

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Pontos de Galois sobre Quárticas Planas Lisas

Dissertação de Mestrado

João Hélder Olmedo Rodrigues

Porto Alegre, Fevereiro de 2009

Dissertação submetida por João Hélder Olmedo Rodrigues ¹, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Dr. Ivan Edgardo Pan Perez

Banca examinadora:

Dr. Jaime Bruck Ripoll (PPG-MAT/UFRGS)

Dr. Luís Gustavo Doninelli Mendes (PPG-MAT/UFRGS)

Dr. Arnaldo Leite Pinto Garcia (IMPA)

Dr. Ivan Edgardo Pan Perez (PPG-MAT/UFRGS)

¹Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)

À Aline. Por mais razões do que todas as que eu poderia descrever aqui. Te amo.

AGRADECIMENTOS

Contribuíram para este trabalho com leitura atenciosa, críticas pertinentes e sugestões precisas os professores Arnaldo, Luís Gustavo e Jaime, que participaram da banca examinadora. Em especial agradeço ao Ivan, pela valiosa orientação na elaboração desta dissertação e pela amizade. Também gostaria de agradecer à professora Cydara, simplesmente por ser uma ótima professora. Ao professor Alveri, pelo auxílio durante a minha graduação.

Contribuíram para este trabalho (e para toda minha vida) de uma maneira mais sentimental a minha noiva Aline, meus pais Sérgio e Sendi, minhas irmãs Débora, Raquel e Tina, meus sobrinhos Sophia e Apolo, a Tia Lúcia, a Vó Eva e a Noeli (pelos bifés da minha marmitta). Deus, por tudo o que tenho.

Muitos amigos e colegas contribuíram com incentivo, brincadeira, estudo, companheirismo, festas, cachaçadas, etc... Destaco: Queka, Duda, Debbie (que sempre me emprestavam os cadernos), Thyrsó, Tinga, Lisie DeLucca, Matheus Custódio, Renata Urruth, Patropy, Paty, Douglas, Hugo, Vitalino, André, Thaísa, Adri, Lucinéia, Samuel, Luciane, Diego, Diegão, Nicolau, Carol, Miriam, Renê, Bagé, Rafael, Ju Grande, Ju Pequena e até o Jairo.

MUITO OBRIGADO!!!

RESUMO

Seja C uma curva quártica plana lisa sobre o corpo $k = \mathbb{C}$, K seu corpo de funções racionais e P um ponto de C . Neste trabalho estudamos a extensão de corpos K/K_P gerada pela projeção $\pi_P : C \rightarrow \mathbb{P}^1$. Calculamos seu fecho de Galois L_P e caracterizamos topologicamente o modelo não singular de L_P . No caso em que K/K_P é de Galois apresentamos equações que definem C . Estimamos também o número de pontos P da quártica tais que K/K_P é de Galois.

ABSTRACT

Let C be a smooth plane quartic curve over the field $k = \mathbb{C}$, let K be its rational function field and let P be a point in C . In this work we study the field extension K/K_P generated by the projection $\pi_P : C \rightarrow \mathbb{P}^1$. We calculate its Galois closure L_P and characterize topologically the smooth model of L_P . In the case where K/K_P is Galoisian we give defining equations for C . We estimate the number of points P of the quartic such that K/K_P is Galoisian.

Sumário

1	Extensões de Corpos	5
1.1	Extensões Transcendentes	6
1.2	Extensões Finitas	6
2	Elementos de Geometria Algébrica	11
2.1	Generalidades	11
2.2	Singularidades	17
2.3	Normalidade	19
2.4	Curvas Projetivas	21
2.5	Curvas Planas	23
3	Superfícies de Riemann	30
3.1	Definições	30
3.2	Exemplos	31
3.3	Funções e Aplicações	33
3.4	Germes de Funções Holomorfas	40
3.5	Fórmula de Hurwitz	43

4	Pontos de Galois sobre Quárticas Planas Lisas	49
4.1	Primeira Parte	49
4.2	Segunda Parte	59

Introdução

Seja $k = \mathbb{C}$ o corpo dos números complexos. Seja K extensão de k , finitamente gerada com $gr.tr_k K = 1$, isto é, seja K um corpo de funções racionais de uma variável sobre k . Seja $t \in K$ transcendente sobre k . Então $[K : k(t)]$ é finito. Podemos questionar, por exemplo

1. Quando a extensão $K/k(t)$ é galoisiana?
2. O que podemos dizer sobre o fecho de Galois $L/k(t)$ da extensão $K/k(t)$?
3. Qual é o grupo de Galois $Gal(L/k(t))$?

Obviamente as questões acima são bastante gerais e sem hipóteses adicionais não temos muito o que dizer. Em [Miura-Yoshihara], os autores propoem o estudo de tais questões de um ponto de vista geométrico, para um tipo especial de extensões, como segue.

Seja C é uma curva irredutível. Então o corpo $k(C)$ das funções racionais de C é do tipo acima, isto é, finitamente gerado sobre k e $gr.tr_k k(C) = 1$. Adicionalmente, se C é uma curva projetiva plana de grau d e $P \in \mathbb{P}^2$, consideramos o espaço $\{\text{retas de } \mathbb{P}^2 \text{ por } P\} \simeq \mathbb{P}^1$ e a aplicação racional $\pi_P : C \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ que faz $Q \mapsto \overline{PQ} =$ reta por P e Q . Então π_P induz uma extensão de corpos $\pi_P^* : k(\mathbb{P}^1) \hookrightarrow k(C)$ com grau $deg \pi_P = d - m_P(C)$, onde $m_P(C)$ é a multiplicidade de P como ponto de C : com efeito, pelo Teorema de Bézout uma reta genérica de \mathbb{P}^2 por P intersecta C em $d - m_P(C)$ pontos. Cabe observar que convencionamos $m_P(C) = 0$ no caso $P \notin C$.

Tais extensões geradas por π_P dependem somente do ponto $P \in \mathbb{P}^2$. É para este tipo de extensão que estudaremos as questões acima. De maneira explícita, dados uma curva plana irredutível C e um ponto $P \in \mathbb{P}^2$, denotamos $K_P = \pi_P^*(k(\mathbb{P}^1))$ e $K = k(C)$. As questões anteriores, deste ponto de vista geométrico, são colocadas nos seguintes termos:

1. Quando a extensão K/K_P é galoisiana?
2. O que podemos dizer sobre o fecho de Galois L_P/K_P da extensão K/K_P ?
3. Qual é o grupo de Galois $G_P := \text{Gal}(L_P/K_P)$?

De acordo com [Miura-Yoshihara], damos a seguinte definição:

Definição 0.0.1. *Se a extensão K/K_P é galoisiana dizemos que P é um ponto de Galois.*

O objetivo principal deste trabalho é compreender a demonstração do Teorema [Miura-Yoshihara, Thm.2.1], que trata do caso $P \in C$, e reescrever sua prova de forma a tornar o resultado acessível para um público não especialista. Como muitos dos pré-requisitos para sua compreensão envolvem assuntos que não são tratados nas disciplinas básicas de um curso de matemática, pretendemos desenvolver alguns tópicos necessários para o tratamento destes.

Damos abaixo alguns exemplos:

Exemplo 0.0.2 (Curvas de grau $d = 2$).

Se C é irredutível de grau 2, então C é curva lisa. Neste caso $\deg \pi_P = 2 - 1 = 1$ pra todo $P \in C$. Assim, todo ponto de C é de Galois, donde as questões acima são respondidas trivialmente.

Exemplo 0.0.3 (Curvas de grau $d = 3$).

Se C é irredutível de grau 3, então C é uma curva lisa ou uma curva racional singular. No primeiro caso, para todo ponto $P \in C$ temos $\deg \pi_P = 3 - 1 = 2$. Ora, toda extensão de grau 2 é galoisiana como segue facilmente da *Fórmula de Bhaskara*. Logo, todo ponto de C é ponto de Galois. No segundo caso, se P não é o (único) ponto singular de C , então $\deg \pi_P = 2$; se P é o ponto singular então $\deg \pi_P = 1$. Em qualquer caso temos novamente que todo ponto de C é de Galois.

O primeiro caso interessante é $d = 4$: o caso em que C é quártica plana lisa é tratado em [Miura-Yoshihara]. Para o caso em que C é uma quártica plana singular, referimos a [Miura].

Capítulo 1

Extensões de Corpos

Seja $K \subset L$ uma extensão de corpos. O corpo L é um K -espaço vetorial. A extensão $K \subset L$ é dita *finita* se $\dim_K L$ for finita e dita *infinita* no caso contrário. No primeiro caso denotamos $[L : K] := \dim_K L$, o grau da extensão $K \subset L$.

Se $K \subset L \subset M$ é uma torre de extensões, então $K \subset M$ é finita se e somente se $K \subset L$ e $L \subset M$ o são; neste caso, temos $[M : K] = [L : K][M : L]$.

Dizemos que $K \subset L$ é *algébrica* se para todo $t \in L$, existe $f \in K[x] - \{0\}$ tal que $f(t) = 0$. Se $K \subset L$ não é algébrica, diremos que é *transcendente*. Quando $T \subset L$ é subconjunto,

$$K(T) := \left\{ \frac{f(t_1, \dots, t_n)}{g(t_1, \dots, t_n)} \mid n \in \mathbb{N}, f, g \in K[x_1, \dots, x_n], t_1, \dots, t_n \in T, g(t_1, \dots, t_n) \neq 0 \right\}$$

é o corpo obtido de K por *adjunção* de T .

Dizemos que L é finitamente gerado sobre K se existir $T \subset L$ finito tal que $L = K(T)$. Mostra-se: uma extensão é finita se e somente se é algébrica e finitamente gerada ([Stewart, Chap. 6]).

1.1 Extensões Transcendentes

Um conjunto $T \subset L$ é dito *transcendente sobre K* se, para todo subconjunto finito $\{t_1, \dots, t_n\} \subset T$ o homomorfismo de K -álgebras $K[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow K[t_1, \dots, t_n]$ induzido por $x_i \mapsto t_i$ for injetivo, isto é, se $K[t_1, \dots, t_n]$ for isomorfo ao anel de polinômios em n indeterminadas sobre K .

Um conjunto transcendente $T \subset L$ é dito *base de transcendência de $K \subset L$* se não está contido estritamente em outro conjunto transcendente de L ou, equivalentemente, se a extensão $K(T) \subset L$ for algébrica. Referimos a [Zariski-Samuel, página 95] para provas da existência de uma base de transcendência de uma extensão $K \subset L$ e de que duas tais bases possuem a mesma cardinalidade, denotada $gr.tr_K L$ e dita o *grau de transcendência* da extensão $K \subset L$.

Observe que se A é um domínio que é uma K -álgebra e $L = \text{Frac}(A)$ é o corpo das frações de A , então $L = K(A)$ e a extensão $K \subset L$ possui base de transcendência contida em A .

1.2 Extensões Finitas

Uma extensão $K \subset L$ é dita *normal* se qualquer polinômio irredutível em $K[x]$ que possui um zero em L se decompõe como produto de polinômios de grau 1 em $L[x]$.

Diremos que $f \in K[x]$ se decompõe numa extensão Σ de K se f fatora-se em $\Sigma[x]$ como produto de polinômios de grau 1.

Se $K \subset \Sigma$ é uma extensão de corpos e $f \in K[x]$, diremos que Σ é um *corpo de decomposição para f* se

1. f se decompõe em Σ ;
2. se $K \subset \Sigma' \subset \Sigma$ e f se decompõe em Σ' , então $\Sigma = \Sigma'$.

Referimos a [Stewart, página 181] para uma prova de que se $f \in K[x]$, existe e é único a menos de isomorfismos o corpo de decomposição para f . Claramente, o corpo de decomposição de f é $\Sigma = K(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, onde $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ são os zeros de f no fecho algébrico de K .

Temos

Proposição 1.2.1. *Uma extensão $K \subset L$ é normal e finita se e somente se L é corpo de decomposição para um polinômio em $K[x]$.*

Prova:[Stewart, página 182]. □

Dizemos que um polinômio irreduzível $f \in K[x]$ é *separável* se f não possuir zeros múltiplos em seu corpo de decomposição. Um elemento $\alpha \in L \supset K$ é dito *separável* se for algébrico sobre K e seu polinômio minimal em $K[x]$ for separável. Por fim, uma extensão algébrica $K \subset L$ é dita *separável* se todo elemento de L for separável sobre K . Mostra-se que toda extensão de um corpo de característica zero é separável.

Uma extensão $K \subset L$ é dita *galoisiana* se for finita, normal e separável.

Se $K \subset L$ é uma extensão de corpos, um *K -automorfismo de L* é um automorfismo θ de L tal que $\theta(\nu) = \nu, \forall \nu \in K$. É fácil verificar que o conjunto dos K -automorfismos de L forma um grupo com a operação de composição de funções. Tal grupo é dito o *grupo de Galois de $K \subset L$* e denotado $Gal(L/K)$. Se M é qualquer corpo intermediário, isto é, $K \subset M \subset L$, associamos a ele o grupo $Gal(L/M)$. Note que $M \subset N \Rightarrow Gal(L/M) \supset Gal(L/N)$.

Reciprocamente, se $H \subset Gal(L/K)$ é um subgrupo, denotamos $L^H := \{\nu \in L \mid \theta(\nu) = \nu, \forall \theta \in H\}$. Novamente, é fácil verificar que L^H é corpo intermediário entre K e L . O corpo L^H é dito o *corpo fixo por H* . Também, $H \subset G \Rightarrow L^H \supset L^G$.

Em suma, se \mathcal{F} é o conjunto dos corpos intermediários entre K e L e \mathcal{G} é o conjunto dos subgrupos de $Gal(L/K)$, temos definidas aplicações $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ e $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ que revertem inclusões. Ainda, $M \subset L^{Gal(L/M)}$, para todo $M \in \mathcal{F}$ e

$H \subset Gal(L/L^H)$, para todo $H \in \mathcal{G}$.

Impondo algumas condições sobre a extensão obtemos uma série de bons resultados, a saber o Teorema Fundamental da Teoria de Galois:

Teorema 1.2.2. *Seja $K \subset L$ uma extensão galoisiana. Com as notações acima temos*

1. $|Gal(L/K)| = [L : K]$;
2. As flechas $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ e $\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}$ são inversas mútuas;
3. Se $M \in \mathcal{F}$ então $[L : M] = |Gal(L/M)|$ e $[M : K] = [L : K]/|Gal(L/M)|$;
4. Um corpo $M \in \mathcal{F}$ é extensão normal de K se, e só se, $Gal(L/M)$ é subgrupo normal de $Gal(L/K)$;
5. Se $M \in \mathcal{F}$ é extensão normal de K , então $Gal(M/K) \simeq Gal(L/K)/Gal(L/M)$.

Prova:[Stewart, página 187]. □

Se $f \in K[x]$, o grupo de Galois de f é $Gal(f/K) := Gal(\Sigma/K)$, onde Σ é o corpo de decomposição de f sobre K . Nesse caso, $Gal(f/K)$ é finito e, logo, isomorfo a um subgrupo de S_n , grupo das permutações de n elementos, onde n é o número de raízes de f . Suponhamos $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ e denotemos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ suas raízes em Σ . Consideremos $\delta := a_n^{n-1} \prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j) \in \Sigma$. O discriminante de f é então definido por $\Delta_f := \delta^2$.

Teorema 1.2.3. *Seja $f \in K[x]$ e suponha que $char(K) \neq 2$. Então*

1. $\Delta_f \in K$;
2. $\Delta_f = 0 \Leftrightarrow f$ possui raiz múltipla;
3. Δ_f é um quadrado em $K \Leftrightarrow Gal(f/K) \subset A_n$, o grupo alternado de n elementos.

Prova:[Stewart, página 256]. □

Exemplo 1.2.4. $n = 3$

Seja $f = ax^3 + bx^2 + cx + d$ um polinômio de grau três, irreduzível em $K[x]$ e $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ seus zeros no corpo de decomposição. Então $a^{-1}f = x^3 - s_1x^2 + s_2x - s_3$, onde $s_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $s_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3$ e $s_3 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3$. A seguinte relação é consequência óbvia da definição do discriminante: $\Delta_f = a^4 \cdot \Delta_{a^{-1}f}$.

Um cálculo um pouco longo, mostra que

$$\Delta_{a^{-1}f} = \frac{b^2c^2}{a^4} + 18\frac{bcd}{a^3} - 27\frac{d^2}{a^2} - 4\frac{b^3d}{a^4} - 4\frac{c^3}{a^3}.$$

Isto implica

$$\Delta_f = b^2c^2 + 18abcd - 27a^2d^2 - 4b^3d - 4c^3a.$$

Como $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \notin K$, temos $\{id_\Sigma\} \neq Gal(f/K) = Gal(\Sigma/K) \subset S_3$. Assim, o Teorema 1.2.3 implica que $Gal(f/K) = A_3$, se $\delta \in K$, já que pelo Teorema 1.2.2 $|Gal(\Sigma/K)| = [\Sigma : K] = 3$. Temos $Gal(f/K) = S_3$, no caso em que $\delta \notin K$.

Exemplo 1.2.5. *Corpo de decomposição de um polinômio irreduzível de grau três, $char(K) = 0$*

Seja $f = x^3 + bx^2 + cx + d$ um polinômio de grau três, irreduzível em $K[x]$ e $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ seus zeros no seu corpo de decomposição Σ . Mostraremos que $\Sigma = K(\alpha_1, \delta)$, onde $\Delta_f = \delta^2$.

A inclusão $K(\alpha_1, \delta) \subseteq \Sigma$ é clara. Reciprocamente, em $K(\alpha_1)[x]$, f se fatora como $f = (x - \alpha_1) \cdot (x^2 + ux + v)$, donde vemos que os zeros α_2 e α_3 são dadas por $\alpha_2 = \frac{-u + \sqrt{u^2 - 4v}}{2}$ e $\alpha_3 = \frac{-u - \sqrt{u^2 - 4v}}{2}$. Como $u \in K(\alpha_1)$, basta ver que $\sqrt{u^2 - 4v} \in K(\alpha_1, \delta)$ para concluir que $K(\alpha_1, \delta) \supseteq \Sigma$.

Das relações entre coeficientes e zeros de um polinômio, vemos que $\alpha_2 + \alpha_3 = -u \in K(\alpha_1) \ni v = \alpha_2\alpha_3$. Como f é irreduzível em $K[x]$ e $char(K) = 0$ então f é

separável, isto é, $\alpha_i = \alpha_j \Rightarrow i = j$. Assim, $0 \neq (\alpha_1 - \alpha_2) \cdot (\alpha_1 - \alpha_3) = \alpha_1^2 + \alpha_1 u + v \in K(\alpha_1)$. Logo, $\sqrt{u^2 - 4v} = \alpha_2 - \alpha_3 = \frac{\delta}{(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot (\alpha_1 - \alpha_3)} \in K(\alpha_1, \delta)$.

Capítulo 2

Elementos de Geometria Algébrica

Neste capítulo, como no restante do trabalho, suporemos que $k = \mathbb{C}$. Desenvolveremos os tópicos de geometria algébrica que necessitaremos posteriormente. Todos os resultados serão enunciados sem demonstração, indicando em cada caso uma referência adequada.

2.1 Generalidades

Um subconjunto $X \subset \mathbb{A}^n = \mathbb{A}_k^n$ é dito um *fechado afim* se existir uma coleção finita de polinômios $f_1, \dots, f_l \in k[x_1, \dots, x_n]$ tais que $X = V(f_1, \dots, f_l) := \{x \in \mathbb{A}^n \mid f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_l(x) = 0\}$.

Mostra-se em [Hulek, página 18] que os fechados afins são os fechados de uma topologia em \mathbb{A}^n , chamada a *Topologia de Zariski de \mathbb{A}^n* .

Um fechado afim X é dito *reduzível* se existirem fechados X_1, X_2 tais que $X_i \subsetneq X$ e $X = X_1 \cup X_2$. No caso contrário X é dito *irreduzível*.

Se $X \subset \mathbb{A}^n$ é um fechado afim o conjunto $I(X) := \{f \in k[x_1, \dots, x_n] \mid f(x) = 0, \forall x \in X\}$ é um ideal de $k[x_1, \dots, x_n]$ chamado o *ideal de X* . O anel $k[X] := k[x_1, \dots, x_n]/I(X) = k[\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n]$ é dito o *anel das funções regulares em X* . Um

elemento $f \in k[X]$ é visto como uma função $f : X \rightarrow k$. As funções regulares são contínuas com respeito às Topologias de Zariski de X e $k = \mathbb{A}^1$. Ver [Hulek, página 40]

Proposição 2.1.1. *São equivalentes:*

1. X é irredutível;
2. $I(X)$ é ideal primo;
3. $k[X]$ é um domínio de integridade.

Prova: $1 \Leftrightarrow 2$ está em [Hulek, página 20] e $2 \Leftrightarrow 3$ é elementar. □

A topologia em $X \subset \mathbb{A}^n$ induzida pela Topologia de Zariski de \mathbb{A}^n é chamada a *Topologia de Zariski em X* .

Proposição 2.1.2. *São equivalentes:*

1. X é irredutível;
2. Qualquer aberto não-vazio de X é denso em X ;
3. Dois abertos não-vazios de X se interceptam.

Prova:[Hulek, página 22]. □

Proposição 2.1.3. *Todo fechado afim X admite única decomposição (a menos de ordem) na forma $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$, onde os X_i são fechados irredutíveis e $X_i \not\subset X_j$ se $i \neq j$.*

Prova:[Hulek, página 21]. □

Quando X é irredutível a Proposição 2.1.1 garante que podemos falar em $k(X) := \text{Frac}(k[X])$ o corpo das frações de $k[X]$. O corpo $k(X)$ é chamado o *corpo das funções racionais de X* . Neste caso, a *dimensão de X* é o grau de transcendência

da extensão $k(X)/k$ e é denotada $\dim X$. Fechados afins irredutíveis de dimensão 0, 1 e 2 são ditos *pontos*, *curvas* e *superfícies* afins irredutíveis, respectivamente,

Quando X é um fechado afim redutível com decomposição $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$, como em 2.1.3, então a dimensão de X é definida como sendo o máximo dos inteiros $\dim X_i$. Se $U \subset X$ é um aberto de X , a dimensão de U é definida como a dimensão de seu fecho em X . Convencionamos que $\dim \emptyset = -1$. Se $Y \subset X$, a *codimensão* de Y em X é $\text{codim}_X Y := \dim X - \dim Y$.

Se X é um fechado afim irredutível, uma função racional $f \in k(X)$ é um quociente de funções regulares $g, h \in k[X]$, isto é, $f = g/h$. Como função em X , f não está bem definida nos pontos onde h se anula. Por essa razão denotamos $f : X \dashrightarrow k$. Observe, entretanto, que se $x \in X$ é tal que $h(x) \neq 0$, então pela continuidade de h , existe uma vizinhança de x contida em X na qual f é bem definida. Os pontos onde f é bem definida como função em X são ditos *pontos regulares de f* . Observe ainda que os pontos de um fechado afim irredutível onde uma função racional é bem definida é um aberto de Zariski denso em X .

Um subconjunto $X \subset \mathbb{P}^n = \mathbb{P}_k^n$ é dito um *fechado projetivo* se existir uma coleção finita de polinômios homogêneos $f_1, \dots, f_l \in k[x_0, \dots, x_n]$ tais que $X = V(f_1, \dots, f_l) := \{x \in \mathbb{P}^n \mid f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_l(x) = 0\}$.

Novamente, como no caso afim, mostra-se em [Hulek, página 70] que os fechados projetivos são os fechados de uma topologia em \mathbb{P}^n , chamada a *Topologia de Zariski de \mathbb{P}^n* .

As noções de redutibilidade e irredutibilidade são as mesmas do caso afim e as Proposições 2.1.2 e 2.1.3 continuam válidas no contexto projetivo.

Seja $\pi : \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\} \rightarrow \mathbb{P}^n$ a aplicação canônica. O *cone afim* de um fechado projetivo $X \subset \mathbb{P}^n$ é o fechado afim $X^a := \pi^{-1}(X) \cup \{(0, \dots, 0)\} \subset \mathbb{A}^{n+1}$. O *ideal do fechado projetivo X* é definido como sendo o ideal $I(X^a)$ do cone afim correspondente.

O espaço projetivo \mathbb{P}^n com coordenadas $(x_0 : \dots : x_n)$ possui uma decomposição usual dada por $\mathbb{P}^n = \mathbb{A}_0^n \cup \dots \cup \mathbb{A}_n^n$, onde $\mathbb{A}_i^n := \{x_i \neq 0\} \subset \mathbb{P}^n$. Existe uma identificação natural entre os abertos \mathbb{A}_i^n de \mathbb{P}^n e o espaço afim \mathbb{A}^n ; no caso $i = 0$ esta identificação é dada pela aplicação

$$(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \mapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right).$$

Mais do que isso:

Proposição 2.1.4. \mathbb{A}^n e \mathbb{A}_i^n são homeomorfos com respeito às Topologias de Zariski correspondentes.

Prova:[Hulek, página 73]. □

Qualquer fechado projetivo $X \subset \mathbb{P}^n$ possui uma cobertura por abertos dada por $X = X_0 \cup \dots \cup X_n$, onde $X_i := X \cap \mathbb{A}_i^n$. Por meio do homeomorfismo da Proposição 2.1.4 podemos pensar $X_i \subset \mathbb{A}^n$ como sendo um fechado afim. Temos o seguinte:

Proposição 2.1.5. A correspondência $X \mapsto X_i = X \cap \mathbb{A}_i^n$ define uma bijeção entre o conjunto dos fechados irredutíveis $X \subset \mathbb{P}^n$ tais que $X \not\subset \{x_i = 0\}$ e o conjunto dos fechados afins irredutíveis $X_i \subset \mathbb{A}^n$. A inversa de $X \mapsto X_i$ é $X_i \mapsto \overline{X_i}$, onde a barra representa o fecho de Zariski em \mathbb{P}^n .

Prova:[Hulek, página 74]. □

Uma *variedade quase-projetiva* ou simplesmente *variedade*, é um aberto de um fechado projetivo. É imediato que todo fechado projetivo é uma variedade. Se $X \subset \mathbb{A}^n$ é fechado afim então segue da Proposição 2.1.5 que $X = \overline{X} \cap \mathbb{A}_i^n$, donde obtemos que todo fechado afim também é variedade. Um subconjunto $Y \subset X \subset \mathbb{P}^n$, onde X é uma variedade, é dito uma *subvariedade* de X se Y for uma variedade de \mathbb{P}^n .

O corpo das *funções racionais de uma variedade* irredutível $X \subset \mathbb{P}^n$ é o conjunto formado pelas funções racionais $f = g/h$ onde $g, h \in k[x_0, \dots, x_n]$ são polinômios

homogêneos de mesmo grau e $h \notin I(X)$. Como antes escrevemos $f : X \dashrightarrow k$ para simbolizar que f pode não ser bem definida em todo o conjunto X . Um ponto $x \in X$ é dito regular para uma função racional f se existir uma representação $f = g/h$ tal que $h(x) \neq 0$. Dois quocientes g/h e g_1/h_1 definem a mesma função em X se e somente se $gh_1 - g_1h \in I(X)$. Denotamos, como no caso afim, $k(X)$ tal corpo de funções racionais. Mostra-se que a definição dada para $k(X)$ quando X é fechado afim coincide com esta dada agora. Ver [Shafarevich, página 50].

Uma *aplicação racional* $\phi : X \dashrightarrow \mathbb{A}^m$ com X irredutível, é uma m -upla $\phi = (f_1, \dots, f_m)$, onde cada $f_i \in k(X)$. Um ponto de X é regular para ϕ se for regular para cada f_i . A aplicação racional acima é denotada $\phi : X \dashrightarrow Y \subset \mathbb{A}^m$ com Y uma variedade se $\phi(x) \in Y$ para cada ponto $x \in X$ que é regular para ϕ .

Uma *aplicação racional* $\phi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ com X irredutível, é um ponto $\phi = (f_0 : \dots : f_m) \in \mathbb{P}(k(X)^{m+1})$. Um ponto $x \in X$ é dito um ponto regular para ϕ se

1. f_i é regular em x , para cada $i \in \{0, \dots, m\}$;
2. existe i tal que $f_i(x) \neq 0$.

A aplicação racional acima é denotada $\phi : X \dashrightarrow Y \subset \mathbb{P}^m$ com Y uma variedade se $\phi(x) \in Y$ para cada ponto $x \in X$ que é regular para ϕ .

Quando X e Y são variedades irredutíveis contendo abertos U e V respectivamente dizemos que

1. um *morfismo* $\phi : U \rightarrow V$ é uma aplicação racional $\phi : X \dashrightarrow Y$ tal que $U \subset \text{dom}(\phi) := \{\text{pontos regulares para } \phi\}$ e $\phi(U) \subset V$;
2. um morfismo $\phi : U \rightarrow V$ é um *isomorfismo* se existir um morfismo $\psi : V \rightarrow U$ tal que $\psi \circ \phi = \text{id}_U$ e $\phi \circ \psi = \text{id}_V$;
3. Uma aplicação racional $\phi : X \dashrightarrow Y$ é dita *dominante* se $\phi(\text{dom}(\phi))$ é denso em Y ;

4. Uma aplicação racional $\phi : X \dashrightarrow Y$ é dita *birracional* se existir aplicação racional $\psi : Y \dashrightarrow X$ tal que $\psi \circ \phi = id_X$ e $\phi \circ \psi = id_Y$, onde as composições forem bem definidas. Quando existe uma aplicação birracional entre variedades dizemos que estas são *birracionalmente equivalentes*.

Proposição 2.1.6. *Todo ponto em uma variedade possui uma vizinhança isomorfa a um fechado afim.*

Prova:[Shafarevich, página 49]. □

Note que aplicações entre fechados afins induzem homomorfismos entre anéis, da seguinte forma:

- se $\phi : X \rightarrow Y$ é regular, a uma função $f \in k[Y]$ associamos $\phi^*(f) := f \circ \phi$. Então $\phi^*(f) \in k[X]$, ou seja $\phi^* : k[Y] \rightarrow k[X]$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & Y \\ & \searrow \phi^*(f) & \downarrow f \\ & & k \end{array}$$

- se $\phi : X \dashrightarrow Y$ é racional dominante e os fechados X e Y são irredutíveis então de maneira similar temos homomorfismo $\phi^* : k(Y) \rightarrow k(X)$.

Temos o seguinte:

Teorema 2.1.7. *Seja $\phi : X \dashrightarrow Y$ racional entre variedades irredutíveis. São equivalentes:*

1. ϕ é birracional;
2. ϕ é dominante e $\phi^* : k(Y) \rightarrow k(X)$ é isomorfismo;
3. Existem abertos $U \subset X$ e $V \subset Y$ tais que $\phi : U \rightarrow V$ é isomorfismo.

Prova:[Hulek, página 83]. □

Uma extensão de anéis $A \subset B$ é dita uma *extensão inteira* se para cada elemento $b \in B$ existirem $n \geq 1$ e $a_1, \dots, a_n \in A$ tais que $b^n + a_1b^{n-1} + a_2b^{n-2} + \dots + a_n = 0$.

Uma aplicação regular $\phi : X \rightarrow Y$ é dita *finita* se a aplicação induzida entre os anéis de funções regulares $\phi^* : k[Y] \rightarrow k[X]$ for inteira, isto é, se $k[X]$ é inteiro sobre o subanel $\phi^*(k[Y])$. A respeito de aplicações finitas temos o seguinte resultado:

Teorema 2.1.8. *Uma aplicação finita é sobrejetiva.*

Prova:[Shafarevich, página 61]. □

2.2 Singularidades

Para um polinômio $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ e um ponto $P = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n$ a diferencial de f em P é definida como sendo

$$d_P f := \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(P)(x_j - a_j)$$

Seja $X \subset \mathbb{A}^n$ um fechado afim. O espaço tangente a X em $P \in X$ é a seguinte interseção de hiperplanos:

$$T_P X := \bigcap_{f \in I(X)} V(d_P f) \subset \mathbb{A}^n$$

É claro que se $I(X) = (f_1, \dots, f_m)$ temos

$$T_P X = \bigcap_{i=1}^m V(d_P f_i)$$

Teorema 2.2.1. *Seja X fechado afim irredutível. Temos $\dim_k T_P X \geq \dim X$, para todo $P \in X$. Existe um aberto U denso em X tal que $\dim_k T_P X = \dim X$, para todo $P \in U$.*

Prova:[Hulek, Proposition 3.8 + Theorem 3.18]. □

Nas hipóteses do Teorema 2.2.1 um ponto $P \in U$ é dito um *ponto liso* ou *não-singular de X* . Um ponto $P \in X \setminus U$ é dito um *ponto singular de X* .

Quando X é redutível, digamos $X = \bigcup_{i=1}^r X_i$, um ponto $P \in X$ será dito não-singular se $\dim_k T_P X = \dim_P X$, onde $\dim_P X := \max\{\dim X_i \mid P \in X_i\}$. O ponto P será dito singular no outro caso.

Uma propriedade \mathcal{P} dos pontos de um fechado irredutível X é dita *genérica* se existir um aberto denso U de X tal que todos os pontos de U satisfazem a propriedade \mathcal{P} .

O Teorema 2.2.1 revela que a propriedade de um ponto ser não-singular em um fechado irredutível X é uma propriedade genérica dos pontos de X .

Seja X fechado afim e $P \in X$. Então $\mathfrak{m}_P := \{f \in k[X] \mid f(P) = 0\} \subset k[X]$ é um ideal maximal de $k[X]$. O localizado $\mathcal{O}_P := k[X]_{\mathfrak{m}_P} = \{\frac{f}{g} \mid f, g \in k[X], g \notin \mathfrak{m}_P\}$ com a regra de identificação $\frac{f}{g} = \frac{f_1}{g_1} \Leftrightarrow \exists h \notin \mathfrak{m}_P$ tal que $0 = h(fg_1 - f_1g)$, é dito o *anel local de X em P* . O ideal maximal de \mathcal{O}_P é $\mathfrak{m}_P \mathcal{O}_P$ que por abuso denotaremos também \mathfrak{m}_P , quando não houver confusão. Desde que $k[X]$ é noetheriano, é conhecido que \mathcal{O}_P também o é.

Se $X \subset \mathbb{P}^n$ é um fechado projetivo, definimos \mathcal{O}_P como sendo o conjunto dos quocientes de polinômios homogêneos de mesmo grau em $k[X^a]$ onde o denominador não se anula em P . Lembramos que X^a denota o cone afim associado.

Em ambos casos, quando X é irredutível, podemos realizar \mathcal{O}_P como um subanel do corpo de frações de X . Mais precisamente, \mathcal{O}_P é o anel das funções racionais em X que são regulares em P .

Teorema 2.2.2. *O espaço tangente $T_P X$ é isomorfo a $\mathfrak{m}_P / \mathfrak{m}_P^2$ como k -espaço vetorial.*

Prova:[Shafarevich, Ch. II, §1, Thm. 1+Thm. 2]. □

O Teorema 2.2.2 diz que o espaço tangente é um conceito local e, em consequên-

cia, podemos definir a noção de espaço tangente para variedades.

Dizemos que $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{O}_P$ são *parâmetros locais em P* se $u_i \in \mathfrak{m}_P$ e as imagens dos u_i formam uma base do espaço vetorial $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$. Note que se $\dim X = n$, então os Teoremas 2.2.1 e 2.2.2 implicam que existem n parâmetros locais em um ponto não-singular $P \in X$.

Teorema 2.2.3. *Seja X uma variedade e Y uma subvariedade. Seja P um ponto liso de X e de Y . Digamos que $\dim Y = m \leq n = \dim X$. Então existem parâmetros locais u_1, \dots, u_n de X em P e uma vizinhança U de P em X isomorfa a um fechado afim tais que $I(Y) = (u_1, \dots, u_{n-m})$ em $k[U]$.*

Prova:[Shafarevich, página 111]. □

2.3 Normalidade

Lembramos que um domínio de integridade A é dito *integralmente fechado* se todos os elementos de $K = \text{Frac}(A)$ que são inteiros sobre A estão em A .

Assim, um fechado afim irredutível X será dito *normal* se $k[X]$ for integralmente fechado. Um fechado projetivo irredutível será dito *normal* se cada um de seus pontos possuir uma vizinhança afim que é normal.

Como segue dos resultados abaixo, normalidade e não-singularidade são conceitos relacionados.

Uma *normalização de um fechado irredutível X* é um par (X^ν, ν) onde X^ν é um fechado irredutível normal e $\nu : X^\nu \rightarrow X$ é uma aplicação regular que é finita e possui inversa racional.

Teorema 2.3.1. *Se X é fechado irredutível afim, então X possui uma normalização (X^ν, ν) . Mais ainda, X^ν é também um fechado afim.*

Prova:[Shafarevich, página 129]. □

Teorema 2.3.2. *Sejam X, Y fechados.*

1. *Se $g : Y \rightarrow X$ é finita com inversa racional, existe uma aplicação regular $h : X^\nu \rightarrow Y$ tal que o seguinte diagrama comuta.*

$$\begin{array}{ccc} & X^\nu & \\ h \swarrow & & \searrow \nu \\ Y & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

2. *Se $g : Y \rightarrow X$ é dominante e Y é normal, então existe aplicação regular $h : Y \rightarrow X^\nu$ tal que o seguinte diagrama comuta.*

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ h \swarrow & & \searrow g \\ X^\nu & \xrightarrow{\nu} & X \end{array}$$

Prova:[Shafarevich, página 130]. □

Corolário 2.3.3. *A normalização de um fechado é única a menos de isomorfismos.*

Prova:[Shafarevich, página 131]. □

Tendo em mãos o conceito de normalidade, podemos apontar algumas outras propriedades de aplicações finitas.

Se $\phi : X \rightarrow Y$ é finita e dominante entre fechados irredutíveis de mesma dimensão, definimos $\deg \phi := [k(X) : \phi^*k(Y)]$, o grau da aplicação ϕ . Temos:

Teorema 2.3.4. *Se $\phi : X \rightarrow Y$ é finita e dominante entre fechados irredutíveis de mesma dimensão e Y é normal, então $\#\phi^{-1}(q) \leq \deg \phi$, para todo $q \in Y$.*

Prova:[Shafarevich, página 143]. □

A aplicação $\phi : X \rightarrow Y$ acima é dita *ramificada* em $q \in Y$ se $\#\phi^{-1}(q) < \deg \phi$. Nesse caso, $q \in Y$ é dito um *valor de ramificação* para ϕ .

Teorema 2.3.5. *O conjunto dos pontos onde uma aplicação finita e dominante $\phi : X \rightarrow Y$, com Y normal, não é ramificada é um aberto não-vazio de X .*

Prova:[Shafarevich, página 144]. □

2.4 Curvas Projetivas

Nesta seção C representa uma curva projetiva lisa e irredutível. Lembramos que

$$\mathcal{O}_P = \mathcal{O}_{C,P} = \{\varphi \in k(C) \mid \varphi \text{ é regular em } P\}$$

é o anel local de C em $P \in C$ e que seu ideal maximal é

$$\mathfrak{m}_P = \mathfrak{m}_{C,P} = \{\varphi \in \mathcal{O}_P \mid \varphi(P) = 0\}$$

Como C é lisa, segue dos Teoremas 2.2.1 e 2.2.2 que

$$\dim_k \mathfrak{m}_P / \mathfrak{m}_P^2 = \dim C = 1$$

Pelo Lema de Nakayama (ver [Atiyah-Macdonald, página 22]) obtemos que \mathfrak{m}_P é um ideal principal, digamos $\mathfrak{m}_P = (t) = t \cdot \mathcal{O}_P$.

É fácil ver que a cadeia

$$\mathfrak{m}_P \supsetneq \mathfrak{m}_P^2 \supsetneq \dots \supsetneq \mathfrak{m}_P^r \supsetneq \mathfrak{m}_P^{r+1} \supsetneq \dots$$

é estritamente decrescente. Temos o seguinte:

Lema 2.4.1.

$$\bigcap_{r=0}^{\infty} \mathfrak{m}_P^r = \{0\}$$

Prova:[Hulek, página 168]. □

Em vista do Lema 2.4.1, dado $\varphi \in \mathcal{O}_P \setminus \{0\}$, denotamos

$$\nu_P(\varphi) := \max\{r \mid \varphi \in \mathfrak{m}_P^r\} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

Observe que φ se anula em P se, e somente se, $\nu_P(\varphi) \geq 1$. Por esta razão $\nu_P(\varphi)$ é dita a *multiplicidade* de φ em P . Estendemos a aplicação $\nu_P : \mathcal{O}_P \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ao corpo $k(C)$ da forma seguinte: se $\varphi \in k(C)$, escrevemos $\varphi = \varphi_1/\varphi_2$, com $\varphi_i \in \mathcal{O}_P$ e definimos

$$\nu_P(\varphi) := \nu_P(\varphi_1) - \nu_P(\varphi_2).$$

Obtemos uma função sobrejetiva $\nu_P : k(C)^* \rightarrow \mathbb{Z}$ que satisfaz

1. $\nu_P(\varphi \cdot \psi) = \nu_P(\varphi) + \nu_P(\psi)$;
2. $\nu_P(\varphi + \psi) \geq \min\{\nu_P(\varphi), \nu_P(\psi)\}$

Além disso o anel \mathcal{O}_P e seu ideal maximal podem ser recuperados como

$$\mathcal{O}_P = \{\varphi \in k(C) \mid \nu_P(\varphi) \geq 0\} \cup \{0\}, \mathfrak{m}_P = \{\varphi \in k(C) \mid \nu_P(\varphi) > 0\} \cup \{0\}.$$

Convencionamos $\nu_P(0) := \infty$ para escrever $\nu_P : k(C) \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$.

Condensamos as informações acima dizendo que \mathcal{O}_P é um *anel de valorização discreta* do corpo $k(C)$. Para mais detalhes referimos a [Atiyah-Macdonald, capítulo 9].

Proposição 2.4.2. *Seja C uma curva projetiva. Então C é lisa se e somente se C é normal.*

Prova [Atiyah-Macdonald, Prop. 5.13 + Prop. 9.2]. □

Proposição 2.4.3. *Sejam C, D curvas lisas projetivas. Então toda aplicação racional $\phi : C \dashrightarrow D$ é um morfismo, isto é, $\text{dom}(\phi) = C$.*

Prova: É suficiente considerar uma aplicação racional $\phi : C \dashrightarrow \mathbb{P}^n$. Seja $P \in C$. Vamos mostrar que P é regular para ϕ . Escreva $\phi = (f_0 : \dots : f_n)$, onde cada $f_i \in k(C)^*$. Então temos $f_i = t^{r_i} g_i$, onde $\mathfrak{m}_P = (t)$ e $r_i = \nu_P(f_i)$, de modo que $g_i(P) \neq 0, \forall i$. Se $r_j = \min\{r_i\}$ então temos uma representação de $\phi = (g_0 t^{r_0-r_j} : \dots : g_j : \dots : g_n t^{r_n-r_j})$ que é regular em P , já que $g_j(P) \neq 0$. \square

Corolário 2.4.4. *Duas curvas projetivas lisas C e D são birracionalmente equivalentes se e somente se são isomorfas.*

Prova: As aplicações racionais $\phi : C \dashrightarrow D$ e $\phi^{-1} : D \dashrightarrow C$ são morfismos, pela Proposição 2.4.3. \square

2.5 Curvas Planas

Uma *curva plana afim* é uma hipersuperfície $V(f) \subset \mathbb{A}^2$, onde $f \in k[x, y]$ é polinômio sem fatores múltiplos. Uma *curva plana projetiva* é uma hipersuperfície $V(F) \subset \mathbb{P}^2$, onde $F \in k[x, y, z]$ é homogêneo sem fatores múltiplos. A curva é dita *curva de grau m* se o polinômio que a define possui grau m . Se $m = 1, 2, 3, 4, \dots$ a curva será dita *reta, cônica, cúbica, quártica, ...*, respectivamente.

Observe que partindo de uma curva projetiva $V(F)$, podemos chegar a uma curva afim $V(f)$, simplesmente considerando o polinômio $f(x, y) := F(x, y, 1)$. Esta será dita a *peça afim $z = 1$* da curva $V(F)$. Se z não é fator de F , partimos da curva afim $V(f)$ e acrescentamos os pontos (em número finito!) $(a : b : 0)$ tais que $F(a, b, 0) = 0$ e obtemos a curva projetiva. As peças $x = 1$ e $y = 1$ são obtidas de maneira semelhante.

Reciprocamente, dada uma curva afim $V(f)$ de grau m , encontramos uma curva projetiva considerando o polinômio homogêneo $F(x, y, z) := z^m \cdot f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$.

Lema 2.5.1. *Sejam $f, g \in k[x, y]$, de graus positivos. O conjunto $V(f) \cap V(g)$ é finito se e somente se f e g não possuem fator comum com grau positivo.*

Prova: Se h não é constante e divide f e g , então $V(h) \subset V(f) \cap V(g)$. Como k é algebricamente fechado, $\#V(h) = \infty$. Reciprocamente, se f, g não possuem divisor comum em $k[x, y]$ então o *Lema de Gauss* (ver [Garcia-Lequain, página 54]) garante que o mesmo vale em $A := k(x)[y]$. Como A é um domínio de ideais principais, existem $a, b \in A$ tais que $1 = af + bg$. Limpando denominadores podemos reescrever esta equação como $r = af + bg$, onde agora $a, b \in k[x, y]$ e $0 \neq r \in k[x]$. Deste modo, $(u, v) \in V(f) \cap V(g)$ implica $r(u) = 0$. Logo, as abscissas de pontos de $V(f) \cap V(g)$ formam conjunto finito. Procedemos analogamente para as ordenadas. \square

O Lema 2.5.1 possui uma versão projetiva, donde segue(lembramos que $k = \mathbb{C}$ é algebricamente fechado):

Corolário 2.5.2. *Se $F, G \in k[x, y, z]$ são homogêneos e não constantes, então $V(F) \subseteq V(G)$, com F irredutível, implica $F|G$.*

Prova: Se F é irredutível e F não divide G então F e G não possuem fator comum. Logo $V(F) \cap V(G)$ é finito, donde $V(F) \not\subseteq V(G)$. \square

Corolário 2.5.3. *Sejam F, G irredutíveis e homogêneos. Então $V(F) = V(G)$ se e somente se $F = \lambda G$, algum $\lambda \in k$.*

\square

Passamos a investigar interseção de duas curvas. Dados dois polinômios $f, g \in k[x, y]$, estamos interessados em descobrir os pontos $(a, b) \in \mathbb{A}^2$ tais que $f(a, b) = g(a, b) = 0$. Uma estratégia é fixar uma abscissa. Assim, perguntamos pelos elementos $a \in k$ tais que os polinômios de uma variável $f(a, y)$ e $g(a, y)$ possuem raiz comum. Reformulando: Quando $f, g \in k[y]$ possuem raiz comum?

Se $b \in k$ é raiz comum de f e g então $y - b$ divide ambos. Reciprocamente, se f e g possuem um divisor comum h , não constante, então todas as raízes de h , que são elementos em k pela hipótese $k = \bar{k}$, são raízes comuns de f e g . Reformulando novamente: Quando f e g possuem fator comum? Esqueçamos por agora a hipótese $k = \bar{k}$.

solução não trivial em K^{n+m} se e somente se $R_{f,g} = 0$. Se este for o caso, recuperamos uma solução em A^{n+m} do mesmo sistema, bastando para isso limpar os denominadores. Em suma, o enunciado da Proposição 2.5.5 continua válido com um domínio A no lugar de k .

Lema 2.5.6. *Sejam $f = \sum_{i=0}^m a_i y^{m-i}$ e $g = \sum_{i=0}^n b_i y^{n-i} \in A[y]$, $a_0 b_0 \neq 0$. Então $R_{f,g}$ é uma soma de termos do tipo $\pm a_{i_1} \cdots a_{i_m} b_{j_1} \cdots b_{j_n}$, com $i_1 + \cdots + i_m + j_1 + \cdots + j_n = m \cdot n$.*

Prova: [Garcia-Lequain, página 80]. □

Proposição 2.5.7. *Sejam $f = \sum_{i=0}^m a_i y^{m-i}$ com grau m e $f' = \sum_{i=0}^{m-1} (m-i) a_i y^{m-i-1}$ sua derivada, polinômios em $A[y]$, onde A é domínio. Suponha que o grau de f' é $m-1$. Considere as raízes $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ de f no fecho algébrico de $\text{Frac}(A)$. Então $R_{f,f'} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot a_0 \cdot \Delta_f$, onde Δ_f é o discriminante de f , definido no primeiro capítulo.*

Prova: [Garcia-Lequain, página 85]. □

Seja $T : k^3 \rightarrow k^3$ um isomorfismo de espaços vetoriais. Então T induz uma transformação bijetiva $\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ que por abuso continuaremos chamando de T . Tal transformação $T : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ é dita uma *projetividade*, ou *mudança de coordenadas projetivas* em \mathbb{P}^2 .

Se $T : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ é uma projetividade então T induz um isomorfismo $T_\bullet : k[x, y, z] \rightarrow k[x, y, z]$ tal que para todo ponto $(a, b, c) \in k^3$ e todo polinômio $f \in k[x, y, z]$ temos

$$(T_\bullet f)(a, b, c) = f(T^{-1}(a, b, c))$$

Teorema 2.5.8. *Dados polinômios homogêneos e não constantes $F, G \in k[x, y, z]$ e um ponto $P \in \mathbb{P}^2$ existe um único $I_P(F, G) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, chamado multiplicidade de interseção de F e G em P . Ele satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $I_P(F, G) = 0 \Leftrightarrow P \notin V(F) \cap V(G)$;
2. $I_P(F, G) = \infty \Leftrightarrow P \in V(H)$ onde H divide F e G ;
3. $I_P(F, G)$ é invariante por projetividades;
4. $I_P(x, y) = 1$, onde $P = (0 : 0 : 1)$;
5. $I_P(F, G + HF) = I_P(F, G)$, $\forall H \in k[x, y, z]$ homogêneo com $\deg H = \deg G - \deg F$;
6. $I_P(F, GH) = I_P(F, G) + I_P(F, H)$.

Prova:[Fulton, página 52]. □

Sejam $V(F)$ e $V(G)$ duas curvas planas projetivas, onde F e G não possuem fator comum, e $P_1 = (a_1 : b_1 : c_1), \dots, P_r = (a_r : b_r : c_r)$ os pontos distintos de $V(F) \cap V(G)$. As curvas $V(F)$ e $V(G)$ são ditas *muito bem posicionadas* se $P_0 = (0 : 1 : 0) \notin V(F) \cap V(G)$ e se para cada par $P_i, P_j \in V(F) \cap V(G)$ com $i \neq j$ os pontos P_0, P_i, P_j não são colineares. Se este for o caso, então a resultante de F, G com respeito a y escreve-se na forma

$$R(x, z) = c \prod_{i=1}^r (c_i x - a_i z)^{m_i}$$

onde $c \in k^*$ e $m_i = \text{ord}_{(a_i:c_i)} R(x, z)$.

Teorema 2.5.9. *A multiplicidade de interseção de F e G em P é dada por*

$$I_P(F, G) = \dim_k \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2, P} / (F, G) = \text{ord}_{(a:c)} R_{T \bullet F, T \bullet G}$$

onde $T : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ é uma projetividade tal que $V(T \bullet F)$ e $V(T \bullet G)$ estejam muito bem posicionadas e $TP = (a : b : c)$.

Prova:A primeira igualdade está em [Fulton, página 52] e a segunda igualdade segue da discussão em [Vainsencher, páginas 62-67]. □

Desde que $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2, P}/(F, G) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2, P}/(f, g)$, onde f, g são as desomogenizações de F, G respectivamente e \mathbb{A}^2 é uma peça afim de \mathbb{P}^2 tal que $P \in \mathbb{A}^2$, então a multiplicidade de interseção de curvas projetivas pode ser obtida de curvas afins.

Corolário 2.5.10. *Se $P = (a, b)$, então $I_P(f, y - b) = \text{ord}_a f(x, b)$.*

Prova: Sejam $f = f_0 + f_1 + \dots + f_d$ decomposição em polinômios homogêneos e $r = \text{ord}_a f(x, b)$. Então $f(x, b) = (x - a)^r \cdot \ell(x)$, onde $\ell(a) \neq 0$. Como $f(x, y) = f(x, b) + (y - b) \cdot h(x, y)$, onde $(y - b) \cdot h(x, y) = \sum_{i=1}^d (f_i(x, y) - f_i(x, b))$, então $I_P(f, y - b) = I_P(y - b, f) = I_P(y - b, f(x, b)) = r \cdot I_P(y - b, x - a) + I_P(y - b, \ell(x)) = r \cdot 1 + 0 = r$. □

O seguinte é um resultado central na teoria de curvas planas:

Teorema 2.5.11 (Teorema de Bézout). *Sejam $V(F), V(G) \subset \mathbb{P}_k^2$ curvas planas projetivas de graus m, n respectivamente e sem componentes em comum. Se k é algebricamente fechado então*

$$\sum_{P \in \mathbb{P}_k^2} I_P(F, G) = m \cdot n$$

Prova: [Fulton, página 74]. □

Seja $P = (a, b) \in \mathbb{A}^2$ e $f = f_0 + f_1 + \dots + f_d \in k[x, y]$ com cada f_i homogêneo de grau i em $x - a, y - b$ com $\deg f = d$. O menor inteiro m tal que $f_m \neq 0$ é dito a *multiplicidade de $V(f)$ em P* e denotado $m_P(V(f))$. Observe que $P \in V(f) \Leftrightarrow m > 0$ e que P é singular em $V(f) \Leftrightarrow m > 1$.

Se $f_m \neq 0$ temos que $f_m = \prod_{j=1}^r (\ell_j)^{n_j}$, onde os ℓ_j são fatores lineares homogêneos. As retas $V(\ell_j)$ são ditas as *retas tangentes de $V(f)$ em P* e os expoentes n_j são suas *multiplicidades*. O seguinte resultado dá uma caracterização das retas tangentes em termos do índice de interseção:

Proposição 2.5.12. *Sejam $m = m_P(V(f))$ e $V(\ell)$ reta por P . Então $I_P(f, \ell) > m$*

se $V(\ell)$ é tangente de $V(f)$ em P ; $I_P(f, \ell) = m$ se $V(\ell)$ não é tangente de $V(f)$ por P .

Prova: [Vainsencher, página 36]. □

Um ponto não-singular de $V(f)$ é dito *ponto de inflexão* se $I_P(f, \ell) \geq 3$, onde $V(\ell)$ é a reta tangente de $V(f)$ em P . Tal ponto é dito $(n - 2)$ -flex se $I_P(f, \ell) = n$. Suponhamos que $V(f)$ é a parte $z \neq 0$ da curva $V(F) \subset \mathbb{P}^2$. A *curva hessiana* de

$V(F)$ é a curva em \mathbb{P}^2 dada por $V(H_F)$, onde $H_F := \det \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{pmatrix}$

O resultado seguinte mostra a relação entre a Hessiana e os pontos de inflexão:

Teorema 2.5.13. *Seja $V(F)$ uma curva plana, projetiva, irredutível de grau $d \geq 2$. Então um ponto não-singular de $V(F)$ é um n -flex se e somente se $I_P(F, H_F) = n$.*

Prova: [Brieskorn-Knörrer, página 289]. □

Apelando à definição da multiplicidade de interseção e ao Teorema 2.5.11, obtemos o seguinte:

Corolário 2.5.14. *Uma curva plana lisa projetiva de grau $d \geq 2$ tem $3d(d - 2)$ pontos de inflexão, contando multiplicidades.*

Prova: [Brieskorn-Knörrer, página 291]. □

Capítulo 3

Superfícies de Riemann

Uma Superfície de Riemann é um conjunto que pode ser visto localmente como um aberto do plano complexo. Nesta seção faremos uma breve introdução a este conceito, daremos alguns exemplos e estudaremos algumas propriedades das aplicações holomorfas entre Superfícies de Riemann. A referência principal deste capítulo é [Miranda, Ch. I, II].

3.1 Definições

Seja X um espaço topológico. Uma *carta complexa em X* é um homeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$, onde U e V são abertos de X e \mathbb{C} , respectivamente. Diremos que ϕ é *centrada em $p \in U$* se $\phi(p) = 0$. É conveniente pensar que uma carta complexa (que chamaremos somente carta, daqui em diante) estabelece um sistema de coordenadas complexas no seu domínio de definição, a saber, $z = \phi(x)$, $x \in U$.

Duas cartas $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ e $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ em X são ditas *compatíveis* se $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ou $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2)$ é função (complexa) holomorfa. Nesse caso, sabemos da teoria de funções holomorfas que $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ é também holomorfa, de forma que ser compatível define relação de equivalência no conjunto das cartas

em X . A função complexa $T := \phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ é chamada *função de transição* entre as cartas. É claro então que a derivada T' não se anula.

Se desejamos tratar X como um aberto do plano numa vizinhança de cada um de seus pontos o conceito adequado é o seguinte. Um *atlas em X* é uma coleção $\mathcal{A} = \{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha\}$ de cartas em X , duas a duas compatíveis e tais que $X = \bigcup_{\alpha} U_\alpha$. No conjunto dos atlas de X definimos relação de ordem parcial $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$ se e somente se para cada carta ϕ em \mathcal{A} existe carta ψ em \mathcal{B} tal que ψ estende ϕ . Um argumento usando o Lema de Zorn mostra que cada atlas de X está contido em um atlas maximal com respeito à ordem anterior. Um tal atlas maximal é dito uma *estrutura complexa* para X .

Diremos então que X é uma *Superfície de Riemann* se for um espaço topológico satisfazendo o *segundo axioma de enumerabilidade*, *Hausdorff*, conexo e munido de uma estrutura complexa \mathcal{A} .

3.2 Exemplos

A partir de agora daremos alguns exemplos simples e particularmente úteis para o nosso estudo.

1. O plano \mathbb{C} e qualquer aberto conexo $V \subset \mathbb{C}$ são exemplos óbvios de Superfícies de Riemann, pois em cada ponto as cartas podem ser tomadas como $z \mapsto z$.
2. Gráficos de Funções Holomorfas

Seja $V \subset \mathbb{C}$ um aberto conexo e g uma função holomorfa definida em V . Consideramos $X \subset \mathbb{C}^2$ dado por

$$X = \{(z, g(z)) \mid z \in V\}$$

Equipando X com a topologia induzida pela topologia de \mathbb{C}^2 , a projeção $\pi : X \rightarrow V$, $(z, g(z)) \mapsto z$ é então um homeomorfismo com inversa $z \mapsto (z, g(z))$.

Então π é uma carta cujo domínio é X . Vemos então que X é Superfície de Riemann e π é um atlas para X composto de uma única carta. Este exemplo imediatamente se generaliza para um conjunto finito g_1, \dots, g_n de funções holomorfas. Basta tomar

$$X = \{(z, g_1(z), \dots, g_n(z)) \mid z \in V\}.$$

3. Curvas Projetivas Lisas

Veamos que se $C \subset \mathbb{P}^n$ é uma curva lisa projetiva irredutível, então C é uma Superfície de Riemann. Seja $\alpha = (1 : a_1 : \dots : a_n) \in C \cap \mathbb{A}_0^n$. Temos $\mathbb{A}_0^n \simeq \mathbb{C}^n$. Vimos no Teorema 2.2.3 que numa vizinhança U_0 do ponto $a = (a_1, \dots, a_n) \in C$, existem $n - 1$ equações que definem C , digamos f_1^0, \dots, f_{n-1}^0 . Como C é lisa em a , a matriz Jacobiana da aplicação $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1^0(x), \dots, f_{n-1}^0(x))$ tem posto $n - 1$ em a ; sem perda da generalidade suporemos

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1^0}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1^0}{\partial x_{n-1}} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_{n-1}^0}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_{n-1}^0}{\partial x_{n-1}} \end{vmatrix} (a) \neq 0.$$

Seja $\psi_0 : U_0 \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ que faz

$$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1^0(x), \dots, f_{n-1}^0(x), x_n - a_n)$$

Então $\psi_0(a) = (0, \dots, 0, 0)$ e a diferencial $d\psi_0(a) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ de ψ_0 em a é isomorfismo. Logo, pelo Teorema da Função Inversa (ver [Lima]) existem abertos U'_0, V_0, W_0 com $a \in U'_0 \subset U_0$, $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in V_0 \subset \mathbb{C}^{n-1}$ e $a_n \in W_0 \subset \mathbb{C}$ tais que a restrição de ψ_0 a U'_0 induz um difeomorfismo holomorfo de U'_0 em $V_0 \times W_0 \subset \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$, que continuaremos denotando ψ_0 . Por construção, $\psi_0(U'_0 \cap C) = \{(0, \dots, 0)\} \times W_0$ e $\psi_0(a) = (0, \dots, 0)$. Se $p_n : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ é a projeção canônica $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_n$, denotamos $\phi_a = p_n \circ \psi_0 : U_a \rightarrow W_a$, onde $U_a := U'_0 \cap C$ e $W_a = W_0$.

A família $\mathcal{A} := \{(U_a, \phi_a); a \in C\}$ é um atlas compatível para C : com efeito, dados $\phi_a : U_a \rightarrow W_a, \phi_b : U_b \rightarrow W_b$, com $U_a \cap U_b \neq \emptyset$, sabemos que $\phi_a = p_n \circ \psi_1$ e $\phi_b = p_n \circ \psi_2$ onde ψ_1 e ψ_2 são difeomorfismos holomorfos entre abertos de \mathbb{C}^n . Portanto $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ é um difeomorfismo holomorfo entre as vizinhanças (em \mathbb{C}^n) da origem $\psi_1(U_a \cap U_b)$ e $\psi_2(U_a \cap U_b)$ tais que $\psi_1(U_a \cap U_b) \cap \{(0, \dots, 0)\} \times W_a$ é enviado sobre $\psi_2(U_a \cap U_b) \cap \{(0, \dots, 0)\} \times W_b$. Concluimos que $\phi_b \circ \phi_a^{-1}$ é holomorfa no seu domínio de definição. A afirmação segue por simetria.

Observação 3.2.1. *Com as notações do exemplo acima observamos que a função $x_n - a_n : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ define um parâmetro local para $C \cap \mathbb{A}_0^n$ em a . Com efeito, suponhamos que não; por simplicidade tomemos $a = (0, \dots, 0)$. Então a restrição de x_n a C é um elemento de $\mathfrak{m}_{C,0}^2$, isto é $x_n = \sum_{i,j} \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k f_k^0$, para certos $\beta_{ij}, \gamma_k \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Substituindo x_n por essa expressão em ψ_0 acima e recalculando sua matriz Jacobiana na origem, vemos que a última linha desta é combinação linear das demais: contradição.*

3.3 Funções e Aplicações

Seja X uma Superfície de Riemann e $p \in X$. Uma função f definida em uma vizinhança $W \ni p$ que toma valores complexos é dita *holomorfa em p* se existir uma carta $\phi : U \rightarrow V$ com $p \in U$ tal que a composição $f \circ \phi^{-1}$ é holomorfa em $\phi(p)$. f será dita *holomorfa em um aberto $W \subset X$* se o for em cada ponto de W .

Se Y é outra Superfície de Riemann, uma aplicação $F : X \rightarrow Y$ é dita *holomorfa em $p \in X$* se existirem cartas $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ e $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$, em p e $F(p)$ respectivamente, tais que $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ é holomorfa em $\phi_1(p)$. F é dita holomorfa em um aberto $W \subset X$ se o for em cada ponto de W .

Em ambas definições acima a aparente dependência da escolha de cartas de fato não existe: se f é função holomorfa em p , suponha que ϕ_1 e ϕ_2 são cartas em p . Digamos que $f \circ \phi_1^{-1}$ é holomorfa em $\phi_1(p)$. Precisamos verificar que $f \circ \phi_2^{-1}$ é

holomorfa em $\phi_2(p)$. Ora, $f \circ \phi_2^{-1} = (f \circ \phi_1^{-1}) \circ (\phi_1 \circ \phi_2^{-1})$, composição de holomorfas donde segue o resultado. Um argumento muito parecido (conjugação por transições entre cartas) mostra que a independência da escolha de coordenadas vale também para aplicações holomorfas.

Note que se $F : X \rightarrow Y = \mathbb{C}$ é aplicação holomorfa então F é de fato uma função holomorfa.

O seguinte Lema, que é consequência direta das definições, diz algumas propriedades das aplicações holomorfas.

Lema 3.3.1. *Temos as seguintes propriedades:*

1. *Uma aplicação holomorfa é contínua.*
2. *A composição de aplicações holomorfas é ainda holomorfa.*

□

Muitos dos resultados existentes a respeito de aplicações holomorfas são consequência de resultados conhecidos para funções holomorfas complexas. Abaixo enumeramos alguns destes que serão úteis, sendo que para as demonstrações omitidas referimos a [Miranda, Ch. II].

Proposição 3.3.2 (Teorema da Aplicação Aberta). *Seja $F : X \rightarrow Y$ aplicação holomorfa não constante entre superfícies de Riemann. Então F é aberta, isto é, a imagem de um aberto de X é um aberto de Y .*

□

Proposição 3.3.3. *Seja X superfície de Riemann compacta e $F : X \rightarrow Y$ aplicação holomorfa não constante entre superfícies de Riemann. Então Y é compacta e F é sobrejetiva.*

Prova: Como F é holomorfa e X é aberto em si mesmo, $F(X)$ é aberto em Y , pela proposição anterior. Por outro lado, como F é contínua e X é compacto, $F(X)$ também é compacto. Como Y é Hausdorff, então $F(X)$ é fechado. Logo $F(X)$ é fechado e aberto de Y , que é conexo. Logo $F(X) = Y$. \square

Proposição 3.3.4. *Seja $F : X \rightarrow Y$ aplicação holomorfa não constante entre superfícies de Riemann. Para cada $y \in Y$ o conjunto $F^{-1}(y)$ é subconjunto discreto de X . Em particular, se X for compacto, $F^{-1}(y)$ é finito e não vazio, $\forall y \in Y$.*

Prova: Seja $x \in F^{-1}(y)$. Podemos escolher coordenadas locais w e z centradas em x e y respectivamente. Em termos destas coordenadas a aplicação F se escreve $z = g(w)$ e satisfaz $g(0) = 0$, onde g é aplicação holomorfa não constante (pela hipótese sobre F). Como o conjunto de zeros de uma função holomorfa não nula é discreto (ver, por exemplo, [Ahlfors]), provamos assim a primeira afirmação a respeito de $F^{-1}(y)$.

Para a segunda parte usamos que subconjuntos discretos de um compacto são finitos, juntamente com 3.3.3. \square

Quando f é função holomorfa em $p \in X$, podemos tomar carta $\phi : U \rightarrow V$ em $p \in U$, digamos $z = \phi(x)$, $x \in U$ tal que $f \circ \phi^{-1}$ é holomorfa em $z_0 = \phi(p)$. Assim, podemos expandir $f \circ \phi^{-1}$ em uma série de Taylor centrada em z_0 , digamos

$$(f \circ \phi^{-1})(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n$$

Esta série é dita a *série de Taylor de f em p com respeito a ϕ* . Como é bastante razoável, os coeficientes c_n dependem da carta ϕ escolhida. Se $f \circ \phi^{-1}$ é não nula, existe um $n_0 \geq 0$ mínimo tal que $c_{n_0} \neq 0$. Temos:

Proposição 3.3.5. *O inteiro n_0 acima depende somente da função f e do ponto p , e não da carta ϕ escolhida.*

Prova: Sejam $\phi : U \rightarrow V$, $\psi : U' \rightarrow V'$ cartas em p . Digamos $\phi(x) = z$ e

$\psi(x) = w$ para $x \in U \cap U'$, $\phi(p) = z_0$ e $\psi(p) = w_0$. Considerando a série de Taylor da função de transição $T = \phi \circ \psi^{-1}$ que expressa z em termos de w temos

$$z = T(w) = z_0 + \sum_{k \geq 1} a_k (w - w_0)^k, \quad a_1 \neq 0$$

Sendo

$$(f \circ \phi^{-1})(z) = \sum_{n \geq n_0} c_n (z - z_0)^n$$

$c_{n_0} \neq 0$, temos

$$\begin{aligned} (f \circ \psi^{-1})(w) &= (f \circ \psi^{-1})(T^{-1}(z)) \\ &= f \circ \phi^{-1}(z) = \sum_{n \geq n_0} c_n (T(w) - z_0)^n \\ &= \sum_{n \geq n_0} c_n \left(\sum_{k \geq 1} a_k (w - w_0)^k \right)^n \\ &= c_{n_0} a_1^{n_0} (w - w_0)^{n_0} + \dots \end{aligned}$$

Isto prova a afirmação, já que c_{n_0} e a_1 não são nulos. □

O inteiro n_0 acima é dito *a ordem de f no ponto p* .

O resultado seguinte a respeito de aplicações holomorfas é simples e interessante. Apesar de sua natureza local, ele será utilizado para mostrar um resultado global a respeito de aplicações holomorfas entre superfícies de Riemann compactas.

Teorema 3.3.6 (Forma Normal Local). *Seja $F : X \rightarrow Y$ aplicação não constante entre superfícies de Riemann e holomorfa em $p \in X$. Existe um único inteiro $e_p(F) = e \geq 1$ satisfazendo a seguinte propriedade: para cada carta $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ em Y centrada em $F(p)$, existe uma carta $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ em X centrada em p tal que $\phi_2(F(\phi_1^{-1}(z))) = z^e$.*

Prova: Escolha uma carta ϕ_2 em Y centrada em $F(p)$ e qualquer carta $\psi : U \rightarrow V$ em X , centrada em p . A série de Taylor da função holomorfa $T = \phi_2 \circ F \circ \psi^{-1}$ tem a forma

$$T(w) = \sum_{i=e}^{\infty} c_i w^i$$

onde $c_e \neq 0$ e $e \geq 1$, desde que $T(0) = 0$. Logo, temos $T(w) = w^e S(w)$, onde S é uma função holomorfa em $w = 0$ e $S(0) \neq 0$. Portanto, existe uma função R holomorfa em 0 tal que $R(w)^e = S(w)$, donde $T(w) = (wR(w))^e$. Seja $\eta(w) := wR(w)$. Então η é holomorfa e como $\eta'(0) = R(0) \neq 0$, obtemos que (pelo Teorema da Função Implícita) que η é invertível numa vizinhança de 0 . Então $\phi_1 := \eta \circ \psi$ é também uma carta em X , definida e centrada em p . Se pensamos η definindo uma nova coordenada z (via $z = \eta(w)$) temos imediatamente que z e w se relacionam por $z = wR(w)$. Logo

$$\phi_2(F(\phi_1^{-1}(z))) = \phi_2(F(\psi^{-1}(\eta^{-1}(z)))) = T(\eta^{-1}(z)) = T(w) = (wR(w))^e = z^e$$

A unicidade do inteiro e segue de que se existem coordenadas locais tais que F tem a forma $z \mapsto z^e$ próximo a p , então existem exatas e pré-imagens de pontos próximos a $F(p)$. Este último fato certamente independe das cartas escolhidas. \square

O resultado acima motiva definir a *multiplicidade de F em p* como sendo $e_p(F)$. Um ponto $p \in X$ tal que $e_p(F) \geq 2$ será dito *ponto de ramificação de $F : X \rightarrow Y$* . Um ponto $q \in Y$ será dito um *valor de ramificação de F* se for imagem de um ponto de ramificação de F .

Damos alguns exemplos; o segundo destes será útil adiante.

Exemplos 3.3.7 (Projeções).

1. Se $X = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y = x^2\}$ e $F : X \rightarrow \mathbb{C}$ é dada por $(x, y) \mapsto y$, então $e_{(0,0)}(F) = 2$ e $e_p(F) = 1, \forall p \neq (0, 0)$. Em particular, $0 \in \mathbb{C}$ é o único valor de ramificação de F .
2. Se $C = V(f, g) \subset \mathbb{A}^3$ é uma curva lisa, onde $f \in k[x, y] \subset k[x, y, z]$ e $g \in k[y, z] \subset k[x, y, z]$, considere a aplicação projeção $\pi : C \rightarrow V(f)$ definida

por $(x, y, z) \mapsto (x, y)$. Então um ponto (α, β, γ) é ponto de ramificação se e somente se $f(\alpha, \beta) = g(\beta, \gamma) = \frac{\partial g}{\partial z}(\beta, \gamma) = 0$. Se este for o caso, $\#\pi^{-1}(\alpha, \beta) < \deg_z g$.

Existe uma maneira simples de calcular a multiplicidade da aplicação F em um ponto p sem a necessidade de tomar cartas centradas, como foi feito na prova do Teorema 3.3.6. Tome *quaisquer* coordenadas z numa vizinhança de p e w numa vizinhança de $F(p)$. Digamos que $p \mapsto z_0$ e $F(p) \mapsto w_0$ por estas cartas. Então F se escreve em termos dessas coordenadas na forma $w = h(z)$, com h holomorfa. É claro então que $w_0 = h(z_0)$.

Lema 3.3.8. *Com a notação acima, temos $e_p(F) = 1 + \text{ord}_{z_0} h'(z)$. Em particular, $e_p(F)$ é o menor expoente estritamente positivo que aparece na expansão de Taylor centrada em z_0 para h .*

Prova: Vimos na prova do Teorema 3.3.6 que a multiplicidade $e_p(F)$ é o menor inteiro que aparece na série de potências de T com coordenadas locais centradas em p e $F(p)$. Se z_0, w_0 como acima, então $z - z_0$ e $w - w_0$ são essas coordenadas. Como $w - w_0 = h(z) - h(z_0)$, vemos que a multiplicidade de F em p é o menor expoente que aparece na expansão de $h(z) - h(z_0)$ em $z = z_0$. Podemos derivar esta série termo a termo para concluir que este expoente é um a mais que a ordem de anulação de h' em z_0 . \square

O lema acima mostra, em particular, que o conjunto dos pontos de ramificação é um conjunto discreto. De fato, tais pontos correspondem a zeros da derivada de uma função holomorfa, ou seja, a zeros de uma função holomorfa. Em consequência disto, os valores de ramificação também formam um subconjunto discreto do contradomínio.

Um resultado muito importante sobre aplicações holomorfas entre superfícies de Riemann compactas é o seguinte

Teorema 3.3.9. *Seja $F : X \rightarrow Y$ aplicação holomorfa e não constante entre*

superfícies de Riemann compactas. Para $q \in Y$ considere o inteiro

$$d_q(F) = \sum_{p \in F^{-1}(q)} e_p(F)$$

Então $d_q(F)$ independe da escolha de q .

Prova: Mostraremos que a função $Y \rightarrow \mathbb{Z}$ que faz $q \mapsto d_q(F)$ é localmente constante, isto é, em torno de cada ponto $y \in Y$ existe um aberto no qual esta função é constante igual a $d_y(F)$. Como Y é conexo, isso já justifica a afirmação do enunciado.

Seja $q \in Y$ e seja $F^{-1}(q) = \{p_1, \dots, p_n\}$. Tomando coordenada local w em Y centrada em q podemos obter coordenadas locais z_i em X centradas em p_i tais que $w = z_i^{m_i}$, onde $m_i = e_{p_i}(F)$, $\forall i = 1, \dots, n$. Logo, $d_q(F) = m_1 + \dots + m_n$. Note que as aplicações $f_i : D_1^{(i)}(0) \rightarrow D_1(0)$, $z_i \mapsto z_i^{m_i}$ satisfazem a condição de constância desejada, isto é, cada ponto em $u \in D_1(0)$ satisfaz $d_u(f_i) = m_i$. Verificaremos que arbitrariamente próximo a q não existem pontos com pré-imagens por F fora das vizinhanças V_i de p_i correspondentes a $D_1^{(i)}(0)$ então acabamos a demonstração. Aqui é onde usaremos a compacidade de X .

Por absurdo, suponhamos que arbitrariamente próximo a q possamos encontrar pontos com pré-imagens por F fora das vizinhanças V_i de p_i . Assim, encontramos seqüência $\{x_j\}$ de pontos em X , todos fora das vizinhanças V_i . Como X é compacto, existe subseqüência $\{x'_j\}$ convergente, digamos a $p \in X$. Então a seqüência $\{F(x'_j)\}$ converge a $q \in Y$. Pela continuidade de F obtemos que $F(p) = q$, donde $p = p_i$, algum i . Mas isto contradiz que todos os x_j estão fora de V_i . \square

Nas hipóteses do Teorema acima fica bem definido $deg(F) := d_q(F)$ o grau da aplicação $F : X \rightarrow Y$, $\forall q \in Y$. Observe que no caso em que X, Y são curvas projetivas lisas irredutíveis e F é finita e dominante, concluímos pelo Teorema 2.3.5 que o grau de F coincide com o definido anteriormente.

3.4 Germes de Funções Holomorfas

Seja X uma superfície de Riemann e $p \in X$. Denotemos $H_{X,p}$ o conjunto das funções holomorfas em p . Se $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ são elementos de $H_{X,p}$, diremos que f e g são equivalentes e escreveremos $f \sim g$ se existir um aberto W contendo p tal que $W \subset U \cap V$ tal que $f(x) = g(x)$, para todo $x \in W$. É rotina verificar que a relação \sim é uma relação de equivalência no espaço $H_{X,p}$.

Um *germe de uma função holomorfa em p* é a classe de equivalência $\bar{f} \in \mathcal{H}_{X,p} := H_{X,p}/\sim$ de um elemento $f \in H_{X,p}$. Quando não houver perigo de confusão identificaremos $\bar{f} = f$, isto é, o germe com a função holomorfa. Demonstra-se que o conjunto quociente $\mathcal{H}_{X,p}$ é um anel comutativo com unidade. Além disso, $\mathcal{H}_{X,p}$ é anel local com ideal maximal $\mathcal{M}_{X,p} = \{\bar{f} \mid f(p) = 0\}$. Se $\phi : U \rightarrow V \subset \mathbb{C}$ é uma carta local em p , com $\phi(p) = 0 \in V$, a composição com ϕ induz um isomorfismo natural $\phi^* : \mathcal{H}_{\mathbb{C},0} \rightarrow \mathcal{H}_{X,p}$.

Quando X é uma curva projetiva lisa irreduzível, lembramos que

$$\mathcal{O}_{X,p} = \{\varphi \in k(X) \mid \varphi \text{ é regular em } p\}$$

é o anel local de X em p . Temos $\mathcal{O}_{X,p} \subset H_{X,p}$, pois toda função racional que é regular em p é holomorfa em p .

Proposição 3.4.1. *Temos um homomorfismo natural de anéis $\rho : \mathcal{O}_{X,p} \rightarrow \mathcal{H}_{X,p}$ tal que:*

1. ρ é injetivo;
2. $\mathfrak{m}_{X,p} = t \cdot \mathcal{O}_{X,p}$, com $t \in \mathcal{O}_{X,p}$, então $\mathcal{M}_{X,p} = \rho(t) \cdot \mathcal{H}_{X,p}$.

Em particular, $\rho^{-1}(\mathcal{M}_{X,p}) = \mathfrak{m}_{X,p}$ e $\mathcal{M}_{X,p} = \mathfrak{m}_{X,p} \mathcal{H}_{X,p}$.

Prova: Considere o homomorfismo $\rho : \mathcal{O}_{X,p} \rightarrow \mathcal{H}_{X,p}$ que faz $f \mapsto \bar{f}$. Afirmamos que ρ é injetivo. Suponha que $\bar{f} := \rho(f) = \rho(g) = \bar{g}$, com $f, g \in \mathcal{O}_{X,p}$. Os domínios

$\text{dom } f$ e $\text{dom } g$ são abertos de Zariski contendo p . Então existe um aberto W na topologia usual de X com $p \in W \subset \text{dom } f \cap \text{dom } g$, tal que $f(x) = g(x)$ para qualquer $x \in W$. Mostraremos que $\text{dom } f = \text{dom } g$ e $f = g$.

Como X é lisa, estendemos f, g a morfismos $\tilde{f}, \tilde{g} : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ e consideramos a aplicação regular $\psi := \tilde{f} \times \tilde{g} : X \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ que faz $x \mapsto (\tilde{f}(x), \tilde{g}(x))$. Seja

$$\mathcal{D} := \{(x, y) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \mid x = y\}$$

a *diagonal* de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Então \mathcal{D} é um fechado de Zariski em $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ e, logo, $\psi^{-1}(\mathcal{D})$ é um fechado de Zariski em X que contém W . Como W é aberto usual, W é conjunto infinito. Mas os únicos fechados próprios de X na topologia de Zariski são os formados por um número finito de pontos. Logo $\psi^{-1}(\mathcal{D}) = X$, donde $\tilde{f} = \tilde{g}$, o que implica $f = g$.

Para demonstrar a segunda afirmação, podemos supor $X \subset \mathbb{A}^n$ uma curva afim. Começemos mostrando que $\mathcal{M}_{X,p}$ é um ideal principal: com efeito, seja $\phi : U \rightarrow V \subset \mathbb{C}$ uma carta local em p , com $\phi(p) = 0 \in V$; escrevemos $z := \phi(x)$. Uma função $f(z)$ holomorfa em 0 se anula em 0 se e somente se $z|f(z)$. Portanto $\mathfrak{m}_{\mathbb{C},0} = z\mathcal{H}_{\mathbb{C},0}$, donde segue a afirmação graças ao isomorfismo $\phi^* : \mathcal{H}_{\mathbb{C},0} \rightarrow \mathcal{H}_{X,p}$.

Como vimos no exemplo 3.3.7, item 3, de acordo à observação 3.2.1, a restrição de $x_n - a_n$ a X define um gerador de $\mathfrak{m}_{X,p}$, onde $p = (a_1, \dots, a_n)$. Utilizando a carta $\phi_p : U_p \rightarrow W_p$ construída no exemplo, deduzimos que (o germe) a função $z = x_n - a_n$, pensada como função em $W_p \subset \mathbb{C}$, gera o ideal $\mathcal{M}_{\mathbb{C},0}$; em outras palavras $\mathcal{M}_{X,p} = \rho(x_n - a_n)\mathcal{H}_{X,p}$, demonstrando a segunda afirmação.

A última afirmação segue da segunda. □

Corolário 3.4.2. *O anel $\mathcal{H}_{X,p}$ é um anel de valorização discreta.*

Prova: Como os zeros de uma função holomorfa não nula são isolados, concluimos que $\mathcal{H}_{X,p}$ é um domínio. Denotaremos $K_{X,p}$ seu corpo de frações. Para definir uma valorização podemos fazer $f \mapsto \text{ord}_p(f)$. É fácil ver que isto define uma valorização em $K_{X,p}$. □

De agora em diante identificaremos $\mathcal{O}_{X,p}$ com sua imagem $\rho(\mathcal{O}_{X,p})$ isto é, suporemos $\mathcal{O}_{X,p} \subset \mathcal{H}_{X,p}$.

Denotaremos $\nu_{X,p} : K_{X,p}^* \rightarrow \mathbb{Z}$ valorização de $K_{X,p}$ definida na prova do Corolário 3.4.2.

Sejam (X, p) e (Y, q) pares onde X e Y são superfícies de Riemann e $p \in X$ e $q \in Y$ pontos. Uma aplicação holomorfa com inversa holomorfa entre vizinhanças abertas de X e Y em p e q , respectivamente, que envia p em q , será dito *difeomorfismo local* entre (X, p) e (Y, q) .

Seja $\phi : (X, p) \rightarrow (Y, q)$ um difeomorfismo local. Como $\phi(p) = q$, esta aplicação induz um isomorfismo de anéis locais $\phi^* : \mathcal{H}_{Y,q} \rightarrow \mathcal{H}_{X,p}$ definido por $\phi^*(g) = g \circ \phi$; continuamos a denotar $\phi^* : K_{Y,q} \rightarrow K_{X,p}$ o isomorfismo induzido a nível dos corpos de frações. Em particular,

Proposição 3.4.3. *Se $p, q \in X$ temos $\mathcal{H}_{X,p} \simeq \mathcal{H}_{X,q}$ e $K_{X,p} \simeq K_{X,q}$*

Além disso, temos:

Lema 3.4.4. *Se $\phi : (X, p) \rightarrow (Y, q)$ é um difeomorfismo local e $g \in \mathcal{H}_{Y,q}$, temos $\nu_{X,p}(g \circ \phi) = \nu_{Y,q}(g)$.*

Prova: Como ϕ é um difeomorfismo local, pelo Teorema 3.3.6 existem cartas tais que ϕ escreve-se $z \mapsto z$. O resultado segue. \square

Como já demonstramos, quando X é uma curva algébrica projetiva lisa, o anel local $\mathcal{O}_{X,p}$ de X em p é um anel de valorização discreta do corpo de funções racionais $k(X)$ (de fato, podemos definir $\mathcal{O}_{X,p}$ de maneira completamente análoga a como fizemos com $\mathcal{H}_{X,p}$, trocando vizinhanças abertas na topologia usual por vizinhanças afins). Porém, no caso $X = \mathbb{C}$, $p = 0$, observamos que $\mathcal{O}_{X,p} \subsetneq \mathcal{H}_{X,p}$: com efeito, a função holomorfa $f(z) = e^z - 1$ define um germe em 0 que não é equivalente a uma função racional em \mathbb{C} definida na origem, como podemos observar, por exemplo, mostrando que $f(1/z)$ tem singularidade essencial na origem.

Apesar disso, se $f \in \mathcal{O}_{X,p}$, a ordem de anulação de f em p é a mesma calculada com a valorização de $k(X)$ ou com aquela de $K_{X,p}$: com efeito, $\mathcal{M}_{X,p} = \mathfrak{m}_{X,p} \mathcal{H}_{X,p}$. Desta forma, a ordem de anulação do germe de função holomorfa de um elemento $f \in \mathcal{O}_{X,p}$ coincide com a ordem de anulação do elemento calculada de maneira algébrica via uma valorização associada ao anel $\mathcal{O}_{X,p}$; em outras palavras, a ordens calculadas de maneira analítica ou algébrica coincidem.

Terminamos o parágrafo com um resultado que mostra que a multiplicidade de interseção de curvas algébricas é um invariante analítico no caso em que uma das curvas é lisa.

Proposição 3.4.5. *Sejam $C = V(f), D = V(g) \subset \mathbb{C}^2$ curvas afins irredutíveis distintas e $p \in C \cap D$. Suponhamos que p é não singular em C . Então*

$$I_p(f, g) = \nu_{C,p}(g).$$

Prova: Temos isomorfismos naturais

$$\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,p}}{(f, g)} \simeq \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,p}/(f)}{(g + (f))} \simeq \frac{\mathcal{O}_{C,p}}{(\bar{g})}$$

onde $\bar{g} = g|_C$ é a restrição de g a C .

Por outro lado, se $\mathfrak{m}_{C,p} = t \cdot \mathcal{O}_{C,p}$ então $\bar{g} = u \cdot t^r$, $u(p) \neq 0$ e $r = \nu_{X,p}(\bar{g})$. Concluimos que

$$\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,p}}{(f, g)} \simeq \frac{\mathcal{O}_{C,p}}{\mathfrak{m}_{C,p}^r}$$

O resultado segue de que $\dim_k \mathcal{O}_{C,p}/\mathfrak{m}_{C,p}^r = r$. □

3.5 Fórmula de Hurwitz

Para as afirmações não demonstradas nesta seção ver [Miranda, Chap. II].

Seja S um espaço topológico Hausdorff. Uma *carta real 2-dimensional* em S é um homeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$, onde U e V são abertos de S e \mathbb{R}^2 , respectivamente. Duas tais cartas $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ e $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ em S são ditas \mathcal{C}^∞ -compatíveis se $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ou $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2)$ é difeomorfismo \mathcal{C}^∞ . Um *atlas 2-dimensional* \mathcal{C}^∞ em S é um conjunto de cartas 2-dimensionais em S , \mathcal{C}^∞ -compatíveis cujos domínios cobrem S . Uma *2-estrutura* \mathcal{C}^∞ em S é um atlas \mathcal{C}^∞ maximal em S formado por cartas 2-dimensionais. Uma *variedade 2-dimensional* \mathcal{C}^∞ é um espaço Hausdorff, satisfazendo o segundo axioma de contabilidade e conexo com uma 2-estrutura \mathcal{C}^∞ .

As definições acima servem para observarmos que se vemos $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, então uma superfície de Riemann é uma 2-variedade \mathcal{C}^∞ , pois funções holomorfas na variável complexa $z = x + iy$ são \mathcal{C}^∞ nas variáveis reais x e y .

Um *triângulo* em S é um subconjunto $T \subset S$ que é homeomorfo a um triângulo $T^1 \subset \mathbb{R}^2$. *Vértices e arestas* de T são os conjuntos correspondentes aos vértices e arestas de T^1 , respectivamente. Uma *triangulação* de S é uma decomposição de S em triângulos tais que dois triângulos são disjuntos, ou tem um único vértice em comum, ou tem uma única aresta em comum. Se S é uma 2-variedade compacta, o número de Euler de S é $\chi(S) := v - e + t$, onde v, e, t são, respectivamente, os números de vértices, arestas e triângulos de uma dada triangulação. Temos o importante:

Teorema 3.5.1 (Euler-Poincaré). *O número de Euler independe da escolha da triangulação. Para uma 2-variedade compacta, orientável e sem bordo S , existe um inteiro $g \geq 0$ tal que este número é dado por $\chi(S) = 2 - 2g$.*

Prova: [Miranda, página 51]. □

Diremos que o inteiro $g \geq 0$ no enunciado do Teorema 3.5.1 é o *gênero* de S , que denotaremos $g(S)$.

Exemplo 3.5.2. *A 2-esfera \mathbb{S}^2 é homeomorfa a $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. É claro que \mathbb{S}^2 é também home-*

omorfa a um tetraedro regular, donde fica fácil concluir que $\chi(\mathbb{P}^1) = 2$ e $g(\mathbb{P}^1) = 0$. Também, um toro T satisfaz $\chi(T) = 0$ e $g(T) = 1$.

Proposição 3.5.3. *Toda superfície de Riemann compacta possui uma triangulação.*

Prova: [Miranda, pagina 52]. □

Informamos que existem 2-variedades compactas, orientáveis e sem bordo de gênero $0, 1, 2, \dots$

Teorema 3.5.4. *Uma 2-variedade compacta, orientável e sem bordo de gênero g é homeomorfa a um g -toro, isto é, uma esfera com g 'buracos'.*

Prova: Ver [Jost, §2.4].

Estamos prontos para enunciar e provar a *Fórmula de Hurwitz*, resultado fundamental na teoria das superfícies de Riemann compactas.

Teorema 3.5.5 (Fórmula de Hurwitz). *Seja $F : X \rightarrow Y$ holomorfa e não constante entre superfícies de Riemann compactas. Então*

$$2g(X) - 2 = \deg(F)(2g(Y) - 2) + \sum_{p \in X} (e_p(F) - 1)$$

Prova: Note primeiramente que como X é compacta, o conjunto de pontos de ramificação para F é finito, de forma que o somatório que aparece no enunciado é um número finito (≥ 0).

Escolha uma triangulação em Y . Refinando esta se necessário, podemos supor que todos os valores de ramificação de F são vértices em Y . Suponha que temos v, e, t vértices, arestas e triângulos, respectivamente. Levantando esta triangulação por F , construímos uma triangulação em X com, digamos, v', e', t' vértices, arestas e triângulos, respectivamente. Observe que cada ponto de ramificação de F é um vértice de X . Por construção, que cada triângulo em Y gera $\deg(F)$ triângulos em X . Logo, $t' = \deg(F) \cdot t$ e, similarmente, $e' = \deg(F) \cdot e$.

Agora, seja $q \in Y$ um vértice. O número de pré-imagens de q por F é

$$\begin{aligned}
 \#F^{-1}(q) &= \sum_{p \in F^{-1}(q)} 1 \\
 &= \sum_{p \in F^{-1}(q)} 1 + 0 \\
 &= \sum_{p \in F^{-1}(q)} 1 + \left(\deg(F) - \sum_{p \in F^{-1}(q)} e_p(F) \right) \\
 &= \deg(F) + \sum_{p \in F^{-1}(q)} (1 - e_p(F))
 \end{aligned}$$

Logo, o número total de pré-imagens de vértices em Y é

$$\begin{aligned}
 v' &= \sum_{q \text{ vértice em } Y} \left(\deg(F) + \sum_{p \in F^{-1}(q)} (1 - e_p(F)) \right) \\
 &= \deg(F)v - \sum_{\text{vértice } p \text{ em } X} (e_p(F) - 1)
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 2g(X) - 2 &= -\chi(X) \\
 &= -v' + e' - t \\
 &= -\deg(F)\chi(Y) + \sum_{\text{vértice } p \text{ em } X} (e_p(F) - 1) \\
 &= \deg(F)(2g(Y) - 2) + \sum_{p \in X} (e_p(F) - 1)
 \end{aligned}$$

□

Finalizamos este capítulo com um exemplo de aplicação do Teorema 3.5.5 no cálculo do gênero de uma curva plana lisa. Utilizamos também o Teorema 2.5.11.

Exemplo 3.5.6. *Seja $C = V(F(x, y, z)) \subset \mathbb{P}^2 = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ uma curva plana lisa de grau d . Dado um ponto $P \notin C$, tome uma reta ℓ tal que $P \notin \ell$. Após uma mudança de coordenadas podemos supor $P = (0 : 1 : 0)$, $\ell = V(y) = \{y = 0\}$ e que a reta no infinito $V(z) = \{z = 0\}$ não tangencia C . Consideremos a aplicação $\pi_P : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ obtida projetando de P para ℓ . É consequência do Teorema de Bézout 2.5.11 que $\deg \pi_P = d$.*

Denotemos $f(x, y) = F(x, y, 1)$ a equação afim da curva C . Seja $Q = (a, b) \in V(f)$. Digamos que $\frac{\partial f}{\partial y}(Q) \neq 0$. Então, numa vizinhança de Q , $V(f)$ é o gráfico de uma função holomorfa $y = y(x)$, pelo Teorema da Função Implícita. Nesta vizinhança, a equação de C é

$$f(x, y(x)) = 0$$

e pela Regra da Cadeia obtemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

sobre $V(f)$ numa vizinhança de Q .

Então, pelo Lema 3.3.8,

$$\begin{aligned} \text{ord}_a(y'(x)) &= e_Q(\pi_P) - 1 \\ &= \text{ord}_Q \frac{\partial f}{\partial x} \end{aligned}$$

Assim, $\text{ord}_a(y'(x)) = I_Q(f, \frac{\partial f}{\partial x})$. Pelo Teorema 2.5.11

$$\sum_{Q \in \mathbb{P}^2} I_Q(f, \frac{\partial f}{\partial x}) = d(d-1).$$

Pela escolha de coordenadas todos os pontos de $C \cap V(\frac{\partial f}{\partial x})$ estão fora da reta no infinito. Logo, $\sum (e_Q(\pi_P) - 1) = d(d-1)$.

Pelo Teorema 3.5.5 obtemos então que

$$\begin{aligned} 2g(C) - 2 &= d \cdot (2 \cdot 0 - 2) + \sum (e_Q(\pi_P) - 1) \\ &= -2d + d(d-1) \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } g(C) = \frac{(d-1).(d-2)}{2}$$

Capítulo 4

Pontos de Galois sobre Quárticas Planas Lisas

4.1 Primeira Parte

Seja \mathbb{P}^2 o plano projetivo complexo com coordenadas homogêneas x, y, z . Seja $C \subset \mathbb{P}^2$ uma quártica lisa. Daqui em diante, usaremos a seguinte notação: $f(x, y) = 0$ é a equação que define a peça afim $z \neq 0$ da curva C . Quando não houver risco de confusão, denotaremos também por C a referida peça afim. Escreveremos $f_i(x, y) = 0$ a parte homogênea de grau i de $f(x, y)$ e $\varphi_i(t) := f_i(1, t)$. Seja $P \in C$.

Temos o seguinte resultado geral:

Lema 4.1.1. *Se P é ponto de Galois de C , então TP é ponto de Galois de TC , para qualquer $T \in \mathbb{P}GL_3(k)$.*

Prova: Consideramos o diagrama

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{T} & TC \\ \pi_P \downarrow & & \downarrow \pi_{TP} \\ \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

onde \mathbb{P}^1 , em cada caso, simboliza o conjunto das retas pelo ponto indicado. Pelo Teorema 2.1.7, este dá lugar a

$$\begin{array}{ccc} k(C) & \xleftarrow{T^*} & k(TC) \\ \pi_P^* \uparrow & & \uparrow \pi_{TP}^* \\ K_P & \xleftarrow{\quad} & K_{TP} \end{array}$$

que é um isomorfismo de extensões de corpos. Logo, P é ponto de Galois de C se, e somente se, TP é ponto de Galois de TC . \square

Conforme discutido, podemos tomar um sistema projetivo de coordenadas tal que

1. $P = (0 : 0 : 1)$;
2. $V(x) = \{x = 0\}$ e C são transversais, em cada ponto de interseção;
3. $V(y)$ é a reta tangente a C em P ;
4. Se r é uma reta passando por P e por um ponto de $C \cap V(z)$, então r é transversal a C em Q , para todo ponto $Q \in C \cap r$.

Consideramos a projeção $\pi_P : C \dashrightarrow \mathbb{P}^1$. Como C é lisa π_P estende-se regularmente em P a uma aplicação $C \rightarrow \mathbb{P}^1$ que continuaremos denotando π_P . Observamos que $\{\text{retas de } \mathbb{P}^2 \text{ por } P\}$ está em bijeção com os pontos de qualquer reta $\ell \not\ni P$. Seja, portanto, $\ell = V(x - z) \not\ni P$. A partir de agora π_P denotará $\pi_P : C \rightarrow \ell$.

Note que no sistema de coordenadas escolhido, cada ponto Q da curva afim C está sobre uma reta $\ell_t := V(y - tx)$, $t \in k = \mathbb{C}$, ou sobre $V(x)$. Com essa escolha de coordenadas, a cada ponto $(0, 0) \neq (x, tx) \in C \cap \ell_t$ associamos via π_P o ponto $(1, t) = (1 : t : 1) \in \ell$, ou via identificação, $\pi_P(x, tx) = t$. Se $(0 : u : v) \in C \cap V(x)$ fazemos $(0 : u : v) \mapsto (0 : 1 : 0) \in \ell$. Observe que pelo sistema de coordenadas considerado, o ponto no infinito da reta $V(x)$ não é valor de ramificação para π_P .

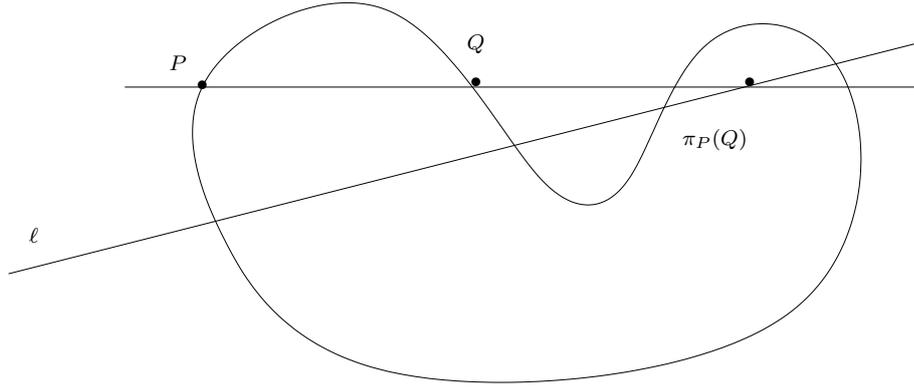


Figura 4.1: Projeção π_P

No plano \mathbb{A}^2 com coordenadas x e t , consideramos a curva afim definida pelo polinômio $\hat{f}_P(x, t) := \frac{f(x, tx)}{x}$, $\hat{C}_P := V(\hat{f}_P)$. Então a aplicação $\hat{C}_P \rightarrow C$, dada por $(x, t) \mapsto (x, tx)$ define um isomorfismo entre as curvas. Equivalentemente, $k[\hat{C}_P] \simeq k[C]$. Deste modo podemos estudar a extensão $\pi_P^* : k(\ell) \simeq k(t) = K_P \subset k(\hat{C}_P) = k(x, t) \simeq K$, onde x e t satisfazem $\hat{f}_P(x, t) = 0$, sem perda de generalidade.

A nível das aplicações, temos a composição $\hat{C}_P \rightarrow C \rightarrow \ell$ dada por $(x, t) \mapsto (x, tx) \mapsto t$. Como $\hat{C}_P \simeq C$, podemos supor $\pi_P : \hat{C}_P \rightarrow \mathbb{A}^1$, que simplesmente associa a um ponto $(x, t) \in \hat{C}_P$ a sua segunda coordenada $t \in \mathbb{A}^1$.

Com o sistema de coordenadas considerado, f escreve-se

$$f = f_1 + f_2 + f_3 + f_4.$$

Logo,

$$\hat{f}_P(x, t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)x + \varphi_3(t)x^2 + \varphi_4(t)x^3.$$

Conforme vimos no Exemplo 1.2.4, o discriminante $\Delta_P(t) \in k(t)$ do polinômio $\hat{f}_P \in k[t][x]$ é

$$\begin{aligned} \Delta_P(t) &= \varphi_4^4 \prod_{i < j} (x_i - x_j)^2 \\ &= \varphi_2^2 \varphi_3^2 + 18\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 - 4\varphi_2^3 \varphi_4 - 4\varphi_1 \varphi_3^3 - 27\varphi_1^2 \varphi_4^2 \end{aligned}$$

onde $x_i = x_i(t), i = 1, 2, 3$ são as raízes de $\hat{f}_P(x, t) = 0$ no fecho algébrico $\overline{k(t)}$ de $k(t)$.

Observação 4.1.2. *Em virtude do Teorema 1.2.3 e do Exemplo 1.2.4, temos que P é ponto de Galois se, e somente se, $\Delta_P(t)$ é um quadrado em $k(t)$.*

Nesse sentido é natural tentar obter informações a respeito de $\Delta_P(t)$. Temos o seguinte resultado fundamental:

Lema 4.1.3. *Se $\alpha \in k$ é raiz de $\Delta_P(t)$ com multiplicidade $n(\alpha)$, então $n(\alpha) = 1$ ou 2 .*

Prova:

Seja $Q = (\lambda, \alpha) \in \hat{C}_P$. Como π_P é aplicação holomorfa entre superfícies de Riemann, usamos o Teorema 3.3.6 para tomar coordenadas u e s em Q e $\alpha = \pi_P(Q)$, respectivamente tais que π_P faz $u \mapsto s = u^m$, onde $m = e_{(\lambda, \alpha)}(\pi_P)$.

Observe que $V(\hat{f}_P)$ e $V(\frac{\partial \hat{f}_P}{\partial x})$ estão muito bem posicionadas, pois $\deg \hat{f}_P = 3$. Usando o Teorema 2.5.9 e as Proposições 3.4.5 e 2.5.7 obtemos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
 n(\alpha) &= \text{ord}_\alpha \Delta_P \\
 &= \text{ord}_\alpha R_{\hat{f}_P, \frac{\partial \hat{f}_P}{\partial x}} \\
 &= I_{(\lambda, \alpha)}(\hat{f}_P, \frac{\partial \hat{f}_P}{\partial x}) \\
 &= I_{\phi(\lambda, \alpha)}(s - u^m, -mu^{m-1}) \\
 &= I_{(0,0)}(s, u^{m-1}) \\
 &= m - 1
 \end{aligned}$$

Em particular, se α é um valor de ramificação para π_P , existe um único ponto de ramificação na pré-imagem de α ; nesse caso denotaremos $m = m(\alpha)$. Como $\deg \pi_P = 3$, então $m(\alpha) = 2$ ou 3 , o que demonstra o lema. \square

Observação 4.1.4. Note que $\varphi_4(\alpha) = 0$ equivale a que $(1 : \alpha : 0) \in C \cap V(z)$ é um ponto de ramificação de π_P (isto é, no infinito). A escolha de coordenadas acima (ver item 4) faz com que tais pontos não existam.

Teorema 4.1.5. Seja $n(\alpha)$ como no Lema 4.1.3.

1. Se $\alpha \neq 0$ temos

$$n(\alpha) = 2 \Leftrightarrow \ell_\alpha \text{ tangencia } C \text{ em um 1-flex;}$$

$$n(\alpha) = 1 \Leftrightarrow \ell_\alpha \text{ tangencia } C \text{ num ponto que não é de inflexão.}$$

2. Se $\alpha = 0$ temos

$$n(0) = 2 \Leftrightarrow P \text{ é 2-flex;}$$

$$n(0) = 1 \Leftrightarrow P \text{ é 1-flex ou } \ell_0 \text{ é uma bitangente.}$$

Prova: Observe, por um lado que

$$\begin{aligned} I_{(0,0)}(\hat{f}_P, t) &= \text{ord}_0 \hat{f}_P(x, 0) \\ &= \text{ord}_0 \frac{f(x, 0)}{x} \\ &= -1 + \text{ord}_0 f(x, 0) \\ &= -1 + I_P(f, y). \end{aligned}$$

Por outro lado, como $\widehat{C}_P \simeq C$, o contato entre as curvas e as suas respectivas tangentes fora da origem se preserva. De acordo com as notações e a prova do Lema 4.1.3, $m(\alpha) = 1 + n(\alpha)$. Isto prova o Teorema (ver figura 4.2). \square

Pelo Lema 4.1.3, podemos escrever $\Delta_P(t) = g_P(t) \cdot h_P^2(t)$, onde $g_P, h_P \in k[t]$ possuem somente fatores simples, digamos

$$g_P(t) = c_1(t - \alpha_1)(t - \alpha_2) \cdots (t - \alpha_a)$$

e

$$h_P(t) = c_2(t - \alpha_{a+1})(t - \alpha_{a+2}) \cdots (t - \alpha_{a+b})$$

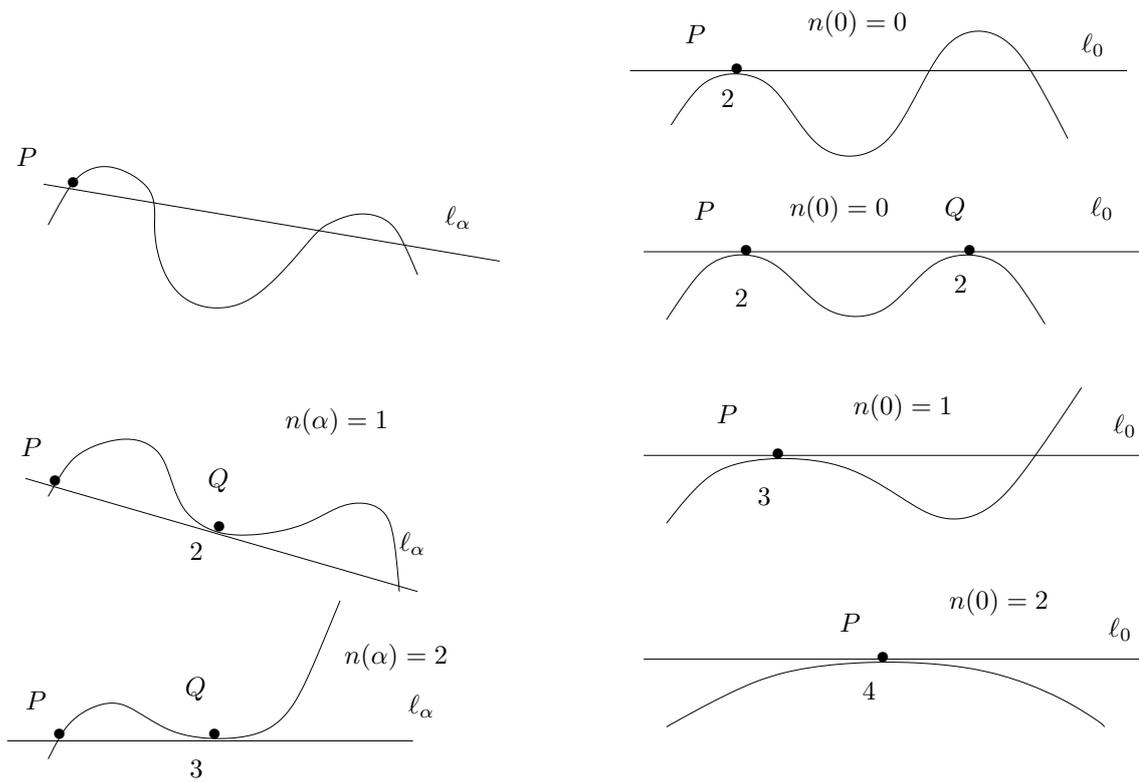


Figura 4.2: Incidências entre C e l_α , $\alpha \in k$

com $c_1, c_2 \in k^*$ e $\alpha_i \neq \alpha_j$ se $i \neq j$.

Conforme vimos, $Q = (\lambda, \alpha) \in \widehat{C}_P$ é ponto de ramificação de π_P se e somente se $\alpha = \pi_P(Q)$ satisfaz $\Delta_P(\alpha) = 0$, isto é, se e somente se $\alpha = \alpha_i$, para algum $i \in \{1, \dots, a+b\}$. Pela Fórmula de Hurwitz 3.5.5 temos (note que $m(\alpha) = 1+n(\alpha)$):

$$2g(C) - 2 = \deg(\pi_P) \cdot (2g(\mathbb{P}^1) - 2) + \sum_i n(\alpha_i).$$

Logo,

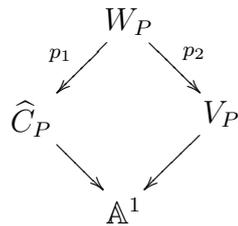
$$4 = -6 + \sum_{i \leq a} n(\alpha_i) + \sum_{i > a} n(\alpha_i).$$

Equivalentemente:

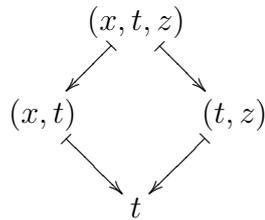
$$10 = \sum_{i \leq a} 1 + \sum_{i > a} 2 = a + 2b.$$

Logo, $\deg \Delta_P(t) = 10$ e a é par.

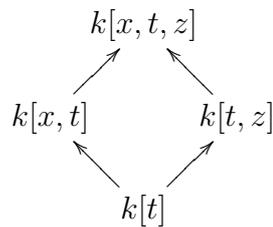
Usamos o discriminante para definir uma curva $V_P := V(z^2 - \Delta_P(t))$ no plano \mathbb{A}^2 com coordenadas t e z . Seja $k(t, z)$ seu corpo de funções racionais. Seja $W_P := \{\hat{f}_P(x, t) = 0\} \cap \{z^2 = \Delta_P(t)\} \subset \mathbb{A}^3$. Considere o diagrama comutativo



onde as aplicações são as projeções, isto é,



Temos então um diagrama comutativo a nível dos anéis de funções regulares:



onde as coordenadas x, t, z satisfazem as relações $\hat{f}_P(x, t) = 0$ e $z^2 = \Delta_P(t)$. Daqui em diante admitiremos estas relações sem mencionar explicitamente. Por exemplo, ao escrever $k[t, z]$ não nos referimos ao anel de polinômios com duas indeterminadas, mas à k -álgebra onde t e z satisfazem $z^2 = \Delta_P(t)$.

O diagrama acima, por sua vez, induz diagrama comutativo de extensões de corpos dado por:

$$\begin{array}{ccc}
 & k(x, t, z) & \\
 k(x, t) & \nearrow & \nwarrow k(t, z) \\
 & k(t) &
 \end{array}$$

Já mostramos no Exemplo 1.2.5 que $k(x, t, z)$ é o corpo de decomposição de $\varphi_1(t) + \varphi_2(t)T + \varphi_3(t)T^2 + \varphi_4(t)T^3 \in k(t)[T]$, de forma que a extensão $k(t) \hookrightarrow k(x, t, z)$ é galoisiana. Portanto, pelo Teorema 2.3.2, as normalizações \tilde{C}_P e D_P (de W_P e V_P respectivamente) induzem aplicações regulares finitas entre curvas lisas, gerando o seguinte diagrama comutativo

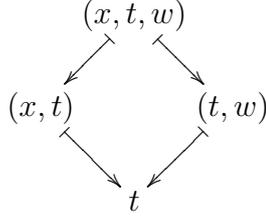
$$\begin{array}{ccccc}
 & & \tilde{C}_P & \longrightarrow & D_P \\
 & \tilde{\pi}_P \swarrow & \downarrow & \searrow & \downarrow \\
 \hat{C}_P & \xleftarrow{p_1} & W_P & \xrightarrow{p_2} & V_P \\
 & \searrow \pi_P & \downarrow & \swarrow & \downarrow \\
 & & \mathbb{P}^1 & &
 \end{array}$$

Note que $\deg \tilde{\pi}_P = [k(x, t, z) : k(x, t)] \leq 2$.

A seguinte observação será útil: se denotamos $w := \frac{z}{h_P(t)} \in k(t, z)$ obtemos que $k(t, z) = k(t, w)$ e, conseqüentemente, que $k(x, t, z) = k(x, t, w)$. Segue do Teorema 2.3.2 que as normalizações de V_P e $U_P := V(w^2 - g_P(t))$ são birracionalmente equivalentes e, portanto, isomorfas. Denotemos $W_P^{(1)} := \{\hat{f}_P(x, t) = 0\} \cap \{w^2 = g_P(t)\} \subset \mathbb{A}^3$. Assim, o diagrama das projeções pode ser tomado

$$\begin{array}{ccc}
 & W_P^{(1)} & \\
 p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\
 \hat{C}_P & & U_P \\
 & \searrow q_2 & \\
 & \mathbb{A}^1 &
 \end{array}$$

isto é,



sendo que o diagrama de extensões de corpos é preservado.

Com isto, temos:

Proposição 4.1.6. *Um ponto $Q \in \widehat{C}_P$ é valor de ramificação de $\tilde{\pi}_P$ se e somente se $\pi_P(Q) = \alpha$ com $g_P(\alpha) = 0$.*

Prova: Para começar observamos que $Q = (\lambda, \alpha)$ é valor de ramificação de $\tilde{\pi}_P$ se e somente se α é valor de ramificação da aplicação q_2 no diagrama acima. Note ainda que o valor $\alpha = \infty$ não é valor de ramificação, pois $a = 10 - 2b$ é par: de fato, se $a = 2d$, a aplicação birracional definida por

$$u = \frac{1}{t}, v = \frac{w}{t^d}$$

induz um isomorfismo de extensões $k(t, w)/k(t) \simeq k(u, v)/k(u)$, onde $w^2 = g_P(t) = c_1 \prod_{i=1}^a (t - \alpha_i)$ transforma-se em $v^2 = g'(u) = \prod_{i=1}^a (1 - \alpha_i u)$. A afirmação segue de que $g'(0) \neq 0$.

Ora, $Q = (\lambda, \alpha)$ é valor de ramificação de $\tilde{\pi}_P$, $\alpha \neq \infty$, implica existir único w tal que $(\lambda, \alpha, w) \in W_P^{(1)}$. Já que $w^2 = g_P(\alpha)$, tal unicidade implica $w^2 = 0$, isto é, $g_P(\alpha) = 0$. Daí, $\Delta_P(\alpha) = 0$ e o índice de ramificação é um.

Reciprocamente, se $\Delta_P(\alpha) = 0$ e o índice é um, então $g_P(\alpha) = 0$. Se $Q = (\lambda, \alpha)$, então $p_1^{-1}(Q) = \{(\lambda, \alpha, \pm \sqrt{g_P(\alpha)})\}$. Daí, $\#p_1^{-1}(Q) = \#\tilde{\pi}_P^{-1}(Q) = 1$. Logo, Q é valor de ramificação de $\tilde{\pi}_P$. \square

A Proposição 4.1.6 nos revela, em particular, que o número de valores de ramificação para $\tilde{\pi}_P$ é a , ou seja, é igual ao número de raízes simples de $\Delta_P(t)$.

Corolário 4.1.7. *Se P não é ponto de Galois, então $g := g(\tilde{C}_P) = 10 - b$, onde $0 \leq b \leq 4$.*

Prova: Se P não é de Galois, $w \notin k(x, t)$. Logo $[k(x, t, w) : k(x, t)] = 2$, donde $\deg \tilde{\pi}_P = 2$. Pela Fórmula de Hurwitz para $\tilde{\pi}_P$, $2g - 2 = 2(2.3 - 2) + a \Rightarrow 2g = 10 + a = 10 + 10 - 2b \Rightarrow g = 10 - b$. Se $b = 5$, então Δ_P é quadrado em $k(t)$ e isto é proibido pela hipótese sobre P , de acordo com a Observação 4.1.2. \square

Corolário 4.1.8. *Se P não é 2-flex e para cada $\alpha \neq 0$ a reta ℓ_α não tangencia C em um 1-flex então $g(\tilde{C}_P) = 10$.*

Prova: Mostraremos que $b = 0$, donde o resultado seguirá do Corolário 4.1.7. As hipóteses são equivalentes ao fato de ser $h_P \in k$, pelo Lema 4.1.3 e Teorema 4.1.5. Daí, Δ_P não é quadrado em $k(t)$, isto é, P não é ponto de Galois. Assim, pelo Corolário 4.1.7, $g = g(\tilde{C}_P) = 10$. \square

O Corolário 4.1.8 se revela muito importante quando observamos que sua hipótese é uma propriedade genérica dos pontos de C :

Observação 4.1.9. *Se Q é ponto de inflexão de C , então a reta tangente T_Q de C em Q tem multiplicidade de interseção com C em Q maior ou igual a 3. Segue imediatamente pelo Teorema de Bézout que $\#C \cap T_Q \leq 2$. Como o conjunto de pontos de inflexão é finito então $\mathcal{F} := \bigcup_Q C \cap T_Q$, onde a união é tomada para cada ponto de inflexão Q de C , é finito. Concluímos que as condições exigidas no Corolário 4.1.8 são satisfeitas para os pontos do aberto $C - \mathcal{F}$ que é denso em C .*

Teorema 4.1.10. *Dada uma quártica plana lisa C e um ponto $P \in C$ temos:*

1. $g(\tilde{C}_P) = 3, 6, 7, 8, 9$ ou 10 .
2. Se P é um ponto genérico de C então $g(\tilde{C}_P) = 10$ e $G_P \simeq S_3$;
3. $g(\tilde{C}_P) = 3$ se e somente se P é ponto de Galois.

Prova: P é ponto de Galois se e somente se Δ_P é quadrado em $k(t)$, isto é, se e somente se $\tilde{C}_P \simeq C$. Isto e mais o Corolário 4.1.7 provam os itens 3) e 1), respectivamente.

O item 2) segue do Corolário 4.1.8, da Observação 4.1.9 e do Teorema 1.2.3. \square

Exemplo 4.1.11. (a) Consideremos a quártica $C \subset \mathbb{P}^2$ definida por

$$z^3y + x^4 + x^3y + y^4 = 0.$$

Verifica-se que C é lisa. Neste caso, com as notações de sempre, temos

$$\hat{f}_P(x, t) = t + x^3(1 + t + t^4).$$

Portanto $\Delta_P(t) = -27t^2(1 + t + t^4)^2$, o que mostra que $(0, 0) = (0 : 0 : 1)$ é um ponto de Galois.

(b) Consideremos a quártica $C \subset \mathbb{P}^2$ definida por

$$z^3y + z^2xy + x^4 + y^4 = 0.$$

Neste caso temos

$$\hat{f}_P(x, t) = t + xt + x^3(1 + t^4),$$

Temos $\Delta_P(t) = -t^2(1 + t^4)(27t^4 + 4t + 27)$, que não é um quadrado, donde segue que $(0 : 0 : 1)$ não é ponto de Galois de C . Lembrando que o gênero de \tilde{C}_P é $10 - b$ onde b é o número de raízes duplas do discriminante, concluímos que $g(\tilde{C}_P) = 9$.

4.2 Segunda Parte

Lema 4.2.1. Seja $\sigma : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ um automorfismo não trivial tal que $\sigma^3 = id_{\mathbb{P}^2}$. Suponhamos que σ estabiliza as retas passando pelo ponto $(0 : 0 : 1)$. Então existe um automorfismo $\tau : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ estabilizando as retas por $(0 : 0 : 1)$ tal que

$$\tau^{-1}\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix},$$

onde ω é uma raiz cúbica primitiva da unidade.

Prova: Suponhamos σ representado por uma matriz do tipo

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}.$$

Como a reta $V(x)$ é estável, $b = c = 0$. Da mesma forma, estabilizar $V(y)$ implica $d = f = 0$. Finalmente, como σ estabiliza $V(x - y)$, temos que $a = e$.

Deduzimos que σ possui um representante da forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ g & h & k \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, como $\sigma^3 = id_{\mathbb{P}^2}$, temos

$$A^3 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ g(1+k) + gk^2 & h(1+k) + hk^2 & 1 \end{pmatrix},$$

onde I denota a matriz identidade.

Como $\sigma \neq id_{\mathbb{P}^2}$, segue que $k \neq 1$. Então k é uma raiz cúbica primitiva da unidade. Denotemos $\omega := k$.

Observando que $(A - I)(A - \omega I) = 0$, vemos que o polinômio mínimo de A é $(t-1)(t-\omega)$, isto é, A é diagonalizável. Portanto $A = B^{-1}JB$ onde $J = \text{diag}(1, 1, \omega)$ é a forma de Jordan de A e

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{g}{1-\omega} & \frac{h}{1-\omega} & 1 \end{pmatrix}.$$

Para terminar, basta observar que B estabiliza as retas passando por $(0, 0, 1)$ e tomar τ como o automorfismo representado por B . \square

Sabemos que $Bir(C) = Aut(C)$ e $Aut K$ são grupos isomorfos, pelo Teorema 2.1.7. Suponhamos que $P \in C$ é um ponto de Galois. Como $G_P \subset Aut K$ é um subgrupo, existe um subgrupo $\mathcal{G}_P \subset Aut(C)$ tal que $G_P = Gal(K/K_P) \simeq \mathcal{G}_P$.

Seja $\varphi \in G_P$ e $\sigma \in \mathcal{G}_P$ seu elemento correspondente. Então temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\varphi} & K \\ \uparrow & & \uparrow \\ K_P & \xrightarrow{\varphi|_{K_P=id}} & K_P \end{array}$$

onde $K_P = \pi_P^*(k(\mathbb{P}^1))$ e \mathbb{P}^1 denota o conjunto das retas por P . De acordo com o Teorema 2.1.7, este dá lugar a

$$\begin{array}{ccc} C & \xleftarrow{\sigma} & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}^1 & \xleftarrow{id} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

Logo, um elemento em \mathcal{G}_P mantém invariantes as fibras de π_P .

Pela hipótese sobre P a extensão $K_P = \pi_P^*(k(\mathbb{P}^1)) \subset K$ é galoisiana e o Teorema 1.2.2 implica $\mathcal{G}_P \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, o grupo cíclico de ordem três.

Precisaremos do seguinte resultado cuja demonstração utiliza a teoria de divisores, que não foi desenvolvida neste trabalho; mais precisamente, sua prova utiliza o *Teorema de Riemann-Roch*: ver [Hartshorne, Chap. IV, Thm. 1.3 e Ex. 5.2.1].

Proposição 4.2.2. *Se C é uma quártica plana lisa, todo automorfismo de C estende-se a um automorfismo de \mathbb{P}^2 .*

Utilizando a Proposição 4.2.2 identificaremos os automorfismos da quártica com seus representantes em $\mathbb{P}GL_3(k)$. Em particular, $\mathcal{G}_P \subset Aut(\mathbb{P}^2) = \mathbb{P}GL_3(k)$. Isso é a recíproca de [Yoshihara, Lemma 1] no caso particular em que o grupo possui

ordem 3. Como \mathcal{G}_P mantém invariantes as fibras de π_P , e é linear, então estabiliza as retas por P ; portanto P é um ponto fixo de \mathcal{G}_P .

Observe que a noção de ponto de Galois é invariante por projetividades (ver Proposição 4.1.1), de modo que podemos supor $P = (0 : 0 : 1)$ sempre que for conveniente.

Teorema 4.2.3. *Seja C uma quártica plana lisa e $P = (0 : 0 : 1) \in C$. O ponto P é de Galois de C se, e somente se, existe uma projetividade $S : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ tal que $SP = P$ e $SC = V(F)$, com $F(x, y, z) = z^3 f_1(x, y) + f_4(x, y)$, os f_i homogêneos não nulos de grau i em x, y e f_4 sem fatores múltiplos. Nesse caso, a curva $V(F)$ intercepta $V(z)$ em quatro pontos (distintos) que são 1-flexes.*

Prova:

(\Rightarrow) Seja σ um gerador \mathcal{G}_P . Pelo Lema 4.2.1, existe $S \in GL_3(k)$, com $S(P) = P$, tal que

$$A := S \circ \sigma \circ S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}$$

Consideremos a curva quártica $V(F) := SC$, com $F(x, y, z) = z^4 f_0 + z^3 f_1 + z^2 f_2 + z f_3 + f_4$, os f_i homogêneos de grau i em x, y . Então $V(F)$ é invariante por A . Portanto $V(F(x, y, \omega z)) = AV(F(x, y, z)) = V(F(x, y, z))$. Isto implica que existe $\lambda \in k^*$ tal que $F(x, y, \omega z) = \lambda F(x, y, z)$, donde obtemos $\lambda f_0 = \omega^2 f_0$, $\lambda f_1 = f_1$, $\lambda f_2 = \omega^2 f_2$, $\lambda f_3 = \omega f_3$ e $\lambda f_4 = f_4$. Logo, $\lambda = 1$ e $f_0 = f_2 = f_3 = 0$.

(\Leftarrow) Se $SC = V(F)$ com $F(x, y, z) = z^3 f_1(x, y) + f_4(x, y)$, então $F(x, y, 1) = f(x, y) = f_1(x, y) + f_4(x, y)$, o que implica que $\hat{f}_P(x, t) = \varphi_1(t) + x^3 \varphi_4(t)$. Logo, $\Delta_P(t) = -27\varphi_1^2 \varphi_4^2$, que é um quadrado em $k(t)$, isto é, $P = (0 : 0 : 1)$ é um ponto de Galois de $SC = V(F)$. Concluimos utilizando o Lema 4.1.1.

Para mostrar a última afirmação, começamos observando que f_4 não possui

fatores múltiplos e que f_1 não divide f_4 : de fato, C é lisa e irreduzível.

Seja $Q = (a : b : 0)$ um ponto de $V(F) \cap V(z)$. A aplicação $(t : u) \mapsto (au : bu : t)$ parametriza a reta $L = \overline{PQ}$ e $F(au, bu, t) = t^3 u f_1(a, b) + u^4 f_4(a, b) = t^3 u f_1(a, b)$. Então L intercepta $V(F)$ em Q com multiplicidade 3. Cada fator de f_4 corresponde a um ponto $V(F) \cap V(z)$. \square

Observação 4.2.4. *Se acrescentarmos, no enunciado do teorema acima, a hipótese de que $y = 0$ é a reta tangente a C em $P = (0 : 0 : 1)$, o Lema 4.2.1 implica ainda $f_1(x, y) = ay$, $a \in k^*$; isto é $F = az^3y + f_4$. Sem perda da generalidade podemos então supor $F = z^3y + f_4$. Em particular, a reta $V(y)$ não pode interceptar $V(F) - \{P\}$, pois isso implicaria y dividir f_4 . Portanto todo ponto de Galois é um 2-flex.*

Do Teorema 4.2.3 e da Observação 4.2.4 segue que:

Corolário 4.2.5. *P é ponto de Galois de C se e somente se for um 2-flex e cada reta por P que tangencia $C - \{P\}$ o faz em um 1-flex.*

Corolário 4.2.6. *O número de pontos de Galois em uma quártica lisa C é finito.*

Prova: Basta lembrar que o número de pontos de inflexão de uma curva quártica é finito e utilizar a observação acima. \square

Como o conjunto $k[x, y, z]_4$ dos polinômios homogêneos de grau quatro em três indeterminadas com coeficientes em k é isomorfo a k^{15} , o conjunto \mathcal{Q}_4 das quárticas em \mathbb{P}^2 é isomorfo a \mathbb{P}^{14} e, se $F(x, y, z) = \sum_{i+j+k=4} a_{ijk} x^i y^j z^k = a_{400} x^4 + a_{310} x^3 y + \dots + a_{004} z^4$, o isomorfismo associa $V(F) \in \mathcal{Q}_4$ ao ponto $(a_{400} : a_{310} : \dots : a_{004}) \in \mathbb{P}^{14}$.

Sejam $V(F) \in \mathcal{Q}_4$ e $P \in V(F)$ um ponto não singular. Então podemos supor, aplicando uma projetividade, que $P = (0 : 0 : 1)$ e que a reta tangente a $V(F)$ em P é $V(y)$. Como $I_{(0:0:1)}(F(x, y, 1), y) = \text{ord}_0 F(x, 0, 1)$, então o fato de $(0 : 0 : 1) \in V(F)$ ser um 2-flex equivale a ser $a_{301} = a_{202} = a_{103} = a_{004} = 0$, ou seja, o conjunto

das quárticas de \mathbb{P}^2 que possuem um 2-flex é um fechado próprio de \mathcal{Q}_4 . Logo, uma quártica genérica não possui 2-flex. Deduzimos:

Proposição 4.2.7. *Uma curva quártica plana genérica não possui pontos de Galois.*

Corolário 4.2.8. *O número n_C de pontos de Galois em uma quártica plana lisa $C = V(F)$ é 0, 1 ou 4. Além disso, se $n_C = 4$, todos os pontos de Galois estão alinhados.*

Prova: Já foi visto que o número $n = n_C$ é finito. Sejam P_1, \dots, P_n os pontos de Galois de C . Dado j , podemos tomar coordenadas tais que $P_j = (0, 0)$ e a reta tangente de C em P_j seja $V(y)$. Então Δ_{P_j} é um quadrado em $k[t]$, digamos

$$\Delta_{P_j} = t^2(t - \alpha_1)^2(t - \alpha_2)^2(t - \alpha_3)^2(t - \alpha_4)^2$$

onde os $\alpha_i \neq 0$.

Pelo Corolário 4.2.5, P_j é um 2-flex e cada reta ℓ_{α_i} que tangencia C o faz em um 1-flex, digamos $Q_j^{(i)}$. Então a cada ponto de Galois P_j corresponde um conjunto $\mathcal{F}(P_j) = \{P_j, Q_j^{(1)}, Q_j^{(2)}, Q_j^{(3)}, Q_j^{(4)}\}$. Se $V(H_F)$ é a hessiana de $C = V(F)$, então obtemos que $\sum_{R \in \mathcal{F}(P_j)} I_R(F, H_F) = 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$.

Se $A := \{\text{inflexões de } C\}$ e $B := \bigcup_{j=1}^n \mathcal{F}(P_j)$ temos $B \subseteq A$ e, logo,

$$24 = 3.4.(4 - 2) = \sum_{R \in A} I_R(F, H_F) \geq \sum_{R \in B} I_R(F, H_F) = 6.n_C$$

donde $n_C \leq 4$.

Pela Proposição 4.2.7 já sabemos que, genericamente, $n_C = 0$. Suponhamos então que $n_C \geq 1$, e seja P um ponto de Galois de C . Utilizamos o Teorema 4.2.3 para tomar coordenadas tais que $F = z^3 f_1 + f_4$ e $P = (0 : 0 : 1)$. Consideramos $\mathcal{G}_P = \langle \sigma \rangle$, com

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}$$

Suponhamos que existe outro ponto de Galois $Q \neq (0 : 0 : 1)$. Então Q é um 2-flex de C , de forma que podemos supor $Q = (a : b : 1)$, pelo Teorema 4.2.3. Obtemos que os pontos $Q = (a : b : 1)$, $\sigma Q = (a : b : \omega)$ e $\sigma^2 Q = (a : b : \omega^2)$ são todos pontos de Galois em C e distintos. Logo $n_C = 4$ e todos os pontos de Galois pertencem à reta $V(bx - ay)$. \square

Exemplo 4.2.9. Consideremos a quártica lisa $C \subset \mathbb{P}^2$ definida por

$$z^3y + x^4 + y^4 = 0.$$

Em virtude do Teorema 4.2.3, o ponto $(0 : 0 : 1)$ é um ponto de Galois de C . Considere os pontos distintos

$$(0 : c_1 : 1), (0 : c_2 : 1), (0 : c_3 : 1),$$

onde $c_i^3 = -1$ para todo $i = 1, 2, 3$.

Fixemos $c = c_i$ para $i \in \{1, 2, 3\}$. Se $f(x, y) = y + x^4 + y^4$ é a equação afim de $C \cap \{z \neq 0\}$, um cálculo direto mostra

$$\begin{aligned} g(x, y) &:= f(x, y + c) \\ &= c + c^4 + (4c^3 + 1)y + 6c^2y^2 + 4cy^3 + x^4 + y^4 \\ &= -3y + 6c^2y^2 + 4cy^3 + x^4 + y^4. \end{aligned}$$

Portanto

$$\hat{g}(x, t) := \frac{g(x, tx)}{x} = -3t + 6c^2t^2x + 4ct^3x^2 + (1 + t^4)x^3;$$

O discriminante correspondente é

$$\begin{aligned} \Delta(t) &= -243t^2(t^4 + 1)^2 + 576c^6t^{10} + 768c^3t^{10} - 864c^6t^6(t^4 + 1) - 1296c^3t^6(t^4 + 1) \\ &= -243t^2(t^4 + 1)^2 + 576t^{10} - 768t^{10} - 864t^6(t^4 + 1) + 1296t^6(t^4 + 1) \\ &= -3t^2(t^4 + 9)^2, \end{aligned}$$

donde segue que $(0, 0)$ é ponto de Galois de $g(x, y) = 0$. Portanto $(0, c)$ é ponto de Galois de C para todo $c \in \{c_1, c_2, c_3\}$. Obtemos um caso em que a curva quártica possui quatro pontos de Galois.

Referências Bibliográficas

- [Ahlfors] L. Ahlfors, *Complex Analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1979.
- [Atiyah-Macdonald] M.F. Atiyah and I.G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, 1969.
- [Brieskorn-Knörrer] E. Brieskorn and H. Knörrer, *Plane Algebraic Curves*, Birkhäuser-Verlag, 1986.
- [Fulton] W. Fulton, *Curvas Algebraicas - Introducción a la geometría algebraica*, Ed. Reverte, 1971.
- [Garcia-Lequain] A. Garcia e Y. Lequain, *Elementos de Álgebra*, segunda edição, Coleção Projeto Euclides, IMPA, 2003.
- [Hartshorne] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer, 1977.
- [Hulek] K. Hulek, *Elementary Algebraic Geometry*, Student mathematical library, V.20, American mathematical Society 2003.
- [Jost] J. Jost, *Compact Riemann Surfaces. An Introduction to Contemporary Mathematics*, Springer 2002.
- [Lima] E. Lages Lima, *Curso de Análise Vol. II*, Projeto Euclides, IMPA, 1981.
- [Miranda] R. Miranda, *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, Graduated Studies in Mathematics, V. 5, American Mathematical Society 1997.

- [Miura] K. Miura, *Galois points on singular plane quartic curves*, J. Algebra, 287 (2005), 283-293.
- [Miura-Yoshihara] K. Miura and H. Yoshihara, *Field theory for function fields of plane quartic curves*, J. Algebra, 226 (2000), 283-294.
- [Shafarevich] I. R. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1994.
- [Stewart] I. Stewart, *Galois Theory*, 3rd edition, Chapman and Hall, 2004.
- [Vainsencher] I. Vainsencher, *Introdução às Curvas Algébricas Planas*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 1996.
- [Yoshihara] H. Yoshihara, *Rational Curve with Galois Point and Extendable Galois Automorphism*, a aparecer em Journal of Algebra.
- [Zariski-Samuel] O. Zariski, P. Samuel, *Commutative Algebra*, V. 1, Princeton, N. J., Van Nostrand and Co. 1958.