

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Alguns resultados sobre a teoria de
restrição da transformada de Fourier**

por

Junielson Pantoja de Aquino

Trabalho submetido como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Lucas Da Silva Oliveira
Orientador

Porto Alegre, dezembro de 2016.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

de Aquino, Junielson Pantoja

Alguns resultados sobre a teoria de restrição da transformada de Fourier / Junielson Pantoja de Aquino.—Porto Alegre: PPGMAP da UFRGS, 2016.

75 p.: il.

Dissertação (Mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2016.

Orientador: Oliveira, Lucas Da Silva

Dissertação: Matemática Aplicada,
Doutorado, Tese, Mestrado, Dissertação

Alguns resultados sobre a teoria de restrição da transformada de Fourier

por

Junielson Pantoja de Aquino

Trabalho submetido ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Análise Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Lucas Da Silva Oliveira

Banca examinadora:

Prof. Dr. José Afonso Barrionuevo
PPGMAp-UFRGS

Prof. Dr. Ricardo Alonso
PUC-Rio

Prof. Dr. Diego Marcon Farias
PPGMAT-UFRGS

Dissertação apresentada e aprovada em
dezembro de 2016.

Prof. Dr. Carlos Hoppen
Coordenador

*“Você pode destruir mil planetas,
galáxias, ou universos, mas não é capaz
de destruir este Saiyajin.”*

Akira Toriyama

AGRADECIMENTO

Primeiramente, meus mais profundos e sinceros agradecimentos a Deus, que nos presenteia com a vida e a oportunidade de aprender e evoluir neste mundo.

Agradeço imensamente aos meus amados pais que sempre batalharam para proporcionar uma vida digna e honesta a nossa família e um futuro melhor para seus filhos. Agradeço também ao meu querido irmão pela participação especial e insubstituível que têm na minha vida. Aos demais familiares que sempre torceram por mim, obrigado por tudo.

Ao professor Lucas da Silva Oliveira, meu orientador e amigo, admirável pessoa que está sempre disposto a nos ajudar, o meu sincero obrigado! Aos colegas e amigos da PPGMAp, quero agradecer pelos bons momentos passados diariamente em nosso laboratório, com conversas enriquecedoras e descontraídas. Meus agradecimentos também a todos os professores que compartilharam comigo um pouco de suas experiências.

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro e finalmente, quero agradecer aos demais companheiros, com que tive o prazer de conviver pouco ou muito durante estes anos, e que me proporcionam, neste instante, fazer uso do abençoado dom da gratidão!

Muito obrigado!

Sumário

LISTA DE SÍMBOLOS	ix
RESUMO	xi
ABSTRACT	xii
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Estimativas de restrição e estimativas de extensão	3
1.1.1 Condições necessárias para $R_{p \rightarrow q}(S^{n-1})$ ser válida	5
1.2 Organização do Texto da Dissertação	8
2 TEOREMA DE RESTRIÇÃO STEIN-TOMAS	10
2.1 O <i>Endpoint</i>	15
2.2 Estimativas de Strichartz	20
2.2.1 Caracterização da EDP dispersiva pela transformada de Fourier	20
2.2.2 Estimativa geral de Strichartz para a equação de Schrödinger	22
3 OPERADORES INTEGRAIS OSCILATÓRIOS E RESTRIÇÃO	27
3.1 Hausdorff-Young generalizado	27
3.2 A partir do operador Integral oscilatório para restrição	29
3.3 Resultado <i>sharp</i> no plano	30
3.4 O teorema de Carleson-Sjölin	33

4	RESULTADOS RECENTES SOBRE A CONJECTURA DE RESTRIÇÃO	39
5	APÊNDICE A	45
5.1	Teoremas de Interpolação	45
5.2	Desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev	52
6	APÊNDICE B	58
6.1	Transformada de Fourier	58
6.2	Transformada de Fourier de funções radiais, função de Bessel	63
7	APÊNDICE C	67
7.1	Medidas de Hausdorff. Dimensão de Hausdorff	67
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	71

LISTA DE SÍMBOLOS

Lista de Símbolos

\mathbb{N}	Conjunto dos números naturais, ou seja, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.
\mathbb{Z}	Conjunto dos números inteiros.
\mathbb{C}	Conjunto dos números complexos.
\mathbb{R}^n	Espaço euclidiano n-dimensional.
A	Subconjunto do \mathbb{R}^n .
S	Superfície do \mathbb{R}^n .
C_0^∞	Espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto.
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	Espaço de Schwartz.
$L^p(X)$	Espaço das funções $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ mensuráveis, tais que $\int_X f ^p d\mu < \infty$.
$\ \cdot\ _{L^p(X)}$	Norma das funções em $L^p(X)$.
$\mathcal{M}(X)$	Conjunto das medidas $\mu : X \rightarrow [0, \infty)$.
$d\sigma$	Denota a medida de superfície da esfera unitária S^{n-1} .
J_n	Função de Bessel.
Γ	Função gama.

RESUMO

A análise harmônica é o ramo da matemática que estuda a representação de funções ou sinais como a sobreposição de ondas base. Ela investiga e generaliza as noções das séries de Fourier e da transformação de Fourier. Neste trabalho, investigou-se um teorema de restrição da transformada de Fourier devido a Mitsis e Mockenhaupt (uma generalização do teorema de Stein-Tomas). Foram realizados estudos analíticos sobre o método para operadores integrais oscilatórios, baseado na fase estacionária. Os resultados permitem deduzir o teorema de restrição no plano (em seu caso geral) e o teorema de Carleson-Sjölin.

Palavras-chave: 1. transformada de Fourier. 2. operadores integrais oscilatórios.

ABSTRACT

Harmonic analysis is the mathematical branch that studies the function or signals representation as a base wave overlay. It investigates and generalizes the notions of Fourier series and of the Fourier transform. In this work, was investigated a restriction theorem of the Fourier transform due to Mitsis and Mockenhaupt (a generalization of Stein-Tomas theorem) . Were performed analytic studies on the method for oscillating integral operators, based in the stationary phase. The results allow deducing the restriction theorem on the plane (in the general case) and the Carleson-Sjölin theorem.

Key-words: 1. Fourier transform. 2. oscillating integral operators.

1 INTRODUÇÃO

Assumimos que o leitor está familiarizado com os fatos básicos sobre os espaços L^p , transformada de Fourier L^1 e L^2 , convoluções. Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função L^1 então o Lema de Reimann-Lebesgue implica que a transformada de Fourier \widehat{f} , definida por

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx$$

é uma função contínua e limitada no \mathbb{R}^n que se anula no infinito. Em particular, podemos restringir esta função a qualquer subconjunto A do \mathbb{R}^n , criando uma função contínua limitada $\widehat{f}|_A$ em A .

Por outro lado, se f é uma função arbitrária do L^2 , então a transformada de Fourier é um isomorfismo unitário de L^2 sobre si mesmo e, conseqüentemente, \widehat{f} está definida q.t.p; em particular, não há nenhuma forma para restringir \widehat{f} a qualquer conjunto A de medida zero.

Entre esses dois extremos, pode-se perguntar o que acontece com a transformada de Fourier de uma função $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, onde $1 < p < 2$. Para essa faixa de valores vale a desigualdade de Hausdorff-Young, que nos garante que pelo menos \widehat{f} estará em $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, onde $2 < p' < \infty$. Isso nos garante que podemos restringir \widehat{f} a conjuntos de medida positiva para qualquer $2 < p' < \infty$. Não podemos, a partir daqui, a priori, restringir a transformada de Fourier a subconjuntos de medida nula. Mas será que isso faz ao menos sentido?

Vejamos o seguinte exemplo. Fixe um $p > 1$ e considere a hipersuperfície $A = \{\xi \in \mathbb{R}^n; \xi_1 = 0\}$ e a função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$f(x) = \frac{\varphi(x_2, \dots, x_n)}{1 + |x_1|}, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1}).$$

Um cálculo simples nos mostra que

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-2\pi i \tilde{x} \cdot \tilde{\xi}} \varphi(\tilde{x}) d\tilde{x} \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x_1 \xi_1} \frac{1}{1 + |x_1|} dx_1, \quad \tilde{x} = (x_2, \dots, x_n).$$

Denotando por $H(\xi) = \widehat{f}|_A(\xi)$ observe que

$$H(\xi) = \widehat{\varphi}(\tilde{\xi}) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + |x_1|} dx_1,$$

de onde segue que $H(\xi)$ não está definida q.t.p.

Isso deixa em aberto a questão do que acontece com conjuntos A que têm medida zero mas que não estão contidos em hiperplanos. A observação crucial feita originalmente por Stein é dada pelo seguinte resultado,

Teorema. *Seja $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ($n > 1$), e dado $1 \leq p < 4n/(3n + 1)$. Então temos uma desigualdade a priori*

$$\left(\int_{S^{n-1}} |\widehat{f}(x)|^2 d\sigma(x) \right)^{1/2} \leq A_p \|f\|_p,$$

onde $d\sigma$ denota a medida de superfície da esfera unitária S^{n-1} .

Esse resultado nos permite definir a restrição $\widehat{f}|_{S^{n-1}}$ para $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < 4n/(3n + 1)$, apesar de S^{n-1} ter medida nula em \mathbb{R}^n . Para a prova do resultado e mais detalhes ver o artigo do Fefferman [10]. Isso levou ao problema de restrição [27]: para quais valores de $1 \leq p, q \leq \infty$ vale a desigualdade¹

$$\|\widehat{f}\|_{L^q(A)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}?$$

Vamos concentrar nossa atenção nos conjuntos A que são hipersuperfícies, ou subconjuntos compactos de hipersuperfícies. Em particular, estaremos interessados na esfera

$$S_{sphere} := \{\xi \in \mathbb{R}^n; |\xi| = 1\}, \quad (1.1)$$

no parabolóide

$$S_{parab} := \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n; \xi_n = \frac{1}{2} |\xi'|^2 \right\} \quad (1.2)$$

¹Estamos interpretando $\widehat{f}|_{S^{n-1}}$ para funções bem comportadas e, se for possível obter tal estimativa, estendemos ela para funções arbitrárias de L^p

e no cone

$$S_{cone} := \{\xi \in \mathbb{R}^n; \xi_n = |\xi'|\}, \quad (1.3)$$

onde $\xi = (\xi', \xi_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^n$, e vamos sempre tomar $n \geq 2$ para evitar situações triviais.

Observação 1.1. *Observe que, o cone difere da esfera e o parabóloide na medida em que tem uma curvatura principal.*

1.1 Estimativas de restrição e estimativas de extensão

Se g é uma função contínua em \mathbb{R}^n , sua restrição a uma hipersuperfície $S \subset \mathbb{R}^n$ é uma função bem definida. Por uma hipersuperfície queremos dizer uma subvariedade de \mathbb{R}^n de dimensão $n - 1$. Assim, se f é uma função integrável em \mathbb{R}^n , a sua transformada de Fourier \widehat{f} é contínua e limitada (ver Apêndice B [6.2]); conseqüentemente, a sua restrição $\widehat{f}|_S$ em S é bem definida. A fim de restringir a transformada de Fourier de uma função em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para S , será suficiente obtermos a priori a “estimativa de restrição”

$$\|\widehat{f}\|_{L^q(S)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

para todas as funções $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e algum $1 \leq q \leq \infty$.

Definição 1.1. *Seja $1 \leq p, q \leq \infty$. Dizemos que uma hipersuperfície S do \mathbb{R}^n satisfaz um teorema restrição (p, q) se o operador restrição*

$$f \rightarrow \widehat{f}|_S,$$

que inicialmente está definido para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, possui uma extensão que mapeia $L^p(\mathbb{R}^n)$ continuamente em $L^q(S)$. A norma desta extensão pode depender de p, q, n e S . Se S satisfaz um teorema de restrição (p, q) , nós escrevemos que a propriedade $R_{p \rightarrow q}(S)$ é válida. Dizemos que a propriedade $R_{p \rightarrow q}(S)$ é válida com constante C se para todo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\|\widehat{f}\|_{L^q(S)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.4)$$

Exemplo 1.1. A propriedade $R_{1 \rightarrow \infty}(S)$ vale para toda hipersuperfície compacta S .

Proposição 1. Seja $1 \leq p, q \leq \infty$ e $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. São equivalentes para qualquer $0 < C < \infty$:

$$1. \|\widehat{f}\|_{L^q(\mu)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \text{ para todo } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

$$2. \|\widehat{f\mu}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L^{q'}(\mu)} \text{ para todo } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

No caso $q = 2$, (1) e (2) são equivalentes a

$$3. \|\widehat{\mu} * f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq C^2 \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \text{ para todo } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Prova. Suponha que vale 1 e vamos mostrar que 2. segue. Seja $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq 1$, sabemos que por (Apêndice B [6.18]) vale

$$\int \widehat{f\mu}g = \int f\widehat{g}d\mu;$$

aplicando a desigualdade de Hölder no lado direito da igualdade acima, com os expoentes conjugados q e q' e usando 1. segue

$$\begin{aligned} \int \widehat{f\mu}g &\leq \|f\|_{L^{q'}(\mu)} \|\widehat{g}\|_{L^q(\mu)} \\ &\leq C \|f\|_{L^{q'}(\mu)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L^{q'}(\mu)}. \end{aligned}$$

Logo, usando dualidade e a desigualdade acima, obtemos

$$\|\widehat{f\mu}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\substack{g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\ \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq 1}} \int \widehat{f\mu}g \leq C \|f\|_{L^{q'}(\mu)}.$$

1. segue de 2. com um argumento análogo. Para provarmos 3. Usaremos a fórmula

$$\int (\widehat{\mu} * \bar{f})g = \int \widetilde{f\widehat{g}}d\mu \text{ válido para todo } f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Se 1. vale para $q = 2$, dados $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\int \widetilde{f\widehat{g}}d\mu \leq \|\widehat{g}\|_{L^2(\mu)} \|\widetilde{f}\|_{L^2(\mu)} \leq C^2 \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)};$$

tomando o supremo sobre todos $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq 1$ obtemos 3.. Se 3. vale, então 1. segue aplicando a formula acima com $f = g$. \square

Denotamos por $\mathfrak{R}(f) = \widehat{f}|_S$ a restrição da transformada de Fourier em uma hipersuperfície S . Seja $d\sigma$ a medida da superfície induzida canonicamente em S . Então para uma função φ definida em S , temos

$$\int_S \widehat{f}\varphi d\sigma = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}\mathcal{F}^{-1}(\widehat{\varphi d\sigma})d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f\widehat{\varphi d\sigma}dx,$$

ou seja, a transposição do operador linear \mathfrak{R} é o operador linear

$$\mathfrak{R}^t(\varphi) = \widehat{\varphi d\sigma}. \quad (1.5)$$

Por dualidade da proposição 1., vemos que o teorema de restrição (p, q) para uma hipersuperfície compacta S é equivalente ao seguinte teorema de extensão para S :

$$\|\widehat{\varphi d\sigma}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\varphi\|_{L^q(S)}. \quad (1.6)$$

Aqui p' e q' são expoentes conjugados de p e q . Se usarmos $R_{q' \rightarrow p'}^*(S)$ para designar a afirmação de que a estimativa (1.6) é válida, então $R_{q' \rightarrow p'}^*(S)$ é equivalente a $R_{p \rightarrow q}(S)$.

Nosso primeiro objetivo é determinar todos os pares de índices (p, q) para qual a esfera S^{n-1} satisfaz o teorema de restrição (p, q) .

1.1.1 Condições necessárias para $R_{p \rightarrow q}(S^{n-1})$ ser válida

Vamos agora refletir sobre quais pares (p, q) a restrição $R_{p \rightarrow q}(S^{n-1})$ é válida.

Observação 1.2. *Se $R_{p \rightarrow q}(S^{n-1})$ é válido, então também vale $R_{r \rightarrow s}(S^{n-1})$ para qualquer par (r, s) com $s \leq q$ e $r \leq p$. De fato, usando a desigualdade de Hölder, temos*

$$\|\widehat{f}\|_{L^s(S^{n-1})} \lesssim \|\widehat{f}\|_{L^q(S^{n-1})}.$$

Como

$$\|\widehat{f}\|_{L^q(S^{n-1})} \lesssim \|\widehat{f}\|_{L^\infty(S^{n-1})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

se assumirmos que

$$\|\widehat{f}\|_{L^q(S^{n-1})} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

uma aplicação do Teorema de Riesz-Thorin (Apêndice A [5.2]) nas duas últimas desigualdades, nos mostra que

$$\|\widehat{f}\|_{L^q(S^{n-1})} \lesssim \|f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)},$$

onde $1 \leq r \leq p$.

Exemplo 1.2. Seja $d\sigma$ a medida de superfície na esfera unitária S^{n-1} . Usando a identidade no Apêndice B 6.2, temos

$$\widehat{d\sigma}(\xi) = \frac{2\pi}{|\xi|^{\frac{n-2}{2}}} J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi|\xi|).$$

Em vista das estimativas assintóticas no Apêndice B 6.2, a última expressão satisfaz

$$\widehat{d\sigma}(\xi) = \frac{2}{|\xi|^{\frac{n-2}{2}}} \cos(2\pi|\xi| - \frac{\pi(n-1)}{4}) + O(|\xi|^{-\frac{n+1}{2}})$$

quando $|\xi| \rightarrow \infty$. Segue que $\mathfrak{R}^t(1)(\xi) = \widehat{d\sigma}(\xi)$ não está em $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ se $\frac{n-1}{2}p' \leq n$. Assim $R_{p \rightarrow q}(S^{n-1})$ falha quando $\frac{2n}{n+1} \leq p$, como $R_{1 \rightarrow q}(S^{n-1})$ vale para todo $q \in [1, \infty]$. Conclui-se que uma condição necessária para $R_{p \rightarrow q}(S^{n-1})$ valer é

$$1 \leq p < \frac{2n}{n+1}. \quad (1.7)$$

Em adição a esta condição, uma outra condição necessária para $R_{p \rightarrow q}(S^{n-1})$ valer, é dado pelo seguinte exemplo de Knapp.

Exemplo 1.3. (Knapp). Seja $e_n = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n, n \geq 2$, e o conjunto para $0 < \delta < 1$,

$$C_\delta = \{x \in S^{n-1} : 1 - x \cdot e_n \leq \delta^2\}$$

defina $\varphi = \chi_{C_\delta}$ então

$$\|\varphi\|_{L^{q'}(S^{n-1})} = d\sigma(C_\delta)^{1/q'} \approx \delta^{(n-1)/q'}. \quad (1.8)$$

Note agora que C_δ é uma calota esférica de raio δ , mais precisamente, $|x_j| \leq \sqrt{2}\delta$ para $x \in C_\delta, j = 1, \dots, n-1$. Para $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \left| \widehat{\varphi d\sigma}(\xi) \right| &= \left| \int_{C_\delta} e^{-2\pi i \xi \cdot x} d\sigma(x) \right| = \left| \int_{C_\delta} e^{-2\pi i \xi \cdot (x - e_n)} d\sigma(x) \right| \\ &\geq \int_{C_\delta} \cos(2\pi \xi \cdot (x - e_n)) d\sigma(x). \end{aligned}$$

Nós usamos somente que $|e^{-2\pi i \xi \cdot e_n}| = 1$ e que o valor absoluto de um número complexo e ao menos a sua parte real. Observe que

$$|2\pi \xi \cdot (x - e_n)| < \pi/3 \quad \text{para } x \in C_\delta, \xi \in R_\delta,$$

onde

$$R_\delta = \{ \xi \in \mathbb{R}^n : |\xi_j| \leq c/\delta \text{ para } j = 1, \dots, n-1, |\xi_n| \leq c/\delta^2 \},$$

e $c = 1/(12n)$; assim

$$\left| \widehat{\varphi d\sigma}(\xi) \right| \geq d\sigma(C_\delta)/2 \quad \text{para } \xi \in R_\delta.$$

Como $\mathcal{L}^n(R_\delta) = 2^n c^n \delta^{-n-1}$, temos que

$$\| \widehat{\varphi d\sigma} \|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \geq (d\sigma(C_\delta)/2) \mathcal{L}(R_\delta) \approx \delta^{n-1-(n+1)/p'}. \quad (1.9)$$

Combinando (1.9) com (1.8), vemos que para a desigualdade

$$\| \widehat{\varphi d\sigma} \|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \| \varphi \|_{L^{q'}(S^{n-1})}$$

ser satisfeita, devemos ter

$$\delta^{n-1-(n+1)/p'} \lesssim \delta^{(n-1)/q'};$$

como $0 < \delta < 1$ a desigualdade acima só é válida se $n-1-(n+1)/p' \geq (n-1)/q'$, isto é, se

$$\frac{1}{q} \geq \frac{n+1}{n-1} \frac{1}{p'}. \quad (1.10)$$

Portanto uma condição necessária para $R_{p \rightarrow q}(S^{n-1})$ ser válida é que (p, q) pertençam ao conjunto abaixo:

$$\left\{ (p, q) : \frac{1}{q} = \frac{n+1}{n-1} \frac{1}{p'} \text{ e } 1 \leq p < \frac{2n}{n+1} \right\}. \quad (1.11)$$

Quando $q' = 2$, $p' = \frac{2(n+1)}{n-1}$ é o expoente do Teorema de Stein-Thomas. A conjectura de restrição pergunta se isso poderia ser estendido a partir de $p' \geq 2(n+1)/(n-1)$ para $p' > 2n/(n-1)$.

Nos próximos capítulos trataremos do caso $q' = 2$ de (1.11) e também do caso geral quando $n = 2$.

1.2 Organização do Texto da Dissertação

Após apresentar a introdução e também os objetivos do trabalho no Capítulo 1, o Capítulo 2 trata de uma versão generalizada do Stein-Tomas devido a Mitsis [21] e Mockenhaupt [22]; isso nos permite codificar vários tipos de resultados em um só teorema (o original do Stein-Tomas era apenas para a esfera) e que é possível até mesmo retirar a restrição original $n \geq 2$ (que era necessária já que eles estavam interessados em hipersuperfícies), permitindo classes de teorema de restrição na reta, e em seguida será apresentada uma prova do *endpoint* do teorema de Stein-Tomas através do teorema de interpolação de Stein, seguindo o livro [25]. O Capítulo 3 apresenta o método para operadores integrais oscilatórios, no qual iremos seguir o argumento apresentado por Hörmander [15] (mas que, de forma geral, a ideia utilizada por todos os autores é a mesma). Estes resultados apresentados por Hörmander permitem deduzir, além do teorema de restrição no plano, outro resultado, o Teorema de Carleson-Sjölin, que é o caso conhecido da Conjectura de Bochner-Riesz.

No Capítulo 4 iremos apresentar tabelas de alguns resultados recentes sobre a conjectura de restrição, e descrever um pouco sobre o problema de restrição bilinear, restrição multilinear e a conjectura de Keakeya linear e multilinear.

2 TEOREMA DE RESTRIÇÃO STEIN-TOMAS

Seja $d\sigma$ a medida de superfície da esfera S^{n-1} . O teorema de restrição de Stein-Tomas é a seguinte estimativa.

Teorema 2.1. *Para todo $p \geq \frac{2(n+1)}{n-1}$ existe uma constante $C_{p,n} > 0$ tal que*

$$\|\widehat{fd\sigma}\|_{L^p} \leq C_{p,n} \|f\|_{L^2(d\sigma)}$$

para todo $f \in L^2(d\sigma)$. Além disso, o expoente acima é o melhor possível.

Este resultado foi estendido a diversas situações mais gerais onde a esfera é substituída por variedades suaves que satisfazem certas hipóteses de curvatura. Para a prova e mais detalhes, o leitor pode consultar Stein [28].

O objetivo principal deste capítulo é apresentar uma versão generalizada do Stein-Tomas devido a Mitsis [21] e Mockenhaupt [22]; eles observaram que o seguinte resultado de restrição para medidas gerais, vale:

Teorema 2.2. *Sejam $0 < \alpha < n$, $\beta > 0$ e $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$\mu(B(x, r)) \leq c(\mu)r^\alpha \quad \text{para } x \in \mathbb{R}^n, r > 0, \quad (2.1)$$

e

$$\left| \widehat{d\mu}(\xi) \right| \leq c(\mu)(1 + |\xi|)^{-\beta} \quad \text{para } \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (2.2)$$

então para todo $f \in L^2(d\mu)$ vale

$$\left\| \widehat{fd\mu} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C(n, q, \alpha, \beta, c(d\mu)) \|f\|_{L^2(d\mu)}$$

com $p > 2(n + \beta - \alpha)/\beta$.

Prova. Quando $p = \infty$ a desigualdade é trivial. Note que pelo Teorema de Riemann-Lebesgue (Apêndice B [6.2]), temos

$$\|\widehat{fd\mu}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|fd\mu\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^1(d\mu)} \leq \mu(\mathbb{R}^n)^{1/2} \|f\|_{L^2(d\mu)},$$

de onde segue

$$\|f\widehat{d\mu}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L^2(d\mu)}.$$

Vamos considerar agora $p < \infty$. Pela proposição 1. a afirmação acima é equivalente a

$$\left\|\widehat{d\mu} * f\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C^2 \|f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \quad \text{para } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (2.3)$$

A ideia da prova é escrever $\widehat{d\mu}$ como uma decomposição de funções K e K_j , e estimar cotas para $\|K * f\|_{L^p}$ e $\|K_j * f\|_{L^p}$, sendo que o primeiro termo será facilmente estimado enquanto que o segundo será estimado via interpolação de duas cotas para $\|K_j * f\|_{L^\infty}$ e $\|K_j * f\|_{L^2}$.

Passo 1. Seja $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\chi \geq 0$, $\chi(x) = 1$ quando $|x| \geq 1$ e $\chi(x) = 0$ quando $|x| \leq 1/2$, defina

$$\varphi(x) = \chi(2x) - \chi(x)$$

Então

$$\text{supp}(\varphi) \subset [1/4, 1],$$

e

$$\sum_{j=0}^{\infty} \varphi(2^{-j}x) = 1 \quad \text{quando } |x| \geq 1.$$

Escreva

$$\begin{aligned} \widehat{d\mu} &= K + \sum_{j=0}^{\infty} K_j, \\ K_j(x) &= \varphi(2^{-j}x)\widehat{d\mu}(x), \\ K(x) &= \left(1 - \sum_{j=0}^{\infty} \varphi(2^{-j}x)\right)\widehat{d\mu}(x). \end{aligned}$$

Assim K e K_j são funções com suporte compacto, $\text{supp}(K) \subset B(0, 1)$ e $\text{supp}(K_j) \subset [2^{j-2}, 2^j]$.

Passo 2. Aplicando a desigualdade de Young para convoluções, isto é,

$$\|g * h\|_{L^p} \leq \|g\|_{L^q} \|h\|_{L^r} \quad \text{onde } 1 \leq p, q, r \leq \infty, \frac{1}{p} + 1 = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$$

com $g = K, h = f, q = p/2$ e $r = p'$ e usando $\|K\|_q \lesssim \|K\|_\infty \lesssim 1$, obtemos

$$\|K * f\|_p \lesssim \|f\|_{p'}. \quad (2.4)$$

Passo 3. Agora, vamos obter uma cota para $\|K_j * f\|_{L^p}$; a estimativa vai seguir através da interpolação de duas cotas para $\|K_j * f\|_{L^\infty}$ e $\|K_j * f\|_{L^2}$. Para $j = 0, 1, \dots$, temos por (2.2) a estimativa

$$\|K_j\|_\infty \lesssim 2^{-\beta j},$$

de onde segue

$$\|K_j * f\|_\infty \lesssim 2^{-\beta j} \|f\|_1. \quad (2.5)$$

Definindo $\psi, \psi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ por

$$\psi = \check{\varphi}, \quad \psi_j(x) = 2^{nj} \psi(2^j x),$$

$$\widehat{\psi} = \varphi \quad \text{e} \quad \widehat{\psi}_j(x) = \varphi(2^{-j} x),$$

de modo que $K_j = \widehat{\psi}_j \widehat{d\mu} = \widehat{\psi_j} * \widehat{d\mu}$ (ver Apêndice B [6.20]), segue que $\widehat{K_j} = \widetilde{\widehat{\psi_j} * \widehat{d\mu}}$ onde $\widetilde{g}(x) = g(-x)$ (ver Apêndice B [6.7]). Como $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\left| \widehat{K_j}(\xi) \right| = \left| 2^{nj} \int \psi(2^j(-\xi - \eta)) d\mu(\eta) \right| \lesssim 2^{nj} \int (1 + 2^j |\xi + \eta|)^{-n} d\mu(\eta);$$

logo

$$\begin{aligned} \left| \widehat{K_j}(\xi) \right| &\lesssim 2^{nj} \int_{B(-\xi, 2^{-j})} (1 + 2^j |\xi + \eta|)^{-n} d\mu(\eta) \\ &+ 2^{nj} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{B(-\xi, 2^{k+1-j})/B(-\xi, 2^{k-j})} (1 + 2^j |\xi + \eta|)^{-n} d\mu(\eta) \\ &\lesssim 2^{nj} \left(\mu(B(-\xi, 2^{-j})) + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-nk} \mu(B(-\xi, 2^{k+1-j})) \right) \\ &\lesssim 2^{nj} \left(2^{-\alpha j} + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-nk} 2^{\alpha(k+1-j)} \right) \\ &= 2^{(n-\alpha)j} \left(1 + 2^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(\alpha-n)} \right). \end{aligned}$$

Como $\alpha < n$, temos que a serie é finita; tomando

$$C(n, \alpha) = 1 + 2^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(\alpha-n)}$$

segue que

$$\left| \widehat{K}_j(\xi) \right| \lesssim 2^{(n-\alpha)j} C(n, \alpha).$$

Isto nos dá para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, a estimativa

$$\|K_j * f\|_2 = \left\| \widehat{K_j * f} \right\|_2 = \left\| \widehat{K}_j \widehat{f} \right\|_2 \lesssim 2^{(n-\alpha)j} \|f\|_2. \quad (2.6)$$

Seja $\theta \in (0, 1)$ e defina $\frac{\theta}{2} + \frac{(1-\theta)}{\infty} = \frac{1}{p}$. Pelo Teorema de Riesz-Thorin (Apêndice A [5.1]) segue que

$$\|K_j * f\|_p \lesssim 2^{(n-\alpha)j\theta} 2^{(1-\theta)-\beta j} \|f\|_{p'}$$

usando o fato de que $\theta = \frac{2}{p}$, obtemos

$$\begin{aligned} (n-\alpha)j\theta - \beta j(1-\theta) &= j \left((n-\alpha)\frac{2}{p} - \beta\left(1 - \frac{2}{p}\right) \right) \\ &= j \left(\frac{2(n+\beta-\alpha)}{p} - \beta \right), \end{aligned}$$

de onde segue

$$\|K_j * f\|_p \lesssim 2^{j\left(\frac{2(n+\beta-\alpha)}{p} - \beta\right)} \|f\|_{p'}.$$

Passo 4. Pelo **passo 1** temos que

$$\begin{aligned} \left\| \widehat{d\mu} * f \right\|_p &= \left\| \left(K + \sum_{j=0}^{\infty} K_j \right) * f \right\|_p \\ &\leq \|K * f\|_p + \left\| \sum_{j=0}^{\infty} K_j * f \right\|_p \\ &\leq \|K * f\|_p + \sum_{j=0}^{\infty} \|K_j * f\|_p; \end{aligned}$$

usando os resultados obtidos no **passo 2 e 3**, obtemos

$$\left\| \widehat{d\mu} * f \right\|_p \lesssim \|f\|_{p'} + \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j\left(\frac{2(n+\beta-\alpha)}{p}-\beta\right)} \|f\|_{p'}.$$

Como $p > \frac{2(n+\beta-\alpha)}{\beta}$, isso implica que $\frac{2(n+\beta-\alpha)}{p} - \beta < 0$; logo

$$\left\| \widehat{d\mu} * f \right\|_p \lesssim \|f\|_{p'} + C \|f\|_{p'}.$$

□

Corolário 2.1. (*Teorema de Stein-Tomas*) *Seja $d\sigma$ a medida de superfície da esfera S^{n-1} . Temos que*

$$d\sigma(B(x, r)) \lesssim r^{n-1}$$

e

$$|\widehat{d\sigma}(\xi)| \lesssim (1 + |\xi|)^{-\frac{n-1}{2}},$$

ver (Apêndice B 6.2). Então, existe $C_{n,p} > 0$ tal que

$$\|\widehat{fd\sigma}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_{n,p} \|f\|_{L^2(d\sigma)}$$

para todo $f \in L^2(d\sigma)$, com $p > \frac{2(n+1)}{n-1}$.

Prova. Tomando $\alpha = n - 1$ e $\beta = (n - 1)/2$, temos que $d\sigma$ satisfaz as condições (2.1) e (2.2) do Teorema 2.2 e $p > \frac{2(n+1)}{n-1} = 2(n + \beta - \alpha)/\beta$. Portanto, aplicando o Teorema 2.2, o resultado segue. □

Observação 2.1. *O fato de que o expoente $p \geq \frac{2(n+1)}{n-1}$ no teorema de Stein-Tomas 2.1 é o melhor possível, segue do exemplo de Knapp 1.3.*

Observação 2.2. *A desigualdade dual para o Teorema 2.1 é dado por*

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(S^{n-1})} \leq C_{n,p} \|f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}, \quad 1 \leq p' \leq \frac{2(n+1)}{n+3}. \quad (2.7)$$

Na próxima seção daremos uma prova do *endpoint* para o Teorema de Stein-Tomas, seguindo o livro do Muscalu e Schlag [25].

2.1 O *Endpoint*

A fim de alcançar o *endpoint* $p = (2n + 2)/(n + 3)$, aplicaremos uma ideia baseada no Teorema de interpolação de Stein e no Lema das três linhas de Análise Complexa. Vamos determinar uma família de operadores

$$T_z := \sum_{j \geq 0} \omega_j(z) T_j$$

que varia de forma analítica no parâmetro z , satisfazendo as hipóteses de limitação e de crescimento necessárias, de tal forma que, na faixa $0 \leq \Re(z) \leq 1$ o operador analítico tenha a seguinte propriedade

$$T_z : L^1 \mapsto L^\infty \quad \text{para } \Re(z) = 1,$$

$$T_z : L^2 \mapsto L^2 \quad \text{para } \Re(z) = 0.$$

Então segue que

$$T_\theta : L^p(\mathbb{R}^n) \mapsto L^{p'}(\mathbb{R}^n) \quad \text{para } 1/p' = (1 - \theta)/2.$$

Escolheremos de maneira cuidadosa os pesos $\omega_j(z)$ de tal forma que T_θ em um θ específico é a convolução por $\widehat{d\sigma}$.

Prova do *endpoint* para o Teorema de Tomas-Stein

Consideraremos uma superfície de curvatura diferente de zero, que pode ser escrita “localmente” como um gráfico: $\xi_n = h(\xi')$, $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Definindo

$$M_z(\xi) = \frac{1}{\Gamma(z)} (\xi_n - h(\xi'))_+^{z-1} \chi_1(\xi') \chi_2(\xi_n - h(\xi')) \quad (2.8)$$

onde $\chi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$, $\chi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ são funções de cortes suaves, Γ é a função gama e $\Re(z) > 0$. Além disso, $(\cdot)_+$ refere-se à parte positiva da função. Mostraremos que

$$T_z f := \mathcal{F}^{-1}(M_z \widehat{f}) \quad (2.9)$$

pode ser definida por meio de continuação analítica para $\Re(z) \leq 0$. As principais estimativas agora são

$$\|T_z\|_{2 \rightarrow 2} \leq B(z) \quad \text{para } \Re(z) = 1, \quad (2.10)$$

$$\|T_z\|_{1 \rightarrow \infty} \leq A(z) \quad \text{para } \Re(z) = -\frac{n-1}{2}, \quad (2.11)$$

onde $A(z)$ e $B(z)$ não crescem mais rápido do que $e^{c|z|^2}$ quando $|\Im(z)| \rightarrow \infty$. Veremos que a singularidade de $(\xi_n - h(\xi'))_+^{z-1}$ em $z = 0$ cancela o zero simples de $\Gamma(z)^{-1}$ em $z = 0$, dessa forma obteremos

$$M_0(\xi) = \chi(\xi') \delta_0(\xi_n - h(\xi')) d\xi'; \quad (2.12)$$

ver (11.23) abaixo; isto significa que $M_0(\xi)$ é proporcional á medida da superfície no gráfico. Então segue do Teorema de interpolação complexa de Stein que

$$f \mapsto M_0 * f$$

é limitado de $L^p \mapsto L^{p'}$, onde

$$\frac{1}{p'} = \frac{\theta}{\infty} + \frac{1-\theta}{2}, \quad 0 = -\theta \frac{n-1}{2} + 1 - \theta;$$

isso implica que

$$\frac{1}{p'} = \frac{n-1}{2n+2} \Rightarrow p = \frac{2n+2}{n+3},$$

como desejado. Resta verificar (2.10)-(2.12). Para mostrar, lembre-se que $\Gamma(z)^{-1}$ é uma função inteira com zeros simples em $z = 0, -1, -2, \dots$ tem a representação

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{\nu}\right) e^{-z/\nu}, \quad z = x + iy,$$

que converge em todo \mathbb{C} . Assim,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\Gamma(z)} \right|^2 &\leq |z|^2 e^{2\gamma x} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{x}{\nu}\right)^2 + \frac{y^2}{\nu^2} \right) e^{-2x/\nu} \\ &\leq |z|^2 e^{2\gamma x} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(e^{2x/\nu + |z|^2/\nu^2} e^{-2x/\nu} \right) = |z|^2 e^{2\gamma x} e^{|z|^2 \pi^2/6}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Em particular, se $\Re(z) = 1$ então para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$|M_z(\xi)| \leq (1 + y^2)e^{2\gamma} e^{(1+y^2)\pi^2/6} \chi_1(\xi') \chi_2(\xi_n - (\xi')) \leq C e^{cy^2}.$$

Assim (2.10) é satisfeito com $B(z) = C e^{cy^2}$. Observamos que o limite que acabamos de obter está longe de ser o ideal. O verdadeiro crescimento, dado pela fórmula de Stirling é de $|y|^{1/2} e^{\pi|y|/2}$ quando $|y| \rightarrow \infty$, mas isso não faz diferença no nosso caso particular.

Agora seja $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Assim, para $\Re(z) > 0$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} M_z(\xi) \varphi(\xi) d\xi &= \frac{1}{\Gamma(z)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^\infty \chi_2(t) \varphi(\xi', t + h(\xi')) t^{z-1} dt \chi_1(\xi') d\xi' \\ &= -\frac{1}{z\Gamma(z)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^\infty \frac{d}{dt} (\chi_2(t) \varphi(\xi', t + h(\xi'))) t^z dt \chi_1(\xi') d\xi'. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Observe que o lado direito é bem definido para $\Re(z) > -1$. Além disso, em $z = 0$, usando $z\Gamma(z)_{z=0} = 1$, nós temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} M_0(\xi) \varphi(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi_2(0) \varphi(\xi', h(\xi')) \chi_1(\xi') d\xi';$$

fazendo $\chi_2(0) = 1$, vemos que a continuação analítica de M_z em $z = 0$ é igual a

$$M_0(\xi) = \chi_1(\xi') d\xi' \delta_0(\xi_n - h(\xi')). \quad (2.15)$$

Note que, M_0 é proporcional à medida de superfície sobre uma área S da superfície, onde

$$S = \{(\xi', h(\xi')); \xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\}.$$

Isto é exatamente o que desejamos, uma vez que precisamos limitar $\widehat{d\sigma} * f$.

Observe que (2.14) pode ser continuada analiticamente para $\Re(z) > -1$.

Fazendo integração por partes extendemos isto para $\Re(z) > -2$, e assim por diante.

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} M_z(\xi) \varphi(\xi) d\xi &= \frac{(-1)^k}{z(z+1) \cdots (z+k-1)\Gamma(z)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi_1(\xi') \\ &\quad \times \int_0^\infty t^{z+k-1} \frac{d^k}{dt^k} (\chi_2(t) \varphi(\xi', t + h(\xi'))) dt d\xi', \end{aligned}$$

é bem definida para todo $\Re(z) > -k$.

A seguir, provaremos (2.11) por meio de uma estimativa sobre $\|\widehat{M}_z\|_\infty$. Isto requer o seguinte cálculo preliminar: Seja N um inteiro positivo tal que $N > \Re(z) + 1 > 0$. Afirmamos que

$$\left| \int_0^\infty e^{-2\pi i t \tau} t^z \chi_2(t) dt \right| \leq \frac{C_N (1 + |z|)^N}{1 + \Re(z)} (1 + |\tau|)^{-\Re(z)-1}. \quad (2.16)$$

Para provar (2.16), vamos dividir os casos em que $t\tau$ é grande ou pequeno. Seja $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\psi(t) = 1$ se $|t| \leq 1$ e $\psi(t) = 0$ se $|t| \geq 2$. Então, como $0 \leq \chi_2(t) \leq 1$ temos

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty e^{-2\pi i t \tau} t^z \psi(t\tau) \chi_2(t) dt \right| &\leq \int_0^\infty t^{\Re(z)} \psi(t|\tau|) dt \\ &\leq |\tau|^{-\Re(z)-1} \int_0^2 t^{\Re(z)} dt \leq \frac{C}{\Re(z) + 1} |\tau|^{-\Re(z)-1}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Se $|\tau| \leq 1$, então (2.17) não é maior do que

$$\int_0^\infty t^{\Re(z)} \chi_2(t) dt \leq \frac{C}{\Re(z) + 1}.$$

Assim

$$(2.17) \leq \frac{C}{\Re(z) + 1} (1 + |\tau|)^{-\Re(z)-1} \quad (2.18)$$

em todos os casos. Para tratar o caso em que $t\tau$ é grande, para o qual τ também é grande, exploramos cancelamento na fase. Mais precisamente,

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^\infty e^{-2\pi i t \tau} t^z (1 - \psi(t\tau)) \chi_2(t) dt \right| \\ &\leq \left(\frac{1}{2\pi|\tau|} \right)^N \int_0^\infty \left| \frac{d^N}{dt^N} (t^z (1 - \psi(t\tau)) \chi_2(t)) \right| dt \\ &\leq C_N \left(\frac{1}{2\pi|\tau|} \right)^N \int_0^\infty |z(z-1) \cdots (z-N+1) t^{\Re(z)-N} (1 - \psi(t\tau)) \chi_2(t) \\ &\quad + t^{\Re(z)} |\psi^{(N)}(t\tau)| \tau^N \chi_2(t) + t^{\Re(z)} (1 - \psi(t\tau)) |\chi_2^{(N)}(t)| dt \\ &\leq C_N \left(\frac{1}{2\pi|\tau|} \right)^N |z(z-1) \cdots (z-N+1)| \int_{1/\tau}^\infty t^{\Re(z)-N} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C_N \left(\frac{1}{2\pi|\tau|} \right)^N |\tau|^N |\tau|^{-\Re(z)-1} + C_N \left(\frac{1}{2\pi|\tau|} \right)^N \int_0^1 t^{\Re(z)} |\chi_2^N(t)| dt \\
& \leq C_N (|z(z-1) \cdots (z-N+1)| + 1) |\tau|^{-\Re(z)-1} + C_N |\tau|^{-N}. \quad (2.19)
\end{aligned}$$

Observe que as integrais indefinidas acima convergem porque $\Re(z) - N < -1$. Além disso, o segundo termo em (2.19) é $\leq |\tau|^{-\Re(z)-1}$ pela mesma condição (lembrando nossa hipótese sobre τ). Assim (2.16) segue de (2.18) e (2.19). Vamos agora calcular $\widehat{M}_z(x)$. Seja k um inteiro positivo com $\Re(z) > -k$. Então $\widehat{M}_z(x)$ é igual à

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} \frac{1}{\Gamma(z)} (\xi_n - h(\xi'))_+^{z-1} \chi_1(\xi') \chi_2(\xi_n - h(\xi')) d\xi' d\xi_n \\
& = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty e^{-2\pi i x_n t} t^{z-1} \chi_2(t) dt \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-2\pi i (x' \cdot \xi' + x_n h(\xi'))} \chi_1(\xi') d\xi' \\
& = \frac{1}{\Gamma(z) z(z-1) \cdots (z-k+1)} \int_0^\infty (e^{-2\pi i x_n t} \chi_2(t))^{(k)} t^{z+k-1} dt \\
& \quad \times \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-2\pi i (x' \cdot \xi' + x_n h(\xi'))} \chi_1(\xi') d\xi', \quad (2.20)
\end{aligned}$$

onde a expansão final é bem definida para $\Re(z) > -k$. Suponhamos $\Re(z) = -(n-1)/2$ e que $k \in \mathbb{Z}$ satisfaz $1-k \leq \Re(z) < -k+2$, i.e., $(n+1)/2 \leq k < (n+1)/2 + 1$. Aplicando (2.16) com $z+k-1$ ao invés de z e com $N=2$, segue que a primeira integral da última linha de (2.20) é limitada por

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^\infty (e^{-2\pi i x_n t} \chi_2(t))^{(k)} t^{z+k-1} dt \right| \\
& \leq C(1+|z|^2)^{2\Re(z)} + k(1+|x_n|)^{-\Re(z)-k} C_k(1+|x_n|)^k \\
& \leq C_k(1+|z|)^2(1+|x_n|)^{-\Re(z)}. \quad (2.21)
\end{aligned}$$

A segunda integral, no entanto, é controlada pela estimativa da fase estacionária (ver [20]),

$$\left| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-2\pi i (x' \cdot \xi' + x_n h(\xi'))} \chi_1(\xi') d\xi' \right| \leq C(1+|x|)^{-(n-1)/2}. \quad (2.22)$$

Observe que o crescimento em $|x_n|$ para $\Re(z) = -(n-1)/2$ é exatamente equilibrado pelo decaimento em (2.22). conclui-se que, para $\Re(z) = -(n-1)/2$ e com k com em (2.21),

$$\|M_z\|_\infty \leq C_n \left| \frac{1}{\Gamma(z) z(z-1) \cdots (z-k+1)} \right| (1+|z|)^2.$$

Assim (2.11) decorre da estimativa de crescimento (2.13) ou da fórmula de Stirling.

2.2 Estimativas de Strichartz

As estimativas Strichartz são uma família de desigualdades para equações diferenciais parciais dispersivas lineares. Estas desigualdades estabelecem o tamanho e decaimento de soluções em espaços de Lebesgue com norma mista. Foram observadas pela primeira vez por R. Strichartz [31].

2.2.1 Caracterização da EDP dispersiva pela transformada de Fourier

Vamos concentrar a nossa atenção aqui na EDP da forma (2.23), o leitor que quiser saber mais sobre EDPs dispersivas pode consultar [19]. Consideremos a seguinte EDP dispersiva:

$$iu_t + H(D)u = 0, \quad u(x, t_0) = u_0, \quad (2.23)$$

onde $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $H(D)$ é um multiplicador no espaço variável. Aplicando a transformada de Fourier em (2.23) temos

$$i \frac{\partial}{\partial t} \widehat{u}(\xi, t) + H(\xi) \widehat{u}(\xi, t) = 0, \quad \widehat{u}(\xi, t_0) = \widehat{u}_0,$$

onde $\widehat{u}(\xi, t)$ é a transformada de Fourier de $u(x, t)$ com respeito a variável espacial sozinha. A solução para esta equação diferencial com relação ao tempo, é dada por

$$\widehat{u}(\xi, t) = e^{itH(\xi)} \widehat{u}_0(\xi),$$

aplicando a transformada de Fourier inversa, temos

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} e^{itH(\xi)} \widehat{u}_0(\xi) d\xi. \quad (2.24)$$

Esta fórmula é, naturalmente, muito relevante, pois dá uma solução para (2.23). Para os nossos propósitos, gostaríamos de reinterpretar a integral no lado direito da seguinte maneira. Considere a hipersuperfície

$$S = \{(\xi, \tau); \xi \in \mathbb{R}^n \text{ e } \tau = H(\xi)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

Então

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x \cdot \xi + t\tau)} \widehat{u}_0(\xi) d\xi = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{u}_0 \mu)(x, t),$$

onde μ é uma medida sobre S , definida pela fórmula

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} F(\xi, \tau) \mu(d\xi, d\tau) = \int_{\mathbb{R}^n} F(\xi, H(\xi)) d\xi,$$

que é válida para qualquer função F contínua e limitada. Em outras palavras, a solução é dada pela transformada inversa de Fourier de $\widehat{u}_0 \mu$ que vive sobre S . Por uma variedade de razões, torna-se de fundamental importância compreender as propriedades de decaimento de tais transformadas de Fourier.

Exemplo 2.1. *Equação de Schrödinger,*

$$\frac{1}{i} u_t + \frac{1}{2\pi} \Delta_{\mathbb{R}^n} u = 0,$$

vemos que $H(\xi) = |\xi|^2$ (parabolóide). Como a medida induzida μ sobre o parabolóide satisfaz $\mu(B(x, r)) \lesssim r^n$ e $|\widehat{\mu}(\xi)| \lesssim (1 + |\xi|)^{-n/2}$, então segue pelo Teorema 2.2 que

$$\|u(x, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1})} \lesssim \|\widehat{u}_0\|_{L^2(\mu)} = \|u_0\|_{L^2(\mu)},$$

para todo $p > 2(n + 2)/n$.

Exemplo 2.2. *Dada a equação da onda:*

$$u_{tt} = \Delta u,$$

que podemos dividir em

$$-iu_t = \pm \sqrt{-\Delta} u$$

vemos que $H(\xi) = \pm|\xi|$ (cone). Como a medida induzida μ sobre o cone satisfaz $\mu(B(x, r)) \lesssim r^n$ e $|\widehat{\mu}(\xi)| \lesssim (1 + |\xi|)^{-(n-1)/2}$, então segue pelo Teorema 2.2 que

$$\|u(x, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1})} \lesssim \|\widehat{u}_0\|_{L^2(\mu)} = \|u_0\|_{L^2(\mu)},$$

para todo $p > 2(n + 1)/n$.

Exemplo 2.3. *Equação Klein-Gordon:*

$$u_{tt} + u = \Delta u,$$

que podemos dividir em

$$-iu_t = \pm\sqrt{1 - \Delta}u$$

vemos que $H(D) = \pm\sqrt{1 + |\xi|^2}$ (hiperboloide). Como a medida induzida μ sobre o hiperboloide satisfaz $\mu(B(x, r)) \lesssim r^n$ e $|\widehat{\mu}(\xi)| \lesssim (1 + |\xi|)^{-n/2}$, então segue pelo Teorema 2.2 que

$$\|u(x, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1})} \lesssim \|\widehat{u}_0\|_{L^2(\mu)} = \|u_0\|_{L^2(\mu)},$$

para todo $p > 2(n + 2)/n$.

2.2.2 Estimativa geral de Strichartz para a equação de Schrödinger

A abordagem para derivar as estimativas em cada um dos exemplos acima segue, de certa forma as idéias originais de Strichartz e são uteis para mostrar a relação existente entre estimativas de restrição e o controle das normas L^p mistas de equações dispersivas. Porém, uma classe muito mais ampla de estimativas de Strichartz são válidas. Abaixo discutiremos apenas o caso de estimativas de Strichartz para a equação de Schrödinger não homogênea.

Considere a seguinte equação,

$$\begin{cases} \frac{1}{i}\partial_t u + \frac{1}{2\pi}\Delta_{\mathbb{R}^n} u = h, \\ u|_{t=0} = f, \end{cases} \quad (2.25)$$

onde $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Definição 2.1. *Diremos que um par (p, q) é Strichartz admissível se, e somente se,*

$$2/p + n/q = n/2 \quad (2.26)$$

e se $2 \leq p \leq \infty$ com $(p, q) \neq (2, \infty)$.

Teorema 2.3. *Seja h uma função Schwartz espaço-tempo em $n + 1$ dimensões e f uma função Schwartz espacial. Seja $u(x, t)$ solução de (2.25). Então*

$$\|u\|_{L_t^p L_x^q(\mathbb{R}^{n+1})} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|h\|_{L_t^{a'} L_x^{b'}(\mathbb{R}^{n+1})} \right), \quad (2.27)$$

onde (p, q) e (a, b) são Strichartz admissível com $a > 2$ e $p > 2$. Finalmente, estas estimativas localizar no tempo: se no lado esquerdo u é restrita a algum intervalo de tempo $I \ni 0$, em seguida, sobre o lado direito h pode ser restrito a I .

Algumas observações estão em ordem:

1. A estimativa (2.27) é invariante pela mudança de escalas dada por

$$f_\lambda(x) = f(x/\lambda) \quad e \quad u_\lambda(x, t) = u(x/\lambda, t/\lambda^2),$$

se e somente se (p, q) e (a, b) obedecem a relação (2.26); logo, essa condição é necessária para que as estimativas de Strichartz sejam verdadeiras.

2. A restrição $p > 2$ é técnica, e o *endpoint* das estimativas quando $p = 2$ e $n \geq 3$ foi provado por Keel e Tao [16].
3. Um dos motivos para apresentarmos a demonstração da estimativa de Strichartz é que, seguindo um argumento inteiramente análogo, é possível obter o *endpoint* do Teorema de Stein-Tomas sem precisar o uso do teorema de interpolação de Stein (ver [25]).
4. Impondo condições mais fortes sobre h e f , a solução de (2.25) é dada por meio de uma expressão explícita

$$u(t) = e^{-i\Delta t/2\pi} f + \int_0^t e^{-i\Delta(t-s)/2\pi} h(s) ds, \quad (2.28)$$

com o entendimento de que o operador $e^{-i\Delta t/2\pi}$ deve ser interpretado como um Multiplicador de Fourier dado por

$$(e^{-i\Delta t/2\pi} f)(x) := \int e^{2\pi i(x \cdot \xi + |\xi|^2 t)} \widehat{f}(\xi) d\xi,$$

o qual é bem definido para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Prova do teorema 2.3. Suponhamos que $h = 0$ e denotemos $U(t)f$ o operador definido como

$$(U(t)f)(x) := \int e^{2\pi i(x \cdot \xi + |\xi|^2 t)} \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

Segue das propriedades da transformada de Fourier que $U(t)f$ é equivalente a;

$$(U(t)f)(x) = C_n t^{-n/2} \int e^{i|x-y|^2/2t} f(y) dy,$$

logo

$$\begin{aligned} |(U(t)f)(x)| &\leq C_n |t|^{-n/2} \int |f(y)| dy, \\ \|(U(t)f)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &\leq C_n |t|^{-n/2} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Plancherel temos,

$$\|U(t)f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

Segue por interpolação que

$$\|(U(t)f)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C_n |t|^{(-n/2)(1/q' - 1/q)} \|f\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)}. \quad (2.29)$$

Nosso objetivo agora é provar que, para qualquer (p, q) como no teorema,

$$\|Uf\|_{L_t^p L_x^q} \leq C \|f\|_{L^2},$$

onde $(Uf)(x, t) = (U(t)f)(x)$, com um leve abuso de notação. De maneira analoga com a equivalência de dualidade da proposição 1, cada uma das seguintes estimativas implica as outras duas:

$$\begin{aligned} \|Uf\|_{L_t^p L_x^q} &\leq C \|f\|_{L_x^2}, \\ \|U^*F\|_{L_x^2} &\leq C \|F\|_{L_t^{p'} L_x^{q'}}, \\ \|U \circ U^*F\|_{L_t^p L_x^q} &\leq C^2 \|F\|_{L_t^{p'} L_x^{q'}}. \end{aligned}$$

Vamos provar a terceira propriedade. Note que

$$U^*F = \int_{-\infty}^{\infty} U(-s)F(s) ds$$

assim, pela propriedade de grupo de $U(t)$,

$$(U \circ U^* F)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(t-s)F(s)ds.$$

Por (2.29),

$$\|(U \circ U^* F)(t)\|_{L_x^q} \leq C \int_{-\infty}^{\infty} |t-s|^{(-n/2)(1/q'-1/q)} \|F(s)\|_{L_x^{q'}} ds.$$

Então, pelo Teorema de integração fracional (ver Apêndice A [5.5]), com a implicação

$$1 + \frac{1}{p} = \frac{1}{p'} + \frac{n}{2} \left(\frac{1}{q'} - \frac{1}{q} \right) \iff (2.26)$$

mostra que

$$0 < \frac{n}{2} \left(\frac{1}{q'} - \frac{1}{q} \right) < 1 \iff p > 2, \quad (2.30)$$

e

$$\|(U \circ U^* F)\|_{L_t^p L_x^q} \leq C \|F\|_{L_t^{p'} L_x^{q'}},$$

que é a estimativa desejada para o caso $h = 0$. Agora suponhamos que $f = 0$, e escreva a solução de (2.25) como (escrevendo $h = F$)

$$u(t) = \int_0^t U(t-s)F(s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[0 < s < t]} U(t-s)F(s)ds.$$

Temos agora duas estimativas sobre u em função do espaço-tempo:

$$\|u\|_{L_t^p L_x^q} \leq C \|F\|_{L_t^{p'} L_x^{q'}},$$

$$\|u\|_{L_t^p L_x^q} \leq C \|F\|_{L_t^1 L_x^2}.$$

A primeira pode ser provada pelo argumento anterior; a segunda é obtida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L_x^q} &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[0 < s < t]} \|U(t-s)F(s)\|_{L_x^q} ds \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \|U(t-s)F(s)\|_{L_x^q} ds, \end{aligned}$$

assim

$$\|u\|_{L_t^p L_x^q} \leq \int_{-\infty}^{\infty} \|U(t-s)F(s)\|_{L_t^p L_x^q} ds$$

$$\leq C \int_{-\infty}^{\infty} \|F(s)\|_{L^2_x} ds = \|F\|_{L^1_s L^2_x}.$$

Seja $\theta \in (0, 1)$ e defina:

$$\frac{1}{a'} = \frac{\theta}{p'} + \frac{(1-\theta)}{1}, \quad \text{e} \quad \frac{1}{b'} = \frac{\theta}{q'} + \frac{(1-\theta)}{2},$$

então, pelo Teorema de interpolação de Riesz (ver Apêndice A [5.1]) obtemos:

$$\|u\|_{L^p_t L^q_x} \leq C \|F\|_{L^{a'}_s L^{b'}_x}$$

para qualquer par admissível (a, b) e (p, q) com $a > 2$ e $p > 2$, aqui a e b são expoentes conjugados de a' e b' .

Observação 2.3. *O leitor interessado nas estimativas de Strichartz para solução da equação da onda pode consultar [31].*

3 OPERADORES INTEGRAIS OSCILATÓRIOS E RESTRIÇÃO

Neste capítulo, descreveremos o método para operadores integrais oscilatórios do tipo

$$T_N f(x) = \int e^{iN\phi(x,y)} \psi(x,y) f(y) dy, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad N > 1,$$

baseado na fase estacionária (ver Cap. 14 em [20] e [15]) para resolver teoremas de restrição. Mostraremos como reescrever teoremas de restrição utilizando operadores integrais oscilatórios, e como obter o teorema de restrição apenas para dimensão 2, e também o teorema de Carleson-Sjölin, que é o caso conhecido da Conjectura de Bochner-Riesz.

3.1 Hausdorff-Young generalizado

Apresentaremos a seguir uma estimativa $L^p - L^{p'}$ para operadores integrais oscilatórios que é uma extensão da desigualdade Hausdorff-Young.

Teorema 3.1. *Seja $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, seja $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ com valores reais e definir com $N > 1$*

$$T_N f(x) = \int e^{iN\phi(x,y)} \psi(x,y) f(y) dy, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (3.1)$$

Se $\det(\partial^2 \phi / \partial x \partial y) \neq 0$ no $\text{supp } \psi$ e $1 \leq p \leq 2, 1/p + 1/p' = 1$ então

$$\|T_N f\|_{p'} \leq CN^{-n/p'} \|f\|_p, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (3.2)$$

Prova. Quando $p = 1$ a desigualdade é trivial. Note que

$$|T_N f(x)| = \left| \int e^{iN\phi(x,y)} \psi(x,y) f(y) dy \right| \lesssim \int |f(y)| dy,$$

de onde segue que

$$\|T_N f\|_\infty \lesssim \|f\|_1.$$

Tendo em vista o teorema Riesz-Thorin (ver Apêndice A [5.1]), é suficiente provarmos o caso $p = 2$. Podemos escrever $\|T_N f\|_2^2$ da seguinte forma:

$$\|T_N f\|_2^2 = \int \int \psi_N(y, z) f(y) \overline{f(z)} dy dz,$$

onde

$$\psi_N(y, z) = \int e^{iN(\phi(x, y) - \phi(x, z))} \psi(x, y) \overline{\psi(x, z)} dx. \quad (3.3)$$

Quando y e z estão próximos e $(x, y), (x, z) \in \text{supp } \psi$ temos que

$$\frac{\partial}{\partial x} (\phi(x, y) - \phi(x, z)) = \left(\frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial y \partial x} \right) (y - z) + O(|y - z|^2).$$

Assumindo que $\text{supp } \psi$ é suficientemente pequeno, existe um $c > 0$, tal que

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} (\phi(x, y) - \phi(x, z)) \right| \geq c|y - z|.$$

Aplicando k vezes integração por partes em (3.3) junto com a desigualdade acima, obtemos

$$|\psi_N(y, z)| \leq C_k (1 + N|y - z|)^{-k}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

para $y, z \in \mathbb{R}^n$. Aplicando isto com $k = n + 1$ segue que

$$\int |\psi_N(y, z)| dy \lesssim N^{-n} \quad \text{para } z \in \mathbb{R}^n,$$

$$\int |\psi_N(y, z)| dz \lesssim N^{-n} \quad \text{para } y \in \mathbb{R}^n.$$

Definindo

$$T_{\psi_N} f(z) = \int \psi_N(y, z) f(y) dy,$$

segue pela desigualdade de Schwarz e a proposição 3 (ver Apêndice A),

$$\|T_N f\|_{L^2}^2 = \int (T_{\psi_N} f) \bar{f} \leq \|T_{\psi_N} f\|_{L^2} \|f\|_{L^2} \lesssim N^{-n} \|f\|_{L^2}^2,$$

como queríamos demonstrar. □

Observação 3.1. *Que esta é uma extensão da desigualdade Hausdorff-Young é visto tomando:*

$$\phi(x, y) = \langle x, y \rangle \text{ e } \psi \text{ com } \psi(0, 0) = 1.$$

Se $f(y)$ é substituído por $f(y\sqrt{N})$ a desigualdade de Hausdorff-Young é o limite de (3.2) quando $N \rightarrow \infty$.

3.2 A partir do operador Integral oscilatório para restrição

Veremos agora como o método para operadores integrais oscilatórios pode ser aplicado a problemas de restrição. Estamos interessados nas desigualdades

$$\|\widehat{f}\|_{L^q(S)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \text{ para } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (3.4)$$

Aqui S é uma superfície suave em \mathbb{R}^n com curvatura Gaussiana não nula. Assumimos que S pode ser escrita como o gráfico de uma função suave e compactamente suportada φ , isto é,

$$S = \{(\xi, \varphi(\xi)); \xi \in \mathbb{R}^{n-1}\},$$

(3.4) se reduz a desigualdades como

$$\left(\int |\widehat{f}(\xi, \varphi(\xi))|^q \psi(\xi)^q d\xi \right)^{1/q} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (3.5)$$

onde φ e ψ são funções $C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ com suporte compacto, com $\psi \geq 0, \varphi(0) = 0, \nabla\varphi(0) = 0$ e $h_\varphi(0) \neq 0$ (Ver 14.4 [20]). A transformada de Fourier de f em S é dada por

$$\widehat{f}(\xi, \varphi(\xi)) = \int e^{-2\pi i(\xi \cdot \tilde{x} + \varphi(\xi)x_n)} f(x) dx, \quad \tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Seja $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ uma função não-negativa, com $\eta(0) = 1$ e defina

$$T_N f(\xi) = \int e^{iN\Phi(x, \xi)} \Psi(x, \xi) f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^{n-1}, N > 0, \quad (3.6)$$

onde

$$\Phi(x, \xi) = -2\pi(\xi \cdot \tilde{x} + \varphi(\xi)x_n),$$

$$\Psi(x, \xi) = \psi(\xi)\eta(x).$$

Suponha que poderíamos provar a estimativa, com $p' = p/(p-1)$,

$$\|T_N f\|_{L^q(\mathbb{R}^{n-1})} \lesssim N^{-n/p'} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (3.7)$$

Aplicando isto a $f_N(x) = f(Nx)$, temos

$$\begin{aligned} & \left(\int \left| \int e^{iN\Phi(x,\xi)} \eta(x) f(Nx) dx \right|^q \psi(\xi)^q d\xi \right)^{1/q} \\ & \lesssim N^{-n/p'} \|f_N\|_p = N^{-n/p' - n/p} \|f\|_p = N^{-n} \|f\|_p. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $y = Nx$ dá, uma vez que $N\Phi(x, \xi) = \Phi(Nx, \xi)$,

$$\left(\int \left| \int e^{i\Phi(y,\xi)} \eta(y/N) f(y) dy \right|^q \psi(\xi)^q d\xi \right)^{1/q} \lesssim \|f\|_p.$$

Quando $N \rightarrow \infty$, $\eta(y/N) \rightarrow 1$, que dá a desigualdade (3.5).

A desigualdade (3.7) pode ser provada para funções muito mais gerais do que Φ acima, e tem aplicações para muitos problemas em particular a restrição.

3.3 Resultado *sharp* no plano

Nesta seção provaremos uma desigualdade *sharp* $L^p - L^q$ para os operadores T_N no caso bidimensional. Isto implicaria a conjectura de restrição no plano.

Teorema 3.2. *Seja $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ com valores reais, e assumamos que o Jacobiano $D(\partial\phi/\partial y, \partial^2\phi/\partial y^2)/Dx$ não tem zeros no $\text{supp } \psi$. (Aqui, as variáveis em \mathbb{R}^3 são denotadas por (x, y) ; $x = (x_1, x_2)$.) Se*

$$T_N f(x) = \int e^{iN\phi(x,y)} \psi(x, y) f(y) dy, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (3.8)$$

segue que

$$\|T_N f\|_q \leq CN^{-2/q} (q/(q-4))^{1/4} \|f\|_p \quad \text{se } q > 4 \text{ e } q = 3p'. \quad (3.9)$$

Prova. Para aplicarmos o Teorema 3.1 introduzimos

$$F_N(x) = (T_N f(x))^2 = \int \int e^{iN(\phi(x,t)+\phi(x,s))} \psi(x,t) \psi(x,s) f(t) f(s) ds dt.$$

No entanto, as hipóteses do Teorema 3.1 não são cumpridas, uma vez que

$$\det(\partial^2(\phi(x,t) + \phi(x,s))/\partial x \partial(t,s)) = \begin{vmatrix} \phi''_{tx_1}(x,t) & \phi''_{tx_2}(x,t) \\ \phi''_{sx_1}(x,s) & \phi''_{sx_2}(x,s) \end{vmatrix},$$

se anula quando $t = s$. Para t perto de s , o determinante é igual a

$$(s-t)D(\phi'_t, \phi''_t)/D(x_1, x_2) + O((t-s)^2)$$

que é limitado inferiormente por $c|t-s|$ no suporte de $\psi(x,t)\psi(x,s)$, se tomarmos ψ com suporte suficientemente pequeno. Como $\phi(x,t) + \phi(x,s)$ é uma função simétrica de t e s , fazendo a mudança de variável $y = (t+s, ts)$ nós obtemos a função $\Phi(x, y)$ que é C^∞ . Similarmente $2\psi(x,t)\psi(x,s)$ é a restrição em $\Omega = \{y : 4y_2 \leq y_1^2\}$ da função $b(x, y) \in C_0^\infty$. Como $D(y)/D(t, s) = t - s$, segue que Φ satisfaz as hipóteses do Teorema 3.1, e que $F_N(x)$ pode ser reescrito como

$$F_N(x) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} e^{iN\Phi(x,y)} b(x, y) f(t) f(s) |t-s|^{-1} dy.$$

Considerando $1 \leq r \leq 2$, segue do Teorema 3.1 que

$$\begin{aligned} \|T_N f\|_{2r'}^2 &= \|F_N\|_{r'} \leq CN^{-2/r'} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} |f(t)f(s)|^r |t-s|^{-r} dy \right)^{1/r} \\ &= CN^{-2/r'} \left(\frac{1}{2} \int \int |f(t)|^r |f(s)|^r |t-s|^{1-r} ds dt \right)^{1/r}. \end{aligned}$$

Para estimar o lado direito, usamos a desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev (ver Apêndice A [5.5])

$$\int \int |g(t)g(s)| |t-s|^{\delta-1} ds dt \leq C\delta^{-1} \|g\|_{\theta}^2, \quad 1 < 2/\theta = \delta + 1 \leq 2.$$

Tomando $\delta - 1 = 1 - r$, isto é, $\delta = 2 - r$ obtemos

$$\left(\int \int |f(t)f(s)|^r |t-s|^{1-r} ds dt \right)^{1/r} \leq C(2-r)^{-1/r} \|f\|_{r\theta}^2, \quad 1 < 2/\theta = 3 - r.$$

Assim

$$\|T_N f\|_{2r'} \leq CN^{-1/r'}(2-r)^{-1/2r} \|f\|_{2r/(3-r)}, \quad 1 \leq r \leq 2.$$

Aqui nós escrevemos $2r' = q$ e $2r/(3-r) = p$. Como $1/p = 3/2r - 1/2$ e $3/q = 3/2r'$ nós obtemos $q = 3p'$ e $q > 4$ que são as únicas restrições em q e em p . A estimativa (3.9) agora segue imediatamente. \square

Corolário 3.1. *Seja I um intervalo aberto de \mathbb{R} , $\Phi \in C^\infty(I)$ uma imersão de I com uma curva com curvatura $\neq 0$, e $\psi \in C_0^\infty(I)$. Defina*

$$Tf(x) = \int e^{i\langle x, \Phi(y) \rangle} \psi(y) f(y) dy, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad x \in \mathbb{R}^2. \quad (3.10)$$

Então

$$\|Tf\|_q \leq C(q/(q-4))^{1/4} \|f\|_p \quad \text{se } f \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad q > 4, \quad q = 3p'. \quad (3.11)$$

Em particular,

$$\|\psi(\widehat{g} \circ \Phi)\|_{p'} \leq C(q'/(4-3q'))^{1/4} \|g\|_{q'} \quad \text{se } g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2), \quad 1 \leq q' < \frac{4}{3}, \frac{3}{q'} + \frac{1}{p'} = 3. \quad (3.12)$$

Prova. Desde que Φ' e Φ'' são linearmente independentes a função

$$\phi(x, y) = \langle x, \Phi(y) \rangle$$

satisfaz a hipótese do Teorema 3.2 em $\mathbb{R}^2 \times I$. Escolha $b \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ com $b(0) = 1$ e aplicando o Teorema 3.2 em $b(x)Tf(Nx)$ segue que

$$\left(\int |b(x)Tf(Nx)|^q dx \right)^{1/q} \leq CN^{-2/q} (q/(q-4))^{1/4} \|f\|_p$$

como

$$N^{2/q} \left(\int |b(x)Tf(Nx)|^q dx \right)^{1/q} = \left(\int |b(x/N)Tf(x)|^q dx \right)^{1/q}.$$

Quando $N \rightarrow \infty$, a estimativa (3.11) segue. Se \widehat{g} é a transformada de Fourier de $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, e definindo

$$Tf(x) = \int e^{-i2\pi\langle x, \Phi(y) \rangle} \psi(y) f(y) dy, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

vale a estimativa (3.11). Temos por dualidade que

$$\begin{aligned} \|Tf\|_q &= \sup_{\|g\|_{q'}=1} \int Tf(x)g(x)dx = \sup_{\|g\|_{q'}=1} \int \left(\int e^{-i2\pi\langle x, \Phi(y) \rangle} \psi(y)f(y)dy \right) g(x)dx \\ &= \sup_{\|g\|_{q'}=1} \int \psi(y)f(y)(\widehat{g} \circ \Phi(y))dy, \end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned} \|Tf\|_q \leq C(q/(q-4))^{1/4}\|f\|_p &\iff C(q/(q-4))^{1/4} = \sup_{\|f\|_p=1} \|Tf\|_q \\ &= \sup_{\|f\|_p} \left(\sup_{\|g\|_{q'}=1} \int \psi(y)f(y)(\widehat{g} \circ \Phi(y))dy \right) = \sup_{\|g\|_{q'}=1} \|\psi(\widehat{g} \circ \Phi)\|_{p'} \\ &\iff \|\psi(\widehat{g} \circ \Phi)\|_{p'} \leq C(q/(q-4))^{1/4}\|g\|_{q'} \end{aligned}$$

como $1/q + 1/q' = 1$, $1/p + 1/p' = 1$ e $q = 3p'$, obtemos

$$\|\psi(\widehat{g} \circ \Phi)\|_{p'} \leq C(q'/(4-3q'))^{1/4}\|g\|_{q'} \quad \text{se } g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2), \quad 1 \leq q' < \frac{4}{3}, \frac{3}{q'} + \frac{1}{p'} = 3.$$

□

3.4 O teorema de Carleson-Sjölin

Seja $\alpha > 0$, definimos o multiplicador de Bochner-Riesz para $\xi \in \mathbb{R}^2$, por $m(\xi) = (1 - |\xi|^2)^\alpha$, $|\xi| < 1$ e $m(\xi) = 0$, $|\xi| \geq 1$. Definindo o operador T por

$$Tf := \mathcal{F}^{-1}(m\widehat{f}) = \mathcal{F}^{-1}(m) * f.$$

Dizemos que m é um multiplicador de Fourier em $L^p(\mathbb{R}^2)$, se

$$\|Tf\|_p \leq C\|f\|_p, \quad f \in L^p(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2).$$

Nesta seção vamos estudar um problema generalizado, e determinar todos os valores de p , para o qual T é um operador limitado em $L^p(\mathbb{R}^2)$, com

$$m(\xi) = \psi(\xi)(\xi_2 - \phi(\xi_1))_+^\alpha$$

onde $\phi \in C^\infty(I)$, $\psi \in C_0^\infty(I \times \mathbb{R})$, $\phi \neq 0$ em I , com I um intervalo de \mathbb{R} (aqui usamos a notação $r_+ = \max(r, 0)$; $r \in \mathbb{R}$). As estimativas para os operadores T serão uma consequência do nosso estudo de operadores integrais oscilatórios

$$T_N f(x) = \int e^{iN\phi(x,y)} \psi(x,y) f(y) dy, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2).$$

O que segue é uma simples combinação dos Teoremas 3.1 e 3.2:

Teorema 3.3. *Seja $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4)$, $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$ e assuma que no $\text{supp } \psi$ temos $\partial^2 \phi / \partial y \partial x \neq 0$ e*

$$t \in \mathbb{R}^2, \quad \partial / \partial y \langle t, \partial \phi / \partial x \rangle = \partial^2 / \partial y^2 \langle t, \partial \phi / \partial x \rangle = 0 \Rightarrow t = 0. \quad (3.13)$$

(Aqui as variáveis em \mathbb{R}^4 são denotadas por (x, y) ; $x, y \in \mathbb{R}^2$.) Se

$$T_N f(x) = \int e^{iN\phi(x,y)} \psi(x,y) f(y) dy, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2), \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

a desigualdade (3.9) é satisfeita, isto é,

$$\|T_N f\|_q \leq CN^{-2/q} (q/(q-4))^{1/4} \|f\|_p \quad \text{se } q > 4 \quad \text{e } q = 3p'.$$

Prova. A estimativa (3.13) é mais fraca do que assumido no Teorema 3.1 se o suporte de ψ está perto de um ponto onde $\det(\partial^2 \phi / \partial y \partial x) \neq 0$. Vamos, portanto, supor que o suporte de ψ está perto de um ponto à dizer $x = y = 0$ onde $\det(\partial^2 \phi / \partial y \partial x) = 0$. Após uma mudança linear de variáveis, podemos assumir que em $(0, 0)$

$$\partial^2 \phi / \partial y_j \partial x_1 = 0, \quad j = 1, 2; \quad \partial^2 \phi / \partial y_1 \partial x_2 \neq 0, \quad \partial^3 \phi / \partial y_1^2 \partial x_1 \neq 0.$$

Segue que a função $(x, y_1) \rightarrow \phi(x, y_1, y_2)$ satisfaz as hipóteses do Teorema 3.2 em uma vizinhança de 0. Escrevendo

$$F_N f(x, y_2) = \int e^{iN\phi(x,y)} \psi(x,y) f(y) dy_1,$$

temos $T_N f(x) = \int F_N f(x, y_2) dy_2$ e o Teorema 3.2 dá

$$\|T_N f\|_q \leq CN^{-2/q} (q/(q-4))^{1/4} \int dy_2 \left(\int |f(y_1, y_2)|^p dy_1 \right)^{1/p}.$$

Podemos supor que o suporte de f está em um conjunto compacto fixo, dessa forma a integral dupla, pode ser estimada por $\|f\|_p$ em vista da desigualdade de Hölder. A prova está completa. \square

Exemplo 3.1. *Seja $\phi(x, y) = \Phi(x - y)$ onde $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ é positiva homogênea de grau 1, e seja $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ desaparece perto da diagonal. Então as hipóteses do Teorema 3.3 são satisfeitas se $\Phi''(z) \neq 0$ quando $z \neq 0$. De fato, a equação $\Phi''(z)t = 0$ é satisfeita por $t = z$ pois Φ' é homogênea de grau 0, e $\Phi'''(z)z = -\Phi''(z) \neq 0$.*

O exemplo anterior leva ao seguinte Teorema de Carleson-Sjölin [6].

Teorema 3.4. *Seja $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ com valores reais, positiva homogênea de grau 1, e assuma que $\Phi''(x) \neq 0$ para todo $x \neq 0$. Se*

$$Kf(x) = \int e^{i\Phi(x-y)}\psi(x-y)f(y)dy, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2), \quad (3.14)$$

onde $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e $\psi(tz) = t^{-\lambda}\psi(z)$ quando $|z| > 1$ e $t > 1$, segue-se que K é contínua de L^p para L^p se

$$\lambda > \max(3/2, 2|1/p - 1/2| + 1). \quad (3.15)$$

Prova. Passando ao adjunto, podemos reduzir a prova para o caso $p \geq 2$. Escolha $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4)$ de modo que $x \neq y$ se $(x, y) \in \text{supp } \chi$, e defina para $t \geq 1$

$$S_t f(x) = \int e^{it\Phi(x-y)}\chi(x, y)f(y)dy, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2).$$

Então temos

$$\|S_t f\|_p \leq C_p(t)\|f\|_p \quad (3.16)$$

onde

$$C_p(t) = Ct^{-2/p}(p/(p-4))^{1/4}, p > 4; \quad C_p(t) = Ct^{-1/2}(4 \log t + 1)^{1/2-1/p}, 2 \leq p \leq 4. \quad (3.17)$$

Podemos assumir que $\text{supp } f$ pertence a um conjunto compacto fixo, como visto no exemplo 3.1; o Teorema 3.3 é satisfeito se $\Phi''(x) \neq 0$ quando $x \neq 0$. Para $p > 4$ aplicando o Teorema 3.3 segue que

$$\|S_t f\|_p \leq C t^{-2/p} (p/(p-4))^{1/4} \|f\|_r,$$

como $p = 3r'$ e $p > 4$ nós obtemos $p > r$. Como $\|f\|_r \leq \|f\|_p$, segue que

$$\|S_t f\|_p \leq C t^{-2/p} (p/(p-4))^{1/4} \|f\|_p.$$

Quando $p = 2$, o resultado segue do Teorema 3.1, aplicado de forma adequada (como na prova do Teorema 3.3). Interpolando entre $p = 2$ e $p = 4 + 1/\log t$, obtemos a estimativa para $p = 4$; outra aplicação do teorema de M. Riesz para $2 \leq p \leq 4$ nos dá o resultado geral.

Se Ψ é uma função tal que $\chi(x, y) \neq 0$ implica $\Psi(y) = 1$, então

$$\|S_{t,z}\| \leq C_p(t) \|\Psi(\cdot - z)f\|_p, \quad f \in C_0^\infty, \quad z \in \mathbb{R}^2, \quad (3.18)$$

onde

$$S_{t,z}f(x) = \int e^{it\Phi(x-y)} \chi(x-z, y-z) f(y) dy.$$

Note que

$$\int \chi(x-z, y-z) dz = F(x-y)$$

onde $F \in C_0^\infty$ desaparece perto de 0 e é ≥ 0 se χ é. Por uma escolha adequada de χ podemos obter qualquer F . Como $S_{t,z}f(x)$ só pode ser diferente de zero para $|x-z| < C$, temos pela desigualdade de Hölder

$$\left| \int S_{t,z}f(x) dz \right|^p \leq C_1 \int |S_{t,z}f(x)|^p dz.$$

Integrando com respeito a x dá por (3.18)

$$\|R_t f\|_p \leq C C_p(t) \|f\|_p, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2), \quad (3.19)$$

onde nós escrevemos

$$R_t f(x) = \int S_{t,z}f(x) dz = \int e^{it\Phi(x-y)} F(x-y) f(y) dy.$$

Após a mudança de variável $(x - y)$ por $(x - y)/t$, (3.19) tem a forma

$$\left\| \int e^{i\Phi(\cdot-y)} F((\cdot - y)/t) f(y) \right\|_p \leq C t^2 C_p(t) \|f\|_p, \quad f \in C_0^\infty.$$

Multiplicando por $t^{-1-\lambda}$ e integrando de 1 a ∞ com respeito a t , obtemos $\int t^{1-\lambda} C_p(t) dt < \infty$ pois $1 - \lambda - 2/p < -1$ e $1 - \lambda - 1/2 < -1$ por (3.15). (Lembrando que $p \geq 2$.) Se

$$\psi(x) = \int_1^\infty F(x/t) t^{-1-\lambda} dt \quad (3.20)$$

pela desigualdade de Minkowski segue que

$$\|Kf\|_p \leq \int_1^\infty t^{-1-\lambda} \left\| \int e^{i\Phi(\cdot-y)} F((\cdot - y)/t) f(y) \right\|_p dt \leq C' \|f\|_p, \quad f \in C_0^\infty.$$

Portando K é contínua em L^p . □

Vamos agora considerar alguns multiplicadores sobre L^p . Para os fatos relevantes sobre multiplicadores nos referimos Hormander [14]. Iremos denotar por M_p o espaço dos multiplicadores em L^p .

Teorema 3.5. *Seja I um intervalo de \mathbb{R} , $\phi \in C^\infty(I)$ com valores reais e assumamos que $\phi'' \neq 0$ em I . Se $\psi \in C_0^\infty(I \times \mathbb{R})$ segue que*

$$m_\alpha(\xi) = \psi(\xi) (\xi_2 - \phi(\xi_1))_+^\alpha$$

está em M_p se

$$\alpha > \max(0, 2|1/p - 1/2| - 1/2). \quad (3.21)$$

Aqui nós usamos a notação $r_+ = \max(r, 0)$; $r \in \mathbb{R}$.

Prova. Como $M_p \subset C_0^\infty$, podemos assumir que

$$\psi(\xi) = \psi_1(\xi_1) \psi_2(\xi_2 - \phi(\xi_1)), \quad \psi_j \in C_0^\infty.$$

m_α é, em seguida a transformada de fourier de $A(x_2)I(x_1, x_2)$ onde $\widehat{A}(\xi_2) = \psi_2(\xi_2) \xi_2^{\alpha_+}$ e

$$I(x_1, x_2) = \int e^{2\pi i(\xi_1 x_1 + \phi(\xi_1) x_2)} \psi(\xi_1) d\xi_1.$$

É uma consequência bem conhecida do método da fase estacionária (ver [20]) que a função $I(x)$ é rapidamente decrescente exceto em direções tais que $x_1 + \phi'(\xi_1)x_2 = 0$ para algum $\xi_2 \in \text{supp } \psi_1$ que define ξ_1 como uma função homogênea de x de grau 0. Se $\Phi(x_1, x_2) = 2\pi(\xi_1 x_1 + \phi(\xi_1)x_2)$ para este valor de ξ_1 podemos estender Φ para uma função homogênea de grau 1 satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.4 e

$$A(x_2)I(x_1, x_2)e^{-i\Phi(x)},$$

têm uma expansão assintótica em C^∞ de termos homogêneos de grau $-\alpha - 3/2, -\alpha - 5/2, \dots$. Assim o teorema segue do Teorema 3.4 e o fato que a convolução de qualquer função integrável é limitada em L^p . \square

A seguir uma melhoria que se deve a Sjölin que deu uma prova diferente:

Teorema 3.6. *O Teorema 3.5 permanece válido se ϕ'' tem zeros em I , desde que sejam de ordem finita.*

Prova. Ver Hörmander [15]. \square

4 RESULTADOS RECENTES SOBRE A CONJECTURA DE RESTRIÇÃO

Tabela 4.1:

Dimensão	Expoentes p e q	
$n = 2$	$q' = 2, p' \geq 8$ $q' \geq (p'/3); p' > 4$	Stein, 1967 Zygmund, 1974 [43](melhor possível)
$n = 3$	$q' = 2, p' \geq 6$ $q' > (p'/2), p' > 4$ $q' \geq (p'/2)', p' \geq 4$ $q', p' > 4 - \frac{2}{15}$ $q', p' > 4 - \frac{2}{11}$ $q' > 7/3; p' > 4 - \frac{2}{11}$ $q' \geq (p'/2)'; p' > 4 - \frac{5}{27}$ $q' > 170/77; p' > 4 - \frac{2}{9}$ $q' \geq (p'/2)'; p' > 4 - \frac{8}{13}$ $q' > 26/11; p' > 4 - \frac{2}{7}$ $q' \geq (p'/2)'; p' > 4 - \frac{2}{3}$ $q' \geq (p'/2)'; p' > 3$	Stein 1967 Tomas 1975 [38] Stein 1975; Sjölin \sim 1975 Bourgain 1991 [3] Wolff 1995 [40] Moyua, Vargas, Vega 1996 [23] Tao, Vargas, Vega 1998 [37] Tao, Vargas, Vega 1998 [37] Tao, Vergas 2000 [36] Tao, Vergas 2000 [36] Tao 2003 [34] (conjectura)
$n > 3$	$q' > ((n-1)p'/(n+1))'; p' > \frac{2(n+1)}{n-1}$ $q' \geq ((n-1)p'/(n+1))'; p' \geq \frac{2(n+1)}{n-1}$ $q', p' > \frac{2(n+1)}{n-1} - \epsilon_n$ $q', p' > \frac{2n^2+n+6}{n^2+n-1}$ $q' > \frac{2n^2+n+6}{n^2+3n+1}; p' > \frac{2n^2+n+6}{n^2+n-1}$ $q' \geq ((n-1)p'/(n+1))'; p' > \frac{2(n+2)}{n}$ $q' \geq ((n-1)p'/(n+1))'; p' > \frac{2n}{n-1}$	Tomas 1975 [38] Stein 1975 Bourgain 1991 [3] Wolff 1995 [40] Moyua, Vargas, Vega 1996 [23] Tao 2003 [34] (conjectura)

Tabela 4.1. Resultados conhecidos sobre o problema de restrição $R_{p \rightarrow q}(S)$ (ou $R_{q' \rightarrow p'}^*(S)$) para a esfera e para subconjuntos compactos do parabolóide. (Para todo o parabolóide, restringir os expoentes acima à $q' = \left(\frac{(n-1)p'}{n+1}\right)'$).

Tabela 4.2:

Dimensão	Expoentes p e q	
$n = 3$	$q' \geq (p'/3)', p' \geq 6$	Strichartz 1977 [31]
	$q' \geq (p'/3)'; p' > 4$	Barcelo, 1985 [32] (melhor possível)
$n = 4$	$q' \geq (p'/2)', p' \geq 4$	Strichartz 1977 [31]
	$q' \geq (p'/2)'; p' > 3$	Wolff, 2000 [41] (melhor possível)
$n > 4$	$q' \geq ((n-2)p'/n)', p' \geq \frac{2n}{n-2}$	Strichartz 1977 [31]
	$q' \geq ((n-2)p'/n)'; p' > \frac{2(n+2)}{n}$	Wolf, 2000 [41]
	$q' \geq ((n-2)p'/n)'; p' > \frac{2(n-1)}{n-2}$	(conjectura)

Tabela 4.2. Resultados conhecidos sobre o problema de restrição $R_{p \rightarrow q}(S)$ (Ou $R_{q' \rightarrow p'}(S)$) para subconjuntos compactos do cone. (Para todo o cone, restringir os expoentes acima à $q' = \left(\frac{(n-2)p'}{n}\right)'$).

Todos os resultados parciais em dimensão $n = 3$ para o parabolóide/esfera

Tabela 4.3:

$p > 4/3 = 1.33\dots$	Tomas, 1975 [38]	<i>Measure decay</i>
$p = 4/3 = 1.33\dots$	Stein-Sjölin, 1975	<i>Meausre decay</i>
$p = 58/43 = 1.3488\dots$	Bourgain, 1991 []	Keakeya
$p = 42/31 = 1.3548\dots$	Wolff, 1995 [40]	Keakeya
$p = 42/31 = 1.3548\dots$	Moyua-Vargas-Vega, 1996 [23]	$X_{q,p}$ norma
$p = 34/25 = 1.36$	Tao-Vargas-Vega, 1998 [37]	Bilinear
$p = 26/19 = 1.3684\dots$	Tao-Vargas, 2000 [36]	Bilinear
$p = 10/7 = 1.42857\dots$	Tao, 2003 [34]	<i>Sharp</i> bilinear
$p = 33/23 = 1.43478\dots$	Bourgain-Guth, 2011 [5]	Multilinear + Keakeya

Nos últimos anos, certos análogos bilineares do problema de restrição vieram à luz de forma natural a partir de um número de fontes (ver por exemplo [4], [17], [24], [37], [41], [33], [34], [39], [18], [7] relativa à boa colocação das teorias de equações não lineares dispersivas e aplicações para uma variedade de problemas centrais da análise harmônica e geométrica.) Mais especificamente, sejam Σ_1 e Σ_2 duas parametrizações suaves das subvariedades S_1 e S_2 $(n - 1)$ -dimensional de \mathbb{R}^n , respectivamente. Com Σ_i nós associamos o operador de extensão \mathcal{E}_i , dado por

$$\mathcal{E}_i g(\xi) := \int g(x) e^{i\xi \cdot \Sigma(x)} dx, \quad (4.1)$$

pode-se perguntar para quais valores dos expoentes p e q o operador bilinear $(g_1, g_2) \rightarrow \mathcal{E}_1 g_1 \mathcal{E}_2 g_2$ pode ser limitado a partir de $L^p \times L^p$ para $L^{q/2}$. O ponto essencial aqui é que se as subvariedades parametrizadas por Σ_1 e Σ_2 são assumidas como sendo transversais, então pode-se esperar que a gama de tais expoentes possa ampliar; ver [37]. No entanto, uma das características mais intrigantes de tais problemas bilineares é que, em três dimensões e acima, eles parecem confundir um pouco o papel desempenhado pela curvatura das subvariedades associadas. Por exemplo, sabe-se que as teorias de restrição bilineares para o cone e o parabolóide são quase idênticos, enquanto que as teorias lineares para estas superfícies não são (ver [35])¹. Além disso, heurísticas simples sugerem que a teoria de restrição ótima "k-linear" exige pelo menos $n - k$ curvaturas principais diferentes de zero, mas que outras suposições de curvatura não têm mais efeito.

Para cada $1 \leq j \leq n$, seja $\Sigma_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}^n$ um mapeamento suave e \mathcal{E}_j o operador de extensão associado. De maneira análoga da condição de transversalidade bilinear será essencialmente a exigir que as normais para as subvariedades parametrizadas por Σ_j 's geram todos os pontos do espaço de parâmetro. Para expressar isso de maneira apropriadamente uniforme, seja $A, \nu > 0$ dados, e para

¹Em [34] adaptanto um argumento do Wolff para subconjuntos delimitadas do cone, Tao obtem $R_{2 \times 2 \rightarrow p}^*(S_1, S_2)$ para qualquer $p > \frac{n+3}{n+1}$, com S_1 e S_2 sendo quaisquer subconjuntos compactos do parabolóide $S = \{(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \tau = -\frac{1}{2}|\xi|^2\}$. Em particular, isso responde a conjectura Machedon-Klainerman [17] afirmativamente, até "endpoints", para o parabolóide.

$1 \leq j \leq n$ seja Y_j a $(n - 1)$ -forma

$$Y_j(x) := \bigwedge_{k=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_k} \Sigma_j(x)$$

para todo $x \in U_j$; por dualidade, podemos ver Y_j como um campo vetorial em U_j . Não imporemos condições de curvatura (em particular, permitimos que os campos vetoriais Y_j sejam constantes), mas vamos impor a condição de “transversalidade”

$$\det(Y_1(x^{(1)}), \dots, Y_n(x^{(n)})) \geq \nu, \quad (4.2)$$

para todo $x^{(1)} \in U_1, \dots, x^{(n)} \in U_n$, juntamente com a condição de suavidade

$$\|\Sigma_j\|_{C^2(U_j)} \leq A \quad \text{para todo } 1 \leq j \leq n. \quad (4.3)$$

Ao testar os exemplos padrão que geram a conjectura de restrição linear original (funções características de pequenas bolas em \mathbb{R}^{n-1} , ver [28]), somos levados à seguinte conjectura.

Conjectura 1. *(Restrição multilinear) Suponhamos que as condições (4.2) e (4.3) são satisfeitas, e seja $q \geq 2n/(n-1)$ e $p' \leq q(n-1)/n$. Então, existe uma constante C , dependendo apenas de A, ν, n , e U_1, \dots, U_n , para qual*

$$\left\| \prod_{j=1}^n \mathcal{E}_j g_j \right\|_{L^{q/n}(\mathbb{R}^n)} \leq C \prod_{j=1}^n \|g_j\|_{L^p(U_j)} \quad (4.4)$$

para todo $g_1 \in L^p(U_1), \dots, g_n \in L^p(U_n)$.

Observação 4.1. *Um fato bem conhecido é que a conjectura de restrição linear implica a assim chamada conjectura de Kakeya (linear). Esta conjectura assume várias formas. Uma, particularmente simples, é a afirmação de que qualquer conjunto compacto em \mathbb{R}^n que contém um segmento de reta unitário em todas as direções, deve ter dimensão de Hausdorff total. Aqui vamos considerar uma versão mais quantitativa da conjectura, que é mais forte do que a que acabamos de descrever. Para $0 < \delta \ll 1$, definimos um δ -tubo como qualquer caixa retangular T em \mathbb{R}^n com $n - 1$*

lados de comprimento δ e um lado de comprimento 1 (note que tais cubos tem volume $|T| \approx \delta^{n-1}$). Seja \mathbf{T} uma coleção arbitrária de tais δ -tubos Cujas orientações formam um conjunto de pontos δ -separados em S^{n-1} . Usamos $\#\mathbf{T}$ para denotar a cardinalidade de \mathbf{T} , e χ_T para denotar a função característica de T .

Conjectura 2. (*Kekeya linear*) Seja \mathbf{T} e δ como acima. Para cada $n/(n-1) < q \leq \infty$ existe uma constante C , independente de δ e da coleção \mathbf{T} , tal que

$$\left\| \sum_{T \in \mathbf{T}} \chi_T \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \delta^{(n-1)/q} (\#\mathbf{T})^{1-1/q(n-1)}. \quad (4.5)$$

A prova de que a Conjectura de restrição linear implica a Conjectura (2), segue um argumento padrão envolvendo funções de Rademacher (que remonta a [11] e [1]). Por uma simples adaptação das técnicas na situação linear, a conjectura de restrição multilinear implica uma conjectura multilinear correspondente do tipo-Kekeya. Suponhamos que $\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_n$ são famílias de δ -tubos em \mathbb{R}^n . Permitimos agora que os tubos dentro de uma única família \mathbf{T}_j sejam paralelos. No entanto, assumimos que para cada $1 \leq j \leq n$, os tubos em \mathbf{T}_j têm lados longos apontando em direções que pertencem a alguma vizinhança fixa, suficientemente pequena do j -ésimo vetor de base padrão e_j em S^{n-1} . Será conveniente referir-se a uma tal família de tubos como sendo transversal. (Os vetores e_1, \dots, e_n podem ser substituídos por qualquer conjunto de vetores fixos e linearmente independentes em \mathbb{R}^n).

Conjectura 3. (*Kekeya multilinear*) Seja $\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_n$ e δ como acima. Para cada $n/(n-1) \leq q \leq \infty$ existe uma constante C , independente de δ e das famílias de tubos $\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_n$ e δ , tal que

$$\left\| \prod_{j=1}^n \left(\sum_{T_j \in \mathbf{T}_j} \chi_{T_j} \right) \right\|_{L^{q/n}(\mathbb{R}^n)} \leq C \prod_{j=1}^n (\delta^{n/q} \#\mathbf{T}_j). \quad (4.6)$$

Observação 4.2. *Restrição multilinear \iff Kekeya multilinear, para mais detalhes consultar [2].*

Os melhores resultados sobre a restrição obtidos recentemente por Bourgain-Guth(2011) e Guth(2014) seguem de aplicações do método multilinear.

5 APÊNDICE A

5.1 Teoremas de Interpolação

Vamos rever os teoremas de interpolação que serão usadas aqui. Começemos por relembrar um fato básico sobre interpolação nos espaços L^p .

Proposição 2. *Sejam $1 \leq p < q \leq \infty$. Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$, então $f \in L^r(\mathbb{R}^n)$, para todo r satisfazendo $p \leq r \leq q$. De fato, se escrevemos*

$$\frac{1}{r} = \frac{1-t}{p} + \frac{t}{q},$$

com $0 < t < 1$, temos

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{1-t} \|f\|_q^t.$$

Prova. Utilizando a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \|f\|_r &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^r dx \right)^{1/r} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{r(1-t)} |f(x)|^{rt} dx \right)^{1/r} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{(1-t)/p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^q dx \right)^{t/q} = \|f\|_p^{1-t} \|f\|_q^t. \end{aligned}$$

□

Provaremos a seguir uma versão geral de interpolação para operadores, resultado conhecido como o Teorema da Interpolação de Riesz-Thorin. A sua prova fará uso de técnicas de análise complexa, como veremos no lema a seguir.

Lema 5.1. (Lema das três linhas de Hadamard). *Seja Φ uma função limitada e contínua na faixa $0 \leq \Re(z) \leq 1$, que é holomorfa no interior desta faixa. Se $|\Phi(z)| \leq M_0$ para $\Re(z) = 0$, e $|\Phi(z)| \leq M_1$ para $\Re(z) = 1$, então*

$$|\Phi(z)| \leq M_0^{1-t} M_1^t$$

para $\Re(z) = t$, com $0 < t < 1$.

Prova. Para $\epsilon > 0$ considere a função

$$\Phi_\epsilon(z) = \frac{e^{-\epsilon z(1-z)}\Phi(z)}{M_0^{1-t}M_1^t}.$$

Observe que Φ_ϵ satisfaz as hipóteses do lema com $M_0 = M_1 = 1$, e que $|\Phi_\epsilon| \rightarrow 0$ quando $\Im(z) \rightarrow \pm\infty$. Portanto, $|\Phi_\epsilon(z)| \leq 1$ no bordo do retângulo delimitado por $0 \leq \Re(z) \leq 1$ e $-A \leq \Im(z) \leq A$ (para A grande). Pelo Princípio do módulo máximo (Ver Cap. 3 de [26]) teremos $|\Phi_\epsilon(z)| \leq 1$ na faixa $0 \leq \Re(z) \leq 1$. Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$ obtemos

$$|\Phi(z)|M_0^{1-t}M_1^t = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} |\Phi_\epsilon(z)| \leq 1,$$

para $\Re(z) = t$, e isso conclui a prova. \square

Teorema 5.1. (Interpolação de Riesz–Thorin): *Seja T um operador linear de $L^{p_0} \cap L^{p_1}$ para $L^{q_0} \cap L^{q_1}$ satisfazendo*

$$\|Tf\|_{q_j} \leq M_j \|f\|_{p_j}, \quad j = 0, 1, \quad (5.1)$$

com $1 \leq p_j, q_j \leq \infty$. Então para todo $0 < t < 1$,

$$\|Tf\|_{q_t} \leq (M_0)^{1-t}(M_1)^t \|f\|_{p_t} \quad \text{para todo } f \in L^{p_t}, \quad (5.2)$$

onde

$$\frac{1}{p_t} = \frac{(1-t)}{p_0} + \frac{t}{p_1} \quad \text{e} \quad \frac{1}{q_t} = \frac{(1-t)}{q_0} + \frac{t}{q_1}.$$

Prova. O caso $p_0 = p_1$ é dado pela proposição 2. Suponha agora que $p_0 \neq p_1$, portanto que $1 < p_t < \infty$. Provaremos que a desigualdade (5.2) é válida para f no espaço Σ das funções simples com integral finita (i.e. combinações lineares finitas de funções características de conjuntos mensuráveis de medida finita). Lembre-se que Σ é denso em L^p , para $1 \leq p < \infty$. Por dualidade temos

$$\|Tf\|_{q_t} = \sup \left\{ \left| \int Tf(x)g(x)dx \right|, \quad g \in \Sigma, \quad \|g\|_{q'_t} = 1. \right\}$$

Podemos naturalmente assumir que $f \neq 0$ e renormalizar de modo a ter $\|f\|_{p_t} = 1$.

Escrevendo

$$f = \sum_1^m c_j \chi_{E_j} \quad \text{e} \quad g = \sum_1^n d_k \chi_{F_k},$$

onde os conjuntos E_j são disjuntos, os conjuntos F_k são disjuntos, e os coeficientes c_j 's e d_k 's são dados em sua forma polar

$$c_j = |c_j| e^{i\theta_j} \quad \text{e} \quad d_k = |d_k| e^{i\psi_k}.$$

Defina

$$\alpha(z) = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1} \quad \text{e} \quad \beta(z) = \frac{1-z}{q_0} + \frac{z}{q_1},$$

de modo que $\alpha(t) = p_t^{-1}$ e $\beta(t) = q_t^{-1}$, para $0 < t < 1$. Fixe $t \in (0, 1)$; como $p_t < \infty$, temos que $\alpha(t) > 0$. Definindo f_z por

$$f_z = \sum_1^m |c_j|^{\alpha(z)/\alpha(t)} e^{i\theta_j} \chi_{E_j},$$

e g_z como

$$g_z = \sum_1^n |d_k|^{(1-\beta(z))/(1-\beta(t))} e^{i\psi_k} \chi_{F_k},$$

se $\beta(t) < 1$, e $g_z = g$ se $\beta(t) = 1$, para todo z . De agora em diante assumimos $\beta(t) < 1$, visto que o caso $\beta(t) = 1$ é dado por uma simples modificação do argumento.

Definindo

$$\Phi(z) = \int_{\mathbb{R}^n} T f_z(x) g_z(x) dx,$$

temos que

$$\Phi(z) = \sum_{j,k} A_{jk} |c_j|^{\alpha(z)/\alpha(t)} |d_k|^{(1-\beta(z))/(1-\beta(t))},$$

onde

$$A_{jk} = e^{i(\theta_j + \psi_k)} \int_{\mathbb{R}^n} T \chi_{E_j}(x) \chi_{F_k}(x) dx.$$

Portanto, Φ é uma função inteira e limitada na faixa $0 \leq \Re(z) \leq 1$. Como $\int (Tf)(x)g(x)dx = \Phi(t)$, pelo lema das três linhas de Hadamard, é suficiente mostrar que $|\Phi(z)| \leq M_0$ quando $\Re(z) = 0$, e que $|\Phi(z)| \leq M_1$ quando $\Re(z) = 1$. Observe agora que

$$\alpha(is) = \frac{1}{p_0} + is \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0} \right) \quad \text{e} \quad 1 - \beta(is) = \left(1 - \frac{1}{q_0} \right) - is \left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_0} \right),$$

para $s \in \mathbb{R}$ e portanto

$$|f_{is}| = |f|^{\Re(\alpha(is)/\alpha(t))} = |f|^{p_t/p_0} \quad \text{e} \quad |g_{is}| = |g|^{\Re[(1-\beta(is))/(1-\beta(t))]} = |g|^{q'_t/q'_0}.$$

Pela desigualdade de Hölder temos

$$|\Phi(is)| \leq \|Tf_{is}\|_{q'_0} \|g_{is}\|_{q'_0} \leq M_0 \|f_{is}\|_{p_0} \|g_{is}\|_{q'_0} = M_0 \|f\|_{p_t}^{p_t/p_0} \|g\|_{q'_t}^{q'_t/q'_0} = M_0.$$

De maneira análoga, mostramos que $|\Phi(1 + is)| \leq M_1$, e isso verifica (5.2) para $f \in \Sigma$.

O caso geral $f \in L^{p_t}(\mathbb{R}^n)$ segue por um argumento de densidade. Dada $f \in L^{p_t}$ podemos escolher uma sequência $\{f_n\}$ em Σ tal que $|f_n| \leq |f|$ e $f_n \rightarrow f$ pontualmente. Considere agora o conjunto $E = \{x : |f(x)| > 1\}$ e defina $g = f\chi_E$; $g_n = f_n\chi_E$; $h = f - g$; $h_n = f_n - g_n$. Suponha sem perda de generalidade que $p_0 < p_1$, de modo que $g \in L^{p_0}$ e $h \in L^{p_1}$. Por convergência dominada, temos $\|f_n - f\|_{p_t} \rightarrow 0$, $\|g_n - g\|_{p_0} \rightarrow 0$ e $\|h_n - h\|_{p_1} \rightarrow 0$. Daí $\|Tg_n - Tg\|_{q_0} \rightarrow 0$ e $\|Th_n - Th\|_{q_1}$, e passando a uma subsequência, podemos assumir $Tg_n \rightarrow Tg$ q.t.p e $Th_n \rightarrow Th$ q.t.p. Daí teremos $Tf_n \rightarrow Tf$ q.t.p e pelo lema de Fatou

$$\|Tf\|_{q_t} \leq \liminf \|Tf_n\|_{q_t} \leq \liminf M_0^{1-t} M_1^t \|f_n\|_{p_t} = M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_{p_t},$$

o que conclui a demonstração. □

Apresentamos agora duas aplicações clássicas deste resultado.

Teorema 5.2. (Desigualdade de Young para convoluções): *Sejam $1 \leq p, q, r \leq \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Então $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ e vale*

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q,$$

com $1 + 1/r = 1/p + 1/q$.

Lembre-se que a transformada de Fourier está definida para uma função $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq 2$. E satisfaz

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1 \quad \text{e} \quad \|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2.$$

A partir destes dois pontos, utilizando a interpolação de Riesz-Thorin, temos o seguinte resultado.

Teorema 5.3. (Desigualdade de Hausdorff-Young): Seja $1 \leq p \leq 2$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Então

$$\left\| \widehat{f} \right\|_{p'} \leq \|f\|_p,$$

onde $1/p + 1/p' = 1$.

Suponha que para cada z na faixa $S = \{z \in \mathbb{C}; 0 \leq \Re(z) \leq 1\}$ tenhamos um operador linear T_z , definido no espaço das funções simples de \mathbb{R}^n tomando valores nas funções mensuráveis de \mathbb{R}^n , de modo que $(T_z f)g$ é integrável em \mathbb{R}^n para quaisquer f e g simples. Diremos que a família $\{T_z\}$ é admissível se, para cada f e g simples, o mapa

$$z \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} (T_z f) g$$

é analítico no interior de S , contínuo no bordo de S , e tal que existe uma constante $a < \pi$ que torna

$$e^{-a|y|} \log \left| \int_{\mathbb{R}^n} (T_z f) g \right|$$

limitado superiormente para $z = x + iy$ na faixa S .

Teorema 5.4. (Interpolação complexa de Stein). Seja $\{T_z\}, z \in S$, uma família admissível de operadores lineares satisfazendo

$$\|T_{iy}f\|_{q_0} \leq M_0(y)\|f\|_{p_0} \quad e \quad \|T_{1+iy}f\|_{q_1} \leq M_1(y)\|f\|_{p_1}$$

para qualquer função simples f , onde $1 \leq p_j, q_j \leq \infty$, para $j = 0, 1$. Assuma que $M_j(y)$, satisfazem

$$\sup_{-\infty < y < \infty} e^{-b|y|} \log M_j(y) < \infty, \quad (j = 0, 1)$$

para algum $b < \pi$. Então, se $0 \leq t \leq 1$, existe uma constante M_t tal que

$$\|T_t f\|_{q_t} \leq M_t \|f\|_{p_t},$$

para qualquer função simples f , onde

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} \quad e \quad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}.$$

A prova é similar à demonstração do Teorema da interpolação de Riesz-Thorin, uma vez que estabelecemos a seguinte generalização do Lema das três linhas.

Lema 5.2. *Suponha que F é uma função contínua em S que é analítica no interior de S e satisfaz*

$$\sup_{0 \leq x \leq 1; -\infty < y < \infty} e^{-a|y|} \log |F(x + iy)| <, \quad (5.3)$$

para algum $a < \pi$. Então

$$\log |F(x)| \leq \frac{1}{2} \sin \pi x \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\log |F(iy)|}{\cosh \pi y - \cos \pi x} + \frac{\log |F(1 + iy)|}{\cosh \pi y + \cos \pi x} \right\} dy, \quad (5.4)$$

para $0 < x < 1$.

Prova do teorema 5.4. Sejam f e g funções simples tais que $\|f\|_{p_t} = \|g\|_{q_t} = 1$. Assim, como na prova do Teorema de Riesz-Thorin, escreva

$$f = \sum_1^m c_j \chi_{E_j} \quad \text{e} \quad g = \sum_1^n d_k \chi_{F_k},$$

onde os conjuntos E_j são disjuntos, os conjuntos F_k são disjuntos, e os coeficientes c_j 's e d_k 's são dados em sua forma polar

$$c_j = |c_j| e^{i\theta_j} \quad \text{e} \quad d_k = |d_k| e^{i\psi_k}.$$

Defina

$$\alpha(z) = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1} \quad \text{e} \quad \beta(z) = \frac{1-z}{q_0} + \frac{z}{q_1},$$

de modo que $\alpha(t) = p_t^{-1}$ e $\beta(t) = q_t^{-1}$, para $0 < t < 1$. Fixe $t \in (0, 1)$, e assuma $p_t < \infty$ (e, portanto $\alpha(t) > 0$). Definindo f_z por

$$f_z = \sum_1^m |c_j|^{\alpha(z)/\alpha(t)} e^{i\theta_j} \chi_{E_j},$$

e g_z como

$$g_z = \sum_1^n |d_k|^{(1-\beta(z))/(1-\beta(t))} e^{i\psi_k} \chi_{F_k},$$

Se $\beta(t) < 1$, e se $\beta(t) = 1$ definimos $g_z = g$ para todo z . Assuma $(t) < 1$ (o caso $\beta(t) = 1$ é dado por uma modificação do argumento). Definindo

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}^n} T_z f_z g_z,$$

temos que

$$F(z) = \sum_{j,k} A_{jk} |c_j|^{\alpha(z)/\alpha(t)} |d_k|^{(1-\beta(z))/(1-\beta(t))},$$

onde

$$A_{jk} = e^{i(\theta_j + \psi_k)} \int_{\mathbb{R}^n} T_z \chi_{E_j} \chi_{F_k}.$$

Segue da hipótese que $\{T_z\}$ é uma família admissível que F satisfaz as hipóteses do Lema (5.2). Note ainda que

$$|f_{iy}|^{p_0} = |f|^{p_t} = |f_{1+iy}|^{p_1} \quad \text{e} \quad |g_{iy}|^{q'_0} = |g|^{q'_t} = |g_{1+iy}|^{q'_1}$$

e portanto, pela desigualdade de Hölder, temos $|F(iy)| \leq M_0(y)$ e $|F(1+iy)| \leq M_1(y)$. Então, pelo Lema (5.2), temos

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^n} T_t f g \right| = |F(t)| \\ & \leq \exp \left(\frac{1}{2} \sin \pi t \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\log M_0(y)}{\cosh \pi y - \cos \pi t} + \frac{\log M_1(y)}{\cosh \pi y + \cos \pi t} \right\} dy \right) := M_t. \end{aligned}$$

Como

$$\|T_t f\|_{q_t} = \sup_{\|g\|_{q'_t}=1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} T_t f g \right|$$

o teorema fica provado.

Proposição 3. *Seja (X, μ) e (Y, ν) espaços de medidas e $K : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ uma função mensurável em $\mu \times \nu$ tal que $\int |K(x, y)|^2 d\mu(x) < \infty$ para todo $y \in Y$. Suponha que*

$$\int |K(x, y)| d\mu(x) \leq A \quad \text{para } y \in Y$$

e

$$\int |K(x, y)| d\nu(y) \leq B \quad \text{para } x \in X.$$

Defina

$$T_K f(y) = \int K(x, y) f(x) d\mu(x) \text{ para } y \in Y, \quad f \in L^2(\mu).$$

Então

$$\|T_K f\|_{L^2(\nu)} \leq \sqrt{AB} \|f\|_{L^2(\mu)} \text{ para } f \in L^2(\mu). \quad (5.5)$$

Prova. A desigualdade (5.5) segue se provarmos que

$$\int \int |K(x, y) g(x) f(y)| d\mu(x) d\nu(y) \leq \sqrt{AB}$$

sempre que $\|g\|_{L^2(\mu)} = 1$ e $\|f\|_{L^2(\nu)} = 1$. Para verificarmos isso, usamos a desigualdade de Schwartz:

$$\begin{aligned} & \int \int |K(x, y) g(x) f(y)| d\mu(x) d\nu(y) \\ & \leq \left(\int \int |K(x, y)| |f(y)|^2 d\mu(x) d\nu(y) \int \int |K(x, y)| |g(x)|^2 d\mu(x) d\nu(y) \right)^{1/2} \\ & \leq \left(\int \int |K(x, y)| d\mu(x) |f(y)|^2 d\nu(y) \int \int |K(x, y)| d\nu(y) |g(x)|^2 d\mu(x) \right)^{1/2} \\ & \leq \sqrt{AB}. \end{aligned}$$

Como queríamos. □

5.2 Desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev

Nesta seção vamos demonstrar o Teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev para integral fracional, a qual precisaremos do seguinte lema.

Lema 5.3. (Caldéron Zygmund): Serja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\alpha > 0$. Então podemos decompor f :

$$f = g + \sum_1^{\infty} b_k, \quad (5.6)$$

onde

$$\|g\|_1 + \left\| \sum_1^{\infty} b_k \right\|_1 \leq 3 \|f\|_1, \quad (5.7)$$

$$|g(x)| \leq 2^n \alpha \text{ quase todo ponto,} \quad (5.8)$$

e para certos cubos Q_k com interiores disjuntos

$$b_k(x) = 0 \text{ se } x \notin Q_k \text{ e } \int b_k dx = 0, \quad (5.9)$$

$$\sum_1^\infty |Q_k| \leq \alpha^{-1} \|f\|_1. \quad (5.10)$$

Prova. Começamos dividindo \mathbb{R}^n em uma malha diádica de cubos de volume $> \alpha^{-1} \|f\|_1$. Assim, se Q representa um dos cubos dessa malha

$$|Q|^{-1} \int_Q |f| dx < \alpha. \quad (5.11)$$

Dividindo diadicamente cada cubo em 2^n partes, seja Q_{11}, Q_{12}, \dots os cubos resultantes para qual (5.11) não vale, i.e.,

$$|Q_{1k}|^{-1} \int_{Q_{1k}} |f| dx \geq \alpha. \quad (5.12)$$

Note que

$$\alpha |Q_{1k}| \leq \int_{Q_{1k}} |f| dx < 2^n |Q_{1k}| \quad (5.13)$$

isto segue de (5.11) e do fato que, Q_{1k} é obtido subdividindo Q , então $2^n |Q_{1k}| = |Q|$.

Defina

$$g(x) = |Q_{1k}|^{-1} \int_{Q_{1k}} |f| dx, \quad x \in |Q_{1k}|, \quad (5.14)$$

$$b_{1k} = f(x) - g(x), \quad x \in Q_{1k} \text{ e } b_{1k} = 0, \quad x \notin Q_{1k}.$$

Em seguida, nós consideramos todos os cubos que não estão entre os $\{Q_{1k}\}$. Por construção, cada um satisfaz (5.11). Nós dividimos cada um como antes em 2^n subcubos e seja Q_{21}, Q_{22}, \dots os cubos resultantes para qual vale (5.12). Estendemos a definição (5.14) para estes cubos. Continuando este procedimento obtemos cubos Q_{jk} com interiores disjuntos e funções b_{jk} que podemos organizar em uma sequência.

Se a definição de g é estendida através de $g(x) = f(x)$ para $x \in \Omega = \bigcup Q_K$ então temos (5.6). Além disso, como

$$\int_{Q_k} |g| dx \leq \int_{Q_k} |f| dx$$

segue da desigualdade triângular que

$$\int_{Q_k} (|g| + |b_k|) dx \leq 3 \int_{Q_k} |f| dx,$$

o que implica (5.7). Também (5.8) vale quando $x \in \Omega$; enquanto se $x \notin \Omega$ existem cubos arbitrariamente pequenos que contém x sobre o qual o valor medio de $|f|$ é $< \alpha$. Assim $|g| < \text{q.t.p}$ em Ω^c e (5.8) vale. A propriedade (5.9) segue-se da construção, e finalmente (5.10) segue do fato que os cubos Q_k satisfazem (5.13). \square

Teorema 5.5. (Desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev): *Seja $r > 1$ satisfazendo*

$$\frac{1}{r} = 1 + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)$$

para algum $1 < p < q < \infty$. Então existe uma constante $C_{p,q}$ tal que, para qualquer $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\|I_r f\|_q \leq C_{p,q} \|f\|_p, \quad (5.15)$$

onde

$$I_r f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{-n/r} f(y) dy.$$

A prova irá basear-se numa sequência de lemas. O primeiro é:

Lema 5.4. *Se $1 \leq p < r'$ então*

$$\|I_r f\|_\infty \leq C_{p,r} \|f\|_p^{p/r'} \|f\|_\infty^{1-p/r'}, \quad f \in L^p \cap L^\infty. \quad (5.16)$$

Prova. Dado qualquer $R > 0$ temos

$$|I_r f(x)| \leq \int_{|y| \leq R} |y|^{-n/r} |f(x - y)| dy + \int_{|y| > R} |y|^{-n/r} |f(x - y)| dy$$

$$\begin{aligned} &\leq C \left(R^{n-n/r} \|f\|_\infty + \left(R^{n-np'/r} \right)^{1/p'} \|f\|_p \right) \\ &\leq C \left(R^{n-n/r} \|f\|_\infty + R^{-n/q} \|f\|_p \right) \end{aligned}$$

Se escolhermos R de modo que

$$R^{n/p} = R^{n/r'} R^{n/q} = \|f\|_p / \|f\|_\infty,$$

segue-se que, os termos dentro dos parênteses são ambos iguais a $\|f\|_p^{p/r'} \|f\|_\infty^{1-p/r'}$.

□

Para usar a decomposição Calderon-Zygmund precisamos:

Lema 5.5. *Seja $b \in L^1$ suportada em um cubo Q e satisfazendo $\int b dx = 0$. Então*

$$\left(\int_{x \notin Q^*} |I_r b|^r dx \right)^{1/r} \leq C_r \|b\|_1, \quad (5.17)$$

onde Q^* é o dobro de Q .

Prova. Podemos assumir que Q é um cubo de lado R e centrado na origem. Então para $x \notin Q^*$, nós temos

$$\begin{aligned} |I_r b(x)| &\leq \int \left| |x-y|^{-n/r} - |x|^{-n/r} \right| |b(y)| dy \\ &\leq CR |x|^{-1-n/r} \|b\|_1, \end{aligned}$$

pelo teorema do valor médio. Integrando está desigualdade, como

$$\left(\int_{x \notin Q^*} |x|^{-r-n} dx \right)^{1/r} = C/R,$$

segue a desigualdade desejada.

□

O último lema é:

Lema 5.6. *I_r é do tipo fraco - $(1, r)$, ou seja:*

$$|\{x : |I_r f(x)| > \gamma\}| \leq C_r (\gamma^{-1} \|f\|_1)^r. \quad (5.18)$$

Prova. Escreva $f = g + \sum b_k$ como no lema (5.3). Para simplificar os cálculos podemos assumir que $\|f\|_1 = 1$. Então por (5.16) com $p = 1$,

$$|I_r g| \leq \|g\|_1^{1/r'} \|g\|_\infty^{1-1/r'} \leq C\alpha^{1-1/r'} = C\alpha^{1/r}.$$

Defina α por $C\alpha^{1/r} = \gamma/2$. Então

$$|\{x : |I_r f(x)| > \gamma\}| \leq \left| \left\{ x : \sum |I_r b_k(x)| > \gamma/2 \right\} \right|.$$

Se $\Omega^* = \bigcup Q_k^*$, então

$$|\Omega^*| \leq 2^n \alpha^{-1} = C' \gamma^{-r},$$

enquanto, por (5.17),

$$\begin{aligned} & \left| \left\{ x \notin \Omega^* : \sum |I_r b_k(x)| > \gamma/2 \right\} \right|^{1/r} \\ & \leq (\gamma/2)^{-1} \sum \left(\int_{x \notin \Omega^*} |I_r b_k(x)| dx \right)^{1/r} \leq C'' \gamma^{-1}. \end{aligned}$$

Se combinamos as últimas três desigualdades, obtemos (5.18).

Prova. (Teorema 5.5): Podemos assumir que $\|f\|_1 = 1$ e usar o fato que:

$$\|I_r f\|_q^q = q \int_0^\infty \gamma^{q-1} m(\gamma) d\gamma,$$

onde

$$m(\gamma) = |\{x : |I_r f(x)| > \gamma\}|.$$

Para estimar $m(\gamma)$, defina $f = f_0 + f_1$, onde $f_0 = f$ quando $|f| > \alpha$ e 0 outro caso.

Então, por (5.16) e as nossas hipóteses sobre os expoentes,

$$\|I_r f_1\|_\infty \leq C_{p,r} \|f_1\|_p^{p/r'} \|f_1\|_\infty^{1-p/r'} \leq C_{p,r} \alpha^{1-p/r'} = C_{p,r} \alpha^{p/q}.$$

Nós agora escolhemos α tal que $\gamma/2 = C_{p,r} \alpha^{p/q}$. Então

$$m(\gamma) \leq |\{x : |I_r f_0(x)| > \gamma/2\}| \leq C_r (\gamma^{-1} \|f_0\|_1)^r$$

por (5.18). Isto implica que

$$\|I_r f\|_q^q \leq C \int_0^\infty \gamma^{q-1} (\gamma^{-1} \|f_0\|_1)^r d\gamma.$$

mas, se fizermos a mudança de variáveis $\alpha = (C_{p,r}^{-1}\gamma/2)^{q/p}$, recordar a definição de f_0 e aplicar a desigualdade de Minkowski para integrais, obtemos que esta integral é

$$\leq C' \left\{ \int \left(\int_0^{|f(x)|} \alpha^{-1+p-pr/q} d\alpha \right)^{1/r} |f(x)| dx \right\}^r.$$

Mas $q > r$ por hipótese, e portanto

$$\left(\int \alpha^{-1+p-pr/q} d\alpha \right)^{1/r} = |f(x)|^{p(1/r-1/q)} = |f(x)|^{p-1},$$

o que leva à desigualdade desejada $\|I_r f\|_q^q \leq C'$ uma vez que estamos assumindo que $\|f\|_p = 1$. □

6 APÊNDICE B

6.1 Transformada de Fourier

Definição 6.1. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. A transformada de Fourier de f é a função $\widehat{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ dada por,*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx, \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (6.1)$$

Exemplo 6.1. *Seja $G(x) = e^{-\pi|x|^2}$. Então $\widehat{G}(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}$.*

Teorema 6.1. *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então:*

1. $\|\widehat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_1$.
2. \widehat{f} é uma função contínua.

As seguintes formulas segue-se pelo teorema de Fubini:

$$\widehat{fg} = \widehat{f}\widehat{g}, \quad f, g \in L^1(\mathbb{R}^n), \quad (\text{fórmula do produto}), \quad (6.2)$$

$$\widehat{(f * g)} = \widehat{f}\widehat{g}, \quad f, g \in L^1(\mathbb{R}^n), \quad (\text{fórmula da convolução}). \quad (6.3)$$

onde

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy.$$

Para $a \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$ defina a translação τ_a e a dilatação δ_r por

$$\tau_a(x) = x + a, \quad \delta_r(x) = rx, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Então para $f \in L^1(\mathbb{R}^n), \xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\widehat{f \circ \tau_a}(\xi) = e^{2\pi i a \cdot \xi} \widehat{f}(\xi), \quad (\widehat{e^{2\pi i a \cdot x} f})(\xi) = \widehat{f}(\xi - a), \quad (6.4)$$

$$\widehat{f \circ \delta_r}(\xi) = r^{-n} \widehat{f}(r^{-1}\xi). \quad (6.5)$$

Teorema 6.2. (Reimann-Lebesgue): Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então $\widehat{f}(\xi) \rightarrow 0$ quando $|\xi| \rightarrow \infty$, e assim, $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 6.3. (Fórmula de inversão): Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e suponha que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Então para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$ vale:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi. \quad (6.6)$$

Prova. Defina

$$\Psi(x) = e^{-\pi|x|^2}, \quad \Psi_\epsilon(x) = e^{-\pi\epsilon^2|x|^2}.$$

Nós temos por (6.5),

$$\widehat{\Psi}_\epsilon(\xi) = \epsilon^{-n} e^{-\pi|\xi|^2/\epsilon^2}.$$

Escreva

$$I_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{-\pi\epsilon^2|x|^2} e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi.$$

Então pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue,

$$I_\epsilon(x) \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0.$$

Por outro lado, fazendo $g_x(y) = e^{-\pi\epsilon^2|y|^2} e^{2\pi i x \cdot y}$, temos por (6.4) $\widehat{g}_x(y) = \widehat{\Psi}_\epsilon(y - x) = \Psi^\epsilon(x - y)$, onde $\Psi^\epsilon(y) = \epsilon^{-n} \Psi(y/\epsilon)$. Pela fórmula do produto (6.2),

$$I_\epsilon(x) = \int \widehat{f} g_x = \int f \widehat{g}_x = \Psi^\epsilon * f(x).$$

Como $\int \Psi = \Psi(0) = 1$, a função Ψ^ϵ , $\epsilon > 0$, fornece uma aproximação da identidade para qual

$$\Psi^\epsilon * f(x) \rightarrow f(x) \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0 \text{ q.t.p } x \in \mathbb{R}^n.$$

A combinação destes dois limites dá a fórmula de inversão. □

Corolário 6.1. Se f e \widehat{f} são integráveis, então f é contínua.

Nos denotamos a transformada de Fourier inversa de $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ por

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \check{g}(x) = \int g(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi.$$

Ou seja $\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}) = f$ se $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Definindo $\widetilde{f}(x) = f(-x)$ cada uma das três fórmulas a seguir é uma reafirmação da fórmula de inversão:

$$\check{f} = \widehat{\widetilde{f}} = \widetilde{\widehat{f}}, \widehat{\widetilde{f}} = \widetilde{f}, \bar{f} = \widehat{\widehat{f}}. \quad (6.7)$$

Aplicando a formula de inversão para a formula de convolução (6.3) nós temos

$$\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}, \text{ se } f, g, fg, \widehat{f}, \widehat{g} \in L^1(\mathbb{R}^n). \quad (6.8)$$

Definição 6.2. (*Espaço de Schwartz*): O espaço de Schwartz \mathcal{S} é o espaço das funções $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ tal que:

1. f é C^∞ .
2. $x^\alpha D^\beta f$ é uma função limitada para cada par de multiíndices α e β .

Para $f \in \mathcal{S}$ definimos

$$\|f\|_{\alpha, \beta} = \|x^\alpha D^\beta f\|_\infty.$$

Definimos a noção de convergência em \mathcal{S} por: Uma sequência $\{f_k\} \subset \mathcal{S}$ converge em \mathcal{S} para $f \in \mathcal{S}$ se $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\|_{\alpha, \beta} = 0$ para cada par de multiíndices α e β .

As seguintes definições alternativas de \mathcal{S} são frequentemente úteis:

$$f \in \mathcal{S} \Leftrightarrow (1 + |x|)^N D^\beta f \text{ é limitada para cada } N \text{ e } \beta, \quad (6.9)$$

$$f \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha D^\beta f = 0 \text{ para cada } \alpha \text{ e } \beta. \quad (6.10)$$

Proposição 4. C_0^∞ é denso em \mathcal{S} , i.e. para qualquer $f \in \mathcal{S}$ existe uma sequência $\{f_k\} \subset C_0^\infty$ com $f_k \rightarrow f$ em \mathcal{S} .

Prova. Ver capítulo 2 do livro [42]. □

Segue-se também do teorema de inversão de Fourier que:

$$f \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \widehat{f} \in \mathcal{S} \quad (6.11)$$

$$\int f\bar{g} = \widehat{f\bar{g}}, \quad f, g \in \mathcal{S}, \quad (\text{Parseval}), \quad (6.12)$$

$$\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2, \quad f, g \in \mathcal{S}, \quad (\text{Plancherel}). \quad (6.13)$$

A fórmula de Parseval (que naturalmente dá a fórmula de Plancherel) é uma consequência da fórmula de inversão e da fórmula do produto:

$$\int f\bar{g} = \int \widehat{f}(-x)\bar{g}(x)dx = \int \widehat{f}(x)\bar{g}(-x)dx = \int \widehat{f}(x)\widehat{h}(x)dx,$$

onde $h(x) = \bar{g}(-x)$. Vemos a partir da definição da transformada de Fourier que $\widehat{h}(x) = \overline{\widehat{g}(x)}$, o que prova a fórmula de Parseval.

Assim a transformada de Fourier é uma isometria linear de \mathcal{S} sobre si mesmo, com respeito a norma de L^2 . A fórmula (6.1) não pode ser usado para definir a transformada de Fourier para funções de L^2 , mas como $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^n)$, podemos estender isometricamente de forma única para L^2 . Assim temos \widehat{f} definida para todo $f \in L^1 \cup L^2$. Agora as fórmulas de Parseval e Plancherel se estendem para L^2 :

$$\int f\bar{g} = \widehat{f\bar{g}}, \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad (\text{Parseval}), \quad (6.14)$$

$$\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2, \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad (\text{Plancherel}). \quad (6.15)$$

Similarmente, as fórmulas de translação e dilatação (6.4) e (6.5) se mantem para funções L^2 em quase toda parte.

Definição 6.3. (Transformada de Fourier de medidas): A transformada de Fourier de uma medida finita de borel $\mu \in \mathbb{R}^n$ é definida por

$$\widehat{\mu}(\xi) = \int e^{-2\pi i \xi \cdot x} d\mu(x), \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (6.16)$$

Quando $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, i.e., μ tem suporte compacto, $\widehat{\mu}$ é uma função contínua, limitada e lipschitz:

$$\|\widehat{\mu}\|_\infty \leq \mu(\mathbb{R}^n) \text{ e } |\widehat{\mu}(x) - \widehat{\mu}(y)| \leq R\mu(\mathbb{R}^n) |x - y| \text{ para } x, y \in \mathbb{R}^n, \quad (6.17)$$

Se $\text{supp } \mu \subset B(0, R)$. As fórmulas de produto e convolução tem por extensão do teorema de Fubini de medidas: para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$,

$$\int \widehat{\mu} f = \int \widehat{f} d\mu, \quad (6.18)$$

$$\int \widehat{\mu} d\nu = \int \widehat{\nu} d\mu, \quad (6.19)$$

$$\widehat{f * \mu} = \widehat{f} \widehat{\mu}, \quad (6.20)$$

$$\widehat{f \widetilde{\mu}} = \widehat{f} * \mu, \quad (6.21)$$

$$\widehat{\mu * \nu} = \widehat{\mu} \widehat{\nu}. \quad (6.22)$$

Podemos aproximar medidas por funções suaves com suporte compacto usando convolução. Seja $\{\psi_\epsilon : \epsilon > 0\} \subset C^\infty$ uma aproximação da identidade tal que

$$\psi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \psi(x/\epsilon), \quad \epsilon > 0, \quad \psi \geq 0, \quad \text{supp } \psi \subset B(0, 1), \quad \int \psi = 1.$$

Então

$$\widehat{\psi_\epsilon}(\xi) = \widehat{\psi}(\epsilon\xi) \rightarrow \widehat{\psi}(0) = \int \psi = 1 \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0.$$

Fazendo $\mu_\epsilon = \psi_\epsilon * \mu$ para uma medida de borel finita μ , temos que μ_ϵ converge fracamente para μ quando $\epsilon \rightarrow 0$ e

$$\widehat{\mu}_\epsilon = \widehat{\psi}_\epsilon \widehat{\mu} \rightarrow \widehat{\mu} \text{ uniformemente.}$$

Se $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$,

$$\widehat{\mu} = \widehat{\nu} \text{ implica } \mu = \nu.$$

Nós ainda temos para $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$,

$$\widehat{f\mu} = \widehat{f} * \widehat{\mu}, \quad f \in S(\mathbb{R}^n), \quad (6.23)$$

$$\int \overline{f} d\mu = \int \overline{\widehat{f}} \widehat{\mu}, \quad f \in S(\mathbb{R}^n), \quad (6.24)$$

$$\int \widehat{f\widetilde{g}} d\mu = \int f(\widehat{\mu} * \overline{g}), \quad f, g \in S(\mathbb{R}^n). \quad (6.25)$$

Estes resultados seguem através da aproximação de μ por $\psi_\epsilon * \mu$.

Vamos identificar medidas absolutamente contínuas com funções: se μ é absolutamente contínua (com respeito a \mathcal{L}^n), pelo teorema de Radon–Nikodym ela é da forma $\mu = f\mathcal{L}^n$ para algum $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e identificaremos μ e f .

Teorema 6.4. *Seja $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Se $\widehat{\mu} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, então $\mu \in L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Prova. Como a transformada de Fourier mapeia $L^2(\mathbb{R}^n)$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$, existe $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $\widehat{\mu} = \widehat{f}$. Escreva

$$\mu_\epsilon = \psi_\epsilon * \mu, \quad f_\epsilon = \psi_\epsilon * f.$$

Então pela fórmula de convolução,

$$\widehat{\mu}_\epsilon = \widehat{\psi}_\epsilon \widehat{\mu} = \widehat{\psi}_\epsilon \widehat{f} = \widehat{f}_\epsilon,$$

e então $\mu_\epsilon = f_\epsilon$. Como $\mu_\epsilon \rightarrow \mu$ e $f_\epsilon \rightarrow f$, temos $\mu = f$. □

Para definir a transformada de Fourier de uma função em $L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 < p < 2$, nós podemos fazer o uso de $L^1(\mathbb{R}^n)$ e $L^2(\mathbb{R}^n)$: qualquer $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < 2$, pode ser escrito como $f = f_1 + f_2$, $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Então podemos definir $\widehat{f} = \widehat{f}_1 + \widehat{f}_2$, isto segue do fato que a transformada de Fourier é um operador linear e podemos justificar a convergência das integrais \widehat{f}_1 e \widehat{f}_2 .

6.2 Transformada de Fourier de funções radiais, função de Bessel

O objetivo desta seção é encontrar a transformada de Fourier da medida de superfície da esfera $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$. Vamos primeiro calcular a transformada de Fourier de funções radiais.

Suponhamos $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f(x) = \psi(|x|)$, $x \in \mathbb{R}^n$, para alguma $\psi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$. Vamos usar as duas seguintes fórmulas do tipo-Fubini:

A primeira é a integração padrão na fórmula coordenadas polares: se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mathcal{L}^n = \int_{S^{n-1}} \left(\int_0^\infty f(rx) r^{n-1} dr \right) d\sigma^{n-1}x. \quad (6.26)$$

Para o segundo, fixe $e \in S^{n-1}$ e seja $S_\theta = \{x \in S^{n-1} : e \cdot x = \cos \theta\}$ para $0 \leq \theta \leq \pi$. O conjunto S_θ é uma esfera de dimensão $(n-2)$ e raio $\sin \theta$, assim

$$\sigma_{\sin \theta}^{n-2}(S_\theta) = b(n)(\sin \theta)^{n-2},$$

onde $b(n) = \sigma^{n-2}(S^{n-2})$. Então para $g \in L^1(S^{n-1})$,

$$\int_{S^{n-1}} g d\sigma^{n-1} = \int_0^\pi \left(\int_{S_\theta} g(x) d\sigma_{\sin \theta}^{n-2}x \right) d\theta. \quad (6.27)$$

Aplicando (6.26) e o Teorema de Fubini,

$$\widehat{f}(re) = \int f(y) e^{-2\pi i r e \cdot y} dy = \int_0^\infty \psi(s) s^{n-1} \left(\int_{S^{n-1}} e^{-2\pi i r s e \cdot x} d\sigma^{n-1}x \right) ds.$$

A integral interior pode ser calculado com a ajuda de (6.27), como $e^{-2\pi i r s e \cdot x}$ é constante em S_θ :

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} e^{-2\pi i r s e \cdot x} d\sigma^{n-1}x &= \int_0^\pi e^{-2\pi i r s \cos \theta} \sigma_{\sin \theta}^{n-2}(S_\theta) d\theta \\ &= b(n) \int_0^\pi e^{-2\pi i r s \cos \theta} (\sin \theta)^{n-2} d\theta. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $\cos \theta \mapsto -t$ e introduzindo para $m > -1/2$ as funções de Bessel $J_m : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$J_m(u) := \frac{(u/2)^m}{\Gamma(m+1/2)\Gamma(1/2)} \int_{-1}^1 e^{iut} (1-t^2)^{m-1/2} dt, \quad (6.28)$$

onde $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$, de onde segue que

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} e^{-2\pi i r s e \cdot x} d\sigma^{n-1}x &= b(n) \int_{-1}^1 e^{2\pi i r s t} (1-t^2)^{(n-3)/2} dt \\ &= c(n) (rs)^{-(n-2)/2} J_{(n-2)/2}(2\pi r s). \end{aligned}$$

Isto leva a fórmula para a transformada de Fourier da função radial f :

$$\widehat{f}(x) = c(n) |x|^{-(n-2)/2} \int_0^\infty \psi(s) J_{(n-2)/2}(2\pi |x| s) s^{n/2} ds. \quad (6.29)$$

A seguinte estimativa é óbvia:

$$|J_m(t)| \leq C(m)t^m \quad \text{para } t > 0. \quad (6.30)$$

Uma propriedade básica de funções de Bessel é a seguinte estimativa de decaimento:

$$|J_m(t)| \leq C(m)t^{-1/2} \quad \text{para } t > 0. \quad (6.31)$$

Quando $m = K - 1/2, k \in \{1, 2, \dots\}$, repetidas integrações parciais mostram que a função de Bessel J_m pode ser escrita em termos de funções elementares na forma da qual (6.31) segue facilmente. Em particular,

$$J_{1/2}(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi t}} \sin t. \quad (6.32)$$

Todas as funções de Bessel se comportam mais ou menos assim no infinito, isto é,

$$J_m(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi t}} \cos(t - \pi m/2 - \pi/4) + O(t^{-3/2}), \quad t \rightarrow \infty. \quad (6.33)$$

Isto pode ser verificado com uma integração bastante simples, ver [30], ou [12].

Vamos também precisar dos seguintes fórmulas de recursão:

$$\frac{d}{dt}(t^{-m} J_m(t)) = -t^m J_{m+1}(t), \quad (6.34)$$

$$\frac{d}{dt}(t^m J_m(t)) = t^m J_{m-1}(t), \quad (6.35)$$

suas provas são diferenciações bastante simples, ver [12].

Uma consequência simples das fórmulas (6.29), (6.35) e (6.31) é a estimativa de decaimento para a função característica da bola unitária em \mathbb{R}^n :

$$|\widehat{B(0,1)}(x)| \leq C(n)|x|^{-(n+1)/2} \quad \text{para } x \in \mathbb{R}^n. \quad (6.36)$$

Voltamos agora a medida de superfície $d\sigma^{n-1}$ na esfera S^{n-1} . Verifica-se facilmente que $d\sigma^{n-1}$ é o limite fraco das medidas $\delta^{-1}\mathcal{L}^n|_{(B(0,1+\delta)(0,1))}$ quando $\delta \rightarrow 0$. Aplicando a fórmula (6.29) para a função característica de $B(0, 1 + \delta)(0, 1)$ e fazendo $\delta \rightarrow 0$, temos

$$\widehat{d\sigma^{n-1}}(x) = C(n)|x|^{(2-n)/2} J_{(n-2)/2}(2\pi|x|). \quad (6.37)$$

Consequentemente¹,

$$|\widehat{\sigma^{n-1}}(x)| \leq C(n)|x|^{(1-n)/2} \text{ para } x \in \mathbb{R}^n. \quad (6.38)$$

¹Uma generalização da estimativa (6.38), para medidas de superfícies em geral, pode ser encontrada no livro [29].

7 APÊNDICE C

7.1 Medidas de Hausdorff. Dimensão de Hausdorff

Se E é um subconjunto não-vazio de \mathbb{R}^n , denotaremos por $d(E)$ o seu diâmetro, isto é,

$$d(E) = \sup \{|x - y| : x, y \in E\}. \quad (7.1)$$

Além disso, se $E \subset \bigcup_i E_i$ onde para cada i temos $0 < d(E_i) \leq \delta$, então diremos que $\{E_i\}$ é uma δ -cobertura de E .

Definição 7.1. *Seja E um subconjunto de \mathbb{R}^n e $s \geq 0$. Para cada $\delta > 0$, defina*

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf \left\{ \sum_i d(E_i)^s : \{E_i\} \text{ é uma } \delta\text{-cobertura de } E \right\}. \quad (7.2)$$

A medida de Hausdorff s -dimensional de E é definida por

$$\mathcal{H}(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(E). \quad (7.3)$$

Um conjunto \mathcal{H}^s -mensurável E para o qual tenhamos $0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$ é chamado de s -set.

Propriedades Básicas

Diremos que $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma similaridade de escala λ se pra todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale

$$|T(x) - T(y)| \leq \lambda |x - y|.$$

O primeiro resultado que mostramos é que mudanças de escala afetam a medida de Hausdorff s -dimensional da forma correta.

Lema 7.1. *Seja $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma similaridade de fator $\lambda > 0$. Se $F \subset \mathbb{R}^n$, então*

$$\mathcal{H}^s(T(F)) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F). \quad (7.4)$$

Prova. Seja $\{U_i\}$ uma δ -cobertura de F ; então, $\{T(U_i)\}$ é uma $\delta\lambda$ -cobertura de $T(F)$. Portanto, temos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} d(T(U_i))^s \leq \lambda^s \sum_{i=1}^{\infty} d(U_i)^s \implies \mathcal{H}_{\delta\lambda}^s(T(F)) \leq \lambda^s \mathcal{H}_{\delta}^s(F).$$

Fazendo $\delta \rightarrow 0$, obtemos $\mathcal{H}^s(T(F)) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s(F)$. Como T é uma transformação inversível cuja inversa também é uma similaridade (mas com fator $1/\lambda$), obtemos a desigualdade oposta substituindo no argumento acima:

- T por T^{-1} ;
- F por $T(F)$.

□

O próximo resultado, é de grande valia já que ele nos mostra como transformações Hölder contínuas distorcem a medida de Hausdorff.

Lema 7.2. *Seja $F \subset \mathbb{R}^n$ e $T : F \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma mapa satisfazendo $|T(x) - T(y)| \leq K|x - y|^\alpha$ para algum par de constantes (K, α) . Então para cada s não negativo temos que*

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(T(F)) \leq K^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(F). \quad (7.5)$$

Prova. Se $\{U_i\}$ é uma δ -cobertura de F , temos que

$$d(T(F \cap U_i)) \leq Kd(F \cap U_i)^\alpha \leq Kd(U_i)^\alpha \leq K\delta^\alpha.$$

Logo, por construção, temos que $\{T(F \cap U_i)\}$ é uma ϵ -cobertura de $T(F)$, onde $\epsilon = K\delta^\alpha$. Além disso, pela sequência de desigualdades acima, temos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} d(T(F \cap U_i))^{s/\alpha} \leq K^{s/\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} d(U_i)^s \implies \mathcal{H}_{\epsilon}^{s/\alpha}(T(F)) \leq K^{s/\alpha} \mathcal{H}_{\delta}^s(F)$$

fazendo $\delta \rightarrow 0$, vemos que $\epsilon \rightarrow 0$ também; dessa forma, obtemos a desigualdade desejada. □

Antes de prosseguirmos, cabem aqui uma série de comentários.

1. Não é difícil de provar que tanto \mathcal{H}_δ^s quanto \mathcal{H}^s definem medidas (medidas exteriores, para sermos mais precisos) de Borel, regular.
2. A restrição de \mathcal{H}^s a coleção de todos os conjuntos \mathcal{H}^s -mensurável define uma medida no sentido usual e essa σ -álgebra contém todos os conjuntos de Borel; dessa forma, não é errado chamarmos \mathcal{H}^s de medida, quando pensamos na restrição dela nessa σ -álgebra.
3. As vezes é conveniente trocarmos a δ -cobertura por uma δ -cobertura de abertos, bolas ou cubos; em todos esses casos, a menos de constantes multiplicativas, obteremos a mesma medida.

Para cada $E \subset \mathbb{R}^n$ fixo, temos que $\mathcal{H}^s(E)$ é uma função não-crescente de s ; de fato, se $s < t$ temos que

$$\mathcal{H}_\delta^t(E) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(E),$$

de onde segue que se $\mathcal{H}^t(E)$ é positivo, então $\mathcal{H}^s(E)$ é infinito. Para verificarmos as duas afirmações acima, note apenas que se $s < t$ e $\{U_i\}$ é uma δ -cobertura de E , então

$$\sum_i d(U_i)^t \leq \sum_i d(U_i)^{t-s} d(U_i)^s \leq \delta^{t-s} \sum_i d(U_i)^s$$

de onde segue a desigualdade supracitada. Se $\mathcal{H}^s(E) < \infty$, ao fazermos $\delta \rightarrow 0$, vemos que $\mathcal{H}^t(E) = 0$ para todo $t > s$; da mesma forma, se $\mathcal{H}^t(E) > 0$, essa desigualdade nos mostra que $\mathcal{H}^s(E) = \infty$ para todo $s < t$.

Vemos dessa forma que, dado um subconjunto $E \subset \mathbb{R}^n$, deve existir um valor crítico s_0 tal que $\mathcal{H}^s(E) = \infty$ para todo $s < s_0$ e $\mathcal{H}^s(E) = 0$ para todo $s > s_0$. Esse índice é o que chamamos de dimensão de Hausdorff de E .

Definição 7.2. *A dimensão de Hausdorff de $A \subset \mathbb{R}^n$ é definida como*

$$\dim_H(A) := \inf \{s : \mathcal{H}^s(A) = 0\} = \sup \{s : \mathcal{H}^s(A) = \infty\}. \quad (7.6)$$

Se $s = \dim_H(E)$, então $\mathcal{H}^s(E)$ pode ser zero, um valor finito ou mesmo infinito. Um conjunto de Borel E para o qual $0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$ é chamado de um s -set ou conjunto s -dimensional. Classificar s -sets é uma tarefa difícil e de forma geral, não está completa; nos casos em que $s \in \mathbb{N}$, podemos dizer muito mais sobre a estrutura desses conjuntos.

O lema de Frostman

Em geral não é uma tarefa muito difícil darmos cotas superiores para medidas e dimensões de Hausdorff: a tarefa complicada é introduzir cotas inferiores.

De forma resumida, o lema de Frostman transforma esse problema em outro relativamente mais simples: achar medidas com boas propriedades de crescimento sobre bolas.

Teorema 7.1. (Lema de Frostman). *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um boreliano. Então, $\mathcal{H}^s(A) > 0$ se, e somente se, existe uma medida $\mu \in \mathcal{M}(A)$ tal que*

$$\mu(B(x, r)) \leq r^s \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n, r > 0. \quad (7.7)$$

Em particular, temos que

$$\dim_H(A) = \sup \{s : \text{existe } \mu \in \mathcal{M}(A) \text{ tal que 7.7 é satisfeita}\}. \quad (7.8)$$

Observação 7.1. *Uma medida satisfazendo (7.7) é chamada de uma s -medida de Frostman ou simplesmente de uma medida de Frostman.*

A prova pode ser encontrada em [20]. O leitor interessado sobre a Medida e dimensão de Hausdorff pode consultar [8], [9].

Referências Bibliográficas

- [1] BECKNER, W., CARBERY, A., SEMMES, S., AND SORIA, F. A note on restriction of the Fourier transform to spheres. *Bull. London Math. Soc.* 21, 4 (1989), 394–398.
- [2] BENNETT, J., CARBERY, A., AND TAO, T. On the multilinear restriction and Kakeya conjectures. *Acta Math.* 196, 2 (2006), 261–302.
- [3] BOURGAIN, J. Besicovitch type maximal operators and applications to Fourier analysis. *Geom. Funct. Anal.* 1, 2 (1991), 147–187.
- [4] BOURGAIN, J. Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. II. The KdV-equation. *Geom. Funct. Anal.* 3, 3 (1993), 209–262.
- [5] BOURGAIN, J., AND GUTH, L. Bounds on oscillatory integral operators based on multilinear estimates. *Geom. Funct. Anal.* 21, 6 (2011), 1239–1295.
- [6] CARLESON, L., AND SJÖLIN, P. Oscillatory integrals and a multiplier problem for the disc. *Studia Math.* 44 (1972), 287–299. (errata insert). Collection of articles honoring the completion by Antoni Zygmund of 50 years of scientific activity, III.
- [7] ERDOĞAN, M. B. A bilinear Fourier extension theorem and applications to the distance set problem. *Int. Math. Res. Not.*, 23 (2005), 1411–1425.
- [8] FALCONER, K. *Fractal geometry*, third ed. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2014. Mathematical foundations and applications.
- [9] FALCONER, K. J. *The geometry of fractal sets*, vol. 85 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

- [10] FEFFERMAN, C. Inequalities for strongly singular convolution operators. *Acta Math.* 124 (1970), 9–36.
- [11] FEFFERMAN, C. The multiplier problem for the ball. *Ann. of Math. (2)* 94 (1971), 330–336.
- [12] GRAFAKOS, L. *Classical Fourier analysis*, second ed., vol. 249 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2008.
- [13] GRAFAKOS, L. *Classical Fourier analysis*, third ed., vol. 249 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2014.
- [14] HÖRMANDER, L. Estimates for translation invariant operators in L^p spaces. *Acta Math.* 104 (1960), 93–140.
- [15] HÖRMANDER, L. Oscillatory integrals and multipliers on FL^p . *Ark. Mat.* 11 (1973), 1–11.
- [16] KEEL, M., AND TAO, T. Endpoint Strichartz estimates. *Amer. J. Math.* 120, 5 (1998), 955–980.
- [17] KLAINERMAN, S., AND MACHEDON, M. Space-time estimates for null forms and the local existence theorem. *Comm. Pure Appl. Math.* 46, 9 (1993), 1221–1268.
- [18] LEE, S. Improved bounds for Bochner-Riesz and maximal Bochner-Riesz operators. *Duke Math. J.* 122, 1 (2004), 205–232.
- [19] LINARES, F., AND PONCE, G. *Introduction to nonlinear dispersive equations*, second ed. Universitext. Springer, New York, 2015.
- [20] MATTILA, P. *Fourier analysis and Hausdorff dimension*, vol. 150. Cambridge University Press, 2015.
- [21] MITSIS, T. A Stein-Tomas restriction theorem for general measures. *Publ. Math. Debrecen* 60, 1-2 (2002), 89–99.

- [22] MOCKENHAUPT, G. Salem sets and restriction properties of Fourier transforms. *Geom. Funct. Anal.* 10, 6 (2000), 1579–1587.
- [23] MOYUA, A., VARGAS, A., AND VEGA, L. Schrödinger maximal function and restriction properties of the Fourier transform. *Internat. Math. Res. Notices*, 16 (1996), 793–815.
- [24] MOYUA, A., VARGAS, A., AND VEGA, L. Restriction theorems and maximal operators related to oscillatory integrals in \mathbf{R}^3 . *Duke Math. J.* 96, 3 (1999), 547–574.
- [25] MUSCALU, C., AND SCHLAG, W. *Classical and multilinear harmonic analysis. Vol. I*, vol. 137 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2013.
- [26] SILVA, J. L. *Análise complexa*.
- [27] STEIN, E. M. Some problems in harmonic analysis. In *Harmonic analysis in Euclidean spaces (Proc. Sympos. Pure Math., Williams Coll., Williamstown, Mass., 1978), Part 1*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXV, Part. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, pp. 3–20.
- [28] STEIN, E. M. *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, vol. 43 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. With the assistance of Timothy S. Murphy, Monographs in Harmonic Analysis, III.
- [29] STEIN, E. M., AND SHAKARCHI, R. *Functional analysis*, vol. 4 of *Princeton Lectures in Analysis*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2011. Introduction to further topics in analysis.
- [30] STEIN, E. M., AND WEISS, G. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971. Princeton Mathematical Series, No. 32.

- [31] STRICHARTZ, R. S. Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations. *Duke Math. J.* 44, 3 (1977), 705–714.
- [32] TABERNER, B. B. On the restriction of the Fourier transform to a conical surface. *Trans. Amer. Math. Soc.* 292, 1 (1985), 321–333.
- [33] TAO, T. Endpoint bilinear restriction theorems for the cone, and some sharp null form estimates. *Math. Z.* 238, 2 (2001), 215–268.
- [34] TAO, T. A sharp bilinear restrictions estimate for paraboloids. *Geom. Funct. Anal.* 13, 6 (2003), 1359–1384.
- [35] TAO, T. Some recent progress on the restriction conjecture. In *Fourier analysis and convexity*, Appl. Numer. Harmon. Anal. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2004, pp. 217–243.
- [36] TAO, T., AND VARGAS, A. A bilinear approach to cone multipliers. I. Restriction estimates. *Geom. Funct. Anal.* 10, 1 (2000), 185–215.
- [37] TAO, T., VARGAS, A., AND VEGA, L. A bilinear approach to the restriction and Kakeya conjectures. *J. Amer. Math. Soc.* 11, 4 (1998), 967–1000.
- [38] TOMAS, P. A. A restriction theorem for the Fourier transform. *Bull. Amer. Math. Soc.* 81 (1975), 477–478.
- [39] VARGAS, A. Restriction theorems for a surface with negative curvature. *Math. Z.* 249, 1 (2005), 97–111.
- [40] WOLFF, T. An improved bound for Kakeya type maximal functions. *Rev. Mat. Iberoamericana* 11, 3 (1995), 651–674.
- [41] WOLFF, T. A sharp bilinear cone restriction estimate. *Ann. of Math. (2)* 153, 3 (2001), 661–698.

- [42] WOLFF, T. H. *Lectures on harmonic analysis*, vol. 29 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. With a foreword by Charles Fefferman and preface by Izabella Łaba, Edited by Łaba and Carol Shubin.
- [43] ZYGMUND, A. On Fourier coefficients and transforms of functions of two variables. *Studia Math.* 50 (1974), 189–201.