmetro  $\epsilon$  temos pontos de bifurcação de Bogdanov-Takens e pontos de bifurcação de Hopf generalizada. Para os valores de  $\epsilon$  utilizados aqui, todos os diagramas contém a bifurcação de Bogdanov-Takens, mostrado na figura 4.3.

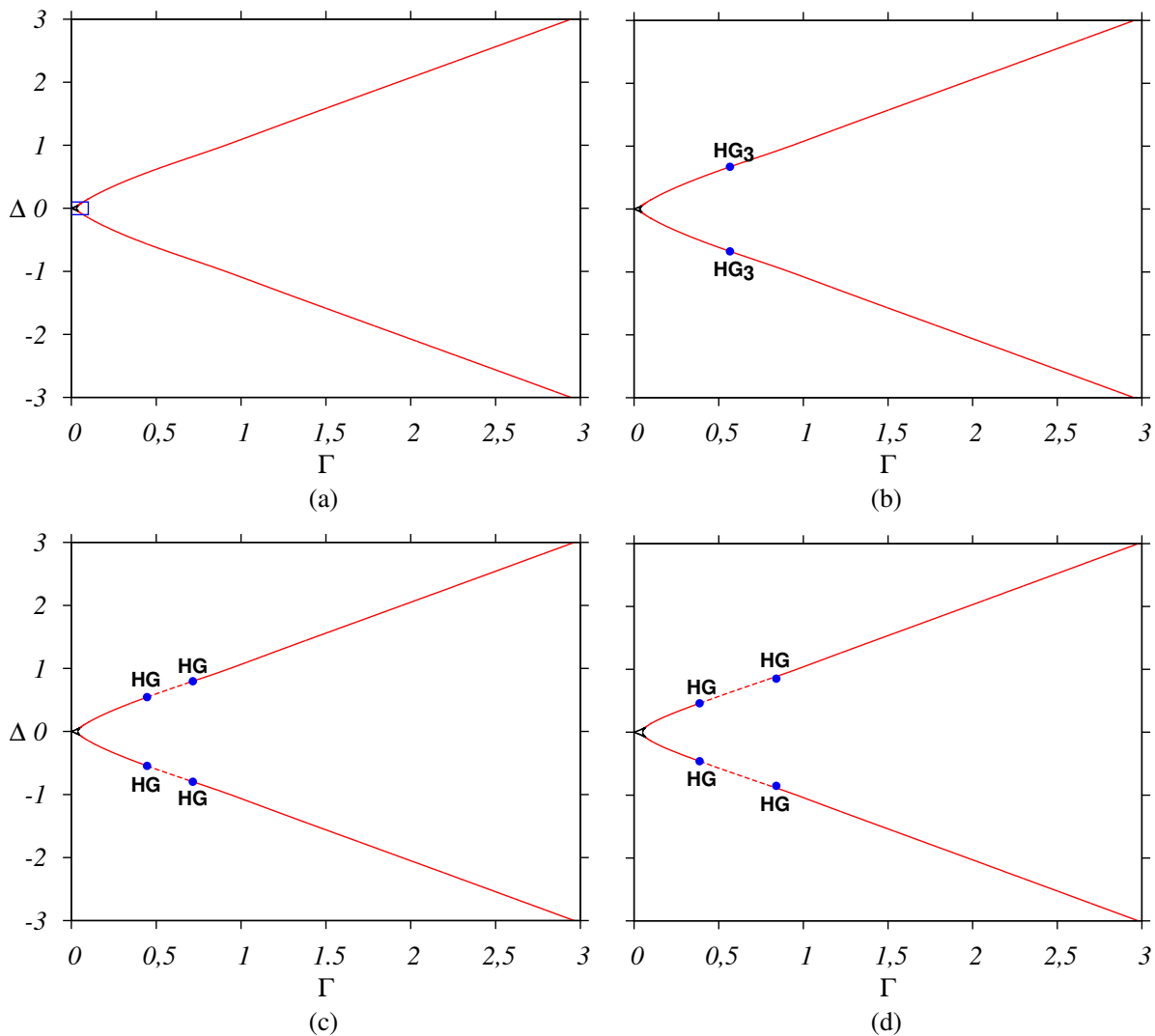


Figura 4.2: Diagramas de bifurcações construídos com o programa AUTO para  $\beta = 0, 6$ ,  $\eta = 1, 2$  e (a)  $\epsilon = 0, 5$ , (b)  $\epsilon = 0, 449$ , (c)  $\epsilon = 0, 4$  e (d)  $\epsilon = 0, 3$ . A curva em vermelho sólido representa a bifurcação de Hopf supercrítica e a vermelho tracejada a Hopf subcrítica. A preto sólida representa a bifurcação de sela-nó estável e a tracejada a sela-nó instável. Os pontos em azul indicam os pontos em que ocorrem as bifurcações de codimensão maior que um. HG representa o ponto em que ocorre a bifurcação de Hopf generalizada de codimensão dois e  $HG_3$  a bifurcação de Hopf generalizada de codimensão três.

Nas figuras 4.2 (a-d) fica evidente que a bifurcação de Hopf predomina o diagrama, isso implica que as transições do sistema ocorrerão basicamente por meio da bifurcação de Hopf, já que a bifurcação de sela-nó delimita uma região extremamente pequena do

diagrama. Além dessas curvas de bifurcação temos dois tipos de ponto de codimensão dois, os pontos de bifurcação de Bogdanov-Takens (BT) e os de Hopf generalizada (HG) e uma bifurcação de Hopf generalizada de codimensão três (HG<sub>3</sub>) representados pelos pontos em azul nos diagramas. A bifurcação de Hopf generalizada de codimensão dois é o ponto onde a bifurcação de Hopf deixa de ser supercrítica e passa a ser subcrítica, ou vice-versa. As duas bifurcações de Hopf generalizada do ramo superior e inferior nascem em  $\epsilon \approx 0,449$ , apresentado na figura 4.2 (b), nesse ponto temos a colisão de duas bifurcações de Hopf generalizada, dando origem a uma bifurcação de Hopf generalizada de codimensão três, ou seja, este é o ponto em que ocorre o nascimento da bifurcação de Hopf generalizada e ele é como se fosse um ponto de bifurcação de cúspide<sup>1</sup>. Este ponto de codimensão três, para melhor do nosso conhecimento, é a primeira vez que é reportada num sistema laser. Conforme o valor do parâmetro  $\epsilon$  é diminuído os pontos de bifurcação de Hopf generalizada se separam e ficam cada vez mais distante um do outro, de modo que entre os dois pontos a curva de bifurcação de Hopf se torna subcrítica e fora deles supercrítica. Próximo a esses pontos o sistema se comporta conforme descrito na seção 2.2.2.

Para estudarmos o ponto de bifurcação de Bogdanov-Takens de codimensão dois, construímos a figura 4.3, que é uma ampliação da figura 4.2 (a). Podemos utilizar essa mesma figura para a análise dos outros valores do parâmetro  $\epsilon$ , pois a estrutura é a mesma para todos os casos. A bifurcação de Bogdanov-Takens de codimensão dois é o ponto em que a curva de bifurcação de Hopf acaba e a ela é associado uma órbita homoclínica, que não calculamos em nosso trabalho. Uma análise geral do que acontece na vizinhança desse ponto está descrito na subseção 2.2.2. Como veremos adiante, nas proximidades desse ponto temos o surgimento das primeiras regiões de caos no sistema.

---

<sup>1</sup>veja a seção 2.2.2 para mais detalhe sobre a bifurcação de cúspide

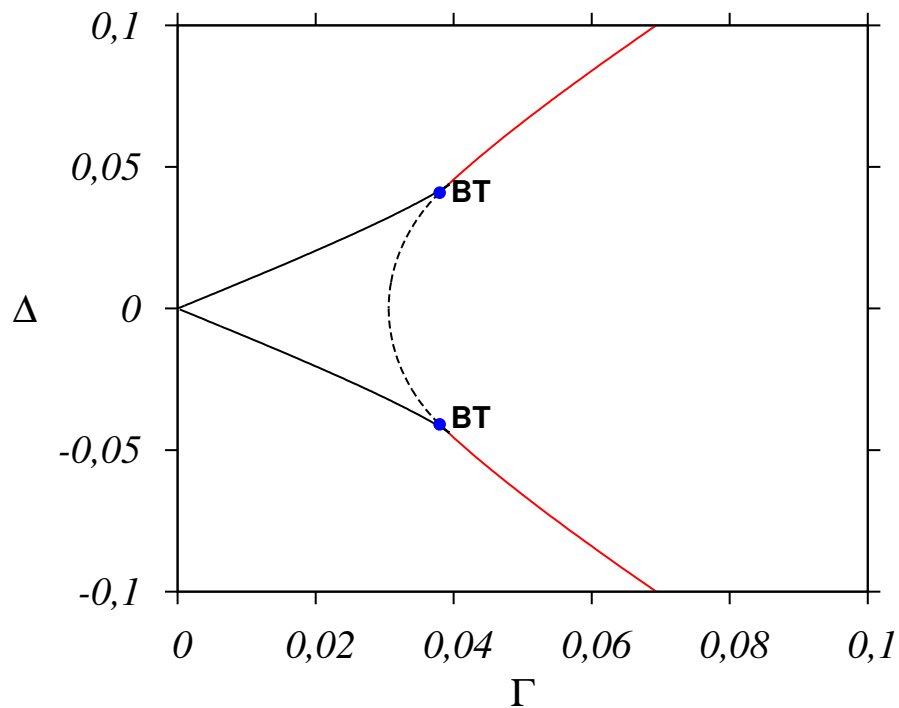


Figura 4.3: Ampliação do diagrama de bifurcação da figura 4.2(a) em torno da curva de bifurcação de sela-nó. A curva em vermelho sólido representa a bifurcação de Hopf supercrítica. A preto sólida representa a bifurcação de sela-nó estável e a tracejada a sela-nó instável. Os pontos em azul indicam os pontos em que ocorrem as bifurcações de codimensão maior que um. BT representa o ponto em que ocorre a bifurcação de Bogdanov-Takens de codimensão dois.

Ao diminuir ainda mais o valor do parâmetro  $\epsilon$  novas dinâmicas começam a surgir. A figura 4.4 mostra desde o surgimento de um novo ponto de bifurcação, a bifurcação de zero-Hopf, até o desaparecimento da bifurcação de Bogdanov-Takens.

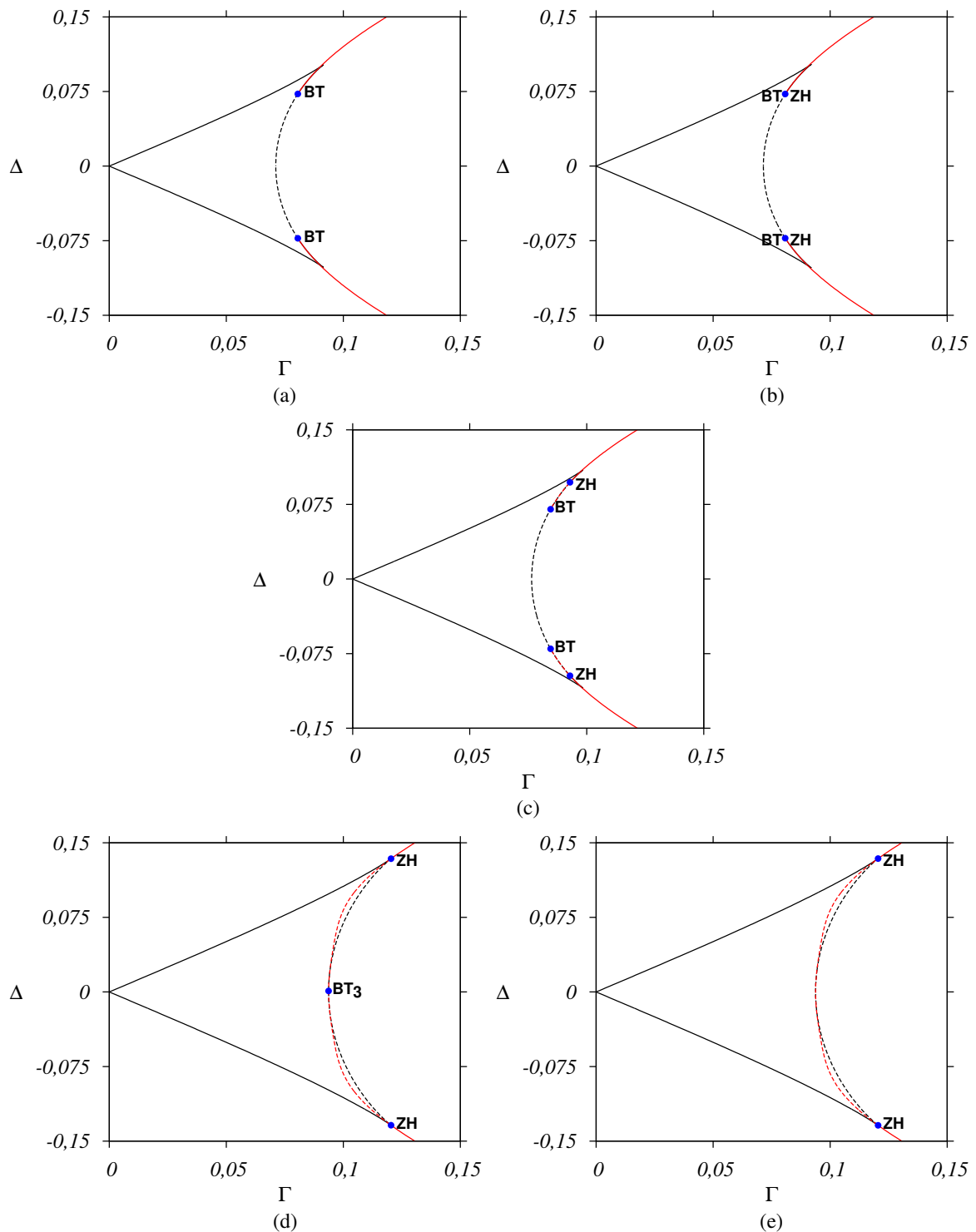


Figura 4.4: Diagramas de bifurcações construídos com o programa AUTO para  $\beta = 0,6$ ,  $\eta = 1,2$  e (a)  $\epsilon = 0,215$ , (b)  $\epsilon = 0,214$ , (c)  $\epsilon = 0,2$ , (d)  $\epsilon = 0,1632$  e (e)  $\epsilon = 0,1631$ . A curva em vermelho sólido representa a bifurcação de Hopf supercrítica e a vermelho tracejada a Hopf subcrítica. A preto sólida representa a bifurcação de sela-nó estável e a tracejada a sela-nó instável. Os pontos em azul indicam os pontos em que ocorrem as bifurcações de codimensão maior que um. ZH representa o ponto em que ocorre a bifurcação de zero-Hopf, BT a bifurcação de Bogdanov-Takens de codimensão dois e BT<sub>3</sub> a bifurcação de Bogdanov-Takens de codimensão três.

Na figura 4.4 (a) temos um cenário no espaço de parâmetros semelhante ao que temos em 4.2 (c), porém, ao diminuir o valor do parâmetro, temos o surgimento de uma bifurcação de fold-Hopf, também conhecida como zero Hopf (ZH), de codimensão dois em  $\epsilon \approx 0,214$ , no ponto onde existe a bifurcação de Bogdanov-Takens, apresentado na figura 4.4 (b). A bifurcação de zero-Hopf é o ponto em que a curva de bifurcação de Hopf tangencia a curva de bifurcação de sela-nó. Próximo a ela o sistema se comporta como descrito na seção 2.2.2. Ao diminuirmos ainda mais o valor do parâmetro  $\epsilon$  as bifurcações de Bogdanov-Takens e zero-Hopf se separam e a curva de bifurcação Hopf entre esses dois pontos se torna instável, como apresentado na 4.4 (c). Conforme continuamos, as bifurcações de zero-Hopf e Bogdanov-Takens ficam cada vez mais afastadas, até que para  $\epsilon \approx 0,1632$  as bifurcações de Bogdanov-Takens se encontram e colidem, formando um ponto de bifurcação de Bogdanov-Takens de codimensão três (BT<sub>3</sub>). Nesse ponto, como no caso da bifurcação de Hopf generalizada, é como se tivéssemos uma bifurcação de cúspide e uma análise do que acontece na vizinhança desse ponto pode ser encontrada nas referências [97, 98]. Por fim, a figura 4.4 (e) mostra que a bifurcação de Bogdanov-Takens desaparece para  $\epsilon \approx 0,1631$ . Como comentado anteriormente, a bifurcação de Bogdanov-Takens é o ponto em que a curva de bifurcação de Hopf acaba. Como nesse caso a bifurcação de Bogdanov-Takens deixa de existir, então a curva de bifurcação de Hopf se torna contínua, sendo instável entre os pontos de bifurcação de Hopf generalizada e os de zero-Hopf e estável fora deles.

Para analisar o que acontece na transição das curvas de bifurcação de Hopf e sela-nó, o diagrama da figura 4.5 foi separado em três regiões:

- região A, fora das curvas de bifurcação de sela-nó e Hopf. Nesta região temos apenas um ponto fixo instável;
- região B, dentro da região delimitada pelas curvas de bifurcação de sela-nó e Hopf. Nesta região temos três pontos fixos, dois instáveis e um estável;
- região C, dentro da região delimitada pelas curvas de bifurcação de Hopf. Nesta região temos apenas um ponto fixo estável.

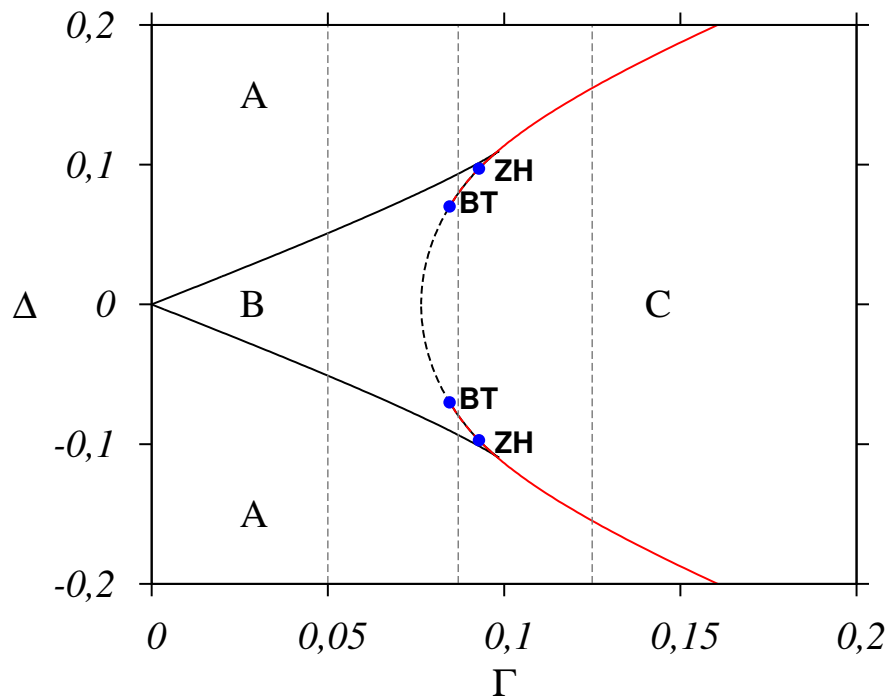


Figura 4.5: Diagrama de bifurcação para  $\beta = 0,6$ ,  $\eta = 1,2$  e  $\epsilon = 0,2$ . A curva em vermelho sólida representa a bifurcação de Hopf supercrítica e a vermelha tracejada a Hopf subcrítica. A preto sólida representa a bifurcação de sela-nó estável e a tracejada a sela-nó instável. Os pontos em azul indicam os pontos em que ocorrem as bifurcações de codimensão maior que um. BT representa o ponto em que ocorre a bifurcação de Bogdanov-Takens de codimensão dois e ZH a bifurcação de zero-Hopf. A letra A indica as regiões externas ao limite definido pelas curvas de bifurcação de Hopf e sela-nó, a letra B a região delimitada pela curva de bifurcação de sela-nó e a letra C a região delimitada pela curva de bifurcação de Hopf.

Para compreender como os pontos de equilíbrios perdem estabilidade, traçamos três retas verticais no diagrama de bifurcação, uma passando pelas curvas de bifurcação de sela-nó, outra passando pelas curvas de bifurcação de sela-nó e Hopf subcrítica e uma última passando pelas curvas de bifurcação de Hopf supercrítica. O resultado é apresentado nas figuras 4.6, em que com o auxílio do programa AUTO de continuação numérica plotamos os valores das intensidades de um dos modos do laser e a intensidade total para cada reta que traçamos. Como são três dinâmicas diferentes, separamos a análise em três casos:



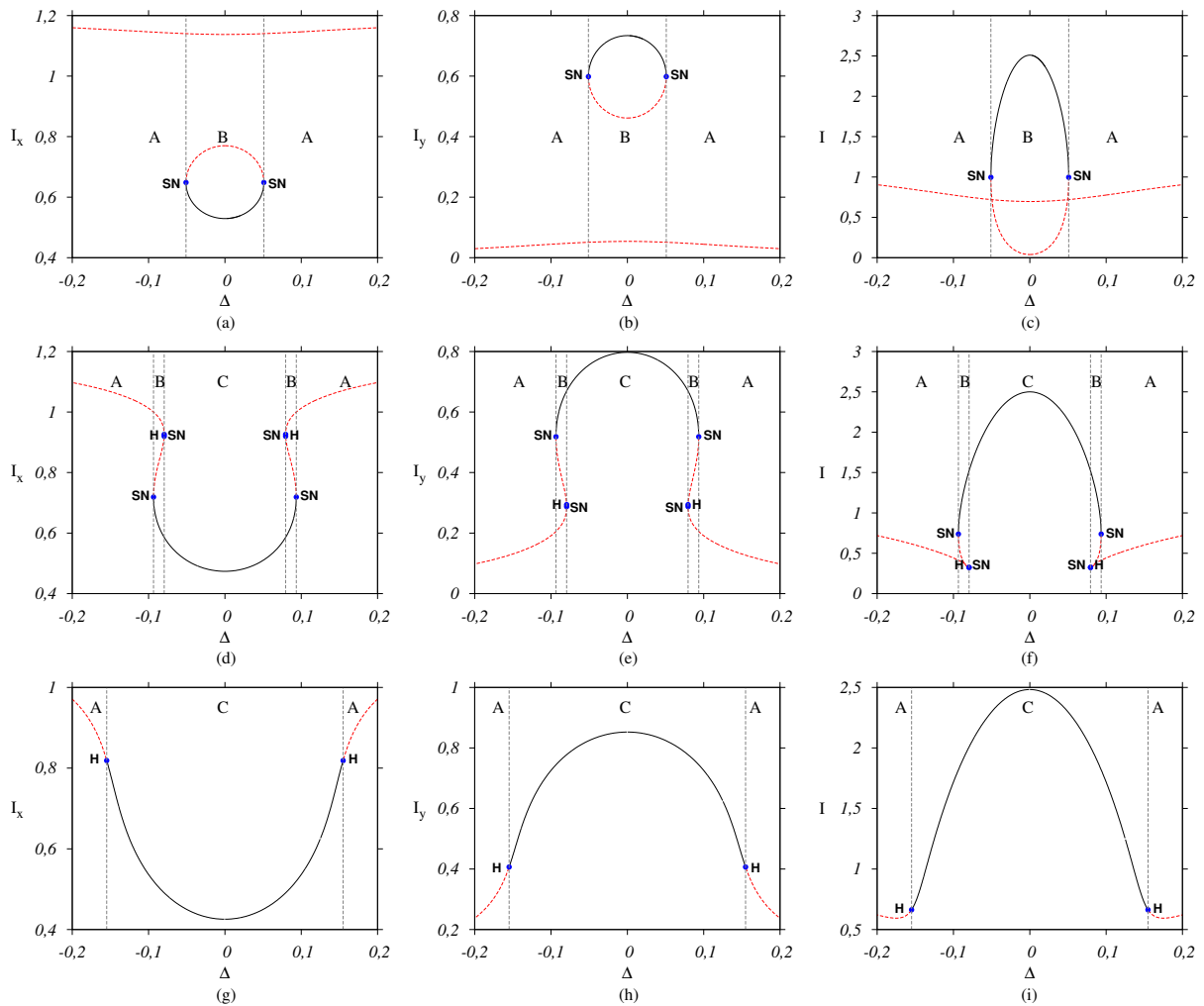


Figura 4.6: Diagrama de bifurcação para  $\beta = 0,6$ ,  $\eta = 1,2$ ,  $\epsilon = 0,2$  e (a-c)  $\Gamma = 0,05$ , (d-f)  $\Gamma = 0,087$ , (g-i)  $\Gamma = 0,125$ . A curva em preto sólido representa soluções estacionárias estáveis, a vermelha tracejada as instáveis e a linha em cinza tracejada está presente para separar as regiões A, B e C. A letra A indica as regiões externas ao limite definido pelas curvas de bifurcação de Hopf e sela-nó, a letra B a região delimitada pela curva de bifurcação de sela-nó e a letra C a região delimitada pela curva de bifurcação de Hopf da figura 4.5.

- Caso I: Das figuras 4.6 (a-c) que correspondem à primeira reta do diagrama da figura 4.5 podemos perceber que, indo do parâmetro  $\Delta$  negativo para o positivo, temos um ponto de equilíbrio instável fora das curvas de bifurcação de sela-nó (SN), ao chegarmos no ramo inferior dela o ponto de equilíbrio instável continua existindo, só que agora temos a criação de dois pontos de equilíbrio, um estável e um instável que existem dentro do triângulo em preto da figura 4.6. Continuando na reta, esses dois pontos de equilíbrio que foram criados no ramo inferior da curva de bifurcação de sela-nó colidem no ramo superior e desaparecem em seguida, permanecendo apenas o ponto de equilíbrio instável que já existia anteriormente;

- Caso II: Das figuras 4.6 (d-f) que correspondem à segunda reta do diagrama da figura 4.5 podemos perceber que, indo do parâmetro  $\Delta$  negativo para o positivo, temos um ponto de equilíbrio instável fora das curvas de bifurcação de sela-nó, ao chegarmos no ramo inferior dela o ponto de equilíbrio instável continua existindo, só que agora temos a criação de dois pontos de equilíbrio, um estável e um instável que existem na região B da figura 4.6. Incrementando o valor do parâmetro encontramos uma curva de bifurcação de Hopf subcrítica e uma sela nó estável. Na curva de bifurcação de Hopf um ponto fixo instável se torna estável, dessa maneira ficamos com dois pontos fixos estáveis e um instável. Na sequência, ao encontrar a sela-nó estável um ponto fixo estável colide com o instável, fazendo com que na região C reste apenas um ponto fixo estável. Ao encontrar o ramo superior, na sela-nó estável os pontos fixos estável e instável são criados novamente, na Hopf subcrítica um ponto fixo estável se torna instável, fazendo com que novamente fiquemos com dois pontos fixos instáveis e um estável na região B e por fim, um ponto fixo instável e o estável colidem na sela-nó estável, restando apenas um ponto fixo instável na região A. Além disso, na região B delimitada pela curva de sela-nó estável e as curvas de sela-nó estável e Hopf (que se tangenciam), temos o fenômeno de multiestabilidade, pois nessa região temos a coexistência dos pontos fixos (2 instáveis e 1 estável) e de uma solução periódica instável que é destruída na bifurcação de Hopf subcrítica.
- Caso III: Das figuras 4.6 (g-i) que correspondem à terceira reta do diagrama da figura 4.5 podemos perceber que, indo do parâmetro  $\Delta$  negativo para o positivo, temos um ponto de equilíbrio instável fora das curvas de bifurcação de Hopf supercrítica, que ganha estabilidade ao passar pelo ramo inferior dela, se tornando estável e perde estabilidade, voltando à ser instável ao passar pelo ramo superior dela. Além disso na região fora da bifurcação de Hopf supercrítica temos uma órbita periódica estável que é criada nela ao passar da região interior para a exterior da curva.

## 4.2 Dinâmica periódica, quase periódica e caótica

Sendo que a parte de equilíbrio foi inteiramente descrita na seção anterior, continuaremos com o parâmetro  $\epsilon = 0,2$  e analisaremos as soluções periódicas e caóticas existentes no modelo. Comparando as figuras 4.7 (a) e 4.7 (b) percebemos que as curvas de bifurcação obtidas pelo cálculo de integração direta do expoente de Lyapunov concordam precisamente com as obtidas pelo método de computação numérica. Note que, as curvas de bifurcação apresentadas em cores diferentes na figura 4.7 (b), como deveríamos esperar, estão presentes na figura 4.7 (a) na cor preta, nas regiões onde o expoente de Lyapunov é zero. Entretanto, com o programa de continuação numérica podemos identificar exatamente qual tipo de bifurcação está ocorrendo.

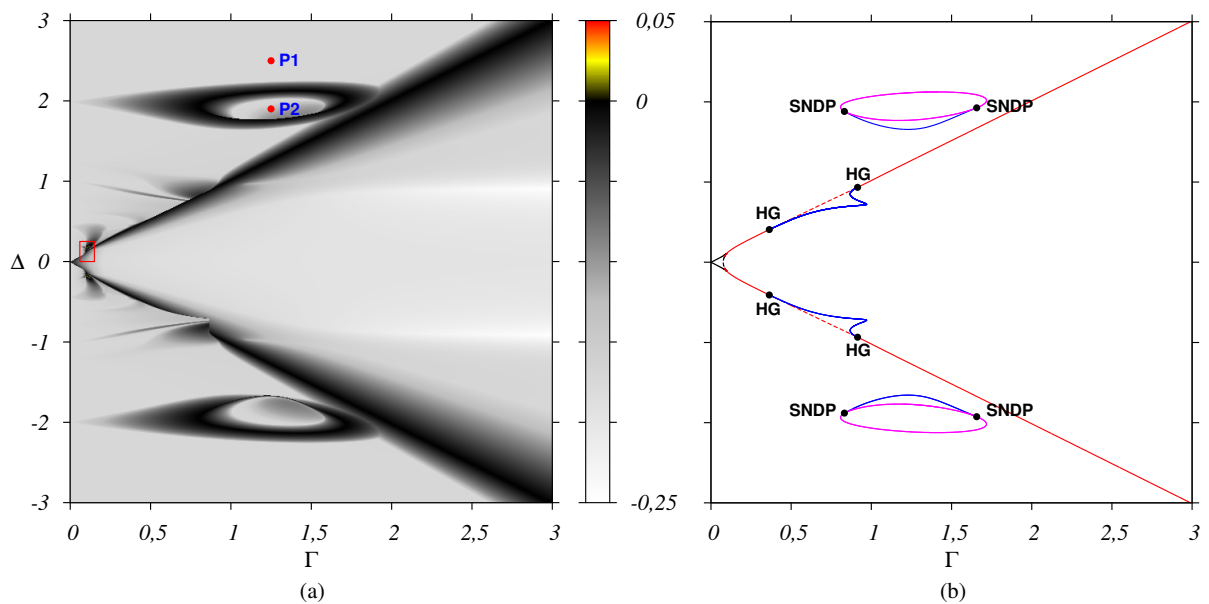


Figura 4.7: (a) Espaço de parâmetro para  $\beta = 0,6$ ,  $\eta = 1,2$  e  $\epsilon = 0,2$  (b) Diagramas de bifurcações construídos com o programa AUTO para os mesmos valores de parâmetros. A curva em vermelho sólido representa a bifurcação de Hopf supercrítica e a vermelho tracejada a Hopf subcrítica. A preto sólida representa a bifurcação de sela-nó estável e a tracejada a sela-nó instável. Os pontos em azul indicam os pontos em que ocorrem as bifurcações de codimensão maior que um. As curvas em azul representam as bifurcações de sela-nó de órbitas periódicas e as em rosas as bifurcações de dobramento de período. HG representa o ponto em que ocorre a bifurcação de Hopf generalizada e SNDP a bifurcação de sela-nó dobramento de período.

Para esses valores de parâmetros encontramos três tipos de bifurcações de órbitas periódicas: dobramento de período sub- e supercrítico e sela-nó. As curvas de bifurcação de dobramento de período estão apresentadas na cor rosa, enquanto que as de sela-nó estão na cor azul. No diagrama da figura 4.7 (b) temos uma curva de bifurcação de dobramento de período e duas de sela-nó, uma associada à curva de bifurcação de dobramento de período e outra associada aos pontos de bifurcação de Hopf generalizada de codimensão dois. A curva de bifurcação de sela-nó associada aos pontos de bifurcação de Hopf generalizada é responsável pela criação de dois ciclos limites, um estável e um instável, logo, abaixo dela só temos soluções estacionárias, entre ela e a curva de bifurcação de Hopf subcrítica os dois ciclos limites e fora da bifurcação de Hopf subcrítica apenas o ciclo limite estável, já que o instável desaparece na curva de bifurcação de Hopf subcrítica. Para analisar a sela-nó associada ao dobramento de período, construímos a figura 4.8, apresentada abaixo.

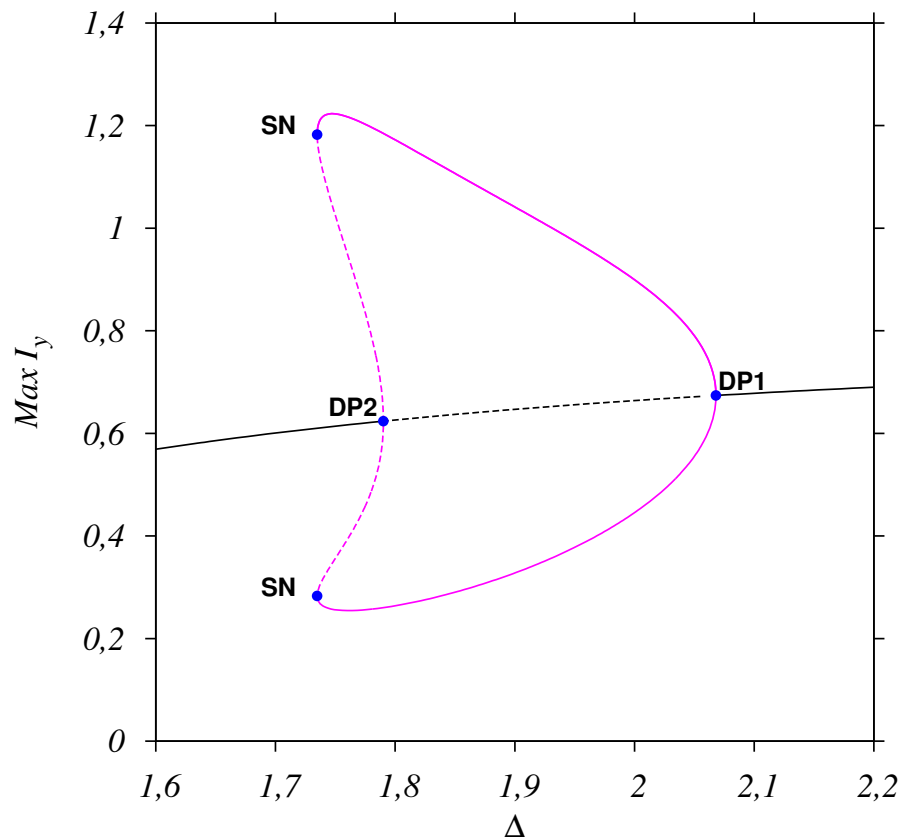


Figura 4.8: Diagrama de bifurcação construído com o programa AUTO para  $\eta = 1, 2$ ,  $\epsilon = 0, 2$ ,  $\beta = 0, 6$  e  $\Gamma = 1, 0$ , referente ao espaço de parâmetro da figura 4.7. DP1 e DP2 representam o ponto em que ocorre a bifurcação de dobramento de período e SN a bifurcação de sela-nó. A curva em preto representa a solução de período um e a em rosa a solução dobrada.

Da figura 4.8 vemos duas maneiras distintas de se criar uma solução de período dobrado. No primeiro caso, indo da direita para a esquerda, a solução de período um (linha sólida em preto) pode dobrar o período via uma bifurcação de dobramento de período usual. A órbita de período um estável (linha sólida em preto) no ponto de bifurcação de dobramento de período supercrítica (DP1) perde estabilidade (linha tracejada em preto) e uma solução estável com período dobrado é criada (linha sólida em rosa). No ponto de bifurcação de dobramento de período subcrítica (DP2), o período um instável se torna estável novamente (linha sólida em preto), a solução dobrada estável continua existindo e uma solução dobrada instável é criada (linha tracejada em rosa). As duas soluções dobradas, estável e instável, são destruídas na curva de bifurcação de sela-nó (SN). No segundo caso, indo da esquerda para a direita, no ponto de bifurcação de sela-nó (SN), dois ciclos limites de período dois são criados, sendo um estável (linha sólida em rosa) e outro instável (linha tracejada em rosa), enquanto que a solução de período um estável continua existindo (linha sólida em preto). A solução instável de período dobrado é a mesma da bifurcação de dobramento de período subcrítica, como pode ser visto na figura 4.8. Entre os pontos de bifurcação de sela-nó (SN) e dobramento de período subcrítico (DP2) existe biestabilidade, ou seja, a solução de período dois estável coexiste com a de período um estável, e é observado o fenômeno de histerese. Por fim, a solução instável de período dobrado é destruída no ponto de bifurcação de dobramento de período subcrítica (DP2), enquanto a solução estável de dobramento de período continua existindo (linha sólida em rosa) e a solução de período um perde estabilidade (linha tracejada em preto), até o ponto de bifurcação de dobramento de período supercrítico (DP1), onde a solução de período volta a se tornar estável (linha sólida em preto) e a solução estável de período dobrado é destruída.

Para dar uma visão geral da dinâmica do espaço de parâmetros da figura 4.7, construímos a figura 4.9 (a-o) que apresenta 5 curvas de bifurcação, passando por  $\Gamma = 0,05$ ,  $\Gamma = 0,3$ ,  $\Gamma = 0,7$ ,  $\Gamma = 1,5$  e  $\Gamma = 2,5$  no espaço de parâmetros da figura 4.7 (a) para os máximos da intensidade total e das intensidades associadas a cada modo. As figuras foram construídas apenas para a região superior do espaço de parâmetros já que a parte inferior é simétrica. Na primeira coluna está plotado o máximo da intensidade total, na segunda da intensidade associada ao campo em  $x$  e na terceira da intensidade associada ao campo em  $y$ . Veja a simplicidade da dinâmica desse modelo para os valores de parâmetros setados, quase toda a parte de dinâmica periódica é composta por órbitas de período um ou de período dois, que existe apenas dentro da curva de bifurcação de dobramento de período.

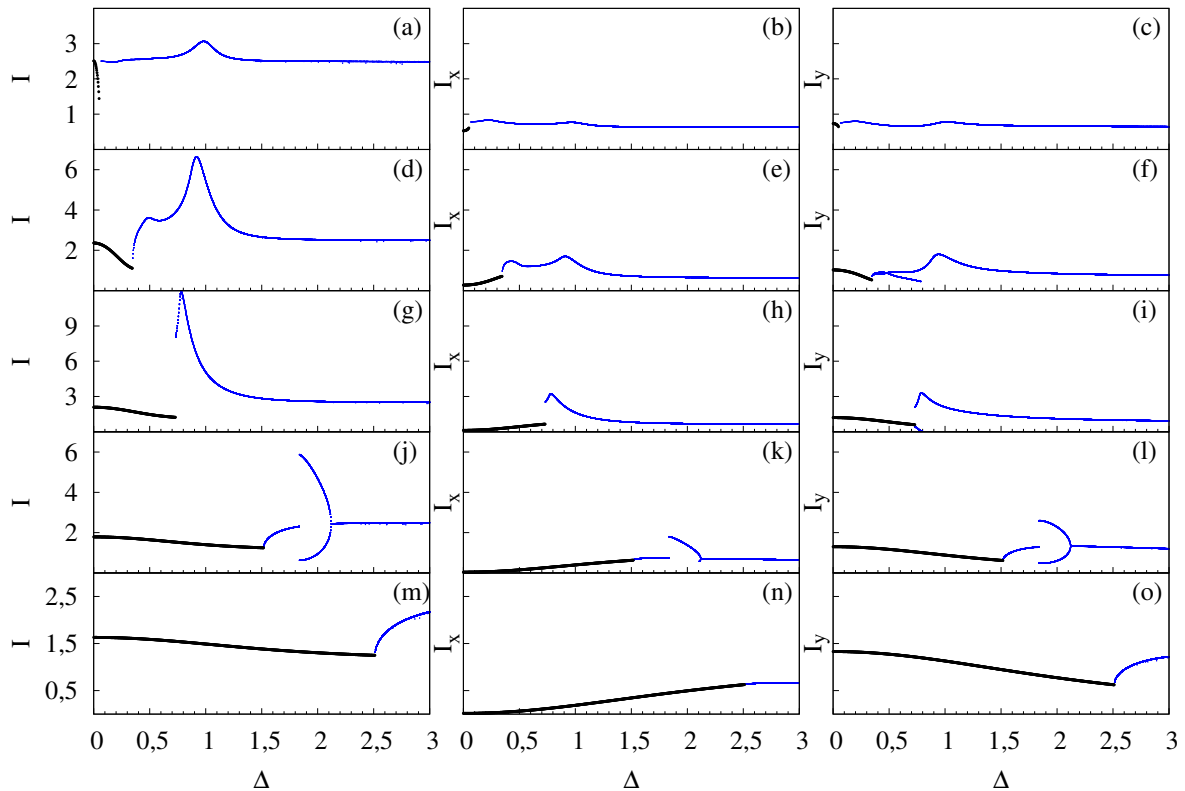


Figura 4.9: Diagramas de bifurcações construídos para os parâmetros  $\beta = 0,6$ ,  $\eta = 1,2$ ,  $\epsilon = 0,2$  e (a-c)  $\Gamma = 0,05$ , (d-f)  $\Gamma = 0,3$ , (g-i)  $\Gamma = 0,7$ , (j-l)  $\Gamma = 1,5$  e (m-o)  $\Gamma = 2,5$ . Na primeira coluna foi plotado o máximo da intensidade total, na segunda o máximo da intensidade ao campo em x e na terceira o máximo da intensidade associada ao campo em y. As curvas em preto representam a dinâmica dentro da região de travamento de fase e as azul representam a dinâmica periódica fora da região de travamento de fase.

Das figuras 4.9 (j-l) percebemos que a curva de dobramento de período apresenta os dois ramos para o diagrama da intensidade total e da intensidade associada ao campo y, porém, para a curva associada a intensidade em x temos apenas o ramo superior completo, com o de baixo acabando prematuramente. Para compreender o que ocorre nessa região, separamos a análise em três casos: uma na região antes do dobramento de período (A), uma na região de dobramento de período que contém os dois ramos (B) e outra na região de dobramento que apresenta apenas um ramo (C), como mostrado na figura 4.10.

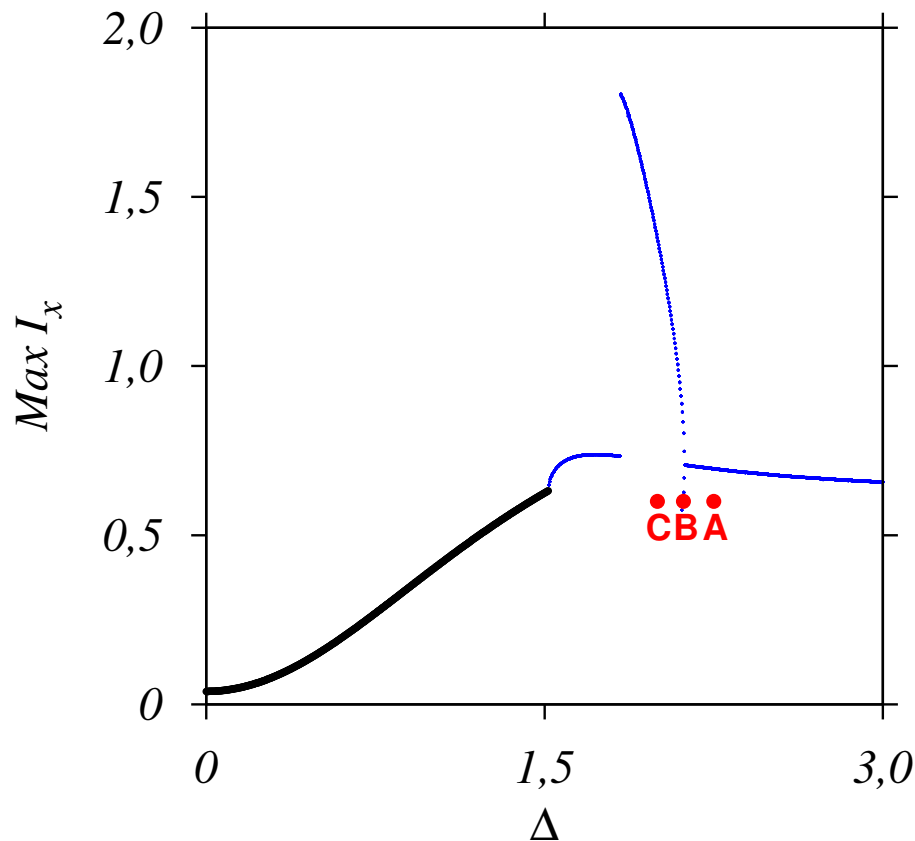


Figura 4.10: Diagrama de bifurcação para  $\eta = 1, 2$ ,  $\epsilon = 0, 2$ ,  $\beta = 0, 6$  e  $\Gamma = 1, 5$ .

Para cada ponto tomado na figura 4.10, fizemos uma série temporal e analisamos as oscilações da intensidade ao campo x, apresentado na figura 4.11.

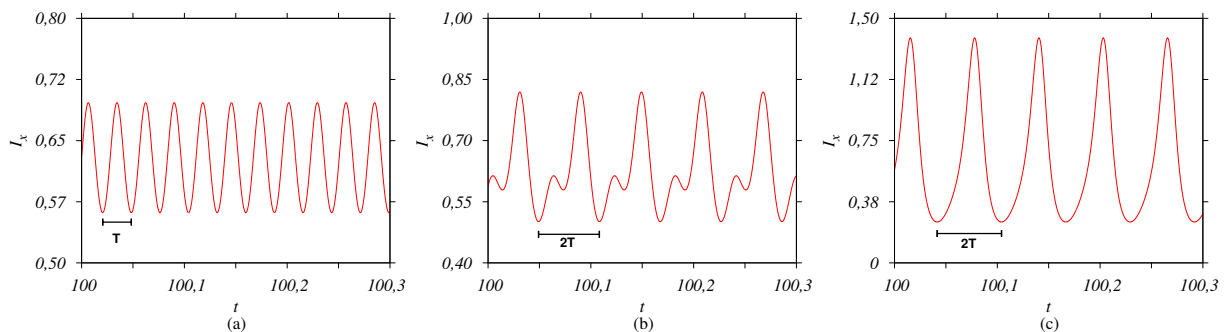


Figura 4.11: Séries temporais da intensidade associada ao campo x para  $\eta = 1, 2$ ,  $\epsilon = 0, 2$ ,  $\beta = 0, 6$ ,  $\Gamma = 1, 5$ , (a)  $\Delta = 2, 25$  referente ao ponto A da figura 4.10, (b)  $\Delta = 2, 11568$  referente ao ponto B da figura 4.10 e (c)  $\Delta = 2, 0$  referente ao ponto C da figura 4.10

No primeiro caso, figura 4.11 (a) vemos que antes antes do dobramento de período a intensidade associada ao campo em x oscila com período “T”, apresentando aproximadamente 10 oscilações no intervalo que definimos. Já no segundo caso, 4.11 (b), vemos que a órbita periódica do primeiro caso dobra seu período, oscilando com período “2T”, dessa forma apresentando aproximadamente 5 oscilações com dois valores de máximo no

intervalo que definimos. Por fim, no terceiro caso, vemos que por mais que as oscilações não apresentem dois máximos, ainda assim suas oscilações levam o dobro do tempo para completar um período quando comparado com o primeiro caso. Em outras palavras, como no segundo caso, nessa região o laser oscila com período “ $2T$ ”, apenas não apresenta dois máximos. Note que “ $T$ ” não é exatamente o mesmo valor nas figuras 4.11(a-c), mas muda muito pouco.

Por fim, as figuras 4.12 (a-f) mostram a forma da órbita de período um no ponto P1 da figura 4.7 (a), enquanto que as 4.13 (a-f) mostram o comportamento periódico dentro da região de dobramento de período, ponto P2 da figura 4.7 (a), em que a solução tem período dois. Dinâmicas mais complexas como caos aparecem apenas num intervalo muito pequeno dos parâmetros de injeção e dessintonização como mostraremos na sequência.

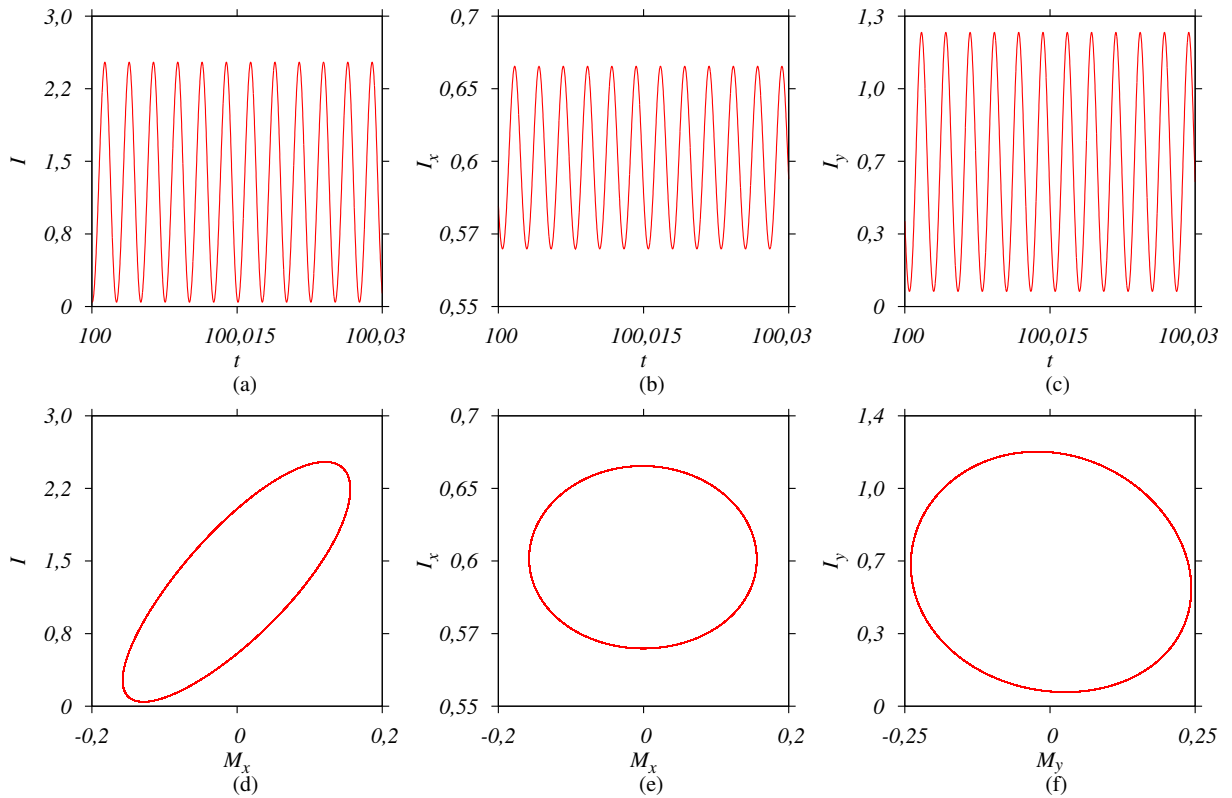


Figura 4.12: Séries temporais e atrator para  $\eta = 1,2$ ,  $\epsilon = 0,0097$ ,  $\beta = 0,6$ ,  $\Gamma = 1,25$  e  $\Delta = 2,5$ , referente ao ponto P1 da figura 4.7 (a). A figura (a) mostra a série temporal para a intensidade total, a (b) para a intensidade associada ao campo em x e a (c) para a intensidade associada ao campo em y. As figuras (d-f) são projeções dos atratores para a intensidade total e a intensidade associada a cada modo do laser.



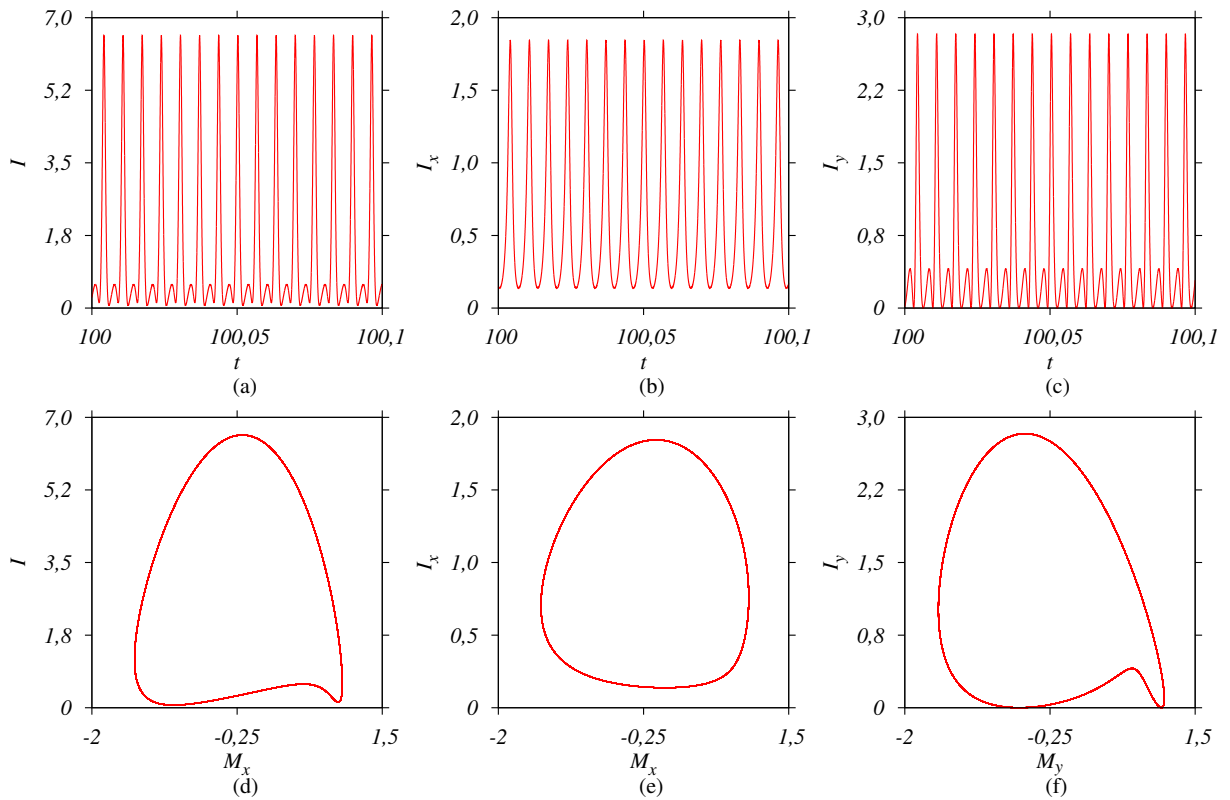


Figura 4.13: Séries temporais e atrator para  $\eta = 1,2$ ,  $\epsilon = 0,0097$ ,  $\beta = 0,6$ ,  $\Gamma = 1,25$  e  $\Delta = 1,9$ , referente ao ponto P1 da figura 4.7 (a). A figura (a) mostra a série temporal para a intensidade total, a (b) para a intensidade associada ao campo em x e a (c) para a intensidade associada ao campo em y. As figuras (d-f) são projeções dos atratores para a intensidade total e a intensidade associada a cada modo do laser.

Uma última análise que fizemos para  $\epsilon = 0,2$  foi de uma pequena região caótica que encontramos. A figura 4.14 é uma ampliação da região caótica presente no espaço de parâmetros da figura 4.7 (a) para pequenos valores dos parâmetros  $\Gamma$  e  $\Delta$ .

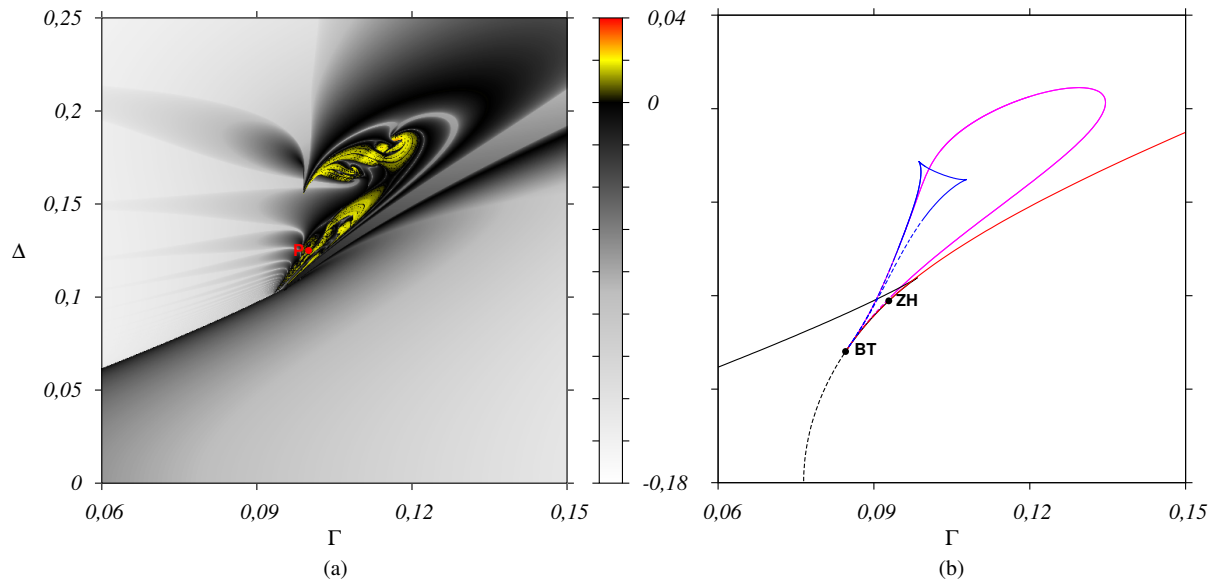


Figura 4.14: (a) Espaços de parâmetros para  $\beta = 0,6$ ,  $\eta = 1,2$ ,  $\epsilon = 0,2$ . (b) Curvas de bifurcação presentes no espaço de parâmetros da figura (a). A curva em vermelho sólido representa a bifurcação de Hopf supercrítica e a vermelho tracejada a Hopf subcrítica. A preto sólida representa a bifurcação de sela-nó estável e a tracejada a sela-nó instável. Os pontos em preto indicam os pontos em que ocorrem as bifurcações de codimensão maior que um. A curva em azul representa a bifurcação de sela-nó de órbitas periódicas e a em rosa a bifurcação de dobramento de período. ZH representa o ponto em que ocorre a bifurcação de zero-Hopf e BT a bifurcação de Bogdanov-Takens de codimensão dois.

Comparando as figuras 4.14 (a) e 4.14, temos que a curva de bifurcação de dobramento de período está associado à região caótica, enquanto que a sela-nó está associado a região periódica presente. A figura 4.15 foi construída traçando uma reta no espaço de parâmetros da figura 4.14 e mostra a dinâmica do sistema ao transitar entre a região caótica e periódica. Nesta região, o sistema inicialmente está numa dinâmica estacionária (curva em rosa) que passa oscilar após sair da região de travamento de fase (curva em azul), encontrando na sequência a região de dobramento de período que conduz ao caos. Por fim, ela sai da região de caos e volta a oscilar com período um.

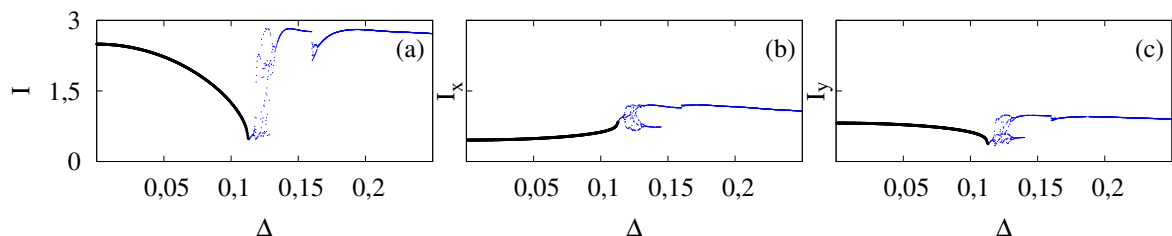


Figura 4.15: Bifurcações para  $\eta = 1,2$ ,  $\epsilon = 0,2$ ,  $\beta = 0,6$  e  $\Gamma = 0,1$ . A figura (a) foi construída plotando o máximo da intensidade total, a (b) o máximo da intensidade corresponde ao campo em x, e a figura (c) o máximo da intensidade corresponde ao campo em y. A curva em preto representa a dinâmica dentro da região de travamento de fase e a azul representa a dinâmica periódica fora da região de travamento de fase.

A figura 4.16 mostra o comportamento do ponto P dentro da região caótica, onde usamos  $\beta = 0,6$ ,  $\eta = 1,2$ ,  $\epsilon = 0,2$ ,  $\Gamma = 0,1$  e  $\Delta = 0,125$ .

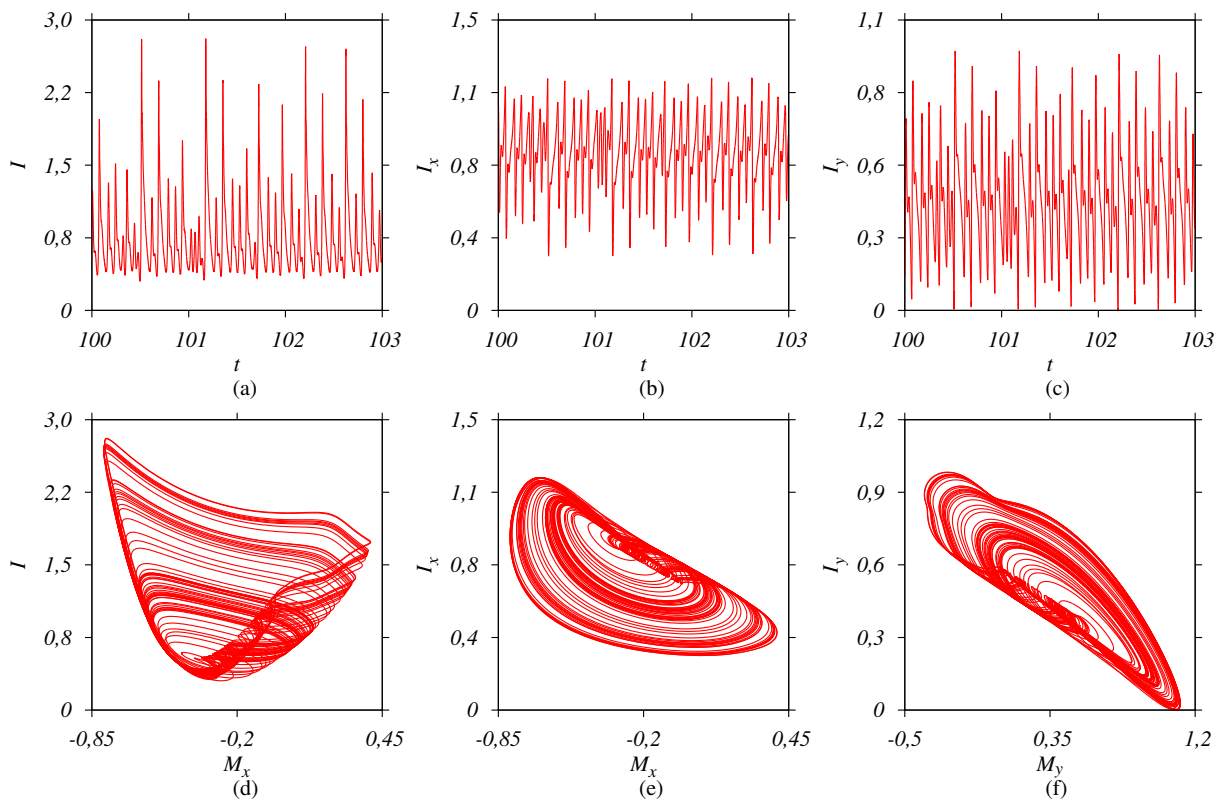


Figura 4.16: Séries temporais e atrator para  $\eta = 1,2$ ,  $\epsilon = 0,0097$ ,  $\beta = 0,6$ ,  $\Gamma = 0,1$  e  $\Delta = 0,125$ , referente ao ponto P da figura 4.14 (a). A figura (a) mostra a série temporal para a intensidade total, a (b) para a intensidade associada ao campo em x e a (c) para a intensidade associada ao campo em y. As figuras (d-f) são projeções dos atratores para a intensidade total e a intensidade associada a cada modo do laser.

Como vimos acima, conforme diminuimos o valor do parâmetro  $\epsilon$  dinâmicas adicionais e mais complexas começam a surgir. Nós investigamos o caso  $\epsilon = 0,0097$ , que foi utilizado nas referências [47, 48, 94]. Para este valor do parâmetro  $\epsilon$  foi encontrada uma concordância muito boa entre os resultados numéricos e experimentais, para o dispositivo laser investigado nestes trabalhos. Para esse valor, a dinâmica do laser se torna extremamente rica como pode ser visto na figura 4.17. De início, comparando a região superior e inferior da figura 4.17 (a) vemos claramente o quão complexa é a dinâmica do sistema. A dinâmica do sistema para valores negativos do parâmetro  $\Delta$  deveria ser simétrica a dos valores positivos, porém, fica claro da figura 4.17 (a) que não temos a mesma dinâmica na região superior e inferior. Isso se deve a multiestabilidade, ou seja, quando para o mesmo par de valores de parâmetros temos duas dinâmicas distintas que são acessadas dependendo das condições iniciais do problema. Uma maneira de contornar esse problema, é utilizando o programa AUTO de continuação numérica. Construímos a figura 4.17 (b) que mostra a diversidade de soluções periódicas presentes, as curvas em rosa são de dobramento de período e as em verde representam as bifurcação de torus (Neimark-Sacker).

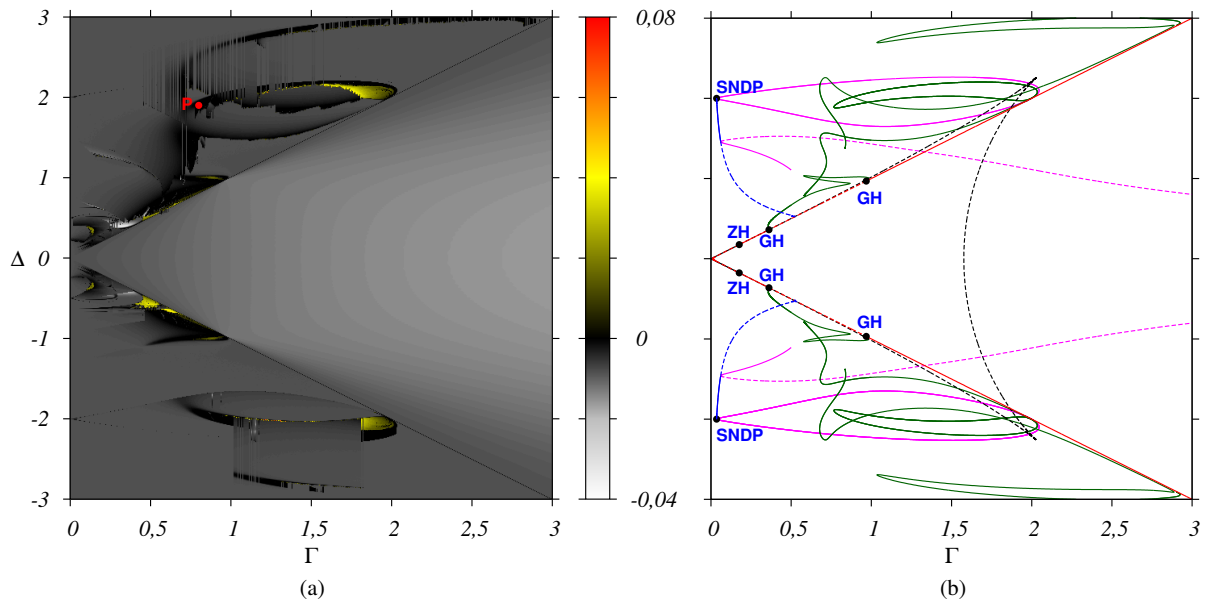


Figura 4.17: (a) Espaços de parâmetros para  $\beta = 0,6$ ,  $\eta = 1,2$ ,  $\epsilon = 0,0097$ . (b) Algumas curvas de bifurcação presentes nos espaços de parâmetros da figura (a). A curva em vermelho sólida representa a bifurcação de Hopf supercrítica e a vermelho tracejada a Hopf subcrítica. A preto sólida representa a bifurcação de sela-nó estável e a tracejada a sela-nó instável. Os pontos em preto indicam os pontos em que ocorrem as bifurcações de codimensão maior que um. As curvas em verde representam a bifurcações de torus e a em rosa a bifurcação de dobramento de período. ZH representa o ponto em que ocorre a bifurcação de zero-Hopf, BT a bifurcação de Bogdanov-Takens, HG a bifurcação de Hopf generalizada e SNDP a bifurcação de sela-nó dobramento de período.

A bifurcação de torus é uma nova solução que aparece ao diminuirmos o valor do parâmetro  $\epsilon$ , ela é responsável por transformar a dinâmica periódica em quase periódica. A figura 4.18 mostra a dinâmica desta solução no espaço de fases, referente ao ponto P da figura 4.14 (a).

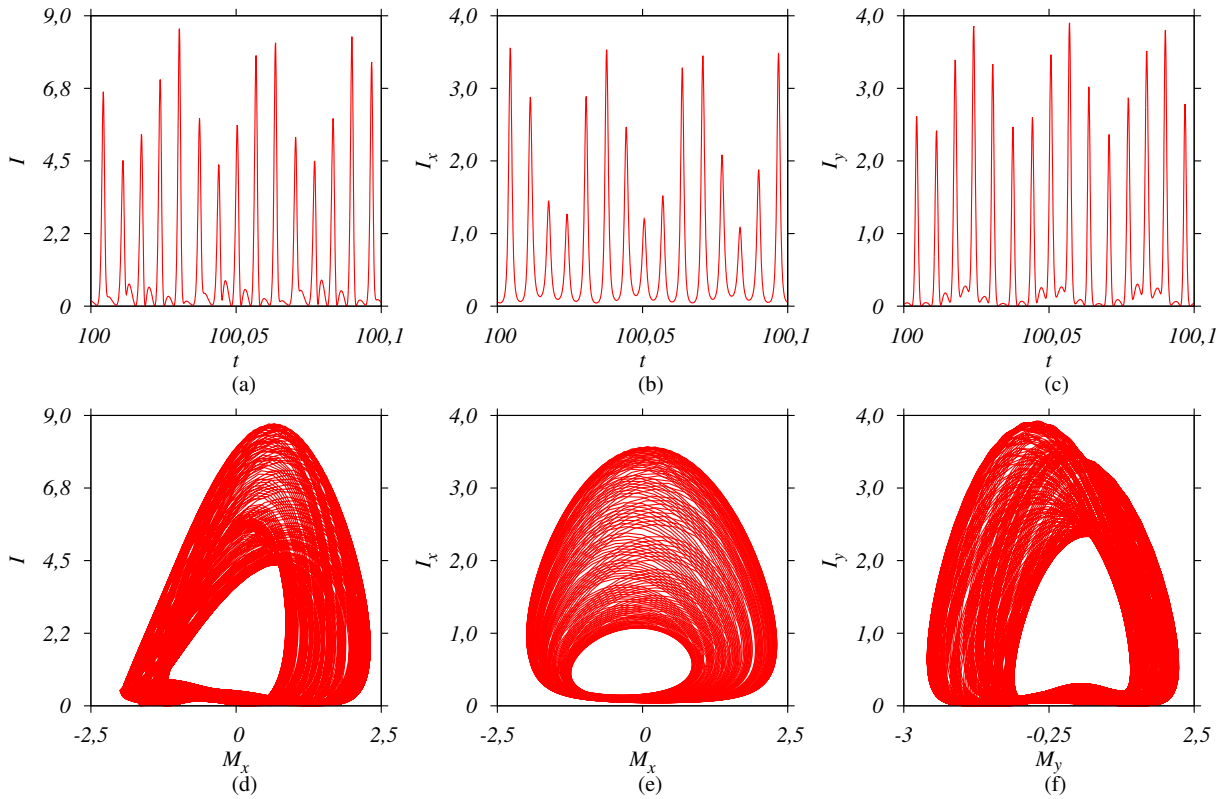


Figura 4.18: Séries temporais e atrator para  $\eta = 1, 2$ ,  $\epsilon = 0,0097$ ,  $\beta = 0,6$ ,  $\Gamma = 0,8$  e  $\Delta = 1,9$ , referente ao ponto P da figura 4.17 (a). A figura (a) mostra a série temporal para a intensidade total, a (b) para a intensidade associada ao campo em x e a (c) para a intensidade associada ao campo em y. As figuras (d-f) são projeções dos atratores para a intensidade total e a intensidade associada a cada modo do laser.

Por fim, construímos a figura 4.19 que mostra a diversidade e complexidade da dinâmica, assim como a multiestabilidade presente no espaço de parâmetros da figura 4.17. A figura 4.19 (a-o) apresenta 5 curvas de bifurcação, passando por  $\Gamma = 0,5$ ,  $\Gamma = 1,0$ ,  $\Gamma = 1,5$ ,  $\Gamma = 2,0$  e  $\Gamma = 2,5$  no espaço de parâmetros da figura 4.17 (a) para os máximos da intensidade total e das intensidades associadas a cada modo. Na primeira coluna está plotado o máximo da intensidade total, na segunda da intensidade associada ao campo em x e na terceira da intensidade associada ao campo em y. As figuras foram construídas apenas para a região superior do espaço de parâmetros, integrando o sistema incrementando o valor do parâmetro  $\Delta$  (curvas em vermelho) e, decrementando-o (curvas em azul). Dessa maneira conseguimos plotar as diferentes soluções que coexistem devido a multiestabilidade e assim descrever de uma maneira mais completa as soluções periódicas existentes para a região do espaço de parâmetros da figura 4.17. Note que, na figura 4.17

(b) apresentamos apenas algumas soluções existentes no espaço de parâmetros, a figura 4.19 mostra que existem diversas soluções de maior complexidade.

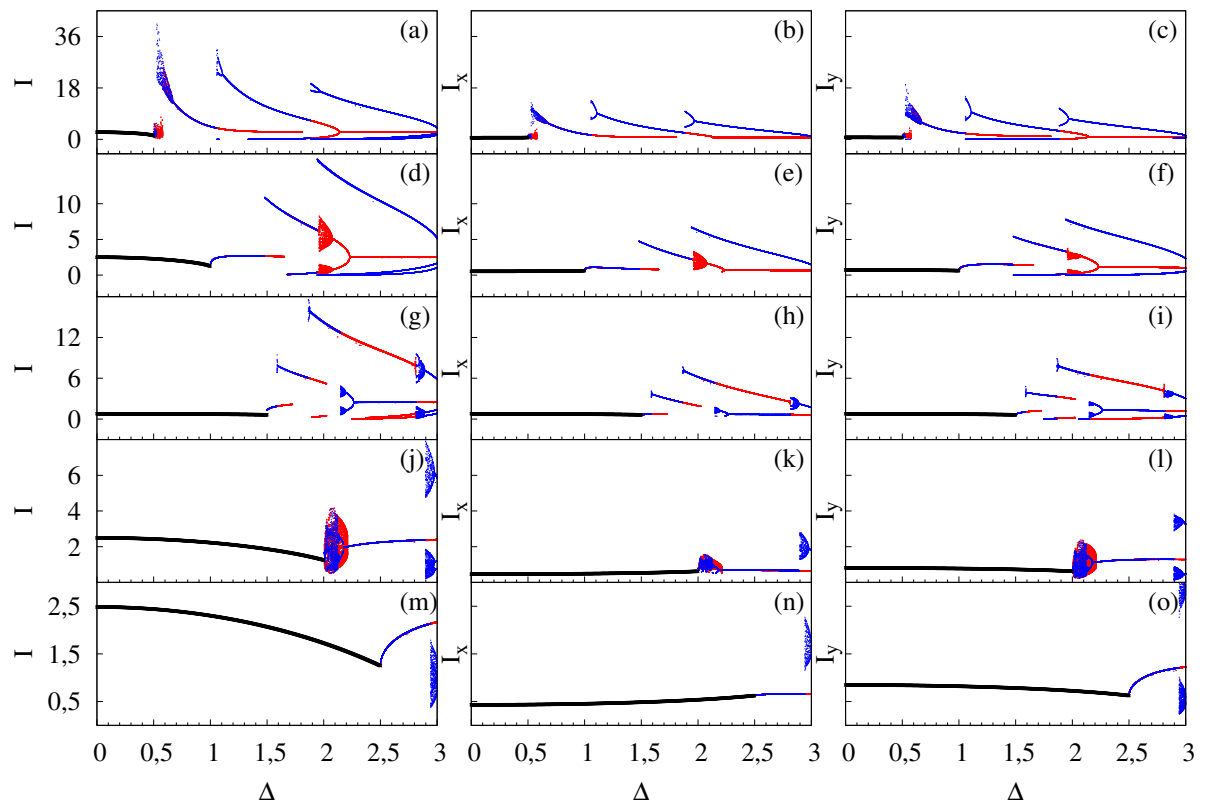


Figura 4.19: Diagramas de bifurcações construídos para os parâmetros  $\beta = 0,6$ ,  $\eta = 1,2$ ,  $\epsilon = 0,0097$  e (a-c)  $\Gamma = 0,5$ , (d-f)  $\Gamma = 1,0$ , (g-i)  $\Gamma = 1,5$ , (j-l)  $\Gamma = 2,0$  e (m-o)  $\Gamma = 2,5$ . Na primeira coluna foi plotado o máximo da intensidade total, na segunda o máximo da intensidade ao campo em x e na terceira o máximo da intensidade associada ao campo em y. As curvas em vermelho foram construídas integrando o sistema incrementando o valor do parâmetro  $\Delta$ , enquanto que as em azul decrementado-o. As curvas em preto representam a dinâmica dentro da região de travamento de fase

## 4.3 Dinâmica hipercaótica

### 4.3.1 Hipercaos “fraco”

Na seção anterior, mostramos diversas soluções periódicas que aparecem quando  $\epsilon = 0,0097$ , além de soluções caóticas que agora já representam uma considerável região do espaço de parâmetros. Uma nova solução que iremos discutir nesta seção, diz respeito à uma pequena região do espaço de parâmetros, onde encontramos as primeiras dinâmicas hipercaóticas para esse valor de parâmetro, mas precisamente, encontramos uma região de alternância de dinâmicas caóticas e hipercaóticas, como apresentado na figura 4.20.

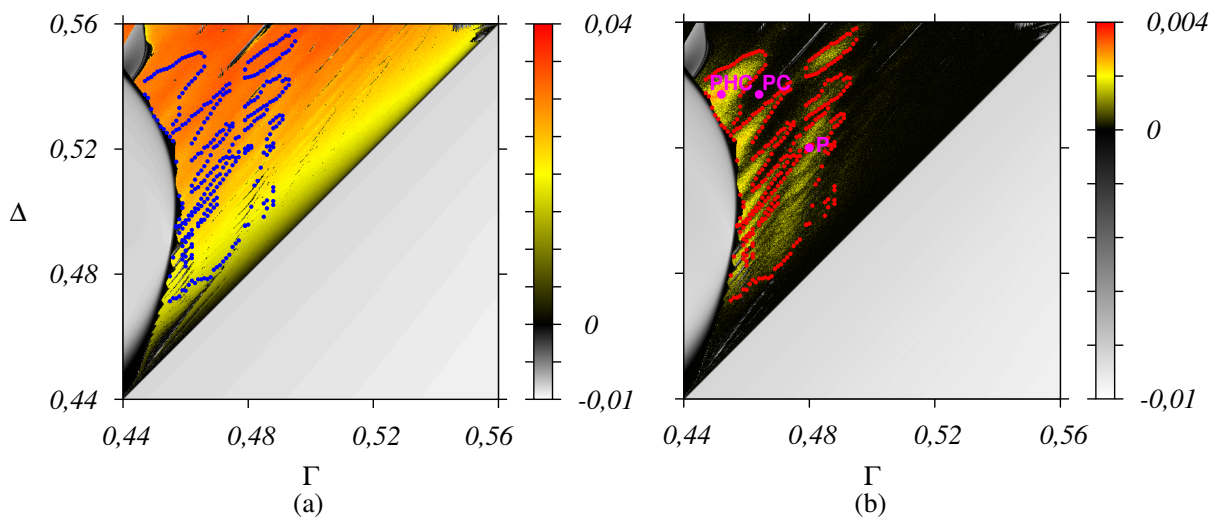


Figura 4.20: Espaços de parâmetros para  $\beta = 0,6$ ,  $\eta = 1,2$  e  $\epsilon = 0,0097$ . (a) Figura construída com a informação do maior e segundo maior expoente de Lyapunov e (b) Figura construída com o segundo maior expoente de Lyapunov. Os pontos em vermelho e azul indicam as regiões de transições da dinâmica caótica para hipercaótica, em que a dinâmica hipercaótica está dentro da região delimitada pelos pontos.

O espaço de parâmetros da figura 4.20 (a) foi construído com a informação do primeiro e segundo maiores expoentes de Lyapunov, quando o primeiro expoente era zero, ele trocava de lugar com o segundo expoente de Lyapunov, dessa maneira, a cor cinza/branco representa as dinâmicas estacionárias e periódicas, o preto dinâmicas quase periódicas e as em amarelo/vermelho, dinâmicas caóticas e hipercaóticas. A figura 4.20 (b) foi construído com o segundo maior expoente de Lyapunov, dessa maneira, as regiões de cor cinza representam dinâmicas estacionárias e periódicas, as em preto, dinâmicas quase periódicas e caóticas e em amarelo/vermelho, dinâmicas hipercaóticas. Os pontos em vermelho e azul indicam o local em que a dinâmica deixa de ser caótica e se torna hipercaótica. A dinâmica hipercaótica está dentro das regiões delimitadas pelos pontos. Como podemos perceber, a magnitude do segundo maior expoente é muito pequena comparado ao pri-

meiro. Para confirmarmos a presença dessas duas dinâmicas, diferenciamos as regiões de caos e hipercaos calculando a média dos expoentes de Lyapunov para vinte condições iniciais aleatórias ao longo de várias retas verticais traçadas no espaço de parâmetro acima. Para cada condição integramos o sistema com 3.500.000 pontos com um passo de 0,025. Para cada reta, o parâmetro  $\Delta$  variava entre  $[\Gamma; 0,49]$ , já que, valores de  $\Delta < \Gamma$  o sistema se encontra na região de travamento de fase onde a dinâmica é estacionária. O parâmetro  $\Gamma$  foi variado de 0,001 entre o intervalo  $[0,44; 0,49]$  afim de gerar diversos pontos que delimitam a transição de caos e hipercaos. Como exemplo, veja a figura 4.21:

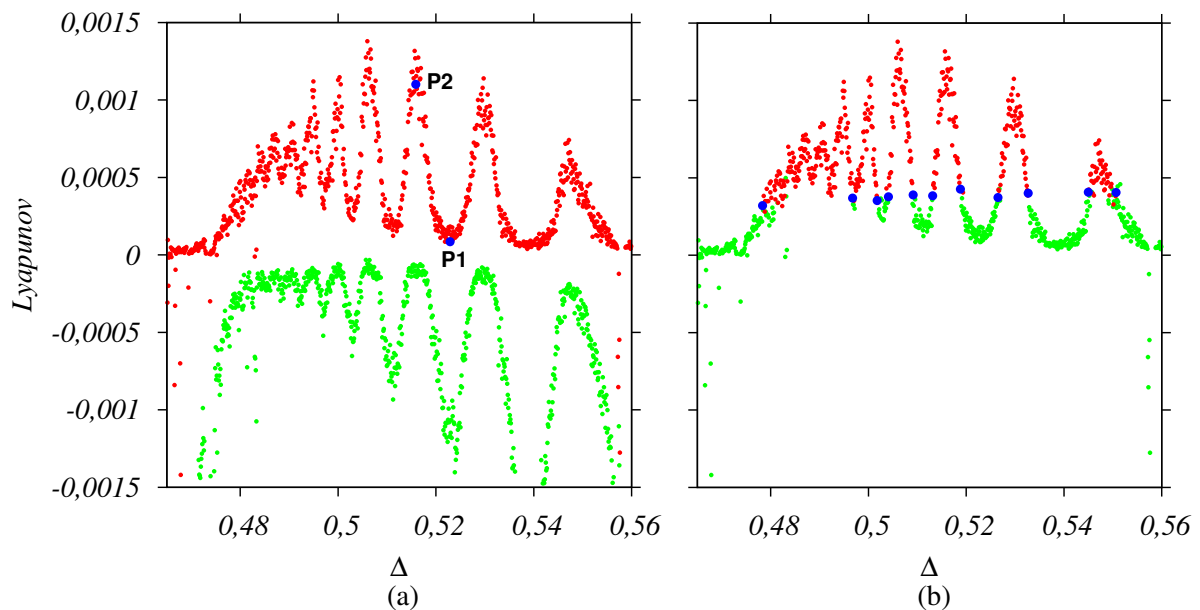


Figura 4.21: Figuras construídas para  $\eta = 1, 2$ ,  $\beta = 0, 6$ ,  $\epsilon = 0, 0097$  e  $\Gamma = 0, 465$ . (a) Média do segundo (pontos em vermelho) e terceiro (pontos em verde) maior expoente de Lyapunov para vinte condições iniciais (b) Pontos em vermelho indicando os valores do parâmetro  $\Delta$  em que há hipercaos e os verde onde há caos. Os pontos em azul marcam o ponto em que o sistema deixa de ser caótico e passa a ser hipercaótico.

A figura 4.21 (a) mostra como a média do segundo e terceiro maior expoente de Lyapunov varia ao longo da reta em  $\Gamma = 0, 465$ . Não plotamos o maior valor da média do expoente de Lyapunov porque a magnitude do expoente era muito maior do que o segundo e o terceiro, assim como o quarto e o quinto expoente eram muito menores. Dessa maneira, a análise de caos e hipercaos fica entre o segundo e o terceiro maior expoente de Lyapunov, pois já temos um expoente maior que zero e dois menores. Portanto, podemos ter duas situações: O segundo maior expoente de Lyapunov é zero e o terceiro é negativo, caracterizando uma dinâmica caótica, ou, o segundo maior expoente de Lyapunov é positivo e o terceiro é zero, caracterizando uma dinâmica hipercaótica. Como temos um número finito de integração, os expoentes de Lyapunov jamais serão exatamente zero, eles flutuam em torno do zero, sendo assim, para a nossa análise, tomamos o valor que



estivesse mais próximo de zero como sendo zero e com isso geramos a figura 4.21 (b), em que separa as regiões caóticas das hipercaóticas com as cores verde e vermelho respectivamente. Os pontos em azul marcam o ponto em que a dinâmica deixa de ser caótica e passa a ser hipercaótica. Com esses pontos, e todos os outros gerados para os outros valores do parâmetro  $\Gamma$ , conseguimos construir as curvas que delimitam as regiões hipercaóticas do espaço de parâmetros da figura 4.20.

Por fim, o leitor poderia se perguntar: Há mesmo essa transição de caos para hipercaos ou elas existem apenas porque a média dos expoentes de Lyapunov foi feita com apenas vinte condições iniciais? Em outras palavras, se aumentarmos o número de condições iniciais, ainda teríamos essa transição de caos e hipercaos? A resposta é sim. Tomamos dois pontos na figura, P1  $\{\Gamma = 0,465$  e  $\Delta = 0,515871\}$  e P2  $\{\Gamma = 0,465$  e  $\Delta = 0,522880\}$ , 4.21 (a), marcados em azul, e calculamos a média dos expoentes de Lyapunov para 100.000 condições iniciais. Os histogramas de cada expoente de Lyapunov para o ponto P1 são apresentados na figura 4.22. Se calcularmos o valor médio de cada expoentes de Lyapunov, encontramos que:  $\bar{\lambda}_1 = 0,0285$ ,  $\bar{\lambda}_2 = 5,6417 \times 10^{-5}$ ,  $\bar{\lambda}_3 = -0,001$ ,  $\bar{\lambda}_4 = -0,0163$  e  $\bar{\lambda}_5 = -0,0431$ . Como comentamos no parágrafo anterior, o primeiro maior expoente de Lyapunov é sempre bem positivo enquanto que o quarto e o quinto bem negativo, isso se torna claro ao analisar as médias dos expoentes de Lyapunov. Note que, analisando o segundo e o terceiro maior expoente de Lyapunov, temos que o terceiro é aproximadamente 20 vezes maior que o segundo, dessa maneira, podemos assumir que a média do segundo maior expoente de Lyapunov é nula e a do terceiro é negativa, caracterizando a dinâmica caótica.

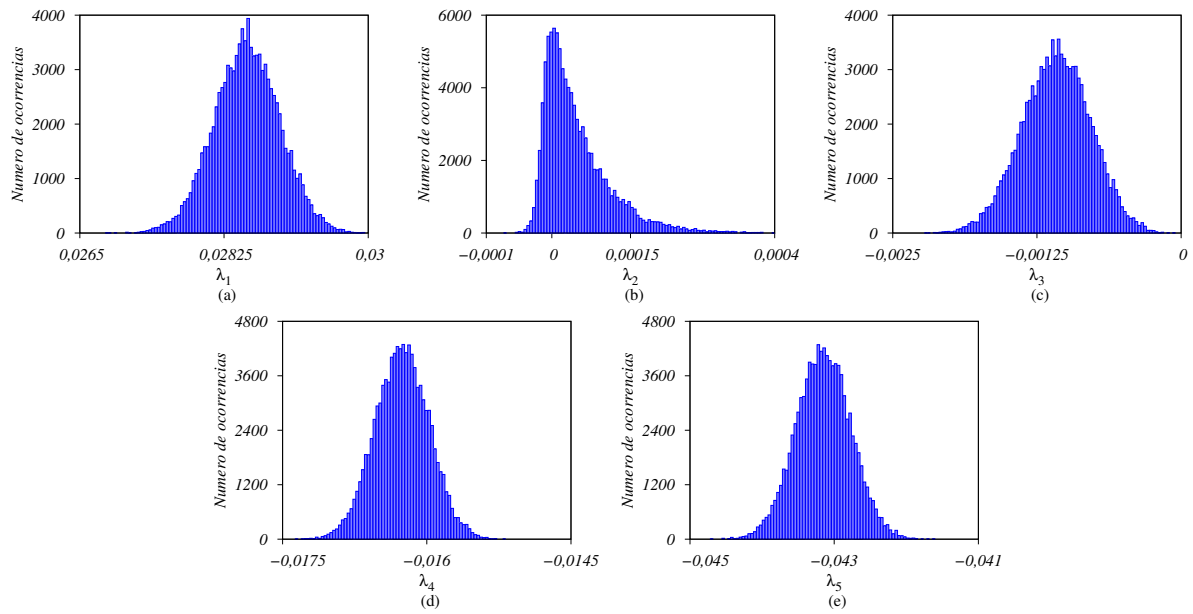


Figura 4.22: Média de 100.000 condições iniciais para o ponto P1 da figura 4.21 (a) do (a) primeiro maior expoente de Lyapunov (b) segundo (c) terceiro (d) quarto (e) quinto.

A figura 4.23 mostra o comportamento do atrator caótico para o ponto PC da figura 4.20 (b).

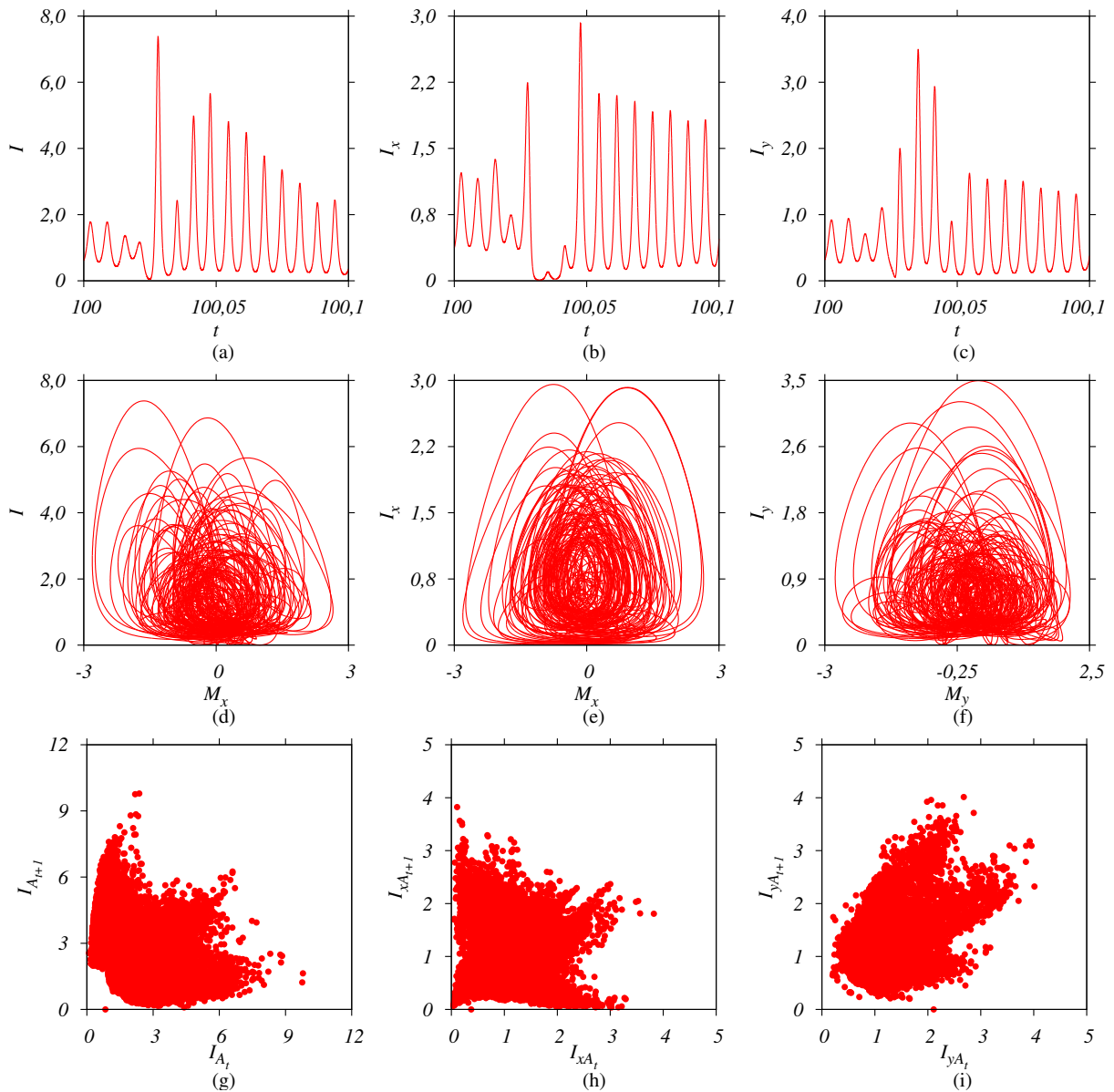


Figura 4.23: Séries temporais e atrator para  $\eta = 1, 2$ ,  $\epsilon = 0,0097$ ,  $\beta = 0,6$ ,  $\Gamma = 0,464$  e  $\Delta = 0,537$ , referente ao ponto PC da figura 4.20 (b). A figura (a) mostra a série temporal para a intensidade total, a (b) para a intensidade associada ao campo em x e a (c) para a intensidade associada ao campo em y. As figuras (d-f) são projeções dos atratores para a intensidade total e a intensidade associada a cada modo do laser. As figuras (g-i) mostram os mapas de retorno para a intensidade total.

Os histogramas de cada expoente de Lyapunov para o ponto P2 são apresentados na figura 4.24. Nesse caso, calculando o valor médio de cada expoente de Lyapunov, encontramos que:  $\bar{\lambda}_1 = 0,0281$ ,  $\bar{\lambda}_2 = 0,0010$ ,  $\bar{\lambda}_3 = -4,8072 \times 10^{-5}$ ,  $\bar{\lambda}_4 = -0,0179$  e  $\bar{\lambda}_5 = -0,0042$ . Novamente, o primeiro maior expoente de Lyapunov é bem positivo enquanto que o quarto e o quinto bem negativo. Diferente do caso anterior, agora temos que o segundo é aproximadamente 20 vezes menor que o terceiro, dessa maneira, podemos assumir que a média do terceiro maior expoente de Lyapunov é nula e a do segundo é

positiva, caracterizando a dinâmica hipercaótica.

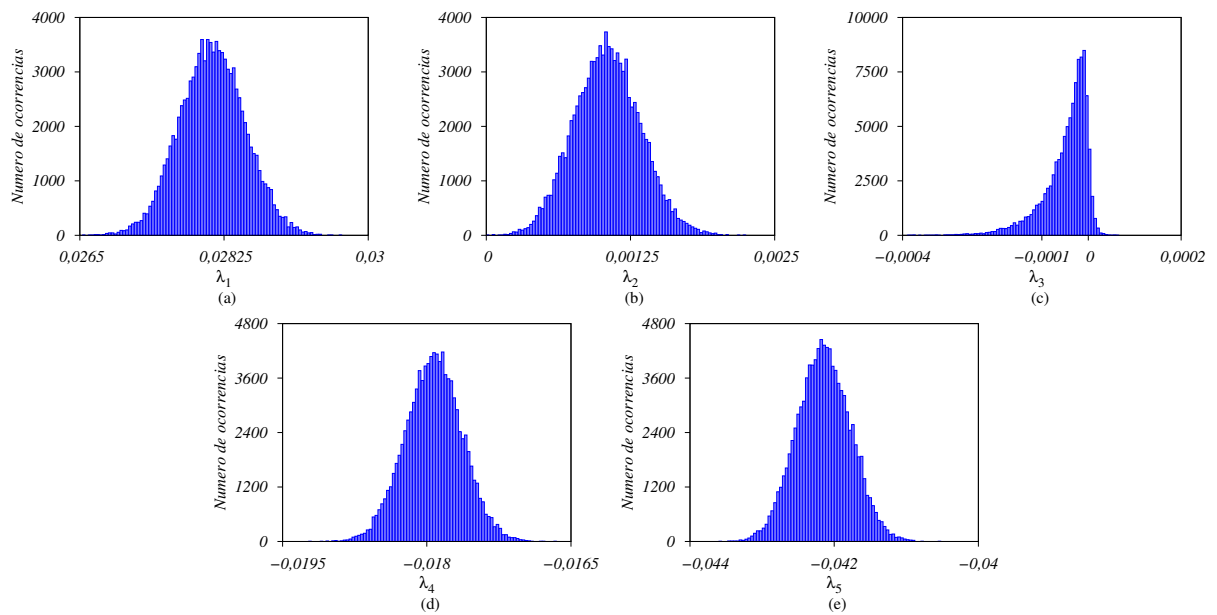


Figura 4.24: Média de 100.000 condições iniciais para o ponto P2 da figura 4.21 (a) do (a) primeiro maior expoente de Lyapunov (b) segundo (c) terceiro (d) quarto (e) quinto.

A figura 4.25 mostra o comportamento do atrator hipercaótico para o ponto PHC da figura 4.20 (b).

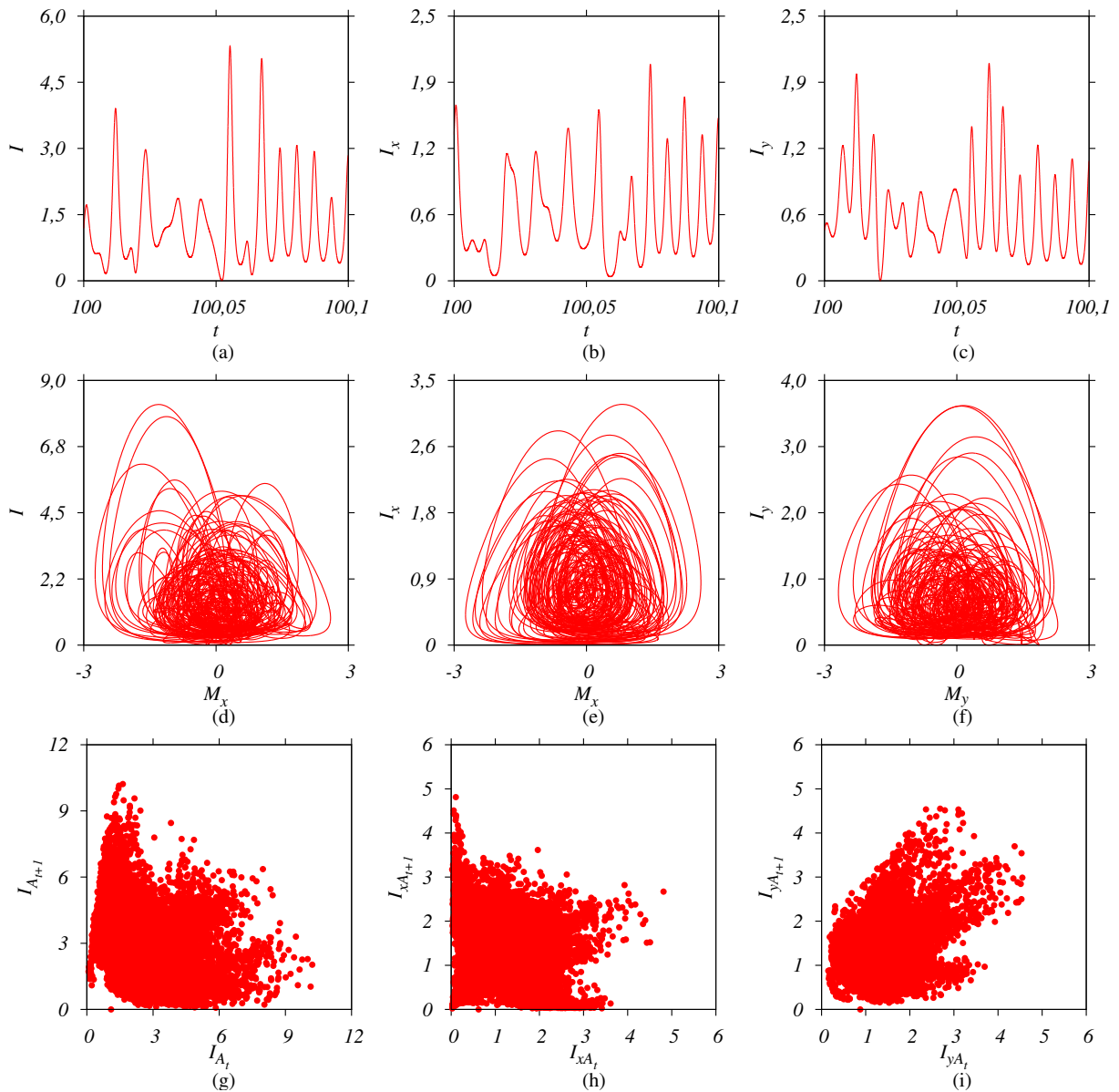


Figura 4.25: Séries temporais e atrator para  $\eta = 1, 2$ ,  $\epsilon = 0,0097$ ,  $\beta = 0,6$ ,  $\Gamma = 0,452$  e  $\Delta = 0,537$ , referente ao ponto PH da figura 4.20 (b). A figura (a) mostra a série temporal para a intensidade total, a (b) para a intensidade associada ao campo em x e a (c) para a intensidade associada ao campo em y. As figuras (d-f) são projeções dos atratores para a intensidade total e a intensidade associada a cada modo do laser. As figuras (g-i) mostram os mapas de retorno para a intensidade total.

Comparando as figuras 4.25 e 4.23 percebemos que as dinâmicas caótica e hipercaótica não diferem qualitativamente, quase não conseguimos diferenciar as duas dinâmicas, isso se deve ao fato de que o hipercaos apresentado aqui é muito fraco, os expoentes de Lyapunov são extremamente pequenos como apresentado nas figuras 4.24 e 4.22, de modo que a dinâmica caótica e hipercaótica diferem-se por muito pouco. Na próxima seção veremos o caso em que o hipercaos é forte.

### 4.3.2 Hipercaos “forte”

Na seção anterior mostramos que o parâmetro  $\epsilon$  influencia drasticamente na dinâmica do sistema, porém ele não é o único a fazer isso, o parâmetro  $\beta$ , responsável pela saturação cruzada do meio ativo do laser, também desempenha um papel fundamental na dinâmica. A figura 4.26 mostra a mudança da dinâmica do sistema conforme o parâmetro  $\beta$  é incrementado.

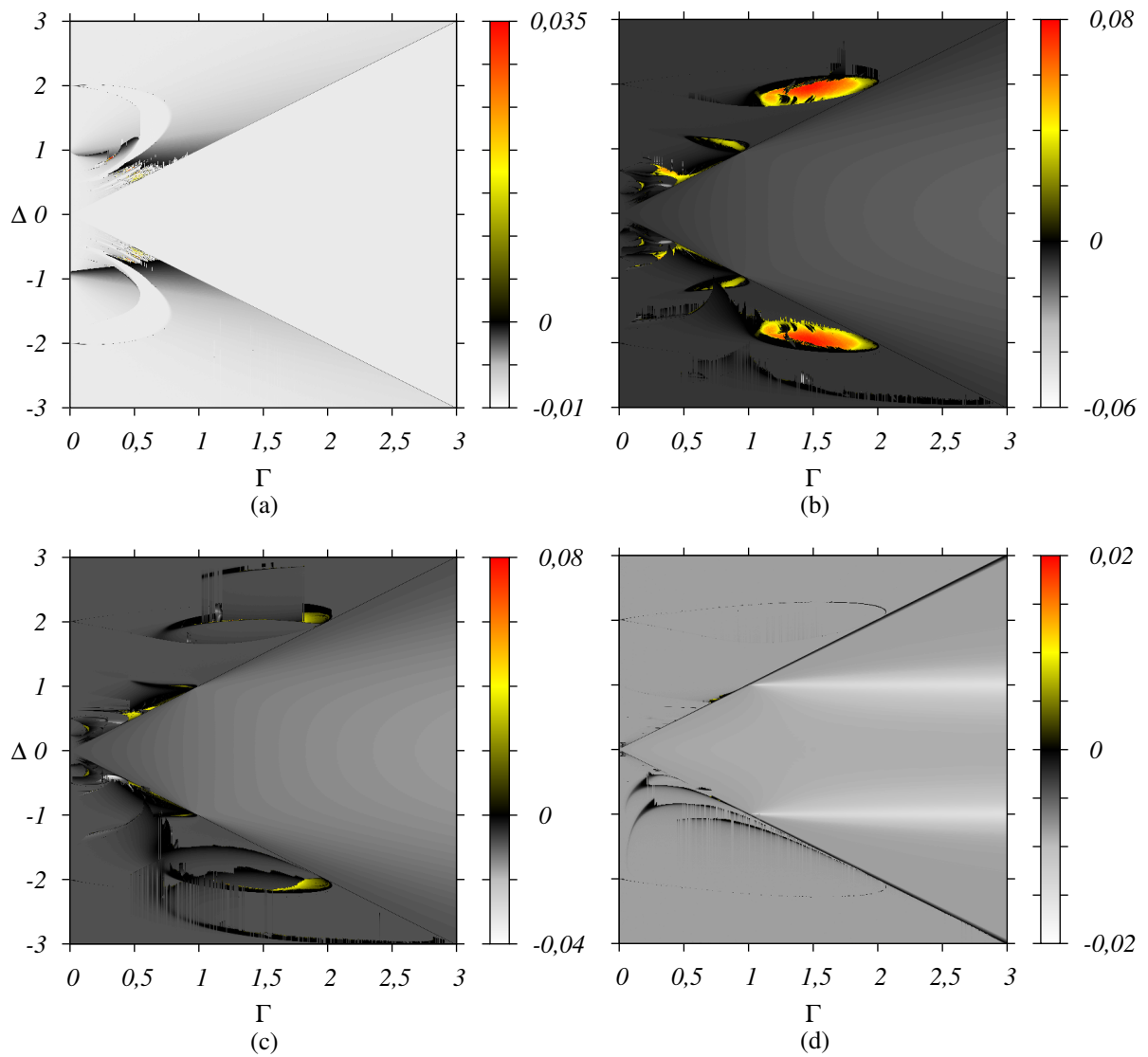


Figura 4.26: Espaços de parâmetros para  $\eta = 1,2$ ,  $\epsilon = 0,0097$  e (a)  $\beta = 0$ , (b)  $\beta = 0,5$ , (c)  $\beta = 0,6$  e (d)  $\beta = 0,9$

A figura 4.26 (a) mostra como o modelo se comporta quando  $\beta = 0$ , note que, neste caso, é como se os campos laser estivessem desacoplados, e recaímos no caso de um laser de dois modos com injeção óptica, como pode ser visto ao comparar com os resultados obtidos para um laser monomodo injetado opticamente por Toomey *et al.* em 2009 [34]. Conforme aumentamos o valor do parâmetro  $\beta$  a dinâmica vai ficando cada vez mais complexa, regiões caóticas vão surgindo e tomando uma região cada vez maior no espaço de parâmetros como é mostrado na figura 4.26 (b) para  $\beta = 0,5$ . Por outro lado, a partir de  $\beta = 0,5$ , a dinâmica volta a ficar menos complexa e as regiões caóticas vão diminuindo, como é mostrado na figura 4.26 (c) para  $\beta = 0,6$ , até desaparecer, como é o caso de  $\beta = 0,9$  da figura 4.26 (d).

Conforme aumentamos o valor do parâmetro  $\beta$ , partindo de  $\beta = 0$  até  $\beta = 0,5$ , a dinâmica caótica vai dando lugar à dinâmica hipercaótica, até chegar um ponto em que a dinâmica hipercaótica predomina. A partir de  $\beta = 0,6$  acontece o contrário, como é o caso de  $\beta = 0,6$  que já discutimos na seção anterior, em que a região hipercaótica aparece fracamente apenas numa pequena região do espaço de parâmetro, alternando com a dinâmica caótica. Uma análise mais extensiva da mudança da dinâmica com a alteração do parâmetro  $\beta$  ainda tem que ser realizada, mas ao que indica nossos estudos, o parâmetro  $\beta$  é responsável por alterar as dinâmicas caóticas e hipercaóticas no sistema, favorecendo uma ou outra, ou nenhuma, dependendo o valor que assume.

Se fixarmos  $\beta = 0,5$  e  $\epsilon = 0,0097$ , encontramos uma região de hipercaos extremamente forte, como mostrado na figura 4.27.

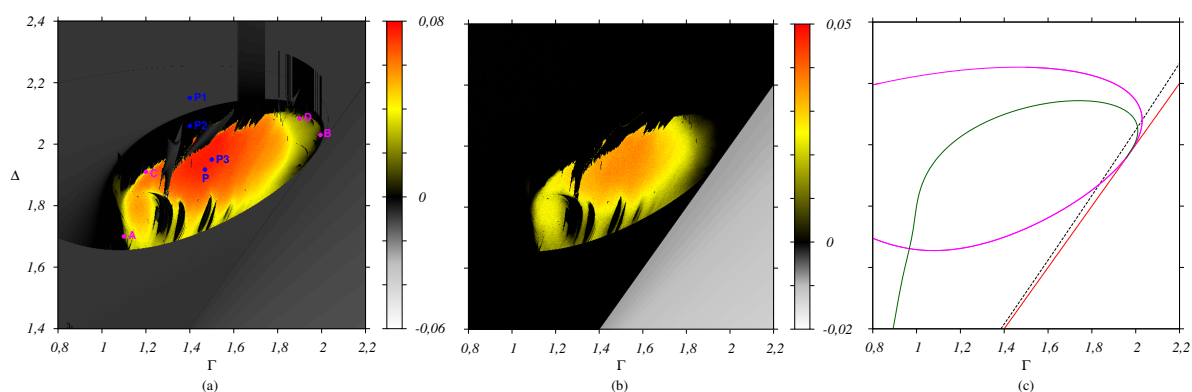


Figura 4.27: Espaço de parâmetros para  $\eta = 1, 2$ ,  $\epsilon = 0,0097$  e  $\beta = 0,5$ . (a) Figura construída com a informação do maior e segundo maior expoente de Lyapunov e (b) Figura construída com o segundo maior expoente de Lyapunov. (c) Curvas de bifurcação presentes no espaço de parâmetros da figura (a) e (b). A curva em vermelho sólido representa a bifurcação de Hopf supercrítica e a preto tracejada a sela-nó instável. A curvas em verde representa a bifurcação de torus e a em rosa a bifurcação de dobramento de período.

A figura 4.27 (c) mostra as duas curvas de bifurcação presentes nesta região: em rosa, temos a bifurcação de dobramento de período, em verde a bifurcação de torus e as curvas em preto tracejado e vermelho sólido representam as bifurcações de sela-nó instável e Hopf estável de ponto fixo respectivamente. A região em preto em torno da região em amarelo/vermelho da figura 4.27 (a) apresenta dinâmica quasi-periódica que nasce na curva de bifurcação de torus. Comparando as figuras 4.27 (a) e (b) temos que, diferente da figura 4.20, em que o hipercaos era fraco e limitado a uma pequena região do espaço de parâmetros, agora temos uma região grande de dinâmica hipercaótica, com um hipercaos bem forte. Note que a magnitude do segundo expoente de Lyapunov da figura 4.27 (b), é bem próxima do primeiro da figura 4.27 (a). Para mostrar o quão forte é o hipercaos nesta região, tomamos o ponto P ( $\Gamma = 1,46868$  e  $\Delta = 1,91734$ ) da figura 4.27 (a) e calculamos a média dos expoentes de Lyapunov para 200.000 condições iniciais. A figura 4.28 mostra o histograma de cada expoente de Lyapunov. Se calcularmos o valor médio de cada expoentes de Lyapunov, encontramos que:  $\bar{\lambda}_1 = 0,0659$ ,  $\bar{\lambda}_2 = 0,0307$ ,  $\bar{\lambda}_3 = -1,2292 \times 10^{-5}$ ,  $\bar{\lambda}_4 = -0,0778$  e  $\bar{\lambda}_5 = -0,1134$ . Agora temos que a magnitude do segundo maior expoente de Lyapunov é a metade do primeiro e, além disso, é aproximadamente 2000 vezes maior do que o terceiro, caracterizando, sem deixar dúvidas, a dinâmica hipercaótica.

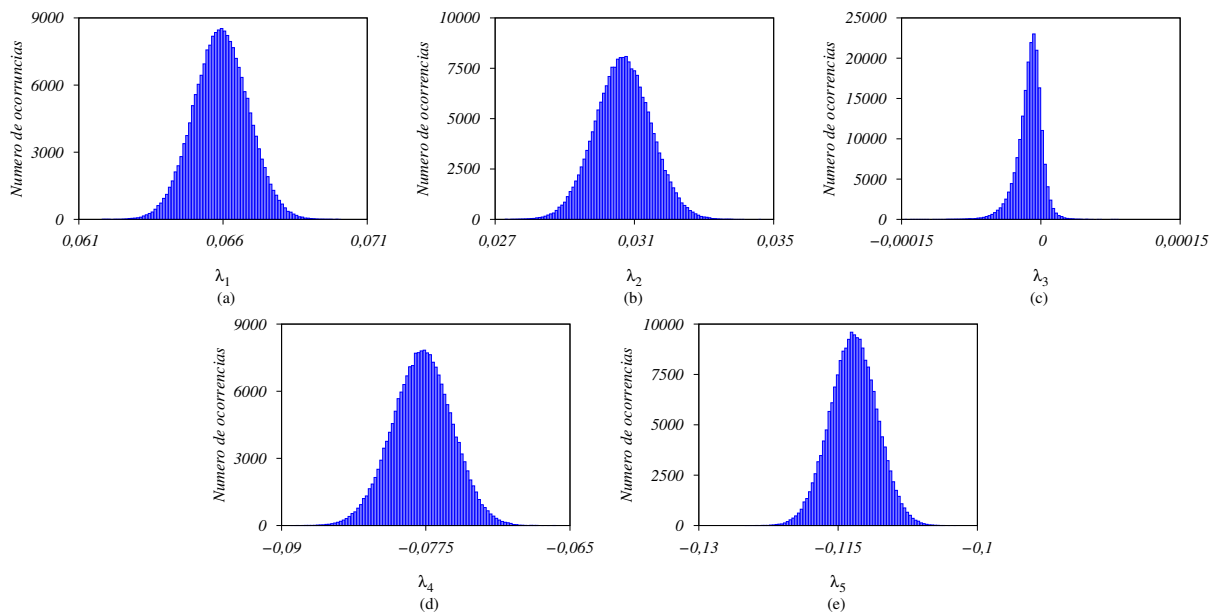


Figura 4.28: Média de 200.000 condições iniciais para o ponto P da figura 4.27 (a) do (a) primeiro maior expoente de Lyapunov, (b) segundo, (c) terceiro, (d) quarto e (e) quinto.



A figura 4.29 mostra o comportamento do atrator periódico para o ponto P1 da figura 4.27 (a).

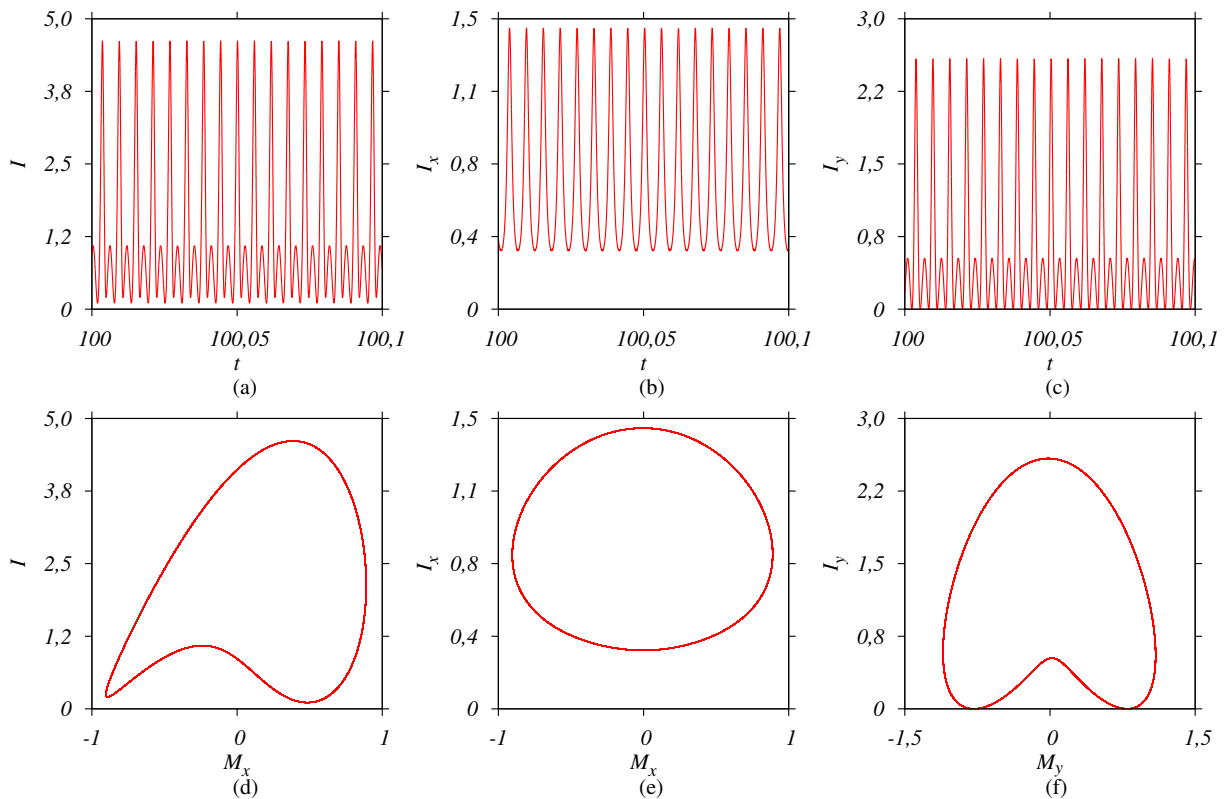


Figura 4.29: Séries temporais e atrator para  $\eta = 1, 2$ ,  $\epsilon = 0, 0097$ ,  $\beta = 0, 5$ ,  $\Gamma = 1, 4$  e  $\Delta = 2, 1$ , referente ao ponto P1 da figura 4.27 (a). A figura (a) mostra a série temporal para a intensidade total, a (b) para a intensidade associada ao campo em x e a (c) para a intensidade associada ao campo em y. As figuras (d-f) são projeções dos atratores para a intensidade total e a intensidade associada a cada modo do laser.

Continuando no mesmo valor do parâmetro  $\Gamma$ , conforme o parâmetro  $\Delta$  decrementa, o atrator periódico encontra a bifurcação de torus e sofre uma bifurcação, deixando de ser um atrator periódico e se tornando um atrator quase periódico na região do ponto P2 da figura 4.27 (a) como mostrado na figura 4.30.

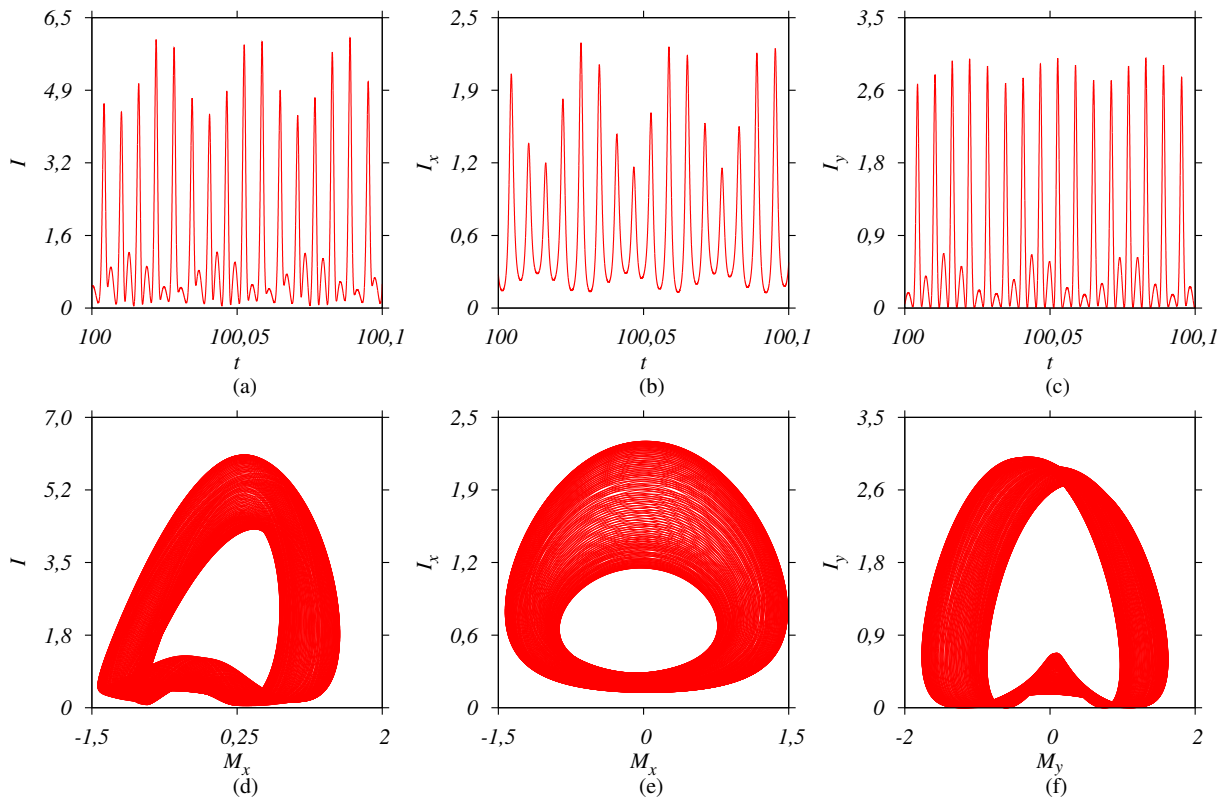


Figura 4.30: Séries temporais e atrator para  $\eta = 1, 2$ ,  $\epsilon = 0,0097$ ,  $\beta = 0,5$ ,  $\Gamma = 1,4$  e  $\Delta = 2,06$ , referente ao ponto P2 da figura 4.27 (a). A figura (a) mostra a série temporal para a intensidade total, a (b) para a intensidade associada ao campo em x e a (c) para a intensidade associada ao campo em y. As figuras (d-f) são projeções dos atratores para a intensidade total e a intensidade associada a cada modo do laser.

Essa dinâmica quase periódica continua até que repentinamente seu comportamento muda para uma dinâmica caótica. Como o intervalo de dinâmica caótica é muito pequeno, tomamos o ponto B da figura 4.27 (a) para mostrar o comportamento caótico.

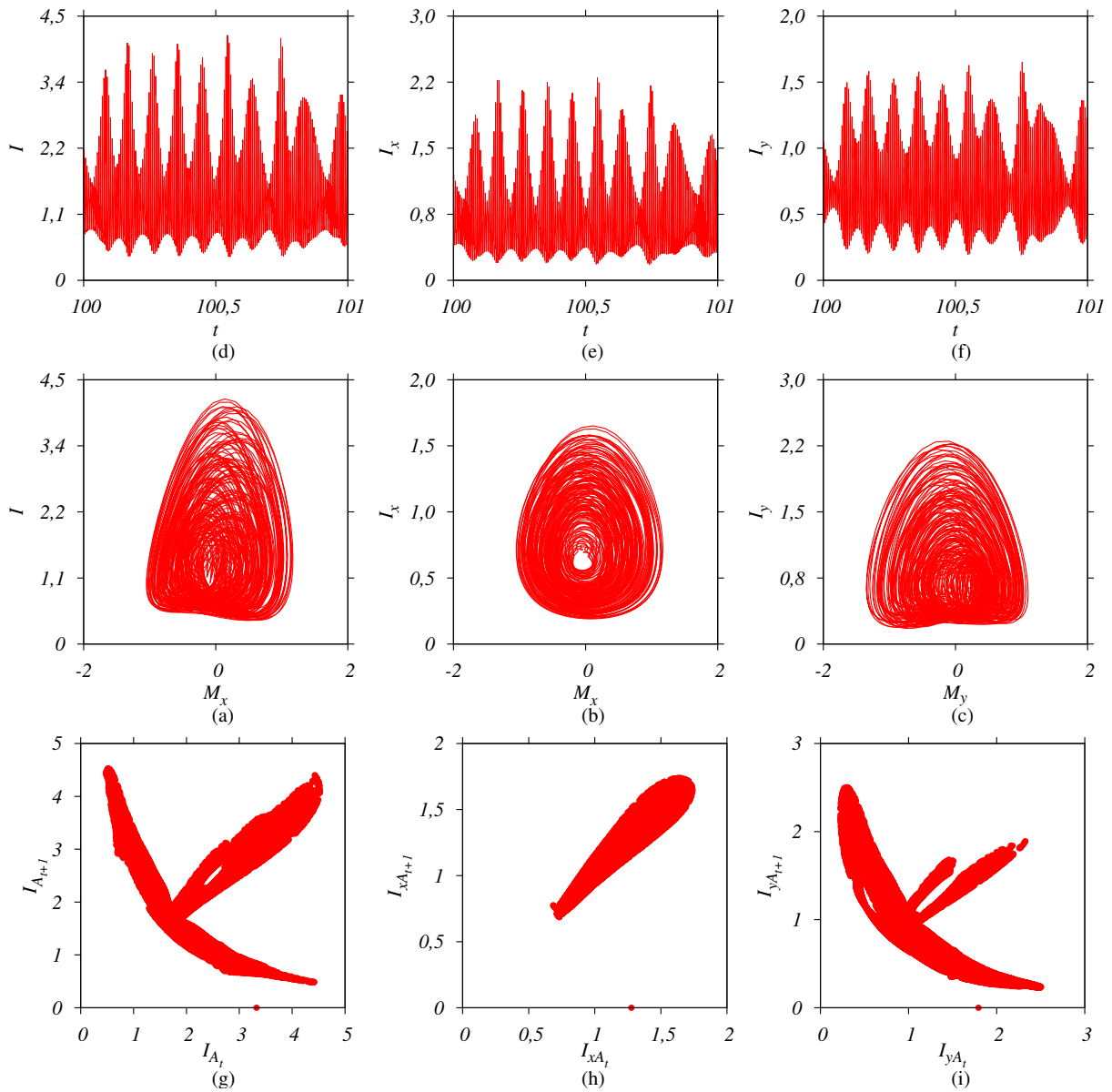


Figura 4.31: Séries temporais e atrator para  $\eta = 1,2$ ,  $\epsilon = 0,0097$ ,  $\beta = 0,5$ ,  $\Gamma = 1,99$  e  $\Delta = 2,03$ , referente ao ponto B da figura 4.27 (a). A figura (a) mostra a série temporal para a intensidade total, a (b) para a intensidade associada ao campo em x e a (c) para a intensidade associada ao campo em y. As figuras (d-f) são projeções dos atratores para a intensidade total e a intensidade associada a cada modo do laser. As figuras (g-i) mostram os mapas de retorno para a intensidade total.

Após passar pela região caótica, temos o aparecimento de dinâmica hipercaótica, como mostrado na figura 4.32, feito para a região do ponto P3 da figura 4.27 (a).

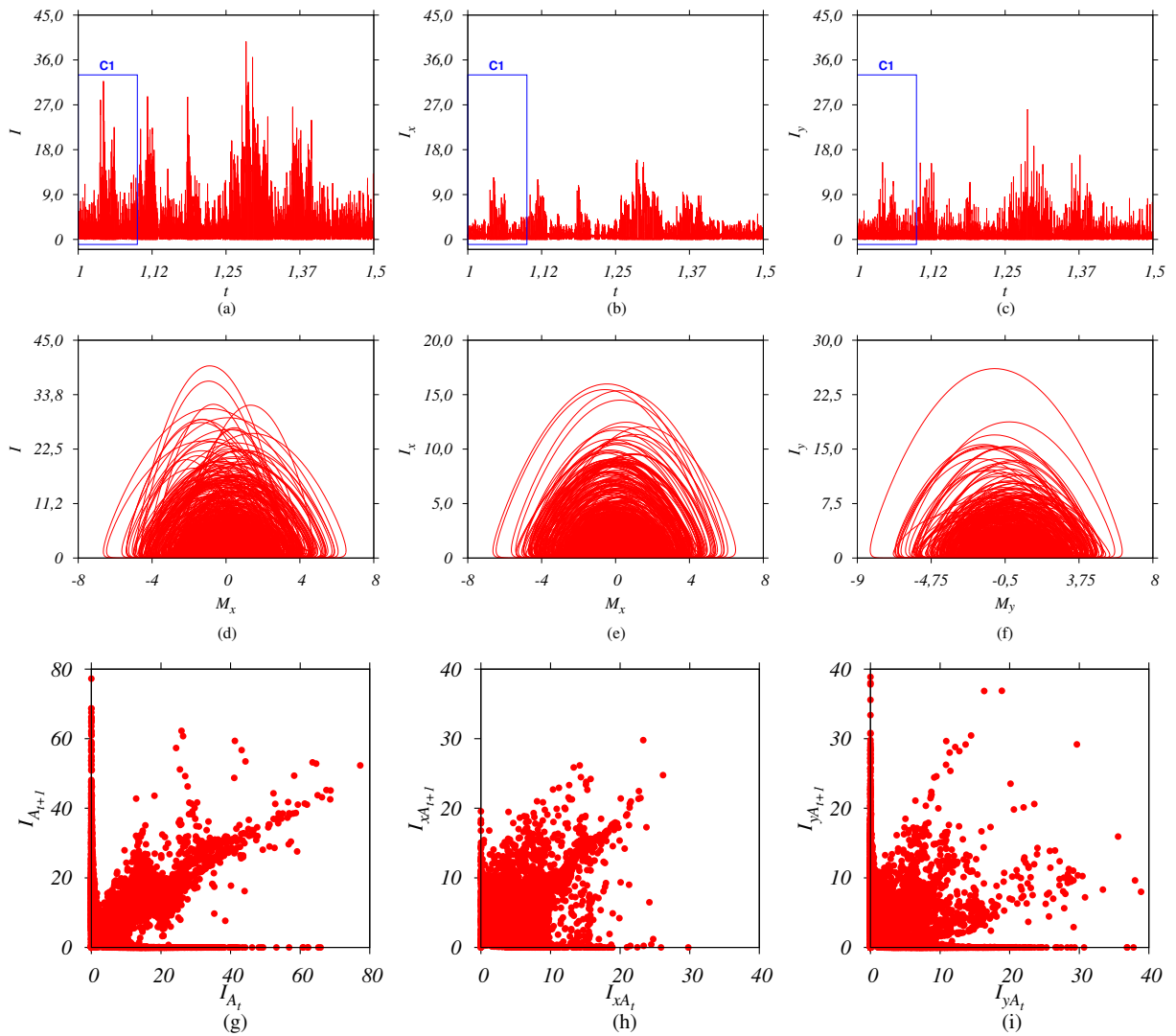


Figura 4.32: Séries temporais e atrator para  $\eta = 1, 2$ ,  $\epsilon = 0, 0097$ ,  $\beta = 0, 5$ ,  $\Gamma = 1, 5$  e  $\Delta = 1, 95$ , referente ao ponto P3 da figura 4.27 (a). A figura (a) mostra a série temporal para a intensidade total, a (b) para a intensidade associada ao campo em x e a (c) para a intensidade associada ao campo em y. As figuras (d-f) são projeções dos atratores para a intensidade total e a intensidade associada a cada modo do laser. As figuras (g-i) mostram os mapas de retorno para a intensidade total.

Como comentamos acima, a região de dinâmica caótica aparece apenas num pequeno intervalo de valores dos parâmetros  $\Gamma$  e  $\Delta$ , como apresentado na figura 4.33, que mostra a variação dos expoentes de Lyapunov na vizinhança dos pontos A, B, C e D da figura 4.27 (a).

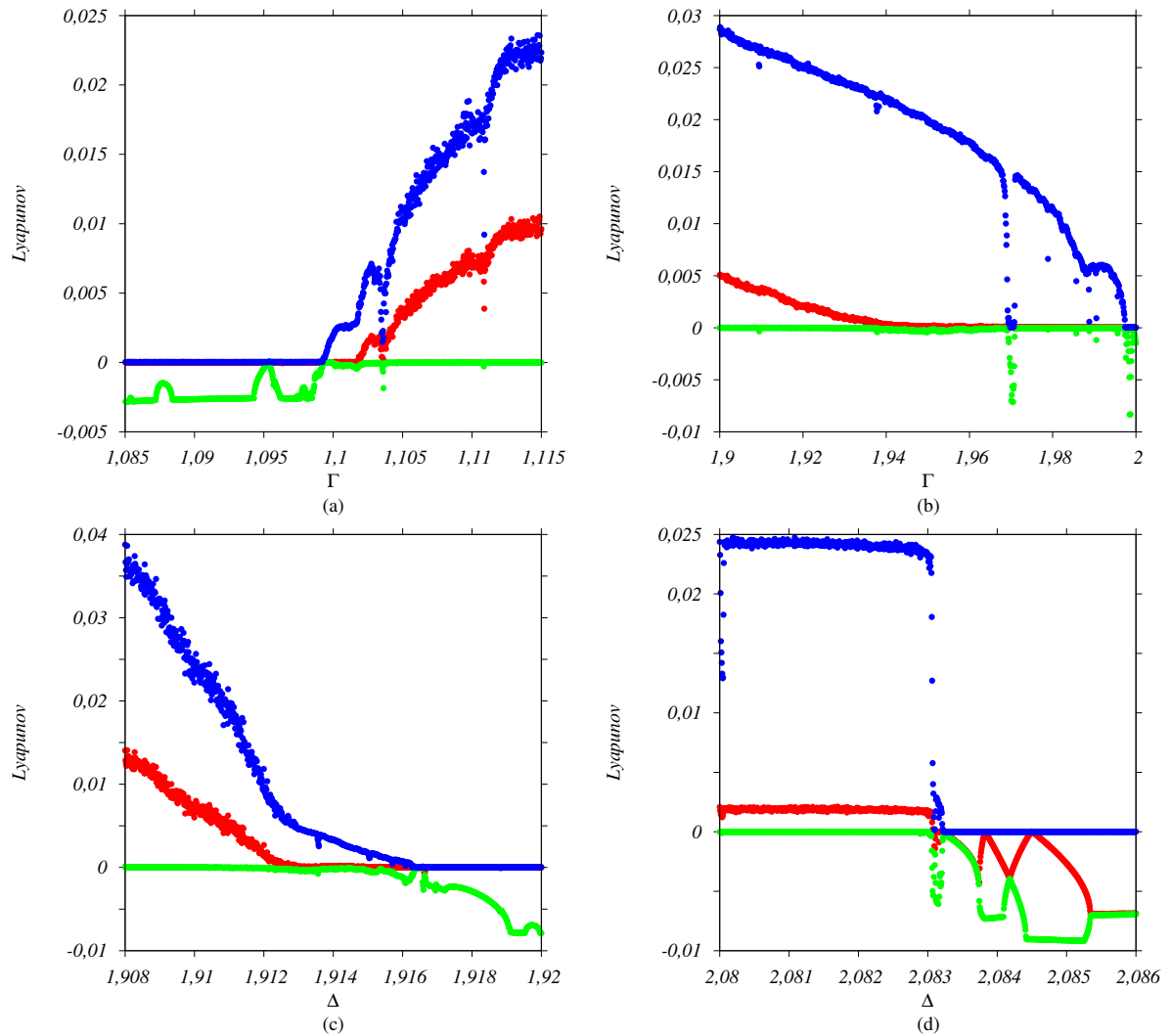


Figura 4.33: Primeiro (curva azul), segundo (curva vermelha) e terceiro (curva verde) maiores expoentes de Lyapunov para  $\beta = 0,5$ ,  $\eta = 1,2$ ,  $\epsilon = 0,0097$  e (a)  $\Delta = 1,7$  referente ao ponto A da figura 4.27 (a), (b)  $\Delta = 2,03$  referente ao ponto B da figura 4.27 (a), (c)  $\Gamma = 1,2$  referente ao ponto C da figura 4.27 (a) e (d)  $\Gamma = 1,9$  referente ao ponto D da figura 4.27 (a).

A figura 4.33 mostra que, antes do sistema transitar do estado quase periódico para o hipercaótico, ele passa por uma pequena região de dinâmica caótica. A transição de dinâmica quase periódica para caos é conhecida como uma rota para o caos via uma ruptura de um torus (do inglês, "break-up of a torus"), a referência [99] na página 62 faz uma análise detalhada do que ocorre nessa transição.

Por fim, nesta região hipercaótica, encontramos um fenômeno interessante. Fazendo uma ampliação na figura 4.32 (a-c), percebemos que a dinâmica encontrada oscila entre dois comportamento determinísticos, em que em um o laser oscila com grandes amplitudes no modo Q-switching e no outro apresenta pequenas oscilações irregulares, como apresentado na figura 4.34.

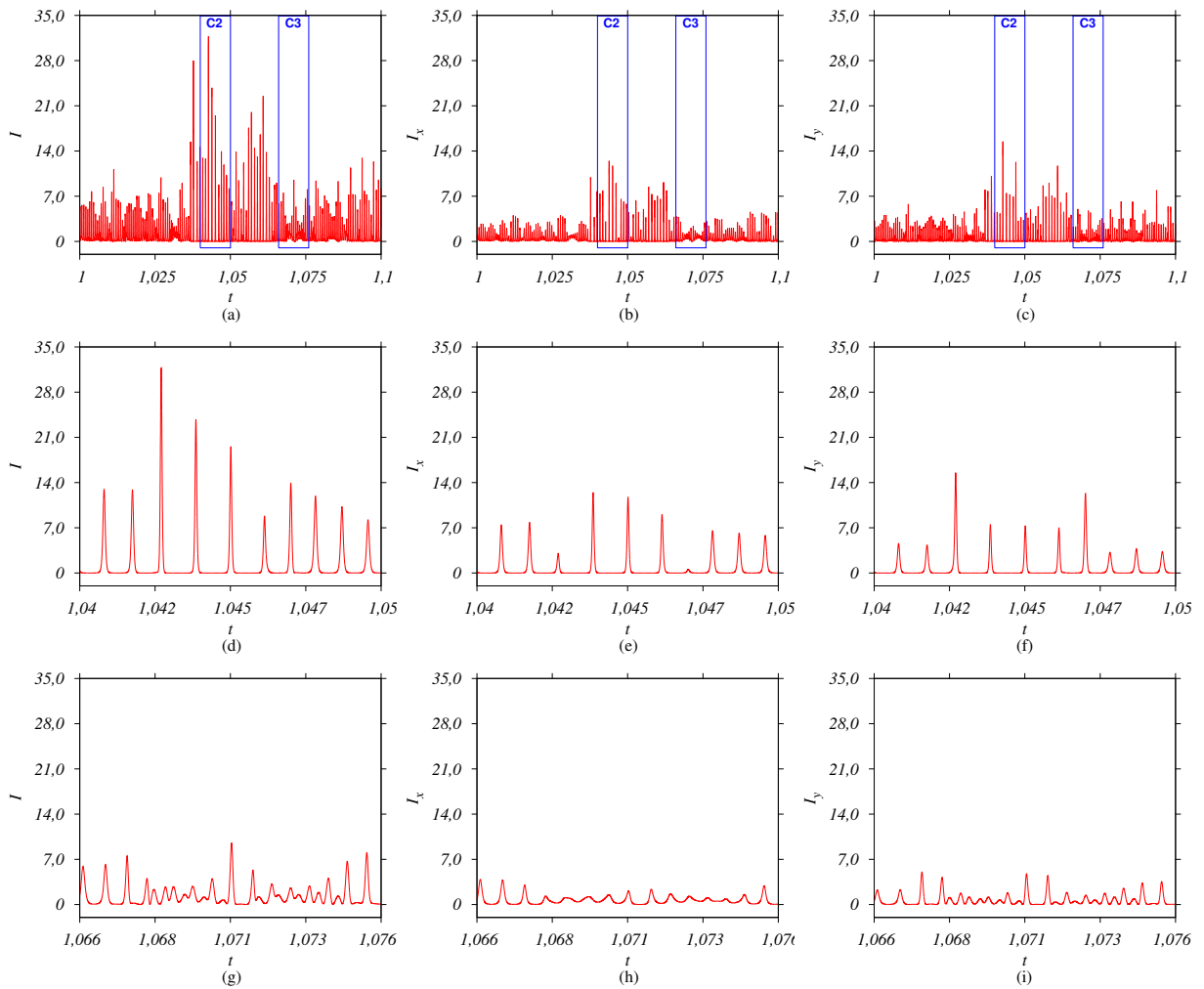


Figura 4.34: Séries temporais para  $\eta = 1, 2$ ,  $\epsilon = 0, 0097$ ,  $\beta = 0, 5$ ,  $\Gamma = 1, 4$  e  $\Delta = 1, 8$ . As figuras (a), (d) e (g) mostram a série temporal para a intensidade total, as (b), (e) e (h) para a intensidade associada ao campo em x e as (c), (f) e (i) para a intensidade associada ao campo em y. As figuras (a-c) são uma ampliação da região C1 da figura 4.32 (a-c). As figuras (d-f) são uma ampliação da região C2 das figuras (a-c). As figuras (g-i) são uma ampliação da região C3 das figuras (a-c).

Da figura 4.34 (a-c), mostra a região C1 da figura 4.27 e como comentamos acima apresenta dois comportamentos dinâmicos distintos. A figura 4.34 (d-f) mostra com detalhe a dinâmica em que a intensidade permanece um tempo no zero e depois dá um grande salto em seu valor, presente na região C2 das figuras 4.34 (a-c), enquanto que a figura 4.34 (c) mostra a região de oscilações irregulares de pequena amplitude, em que as oscilações chegam perto do zero, mas não permanecem nesse valor, presente na região C3 das figuras 4.34 (a-c). A dinâmica presente na região C2, 4.34 (a), é conhecida como Q-switching e é caracterizada por esse fato da dinâmica do laser apresentar regiões de intensidade bem pequenas, próximo do zero, seguidos por grandes pulsos. Basicamente, temos que o laser armazena energia durante um tempo e depois emite toda a energia armazenada, por isso esses grandes picos na intensidade. Um interessante resultado que mostramos aqui, é que

essa dinâmica alterna com a dinâmica hipercaótica.

## 4.4 Eventos extremos

### 4.4.1 Caso $\beta = 0,6$

Eventos extremos em óptica são eventos em que a intensidade da luz é muito maior do que a intensidade média dos eventos observados. Os eventos extremos são raros, isto é, tem baixa probabilidade de ocorrência. Apesar de baixa probabilidade, tem se observado em diversos sistemas que eventos extremos são muito mais prováveis do que preditos por modelos gaussianos, isto é, são geralmente associados com distribuições de cauda longa. Uma maneira de se definir o limiar de um evento extremo é tomar a média da distribuição mais oito vezes o desvio padrão da média da distribuição. A figura 4.35 mostra a distribuição de probabilidade da amplitude de intensidade para dois casos na região de transição de caos e hipercaos “fraco” do parâmetro  $\beta = 0,6$ .

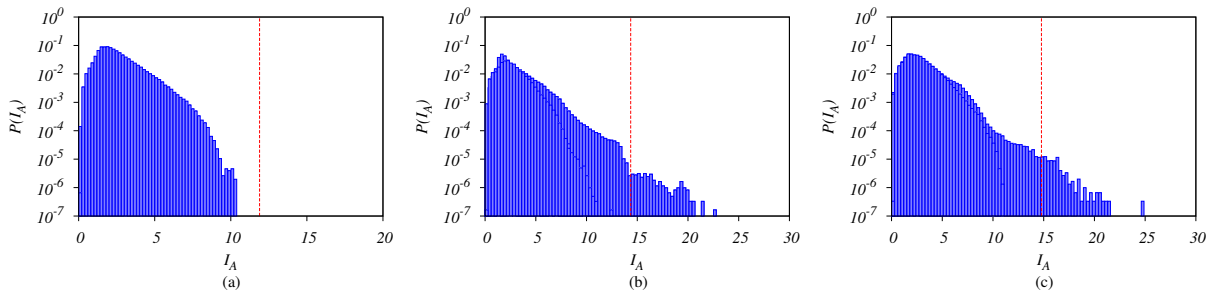


Figura 4.35: Distribuição de probabilidade para os máximos da amplitude da intensidade para  $\eta = 1, 2$ ,  $\epsilon = 0,0097$ ,  $\beta = 0,6$ , (a)  $\Gamma = 0,48$  e  $\Delta = 0,52$  (Ponto P da figura 4.20), (b)  $\Gamma = 0,464$  e  $\Delta = 0,537$  (Ponto PC da figura 4.20) e (c)  $\Gamma = 0,452$  e  $\Delta = 0,537$  (Ponto PHC da figura 4.20). A linha tracejada em vermelho marca o limite para a amplitude de intensidade ser considerada como um evento extremo.

No primeiro caso, figura 4.35 (a), temos a distribuição estatística para os máximos da amplitude de intensidade do ponto P da figura 4.20 (a) e vemos que nesse caso não há eventos extremos. No segundo caso, figura 4.35 (b), temos a distribuição estatística para os máximos da amplitude de intensidade do ponto caótico (PC) da figura 4.20 (a). Mesmo a probabilidade de um evento extremo ocorrer ser baixa, ainda assim, temos que 1 a cada 500 mil pulsos aproximadamente apresentaram amplitudes maiores que o limiar definido para a ocorrência desse evento. Já no terceiro caso, figura 4.35 (c), temos a distribuição estatística para os máximos da amplitude de intensidade do ponto hipercaótico (PHC) da figura 4.20 (a). Note que, a probabilidade estatística de um evento

extremo ocorrer ainda continua baixa, porém, agora temos que 1 a cada 100mil pulsos aproximadamente já apresentam amplitudes maiores que o limiar. Dessa maneira, uma pergunta que nos fazemos é: será que o aumento da probabilidade de um evento extremo ocorrer está associado com o aumento das irregularidades no sistema? Ou seja, quanto mais hipercaótica a região for, mais chances teremos de encontrar eventos extremos? Para responder essa pergunta, analisaremos a região de hipercaos “forte” para  $\beta = 0,5$ .

#### 4.4.2 Caso $\beta = 0,5$

Na seção anterior, mostramos a presença de eventos extremos em regiões de caos e hipercaos “fraco” do parâmetro  $\beta = 0,6$ . Analisaremos agora 4 casos para o parâmetro  $\beta = 0,5$ , fixando o parâmetro  $\Delta = 2,03$  e variando o parâmetro  $\Gamma$ . Os 4 pontos estão mostrados na figura 4.36, em que cada um foi tomado num regime diferente de dinâmica.

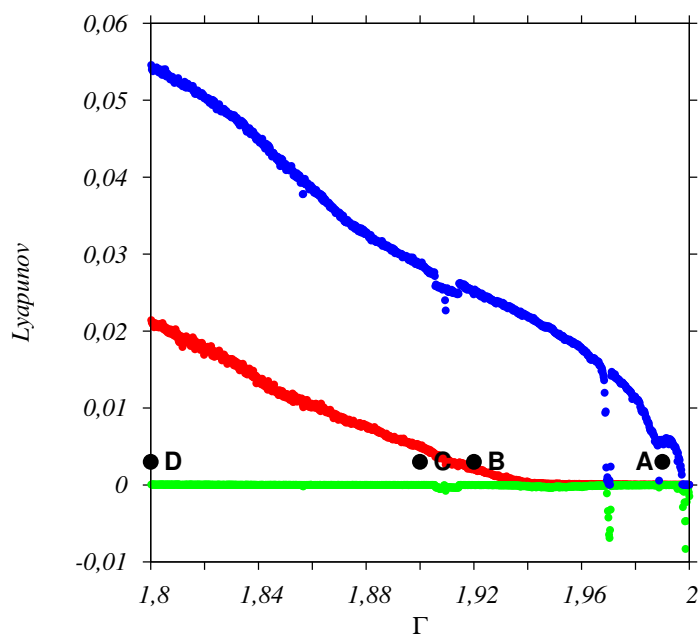


Figura 4.36: Primeiro (curva azul), segundo (curva vermelha) e terceiro (curva verde) maiores expoentes de Lyapunov para  $\beta = 0,5$ ,  $\eta = 1,2$ ,  $\epsilon = 0,0097$  e  $\Delta = 2,03$ .

A figura 4.37 mostra a distribuição estatística dos pontos P1, P2, P3 e P4 da figura 4.36.



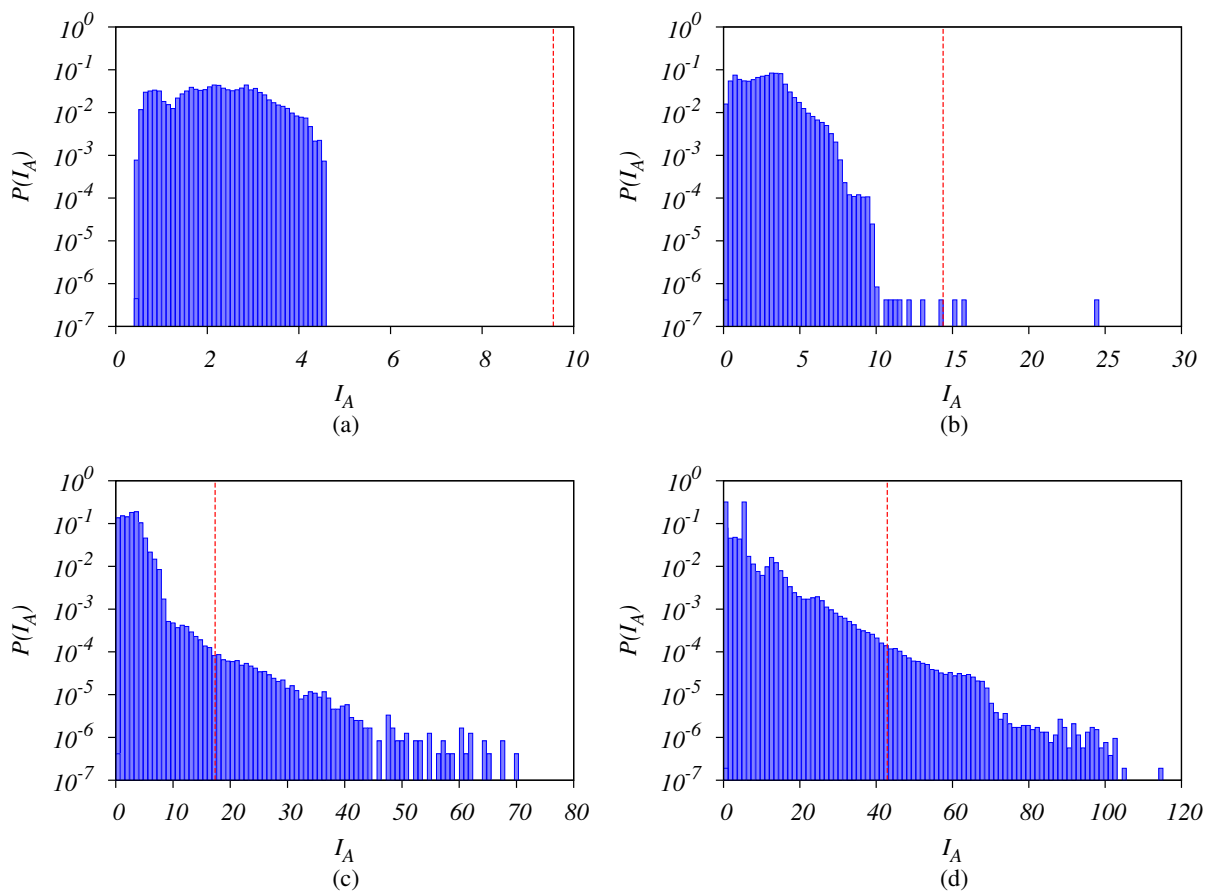


Figura 4.37: Distribuição de probabilidade para os máximos da amplitude da intensidade para  $\eta = 1, 2$ ,  $\epsilon = 0,0097$ ,  $\beta = 0,5$ , (a)  $\Gamma = 1,99$  e  $\Delta = 2,03$  referente ao ponto A da figura 4.36, (b)  $\Gamma = 1,92$  e  $\Delta = 2,03$  referente ao ponto B da figura 4.36, (c)  $\Gamma = 1,9$  e  $\Delta = 2,03$  referente ao ponto C da figura 4.36 e (d)  $\Gamma = 1,8$  e  $\Delta = 2,03$  referente ao ponto D da figura 4.36. A linha tracejada em vermelho marca o limite para a amplitude de intensidade ser considerada como um evento extremo.

A figura 4.37 (a) mostra que a distribuição estatística do ponto P1 que opera num regime de dinâmica caótica não apresenta eventos extremos, todos os valores de amplitude de intensidade estão abaixo do limiar definido para ocorrer o evento. Já a figura 4.37 (b), para o ponto P2, mostra que, assim que entramos no regime de dinâmica hipercaótica “forte”, os eventos extremos começam ocorrer com baixa probabilidade, ou seja, 1 a cada aproximadamente 1 milhão de pulsos apresentam eventos extremos. Conforme avançamos e a dinâmica vai se tornando cada vez mais hipercaótica, a probabilidade de eventos extremos ocorrer aumenta, como pode ser visto da figura 4.37 (c) e (d), em que para o ponto P3 e P4 temos que a probabilidade estatística de um evento extremo ocorrer é de 1 a cada 10mil. A diferença de P3 e P4 é que, por mais que a probabilidade do evento extremo ocorrer ser praticamente igual, conforme a dinâmica do sistema ficou mais hipercaótica, a quantidade de amplitude da intensidade que podem ser acessadas devido ao evento extremo aumenta.

Por fim, um resultado importante que mostramos, é que os eventos extremos ocorrem em porções extensas do espaço de parâmetros, ou seja, ocorrem em regiões de parâmetros que não estão nas proximidades de uma crise, como pode ser visto nas figuras 4.38 (b) e (c).

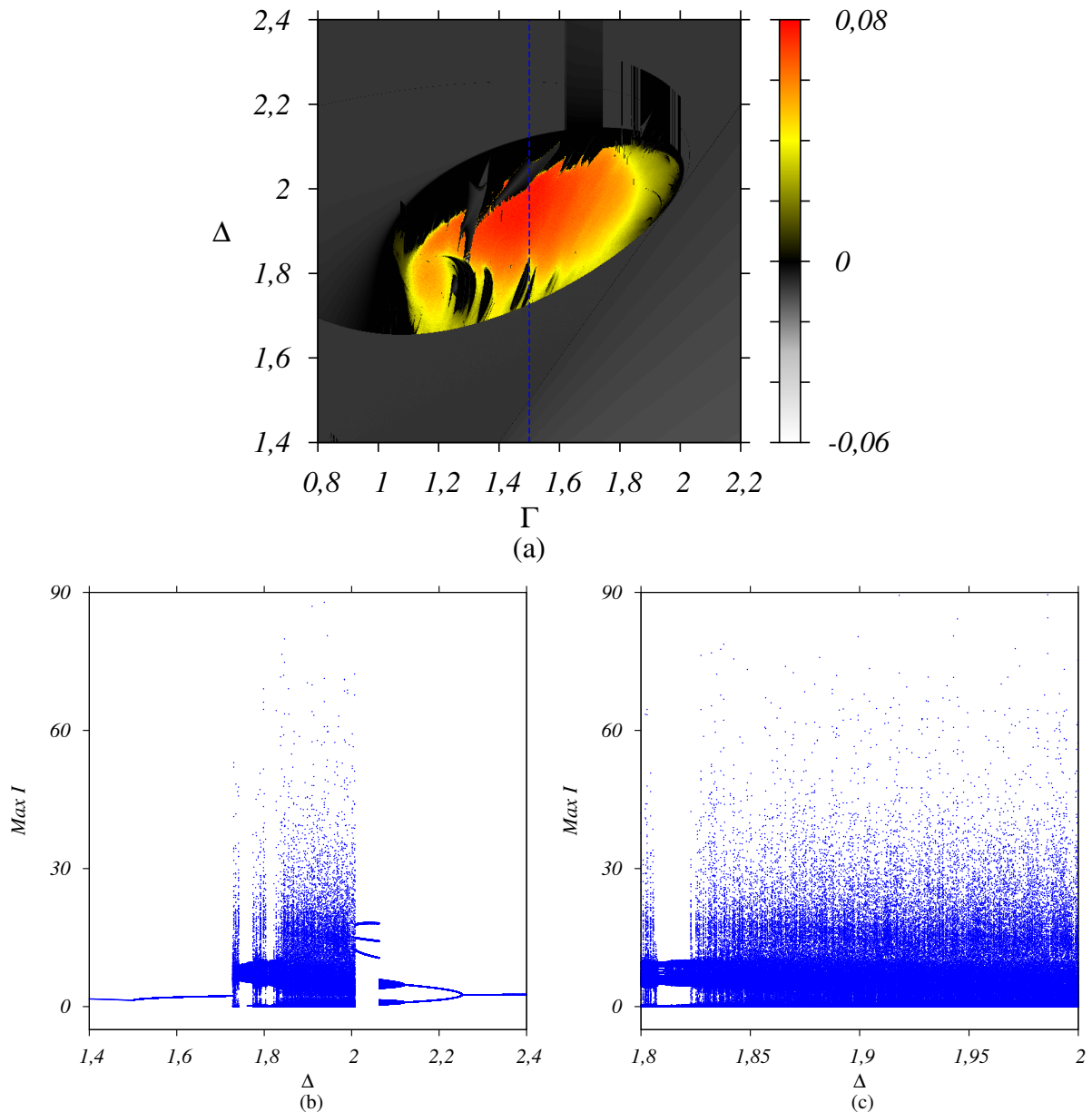


Figura 4.38: (a) Espaço de parâmetros para  $\eta = 1, 2$ ,  $\epsilon = 0, 0097$  e  $\beta = 0, 5$ . (b) Diagrama de bifurcação da reta traçada na figura (a) para  $\Gamma = 1, 5$  (c) Ampliação da figura (b).

A figura 4.38 (b) mostra os máximos da intensidade total para a variação do parâmetro  $\Delta$  no espaço de parâmetros da figura 4.38 (a) enquanto o parâmetro  $\Gamma$  está fixo em  $\Gamma = 1, 5$ . Note que, não há nenhuma evidência de que tenha crises de atratores caóticos dentro da região que encontramos o hipercaos “forte”, isso fica mais claro quando olhamos para a figura 4.38 (c) que é uma ampliação dessa região.

## Conclusões

Neste trabalho estudamos a dinâmica de um laser de estado sólido de duas frequências sujeito a realimentação óptica com frequência modificada. Mostramos que o parâmetro  $\epsilon$ , que descreve o tempo de vida da inversão populacional é responsável pelo surgimento de várias instabilidades no sistema analisado. Para valores grandes do parâmetro  $\epsilon$ , a dinâmica do laser é bastante simples, admitindo apenas soluções estacionárias e órbitas periódicas de período um. Nesse caso, as únicas curvas de bifurcações presentes são a de Hopf e sela-nó de pontos fixos e, além disso, existem dois pontos de bifurcação de Bogdanov-Takens de codimensão dois, um no ramo superior e outro no inferior da curva de sela-nó e Hopf. Ao que nossos resultados indicam, dinâmicas mais complexas, como o fenômeno de multiestabilidade, curvas de bifurcações de dobramento de período que conduzem ao caos e uma sela-nó de órbitas periódicas, começam a surgir em torno do ponto de bifurcação de Bogdanov-Takens. Conforme diminuimos o valor do parâmetro  $\epsilon$  surgem novos pontos de bifurcação, primeiro surge um ponto de codimensão três de Bautin que em seguida se separa em dois pontos de codimensão dois. Na sequência, um ponto de codimensão dois de zero-Hopf nasce em cada ponto de bifurcação de Bogdanov-Takens. Esses pontos se separam, com os pontos de zero-Hopf se afastando cada vez mais enquanto os de Bogdanov-Takens se aproximam, até um momento em que colidem e desaparecem. Após o desaparecimento do ponto de bifurcação de Bogdanov-Takens as dinâmicas complexas que haviam surgido em torno dele se "espalham" por toda a região do espaço de parâmetro e daí em diante o sistema passa a apresentar dinâmicas cada vez mais complexas.

Como comentado acima, após o desaparecimento do ponto de bifurcação de Bogdanov-Takens, para valores mais baixos do parâmetro  $\epsilon$ , o sistema apresenta uma dinâmica extremamente rica. Novas curvas de bifurcação de dobramento de período e sela-nó de

órbitas periódicas aparecem, assim como diversas curvas de bifurcação de torus e um aumento do fenômeno de multiestabilidade. Regiões caóticas se tornam cada vez mais comum, ocupando uma extensão maior do espaço de parâmetros.

Como o modelo que estudamos apresenta dimensionalidade maior que três, dinâmicas mais complexas, como hipercaos, podem aparecer. Mostramos que o aparecimento (ou não) da dinâmica hipercaótica está associada ao parâmetro de acoplamento dos modos  $\beta$ , que nos possibilitou encontrar dois regimes distintos, um que denominamos de hipercaos “fraco” e o outro de hipercaos “forte”. Mostramos que para um conjunto de valores de parâmetros realístico desse modelo, onde foi encontrada previamente uma boa concordância entre simulações numéricas e dados experimentais, há uma pequena região de hipercaos “fraco”, ou seja, região em que o primeiro expoente de Lyapunov é bem positivo e o segundo, apesar de também ser positivo, tem uma magnitude bem menor, ficando muito próximo de zero. Nessa região, encontramos transições de regiões caóticas para regiões de dinâmica hipercaótica fraca. Essa transição foi estudada em detalhe e conseguimos mostrar os pontos em que elas ocorrem. Para valores em torno de  $\beta = 0,5$  a dinâmica é bastante complicada, surgindo regiões de hipercaos “forte”, ou seja, regiões em que temos dois expoentes de Lyapunov bem positivos. Nesta região encontramos uma interessante alternância determinística entre duas dinâmicas bem distintas, onde em uma o laser apresenta oscilações de Q-switching com grande amplitude e na outra oscilações irregulares de menor amplitude.

Também investigamos o que ocorre para outros valores do parâmetro  $\beta$ . Para valores de  $\beta$  nas extremidades, ou seja, tendendo para o caso desacoplado ( $\beta = 0$ ) e acoplamento forte ( $\beta = 1$ ), a dinâmica é mais simples, sendo que para  $\beta = 0$  o sistema desacopla, recaindo no caso de um laser monomodo com injeção óptica [34] e para  $\beta = 1$  o sistema opera num regime de acoplamento forte [45].

Por fim, nas regiões de caos e hipercaos dos casos  $\beta = 0,6$  e  $\beta = 0,5$  estudamos a distribuição estatística das amplitudes dos pulsos de intensidade do laser e mostramos a existência de eventos extremos. Para  $\beta = 0,6$  mostramos que os eventos extremos ocorrem na região de caos e hipercaos “fraco” que analisamos, mas com baixa probabilidade. Já para  $\beta = 0,5$ , na região em que encontramos o hipercaos “forte”, mostramos que os eventos extremos ocorrem em porções extensas do espaço de parâmetros, ou seja, ocorrem em regiões de parâmetros que não estão nas proximidades de uma crise. Além disso, mostramos que conforme as irregularidades aumentam, os eventos extremos se tornam mais frequente, podendo acessar grandes valores de intensidade de amplitude. O fato de ele poder acessar intensidades com grandes amplitudes está associado ao regime

---

Q-switching (que alterna com as oscilações irregulares de pequenas amplitudes) que encontramos nessa região. Esse regime faz com que tenhamos grandes saltos em grandes valores da intensidade.

De modo geral, o modelo que investigamos se mostrou extremamente interessante para ser estudado. Dinâmicas mais complexas normalmente aparecem em modelos que levam em conta o parâmetro de reforço de linha (fator alpha), como no caso dos lasers de semicondutores, ou em modelos de alta dimensionalidade que levam em conta o tempo de atraso (delay). Em sistemas de alta dimensionalidade é comum ocorrer situações em que muitos expoentes de Lyapunov são positivos. Entretanto em sistemas de baixa dimensionalidade isto não é tão comum. Recentemente foi mostrado que um laser de semicondutor com emissão superficial de cavidade superficial, em um modelo de baixa dimensão, a presença de conduta hipercaótica [100]. Entretanto este laser apresenta o fator alpha diferente de zero. É importante mencionar que mesmo sem levar em conta esses parâmetros, nosso sistema apresentou uma dinâmica extremamente rica, apresentando dinâmicas hipercaóticas, transições determinísticas de dois regimes distintos e eventos extremos. Atribuímos essa grande complexidade ao parâmetro  $\beta$ , que leva em conta a saturação cruzada e o acoplamento entre os modos.

Para trabalhos futuros, pretendemos incluir os parâmetros de tempo de atraso (delay) e reforço de linha (fator alpha), analisando a dinâmica resultante.

## Equação de campo redimensionalizada

Sejam as equações do modelo de duas frequências de Lang-Kobayashi [47],

$$\frac{dE_x}{dt} = [-\gamma + \kappa(n_x + \beta n_y)] \frac{E_x}{2} + 2i\pi\nu_x E_x, \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{dE_y}{dt} = [-\gamma + \kappa(n_y + \beta n_x)] \frac{E_y}{2} + 2i\pi\nu_y E_y + \gamma_e E_x e^{4i\pi f_{AO} y + i\psi}, \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{dn_{x,y}}{dt} = \gamma_{\parallel} P - [\gamma_{\parallel} + \zeta(|E_{x,y}|^2 + \beta|E_{y,x}|^2)] n_{x,y}. \quad (\text{A.3})$$

Podemos reescrever as equações acima de uma maneira mais conveniente para integração numérica utilizando as seguintes variáveis redimensionadas:

$$E_x = \frac{\Omega_r}{\sqrt{\gamma\zeta}} e^{2i\pi\nu_x t - i\psi} e_x, \quad (\text{A.4})$$

$$E_y = \frac{\Omega_r}{\sqrt{\gamma\zeta}} e^{2i\pi(\nu_x + 2f_{AO})t} e_y, \quad (\text{A.5})$$

$$n_{x,y} = \frac{\gamma}{\kappa(1+\beta)} \left( 1 + \frac{\Omega_r}{\sqrt{\gamma\zeta}} M_{x,y} \right), \quad (\text{A.6})$$

$$s = \Omega_r t. \quad (\text{A.7})$$

Substituindo as equações A.4, A.6 e A.7 em A.1:

$$\begin{aligned}
& \frac{\Omega_r}{\sqrt{\gamma\zeta}} 2i\pi\nu_x e^{2i\pi\nu_x t - i\psi} e_x + \frac{\Omega_r}{\sqrt{\gamma\zeta}} e^{2i\pi\nu_x t - i\psi} \frac{de_x}{ds} \Omega_r = \\
& \left\{ -\gamma + \kappa \frac{\gamma}{\kappa(1+\beta)} \left[ \left( 1 + \frac{\Omega_r}{\gamma} M_x \right) + \beta \left( 1 + \frac{\Omega_r}{\gamma} M_y \right) \right] \right\} \\
& \quad \times \frac{\Omega_r}{\sqrt{\gamma\zeta}} e^{2i\pi\nu_x t - i\psi} e_x + 2i\pi\nu_x \frac{\Omega_r}{\sqrt{\gamma\zeta}} e^{2i\pi\nu_x t - i\psi} \frac{e_x}{2},
\end{aligned} \tag{A.8}$$

fazendo algumas simplificações algébricas a equação A.8 assume a forma:

$$\frac{de_x}{ds} = \frac{1}{\Omega_r} \left[ -\gamma + \frac{1}{(1+\beta)} (-\gamma + \Omega_r M_x + \beta\gamma + \Omega_r \beta M_y) \right] \frac{e_x}{2}, \tag{A.9}$$

após mais algumas simplificações chegamos a expressão final para o campo elétrico na direção  $\hat{x}$ :

$$\boxed{\frac{de_x}{ds} = \frac{(m_x + \beta m_y)}{2(1+\beta)} e_x}$$

Substituindo agora as equações A.4, A.5, A.6 e A.7 em A.2:

$$\begin{aligned}
& \frac{\Omega_r}{\sqrt{\gamma\zeta}} 2i\pi(\nu_x + 2f_{AO}) e^{2i\pi(\nu_x + 2f_{AO})t} e_y + \frac{\Omega_r}{\sqrt{\gamma\zeta}} e^{2i\pi(\nu_x + 2f_{AO})t} \frac{de_y}{ds} \Omega_r = \\
& \left\{ -\gamma + \frac{\kappa\gamma}{\kappa(1+\beta)} \left[ \left( 1 + \frac{\Omega_r}{\gamma} M_y \right) + \beta \left( 1 + \frac{\Omega_r}{\gamma} M_x \right) \right] \right\} \\
& \quad \times \frac{\Omega_r}{\sqrt{\gamma\zeta}} e^{2i\pi(\nu_x + 2f_{AO})t} \frac{e_y}{2} + 2i\pi\nu_y \frac{\Omega_r}{\sqrt{\gamma\zeta}} e^{2i\pi(\nu_x + 2f_{AO})t} e_y + \\
& \quad \quad \quad \gamma_e \frac{\Omega_r}{\sqrt{\gamma\zeta}} e^{2i\pi\nu_x t - i\psi} e^{4i\pi f_{AO} t + i\psi},
\end{aligned} \tag{A.10}$$

fazendo algumas simplificações algébricas a equação A.10 assume a forma:

$$\frac{de_y}{ds} = \frac{(m_y + \beta m_x)}{2(1+\beta)} e_y + 2i\pi \frac{(\nu_y - \nu_x - 2f_{AO})}{\Omega_r} e_y + \frac{\gamma_e}{\Omega_r} e_x, \tag{A.11}$$

utilizando o fato de que  $2\pi(\nu_y - \nu_x - 2f_{AO}) = \Delta\Omega_r$  chegamos a expressão final para o campo elétrico na direção  $\hat{y}$ :

$$\boxed{\frac{de_y}{ds} = \frac{m_y + \beta m_x}{2(1 + \beta)} + i\Delta e_y + \Gamma e_x}$$

onde  $\Gamma = \frac{\gamma_e}{\Omega_r}$ . Por fim, substituindo as equações A.4, A.5, A.6 e A.7 em A.3:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{\kappa(1 + \beta)} \frac{1}{\gamma} \frac{\Omega_r}{ds} \frac{dM_{x,y}}{\Omega_r} = \gamma_{\parallel} P - \left[ \gamma_{\parallel} + \zeta \frac{\Omega_r^2}{\gamma \zeta} |e_{x,y}|^2 + \beta \zeta \frac{\Omega_r^2}{\gamma \zeta} |e_{y,x}|^2 \right] \\ \times \frac{\gamma}{\kappa(1 + \beta)} \left( 1 + \frac{\Omega_r}{\gamma} M_{x,y} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

fazendo algumas simplificações algébricas a equação A.12 assume a forma:

$$\begin{aligned} \frac{dM_{x,y}}{ds} = \frac{\gamma_{\parallel} P \kappa (1 + \beta)}{\Omega_r^2} - \left[ \frac{\gamma_{\parallel} \gamma}{\Omega_r^2} + |e_{x,y}|^2 + \beta |e_{y,x}|^2 \right] - \\ \left[ \frac{\gamma_{\parallel}}{\Omega_r} + |e_{x,y}|^2 \frac{\Omega_r}{\gamma} + \beta |e_{x,y}|^2 \frac{\Omega_r}{\gamma} \right] M_{x,y}. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Mas  $\kappa P = \frac{\gamma \eta}{(1 + \beta)}$  então,

$$\begin{aligned} \frac{dM_{x,y}}{ds} = \frac{\gamma_{\parallel} \gamma \eta}{\Omega_r^2} - \frac{\gamma_{\parallel} \gamma}{\Omega_r^2} - (|e_{x,y}|^2 + \beta |e_{y,x}|^2) - \frac{\gamma_{\parallel}}{\Omega_r} M_{x,y} - \\ \frac{\Omega_r}{\gamma} (|e_{x,y}|^2 + \beta |e_{x,y}|^2) M_{x,y}. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Mas  $\Omega_r^2 = \gamma_{\parallel} \gamma (\eta - 1)$  e  $\epsilon = \frac{\gamma_{\parallel}}{\Omega_r}$  logo,

$$\begin{aligned} \frac{dM_{x,y}}{ds} = 1 - (|e_{x,y}|^2 + \beta |e_{y,x}|^2) - \epsilon M_{x,y} - \epsilon (\eta - 1) \\ \times (|e_{x,y}|^2 + \beta |e_{x,y}|^2) M_{x,y}. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Enfim, após mais algumas simplificações chegamos a expressão final para as inversões populacionais em  $x$  e  $y$ :

$$\boxed{\frac{dM_{x,y}}{ds} = 1 - (|e_{x,y}|^2 + \beta |e_{y,x}|^2) - \epsilon M_{x,y} [1 + (\eta - 1) \times (|e_{x,y}|^2 + \beta |e_{y,x}|^2)].}$$



## Transformação das equações de campo para intensidade e fase

Podemos escrever os campos em  $x$  e  $y$  em termos de suas componentes reais e imaginárias.

$$e_x = e_{xr} + ie_{xi}, \quad (\text{B.1})$$

$$e_y = e_{yr} + ie_{yi}, \quad (\text{B.2})$$

onde  $e_{xr}$ ,  $e_{yr}$  e  $e_{xi}$ ,  $e_{yi}$  os campos em  $x$  e  $y$  com suas partes reais e imaginárias, respectivamente. Dessa forma, podemos reescrever as equações [3.3](#) da seguinte maneira:

$$\frac{de_{xr}}{ds} = \frac{m_x + \beta m_y}{2(1 + \beta)} e_{xr}, \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{de_{xi}}{ds} = \frac{m_x + \beta m_y}{2(1 + \beta)} e_{xi}, \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{de_{yr}}{ds} = \frac{m_y + \beta m_x}{2(1 + \beta)} e_{yr} - \Delta e_{yi} + \Gamma e_{xr}, \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{de_{yi}}{ds} = \frac{m_y + \beta m_x}{2(1 + \beta)} e_{yi} + \Delta e_{yr} + \Gamma e_{xi}, \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned} \frac{dM_{x,y}}{ds} &= 1 - (|e_{x,y}|^2 + \beta |e_{y,x}|^2) - \epsilon M_{x,y} [1 + (\eta - 1) \\ &\times (|e_{x,y}|^2 + \beta |e_{y,x}|^2)]. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Definimos então,

$$e_{xr,yr} = \frac{\sqrt{\gamma_{\parallel}\gamma}}{\Omega_r} \sqrt{I_{x,y}} \cos \phi_{x,y}, \quad (\text{B.8})$$

$$e_{xi,yi} = \frac{\sqrt{\gamma_{\parallel}\gamma}}{\Omega_r} \sqrt{I_{x,y}} \sin \phi_{x,y}, \quad (\text{B.9})$$

$$M_{x,y} = [(1 + \beta)N_{x,y} - 1] \frac{\gamma}{\Omega_r}. \quad (\text{B.10})$$

Substituindo as equações B.8 e B.10 na equação B.3:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\gamma_{\parallel}\gamma}}{\Omega_r} \frac{1}{2} \frac{\cos \phi_x}{\sqrt{I_x}} \frac{dI_x}{ds} - \frac{\sqrt{\gamma_{\parallel}\gamma}}{\Omega_r} \sqrt{I_x} \sin \phi_x \frac{d\phi_x}{ds} = \\ \frac{[(1 + \beta)N_x - 1 + (1 + \beta)N_y\beta - \beta]}{2(1 + \beta)} \frac{\gamma}{\Omega_r} \frac{\sqrt{\gamma_{\parallel}\gamma}}{\Omega_r} \sqrt{I_x} \cos \phi_x, \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

fazendo algumas simplificações algébricas a equação B.11 assume a forma:

$$\cos \phi_x \frac{dI_x}{ds} - 2I_x \sin \phi_x \frac{d\phi_x}{ds} = (N_x + \beta N_y - 1) \frac{\gamma}{\Omega_r} I_x \cos \phi_x. \quad (\text{B.12})$$

Substituindo as equações B.8 e B.10 na equação B.5:

$$\frac{\sqrt{\gamma_{||}\gamma}}{\Omega_r} \frac{1}{2} \frac{\sin \phi_x}{\sqrt{I_x}} \frac{dI_x}{ds} + \frac{\sqrt{\gamma_{||}\gamma}}{\Omega_r} \sqrt{I_x} \cos \phi_x \frac{d\phi_x}{ds} = \frac{[(1+\beta)N_x - 1 + (1+\beta)N_y\beta - \beta]}{2(1+\beta)} \frac{\gamma}{\Omega_r} \frac{\sqrt{\gamma_{||}\gamma}}{\Omega_r} \sqrt{I_x} \sin \phi_x, \quad (\text{B.13})$$

fazendo algumas simplificações algébricas a equação B.13 assume a forma:

$$\sin \phi_x \frac{dI_x}{ds} + 2I_x \sin \phi_x \frac{d\phi_x}{ds} = (N_x + \beta N_y - 1) \frac{\gamma}{\Omega_r} I_x \sin \phi_x. \quad (\text{B.14})$$

Multiplicando a equação B.12 por  $\sin \phi_x$ , a B.14 por  $\cos \phi_x$  e subtraindo uma da outra obtemos a equação de taxa para a intensidade associada a direção x:

$$\frac{dI_x}{ds} = (N_x + \beta N_y - 1) \frac{\gamma}{\Omega_r} I_x. \quad (\text{B.15})$$

Voltando ao tempo  $t$  sem a normalização:

$$\boxed{\frac{1}{\gamma} \frac{dI_x}{dt} = (N_x + \beta N_y - 1) I_x.}$$

Multiplicando a equação B.12 por  $\cos \phi_x$ , a B.14 por  $\sin \phi_x$  e somando as equações obtemos:

$$4I_x \frac{d\phi_x}{ds} = 0. \quad (\text{B.16})$$

Portanto  $\phi_x = \text{constante!}$

Vamos fazer a transformada do campo para intensidade associada à direção  $y$ . Substituindo as equações B.8, B.9 e B.10 na equação B.6:

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{\gamma_{\parallel}\gamma}}{\Omega_r} \frac{1}{2} \frac{\cos \phi_y}{\sqrt{I_y}} \frac{dI_y}{ds} - \frac{\sqrt{\gamma_{\parallel}\gamma}}{\Omega_r} \sqrt{I_y} \sin \phi_y \frac{d\phi_y}{ds} = \\
& \frac{[(1+\beta)N_y - 1 + (1+\beta)N_x\beta - \beta]}{2(1+\beta)} \frac{\gamma}{\Omega_r} \frac{\sqrt{\gamma_{\parallel}\gamma}}{\Omega_r} \sqrt{I_y} \cos \phi_y \\
& - \Delta \frac{\sqrt{\gamma_{\parallel}\gamma}}{\Omega_r} \sqrt{I_y} \sin \phi_y + \frac{\gamma_e}{\Omega_r} \frac{\sqrt{\gamma_{\parallel}\gamma}}{\Omega_r} \sqrt{I_x} \cos \phi_x,
\end{aligned} \tag{B.17}$$

fazendo algumas simplificações algébricas a equação B.17 assume a forma:

$$\begin{aligned}
\cos \phi_y \frac{dI_y}{ds} - 2I_y \sin \phi_y \frac{d\phi_y}{ds} &= (N_y + \beta N_x - 1) \frac{\gamma}{\Omega_r} I_y \cos \phi_y - \\
& 2\Delta I_y \sin \phi_y + 2 \frac{\gamma_e}{\Omega_r} \sqrt{I_x I_y} \cos \phi_x.
\end{aligned} \tag{B.18}$$

Substituindo as equações B.8, B.9 e B.10 na equação B.7:

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{\gamma_{\parallel}\gamma}}{\Omega_r} \frac{1}{2} \frac{\sin \phi_y}{\sqrt{I_y}} \frac{dI_y}{ds} + \frac{\sqrt{\gamma_{\parallel}\gamma}}{\Omega_r} \sqrt{I_y} \cos \phi_y \frac{d\phi_y}{ds} = \\
& \frac{[(1+\beta)N_y - 1 + (1+\beta)N_x\beta - \beta]}{2(1+\beta)} \frac{\gamma}{\Omega_r} \frac{\sqrt{\gamma_{\parallel}\gamma}}{\Omega_r} \sqrt{I_y} \sin \phi_y \\
& - \Delta \frac{\sqrt{\gamma_{\parallel}\gamma}}{\Omega_r} \sqrt{I_y} \cos \phi_y + \frac{\gamma_e}{\Omega_r} \frac{\sqrt{\gamma_{\parallel}\gamma}}{\Omega_r} \sqrt{I_x} \sin \phi_x,
\end{aligned} \tag{B.19}$$

fazendo algumas simplificações algébricas a equação B.19 assume a forma,

$$\begin{aligned}
\sin \phi_y \frac{dI_y}{ds} + 2I_y \cos \phi_y \frac{d\phi_y}{ds} &= (N_y + \beta N_x - 1) \frac{\gamma}{\Omega_r} I_y \sin \phi_y - \\
& 2\Delta I_y \cos \phi_y + 2 \frac{\gamma_e}{\Omega_r} \sqrt{I_x I_y} \sin \phi_x.
\end{aligned} \tag{B.20}$$

Multiplicando a equação B.18 por  $\cos \phi_x$ , a B.20 por  $\sin \phi_x$  e somando as equações obtemos:

$$\frac{dI_y}{ds} = (N_y + \beta N_x - 1) \frac{\gamma}{\Omega_r} I_y + 2 \frac{\gamma_e}{\Omega_r} \sqrt{I_x I_y} (\cos \phi_x \cos \phi_y + \sin \phi_x \sin \phi_y), \tag{B.21}$$

mas  $\cos(a - b) = (\cos a \cos b + \sin a \sin b)$  e  $\phi = \phi_y - \phi_x$  então,

$$\frac{dI_y}{ds} = (N_y + \beta N_x - 1) \frac{\gamma}{\Omega_r} I_y + 2 \frac{\gamma_e}{\Omega_r} \sqrt{I_x I_y} \cos \phi, \quad (\text{B.22})$$

ainda,  $K = \frac{\gamma_e}{2\pi\gamma}$ , logo,

$$\frac{dI_y}{ds} = (N_y + \beta N_x - 1) \frac{\gamma}{\Omega_r} I_y + 4\pi K \frac{\gamma}{\Omega_r} \sqrt{I_x I_y} \cos \phi. \quad (\text{B.23})$$

Voltando ao tempo  $t$  sem a normalização:

$$\boxed{\frac{1}{\gamma} \frac{dI_y}{dt} = (N_y + \beta N_x - 1) I_y + 4\pi K \sqrt{I_x I_y} \cos \phi.}$$

Multiplicando agora a equação B.18 por  $\sin \phi_x$ , a B.20 por  $\cos \phi_x$  e subtraindo uma da outra obtemos:

$$2I_y \frac{d\phi_y}{ds} = 2\Delta I_y + 2 \frac{\gamma_e}{\Omega_r} \sqrt{I_x I_y} (\sin \phi_x \cos \phi_y - \sin \phi_y \cos \phi_x), \quad (\text{B.24})$$

mas  $\sin(a - b) = (\sin a \cos b + \sin b \cos a)$  e  $\phi = \phi_y - \phi_x$  então,

$$\frac{d\phi_y}{ds} = \Delta + \frac{\gamma_e}{\Omega_r} \sqrt{\frac{I_x}{I_y}} \sin \phi, \quad (\text{B.25})$$

ainda,  $K = \frac{\gamma_e}{2\pi\gamma}$ ,  $\Delta = \frac{2\pi\gamma\Delta\Omega}{\Omega_r}$  e como  $\phi_x$  é constante podemos escrever a equação acima como:

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{2\pi\gamma\Delta\Omega}{\Omega_r} + \frac{2\pi\gamma K}{\Omega_r} \sqrt{\frac{I_x}{I_y}} \sin \phi. \quad (\text{B.26})$$

Voltando ao tempo  $t$  sem a normalização:

$$\boxed{\frac{1}{\gamma} \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi}{dt} = \Delta\Omega + K \sqrt{\frac{I_x}{I_y}} \sin \phi.}$$

Vamos redimensionar as inversões populacionais. Substituindo as equações B.8, B.9 e B.10 na equação B.8:

$$(1 + \beta) \frac{\gamma}{\Omega_r} \frac{dN_{x,y}}{ds} = 1 - \frac{\gamma_{\parallel}\gamma}{\Omega_r^2} (I_{x,y} + \beta I_{y,x}) - \frac{\gamma_{\parallel}\gamma}{\Omega_r^2} [(1 + \beta)N_{x,y} - 1] \times \left[ 1 + (\eta - 1) \frac{\gamma_{\parallel}\gamma}{\Omega_r^2} (I_{x,y} + \beta I_{y,x}) \right], \quad (\text{B.27})$$

fazendo algumas simplificações algébricas a equação B.17 assume a forma:

$$\frac{dN_{x,y}}{ds} = \frac{\Omega_r}{\gamma(1 + \beta)} - \frac{\gamma_{\parallel}}{\Omega_r(1 + \beta)} (I_{x,y} + \beta I_{y,x}) - \frac{\gamma_{\parallel}}{\Omega_r(1 + \beta)} \times [(1 + \beta)N_{x,y} - 1] \left[ 1 + (\eta - 1) \frac{\gamma_{\parallel}\gamma}{\Omega_r^2} (I_{x,y} + \beta I_{y,x}) \right], \quad (\text{B.28})$$

mas  $\Omega_r^2 = \gamma_{\parallel}\gamma(\eta - 1)$ , então,

$$\frac{dN_{x,y}}{ds} = \frac{\Omega_r}{\gamma(1 + \beta)} - \frac{\gamma_{\parallel}}{\Omega_r(1 + \beta)} [I_{x,y} + \beta I_{y,x} + (1 + \beta)N_{x,y} + (1 + \beta)N_{x,y}(I_{x,y} + \beta I_{y,x}) - 1 - (I_{x,y} + \beta I_{y,x})], \quad (\text{B.29})$$

fazendo algumas simplificações algébricas a equação B.29 se torna

$$\frac{dN_{x,y}}{ds} = \frac{1}{(1 + \beta)} \left( \frac{\Omega_r}{\gamma} + \frac{\gamma}{\Omega_r} \right) - \frac{\gamma_{\parallel}}{\Omega_r} N_{x,y} (1 + I_{x,y} + \beta I_{y,x}), \quad (\text{B.30})$$

$$\frac{dN_{x,y}}{ds} = \frac{1}{(1 + \beta)} \left( \frac{\Omega_r^2 + \gamma_{\parallel}\gamma}{\Omega_r\gamma} \right) - \frac{\gamma_{\parallel}}{\Omega_r} N_{x,y} (1 + I_{x,y} + \beta I_{y,x}), \quad (\text{B.31})$$

$$\frac{dN_{x,y}}{ds} = \frac{\gamma_{\parallel}\eta}{(1 + \beta)} \frac{1}{\Omega_r} - \frac{\gamma_{\parallel}}{\Omega_r} N_{x,y} (1 + I_{x,y} + \beta I_{y,x}), \quad (\text{B.32})$$

mas,

$$r = \frac{\eta}{(1 + \beta)} \text{ e } \epsilon = \frac{\gamma_{\parallel}}{\Omega_r},$$

Portanto,

$$\frac{dN_{x,y}}{ds} = \epsilon[r - N_{x,y}(1 + I_{x,y} + \beta I_{y,x})]. \quad (\text{B.33})$$

Voltando ao tempo  $t$  sem a normalização:

$$\boxed{\frac{1}{\gamma} \frac{dN_{x,y}}{dt} = \gamma_{\parallel} [r - N_{x,y}(1 + I_{x,y} + \beta I_{y,x})].}$$

## Referências Bibliográficas

- [1] T. Maiman. Stimulated Optical Radiation in Ruby. *Nature* **187**, 493–494 (1960).
- [2] B. Hitz, J. Ewing e J. Hecht. *Introduction to laser technology* (John Wiley & Sons, 2012).
- [3] B. Denker e E. Shklovsky. *Handbook of Solid-state Lasers: Materials, Systems and Applications* (Elsevier, 2013).
- [4] J. Zayhowski. Microchip lasers. *Optical materials* **11**, 255–267 (1999).
- [5] W. Koechner e M. Bass. *Solid-State Lasers: A Graduate Text* (Springer Science & Business Media, 2003).
- [6] J. Zayhowski. Passively Q-switched Nd: YAG microchip lasers and applications. *Journal of Alloys and Compounds* **303**, 393–400 (2000).
- [7] P. Moulton. Tunable solid-state lasers. *Proceedings of the IEEE* **80**, 348–364 (1992).
- [8] U. Keller. Ultrafast solid-state lasers. *Progress in Optics* **46**, 1–115 (2004).
- [9] U. Keller. Ultrafast solid-state laser oscillators: a success story for the last 20 years with no end in sight. *Applied Physics B: Lasers and Optics* **100**, 15–28 (2010).
- [10] R. Maulini, D. Yarekha, J. Bulliard, M. Giovannini, J. Faist e E. Gini. Continuous-wave operation of a broadly tunable thermoelectrically cooled external cavity quantum-cascade laser. *Optics letters* **30**, 2584–2586 (2005).
- [11] Y. Liu e J. Ohtsubo. Dynamics and chaos stabilization of semiconductor lasers with optical feedback from an interferometer. *IEEE Journal of Quantum electronics* **33**, 1163–1169 (1997).



- [12] I. Kanter, Y. Aviad, I. Reidler, E. Cohen e M. Rosenbluh. An optical ultrafast random bit generator. *Nature Photonics* **4**, 58–61 (2010).
- [13] N. Brown. Frequency stabilized lasers: optical feedback effects. *Applied optics* **20**, 3711–3714 (1981).
- [14] K. Otsuka, K. Abe, J. Ko e T. Lim. Real-time nanometer-vibration measurement with a self-mixing microchip solid-state laser. *Optics letters* **27**, 1339–1341 (2002).
- [15] edited by D.M. Kane e K. Shore. *Unlocking Dynamical Diversity: Optical Feedback Effects on Semiconductor Lasers* (Wiley and Sons, Chichester, 2005).
- [16] G. Tartwijk e G. Agrawal. Laser instabilities: a modern perspective. *Progress in Quantum Electronics* **22**, 43–122 (1998).
- [17] T. Erneux e P. Glorieux. *Laser Dynamics* (Cambridge University, 2010).
- [18] H. Schuster. *Nonlinear laser dynamics: from quantum dots to cryptography* (John Wiley & Sons, 2012).
- [19] C. H. Skiadas e C. Skiadas. *Handbook of applications of chaos theory* (CRC Press, 2016).
- [20] T. Fan e R. Byer. Diode laser-pumped solid-state lasers. *IEEE Journal of Quantum Electronics* **qe-24**, 895–912 (1988).
- [21] J. J. Zayhowski e A. Mooradian. Single-frequency microchip Nd lasers. *Optics letters* **14**, 24–26 (1989).
- [22] G. Dixon, L. Lingvay e R. Jarman. Properties Of Close-Coupled, Monolithic, Lithium Neodymium Tetrphosphate Lasers. *Proc. SPIE* **1104**, 107–112 (1989).
- [23] P. Gavrilovic, M. O’Neill, K. Meehan, J. Zarrabi, S. Singh e W. Grodkiewicz. Temperature-tunable, single frequency microcavity lasers fabricated from flux-grown YCeAG: Nd. *Applied physics letters* , **14**, 1652–1654 (1992).
- [24] P. Leilabady, D. W. Anthon e P. Gullicksen. Single-frequency Nd:YLF cube lasers pumped by laser diode arrays. *Conference on Lasers and Electro-Optics* página CMI6 (1992).
- [25] N. Mermilliod, B. François e C. Wyon. LaMgAl<sub>11</sub>O<sub>19</sub>: Nd microchip laser. *Applied physics letters* **59**, 3519–3520 (1991).

- [26] N. MacKinnon e B. Sinclair. A laser diode array pumped, Nd: YVO<sub>4</sub>/KTP, composite material microchip laser. *Optics communications* **105**, 183–187 (1994).
- [27] N. MacKinnon, C. Norrie e B. Sinclair. Laser-diode-pumped, electro-optically tunable Nd: MgO: LiNbO<sub>3</sub> microchip laser. *JOSA B* **11**, 519–522 (1994).
- [28] T. Taira, A. Mukai, Y. Nozawa e T. Kobayashi. Single-mode oscillation of laser-diode-pumped Nd: YVO<sub>4</sub> microchip lasers. *Optics letters* **16**, 1955–1957 (1991).
- [29] G. Yao, K. Lee, Y. Chen e S. Zhou. Characteristics of Transverse Mode of Diode-Pumped Self-Q-Switched Microchip Laser. *Optical Society of America* página NL7 (1994).
- [30] M. Y. Stephen e S. Strogatz. Nonlinear dynamics of a solid-state laser with injection. *Physical Review E* **58**, 4, 4421 (1998).
- [31] S. Valling, T. Fordell e A. Lindberg. Maps of the dynamics of an optically injected solid-state laser. *Physical Review A* **72**, 033810 (2005).
- [32] S. Valling, T. Fordell e A. Lindberg. Experimental and numerical intensity time series of an optically injected solid state laser. *Optics communications* **254**, 282–289 (2005).
- [33] S. Valling, B. Krauskopf, T. Fordell e A. Lindberg. Experimental bifurcation diagram of a solid state laser with optical injection. *Optics communications* **271**, 532–542 (2007).
- [34] J. Toomey, D. Kane, S. Valling e A. Lindberg. Automated correlation dimension analysis of optically injected solid state lasers. *Optics express* **17**, 7592–7608 (2009).
- [35] Y. Tan, C. Xu, S. Zhang e S. Zhang. Power spectral characteristic of a microchip Nd: YAG laser subjected to frequency-shifted optical feedback. *Laser Physics Letters* **10**, 2, 025001 (2013).
- [36] Y. Tan, S. Zhang, S. Zhang, Y. Zhang e N. Liu. Response of microchip solid-state laser to external frequency-shifted feedback and its applications. *Scientific reports* **3** (2013).
- [37] E. Lacot e O. Hugon. Phase-sensitive laser detection by frequency-shifted optical feedback. *Physical Review A* **70**, 5, 053824 (2004).
- [38] L. Yatsenko, B. Shore e K. Bergmann. Theory of a frequency-shifted feedback laser. *Optics communications* **236**, 1, 183–202 (2004).

- [39] M. Stellpflug, G. Bonnet, B. Shore e K. Bergmann. Dynamics of frequency shifted feedback lasers: simulation studies. *Optics express* **11**, 2060–2080 (2003).
- [40] M. Lim, C. Sukenik, T. Stievater, P. Bucksbaum e R. Conti. Improved design of a frequency-shifted feedback diode laser for optical pumping at high magnetic field. *Optics communications* **147**, 99–102 (1998).
- [41] I. Littler, H. Keller, U. Gaubatz e K. Bergmann. Velocity control and cooling of an atomic beam using a modeless laser. *Zeitschrift für Physik D Atoms, Molecules and Clusters* **18**, 4, 307–308 (1991).
- [42] D. Mugglin, A. Streater, S. Balle e K. Bergmann. Observation of white light-induced drift separation of Rb isotopes. *Optics communications* **104**, 165–174 (1993).
- [43] J. Martin, Y. Zhao, S. Balle, K. Bergmann e M. Fewell. Visible-wavelength diode laser with weak frequency-shifted optical feedback. *Optics communications* **112**, 109–121 (1994).
- [44] S. Balle e K. Bergmann. Self-pulsing and instabilities in a unidirectional ring dye laser with intracavity frequency shift. *Optics communications* **116**, 1-3, 136–142 (1995).
- [45] M. S. III, M. Scully e W. L. Jr. *Laser Physics*, volume 2 (Addison-Wesley Publ. Comp. and Reading, MA,, 1974.).
- [46] M. Brunel, O. Emile, F. Bretenaker, A. LeFloch, B. Ferrand e E. Molva. Tunable two-frequency lasers for lifetime measurements. *Optical Review* **4**, 5, 550–552 (1997).
- [47] J. Thévenin, M. Vallet, M. Brunel, H. Gilles e S. Girardo. Beat-note locking in dual-polarization lasers submitted to frequency-shifted optical feedback. *J. Opt. Soc. Am. B* **28**, 1104–1110 (2011).
- [48] M. Romanelli, L. Wang, M. Brunel e M. Vallet. Measuring the universal synchronization properties of driven oscillators across a Hopf instability. *Optics Exp.* **22**, 7365–7373 (2014).
- [49] M. Romanelli, A. Thorette, M. Brunel, T. Erneux e M. Vallet. Excitable-like chaotic pulses in the bounded-phase regime of an opto-rf oscillator. *Physical Review A* **94**, 043820 (2016).

- [50] A. Thorette, M. Romanelli, M. Brunel e M. Vallet. Frequency-locked chaotic opto-RF oscillator. *Opt. Lett.* **41**, 2839–2842 (2016).
- [51] D. Solli, C. Ropers, P. Koonath e B. Jalali. Optical rogue waves. *Nature* **450**, 7172, 1054–1057 (2007).
- [52] M. Onorato, S. Residori, U. Bortolozzo, A. Montina e F. Arecchi. Rogue waves and their generating mechanisms in different physical contexts. *Physics Reports* **528**, 2, 47–89 (2013).
- [53] N. Akhmediev, B. Kibler, F. Baronio, M. Belić, W. Zhong, Y. Zhang, W. Chang, J. Soto-Crespo, P. Vouzas, P. Grelu et al.. Roadmap on optical rogue waves and extreme events. *Journal of Optics* **18**, 6, 063001 (2016).
- [54] C. Bonatto, M. Feyereisen, S. Barland, M. Giudici, C. Masoller, J. Leite e J. Tredicce. Deterministic optical rogue waves. *Physical review letters* **107**, 5, 053901 (2011).
- [55] C. Metayer, A. Serres, E. Rosero, W. Barbosa, F. Aguiar, J. Leite e J. Tredicce. Extreme events in chaotic lasers with modulated parameter. *Optics express* **22**, 19850–19859 (2014).
- [56] J. Zamora-Munt, B. Garbin, S. Barland, M. Giudici, J. Leite, C. Masoller e J. Tredicce. Rogue waves in optically injected lasers: Origin, predictability, and suppression. *Physical Review A* **87**, 035802 (2013).
- [57] R. Karnatak, G. Ansmann, U. Feudel e K. Lehnertz. Route to extreme events in excitable systems. *Physical Review E* **90**, 022917 (2014).
- [58] N. Granese, A. Lacapmesure, M. Agüero, M. Kovalsky, A. Hnilo e J. Tredicce. Extreme events and crises observed in an all-solid-state laser with modulation of losses. *Optics letters* **41**, 13, 3010–3012 (2016).
- [59] J. Gordon, H. Zeiger e C. Townes. Molecular Microwave Oscillator and New Hyperfine Structure in the Microwave Spectrum of NH<sub>3</sub>. *Phys. Rev.* **95**, 282–284 (1954).
- [60] A. Einstein. The Quantum Theory of Radiation. *Phys. Z.* **18**, 21 (1917).
- [61] A. Schawlow e C. Townes. Infrared and Optical Masers. *Phys. Rev.* **112**, 1940–1949 (1958).
- [62] HRL Laboratories, LLC. [http://www.hrl.com/lasers/pdfs/maiman\\_60.07.07.pdf](http://www.hrl.com/lasers/pdfs/maiman_60.07.07.pdf) (2017). Acesso em maio.

- [63] A. Javan, Bennett, W.R. e Herriott. Population Inversion and Continuous Optical Maser Oscillation in a Gas Discharge Containing a He-Ne Mixture. *Phys. Rev. Lett.* **63**, 106–110 (1961).
- [64] R. Hall, G. Fenner, J. Kingsley, T. Soltys e R. Carlson. Coherent Light Emission From GaAs Junctions. *Appl. Rev. Lett.* **9**, 366–368 (1962).
- [65] M. Nathan, W. Dumke, G. Burns, F. Dill e G. Lasher. Stimulated Emission of Radiation from GaAs p-n Junctions. *Appl. Rev. Lett.* **1**, 62–64 (1962).
- [66] N. H. Jr. e S. Bevacqua. Coherent (visible) light emission from Ga(AsP) junctions. *Appl. Rev. Lett.* **1**, 82–83 (1962).
- [67] T. Quist, R. Rediker, R. Keyes, W. Krag, B. Lax, A. McWhorter e H. Zeigler. Semiconductor Maser Of GaAs. *Appl. Rev. Lett.* **1**, 91–92 (1962).
- [68] F. Schäfer. *Dye Lasers* (Springer-Verlag, Berlín, 1990).
- [69] F. Duarte e L. Hillman. *Dye Laser Principles* (Academic, New York, 1990).
- [70] J. Kasper e G. Pimentel. HCl Chemical Laser. *Phys. Rev. Lett.* **14**, 352 (1965).
- [71] N. Basov, V. Danilychev, Y. Popov e D. Khodkevich. Laser operating in the vacuum region of the spectrum by excitation of liquid xenon with an electron beam. *Zh. Eksp. Fiz. i Tekh. Pis'ma. Red* **12**, 473 (1970).
- [72] H. Haug e H. Haken. Theory of noise in semiconductor laser emission. *Z. Phys.* **204**, 262–275 (1967).
- [73] P. Meystre e M. S. III. *Elements of Quantum Optics* (Springer, Berlin, Heidelberg, 1990).
- [74] H. Haken. *Laser Light Dynamics* (North-Holland, Amsterdam, 1985), light vol. 2 edição.
- [75] P. Mandel. *Theoretical problems in cavity nonlinear optics* (Cambridge University, New York, 1997).
- [76] F. Arecchi, R. Meucci, G. Puccioni e J. Tredicce. Deterministic chaos in laser with injected signal. *Opt. Comm.* **51**, 308–314 (1984).
- [77] F. Arecchi, G. Lippi, G. Puccioni, J. Tredicce, in: L. Mandel e E. W. (Eds.). *Coherence in Quantum Optics V* (Plenum, New York, 1984, p.1227).

- [78] K. Alligood, T. Sauer e J. Yorke. *Chaos: an introduction to dynamical systems* (Springer Science & Business Media, 2006).
- [79] e. wolf. *Progress in optics xxv* (1998).
- [80] E. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.* **20**, 130–141 (1963).
- [81] H. haken. Analogy between higher instabilities in fluids and lasers. *Phys. Lett.* **53A**, 77–78 (1975).
- [82] Y. Kusnetsov. *Elements of applied bifurcation theory* (Springer-Verlag, New York, 1998).
- [83] L. A. Monteiro. *Sistemas Dinâmicos* (Livraria da Física, São Paulo, 2011).
- [84] I. Bendixson. Sur les courbes définies par des équations différentielles. *Acta Mathematica* **24**, 1–88 (1901).
- [85] J. Guckenheimer. Scholarpedia. [http://www.scholarpedia.org/article/Flip\\_bifurcation](http://www.scholarpedia.org/article/Flip_bifurcation) (2017). Acesso em maio.
- [86] J. Guckenheimer. Scholarpedia. [http://www.scholarpedia.org/article/Cusp\\_bifurcation](http://www.scholarpedia.org/article/Cusp_bifurcation) (2017). Acesso em maio.
- [87] J. Guckenheimer. Scholarpedia. [http://www.scholarpedia.org/article/Bautin\\_bifurcation](http://www.scholarpedia.org/article/Bautin_bifurcation) (2017). Acesso em maio.
- [88] J. Guckenheimer. Scholarpedia. [http://www.scholarpedia.org/article/Bogdanov-Takens\\_bifurcation](http://www.scholarpedia.org/article/Bogdanov-Takens_bifurcation) (2017). Acesso em maio.
- [89] C. Kikuchi, J. Lambe, G. Makhov e R. Terhune. Ruby as a maser material. *Appl. Phys.* **60**, S203–S213 (1996).
- [90] A. Zeni e J. Gallas. Lyapunov exponents for a Duffing oscillator. *Physica D* **89**, 71–82 (1995).
- [91] C. Bonatto. *Estrutura de diagramas de fase de sistemas dinâmicos de tempo contínuo*. Tese de Doutorado, UFRGS (2008).
- [92] A. Wolf, J. Swift, H. Swinney e J. Vastano. Determining Lyapunov exponents from a time-series. *Physica D* **16**, 285–317 (1985).
- [93] E. Doedel e B. Oldeman. AUTO-07P: continuation and bifurcation software for ordinary differential equations. <http://cmvl.cs.concordia.ca/auto> (2012).

- 
- [94] J. Thévenin, M. Romanelli, M. Vallet, M. Brunel e T. Erneux. Phase and intensity dynamics of a two-frequency laser submitted to resonant frequency-shifted feedback. *Phys. Rev. A* **86**, 033815:1–033815:9 (2012).
- [95] M. Brunel, A. Amon e M. Vallet. Dual-polarization microchip laser at 1.53  $\mu\text{m}$ . *Opt. Lett.* **30**, 2418–2420 (2005).
- [96] N. Ferrara e C. Prado. *Caos uma introdução* (Edgar Blücher, São Paulo, 1994).
- [97] J. Huang, Y. Gong e S. Ruan. Bifurcation analysis in a predator-prey model with constant-yield predator harvesting. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B* **18**, 2101–2121 (2013).
- [98] J. Thévenin, M. Romanelli, M. Vallet, M. Brunel e T. Erneux. Bogdanov-Takens bifurcation of codimension 3 in a predator-prey model with constant-yield predator harvesting. *AIMS* **15**, 1053–1067 (2016).
- [99] S. Wicczorek, B. Krauskopf, T. B. Simpson e D. Lenstra. The dynamical complexity of optically injected semiconductor lasers. *Phys. Rep.* **416**, 1–128 (2005).
- [100] C. Bonatto. Submetido para publicação .