Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Extensões Essenciais Cíclicas de Módulos Simples sobre Anéis de Operadores Diferenciais

Tese de Doutorado

Robson Willians Vinciguerra

Porto Alegre, 15 de setembro de 2017

Tese submetida por Robson Willians Vinciguerra[1], como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professores Orientadores:
Prof. Dr. Alveri Alves Sant'Ana
Prof.ª Dr.ª Paula Alexandra de Almeida Bastos Carvalho Lomp

Banca examinadora:
Prof. Dr. Marcelo Escudeiro Hernandes (UEM)
Prof. Dr. Rene Baltazar (FURG)
Prof.ª Dr.ª Paula Alexandra de Almeida Bastos Carvalho Lomp (UP)
Prof. Dr. Wagner Cortes (UFRGS)
Prof. Dr. Alveri Alves Sant'Ana (UFRGS)

[1]Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço à Deus pelos dons recebidos, por ouvir minhas preces e pelas inspirações necessárias para obter os resultados deste trabalho.

À minha amada esposa Layane Lenardon Vinciguerra que sempre esteve ao meu lado, entendendo todos os sacrifícios necessários para esta conquista. Obrigado pelas palavras de incentivo, pelas orações, por sua companhia e, principalmente, pelo seu amor.

À minha família, em especial, aos meus amados pais, que sempre me incentivaram, me apoiaram e rezaram por mim.

Ao meu orientador Prof. Alveri Alves Sant'Ana, que é um grande exemplo de profissional. Muito obrigado pela confiança, paciência, compreensão, incentivo e principalmente pelos grandes ensinamentos que me ajudaram a crescer profissionalmente.

À minha coorientadora Prof.ª Paula Alexandra de Almeida Bastos Carvalho Lomp, que conduziu esta pesquisa pelos melhores caminhos. Agradeço por todos os esforços para a conclusão deste trabalho, pelo acolhimento no Porto, por proporcionar todo o suporte necessário para que eu tivesse boas condições de estudo e moradia, pela compreensão nos momentos difíceis, pela paciência e pelos valiosos ensinamentos.

Ao professor Christian Lomp, por ter acompanhado toda esta pesquisa, pelas valiosas contribuições e pela hospitalidade no Porto.

Aos professores da banca: Marcelo Escudeiro Hernandes, Rene Baltazar e Wagner Cortes, por aceitarem o convite, pelos esforços com a correção do trabalho e pelas preciosas sugestões.

Aos meus compadres Adilson e Juliana, Ricardo e Juliana, pela valiosa amizade. Obrigado por me acolher em Porto Alegre, pela companhia e pelos inesquecíveis momentos ao lado de vocês.

Aos amigos Deividi, Anderson, Marcelo, Andrea, Dalmi e Kelly, pela acolhida no Porto, pela companhia e pelos belos momentos de descontrações. Em especial, agradeço ao Deividi por me mostrar o caminho que mudaria a minha vida para sempre.

Ao Rene pela amizade, pelos ensinamentos e pela contribuição com esta pesquisa.

Aos meus colegas da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, pela amizade sincera e pelo companheirismo durante o curso.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, que contribuíram com a minha formação.

À Universidade do Porto, pelo suporte e hospitalidade durante a minha visita.

À Universidade Tecnológica Federal do Paraná, pelo afastamento concedido para que eu pudesse me dedicar integralmente com as atividades do doutorado.

Finalmente, ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Um anel noetheriano S satisfaz a propriedade $(\diamond)$ se todas as extensões essenciais cíclicas de S-módulos simples são artinianas. Anéis noetherianos com esta propriedade verificam a Conjectura de Jacobson, que é um famoso problema em aberto em teoria de anéis. Neste trabalho investigamos esta propriedade em anéis de operadores diferenciais $R[\theta;\delta]$, onde R é um anel comutativo noetheriano e δ uma derivação de R. Mais especificamente, estudamos condições necessárias e suficientes para que $R[\theta;\delta]$ satisfaça $(\diamond)$, quando R é um anel δ-simples e, também, no caso em que este é um anel δ-primitivo. Além disso, caracterizamos os anéis de operadores diferenciais $\mathbb{C}[x,y][\theta;\delta]$ que satisfazem $(\diamond)$.

Palavras-chave: Anéis de operadores diferenciais. Extensões essenciais cíclicas. Módulos simples. Anéis δ-simples. Anéis δ-primitivos.

Abstract

A Noetherian ring S satisfies the property $(\diamond)$ if any cyclic essential extension of simple S-modules are Artinian. Noetherian rings with this property verify Jacobson's Conjecture, which is a famous open problem in ring theory. In this work we investigate this property in differential operators rings $R[\theta; \delta]$, where R is a commutative Noetherian ring and δ is a derivation of R. More precisely, we study necessary and sufficient conditions for $R[\theta; \delta]$ to satisfy property $(\diamond)$ whenever R is a δ-simple ring and also for the case where it is a δ-primitive ring. Furthermore, we characterize the differential operator rings $\mathbb{C}[x, y][\theta; \delta]$ satisfying $(\diamond)$.

Keywords: Differential operator rings. Cyclic essential extensions. Simple modules. δ-simple rings. δ-primitive rings.

Índice de Notações

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números racionais
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos
$\mathbb{Z}_2$	Conjunto dos inteiros módulo 2
$A \subseteq B$	A é um subconjunto de B
$A \subsetneq B$	A é um subconjunto próprio de B
$A \nsubseteq B$	A não é um subconjunto de B
$I \lhd R$	I é um ideal de R
$I \lhd_\ell R$	I é um ideal à esquerda de R
$\mathrm{Spec}(R)$	Espectro primo de R
$\mathrm{Max}(R)$	Espectro maximal de R
$\mathcal{J}(R)$	Radical de Jacobson de R
$\mathcal{N}(R)$	Nilradical de R
$\mathrm{soc}(M)$	Socle do módulo M
$\mathrm{ann}_R(M)$	Anulador do módulo M em R
$t_A(M)$	Submódulo de A-torção de M
RA^{-1}	Anel de frações de R com respeito a A
IA^{-1}	Extensão do ideal I ao anel RA^{-1}
R_x	Anel de frações de R com respeito a $A = \{x^i \mid i \in \mathbb{N}\}$
R_M	Anel de frações de R com respeito a $A = R \setminus M$
$(I : \delta)$	$\{r \in R \mid \delta^n(r) \in I, \forall\, n \geq 0\}$

$\langle a_1, \cdots, a_s \rangle$	Ideal de R gerado pelos elementos $a_1, \ldots, a_s$
Ra	Ideal à esquerda de R gerado pelo elemento a
$K[x_1, \ldots, x_n]$	Anel de polinômios em n variáveis sobre K
$K[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$	Anel de polinômios de Laurent em n variáveis sobre K
$K[[x]]$	Anel de séries de potências formais em 1 variável sobre K
$R[\theta; \delta]$	Anel de operadores diferenciais de R com respeito a δ
R^δ	$\{r \in R \mid \delta(r) = 0\}$
$\delta(R)$	$\{\delta(r) \mid r \in R\}$
$N \leq M$	N é um submódulo de M
$N \leq_e M$	M é uma extensão essencial de N
$E(M)$	Fecho injetivo de M
$\ker(\varphi)$	Núcleo da função φ
R^{op}	Anel oposto de R
$K(B)$	Subcorpo de L gerado por B sobre $K \subseteq L$
$\mathcal{F}_\delta$	$\{I \lhd R \mid I$ é δ-ideal$\}$
$\mathrm{char}(R)$	Característica do anel R
$\mathrm{K.dim}_R(M)$	Dimensão de Krull do R-módulo M
$\mathrm{l.K.dim}(R)$	Dimensão de Krull à esquerda de R
$\mathrm{r.K.dim}(R)$	Dimensão de Krull à direita de R
$\mathrm{K.dim}(R)$	Dimensão de Krull de R
∂_{x_i}	Derivada parcial em relação a x_i
$\deg(a)$	Grau do polinômio a
$a \mid b$	a divide b
$a \nmid b$	a não divide b
$\mathrm{mdc}(a, b)$	Máximo divisor comum entre a e b
$\mathrm{tr.deg}_K(L)$	Grau de transcendência de L sobre K
$\binom{n}{i}$	Combinações simples de n elementos tomados i a i
$G(I)$	Profundidade do ideal I
$\mathrm{ht}(P)$	Altura do ideal P

Sumário

Introdução

Dizemos que um anel noetheriano R satisfaz a *propriedade* $(\diamond)$ se todas as extensões essenciais cíclicas de R-módulos simples são artinianas.

O estudo desta propriedade é motivado pela seguinte questão, colocada por Nathan Jacobson: se R é um anel noetheriano, então a interseção das potências do radical de Jacobson $\mathcal{J}(R)$ é zero, isto é, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{J}(R)^n = 0$.

Em homenagem a Jacobson, este problema ficou conhecido como *Conjectura de Jacobson*. A mesma é uma generalização do Teorema da Interseção de Krull (ver [43, Corollary 8.25]), para anéis comutativos. A primeira versão da conjectura foi apresentada por Jacobson em seu livro *"Structure of rings"* (ver [19, Remark, pág. 200]), no ano de 1956, onde a hipótese da noetherianidade foi considerada unilateralmente. No entanto, em 1965, Herstein [18] construiu um contra-exemplo com anel de matrizes triangulares, o que levou à reformulação do problema para exigir que o anel fosse noetheriano bilateralmente.

A Conjectura de Jacobson foi resolvida para certas classes de anéis. Em 1974, Jategaonkar mostrou que os anéis FBN satisfazem a Conjectura (ver [22, Theorem 3.7]). O pilar da sua demonstração reside no fato de todo módulo finitamente gerado com socle essencial, sobre um anel FBN, ter uma série de decomposição (ver Corolário 1.3.3). Mas, isto é equivalente a dizer que extensões essenciais cíclicas de módulos simples, sobre anéis FBN, são artinianas e, assim, satisfazem $(\diamond)$ (ver Proposição 1.3.4).

Na verdade, Jategaonkar mostrou que a propriedade ($\diamond$) implica a Conjectura de Jacobson, conforme mostra o Teorema 1.3.6. Desde então, esta propriedade começou a ser estudada de modo independente por vários algebristas, obtendo-se classes importantes de anéis para os quais a propriedade ocorre ou não, conforme veremos no final da Seção 1.3.

Este trabalho tem como principal objetivo investigar a propriedade ($\diamond$) em anéis de operadores diferenciais $R[\theta;\delta]$, onde R é um anel comutativo noetheriano e δ é uma derivação de R. Primeiro, notemos que o estudo da propriedade ($\diamond$) à esquerda e à direita coincidem nestes anéis, visto que $R[\theta;\delta] \simeq R[\theta;\delta]^{op}$, onde $R[\theta;\delta]^{op}$ é o anel *oposto* de $R[\theta;\delta]$. Ainda, é importante ressaltarmos que a estrutura dos anéis de operadores diferenciais $R[\theta;\delta]$ depende do anel base R e da derivação δ.

Uma classe importante de derivações são as localmente nilpotentes. Recentemente, no artigo *"Injective hulls of simple modules over differential operator rings"* [3], Carvalho, Hatipoğlu e Lomp mostraram que, se R é uma K-álgebra afim comutativa e δ é uma K-derivação localmente nilpotente, então $R[\theta;\delta]$ satisfaz ($\diamond$). Disso, surgiu a seguinte questão: o que podemos dizer a respeito da recíproca deste resultado?

Ainda em [3], é demonstrado que, dado um domínio comutativo noetheriano livre de $\mathbb{Z}$-torção R com derivação não nula δ tal que R é δ-primitivo, se $R[\theta;\delta]$ satisfaz ($\diamond$), então R é δ-simples. Este fato nos motivou a investigar a propriedade ($\diamond$) em anéis de operadores diferenciais $R[\theta;\delta]$, no caso em que R é δ-simples e, também, quando este é δ-primitivo.

Em [37], Musson mostrou que os anéis de operadores diferenciais $K[x][\theta;\delta]$ não satisfazem ($\diamond$) para as derivações $\delta(x) = x^n$, onde $n \geq 1$. Carvalho, Hatipoğlu e Lomp [3] generalizaram os exemplos de Musson, provando que $K[x][\theta;\delta]$ satisfaz ($\diamond$) se, e somente se, $\delta(x) = \lambda$, para algum $\lambda \in K$. Nesta pesquisa, tivemos também como objetivo estudar outros exemplos de álgebras afins R, fornecendo condições necessárias e suficientes para que $R[\theta;\delta]$ satisfaça $(\diamond)$.

Dividimos este trabalho em 5 capítulos. No Capítulo 1, introduzimos os pré-requisitos necessários para um melhor entendimento do texto. Começamos fixando algumas notações e noções elementares relacionadas com a teoria de anéis e módulos. Também, lembramos de alguns fatos sobre módulos injetivos com o objetivo de caracterizar a propriedade $(\diamond)$. Dedicamos a terceira seção deste capítulo para contextualizar com maiores detalhes a propriedade $(\diamond)$, que é o objeto de estudo desta pesquisa. Além disso, introduzimos conceitos e propriedades fundamentais sobre derivações e anéis de operadores diferenciais.

Já no Capítulo 2, estudamos os anéis de operadores diferenciais $R[\theta;\delta]$ quando R é um anel δ-simples. É importante ressaltarmos que a δ-simplicidade de R está relacionada com a simplicidade de $R[\theta;\delta]$ (ver Teorema 1.5.3). Na Seção 2.1, apresentamos condições suficientes para a existência de extensões essenciais cíclicas não artinianas de $R[\theta;\delta]$-módulos simples (Teorema 2.1.8). Obtemos também uma condição suficiente para que $R[\theta;\delta]$ satisfaça $(\diamond)$ (Proposição 2.1.10). Na Seção 2.2, aplicamos os resultados da seção anterior para domínios de fatoração única e K-domínios afins. O principal resultado deste capítulo nos mostra que a propriedade $(\diamond)$ em $R[\theta;\delta]$ está ligada com a dimensão de Krull de R (Teorema 2.2.2). Ademais, na Seção 2.3, obtemos informações a respeito da dimensão de Krull de R e $R[\theta;\delta]$ quando R é δ-simples e δ é localmente nilpotente simultaneamente (Proposição 2.3.4).

No Capítulo 3, investigamos os anéis de operadores diferenciais $R[\theta;\delta]$ quando R é um anel δ-primitivo. Na Seção 3.1, mostramos que, se R é um K-domínio afim, então R é δ-primitivo e $\delta \neq 0$ se, e somente se, $R[\theta;\delta]$ é um anel primitivo (Teorema 3.1.2). Como consequência, caracterizamos os anéis de operadores diferenciais primitivos que satisfazem $(\diamond)$ (Corolário 3.1.3). Na Seção 3.2, obtemos uma condição necessária e suficiente para que $R[\theta;\delta]$ satisfaça $(\diamond)$ quando R tem dimensão de Krull 1 (Teorema 3.2.4). Como aplicação, classificamos completamente os anéis de operadores diferenciais $K[x, x^{-1}][\theta; \delta]$ com a propriedade $(\diamond)$ (Corolário 3.2.7) e apresentamos um exemplo de anel $R[\theta; \delta]$ satisfazendo $(\diamond)$ com a derivação δ não localmente nilpotente (Exemplo 3.2.8).

No Capítulo 4, consideramos o caso em que R é uma K-álgebra afim de dimensão de Krull 2. Na Seção 4.1, mostramos que, se R não possui ideais maximais que são δ-ideais, então $R[\theta; \delta]$ satisfaz $(\diamond)$ se, e somente se, R é δ-primitivo (Teorema 4.1.3). Também, apresentamos condições suficientes para que $R[\theta; \delta]$ não satisfaça $(\diamond)$ (Proposição 4.1.10). Na Seção 4.2, mostramos que a caracterização da primitividade de $\mathbb{C}[x, y][\theta; \delta]$ está relacionada com os elementos de Darboux irredutíveis de $\mathbb{C}[x, y]$ (Proposição 4.2.2). O principal resultado deste capítulo caracteriza os anéis de operadores diferenciais $\mathbb{C}[x, y][\theta; \delta]$ que satisfazem $(\diamond)$ (Teorema 4.2.3).

Por fim, no Capítulo 5, apresentamos algumas considerações sobre o estudo da propriedade $(\diamond)$ em $R[\theta; \delta]$ quando R é um K-domínio afim de dimensão de Krull > 2 ou o anel de séries de potências formais $K[[x]]$.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos as definições e resultados básicos que serão utilizados ao longo deste texto. Tomaremos a liberdade de omitir as demonstrações da maioria dos resultados, visto que muitos deles são conhecidos na literatura. Para maiores detalhes, o leitor poderá consultar [12], [28], [29] e [40].

1.1 Conceitos Básicos

Começamos fixando algumas notações. O anéis utilizados neste trabalho são sempre associativos com unidade. A *característica* de um anel R, denotada por $\mathrm{char}(R)$, é o menor inteiro positivo n tal que $n1 = 0$. Quando este inteiro não existe, dizemos que R tem *característica zero*. Dizemos que R é *livre de* $\mathbb{Z}$*-torção* se, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $r \in R$ tal que $nr = 0$, implica $n = 0$ ou $r = 0$. A palavra *ideal* I significa que I é ideal à esquerda e à direita simultaneamente e escrevemos $I \lhd R$. O conjunto dos ideais primos (respectivamente maximais) é chamado *espectro primo* (respectivamente *espectro maximal*) e será denotado por $\mathrm{Spec}(R)$ (respectivamente $\mathrm{Max}(R)$). O *radical de Jacobson* de R é a interseção de todos os ideais maximais à esquerda e será representado por $\mathcal{J}(R)$. Notemos que $\mathcal{J}(R)$ é, também, a interseção dos ideais maximais à direita. Seja K um corpo. Então, iremos nos referir a R como um K*-domínio* no caso em que R é uma K-álgebra e um domínio. Se o anel R é finitamente gerado como uma K-álgebra, dizemos que R é uma K*-álgebra afim.*

Seja R um anel qualquer. No decorrer deste texto, todos os R-módulos serão sempre considerados com a ação à esquerda. Dizemos que um R-módulo M é *simples* se $M \neq 0$ e seus únicos submódulos são os triviais, isto é, 0 e M.

Um R-módulo M é *semisimples* se todo submódulo de M é um somando direto. Um anel R é *semisimples* se R visto como um R-módulo à esquerda for semisimples, e isto é equivalente a dizer que todo R-módulo é semisimples (ver [12, Theorem 4.4]).

O *socle* de um R-módulo M é a soma de todos os submódulos simples de M e será denotado por $\mathrm{soc}(M)$. Notemos também que o socle de um R-módulo M é uma soma direta de submódulos simples de M (ver [12, Proposition 4.1]).

Dizemos que um R-módulo M é *noetheriano* (respectivamente *artiniano*) se toda cadeia estritamente ascendente (respectivamente descendente) de submódulos estaciona. Um anel R é dito *noetheriano* (respectivamente *artiniano*) se R visto como um R-módulo à esquerda e à direita é noetheriano (respectivamente artiniano).

Uma *série de composição* para um R-módulo M é uma cadeia

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \ldots \subsetneq M_s = M$$

de submódulos de M tal que M_i/M_{i-1} é simples, para todo $1 \leq i \leq s$. O *comprimento* da série de composição é o número de inclusões da cadeia acima, neste caso, s. Quando M tem uma série de composição, dizemos também que M tem *comprimento finito*. Um R-módulo M é noetheriano e artiniano se, e somente se, M tem comprimento finito (ver [12, Proposition 4.8]).

Um R-módulo M é chamado *fiel* se seu anulador

$$\mathrm{ann}_R(M) = \{a \in R \mid aM = 0\}$$

for nulo. Dizemos que um anel R é *primitivo* se existir um R-módulo simples e fiel. Um ideal I é *primitivo* se o anel quociente R/I é primitivo. Notemos que I é um ideal primitivo de R se, e somente se, I é o anulador de um R-módulo simples (ver [28, Proposition 11.4]).

Sejam R um anel comutativo e $P \in \mathrm{Spec}(R)$. A *altura* de P, denotada por $\mathrm{ht}(P)$, é o supremo dos comprimentos de todas as cadeias de ideais primos distintos contidas em P, isto é,

$$\mathrm{ht}(P) = \sup\{n \in \mathbb{N} \mid \text{existe uma cadeia } P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \ldots \subsetneq P_n = P,\ P_i \in \mathrm{Spec}(R)\}.$$

A *dimensão de Krull de um anel comutativo* R, denotada por $\mathrm{K.dim}(R)$, é definida como sendo o supremo de todas as alturas dos ideais primos de R, ou seja,

$$\mathrm{K.dim}(R) = \sup\{\mathrm{ht}(P) \mid P \in \mathrm{Spec}(R)\}.$$

No caso comutativo, a dimensão de Krull é conhecida também como *dimensão clássica de Krull* .

Seja R um anel (não necessariamente comutativo). A *dimensão de Krull de um R-módulo M*, denotada por $\mathrm{K.dim}_R(M)$, caso exista, será definida como segue: $\mathrm{K.dim}_R(M) = -1$ se, e somente se, $M = 0$. Se $\alpha \geq 0$ é um ordinal tal que $\mathrm{K.dim}_R(M)$ não é menor que α, então $\mathrm{K.dim}_R(M) = \alpha$, se para toda cadeia descendente $M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots$ de submódulos de M, existir um inteiro positivo n tal que $\mathrm{K.dim}_R(M_i/M_{i+1}) < \alpha$, para todo $i \geq n$. Observamos que, M é artiniano não nulo se, e somente se, $\mathrm{K.dim}_R(M) = 0$. Se N é um submódulo de M, então $\mathrm{K.dim}_R(M) = \max\{\mathrm{K.dim}_R(N), \mathrm{K.dim}_R(M/N)\}$ (ver [12, Lemma 15.1]). Além disso, se M é noetheriano, então a dimensão de Krull de M sempre existe (ver [12, Lemma 15.3]). A *dimensão de Krull à esquerda* (respectivamente *à direita*) de um anel R é a dimensão de Krull de R visto como um R-módulo à esquerda (respectivamente à direita), e denotamos por $\mathrm{l.K.dim}(R)$ (respectivamente $\mathrm{r.K.dim}(R)$). No caso em que $\mathrm{l.K.dim}(R) = \mathrm{r.K.dim}(R)$, escrevemos apenas $\mathrm{K.dim}(R)$. Para anéis comutativos noetherianos, esta definição coincide com a noção clássica (ver [12, Theorem 15.13]).

Um R-módulo M é chamado *α-crítico* se $\mathrm{K.dim}_R(M) = \alpha$ e $\mathrm{K.dim}_R(M/N) < \alpha$, para todo submódulo não nulo N de M. Usando o fato que $\mathrm{K.dim}_R(M) =$

$\max\{\mathrm{K.dim}_R(N), \mathrm{K.dim}_R(M/N)\}$, obtemos que todo submódulo não nulo de um módulo α-crítico é α-crítico. Dizemos que um módulo M é *crítico* se este for α-crítico, para algum ordinal α.

Seja R um anel comutativo. Dizemos que A é um *sistema multiplicativo* de R se $0 \notin A$, $1 \in A$ e $xy \in A$, para todo $x, y \in A$. Denotaremos por RA^{-1} o *anel de frações* de R com respeito ao sistema multiplicativo A e $\pi : R \to RA^{-1}$ a *aplicação canônica* dada por $r \mapsto r1^{-1}$. Dado um ideal I de R, denotamos por IA^{-1} a extensão do ideal I ao anel RA^{-1} com respeito a π, ou seja, $IA^{-1} = RA^{-1}\pi(I)$. Dizemos que um ideal I de R é A-*saturado* se $I = \{r \in R \,|\, rx \in I \text{ para algum } x \in A\}$. Notemos que, se I é A-saturado e $rx^{-1} \in IA^{-1}$, então $r \in I$. Além disso, existe uma correspondência biunívoca entre os conjuntos:

$$\{I \lhd R \mid I \cap A = \varnothing \text{ e } I \text{ é } A\text{-saturado}\} \leftrightarrow \{\mathcal{I} \lhd RA^{-1} \mid \mathcal{I} \neq RA^{-1}\}.$$

Em particular, se $A = \{x^i \,|\, i \in \mathbb{N}\}$, para algum $x \in R$ não divisor de zero, representamos RA^{-1} por R_x e, no caso em que $A = R \setminus P$, para algum $P \in \mathrm{Spec}(R)$, denotamos RA^{-1} por R_P e IA^{-1} por I_P.

No caso em que R é um anel qualquer, dizemos que $A \subseteq R$ é um *conjunto de denominadores à direita* se satisfaz as seguintes condições: i) A é um *conjunto de Ore*: A é um sistema multiplicativo de R e, para todo $r \in R$ e $x \in A$, $rA \cap xR \neq \varnothing$; ii) A é *reversível à direita*: para todo $r \in R$ e $x \in A$ tal que $xr = 0$, existe $y \in A$ tal que $ry = 0$. O *conjunto de denominadores à esquerda* é definido simetricamente. Denotaremos por RA^{-1} (respec. $A^{-1}R$) o *anel de frações à direita (respec. à esquerda)* de R com respeito ao conjunto de denominadores à direita (respec. à esquerda) A. Notemos que, se $A \subseteq R$ é um conjunto de denominadores à direita e à esquerda, então $RA^{-1} \simeq A^{-1}R$ (ver [46, Corollary 1.3]). Além disso, é importante ressaltarmos que, em um anel noetheriano à direita (respec. à esquerda), todo conjunto de Ore à direita (respec. à esquerda) é um conjunto de denominadores à direita (respec. à esquerda) (ver [12, Proposition 10.7]).

Sejam M um R-módulo e A um conjunto de Ore á esquerda de R. O conjunto

$$t_A(M) = \{m \in M \mid am = 0 \text{ para algum } a \in A\}$$

é um submódulo de M chamado de *submódulo de A-torção* de M (ver [12, Lemma 4.21 (b)]). No caso em que $t_A(M) = 0$, dizemos que M é *livre de A-torção.*

1.2 Módulos Injetivos

Nesta seção, relembraremos alguns fatos básicos sobre módulos injetivos. Para maiores detalhes o leitor poderá consultar [12] ou [29].

Um R-módulo E é chamado *injetivo* se para todo R-monomorfismo $f : M \to N$ e todo R-homomorfismo $g : M \to E$, existir um R-homomorfismo $h : N \to E$ tal que $h \circ f = g$. Isto é, o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[dl, dashed, "\exists h"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

Por exemplo, se R é um anel semisimples, todo R-módulo é injetivo (ver [28, Theorem 2.9]). Em particular, todo espaço vetorial é injetivo. Por outro lado, $\mathbb{Z}$ não é injetivo como $\mathbb{Z}$-módulo, pois o homomorfismo $g : 2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, dado por $g(2n) = n$, não pode ser estendido para um homomorfismo $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

A seguinte proposição é conhecida na literatura como *"Critério de Baer"*.

Proposição 1.2.1. *Seja E um R-módulo. As seguintes condições são equivalentes:*

(1) E é injetivo;

(2) Para todo ideal à esquerda I de R, todo R-homomorfismo $f : I \to E$ pode ser estendido a um R-homomorfismo $f' : R \to E$;

(3) Para todo ideal à esquerda I de R e todo R-homomorfismo $f : I \to E$, existe $m \in E$ tal que $f(a) = am$, para todo $a \in I$.

Demonstração: As equivalências (1) $\Leftrightarrow$ (2) e (1) $\Leftrightarrow$ (3) seguem de [29, Baer's Criterion 3.7] e [12, Proposition 5.1] respectivamente. ■

Um R-módulo V é dito *divisível* se $xV = V$, para todo elemento regular $x \in R$. Usando [29, Proposition 3.17] e o Critério de Baer 1.2.1, obtemos que todo R-módulo injetivo é divisível e, se R for um domínio de ideais principais à esquerda, então os R-módulos divisíveis são exatamente os R-módulos injetivos. Por exemplo, $\mathbb{Q}$ é um $\mathbb{Z}$-módulo divisível e, portanto, é um $\mathbb{Z}$-módulo injetivo.

O próximo resultado mostra que todo módulo pode ser imerso em um módulo injetivo.

Proposição 1.2.2. *[12, Proposition 5.4] Todo módulo é um submódulo de um módulo injetivo.*

Veremos que, para todo módulo M, existe um módulo injetivo *"minimal"* entre os módulos injetivos que contêm M, além disso, este é único, a menos de isomorfismo.

Uma extensão de R-módulos $N \leq M$ é dita *extensão essencial* se, para todo submódulo não nulo L de M, tivermos $L \cap N \neq 0$. Denotamos uma tal extensão por $N \leq_e M$. Equivalentemente, $N \leq_e M$ se, e somente se, para todo $m \in M \setminus \{0\}$, existir $r \in R$ tal que $rm \neq 0$ e $rm \in N$. Por exemplo, é fácil ver que $\mathbb{Z} \leq_e \mathbb{Q}$, como $\mathbb{Z}$-módulos.

Proposição 1.2.3. *[12, Proposition 5.6] Sejam L, N e M R-módulos tais que $L \leq N \leq M$. Então, $L \leq_e M$ se, e somente se, $L \leq_e N$ e $N \leq_e M$.*

Seja M um R-módulo, um *fecho injetivo* para M é um R-módulo injetivo que é uma extensão essencial de M. Por exemplo, $\mathbb{Q}$ é um fecho injetivo para $\mathbb{Z}$, como $\mathbb{Z}$-módulos.

Teorema 1.2.4. *[12, Theorem 5.12, Proposition 5.13] Todo módulo tem um único fecho injetivo, a menos de isomorfismo.*

No decorrer deste trabalho, denotaremos o fecho injetivo de um R-módulo M por $E(M)$.

1.3 A propriedade ($\diamond$)

Nesta seção, apresentamos o conceito e uma caracterização da propriedade ($\diamond$), juntamente com os aspectos históricos que motivaram o seu estudo. Também, listamos alguns exemplos conhecidos da literatura envolvendo esta propriedade.

1.3.1 Contexto Histórico e Motivação

Em 1974, Jategaonkar [22] mostrou, em seu trabalho *"Jacobson's conjecture and modules over fully bounded Noetherian rings"*, que os anéis FBN satisfazem a Conjectura de Jacobson. A peça-chave usada por Jategaonkar em sua demonstração fez surgir uma propriedade que pode ser aplicada à várias outras classes de anéis noetherianos, para validar tal conjectura. Nosso objetivo aqui é apresentar mais detalhes sobre os principais resultados utilizados por Jategaonkar que deram origem a propriedade ($\diamond$) e, também, mostrar que os anéis que possuem esta propriedade satisfazem a Conjectura de Jacobson. Iniciamos com a definição de anéis FBN.

Um anel R é dito *limitado à esquerda* se todo ideal à esquerda essencial de R contém um ideal que é essencial como ideal à esquerda. Dizemos que R é *FBN (Fully Bounded Noetherian) à esquerda* se R é noetheriano à esquerda e todo quociente primo R/P é limitado à esquerda, para todo $P \in \mathrm{Spec}(R)$. Definimos anéis *FBN à direita* de modo análogo. Um anel R é chamado *FBN* se R é FBN à esquerda e à direita. Para mais detalhes, ver [12].

Sejam R um anel FBN e M um R-módulo finitamente gerado. Uma *série básica* de um R-módulo M é uma cadeia

$$0 = B_0 \subsetneq B_1 \subsetneq \ldots \subsetneq B_n = M$$

de submódulos de M tal que B_i/B_{i-1} é maximal entre os submódulos α_i-críticos de M/B_{i-1}, onde α_i é a menor dimensão de Krull possível de um submódulo não nulo de M/B_{i-1}, para todo $1 \leq i \leq n$.

Em [22, Theorem 3.1], Jategaonkar mostrou que todo módulo finitamente gerado M sobre um anel FBN tem pelo menos uma série básica e dadas duas séries básicas $\{A_i \,|\, 1 \leq i \leq n\}$ e $\{B_i \,|\, 1 \leq i \leq m\}$ de M, então $n = m$ e existe uma permutação π sobre $\{1, \ldots, n\}$ tal que $A_i/A_{i-1} \simeq B_{\pi(i)}/B_{\pi(i-1)}$, para todo $1 \leq i \leq n$. O número de inclusões n da cadeia acima é chamado de *comprimento da série* e será denotado por $\ell(M) = n$. Isto mostra que se $\{B_i \,|\, 1 \leq i \leq n\}$ é uma série básica de M, então a sequência $\{\text{K.dim}_R(B_i/B_{i-1}) \,|\, 1 \leq i \leq n\}$ independe da série básica usada para defini-la. Esta sequência é chamada de *sequência de dimensão de Krull* de M. No próximo resultado, Jategaonkar fornece algumas informações sobre tais sequências.

Teorema 1.3.1. *[22, Theorem 3.4 (2)] Seja M um módulo finitamente gerado sobre um anel FBN. Então:*

(i) A sequência de dimensão de Krull de M é não-decrescente com $K.dim_R(M)$ como $\ell(M)$-ésimo termo;

(ii) Um ordinal α aparece na sequência de dimensão de Krull de M se, e somente se, M contém um submódulo α-crítico.

Sejam α um ordinal e M um módulo sobre um anel FBN. Dizemos que M é *α-suave* se todo os termos na sequência de dimensão de Krull de todos submódulos finitamente gerados de M é α. Notemos que todo submódulo não nulo de um módulo α-suave é claramente α-suave.

Corolário 1.3.2. *[22, Theorem 3.5] Seja R um anel FBN. Então:*

(i) Um R-módulo finitamente gerado é α-suave se, e somente se, todo termo em sua sequência de dimensão de Krull é α;

(ii) Uma extensão essencial de qualquer R-módulo α-suave é α-suave.

Demonstração: (i) ($\Rightarrow$) É imediato.

($\Leftarrow$) Seja M um R-módulo finitamente gerado tal que todo termo na sua sequência de dimensão de Krull é α. Então, pelo Teorema 1.3.1 (ii), qualquer submódulo crítico de M é α-crítico. Como o mesmo vale para qualquer submódulo N de M, novamente, pelo Teorema 1.3.1 (ii), segue que todo termo na sequência de dimensão de Krull de N é α. Portanto, M é α-suave.

(ii) Sejam E uma extensão essencial de um R-módulo α-suave M e N um submódulo finitamente gerado qualquer de E. Como $M \leq_e E$ e $N \leq E$, temos que $(M \cap N) \leq_e N$. Além disso, $M \cap N$ é α-suave. Precisamos mostrar que todo termo na sequência de dimensão de Krull de N é α. Mas, pelo Teorema 1.3.1 (ii), basta mostrarmos que todo submódulo crítico de N é α-crítico. De fato, seja L um submódulo crítico de N, assim L é β-crítico, para algum ordinal β. Como $(M \cap N) \leq_e N$, temos que $L \cap M$ é um submódulo não nulo de L e, portanto, $L \cap M$ é também β-crítico. Por outro lado, como $L \cap M$ é um submódulo β-crítico de $M \cap N$, segue do Teorema 1.3.1 (ii) que β deve aparecer na sequência de dimensão de Krull de $M \cap N$. Agora, o fato de $M \cap N$ ser α-suave implica que $\beta = \alpha$, como queríamos mostrar. ■

Corolário 1.3.3. *[22, Corollary 3.6] Seja R um anel FBN. Então, todo R-módulo finitamente gerado com socle essencial tem uma série de composição.*

Demonstração: Seja M um R-módulo finitamente gerado qualquer e consideremos $\mathrm{soc}(M) = \bigoplus_{i \in I} V_i$ o socle de M, onde V_i é um submódulo simples de M, para todo $i \in I$. Suponhamos que $\mathrm{soc}(M) \leq_e M$. Como R é noetheriano e M é um R-módulo finitamente gerado, temos que M é noetheriano e, assim, a soma direta acima deve ser finita, isto é, $\mathrm{soc}(M) = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$. Por [12, Corollary 15.2], segue que $\mathrm{K.dim}_R(\mathrm{soc}(M)) = \max\{\mathrm{K.dim}_R(V_i) \,|\, 1 \leq i \leq n\} = 0$. Aplicando o Teorema 1.3.1

(i), obtemos que todos os termos da sequência de dimensão de Krull do soc(M) é 0. Logo, pelo Corolário 1.3.2 (i), segue que o soc(M) é 0-suave. Agora, usando o Corolário 1.3.2 (ii), obtemos que M é 0-suave. Como o último termo da sequência de Krull de M é $\text{K.dim}_R(M)$, concluímos que $\text{K.dim}_R(M) = 0$ e, assim, M é artiniano. Logo, M é noetheriano e artiniano e, portanto, M tem uma série de composição. $\blacksquare$

O fato de todo módulo finitamente gerado com socle essencial, sobre um anel FBN, ter uma série de composição foi a peça-chave para Jategaonkar mostrar que os anéis FBN satisfazem a Conjectura de Jacobson (ver [22, Theorem 3.7]).

Proposição 1.3.4. *Seja R um anel. Se todo R-módulo finitamente gerado com socle essencial tem uma série de composição, então toda extensão essencial cíclica de R-módulo simples é artiniana.*

Demonstração: Sejam V um R-módulo simples e M uma extensão essencial cíclica de V. Notemos que $V \leq \text{soc}(M) \leq M$ e, como $V \leq_e M$, pela Proposição 1.2.3, segue que $\text{soc}(M) \leq_e M$. Por hipótese, M tem uma série de composição e, portanto, M é artiniano. $\blacksquare$

Devido ao Corolário 1.3.3, a recíproca da proposição acima é verdadeira para anéis FBN. Aqui nasceu a seguinte questão: para quais anéis noetherianos R, extensões essenciais cíclicas de R-módulos simples são artinianas.

Definição 1.3.5. Dizemos que um anel noetheriano R tem a *propriedade ($\diamond$)* se todas as extensões essenciais cíclicas de R-módulos simples são artinianas.

O próximo resultado mostra que os anéis com propriedade ($\diamond$) satisfazem a Conjectura de Jacobson. Este fato tem sido a principal motivação para vários algebristas se interessarem no estudo desta propriedade.

Teorema 1.3.6. *Sejam R um anel noetheriano e $\mathcal{J}(R)$ seu radical de Jacobson. Se R satisfaz ($\diamond$), então $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{J}(R)^n = 0$, isto é, R satisfaz a Conjectura de Jacobson.*

Demonstração: Para cada $x \in R \setminus \{0\}$, consideremos $\mathcal{F}_x = \{I \lhd_\ell R \,|\, x \notin I\}$ a família dos ideais à esquerda de R que não contêm x. Notemos que $\mathcal{F}_x \neq \varnothing$, pois $0 \in \mathcal{F}_x$. Como R é noetheriano, existe $I_x \in \mathcal{F}_x$ maximal, para todo $x \in R \setminus \{0\}$. Além disso, temos que $\bigcap\limits_{x \in R\setminus\{0\}} I_x = 0$.

Consideremos o R-módulo $(Rx + I_x)/I_x$. Dado um submódulo não nulo J/I_x de $(Rx + I_x)/I_x$, como $I_x \subsetneq J$ e I_x é maximal entre os ideais que não contêm x, obtemos que $x \in J$. Logo, $Rx + I_x \subseteq J$ e, portanto, $J = Rx + I_x$. Isto mostra que $(Rx + I_x)/I_x$ é simples.

Agora, afirmamos que a extensão de R-módulos $(Rx + I_x)/I_x \leq R/I_x$ é essencial. De fato, seja U um submódulo não nulo de R/I_x. Então existe $a + I_x \in U$ com $a \notin I_x$ e, assim, $I_x \subsetneq Ra + I_x$. Pela maximalidade de I_x, obtemos que $x \in Ra + I_x$, isto é, existem $r \in R$ e $b \in I_x$ tais que $x = ra + b$ e

$$r(a + I_x) = ra + I_x = x - b + I_x \in U \cap ((Rx + I_x)/I_x)\,.$$

Uma vez que $r(a + I_x) = x - b + I_x = x + I_x$ e $x \notin I_x$, segue que $r(a + I_x) \neq 0$ e, consequentemente, $U \cap ((Rx + I_x)/I_x) \neq 0$.

Pela propriedade $(\diamond)$, segue que R/I_x é artiniano, para todo $x \in R\setminus\{0\}$. Como R/I_x é também noetheriano, este tem comprimento finito. Logo, existe $n_x \geq 1$ tal que $\mathcal{J}(R)^{n_x} \cdot (R/I_x) = 0$, ou seja, $\mathcal{J}(R)^{n_x} \subseteq I_x$, para todo $x \in R \setminus \{0\}$. Portanto,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{J}(R)^n \subseteq \bigcap_{x \in R\setminus\{0\}} \mathcal{J}(R)^{n_x} \subseteq \bigcap_{x \in R\setminus\{0\}} I_x = 0,$$

como queríamos mostrar. ∎

1.3.2 Caracterização

Um R-módulo M é dito *localmente artiniano* se todo submódulo finitamente gerado de M é artiniano.

O próximo resultado fornece outras maneiras de definir a propriedade $(\diamond)$.

Proposição 1.3.7. *Seja R um anel noetheriano. As seguintes condições são equivalentes:*

(1) R satisfaz $(\diamond)$;

(2) Fechos injetivos de R-módulos simples são localmente artinianos;

(3) Extensões essenciais finitamente geradas de R-módulos simples são artinianas.

Demonstração: (1) $\Rightarrow$ (2) Sejam N um R-módulo simples e $E(N)$ o fecho injetivo de N. Devemos mostrar que $E(N)$ é localmente artiniano. De fato, dado um submódulo finitamente gerado não nulo M de $E(N)$, escrevemos $M = \sum_{i=1}^{s} Rm_i$. Uma vez que $0 \neq Rm_i \leq E(N)$ e $N \leq_e E(N)$, temos que $Rm_i \cap N \neq 0$. O fato de N ser simples implica $Rm_i \cap N = N$ e, consequentemente, $N \leq Rm_i$. Disso, segue que $N \leq Rm_i \leq E(N)$. Aplicando agora a Proposição 1.2.3, obtemos que $N \leq_e Rm_i$, ou seja, Rm_i é uma extensão essencial cíclica do R-módulo simples N. Por hipótese, Rm_i é artiniano, para todo $0 \leq i \leq s$ e, assim, $\bigoplus_{i=1}^{s} Rm_i$ também o é. Consideremos o R-epimorfismo natural $\varphi : \bigoplus_{i=1}^{s} Rm_i \longrightarrow M$. Portanto, $M \simeq (\bigoplus_{i=1}^{s} Rm_i)/\ker(\varphi)$ é artiniano, como desejávamos.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sejam N um R-módulo simples e $N \leq_e M$ uma extensão essencial finitamente gerada de N. Vamos mostrar que M é artiniano. Para isso, consideremos $E(N)$ o fecho injetivo de N, $i : N \hookrightarrow M$ e $j : N \hookrightarrow E(N)$ as injeções canônicas de R-módulos. Temos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & M \arrow[dl, dashed, "\exists h"] \\ & E(N) & \end{tikzcd}$$

Como $E(N)$ é injetivo, existe $h : M \to E(N)$ tal que $h \circ i = j$. Afirmamos que h é injetora. Suponhamos o contrário, isto é, $\ker(h) \neq 0$. Como $0 \neq \ker(h) \leq M$ e $N \leq_e M$, temos que $\ker(h) \cap N \neq 0$. Da simplicidade de N, segue que $\ker(h) \cap N = N$ e, consequentemente, $N \subseteq \ker(h)$. Desse modo, para todo $x \in N$, temos $x = j(x) =$

$(h \circ i)(x) = h(x) = 0$, ou seja, $N = 0$, contrariando o fato de N ser simples. Logo h é injetora e, portanto, $M \simeq h(M) \leq E(N)$. Uma vez que $E(N)$ é localmente artiniano e M é um submódulo finitamente gerado de $E(N)$, concluímos que M é artiniano.

(3) $\Rightarrow$ (1) É imediato. ■

Observação 1.3.8. Sejam R e S anéis, $\pi : R \longrightarrow S$ um epimorfismo de anéis e M um S-módulo qualquer. Então M tem uma estrutura de R-módulo com a seguinte ação: $r \cdot m = \pi(r)m$, para todo $r \in R$ e $m \in M$. Além disso, é fácil ver que se ${}_SN$ é um S-módulo simples e ${}_SM$ é uma extensão essencial cíclica de ${}_SN$, então ${}_RN$ é um R-módulo simples e ${}_RM$ é uma extensão essencial cíclica de ${}_RN$. Portanto, se R satisfaz ($\diamond$), então S satisfaz ($\diamond$), ou seja, toda imagem epimórfica de R satisfaz ($\diamond$).

1.3.3 Exemplos

(1) Os anéis artinianos e os V-anéis (um anel R é um *V-anel* se todo R-módulo simples é injetivo) satisfazem trivialmente ($\diamond$).

Em [20], Jain, Lam e Leroy fornecem condições necessárias e suficientes para que as extensões de Ore $K[\theta; \sigma, \delta]$, sobre um anel de divisão K, sejam V-anéis.

(2) Os anéis comutativos noetherianos satisfazem ($\diamond$) [34] e [35];

(3) Os anéis FBN satisfazem ($\diamond$) [22];

(4) Os anéis noetherianos semiprimos de dimensão de Krull 1 satisfazem ($\diamond$) [4] e [7]. Em particular, a *primeira álgebra de Weyl* $A_1(K) = K[x][\theta; \partial_x]$ satisfaz ($\diamond$).

(5) O *plano quântico*, isto é, a álgebra gerada por elementos x e y que satisfazem a relação $yx = qxy$, satisfaz ($\diamond$) se, e somente se, q é raiz da unidade [5];

(6) A *álgebra de Weyl quantizada*, isto é, a álgebra gerada por elementos x e y que satisfazem a relação $yx = qxy + 1$, satisfaz ($\diamond$) se, e somente se, q é raiz da unidade [5];

(7) A *álgebra envolvente* $\mathcal{U}(sl_2(K))$, onde K é um corpo de característica zero, satisfaz ($\diamond$) [7];

(8) A *álgebra envolvente* $\mathcal{U}(\mathcal{H})$, onde $\mathcal{H}$ é a *álgebra de Lie de Heisenberg*, isto é, a $\mathbb{C}$-álgebra gerada por elementos x, y e z satisfazendo as seguintes relações: $[x, y] = z$ e $[x, z] = 0 = [y, z]$, satisfaz ($\diamond$) [17];

(9) Certas *álgebras down-up* $A(\alpha, \beta, \gamma)$ sobre um corpo K de característica zero. Estas são K-álgebras associativas cujos geradores u e d satisfazem as seguintes relações:

$$d^2u = \alpha dud + \beta ud^2 + \gamma d$$

$$du^2 = \alpha udu + \beta u^2d + \gamma u.$$

$A(\alpha, \beta, \gamma)$ satisfaz ($\diamond$) se, e somente se, as raízes de $X^2 - \alpha X - \beta$ são raízes da unidade [4], [5] e [37].

(10) Os *anéis de grupo* $\mathbb{Z}[G]$ *e* $K[G]$, onde K é uma extensão algébrica de um corpo finito e G é um grupo policíclico por finito, satisfazem ($\diamond$) [21] e [42].

1.3.4 Contra-exemplos

(1) Sejam K um corpo de característica zero e $\mathcal{G}$ um K-espaço vetorial com base $y, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$. Então $\mathcal{G}$ tem uma estrutura de álgebra de Lie com as seguintes relações:

$$[x_i, x_j] = 0, \qquad [x_0, y] = x_0 \quad \text{e} \quad [x_i, y] = x_i + x_{i-1},$$

para todo $1 \leq i \leq n - 1$. Consideremos $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ a álgebra envolvente de $\mathcal{G}$. Tomemos $I = \sum_{i=0}^{n-1}(y - 1)(x_i - 1)\mathcal{U}(\mathcal{G})$ e $J = (y - 1)\mathcal{U}(\mathcal{G})$. Em [38], Musson mostrou que $\mathcal{U}(\mathcal{G})/I$ é uma extensão essencial cíclica não artiniana do $\mathcal{U}(\mathcal{G})$-módulo simples J/I, concluindo que $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ não satisfaz $(\diamond)$.

(2) Seja $A_n = \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n, \partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}\rangle$ a n-ésima álgebra de Weyl sobre $\mathbb{C}$. Consideremos o elemento

$$\alpha = x_1 + y_1 \left(\sum_{i=2}^{n} \lambda_i x_i y_i \right) + \sum_{i=2}^{n} (x_i + y_i).$$

Em [45, Corollary 1.4], Stafford mostrou que $A_n/x_1\alpha A_n$ é uma extensão essencial cíclica do A_n-módulo simples A_n/x_1A_n, de dimensão de Krull $n-1$. Logo, A_n não satisfaz $(\diamond)$, para todo $n > 1$.

(3) Em [11], Goodearl e Schofield construíram uma extensão finita à esquerda $L \supset K$ de anéis de divisão tal que L contém um elemento α transcendente à direita sobre K. Considerando o anel de matrizes triangulares

$$S = \begin{pmatrix} L[t] & 0 \\ L[t] & K[t] \end{pmatrix}$$

e os seguintes ideais à direita

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ M & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ L[t] & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ L[t] & K[t] \end{pmatrix},$$

onde $M = (t-\alpha)L[t]$. Goodearl e Schofield mostram que I/H é um S-módulo à direita simples e J/H é uma extensão essencial cíclica não artiniana de I/H. Observamos que, neste caso, o radical primo de S é

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ L[t] & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

e, por [28, Proposition 10.16], temos que S não é um anel semiprimo. Portanto, este é um exemplo de anel noetheriano (não semiprimo) de dimensão de Krull 1 que não satisfaz $(\diamond)$ (ver Exemplo (4) da Seção 1.3.3).

(4) Sejam K um corpo de característica zero e $a \in K[x] \setminus K$. Em [3], Carvalho, Hatipoğlu e Lomp mostraram que os anéis de operadores diferenciais $S =$

$K[x][\theta; a\partial_x]$ não satisfazem ($\diamond$). Na demonstração, eles tomam $\alpha \in K$ tal que α não é raiz de a e consideram o S-módulo à esquerda $SM\theta$, onde $M = K[x](x-\alpha)$. Disso, obtém-se que $S/SM\theta$ é uma extensão essencial cíclica não artiniana do S-módulo simples $S\theta/SM\theta$.

1.4 Derivações

Nesta seção, apresentaremos o conceito de derivação, bem como, algumas de suas propriedades e exemplos. Omitiremos as demonstrações de alguns resultados, sendo que elas podem ser encontradas em [14] ou [40]. No que segue, R sempre denotará um anel comutativo e K um corpo de característica zero.

Uma aplicação aditiva $\delta : R \to R$ é dita uma *derivação* de R se

$$\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b),$$

para todo $a, b \in R$. Não é difícil mostrar que $\delta(1) = 0$ e $\delta(a^n) = n\delta(a)a^{n-1}$, para todo inteiro $n > 0$ e $a \in R$. Se R é uma K-álgebra, dizemos que uma derivação δ é uma *K-derivação* se $\delta(\alpha a) = \alpha\delta(a)$, para todo $\alpha \in K$ e $a \in R$.

Exemplo 1.4.1. [40, Theorem 1.2.1] Sejam $R = K[x_1, \dots, x_n]$ o *anel de polinômios* sobre um anel K e $\partial_{x_i} = \partial/\partial_{x_i}$ a *derivação parcial* em relação a x_i. Então toda K-derivação de R é da forma

$$\delta = a_1\partial_{x_1} + \cdots + a_n\partial_{x_n}, \quad \text{onde} \quad a_1, \dots, a_n \in R.$$

Seja I um ideal de R, dizemos que I é um *δ-ideal* (ou *I é δ-estável*) se $\delta(I) \subseteq I$. Por exemplo, os ideais triviais 0 e R são sempre δ-ideais. Um anel cujo os únicos δ-ideais são os triviais diz-se *δ-simples*.

Proposição 1.4.2. *Seja R um anel comutativo com uma derivação δ. Consideremos $I = \langle a_1, \dots, a_s \rangle$ um ideal finitamente gerado de R. Então, I é um δ-ideal se, e somente se, $\delta(a_i) \in I$, para todo $0 \leq i \leq s$.*

Demonstração: Suponhamos que I é um δ-ideal. Então, obviamente $\delta(a_i) \in I$, para todo $0 \leq i \leq s$. Reciprocamente, assumimos que $\delta(a_i) \in I$, para todo $0 \leq i \leq s$. Dado $a = \sum_{i=1}^{s} r_i a_i \in I$, temos que $\delta(a) = \sum_{i=1}^{s} \delta(r_i)a_i + \sum_{i=1}^{s} r_i\delta(a_i) \in I$, pois $a_i, \delta(a_i) \in I$. Portanto, I é um δ-ideal. ■

Exemplo 1.4.3. Seja $R = K[x]$ com K-derivação δ. Então,

$$R \text{ é } \delta\text{-simples se, e somente se, } \delta = \alpha\partial_x, \text{ para algum } \alpha \in K \setminus \{0\}.$$

De fato, seja δ uma K-derivação de R. Então, pelo Exemplo 1.4.1, sabemos que $\delta = a\partial_x$, para algum $a \in R$. Suponhamos que R é δ-simples. Então, $a \neq 0$ e, assim, $I = Ra$ é um δ-ideal não nulo de R. Logo $I = R$ e, portanto, $a = \alpha \in K \setminus \{0\}$. Reciprocamente, seja $\delta = \alpha\partial_x$ com $\alpha \in K \setminus \{0\}$ e I um δ-ideal não nulo de R. Sabemos que existe $b \in R$ tal que $I = Rb$ e $\deg(b) = n \geq 0$. Suponhamos, por absurdo, que $n \geq 1$. Como I é um δ-ideal de R, temos que $\delta(b) = cb$, para algum $c \in R$. Logo

$$\deg(\delta(b)) = \deg(c) + \deg(b) \geq \deg(b) = n.$$

Por outro lado, o fato de $\deg(\delta(b)) = \deg(\alpha\partial_x(b))$ implica que $\deg(\delta(b)) = n-1$, que é um absurdo. Logo $n = 0$, ou seja, $b = \lambda \in K \setminus \{0\}$ e, consequentemente, $I = R$. Portanto, R é δ-simples.

O conjunto $R^\delta = \{r \in R \,|\, \delta(r) = 0\}$ é um subanel de R, conhecido como *subanel de constantes* de R.

Proposição 1.4.4. *Seja R um anel comutativo com derivação δ. Se R é δ-simples, então R^δ é um corpo.*

Demonstração: Dado um elemento não nulo $a \in R^\delta$, então $\delta(a) = 0$ e $Ra = R$, já que R é δ-simples e Ra é um δ-ideal não nulo de R. Logo, existe $a^{-1} \in R$. Assim

$$0 = \delta(1) = \delta(aa^{-1}) = \delta(a)a^{-1} + a\delta(a^{-1}) = a\delta(a^{-1}).$$

Como a é invertível, $\delta(a^{-1}) = 0$ e, consequentemente, $a^{-1} \in R^{\delta}$. ■

Dado I um ideal de R, é fácil verificar que o conjunto

$$(I : \delta) = \{r \in R \,|\, \delta^n(r) \in I, \forall\, n \geq 0\}$$

é um δ-ideal de R contido em I. Além disso, para qualquer δ-ideal J tal que $J \subseteq I$, temos que $J \subseteq (I : \delta)$, isto é, $(I : \delta)$ é o maior δ-ideal de R contido em I. No caso em que R é uma K-álgebra e P é um ideal primo de R, o seguinte resultado mostra que $(P : \delta)$ também será um ideal primo de R.

Proposição 1.4.5. *[14, Proposition 1.1] Seja R um anel com derivação δ. Se P é um ideal primo de R e char$(R/P) = 0$, então $(P : \delta)$ é primo.*

Em geral, o resultado acima não ocorre quando $\mathrm{char}(R/P) = p > 0$. Por exemplo, consideremos $R = \mathbb{Z}_2[x, y]$ com a derivação $\delta = y\partial_x + x\partial_y$ e $P = Rx$. Como $\mathrm{char}(R/P) = 2$, $\mathrm{ht}(P) = 1$ e P não é um δ-ideal, por [6, Proposition 5.3 (b)], obtemos que $(P : \delta) = Rx^2$ e, consequentemente, $(P : \delta)$ não é primo em R.

O próximo resultado mostra que toda K-álgebra δ-simples é um domínio.

Proposição 1.4.6. *Seja R uma K-álgebra com derivação δ. Se R é δ-simples, então R é um domínio.*

Demonstração: Seja P um ideal primo de R e consideremos o δ-ideal $(P : \delta)$. Como R é δ-simples e $(P : \delta) \subseteq P \subsetneq R$, obtemos que $(P : \delta) = 0$. Como $\mathrm{char}(R/P) = 0$ (pois R é uma K-álgebra) e P é primo, pela Proposição 1.4.5, segue que $(P : \delta) = 0$ é um ideal primo de R. Portanto, R é um domínio. ■

Um elemento não nulo $a \in R$ é chamado *elemento de Darboux* com respeito a δ se existir $b \in R$ tal que $\delta(a) = ba$. Por simplicidade, iremos nos referir a a apenas como elemento de Darboux, sem mencionar a derivação δ, sempre que o contexto for claro. Em outras palavras, $a \in R$ é um elemento de Darboux se, e somente se, Ra é um δ-ideal não nulo de R.

O resultado abaixo mostra que, em um domínio de fatoração única (DFU), os fatores irredutíveis de um elemento de Darboux também são elementos de Darboux.

Proposição 1.4.7. *Sejam R um DFU que é uma K-álgebra com derivação δ e a um elemento de Darboux. Então:*

(1) Se $a = pq$ e mdc$(p, q) = 1$, então p e q são elementos de Darboux;

(2) Se $a = p_1^{n_1} \cdots p_s^{n_s}$, onde cada p_i é irredutível em R e $n_i > 0$, então p_i é um elemento de Darboux, para todo $1 \leq i \leq s$.

Demonstração: (1) Seja $b \in R$ tal que $\delta(a) = ba$. Então $bpq = ba = \delta(a) = \delta(pq) = \delta(p)q + p\delta(q)$, de onde segue que $\delta(p)q = p(bq - \delta(q))$. Logo $p \mid \delta(p)q$ e, como $\mathrm{mdc}(p, q) = 1$, obtemos que $p \mid \delta(p)$, ou seja, p é um elementos de Darboux. Analogamente, mostra-se que q é um elemento de Darboux.

(2) De (1) decorre que $p_i^{n_i}$ é um elemento de Darboux, para todo $1 \leq i \leq s$. Assim existe $b_i \in R$ tal que $b_i p_i^{n_i} = \delta(p_i^{n_i}) = n_i p_i^{n_i - 1}\delta(p_i)$. Logo, $\delta(p_i) = n_i^{-1} b_i p_i$ e, portanto, p_i é um elemento de Darboux, para todo $1 \leq i \leq s$. ■

Sejam R um anel comutativo com derivação δ e A um sistema multiplicativo de R. Consideremos RA^{-1} o anel de frações de R com respeito a A e $\pi : R \to RA^{-1}$ a aplicação canônica $r \mapsto r1^{-1}$. Então δ se estende de modo único a uma derivação $\delta_A : RA^{-1} \to RA^{-1}$ tal que $\pi\delta = \delta_A \pi$. A derivação δ_A é definida por

$$\delta_A\left(rx^{-1}\right) = [\delta(r)x - r\delta(x)]x^{-2},$$

para todo $rx^{-1} \in RA^{-1}$. Quando o contexto for claro, denotaremos δ_A simplesmente por δ.

Proposição 1.4.8. *Sejam R um anel comutativo com derivação δ e A um sistema multiplicativo de R. Então:*

(1) Se I é um δ-ideal de R, então IA^{-1} é um δ-ideal de RA^{-1};

(2) Dado um ideal I de R, se IA^{-1} é um δ-ideal de RA^{-1} e I é A-saturado, então I é um δ-ideal de R;

(3) Se R é δ-simples, então RA^{-1} também o é.

Demonstração: (1) Sabemos que $IA^{-1} = \{rx^{-1} \,|\, r \in I \,\mathrm{e}\, x \in A\}$ é um ideal de RA^{-1} e $\delta(rx^{-1}) = [\delta(r)x - r\delta(x)]x^{-2}$. Como I é um δ-ideal de R, temos que $\delta(r)x, r\delta(x) \in I$ e, consequentemente, $\delta(r)x - r\delta(x) \in I$. Portanto, $\delta(rx^{-1}) \in IA^{-1}$.

(2) Suponhamos que IA^{-1} é um δ-ideal de RA^{-1} e vamos mostrar que $\delta(I) \subseteq I$. Com efeito, dado $r \in I$, temos que $r1^{-1} \in IA^{-1}$ e $\delta(r)1^{-1} = \delta(r1^{-1}) \in IA^{-1}$, pois IA^{-1} é um δ-ideal de RA^{-1}. Como I é A-saturado, segue que $\delta(r) \in I$ e, portanto, I é um δ-ideal de R.

(3) Seja $\mathcal{I}$ um δ-ideal próprio de RA^{-1}. Então $\mathcal{I} = IA^{-1}$, para algum ideal I de R tal que $I \cap A = \varnothing$ e I é A-saturado. Pelo item (2), temos que I é um δ-ideal de R. Como R é δ-simples e $I \neq R$ (pois $I \cap A = \varnothing$) segue que $I = 0$ e, consequentemente, $\mathcal{I} = IA^{-1} = 0$. Portanto, RA^{-1} é δ-simples. ■

Sejam R um anel com derivação δ e P um ideal de R. Dizemos que P é um ideal *δ-primo* se P é um δ-ideal tal que $P \neq R$ e para todo I e J δ-ideais de R tais que $IJ \subseteq P$, temos que $I \subseteq P$ ou $J \subseteq P$. O anel R é chamado *δ-primo* quando 0 for um ideal δ-primo.

Quando os ideais δ-primos de R são conhecidos, a seguinte proposição pode nos ajudar a verificar a δ-simplicidade do anel de frações R_c, onde $c \in R$ é um elemento não divisor de zero.

Proposição 1.4.9. *[14, Proposition 2.8] Sejam R um anel comutativo noetheriano com derivação δ e $c \in R$ um elemento não divisor de zero. Então, R_c é δ-simples se, e somente se, existir $n \in \mathbb{N}$ tal que c^n pertence a todos os ideais δ-primos não nulos de R.*

É óbvio que, se P é um δ-ideal primo, então P é δ-primo. No caso em que R é uma K-álgebra noetheriana, o próximo resultado nos mostra que os ideais δ-primos de R são exatamente os ideais primos de R que são δ-ideais.

Proposição 1.4.10. *[14, Corollary 1.4] Seja R um anel noetheriano com derivação δ. Se P é um ideal δ-primo de R e $char(R/P) = 0$, então P é um ideal primo de R.*

1.5 Anéis de Operadores Diferenciais

Seja R um anel com derivação δ. O *anel de operadores diferenciais* de R com respeito a δ, conhecido também como *skew anel de polinômios tipo derivação* e denotado por $R[\theta;\delta]$, é um R-módulo à esquerda (e à direita) livre com base $\{1, \theta, \theta^2, \ldots\}$. Os elementos de $R[\theta;\delta]$ são polinômios na variável θ com coeficientes em R. A adição é a usual de polinômios, mas a multiplicação se estende de R via a regra $\theta a = a\theta + \delta(a)$. Seja $f = \sum_{i=0}^{n} a_i\theta^i$ um polinômio não nulo de $R[\theta;\delta]$. O inteiro n é chamado *grau de f* e será denotado por $\deg(f)$. O elemento a_n é dito *coeficiente lider de f*. Por convenção, dizemos que o grau do polinômio nulo de $R[\theta;\delta]$ é $-\infty$.

Além disso, se R é noetheriano (respec. domínio), então $R[\theta;\delta]$ também o é (ver [12, Theorem 2.6]) e vale as seguintes identidades:

$$\theta^n a = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \delta^{n-i}(a)\theta^i \quad \text{e} \quad a\theta^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \theta^{n-i}\delta^i(a) \quad \forall\, a \in R.$$

Os próximos resultados são propriedades elementares dos anéis de operadores diferenciais, cujas demonstrações serão omitidas, porém podem ser encontradas em [12]. A seguinte proposição mostra a relação entre os ideais de R e de $R[\theta;\delta]$.

Proposição 1.5.1. *[12, Lemma 3.18 e 3.19] Sejam R um anel e $S = R[\theta;\delta]$. Então:*

(i) Se I é um ideal à esq. de R, então SI é um ideal à esq. de S e $SI \cap R = I$;

(ii) Se I é um δ-ideal de R, então $SI = IS$. Assim SI é um ideal de S;

(iii) *Se J é um ideal de S, então $J \cap R$ é um δ-ideal de R;*

(iv) *Se R é um domínio comutativo tal que $char(R) = 0$, $\delta \neq 0$ e J é um ideal não nulo de S, então $J \cap R \neq 0$.*

Se I é um δ-ideal de R, então δ induz uma derivação $\overline{\delta}$ em R/I definida por

$$\overline{\delta}(a + I) = \delta(a) + I,$$

para todo $a \in R$. Neste caso, é fácil ver que $S/SI \simeq R/I[\theta; \overline{\delta}]$, onde $S = R[\theta; \delta]$.

O próximo resultado nos fornece informações sobre os ideais primos de $R[\theta; \delta]$, assumindo que o anel R satisfaz certas condições.

Proposição 1.5.2. *[12, Theorem 3.22] Sejam R uma $\mathbb{Q}$-álgebra comutativa noetheriana com derivação δ e $S = R[\theta; \delta]$. Então:*

(i) *Se Q é um δ-ideal primo de R, então SQ é um ideal primo de S;*

(ii) *Se P é um ideal primo de S, então $P \cap R$ é um δ-ideal primo de R. Mais ainda, se $Q = P \cap R$, então ou $P = SQ$ ou $\delta(R) \subseteq Q$. No último caso, tem-se que S/SQ e S/P são anéis comutativos.*

Finalizamos esta seção apresentando informações sobre a simplicidade de $R[\theta; \delta]$.

Uma derivação δ de R é dita *interna* se existir $a \in R$ tal que $\delta(r) = ar - ra$, para todo $r \in R$.

Teorema 1.5.3. *[12, Theorem 2.1] Seja R uma $\mathbb{Q}$-álgebra com derivação δ. Então, $R[\theta; \delta]$ é um anel simples se, e somente se, δ não é interna e R é δ-simples.*

Notemos que, se R é comutativo, então δ é interna se, e somente se, $\delta = 0$. Logo, $R[\theta; \delta]$ é um anel simples se, e somente se, $\delta \neq 0$ e R é δ-simples.

Capítulo 2

Anéis δ-simples

O objetivo principal deste capítulo é dar uma resposta para a seguinte questão: dado um domínio noetheriano δ-simples R, sob quais condições $R[\theta;\delta]$ satisfaz $(\diamond)$?

Na primeira seção, obtemos condições suficientes para a existência de extensões essenciais cíclicas não artinianas de $R[\theta;\delta]$-módulos simples quando $\mathrm{K.dim}(R) > 1$ e R é δ-simples (Teorema 2.1.8). No caso em que $\mathrm{K.dim}(R) \leq 1$ e R é δ-simples, mostramos que $R[\theta;\delta]$ satisfaz $(\diamond)$ (Proposição 2.1.10). Na segunda seção, aplicamos os resultados obtidos nos casos em que R é um DFU ou um K-domínio afim. Para tais anéis, obtemos uma descrição completa de quando $R[\theta;\delta]$ satisfaz $(\diamond)$, desde que R seja também δ-simples (Teorema 2.2.2). Na última seção, mostramos que, se R é δ-simples e δ é localmente nilpotente simultaneamente, então $\mathrm{K.dim}(R) \leq \mathrm{K.dim}(R[\theta;\delta]) \leq 1$ (Proposição 2.3.4).

2.1 Resultados Gerais

Nesta seção, K denotará um corpo de característica zero, R um anel comutativo e δ uma derivação de R. Iniciamos mostrando alguns lemas que serão úteis para a construção de extensões essenciais cíclicas não artinianas de $R[\theta;\delta]$-módulos simples.

Lema 2.1.1. *Sejam R um domínio com derivação δ e $S = R[\theta;\delta]$. Se $x \in R \setminus \{0\}$, então $R \cap S\theta x = 0$.*

Demonstração: Se tivéssemos $a = (\sum_{i=0}^{n} b_i\theta^i)\theta x \in R \cap S\theta x$ com o coeficiente lider $b_n \neq 0$, então teríamos

$$\begin{aligned} a &= \sum_{i=0}^{n} b_i\theta^{i+1}x \\ &= b_n\theta^{n+1}x + \sum_{i=0}^{n-1} b_i\theta^{i+1}x \\ &= b_n x\theta^{n+1} + g, \end{aligned}$$

onde $g \in S$ e $\deg(g) < n+1$. Comparando os coeficientes em θ, obtemos $b_n x = 0$. Como R é um domínio, segue que $x = 0$, contradizendo a hipótese. Logo, $\sum_{i=0}^{n} b_i\theta^i = 0$ e, portanto, $a = 0$. ■

Lema 2.1.2. *Sejam R um K-domínio com derivação δ e $S = R[\theta;\delta]$. Suponhamos que existe $x \in R$ tal que $\delta(x)$ é invertível em R ou x é um elemento primo que não é de Darboux. Se $f = \sum_{i=0}^{n} a_i\theta^i \in S \setminus \{0\}$ e $x \nmid a_n$, então existe $r \in R \setminus \{0\}$ tal que $x^{n+1}f - rx \in S\theta x$.*

Demonstração: Usaremos indução sobre $n = \deg(f)$. Se $n = 0$, então $f = a_0 \in R \setminus \{0\}$ e podemos considerar $r = a_0 \neq 0$. Logo

$$x^{0+1}f - rx = xa_0 - a_0x = 0 \in S\theta x.$$

Suponhamos $n > 0$ e que o resultado é verdadeiro para todo $g \in S$ tal que $\deg(g) < n$. Temos

$$x^{n+1}f = x^{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\theta^i\right) = x^{n+1}(a_n\theta^n + a_{n-1}\theta^{n-1} + g_1),$$

para algum $g_1 \in S$ tal que $\deg(g_1) < n-1$. Então

$$\begin{aligned} x^{n+1}f &= x^n[a_n(x\theta^n) + xa_{n-1}\theta^{n-1} + xg_1] \\ &= x^n[a_n(\theta^n x - n\delta(x)\theta^{n-1} + g_2) + xa_{n-1}\theta^{n-1} + xg_1], \end{aligned}$$

para algum $g_2 \in S$ tal que $\deg(g_2) < n-1$ e, consequentemente,

$$x^{n+1}f = (x^n a_n \theta^{n-1})\theta x + x^n[(xa_{n-1} - na_n\delta(x))\theta^{n-1} + \underbrace{a_n g_2 + xg_1}_{\deg\,<\,n-1}].$$

Se $x \nmid a_n$ e $\delta(x)$ é invertível em R, então $x \nmid n\delta(x)a_n$, pois $n\delta(x)$ é invertível em R. Logo, $x \nmid (xa_{n-1} - na_n\delta(x))$. Por outro lado, se $x \nmid a_n$ e x é um elemento primo tal que $x \nmid \delta(x)$, então $x \nmid n\delta(x)a_n$ e, consequentemente, $x \nmid (xa_{n-1} - na_n\delta(x))$.

Usando a hipótese de indução, podemos escrever

$$x^n[(xa_{n-1} - na_n\delta(x))\theta^{n-1} + a_n g_2 + xg_1] = h\theta x + rx,$$

para algum $h \in S$ e $r \in R \setminus \{0\}$. Logo

$$\begin{aligned} x^{n+1}f &= (x^n a_n \theta^{n-1})\theta x + x^n[(xa_{n-1} - na_n\delta(x))\theta^{n-1} + a_n g_2 + xg_1] \\ &= \underbrace{(x^n a_n \theta^{n-1})\theta x + h\theta x}_{\in\, S\theta x} + rx \end{aligned}$$

e, portanto, $x^{n+1}f - rx \in S\theta x$ com $r \in R \setminus \{0\}$. ■

Lema 2.1.3. *Sejam R um K-domínio com derivação δ e $S = R[\theta;\delta]$. Se existe $x \in R$ tal que $\delta(x)$ é invertível em R ou x é um elemento primo que não é de Darboux, então $S/S\theta x$ é uma extensão essencial do S-módulo $Sx/S\theta x$.*

Demonstração: Seja U um S-submódulo à esquerda não nulo de $S/S\theta x$. Vamos mostrar que $U \cap (Sx/S\theta x) \neq 0$. Escolha um elemento $f + S\theta x \in U$ não nulo de grau mínimo entre os elementos não nulos de U. Escrevamos $f = \sum_{i=0}^{n} a_i\theta^i$.

Se $n = 0$, então $f = a_0 \in R \setminus \{0\}$. Assim $xf = xa_0 \in Sx \setminus S\theta x$, pois $xa_0 \in R \setminus \{0\}$ e, pelo Lema 2.1.1, $R \cap S\theta x = 0$. Logo

$$0 \neq xf + S\theta x \in U \cap (Sx/S\theta x)$$

e, portanto, $U \cap (Sx/S\theta x) \neq 0$.

Se $n > 0$, então $x \nmid a_n$. Suponhamos o contrário, então $a_n = bx$ para algum $b \in R$ e

$$f = a_n\theta^n + g_1,$$

onde $g_1 \in S$ e $\deg(g_1) < n$. Assim

$$\begin{aligned} f &= b(x\theta^n) + g_1 \\ &= b(\theta^n x + g_2) + g_1, \end{aligned}$$

onde $g_2 \in S$ e $\deg(g_2) < n$. Logo

$$f = (b\theta^{n-1})\theta x + bg_2 + g_1.$$

Isto mostra que $0 \neq f + S\theta x = (bg_2 + g_1) + S\theta x \in U$ com $\deg(bg_2 + g_1) < n$, contrariando a minimalidade de n. Portanto, $x \nmid a_n$.

Agora, pelo Lema 2.1.2, existe $r \in R \setminus \{0\}$ tal que $x^{n+1}f - rx \in S\theta x$. Logo

$$x^{n+1}f + S\theta x = rx + S\theta x \in U \cap (Sx/S\theta x).$$

Notemos que $rx + S\theta x \neq 0$, pois, se $rx \in S\theta x$, teríamos que $rx \in R \cap S\theta x$ com $rx \neq 0$, contrariando o Lema 2.1.1. Disso, concluímos que $U \cap (Sx/S\theta x) \neq 0$, como queríamos mostrar. ∎

Agora, enunciaremos dois resultados de Goodearl e Warfield [13] que nos ajudam a construir $R[\theta;\delta]$-módulos à esquerda não artinianos.

Proposição 2.1.4. *[13, Proposition 2.7] Sejam R um anel comutativo noetheriano com derivação δ e $S = R[\theta;\delta]$. Seja P um ideal primo não maximal de R tal que $K.dim(R/P)$ é finita e definamos*

$$m = max\{K.dim_S(S/SQ) \mid Q \in Spec(R) \text{ e } Q \supsetneq P\}.$$

Então $K.dim_S(S/SP) = m + 1$.

Inicialmente, notemos que, no caso de domínios de dimensão de Krull 1, essa proposição somente se aplica ao ideal nulo, pois todo ideal primo não nulo é maximal.

Observação 2.1.5. Sejam R um anel com derivação δ e $S = R[\theta;\delta]$. O anel R torna-se um S-módulo à esquerda com a ação

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\theta^i\right) \cdot b = \sum_{i=0}^{n} a_i\delta^i(b),$$

para todo $b \in R$ e $\sum_{i=0}^{n} a_i\theta^i \in S$. Também, a aplicação $\phi : S \to R$, definida por

$$\phi\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\theta^i\right) = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\theta^i\right) \cdot 1 = a_0,$$

é um epimorfismo de S-módulos à esquerda com $\ker(\phi) = S\theta$. Disso, segue que $S/S\theta \simeq {}_SR$, como S-módulos à esquerda, e os S-submódulos de $S/S\theta$ são precisamente os δ-ideais à esquerda de R.

Sejam R um anel comutativo noetheriano com derivação δ e $S = R[\theta;\delta]$. Como em [13], definimos a *δ-dimensão de Krull* de R, que será denotada por δ-K.dim(R), como sendo a dimensão de Krull de ${}_SR$, com a estrutura de S-módulo à esquerda definida acima, isto é,

$$\delta\text{-K.dim}(R) = \text{K.dim}_S(R).$$

Proposição 2.1.6. *[13, Proposition 4.2] Sejam R um anel comutativo noetheriano com derivação δ, P um ideal primo de R e $S = R[\theta;\delta]$. Se δ-K.dim(R) é finita e K.dim(R/P) é infinita, então K.dim$_S(S/SP)$ = K.dim(R/P).*

Utilizando os resultados de [13], obtemos o seguinte.

Lema 2.1.7. *Sejam R um K-domínio noetheriano com derivação δ e $S = R[\theta;\delta]$. Se R é δ-simples e P é um ideal primo não maximal de R, então S/SP é um S-módulo à esquerda não artiniano.*

Demonstração: Primeiro, suponhamos que K.dim(R/P) é finita. Uma vez que P é um ideal primo não maximal, existe um ideal maximal M de R contendo P. Notemos que SM é um ideal à esquerda próprio de S, pois, caso contrário, teríamos que

$1 \in SM \cap R = M$, o que não pode ocorrer. Logo $S/SM \neq 0$ e, consequentemente, $\text{K.dim}_S(S/SM) \geq 0$. Disso, segue que

$$m = \max\{\text{K.dim}_S(S/SQ) \mid Q \in \text{Spec}(R) \;\text{ e }\; Q \supsetneq P\} \geq 0.$$

Pela Proposição 2.1.4, obtemos que $\text{K.dim}_S(S/SP) = m + 1 \geq 1$ e, portanto, S/SP não é artiniano.

Agora, assumimos que $\text{K.dim}(R/P)$ é infinita. Como R é δ-simples, temos que ${}_SR$ é simples, pois os S-submódulos de R são exatamente os δ-ideais de R. Logo, $\delta\text{-K.dim}(R) = \text{K.dim}_S(R) = 0$. Pela Proposição 2.1.6, segue que $\text{K.dim}_S(S/SP) = \text{K.dim}(R/P)$ é infinita. Portanto, S/SP não é artiniano. ∎

O seguinte resultado fornece condições suficientes para obtermos extensões essenciais cíclicas não artinianas de $R[\theta;\delta]$-módulos simples quando R é δ-simples.

Teorema 2.1.8. *Seja R um K-domínio noetheriano com derivação δ tal que R é δ-simples. Se existe $x \in R$ satisfazendo as seguintes condições:*

(1) existe um ideal primo não maximal $P \subseteq R$ tal que $x \in P$ e

(2) $\delta(x)$ é invertível em R ou x é um elemento primo em R,

então $S = R[\theta;\delta]$ não satisfaz $(\diamond)$.

Demonstração: Primeiro, notemos que x não é um elemento de Darboux, caso contrário, Rx seria um δ-ideal não trivial de R, contrariando o fato de R ser δ-simples. Como $\delta(x)$ é invertível em R ou x é um elemento primo não Darboux, pelo Lema 2.1.3, segue que $S/S\theta x$ é uma extensão essencial de $Sx/S\theta x$, como S-módulos à esquerda.

Além disso, usando o fato de R ser δ-simples e a Observação 2.1.5, obtemos que $S/S\theta \simeq Sx/S\theta x$ é um S-módulo à esquerda simples.

Agora, como P é um ideal primo não maximal e R é δ-simples, pelo Lema 2.1.7, obtemos que S/SP é um S-módulo à esquerda não artiniano. Uma vez que $x \in P$, obtemos $S\theta x \subseteq SP \subseteq S$ e, consequentemente,

$$S/SP \simeq \frac{S/S\theta x}{SP/S\theta x}.$$

Então, o fato de S/SP não ser artiniano implica que $S/S\theta x$ não é artiniano.

Logo $S/S\theta x$ é uma extensão essencial cíclica não artiniana do S-módulo simples $Sx/S\theta x$ e, portanto, S não satisfaz $(\diamond)$. ■

Cabe ressaltarmos que as condições (1) e (2) do Teorema 2.1.8 exigem que R tenha dimensão de Krull > 1. Finalizaremos esta seção mostrando que $R[\theta;\delta]$ satisfaz $(\diamond)$ quando R é δ-simples e $\mathrm{K.dim}(R) \leq 1$. Mas antes, apresentamos o seguinte resultado de Goodearl e Warfield [13], que nos ajuda a calcular a dimensão de Krull de $R[\theta;\delta]$.

Teorema 2.1.9. *[13, Theorem 2.10] Sejam R um anel comutativo noetheriano de dimensão de Krull finita e δ uma derivação de R. Se $K.dim(R) = n$, então $K.dim(R[\theta;\delta]) = n+1$ a menos que, para qualquer ideal maximal M de R de altura n, $\delta(M) \nsubseteq M$ e $char(R/M) = 0$, neste caso $K.dim(R[\theta;\delta]) = n$.*

Proposição 2.1.10. *Seja R um domínio noetheriano livre de $\mathbb{Z}$-torção com derivação δ tal que R é δ-simples. Se $K.dim(R) \leq 1$, então $R[\theta;\delta]$ satisfaz $(\diamond)$.*

Demonstração: Suponhamos primeiro que $\mathrm{K.dim}(R) = 0$. Neste caso, 0 é um ideal maximal de R que é um δ-ideal. Aplicando o Teorema 2.1.9, obtemos que $\mathrm{K.dim}(R[\theta;\delta]) = 1$. Assumimos agora que $\mathrm{K.dim}(R) = 1$. Dado um ideal maximal qualquer M de R, como R é δ-simples, temos que $\delta(M) \nsubseteq M$. Além disso, $\mathrm{char}(R/M) = 0$, pois se $\mathrm{char}(R/M) = p > 0$, então $Rp \subseteq M$ seria um δ-ideal não nulo (lembre-se que R é livre de $\mathbb{Z}$-torção). Pelo Teorema 2.1.9, segue que $\mathrm{K.dim}(R[\theta;\delta]) = \mathrm{K.dim}(R) = 1$. Logo, em ambos os caso, temos que $R[\theta;\delta]$ é um domínio (e, assim, é semiprimo) noetheriano de dimensão de Krull 1 e, consequentemente, $R[\theta;\delta]$ satisfaz ($\diamond$) (ver Exemplo (4) da Seção 1.3.3). ■

2.2 DFU e Domínios Afins

Nesta seção, K denotará um corpo de característica zero e R um anel comutativo. Nosso objetivo agora é aplicar os resultados da seção anterior para o caso em que R é um DFU ou um K-domínio afim, de modo a caracterizar os anéis de operadores diferenciais simples $R[\theta;\delta]$ que satisfazem ($\diamond$). Antes, relembremos alguns fatos de álgebra comutativa.

Uma sequência $(x_1,\ldots,x_s)$ de elementos de R é chamada *sequência regular* em R se as seguintes condições são satisfeitas:

(1) $\langle x_1,\ldots,x_s\rangle \neq R$;

(2) x_1 não é divisor de zero em R e a imagem de x_i não é divisor de zero em $R/\langle x_1,\ldots,x_{i-1}\rangle$, para cada $i=2,\ldots,s$.

Uma sequência regular $(x_1,\ldots,x_s)$ em R é dita *maximal* se a sequência $(x_1,\ldots,x_s,x)$ não é regular, para todo $x\in R$. Se R é noetheriano, então existem sequências regulares maximais em R (ver [26, Theorem 120]) e, além disso, se I é um ideal próprio de R, então todas as sequências regulares maximais contidas em I têm sempre o mesmo número de elementos (ver [26, Theorem 121]). Sejam R um anel noetheriano e I um ideal próprio de R. Definimos a *profundidade* de I e, denotamos por $G(I)$, o número de elementos de uma sequência regular maximal contida em I. Em geral, temos que $G(I)\leq \mathrm{ht}(I)$ (ver [26, Theorem 132]). Um anel R é chamado *anel de Cohen-Macaulay* se R é noetheriano e $G(M)=\mathrm{ht}(M)$, para todo $M\in \mathrm{Max}(R)$.

Dizemos que R é um *anel local regular* se R é um anel local noetheriano com ideal maximal M tal que o número mínimo de geradores de M é igual a dimensão de

Krull de R. Neste caso, qualquer conjunto de geradores minimal para M forma uma sequência regular e, portanto, $G(M) = \text{ht}(M)$ (ver [26, Theorem 136]). Isto mostra que todo anel local regular é um anel de Cohen-Macaulay. Dizemos que um anel R é *regular* se R é noetheriano e R_P é um anel local regular, para todo $P \in \text{Spec}(R)$.

O seguinte resultado será útil aos nossos propósitos.

Teorema 2.2.1. *[9, Theorem 2] Seja R um K-domínio afim e I um ideal de R. Então I tem um conjunto gerador minimal com a propriedade que cada um de seus subconjuntos com cardinalidade menor que $G(I)$ gera um ideal primo.*

Estamos agora em condições de apresentar o resultado principal desta seção.

Teorema 2.2.2. *Seja R uma K-álgebra tal que R é um DFU noetheriano ou um domínio afim, com derivação δ, tal que R é δ-simples. Então,*

$$R[\theta;\delta] \text{ satisfaz } (\diamond) \quad \text{se, e somente se,} \quad K.dim(R) \leq 1.$$

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Suponhamos primeiro que R é um DFU e $\text{K.dim}(R) > 1$. Então R contém um ideal primo não nulo e não maximal P. Como R é um DFU e P é um ideal primo não nulo, então, por [26, Theorem 5], P contém um elemento primo. Desse modo, aplicando o Teorema 2.1.8, obtemos que $R[\theta;\delta]$ não satisfaz $(\diamond)$.

Assumimos agora que R é um domínio afim e $\text{K.dim}(R) = n > 1$. Consideremos M um ideal maximal de R tal que $\text{ht}(M) = n$. Como R é uma álgebra afim δ-simples, então, por [15, Theorem 1], segue que R é um anel regular. Assim R_M é um anel local regular e, portanto, é um anel de Cohen-Macaulay. Disso, concluímos que

$$G(M_M) = \text{ht}(M_M) = \text{ht}(M) = n.$$

Por [26, Theorem 135], obtemos que

$$G(M) = G(M_M) = n > 1.$$

Agora, aplicando o Teorema 2.2.1, segue que M tem um conjunto gerador minimal $\{p_1, \ldots, p_m\}$ tal que $\{p_i\}$ gera um ideal primo, para todo $1 \leq i \leq m$ (pois $G(M) > 1$). Sejam $x = p_k$, para algum $1 \leq k \leq m$ e $P = Rx$. Pelo Teorema do Ideal Principal (ver [10, Theorem 10.2]), temos que $1 < \mathrm{ht}(M) \leq m$ e, portanto, $P \subsetneq M$. Uma vez que x é um elemento primo e $P = Rx$ é um ideal primo não maximal de R segue, pelo Teorema 2.1.8, que $R[\theta;\delta]$ não satisfaz $(\diamond)$.

($\Leftarrow$) Segue da Proposição 2.1.10. ■

O resultado acima tem a seguinte consequência imediata.

Corolário 2.2.3. *Sejam $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ ou $K[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$ com derivação δ tal que R é δ-simples. Então, $R[\theta;\delta]$ satisfaz $(\diamond)$ se, e somente se, $n = 1$.*

Vejamos alguns exemplos de DFU de dimensão de Krull 1 que são δ-simples.

Exemplo 2.2.4. (1) O anel polinomial $K[x]$ com a K-derivação $\delta = \alpha\partial_x$, onde $\alpha \in K \setminus \{0\}$, é δ-simples (ver Exemplo 1.4.3).

(2) O anel de séries de potências formais $K[[x]]$ com a K-derivação $\delta = \alpha\partial_x$, onde $\alpha \in K \setminus \{0\}$, é δ-simples. De fato, sejam I um δ-ideal não nulo de $K[[x]]$ e $a = \sum_{i=n}^{\infty} \lambda_i x^i \in I$ com $\lambda_n \neq 0$. Como $\delta^n(I) \subseteq I$, temos que

$$\begin{aligned}
\delta^n(a) &= \delta^n\left(\lambda_n x^n + \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i x^i\right) \\
&= \lambda_n \delta^n(x^n) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i \delta^n(x^i) \\
&= \lambda_n n! + \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i \frac{i!}{(i-n)!} x^{i-n} \in I.
\end{aligned}$$

Notemos que $\lambda_n n! \neq 0$ e, assim, $\delta^n(a) \in I$ é invertível em $K[[x]]$. Logo $I = R$.

(3) Consideremos o anel local $K[x]_{\langle x \rangle}$. Como $K[x]$ é δ-simples com a K-derivação $\delta = \alpha\partial_x$, onde $\alpha \in K \setminus \{0\}$, pela Proposição 1.4.8 (3), temos que $K[x]_{\langle x \rangle}$ é δ-simples.

Na literatura, podemos encontrar vários exemplos de DFU δ-simples de dimensão de Krull > 1.

Exemplo 2.2.5. (1) O anel de polinômios $K[x,y]$ com a K-derivação

$$\delta = \partial_x + (y^s + px + q)\partial_y,$$

onde $s \geq 2$, $p, q \in K$ e $p \neq 0$, é δ-simples (ver [39, Teorema 2]).

(2) O anel de polinômios $K[x,y]$ com a K-derivação

$$\delta = y^r\partial_x + (y^s x^t + c)\partial_y,$$

onde $r \geq 0$, $s, t \geq 1$ e $c \in K \setminus \{0\}$, é δ-simples (ver [27, Theorem 6.8]).

(3) Consideremos o anel de polinômios $K[x_1, \ldots, x_n]$ com $n > 2$ e K-derivação

$$\delta = (1 - x_1x_2)\partial_{x_1} + x_1^3\partial_{x_2} + \sum_{i=3}^{n} x_{i-1}\partial_{x_i}.$$

Então $K[x_1, \ldots, x_n]$ é δ-simples (ver [40, Exemplo 13.4.1]).

(4) Consideremos o anel de polinômios $K[x_1, \ldots, x_n]$ com a K-derivação

$$\delta = \partial_{x_1} + \sum_{i=2}^{n}(x_{i-1}x_i + 1)\partial_{x_i} \quad \text{ou} \quad \delta = \partial_{x_1} + \sum_{i=2}^{n}(x_{i-1}^2 x_i + x_{i-1})\partial_{x_i}.$$

Então $K[x_1, \ldots, x_n]$ é δ-simples (ver [40, Exemplo 13.4.3]).

(5) Consideremos o $\mathbb{C}$-domínio afim

$$R = \mathbb{C}[x_1, x_2, y_1, y_2]/\langle x_1^2 + y_1^2 - 1, x_2^2 + y_2^2 - 1\rangle$$

com a $\mathbb{C}$-derivação

$$\delta = ay_1\partial_{x_1} - ax_1\partial_{y_1} + by_2\partial_{x_2} - bx_2\partial_{y_2},$$

onde a/b é um número irracional. Então R é δ-simples (ver [1, Teorema 2.5.9]). Neste exemplo, temos que $R \simeq \mathbb{C}[t_1, t_1^{-1}, t_2, t_2^{-1}]$ via o isomorfismo

$$\begin{array}{ll} x_1 + iy_1 \mapsto t_1, & x_1 - iy_1 \mapsto t_1^{-1}, \\ x_2 + iy_2 \mapsto t_2, & x_2 - iy_2 \mapsto t_2^{-1}. \end{array}$$

(6) O anel local $K[x,y]_{\langle x,y\rangle}$ com a K-derivação

$$\delta = \partial_x + (\beta y^n + 1)\partial_y,$$

onde $n > 0$ e $\beta \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, é δ-simples (ver [2, Proposition 3.3]).

Finalizaremos esta seção com aplicações do teorema acima para domínios afins.

Exemplo 2.2.6. Seja $R = K[x,y]/\langle x^2 + y^2 - 1\rangle$ com a K-derivação $\delta = y\partial_x - x\partial_y$. Então, R é δ-simples (ver [47, Example 2.5]). Além disso, notemos que R é um K-domínio afim de dimensão de Krull 1. Aplicando o Teorema 2.2.2, concluímos que $R[\theta;\delta]$ satisfaz $(\diamond)$.

Exemplo 2.2.7. Seja $R = K[x,y,z]/\langle x^2 + yz - 1\rangle$ com a K-derivação

$$\delta = (x^2y - z)\partial_x + 2x\partial_y - 2x^3\partial_z.$$

Então, R é δ-simples (ver [1, Theorem 2.5.23]). Como R é um K-domínio afim de dimensão de Krull > 1, pelo Teorema 2.2.2, temos que $R[\theta;\delta]$ não satisfaz $(\diamond)$.

2.3 Nilpotência Local e Simplicidade

Uma derivação δ é dita *localmente nilpotente* se, para todo $a \in R$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\delta^k(a) = 0$. Consideremos o anel de polinômios $K[x_1,\ldots,x_n]$ com uma K-derivação δ. Dizemos que δ é uma derivação *triangular* de $K[x_1,\ldots,x_n]$ se $\delta(x_1) \in K$ e $\delta(x_i) \in K[x_1,\ldots,x_{i-1}]$, para todo $i > 1$. Assim, é fácil ver que as derivações triangulares são localmente nilpotentes.

Carvalho, Hatipoğlu e Lomp [3] estudaram a propriedade $(\diamond)$ em $R[\theta;\delta]$, quando R é uma K-álgebra afim e δ é uma K-derivação localmente nilpotente, obtendo o seguinte resultado.

Proposição 2.3.1. *[3, Proposition 2.1] Sejam K um corpo algebricamente fechado de característica zero e R uma K-álgebra afim comutativa com K-derivação δ. Se δ é localmente nilpotente, então $R[\theta;\delta]$ satisfaz $(\diamond)$.*

Vimos na seção anterior que, quando R é δ-simples, a propriedade ($\diamond$) em $R[\theta;\delta]$ está relacionada com a dimensão de Krull de R. Disso, nasce a seguinte questão: o que acontece se R é δ-simples e a derivação δ é localmente nilpotente simultaneamente?

Nesta seção, veremos que este caso só aparece quando

$$\text{K.dim}(R) \leq \text{K.dim}(R[\theta;\delta]) \leq 1.$$

Sejam $K \subset L$ uma extensão de corpos e $B \subset L$ um subconjunto de L. Então B é uma *base de transcendência* para L sobre K se B é algebricamente independente sobre K e L é algébrico sobre o subcorpo $K(B)$. Se existe uma base de transcendência finita de L sobre K, podemos mostrar que quaisquer duas bases transcendência têm o mesmo número de elementos (ver [43, Corollary 12.53]). Então, o número de elementos de uma base de transcendência de L sobre K é chamado *grau de transcendência* de L sobre K e denotamos por $\text{tr.deg}_K(L)$.

Dado R um K-domínio afim e $\mathcal{F}(R)$ o seu corpo de frações, temos que a dimensão de Krull de R coincide com o grau de transcendência de $\mathcal{F}(R)$ sobre K, ou seja, $\text{K.dim}(R) = \text{tr.deg}_K(\mathcal{F}(R))$ (ver [43, Corollary 14.29]). Em geral, temos o seguinte lema, cuja prova é devida a Manuel Reyes em MathOverflow [41]. Uma vez que não estávamos cientes de qualquer referência para ele na literatura, reproduzimos a sua demonstração aqui.

Lema 2.3.2. *[41] Se R é um K-domínio, então $K.dim(R) \leq tr.deg_K(\mathcal{F}(R))$.*

Demonstração: Seja $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \ldots \subsetneq P_m$ uma cadeia estritamente ascendente de ideais primos de R, vamos mostrar que $m \leq \text{tr.deg}_K(\mathcal{F}(R))$. Para $i \in \{1, \ldots, m\}$, consideremos os elementos $x_i \in P_i \setminus P_{i-1}$.

Seja $R' \subseteq R$ a K-subálgebra gerada por $\{x_1, \ldots, x_m\}$ e definamos $Q_i = R' \cap P_i$, para todo $0 \leq i \leq m$. Notemos que $Q_0 \subsetneq Q_1 \subsetneq \ldots \subsetneq Q_m$ é uma cadeia estritamente ascendente de ideais primos de R', pois $x_i \in Q_i \setminus Q_{i-1}$.

Além disso, como R' é uma K-álgebra afim, por [43, Corollary 14.29], segue que $\text{K.dim}(R') = \text{tr.deg}_K(\mathcal{F}(R'))$. Uma vez que $\mathcal{F}(R') \subseteq \mathcal{F}(R)$, temos que $\text{tr.deg}_K(\mathcal{F}(R')) \leq \text{tr.deg}_K(\mathcal{F}(R))$. Portanto, $m \leq \text{K.dim}(R') = \text{tr.deg}_K(\mathcal{F}(R')) \leq \text{tr.deg}_K(\mathcal{F}(R))$. ■

Lema 2.3.3. *[32, Lemma 4] Seja R um domínio com derivação não nula δ. Se δ é localmente nilpotente, então $tr.deg_{R^\delta}(\mathcal{F}(R)) = 1$.*

Proposição 2.3.4. *Seja R um domínio noetheriano livre de $\mathbb{Z}$-torção de dimensão de Krull finita com derivação δ. Se R é δ-simples e δ é localmente nilpotente, então*

$$K.dim(R) \leq K.dim(R[\theta; \delta]) \leq 1.$$

Demonstração: Primeiro, suponhamos que R é um corpo. Neste caso, 0 é um ideal maximal de R que é um δ-ideal. Aplicando o Teorema 2.1.9, obtemos que $\text{K.dim}(R[\theta; \delta]) = 1$. Logo, $0 = \text{K.dim}(R) < \text{K.dim}(R[\theta; \delta]) = 1$.

Agora, assumimos que R não é um corpo. Dado um ideal maximal qualquer M de R, como R é δ-simples, obtemos que $\delta(M) \nsubseteq M$. Além disso, o fato de R ser livre de $\mathbb{Z}$-torção implica $\text{char}(R/M) = 0$, tal como na demonstração da Proposição 2.1.10. Aplicando o Teorema 2.1.9, segue que $\text{K.dim}(R) = \text{K.dim}(R[\theta; \delta])$.

Consideremos R^δ o subanel de constantes de R. Como R é δ-simples, pela Proposição 1.4.4, temos que R^δ é um corpo. Definamos $K = R^\delta$, assim R é um K-domínio e, pelo Lema 2.3.2, obtemos $\text{K.dim}(R) \leq \text{tr.deg}_K(\mathcal{F}(R))$.

Agora, usando o fato de δ ser localmente nilpotente e $K = R^\delta$, do Lema 2.3.3 segue que $\text{tr.deg}_K(\mathcal{F}(R)) = 1$.

Portanto, $\text{K.dim}(R[\theta; \delta]) = \text{K.dim}(R) \leq \text{tr.deg}_K(\mathcal{F}(R)) = 1$, como queríamos provar. ■

Capítulo 3

Anéis δ-primitivos

Neste capítulo, K sempre denotará um corpo de característica zero e R um anel comutativo com derivação δ. Dizemos que um anel R é *δ-primitivo* se R possui um ideal maximal que não contém δ-ideais não nulos. O objetivo principal deste capítulo é fornecer condições necessárias e suficientes para que $R[\theta;\delta]$ satisfaça $(\diamond)$ quando R é δ-primitivo. Em [3], Carvalho, Hatipoğlu e Lomp iniciaram o estudo da propriedade $(\diamond)$ em $R[\theta;\delta]$ no caso em que R é δ-primitivo. Em particular, eles mostraram o seguinte.

Teorema 3.0.1. *[3, Theorem 3.5] Seja R um domínio comutativo noetheriano livre de $\mathbb{Z}$-torção com derivação não nula δ tal que R é δ-primitivo. Se $R[\theta;\delta]$ satisfaz $(\diamond)$, então R é δ-simples.*

Este capítulo está organizado em duas seções. Na primeira, estudamos a primitividade dos anéis de operadores diferenciais $R[\theta;\delta]$ sobre um K-domínio afim R. Em particular, mostramos que $R[\theta;\delta]$ é primitivo se, e somente se, $\delta \neq 0$ e R é δ-primitivo (Teorema 3.1.2). Como consequência, obtemos uma caracterização para os anéis de operadores diferenciais primitivos que satisfazem $(\diamond)$ (Corolário 3.1.3).

Na segunda seção, caracterizamos a propriedade $(\diamond)$ em $R[\theta;\delta]$ quando R é um K-domínio afim de dimensão de Krull 1 (Teorema 3.2.4). Como aplicação, descreveremos os anéis de operadores diferenciais sobre o anel de Laurent $K[x,x^{-1}]$ que satisfazem $(\diamond)$ (Teorema 3.2.7). Além disso, apresentaremos um exemplo de um anel de operadores diferenciais $R[\theta;\delta]$ satisfazendo $(\diamond)$ onde a derivação δ não é localmente nilpotente (Exemplo 3.2.8).

3.1 Primitividade de $R[\theta;\delta]$

Um anel R é dito um *δ-G-anel* se R é δ-primo e a interseção de todos os ideais δ-primos não nulos de R é não nula. Estes anéis são usados em [14], por Goodearl e Warfield, para caracterizar os anéis de operadores diferenciais primitivos, como mostra o seguinte.

Teorema 3.1.1. *[14, Theorem 3.7] Seja R um anel comutativo noetheriano livre de $\mathbb{Z}$-torção com derivação δ. Então, $R[\theta;\delta]$ é primitivo se, e somente se, $\delta \neq 0$ e, ou R é δ-primitivo, ou R é um δ-G-anel.*

O resultado acima pode ser melhorado no caso em que R é um K-domínio afim.

Teorema 3.1.2. *Seja R um K-domínio afim com derivação δ. Se R é um δ-G-anel, então R é δ-primitivo. Consequentemente,*

$$R[\theta;\delta] \text{ é primitivo} \quad \text{se, e somente se,} \quad \delta \neq 0 \text{ e } R \text{ é } \delta\text{-primitivo.}$$

Demonstração: Suponhamos que R é um δ-G-anel e não é δ-primitivo. Então, dado um ideal maximal qualquer M de R, existe um δ-ideal não nulo I tal que $M \supseteq I$. Consideremos $(M:\delta)$ o maior δ-ideal contido em M. Notemos que $(M:\delta) \neq 0$, pois $(M:\delta) \supseteq I \neq 0$. Como R é uma K-álgebra, então $\operatorname{char}(R/M) = 0$ e, pela Proposição 1.4.5, $(M:\delta)$ é um ideal primo de R. Logo,

$$\begin{aligned} 0 \neq \bigcap\{P \lhd R \mid P \text{ é } \delta\text{-primo não nulo}\} &\subseteq \bigcap_{M \in \operatorname{Max}(R)} (M:\delta) \\ &\subseteq \bigcap_{M \in \operatorname{Max}(R)} M = \mathcal{J}(R). \end{aligned}$$

Mas, como R é um K-domínio afim, por [28, Theorem 5.3], temos $\mathcal{J}(R) = 0$, que é uma contradição. Portanto, R é δ-primitivo.

A última afirmação é agora uma consequência do Teorema 3.1.1. ■

Apresentamos agora algumas consequências dos resultados obtidos até aqui juntamente com o Teorema 3.0.1. A primeira delas caracteriza os anéis de operadores diferenciais primitivos que satisfazem ($\diamond$).

Corolário 3.1.3. *Sejam R um K-domínio afim e δ uma derivação de R tal que $R[\theta;\delta]$ é primitivo (ou equivalentemente, R é δ-primitivo). Então,*

$$R[\theta;\delta] \text{ satisfaz } (\diamond) \quad \text{se, e somente se,} \quad R \text{ é } \delta\text{-simples e } K.dim(R) \leq 1.$$

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponhamos que $R[\theta;\delta]$ satisfaz ($\diamond$). Como $R[\theta;\delta]$ é primitivo, pelo Teorema 3.1.2, temos que $\delta \neq 0$ e R é δ-primitivo. Agora, usando o Teorema 3.0.1, segue que R é δ-simples e, além disso, o Teorema 2.2.2 implica que K.dim$(R) \leq 1$.

($\Leftarrow$) Segue do Teorema 2.2.2. ■

Como consequência imediata do Corolário 3.1.3, temos o seguinte.

Corolário 3.1.4. *Seja $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ ou $K[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$ com derivação δ tal que $R[\theta;\delta]$ é primitivo. Então,*

$$R[\theta;\delta] \text{ satisfaz } (\diamond) \quad \text{se, e somente se,} \quad R \text{ é } \delta\text{-simples e } n = 1.$$

Corolário 3.1.5. *Sejam K um corpo algebricamente fechado, R um K-domínio afim e $S = R[\theta;\delta]$. Se δ é uma derivação localmente nilpotente de R, então todos os quocientes primitivos de S possuem dimensão de Krull ≤ 1.*

Demonstração: Suponhamos que δ é uma derivação localmente nilpotente de R. Então, segue da Proposição 2.3.1 que S satisfaz ($\diamond$). Pela Observação 1.3.8, o mesmo ocorre com os seus quocientes primitivos. Dado um ideal primitivo qualquer $\mathcal{P}$ de S, pela Proposição 1.5.2 (ii), ou $\mathcal{P} = S(\mathcal{P} \cap R)$ ou $S/\mathcal{P}$ é comutativo. O último caso implica que $S/\mathcal{P}$ é um corpo e, assim, K.dim$(S/\mathcal{P}) = 0$. Se $\mathcal{P} = S(\mathcal{P} \cap R)$, então $S/\mathcal{P} = S/S(\mathcal{P} \cap R) = R/(\mathcal{P} \cap R)[\theta; \overline{\delta}]$, onde $\overline{\delta}$ é a derivação de $R/(\mathcal{P} \cap R)$ induzida por δ. Como $R/(\mathcal{P} \cap R)[\theta; \overline{\delta}]$ é primitivo e satisfaz $(\diamond)$, segue do Corolário 3.1.3 que $R/(\mathcal{P} \cap R)$ é $\overline{\delta}$-simples e K.dim$(R/(\mathcal{P} \cap R)) \leq 1$. Agora, aplicando o Teorema 2.1.9, concluímos que K.dim$(R/(\mathcal{P} \cap R)[\theta; \overline{\delta}]) =$ K.dim$(R/(\mathcal{P} \cap R)) \leq 1$. ■

3.2 Domínios de Dimensão de Krull 1

Nesta seção, analisamos a propriedade $(\diamond)$ em $R[\theta; \delta]$ sobre um domínio R de dimensão de Krull 1. Começamos a mostrar, que neste caso, a recíproca do Teorema 3.0.1 ocorre.

Corolário 3.2.1. *Sejam R um domínio noetheriano livre de $\mathbb{Z}$-torção de dimensão de Krull ≤ 1 e δ uma derivação não nula de R tal que R é δ-primitivo. Então,*

$$R[\theta; \delta] \textit{ satisfaz } (\diamond) \quad \textit{se, e somente se,} \quad R \textit{ é } \delta\textit{-simples.}$$

Demonstração: Segue da Proposição 2.1.10 e do Teorema 3.0.1. ■

O próximo resultado apresenta uma condição suficiente para que um anel R de dimensão de Krull 1 seja δ-primitivo.

Proposição 3.2.2. *Sejam R um K-domínio de dimensão de Krull 1 e δ uma derivação de R. Se existir um ideal maximal M de R que não é um δ-ideal, então R é δ-primitivo.*

Demonstração: Seja M um ideal maximal de R tal que $\delta(M) \nsubseteq M$. Vamos mostrar que M não contém δ-ideais não nulos. Suponhamos, por absurdo, que existe um δ-ideal não nulo I tal que $I \subseteq M$ e consideremos $(M : \delta)$ o maior δ-ideal contido em M. Como M não é um δ-ideal, temos que $(M:\delta) \subsetneq M$. Assim

$$0 \subsetneq I \subseteq (M:\delta) \subsetneq M.$$

Mas, como M é primo e $\mathrm{char}(R/M) = 0$ (pois R é uma K-álgebra), pela Proposição 1.4.5, obtemos que $(M:\delta)$ é primo. Logo, $\mathrm{ht}(M) > 1$, contradizendo a hipótese. ■

O seguinte lema é conhecido da literatura e sua demonstração pode ser obtida em [1, Theorem 2.3.8] ou [13, Corollary 2.12].

Lema 3.2.3. *[1, Theorem 2.3.8] Sejam R uma K-álgebra afim com K-derivação δ e $M \in Max(R)$. Então, $\delta(M) \subseteq M$ se, e somente se, $\delta(R) \subseteq M$.*

O próximo resultado caracteriza os anéis de operadores diferenciais $R[\theta;\delta]$ que satisfazem $(\diamond)$ quando R é um K-domínio afim de dimensão de Krull 1.

Teorema 3.2.4. *Sejam R um K-domínio afim de dimensão de Krull 1 e δ uma K-derivação não nula de R. Então R é δ-primitivo. Consequentemente,*

$$R[\theta;\delta] \text{ satisfaz } (\diamond) \quad \text{se, e somente se,} \quad R \text{ é } \delta\text{-simples.}$$

Demonstração: Pela Proposição 3.2.2, basta mostrarmos que existe um ideal maximal de R que não é um δ-ideal. Suponhamos o contrário, ou seja, $\delta(M) \subseteq M$, para todo $M \in \mathrm{Max}(R)$. Como δ é uma K-derivação, pelo Lema 3.2.3, teríamos que $\delta(R) \subseteq M$, para todo $M \in \mathrm{Max}(R)$, ou seja,

$$\delta(R) \subseteq \bigcap_{M \in \mathrm{Max}(R)} M = \mathcal{J}(R).$$

Agora, como R é um K-domínio afim, por [28, Theorem 5.3], segue que $\mathcal{J}(R) = 0$. Assim, $\delta = 0$, contrariando a hipótese. Portanto, R é δ-primitivo.

A última afirmação agora é uma consequência do Corolário 3.1.3. ■

Observação 3.2.5. Em geral, se R não é afim, o resultado acima pode não ocorrer. Por exemplo, consideremos o anel de séries de potências formais $R = K[[x]]$ com a

K-derivação $\delta = x\partial_x$. Neste caso, existe um único ideal maximal $M = Rx$ e este é um δ-ideal. Portanto, R não é δ-primitivo.

No que segue, consideremos $K[x]$ o anel de polinômios em uma variável sobre K. Sabemos que as K-derivações de $K[x]$ são da forma $a\partial_x$, para algum $a \in K[x]$. Seja $R = K[x, x^{-1}]$ o anel de polinômios de Laurent sobre K, isto é,

$$R = K[x]A^{-1} = K[x]_x$$

é o anel de frações de $K[x]$ com respeito ao sistema multiplicativo $A = \{x^i \mid i \geq 0\}$. Além disso, notemos que toda K-derivação de $K[x]$ se estende de modo único a uma derivação de R via regra quociente

$$\delta\left(rs^{-1}\right) = [\delta(r)s - r\delta(s)]s^{-2},$$

para todo $rs^{-1} \in R$.

No seguinte resultado, Carvalho, Hatipoğlu e Lomp [3] caracterizaram os anéis de operadores diferenciais sobre $K[x]$ que satisfazem $(\diamond)$.

Corolário 3.2.6. *[3, Corollary 4.1] Para qualquer K-derivação não nula δ de $K[x]$, as seguintes condições são equivalentes:*

(1) $K[x][\theta; \delta]$ satisfaz $(\diamond)$;

(2) $\delta(x) = \alpha$, para algum $\alpha \in K \setminus \{0\}$;

(3) $K[x]$ é δ-simples.

Em nosso trabalho obtemos um resultado semelhante para os anéis de polinômios de Laurent.

Corolário 3.2.7. *Para qualquer K-derivação não nula δ de $K[x, x^{-1}]$ tal que $\delta_{|_{K[x]}}$ é uma K-derivaçao de $K[x]$, as seguintes condições são equivalentes:*

(1) $K[x,x^{-1}][\theta;\delta]$ *satisfaz* $(\diamond)$*;*

(2) $\delta(x)=\alpha x^n$*, para algum* $\alpha\in K\setminus\{0\}$ *e* $n\geq 0$*;*

(3) $K[x,x^{-1}]$ *é* δ*-simples.*

Demonstração: Seja $R=K[x,x^{-1}]=K[x]A^{-1}=K[x]_x$, onde $A=\{x^i\mid i\geq 0\}$.

(1) $\Leftrightarrow$ (3) Segue do Teorema 3.2.4.

(2) $\Rightarrow$ (3) Seja $\delta(x)=\alpha x^n$, para algum $\alpha\in K\setminus\{0\}$ e $n\geq 0$. Se $n=0$, então $K[x]$ é δ-simples e, portanto, $R=K[x]_x$ também o é (ver Proposição 1.4.8 (3)). Consideremos agora o caso em que $n>0$. Notemos que os ideais δ-primos não nulos de R são exatamente os ideais maximais de $K[x]$ que são δ-ideais (ver Proposição 1.4.10). Logo, pela Proposição 1.4.9, é suficiente mostrarmos que todos os ideais maximais de $K[x]$ que são δ-ideais, contêm x. Dado um ideal maximal qualquer M de $K[x]$ que é um δ-ideal, segue que $M=K[x]p$, para algum elemento irredutível $p\in K[x]$ e $p\mid\delta(p)$. Como $p\mid\delta(p)=\alpha x^n\partial_x(p)$ e $p\nmid\partial_x(p)$, temos que $p\mid x$. Portanto, $x\in K[x]p=M$. Como queríamos provar.

(3) $\Rightarrow$ (2) Suponhamos que $\delta(x)=a$, para algum $a\in K[x]$, tal que $a\neq\alpha x^n$ para todo $\alpha\in K\setminus\{0\}$ e $n\geq 0$. Consideremos o δ-ideal $I=K[x]a$ e notemos que $I\cap A=\varnothing$. Pela Proposição 1.4.8 (1), temos que IA^{-1} é um δ-ideal de R. Como $a\neq 0$, temos que $IA^{-1}\neq 0$. Além disso, $I\cap A=\varnothing$ implica que $IA^{-1}\neq R$. Logo, IA^{-1} é um δ-ideal não trivial de R e, portanto, R não é δ-simples. ■

Exemplo 3.2.8. Sejam K um corpo algebricamente fechado de característica zero e R uma K-álgebra afim com uma K-derivação δ. Em [3], Carvalho, Hatipoğlu e Lomp mostraram que, se δ é localmente nilpotente, então $R[\theta;\delta]$ satisfaz $(\diamond)$ (ver Proposição 2.3.1). Em geral, a recíproca não é verdadeira. Com efeito, consideremos $R=K[x,x^{-1}]$ com a K-derivação $\delta=x\partial_x$. Então, segue do Corolário 3.2.7 que $R[\theta;\delta]$ satisfaz $(\diamond)$. Observe agora que δ não é localmente nilpotente, pois $\delta^n(x)=x\neq 0$, para todo $n\in\mathbb{N}$.

Capítulo 4

Álgebras Afins de Dimensão de Krull 2

No presente capítulo, estudamos a propriedade $(\diamond)$ em anéis de operadores diferenciais $S = R[\theta;\delta]$ não necessariamente primitivos. Se S satisfaz $(\diamond)$, o mesmo acorre com seus quocientes primitivos. Lembre-se que, pela Proposição 1.5.2 (ii), se $\mathcal{P}$ é um ideal primitivo de S, então ou $\mathcal{P} = S(\mathcal{P} \cap R)$ ou $S/\mathcal{P}$ é comutativo. Se $\mathcal{P}$ é primitivo tal que $\mathcal{P} = S(\mathcal{P} \cap R)$, condições para $S/\mathcal{P}$ satisfazer $(\diamond)$ têm sido apresentadas no capítulo anterior. Em alguns casos, o estudo de $(\diamond)$ pode ser reduzido ao estudo de $(\diamond)$ sobre seus quocientes primitivos. Em [17], Hatipoğlu e Lomp mostraram o seguinte:

Lema 4.0.1. *[17, Lemma 2.5] Seja S uma álgebra noetheriana. Se todo ideal primitivo $\mathcal{P}$ de S contém um ideal $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$ gerado por elementos normais e $S/\mathcal{Q}$ satisfaz $(\diamond)$, então S satisfaz $(\diamond)$.*

Neste capítulo, estudamos a propriedade $(\diamond)$ em $R[\theta;\delta]$ sobre uma K-álgebra afim R de dimensão de Krull 2. Denotamos por $\mathcal{F}_\delta$ o conjunto de todos os δ-ideais de R, isto é, $\mathcal{F}_\delta = \{I \triangleleft R \mid I \text{ é um } \delta\text{-ideal}\}$. Na primeira seção, consideramos o caso em que R não contém ideais maximais que são δ-ideais, ou seja, $\mathrm{Max}(R) \cap \mathcal{F}_\delta = \varnothing$. Neste caso, mostramos que $R[\theta;\delta]$ satisfaz $(\diamond)$ se, e somente se, R não é δ-primitivo (Teorema 4.1.3). Por outro lado, se $\mathrm{Max}(R) \cap \mathcal{F}_\delta \neq \varnothing$, apresentamos condições suficientes para que $R[\theta;\delta]$ não satisfaça $(\diamond)$ (Proposição 4.1.10). Na segunda seção, mostramos que a caracterização da primitividade $\mathbb{C}[x, y][\theta; \delta]$ está relacionada com os elementos de Darboux irredutíveis de $\mathbb{C}[x, y]$ (Proposição 4.2.2). Além disso, temos o principal resultado deste capítulo, onde apresentamos condições necessárias e suficientes para que os anéis de operadores diferenciais $\mathbb{C}[x, y][\theta; \delta]$ satisfaçam $(\diamond)$ (Teorema 4.2.3).

4.1 Resultados Gerais

Nesta seção, K denotará um corpo de característica zero e R um anel comutativo. A seguinte proposição é devida ao Hart [16]. A recíproca é verdadeira e sua demonstração pode ser encontrada em [14, Proposition 3.1].

Proposição 4.1.1. *[16, Lemma 2.4] Sejam R um anel comutativo com derivação δ e $S = R[\theta; \delta]$. Se M é um ideal maximal de R tal que M não é um δ-ideal e char$(R/M) = 0$, então S/SM é um S-módulo à esquerda simples.*

De posse deste resultado, podemos apresentar condições suficientes para obtermos quocientes primos de $R[\theta; \delta]$ de dimensão de Krull 1.

Lema 4.1.2. *Sejam R um K-domínio afim de dimensão de Krull 2 com derivação δ e $S = R[\theta; \delta]$. Se P é um δ-ideal primo não nulo de R tal que $P \nsubseteq M$, para todo $M \in$ Max$(R) \cap \mathcal{F}_\delta$, então K.dim$(S/SP) = 1$.*

Demonstração: Consideremos P como na hipótese e notemos que P não é maximal, visto que P é um δ-ideal. Pela Proposição 2.1.4, temos que $\text{K.dim}_S(S/SP) = m + 1$, onde $m = \max\{\text{K.dim}_S(S/SQ) \mid Q \in \text{Spec}(R) \text{ e } Q \supsetneq P\}$. Como R tem dimensão de Krull 2, os únicos ideais primos que contêm propriamente P são os maximais. Agora, dado um ideal maximal qualquer M' de R tal que $M' \supsetneq P$, por hipótese, M' não é um δ-ideal. Usando a Proposição 4.1.1, obtemos que S/SM' é simples e, consequentemente, $\text{K.dim}_S(S/SM') = 0$. Isto mostra que $m = 0$ e, portanto, $\text{K.dim}_S(S/SP) = 1$. ■

Um elemento a em um anel S é dito *normal* em S se $aS = Sa$. Notemos que, se $S = R[\theta; \delta]$ e $a \in R$ é um elemento de Darboux, então a é um elemento normal em S. De fato, como $\delta(a) = ba$, para algum $b \in R$, temos que

$$\theta a = a\theta + \delta(a) = a(\theta + b).$$

Logo $\theta^n a = a(\theta + b)^n$ e também $a\theta^n = (\theta - b)^n a$. Isto mostra que $Sa = aS$.

É importante ressaltarmos que, se R é um DFU de dimensão de Krull 2 e P é um ideal primo não nulo e não maximal de R, por [26, Theorem 5], deduzimos que $P = Rp$, para algum elemento irredutível $p \in R$.

O próximo resultado mostra que, sob certas condições, a primitividade de $R[\theta; \delta]$ é condição necessária e suficiente para $R[\theta; \delta]$ satisfazer $(\diamond)$.

Teorema 4.1.3. *Sejam R um DFU de dimensão de Krull 2 o qual é uma K-álgebra afim e δ uma derivação de R tal que $Max(R) \cap \mathcal{F}_\delta = \varnothing$. As seguintes condições são equivalentes:*

(1) $S = R[\theta; \delta]$ satisfaz $(\diamond)$;

(2) R não é δ-primitivo;

(3) S não é primitivo.

Demonstração: (1) $\Rightarrow$ (3) Suponhamos que S satisfaz $(\diamond)$. Como $\mathrm{K.dim}(R) = 2$, pelo Corolário 3.1.3, segue que S não é primitivo.

(3) $\Rightarrow$ (1) Assumimos que S não é primitivo. Então o ideal nulo não é primitivo. Seja $\mathcal{P}$ um ideal primitivo qualquer de S. Logo, $\mathcal{P}$ é um ideal primo não nulo de S e, pela Proposição 1.5.1 (iv) e Proposição 1.5.2 (ii), temos que $P = \mathcal{P} \cap R$ é um δ-ideal primo não nulo de R. Ainda, temos que ou $\mathcal{P} = SP$ ou $\delta(R) \subseteq P$. Notemos que o último caso não ocorre. Com efeito, suponhamos, por absurdo, que $\delta(R) \subseteq P$ e consideremos M um ideal maximal contendo P, assim $\delta(M) \subseteq \delta(R) \subseteq P \subseteq M$. Logo, teríamos que M é um δ-ideal, contradizendo $\mathrm{Max}(R) \cap \mathcal{F}_\delta = \varnothing$.

Portanto, $\mathcal{P} = SP$ e, pelo Lema 4.1.2, obtemos que todo quociente primitivo

$$S/\mathcal{P} = S/SP$$

tem dimensão de Krull 1 e, portanto, $S/\mathcal{P}$ satisfaz $(\diamond)$ (ver Exemplo (4) da Seção 1.3.3).

Agora, como P é um δ-ideal primo não nulo e, por hipótese, não é maximal, temos que $P = Rp$, para algum elemento de Darboux irredutível $p \in R$. Logo $\mathcal{P} = SP = S(Rp) = Sp$. Isto mostra que qualquer ideal primitivo $\mathcal{P}$ é gerado por um elemento normal. Aplicando o Lema 4.0.1, concluímos que S satisfaz $(\diamond)$.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) Como $\mathrm{Max}(R) \cap \mathcal{F}_\delta = \varnothing$, temos que $\delta \neq 0$. Agora, a equivalência segue do Teorema 3.1.2. ■

Exemplos de derivações δ satisfazendo $\mathrm{Max}(R) \cap \mathcal{F}_\delta = \varnothing$ são descritas na Observação 4.1.7. Antes de apresentarmos aplicações do Teorema 4.1.3, vamos fornecer uma condição suficiente para obtermos a δ-primitividade de R. Começamos mostrando que a existência de elementos de Darboux desempenha, não só um papel importante no estudo da propriedade $(\diamond)$, mas também no estudo dos δ-G-anéis como mostram as seguintes proposições.

Proposição 4.1.4. *Seja R um DFU noetheriano com derivação δ. Se R tem infinitos elementos de Darboux irredutíveis não associados, então R não é um δ-G-anel.*

Demonstração: Por [14, Proposition 2.9], basta mostrarmos que R_c não é δ-simples, para todo $c \in R \setminus \{0\}$. Seja c um elemento não nulo de R. Então c pode ser escrito como um produto finito de elementos irredutíveis. Como existem infinitos elementos de Darboux irredutíveis, existe um elemento de Darboux irredutível p tal que $p \nmid c$. Seja $\pi : R \to R_c$ a aplicação canônica $a \mapsto a1^{-1}$. Então $\pi(p)$ não é invertível no anel de frações R_c e, assim, $R_c\pi(p)$ é um δ-ideal próprio não nulo de R_c, de onde segue que R_c não é δ-simples. Isto mostra que R não é um δ-G-anel. ■

Proposição 4.1.5. *Sejam R um DFU de dimensão de Krull 2 o qual é uma K-álgebra afim e δ uma K-derivação não nula de R. Então, R possui um número finito de elementos de Darboux irredutíveis não associados se, e somente se, R é um δ-G-anel.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Como R tem dimensão de Krull 2, dado um ideal δ-primo não nulo de R, este ou é um ideal gerado por um elemento de Darboux irredutível ou é um ideal maximal que é um δ-ideal. Então, considerando

$$\mathcal{A} = \{Rp \,|\, p \text{ é Darboux irredutível}\} \ \text{ e } \ \mathcal{B} = \mathrm{Max}(R) \cap \mathcal{F}_\delta,$$

obtemos que

$$\bigcap \{P \lhd R \,|\, P \text{ é } \delta\text{-primo não nulo}\} = \bigcap_{P \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}} P.$$

Mais ainda, como $\delta \neq 0$, existe $b \in R$ tal que $\delta(b) \neq 0$. Usando o Lema 3.2.3, obtemos que $0 \neq \delta(b) \in M$, para todo $M \in \mathcal{B}$, isto é,

$$0 \neq \delta(b) \in \bigcap_{M \in \mathcal{B}} M.$$

Como R tem um número finito de elementos de Darboux irredutíveis não associados, a saber, $p_1, \ldots, p_s$, obtemos

$$0 \neq p_1 \cdots p_s \delta(b) \in \bigcap_{P \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}} P = \bigcap \{P \lhd R \,|\, P \text{ é } \delta\text{-primo não nulo}\}.$$

Além disso, como R é um domínio, temos que R é δ-primo. Portanto, R é um δ-G-anel.

($\Leftarrow$) Como toda K-álgebra afim é noetheriana, temos que R é noetheriano e o resultado segue da Proposição 4.1.4. ∎

Proposição 4.1.6. *Sejam R um DFU de dimensão de Krull 2 o qual é uma K-álgebra afim e δ uma K-derivação não nula de R. Se R possui um número finito de elementos de Darboux irredutíveis não associados, então R é δ-primitivo.*

Demonstração: Suponhamos que R tem um número finito de elementos de Darboux irredutíveis não associados. Pela Proposição 4.1.5, temos que R é um δ-G-anel. Portanto, pelo Teorema 3.1.2, segue que R é δ-primitivo. ■

Observação 4.1.7. Seja $R = K[x, y]$ com K-derivação δ. Então,

$$\operatorname{Max}(R) \cap \mathcal{F}_\delta = \varnothing \text{ se, e somente se, } \langle \delta(x), \delta(y) \rangle = R.$$

De fato, primeiro notemos que toda K-derivação de R é da forma

$$\delta = \delta(x)\partial_x + \delta(y)\partial_y.$$

Suponhamos que $\langle \delta(x), \delta(y) \rangle \neq R$. Como todo ideal próprio está contido em um maximal, existe um ideal maximal M de R tal que $\langle \delta(x), \delta(y) \rangle \subseteq M$. Então $\delta(x), \delta(y) \in M$ e, consequentemente, $\delta(R) \subseteq M$. Logo, M é um δ-ideal de R e, assim, $\operatorname{Max}(R) \cap \mathcal{F}_\delta \neq \varnothing$. Reciprocamente, assumimos que $\operatorname{Max}(R) \cap \mathcal{F}_\delta \neq \varnothing$. Então existe um ideal maximal M tal que $\delta(M) \subseteq M$ e, pelo Lema 3.2.3, segue que $\delta(R) \subseteq M$. Em particular, $\delta(x), \delta(y) \in M$ e, portanto, $\langle \delta(x), \delta(y) \rangle \subseteq M \neq R$.

Vejamos agora dois exemplos.

As derivações de *Shamsuddin* sobre $R = K[x, y]$ são as K-derivações da forma $\delta = \partial_x + (ay + b)\partial_y$, onde $a, b \in K[x]$. O seguinte corolário mostra que, para estas K-derivações, o anel de operadores diferenciais $R[\theta; \delta]$ não satisfaz $(\diamond)$.

Exemplo 4.1.8. Seja $R = K[x, y]$ com a K-derivação $\delta = \partial_x + (ay + b)\partial_y$, onde $a, b \in K[x]$ e $a \neq 0$. Então $R[\theta; \delta]$ não satisfaz $(\diamond)$.

De fato, se R é δ-simples, o resultado segue do Corolário 2.2.3. No caso em que R não é δ-simples, por [2, Theorem 4.1, (b)], sabemos que existe um único polinômio $c \in K[x]$ tal que $\delta(c) = ac + b$ e $P = R(y - c)$ é o único δ-ideal primo não nulo de R. Isto significa que $y - c$ é o único elemento de Darboux irredutível não associado de R. Como R possui um número finito de elementos de Darboux irredutíveis não associados, pela Proposição 4.1.6, temos que R é δ-primitivo. Além disso, notemos que $\langle \delta(x), \delta(y) \rangle = R$, pois $\delta(x) = 1 \in K \setminus \{0\}$. Portanto, do Teorema 4.1.3 segue que $R[\theta; \delta]$ não satisfaz $(\diamond)$.

Exemplo 4.1.9. Sejam K um corpo algebricamente fechado e $R = K[x, y]$ com a K-derivação $\delta = \alpha\partial_x + \beta x^m(y+\gamma)^n\partial_y$, onde $m, n \geq 0$ e $\alpha, \beta, \gamma \in K$ com α e β ambos não nulos. Então,

$$R[\theta; \delta] \text{ satisfaz } (\diamond) \text{ se, e somente se, } n \neq 1.$$

De fato, primeiramente notemos que $\langle \delta(x), \delta(y) \rangle = R$, pois $\delta(x) = \alpha \in K \setminus \{0\}$.

Suponhamos que $n = 1$, então podemos escrever

$$\delta = \alpha\partial_x + \beta x^m(y+\gamma)\partial_y = \alpha\delta',$$

onde $\delta' = \partial_x + \alpha^{-1}\beta x^m(y+\gamma)\partial_y$. Como α é invertível, δ e δ' possuem os mesmos elementos de Darboux. Como δ' é uma derivação de Shamsuddin tal que R não é δ-simples (pois $R(y-\gamma)$ é um δ-ideal não trivial), por [2, Theorem 4.1, (b)], R possui um único elemento de Darboux irredutível não associado com respeito a δ' e, consequentemente, R possui um único elemento de Darboux não associado com respeito a δ. Então, pela Proposição 4.1.6, temos que R é δ-primitivo. Logo, pelo Teorema 4.1.3, segue que $R[\theta; \delta]$ não satisfaz $(\diamond)$.

Reciprocamente, assumimos primeiro que $n = 0$. Então $\delta = \alpha\partial_x + \beta x^m\partial_y$ é uma derivação triangular. Logo δ é localmente nilpotente e, portanto, $R[\theta; \delta]$ satisfaz $(\diamond)$. Por outro lado, se $n > 1$, então mostraremos que R não é δ-primitivo e, pelo Teorema 4.1.3, teremos que $R[\theta; \delta]$ satisfaz $(\diamond)$. Com efeito, primeiro notemos que os polinômios

$$p = y + \gamma \qquad \text{e} \qquad q_\omega = (x^{m+1} + \omega)(y+\gamma)^{n-1} + \frac{(m+1)\alpha}{(n-1)\beta}, \quad \text{onde } \omega \in K,$$

são elementos de Darboux, pois

$$\begin{aligned} \delta(p) &= \beta x^m(y+\gamma)^n \\ &= \beta x^m(y+\gamma)^{n-1}(y+\gamma) \\ &= \beta x^m(y+\gamma)^{n-1}p \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}
\delta(q_\omega) &= \delta((x^{m+1}+\omega)(y+\gamma)^{n-1})\\
&= \delta(x^{m+1}+\omega)(y+\gamma)^{n-1} + (x^{m+1}+\omega)\delta((y+\gamma)^{n-1})\\
&= (m+1)\alpha x^m(y+\gamma)^{n-1} + (n-1)\beta x^m(x^{m+1}+\omega)(y+\gamma)^{2(n-1)}\\
&= (n-1)\beta x^m(y+\gamma)^{n-1}\left((x^{m+1}+\omega)(y+\gamma)^{n-1} + \frac{(m+1)\alpha}{(n-1)\beta}\right)\\
&= (n-1)\beta x^m(y+\gamma)^{n-1}q_\omega.
\end{aligned}$$

Agora, dado um ideal maximal qualquer M de R, temos que

$$M = \langle x-\lambda, y-\mu\rangle,$$

para algum $\lambda,\mu \in K$. Se $\mu = -\gamma$, então $M = \langle x-\lambda, y+\gamma\rangle$ contém o elemento de Darboux $p = y+\gamma$. No caso em que $\mu \neq -\gamma$, basta tomar o elemento de Darboux

$$q_\omega = \left(x^{m+1}\underbrace{-\lambda^{m+1} - \frac{(m+1)\alpha}{(n-1)\beta(\mu+\gamma)^{n-1}}}_{\omega}\right)(y+\gamma)^{n-1} + \frac{(m+1)\alpha}{(n-1)\beta},$$

com

$$\omega = -\lambda^{m+1} - \frac{(m+1)\alpha}{(n-1)\beta(\mu+\gamma)^{n-1}},$$

para obtermos

$$\begin{aligned}
q_\omega &= \left(x^{m+1}-\lambda^{m+1} - \frac{(m+1)\alpha}{(n-1)\beta(\mu+\gamma)^{n-1}}\right)(y+\gamma)^{n-1} + \frac{(m+1)\alpha}{(n-1)\beta}\\
&= (y+\gamma)^{n-1}(x^{m+1}-\lambda^{m+1}) - \frac{(m+1)\alpha}{(n-1)\beta(\mu+\gamma)^{n-1}}\left((y+\gamma)^{n-1} - (\mu+\gamma)^{n-1}\right)\\
&= a(x-\lambda) + b(y-\mu) \in M,
\end{aligned}$$

onde

$$a = (y+\gamma)^{n-1}\left(\textstyle\sum_{i=0}^m \lambda^i x^{m-i}\right) \text{ e } b = -\tfrac{(m+1)\alpha}{(n-1)\beta(\mu+\gamma)^{n-1}}\left(\textstyle\sum_{i=0}^{n-2}(\mu+\gamma)^i(y+\gamma)^{n-2-i}\right).$$

Isto mostra que todo ideal maximal de R contém um elemento de Darboux e, consequentemente, um δ-ideal não nulo. Portanto, R não é δ-primitivo, como queríamos.

No exemplo acima, notemos que $R[\theta;\delta]$ satisfaz $(\diamond)$ sempre que $n > 1$ e, neste caso, também, temos que δ não é localmente nilpotente (ver [40, Corollary 8.2.4]).

Na sequência, observamos a necessidade da hipótese $\mathrm{Max}(R) \cap \mathcal{F}_\delta = \varnothing$ do Teorema 4.1.3. Para isso, nos será útil o seguinte resultado, que fornece condições suficientes para que $R[\theta;\delta]$ não satisfaça $(\diamond)$.

Proposição 4.1.10. *Sejam R um K-domínio afim com K-derivação δ e $S = R[\theta;\delta]$. Suponhamos que existem $M \in Max(R) \cap \mathcal{F}_\delta$ e $P \in Spec(R) \cap \mathcal{F}_\delta$ satisfazendo as seguintes condições:*

(1) $M \supseteq P$,

(2) $ht(P) = K.dim(R) - 1$ *e*

(3) $\delta(R) \nsubseteq P$.

Então S não satisfaz $(\diamond)$.

Demonstração: Sejam M e P como nas hipóteses. Uma vez que $\delta(R) \nsubseteq P$, temos que δ induz uma K-derivação não nula $\overline{\delta}$ em R/P. Como P é um δ-ideal e $\delta(R) \nsubseteq P$, pelo Lema 3.2.3, P não pode ser maximal. Assim $P \subsetneq M$ e, como $\delta(M) \subseteq M$, temos que M/P é um $\overline{\delta}$-ideal não trivial de R/P. Logo, R/P não é $\overline{\delta}$-simples. Além disso, por [10, Corollary 13.4], $\mathrm{K.dim}(R/P) = \mathrm{K.dim}(R) - \mathrm{ht}(P)$ e, como $\mathrm{ht}(P) = \mathrm{K.dim}(R) - 1$, obtemos $\mathrm{K.dim}(R/P) = 1$. Logo, do Teorema 3.2.4 segue que $S/SP \simeq R/P[\theta;\overline{\delta}]$ não satisfaz $(\diamond)$. Sabemos da Observação 1.3.8 que, se S satisfaz $(\diamond)$, o mesmo ocorre com todos quocientes de S. Portanto, S não satisfaz $(\diamond)$. ■

Exemplo 4.1.11. Sejam K um corpo algebricamente fechado e $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ com a K-derivação $\delta = x_1\partial_{x_1} + \cdots + x_n\partial_{x_n}$. Então $R[\theta;\delta]$ não satisfaz $(\diamond)$. De fato, se $n = 1$, pelo Corolário 3.2.6, obtemos o desejado. No caso em que $n > 1$ consideremos o ideal maximal $M = \langle x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n \rangle$ e o ideal primo $P = \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \rangle \subsetneq M$. É fácil ver que $M \in \mathrm{Max}(R) \cap \mathcal{F}_\delta$, $P \in \mathrm{Spec}(R) \cap \mathcal{F}_\delta$ e $\mathrm{ht}(P) = n - 1$. Além disso, $\delta(R) \nsubseteq P$, pois $x_n = \delta(x_n) \in \delta(R)$ e $x_n \notin P$. Aplicando a Proposição 4.1.10, concluímos que $R[\theta; \delta]$ não satisfaz $(\diamond)$.

A observação abaixo mostra que a condição $\mathrm{Max}(R) \cap \mathcal{F}_\delta = \varnothing$, do Teorema 4.1.3, é realmente necessária.

Observação 4.1.12. Sejam K um corpo algebricamente fechado e $R = K[x, y]$ com a K-derivação $\delta = x\partial_x + y\partial_y$. Então:

(1) $\mathrm{Max}(R) \cap \mathcal{F}_\delta \neq \varnothing$;

(2) R não é δ-primitivo;

(3) $R[\theta; \delta]$ não satisfaz $(\diamond)$.

De fato, primeiro vamos mostrar que todo ideal maximal contém um elemento de Darboux e, consequentemente, um δ-ideal não nulo. De fato, como K é algebricamente fechado, qualquer ideal maximal de R é da forma $M = \langle x - \lambda, y - \mu \rangle$, onde $\lambda, \mu \in K$. Se $\lambda = 0$, então M contém o elemento de Darboux x. No caso em que $\lambda \neq 0$, temos que M contém o elemento de Darboux $\mu x - \lambda y$, pois

$$\mu x - \lambda y = \mu x - \mu\lambda + \lambda\mu - \lambda y = \mu(x - \lambda) - \lambda(y - \mu) \in M.$$

Isto mostra que R não é δ-primitivo.

Notemos agora que $\langle x, y \rangle$ é um ideal maximal que é um δ-ideal e, assim, $\mathrm{Max}(R) \cap \mathcal{F}_\delta \neq \varnothing$.

Por fim, o Exemplo 4.1.11 mostra que $R[\theta; \delta]$ não satisfaz $(\diamond)$.

4.2 Anel de Polinômios $\mathbb{C}[x, y]$

Nesta seção, assumiremos que $K = \mathbb{C}$ é o corpo dos números complexos e consideramos $R = \mathbb{C}[x, y]$ com uma $\mathbb{C}$-derivação δ. O objetivo principal desta seção é fornecer condições necessárias e suficientes para que os anéis de operadores diferenciais $\mathbb{C}[x, y][\theta; \delta]$ satisfaçam $(\diamond)$. Começamos mostrando que a caracterização da primitividade de $\mathbb{C}[x, y][\theta; \delta]$ está relacionada com os elementos de Darboux irredutíveis de $\mathbb{C}[x, y]$.

Consideremos o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \partial_t(x) = a(x, y) \\ \partial_t(y) = b(x, y) \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $a, b \in R$. Um elemento $p \in R \setminus \mathbb{C}$ é chamado uma *integral primeira* do sistema 4.1 se a seguinte identidade é válida:

$$a\partial_x(p) + b\partial_y(p) = 0. \tag{4.2}$$

Sabemos que as $\mathbb{C}$-derivações de R são da forma $\delta = a\partial_x + b\partial_y$, onde $a, b \in R$. A equação 4.2 mostra que $\delta(p) = 0$, isto é, p é uma *constante* não trivial da derivação δ. A existência de uma integral primeira implica que $R^\delta = \{r \in R \mid \delta(r) = 0\} \neq \mathbb{C}$.

Seja $L = \mathbb{C}(x, y)$ o corpo de frações de R. Assim, a derivação δ se estende de modo único a uma derivação de L, via a regra quociente

$$\delta(p/q) = [\delta(p)q - p\delta(q)]/q^2.$$

O elemento $p/q \in L \setminus \mathbb{C}$ é chamado uma *integral primeira racional* do sistema 4.1 se $\delta(p/q) = 0$, ou seja, o subanel de constantes $L^\delta = \{p/q \in L \mid \delta(p/q) = 0\} \neq \mathbb{C}$.

Em 1878, Darboux [8] desenvolveu uma teoria sobre a existência de integral primeira racional, mostrando que a mesma está relacionada com a existência de elementos de Darboux irredutíveis não associados. Jouanolou [25], em 1979, melhorou a teoria desenvolvida por Darboux, caracterizando a existência da integral primeira, por meio de ferramentas sofisticadas de Geometria Algébrica. Apresentaremos aqui uma versão mais fraca de um dos resultados mais importante desta teoria, o Teorema de Darboux. Sua demonstração pode ser encontrada em [44, Darboux's Theorem, pág. 686]. Porém, ressaltamos que, recentemente Llibre e Zhang [33] publicaram uma versão deste resultado, para $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, utilizando técnicas mais simples da Álgebra Linear (ver [33, Theorem 1]).

Teorema 4.2.1. *[44, Darboux's Theorem, pág. 686] Sejam $R = \mathbb{C}[x, y]$ com $\mathbb{C}$-derivação δ e $d = max\{deg\,\delta(x), deg\,\delta(y)\}$. Se $p_1, \ldots, p_m \in R$ são elementos de Darboux irredutíveis não associados, então ou $m < [d(d+1)/2] + 2$ ou existem inteiros n_i não todos nulos tais que $\delta(w) = 0$, onde $w = \prod_{i=1}^{m} p_i^{n_i}$. No último caso, se p é um elemento de Darboux irredutível de R, então ou existem $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, não ambos nulos, tais que p divide $\alpha \prod_{i \in I} p_i^{n_i} + \beta \prod_{j \in J} p_j^{-n_j}$, onde $I = \{i \,|\, n_i \geq 0\}$ e $J = \{j \,|\, n_j < 0\}$, ou p divide $mdc(\delta(x), \delta(y))$.*

Em outras palavras, o Teorema de Darboux mostra que, se $R = \mathbb{C}[x, y]$ tem infinitos elementos de Darboux irredutíveis não associados, então

$$L^{\delta} = \{p/q \in L \,|\, \delta(p/q) = 0\} \neq \mathbb{C}.$$

O próximo resultado relaciona a caracterização dos anéis de operadores diferenciais primitivos $\mathbb{C}[x, y][\theta; \delta]$ com os elementos de Darboux irredutíveis de $\mathbb{C}[x, y]$.

Proposição 4.2.2. *Seja $R = \mathbb{C}[x, y]$ com $\mathbb{C}$-derivação não nula δ. As seguintes condições são equivalentes:*

(1) $R[\theta; \delta]$ é primitivo;

(2) R é um δ-G-anel;

(3) R tem um número finito de elementos de Darboux irredutíveis não associados;

(4) R é δ-primitivo;

(5) Existe um ideal maximal que não contém elementos de Darboux irredutíveis;

(6) $L^\delta = \mathbb{C}$.

Demonstração: As equivalências (1) $\Leftrightarrow$ (4) e (2) $\Leftrightarrow$ (3) obtém-se do Teorema 3.1.2 e da Proposição 4.1.5, respectivamente. A implicação (3) $\Rightarrow$ (4) segue da Proposição 4.1.6 e (4) $\Rightarrow$ (5) é imediato.

(5) $\Rightarrow$ (6) Suponhamos que $L^\delta \neq \mathbb{C}$. Mostraremos que todo ideal maximal de R contém um elemento de Darboux irredutível. Para isso, consideremos $p, q \in R$ tais que $p/q \in L^\delta \setminus \mathbb{C}$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\mathrm{mdc}(p, q) = 1$. Nestas condições, é bem conhecido que qualquer elemento da forma $\alpha p - \beta q$ é um elemento de Darboux, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ não ambos nulos. De fato, como

$$0 = \delta(p/q) = [\delta(p)q - p\delta(q)]/q^2,$$

temos que $\delta(p)q = p\delta(q)$ e, assim, $p \mid \delta(p)q$. Como $\mathrm{mdc}(p, q) = 1$, segue que $p \mid \delta(p)$. Logo, existe $c \in R$ tal que $\delta(p) = cp$. Substituindo $\delta(p) = cp$ em $\delta(p)q = p\delta(q)$, obtemos $\delta(q) = cq$. Neste caso, temos

$$\begin{aligned} \delta(\alpha p - \beta q) &= \alpha\delta(p) - \beta\delta(q) \\ &= \alpha cp - \beta cq \\ &= c(\alpha p - \beta q). \end{aligned}$$

Suponhamos que $\alpha p - \beta q = 0$, ou seja, $\alpha p = \beta q$. Como $(0, 0) \neq (\alpha, \beta)$, sem perda de generalidade, podemos assumir que $\alpha \neq 0$. Então, $p = \alpha^{-1}\beta q$ e, consequentemente,

$$p/q = \alpha^{-1}\beta \in \mathbb{C},$$

o que não pode ocorrer. Portanto, $\alpha p - \beta q \neq 0$ é um elemento de Darboux, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ não ambos nulos.

Dado um ideal maximal qualquer M de R, temos que $M = \langle x - \lambda, y - \mu \rangle$, para algum $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Notemos, também, que

$$M = \{r(x, y) \in R \,|\, r(\lambda, \mu) = 0\},$$

pois $\{r \in R \,|\, r(\lambda, \mu) = 0\}$ é um ideal próprio de R contendo o ideal maximal M.

Se $p(\lambda, \mu) = 0$, então M contém o elemento de Darboux p. No caso em que $p(\lambda, \mu) \neq 0$, tomemos $\alpha = q(\lambda, \mu)$ e $\beta = p(\lambda, \mu) \neq 0$. Então $r = \alpha p - \beta q \in R$ é um elemento de Darboux tal que

$$r(\lambda, \mu) = \alpha p(\lambda, \mu) - \beta q(\lambda, \mu) = q(\lambda, \mu)p(\lambda, \mu) - p(\lambda, \mu)q(\lambda, \mu) = 0.$$

Logo, $r \in M$.

Isto mostra que todo ideal maximal M contém um elemento de Darboux. Pela Proposição 1.4.7, os fatores irredutíveis de um elemento de Darboux, também são elementos de Darboux. Portanto, M contém um elemento de Darboux irredutível.

(6) $\Rightarrow$ (3) Segue do Teorema 4.2.1. $\blacksquare$

O próximo resultado fornece condições necessárias e suficientes para que os anéis de operadores diferenciais $\mathbb{C}[x, y][\theta; \delta]$ satisfaçam $(\diamond)$.

Teorema 4.2.3. *Sejam $R = \mathbb{C}[x, y]$ com $\mathbb{C}$-derivação δ e $S = R[\theta; \delta]$. Então, S satisfaz $(\diamond)$ se, e somente se, S não é primitivo e para todo $M \in Max(R) \cap \mathcal{F}_\delta$ e $p \in M$, onde p é um elemento de Darboux irredutível, temos que $\delta(R) \subseteq Rp$.*

Demonstração: Primeiramente, notemos que, se $\delta = 0$, o resultado segue trivialmente. Assim, consideremos o caso em que $\delta \neq 0$.

Suponhamos que S satisfaz $(\diamond)$. Pelo Corolário 3.1.4, temos que S não é primitivo. Suponha, por absurdo, que existem $M \in \mathrm{Max}(R) \cap \mathcal{F}_\delta$ e $p \in M$, onde p é um elemento de Darboux irredutível, tal que $\delta(R) \nsubseteq Rp$. Aplicando a Proposição 4.1.10, teríamos que S não satisfaz $(\diamond)$, contradizendo a hipótese.

Reciprocamente, suponhamos que S não é primitivo. Se $\mathrm{Max}(R) \cap \mathcal{F}_\delta = \varnothing$, então, pelo Teorema 4.1.3, segue que S satisfaz $(\diamond)$. Suponhamos agora que para todo $M \in \mathrm{Max}(R) \cap \mathcal{F}_\delta$ e $p \in M$, onde p é um elemento de Darboux irredutível, temos que $\delta(R) \subseteq Rp$. Neste caso, mostraremos que todo ideal primitivo $\mathcal{P}$ de S

contém um ideal $\mathcal{Q}$ de S tal que $\mathcal{Q}$ é gerado por elementos normais e $S/\mathcal{Q}$ satisfaz ($\diamond$). De fato, seja $\mathcal{P}$ um ideal primitivo qualquer de S. Como S não é primitivo, $\mathcal{P}$ é um ideal primo não nulo de S. Pela Proposição 1.5.1 (iv) e Proposição 1.5.2 (ii), temos que $P = \mathcal{P} \cap R$ é um δ-ideal primo não nulo de R. Além disso, ou $\mathcal{P} = SP$ ou $\delta(R) \subseteq P$. Vamos estudar estes dois casos abaixo.

Caso $\delta(R) \subseteq P$: Se $P \notin \mathrm{Max}(R)$, então $P = Rp$, para algum elemento de Darboux irredutível $p \in R$. Se $P \in \mathrm{Max}(R)$, então segue da Proposição 4.2.2 que existe um elemento de Darboux irredutível p tal que $p \in P$. Neste caso, por hipótese, teríamos $\delta(R) \subseteq Rp$. Em ambos os casos, consideremos $\mathcal{Q} = Sp \subseteq \mathcal{P}$ e notemos que $\mathcal{Q}$ é um ideal de S gerado por um elemento normal, pois p é um elemento de Darboux. Logo,

$$S/\mathcal{Q} = S/Sp \simeq R/Rp[\theta; \overline{\delta}] = R/Rp[\theta]$$

é um anel comutativo noetheriano e, portanto, $S/\mathcal{Q}$ satisfaz ($\diamond$) (ver Exemplo (2) da Seção 1.3.3).

Caso $\delta(R) \nsubseteq P$: Neste caso, temos que $\mathcal{P} = SP$. Além disso, P não é maximal. Caso contrário, P seria um ideal maximal de R tal que $\delta(P) \subseteq P$, então, pelo Lema 3.2.3, teríamos que $\delta(R) \subseteq P$, o que não ocorre. Logo $P = Rp$, para algum elemento de Darboux irredutível $p \in R$ e, consequentemente, $\mathcal{P} = SP = Sp$ é gerado por um elemento normal. Ademais, qualquer ideal maximal M de R contendo $P = Rp$ não é um δ-ideal. Caso contrário, por hipótese, teríamos que $\delta(R) \subseteq Rp = P$. Logo, pelo Lema 4.1.2, obtemos que

$$\mathrm{K.dim}(S/\mathcal{P}) = \mathrm{K.dim}(S/SP) = 1$$

e, portanto, $S/\mathcal{P}$ satisfaz ($\diamond$) (ver Exemplo (4) da Seção 1.3.3). Logo, basta tomar $\mathcal{Q} = \mathcal{P}$.

Portanto, aplicando o Lema 4.0.1, concluímos que S satisfaz ($\diamond$). ■

Encerraremos esta seção apresentando algumas consequências e exemplos dos resultados obtidos até aqui.

Corolário 4.2.4. *Seja $R = \mathbb{C}[x, y]$ com $\mathbb{C}$-derivação δ tal que mdc$(\delta(x), \delta(y)) = 1$. Então, $R[\theta; \delta]$ satisfaz $(\diamond)$ se, e somente se, $R[\theta; \delta]$ não é primitivo e Max$(R) \cap \mathcal{F}_\delta = \varnothing$.*

Demonstração: Como $\text{mdc}(\delta(x), \delta(y)) = 1$ e $\delta(x), \delta(y) \in \delta(R)$, obtemos que $\delta(R) \nsubseteq Rp$, para todo elemento de Darboux irredutível $p \in R$. O resultado agora segue do Teorema 4.2.3. ■

Um polinômio é dito *homogêneo de grau n* se todos os seus termos têm o mesmo grau n. Por exemplo, $x^5 + 6x^2y^3 - xy^4$ é um polinômio homogêneo de grau 5 em $\mathbb{C}[x, y]$. Dizemos que δ é uma *derivação homogênea de grau n* de $\mathbb{C}[x, y]$ se $\delta(x)$ e $\delta(y)$ são homogêneos de mesmo grau n.

Corolário 4.2.5. *Seja $R = \mathbb{C}[x, y]$ com $\mathbb{C}$-derivação δ tal que δ é homogênea de grau n e mdc$(\delta(x), \delta(y)) = 1$. Então,*

$$R[\theta; \delta] \text{ satisfaz } (\diamond) \text{ se, e somente se, } n = 0.$$

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Suponhamos que $n > 0$ e consideremos o ideal maximal $M = \langle x, y \rangle$. Como $\delta(x)$ e $\delta(y)$ são polinômios homogêneos de mesmo grau $n > 0$, temos que $\delta(x)$ e $\delta(y)$ não contém termos constantes. Isto implica que $\delta(x), \delta(y) \in M$ e, consequentemente, M é um ideal maximal de R que é um δ-ideal. Logo, $\text{Max}(R) \cap \mathcal{F}_\delta \neq \varnothing$ e, pelo Corolário 4.2.4, segue que $R[\theta; \delta]$ não satisfaz $(\diamond)$.

$(\Leftarrow)$ Assumimos agora que $n = 0$. Neste caso, δ é uma derivação localmente nilpotente e, portanto, $R[\theta; \delta]$ satisfaz $(\diamond)$ (ver Proposição 2.3.1). ■

Observação 4.2.6. Sejam $R = \mathbb{C}[x, y]$ e δ uma derivação triangular de R, isto é, $\delta(x) = \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $\delta(y) = a \in \mathbb{C}[x]$. Embora seja conhecido que $R[\theta; \delta]$ satisfaz $(\diamond)$ (pois δ é localmente nilpotente), podemos verificar isto a partir de nossos resultados. Basta observarmos que $\langle \delta(x), \delta(y) \rangle = R$ e $R[\theta; \delta]$ não é primitivo, para aplicar o

Teorema 4.1.3. De fato, como $\delta(x) = \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, é óbvio que $\langle \delta(x), \delta(y) \rangle = R$. Agora, uma vez que δ é localmente nilpotente e K.dim$(R) = 2$, pela Proposição 2.3.4, temos que R não é δ-simples. Então, existe um δ-ideal não trivial I de R. Seja M um ideal maximal contendo I e $(M : \delta)$ o maior δ-ideal contido em M. Pela Proposição 1.4.5, $(M : \delta)$ é um δ-ideal primo e, além disso, $(M : \delta) \neq 0$, pois $0 \neq I \subseteq (M : \delta)$. Como R não tem ideais maximais que são δ-ideais, obtemos que $(M : \delta) = Rp$, para algum elemento de Darboux irredutível $p \in R$. Aplicando [40, Theorem 8.1.1], concluímos que $\delta(p) = 0$, ou seja, $p \in L^{\delta} \setminus \mathbb{C}$, onde $L = \mathbb{C}(x, y)$ é o corpo de frações de R. Isto mostra que $L^{\delta} \neq \mathbb{C}$ e, segue da Proposição 4.2.2 que $R[\theta; \delta]$ não é primitivo. Como queríamos mostrar.

No Exemplo 4.1.9, da seção anterior, vimos exemplos de anéis de operadores diferenciais $S = \mathbb{C}[x, y][\theta; \delta]$ satisfazendo $(\diamond)$, onde são verificadas as seguintes condições:

$$S \text{ não é primitivo e } \operatorname{Max}(R) \cap \mathcal{F}_{\delta} = \varnothing.$$

Em geral, podemos ter $\operatorname{Max}(R) \cap \mathcal{F}_{\delta} \neq \varnothing$. Abaixo seguem dois exemplos de anéis de operadores diferenciais S satisfazendo $(\diamond)$ onde a condição *"para todo $M \in Max(R) \cap \mathcal{F}_{\delta}$ e $p \in M$, onde p é um elemento de Darboux irredutível, temos que $\delta(R) \subseteq Rp$"*, do Teorema 4.2.3, é atingida.

Exemplo 4.2.7. Seja $R = \mathbb{C}[x, y]$ com a $\mathbb{C}$-derivação $\delta = [(x+1)y - 1]y(\partial_x - y^2\partial_y)$. Então $R[\theta; \delta]$ satisfaz $(\diamond)$.

(1) Primeiro, vamos descrever os elementos de Darboux irredutíveis de δ:

Consideremos $\delta' = \partial_x - y^2\partial_y$ e, assim, $\delta = [(x + 1)y - 1]y\delta'$. Notemos que, dado um elemento de Darboux irredutível p de δ, então $p \mid \delta(p)$. Assim

$$p \mid [(x + 1)y - 1]y\delta'(p)$$

e, consequentemente, $p \mid (x + 1)y - 1$ ou, $p \mid y$ ou $p \mid \delta'(p)$. No último caso, p é um elemento de Darboux irredutível de δ'. Portanto, basta calcularmos os elementos de

Darboux irredutíveis de δ'.

Observemos que $R = \mathbb{C}[x][y]$ e $\delta'_{|\mathbb{C}[x]} = \partial_x$ é a derivação ordinária de polinômios em $\mathbb{C}[x]$. Usaremos a notação ordinária para estas derivações, isto é, $\delta'(a) = a'$, para todo $a \in \mathbb{C}[x]$. Suponhamos que $p = \sum_{i=0}^{n} a_i y^i$ é um elemento de Darboux de δ' não constante, onde $a_i \in \mathbb{C}[x]$ e $a_n \neq 0$. Então $n > 0$, pois, caso contrário, $p \in \mathbb{C}[x]$ seria um elemento Darboux de δ' e como os únicos elementos de Darboux de δ' em $\mathbb{C}[x]$ são os constantes, teríamos que p é constante.

Calculando $\delta'(p)$ obtemos

$$\begin{aligned} \delta'(p) &= \sum_{i=0}^{n} [\delta'(a_i) y^i + a_i \delta'(y^i)] \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i' y^i - \sum_{i=1}^{n} i a_i y^{i+1} \\ &= a_0' + a_1' y + \sum_{i=2}^{n} (a_i' - (i-1) a_{i-1}) y^i - n a_n y^{n+1}. \end{aligned}$$

Como p é um elemento de Darboux de δ', existe $c \in R$ tal que $\delta'(p) = cp$. O fato de p ser um polinômio de grau n em y que divide $\delta'(p)$ implica que c é um polinômio de grau 1 em y, isto é, $c = b_0 + b_1 y$, onde $b_0, b_1 \in \mathbb{C}[x]$ e $b_1 \neq 0$. Logo

$$\begin{aligned} cp &= (b_0 + b_1 y) \left(\sum_{i=0}^{n} a_i y^i \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n} b_0 a_i y^i + \sum_{i=0}^{n} b_1 a_i y^{i+1} \\ &= b_0 a_0 + (b_0 a_1 + b_1 a_0) y + \sum_{i=2}^{n} (b_0 a_i + b_1 a_{i-1}) y^i + b_1 a_n y^{n+1}. \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes dos monômios em y, obtemos

$$a_0' = b_0 a_0 \tag{4.3}$$

$$a_1' = b_0 a_1 + b_1 a_0 \tag{4.4}$$

$$a_i' - (i-1) a_{i-1} = b_0 a_i + b_1 a_{i-1} \qquad \forall\, 2 \leq i \leq n \tag{4.5}$$

$$-n a_n = b_1 a_n. \tag{4.6}$$

Da última equação, temos que $b_1 = -n \in \mathbb{C}$ é uma constante não nula. Mostraremos que $b_0 = 0$. De fato, se $b_0 \neq 0$, por (4.3), obtemos que a_0 é um elemento de Darboux em $\mathbb{C}[x]$. Como os únicos elementos de Darboux de $\mathbb{C}[x]$ são os constantes, então $0 = a_0' = b_0 a_0$ e, assim, $a_0 = 0$. Seja $1 \leq i \leq n$ o menor índice com $a_i \neq 0$. Então $a_{i-1} = 0$. De (4.5) segue que $a_i' = b_0 a_i$, ou seja, a_i é um elemento de Darboux em $\mathbb{C}[x]$ e, logo, deve ser zero, uma contradição. Portanto, $b_0 = 0$.

Pelo sistema de equações acima temos

$$a_0' = 0, \qquad a_1' = -na_0, \qquad a_i' = (i-1-n)a_{i-1}, \qquad \forall\, 2 \leq i \leq n.$$

Seja $a = a_n$. Então

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= -a_n' = -a', \\ a_{n-2} &= \frac{-1}{2}a_{n-1}' = \frac{1}{2}a'', \\ a_{n-3} &= \frac{-1}{3}a_{n-2}' = \frac{(-1)^3}{3!}a^{(3)} \end{aligned}$$

e mais geral, para qualquer, $1 \leq k \leq n$

$$a_{n-k} = \frac{-1}{k}a_{n-(k-1)}' = \frac{-1}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\left(a^{(k-1)}\right)' = \frac{(-1)^k}{k!}a^{(k)}.$$

Logo, os elementos de Darboux de δ' são da forma

$$p = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}a^{(k)}y^{n-k},$$

para algum polinômio $a \in \mathbb{C}[x] \setminus \{0\}$. Como $a^{(n+1)} = (-1)^n n! a_0' = 0$, obtemos que $\deg(a) \leq n$.

Por outro lado, qualquer elemento da forma acima é também um elemento de Darboux de δ'. Com efeito, se $p = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}a^{(k)}y^{n-k}$, onde $a \in \mathbb{C}[x]$ tal que

$\deg(a) \leq n$, então

$$\begin{aligned}
\delta'(p) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} a^{(k+1)} y^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (n-k)}{k!} a^{(k)} y^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} a^{(k+1)} y^{n-k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(k-1)!} a^{(k)} y^{n-k+1} - ny \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} a^{(k)} y^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} a^{(k+1)} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} a^{(k+1)} y^{n-k} - ny \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} a^{(k)} y^{n-k} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} a^{(n)} y - ny \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} a^{(k)} y^{n-k} \\
&= (-ny) \left(\frac{(-1)^n}{n!} a^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} a^{(k)} y^{n-k} \right) \\
&= (-ny)p.
\end{aligned}$$

Portanto, um elemento não constante $p \in R$ é um elemento de Darboux de δ' se, e somente se,

$$p = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} a^{(k)} y^{n-k},$$

para algum $n > 0$ e $a \in \mathbb{C}[x] \setminus \{0\}$, onde $\deg(a) \leq n$. Além disso, fatorando o termo líder de a, podemos assumir que a é mônico.

Seja $p = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} a^{(k)} y^{n-k} \in R$ um elemento de Darboux não constante de δ' de grau n em y. Suponhamos que $a \in \mathbb{C}[x]$ é um polinômio mônico tal que $2 \leq \deg(a) \leq n$. Como $\mathbb{C}$ é algebricamente fechado, $a = uv$, para algum $u, v \in \mathbb{C}[x]$ tal que u é um polinômio mônico de grau 1. Agora, levando em conta que $u' = 1$, temos que

$$a^{(k)} = (uv)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} u^{(i)} v^{(k-i)} = uv^{(k)} + kv^{(k-1)}, \quad \text{para todo } k > 0.$$

Usando o fato de v ter no máximo grau $n-1$, obtemos que $v^{(n)}=0$ e, assim,

$$\begin{aligned} p &= uvy^n+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\left(uv^{(k)}+kv^{(k-1)}\right)y^{n-k} \\ &= uvy^n+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}uv^{(k)}y^{n-k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}kv^{(k-1)}y^{n-k} \\ &= uy\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}v^{(k)}y^{n-k-1}\right)+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{(k-1)!}v^{(k-1)}y^{n-k} \\ &= (uy-1)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}v^{(k-1)}y^{n-k}\right). \end{aligned}$$

Logo, se p é um elemento de Darboux irredutível de δ', então $\deg(a)<2$.

Se a é constante, então $a=1$ e $p=y^n$. Sendo irredutível, força $p=y$. Se $\deg(a)=1$, então $a=x+\mu$, para algum $\mu\in\mathbb{C}$, e $a'=1$. Logo $p=(x+\mu)y^n-y^{n-1}$. Como p é irredutível, $n=1$ e, consequentemente, $p=(x+\mu)y-1$, para algum $\mu\in\mathbb{C}$.

Isto mostra que todo elemento de Darboux irredutível de δ' (e, portanto, de δ) é um múltiplo escalar de um dos seguintes elementos:

$$p=y \qquad \text{ou} \qquad q_\mu=(x+\mu)y-1, \qquad \text{para algum } \mu\in\mathbb{C}.$$

(2) $R[\theta;\delta]$ não é primitivo:

Notemos que $q_{\mu_1}=(x+\mu_1)y-1$ e $q_{\mu_2}=(x+\mu_2)y-1$ não são associados quando $\mu_1\neq\mu_2$. Assim, existem infinitos elementos de Darboux irredutíveis de δ não associados em R. Logo, pela Proposição 4.2.2, temos que $R[\theta;\delta]$ não é primitivo.

(3) Para todo $M\in\mathrm{Max}(R)\cap\mathcal{F}_\delta$ e $p\in M$, onde p é um elemento de Darboux irredutível, temos que $\delta(R)\subseteq Rp$:

Seja M um ideal maximal de R que é um δ-ideal. Assim

$$M=\langle x-\alpha,y-\beta\rangle=\{r(x,y)\in R\,|\,r(\alpha,\beta)=0\}$$

com $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$. Como $\delta(M)\subseteq M$, temos que $\delta(x-\alpha)=[(x+1)y-1]y\in M$. Então $(x+1)y-1\in M$ ou $y\in M$, pois M é primo. Se $(x+1)y-1\in M$, então

$(\alpha+1)\beta-1=0$ e, assim, $\beta=1/(\alpha+1)$ e $\alpha\neq-1$. Logo $M=\langle x-\alpha, y-\frac{1}{\alpha+1}\rangle$. No caso em que $y\in M$, então $\beta=0$, de onde segue que $M=\langle x-\alpha, y\rangle$.

Portanto, os ideais maximais que são δ-ideais são da forma:

$$M=\langle x-\alpha, y\rangle \qquad \text{ou} \qquad M=\langle x-\alpha', y-\frac{1}{\alpha'+1}\rangle,$$

onde $\alpha\in K$ e $\alpha'\in K\setminus\{-1\}$. Analisaremos abaixo estes dois casos.

Caso $M=\langle x-\alpha, y\rangle$: Notemos que $q_\mu(x,y)=(x+\mu)y-1\notin M$, para todo $\mu\in K$, pois $q_\mu(\alpha,0)=(\alpha+\mu)0-1\neq 0$, para todo $\mu\in K$. Logo, os únicos elementos de Darboux irredutíveis pertencentes a M são os múltiplos escalares de $p(x,y)=y$. Neste caso, temos que $\delta(R)\subseteq Ry$, pois $\delta(x),\delta(y)\in Ry$.

Caso $M=\langle x-\alpha', y-\frac{1}{\alpha'+1}\rangle$: Obviamente $p(x,y)=y\notin M$, pois $p\left(\alpha', \frac{1}{\alpha'+1}\right)=\frac{1}{\alpha'+1}\neq 0$. Por outro lado, temos que

$$q_\mu(x,y)=(x+\mu)y-1\in M\Leftrightarrow q_\mu\left(\alpha', \frac{1}{\alpha'+1}\right)=(\alpha'+\mu)\frac{1}{\alpha'+1}-1=0\Leftrightarrow \mu=1.$$

Logo, os únicos elementos de Darboux irredutíveis pertencentes a M são os múltiplos escalares de $q_1(x,y)=(x+1)y-1$. Notemos que $\delta(R)\subseteq R[(x+1)y-1]$, pois $\delta(x),\delta(y)\in R[(x+1)y-1]$.

Portanto, pelo Teorema 4.2.3, $R[\theta;\delta]$ satisfaz $(\diamond)$.

Cabe ressaltarmos que, no exemplo acima, como δ' não é localmente nilpotente, por [40, Proposition 8.1.2], temos que δ não é localmente nilpotente.

Exemplo 4.2.8. Seja $R=\mathbb{C}[x,y]$ com a $\mathbb{C}$-derivação $\delta=(x-y)(\partial_x+\partial_y)$. Sabemos que δ é uma derivação localmente nilpotente (ver [40, Proposition 8.1.2]). Vamos mostrar que $R[\theta;\delta]$ satisfaz as condições do Teorema 4.2.3.

(1) Começamos calculando os elementos de Darboux irredutíveis de δ:

Seja $\delta'=\partial_x+\partial_y$. Então, $\delta=(x-y)\delta'$. Um argumento semelhante ao utilizado no Exemplo 4.2.7, mostra que, se p é um elemento de Darboux irredutível de δ, então $p \mid x-y$ ou $p \mid \delta'(p)$. Como antes, basta calcularmos os elementos de Darboux irredutíveis de δ'.

Seja $p = \sum_{i=0}^{n} a_i y^i$ um elemento de Darboux não constante de δ', onde $a_i \in \mathbb{C}[x]$ e $a_n \neq 0$. Pelo mesmo argumento de antes, devemos ter $n > 0$. Manteremos a notação usada no Exemplo 4.2.7 para denotarmos a derivação ordinária de $\mathbb{C}[x]$.

Calculando $\delta'(p)$ obtemos

$$\begin{aligned}
\delta'(p) &= \sum_{i=0}^{n}[\delta'(a_i)y^i + a_i\delta'(y^i)] \\
&= \sum_{i=0}^{n} a_i' y^i + \sum_{i=1}^{n} i a_i y^{i-1} \\
&= \sum_{i=0}^{n} a_i' y^i + \sum_{i=0}^{n-1}(i+1)a_{i+1}y^i \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}(a_i' + (i+1)a_{i+1})y^i + a_n' y^n.
\end{aligned}$$

Como p é um elemento de Darboux e δ' é uma derivação localmente nilpotente, por [40, Theorem 8.1.1], temos que $\delta'(p) = 0$. Comparando os coeficientes dos monômios em y, obtemos

$$\begin{aligned}
a_i' &= -(i+1)a_{i+1} \qquad \forall\, 0 \leq i \leq n-1 \\
a_n' &= 0.
\end{aligned}$$

Seja $a = a_0$. Então

$$\begin{aligned}
a_1 &= -a_0' = -a', \\
a_2 &= \frac{-1}{2}a_1' = \frac{1}{2}a'', \\
a_3 &= \frac{-1}{3}a_2' = \frac{(-1)^3}{3!}a^{(3)}
\end{aligned}$$

e, mais geralmente, para qualquer $1 \leq k \leq n$,

$$a_k = \frac{-1}{k}a_{k-1}' = \frac{-1}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\left(a^{(k-1)}\right)' = \frac{(-1)^k}{k!}a^{(k)}.$$

Logo, os elementos de Darboux de δ' são da forma

$$p = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} a^{(k)} y^k,$$

para algum $a \in \mathbb{C}[x] \setminus \{0\}$. Como $a^{(n)} = \frac{(-1)^n}{n!} a_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (lembre-se que $a_n' = 0$), então $\deg(a) = n$.

Por outro lado, qualquer elemento da forma acima é também um elemento de Darboux de δ', pois, se $p = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} a^{(k)} y^k$ com $a \in \mathbb{C}[x]$ tal que $\deg(a) = n$, então

$$\begin{aligned} \delta'(p) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} a^{(k+1)} y^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k k}{k!} a^{(k)} y^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} a^{(k+1)} y^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} a^{(k)} y^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} a^{(k+1)} y^k - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} a^{(k+1)} y^k \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, um elemento não constante $p \in R$ é um elemento de Darboux de δ' se, e somente se,

$$p = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} a^{(k)} y^k,$$

para algum $n > 0$ e $a \in \mathbb{C}[x] \setminus \{0\}$ com $\deg(a) = n$. Além disso, fatorando o termo líder de a, podemos assumir que a é mônico.

Sejam $p = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} a^{(k)} y^k$ um elemento de Darboux de δ' não constante de grau n em y. Suponhamos que $a \in \mathbb{C}[x]$ é um polinômio mônico tal que $\deg(a) = n \geq 2$. Como antes, temos que $a = uv$, para algum $u, v \in \mathbb{C}[x]$ tal que u é um polinômio mônico de grau 1, e

$$a^{(k)} = (uv)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} u^{(i)} v^{(k-i)} = uv^{(k)} + kv^{(k-1)}, \quad \text{para todo } k > 0.$$

Usando o fato de v ter grau $n-1$, obtemos $v^{(n)}=0$ e, assim,

$$\begin{aligned}
p &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}a^{(k)}y^k\\
&= a+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\left(uv^{(k)}+kv^{(k-1)}\right)y^k\\
&= uv+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}uv^{(k)}y^k+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{(k-1)!}v^{(k-1)}y^k\\
&= u\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}v^{(k)}y^k\right)-y\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}v^{(k-1)}y^{k-1}\right)\\
&= (u-y)\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}v^{(k)}y^k\right).
\end{aligned}$$

Logo, se p é um elemento de Darboux irredutível de δ', então $\deg(a)=n=1$.

Portanto, $a=x+\mu$ e, assim, $p=-a'y+a=-y+x+\mu$, para algum $\mu\in\mathbb{C}$.

Isto mostra que todo elemento de Darboux irredutível de δ' (e, portanto, de δ) é um múltiplo escalar de

$$p_\mu = x-y+\mu, \qquad \text{para algum } \mu\in\mathbb{C}.$$

(2) $R[\theta;\delta]$ não é primitivo:

Notemos que $p_{\mu_1}=x-y+\mu_1$ e $p_{\mu_2}=x-y+\mu_2$ não são associados quando $\mu_1\neq\mu_2$. Assim, existem infinitos elementos de Darboux irredutíveis de δ não associados em R. Logo, pela Proposição 4.2.2, temos que $R[\theta;\delta]$ não é primitivo.

(3) Para todo $M\in \mathrm{Max}(R)\cap\mathcal{F}_\delta$ e $p\in M$, onde p é um elemento de Darboux irredutível, temos que $\delta(R)\subseteq Rp$:

Seja M um ideal maximal de R que é um δ-ideal. Então

$$M=\langle x-\alpha, y-\beta\rangle=\{r(x,y)\in R\,|\,r(\alpha,\beta)=0\},$$

onde $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$. Como $\delta(M)\subseteq M$, temos que $\delta(x-\alpha)=\delta(y-\beta)=x-y\in M$. Logo $\alpha-\beta=0$ e, assim, $\alpha=\beta$. Portanto, os ideais maximais de R que são δ-ideais são da forma

$$M = \langle x - \alpha, y - \alpha \rangle, \qquad \text{para algum } \alpha \in \mathbb{C}.$$

Dado um elemento de Darboux irredutível qualquer $p_\mu(x,y) = x - y + \mu$, para algum $\mu \in \mathbb{C}$. Notemos que

$$p_\mu(x,y) = x - y + \mu \in M \quad \Leftrightarrow \quad p_\mu(\alpha,\alpha) = \alpha - \alpha + \mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu = 0.$$

Logo, os únicos elementos de Darboux irredutíveis pertencentes a M são os multiplos escalares de $p_0(x,y) = x - y$. Notemos que $\delta(R) \subseteq R(x-y)$, pois $\delta(x), \delta(y) \in R(x-y)$.

Portanto, aplicando o Teorema 4.2.3, concluímos que $R[\theta;\delta]$ satisfaz $(\diamond)$.

Observação 4.2.9. Seja $R = \mathbb{C}[x,y]$ com $\mathbb{C}$-derivação δ tal que $\text{mdc}(\delta(x), \delta(y)) = c \in R\backslash\mathbb{C}$, isto é, $\delta = c(a\partial_x + b\partial_y) = c\delta'$, onde $a, b \in R$, $\text{mdc}(a,b) = 1$ e $\delta' = a\partial_x + b\partial_y$. Neste caso, temos:

(1) $\text{Max}(R) \cap \mathcal{F}_\delta \neq \varnothing$, ou seja, sempre existem ideais maximais que são δ-ideais.

De fato, se $\text{Max}(R) \cap \mathcal{F}_\delta = \varnothing$, então, pela Observação 4.1.7, temos que $\langle \delta(x), \delta(y) \rangle = R$ e, assim, $\text{mdc}(\delta(x), \delta(y)) = 1$, que é uma contradição.

(2) Se $R[\theta;\delta]$ satisfaz $(\diamond)$, então $c \in M$, para todo $M \in \text{Max}(R) \cap \mathcal{F}_\delta$.

Com efeito, suponhamos, por absurdo, que existe um ideal maximal M tal que $\delta(M) \subseteq M$ e $c \notin M$. Como $R[\theta;\delta]$ satisfaz $(\diamond)$, pelo Teorema 4.2.3, temos que $R[\theta;\delta]$ não é primitivo e, assim, pela Proposição 4.2.2, existe um elemento de Darboux irredutível $p \in R$ tal que $p \in M$. Como $c \notin M$, segue que $p \nmid c$. Além disso, o fato que $\text{mdc}(a,b) = 1$ implica que $p \nmid a$ ou $p \nmid b$. Então $p \nmid ca = \delta(x)$ ou $p \nmid cb = \delta(y)$. Isto significa que $\delta(x) \notin Rp$ ou $\delta(y) \notin Rp$ e, portanto, $\delta(R) \nsubseteq Rp$. Aplicando o Teorema 4.2.3, obtemos que $R[\theta;\delta]$ não satisfaz $(\diamond)$, uma contradição.

(3) Usando o item (2) acima, podemos construir exemplos de anéis de operadores diferenciais $R[\theta;\delta]$ que não satisfazem ($\diamond$). Basta escolhermos os polinômios a e b em um ideal maximal M tal que $c \notin M$. Por exemplo, coloque $c = x$. Sabemos que $c \notin M = \langle x-1, y\rangle$. Então, tomando $a = y \in M$ e $b = x-1 \in M$, temos que M é um ideal maximal de R tal que $\delta(M) \subseteq M$, pois $\delta(x-1) = \delta(x) = ca \in M$ e $\delta(y) = cb \in M$. Agora, como $c \notin M$, pelo item (2), concluímos que $\mathbb{C}[x,y][\theta; x(y\partial_x + (x-1)\partial_y)]$ não satisfaz ($\diamond$).

(4) A recíproca de (2) não vale em geral. Se tomarmos $c = x$, $a = 1$ e $b = y$ no enunciado acima, obtemos a seguinte derivação $\delta = x(\partial_x + y\partial_y) = x\delta'$, onde $\delta' = \partial_x + y\partial_y$. Notemos que $x \in M$, para todo $M \in \mathrm{Max}(R) \cap \mathcal{F}_\delta = \{\langle x, y-\beta\rangle \mid \beta \in \mathbb{C}\}$. Vamos mostrar que $R[\theta;\delta]$ não satisfaz ($\diamond$). De fato, se p é um elemento de Darboux irredutível de δ, então $p \mid \delta(p) = x\delta'(p)$ e, assim, $p \mid x$ ou $p \mid \delta'(p)$. O último caso implica que p é um elemento de Darboux irredutível de δ'. Por [2, Theorem 4.1, (b)], sabemos que $p = y$ é o único elemento de Darboux irredutível não associado de δ'. Isto mostra que os únicos elementos de Darboux irredutíveis não associados de δ são os múltiplos escalares de x e y. Pela Proposição 4.2.2, temos que $R[\theta;\delta]$ é primitivo. Portanto, segue do Teorema 4.2.3 que $R[\theta;\delta]$ não satisfaz ($\diamond$).

Capítulo 5

Discussões Gerais

Neste trabalho, tivemos como objetivo principal estabelecer condições necessárias e suficientes para que os anéis de operadores diferenciais $R[\theta; \delta]$ satisfizessem a propriedade ($\diamond$). A estrutura de $R[\theta; \delta]$ está relacionada com a estrutura do anel base R e com a derivação δ, tornando assim o tema complexo e abrangente. Neste contexto, o presente capítulo visa discutir possíveis direções para o estudo geral, levando em conta os resultados que foram obtidos nesta pesquisa e, também, os que estão presentes na literatura.

5.1 Álgebras Afins

Sejam K um corpo de característica zero e R um K-domínio afim comutativo com derivação δ. Neste trabalho, foram apresentadas condições necessárias e suficientes para que os anéis de operadores diferenciais $R[\theta; \delta]$ satisfaçam ($\diamond$) quando:

(1) R é δ-simples (ou equivalentemente, $R[\theta; \delta]$ é simples) (ver Teorema 2.2.2);

(2) R é δ-primitivo (ou equivalentemente, $R[\theta; \delta]$ é primitivo) (ver Corolário 3.1.3);

(3) R tem dimensão de Krull 1 (ver Teorema 3.2.4);

(4) $R = K[x, x^{-1}]$ (ver Corolário 3.2.7);

(5) R é um DFU de dimensão de Krull 2 e $\mathrm{Max}(R) \cap \mathcal{F}_\delta = \varnothing$ (ver Teorema 4.1.3);

(6) $R = \mathbb{C}[x, y]$ (ver Teorema 4.2.3).

É importante ressaltarmos que Carvalho, Hatipoğlu e Lomp [3] caracterizaram os anéis de operadores diferenciais $K[x][\theta; \delta]$ satisfazendo ($\diamond$). Além disso, no caso em que K é um corpo algebricamente fechado de característica zero e R é uma K-álgebra afim comutativa com K-derivação δ, eles mostraram que, se δ é localmente nilpotente, então $R[\theta; \delta]$ satisfaz ($\diamond$). Em geral, a recíproca deste último fato não é verdadeira, como mostram os Exemplos 3.2.8 e 4.1.9.

Questão: Mais geralmente, suponhamos que R é uma K-álgebra afim comutativa com uma K-derivação δ satisfazendo as seguintes condições:

(1) R não é δ-simples,

(2) R não é δ-primitivo,

(3) R tem dimensão de Krull > 2 e

(4) δ não é localmente nilpotente.

Sob quais condições $S = R[\theta; \delta]$ satisfaz ($\diamond$)?

No capítulo anterior, fornecemos condições necessárias e suficientes para que S satisfaça ($\diamond$) quando R tem dimensão de Krull 2. Observemos que, devido ao Corolário 3.1.3, a condição "*S não é primitivo*" é necessária. Neste caso, analisamos sob quais condições os quocientes $S/\mathcal{P}$, onde $\mathcal{P}$ é um ideal primitivo de S, satisfazem as condições do Lema 4.0.1. Neste sentido, o leitor poderia nos perguntar: o que acontece quando $\text{K.dim}(R) > 2$? Poderíamos aplicar o mesmo método?

Notemos o seguinte: dado um ideal primitivo qualquer $\mathcal{P}$ de S, conforme já mostrado antes, temos que $\mathcal{P} \cap R$ é um δ-ideal primo não nulo de R. Além disso, ou $\mathcal{P} = S(\mathcal{P} \cap R)$ ou $\delta(R) \subseteq \mathcal{P} \cap R$.

Se analisarmos essas informações quando $\text{K.dim}(R) = 2$, podemos concluir que o δ-ideal primo não nulo $\mathcal{P} \cap R$ deve ser ou gerado por um elemento de Darboux irredutível de R ou um ideal maximal de R. Nem sempre é uma tarefa fácil encontrar os elementos de Darboux irredutíveis de R, mas é possível descrevê-los em alguns casos (ver Exemplos 4.2.7 e 4.2.8). Além disso, se K é algebricamente fechado, os ideais maximais de R são bem conhecidos. Com isso, conseguimos obter informações importantes sobre os quocientes primitivos $S/\mathcal{P}$ e, assim, apresentar condições para que S satisfaça ($\diamond$).

Já, no caso em que $\text{K.dim}(R) = n > 2$, além de aumentar a dificuldade para determinar os elementos de Darboux irredutíveis de R, não conseguimos caracterizar os δ-ideais primos não nulos com alturas $1 < k < n$. Portanto, de um modo geral, não foi possível obtermos informações suficientes sobre os quocientes primitivos $S/\mathcal{P}$ que nos permitissem concluir a propriedade ($\diamond$) sobre S, com exceção de três casos particulares que estudaremos a seguir.

Caso (1): Consideremos R, δ e S conforme o enunciado da questão acima. Suponhamos que, para todo ideal primitivo $\mathcal{P}$ de S, ocorre $\delta(R) \subseteq \mathcal{P} \cap R$. Neste caso, pela Proposição 1.5.2 (ii), $S/\mathcal{P}$ é comutativo e, assim, $S/\mathcal{P}$ é um corpo. Neste caso, mostraremos que S satisfaz ($\diamond$). Mas antes, faremos algumas observações relevantes sobre os anéis FBN.

Seja $\mathcal{N}(R) = \{a \in R \mid a^n = 0 \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\}$ o *nilradical* de R, isto é, o conjunto de todos elementos nilpotentes de R. Em [24], Jordan mostrou o seguinte:

Teorema 5.1.1. *[24, Theorem 3] Sejam $R \supseteq \mathbb{Q}$ um anel noetheriano comutativo com derivação δ e $S = R[\theta; \delta]$. As seguintes condições são equivalentes:*

(1) S é um anel FBN à direita;

(2) todo quociente primitivo de S é artiniano simples;

(3) $\delta(R) \subseteq \mathcal{N}(R)$;

(4) todo quociente primo de S é comutativo;

(5) todo quociente primitivo de S é um corpo.

Os anéis FBN constituem uma classe grande de anéis. Uma *identidade polinômial* sobre um anel R é um polinômio $p(x_1, \ldots, x_n)$ em variáveis não comutativas $x_1, \ldots, x_n$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$ tal que $p(r_1, \ldots, r_n) = 0$, para todo $r_1, \ldots, r_n \in R$. Dizemos que um anel R é um *PI-anel (anel de identidade polinomial)* se R satisfaz uma identidade polinomial mônica $p(x_1, \ldots, x_n)$. Observamos que todo PI-anel noetheriano é um anel FBN (ver [36, Corollary 13.6.6 (iii)]). Claramente os anéis comutativos são PI-anéis, pois satisfazem a identidade polinomial $p(x, y) = xy - yx$. Para um exemplo não comutativo, consideremos os anéis de matrizes $M_n(R)$ sobre um anel comutativo R. O Teorema de Amitsur-Levitzki (ver [36, Theorem 13.3.3 (ii)]) garante que $M_n(R)$ é um PI-anel. Em [30] e [31], Leroy e Matczuk fornecem condições necessárias e suficientes para que as extensões de Ore $R[\theta; \sigma, \delta]$ sejam um PI-anel. Em particular, eles mostram que, dado um PI-anel primo noetheriano R e um endomorfismo injetivo σ de R, então, $R[\theta; \sigma, \delta]$ é um PI-anel se, e somente se, existe um polinômio não constante no centro de $R[\theta; \sigma, \delta]$ com coeficiente lider regular (ver [31, Theorem 3.7]). É importante ressaltarmos que, no caso em que R é um K-domínio comutativo noetheriano, o Teorema 5.1.1 mostra que os anéis de operadores diferenciais $R[\theta; \delta]$ não são anéis FBN (e, assim, não são PI-anéis), para toda derivação não nula δ de R.

Voltando ao nosso caso, temos que $S/\mathcal{P}$ é um corpo, para todo ideal primitivo $\mathcal{P}$ de S e, pelo Teorema 5.1.1, concluímos que S é um anel FBN à direita. Uma vez que $S \simeq S^{op}$, obtemos que S é um anel FBN à esquerda, de onde segue que S é um anel FBN. Neste caso, o Corolário 1.3.3 juntamente com a Proposição 1.3.4 mostram que S satisfaz $(\diamond)$.

Vejamos um exemplo.

Exemplo 5.1.2. Seja $R = K[x_1, \ldots, x_n]/\langle p^2 \rangle$, onde $p \in K[x_1, \ldots, x_n]$ é um elemento primo. Notemos que $\delta = p\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \partial_{x_i}\right)$, onde $a_i \in K[x_1, \ldots, x_n]$, é uma

K-derivação de $K[x_1, \ldots, x_n]$ e, como $\langle p^2 \rangle$ é um δ-ideal de $K[x_1, \ldots, x_n]$, temos que δ induz uma K-derivação $\overline{\delta}$ em R. Uma vez que $\mathcal{N}(R) = \langle p \rangle / \langle p^2 \rangle$, claramente $\overline{\delta}(R) \subseteq \mathcal{N}(R)$. Agora, o Teorema 5.1.1 e a observação acima mostram que $R[\theta; \overline{\delta}]$ é um anel FBN e, portanto, $R[\theta; \overline{\delta}]$ satisfaz $(\diamond)$.

Caso (2): Sejam R um K-domínio afim com derivação δ e $S = R[\theta; \delta]$. Suponhamos que $\mathrm{K.dim}(R) > 2$ e que existe um quociente primitivo $S/\mathcal{P}$ tal que $\mathcal{P} = S(\mathcal{P} \cap R)$ e $\mathrm{ht}(\mathcal{P} \cap R) = 1$. Neste caso, veremos que S não satisfaz $(\diamond)$.

Assumimos agora que existem ideais primitivos $\mathcal{P}$ de S tais que $\mathcal{P} = S(\mathcal{P} \cap R)$, então

$$S/\mathcal{P} = S/S(\mathcal{P} \cap R) \simeq R/(\mathcal{P} \cap R)[\theta; \overline{\delta}]$$

é um anel primitivo, onde $\overline{\delta}$ é a derivação induzida por δ em $R/(\mathcal{P} \cap R)$. Se S satisfaz $(\diamond)$, o mesmo ocorre com $S/\mathcal{P}$ e, pelo Corolário 3.1.3, segue que

$$R/(\mathcal{P} \cap R) \text{ é } \overline{\delta}\text{-simples} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{K.dim}(R/(\mathcal{P} \cap R)) \leq 1.$$

Analisando a última condição, vemos que precisamos ter $\mathrm{ht}(\mathcal{P} \cap R) \geq \mathrm{K.dim}(R) - 1$, para todo ideal primitivo $\mathcal{P}$ de S tal que $\mathcal{P} = S(\mathcal{P} \cap R)$. Portanto, temos o seguinte resultado.

Corolário 5.1.3. *Sejam R um K-domínio afim com K-derivação δ e $S = R[\theta; \delta]$. Se S satisfaz $(\diamond)$, então*

$$R/(\mathcal{P} \cap R) \textit{ é } \overline{\delta}\textit{-simples} \qquad \textit{e} \qquad ht(\mathcal{P} \cap R) \geq K.dim(R) - 1,$$

para todo ideal primitivo $\mathcal{P}$ de S tal que $\mathcal{P} = S(\mathcal{P} \cap R)$.

Não é difícil encontrarmos exemplos de anéis de operadores diferenciais $S = R[\theta; \delta]$ tais que $\mathrm{ht}(\mathcal{P} \cap R) < \mathrm{K.dim}(R) - 1$, para algum ideal primitivo $\mathcal{P}$ de S tal que $\mathcal{P} = S(\mathcal{P} \cap R)$. Neste caso, pelo Corolário 5.1.3, temos que S não satisfaz $(\diamond)$. O exemplo a seguir ilustra este caso.

Exemplo 5.1.4. Sejam $R = K[x, y, z]$ com a K-derivação $\delta = \partial_x + y\partial_y + z\partial_z$ e $S = R[\theta; \delta]$. Consideremos $\mathcal{P} = Sz$ e, assim, $\mathcal{P} \cap R = \langle z \rangle$. Notemos que

$$\begin{aligned} S/\mathcal{P} &\simeq R/(\mathcal{P} \cap R)[\theta; \overline{\delta}] \\ &= K[x, y, z]/\langle z \rangle[\theta; \partial_x + \overline{y}\partial_y + \overline{z}\partial_z] \\ &\simeq K[x, y][\theta; \partial_x + y\partial_y]. \end{aligned}$$

Por [2, Theorem 4.1, (b)], vemos que y é o único elemento de Darboux irredutível da derivação $\delta' = \partial_x + y\partial_y$. Aplicando a Proposição 4.1.6, obtemos que $K[x, y]$ é δ'-primitivo. Logo, segue do Teorema 3.1.2 que $S/\mathcal{P} = K[x, y][\theta; \delta']$ é um anel primitivo e, portanto, $\mathcal{P}$ é um ideal primitivo de S satisfazendo

$$1 = \mathrm{ht}(\mathcal{P} \cap R) < \mathrm{K.dim}(R) - 1 = 2.$$

Aplicando o Corolário 5.1.3, obtemos que S não satisfaz $(\diamond)$.

Caso (3): Sejam R um K-domínio afim com K-derivação δ e $S = R[\theta; \delta]$. Suponhamos que existem $M \in \mathrm{Max}(R) \cap \mathcal{F}_\delta$ e $P \in \mathrm{Spec}(R) \cap \mathcal{F}_\delta$ satisfazendo as seguintes condições:

(1) $M \supseteq P$,

(2) $\mathrm{ht}(P) = \mathrm{K.dim}(R) - 1$ e

(3) $\delta(R) \nsubseteq P$.

Então S não satisfaz $(\diamond)$ (ver Proposição 4.1.10).

Sejam K um corpo algebricamente fechado e $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ com a K-derivação $\delta = x_1\partial_{x_1} + \cdots + x_n\partial_{x_n}$. Então $M = \langle x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n \rangle$ e $P = \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \rangle$ satisfazem as condições acima e, portanto, S não satisfaz $(\diamond)$ (ver Exemplo 4.1.11).

5.2 Anel de Séries de Potências Formais $K[[x]]$

No Capítulo 3, obtemos uma caracterização para os anéis de operadores diferenciais $R[\theta;\delta]$ que satisfazem $(\diamond)$ quando R é um K-domínio afim de dimensão de Krull 1. Nessas hipóteses, mostramos que R é δ-primitivo e, consequentemente, $R[\theta;\delta]$ satisfaz $(\diamond)$ se, e somente se, R é δ-simples (ver Teorema 3.2.4).

Questão: Mais geralmente, se R é um K-domínio não afim de dimensão de Krull 1, então é possível caracterizarmos a propriedade $(\diamond)$ em $R[\theta;\delta]$?

Por exemplo, consideremos o anel de séries de potências formais $R = K[[x]]$ com a K-derivação $\delta = x\partial_x$ e $S = R[\theta;\delta]$. Neste caso, S satisfaz $(\diamond)$?

Precisamos estudar as extensões essenciais cíclicas de S-módulos simples. Lembramos que a Observação 2.1.5 nos dá exemplos de S-módulos simples somente quando R é um anel δ-simples. O seguinte resultado, de Goodearl e Warfield [14], nos fornece condições suficientes para obtermos exemplos de S-módulos simples.

Proposição 5.2.1. *[14, Proposition 3.3] Sejam R um anel comutativo noetheriano com derivação δ e $S = R[\theta;\delta]$. Assuma que existe um elemento não divisor de zero $x \in R$ tal que R_x é δ-simples e $\delta(x)^m \in Rx$, para algum $m \in \mathbb{N}$. Então $S/S(\theta x - 1)$ é um S-módulo simples à esquerda.*

Notemos que o único ideal primo de R é o ideal maximal Rx que é um δ-ideal. Como, neste caso, os ideais δ-primos são justamente os ideais primos de R que são δ-ideais, segue que Rx é o único ideal δ-primo e é não nulo. Aplicando a Proposição 1.4.9, obtemos que R_x é δ-simples. Além disso, como $\delta(x) = x \in Rx$, pela Proposição 5.2.1, temos que $S/S(\theta x - 1)$ é um S-módulo simples.

Mostraremos agora que $V = S/S(\theta x - 1)$ não é um S-módulo injetivo. Logo, possui uma extensão essencial não trivial, em particular, o seu fecho injetivo.

Primeiro, consideremos $A = K[[x]]\backslash\{0\}$ e notemos que V é livre de A-torção.

De fato, temos que

$$1 + S(\theta x - 1) \notin t_A(V) = \{v \in V \mid av = 0 \text{ para algum } a \in A\},$$

caso contrário, teríamos que $a \in S(\theta x - 1)$, para algum $a \in A$ e, assim, $a \in S(\theta x - 1) \cap R = 0$, o que é um absurdo (pois $A = K[[x]]\backslash\{0\}$). Isto mostra que $t_A(V)$ é um submódulo próprio de V. Como V é simples, obtemos que $t_A(V) = 0$, ou seja, V é livre de A-torção.

Não é difícil verificar que $A = K[[x]]\backslash\{0\}$ é um conjunto de elementos normais em S e, assim, um conjunto de Ore em S. Como S é noetheriano, por [12, Proposition 10.7], obtemos que A é um conjunto de denominadores de S. Consideremos $T = SA^{-1}$. Então $T = SA^{-1} \simeq RA^{-1}[\theta; x\partial_x] = K((x))[\theta; x\partial_x]$, onde $K((x))$ é o corpo de frações de $R = K[[x]]$ (ver [13, Proposition 1.1]) e $VA^{-1} = T/T(\theta x - 1)$. Assim, por [12, Corollary 10.14 (b)], se V é um S-módulo injetivo, então VA^{-1} é um T-módulo injetivo. Logo, basta mostrarmos que $VA^{-1} = T/T(\theta x - 1)$ não é injetivo como T-módulo.

Em [20], Jain, Lam e Leroy mostraram o seguinte.

Lema 5.2.2. *[20, Lemma 4.4 (d)] Sejam R um anel de divisão e $T = R[\theta; \delta]$. Para $a \in R$, consideremos $\delta_a(\lambda) = \lambda a - a\lambda$, para todo $\lambda \in R$. Então, $T/T(\theta - a)$ é divisível se, e somente se, $\sum_{i=0}^{n} a_i(\delta - \delta_a)^i : R \to R$ é sobrejetora, para todo $\sum_{i=0}^{n} a_i\theta^i \in T$.*

Em nosso caso, temos que $\delta = x\partial_x$ e $R = K((x))$ é um corpo, assim $\delta_a = 0$ e $T = K((x))[\theta; x\partial_x]$. Logo, $T/T(\theta - a)$ é divisível se, e somente se, $\sum_{i=0}^{n} a_i(x\partial_x)^i : R \to R$ é sobrejetora, para todo $\sum_{i=0}^{n} a_i\theta^i \in T$. Para $\theta \in T$, temos que $x\partial_x : K((x)) \to K((x))$ não é sobrejetora, pois os elementos constantes não nulos não são correspondidos. Aplicando o Lema 5.2.2, obtemos que $T/T(\theta - a)$ não é divisível, para todo $a \in K((x))$. Em particular, para $a = x^{-1} - 1 \in K((x))$, segue que

$$T/T(\theta x - 1) = T/Tx[\theta - (x^{-1} - 1)] = T/T[\theta - (x^{-1} - 1)]$$

não é divisível. Como todo módulo injetivo é divisível, obtemos que $T/T(\theta x-1) = VA^{-1}$ não é injetivo, como queríamos mostrar.

Disso, segue que $S/S(\theta x - 1)$ não é injetivo e, portanto, possui uma extensão essencial não trivial. Nessa pesquisa, não conseguimos encontrar tais extensões. As tentativas realizadas foram infrutíferas. A extensão óbvia

$$\frac{S\theta}{S(\theta x-1)\theta} \leq \frac{S}{S(\theta x-1)\theta},$$

tendo em conta os resultados anteriores, não funciona. Tal fato deve-se à existência de elementos que satisfazem as condições do enunciado da seguinte proposição.

Proposição 5.2.3. *Sejam R um anel comutativo com derivação δ, $S = R[\theta;\delta]$ e $R^\delta = \{r \in R \,|\, \delta(r) = 0\}$ o subanel de constantes de R. Se $a \in R \setminus R^\delta$ e $b \in R^\delta$ é não divisor de zero em R, então*

$$\frac{S\theta}{S(\theta a-b)\theta} \not\leq_e \frac{S}{S(\theta a-b)\theta}.$$

Demonstração: Suponhamos que $a \in R \setminus R^\delta$ e $b \in R^\delta$ é não divisor de zero. Defina $J = S(\theta a - b)\theta$ e $I = S(a\theta - b)$. Temos o seguinte:

(1) Qualquer elemento de I pode ser escrito como $c(a\theta - b) + f(\theta a - b)\theta$, para algum $c \in R$ e $f \in S$, pois

$$\theta(a\theta - b) = (\theta a - b)\theta$$

e, portanto, para todo $g = \sum_{i=0}^n c_i\theta^i \in S$, temos que

$$g(a\theta-b) = c_0(a\theta-b) + \left(\sum_{i=1}^n c_i\theta^{i-1}\right)(\theta a - b)\theta.$$

Consideremos o S-módulo à esquerda $U = (I+J)/J$. Logo, os elementos de U são da forma

$$c(a\theta-b)+J, \quad \text{onde } c \in R.$$

(2) $U \neq 0$, pois $(a\theta - b) + J = 0 + J$ se, e somente se, $(a\theta - b) \in J \subseteq S\theta$, mas $b \notin S\theta$.

(3) $U \cap S\theta/J = 0$, pois se $c(a\theta - b) + J \in U \cap S\theta/J$, onde $c \in R$, então $c(a\theta - b) \in S\theta$. Assim, segue que $cb \in S\theta$ e, portanto, $cb = 0$. Mas, como b não é divisor de zero, temos que $c = 0$.

Portanto, $S\theta/J \not\leq_e S/J$. ■

Em nosso caso, temos $R = K[[x]]$ com a K-derivação $\delta = x\partial_x$ e $S = R[\theta; \delta]$. Como $a = x$ e $b = 1$ satisfazem as condições da Proposição 5.2.3, concluímos que

$$\frac{S\theta}{S(\theta x - 1)\theta} \not\leq_e \frac{S}{S(\theta x - 1)\theta}.$$

Bibliografia

[1] Archer, J., *Derivations on commutative rings and projective modules over skew polynomial rings*, PhD thesis, Leeds University, 1981.

[2] Brumatti, P., Lequain, Y., Levcovitz, D., *Differential simplicity in polynomial rings and algebraic independence of power series*, J. London Math. Soc. **68**, (2), 615-630, 2003.

[3] Carvalho, P. A. A. B., Hatipoğlu, C., Lomp, C., *Injective hulls of simple modules over differential operator rings*, Communications in Algebra **10**, 4221-4230, 2015.

[4] Carvalho, P. A. A. B., Lomp, C., Pusat-Yilmaz, D., *Injective modules over down-up algebras*, Glasg. Math. J. **52**, (A), 53-59, 2010.

[5] Carvalho, P. A. A. B., Musson, I. M., *Monolithic modules over Noetherian rings*, Glasg. Math. J. **53**, (3), 683-692, 2011.

[6] Chatters, A. W., Jordan, D. A., *Non-commutative unique factorisation rings*, J. London Math. Soc. **33**, (2), 22-32, 1986.

[7] Dahlberg, R. P., *Injective hulls of simple sl(2, C) modules are locally Artinian*, Proc. Amer. Math. Soc. **107**, (1), 35-37, 1989.

[8] Darboux, G., *Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré* (Mélanges), Bull. Sci. Math. **2**, 60–96, 123–144, 151–200, 1878.

[9] Davis, E. D., *Prime ideals and prime sequences in polynomial rings*, Proc. Amer. Math. Soc. **72**, 33-38, 1978.

[10] Eisenbud, D., *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics (Springer), Vol. 150, 1995.

[11] Goodearl, K. R., Schofield, A. H., *Non-Artinian essential extensions of simple modules*, Proc. Amer. Math. Soc. **97**, (2), 233-236, 1986.

[12] Goodearl, K. R., Warfield R. B. Jr., *An introduction to noncommutative Noetherian rings*, LMS Student Texts Vol. 61, Cambridge University Press, 2004.

[13] Goodearl, K. R., Warfield R. B. Jr., *Krull dimension of differential operator rings*, Proc. London Math. Soc. **45**, (3), 49-70, 1982.

[14] Goodearl, K. R., Warfield R. B. Jr., *Primitivity in differential operator rings*, Math. Z. **180**, 503-523, 1982.

[15] Hart, R., *Derivations on commutative rings*, J. London Math. Soc. **8**, (2), 171-175, 1974.

[16] Hart, R., *Krull dimension and global dimension of simple Ore-extensions*, Math. Z. **121**, 341-345, 1971.

[17] Hatipoğlu, C., Lomp, C., *Injective hulls of simple modules over finite dimensional nilpotent complex Lie superalgebras*, J. Algebra **361**, 79–91, 2012.

[18] Herstein, I. N., *A counterexample in Noetherian rings*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **54**, 1036-1037, 1965.

[19] Jacobson, N., *Structure of rings*, American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. 37. 190 Hope Street, Prov., R. I., 1956.

[20] Jain, S. K., Lam, T. Y., Leroy, A., *Ore extensions and V-domains*, Rings, Modules and Representations, Contemp. Math. Series AMS **480**, 263-288, 2009.

[21] Jategaonkar, A. V., *Integral group rings of polycyclic - by - finite groups*, J. Pure Appl. Algebra **4**, 337-343, 1974.

[22] Jategaonkar, A. V., *Jacobson's conjecture and modules over fully bounded Noetherian rings*, J. Algebra **30**, 103-121, 1974.

[23] Jordan, D. A., *Differentially simple rings with no invertible derivatives*, Quart. J. Math. Oxford **32**, (2), 417-424, 1981.

[24] Jordan, D. A., *Primitive Ore extensions*, Glasgow Math. J. **18**, 93-97, 1977.

[25] Jouanolou, J. P., *Equations de Pfaff algébriques*, Lecture Notes in Math., Vol. 708, Springer-Verlag, New York, Berlin, 1979.

[26] Kaplansky, I., *Commutative rings*, Allyn and Bacon, Boston, 1970.

[27] Kour, S., *A class of simple derivations of* $K[x, y]$, Communications in Algebra **42**, 4066-4083, 2014.

[28] Lam, T. Y., *A first course in noncommutative rings*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1991.

[29] Lam, T. Y., *Lectures on modules and rings*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1999.

[30] Leroy, A., Matczuk, J., *On q-skew iterated Ore extensions satisfying a polynomial identity*, J. Algebra Appl. **10**, (4), 771–781, 2011.

[31] Leroy, A., Matczuk, J., *Ore extensions satisfying a polynomial identity*, J. Algebra Appl. **5**, (3), 287–306, 2006.

[32] Limanov, L. M., *Locally nilpotent derivations, a new ring invariant and applications*, Lecture notes, Bar-Ilan University, 1998. Available at: http://www.math.wayne.edu/ lml/.

[33] Llibre, J., Zhang, X., *Rational first integrals in the Darboux theory of integrability in* $\mathbb{C}^n$, Bull. Sci. math. **134**, 189–195, 2010.

[34] Matlis, E., *Injective modules over Noetherian rings*, Pacific J. Math. **8**, 511-528, 1958.

[35] Matlis, E., *Modules with descending chain conditions*, Trans. Amer. Math. Soc. **97**, (3), 495-508, 1960.

[36] McConnell, J. C., Robson, J. C., *Noncommutative Noetherian rings*, Revised Ed., Graduate Studies in Mathematics, Vol. 30, Amer. Math. Soc., Providence, 2001.

[37] Musson, I. M., *Finitely generated, non-artinian monolithic modules*, New Trends in Noncommutative Algebra, Contemp. Math., Amer. Math. Soc., **562**, 211–220, 2012.

[38] Musson, I. M., *Some examples of modules over Noetherian rings*, Glasg. Math. J. **23**, 9-13, 1982.

[39] Nowicki, A., *An example of a simple derivation in two variables*, Colloquium Mathematicum **113**, 25-31, 2008.

[40] Nowicki, A., *Polynomial derivations and their rings of constants*, Nicolaus Copernicus University, Torun, 1994. Available at: http://www-users.mat.umk.pl/ anow/ps-dvi/pol-der.pdf.

[41] Reyes, M., *Krull dimension less or equal than transcendence degree?*, MathOverflow, 2012. Available at: http://mathoverflow.net/q/79974.

[42] Roseblade, J. E., *Group rings of polycyclic groups*, J. Pure Appl. Algebra **3**, 307-328, 1973.

[43] Sharp, R. Y., *Steps in commutative algebra*, Cambridge University Press, 2000.

[44] Singer, M. F., *Liouvillian first integrals of differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **333**, (2), 673–688, 1992.

[45] Stafford, J. T., *Nonholonomic modules over Weyl algebras and enveloping algebras*, Invent. Math. **79**, (3), 619-638, 1985.

[46] Stenström, B., *Rings of quotients - An introduction to methods of ring theory*, Springer-Verlag, New York, 1975.

[47] Voskoglou, M. G., *Differential simplicity and dimension of a commutative ring*, Riv. Mat. Univ. Parma **4**, (6), 111-119, 2001.

Índice Remissivo