

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

**APLICAÇÃO DO MÉTODO  
DOS ELEMENTOS  
DISCRETOS AO ESTUDO  
DE ESTRUTURAS  
LAMINARES DE  
CONCRETO ARMADO**

por

Ignacio Iturrioz

Tese apresentada ao corpo docente do curso  
de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia  
da Universidade Federal do Rio Grande do Sul,  
para a obtenção do título de Doutor em Engenharia

Porto Alegre, Dezembro de 1995.

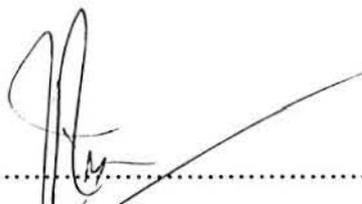
ESCOLA DE ENGENHARIA  
BIBLIOTECA

Esta Tese foi julgada para a obtenção do título de Doutor em Engenharia e aprovada em sua forma final pelos orientadores e pela Banca Examinadora do curso de Pós-Graduação.



.....  
Prof. Jorge Daniel Riera (Ph.D. Princeton University, USA)

Orientador



.....  
Prof. Jorge Daniel Riera

Coordenador do Curso de Pós-Graduação de Engenharia Civil

Banca Examinadora:

- Prof. Jose Elias Laier

Dr. Eng USP, Brasil

- Prof. Carlos Prato

Ph.D. MIT, USA

- Prof. Guillermo Creus

D.sc pela COPPE/UFRJ, Brasil

En memoria de Veronica y Gustavo

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Jorge Daniel Riera pela orientação e pelos ensinamentos ministrados durante o transcurso de meu curso de doutorado.

Ao CNPq pelo apoio financeiro na realização deste trabalho.

Aos professores e funcionários do CPGEC/UFRGS pelos ensinamentos e apoio recebidos.

Aos diretivos e funcionários do CESUP/UFRGS pela ajuda e assistência técnica nos aspectos computacionais ligados a esta tese.

Ao Licenciado Manoel M. de Oliveira Neto pela sua valiosa colaboração na confecção do capítulo 7 do presente trabalho.

Aos profissionais e funcionários ligados ao GMAP/UFRGS e ao LEME/UFRGS pela colaboração e assistência na realização da parte experimental desta tese.

A Anelise T. Hoffmann e Gustavo J. Z. Núñez pela assistência na confecção dos gráficos e digitação do trabalho.

A Virgínia d'Avila e Luís S. Gonzalez pelas sugestões feitas para melhorar a redação e ortografia deste trabalho, e a Graciela N. Doz pela ajuda na preparação da defesa da tese.

Às autoridades da Faculdade de Engenharia da Universidade Nacional do Nordeste - Argentina pelo apoio incondicional e constante fornecido para que este trabalho fosse concluído.

Aos colegas e amigos feitos durante meus anos no Brasil, os quais me enriqueceram como pessoa e alegraram meu coração.

A minha família pela força que me deram com seu carinho e atenção.

Parte desta tese foi publicada nos seguintes trabalhos científicos:

ITURRIOZ, I. and RIERA, J. D. 1995. Determination of the impulsive response of elastoplastics plates and shells by means of discrete element models. To be published in Trans, Div J SMIRT13.

RIERA, J. D. & ITURRIOZ, I. 1995. Discrete elements model for evaluating impact and impulsive response of reinforced concrete plates and shells, Communications in Numerical Methods in Engineering, to be published, Ed Lewis, R. W. & Carey, G. F., Wiley & Sons, U.K.

RIERA, J. D. & ITURRIOZ, I. 1995. Discrete elements dynamic Response of Elastoplastic Shells subjected to impulsive Loading, Communications in Numerical Methods in Eng., to be published, Ed Lewis, R. W. & Carey, G. F., Wiley & Sons, U.K.

## Conteúdo

CONTEÚDO . . . . .	VI
LISTA DE FIGURAS . . . . .	X
LISTA DE TABELAS . . . . .	XVII
RESUMO . . . . .	XIX
ABSTRACT . . . . .	XX
1 INTRODUÇÃO . . . . .	1
1.1 Considerações Gerais . . . . .	1
1.2 Objetivos . . . . .	1
1.3 Organização do trabalho . . . . .	2
2 CONSIDERAÇÕES SOBRE CARGAS IMPULSIVAS . . . . .	4
2.1 Considerações Gerais . . . . .	4
2.2 Diferentes Métodos de Análise . . . . .	5
3 MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS . . . . .	7
3.1 Introdução . . . . .	7
3.2 Revisão do método dos Elementos Discretos . . . . .	8
3.3 Formulação empregada neste trabalho . . . . .	10
3.3.1 Cálculo das rigidezes equivalentes das barras . . . . .	10
3.4 Solução da equação de movimento . . . . .	17
3.5 Determinação do incremento crítico de integração . . . . .	19

3.6	Extensão do método dos elementos discretos para modelar estruturas laminares . . . . .	19
3.7	Considerações finais . . . . .	22
<b>4</b>	<b>APLICAÇÃO DO DEM A ESTRUTURAS ELASTOPLÁSTICAS .</b>	<b>23</b>
4.1	Generalidades . . . . .	23
4.2	Exemplo 1: Casca cilíndrica submetida a uma carga explosiva na sua superfície . . . . .	26
4.3	Exemplo 2: Resposta de uma placa submetida a uma carga impulsiva	30
4.4	Exemplo 3: Casca cilíndrica submetida a uma carga impulsiva simétrica 35	
4.5	Controle Volumétrico . . . . .	40
4.6	Exemplo 4: 'Upsetting' de um cubo de aço . . . . .	44
4.7	Exemplo 5: Impacto de Barra de Alumínio contra superfície rígida inclinada . . . . .	48
<b>5</b>	<b>FRATURA EM CONCRETO . . . . .</b>	<b>51</b>
5.1	Mecânica linear da fratura . . . . .	51
5.2	Mecânica da fratura em concreto . . . . .	56
5.3	Critério de Ruptura empregado neste trabalho . . . . .	66
5.3.1	Definição da relação constitutiva empregada . . . . .	66
5.3.2	Observações sobre a implementação do critério de ruptura utilizado . . . . .	68
5.3.3	Inclusão da não homogeneidade do material através da aleatorização das propriedades . . . . .	69
5.4	Exemplo ilustrativo . . . . .	70
5.4.1	Considerações gerais . . . . .	70
5.4.2	Características do modelo teórico . . . . .	70
5.4.3	Resultados obtidos . . . . .	71

6	APLICAÇÃO DO DEM A CONCRETO ARMADO . . . . .	75
6.1	Introdução . . . . .	75
6.2	Fratura em estruturas de concreto armado . . . . .	76
6.3	Comportamento do modelo na representação das estruturas depois do pico de carga . . . . .	77
6.3.1	Considerações gerais . . . . .	77
6.4	Verificação experimental do comportamento em descarga . . . . .	81
6.4.1	Características gerais do ensaio . . . . .	81
6.4.2	Conclusões . . . . .	81
6.5	Lei proposta para o módulo de descarga . . . . .	82
6.6	Exemplos Ilustrativos . . . . .	89
6.6.1	Barra de concreto armado submetida a uma carga axial. . . . .	89
6.6.2	Viga bi-rotulada de concreto armado submetida a uma carga impulsiva . . . . .	95
6.6.3	Placa de concreto armado submetida a uma carga de impacto em seu centro . . . . .	112
6.6.4	Casca Cilíndrica de Concreto Armado . . . . .	128
7	ASPECTOS COMPUTACIONAIS . . . . .	136
7.1	Generalidades . . . . .	136
7.2	Conceitos Básicos . . . . .	136
7.2.1	Vetorização . . . . .	136
7.2.2	Paralelização . . . . .	138
7.3	Análise do Algoritmo do DEM sob os conceitos vistos . . . . .	141
7.4	Conclusões . . . . .	146
8	CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .	147
8.1	Conclusões . . . . .	147

8.1.1	Modelo Elastoplástico . . . . .	147
8.1.2	Modelo de Concreto . . . . .	147
8.1.3	Modelo de Concreto Armado . . . . .	147
8.1.4	Características Computacionais . . . . .	148
8.2	Considerações Finais . . . . .	148
ANEXO A-1 DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS DO MODELO TEÓRICO DE ESTRUTURAS DE CONCRETO . . . . .		150
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .		152

## Lista de Figuras

Figura 3.1	Esquema do método dos elementos distintos Cundall & Strach (1977)	9
Figura 3.2	Módulo cúbico apresentado por Nayfeh & Hefzy (1979) e utilizado nos trabalhos de Hayashi (1982) e Rocha (1989). a)Módulo cúbico b)e c)Composição de prismas . . . . .	11
Figura 3.3	Cálculo da área efetiva para as barras normais (a), e diagonais (b) do módulo cúbico . . . . .	13
Figura 3.4	Transformação de coordenadas, de um prisma a um setor cilíndrico .	21
Figura 4.1	Modelo empregado por Argyris et al (1991) . . . . .	24
Figura 4.2	Lei de escoamento proposta no modelo . . . . .	25
Figura 4.3	Propriedades geométricas e mecânicas da casca de Leech (1971) . . .	27
Figura 4.4	Comparação dos resultados experimentais apresentados por Leech (1971) com os numéricos de Argyris (1991) e com os do modelo proposto; deslocamentos verticais nos pontos A e B vs tempo . . . . .	28
Figura 4.5	Configuração da casca deformada na proximidade da borda menos carregada no tempo $t=375$ ms . . . . .	29
Figura 4.6	Propriedades geométricas e mecânicas da placa de Balmer (1964) . .	31
Figura 4.7	Modelo em DEM da placa de Balmer (1964) e deformadas em diversos tempos na simulação do processo . . . . .	32
Figura 4.8	Comparação da resposta em termos de deslocamento no meio do vão da placa de Balmer (1964) e soluções teóricas (com e sem controle volumétrico) . . . . .	33
Figura 4.9	Balanco energético do processo no tempo para a análise da placa de Balmer (1964) . . . . .	34
Figura 4.10	Propriedades geométricas e mecânicas da Casca cilíndrica de Lindberg & Kennedy (1975) . . . . .	36
Figura 4.11	Vista do modelo teórico da Casca cilíndrica de Lindberg & Kennedy (1975). . . . .	37

Figura 4.12	Comparação dos resultados experimentais e numéricos dos deslocamentos radiais vs tempo em $\phi = 15^\circ$ da Casca cilíndrica de Lindeberg & Kennedy (1975) . . . . .	37
Figura 4.13	Comparação dos resultados experimentais e numéricos das deformações circunferenciais vs tempo em $\phi = 0$ da Casca cilíndrica de Lindeberg & Kennedy (1975) . . . . .	38
Figura 4.14	Comparação dos resultados experimentais e numéricos das deformações circunferenciais no tempo $t=0.1$ ms da Casca cilíndrica de Lindberg & Kennedy (1975) . . . . .	38
Figura 4.15	Evolução do balanço energético do processo no tempo para a análise da Casca cilíndrica de Lindberg & Kennedy (1975) . . . . .	39
Figura 4.16	Localização de uma célula elementar tetraédrica dentro do modelo do DEM. . . . .	42
Figura 4.17	Tetraedro básico. . . . .	43
Figura 4.18	Propriedades geométricas e mecânicas de um cubo de aço submetido a um 'Upsetting'. . . . .	45
Figura 4.19	Comparação das deformadas dos modelos teóricos de um cubo de aço submetido a um 'Upsetting'.a) Configuração deformada obtida com o ABAQUS/ Explicit. b) Configuração deformada obtida com DEM com controle volumétrico. c) Configuração deformada obtida com DEM sem controle de volume. . . . .	46
Figura 4.20	Resposta de um cubo de aço submetido a um 'Upsetting' em termos de força reativa em função do deslocamento da forma dos modelos teóricos simulados. . . . .	47
Figura 4.21	Esquema do ensaio realizado por Zukas (1982) com barras de Alumínio em colisão contra uma superfície rígida. . . . .	49
Figura 4.22	Comparação das deformadas dos resultados experimentais da barra ensaiada por Zukas (1982). . . . .	50
Figura 5.1	Trajetórias das tensões principais em um especimen com uma trinca. . . . .	53
Figura 5.2	Distribuição de tensões nas proximidades da ponta da trinca. . . . .	54
Figura 5.3	Modos I,II,III de fratura. da ponta da trinca. . . . .	55
Figura 5.4	a)Placa com um furo trincado submetido a uma carga uniforme. b)'compact tension test'. . . . .	56

Figura 5.5	a)Placa com uma trinca central submetida a uma tensão uniforme.b) Curvas de resistência limite da placa vs. o comprimento relativo da fissura da placa $a/b$ .c)Envolvente do logaritmo da resistência limite vs. o logaritmo do comprimento característico da placa $b$ . . . . .	57
Figura 5.6	Fratura em diferentes materiais. (L): Zona Linear, (N): Zona não linear e (F): zona microfissurada. . . . .	59
Figura 5.7	Diagramas $\sigma$ - $\varepsilon$ característicos do caso de de materiais dúctil (a) e não dúctil (b). . . . .	61
Figura 5.8	Distribuição das tensões nas proximidades da ponta da fissura para o modelo da fissura fictícia proposto por Hillerborg (1978). . . . .	62
Figura 5.9	Distribuição das tensões nas proximidades da ponta da fissura para o modelo da banda fissurada proposto por Bazant (1976). . . . .	63
Figura 5.10	Objetividade dos modelos de fratura com “Strain Softening”. . . . .	65
Figura 5.11	Relação constitutiva elementar implementada por Rocha (1989) . . . . .	67
Figura 5.12	Lei constitutiva para concreto proposta por Linde (1993) . . . . .	68
Figura 5.13	Modelo teórico de uma placa submetida a deslocamentos prescritos para induzir nela um estado tensional biaxial. . . . .	72
Figura 5.14	Comparação entre os resultados numéricos e os experimentais obtidos por Kupfer (1973) sobre placas de concreto submetidas à tensões biaxiais	73
Figura 5.15	Comparação entre os modos de ruptura experimentais da placa ensaiados por Kupfer (1973) . . . . .	74
Figura 6.1	Lei constitutiva dos elementos de concreto modificada pela presença de armadura. . . . .	77
Figura 6.2	Estudos paramétricos das variáveis $\xi$ e $L_r/L_c$ . . . . .	78
Figura 6.3	a)Especimen de concreto armado antes e depois da fratura. b) A lei constitutiva do aço e do concreto adotada no modelo dos elementos discretos (DEM). . . . .	79
Figura 6.4	Comparação das respostas experimentais e numéricas: Deslocamento no meio do vão vs. tempo para a viga de Brandes (1981). . . . .	80
Figura 6.5	Características geométricas e propriedades mecânicas dos especimens ensaiados. . . . .	82

Figura 6.6	Fotografias que ilustram:a) o conjunto do equipamento utilizado no ensaio, b)Conjunto especimen instrumentado-prensa. . . . .	83
Figura 6.7	Layout do corpo de prova instrumentado e do sistema de medição. . .	84
Figura 6.8	a) Fotografia que ilustra a configuração fraturada dos 6 corpos de prova ensaiados. b) Detalhe da fissuração em um dos corpos de prova ensaiados.	85
Figura 6.9	Curva $P - \varepsilon_{acr}$ para os ensaios realizados sob o especimen CR6 . . .	86
Figura 6.10	Gráficos que ilustram as duas propostas feitas para levar em conta a modificação da curva na descarga do conjunto aço e concreto, a)Proposta 1, b)Proposta 2. . . . .	88
Figura 6.11	Modificação da lei constitutiva dos elementos do concreto caso se queira incorporar o efeito estudado em tais elementos. . . . .	88
Figura 6.12	“Layout” da barra de concreto armado ensaiada por, Hwang & Rizkalla (1984), onde apresenta-se a disposição da armadura. . . . .	91
Figura 6.13	Modelo teórico da barra de concreto armado ensaiada por Hwang & Rizkalla (1984). . . . .	92
Figura 6.14	Comparação entre os resultados experimentais e numéricos, em termos da carga aplicada vs. deformação total da barra, para o caso da barra de concreto armado ensaiada por Hwang & Rizkalla (1984). . . . .	93
Figura 6.15	Avaliação das energias envolvidas durante o processo de carga do modelo teórico da barra de concreto armado ensaiada por Hwang & Rizkalla (1984). . . . .	94
Figura 6.16	Características geométricas e propriedades mecânicas da viga ensaiada por Brandes (1981) . . . . .	95
Figura 6.17	Vista geral da viga de Brandes (1981) instrumentada . . . . .	96
Figura 6.18	Modelo da viga de Brandes (1981) . . . . .	96
Figura 6.19	a)Disposição da armadura no modelo teórico da viga ensaiada por Brandes (1981).b) Equivalência entre a armadura do modelo físico e a armadura do modelo teórico. . . . .	98
Figura 6.20	Distribuição temporal das cargas e do coeficiente de amortecimento considerados no modelo teórico da viga ensaiada por Brandes (1981)	100
Figura 6.21	Distribuição espacial da carga impulsiva sobre a viga para o modelo da viga ensaiada por Brandes (1981) . . . . .	101

Figura 6.22	Comparação das respostas experimentais e teórica em termos dos deslocamentos no centro e a um quarto do vão vs. tempo da viga ensaiada por Brandes (1981). . . . .	103
Figura 6.23	Comparação dos valores experimentais (a) e teóricos (b) da aceleração no centro do vão em função do tempo da viga ensaiada por Brandes (1981). . . . .	104
Figura 6.24	Comparação dos (a) registros experimentais e (b) resultados teóricos da carga e a reação nos apoios vs. tempo para o caso da viga ensaiada por Brandes (1981). . . . .	105
Figura 6.25	Comparação das soluções teóricas obtidas em termos de velocidades no centro do vão vs. tempo da viga ensaiada por Brandes (1981): a) Com o programa NONDYN, b) com o algoritmo de DEM proposto neste trabalho. . . . .	106
Figura 6.26	Comparação das configurações finais da viga de Brandes (1981) (a) e do modelo teórico da mesma (b). . . . .	107
Figura 6.27	Evolução da energia durante todo o processo estudado para o caso da viga ensaiada por Brandes (1981). . . . .	108
Figura 6.28	Distribuição do impulso entregue ao sistema externamente e o impulso reativo na viga ensaiada por Brandes (1981) vs. tempo. . . . .	108
Figura 6.29	Modelo da viga ensaiada por Brandes (1981) depois da aplicação da carga mostrando como foram afetadas as barras do modelo para $\xi = 15$ e $L_r/L_c = 2$ ). . . . .	109
Figura 6.30	Regiões características indicadas no modelo teórico da viga ensaiada por Brandes (1981). . . . .	110
Figura 6.31	Esquema que explica a localização de dano na parte superior da viga ensaiada por Brandes (1981). . . . .	111
Figura 6.32	Layout da placa ensaiada por Vinckier (1981) com a localização dos pontos da placa instrumentados. . . . .	113
Figura 6.33	Esquema do Modelo teórico de um quarto da placa de HOCHTIEF (1981), com a distribuição espacial da carga adotada e dos pontos onde foram medidas as respostas . . . . .	114
Figura 6.34	Distribuição temporal da carga considerada no modelo teórico da placa ensaiada por HOCHTIEF (1981). . . . .	115

Figura 6.35	Modelo teórico com elementos discretos (DEM) de um quarto da placa de HOCHTIEF (1981) indicando a disposição das barras de armadura	116
Figura 6.36	Comparação da resposta teórica e experimental em termos dos deslocamentos nos pontos $W_1, W_3$ e $W_9$ da placa ensaiada por HOCHTIEF (1981).	119
Figura 6.37	Resultados obtidos com um programa de elementos finitos NONDYN, apresentados por Vinckier (1983) em termos dos deslocamentos nos pontos $W_1, W_3$ e $W_9$ da placa ensaiada por HOCHTIEF (1981).	120
Figura 6.38	Comparação da resposta a) experimental e b) teórica em termos das deformações nos pontos $D_2$ e $D_8$ $D_{14}$ $D_{12}$ vs. tempo da placa ensaiada por HOCHTIEF (1981).	121
Figura 6.39	Comparação das respostas a) experimental e b) teórica em termos das acelerações vs tempo no ponto $B_1$ da placa de HOCHTIEF (1981).	122
Figura 6.40	Comparação da resposta a) experimental e b) teórica em termos da força reativa vs. tempo no ponto $K_1$ da placa de HOCHTIEF (1981).	123
Figura 6.41	Comparação da resposta a) experimental e b) teórica em termos da força reativa vs. tempo no ponto $K_7$ da placa de HOCHTIEF (1981).	124
Figura 6.42	Comparações entre a configuração final I) experimental II) teórica da placa ensaiada por HOCHTIEF (1981) Vista de Planta.	125
Figura 6.43	Comparações entre a configuração final I) experimental II) teórica da placa ensaiada por HOCHTIEF (1981). Vista do corte.	126
Figura 6.44	Evolução dos diferentes tipos de energias dissipadas durante o processo para a placa ensaiada por HOCHTIEF (1981).	127
Figura 6.45	'Layout' da casca cilíndrica de Uchida 'et al' (1985).	129
Figura 6.46	Modelo discretizado da casca cilíndrica ensaiada por Uchida 'et al' (1985).a) Modelo teórico completo, b) Disposição das barras de aço.	130
Figura 6.47	a) Localização espacial dos pontos de medição D1 e D2. b) Comparação de resultados teóricos e experimentais em termos de deslocamento nos pontos D1 e D2 em função do tempo para o caso da casca cilíndrica de Uchida (1985).	132
Figura 6.48	Configuração final da casca ensaiada por Uchida (1985).a) Vista anterior, b) Vista Posterior.	133

Figura 6.49	Configuração final obtida com o modelo teórico da casca ensaiada por Uchida (1985).a) Vistas com todas as barras menos as fraturadas, b)Vistas com todas as barras de aço, c)Vistas com as barras de aço que plastificaram. . . . .	134
Figura 6.50	Evolução das energias .vs. tempo do modelo teórico obtido com DEM da casca cilíndrica ensaiada por Uchida (1985). . . . .	135
Figura 7.1	Esquema de um processamento vetorial (a) e um processamento escalar (b) para o caso de um produto de dois vetores ( $Z(i)=X(i)*Y(i)$ ) . . .	139
Figura 7.2	Esquema de um processamento em paralelo para o caso de um produto de dois vetores ( $Z(i)=X(i)*Y(i)$ ) . . . . .	140
Figura 7.3	Esquema do Algoritmo do DEM . . . . .	141
Figura 7.4	Diagrama comparativo das velocidades do programa rodando no CRAY com e sem vetorização para o modelo da viga de Brandes (1981) com um tempo total de integração de 0.08 seg e um passo de integração de 4E-6seg. . . . .	144
Figura 7.5	Comparação de respostas experimental e numérica em termos de deslocamento no centro do vão vs tempo da viga de Brandes (1981) . . . .	145

## Lista de Tabelas

Tabela 5.1	Propriedades mecânicas que caracterizam um dos tipos de concreto utilizados nos ensaios de Kupfer (1973) . . . . .	70
Tabela 5.2	Parâmetros adicionais necessários para definir o modelo teórico das placas de Kupfer (1973) . . . . .	71
Tabela 6.1	Propriedades mecânicas da barra de concreto armado ensaiada por Hwang & Rizkalla (1984). . . . .	89
Tabela 6.2	Parâmetros adicionais necessários para caracterizar o modelo teórico da barra de concreto armado ensaiada por Hwang & Rizkalla (1984). . . . .	90
Tabela 6.3	Comparação entre as medidas do modelo físico e teórico da viga ensaiada por Brandes (1981). . . . .	97
Tabela 6.4	Propriedades Mecânicas e parâmetros adotados para gerar o modelo teórico da viga ensaiada por Brandes (1981). . . . .	99
Tabela 6.5	Distribuição no tempo da carga impulsiva obtida a partir dos registros experimentais de Brandes (1981). . . . .	99
Tabela 6.6	Comparação entre as dimensões do modelo físico e do modelo teórico com elementos discretos da placa ensaiada por HOCHTIEF (1981). . . . .	112
Tabela 6.7	Distribuição temporal considerada para a carga aplicada sobre a placa ensaiada por HOCHTIEF (1981). . . . .	113
Tabela 6.8	Comparação entre a armadura do modelo físico e do modelo teórico no caso da placa ensaiada por HOCHTIEF (1981). . . . .	115
Tabela 6.9	Propriedades dos materiais empregados e valores dos parâmetros necessários para criar o modelo teórico da placa de HOCHTIEF (1981). . . . .	117
Tabela 6.10	Propriedades e parâmetros de entrada para o modelo teórico da casca cilíndrica de Uchida (1985). . . . .	128
Tabela 7.1	Comparação dos números de nós e de barras de alguns dos modelos apresentados neste trabalho . . . . .	142
Tabela 7.2	Comparação de tempos de processamento e velocidades do algoritmo de DEM executando o mesmo exemplo em diferentes equipamentos e ou condições de trabalho . . . . .	143

Tabela A-1.1	Valores de energia de fratura básicos $G_{fo}$ [ $Nmm/mm^2$ ] (CEB-FIP código modelo) . . . . .	151
--------------	---	-----

## RESUMO

O principal objetivo desta tese é o desenvolvimento e implementação de um modelo teórico que prediz o comportamento até e após a resposta máxima de estruturas laminares de concreto armado submetidas a cargas de curta duração. Como um subproduto deste trabalho foi feita a representação de estruturas laminares elastoplásticas sujeitas a cargas impulsivas. Avanços similares foram registrados na predição da capacidade de carga do concreto submetido a um estado plano de tensões, assim como na descrição das características da interação entre o aço e o concreto.

A discretização espacial consiste em um arranjo de barras de treliça com rigidez equivalente ao contínuo que se quer representar. As massas são concentradas nos nós e as equações de movimento são integradas explicitamente no domínio do tempo.

Aplicações do Método dos Elementos Discretos (DEM) proposto ao cálculo de estruturas laminares elastoplásticas são apresentados. Propõe-se um procedimento para considerar na análise a condição de incompressibilidade no fluxo plástico. O modelo reconhece a não homogeneidade intrínseca do concreto, a qual é levada em conta por simulação. Os requisitos básicos da teoria da fratura são cumpridos usando o critério de Hillerborg. São apresentadas também as análises de uma viga, uma placa e uma casca de concreto armado submetidas a cargas impulsivas. Os resultados obtidos são comparados com resultados experimentais, os quais mostram as vantagens do método utilizado.

**TITLE:** "APPLICATION OF THE DISCRET ELEMENT METHODS TO ANALYSIS OF THE REINFORCED CONCRETE LAMINAR STRUCTURES"

## ABSTRACT

The main objective of this thesis is the development and implementation of a theoretical model to predict the behaviour up to and beyond the peak response of laminar reinforced concrete structures submitted to short duration loadings. As by product of this work, progress in the representation of elastoplastic shell structures subjected to impulsive loading was achieved. Similar advances were registered in the prediction of concrete capacity under plane stress, as well as in the description of interaction effects between concrete and steel reinforcement.

The spatial discretization consists of an array of unidimensional elements in three dimensional cubic lattice model. The stiffness of the elements is determined so that the modeled continuum presents the same stiffness coefficients. Masses are lumped at the nodal points and the equations of motions integrated explicitly in the time domain.

Applications of the proposed Discrete Element Methods (DEM) to elastoplastic shell structures are shown. Procedure is proposed to consider in the analysis the incompressibility condition in the plastic flow. The model recognizes the intrinsic non homogeneity of concrete, which is taken into account by simulation. The basic requirements of fracture theories are met by using Hillerborg - type criteria. Detailed analysis of reinforced concrete beams, plate and shell under impact and impulsive loading are presented and compared with the experimental results, which shows the advantages of the method.

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Considerações Gerais

O estudo de problemas de impacto em estruturas exige a descrição detalhada do comportamento dos materiais utilizados até a ruptura e da interação entre o projétil e o alvo. Isto faz com que o estudo teórico deste tema seja um desafio como campo de pesquisa. Se o material for concreto armado, existe uma complicação adicional, pois ele é um material não homogêneo com duas fases que interagem modificando suas características mecânicas, o que deve ser levado em conta no modelo.

Pelo mencionado no parágrafo anterior, segue que o desenvolvimento e a implementação computacional de um modelo teórico aplicável a estruturas de concreto armado submetidas a cargas de curta duração é um problema complexo, que pela sua relevância em numerosas áreas de engenharia tem recebido considerável atenção nos últimos anos.

Pela sua versatilidade e grau de desenvolvimento, a maioria dos modelos teóricos desenvolvidos utilizaram como base de apoio o método dos elementos finitos, o qual se sustenta nas hipóteses da mecânica dos meios contínuos. Porém, em certos problemas que envolvem o estudo de materiais frágeis passíveis de fissurar ou fragmentar-se, a hipótese de continuidade é um condicionamento muito forte, contornado, às vezes com sucesso, mediante equações constitutivas complexas tanto na sua interpretação física como na sua implementação computacional.

Por esta razão, no estudo do concreto e materiais cerâmicos, se empregam também modelos teóricos que não precisem considerar o domínio de interesse como contínuo. O método utilizado nesta tese, está dentro deste grupo. O mesmo consiste em discretizar o contínuo como um conjunto de massas discretas, vinculadas por um arranjo de elementos regulares com rigidez equivalente ao contínuo que querem representar, sendo que a fissuração, fratura e/ou fragmentação da estrutura em estudo se traduz, no modelo dos elementos discretos, na desativação das barras na zona comprometida, levando em conta a energia dissipada no processo.

Na seção seguinte se descrevem os principais objetivos seguidos neste trabalho e, finalmente, se apresenta a organização da tese indicando os tópicos tratados em cada capítulo

## 1.2 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho foi implementar um modelo teórico para prever, por simulação, o comportamento de estruturas laminares de concreto armado.

Durante o desenvolvimento do estudo, vários subprodutos de interesse foram obtidos, entre eles:

- Geração da malha em coordenadas não cartesianas, para facilitar o modelagem de cascas, mediante a transformação conforme de um modelo preliminar prismático definido em coordenadas retangulares.
- A avaliação do modelo dos elementos discretos no caso de estruturas laminares elastoplásticas.
- Uma maior compreensão da interação entre aço e concreto, o que permitem modelar, satisfatoriamente o comportamento do concreto armado também na pós-ruptura.
- Conclusões sobre as vantagens do algoritmo empregado, quando implementado em computadores vetoriais e/ou com possibilidades de realizar processamento em paralelo.
- Verificação do comportamento do modelo para concreto submetido a um estado biaxial de tensões.

### 1.3 Organização do trabalho

Os tópicos tratados neste trabalho são apresentados da forma que se detalha a seguir.

O capítulo 2 consiste numa breve descrição dos problemas de impacto na engenharia civil e os tipos de enfoque existentes, indicando onde se situa o tipo de análise feito neste trabalho.

No capítulo 3 se discute o método dos elementos discretos, apresentando-se, primeramente os antecedentes do mesmo e desenvolvendo, posteriormente, sua base teórica.

No capítulo 4 se apresentam as características do modelo teórico aplicado na simulação de estruturas laminares elastoplásticas, apresentando dois critérios, com e sem a consideração da incompressibilidade no campo plástico do material. Para ambos os casos, são apresentados exemplos ilustrativos sobre a performance do modelo.

No capítulo 5, se apresenta, primeramente, uma recopilação teórica sobre a mecânica da fratura linear e não linear aplicada ao caso de materiais não homogêneos como o concreto. Posteriormente, apresenta-se o critério constitutivo empregado no modelo teórico e, finalmente, um exemplo que ilustra a boa performance do mesmo na simulação de concreto submetido a um estado biaxial de tensões.

A aplicação do método dos elementos discretos, a estruturas de concreto armado submetidas a cargas de curta duração, é tratada no capítulo 6, onde são mostradas, inicialmente, as características que influem na interação aço-concreto, o que resulta em modificações nas relações constitutivas elementares do concreto e da armadura. Em particular, foi estudado o comportamento do concreto armado no ramo de descarga do material realizando-se verificações experimentais que validam a lei constitutiva proposta. Verifica-se uma boa performance do modelo após a estrutura atingir a resposta máxima. Finalmente se apresentam vários exemplos que permitem validar os critérios constitutivos propostos.

No capítulo 7 são apresentados alguns aspectos computacionais, verificados na implementação numérica do método, relacionados a vetorização e a paralelização do algoritmo proposto.

Finalmente, no capítulo 8, apresenta-se as conclusões e as considerações finais sobre o trabalho realizado.

## 2 CONSIDERAÇÕES SOBRE CARGAS IMPULSIVAS

### 2.1 Considerações Gerais

O estudo de estruturas submetidas a impacto e cargas impulsivas, desenvolveu-se, inicialmente, para aplicações militares mas hoje, na tecnologia civil, é cada vez maior a demanda de conhecimento sobre o comportamento de materiais e estruturas submetidas a este tipo de cargas de curta duração. A título de exemplo dentro da Engenharia Civil, apresentam-se problemas de projeto e avaliação da segurança nas seguintes situações:

- Demolição de estruturas de concreto armado e protendido
- Contenção e transporte de materiais perigosos.
- Projeto de centrais nucleares, ao impacto de projéteis desde o exterior (detritos de um tornado, um avião colidindo, explosões), ou desde o interior (explosões, choque de componentes que falharam).
- Projeto de pilares de pontes ou viadutos sujeitos a impacto acidental de navios ou veículos.

As características do impacto e a forma de análise do mesmo serão diferentes segundo a velocidade com que o mesmo se produz. Em função disto Zukas (1982) faz a seguinte classificação:

- Regime de baixas velocidades ( $< 250m/s$ ): Muitos problemas no campo da dinâmica estrutural podem ser classificados dentro desta área. Deformações ou penetrações locais estão fortemente acopladas a deformações da estrutura total. As cargas e respostas máximas no tempo estão no ordem dos milissegundos. As análises realizadas neste trabalho estão dentro deste grupo.
- Regime de balística, para velocidades de 500 a  $2000m/s$ : A resposta da estrutura se torna secundária frente a resposta na zona mais afetada (2 a 3 diâmetros do projétil). As cargas e respostas máximas típicas estão no ordem dos microsegundos.
- Impacto a altas velocidades, para velocidades de impacto entre 2 a  $3km/seg$ : O processo resulta em pressões localizadas que excedem a resistência do material em uma ordem de magnitude e a colisão dos sólidos pode ser tratada nos primeiros estágios do impacto, como um problema de mecânica dos fluidos.
- No caso de velocidades maiores a  $12Km/seg$  acontece a vaporização de parte do material, aspecto que condiciona seu tratamento.

## 2.2 Diferentes Métodos de Análise

Uma completa descrição do impacto entre sólidos demanda levar em conta os seguintes aspectos:

- Geometria dos corpos que interagem.
- Propagação de ondas elásticas e plásticas.
- Fluxo hidrodinâmico.
- Deformações e/ou deslocamentos finitos.
- Efeitos térmicos e friccionais.
- Iniciação e propagação de falhas nos sólidos que colidem.

A abordagem analítica do problema de impacto é uma tarefa complexa. Existe uma complicação adicional relacionada ao fato da necessidade de caracterizar o comportamento do material submetido a altas velocidades de deformação.

Por estas razões os estudos sobre impacto tem sido, até recentemente, em sua maioria, experimentais.

### Métodos Experimentais

Até pouco tempo atrás, era o único método utilizado, dada a complexidade, do processo de impacto e a carência de ferramentas computacionais adequadas.

Ainda hoje, estudos experimentais de problemas que envolvem choque entre corpos ou cargas impulsivas são um campo de pesquisa muito desenvolvido dentro da área experimental. Em Zukas (1982) se apresentam vários trabalhos na área, assim como referências bibliográficas sobre o tema.

### Modelos Analíticos

Pode-se dividi-los em três categorias:

- Empíricos ou quase analíticos: São equações algébricas baseadas na correlação com um grande número de informação obtida por experimentação. Tais esforços são usualmente concentrados em estudar o comportamento de diferentes materiais e/ou estruturas para um particular objetivo de desenho. Como um

exemplo próximo disto, pode-se mencionar a tese desenvolvida por Tamagna (1994) a qual estuda o comportamento de materiais frágeis (gesso) e dúcteis (Chumbo) ao impacto de um projétil.

Uma grande quantidade de modelos deste tipo foram revisados por Recht (1973)

- Métodos Analíticos aproximados: Estes métodos se concentram em estudar uma forma particular do problema. Introduzindo simplificações nas equações de governo do domínio estudado, se reduz o problema geral a equações algébricas ou diferenciais de uma ou duas dimensões.

Salvo pequenas exceções, este tipo de análise considera o alvo como rígido e realiza o balanço energético do conjunto.

Muitos destes modelos requerem, para ser calibrados, alguns dados obtidos mediante experimentação. Como trabalhos na área, podem ser citados os aportes realizados por Riera(1978).

- Métodos numéricos: Para uma completa solução de problemas de impacto, se deve utilizar uma solução numérica das equações de governo do domínio de interesse, o qual apresenta algumas dificuldades; entre elas, pode-se mencionar:
  - Na discretização espacial dos corpos que colidem, permitir uma maior concentração da malha que acompanhe a região de maiores gradientes de tensões .
  - A caracterização do comportamento de materiais até sua ruptura.
  - Correta simulação do comportamento da interface em contato

Há muitos trabalhos desenvolvidos nos últimos anos sobre métodos numéricos aplicados a problemas de impacto. Nos livros de Zukas (1982) e Amman (1988) se recopila grande quantidade de trabalhos na área, assim como bibliografia específica sobre o tema.

Pelo que foi descrito brevemente neste capítulo, pode-se concluir que só o fato de considerar cargas aplicadas em forma súbita, como é o caso do impacto, implica em abordar um problema complexo, especialmente quando o modelo teórico implementado é numérico.

## 3 MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS

### 3.1 Introdução

Desde o desenvolvimento da análise diferencial, esta se constituiu numa ferramenta poderosa para permitir o avanço da ciência moderna. Mas, para sua aplicação, é preciso contar com domínios de trabalho contínuos, de tal forma que seja possível integrar e derivar variáveis definidas dentro dele. Este fato fez com que fosse uma hipótese comumente aceita a de considerar-se o domínio no qual se trabalha como contínuo. Como exemplo pode-se citar os desenvolvimentos teóricos devidos a Trusdell (1966) e seguido por numerosos pesquisadores, o que consolidou a teoria da mecânica dos meios contínuos. Isto permitiu realizar avanços significativos na compreensão do comportamento estrutural de muitos materiais, tanto sólidos como fluidos.

Os métodos numéricos permitiram dar outro grande passo ao transformar sistemas de equações diferenciais de alto grau em sistemas de equações algébricas possíveis de ser resolvidas numericamente. Também o fato de poder discretizar o domínio em estudo permitiu resolver problemas com condições de contorno mais complexas, os quais não podiam ser abordados analiticamente. Entre os métodos mais desenvolvidos pode-se citar o método das diferenças finitas, o dos elementos finitos e o dos elementos de contorno.

Hoje em dia, são muitos os tipos de problemas possíveis de resolver com estes métodos numéricos, embora considerando diferentes tipos de não linearidades tanto físicas como geométricas. As limitações da teoria da mecânica do contínuo surgem quando se deseja representar problemas onde se produz a fratura do material, pois neste caso o que até agora era contínuo deixa de ser, comprometendo uma hipótese básica do corpo teórico utilizado. Mesmo assim, se realiza alguns esforços para trabalhar com fratura ou fragmentação dentro do campo da mecânica do contínuo, entre eles cabe mencionar a teoria da mecânica do dano contínuo apresentada por Kachanov (1966). Mas, no caso de se estudar materiais susceptíveis de fraturarem, resulta interessante também partir de uma teoria que deixe a hipótese de continuidade de lado. Uma opção consiste em representar o contínuo mediante partículas onde se concentram as massas que interagem entre si. Estas interações podem ser representadas mediante molas e amortecedores, isto é, elementos unidirecionais com uma lei constitutiva definida em função de vários parâmetros. Tais parâmetros dependerão das características do material a modelar, da disposição das barras e da separação das massas a serem unidas. O interessante neste tipo de esquema é que a fratura de um material pode ser modelada naturalmente desativando barras na região afetada pela descontinuidade. Cuidados com relação à energia que é retirada junto com o elemento "fraturado" devem ser levados em conta.

Na seção seguinte se apresenta uma revisão das diferentes versões do método dos elementos discretos .

## 3.2 Revisão do método dos Elementos Discretos

Como antecedente deste enfoque cabe mencionar o trabalho de Herennikoff (1941) que propõe a representação do contínuo mediante arranjos de bielas de rigidez equivalente. Mais recentemente Absi (1971) desenvolveu a mesma idéia realizando aplicações ao estudo de fundações de base elástica e na representação de muros em prédios altos através de arranjos de barras com rigidez equivalente. Também cabe destacar os trabalhos de Cundall (1977) para realizar estudos mecânicos geotécnicos com materiais granulares. O método proposto por Cundall (método dos elementos distintos) baseia-se em realizar a integração explícita das equações de movimento de uma estrutura formada por partículas rígidas com massas conectadas entre si, mediante molas e amortecedores, como se mostra na figura (3.1).

Este método pode ser aplicado facilmente na simulação não só de materiais contínuos, como também para representar estruturas descontínuas. Isto se deve ao fato de que, antes da fratura, surgem forças de tração, de compressão e corte entre as partículas adjacentes. Mas, após a falha, desaparecem as forças de tração entre as partículas contíguas afastadas pela descontinuidade.

No estudo de materiais heterogêneos frágeis, como o concreto, foram aplicadas com sucesso diferentes versões do método dos elementos discretos. Schlangen (1993) realiza uma recopilação bastante completa sobre os mesmos. No capítulo 5 se apresenta maior informação sobre o método aplicado ao concreto.

Também na física teórica, em estudos relacionados com a física, no estudo de estruturas cristalinas de materiais, acoplando ou não efeitos térmicos, podem-se encontrar alguns desenvolvimentos empregando os elementos discretos; como por exemplo em Starzenski (1995).

Na seção seguinte se realiza uma apresentação mais aprofundada da formulação utilizada neste trabalho.

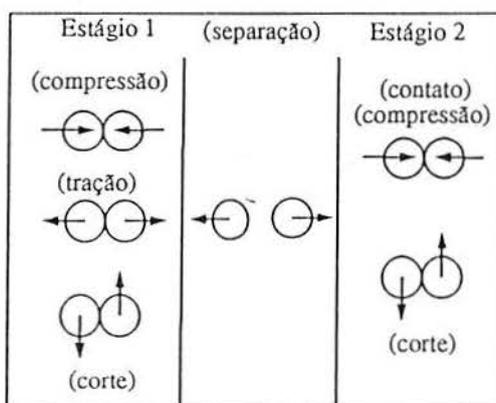
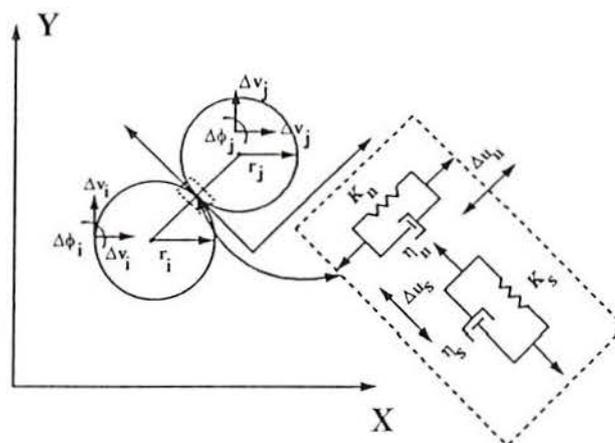


Figura 3.1: Esquema do método dos elementos distintos Cundall & Strach (1977)

### 3.3 Formulação empregada neste trabalho

#### 3.3.1 Cálculo das rigidezes equivalentes das barras

O modelo adotado é devido a Nayfeh & Hefzy (1978), mas estes autores tinham interesse no sentido oposto, isto é, a representação de painéis formados por módulos de treliças espaciais, empregados na indústria aeronáutica, através de um meio contínuo equivalente. Isto possibilita uma discretização com um número menor de graus de liberdade, o que se traduziu numa redução substancial do esforço computacional.

Utilizando a idéia antes mencionada, foram desenvolvidas formulações para determinar as propriedades mecânicas equivalentes do sólido fictício. No trabalho de Nayfeh & Hefzy (1978), se realiza este estudo para dois tipos de arranjos básicos de barras (octaédrico e cúbico).

Noor & Mikulas (1988), apresentam uma comparação do comportamento dinâmico calculado entre a estrutura discretizada com diversos arranjos de barras, e ela considerada como contínua. Neste trabalho pode-se constatar uma boa correlação dos resultados mostrados.

Hayashi em (1982) percorre o caminho inverso; ou seja, a partir de um sólido elástico isotrópico com constantes conhecidas, são obtidas as propriedades das barras de treliça espacial para o arranjo cúbico que se apresenta na figura (3.2).

A seguir, apresenta-se, em forma resumida, as deduções que permitem chegar, das constantes elásticas de um sólido, às rigidezes equivalentes das barras para o módulo cúbico apresentado na figura (3.2), as quais foram desenvolvidas na tese de Hayashi (1982) e no trabalho de Nayfeh & Hefzy (1978).

A relação constitutiva de um corpo elástico arbitrário, em notação indicial, pode-se escrever como segue:

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j (i, j = 1 \cdots 6) \quad (3.1)$$

No caso do corpo anisótropo e elástico, a matriz das constantes elásticas,  $C_{ij}$ , fica definida conhecendo 21 parâmetros independentes. Se o material é isotrópico, é possível realizar simplificações que permitem expressar a matriz  $C_{ij}$  em função de apenas duas

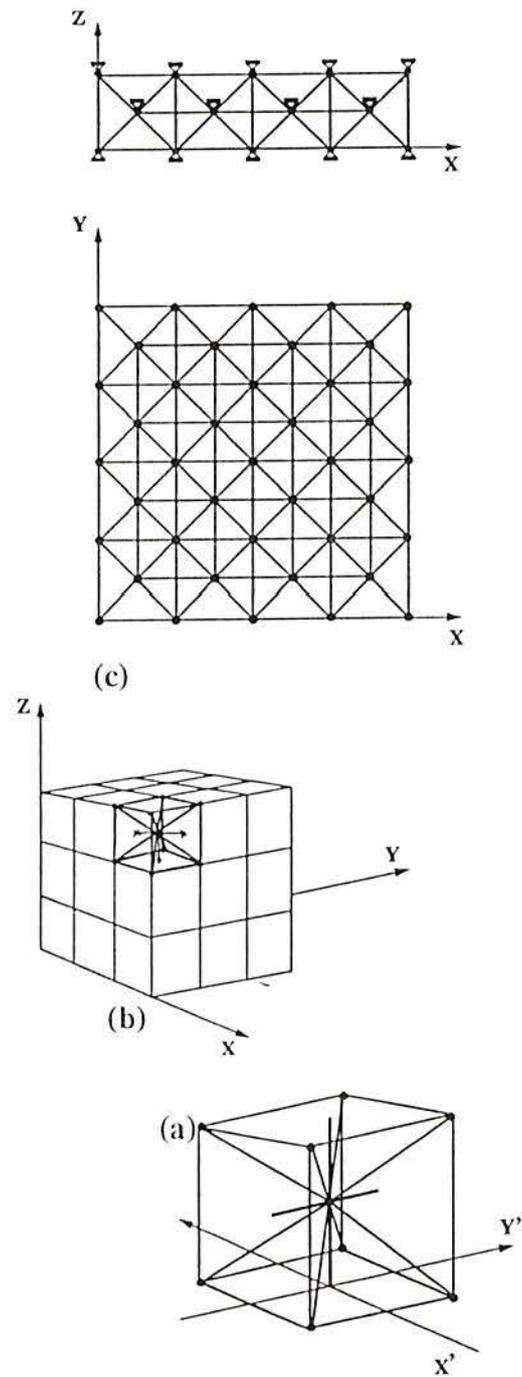


Figura 3.2: Módulo cúbico apresentado por Nayfeh & Hefzy (1979) e utilizado nos trabalhos de Hayashi (1982) e Rocha (1989). a) Módulo cúbico b) e c) Composição de prismas

constantes independentes. Neste último caso, pode-se escrever  $C_{ij}$  como segue:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

onde que  $C_{11}, C_{12}, C_{44}$  são funções do módulo de elasticidade longitudinal,  $E$ , e do coeficiente de Poisson,  $\nu$ .

As constantes elásticas  $C_{ij}$  podem ser transformadas de um sistema de coordenadas ortogonal cartesiano  $x$  para outro  $\bar{x}_i$  ( $i = 1 \dots 3$ ) através de uma equação do tipo:

$$\bar{\varphi}_{ij} = f(\varphi_{ij}, \alpha_{kl})(k, l = 1 \dots 3)e(i, j = 1 \dots 6) \quad (3.3)$$

onde  $\alpha_n$  são os co-senos diretores entre os sistemas de referência  $x$  e  $\bar{x}$ ;  $\varphi_{ij}$  e  $\bar{\varphi}_{ij}$  são as constantes elásticas referidas aos sistemas de referências  $x$  e  $\bar{x}$  respectivamente. A expressão para  $\bar{\varphi}_{ij}$  e mais detalhes sobre este desenvolvimento são encontrados na tese de Hayashi (1982) e em Nayfeh & Hefzy (1978).

Se todas as barras possuem o mesmo módulo de elasticidade  $E$ , cada conjunto de elementos paralelos definirá um contínuo com uma propriedade unidirecional efetiva, que será referida como  $\varphi_{11}$ . Como  $\varphi_{11}$  é tomado como um valor médio ponderado de tal propriedade com relação à área de influência da barra, em um determinado conjunto de barras paralelas seu valor dependerá do espaçamento entre estas barras.

O módulo cúbico da figura (3.3.a) possui dois valores diferentes para  $\varphi_{11}$ , um correspondente às barras que são normais às faces  $\varphi_{11}^n$  e o outro correspondente às barras diagonais  $\varphi_{11}^d$ .

Para uma estrutura cúbica, o valor do parâmetro  $\varphi_{11}^n$  pode ser facilmente determinado projetando a área das barras numa face do cubo como se mostra na figura (3.3.a).

Então, em cada face do módulo cúbico de área ( $L_c^2$ ) se tem a contribuição de duas barras normais inteiras. Dessa forma, cada elemento tem uma área efetiva de contribuição igual a ( $L_c^2/2$ ). Por isso, a relação entre a rigidez da barra  $EA_n$  e a área efetiva de contribuição da mesma fornece o valor médio da propriedade unidirecional efetiva na direção das barras normais às faces do módulo  $\varphi_{11}^n$ :

$$\varphi_{11}^n = \frac{EA_n}{L_c^2/2} \quad (3.4)$$

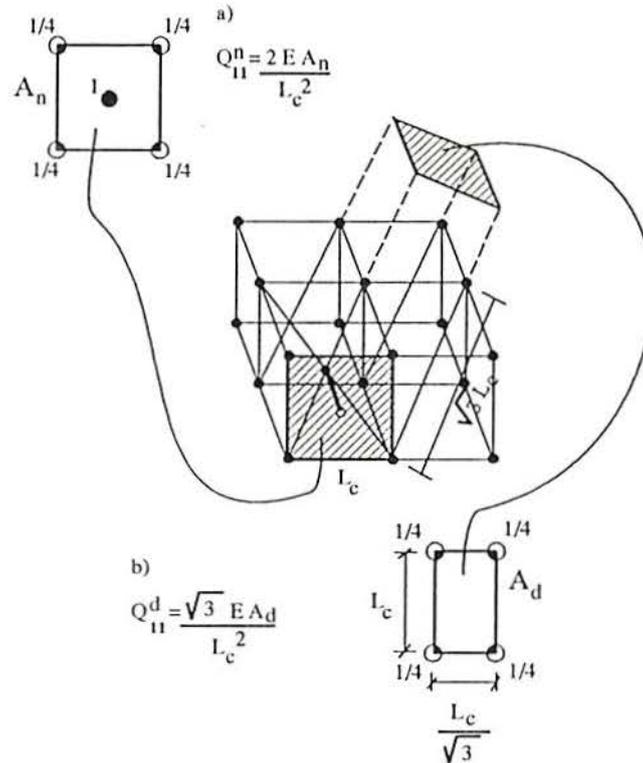


Figura 3.3: Cálculo da área efetiva para as barras normais (a), e diagonais (b) do módulo cúbico

Em forma similar se procede para obter o valor médio da propriedade unidirecional na direção das barras diagonais em relação às faces do módulo cúbico  $\varphi_{11}^d$ . Deve-se, também, determinar a área efetiva de contribuição de cada diagonal, a qual é indicada na figura (3.3.b). Logo, o  $\varphi_{11}^d$  é dado pela expressão:

$$\varphi_{11}^d = \frac{\sqrt{3} E A_n}{L_c^2} \quad (3.5)$$

A partir de  $\varphi_{11}^n$  e  $\varphi_{11}^d$ , é possível obter  $\overline{\varphi_{ij}}$ , que é a matriz de rigidez de um sólido equivalente a um arranjo de módulos cúbicos como os definidos na figura (3.2.a). Levando em conta que a cada nó genérico concorrem 7 barras (3 normais + 4 diagonais), a matriz  $\overline{\varphi_{ij}}$  poderá ser expressa como segue:

$$\overline{\varphi_{ij}} = \sum_{I=1}^3 f_I (\varphi_{11}^n, \alpha_{Ikl}^n) + \sum_{J=1}^4 f_J (\varphi_{11}^d, \alpha_{Jkl}^d) \quad (k, l = 1 \dots 3) \quad (3.6)$$

onde  $\alpha_{Ikl}^n$  e  $\alpha_{Jkl}^d$  são os co-senos diretores dos sistemas cartesianos  $\overline{x}, x_I^n$  e  $\overline{x}, x_J^d$  respectivamente.

Sustituindo as expressões (3.4),(3.5) em (3.6), e trabalhando algebricamente se obtém:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \varphi_{11}^n \left( 1 + \frac{4}{9} \delta \right) \\ C_{12} &= \varphi_{11}^n \left( \frac{4}{9} \delta \right) \\ C_{44} &= \varphi_{11}^n \left( \frac{4}{9} \delta \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde

$$\delta = \frac{\varphi_{11}^d}{\varphi_{11}^n} = \frac{\sqrt{3} A_d}{2 A_n} \quad (3.8)$$

Substituindo as expressões de  $C_{ij}$  na matriz obtém-se:

$$C_{ij} = \frac{2EA_n}{L_c^2} \begin{bmatrix} 1 + \frac{4\delta}{9} & \frac{4\delta}{9} & \frac{4\delta}{9} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 + \frac{4\delta}{9} & \frac{4\delta}{9} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 + \frac{4\delta}{9} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{4\delta}{9} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{4\delta}{9} & 0 \\ & & & & & \frac{4\delta}{9} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

que é a expressão proposta por Nayfeh & Hefzy (1978), onde  $A_n$  e  $A_d$  são dados do problema. No trabalho de Nayfeh & Hefzy (1978) se esclarece que a equação (3.9) é equivalente á matriz de rigidez de um material isotrópico e homogêneo só no caso em que  $\delta = 9/8$  (o que implica  $\nu = 0.25$ ). Para outros valores de  $\nu$  a equivalência não é perfeita e diferenças se concentram nos termos de corte. Alguns testes realizados para  $\nu = 0.20$  e  $\nu = 0.33$  mostraram um erro na avaliação dos termos de corte de até 50%. Isto indica que certos cuidados devem ser levados em conta na utilização do método dos elementos discretos no domínio elástico. Outros arranjos básicos diferentes do cúbico podem ser utilizados para obter uma equivalência perfeita para outros valores de  $\nu$  diferentes de 0.25 como é discutido em Nayfeh & Hefzy (1978) y em Schlangen (1993)

As constantes elásticas  $E$ ,  $\nu$  e  $G$  podem ser obtidas para o contínuo equivalente a partir dos correspondentes  $C_{ij}$  da expressão anterior, como segue:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \sigma_1 - \frac{\nu}{E} \sigma_2 - \frac{\nu}{E} \sigma_3 \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_2 &= -\frac{\nu}{E}\sigma_1 + \frac{1}{E}\sigma_2 - \frac{\nu}{E}\sigma_3 \\
\varepsilon_3 &= \frac{\nu}{E}\sigma_1 - \frac{\nu}{E}\sigma_2 + \frac{1}{E}\sigma_3 \\
\varepsilon_4 &= \frac{1}{G}\sigma_4 \\
\varepsilon_5 &= \frac{1}{G}\sigma_5 \\
\varepsilon_6 &= \frac{1}{G}\sigma_6
\end{aligned} \tag{3.11}$$

As expressões anteriores podem ser escritas em forma matricial da seguinte maneira:

$$\varepsilon_i = A_{ij}\sigma_j \tag{3.12}$$

de onde se obtém que:

$$a_{11} = \frac{1}{E}, a_{12} = -\frac{\nu}{E}, a_{44} = \frac{1}{G} \tag{3.13}$$

Comparando (3.1) e (3.12) se conclui que:

$$A_{ij} = C_{ij}^{-1} \tag{3.14}$$

Realizando esta inversão é possível obter os coeficientes  $a_{11}$ ,  $a_{12}$  e  $a_{44}$  em termos de  $C_{11}$ ,  $C_{12}$  e  $C_{44}$  e a partir de (3.13) e (3.9)

$$\begin{aligned}
E &= \frac{2EA_n \left(1 + \frac{12\delta}{9}\right)}{L_c^2 \left(1 + \frac{8\delta}{9}\right)} \\
\nu &= \frac{4\delta}{9 + 8\delta} \\
G &= \frac{2EA_n 4\delta}{L_c^2 9}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Como o que interessa no método dos elementos discretos é obter as rigidezes das barras ( $EA_n$ ) e ( $EA_d$ ) em função das propriedades elásticas do sólido que representa  $E, \nu$ , simplesmente isolamos tais valores da equação (3.15), obtendo:

$$\begin{aligned}
 \delta &= \frac{9\nu}{(4 - 8\nu)} & (3.16) \\
 EA_n &= \frac{L_c^2 (9 + 8\delta)}{2 (9 + 12\delta)} E \\
 EA_d &= \frac{2\delta EA_n}{\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

Estas expressões são válidas se o módulo básico de barras é o cúbico mostrado na figura (3.2a).

Para uma célula básica de forma diferente, deverão ser obtidas novas relações. Bush 'et al'(1977) e Noor & Mikulas (1988) apresentam estas relações para tetraedros, enquanto outros autores propõem realizar o cálculo das rigidezes das barras diretamente por calibração numérica. Schlangem (1993) faz uma revisão bibliográfica de vários tipos de arranjos utilizados na modelagem de estruturas de concreto.

Ostojca & Starzenski (1995) também se apresentam o cálculo de propriedades equivalentes de barras para o caso em que existe ortotropia utilizando células tetraédricas.

### 3.4 Solução da equação de movimento

A equação de movimento para o modelo teórico é dada pela seguinte expressão:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + \vec{F}_r(t) - \vec{P}(t) = 0 \quad (3.17)$$

onde  $x$  representa o vetor de deslocamentos nodais,  $M$  a matriz de massas nodais (diagonal);  $C$  é uma matriz de amortecimento, também considerada diagonal, e  $\vec{F}_r(t) - \vec{P}(t)$  representa a diferença entre o vetor de forças reativas  $\vec{F}_r(t)$  e o vetor de forças internas  $\vec{P}(t)$ , sendo que estas forças atuam sobre os nós do modelo.

Para cada nó  $i$  do modelo se verifica que:

$$\vec{F}_r^i = \sum_{b=1}^k \vec{F}_r^b \quad (3.18)$$

sendo  $k$  o número de barras que concorrem no nó  $i$ . A força interna em cada barra,  $F_r^b$ , é obtida a partir de uma equação constitutiva elementar, que pode-se expressar como segue:

$$F_r^b = \text{const}(\varepsilon_b, \dot{\varepsilon}_b) \quad (3.19)$$

sendo que  $\varepsilon_b$  e  $\dot{\varepsilon}_b$  representam a deformação e a velocidade de deformação da barra  $b$  e  $\text{const}$  será uma função que dependerá do tipo de material a modelar.

Se considera-se a matriz de amortecimento também diagonal, a solução da equação de movimento (3.17) é desacoplada e, por isso, sua solução é facilitada, sendo possível integrá-la no tempo mediante um esquema explícito. Por isso se adota a hipótese simplificativa de considerar o amortecimento proporcional à massa de tal forma que:

$$C = MD_f \quad (3.20)$$

sendo  $D_f$  uma constante vinculada ao coeficiente de amortecimento crítico,  $\xi_n$ , como segue:

$$D_f = \xi_n 2\pi f_n \quad (3.21)$$

onde  $f_n$  representa a frequência natural de vibração do modo  $n$  expressado em [Hz], o modo  $n$  é adopta-se, em geral, igual ao modo fundamental de vibração da estrutura.

A determinação do valor de  $D_f$  é um aspecto delicado do modelo, que deve ser mais estudado por diversas razões.

Além do amortecimento do material que é, em geral, difícil de se determinar, deve-se incluir dentro do  $D_f$  um certo amortecimento artificial com dois objetivos principais:

a) Eliminar as frequências de vibração mais altas do modelo, as quais não são de interesse e dificultam a interpretação dos resultados.

b) No caso em que são aplicadas excitações em formas súbitas, também é necessário colocar um certo grau de amortecimento para suavizar a frente da onda de choque, distribuindo-a entre vários elementos e prevenindo, assim, o colapso dos mesmos sobre a ação de gradientes muito fortes.

Este amortecimento 'artificial' tem sido muito estudado, havendo, até expressões fechadas propostas por diferentes autores. Um claro tratamento sobre o tema pode-se encontrar nos manuais teóricos dos programas Abaqus/Explicit (1994) e DYTRAN (1993). Os amortecimentos 'artificiais' mencionados são conhecidos na literatura como "linear and quadratic bulk viscosity".

Um dos pontos que devem ser melhorados no programa é a separação deste amortecimento numérico do amortecimento do material, para facilitar sua avaliação.

Foram, também feitos alguns esforços para que o amortecimento não seja apenas função da massa, mas também da rigidez do sistema. Uma das tentativas realizadas foi acrescentar o seguinte termo na equação constitutiva uniaxial da barra genérica  $b$  dada em forma geral na equação (3.19):

$$E_b * \dot{\epsilon}_b * \vartheta \quad (3.22)$$

sendo  $E_b$  a rigidez da barra  $b$ ,  $\dot{\epsilon}_b$  a taxa de deformação de tal barra e  $\vartheta$  um coeficiente a ser determinado mediante experimentação numérica. Ainda que seja possível aplicar amortecimento desta forma, o algoritmo fica muito instável, principalmente quando existem não linearidades envolvidas no comportamento do material. Variações desta expressão foram realizadas, mas também sem sucesso.

Também se experimentou incorporar a dependência da rigidez em forma indireta, isto é, fazendo  $D_f$  depender de um índice de dano local da estrutura, calculado em cada nó, função da degradação da rigidez das barras que concorrem ao nó. Neste caso, foram obtidos resultados interessantes, mas o cálculo adicional necessário implicava num gasto computacional elevado.

### 3.5 Determinação do incremento crítico de integração

Uma desvantagem dos métodos explícitos de integração das equações de movimento, é que são apenas condicionalmente estáveis, isto é, o intervalo de integração  $\Delta_t$  deve ser menor que um valor crítico  $\Delta_{t_{crit}}$ , a partir do qual o processo resulta instável. O método de diferenças finitas Centrais foi escolhido porque, dentre outras vantagens, apresenta em problemas lineares o menor intervalo crítico no grupo dos métodos explícitos.

Por outro lado, em problema de impacto e cargas impulsivas com possibilidade de fratura, a descrição das ações e do processo de ruptura do material exige o uso de intervalos de integração pequenos, a vezes da ordem de  $\Delta_{t_{crit}}$ , o que naturalmente elimina a desvantagem do do método em relação a procedimentos implícitos.

Em relação a determinação de  $\Delta_{t_{crit}}$ , pode ser encontrada em Flanagan & Belytschko (1984) uma discussão sobre o tema. Essencialmente se tem que  $\Delta_{t_{crit}}$  é função da maior frequência de vibração do modelo  $f_{max}$  e do amortecimento  $\xi$ . A sua vez  $f_{max}$  depende de vários parâmetros como ser o comprimento característico do elemento utilizado na discretização  $L_o$ , e da velocidade de propagação da onda de compressão  $C_p$ .

No modelo teórico em estudo, se utiliza um critério simples que se mostra a seguir

$$\Delta_{t_{crit}} \leq 0.6 \frac{L_c}{C_p} \quad (3.23)$$

onde  $L_o = L_c$  e  $C_p = \sqrt{E/\rho}$ .

### 3.6 Extensão do método dos elementos discretos para modelar estruturas laminares

Como já se mostrou, a rigidez dos elementos depende das propriedades locais do sólido e do comprimento  $L_c$  da célula básica. É possível modelar estruturas com formas curvas regulares aplicando uma transformação conforme nas coordenadas de um prisma formado pela repetição das células cúbicas básicas. Como a transformação conforme preserva a ortogonalidade, as células cúbicas transformadas são suavemente distorcidas. Por isso, admite-se que as fórmulas para calcular as rigidezes equivalentes das barras a partir das propriedades do sólido mantém sua validade.

As expressões para realizar a transformação de coordenadas foram obtidas de Churchill (1960). A título de exemplo, apresenta-se a seguir a transformação de coordenadas de um prisma retangular em um setor de casca cilíndrica.

Partindo de um prisma no espaço  $(X, Y, Z)$ , mediante as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} U &= \frac{r \exp^{(1+Z)}}{\exp^1} \cos(x) \\ W &= \frac{r \exp^{(1+Z)}}{\exp^1} \sin(x) \\ V &= Y * (L_c/L_{co}) \end{aligned} \quad (3.24)$$

é possível passar a um espaço transformado  $(U, V, W)$ , onde  $L_c$ ,  $S$ , e  $\alpha$  são dados na transformação e  $r$  e  $L_{co}$  são obtidos a partir deles como se indica a seguir:

$$\begin{aligned} r &= S/\alpha - L_c/2 \\ L_{co} &= \ln\left(\frac{L_c}{r} + 1\right) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Na figura (3.4) se indica o significado destes parâmetros. As massas nodais devem ser transformadas de acordo com a seguinte lei:

$$\text{massa transformada} = (\det J) \text{ massa original} \quad (3.26)$$

na qual  $(\det J)$  representa o determinante do jacobiano da transformação. No caso de cascas que sofrem esforços preponderantemente membranais, a utilização de uma célula básica na espessura é suficiente para obter bons resultados. Na presença de esforços de flexão precisar-se-á em geral utilizar maior quantidade de células básicas na direção da espessura.

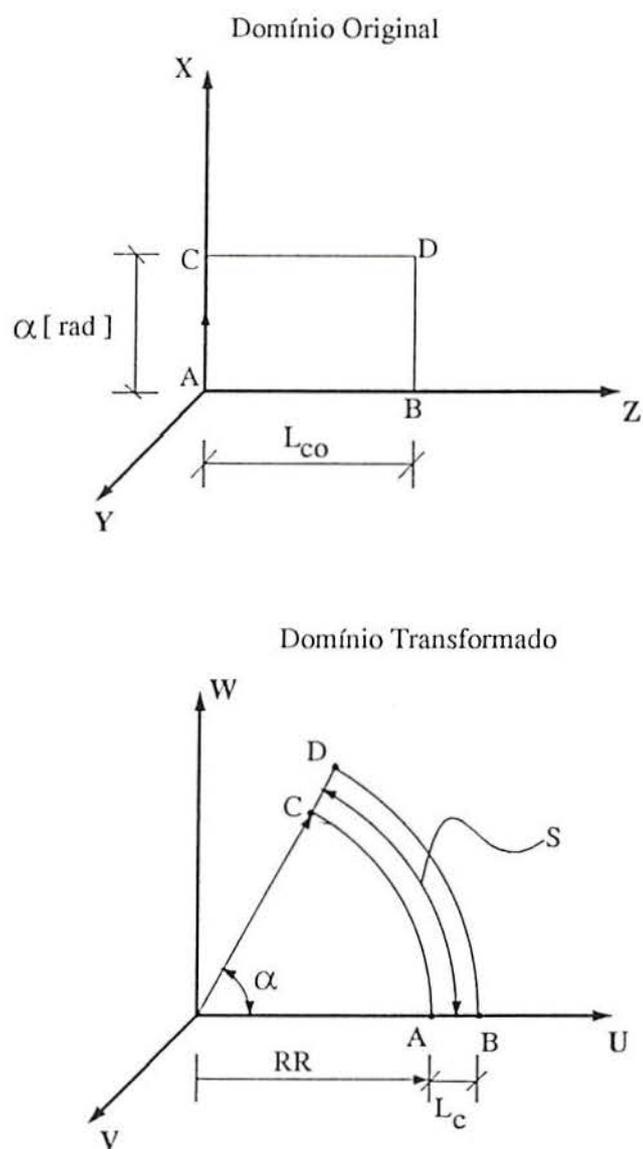


Figura 3.4: Transformação de coordenadas, de um prisma a um setor cilíndrico

### 3.7 Considerações finais

O Laboratório de Dinâmica Estrutural e Confiabilidade (LDEC) da UFRGS tem uma experiência de quase dez anos no trabalho com este método. Ele tem sido utilizado no estudo do comportamento dinâmico de materiais homogêneos ou não, considerando-se grandes deslocamentos na análise, em alguns problemas de fronteira móvel (contato) e inclusão de características aleatórias na definição das propriedades do material.

Em particular, foi utilizado com sucesso na simulação do comportamento de concreto submetido a diferentes tipos de solicitações, sendo que o modelo capta corretamente o efeito de escala e permite simular fenômenos de fratura não local típicos em materiais frágeis não homogêneos. Sobre este tema se discute a lei constitutiva unidirecional para o concreto no capítulo 5.

Foi também utilizado o DEM (método dos elementos discretos) na simulação de cáscaras elastoplásticas submetidas a cargas de curta duração (ver capítulo 4); no estudo do comportamento do concreto submetido a um estado biaxial de tensões (ver capítulo 5) e na aplicação do método ao estudo de estruturas laminares de concreto armado (ver capítulo 6).

## 4 APLICAÇÃO DO DEM A ESTRUTURAS ELASTOPLÁSTICAS

### 4.1 Generalidades

A determinação da resposta de estruturas laminares elastoplásticas submetidas a cargas dinâmicas, considerando grandes deslocamentos, requer um considerável esforço teórico e computacional. Isto se vê acentuado quando são esperados fenômenos pronunciadamente não lineares tais como escoamento ou fratura. Em tais situações, uma formulação baseada numa representação discreta da estrutura (DEM), conjuntamente com uma integração explícita no domínio do tempo, comprovou ser altamente competitiva frente a esquemas de trabalho clássicos como o método dos elementos finitos (MEF).

Neste capítulo se desenvolvem as características deste método aplicadas a estruturas elastoplásticas submetidas a cargas dinâmicas com o objetivo de testar os limites de aplicabilidade do método nesta área.

Até agora o método dos elementos discretos tinha sido empregado para estudar o comportamento de estruturas elásticas ou problemas de fratura, mas nunca aplicado ao caso de materiais ducteis. Neste último caso, se deve introduzir uma lei constitutiva uniaxial para as barras que permita representar o comportamento do modelo físico estudado.

Já Argyris 'et al' (1988,1990) utilizaram um elemento de casca consistente em massas nodais discretas unidas por elementos com flexibilidade axial rígidos à flexão (bielas), munidos de molas que vinculam as bielas entre si. Tal esquema é mostrado na figura (4.1). As vantagens do método quando aplicado a problemas transientes de curta duração, por exemplo cargas explosivas, são também enfatizadas por Argyris 'et al' (1991).

Na primeira etapa da implementação, foi incorporada uma lei constitutiva uniaxial elastoplástica com a possibilidade de considerar ou não encruamento. Para realizar o ajuste desta lei, estudou-se a sua superfície de escoamento analisando o comportamento de uma parte da estrutura submetida a diversos estados tensionais. O conjunto de equações que define a lei constitutiva uniaxial das barras do modelo é dado por:

- $|F| = E_r |\varepsilon|$  se  $|\varepsilon| < |\varepsilon^*|$  comportamento elastoplástico
- $|F| = E_r |\varepsilon^*|$  e  $|\dot{\varepsilon}| \geq 0$  comportamento plástico
- $|F| = E_r |\varepsilon^*|$  e  $|\dot{\varepsilon}| < 0$  descarga

Nas expressões anteriores,  $F$  indica a força atuante em cada barra;  $E_r$  representa a rigidez da barra, a que é função de sua área, como foi definida no capítulo 3 para

os diferentes tipos de barras (normais e diagonais);  $\varepsilon^*$  é uma deformação característica que permite vincular a relação constitutiva de cada barra com a superfície de escoamento do modelo, e, finalmente,  $\varepsilon$  indica a deformação sofrida pela barra. Na figura (4.2), mostra-se a forma da superfície de escoamento obtida considerando um módulo do modelo sujeito a tensões membranais e determinando para que níveis de tensão os arranjos de barras se convertem em mecanismos. Esta figura fornece importante informação sobre o comportamento plástico do modelo utilizado, já que nas estruturas ensaiadas os principais esforços foram membranais.

Na figura se apresenta uma comparação entre o critério de Tresca e o critério resultante para um módulo na espessura podendo-se notar que as leis de Tresca e a obtida coincidem em dois quadrantes (tensão - tensão) e (compressão- compressão). O modelo prediz tensões maiores nos outros dois quadrantes, estando, neste caso, a curva mais próximas à superfície de escoamento de Von Mises.

A seguir são apresentados três exemplos de aplicação para avaliar a implementação realizada, verificando-se que os resultados obtidos foram totalmente satisfatórios, cabendo esclarecer que não foi levada em conta, na análise a restrição volumétrica no regime plástico.

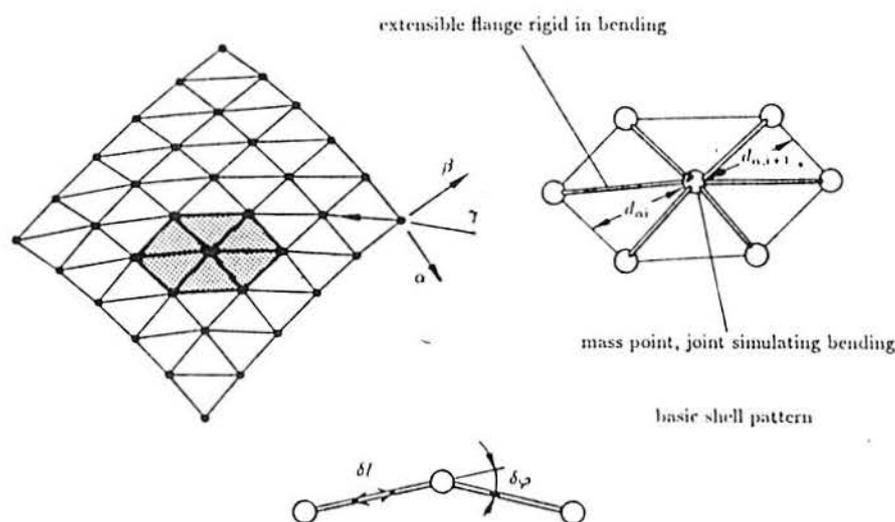


Figura 4.1: Modelo empregado por Argyris et al (1991)

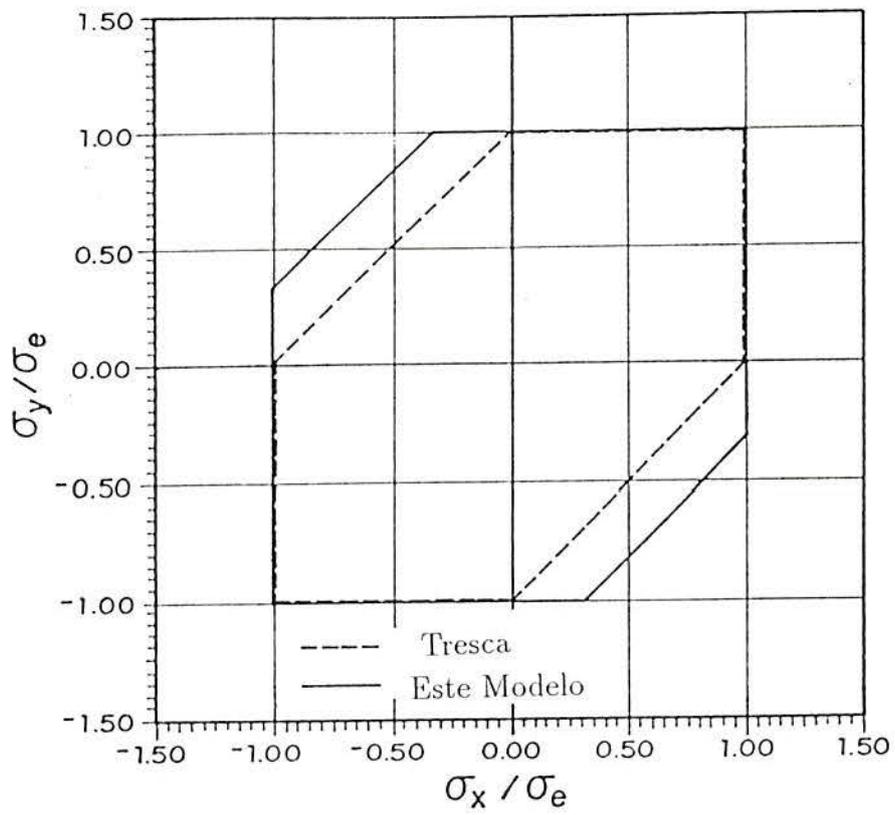


Figura 4.2: Lei de escoamento proposta no modelo

## 4.2 Exemplo 1: Casca cilíndrica submetida a uma carga explosiva na sua superfície

Como primeiro exemplo é analisada uma casca cilíndrica circular ensaiada por Leech (1971) sob a ação de uma excitação impulsiva, gerada pela aplicação de uma carga explosiva distribuída em parte de sua superfície. Esta carga é simulada por Argyris 'et al' (1991) mediante a aplicação de uma velocidade inicial igual a  $V_0 = 143.51 m/s$ . No modelo foi aplicada uma carga de superfície  $q_s$  na casca, cujo valor está vinculado a  $V_0$  de tal forma que ambas excitações produzam o mesmo impulso na estrutura. O tempo  $t_d$  de aplicação da carga adotado foi o necessário para que a onda de compressão atravessasse a espessura da casca, de tal forma que:  $t_d = c_p L_c$ , sendo  $c_p$  a velocidade da propagação da onda de compressão definida pela expressão  $c_p = \sqrt{E/\rho}$  e  $L_c$  a espessura da casca, igual a um módulo cúbico na discretização adotada.

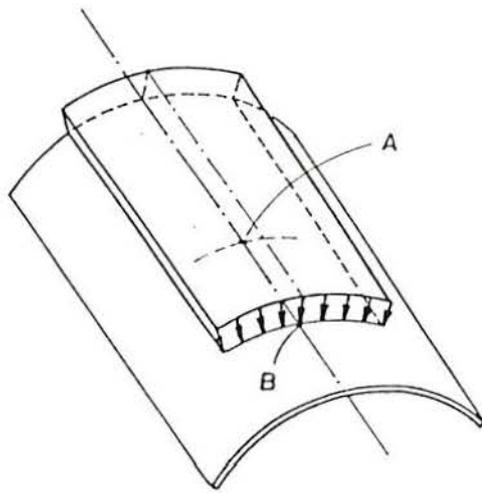
As dimensões e propriedades da estrutura em consideração são indicadas na figura (4.3). A casca está engastada em suas quatro bordas. A zona da carga cobre um setor periférico de  $60^\circ$ , sendo que o desenvolvimento total da estrutura é de  $120^\circ$ . O material empregado na construção da casca foi uma liga de alumínio 6061-T6 caracterizado por um encruamento muito pequeno, pelo qual seu comportamento pode ser simulado admitindo uma relação constitutiva elastoplástica perfeita.

A casca foi analisada por Argyris 'et al' (1991), empregando um modelo gerado utilizando o enfoque apresentado na figura (4.1), onde foram consideradas quatro capas para computar corretamente a distribuição de tensões durante as deformações plásticas.

No modelo aqui apresentado, discretizou-se a metade da casca, aproveitando as condições de simetria do problema. Em tal discretização utilizou-se um único módulo na direção da espessura, 100 na direção longitudinal e 25 no sentido circunferencial, gerando um modelo com 23000 graus de liberdade.

A figura (4.4) permite comparar os deslocamentos verticais nos pontos A e B da casca, (a) observados no experimento, (b) calculados por Argyris 'et al' (1991) e (c) utilizando o modelo proposto, sendo evidente a boa performance do método proposto. A discrepância entre as simulações numéricas e os resultados experimentais para o ponto B, localizado a  $1/4L$  do extremo menos carregado, é atribuída à hipótese de um engastamento perfeito nas quatro bordas da casca, aspecto discutido no trabalho de Leech (1971).

Finalmente na figura (4.5) se mostra um detalhe da configuração do modelo discretizado no instante em que se produz o deslocamento máximo no ponto A ( $t=375$  ms).



$$L(\text{comprimento}) = 0.3175m.$$

$$\hat{\text{Angulo}} = 120^\circ$$

$$\text{Espessura} = 0.003175m$$

$$\text{Raio Interno} = 0.0742095m.$$

$$v_o = 143.51m/s$$

$$E = 7.234E10N/m^2$$

$$\varepsilon_y = 4.19E - 3$$

$$\rho = 2673Kg/m_3$$

Figura 4.3: Propriedades geométricas e mecânicas da casca de Leech (1971)

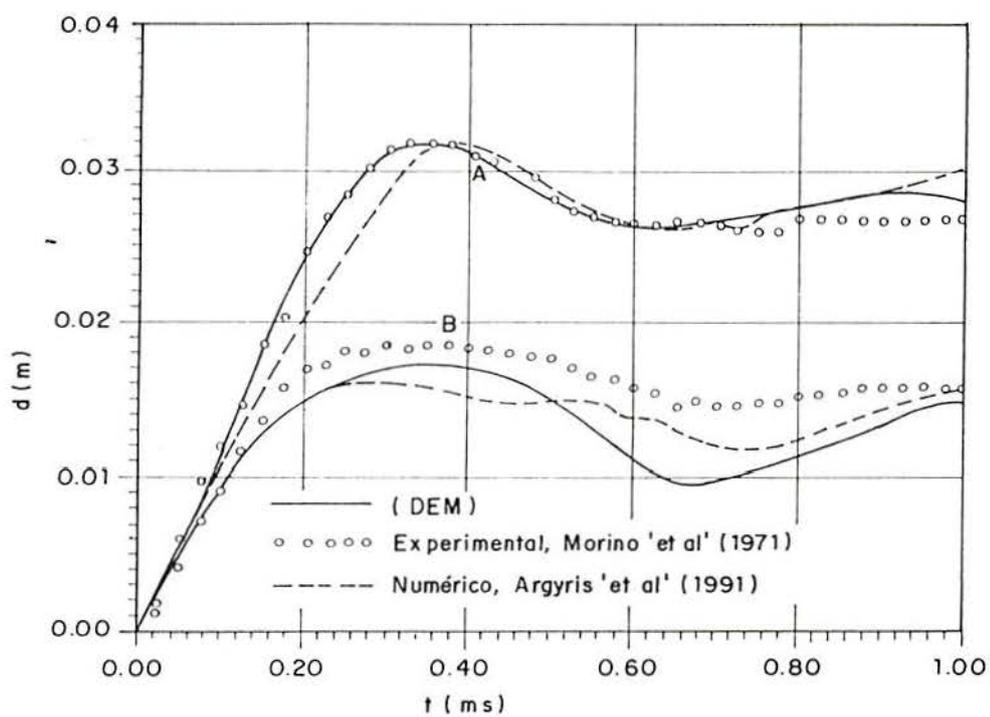


Figura 4.4: Comparação dos resultados experimentais apresentados por Leech (1971) com os numéricos de Argyris (1991) e com os do modelo proposto; deslocamentos verticais nos pontos A e B vs tempo

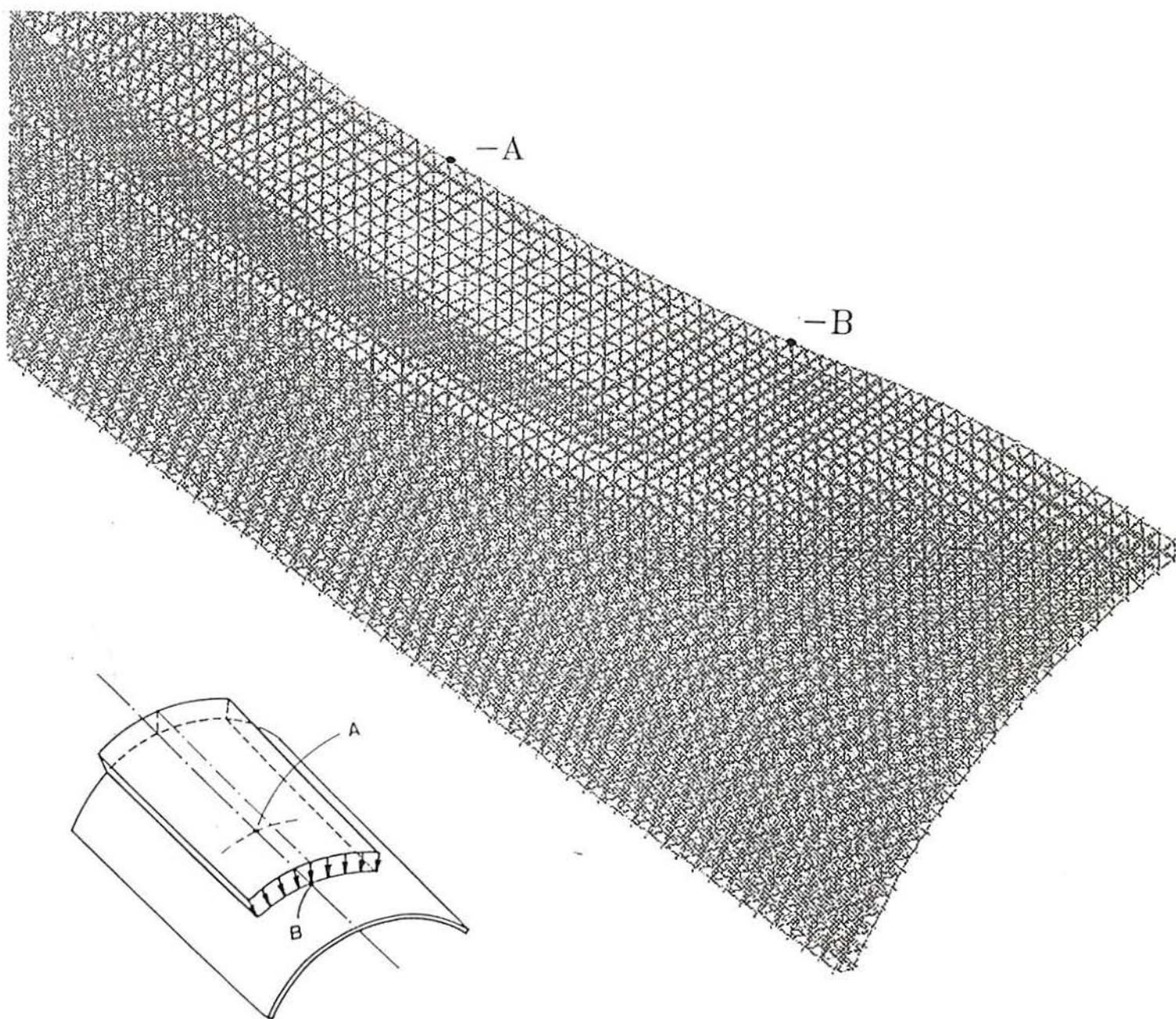


Figura 4.5: Configuração da casca deformada na proximidade da borda menos carregada no tempo  $t=375$  ms

### 4.3 Exemplo 2: Resposta de uma placa submetida a uma carga impulsiva

O segundo exemplo apresentado é o caso de uma placa de alumínio (6061-T6), biengastada, submetida a uma carga impulsiva na sua porção central, ensaiada por Balmer (1964). As dimensões e propriedades mecânicas são indicadas na figura (4.6). Levando em consideração o baixo encruamento do material ensaiado, o mesmo foi também considerado na análise como sendo elastoplástico perfeito.

Como não foi possível obter informação da distribuição espacial e temporal da pressão durante a explosão, a amplitude da carga foi obtida calibrando o gradiente teórico e experimental das respostas dentro do intervalo de comportamento elástico do material nos primeiros momentos do processo. Verificou-se, assim, que a excitação pode ser simulada corretamente admitindo-se uma pressão igual a  $1900 \text{ MN}/m^2$  atuando durante  $1,2\mu\text{s}$ . Devido a simetria da estrutura, foi modelado um quarto da placa, utilizando duas células cúbicas no sentido da espessura, tendo o modelo um total de 3714 graus de liberdade, como pode ser observado na figura (4.7).

É importante salientar que devido as características do método para captar em forma mais precisa o comportamento de estruturas submetidas a solicitações flexionais é desejável o uso de mais de um módulo na direção ortogonal da solicitação. Neste exemplo o tempo de integração utilizado foi de  $7.2\text{E-}7$  segundos, enquanto a solução proposta por Hartzman & Hutchinson (1972) teria um incremento de tempo crítico entre  $9.88\text{E-}8$  e  $4.14\text{E-}7$  segundos.

O deslocamento na metade do vão em função do tempo é mostrado na figura (4.8), a qual compara os resultados experimentais apresentados por Balmer (1964), os numéricos obtidos pelo método dos elementos finitos por Hartzman & Hutchinson (1972) e os obtidos com o método proposto. Na figura (4.7) se apresentam várias configurações instantâneas do modelo proposto, que representam corretamente o comportamento da placa até atingir a carga última. No entanto, ambas soluções numéricas falham na descrição adequada do comportamento da placa depois que a resposta máxima foi atingida. Este problema é muito comum na evolução de respostas impulsivas e está associado a uma inadequada representação das forças dissipativas na região plastificada. Neste contexto, na figura (4.9) se apresenta um balanço energético em função do tempo durante o processo. Este gráfico indica a importância relativa das diferentes fontes de energia e permite monitorar o processo de integração. Belytschko (1983) recomenda fazer controle energético em integrações explícitas de sistemas não lineares para detectar uma possível instabilidade numérica.

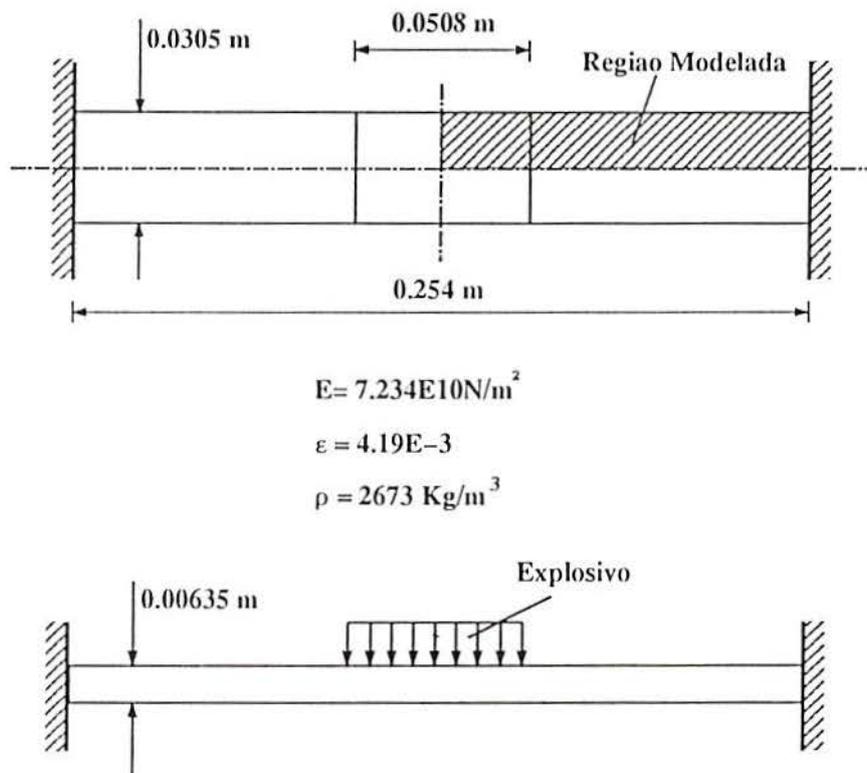


Figura 4.6: Propriedades geométricas e mecânicas da placa de Balmer (1964)

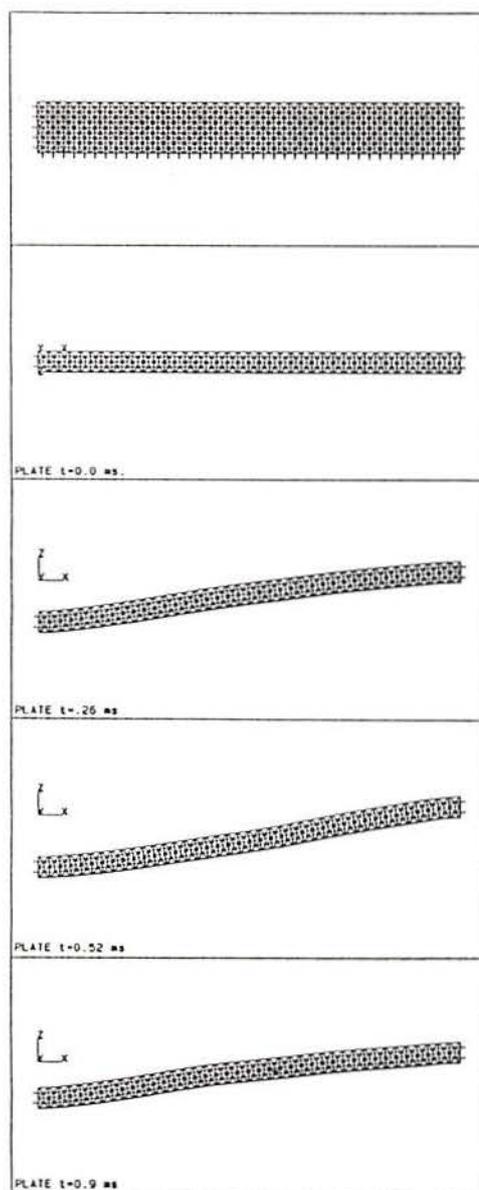


Figura 4.7: Modelo em DEM da placa de Balmer (1964) e deformadas em diversos tempos na simulação do processo

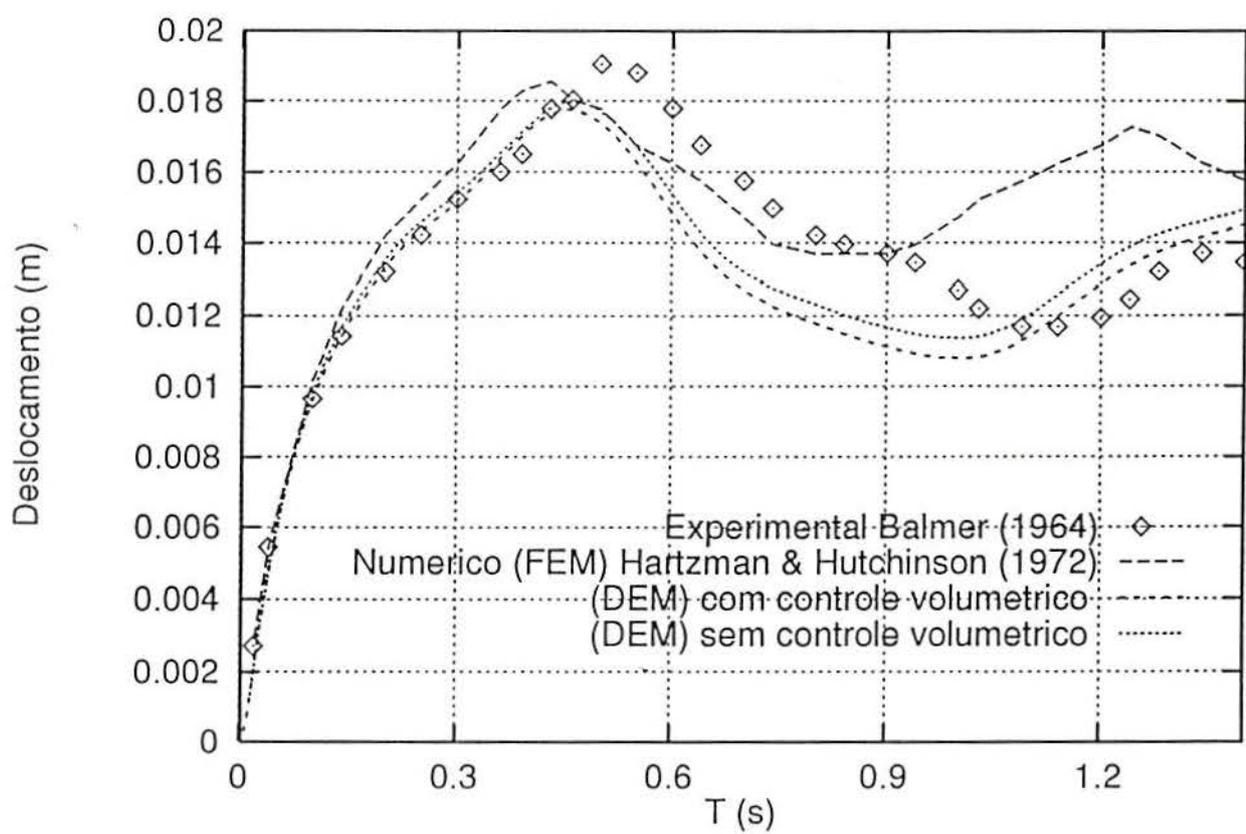


Figura 4.8: Comparação da resposta em termos de deslocamento no meio do vão da placa de Balmer (1964) e soluções teóricas (com e sem controle volumétrico)

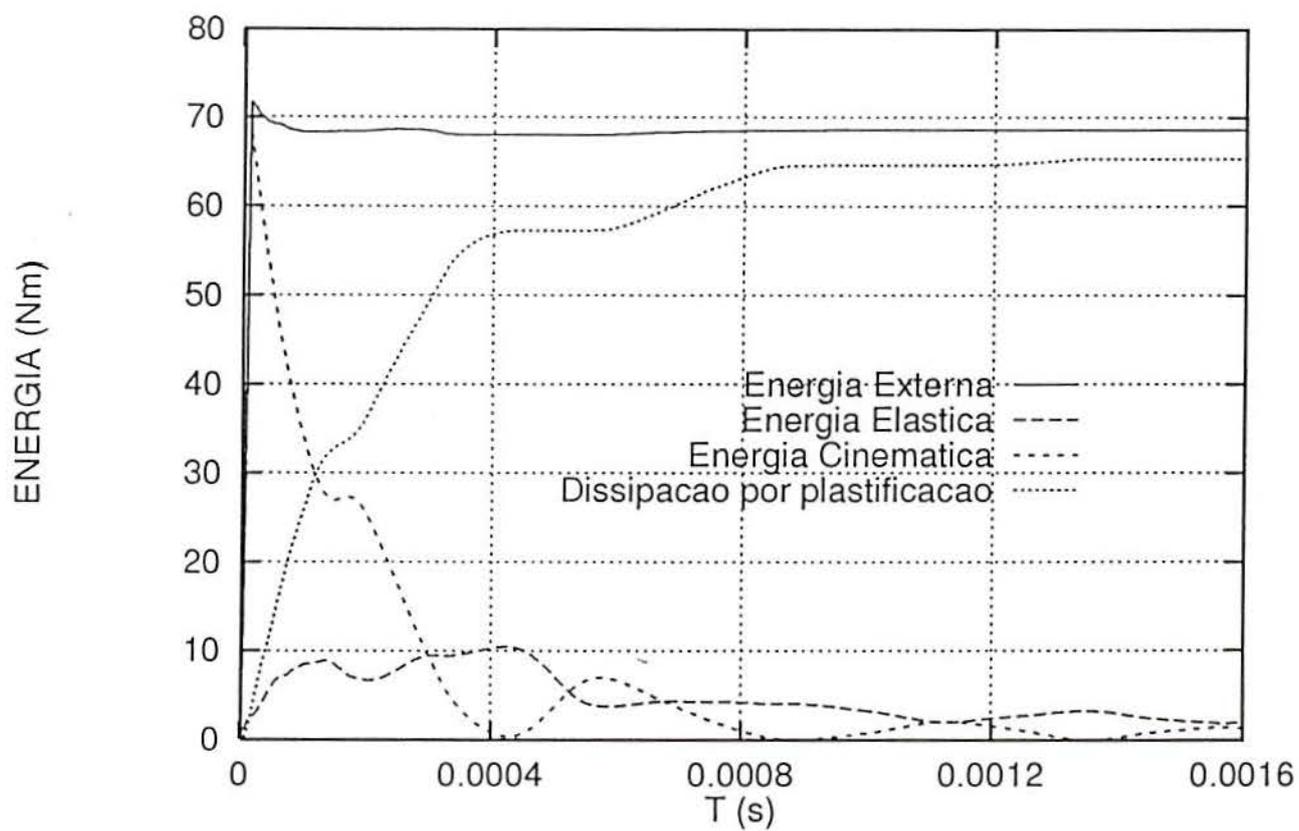


Figura 4.9: Balanço energético do processo no tempo para a análise da placa de Balmer (1964)

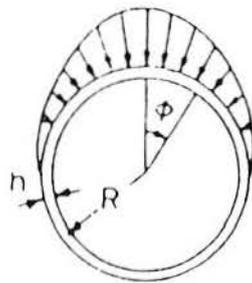
#### 4.4 Exemplo 3: Casca cilíndrica submetida a uma carga impulsiva simétrica

Este exemplo consiste na análise de uma casca cilíndrica com propriedades geométricas e mecânicas indicadas na figura (4.10) submetida a uma excitação impulsiva. Esta estrutura foi testada por Lindeberg & Kennedy (1975), sendo medido um impulso total aplicado sobre a estrutura de  $15000 \text{ Ns/m}^2$ . A excitação impulsiva aplicada foi uma velocidade inicial considerada uniforme na direção longitudinal e com uma variação senoidal na direção circunferencial, aproximada pela seguinte expressão:

$$W(\phi) = -33.7 - 52.8 \cos \phi - 21.2 \sin \phi + 4.374\phi (m/s)$$

Devido a simetria, só a metade do cilindro foi modelada, admitindo-se também a condição de estado plano de deformações na análise devido as características da estrutura.

O modelo de elementos discretos resultante, ilustrado na figura (4.11), apresenta 476 pontos nodais correspondentes a 94 módulos cúbicos básicos na direção circunferencial e um módulo na direção longitudinal. Os resultados experimentais foram comparados com os obtidos com a presente formulação e com soluções via elementos finitos devida a Isihyaki & Bathe (1980), obtida com um modelo constituído por 60 elementos isoparamétricos quadráticos, realizando-se também a análise em estado plano de deformações (Programa ADINA). Na figura (4.12) mostra-se a evolução dos deslocamentos radiais com o tempo para  $\phi = 15^\circ$ , medindo o ângulo a partir do eixo vertical  $y$ . As deformações em  $\phi = 0^\circ$  em função do tempo, são apresentadas na figura (4.13). Finalmente na figura (4.14) se mostra a deformação circunferencial na casca no tempo  $t = 0.1 \text{ ms}$ . Em todos os casos as predições do modelo com elementos discretos conduzem a resultados satisfatórios, com a vantagem no caso do DEM que, se acontecer fratura, não seria necessário remalhar o modelo. A qualidade dos resultados numéricos (DEM e FEM), comparados com os resultados experimentais, são equivalentes. Na figura (4.15) apresenta-se o balanço energético durante toda a simulação.



$$R = 0.1525m.$$

$$h = 0.051m.$$

Estado Plano de deformações

$$E = 5.89E10N/m^2$$

$$\nu = 0.33$$

$$\frac{E_t}{E} = 0.023$$

$$\rho = 2730Kg/m^3$$

Figura 4.10: Propriedades geométricas e mecânicas da Casca cilíndrica de Lindberg & Kennedy (1975)

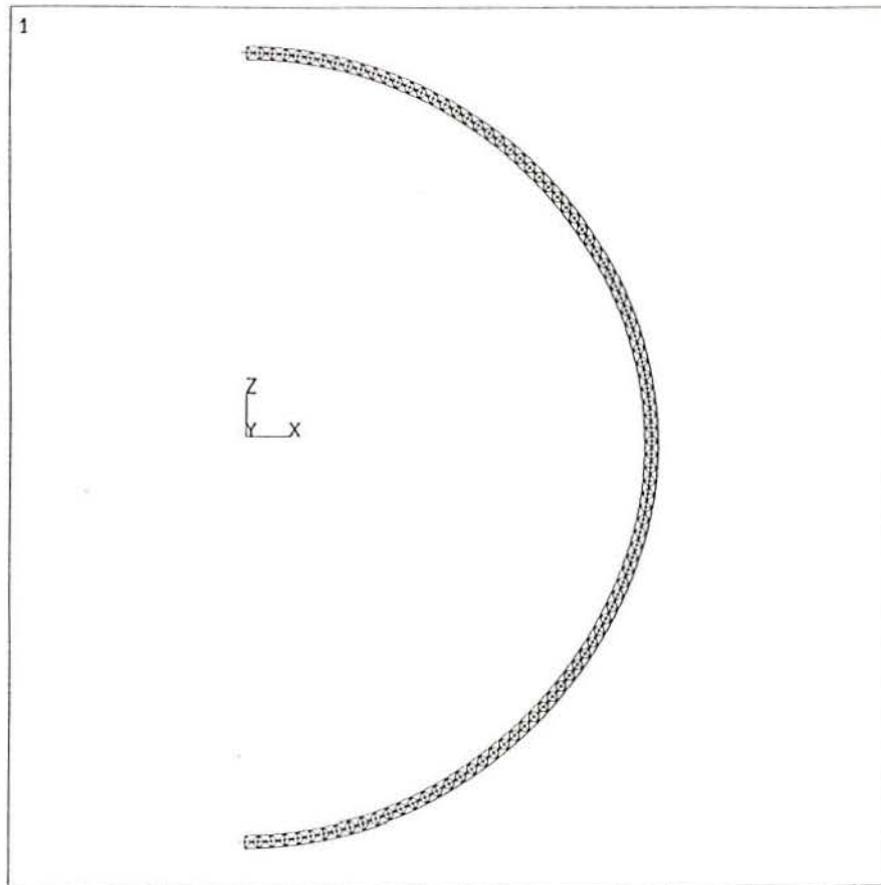


Figura 4.11: Vista do modelo teórico da Casca cilíndrica de Lindberg & Kennedy (1975).

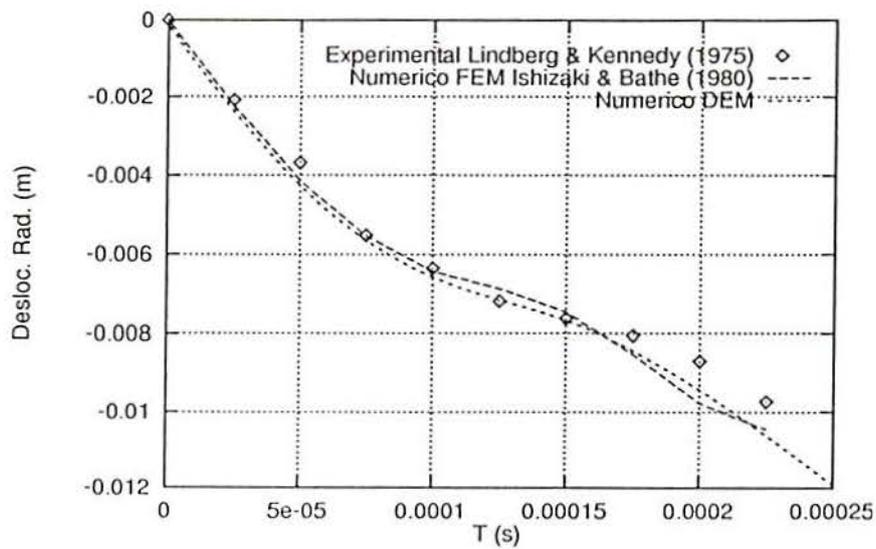


Figura 4.12: Comparação dos resultados experimentais e numéricos dos deslocamentos radiais vs tempo em  $\phi = 15^\circ$  da Casca cilíndrica de Lindberg & Kennedy (1975)

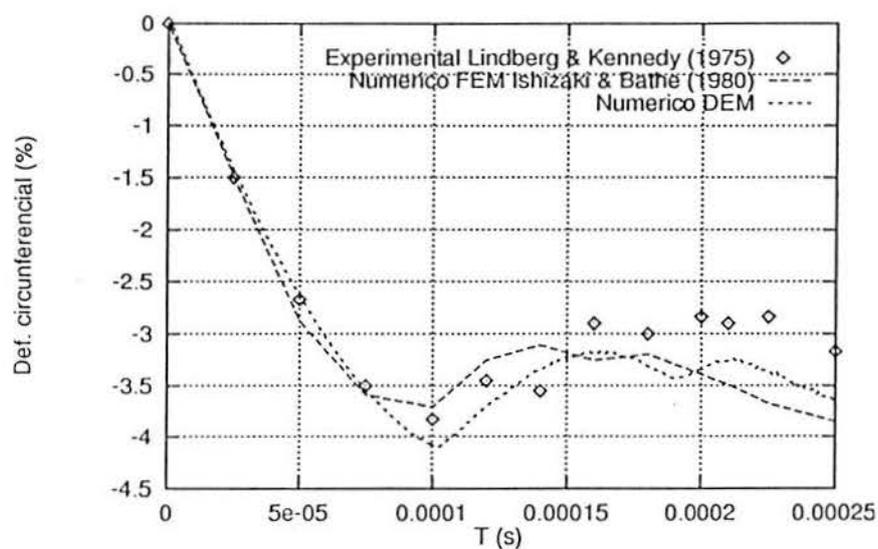


Figura 4.13: Comparação dos resultados experimentais e numéricos das deformações circunferenciais vs tempo em  $\phi = 0$  da Casca cilíndrica de Lindberg & Kennedy (1975)

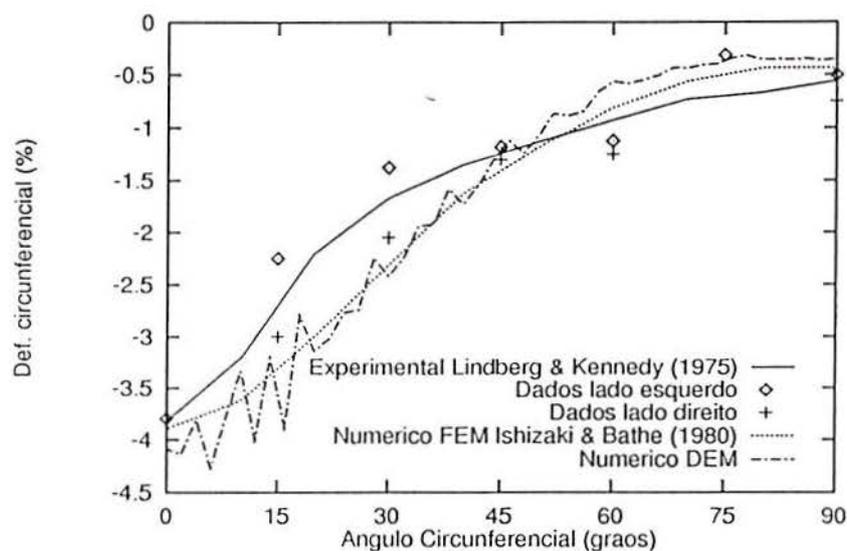


Figura 4.14: Comparação dos resultados experimentais e numéricos das deformações circunferenciais no tempo  $t=0.1$  ms da Casca cilíndrica de Lindberg & Kennedy (1975)

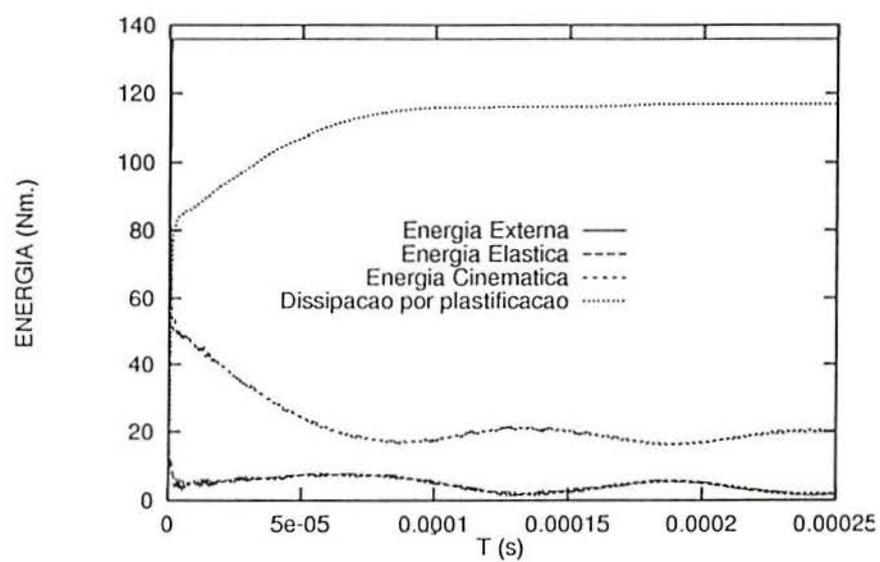


Figura 4.15: Evolução do balanço energético do processo no tempo para a análise da Casca cilíndrica de Lindberg & Kennedy (1975)

## 4.5 Controle Volumétrico

Nas primeiras aplicações do modelo a problemas de elasto-plasticidade, não foi realizado nenhum controle do volume, o qual em casos de grandes deformações, especialmente quando deformações volumétricas negativas podem acontecer, produz resultados não satisfatórios. Por esta razão, se criou, dentro do algoritmo, um mecanismo de controle para restringir a diminuição do volume do material quando este estiver plastificando. Considerou-se como célula básica para realizar o controle volumétrico um tetraedro elementar, o qual se ilustra na figura (4.16). Várias tentativas de implementação foram realizadas, comentando-se a seguir algumas delas.

Numa primeira tentativa decidiu-se restringir a diminuição de volume no regime plástico aplicando uma penalidade na equação constitutiva de tal forma que, ante um decremento de volume se gerassem forças nas barras proporcionais ao decremento volumétrico e a uma certa constante de penalidade. Tais forças internas no intervalo de tempo  $t + \delta t$  corrigiriam o volume do tetraedro. O enfoque é elegante e de implementação computacional relativamente simples, mas o algoritmo resultante mostrou-se instável. Várias formas de estabilização do esquema de cálculo foram empregadas, entre elas a redução do intervalo de integração e a modificação do valor da constante de penalidade, adotando um valor proporcional à rigidez da barra associada, sem que fossem obtidos resultados positivos.

Foi adotada, então, outra forma de abordar o problema por meio do seguinte esquema: o mecanismo de controle é ativado quando pelo menos duas barras do tetraedro estão no campo plástico, admitindo-se que, neste caso, o escoamento ocorre no volume do tetraedro em análise. O algoritmo de controle volumétrico é realizado sobre cada um dos tetraedros básicos, e pode-se resumir da seguinte maneira:

- a) Se realiza a integração da equação de movimento sem realizar nenhum tipo de controle.
- b) Se pesquisa quais tetraedros estão plastificados e sobre eles se realiza o controle volumétrico, (o significado dos parâmetros utilizados é ilustrado na figura (4.17)). Para o  $i$ -ésimo tetraedro realizam-se as seguintes tarefas:
  - b1) Define-se a posição do centro de gravidade do tetraedro  $\vec{g}(g_1, g_2, g_3)$ .
  - b2) Geram-se os versores  $\vec{i} \vec{j} \vec{k} \vec{l}$  com origem nos vértices do tetraedro e orientados em direção ao centro de gravidade do mesmo.
  - b3) Calcula-se o escalar  $\alpha$  resolvendo a seguinte equação não linear:

$$V\phi'(\alpha) = V_{def} + \Delta Vol(\alpha)$$

onde

\*  $V_{def}$  = Volume do tetraedro deformado (sem corrigir).

- \*  $V\phi$  = Volume do tetraedro antes da deformação
  - \*  $\alpha$  = Um escalar que deve ser alterado até que se verifique a igualdade  $V\phi = V\phi'(\alpha)$ . O valor de  $\alpha$  determinado desta forma é o fator que multiplicando os versores  $\vec{i}$   $\vec{j}$   $\vec{k}$   $\vec{l}$  permite corrigir a posição dos nós do tetraedro como se indica na figura (4.17). É empregado o método da biseccção para encontrar o valor de  $\alpha$ .
- b4) A posição final de cada nó é determinada pela composição das correções de suas coordenadas devidas ao controle volumétrico de todos os tetraedros que tem dito nó em comun.

O controle volumétrico é realizado várias vezes (processo iterativo) sobre os tetraedros plastificados até que se obtém configurações finais similares entre duas iterações consecutivas. Se está em condições então de continuar o processo de integração da equação de movimento.

Embora o algoritmo aqui mostrado tenha sido testado, pode ser ainda necessário realizar alguns ajustes e modificações. Até o presente, pode-se comprovar que:

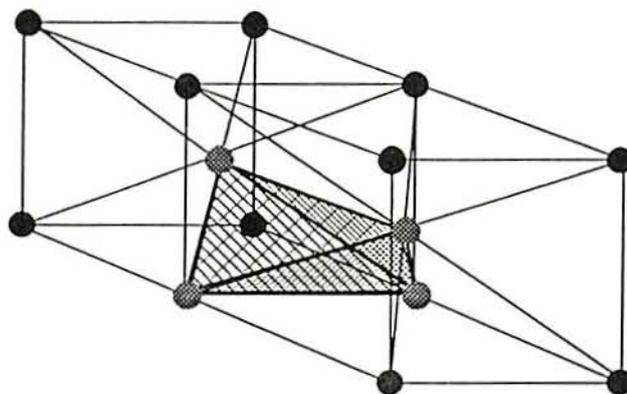
- a) Em problemas de grandes deslocamentos, mas pequenas deformações, o controle de volume produz uma influência marginal sobre os resultados. Assim, nos exemplos mostrados nas seções 4.2 a 4.4 não foram produzidas mudanças perceptíveis dos resultados obtidos considerando ou não o controle de volume, como se evidencia nos resultados apresentados na figura 4.8.
- b) Um problema típico em modelos de plasticidade computacional está na sobreavaliação da carga plástica de colapso devido a que a discretização material não permite que aconteça localmente o fluxo plástico incompressível. Este problema tem sido tratado extensamente na bibliografia especializada da qual podem destacar-se o trabalho clássico de Nagtegaal 'et al' (1974) e a publicação sobre este problema aplicado a elementos tetraédricos realizado por Marti & Cundall (1982).

Na implementação realizada com o método dos elementos discretos, este problema é contornado naturalmente pela forma em que são encontradas as posições finais dos nós da configuração corrigida. Isto é feito como uma superposição das correções devidas a todos os tetraedros ligados ao nó em consideração, a qual pode-se interpretar como uma media da correção referida a um volume maior que ao de um tetraedro.

- c) Em problemas que envolvem grandes deformações, é necessário aplicar o controle volumétrico para obter bons resultados. A eficácia do esquema de controle volumétrico foi verificada nos exemplos 4.6 e 4.7, nos quais foi consideravelmente estendida a faixa de aplicação do DEM.

Deve-se salientar porém que, quando acontecem grandes deformações, é necessário contar com algum esquema de 'remeshing' para evitar grandes distorções dos

arranjos de elementos ou, alternativamente, algum algoritmo que permita obter uma maior discretização da estrutura naquelas regiões em que são esperados grandes gradientes de deformações.



**a) Célula  
elementar**

Figura 4.16: Localização de uma célula elementar tetraédrica dentro do modelo do DEM.

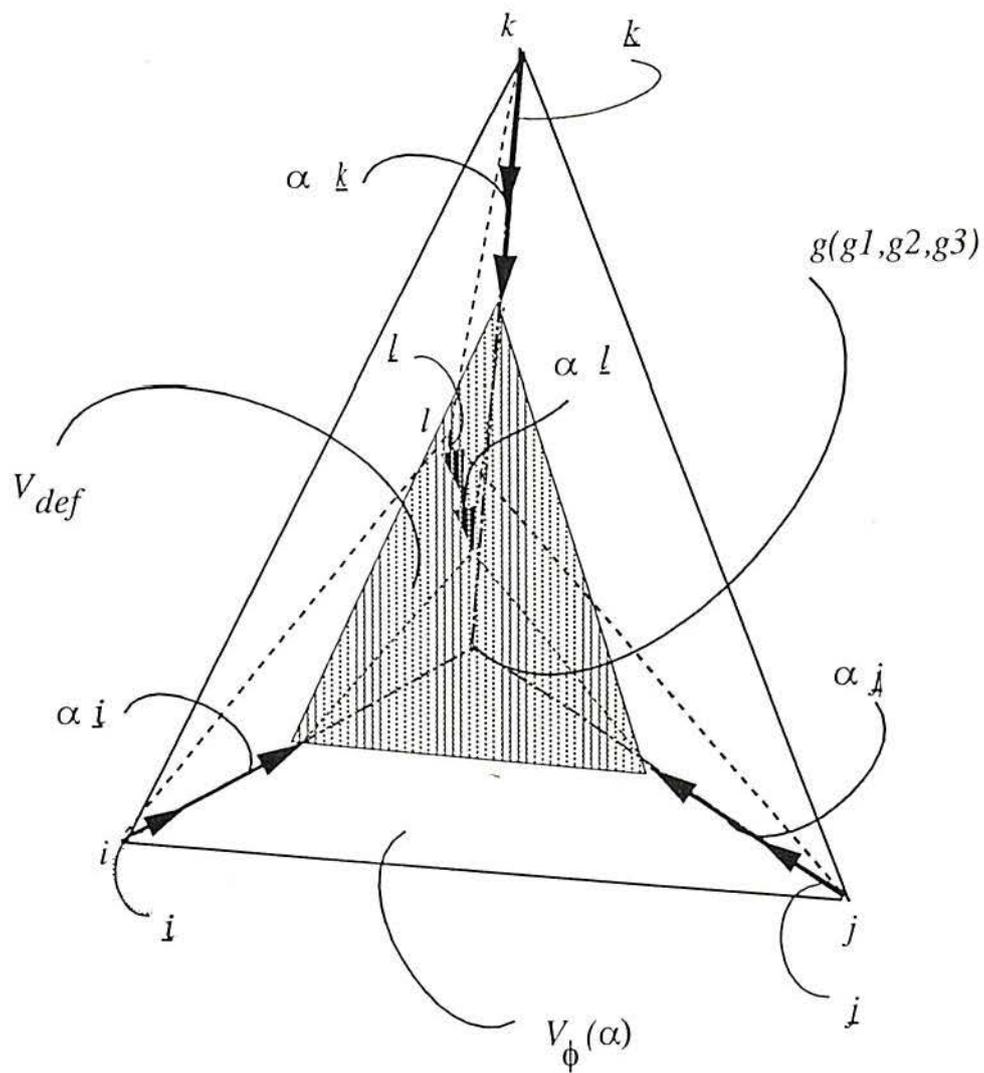


Figura 4.17: Tetraedro básico.

## 4.6 Exemplo 4: 'Upsetting' de um cubo de aço

Com o objetivo de testar o comportamento do algoritmo dos elementos discretos, foi analisado o caso de um cubo de aço de 2 cm de aresta submetido a uma velocidade prescrita nas faces perpendiculares ao eixo Z. Na figura (4.18) se apresenta as propriedades geométricas e mecânicas do exemplo em análise. Aproveitando as condições de simetria, só foi modelado um oitavo do volume do cubo. Considera-se que a forma permanece colada ao cubo durante o ensaio. Na figura (4.19) se compara as malhas deformadas obtidas por meio do programa de análise explícita ABAQUS/Explicit (1994), utilizando elementos hexaédricos lineares com um ponto de integração considerando o controle de hourglass, e os resultados obtidos utilizando o método dos elementos discretos com e sem controle de volume.

Na figura (4.20) se compara as respostas obtidas com o programa ABAQUS/Explicit com o método dos elementos discretos com e sem controle de volume. É possível observar que no caso de não levar em conta o controle volumétrico as células básicas na região de maior deformação tendem a desaparecer. As forças reativas em função do deslocamento vertical da forma são apresentadas na figura (4.20).

Analisando as figuras (4.19) e (4.20) se conclui que, neste caso, o controle volumétrico no método dos elementos discretos melhora significativamente a precisão dos resultados.

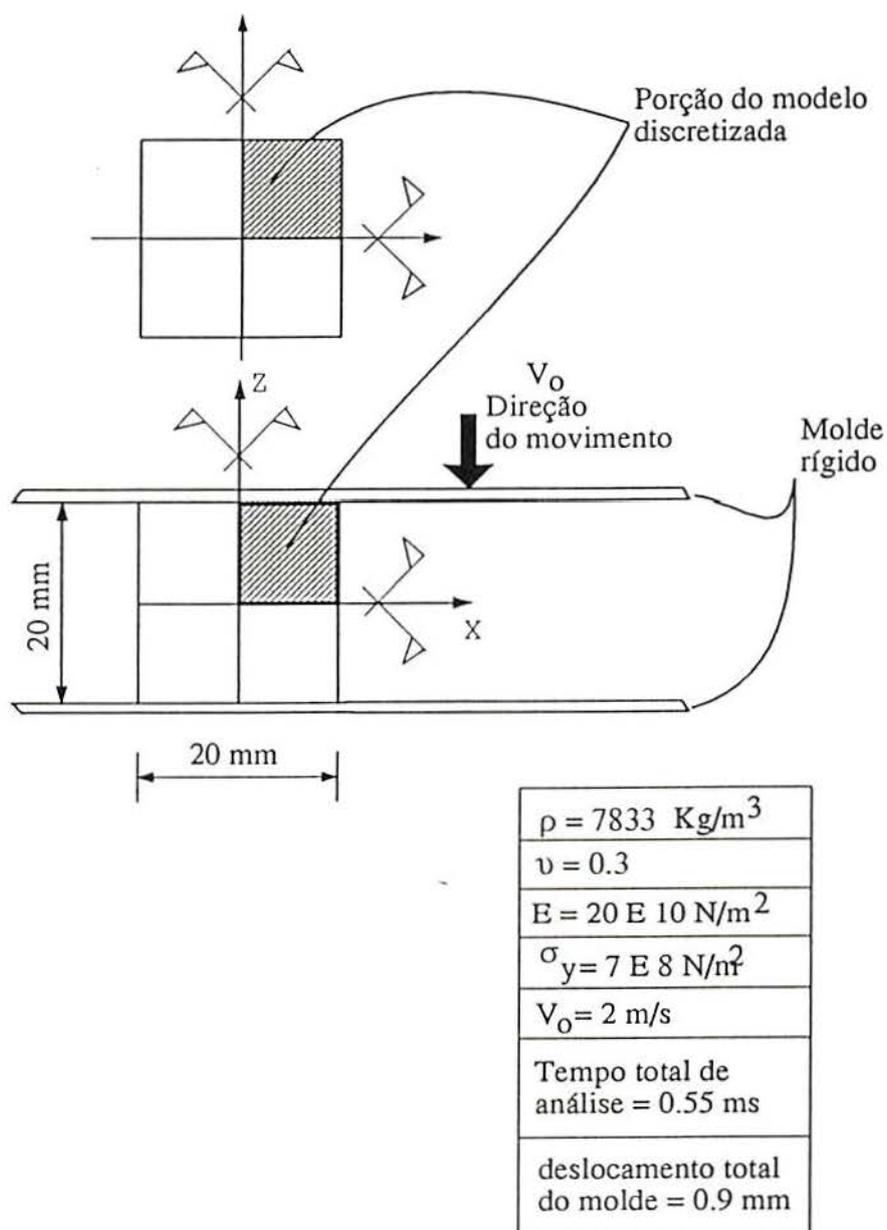


Figura 4.18: Propriedades geométricas e mecânicas de um cubo de aço submetido a um 'Upsetting'.

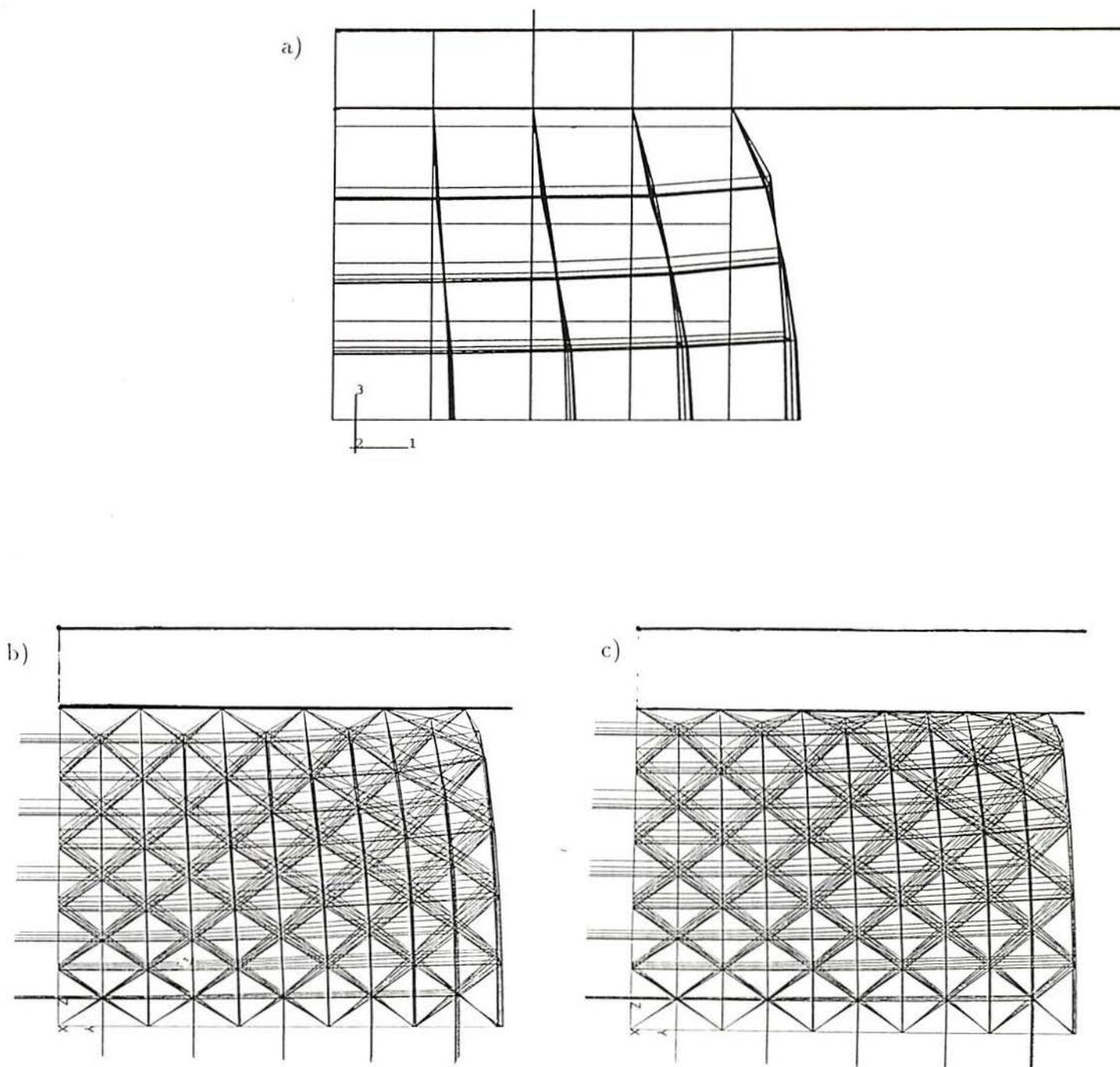


Figura 4.19: Comparação das deformadas dos modelos teóricos de um cubo de aço submetido a um 'Upsetting'. a) Configuração deformada obtida com o ABAQUS/Explicit. b) Configuração deformada obtida com DEM com controle volumétrico. c) Configuração deformada obtida com DEM sem controle de volume.

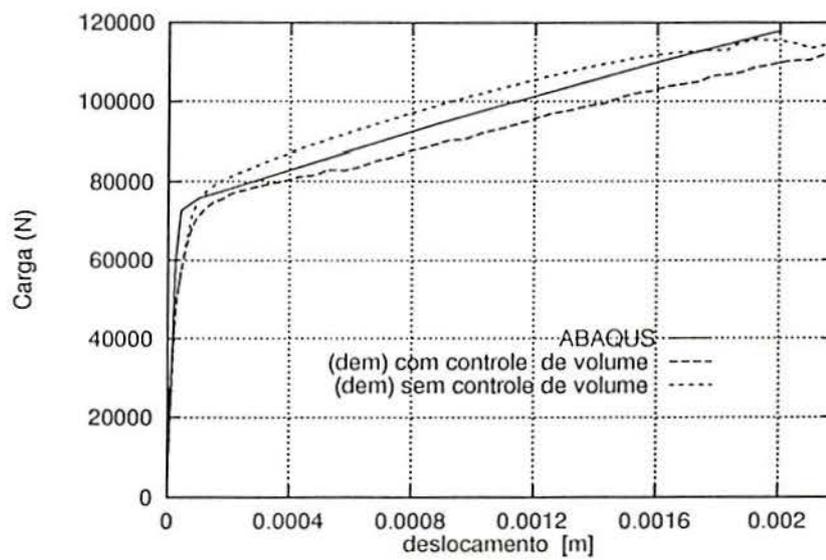


Figura 4.20: Resposta de um cubo de aço submetido a um 'Upsetting' em termos de força reativa em função do deslocamento da forma dos modelos teóricos simulados.

## 4.7 Exemplo 5: Impacto de Barra de Alumínio contra superfície rígida inclinada

Como segundo exemplo, foi testado o caso de uma barra de liga de alumínio (6061-T6) ensaiada experimentalmente por Zukas (1982). O comprimento da barra é  $l = 3980.48\text{cm}$  e seu diâmetro  $D = 0.635\text{cm}$ . A barra é lançada a uma velocidade de  $116.8\text{m/s}$ , sendo que a superfície alvo está inclinada  $2^\circ$  em relação à vertical. As propriedades mecânicas do material empregado são iguais às da placa de Balmer (1964). Na figura (4.21) se apresenta um esquema ilustrativo do ensaio realizado com a barra.

No modelo DEM foi considerada uma barra de secção quadrada equivalente devido a limitações do método na modelação geométrica. Foram empregados  $2 \times 2 \times 10^8$  módulos cúbicos, o que implica 4239 graus de liberdade. Levando em conta a relativa complexidade do exemplo analisado e a limitação do método dos elementos discretos para modelar corretamente a geometria e para realizar uma discretização maior na região onde os gradientes de tensões são maiores, os resultados obtidos superaram as expectativas.

Na figura (4.22) se apresenta uma comparação entre a configuração deformada final da barra ensaiada e dos resultados numéricos obtidos com o modelo dos elementos discretos.

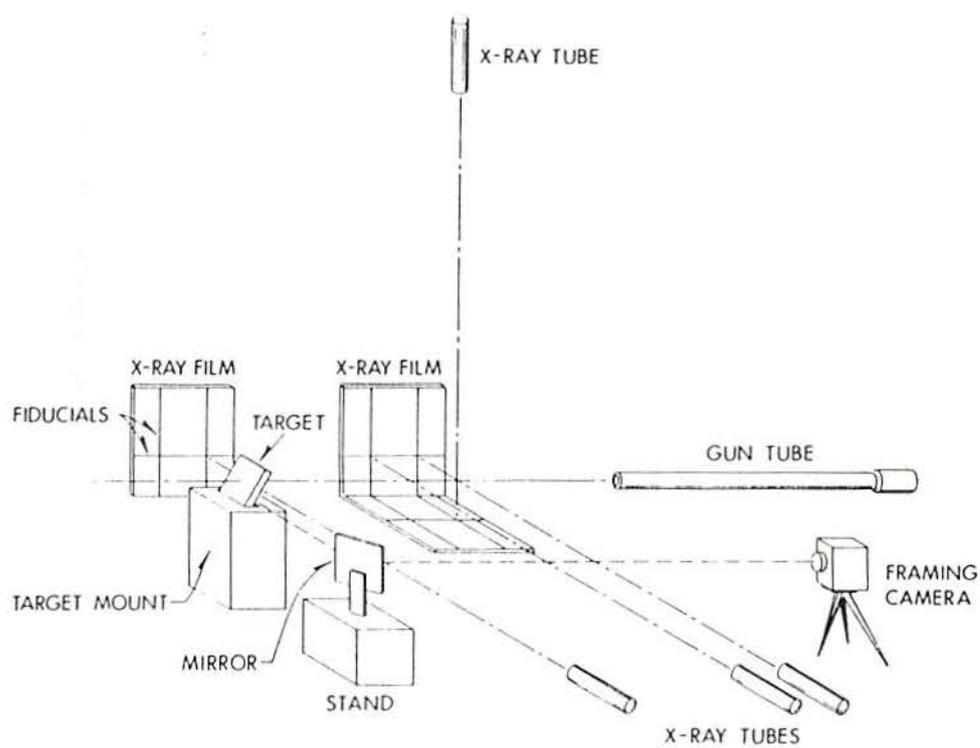


Figura 4.21: Esquema do ensaio realizado por Zukas (1982) com barras de Alumínio em colisão contra uma superfície rígida.

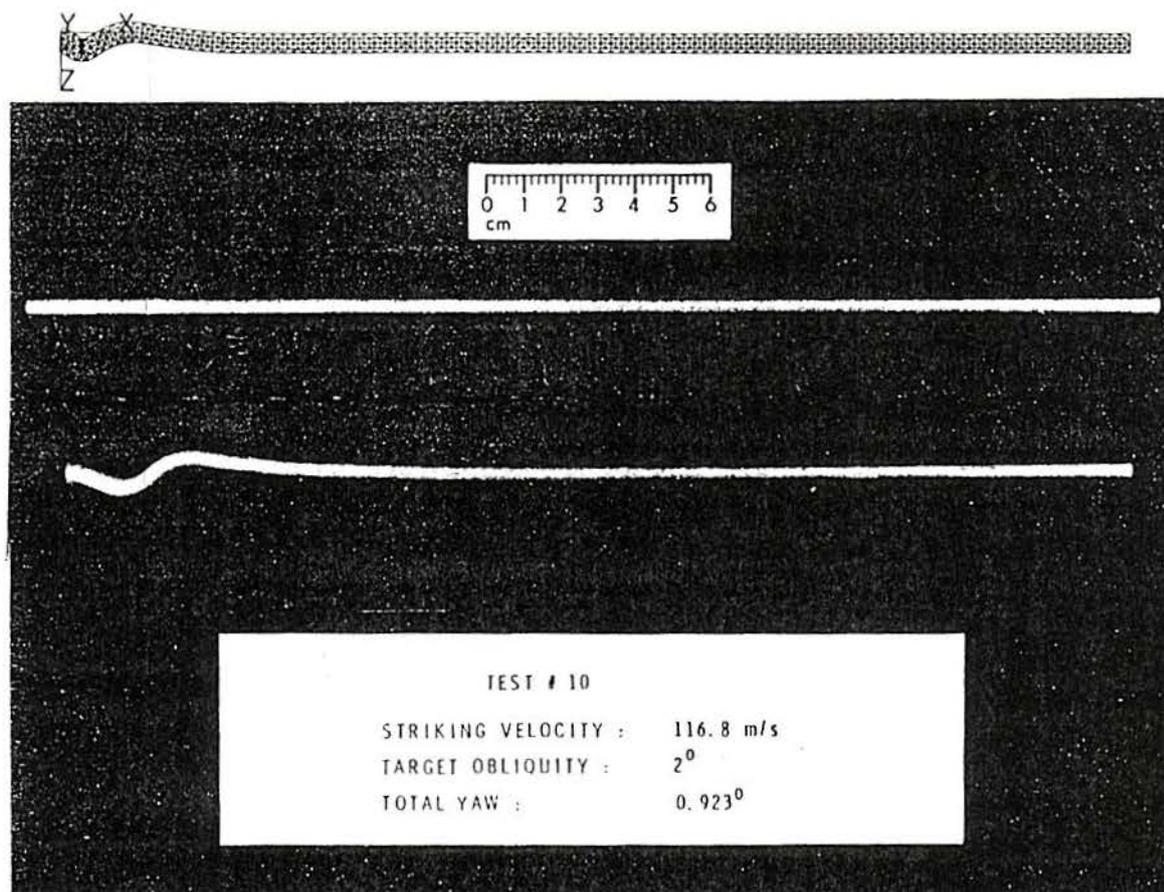


Figura 4.22: Comparação das deformadas dos resultados experimentais da barra ensaiada por Zukas (1982).

## 5 FRATURA EM CONCRETO

### 5.1 Mecânica linear da fratura

Observa-se, as vezes, uma grande discrepância entre a resistência teórica de um corpo cristalino e a sua resistência medida. Griffith (1920) sugeriu que a razão deste fato podia ser explicada pela presença de defeitos no material, tais como pequenas cavidades responsáveis pelo incremento local do estado tensional. Com efeito, na solução apresentada por Inglis (1913) do estado tensional de uma placa com um furo elíptico submetida a uma carga uniforme de tração, verifica-se um aumento significativo das tensões na borda do furo.

Também chamo a atenção de Griffith o sensível aumento na tensão de ruptura à medida que as dimensões do corpo de prova diminuíam. Este efeito, chamado de “Efeito de Escala”, foi explicado independentemente por Weibull (1938) considerando que, quando o volume do espécimen diminui, se reduz também a probabilidade da existência de um número maior de descontinuidades, o que se traduz num aumento da tensão última da peça analisada.

A intuição de Griffith permitiu-lhe vincular os métodos que estudam a propagação das fissuras dentro da microestrutura com um estudo macroscópico do sólido. Para isto introduz o critério energético, o qual evita a necessidade de analisar o estado tensional nas proximidades da ponta da fissura, estabelecendo uma condição necessária para a propagação da fissura na forma de uma igualdade entre a energia liberada pelo sistema e a energia necessária para criar as superfícies livres da trinca.

A análise da propagação instável de uma fissura considerando uma tensão infinita na ponta da trinca foi sugerida por Irwin (1957), que demonstra também a equivalência entre o método por ele proposto e a análise energética de Griffith (1920). À partir dos trabalhos de Griffith e de Irwin é que se estabelece a base da mecânica das fraturas, a qual permite relacionar as cargas máximas que podem atuar sobre uma estrutura com a localização e grandeza de fissuras pré-existentes na mesma.

Considerando, por exemplo, o caso de uma barra prismática submetida a um esforço de tração simples nos extremos; realizando uma análise de acordo com a mecânica do contínuo clássica -teoria da elasticidade-, o colapso da peça fica definido se a tensão limite é ultrapassada na região crítica da peça. Portanto, a condição de não colapso pode ser expressada da seguinte maneira:

$$\sigma_{max}(F, D) \leq \sigma_y(T, \dot{\sigma}, W_o, P_o) \quad (5.1)$$

sendo que a condição  $\sigma_{max} = \sigma_y$  caracteriza o estado limite da barra em estudo. Na equação (5.1)  $\sigma_{max}(F, D)$  é a tensão atuante, a qual depende do estado de carga sobre

a estrutura ( $F$ ) e da geometria da mesma ( $D$ ). Por outro lado  $\sigma_y$  é a tensão limite da estrutura, cujo valor determina-se experimentalmente em peças simples (corpos de prova). Em geral, considera-se  $\sigma_y$  uma propriedade do material, função das características do mesmo ( $P_o$ ) e de fatores como temperatura ( $T$ ), umidade ( $W_o$ ) e velocidade de aplicação da carga ( $\dot{\sigma}$ )

De forma análoga, dentro do campo de aplicação da mecânica da fratura, se introduz na barra prismática em estudo uma trinca perpendicular à direção da sollicitação de tração aplicada. Para que a fissura não propague de forma instável, deve-se verificar a condição:

$$Z(a, F, D) \leq Z_c(T, \sigma', B, P_o) \quad (5.2)$$

Sendo que a condição  $Z = Z_c$  caracteriza a ruptura da estrutura em estudo.

Neste caso  $Z$  é um índice que mede a proximidade da peça à condição de falla pela propagação instável da fissura. Em geral, este índice  $Z$  depende de um parâmetro geométrico que caracterize a fissura, como pode ser seu comprimento ( $a$ ), do estado tensional da peça nas proximidades da trinca se a mesma não existesse ( $F$ ), e finalmente das características geométricas da peça em estudo ( $D$ ).

Por outro lado  $Z_c$  é um fator que mede a resistência da peça à propagação, determinado experimentalmente, é considerado uma propriedade do material (ainda que isto é discutível). Este fator  $Z_c$  é função das características do material ( $P_o$ ), da temperatura ( $T$ ), da velocidade da carga ( $\dot{\sigma}$ ), e de um parâmetro associado ao tensor de tensões esférico nas proximidades da descontinuidade, que muitas vezes está relacionado à espessura da peça em estudo ( $B$ ).

Na mecânica linear de fraturas existem, em princípio, duas maneiras de encarar seu estudo, o que se traduz em formas diferentes na definição das funções  $Z$  e  $Z_c$ .

- Critério Energético de Griffith ou Critério global.
- Critério do fator de Intensidade de tensões de Irwin ou critério local.

#### Critério Global (Griffith).

No critério global a capacidade de carga do corpo é determinada avaliando a energia necessária para produzir a propagação instável de uma fissura preexistente. Para este fim, é necessário realizar um balanço energético em toda a estrutura em análise.

Para que uma trinca se propague, é preciso que exista um fluxo de energia até o extremo da mesma, onde a mesma é dissipada no processo de fratura. A taxa de energia

liberada pode ser expressa da seguinte forma:

$$G_F = \frac{1}{b} \left( -\frac{\partial \pi(a)}{\partial a} \right) \simeq \frac{1}{b} \left( -\frac{1}{\Delta a} (\pi(a + \frac{\Delta a}{2}) - \pi(a - \frac{\Delta a}{2})) \right) \quad (5.3)$$

onde ( $b$ ) denota a espessura da peça, ( $a$ ) é o comprimento da fissura, ( $W$ ) é o trabalho das cargas, ( $U(a)$ ) é a energia de deformação da estrutura e ( $\pi(a) = U(a) - W$ ) é a energia potencial da estrutura.

Na equação (5.3) também se apresenta uma aproximação que pode ser aplicada para calcular  $G_f$  pelo método dos elementos finitos (Owen & Fawkes, 1983) ou com o método dos elementos de contorno (Brebbia & Telles, 1980). De acordo com Griffith, a condição de propagação da fissura é  $G_f = G_{fc}$ , é similar à expressão (5.2) se  $Z = G_f$  e  $Z_c = G_{fc}$ .

**Crítério Local (Irwin).**

No critério local, a propagação instável da fissura é função do estado tensional nas proximidades do extremo da trinca. A introdução de uma fissura dentro de um corpo elástico linear produz uma concentração de tensões nas proximidades dos lábios da trinca. Isto é devido à perturbação das trajetórias das tensões principais máximas como se mostra na figura (5.1). O campo de tensões é singular no extremo da fissura, com todas

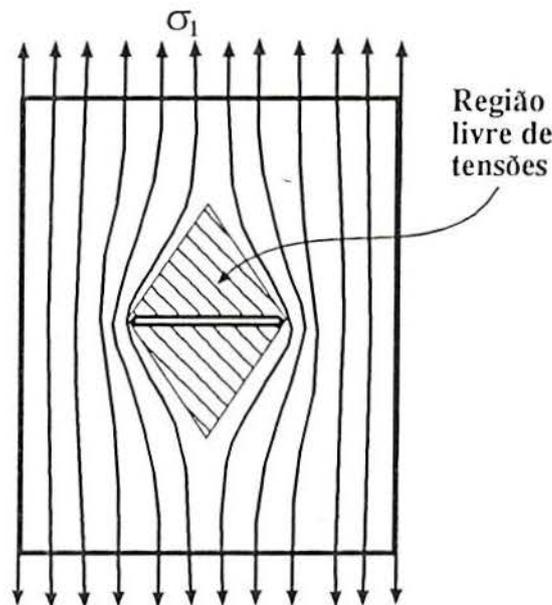


Figura 5.1: Trajetórias das tensões principais em um espécimen com uma trinca.

as componentes das tensões distintas de zero tendendo a infinito quando a distância radial  $r$ , com centro no extremo da fissura tende a zero (figura 5.2). É conveniente distinguir três modos elementares de fratura, modos *I*, *II* e *III* ilustrados na figura(5.3). Os modos *I* e *II* são simétricos e antisimétricos com respeito ao plano de falha, enquanto que o modo

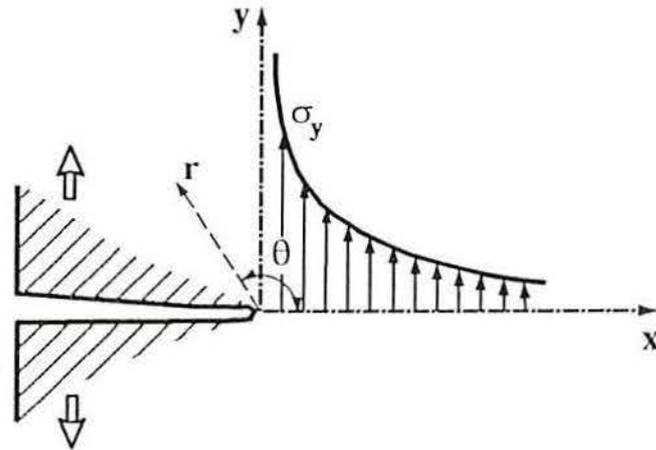


Figura 5.2: Distribuição de tensões nas proximidades da ponta da trinca.

III é tridimensional. A fratura, em geral, é produzida pela combinação linear destes três modos básicos.

Nas proximidades do extremo da fissura, as componentes das tensões  $\sigma_{ij}$  são as mesmas, independentemente da forma do corpo e do tipo de carga que atua sobre ele. Tais componentes, deduzidas por Irwin (1957), podem se expressar como segue:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^I &= K_I f_{ij}^I(\theta)(2\pi r)^{-1/2} \\ \sigma_{ij}^{II} &= K_{II} f_{ij}^{II}(\theta)(2\pi r)^{-1/2} \\ \sigma_{ij}^{III} &= K_{III} f_{ij}^{III}(\theta)(2\pi r)^{-1/2}\end{aligned}\quad (5.4)$$

Onde os índices  $I, II, III$  se referem aos modos elementares de fratura,  $\theta$  é o ângulo polar,  $K_I, K_{II}$  e  $K_{III}$  são parâmetros chamados de fatores de intensidade de tensões e as funções  $f_{ij} = f_{ij}(\theta)$  são independentes do tipo de carga e geometria do corpo. As expressões para  $f_{ij}$  podem ser encontradas em Kaninen & Popelar (1985).

Os fatores de intensidade de tensões são proporcionais à carga aplicada e geralmente podem ser expressos na forma:

$$K = \sigma\sqrt{\pi a}f(D_i)\quad (5.5)$$

Na qual  $f(D_i)$  é uma certa função da geometria da estrutura e da disposição das fissuras nela contidas, características que se representam em forma genérica como  $D_i$  com  $i = \alpha, \beta, \dots, etc.$

Para várias geometrias simples de corpos de prova, existem expressões para  $f(D_i)$  disponíveis na literatura, podendo-se citar Cartwright (1976). Para geometrias mais complexas, esta função, em geral, deve ser calculada por métodos numéricos tais como o método dos elementos finitos ou o método dos elementos de contorno. De acordo com a expressão (5.2) no critério local  $Z = K$  e  $Z_c = K_c$ .

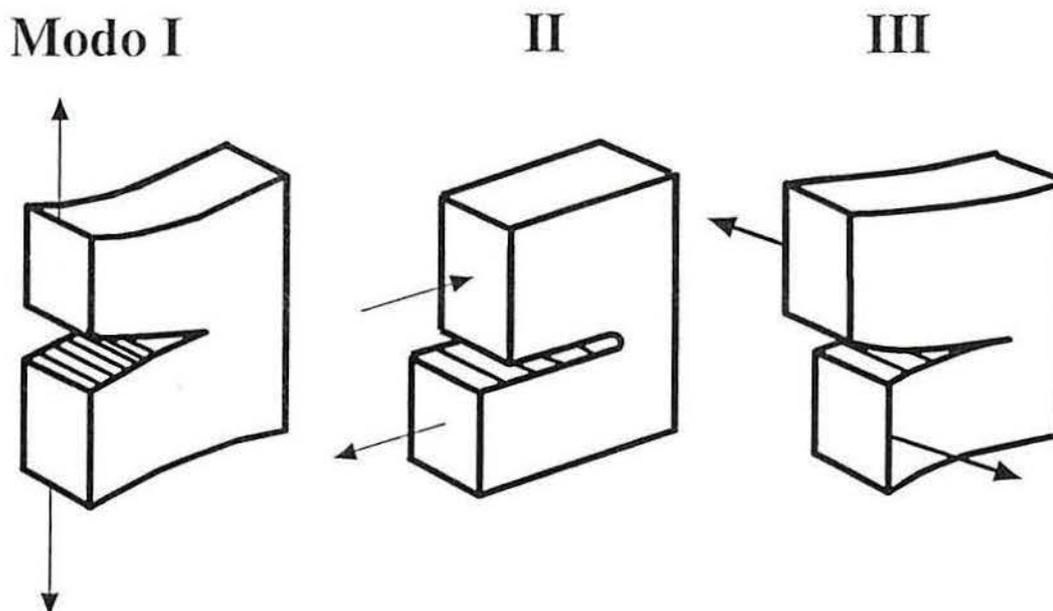


Figura 5.3: Modos I,II,II de fratura. da ponta da trinca.

Em Kaninen (1985) é apresentada uma recompilação das teorias não lineares de fratura, como também os critérios para definir quando pode-se utilizar a mecânica linear da fratura.

Para ilustrar a vantagem de trabalhar com o fator de intensidade de tensões se analisa, como exemplo, o caso de uma placa com um furo trincado submetida a uma tensão uniforme, como se mostra na figura (5.4.a). Quando se quer saber se a trinca propaga em forma instável ou não, pode-se expressar:

$$K_I = f(D_\alpha)\sigma\sqrt{a\pi} \quad (5.6)$$

Onde ( $f(D_\alpha)$ ) é uma função que depende da geometria da estrutura da figura ( $D_\alpha$ ), ( $\sigma$ ) representa o estado tensional sendo igual à tensão no extremo da fissura se a mesma não existisse e ( $a$ ) é o comprimento da trinca.

Para solucionar este problema deve-se conhecer  $K_{IC}$ , o fator de intensidade de tensões limite, que é uma propriedade do material. Para isso, deve-se ensaiar uma peça com uma geometria já padronizada (por exemplo "compact tension test" ou "three point bending test"), como a mostrada na figura (5.4.b), determinando-se o  $\sigma_{crit}$ , tensão na qual a peça rompe. Pode-se escrever, então:

$$K_{IC} = f(D_\beta)\sigma_{crit}\sqrt{a\pi}. \quad (5.7)$$

A partir da expressão anterior, é possível obter o valor de  $K_{IC}$ . Para ambas as estruturas os campos de tensões, deformações e deslocamentos são iguais para pontos homólogos situados nas proximidades da ponta da fissura, zonas achuradas nas figuras (5.4.a) e (5.4.b).

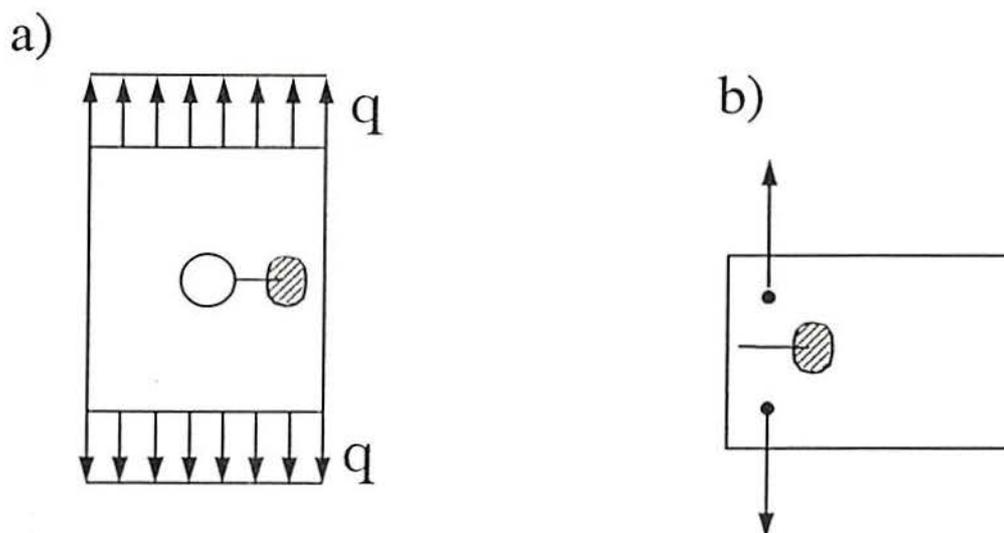


Figura 5.4: a) Placa com um furo trincado submetido a uma carga uniforme. b) 'compact tension test'.

Por isso, o fator de intensidade de tensões limite  $K_{IC}$  calculado para a peça padronizada (figura 5.4.b) também é válido para a peça em estudo (figura 5.4.a). Comparando o  $K_{IC}$  por meio do ensaio experimental com o  $K$  calculado com a equação (5.6) se está agora em condições de resolver o problema proposto.

É importante salientar que, baseados no critério de tensões limites, se a previsão de tensões infinitas na ponta da trinca da teoria da Elasticidade fosse real, as estruturas não poderiam em geral suportar quaisquer tensões de tração que lhe fossem impostas. É óbvio que isto não está de acordo com o observado na prática. Pode-se supor que na região onde ocorrem tensões infinitas, se produza, na verdade, uma plastificação local seguida de uma perda de coesão entre as duas partes em que o material se divide. Se a região de plastificação local é suficientemente pequena é possível aplicar a mecânica linear de fratura para determinar quando uma fissura instabiliza (fratura frágil). Quando a região de plastificação é maior, deve-se utilizar a Mecânica não linear de fratura (neste caso a fratura pode crescer em forma estável antes de instabilizar seu crescimento).

O concreto, assim como alguns materiais cerâmicos, também não pode ser estudado dentro do campo da mecânica linear de fraturas. Na seção seguinte será discutido o caso particular do concreto.

## 5.2 Mecânica da fratura em concreto

Com o objetivo de analisar algumas características da fratura no concreto se estuda, a seguir, a carga de colapso de uma placa com uma fissura central carregada em forma uniforme em suas bordas, a qual é descrita na figura (5.5.a). Segundo a mecânica linear de fratura a carga de colapso é determinada pela fórmula

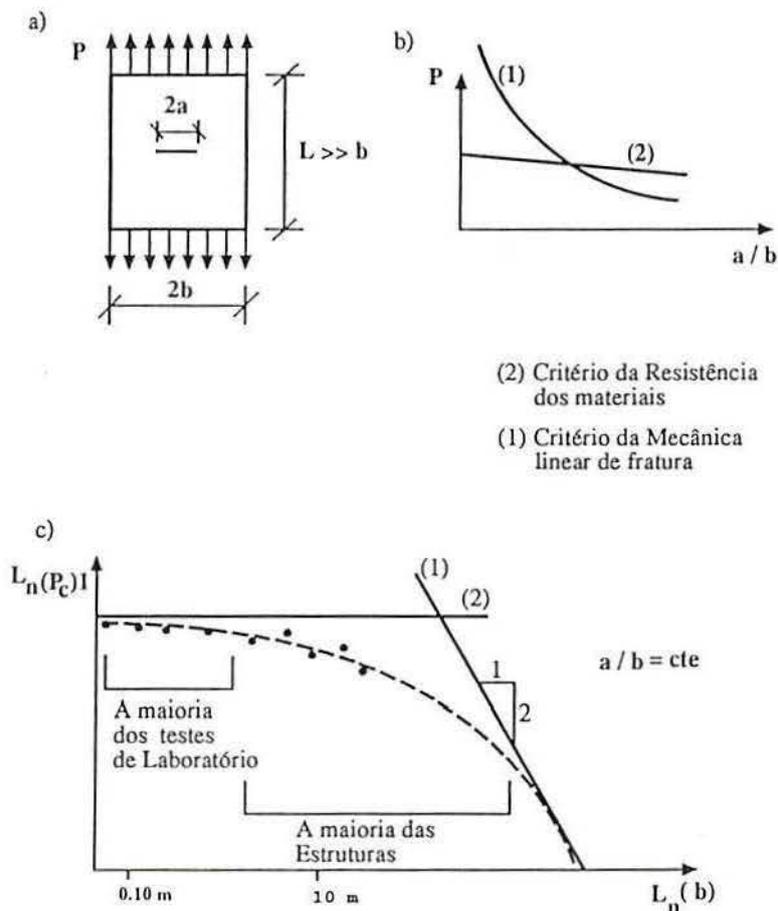


Figura 5.5: a) Placa com uma trinca central submetida a uma tensão uniforme. b) Curvas de resistência limite da placa vs. o comprimento relativo da fissura da placa  $a/b$ . c) Envolvente do logaritmo da resistência limite vs. o logaritmo do comprimento característico da placa  $b$ .

$$p_c = \frac{K_I}{\sqrt{bg\left(\frac{a}{b}\right)}} \quad (5.8)$$

onde  $p_c$  é a carga por unidade de comprimento que produz a propagação instável da fissura,  $K_I$  é o fator de intensidade de tensões e  $g\left(\frac{a}{b}\right)$  é uma função que depende das características geométricas do problema (uma forma diferente de apresentar a função  $f(D_i)$  apresentada na seção anterior). Utilizando a teoria da resistência dos materiais, a carga do colapso para a estrutura analisada pode ser expressa como segue:

$$p_c = f_y t \left(1 - \frac{a}{b}\right) \quad (5.9)$$

onde  $f_y$  é a tensão de escoamento do material e  $t$  sua espessura. Na figura (5.5.b) se graficam as expressões dadas em (5.8 e 5.9), em termos da carga de colapso da placa  $p_c$  vs. o comprimento relativo da fissura da mesma  $a/b$ , sendo possível, a partir das mesmas, determinar uma curva envolvente da resistência limite vs.  $a/b$ .

Esta envolvente, considerando a relação  $a/b$  constante, é apresentada na figura (5.5.c), em termos do logaritmo de  $p_c$  e do logaritmo de  $b$ .

Estudando dita envolvente do colapso se conclui que a placa pode alcançar a carga última por dois mecanismos de ruptura diferentes, dependendo das dimensões da mesma.

Para corpos de prova pequenos, o colapso acontece segundo a resistência dos materiais (ver eq. 5.8) enquanto que, para corpos de provas maiores, domina o comportamento a mecânica linear de fratura (ver eq. 5.9). Entretanto, ensaios sobre corpos de prova em concreto realizados por vários autores, entre eles Kaplan (1961) e Walsh (1972), mostram que a envolvente de colapso apresentada na figura (5.5.c) não representa o comportamento real das estruturas ensaiadas, salvo no caso de estruturas muito grandes ou muito pequenas.

Este efeito de escala, diferente do previsto pela mecânica linear de fratura, é um dos fatores que motivou o estudo de modelos de fratura adequados para a representação do comportamento do concreto. O desvio do comportamento do concreto da mecânica linear de fratura é devido, dentre outras razões, à grande área de microfissuras que se desenvolvem na cabeça da trinca. Tal área se caracteriza por ter um comportamento de abrandamento frente ao aumento das deformações "Strain-Softening". O efeito da microfissuração pode ser resumido como segue:

- Reduz o fluxo de energia que é liberada na ponta da trinca
- A área microfissurada produz um aumento da capacidade de absorção de energia da região fraturada.

Em geral se pode distinguir dois tipos de mecânica não linear de fratura:

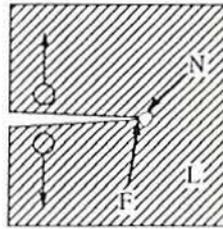
- Dúctil: Aplicável ao caso de metais.
- Não Dúctil: Aplicável ao caso de concreto assim como a alguns materiais cerâmicos.

Como é mostrado na figura (5.6), ao contrário da mecânica linear de fratura, a zona não linear é grande para ambos tipos de mecânica de fratura não linear.

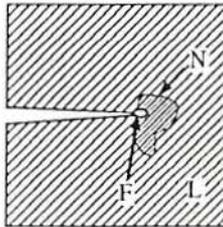
No caso dúctil, a maior parte da zona não linear (N), tem um comportamento plástico com encruamento ou plástico perfeito, sendo que a zona microfissurada (F), que tem um comportamento plástico com abrandamento, é muito menor (ver figura 5.6.b).

Em contraste ao caso não dúctil, a zona microfissurada (F) ocupa praticamente a totalidade da região não linear (ver figura 5.6.c). Verifica-se, assim, que o comportamento da zona de fratura é muito diferente para materiais dúcteis e não dúcteis. Por isso se considera importante salientar as seguintes características :

( a ) Fratura linear



( b ) Fratura dúctil



( c ) Fratura não dúctil

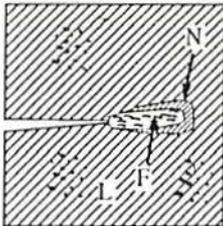


Figura 5.6: Fratura em diferentes materiais. (L): Zona Linear, (N): Zona não linear e (F): zona microfissurada.

- No aço, a fratura é precedida de um estrangulamento (estricção), isto deve-se ao fato que as deformações plásticas de corte são muito grandes na zona de fratura. No concreto, a fratura é precedida de microfissuras aproximadamente perpendiculares à direção das tensões; por isso, não se produzem deformações laterais devido a ausência de forças cortantes na região de interesse.
- Na figura (5.7) pode-se comparar duas relações  $(\sigma-\varepsilon)$  típicas para materiais dúcteis e não dúcteis. É uma característica dos últimos que a maior parte da energia entregue é dissipada quando ele tem deformação com abrandamento, frente ao comportamento diferente de um material dúctil.
- No caso do material dúctil não se pode considerar a energia específica de fratura como uma propriedade do material, pois ela depende do tensor de tensões esférico  $J_I$  nas proximidades da ponta da trinca. Se o valor de  $J_I$  é baixo, se tem um estado plano de tensões. A estrutura dissipa muita energia, plastificando antes de fraturar e produzindo-se uma deformação dúctil considerável. Se o valor de  $J_I$  é elevado, isso se traduz em um estado plano de deformações. Geralmente é o caso de estruturas com uma espessura considerável, onde a quantidade de deformação plástica que antecede à ruptura é menor.

A partir da análise anterior fica claro que, para modelar adequadamente a fratura em materiais como concreto, é necesario incluir nos modelos o comportamento da zona microfissurada. Isto pode ser feito, basicamente, de duas formas:

- Introduzindo uma relação tensão-deslocamento  $(\sigma-\delta)$  na zona localizada na frente da fratura contínua. É a forma de trabalho proposta por Hillerborg (1978).
- Introduzindo uma relação tensão-deformação  $(\sigma-\varepsilon)$  com abrandamento na região localizada na frente da fissura principal. Esta forma de trabalho foi apresentada inicialmente por Bazant (1976).

O modelo analítico proposto por Hillerborg (1978), denominado da “Fissura Fictícia”, representa toda a zona onde se desenvolve a fissura mediante uma fissura discreta fictícia. Esta fissura fictícia tem uma lei  $\sigma-\delta$  do tipo  $\sigma_y = f(\delta_c)$  de abrandamento, que rege seu comportamento mecânico como se ilustra na figura (5.8), onde  $\sigma_y$  é a tensão na direção normal à fissura e  $\delta_c$  é a abertura da trinca. A área sobre a curva  $f(\delta_c)$  representa a energia de fratura específica do material, isto é:

$$G_f = \int_0^{\infty} \sigma_y d(\delta_c). \quad (5.10)$$

A fissura começa a abrir-se quando a tensão em seu extremo alcança o valor limite  $f_t$ .

Se a forma da curva  $\sigma_y-\delta_c$  é fixada, as propriedades da fratura ficam caracterizadas mediante os parâmetros  $f_t$  e  $G_f$ .

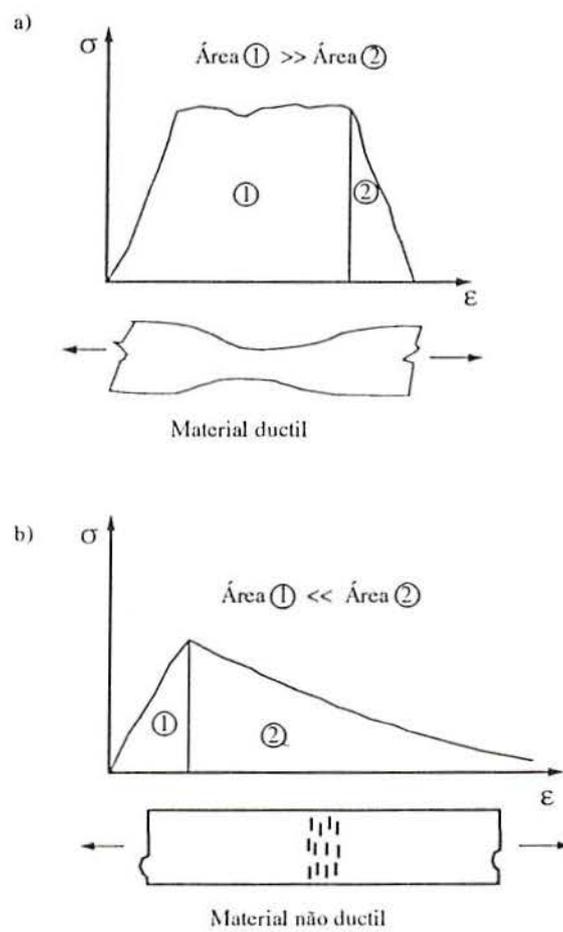


Figura 5.7: Diagramas  $\sigma$ - $\epsilon$  característicos do caso de de materiais dúctil (a) e não dúctil (b).

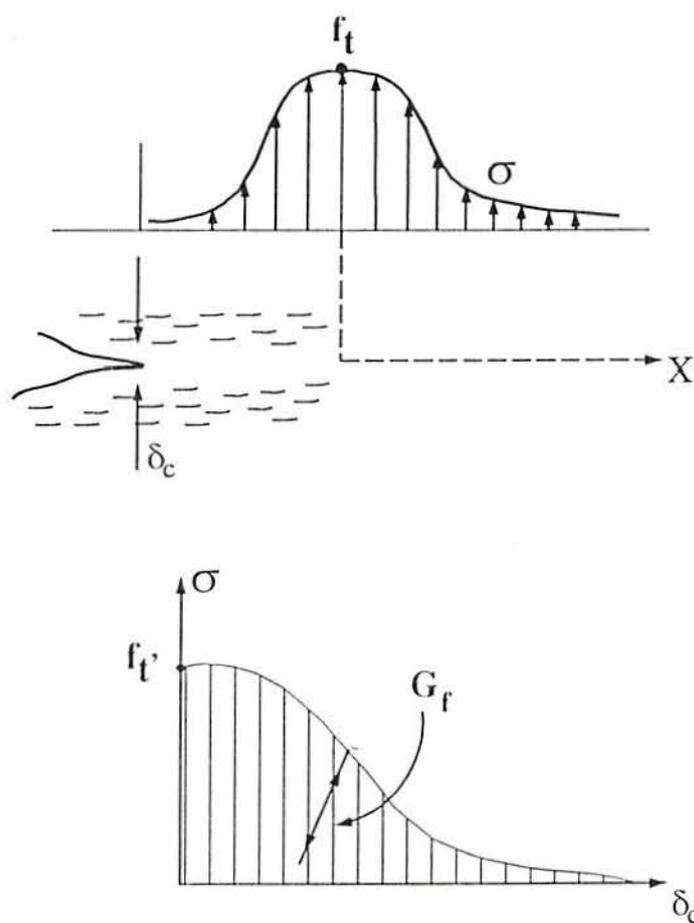


Figura 5.8: Distribuição das tensões nas proximidades da ponta da fissura para o modelo da fissura fictícia proposto por Hillerborg (1978).

Bazant (1976), adota o ponto de vista oposto, representando toda a zona onde se produz a fratura através de uma banda de material microfissurado de espessura  $\omega_c$ . Esta banda tem uma lei tensão-deformação definida do tipo  $\sigma_y = f(\varepsilon_f)$  como se mostra na figura (5.9). Neste caso a energia de fratura é dada pela seguinte expressão:

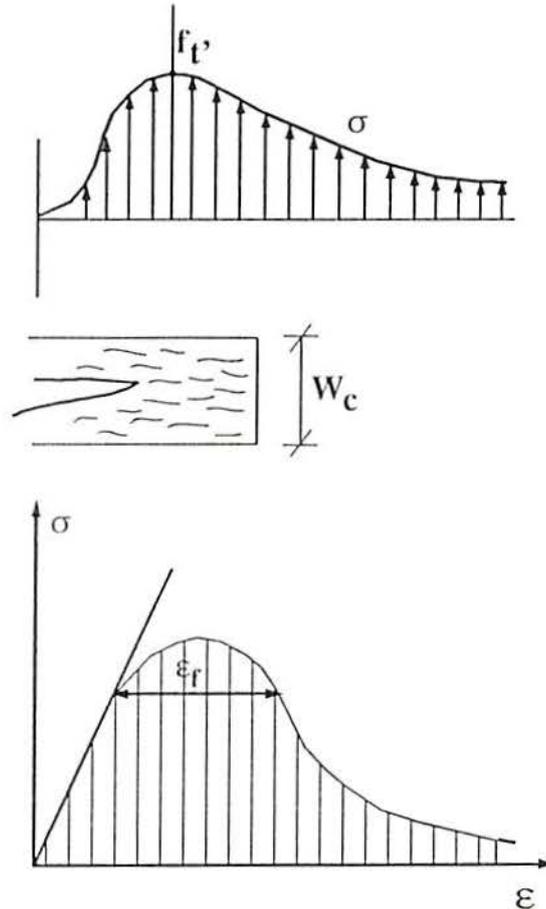


Figura 5.9: Distribuição das tensões nas proximidades da ponta da fissura para o modelo da banda fissurada proposto por Bazant (1976).

$$G_f = \omega_c \int_0^{\infty} \sigma_y d(\varepsilon_f) \quad (5.11)$$

Fixando-se a forma da relação  $(\sigma_y - \varepsilon_f)$  na zona microfissurada, o modelo da banda fissurada fica totalmente caracterizado pelos três parâmetros  $f_t, G_f$  e  $\omega_c$ .

Sobre os modelos da fissura fictícia e o modelo da banda fissurada, apresentados anteriormente, podem-se realizar as seguintes observações:

- Ambos modelos apresentados permitem explicar os resultados experimentais obtidos em ensaios sobre corpos de prova de concreto, que como se mencionou anteriormente, não obedecem às predições da mecânica linear de fraturas. (linha tracejada na figura(5.5)).

- Outros modelos derivados dos dois apresentados foram desenvolvidos com algumas variações, mas em todos os casos é característica a presença do “Strain Softening”, que se traduz num ramo descendente na relação constitutiva do material. Uma completa compilação sobre os modelos desenvolvidos pode-se encontrar nos trabalhos de Oliver (1990) e de Bazant (1992).
- A não homogeneidade do material é incluída no modelo incorporando-se características aleatórias nas propriedades mecânicas do material, nas propriedades geométricas ou em ambas. Uma recompilação bastante completa sobre este tipo de modelos pode-se encontrar no trabalho de Schlangen (1993).
- A forma da curva de “strain softening” tem influência considerável no comportamento do modelo. Wittman (1983) apresenta um estudo sobre este tema, sugerindo a necessidade de um ramo descendente bilinear ou quadrático. Rocha (1989) demonstrou que adotando um ramo descendente elementar linear, mas sendo a inclinação da curva de “Strain Softening” aleatória, não é preciso realizar maiores sofisticacões na forma da mesma para se obter bons resultados na simulação do comportamento mecânico do concreto.
- É necessário que os modelos propostos sejam objetivos com respeito à discretização da malha. Para isso, analisa-se o modelo discretizado de uma barra submetida à tração apresentada na figura (5.10.a), onde se coloca uma imperfeição no elemento que modela a fissura para induzir a localização da fratura no mesmo. Adota-se, primeiramente, como diagrama  $\sigma - \varepsilon$  o da figura (5.10.b), onde a deformação última,  $\varepsilon_u$ , permanece fixa e considerando-a como uma propriedade do material. Analisando o processo de deformação da barra como um todo, se terá uma curva  $(\sigma - \delta)$  como a mostrada na figura (5.10.c). Observa-se que a posição do ponto 2 de tal curva e, por conseguinte, da inclinação do ramo descendente, depende do comprimento do elemento que corresponde a região fissurada.

Se se refina a malha na região da fissura, diminuindo a largura  $l$  do correspondente elemento a valores progressivamente menores, os resultados variam sensivelmente e não se obtém a convergência para o valor correto que se espera de qualquer método numérico.

Na literatura técnica, este efeito se conhece como falta de objetividade da análise com respeito a discretização e é típica de qualquer análise que não considere o ramo de abrandamento por deformação dependente do tamanho da malha.

Introduzindo a energia de fratura como uma propriedade do material, de tal forma que se cumpra a seguinte condição:

$$G_f = l \int_0^{\varepsilon_u} \sigma d\varepsilon \quad (5.12)$$

a resposta  $\sigma - \delta$  da estrutura esquematizada na figura (5.10.e) não depende do tamanho da malha. Observa-se que a introdução da energia de fratura para

caracterizar o abrandamento por deformação permite obter resultados objetivos com respeito ao tamanho da malha. Neste caso, o ramo de abrandamento da equação constitutiva ( $\sigma - \varepsilon$ ) depende do tamanho do elemento.

- A largura da banda fissurada  $\omega_c$  do modelo proposto por Bazant foi depois de grande quantidade de ensaios determinada com valor  $\omega_c = 3d_{max}$  ( $d_{max}$  = tamanho max. do agregado) (Bazant & Oh, 1983). Também comprovou-se que os resultados não são muito sensíveis ao valor de  $\omega_c$ , no caso de fraturas isoladas, (aceitando-se variações para  $\omega_c$  entre  $6d_{max}$  e  $1d_{max}$ ). O valor de  $\omega_c$  torna-se importante quando acontecem fissuras distribuídas e paralelas, nesse caso o parâmetro garante uma separação mínima admissível das trincas principais.

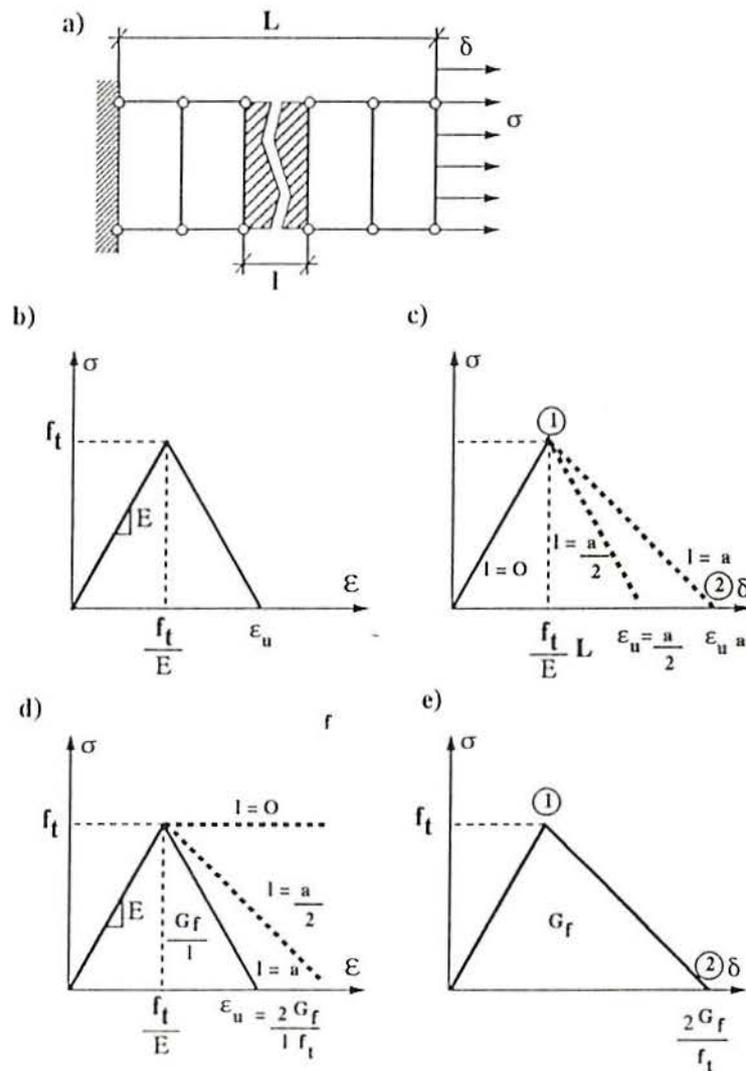


Figura 5.10: Objetividade dos modelos de fratura com "Strain Softening".

## 5.3 Critério de Ruptura empregado neste trabalho

### 5.3.1 Definição da relação constitutiva empregada

Utilizando o modelo dos elementos discretos, cuja base teórica é apresentada no capítulo 3, se trata a seguir da implementação do critério de ruptura utilizado, para o estudo de materiais não dúcteis e não homogêneos. Este critério é baseado nas considerações feitas na seção anterior e foi apresentado originalmente por Rocha (1989). A seguir são apresentadas as expressões fundamentais nas quais baseia-se a relação constitutiva empregada.

Pode-se estabelecer uma relação entre o fator de intensidade de tensões crítico,  $K_{IC}$ , e uma certa deformação crítica. Para isso parte-se da expressão:

$$K_{IC} = \frac{\sigma_c}{R_f} \quad (5.13)$$

onde  $\sigma_c$  é a tensão crítica,  $R_f$  é definido como um fator de falha [ $R_f = 1/(f(D_i)\sqrt{a})$ ],  $f(D_i)$  representa uma função que depende das características geométricas do modelo e  $(a)$  representa o comprimento da fissura.

O fator de falha,  $R_f$ , permite incorporar todas as características que dão origem ao processo de ruptura do elemento como um único parâmetro. A relação que vincula a energia específica de fratura,  $G_f$ , e o fator de intensidade de tensões,  $K_I$ , que foi apresentada por Irwin (1957) é:

$$\frac{K_I^2}{E'} = G_f \quad (5.14)$$

com  $E' = E$  no estado plano de tensões e  $E' = E(1 - \nu^2)$  no estado plano de deformações, sendo  $E =$  módulo de Young e  $\nu =$  módulo de Poisson.

Escrevendo a tensão crítica em função da deformação crítica,  $\varepsilon_p$ , isto é, deformação na qual se atinge a carga máxima como segue ( $\sigma_c = \varepsilon_p E'$ ), e combinando as expressões (5.13) e (5.14) tem-se, finalmente, que:

$$\varepsilon_p = \left[ \frac{G_f}{E'} \right]^{1/2} R_f. \quad (5.15)$$

A partir das definições feitas, pode-se adotar a relação constitutiva elementar bilinear que se ilustra na figura (5.11). Nota-se que para compressão o material é considerado elástico linear, sendo que a ruptura do modelo global, quando comprimido, deverá ocorrer por tração indireta (efeito Poisson).

É possível introduzir melhorias sobre o comportamento à compressão do modelo em função de pesquisas realizadas por vários autores; entre eles, cabe destacar os trabalhos de Vonk (1993) e de Borst & Feenstra (1993). Também pode ser questionada a forma

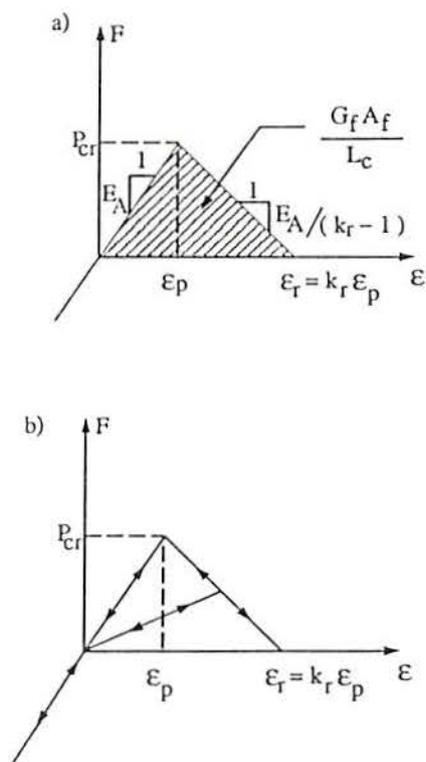


Figura 5.11: Relação constitutiva elementar implementada por Rocha (1989)

pela qual se realiza a descarga. Linde (1993) propõe uma lei mais sofisticada, baseada nos ensaios realizados por Curbach (1987), que foi testada em casos de excitações impulsivas sem obter vantagens nos resultados obtidos. Presumivelmente, em problemas onde o comportamento cíclico da excitação seja dominante, cargas sísmicas por exemplo, sua utilização trará vantagens. Tal relação  $\sigma - \varepsilon$  está apresentada na figura (5.12). Na relação constitutiva elementar proposta na figura (5.11), os parâmetros têm os seguintes significados :

- $F$  é a força axial resultante da barra, função da deformação  $\varepsilon$ , sendo a carga crítica  $P_{cr}$  associada à deformação crítica  $\varepsilon_p$ .
- $E_A$  é a rigidez axial das barras normais e diagonais, obtidas a partir das constantes do material, como se indicou no capítulo 3.
- $L_c$  é o comprimento dos elementos normais.
- $A_f$  é a área de influência da barra, ou seja a área transversal formada com a sua ruptura, podendo ser expressada na seguinte forma  $A_f = c_A L_c^2$  onde  $c_A$  é um coeficiente geométrico próprio do modelo cúbico igual a  $c_A = 0.1385$ .
- $G_f$  é a energia consumida por unidade de área de fratura formada (energia específica de fratura)

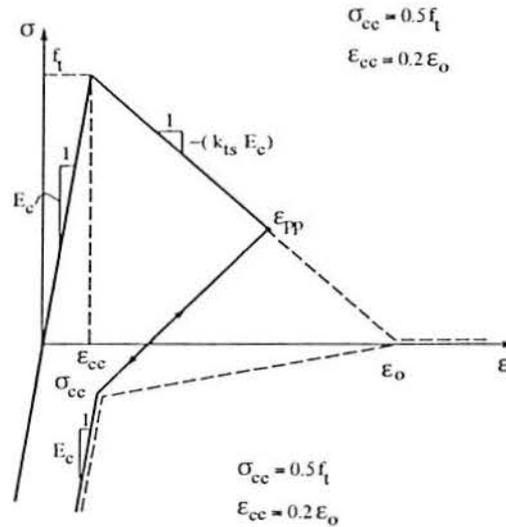


Figura 5.12: Lei constitutiva para concreto proposta por Linde (1993)

- $K_r$  é um parâmetro chamado de ductibilidade, que permite calcular a deformação  $\varepsilon_r$  para a qual a barra não transmite mais esforços de tração ( $\varepsilon_r = k_r \cdot \varepsilon_p$ ), sendo que:

$$k_r = \frac{2c_A}{\lambda \cdot R_f \cdot L_c} \quad (5.16)$$

Na equação (5.16),  $\lambda$  é um parâmetro que depende se o elemento é normal ou diagonal e permite relacionar  $E_A$  e  $E'$  como segue  $[E_A = \lambda E' L_c^2]$ . As formas de  $\lambda$  podem ser encontradas no capítulo 3.

### 5.3.2 Observações sobre a implementação do critério de ruptura utilizado

- É importante salientar que  $\varepsilon_p$ ,  $E$ ,  $P_{cr}$ ,  $R_f$  e  $G_f$  são consideradas propriedades exclusivas do material, enquanto  $A_f$  e  $L_c$  são propriedades exclusivas do modelo, já  $k_r$  e  $E_A$  dependem tanto do modelo como do material.
- De forma análoga ao demonstrado na secção anterior, pode-se provar que o critério constitutivo utilizado é objetivo frente à discretização do modelo.
- Uma condicionante do modelo na definição de  $L_c$  é a seguinte:

Quando um elemento rompe, toda a energia de deformação acumulada nele é consumida no processo de fratura. Isto não é o que acontece na realidade, pois parte da energia de deformação é preservada sob as formas de energia cinética (vibrações induzidas) e energia elástica, nas duas partes em que o elemento se divide. Como não é possível levar em conta esta subdivisão para um elemento isolado (pois as massas estão concentradas nos nós, e não ao longo do seu

comprimento), isto resulta numa restrição em termos de um valor máximo para o comprimento  $L_c$ .

- Um estudo paramétrico dos diversos parâmetros mencionados é apresentada por Rocha (1989).

### 5.3.3 Inclusão da não homogeneidade do material através da aleatorização das propriedades

No estudo de materiais como concreto, é necessário incluir a não homogeneidade do material no modelo. Isto pode ser feito introduzindo aleatoriedade na definição das propriedades geométricas, nas propriedades mecânicas ou em ambas. Uma revisão completa sobre várias formas de incorporar a não homogeneidade pode ser encontrada no trabalho de Schlangen (1993).

No modelo apresentado originalmente por Rocha (1989), incorpora-se a aleatorização definindo a energia específica de fratura  $G_f$  como um campo aleatório. Posto que  $G_f$  define indiretamente a resistência local à propagação da fratura, isto implica, naturalmente, numa resistência variável através do volume, característica que se deseja conferir ao modelo. Isto fica evidente ao observar a equação (5.15), onde  $\varepsilon_p$  é função de  $G_f$ .

Baseando-se nas hipóteses feitas anteriormente, pode-se introduzir o aspecto aleatório no modelo através de uma função de distribuição de probabilidades para  $G_f$ .

A definição das características do campo aleatório associado a  $G_f$  está vinculada a um comprimento de correlação que, para simplificar a implementação numérica, foi adotado igual ao comprimento do módulo básico crítico  $L_c$ . Isto é uma limitação na implementação numérica, pois vincula a discretização às características do material empregado. No caso do concreto, o comprimento é adotado aproximadamente igual ao dobro do tamanho máximo do agregado. É possível, mediante uma modificação do método de simulação, independizar o comprimento de correlação do comprimento de discretização do modelo, mas isto não foi considerado neste trabalho.

No modelo atual, o campo aleatório  $G_f$  é gerado admitindo uma distribuição de probabilidade Weibull com dois parâmetros, dada pela expressão:

$$f_w(G_f) = 1 - e^{-(G_f/\beta)^\gamma} \quad (5.17)$$

onde  $\beta$  e  $\gamma$  são, respectivamente, os parâmetros de escala e de forma. Estes parâmetros podem ser expressos em termos do valor esperado,  $E_{[G_f]}$ , e do coeficiente de variação,  $CVA_{[G_f]}$ , que são os parâmetros de entrada no programa computacional. Maiores informações sobre a aleatorização podem ser obtidas no trabalho de Rocha (1989).

## 5.4 Exemplo ilustrativo

### 5.4.1 Considerações gerais

O modelo dos elementos discretos descritos na seção anterior foi testado na simulação de peças de concreto submetidas a solicitações de tração com sucesso por Rocha (1989). Anteriormente Zorn & Riera (1982) tinham realizado alguns testes com o objetivo de modelar também o comportamento do concreto à compressão simples. Levando em conta que uma placa de concreto submetida a um estado biaxial de tensões constitui o caso mais simple de estrutura laminar, foram realizadas alguns testes neste sentido para verificar o desempenho do modelo teórico submetido a solicitações membranais.

Para realizar esta comprovação, foram utilizados os resultados obtidos por Kupfer (1973) sobre placas submetidas a esforços biaxiais. Kupfer ensaiou placas de concreto de 5x20x20 cm aplicando cargas a baixa velocidade. As propriedades mecânicas, de interesse para realizar a comparação, são resumidas na tabela (5.1).

$f_{ct}$	1.4E6 $N/m^2$
$f_{cu}$	19.1 $N/m^2$
$E_c$	2.958E10 $N/m^2$
$\nu$	0.19
$\rho$	2400 $kg/m^3$
$d_{max}$	15 $mm$

Tabela 5.1: Propriedades mecânicas que caracterizam um dos tipos de concreto utilizados nos ensaios de Kupfer (1973)

A partir dos resultados obtidos, Kupfer propôs expressões empíricas para representar o comportamento das placas testadas no espaço das tensões principais  $\sigma_1 - \sigma_2$ . É importante salientar que, durante os ensaios, se teve cuidado especial para não induzir tensões cortantes nas faces das placas ao aplicar as cargas.

### 5.4.2 Características do modelo teórico

A partir dos dados apresentados na tabela (5.1), se inferiu a informação necessária para criar o modelo teórico. Tal informação é apresentada na tabela (5.2) onde:

- O valor esperado da energia específica de fratura,  $E [G_f]$ , é obtido a partir das expressões fornecidas pelo FIP-CEB que são resumidas no anexo A-1.
- O valor de  $L_c$  adotado é igual ao dobro do tamanho máximo do agregado  $d_{max}$ .
- Para  $CVA [G_f]$ ,  $D_f$  e  $R_f$ , foram arbitrados valores plausíveis, os quais precisam verificação experimental.

- Foi considerado que o módulo de Young do concreto é também um campo aleatório com distribuição Weibull com um valor esperado igual ao apresentado como propriedade do material na tabela (5.1) e um coeficiente de variação  $CVA[E_c] = 25\%$ . A deformação crítica,  $\varepsilon_p$ , é, como foi explicado na secção anterior, um campo aleatório que deriva do valor de  $G_f$ . Os campos aleatórios de  $\varepsilon_p$  e  $E_c$  foram considerados perfeitamente correlacionados.

$L_c$	30 mm
$E[G_f]$	47 N/m
$CVA[G_f]$	50 %
$R_{fc}$	1.236 $m^{(-1/2)}$
$E[E_c]$	2.958E10 N/m <sup>2</sup>
$CVA[E_c]$	25 %
$\varepsilon_p$	5E-5

Tabela 5.2: Parâmetros adicionais necessários para definir o modelo teórico das placas de Kupfer (1973)

A excitação é aplicada em termos de deslocamentos prescritos como se ilustra na figura (5.13), tendo cuidado de não introduzir distorções nas faces da placa.

As dimensões do modelo teórico são (21x21x12 cm), sendo mais espesso que as placas ensaiadas por Kupfer (1973). A razões para isto são as seguintes limitações do algoritmo: Por um lado, o comprimento do módulo elementar  $L_c$  é função do tamanho máximo do agregado, ou seja, propriedade do concreto; por outro lado, se comprovou que a peça submetida a compressão nas duas direções deve ter vários módulos na direção da espessura (mínimo três módulos cúbicos). Se esta condição não se cumprir o modelo fica enfraquecido nessa direção e, quando a forma de ruptura é por tração indireta na direção da espessura, os resultados numéricos não modelam corretamente o que acontece na realidade.

Os deslocamentos prescritos foram aplicados o suficientemente devagar para que a energia cinética gerada no processo fosse desprezível frente aos outros tipos de energia e suficientemente rápida para que o processo não se tornasse excessivamente caro computacionalmente, já que, o algoritmo se baseia na integração explícita no tempo das equações de movimento do modelo proposto.

### 5.4.3 Resultados obtidos

Foram realizadas seis combinações de relações de deslocamentos diferentes, a saber:  $(\delta_1 = 0, \delta_2 = 1)$ ,  $(\delta_1 = 1, \delta_2 = 1)$ ,  $(\delta_1 = 0, \delta_2 = -1)$ ,  $(\delta_1 = -0.25, \delta_2 = -1)$ ,  $(\delta_1 = -0.5, \delta_2 = -1)$ ,  $(\delta_1 = -1, \delta_2 = -1)$ .

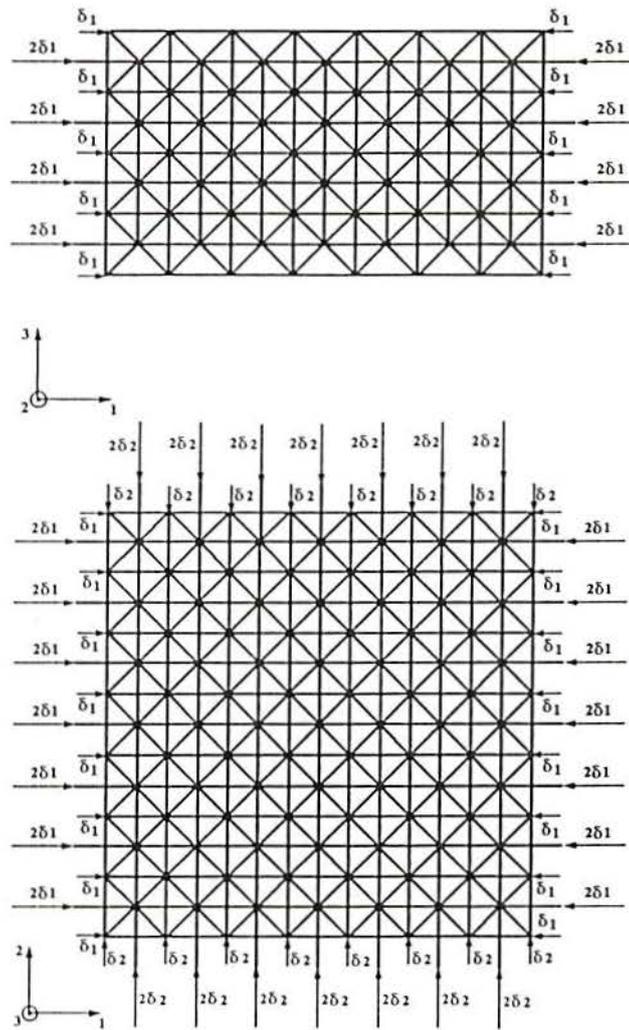


Figura 5.13: Modelo teórico de uma placa submetida a deslocamentos prescritos para induzir nela um estado tensional biaxial.

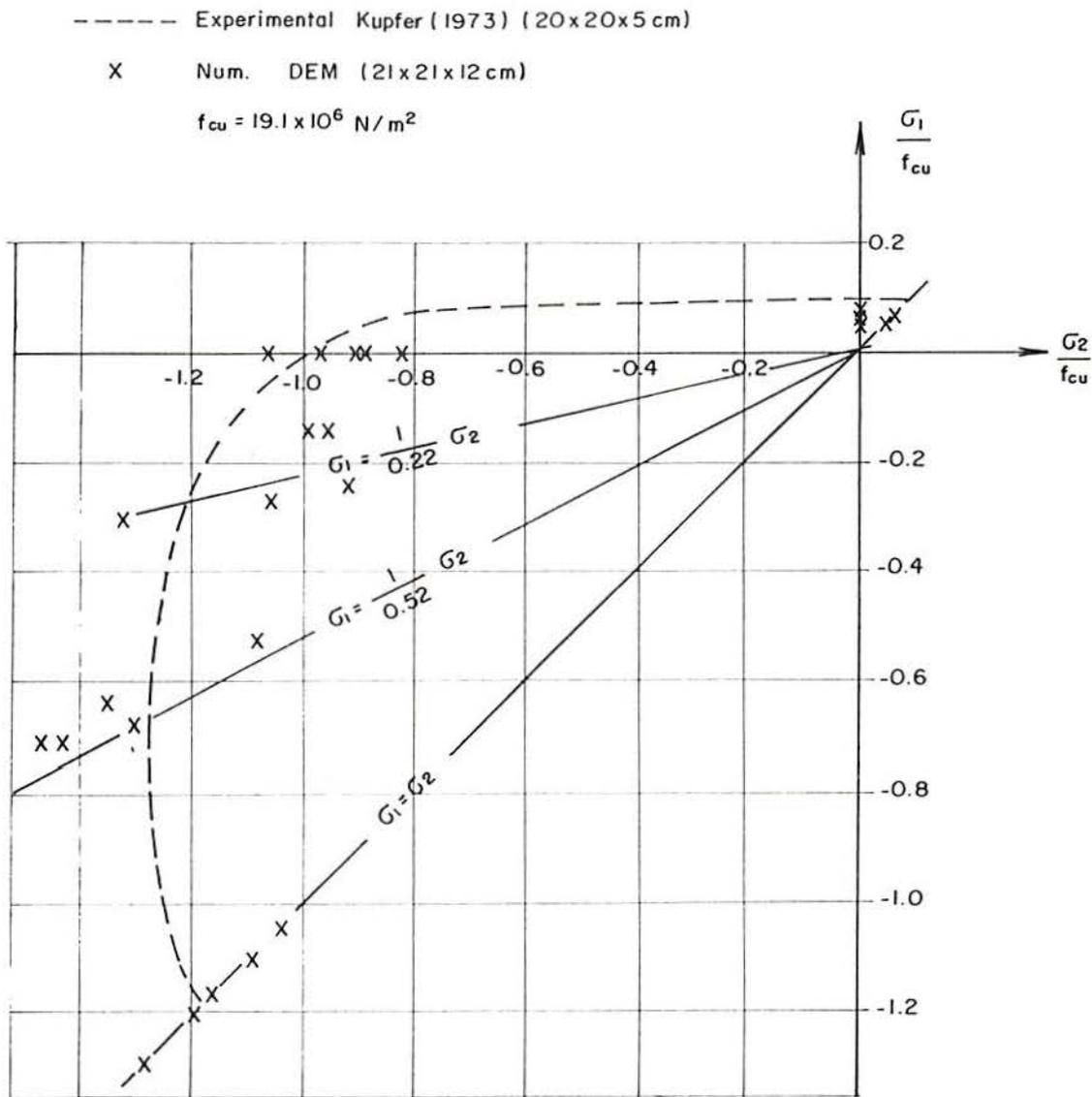


Figura 5.14: Comparação entre os resultados numéricos e os experimentais obtidos por Kupfer (1973) sobre placas de concreto submetidas à tensões biaxiais

Para cada caso foram realizadas 5 simulações, os resultados obtidos foram plotados na figura (5.14) onde foram apresentadas também as curvas propostas por Kupfer (1973).

Pode-se observar uma boa correlação dos resultados, sendo, sem dúvida, possível melhorar os resultados numéricos obtidos modificando o valor dos parâmetros. Finalmente, na figura (5.15) se apresenta uma comparação entre os modos de ruptura encontrados nos ensaios experimentais e os obtidos por simulação numérica. A partir do exemplo apresentado nesta seção é possível encarar com mais confiança a aplicação deste modelo teórico a casos mais complexos, para os quais não existe ainda evidência experimental.

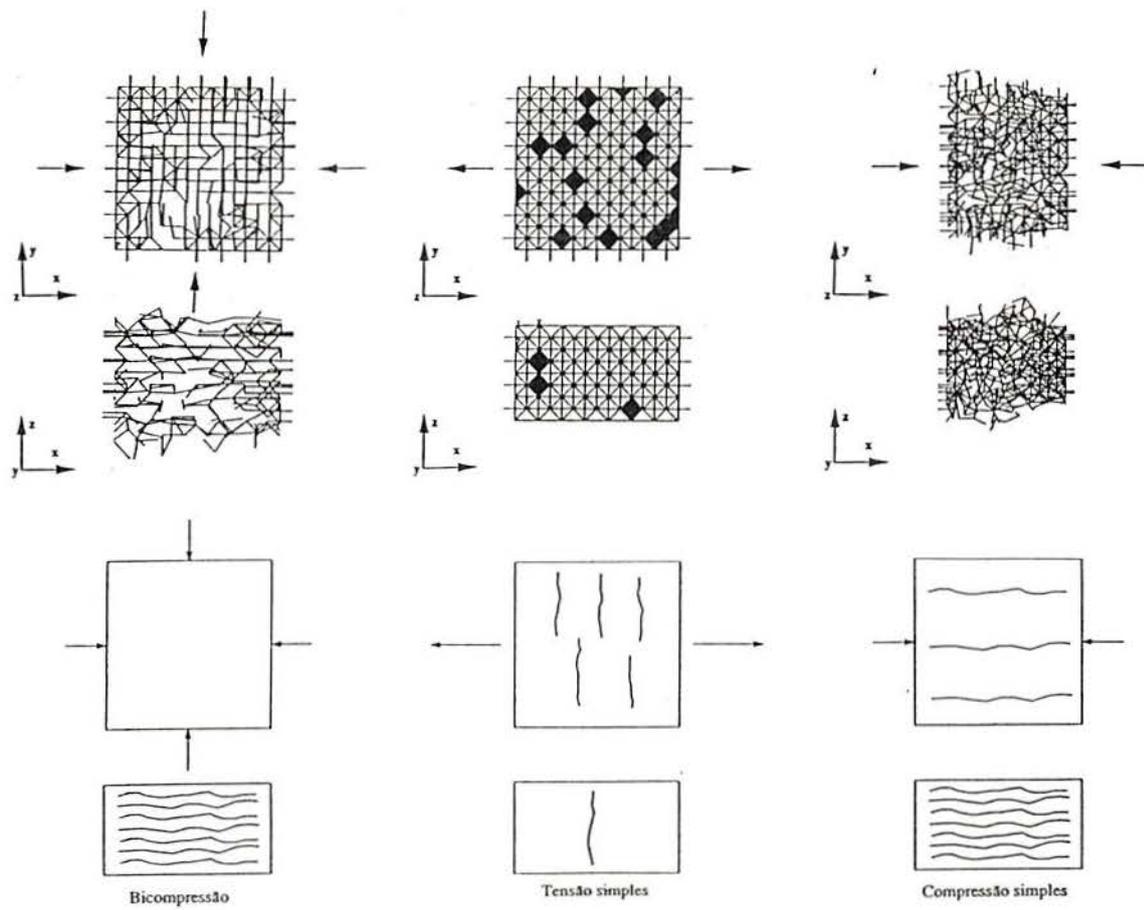


Figura 5.15: Comparação entre os modos de ruptura experimentais da placa ensaiados por Kupfer (1973)

## 6 APLICAÇÃO DO DEM A CONCRETO ARMADO

### 6.1 Introdução

A determinação da resposta até a carga limite de estruturas laminares de concreto armado sujeitas à ação de cargas impulsivas tem sido avaliada nos últimos anos por vários autores utilizando o método das diferenças finitas, dos elementos finitos e outras formulações com resultados em geral satisfatórios. Como referências podem ser citados o livro de Owen (1982) e o trabalho de Heinsbroehk & Blaau Wendraad (1989). No entanto, na avaliação do comportamento da estrutura após ela ter atingido sua carga limite, obtiveram-se resultados teóricos pouco precisos. Isto se deve principalmente a que os modelos até aqui propostos não descrevem adequadamente o comportamento da estrutura já danificada.

Estudos preliminares em relação com fratura do concreto, com o objetivo antes citado em mente, foram realizados no LDEC/CPGEC por Rocha (1989) e Riera (1989). O modelo empregado discutido no capítulo 3, é baseado na representação discreta de um sólido ortotrópico fundamentado nos resultados apresentados por Nayfeh & Hefzy (1978).

O mesmo modelo foi empregado por Rocha, Riera & Krutzik (1991) na análise de uma viga e de uma placa de concreto armado submetidas a cargas impulsivas. A representação do comportamento dos elementos de concreto segue uma lei inspirada no modelo proposto por Hilleborg (1978).

Como já foi indicado em Rocha (1989), si se modela a não homogeneidade do concreto considerando como um campo aleatório a área fechada pela curva tensão ( $\sigma$ ) deformação ( $\epsilon$ ) elementar, tal área é proporcional à energia de fratura do elemento, para obter bons resultados é suficiente com que tal relação  $\sigma - \epsilon$  seja bilinear.

As barras de aço foram consideradas com um comportamento elastoplástico perfeito. Uma energia de fratura muito maior que a medida em concreto sem armadura (aproximadamente 20 vezes maior) foi necessária nos elementos de concreto para reproduzir os resultados experimentais. Este fato já foi reportado na literatura técnica, indicando que a simples superposição das contribuições de aço e concreto não é correta, pois existe uma interação entre ambos materiais que deve ser levada em conta (Linde 1993).

Várias modificações foram introduzidas no modelo, as quais resultaram numa significativa melhora na predição da resposta da estrutura. As mais importantes características implementadas no modelo são as seguintes:

a) A energia de fratura dos elementos do concreto que cercam as barras de armadura são modificadas para levar em conta que mais de uma fissura será desenvolvida dentro de cada elemento devido à influência das barras de aço.

b) As barras da armadura são modeladas considerando a influência do concreto fraturado aderido à elas no comportamento em descarga do conjunto.

## 6.2 Fratura em estruturas de concreto armado

O modelo teórico apresentado por Rocha, Riera & Krutzik (1991) poderia corresponder fisicamente às barras de armadura sem aderência conectadas com o concreto nos pontos nodais. Os resultados obtidos levando em conta tal simplificação foram considerados insatisfatórios, principalmente porque para obter resultados coerentes com os registros experimentais disponíveis é necessário aumentar a energia específica de fratura do concreto simples a valores muito maiores que os observados em corpos de prova de concreto sem armadura.

Para tentar solucionar este problema implementou-se inicialmente o modelo proposto por Gupta & Maestrini (1990) introduzindo a noção de elemento uniaxial de um material composto aço-concreto, localizado no modelo na mesma posição por onde passa a armadura. Verificou-se, porém, que a barra de armadura altera as propriedades do concreto nas proximidades da barra em todas as direções. Por essa razão se decidiu introduzir o conceito de função de ductilização  $f_{duc}$ , para todos os elementos uniaxiais de concreto. Como se indica na figura (6.1), esta função modifica o critério constitutivo, incrementando a energia de fratura disponível em cada elemento num fator  $\xi$ , que de acordo com os estudos realizados por Linde (1993), está na faixa de 10 a 20. O valor de  $f_{duc}$  para um determinado elemento de concreto depende de sua orientação e da proximidade às barras de armadura. Tais fatores são  $\alpha_r$  e  $L_r/L_c$  respectivamente.

As barras de armadura alteram as propriedades do concreto até uma distância da ordem de  $3L_c$  sendo  $L_c$  o comprimento de correlação adotado, igual ao dobro do tamanho máximo do agregado.

O efeito de ductilização é considerado independente do diâmetro das barras de armadura e da configuração superficial desta, fatores que deverão ser incorporados num estágio posterior.

Resultados experimentais de uma viga de concreto armado submetida a uma carga impulsiva ensaiada por Brandes (1981) foram usados para calibrar o critério antes mencionado. As características geométricas e as propriedades mecânicas da viga junto com uma apresentação mais completa dos resultados experimentais e numéricos obtidos são apresentados na secção 6.6.2.

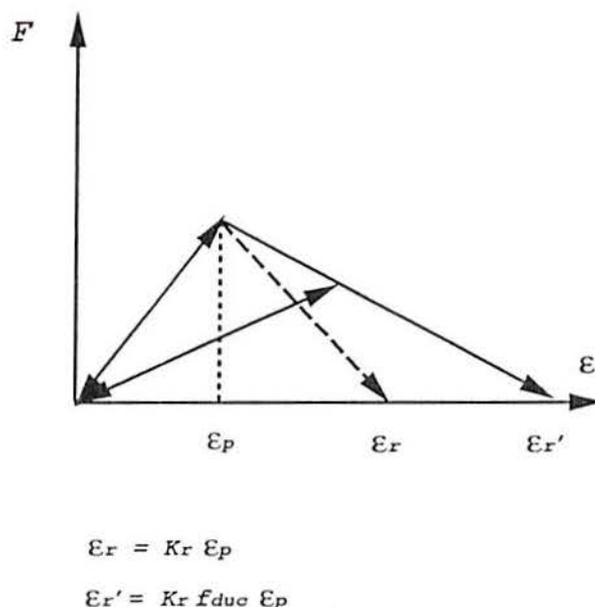


Figura 6.1: Lei constitutiva dos elementos de concreto modificada pela presença de armadura.

Na figura (6.2) se apresentam os resultados de estudos paramétricos sobre  $\xi$  e  $L_r/L_c$ , podendo-se observar uma região de pares de valores possíveis para ambos parâmetros.

A orientação das barras de concreto frente as barras de aço é levada em conta através do fator  $\alpha_r$ , sendo que  $\alpha_r = \cos \beta$ , sendo  $\beta$  o ângulo formado pela barra de aço e o elemento de concreto dentro do seu domínio de influência.

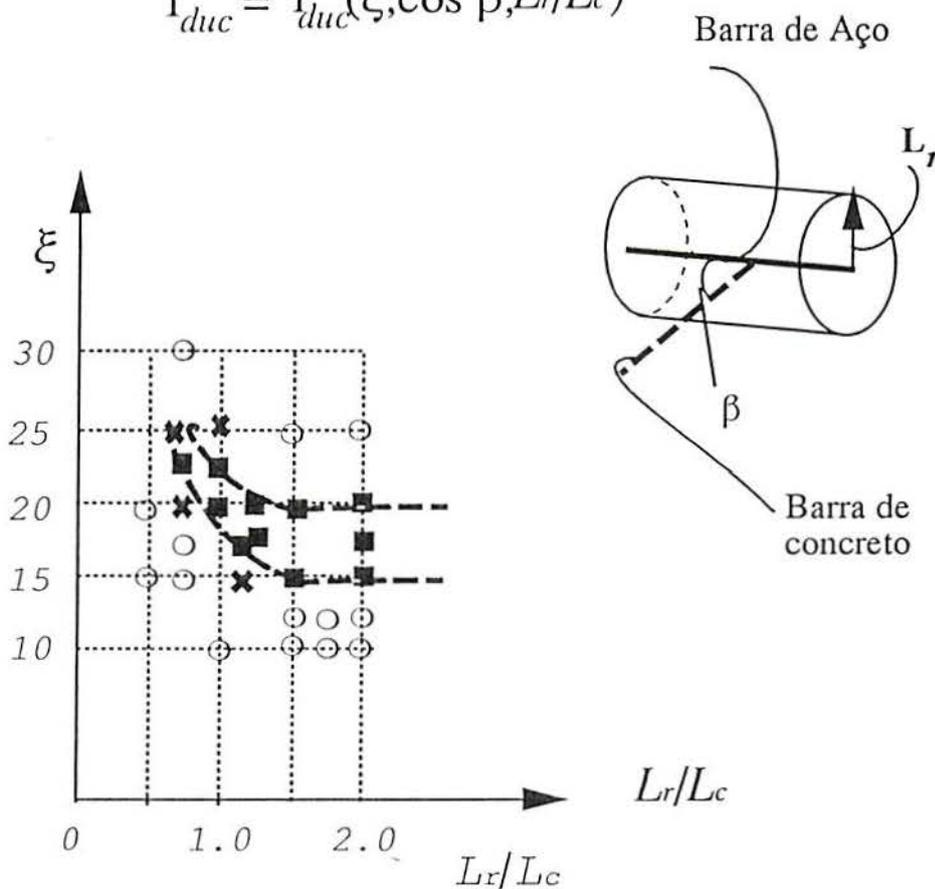
## 6.3 Comportamento do modelo na representação das estruturas depois do pico de carga

### 6.3.1 Considerações gerais

Por meio de uma extensa experimentação numérica foi observado que para obter uma resposta estrutural compatível com os registros experimentais disponíveis, depois que o pico da carga é atingido é necessário admitir que o ramo de descarga do elemento que representa a armadura dentro do concreto (elemento STCR) deve ter uma inclinação menor que a do ramo de carga inicial como se mostra na figura (6.3), correspondente a um material elastoplástico perfeito.

Esta modificação pode ser interpretada da seguinte maneira: depois que acontece a fissuração do concreto e o escoamento do aço, uma certa quantidade de energia de

$$f_{duc} = f_{duc}(\xi, \cos \beta, L_r/L_c)$$



■ - Todas as simulações apresentam uma correlação satisfatória com os resultados experimentais.

× - Algumas simulações apresentam uma correlação satisfatória, outras apresentam uma correlação muito pobre.

○ - Todas as simulações apresentam uma predição muito pobre da resposta experimental.

Figura 6.2: Estudos paramétricos das variáveis  $\xi$  e  $L_r/L_c$ .

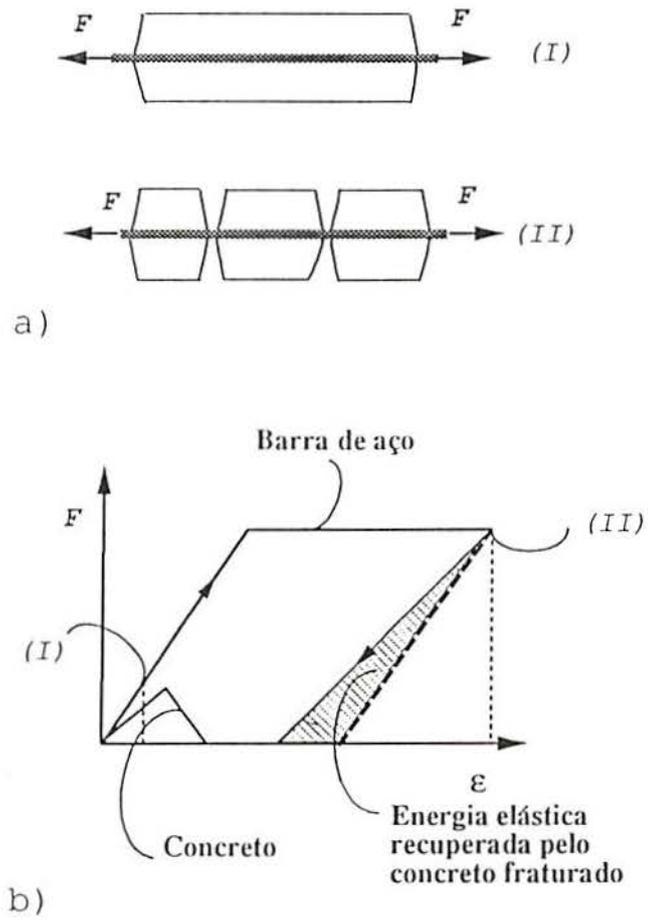


Figura 6.3: a) Especimen de concreto armado antes e depois da fratura. b) A lei constitutiva do aço e do concreto adotada no modelo dos elementos discretos (DEM).

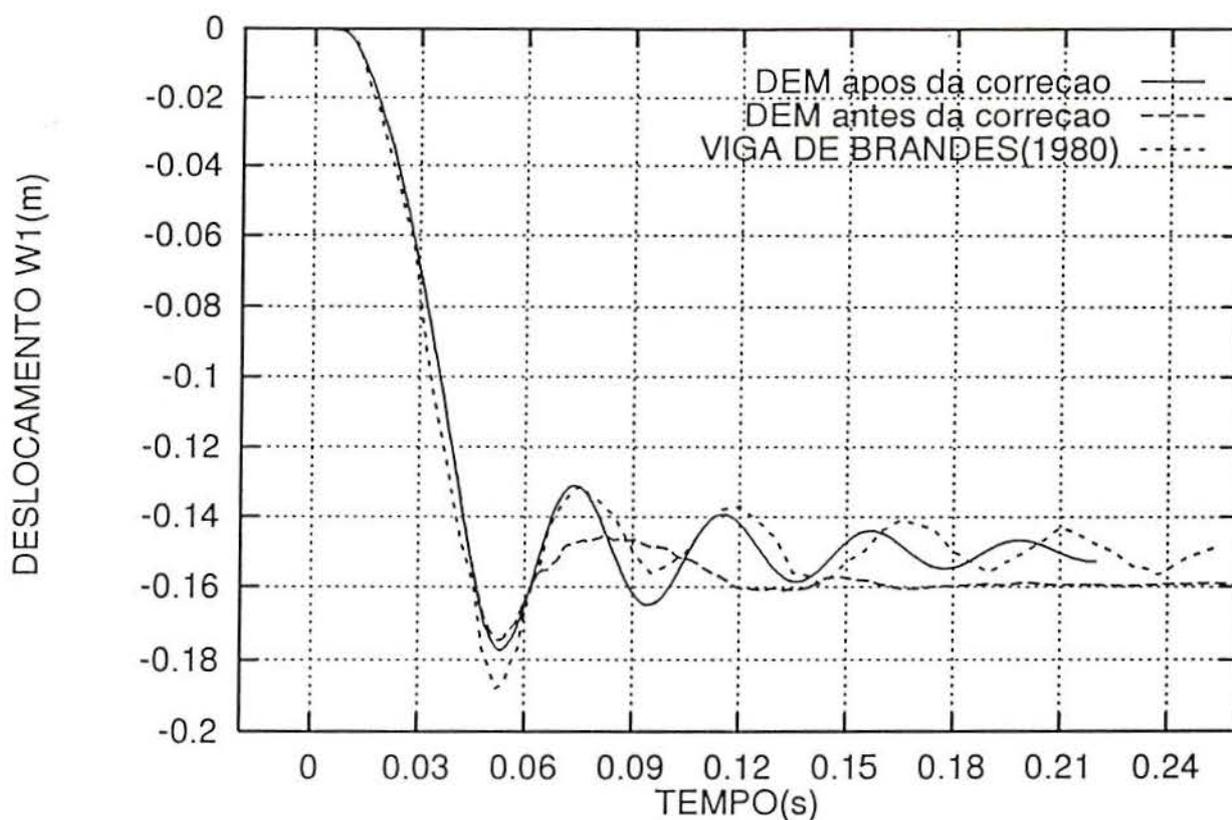


Figura 6.4: Comparação das respostas experimentais e numéricas: Deslocamento no meio do vão vs. tempo para a viga de Brandes (1981).

deformação permanece armazenada no concreto fraturado nas proximidades das barras de armadura, a qual é liberada quando acontece a descarga.

Na figura (6.4) se apresenta a comparação da resposta em termos do afastamento no meio do vão vs. tempo da viga de Brandes (1981) dos resultados experimentais e das previsões numéricas antes e depois de introduzir as modificações descritas anteriormente. Pode-se observar com clareza que o efeito é importante e adicionalmente poderá permitir simular em forma correta a influência da aderência em estruturas de concreto submetidas a ação de excitações dinâmicas cíclicas levando em conta a influência da aderência.

## 6.4 Verificação experimental do comportamento em descarga

### 6.4.1 Características gerais do ensaio

Com o objetivo de verificar experimentalmente a diminuição da inclinação do ramo de descarga na relação  $F - \varepsilon$  do aço dentro de concreto fig(6.3), foram realizados testes sobre corpos de prova de concreto cujas dimensões e propriedades são apresentadas na figura (6.5). Tais corpos de prova foram submetidos a dois ciclos de carga e descarga.

Na figura (6.6) apresentam-se duas fotografias do conjunto do equipamento utilizado no ensaio e do conjunto do corpo de prova instrumentado e a prensa, respectivamente.

Foram medidas a carga aplicada no corpo de prova mediante uma célula de carga, o deslocamento do aço mediante um LVDT fixo na prensa e o deslocamento do conjunto concreto e aço medido mediante um LVDT fixo no corpo de prova, como se indica na figura (6.7). Na figura (6.8) apresentam-se os 6 corpos de prova depois de serem ensaiados e um detalhe da fissuração produzida em um deles. Os dados foram adquiridos através de um conversor analógico digital sendo possível obter curvas carga, deslocamento do aço ( $\delta_{ac}$ ) e, deslocamento relativo do conjunto aço e concreto ( $\delta_{acr}$ ) versus tempo e a partir de ditos registros construir as curvas carga (P) vs. deformação do conjunto aço e concreto ( $\varepsilon_{acr}$ ). Tomando como exemplo o ensaio da viga CR6, a mesma foi submetida à seguinte história de carga:

- Carga até 22000N e descarga a-zero e posteriormente carga até 24200N e descarga novamente a zero.

Na figura (6.9) se apresenta a curva  $P-\varepsilon_{acr}$  para o corpo de prova CR6, no qual, o efeito em estudo resulta evidente.

### 6.4.2 Conclusões

A partir dos ensaios realizados se deduz que:

- O efeito de diminuição do gradiente da descarga pode ser verificado experimentalmente como se ilustra na figura (6.9) onde se apresenta a curva  $P-\varepsilon_{acr}$  do ensaio realizado sob o corpo de prova CR6.
- A medida que a deformação plástica da barra de aço aumenta, pode-se observar que diminui o gradiente da descarga do conjunto aço e concreto, o que se explica

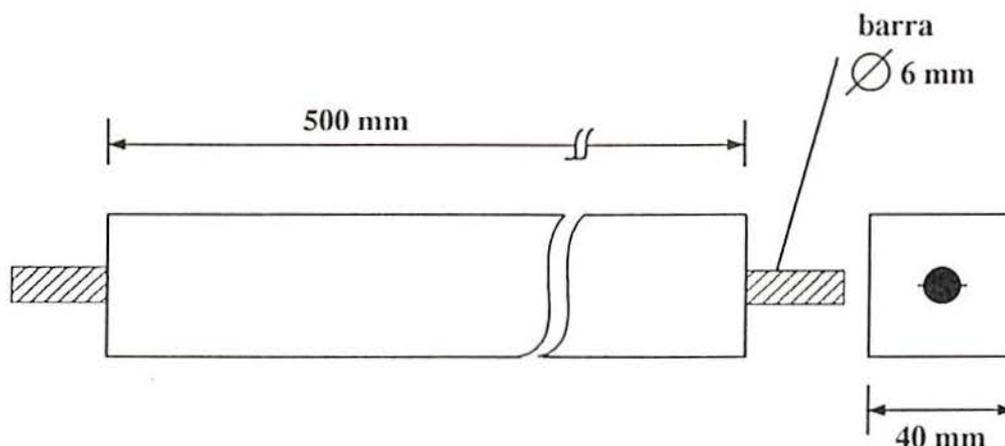


Figura 6.5: Características geométricas e propriedades mecânicas dos espécimens ensaiados.

da seguinte maneira: Ao aumentar a deformação do aço novas fissuras fragmentam mais o concreto e maior volume do mesmo continuará armazenando energia de deformação. Isto se verificará até um limite, a partir do qual o concreto estará totalmente fissurado e também falhará o mecanismo de aderência aço-concreto. Esta lei de variação deve ser examinada cuidadosamente para o caso de solicitações cíclicas, como é o caso de ações sísmicas, assunto discutido no trabalho de Linde (1983).

- O efeito de rigidização adicional do concreto pela ação do aço pode ser observado na primeira parte do ramo de carga do gráfico da figura (6.9).

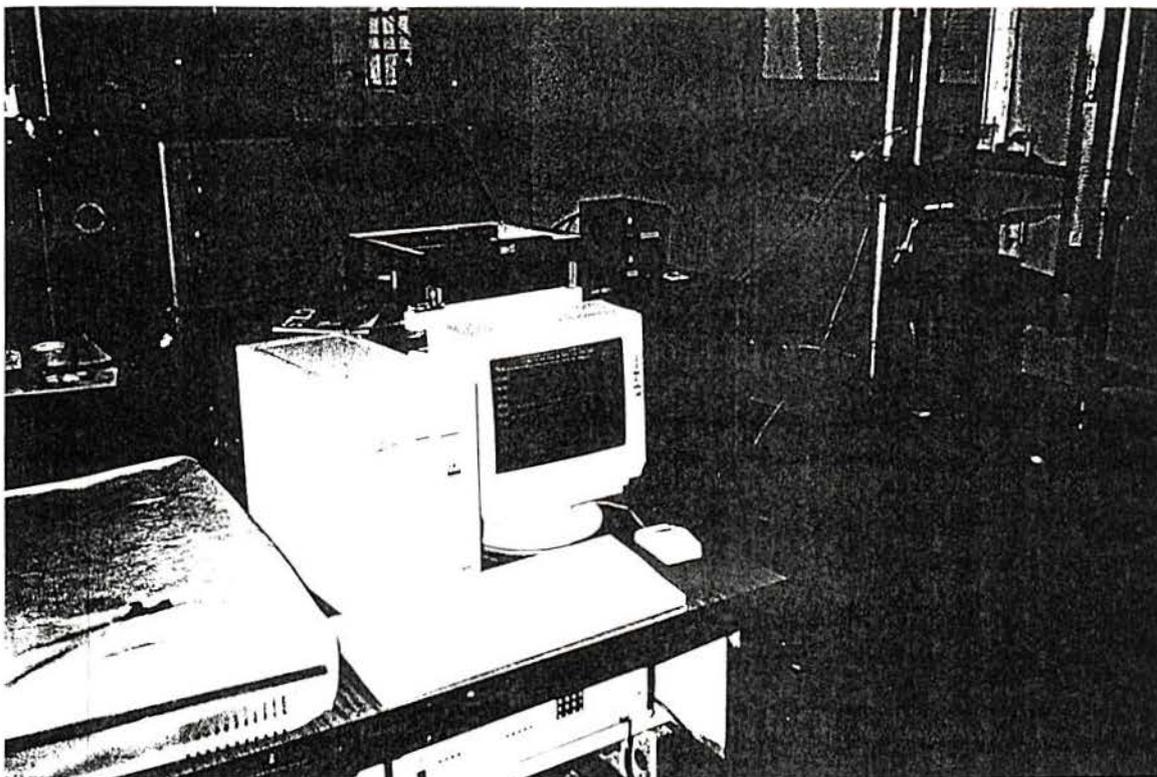
## 6.5 Lei proposta para o módulo de descarga

Os ensaios realizados fornecem uma valiosa evidência na identificação dos parâmetros que influenciam o gradiente do ramo de descarga do conjunto aço e concreto. Com efeito, a energia de deformação  $W^*$  acumulada pelo concreto fraturado aderido às barras de armadura, pode ser expressa como:

$$W^* = f\left(\left(\frac{L_r}{L_c}, \sigma_s, A_s, \varepsilon_{res.}\right)\right) \quad (6.1)$$

onde  $\frac{L_r}{L_c}$  constitui uma medida de volume de concreto “ductilizado” próximo a cada barra de armadura;  $\sigma_s$  é a tensão da barra de aço,  $A_s$  é a área da barra e  $\varepsilon_{res.}$  é a sua deformação. Com relação à expressão anterior cabe realizar algumas observações:

a)



b)

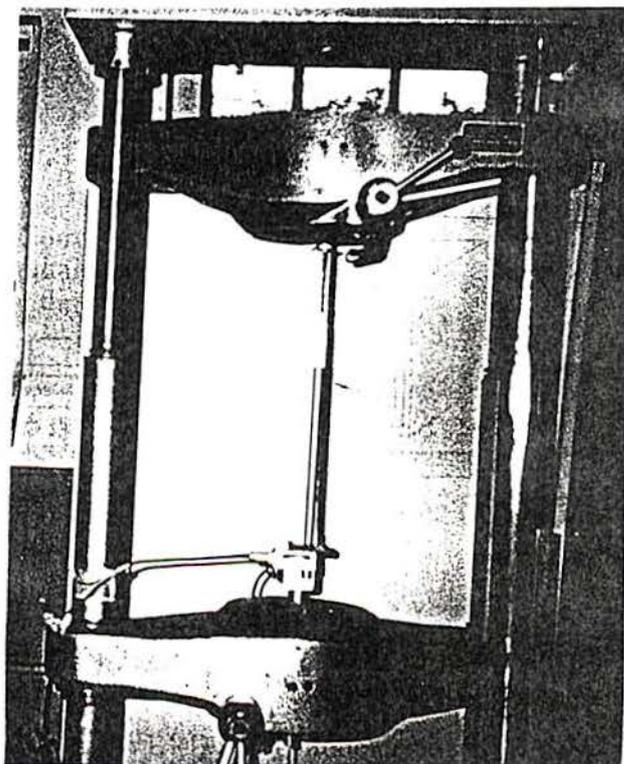


Figura 6.6: Fotografias que ilustram: a) o conjunto do equipamento utilizado no ensaio, b) Conjunto especimen instrumentado-prensa.

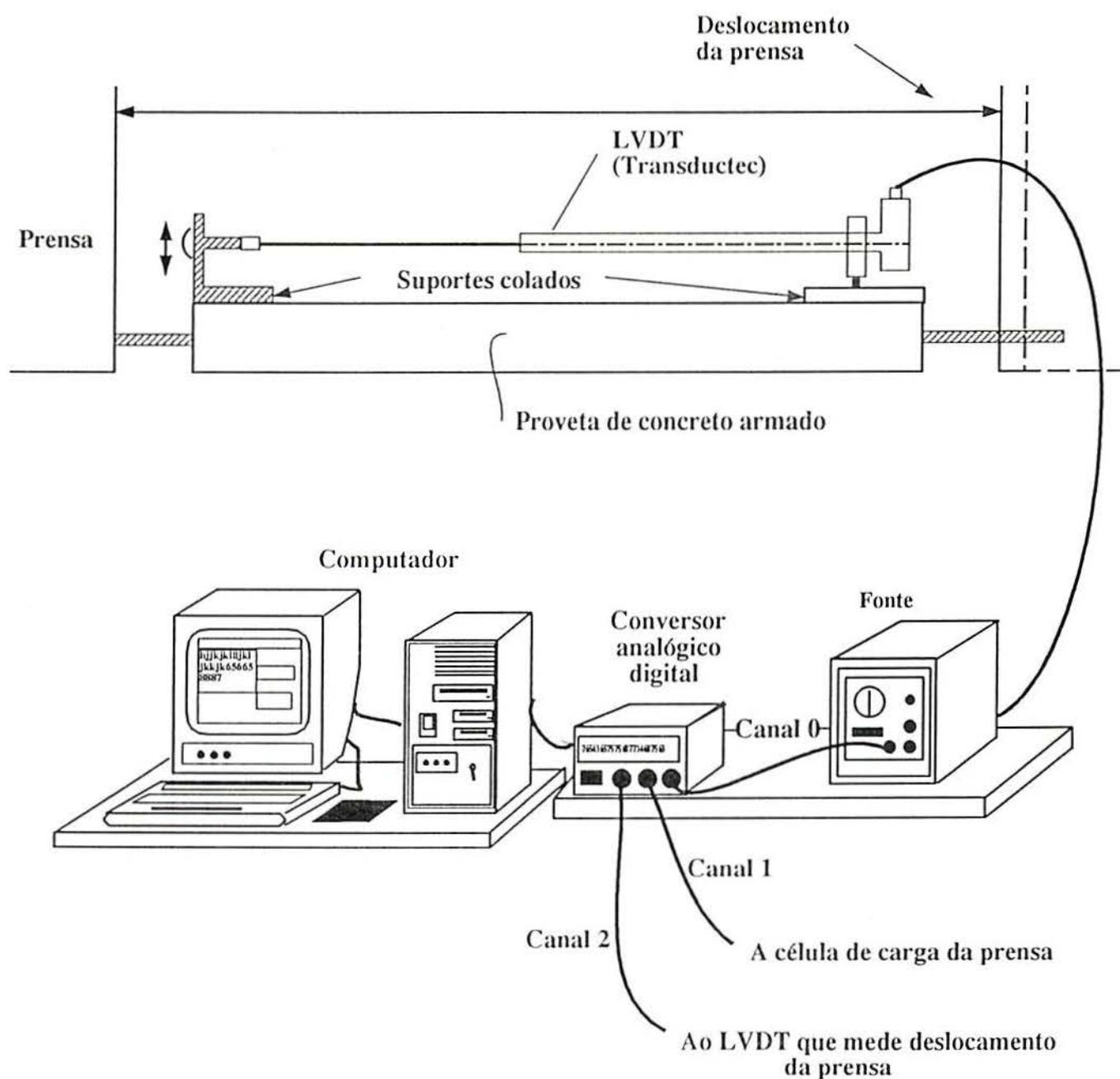
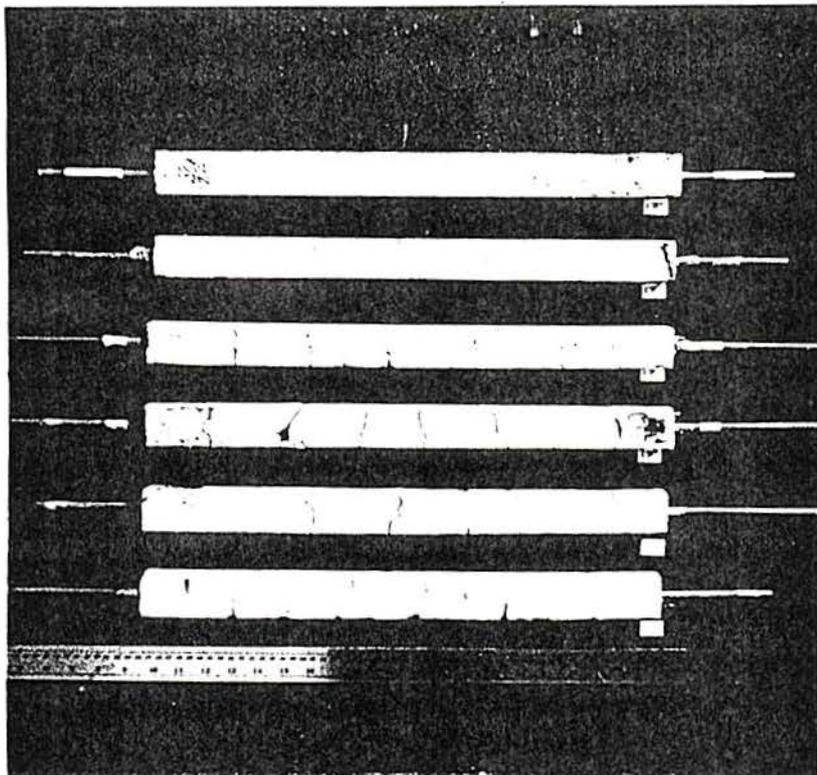


Figura 6.7: Layout do corpo de prova instrumentado e do sistema de medição.

a)



b)

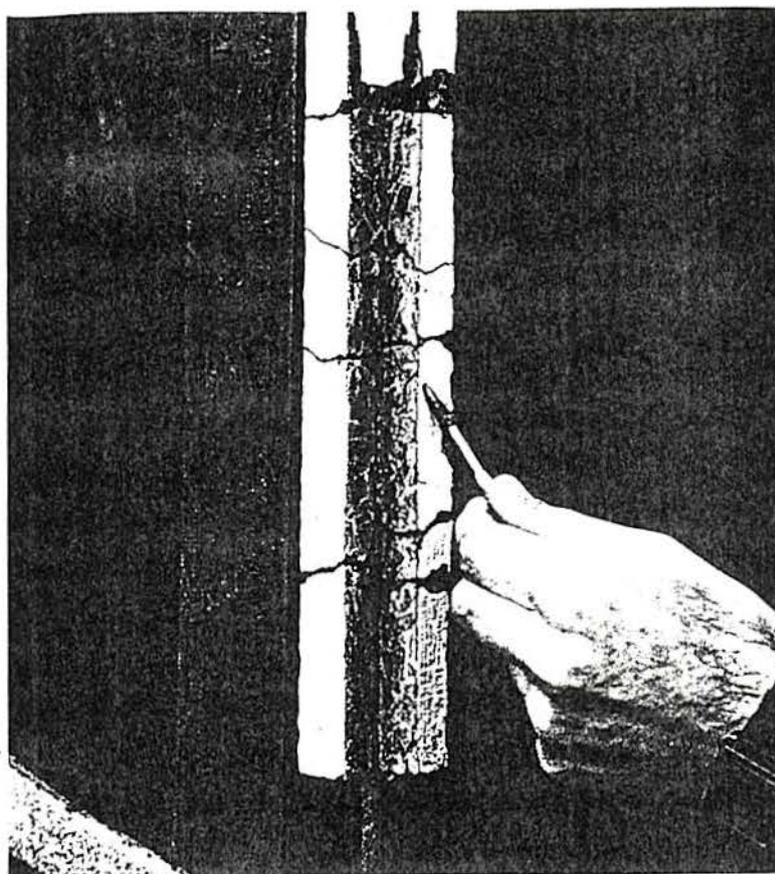


Figura 6.8: a) Fotografia que ilustra a configuração fraturada dos 6 corpos de prova ensaiados. b) Detalhe da fissuração em um dos corpos de prova ensaiados.

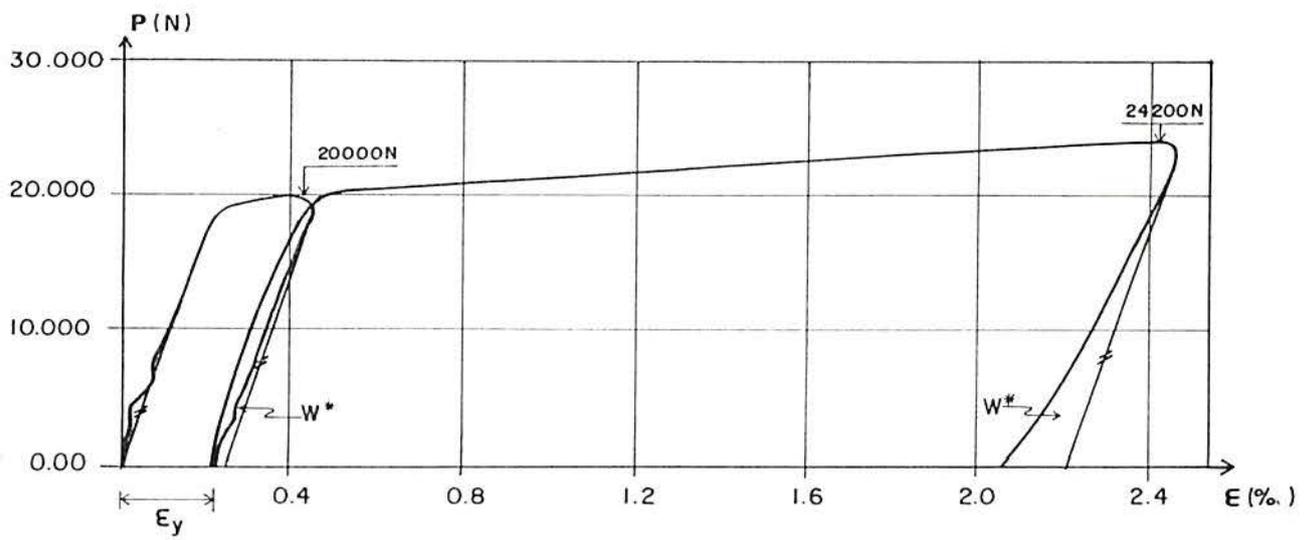


Figura 6.9: Curva  $P - \epsilon_{acr}$  para os ensaios realizados sob o espécimen CR6

- A interpretação física da influência do parâmetro  $\varepsilon_{res.}$  é a seguinte: A medida que as barras de armadura vão plastificando, o quadro de fissuras do concreto aderida a ela vai aumentando produzindo-se um acomodamento das tensões dentro do concreto fraturado sendo maior a quantidade de energia de deformação acumulada nele (aumenta  $W^*$ ). Provavelmente a proporcionalidade direta de  $W^*$  e  $\varepsilon_{res.}$  se verificará até um certo valor limite de  $\varepsilon_{res.}$ .
- Os ensaios realizados tiveram o objetivo de verificar o comportamento da descarga do conjunto aço e concreto, existindo ainda a necessidade de realizar um projeto experimental de maior envergadura com o objetivo de compreender melhor a influência dos parâmetros envolvidos.

Como propostas preliminares a ser implementadas no modelo em desenvolvimento foram testadas numericamente duas leis simples baseadas na expressão (6.1) com relativo sucesso como se ilustra nos exemplos apresentados na secção seguinte. A primeira é ilustrada na figura (6.10.a) e tem a seguinte expressão.

$$E_{s1} = E_s \cdot \left( \text{MAX} \left( \frac{\varepsilon_m}{\gamma * \varepsilon_p}, 1 \right) \right) \quad (6.2)$$

onde  $\varepsilon_m$  é a máxima deformação da barra até esse momento,  $\varepsilon_p$  é a deformação de escoamento da barra,  $\gamma$  é um coeficiente que mede a partir de que momento o efeito começa a ser considerado, após vários testes, seu valor foi adotado em 1.5;  $E_s$ , e o módulo de elasticidade da barra de aço,  $A_s$  é a área da barra de aço, e finalmente  $E_{s1}$  é o módulo de elasticidade da barra do aço dentro do concreto. A função proposta não leva em conta a área de concreto ductilizado pela presença da armadura, devido a que não se tem ainda informação suficiente de como este parâmetro influi, decidiu-se deixar ele de lado numa etapa preliminar.

Uma segunda proposta para a lei constitutiva das barras de aço dentro do concreto é dada pela expressão:

$$E_{s1} = E_s * \lambda \quad (6.3)$$

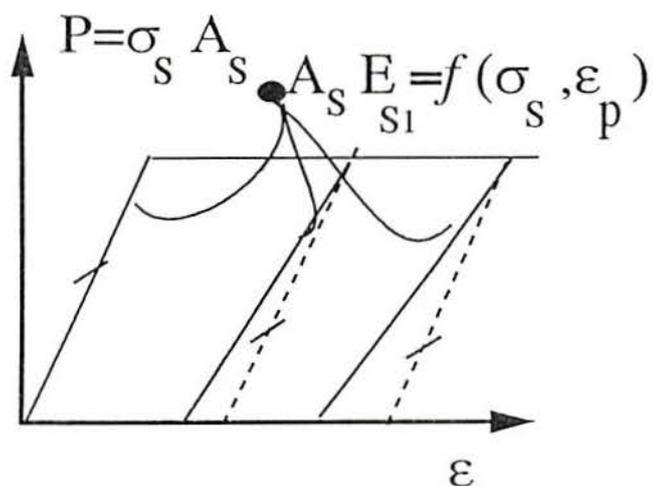
onde  $\lambda$  é um coeficiente que segundo os estudos realizados, varia de 0.95 a 0.70, tal fator depende de muitos parâmetros e maior quantidade de testes e estudos são necessários para sua correta definição.

Na figura (6.10.b) se ilustra o comportamento desta lei onde se leva em conta a variação da curva na parte da descarga em função da deformação da barra de aço.

Cabe salientar que o efeito na curva de descarga do conjunto concreto e aço também poderia ter sido introduzido no modelo modificando a lei constitutiva das barras de concreto ductilizadas devido à presença do aço. Uma proposta lógica seria que o ramo descendente da lei constitutiva fosse bilinear como se ilustra na figura (6.11). O

inconveniente neste caso é que a inclinação da curva descendente deveria ser função da área do aço que ductiliza o concreto, fator que é automaticamente incorporado ao considerar o efeito estudado, modificando a lei constitutiva do aço.

a)



b)

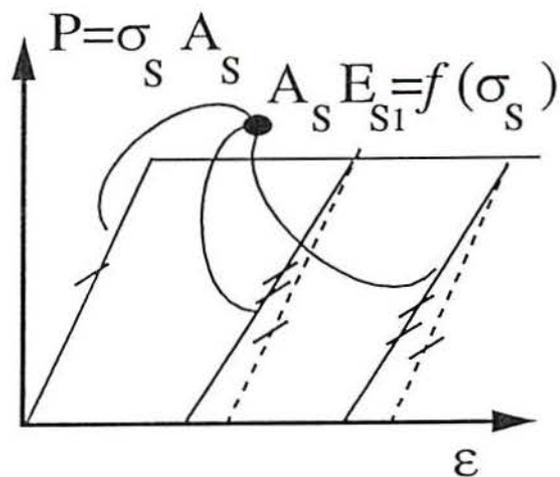


Figura 6.10: Gráficos que ilustram as duas propostas feitas para levar em conta a modificação da curva na descarga do conjunto aço e concreto, a) Proposta 1, b) Proposta 2.

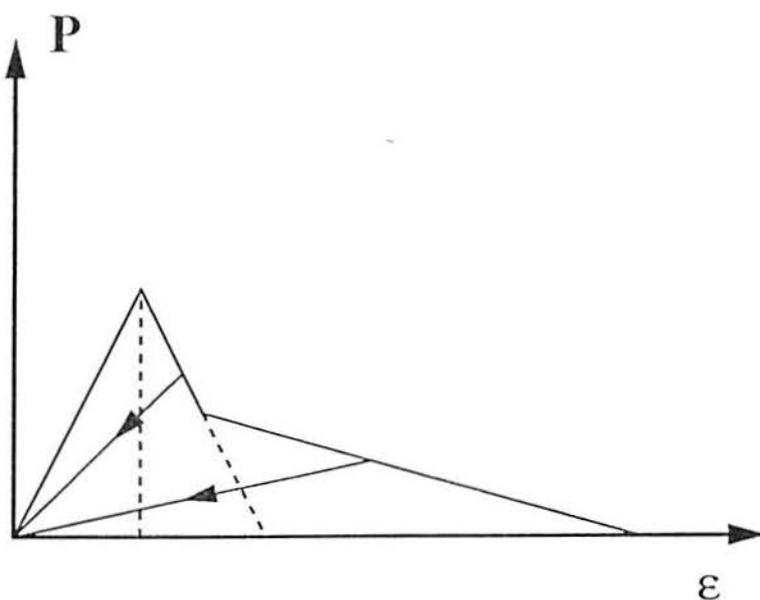


Figura 6.11: Modificação da lei constitutiva dos elementos do concreto caso se queira incorporar o efeito estudado em tais elementos.

## 6.6 Exemplos Ilustrativos

### 6.6.1 Barra de concreto armado submetida a uma carga axial.

#### Considerações gerais

Como um primeiro exemplo para testar a performance do modelo teórico na representação de estruturas de concreto armado analisa-se a continuação uma barra ensaiada por Hwang & Rizkalla (1984) submetida a uma carga de tração monotonicamente crescente em seus extremos.

Um “layout” da estrutura, e a disposição da armadura e as propriedades mecânicas são apresentadas na figura (6.6.1) e na tabela (6.1) respectivamente.

Propriedades do concreto	
$f_t$	$2.92E6N/m^2$
$E_c$	$2.2E10N/m^2$
$\varepsilon_c$	$1.32E - 4N/m^2$
$\nu$	0.2
$\rho$	$2500kg/N/m^3$

Propriedades do aço	
$\sigma_y$	$450E6N/m^2$
$E_s$	$20E10N/m^2$

Tabela 6.1: Propriedades mecânicas da barra de concreto armado ensaiada por Hwang & Rizkalla (1984).

#### Modelo teórico implementado

A descrição geométrica e os parâmetros adicionais para definir o modelo dos elementos discretos ilustram-se na figura (6.6.1) e na tabela (6.2). Para os parâmetros foram adotados valores plausíveis os quais precisam verificação experimental.

A carga sobre a estrutura é aplicada em termos de uns deslocamentos prescritos nos extremos das barras de aço simulando a ação de uma prensa. A excitação é aplicada lentamente, e isto se traduz em que a energia cinética gerada durante o processo de carga é desprezível.

Como uma aproximação, questionável, considerou-se a estrutura simétrica com relação aos eixos  $Y$  e  $Z$ , como pode observar-se na figura (6.13), o que a rigor não é correto dadas as características não homogêneas do concreto, as quais são apresentadas considerando a energia específica de fratura  $G_f$  como un campo aleatório.

$L_c$	$0.06m$	$L_c/L_{co}$	2
$R_{fc}$	$2.727 - 1.36N/m^{(1/2)}$		
$E_{[G_I]}$	$50 - 200N/m$	$\xi$	14
$CVA_{[G_I]}$	$10\%$		

Tabela 6.2: Parâmetros adicionais necessários para caracterizar o modelo teórico da barra de concreto armado ensaiada por Hwang & Rizakalla (1984).

### Resultados obtidos

Na figura (6.14) apresenta-se a comparação dos registros experimentais em termos da carga aplicada vs. as deformações e, os valores obtidos com o modelo teórico, onde se observa uma boa correlação dos resultados.

Finalmente na figura (6.15) apresenta-se a avaliação da energia durante todo o processo. Apesar de que o exemplo é muito simples, ele permitiu verificar que o modelo teórico permite captar de maneira correta a interação entre o aço e o concreto.

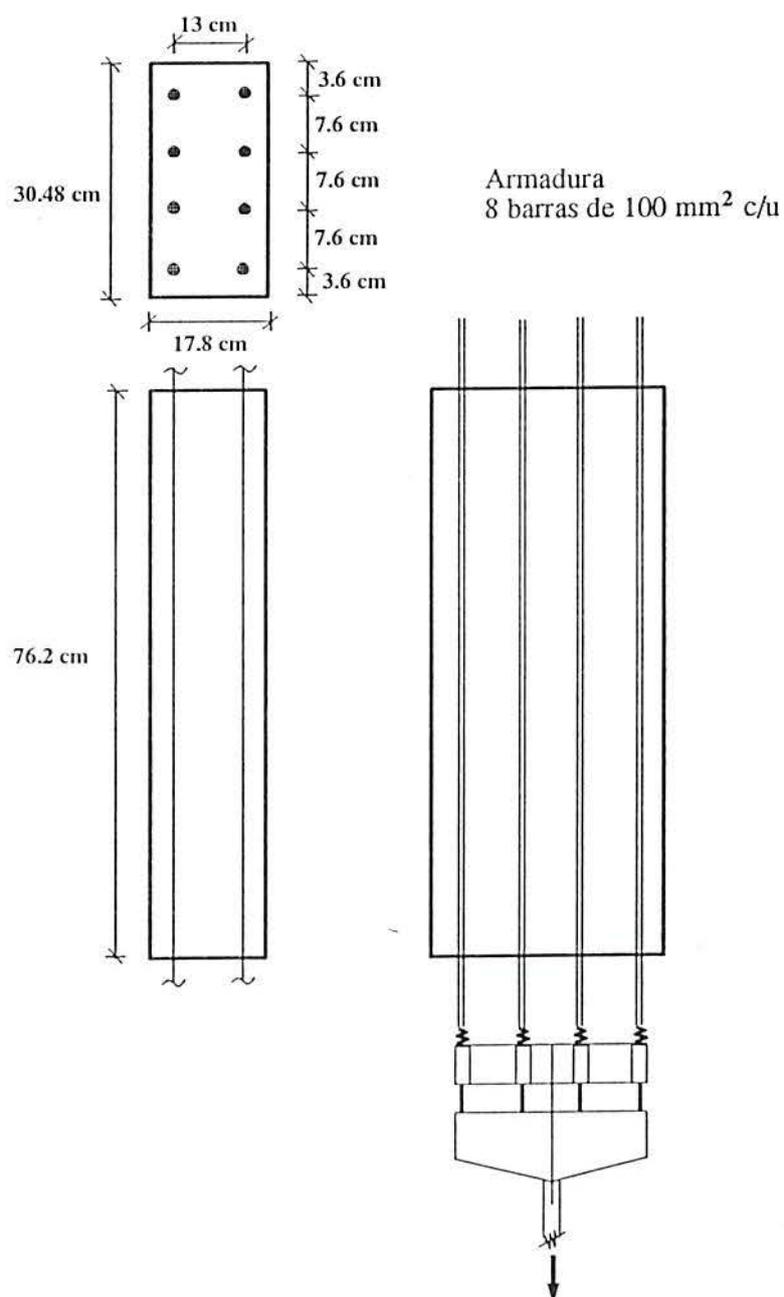


Figura 6.12: “Layout” da barra de concreto armado ensaiada por, Hwang & Rizkalla (1984), onde apresenta-se a disposição da armadura.

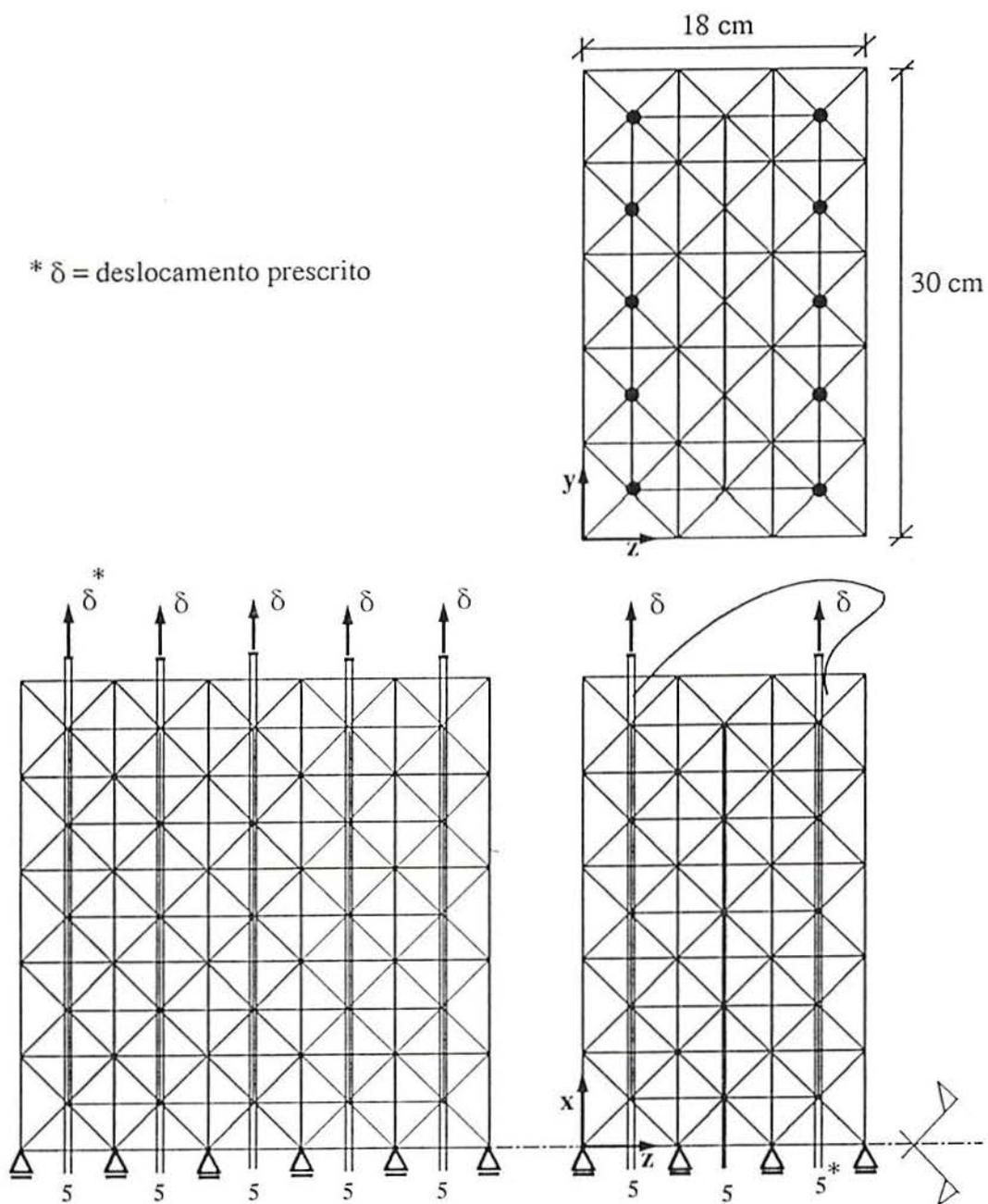


Figura 6.13: Modelo teórico da barra de concreto armado ensaiada por Hwang & Rizkalla (1984).

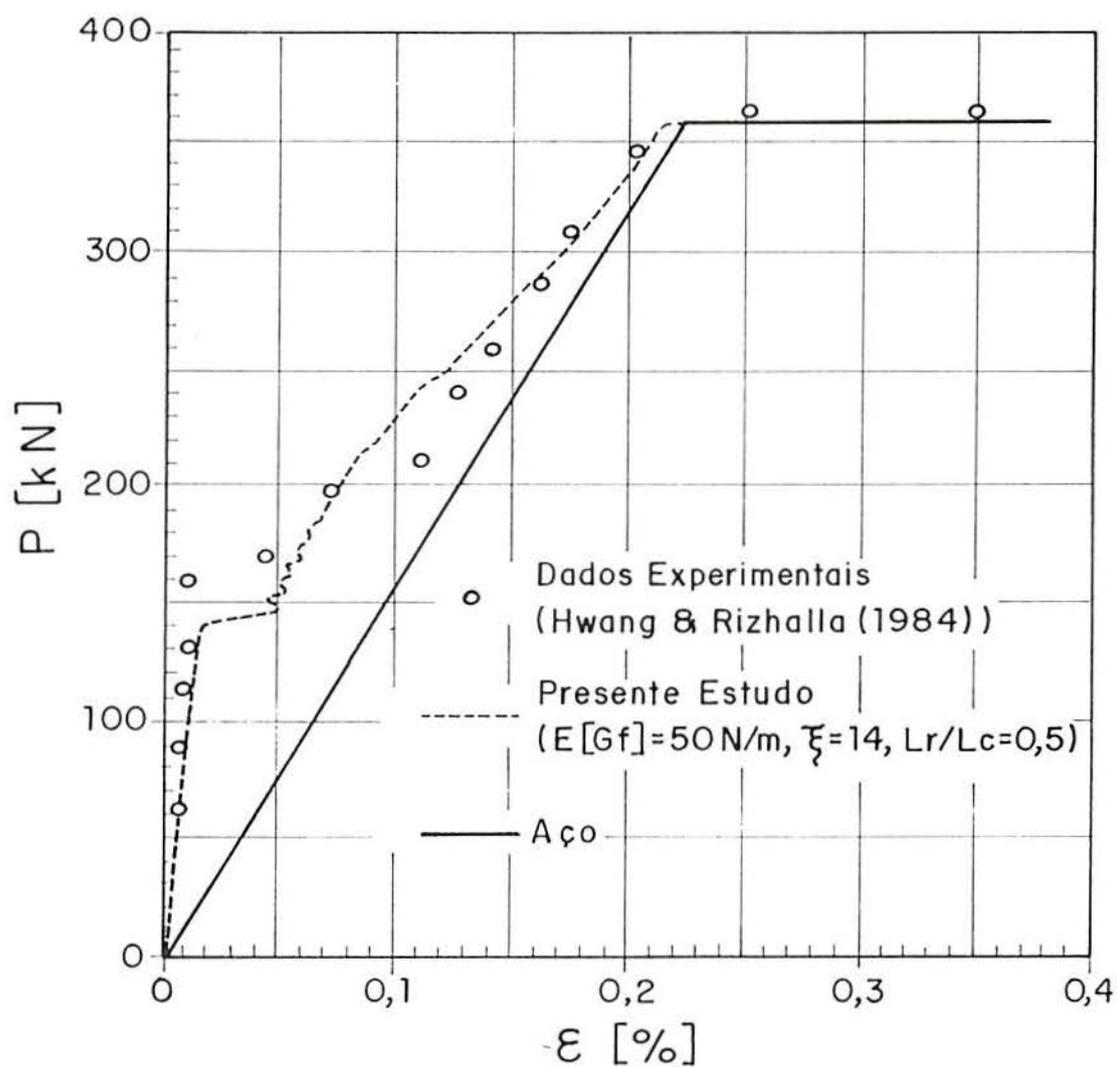


Figura 6.14: Comparação entre os resultados experimentais e numéricos, em termos da carga aplicada vs. deformação total da barra, para o caso da barra de concreto armado ensaiada por Hwang & Rizkalla (1984).

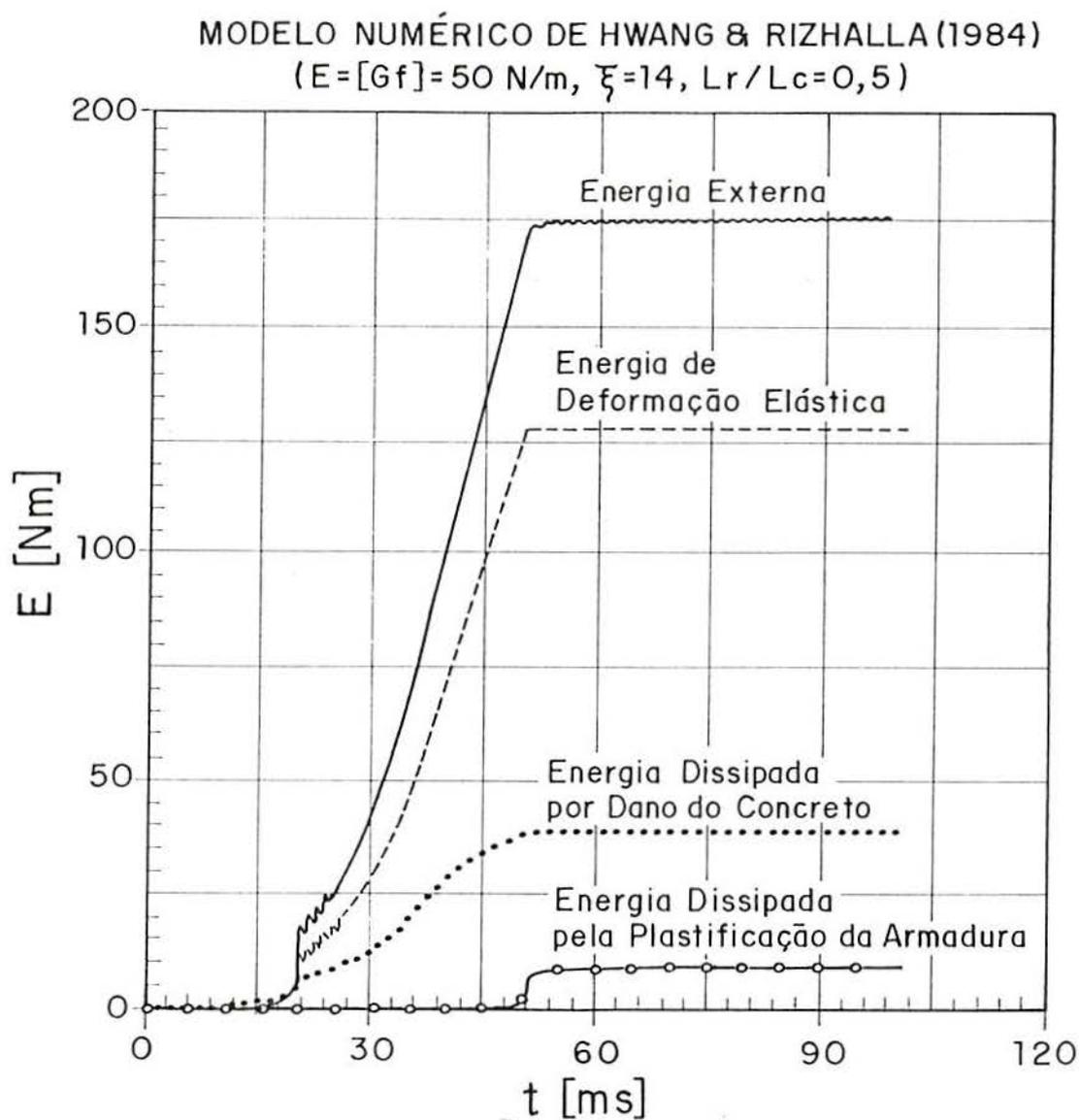


Figura 6.15: Avaliação das energias envolvidas durante o processo de carga do modelo teórico da barra de concreto armado ensaiada por Hwang & Rizkalla (1984).



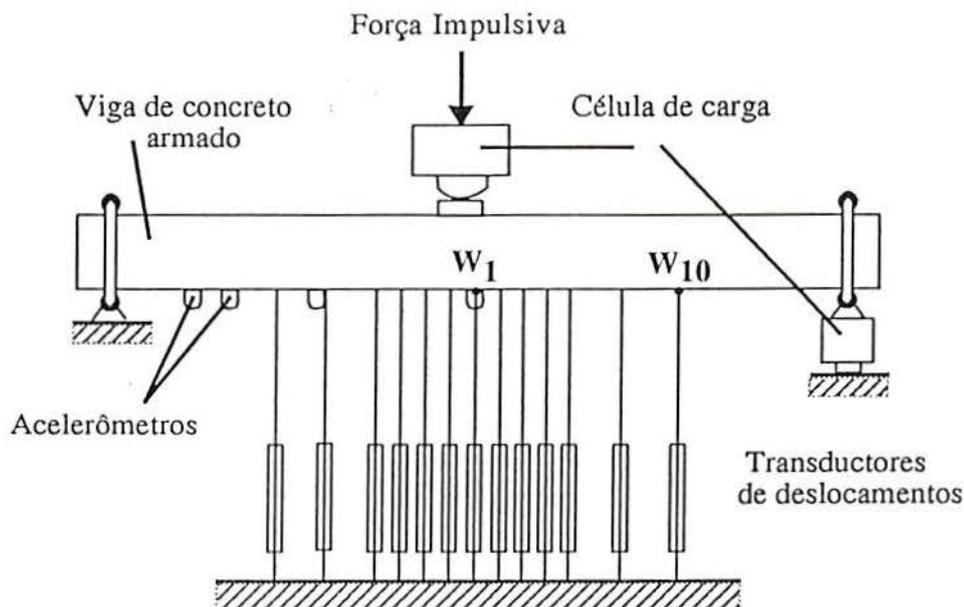


Figura 6.17: Vista geral da viga de Brandes (1981) instrumentada

### Modelo teórico implementado

Os estudos teóricos preliminares, realizados por Rocha (1990) facilitaram o trabalho de modelagem da viga ensaiada por Brandes (1981), utilizando o método dos elementos discretos. O modelo da viga é apresentado na figura (6.18) e o mesmo consta de 4079 elementos e 768 nós.

O comprimento  $L_c$ , dos elementos normais do modelo, como se discute no capítulo 5, está associado ao comprimento de correlação do campo aleatório da energia específica de fratura do concreto  $G_f$ , razão pela qual  $L_c$  não pode ser escolhido arbitrariamente.  $L_c$  foi adotado aproximadamente igual ao dobro do tamanho máximo do agregado ( $d_{max}$ ).

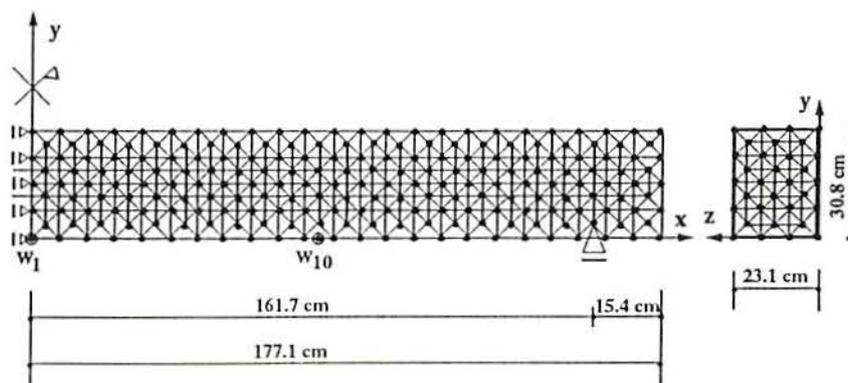


Figura 6.18: Modelo da viga de Brandes (1981)

	Especimen	Modelo
Metade do comprimento total	1.80m	1.771m
Metade do vão total	1.60m	1.5785m
Altura da Secção	0.30m	0.308m
Largura da Secção	0.25m	0.231m

Tabela 6.3: Comparação entre as medidas do modelo físico e teórico da viga ensaiada por Brandes (1981).

Na tabela (6.3) se apresenta uma comparação entre as dimensões do modelo físico e teórico da viga. Foi adotado para este exemplo  $L_c = 7.7cm$  o que implica um  $d_{max} = 3.7cm$  valor considerado compatível com as características da viga, já que não se dispunha do traço do concreto utilizado.

A armadura no modelo foi gerada visando respeitar a área e momento de inércia da armadura original. Na figura (6.19) se apresenta a disposição da armadura no modelo.

As propriedades do material, tanto do concreto como do aço foram compiladas na tabela (6.4), na qual também se apresentam os parâmetros que devem ser calibrados para definir o modelo, tais como:

- $E[G_f]$  é o valor esperado da energia específica de fratura, que pode ser estimada pelo método proposto pelo FIP-CEB cujas expressões principais se apresentam no Anexo .
- $CVA_{G_f}$  é o coeficiente de variação da energia de fratura, para o qual foi adotado um valor de 10%, em função, da experiência adquirida na análise de outras estruturas do tipo, as quais mostrarão que a variação adotada para o campo aleatório é correta.
- $R_f$  é o fator de ruptura cuja interpretação física é dada no capítulo 5 e adotado em função do estudo paramétrico apresentado por Rocha (1990).
- $D_f$  é um coeficiente de amortecimento proporcional a massa. Na figura (6.22), observa-se que a razão de amortecimento crítico  $\xi_o$  associado à frequência fundamental de vibração da viga danificada ( $f=22Hz$ ) é aproximadamente 5%. Se o sistema fosse de um grau de liberdade, o valor de  $D_f$  seria de  $15s^{-1}$ , mas como existem outras frequências de vibração se considera que  $D_f$  pode oscilar, para o caso em análise, entre 20 e  $40 s^{-1}$ , adotando-se  $D_f = 27s^{-1}$ .
- $\varepsilon_p$  é a deformação crítica, a qual caracteriza a lei do comportamento do concreto, é a deformação a partir da qual começa o "Strain Softening", como definiu-se no capítulo 5 este valor de deformação esta vinculado a  $R_f$  e  $E[G_f]$  (só é necessário definir dois dos três parâmetros).

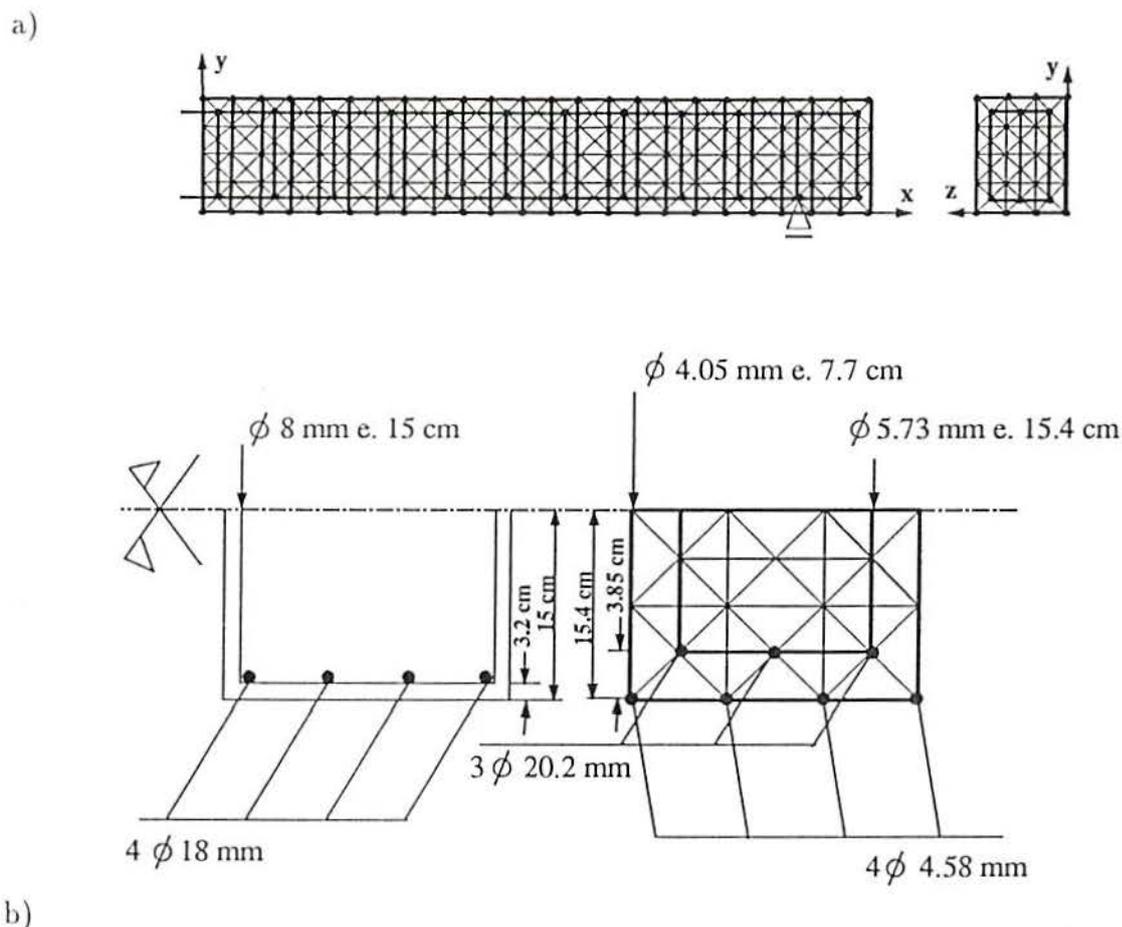


Figura 6.19: a) Disposição da armadura no modelo teórico da viga ensaiada por Brandes (1981). b) Equivalência entre a armadura do modelo físico e a armadura do modelo teórico.

A distribuição temporal da excitação aplicada sobre a estrutura foi especificada mediante uma poligonal cujas coordenadas nodais são apresentadas na tabela (6.5), obtidas a partir dos registros experimentais que são amostrados na figura (6.23). Além disso foi considerado um campo gravitacional para levar em conta o peso próprio da viga. Tal campo é aplicado antes de iniciar-se a ação da carga impulsiva. Durante este tempo inicial, antes do impacto, é considerado um coeficiente de amortecimento muito maior, para chegar mais rapidamente ao estado estático de tensões devido ao peso próprio. Cabe esclarecer que considera-se lícito este aumento do amortecimento pois o modelo está, neste tempo inicial, trabalhando no domínio elástico linear.

Na figura (6.20) se ilustra a distribuição temporal da carga aplicada enquanto na figura (6.21) se apresenta sua distribuição espacial. Finalmente os parâmetros relacionados à interação aço-concreto foram fixados depois de realizar os estudos paramétricos apresentados na figura (6.2). Os valores escolhidos para os parâmetros  $\xi$  e  $L_r/L_c$  foram 15 e 2, respectivamente. Por outro lado, para modelar o comportamento pós-ruptura foi utilizada a proposta 1. apresentada na figura (6.9).

Concreto	
$E$ (Módulo de Young)	$3E10N/m^2$
$\nu$ (Módulo de Poisson)	0.2
$f_t$ (tensão de tracção)	$3.85E6N/m^2$
$E[G_f]$ (Energia específica de fratura media)	$200N/m$
$CVA_{[G_f]}$ (Coeficiente de de variação do $G_f$ )	10%
$D_f$ (Coeficiente de amortecimento)	$27.5s_{-1}$
$R_{fc}$ (Fator de Ruptura)	$1.5088m^{-(1/2)}$
$\varepsilon_p$ (Deformação crítica do concreto)	$1.28E - 4$
Aço	
$E_s$ (Módulo de Young )	$2100000E6N/m^2$
$f_y$ (Tensão de escoamento)	$495E6N/m^2$
Modelo Elastoplástico Perfeito	

Tabela 6.4: Propriedades Mecânicas e parâmetros adotados para gerar o modelo teórico da viga ensaiada por Brandes (1981).

Tempo [ms]	P [KN]	Tempo [ms]	P [KN]	Tempo [ms]	P [KN]
0.0	0	17.9	214	38.0	219
5.1	6	21.9	250	41.0	200
6.6	25	28.1	227	43.4	150
10.2	200	30.1	237	46.9	38
16.3	234	34.2	220	48.0	0

Tabela 6.5: Distribuição no tempo da carga impulsiva obtida a partir dos registros experimentais de Brandes (1981).

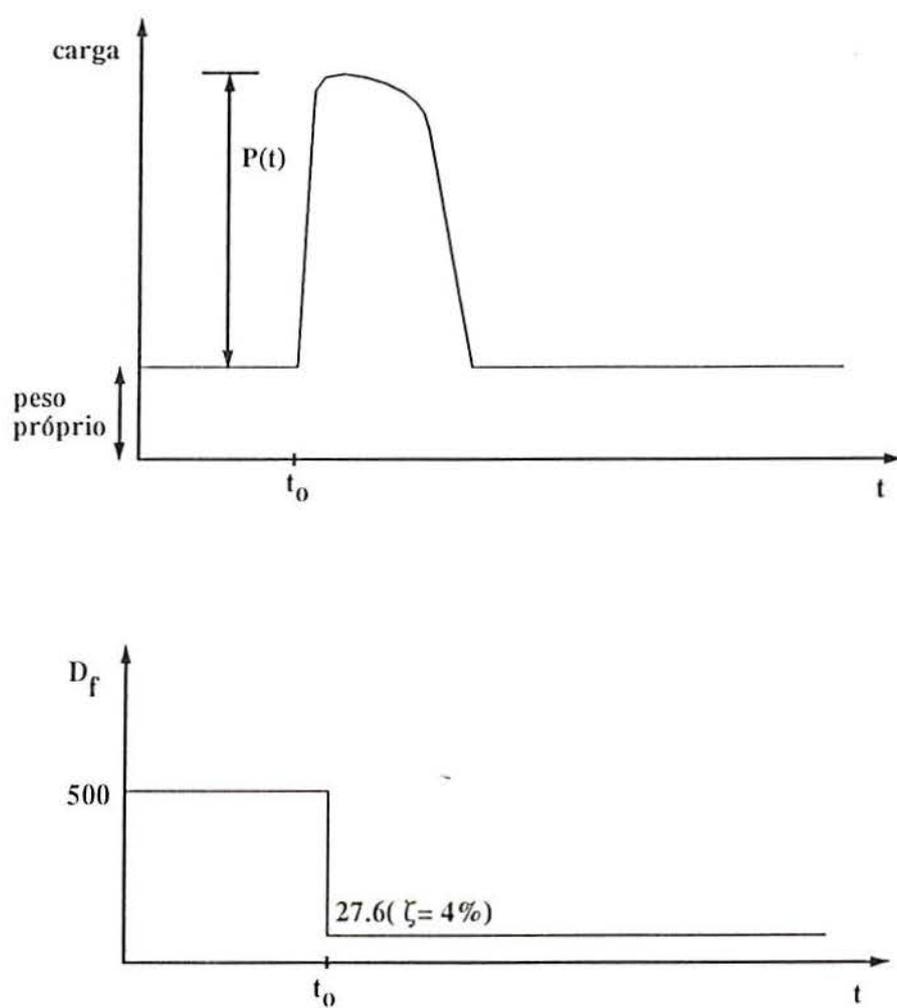


Figura 6.20: Distribuição temporal das cargas e do coeficiente de amortecimento considerados no modelo teórico da viga ensaiada por Brandes (1981)

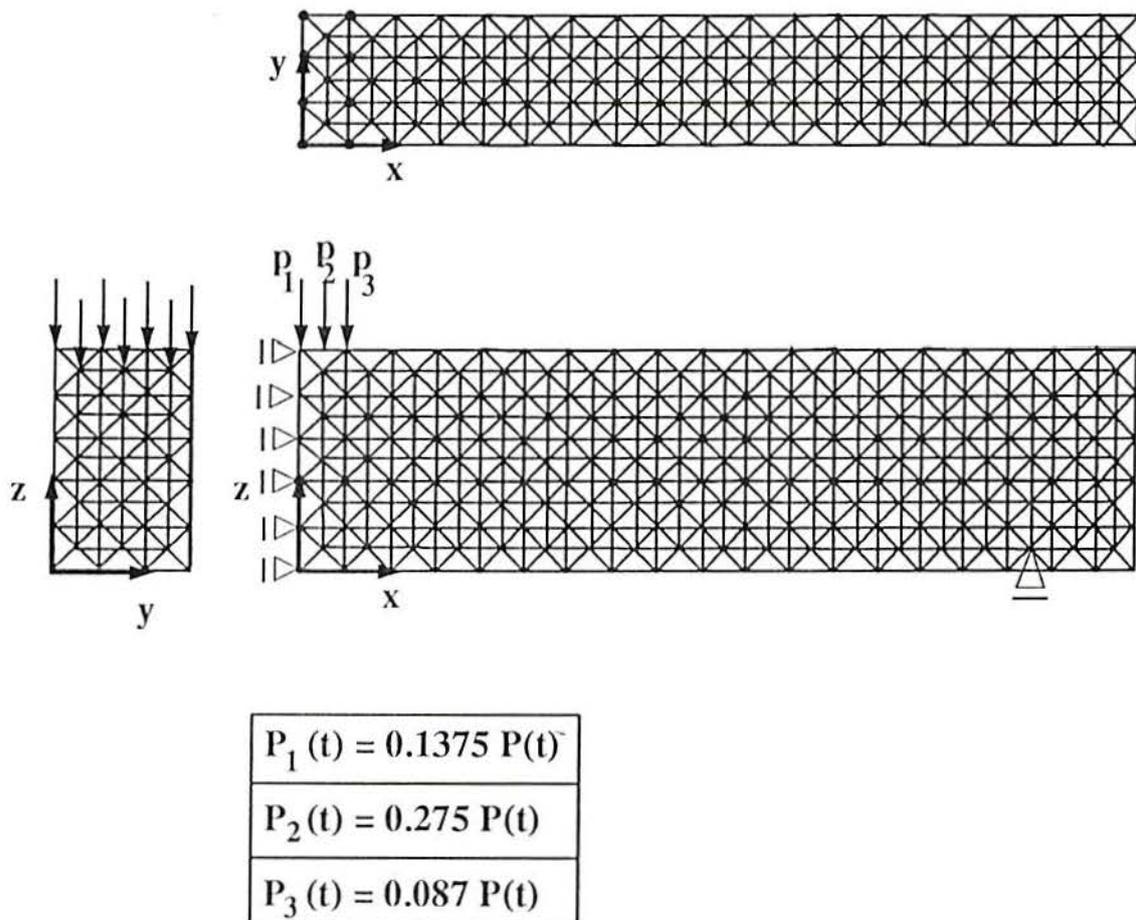


Figura 6.21: Distribuição espacial da carga impulsiva sobre a viga para o modelo da viga ensaiada por Brandes (1981) .

## Resultados Obtidos

A continuação se apresentam os resultados obtidos com o modelo proposto. Cabe salientar que pode-se ajustar, em forma muito satisfatória, os registros experimentais antes durante e depois de acontecer as solicitações máximas, no transcurso do processo.

Se apresentam a seguir os seguintes resultados:

- Comparação entre as respostas teórica e experimental, em termos dos deslocamentos, no centro e a um quarto do vão vs. tempo (figura 6.22).
- Comparação dos valores teóricos e experimentais da carga e da reação do suporte vs. tempo ( figura 6.23).
- Comparação dos valores teóricos e experimentais da aceleração no meio do vão vs. tempo (figura 6.24).
- Comparação entre as velocidades no meio do vão vs. tempo, resultados numéricos obtidos com um programa de elementos finitos (NONDYN apresentados por Vinkier (1982) e os obtidos com o modelo proposto (figura (6.25).
- Comparação entre as configurações finais real e teórica da viga ensaiada por Brandes (1981) (figura 6.26).

Também se apresentam, sem possibilidade de comparar com outros resultados numéricos ou com valores experimentais, os seguintes resultados :

- A evolução de como se distribuem e dissipam dos diferentes tipos de energia durante o processo. Verifica-se que aproximadamente 80% da energia fornecida ao sistema é dissipada na plastificação das barras de aço (figura 6.27).
- Na figura (6.28) se apresenta a distribuição do impulso entregue ao sistema através da carga externa ( $\int_0^t P(t)dt$ ) e, como tal impulso chega aos apoios ( $\int_0^t R(t)dt$ ), sendo que  $R(t)$  representa a reação nos apoios em função do tempo.
- Na figura (6.29) se apresenta o modelo da viga ensaiada por Brandes (1981) já danificada, realizando um estudo de como foram afetadas as barras do modelo considerando os seguintes parâmetros ( $\xi = 15$  e  $L_r/L_c = 2$ ).

Analisando a figura (6.26 e 6.29) pode-se identificar na viga ensaiada por Brandes quatro regiões características, ilustradas na figura (6.30):

- Na região 1 há dano concentrado, devido a estar próxima á zona de aplicação da carga.

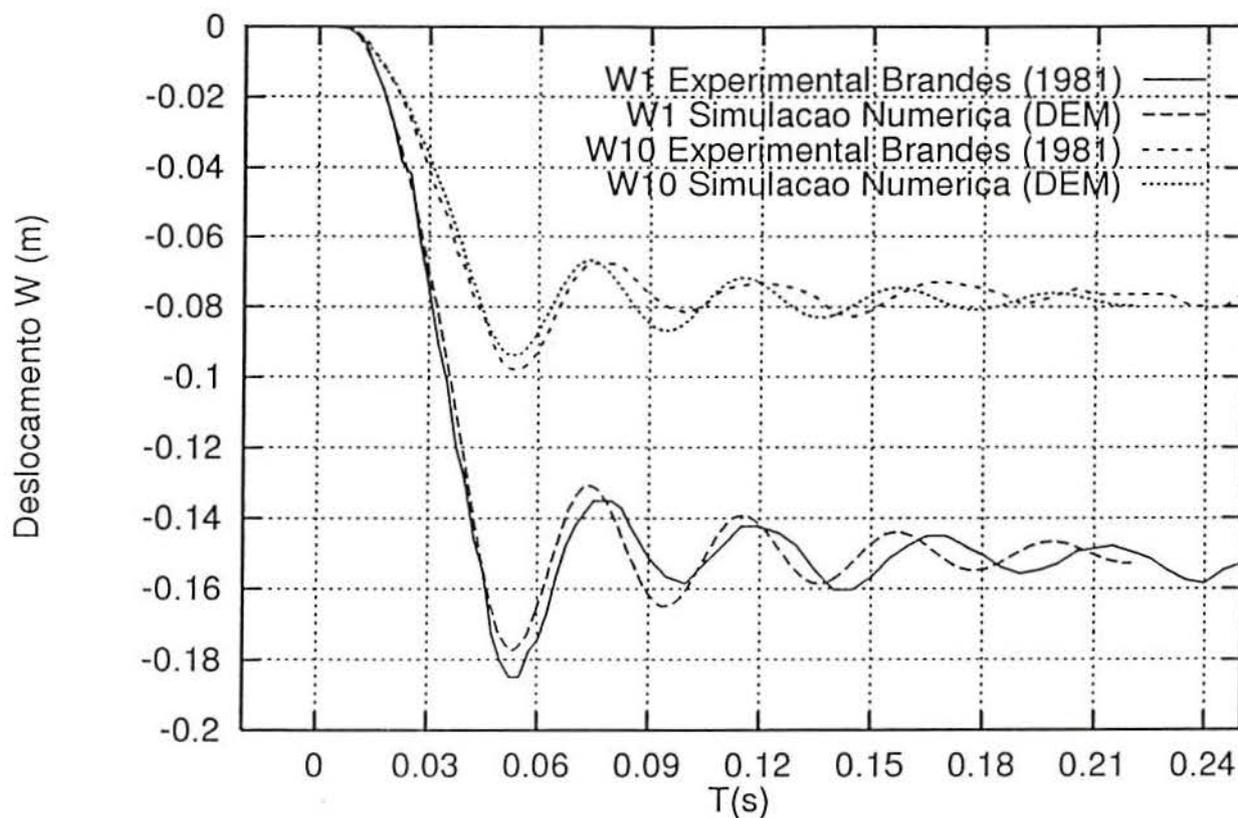
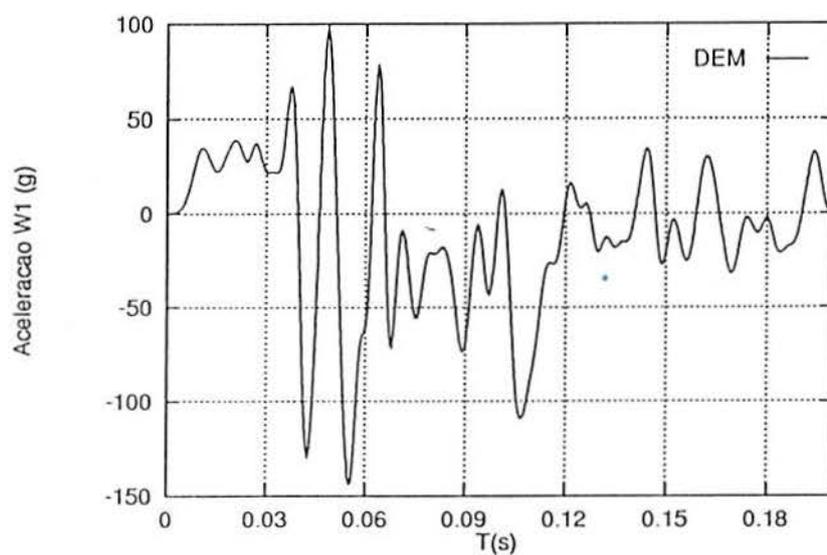
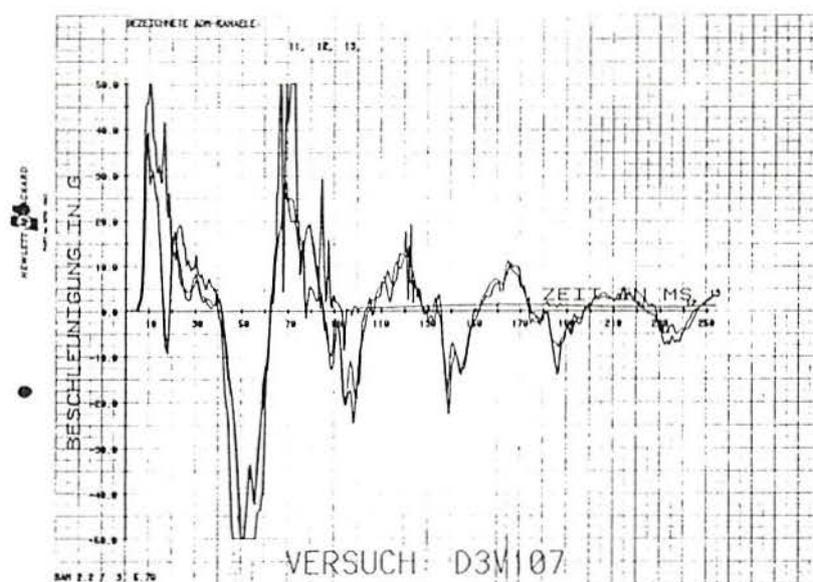


Figura 6.22: Comparação das respostas experimentais e teórica em termos dos deslocamentos no centro e a um quarto do vão vs. tempo da viga ensaiada por Brandes (1981).

- Na região 2 se evidencia também dano localizado devido a presença dos apoios.
- Na região 3 só se tem dano difuso.
- Na região 4 há um dano localizado distribuído na parte superior da viga. A razão do aparecimento do mesmo se ilustra na figura (6.31). Ao ser aplicada a carga impulsiva, geram-se sobre a viga ondas de superfície que se propagam na parte superior, responsáveis pelo deterioramento da região 4 e ondas de volume, que se propagam em direção ao interior, que provocam o descenso vertical da viga. No começo do processo, as ondas de superfície, começam a propagar-se, sem que as ondas de volume consigam ainda movimentar a viga na direção vertical, estágios ilustrados nas figuras (6.31a e 6.31b). Posteriormente as ondas de volume produzem o deslocamento da viga, como se ilustra na figura (6.31c). Este tipo de efeito é característico em problemas de impacto de baixa velocidade.

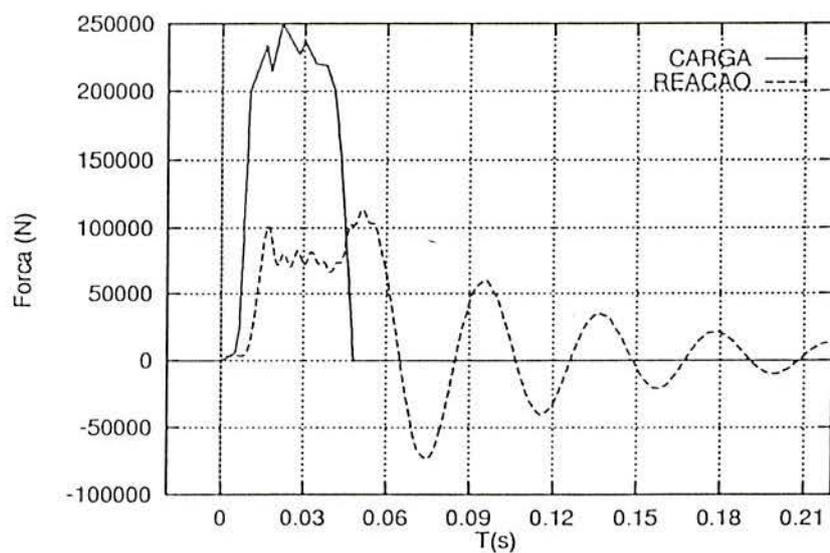
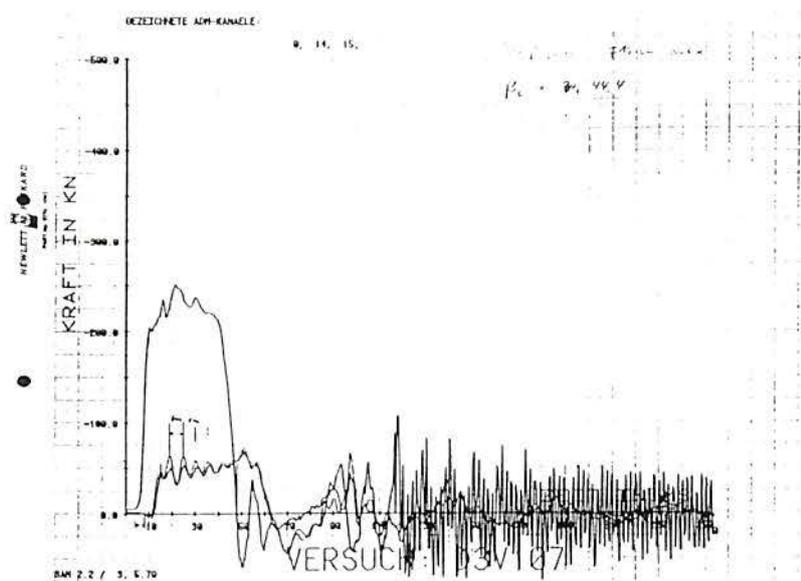
a)



b)

Figura 6.23: Comparação dos valores experimentais (a) e teóricos (b) da aceleração no centro do vão em função do tempo da viga ensaiada por Brandes (1981).

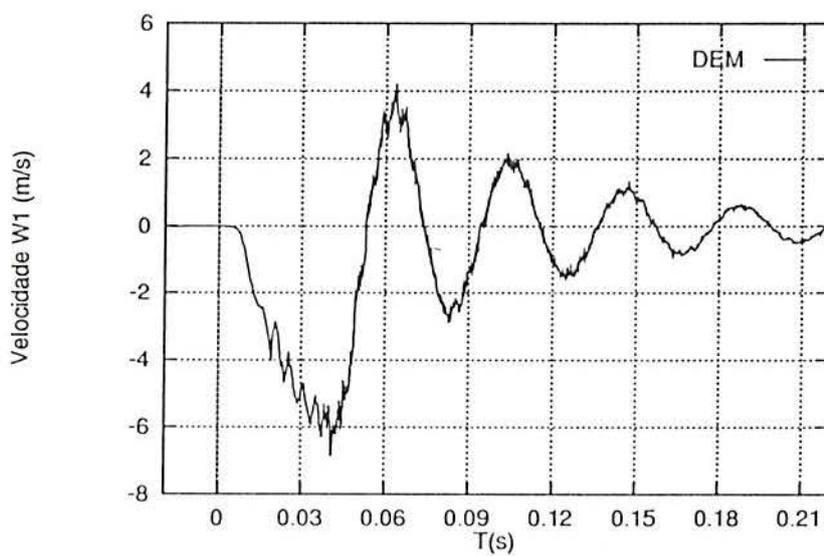
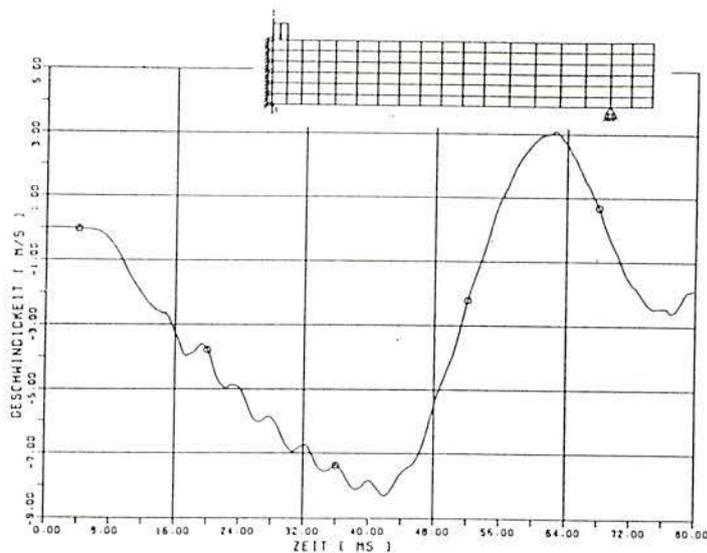
a)



b)

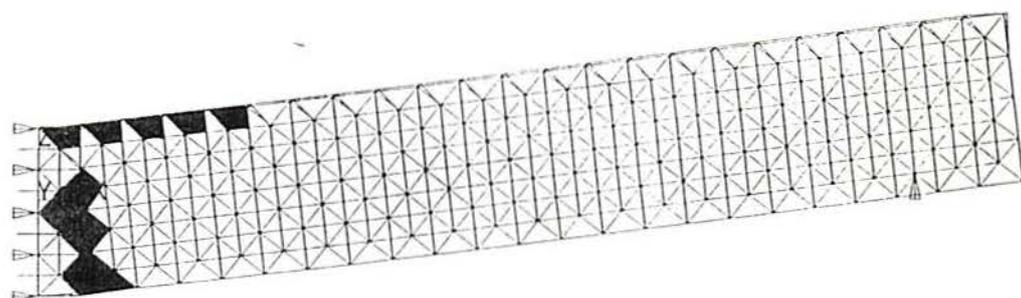
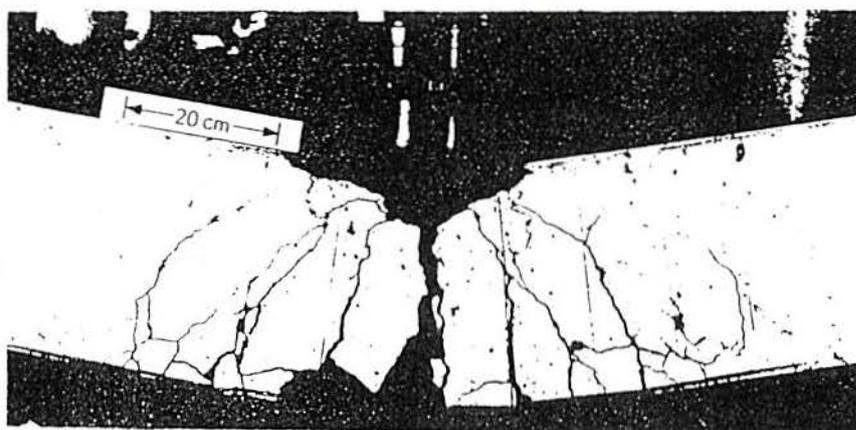
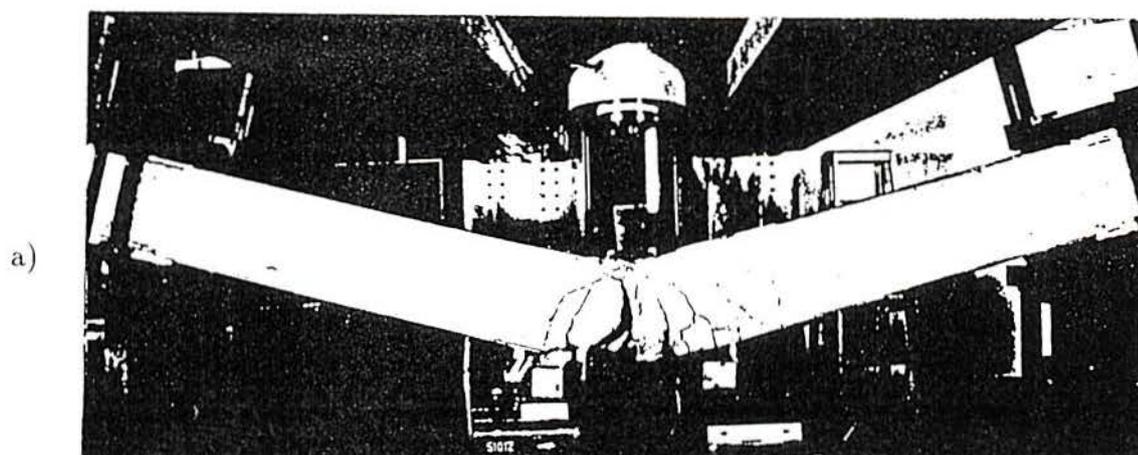
Figura 6.24: Comparação dos (a) registros experimentais e (b) resultados teóricos da carga e a reação nos apoios vs. tempo para o caso da viga ensaiada por Brandes (1981).

a)



b)

Figura 6.25: Comparação das soluções teóricas obtidas em termos de velocidades no centro do vão vs. tempo da viga enaiada por Brandes (1981): a) Com o programa NONDYN, b) com o algoritmo de DEM proposto neste trabalho.



b)

Figura 6.26: Comparação das configurações finais da viga de Brandes (1981) (a) e do modelo teórico da mesma (b).

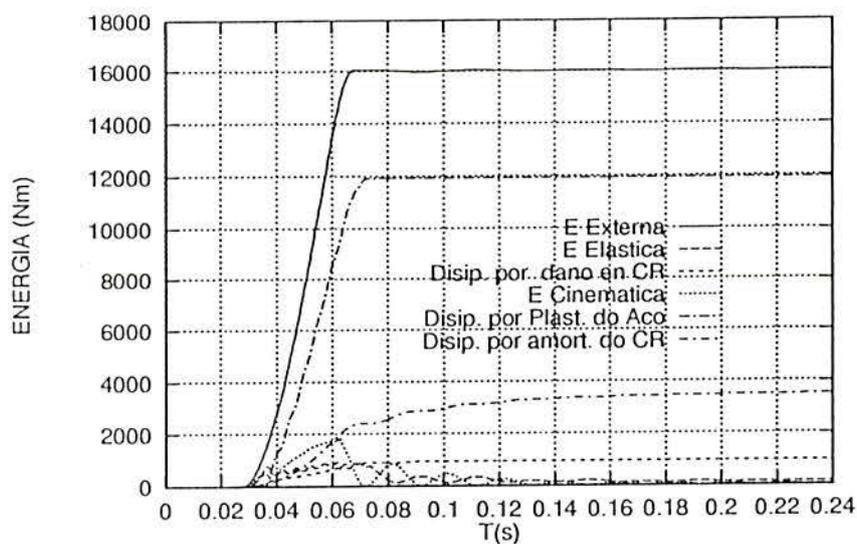


Figura 6.27: Evolução da energia durante todo o processo estudado para o caso da viga ensaiada por Brandes (1981).

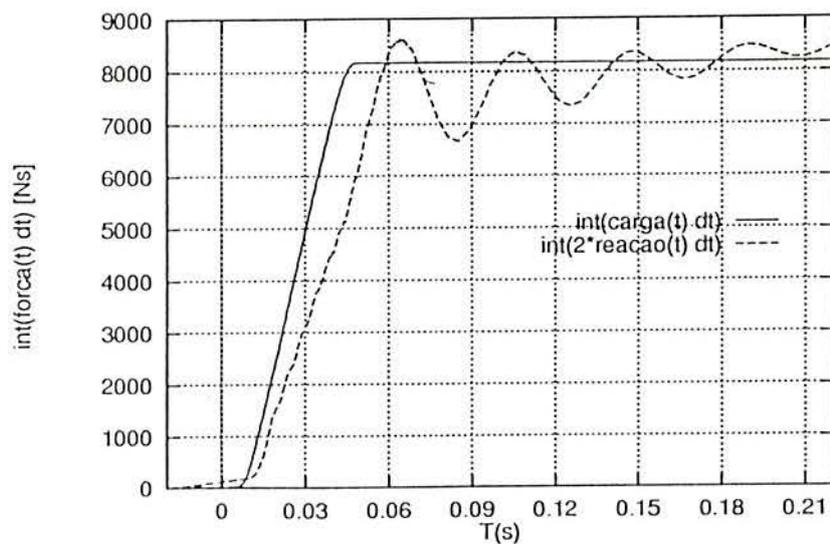


Figura 6.28: Distribuição do impulso entregue ao sistema externamente e o impulso reativo na viga ensaiada por Brandes (1981) vs. tempo.

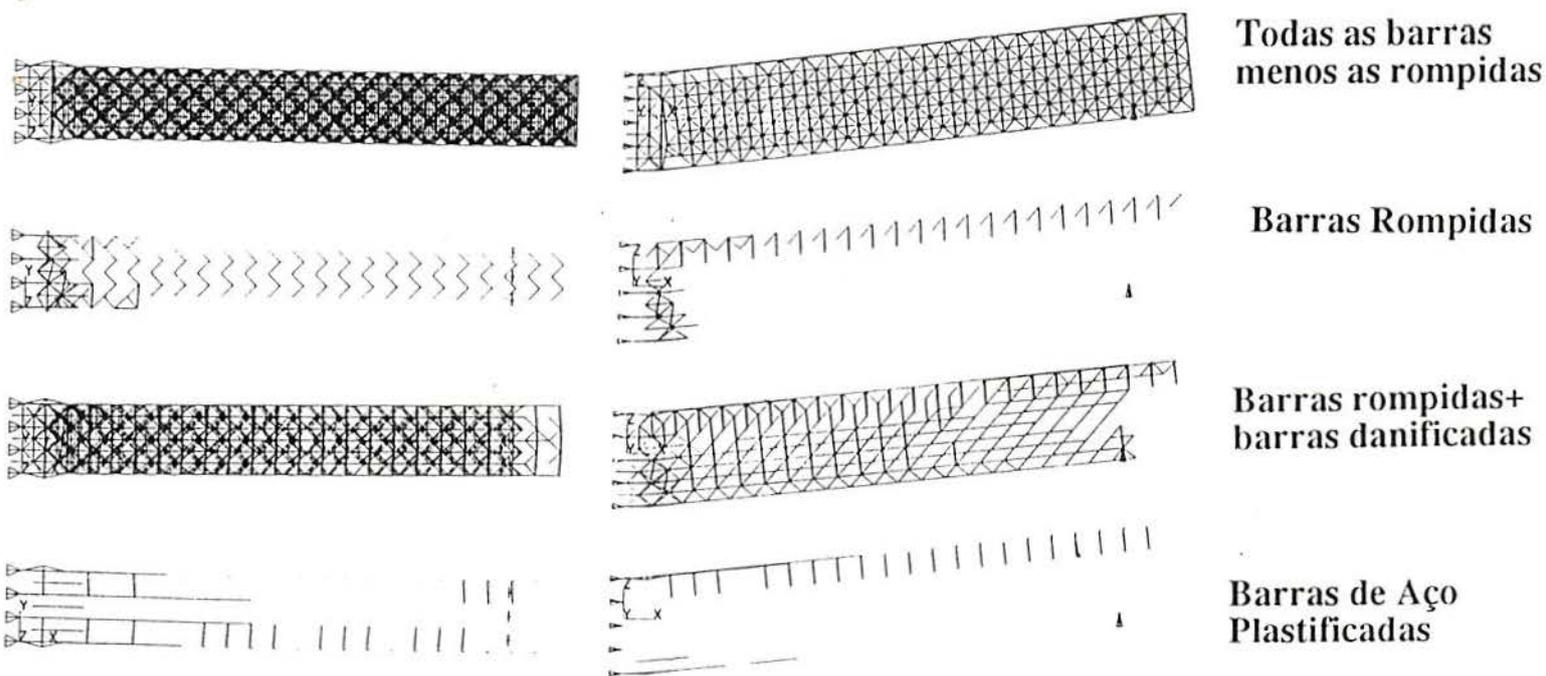
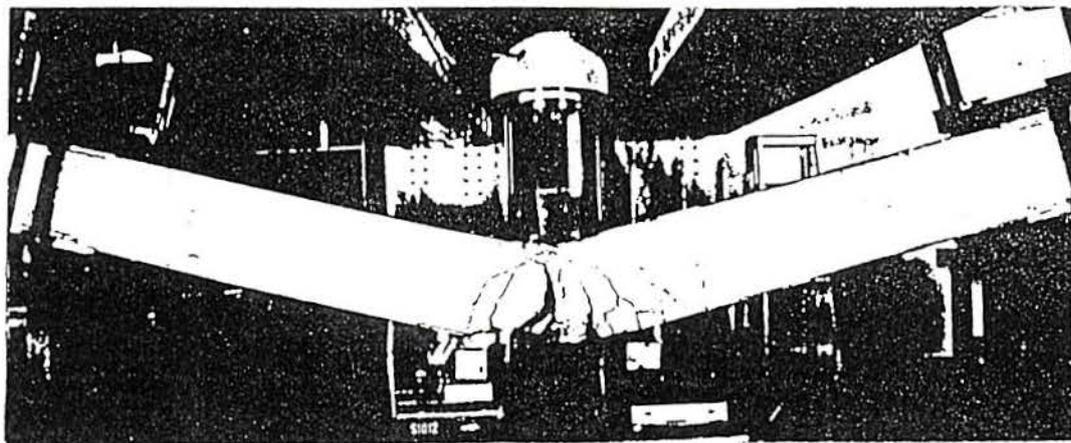


Figura 6.29: Modelo da viga ensaiada por Brandes (1981) depois da aplicação da carga mostrando como foram afetadas as barras do modelo para  $\xi = 15$  e  $L_r/L_c = 2$ ).

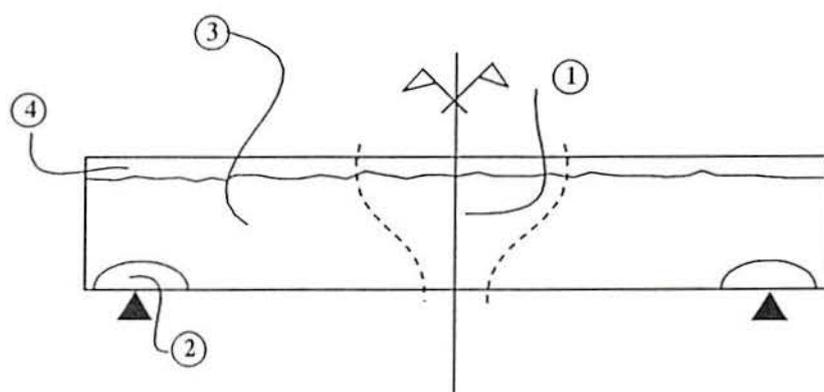


Figura 6.30: Regiões características indicadas no modelo teórico da viga ensaiada por Brandes (1981).

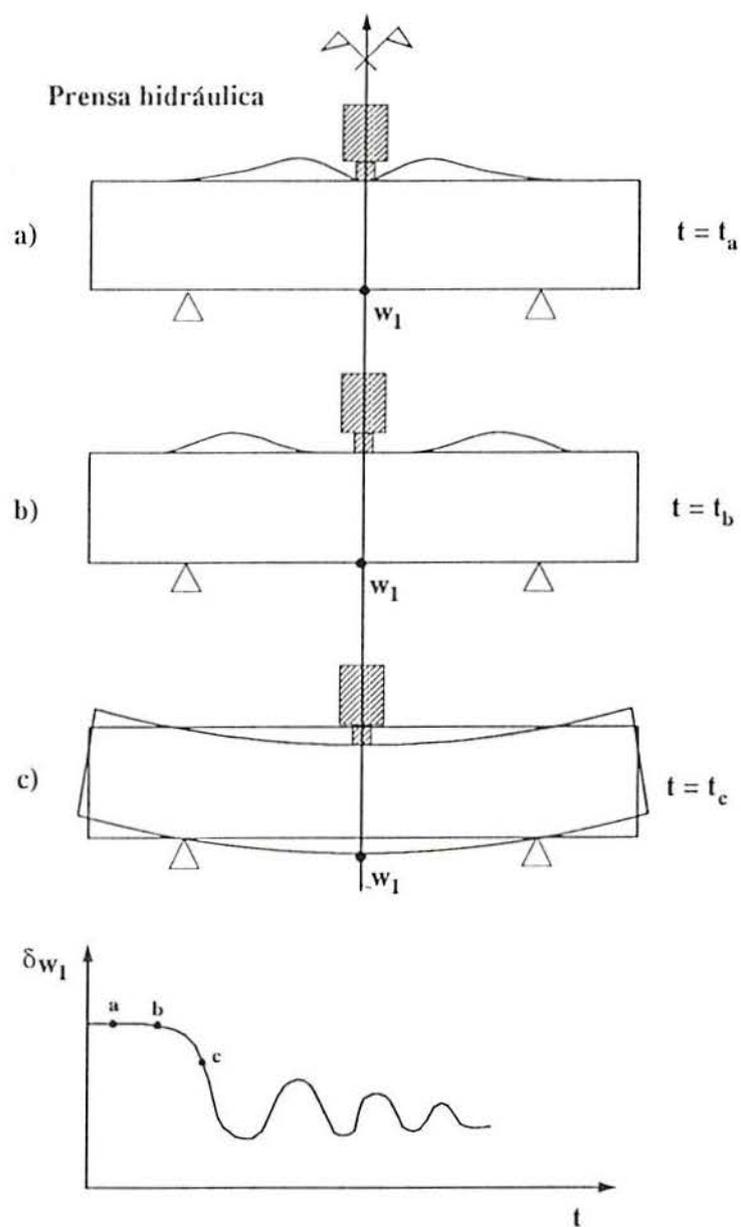


Figura 6.31: Esquema que explica a localização de dano na parte superior da viga ensaiada por Brandes (1981).

### 6.6.3 Placa de concreto armado submetida a uma carga de impacto em seu centro

#### Propriedades Geométricas e Mecânicas da Placa.

Se analisa a seguir uma placa de concreto armado ensaiada por HOCHTIEF (1981). A mesma foi modelada com elementos discretos por Rocha (1993), desenvolvimento tomado como base para melhorar a análise.

O modelo teórico com elementos discretos, foi realizado adotando como comprimento do modulo básico cúbico o valor de  $L_c = 11.74\text{cm}$ , o que implica considerar um tamanho máximo do agregado de aproximadamente 6cm, valor aceitável dadas as dimensões da placa. As dimensões resultantes do modelo se apresentam na tabela (6.6), comparadas com as dimensões reais da placa. Na figura (6.32) se mostra também um layout da placa com a localização de todos os pontos instrumentados.

-	Especimen [m]	Modelo [m]
Metade do Comprimento total na direção x	3.25	3.2872
Metade do Vão na direção x	2.70	2.7002
Metade do Comprimento total na direção y	3.00	3.0524
Metade do Vão na direção y	2.70	2.7002
Espessura da Placa	0.7	0.7044

Tabela 6.6: Comparação entre as dimensões do modelo físico e do modelo teórico com elementos discretos da placa ensaiada por HOCHTIEF (1981).

Na figura (6.33) se apresenta uma vista do modelo dos elementos discretos, onde se observa que foi modelada só um quarto da mesma, aproveitando a dupla simetria na geometria da placa. A consideração de isto na realidade é uma simplificação, já que, algumas das propriedades mecânicas do modelo são geradas aleatoriamente.

Por outro lado como a placa foi disposta verticalmente durante o ensaio, o peso próprio tiraria também simetria da mesma, mas o peso próprio é desconsiderado pois, neste caso, sua influência é mínima.

A carga impulsiva sobre a placa foi produzida através de um projétil (tubo de aço), mas mediante células de carga convenientemente colocadas sobre a estrutura foi possível medir a distribuição da carga aplicada vs. tempo, valores que são apresentados na tabela (6.6.3) e no gráfico da figura (6.34).

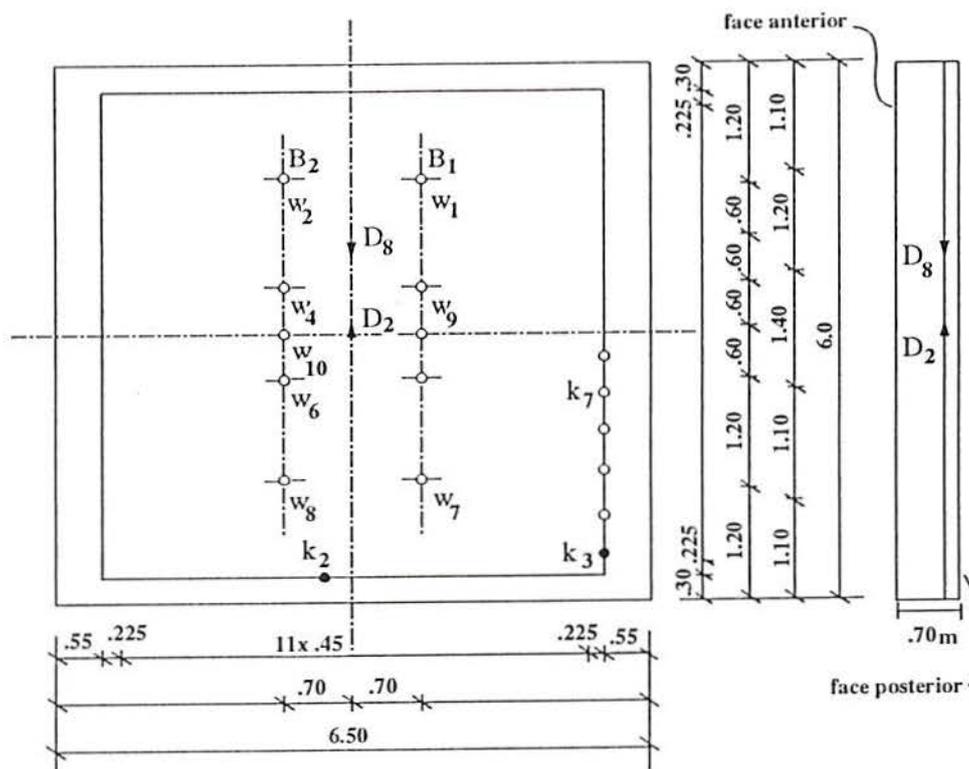


Figura 6.32: Layout da placa ensaiada por Vinckier (1981) com a localização dos pontos da placa instrumentados.

Tempo [ms]	0.0	1.0	15.5	15.5	15.5	33.5
$P(t)$ [MN]	0	8.57	6.6	15.5	33.0	0.0

Tabela 6.7: Distribuição temporal considerada para a carga aplicada sobre a placa ensaiada por HOCHTIEF (1981).

A distribuição espacial da carga se indica na figura (6.33), sendo que cada nó recebe 2.5% da carga total equivalente, salvo aqueles pontos que se encontram nos planos de simetria, que recebem 1.25% da carga total. A armadura da placa e a forma em que a mesma foi disposta no modelo se resume na tabela (6.6.3) (6.35).

Na figura (6.35) se mostra um layout do modelo dos elementos discretos indicando a disposição da armadura.

Os registros experimentais utilizados para comparar com os resultados teóricos são os seguintes:

- Deslocamentos vs. tempo nos pontos  $W_1, W_3, W_9$
- Acelerações vs. tempo no ponto  $B_1$ .
- Reação vs. tempo nos pontos:  $K_1$  e  $K_7$ .

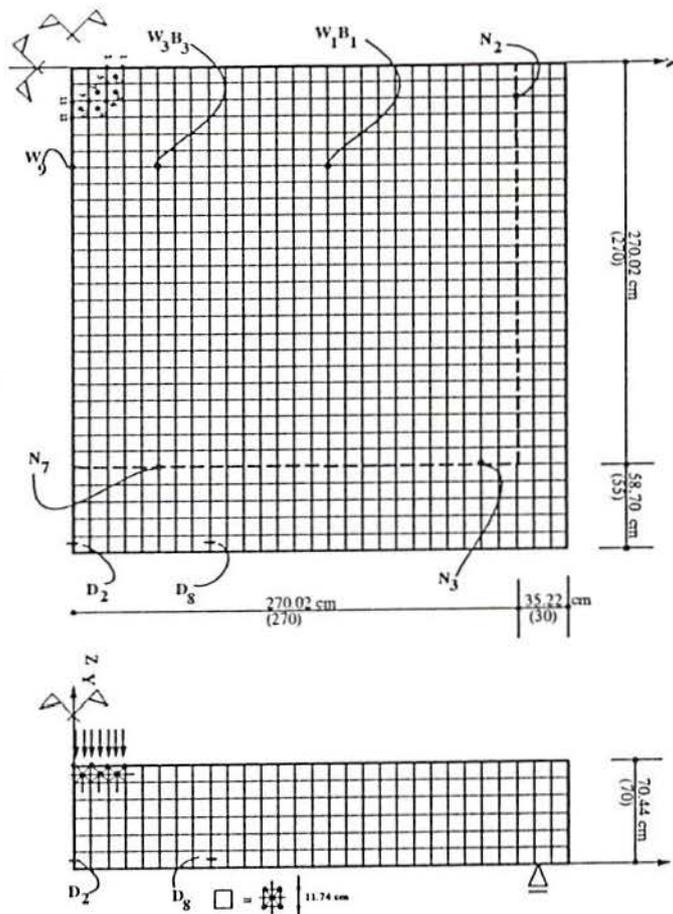


Figura 6.33: Esquema do Modelo teórico de um quarto da placa de HOCHTIEF (1981), com a distribuição espacial da carga adotada e dos pontos onde foram medidas as respostas

- Deformações na armadura de flexão vs. tempo nos pontos :  $D_2$  e  $D_8$   $D_{14}$  e  $D_{12}$

A localização dos pontos mencionados é apresentada na figuras (6.32 e 6.33).

As propriedades do concreto e do aço são apresentadas na tabela (6.9), junto com os valores de alguns parâmetros necessários para definir o modelo teórico, indicados a seguir:

- O valor esperado da energia específica de fratura  $E[G_f]$ , é estimada a partir das expressões apresentadas no código modelo do FIP-CEB resumidas no anexo A-1.
- Os valores de deformação crítica  $\varepsilon_p$  o fator de ruptura  $R_f$ , e o coeficiente de amortecimento  $D_f$  foram fixados a partir dos estudos paramétricos realizados por Rocha (1990).

Aço RF 420/500	Estrutura	Modelo Teórico
Armadura de Tração	$\phi 25c/12.5cm(40.1cm^2/m)$	$\phi 24.22c1.74cm(40.12cm^2/m)$
Armadura de compressão	$\phi 18c/12.5cm(20.4cm^2/m)$	$\phi 17.44c1.74cm(20.42cm^2/m)$
Armadura de corte	$\phi 20c/25cm(52.3cm^2/m^2)$	$\phi 9.57c1.74cm(52.3cm^2/m^2)$

Tabela 6.8: Comparação entre a armadura do modelo físico e do modelo teórico no caso da placa ensaiada por HOCHTIEF (1981).

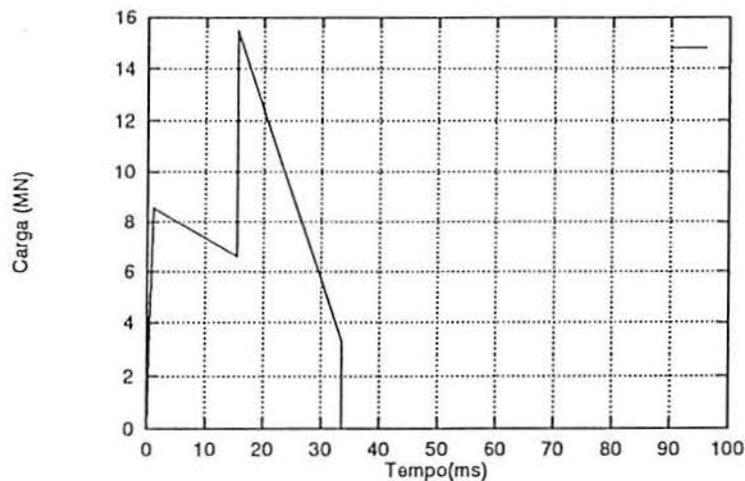


Figura 6.34: Distribuição temporal da carga considerada no modelo teórico da placa ensaiada por HOCHTIEF (1981).

- O coeficiente de variação da energia específica de fratura  $CVA[G_f]$  e estimado num 5%. Maiores estudos são necessários para determinar criterios mais claros na a definição deste parâmetro
- Os parâmetros relacionados com a interação aço-concreto foram adotados iguais aos valores utilizados na viga ensaiada por Brandes (1981).

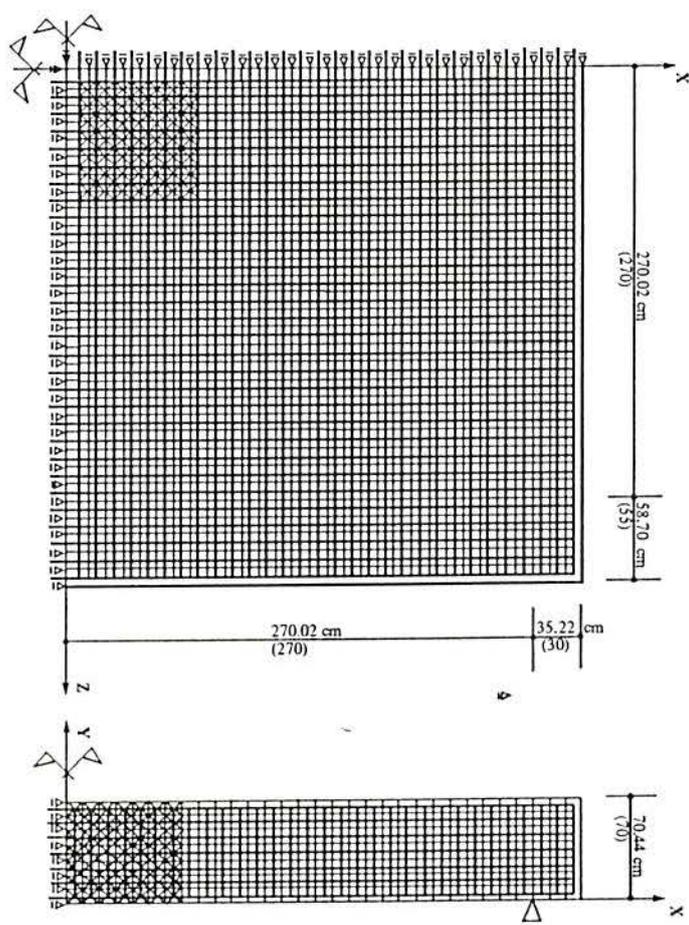


Figura 6.35: Modelo teórico com elementos discretos (DEM) de um quarto da placa de HOCHTIEF (1981) indicando a disposição das barras de armadura

Concreto	
$E_c$	$3.3E10N/m^2$
$\nu_c$	0.2
$f_t$	$42.9N/m^2$
$\rho_c$	$2500Kg/m^3$
Aço	
$E_s$	$21E10N/m^2$
$f_y$	495MPa
$\rho_s$	$6812Kg/m^3$

Parâmetros do modelo teórico	
$E[G_f]$	200N/m
$CVA[G_f]$	5%
$R_f$	$1.636m^{(-1/2)}$
$p$	$1.3E - 4$
$D_f$	$60s^{-1}$
$\xi$	14
$L_c/L_r$	2

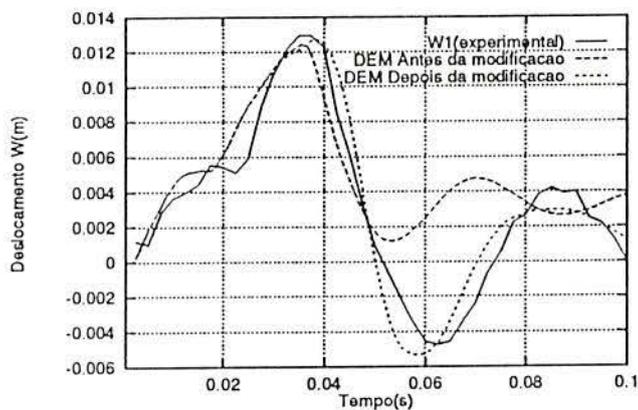
Tabela 6.9: Propriedades dos materiais empregados e valores dos parâmetros necessários para criar o modelo teórico da placa de HOCHTIEF (1981).

## Apresentação dos Resultados

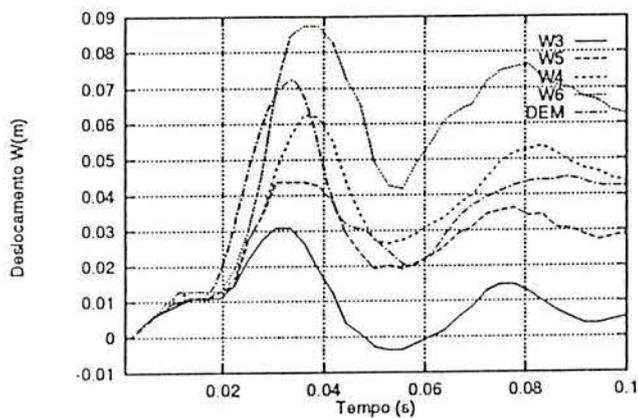
A continuação são apresentados os gráficos com os seguintes resultados:

- Na figura (6.36) se apresenta a comparação da resposta teórica em termos dos deslocamentos nos pontos  $W_1, W_3, W_9$  vs. tempo. No primeiro dos gráficos ( $W_1$  vs tempo) se comparam os resultados experimentais com as respostas obtidas com o modelo teórico antes e após realizar a correção do modulo de descarga das barras do aço como é explicado na secção (6.3). Na figura (6.37) se apresentam os resultados de deslocamentos nos pontos citados vs. tempo obtidos com um programa de elementos finitos NONDYN apresentados por Vinckier (1983). É possível observar a boa correlação dos resultados numéricos e experimentais antes e após atingir a resposta máxima.
- Na figura (6.38) se apresenta uma comparação das respostas teóricas e experimentais em termos das deformações nos pontos  $D_2$  e  $D_8$   $D_{14}$  e  $D_{12}$  vs. tempo.
- Na figura (6.39) se apresenta a comparação teórica e experimental de acelerações vs. tempo.
- Nas figuras (6.40) e (6.41) se apresentam as forças reativas calculadas nos pontos  $K_1, K_7$  vs. tempo respectivamente. É importante salientar que a comparação entre os valores experimentais e numéricos deve ser feita de forma relativa, já que a área de influência das reações em um e outro caso é diferente.
- Nas figuras (6.42) e (6.43) se apresenta uma comparação das configurações finais da placa de HOCHTIEF (1981) obtidas com o modelo teórico e um croqui realizado a partir dos resultados experimentais, apresentando-se um corte e uma vista em planta. Cabe salientar que nos modelos teóricos não aparecem as barras diagonais por limitações na visualização.
- Finalmente na figura (6.44) se apresenta a evolução das energias durante todo o ensaio o qual ilustra que 60% da energia entregue ao sistema foi dissipada pela deformação plástica da armadura.

a)



b)



c)

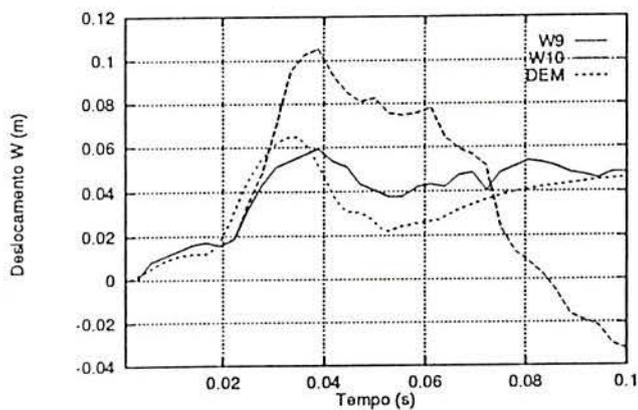


Figura 6.36: Comparação da resposta teórica e experimental em termos dos deslocamentos nos pontos  $W_1$ ,  $W_3$  e  $W_9$  da placa ensaiada por HOCHTIEF (1981).

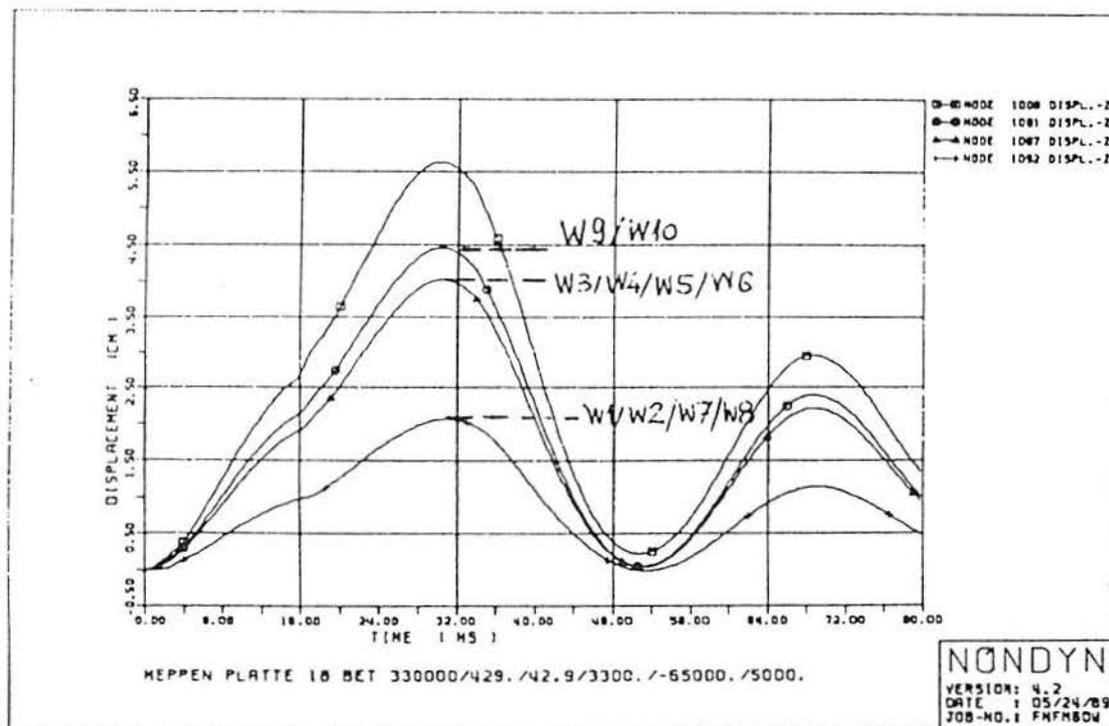
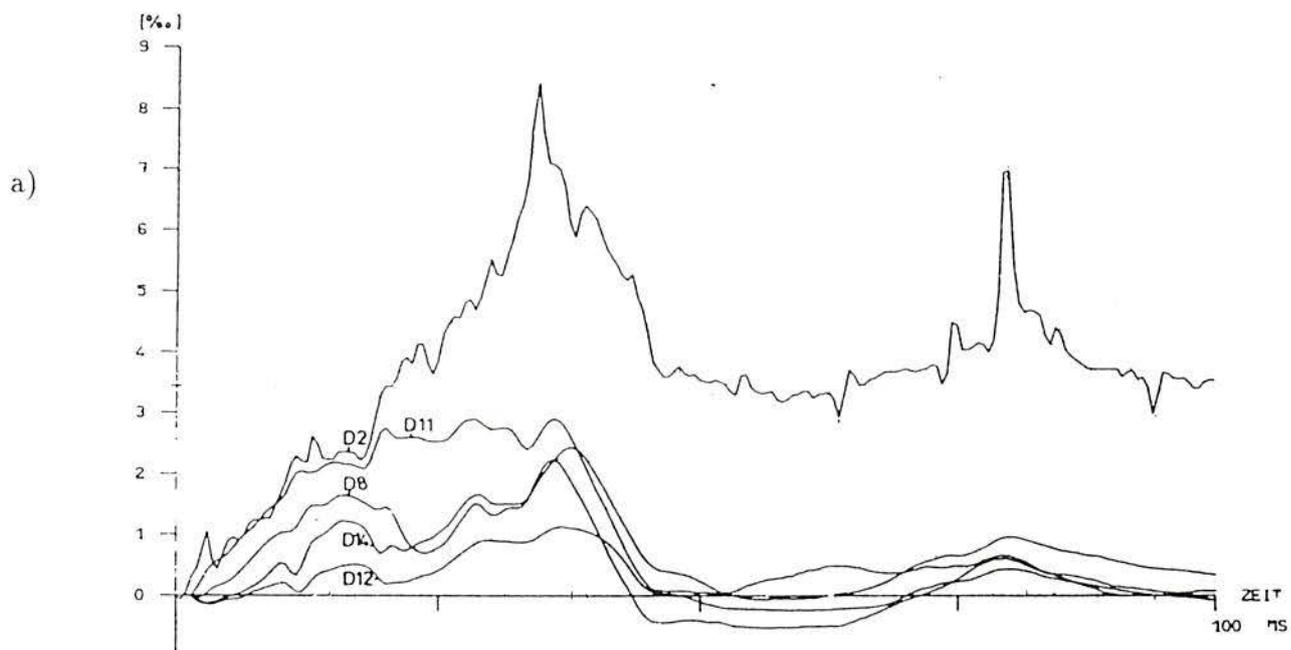


Figura 6.37: Resultados obtidos com um programa de elementos finitos NONDYN, apresentados por Vinckier (1983) em termos dos deslocamentos nos pontos  $W_1, W_3$  e  $W_9$  da placa ensaiada por HOCHTIEF (1981).



b)

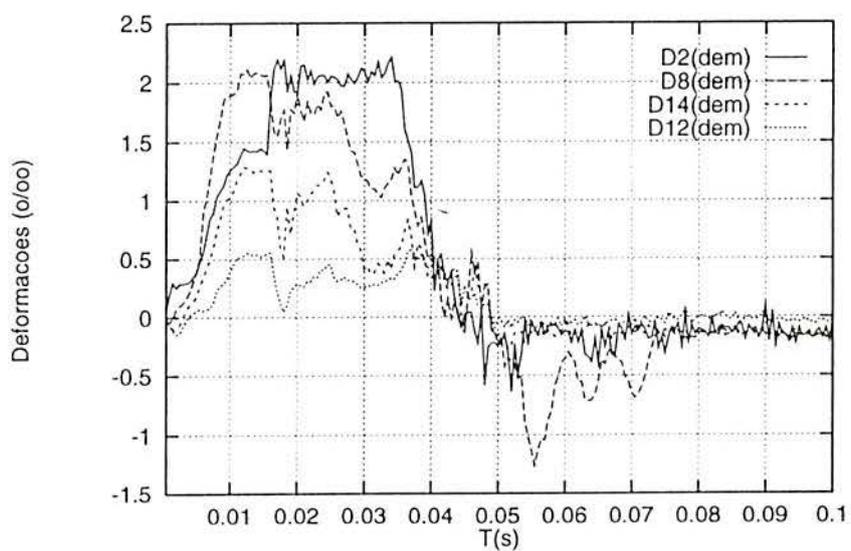
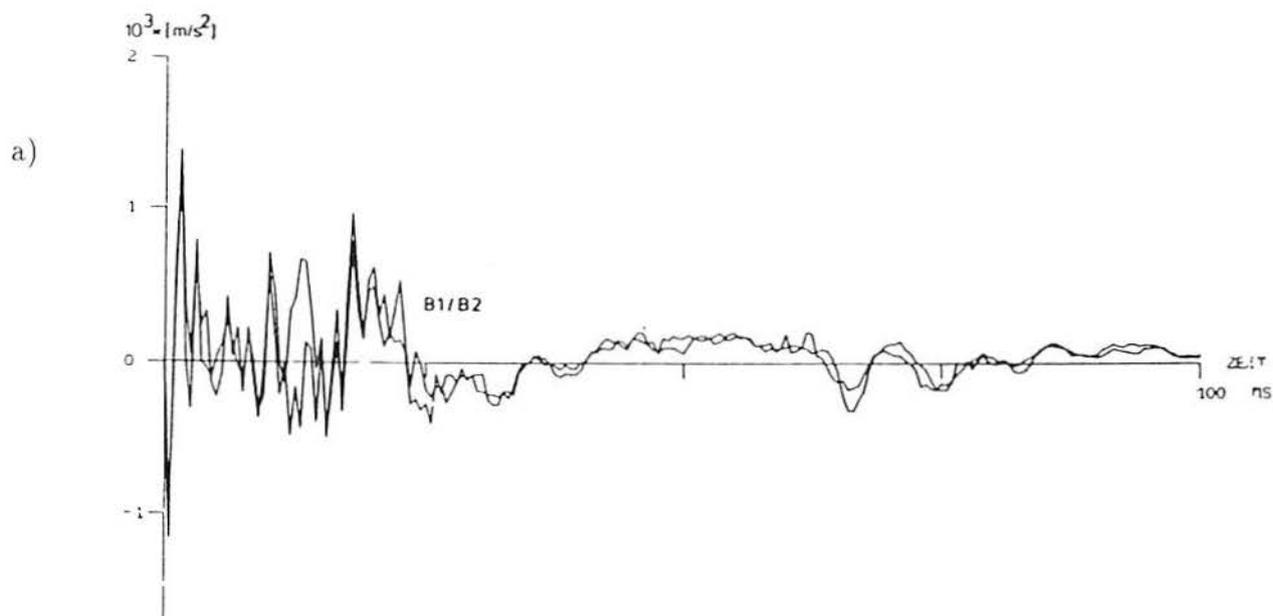


Figura 6.38: Comparação da resposta a)experimental e b)teórica em termos das deformações nos pontos  $D_2$  e  $D_8$   $D_{14}$  $D_{12}$  vs. tempo da placa ensaiada por HOCHTIEF (1981).



b)

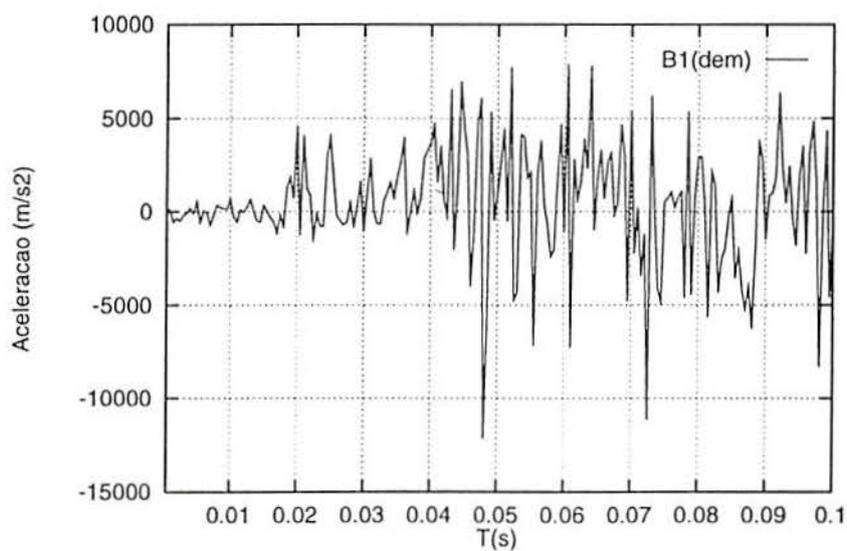
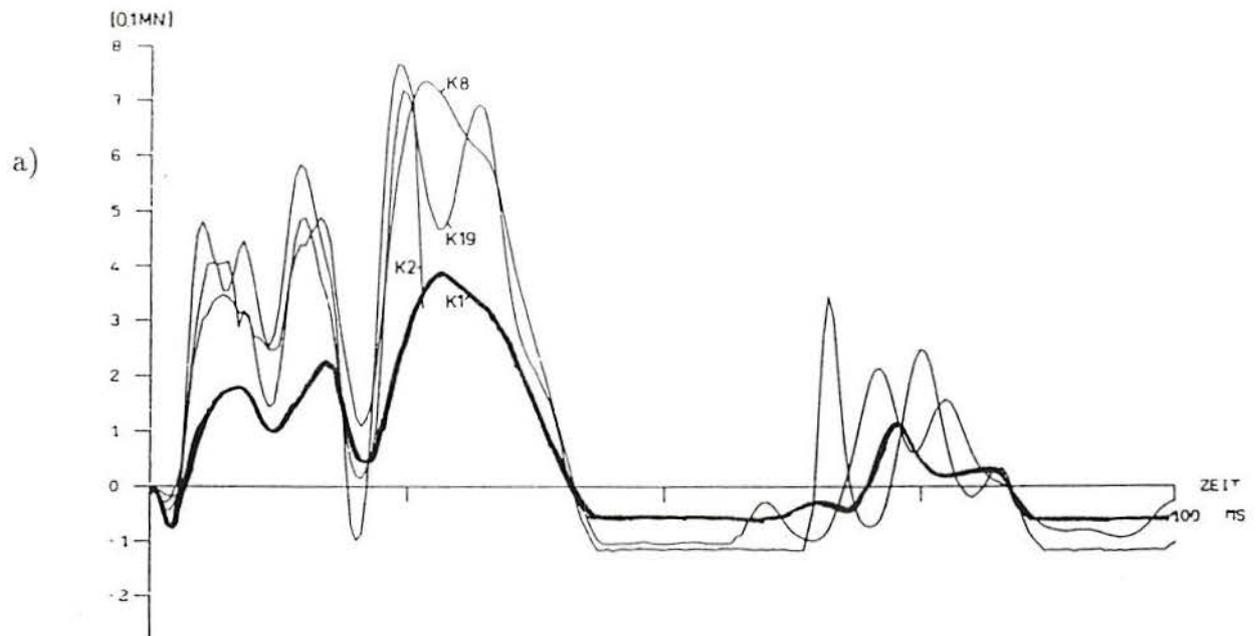


Figura 6.39: Comparação das respostas a) experimental e b) teórica em termos das acelerações vs tempo no ponto  $B_1$  da placa de HOCHTIEF (1981).



b)

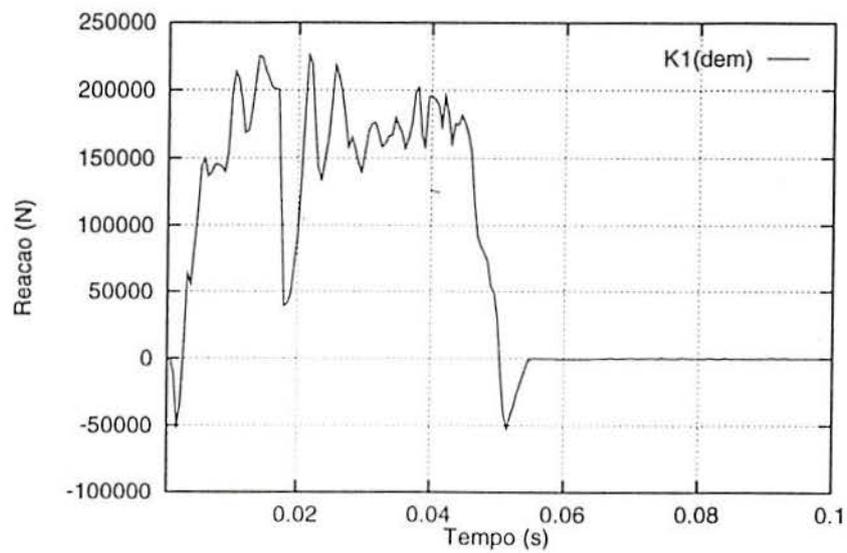
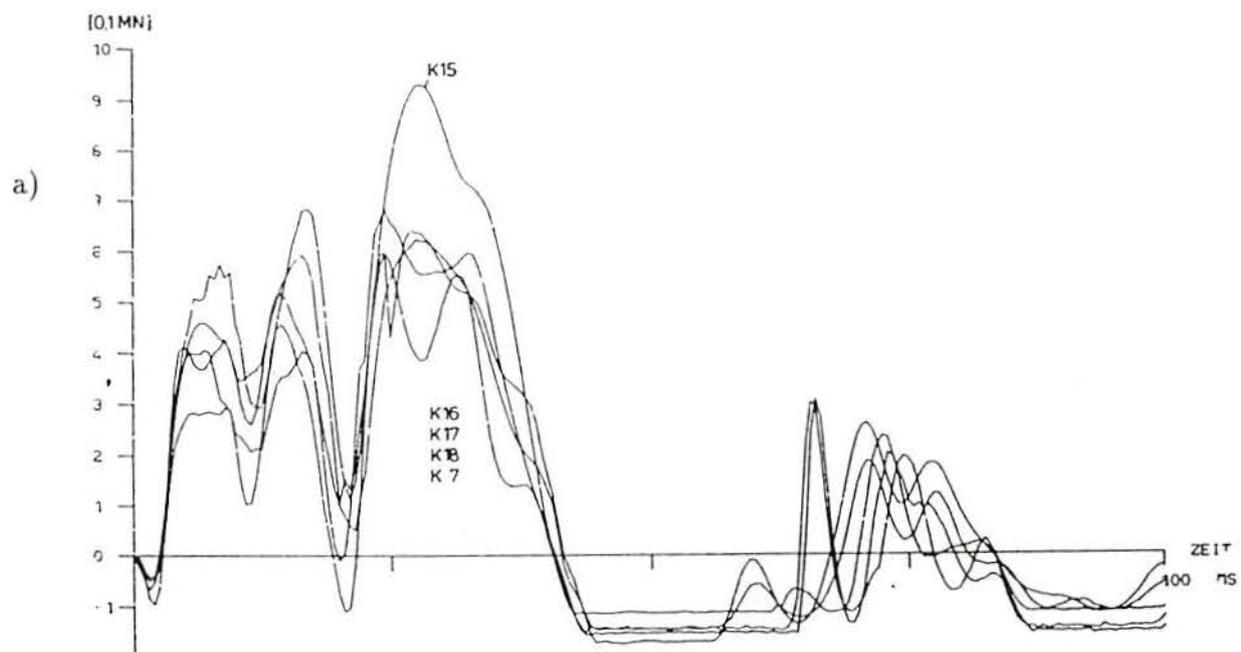


Figura 6.40: Comparação da resposta a) experimental e b) teórica em termos da força reativa .vs. tempo no ponto  $K_1$  da placa de HOCHTIEF (1981).



b)

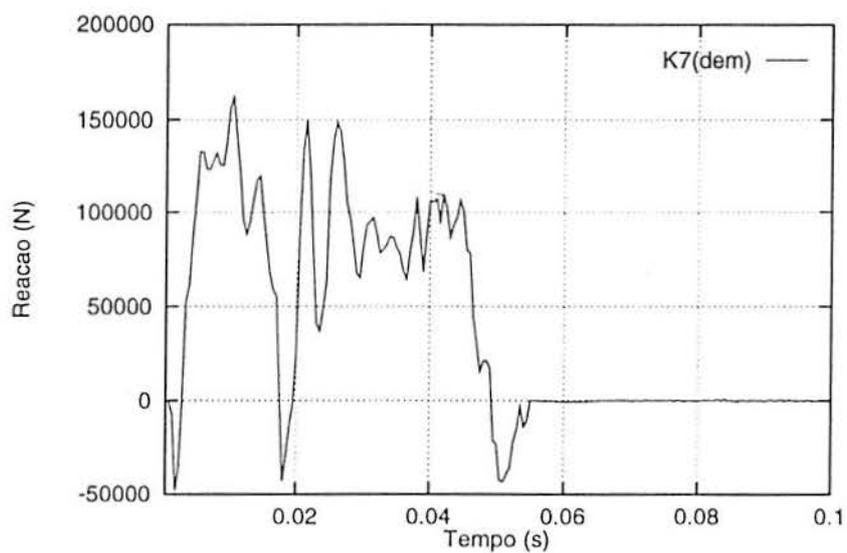


Figura 6.41: Comparação da resposta a) experimental e b)teórica em termos da força reativa .vs. tempo no ponto  $K_7$  da placa de HOCHTIEF (1981).

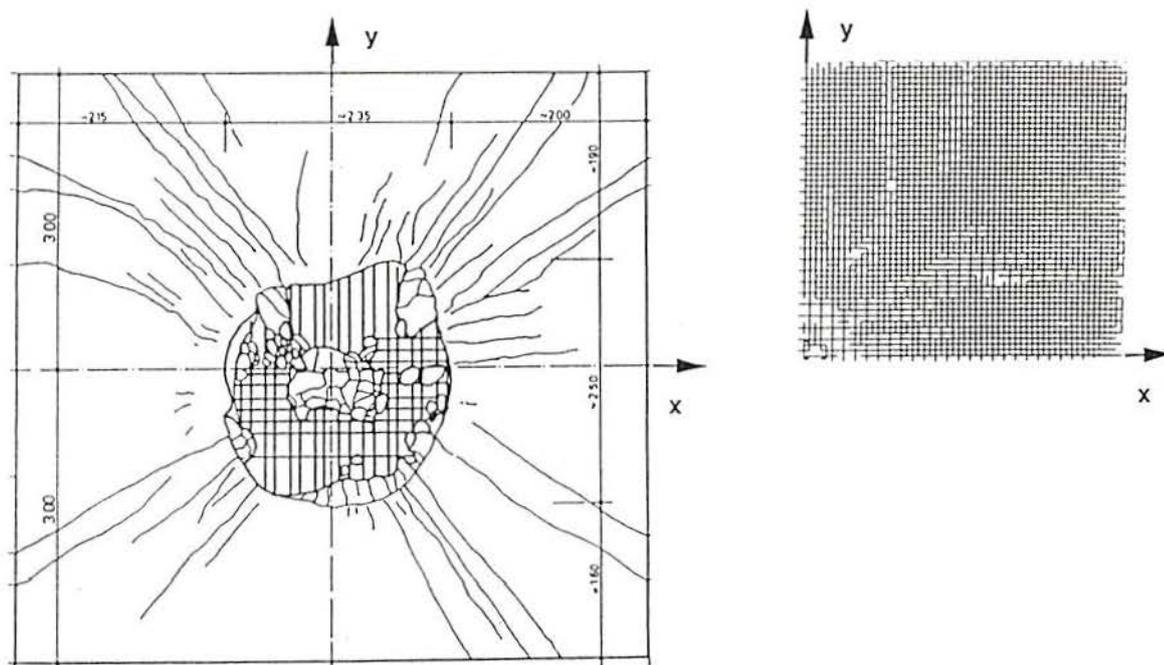


Figura 6.42: Comparações entre a configuração final I) experimental II) teórica da placa ensaiada por HOCHTIEF (1981) Vista de Planta.

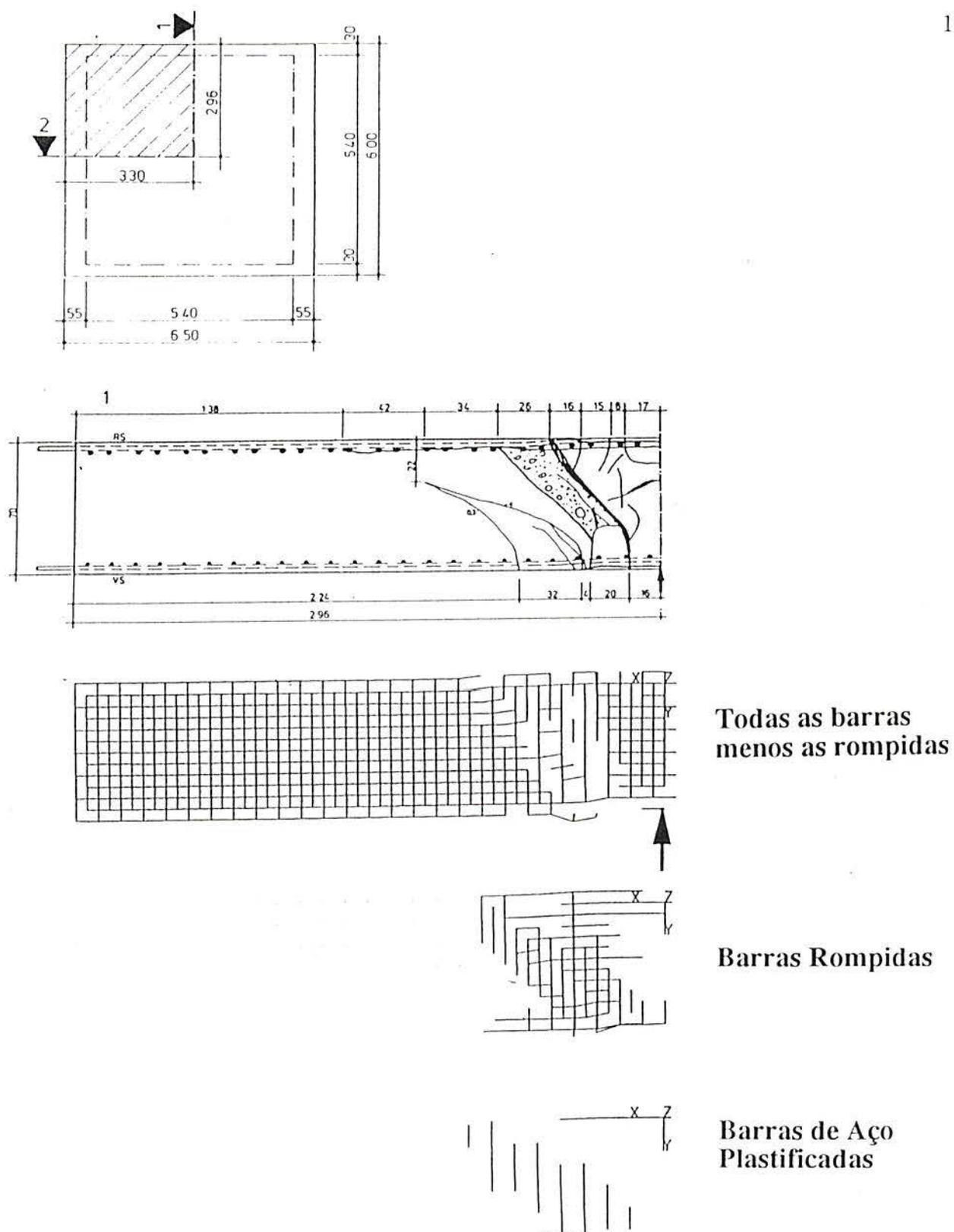


Figura 6.43: Comparações entre a configuração final I) experimental II) teórica da placa ensaiada por HOCHTIEF (1981). Vista do corte.

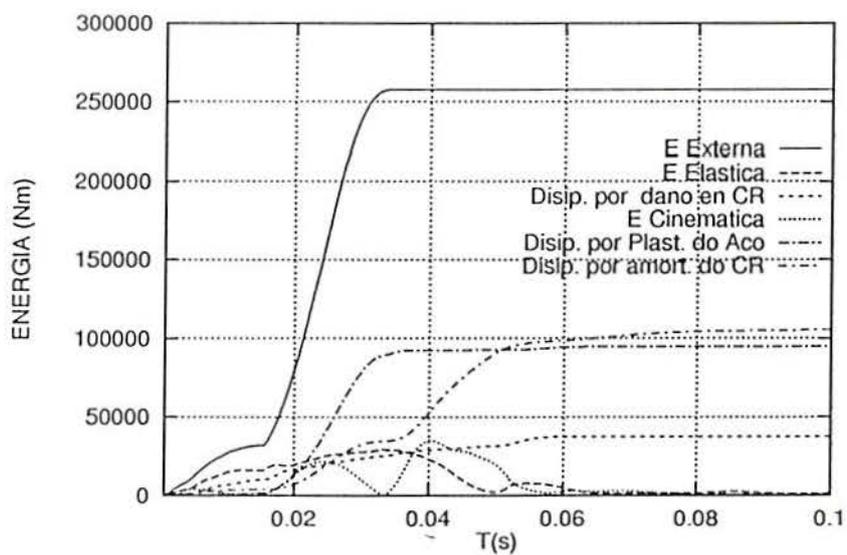


Figura 6.44: Evolução dos diferentes tipos de energias dissipadas durante o processo para a placa ensaiada por HOCHTIEF (1981).

### 6.6.4 Casca Cilíndrica de Concreto Armado

Características gerais do modelo físico e teórico da casca

Como último exemplo de estruturas de concreto armado se apresenta uma casca cilíndrica ensaiada por Uchida 'et al' (1985) sob a ação de um deslocamento prescrito em seu centro aplicado a uma velocidade constante de  $3m/s$ .

As propriedades geométricas da casca assim como a distribuição da armadura são apresentadas na figura (6.45). As propriedades mecânicas e as características da excitação aplicada são resumidas na tabela (6.10), com os parâmetros adicionais necessários para definir o modelo teórico

Só um quarto da casca foi modelado considerando dupla simetria da mesma, a qual é uma hipótese simplificativa, dada as características de anisotropia do concreto.

Concreto	
	Deslocamento prescrito com uma velocidade de ( $3m/s$ )
$f_c$	$51.0MPa$
$f_t$	$6.4MPa$
$E_c$	$43200MPa$

Aço	
$\sigma_y$	$445MPa$
$\sigma_u$	$646MPa$
$E_s$	$20E10MPa$
Taxa de Armadura	$0.4\%$

Modelo	
$E_{[G_f]}$	$120N/m$
$CVA_{[G_f]}$	$10\%$
$R_{f_c}$	$2.56m^{(-1/2)}$
$L_c$	$0.03m$
$D_f$	$27.5s^{(-1)}$
$L_c/L_r$	$2$
$\xi$	$14$

Tabela 6.10: Propriedades e parâmetros de entrada para o modelo teórico da casca cilíndrica de Uchida (1985).

O modelo teórico da casca é apresentado na figura (6.46) formado por 19302 barras de concreto, 660 barras de aço e 3399 nós, onde também se ilustra as condições de borda adotadas

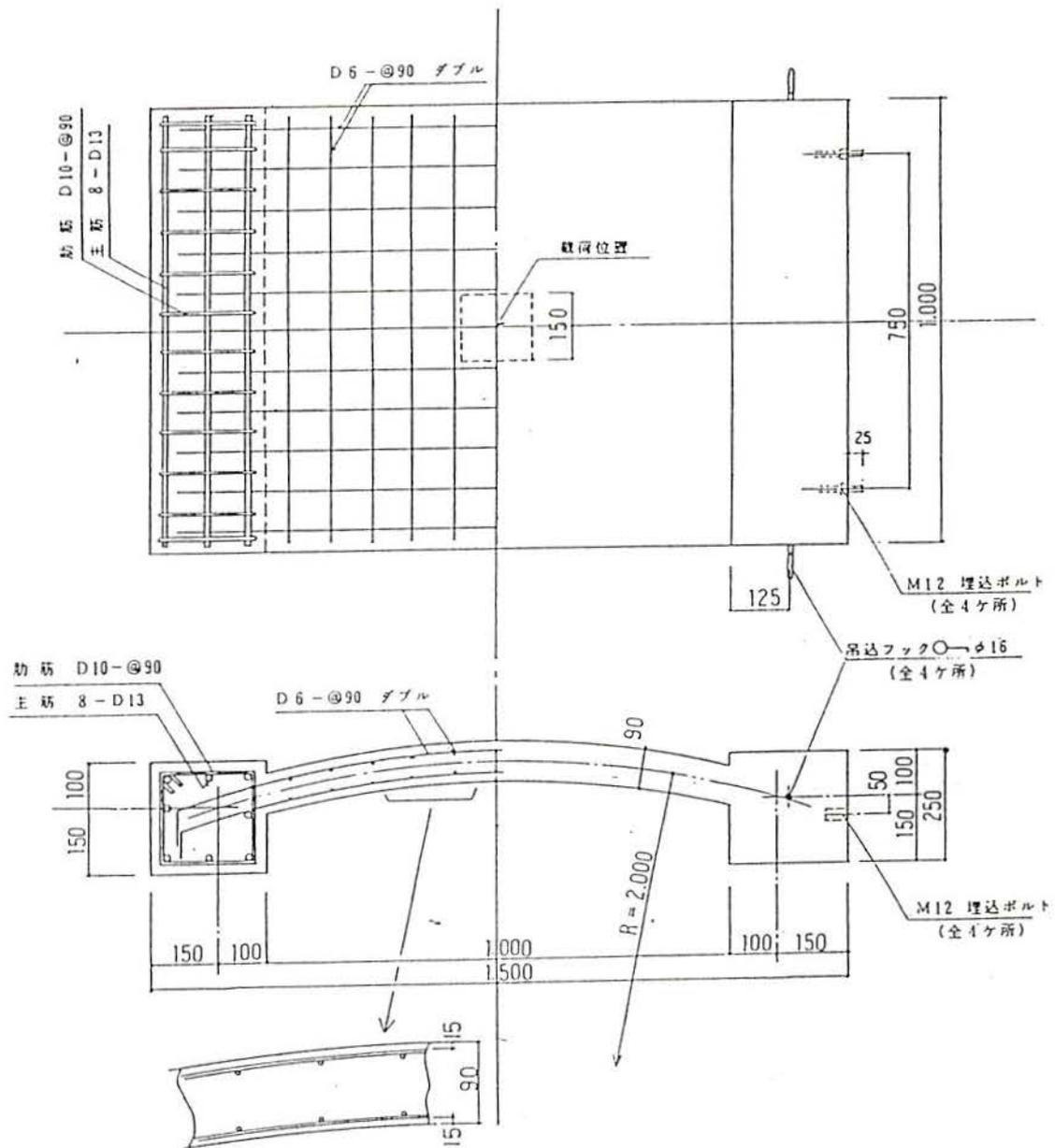


Figura 6.45: 'Layout' da casca cilíndrica de Uchida 'et al' (1985).

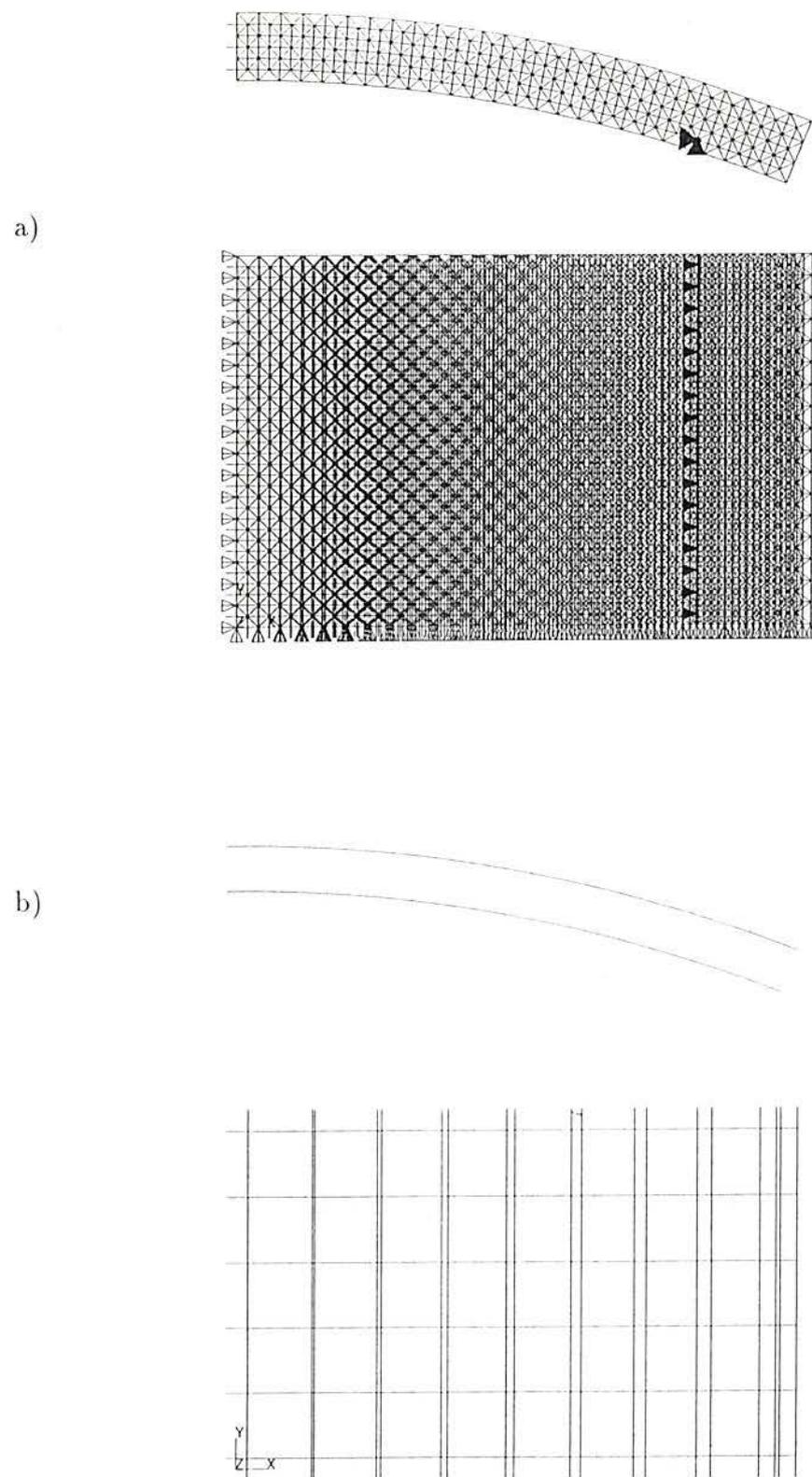


Figura 6.46: Modelo discretizado da casca cilíndrica ensaiada por Uchida 'et al' (1985).a) Modelo teórico completo, b) Disposição das barras de aço.

## Apresentação dos Resultados

Na figura (6.47.b) se compara os resultados obtidos de três simulações (a,b,c) e os resultados experimentais em termos de deslocamentos em função do tempo nos pontos D1 e D2, sua localização se indica na figura (6.47.a).

Na figura (6.48) são apresentadas fotografias que ilustram a configuração final da casca ensaiada. Na figura (6.49) se apresenta a configuração final obtida com o modelo teórico, e também, o estado final das barras de armadura.

Finalmente na Figura (6.50) se apresenta a evolução da energia vs. tempo da casca cilíndrica.

Levando em conta o alto nível de dano sofrido pela casca durante o ensaio e a simplificação realizada na consideração das condições de borda e na aplicação da excitação, os resultados obtidos são mais que satisfatórios.

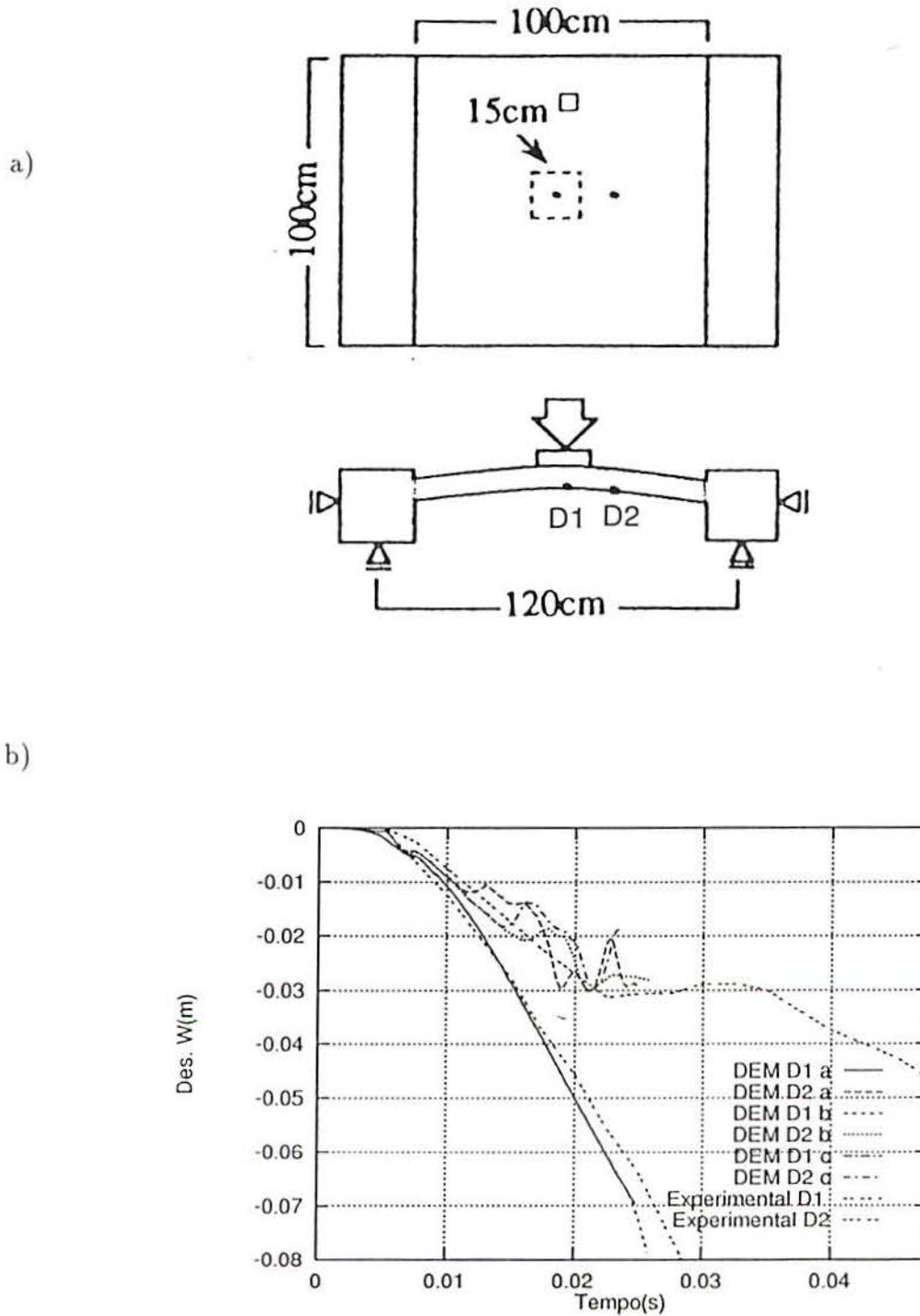
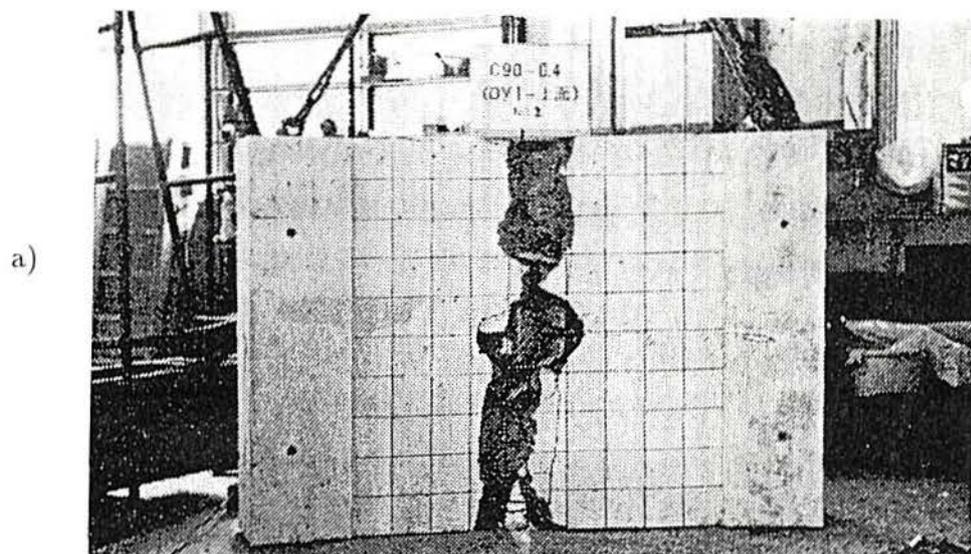


Figura 6.47: a) Localização espacial dos pontos de medição D1 e D2. b) Comparação de resultados teóricos e experimentais em termos de deslocamento nos pontos D1 e D2 em função do tempo para o caso da casca cilíndrica de Uchida (1985).



b)

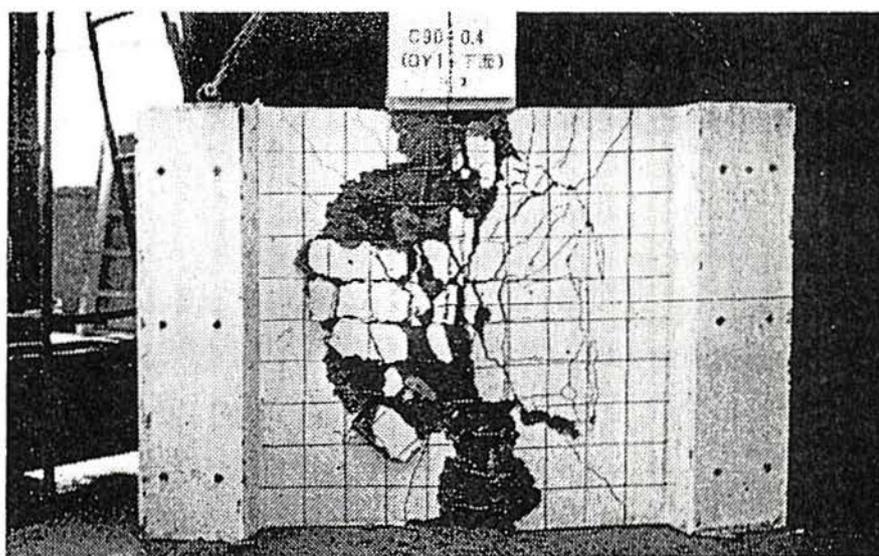


Figura 6.48: Configuração final da casca ensaiada por Uchida (1985).a) Vista anterior, b) Vista Posterior.

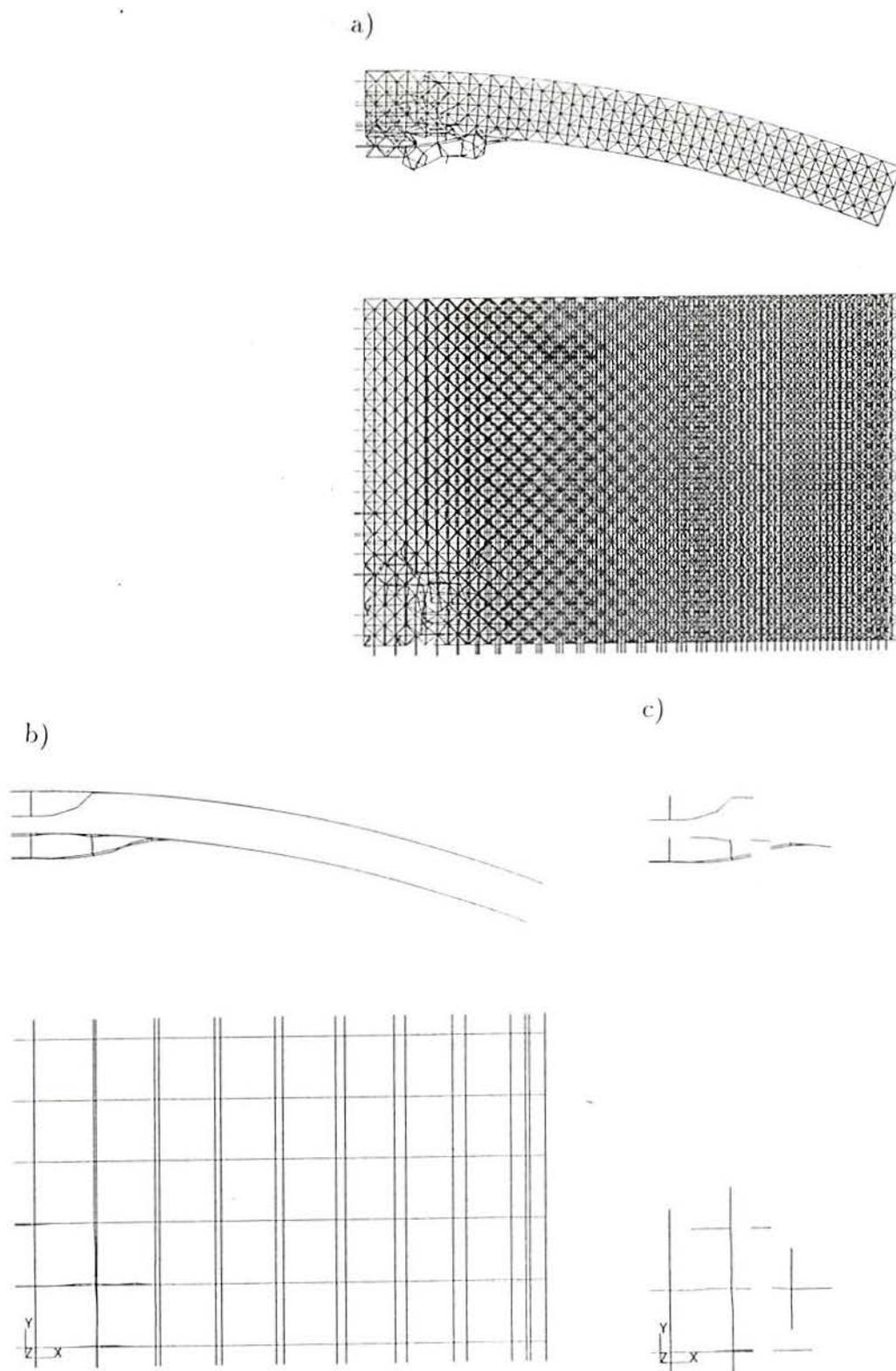


Figura 6.49: Configuração final obtida com o modelo teórico da casca ensaiada por Uchida (1985). a) Vistas com todas as barras menos as fraturadas, b) Vistas com todas as barras de aço, c) Vistas com as barras de aço que plastificaram.

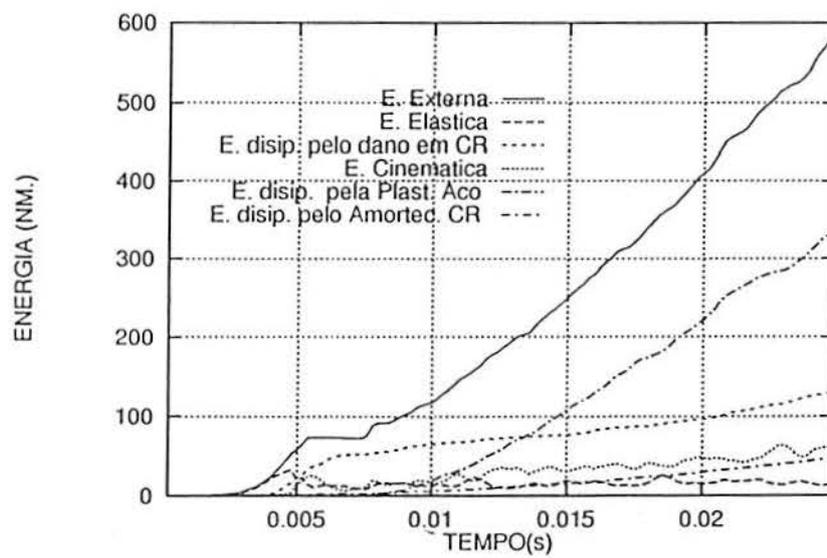


Figura 6.50: Evolução das energias .vs. tempo do modelo teórico obtido com DEM da casca cilíndrica ensaiada por Uchida (1985).

## 7 ASPECTOS COMPUTACIONAIS

### 7.1 Generalidades

A implementação computacional do método dos elementos discretos foi feita num computador pessoal PC, mas o interesse em rodar exemplos de maior envergadura obrigou á utilização de computadores de maior porte. Foram então aproveitados os recursos disponíveis no CESUP da UFRGS isto é, um supercomputador CRAY YMP-2E e uma estação de trabalho multiprocessadora Silicon Graphics (4 CPUs R4400). A utilização destes equipamentos permitiu verificar alguns aspectos do algoritmo e aproveitar em maior medida as características computacionais desta nova geração de computadores, ligadas principalmente a vetorização e paralelização do algoritmo de cálculo. Estes modificaram o critério que define se um algoritmo é ou não eficiente computacionalmente. Paralelização e vetorização podem apresentar-se de forma simultânea ou não, como características de um computador, por isso diz-se que ambos conceitos são independentes entre si. Em termos gerais, os aspectos mencionados são melhor aproveitados quando os programas são baseados em operações simples, repetidas uma grande quantidade de vezes. Como se verá mais adiante, o método de cálculo proposto segue essa filosofia de trabalho.

Tais novas características dos computadores têm conduzido a uma revolução na produção de software comercial, tornando os métodos de integração explícita competitivos frente aos métodos implícitos, não só em problemas altamente transientes (problemas de ordem de microsegundos), bem como em casos em que os algoritmos implícitos eram inquestionavelmente a melhor opção a seguir. Isto justifica, em parte, a maior importância que os produtores de software de elementos finitos estão dando aos métodos explícitos como, por exemplo, os programas DYTRAN (1990) e ABAQUS/Explicit (1995), ambos pacotes comerciais para realizar análise explícita de problemas de engenharia.

A seguir, são explicados, brevemente, o que é vetorização e paralelização de programas e posteriormente é analisado o desempenho do algoritmo com que se trabalha.

### 7.2 Conceitos Básicos

#### 7.2.1 Vetorização

A idéia de vetorização está basicamente associada a realização do processamento de operações em grupos. Em termos computacionais, um escalar está associado a uma posição de memória, e um vetor a uma série de posições contíguas na memória. De um modo geral, as linguagens de programação dispõem de instruções que permitem

manipular vetores. Por exemplo, o produto de dois vetores de dimensão  $n$  poderia ser expressado na linguagem FORTRAN, da seguinte forma:

```
DO 10 I=1, M
10 Z(I)=X(I)*Y(I)
```

e para obter cada elemento do vetor  $Z$ , o computador deverá decompor a operação  $Z(i)=X(i)*Y(i)$  numa série de operações básicas de mais baixo nível (por exemplo, armazenar  $X(i)$  em um registrador, carregar  $Y(i)$  em outro registrador, realizar o produto, etc.). Denominam-se registradores as memórias especiais que o computador utiliza para armazenar temporariamente os dados que estão sendo transformados por alguma operação. Considerando que cada componente do vetor  $Z$  seja um “carro pronto” e que cada uma das operações básicas mencionadas representa alguma tarefa necessária para confeccioná-lo, poderia-se dizer que, no caso dos computadores escalares, se realizam todas as tarefas necessárias para terminar de montar um “carro” antes de começar a montagem de outro. É a forma de trabalhar dos computadores escalares.

No caso de computadores com arquitetura vetorial, os “carros” entram em uma “linha de montagem” de comprimento  $N$ , que permite ir armando  $N$  “carros” simultaneamente. Desta forma, os primeiros carros a sair da “linha de montagem” demorarão mais tempo, mas uma vez que o sistema entre em regime, a velocidade com que os “carros” ficam prontos é maior. Na figura (7.1), ilustram-se os processos antes explicados referidos ao caso do produto de dois vetores.

Cabe efetuar algumas observações interessantes sobre este tema:

a) Para poder pagar o custo de entrada e saída de regime da “linha de montagem” é importante que o comprimento  $n$  da fila seja suficientemente extenso frente ao comprimento  $N$  da linha de montagem. Em outras palavras, no caso de vetores curtos, a vetorização pode ser prejudicial;

b) O número  $N$  (ver figura 7.1) que mede o comprimento da linha de montagem é uma característica do computador.

c) É fácil deduzir que nem todos os processos envolvidos em *loops* podem ser tratados vetorialmente. Sobre este particular, há uma série de regras a serem aplicadas na hora de programar para melhorar a vetorização do programa. Entre elas pode-se mencionar:

- só será vetorizado o *loop* mais interno
- não é possível vetorizar *loops* onde se realizam tarefas que apresentem dependência de dados como, por exemplo, a seguinte operação vetorial  $Z(i)=Z(i-1)+X(i)*Y(i)$  a qual em código FORTRAN ficaria:

```

D010 I=1
10  Z(I)=Z(I-1)+X(I)*Y(I)

```

onde o valor  $Z(i)$  da iteração atual faz referência a um valor obtido em uma iteração diferente da atual. Cada valor do vetor  $Z$  só estará disponível ao final de toda a sequência de operações necessárias para seu cálculo.

- A realização de operações de E/S dentro de um *loop* inibe sua vetorização.

d) As linguagens de programação (C, FORTRAN) implementadas em computadores vetoriais dispõem de recursos tais como pré-compiladores que podem modificar o código do programa respeitando a lógica do mesmo para otimizar sua performance. Estas facilidades também estão disponíveis em computadores que permitem processamento em paralelo.

## 7.2.2 Paralelização

Paralelizar um determinado problema consiste em distribuir, entre as várias CPUs disponíveis, tarefas que possam ser realizadas simultaneamente para minimizar o tempo de espera (problema de caminho crítico).

Também nesta análise, entra em jogo o fato de que gerenciar a utilização de vários processadores simultaneamente implica num gasto de tempo envolvendo troca de mensagens (entre as CPUs envolvidas) necessárias para a sincronização dos processos. Para que esta forma de trabalho apresente alguma vantagem, o tempo adicional gasto deve ser inferior à redução de tempo obtida por meio da paralelização. Se deduz, então, que para cada problema específico, há um número ótimo de processadores a serem utilizados.

Na figura (7.3) apresenta-se um esquema que ilustra o cálculo de vários processadores trabalhando em paralelo no caso do produto de dois vetores, onde indica-se que as unidades funcionais poderiam ser vetoriais ou escalares.

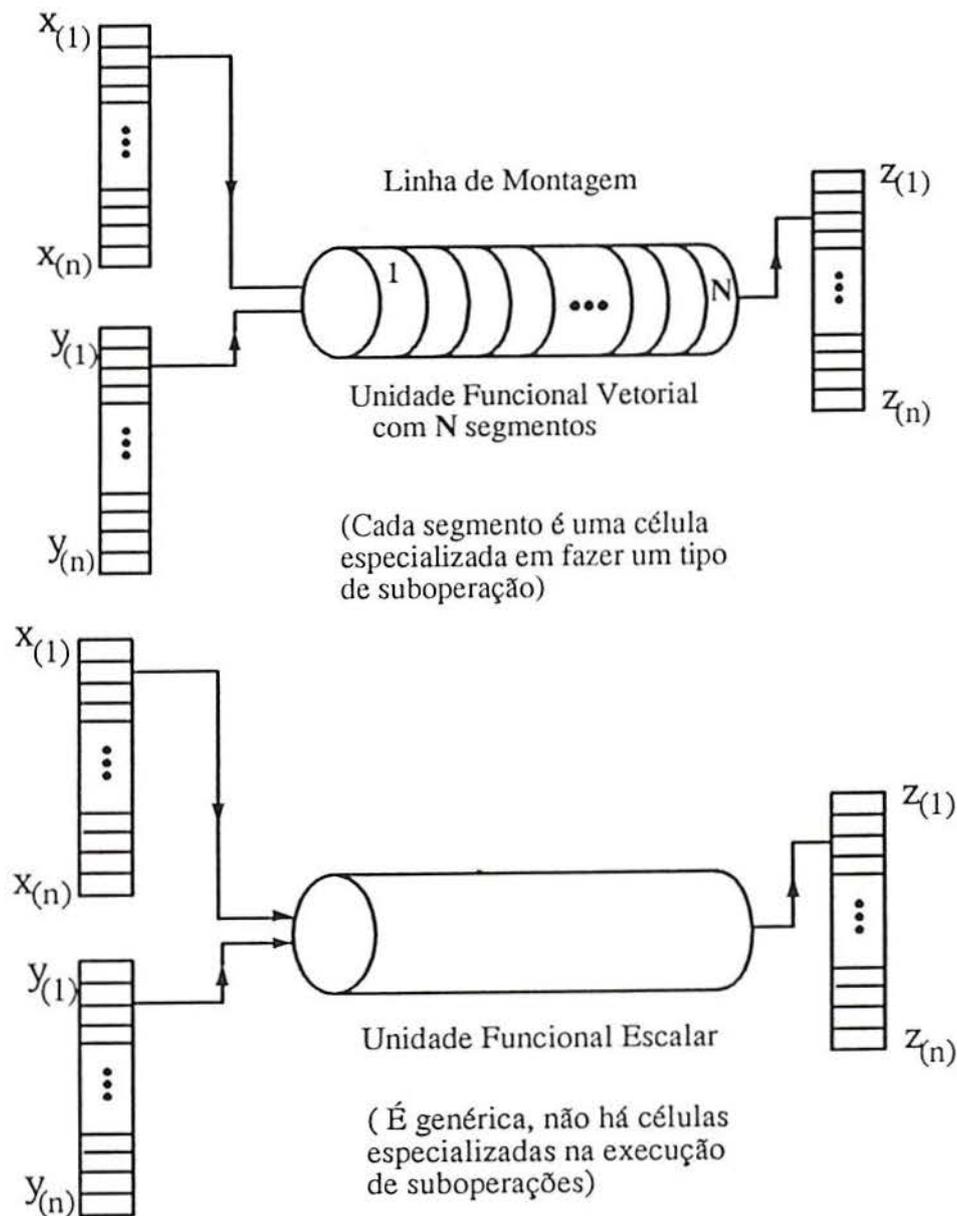


Figura 7.1: Esquema de um processamento vetorial (a) e um processamento escalar (b) para o caso de um produto de dois vetores ( $Z(i) = X(i) * Y(i)$ )

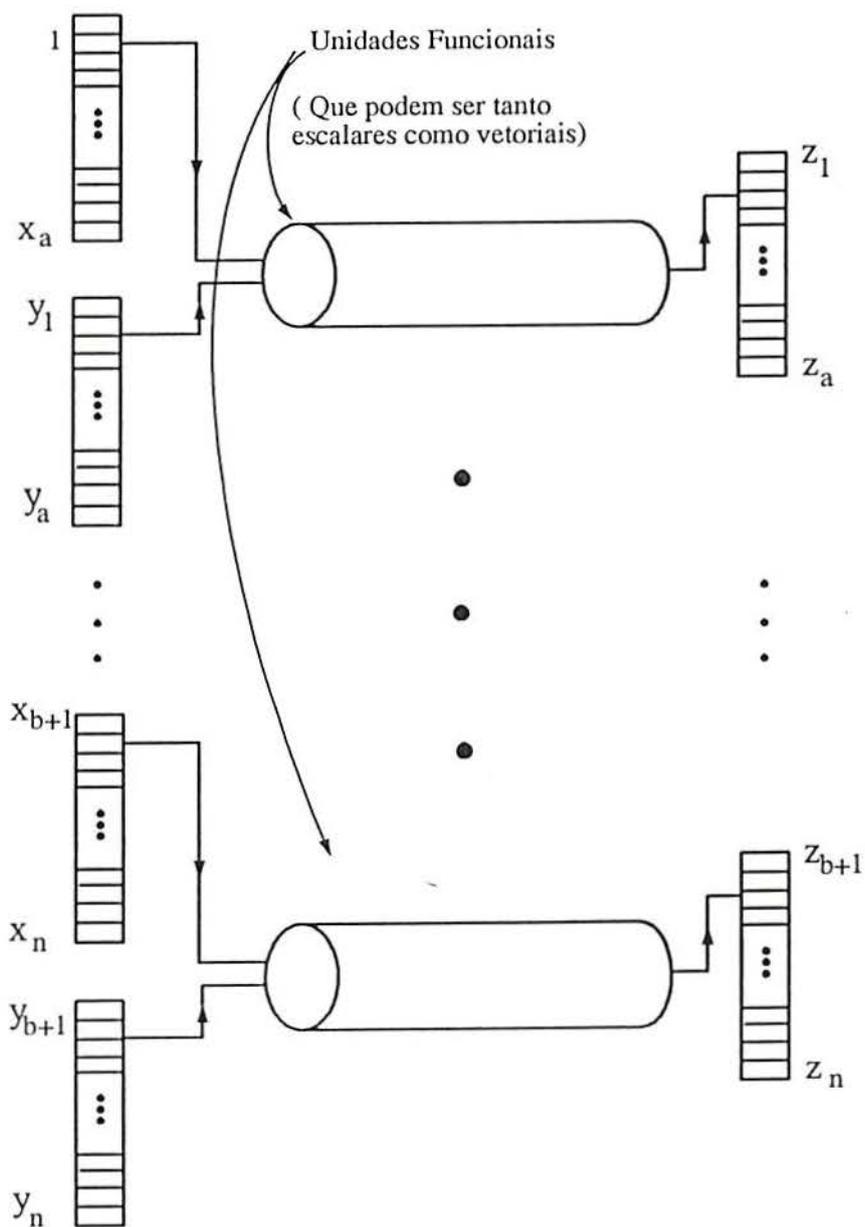


Figura 7.2: Esquema de um processamento em paralelo para o caso de um produto de dois vetores ( $Z(i) = X(i) * Y(i)$ )

### 7.3 Análise do Algoritmo do DEM sob os conceitos vistos

A estrutura do algoritmo DEM é esquematizada como se mostra na figura (7.3).

```

*COMECO
*GERACAO DO MODELO
*ANALISE
  S-LOOP, T=0, TEMPO FINAL (LACO SOBRE O TEMPO)
  S
  S V-LOOP, B=1, No TOTAL DE BARRAS DO MODELO
  S V          (LACO SOBRE AS BARRAS)
  S V-CALCULO DA DEFORMACAO DA BARRA B, e(B)
  S V
  S V-CALCULO DA FORCA REATIVA NA BARRA B, (F(B) = Fconst(E(B)))
  S V          (Fconst() = EQUACAO CONSTITUTIVA UNIAXIAL)
  S V-CALCULO DAS FORCAS RESULTANTES NOS NOS
  S V-FIM DO LOOP B
  S
  S V-LOOP N=1, No TOTAL DE NOS DO MODELO (LACO SOBRE OS NOS)
  S V-INTEGRACAO DA EQUACAO DE MOVIMENTO
  S V EM FORMA EXPLICITA (METODO DAS DIFERENCAS
  S V FINITAS CENTRAIS)
  S V
  S V-FIM DO LOOP N
  S -ARMAZENAR RESULTADOS
  S -CALCULOS ADICIONAIS
  S
  S -FIM DO LOOP T
*SAIDA DE RASULTADOS
*FIM

```

Figura 7.3: Esquema do Algoritmo do DEM

Analisando o mesmo, pode-se observar os seguintes aspectos:

- O *loop* sobre o tempo de integração não é passível de vetorização, pois trata-se de um *loop* externo;
- Os dois *loops* internos sobre os nós e o *loop* sobre as barras, segundo os testes feitos são possíveis de serem vetorizados e, paralelizados com um ganho sensível na velocidade de execução do algoritmo.

- Como se ilustra na tabela (7.3) no algoritmo empregado os modelos discretizados têm um número de barras de 5 a 7 vezes maior que o número de nós. Isto traduz-se em termos da performance do programa em que é muito mais importante a otimização do *loop* sobre o número de barras que sobre o número de nós para aumentar a sua velocidade de processamento.

Tabela 7.1: Comparação dos números de nós e de barras de alguns dos modelos apresentados neste trabalho

Exemplo	Número de nós (NNT)	Número de Barras (NBT)	NBT/NNT
CASCA (1972) Leech & Morino	8002	38001	4.75
PLACA Balmer (1964)	768	4079	5.3
VIGA Brandes (1981)	768	4857	6.32
PLACA HOCHTIEF (1980)	10173	69140	6.8

Na tabela (7.3) e no gráfico (7.4) mostram-se comparações de tempos e velocidades executando um mesmo exemplo em condições diferentes. O exemplo utilizado para fazer os testes foi o modelo da viga de Brandes (1981), avaliando o comportamento da viga durante um tempo total de 0.08seg e utilizando um passo de integração de 4E-6seg (24000 passos).

Para simplificar a comparação do comportamento do programa em diferentes máquinas ou condições de trabalho foi desativada a parte do mesmo referida à geração de números aleatórios pois, em geral, os compiladores FORTRAN calculam a semente do número aleatório baseado em uma característica física do computador.

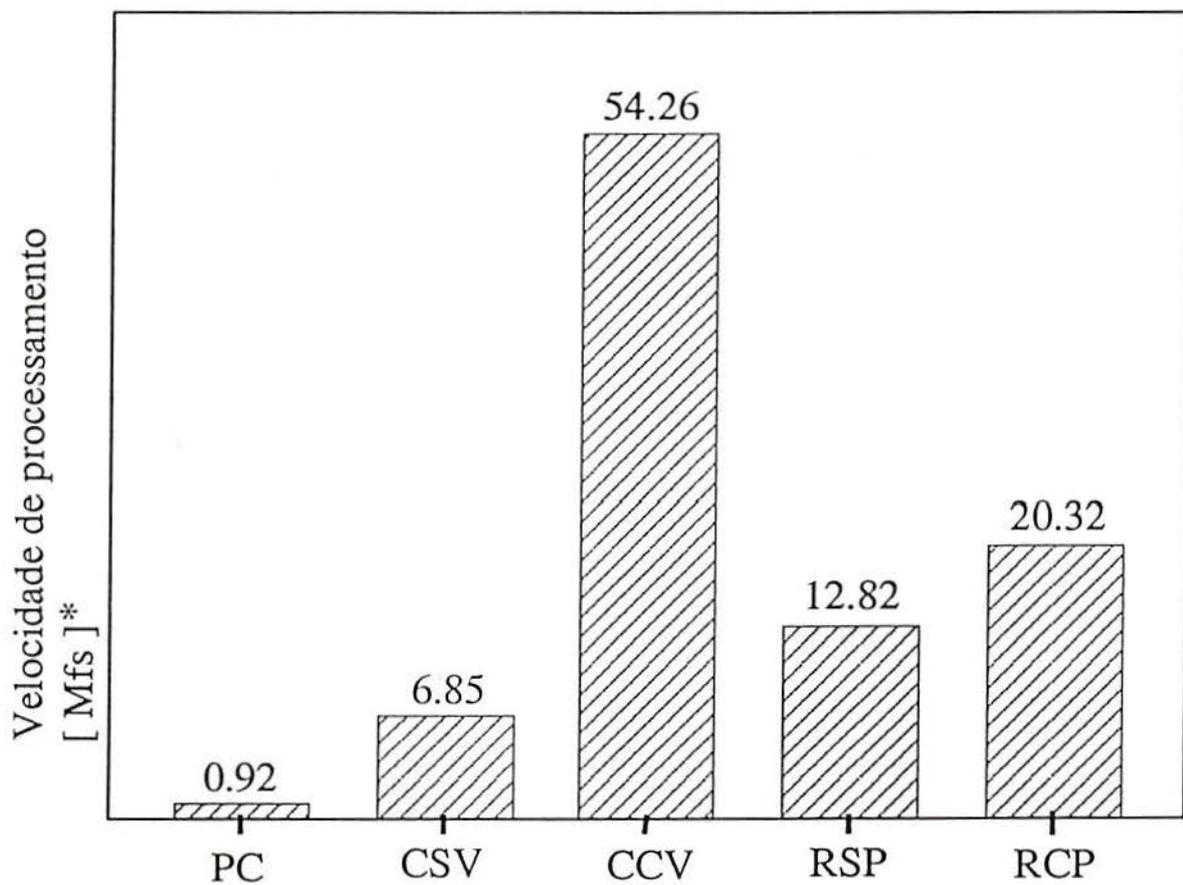
Na figura (7.5) se apresenta a comparação das respostas em termos do deslocamento no meio do vão vs tempo apresentando os resultados experimentais e os obtidos executando o programa em diferentes condições e ou diferentes máquinas.

Tabela 7.2: Comparação de tempos de processamento e velocidades do algoritmo de DEM executando o mesmo exemplo em diferentes equipamentos e ou condições de trabalho

Equipamento e/ou cond. de trabalho	Tempo real [seg]	Velocidade [MFs]*
PC 486 DX/ 66MHz /8Mbyte de RAM	12600	0.92
CRAY-YMP-2E sem vetorização	2038.11	6.85
CRAY-YMP-2E com vetorização	214.089	54.26
Workstation SGI H4400 sem paralelização (compilação otimizada 02)	982.40	16.69
Workstation SGI H4400 com paralelização (3 CPUs)(compilação otimizada 02)	619.92	10.5386

\*

[MFs] = Megaflops; milhões de operações em ponto flutuante por segundo



[ Mfs ] \* = Megaflops = milhões de operações em ponto flutuante por segundo

PC : PC 486 DX (66 MHz) RAM = 8 Mb
CSV : CRAY-YMP-2E sem vetorização
CCV : CRAY-YMP-2E com vetorização
RSP : SGI R4400 sem paralelização
RCP : SGI R4400 com paralelização

Figura 7.4: Diagrama comparativo das velocidades do programa rodando no CRAY com e sem vetorização para o modelo da viga de Brandes (1981) com um tempo total de integração de 0.08 seg e um passo de integração de  $4E-6$ seg.

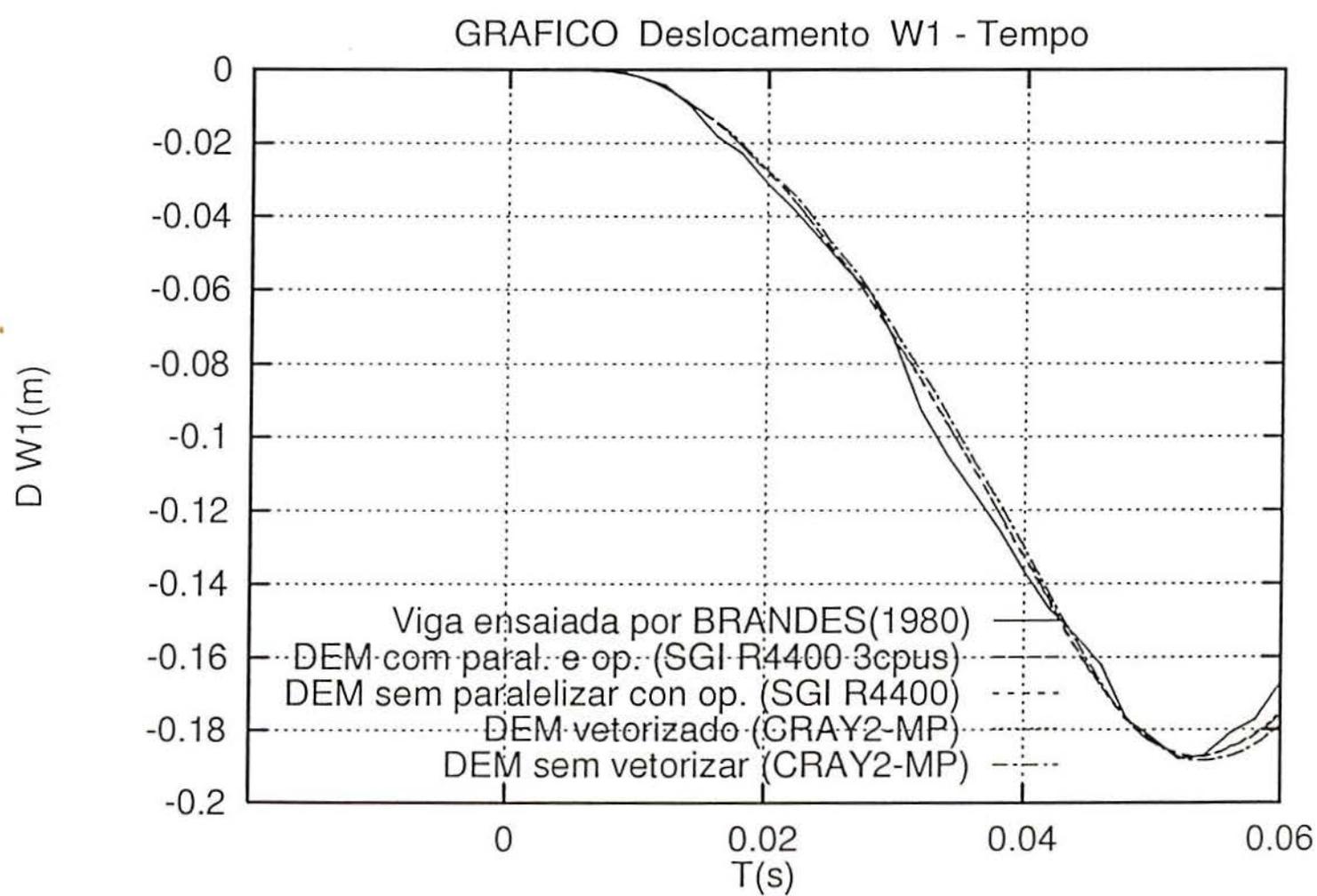


Figura 7.5: Comparação de respostas experimental e numérica em termos de deslocamento no centro do vão vs tempo da viga de Brandes (1981)

## 7.4 Conclusões

Realizando a comparação entre a performance de um algoritmo de integração explícita, executado em máquinas diferentes ou em diferentes condições de trabalho (processamento em paralelo, vetorização, processamento escalar) é possível obter as seguintes conclusões:

- Na figura (7.4) é possível observar a boa performance do programa quando é executado num computador vetorial, sua velocidade é de 54Mfs, frente a uma velocidade de 0.92Mfs do mesmo programa rodando em PC (486 66MHZ).
- É possível observar na mesma figura (7.4) sobre a paralelização, que a relação entre velocidade de processamento e a quantidade de processadores utilizados não é linear (ao executar o programa com três CPUs, a velocidade de processamento não se triplica). Isto leva a pensar que se está-se pagando a hora por CPU, resulta mais econômico executar um processo em cada CPU, do que rodar cada processo utilizando em paralelo várias CPUs. Mas em certas aplicações a redução de tempo pode ser crítica e em tais casos a aplicação da paralelização é uma opção válida.
- Cabe ressaltar que os testes executados sobre a estação Multiprocessadora R4400 foram realizados com o computador sem carga ou seja, que o único processo de usuário a ser executado era o testado, A presença de carga (outros processos de usuários rodando simultaneamente) alteraria estes valores.
- A grande diferença entre o processo executado no Cray com e sem vetorização se deve ao fato que este computador foi projetado para trabalhar vetorialmente e, ao executar programas que apresentam características escalares, tem um baixo desempenho, quando comparado com a execução dos mesmos programas em computadores escalares.
- Na figura (7.5) é possível ver que existem diferenças, embora pequenas, entre os resultados numéricos obtidos. Se bem que neste caso isto não é importante, pode haver problemas em que assim seja, em problemas de instabilidade por exemplo. Na área das ciências da computação, atualmente, estão sendo realizados esforços para tornar independente a exatidão dos resultados obtidos com um determinado algoritmo, da máquina empregada.
- O análise feito neste capítulo, se bem escapa à área central de interesse deste trabalho, sua importância reside em documentar a experiência adquirida, com o algoritmo testado, em máquinas com características de trabalho diferentes. Isto dá elementos de juízo para, entre outras coisas, a seleção apropriada de computadores e modalidades de trabalho em função do tipo de algoritmo empregado, isto é crucial na hora de decidir a compra de "software" e/ou "hardware".

## 8 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

A tese desenvolvida teve como objetivo principal a implementação computacional do método dos elementos discretos, aplicados à estruturas laminares de concreto armado submetidas a cargas de curta duração. Como passos intermediários para chegar ao objetivo antes mencionado, se realizaram com sucesso a análise de estruturas laminares elastoplásticas sob cargas impulsivas e testes sobre peças de concreto submetidas a um estado de tensões biaxial.

### 8.1 Conclusões

Como resultado dos trabalhos realizados foi possível obter as seguintes conclusões:

#### 8.1.1 Modelo Elastoplástico

- Pôde-se verificar que a aplicação do DEM na simulação de estruturas laminares elastoplásticas submetidas à excitações impulsivas é uma proposta competitiva frente a métodos considerados clássicos neste tipo de análise.
- Dos testes realizados pôde-se verificar que no caso de estruturas com grandes deformações a implementação do controle volumétrico pode ser necessária para obter respostas coerentes com modelos físicos.
- No caso de ter estruturas com grandes deslocamentos e pequenas deformações, não é necessário realizar o controle volumétrico para obter bons resultados.

#### 8.1.2 Modelo de Concreto

- Ainda que este modelo tenha sido testado por Rocha (1989), simulando o comportamento de concreto submetido a tensões de tração, foi possível mostrar neste trabalho o bom comportamento sob um estado tensional biaxial.

#### 8.1.3 Modelo de Concreto Armado

- Verificou-se pela qualidade dos resultados numéricos obtidos que a forma de levar em conta a interação entre o aço e o concreto proposta é correta, e permite obter bons resultados não só até a resposta máxima mas também após ela acontecer.

- Resultou ser uma opção acertada, para levar em conta a interação aço concreto, a incorporação das modificações nas relações constitutivas não só no concreto mas também no aço.
- Incorporando uma modificação no comportamento a descarga na relação constitutiva das barras de armadura no concreto, pode-se modelar em forma excelente a resposta na pós-ruptura de vários exemplos apresentados, captando o mecanismo que se apresenta em peças de concreto armado quando acontece a descarga, o que foi verificado experimentalmente.
- As modificações propostas nas relações constitutivas do aço e concreto, para levar em conta sua interação são, em princípio independentes do método de discretização utilizado.

#### 8.1.4 Características Computacionais

- Foi verificada a boa performance do algoritmo para aproveitar as características dos computadores com arquitetura vetorial e/ou paralela como foi verificado no capítulo 7.
- A aplicação, com sucesso, de uma transformação conforme das coordenadas do modelo discretizado, permitiu aplicar o método dos elementos discretos ao caso de cascas. Pode verificar-se que si as distorções na malha são pequenas, não há problemas em utilizar este tipo de transformação na geração dos modelos teóricos.
- Verificou-se a vantagem de realizar um balanço energético do modelo teórico durante o processo, o qual permite, por um lado, realizar um controle da validade dos resultados obtidos e por outro ter uma visão global do comportamento da estrutura em análise ilustrando de que forma a energia externa suministrada ao sistema é dissipada pelo modelo.

## 8.2 Considerações Finais

Durante o desenvolvimento do trabalho foi possível notar algumas deficiências no método empregado, que podem ser contornadas, como também possibilidades que o mesmo apresenta e que não foram ainda implementadas. Sobre este tema podem-se realizar as seguintes observações.

- O algoritmo do controle volumétrico aplicado ao caso de estruturas elastoplásticas deve ser mais testado e aprimorado para que não comprometa a performance do método dos elementos discretos.

- É importante realizar um projeto experimental de maior envergadura para poder dar uma forma mais precisa às relações que modelam a interação entre aço e concreto.
- Alguns sistemas de integração explícita comerciais como é o caso do ABAQUS/Explicit ou DYTRAN - permitem incorporar elementos com características definidas pelo usuário, o que pode ser uma opção de trabalho interessante para aproveitar a boa performance numérica dos 'solvers' de tais programas e poder assim concentrar os esforços na definição dos critérios constitutivos dos materiais que se deseja modelar.
- É importante desvincular a discretização das propriedades do material a modelar, para dar maior flexibilidade na construção dos modelos teóricos. Para isso, é preciso, na geração das propriedades mecânicas consideradas como campos aleatórios, independizar o comprimento de correlação dos mesmos do comprimento da face do módulo básico.
- Resulta de interesse diferenciar no algoritmo implementado o que é o amortecimento numérico (Bulk Viscosity) que é necessário introduzir ao sistema para garantir a convergência dos resultados, do amortecimento característico do material empregado no modelo.
- A ligação do método dos elementos discretos (DEM) a outros tipos de discretização do contínuo como pode ser o método dos elementos de contorno o método dos elementos finitos pode ser um caminho válido para contornar a limitação do DEM no que faz a geração de malhas de geometrias complexas.
- Implementar outros tipos de arranjos, como por exemplo elementos que incluam o grau de liberdade de rotação (elemento de pórtico espacial) pode ser uma saída para precisar menor quantidade de elementos na modelagem de solicitações que envolvam flexão ou torção. No trabalho de Schlangem (1993) são mencionados alguns arranjos de barras deste tipo.

## Anexo A-1 DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS DO MODELO TEÓRICO DE ESTRUTURAS DE CONCRETO

Se apresentam a seguir fórmulas e valores usuais apresentados por Feenstra & Borst (1993) baseados em recomendações do modelo CEB-FIP (1990).

O valor médio da resistência a compressão  $f_{cm}$  do concreto se relaciona ao valor de resistência a compressão característica  $f_{ck}$  mediante a expressão:

$$f_{cm} = f_{ck} + 8 \left[ N/mm^2 \right] \quad (A-1.1)$$

Para concreto de peso normal o módulo de Young pode ser estimado através da seguinte fórmula:

$$E_c = 10^4 f_{cm}^{1/3} \left[ N/mm^2 \right] \quad (A-1.2)$$

Para concreto o coeficiente de Poisson varia entre 0.1 e 0.2. A tensão de tração média pode ser estimada mediante a relação:

$$f_{ct,m} = 0.30 f_{ck}^{1/3} \left[ N/mm^2 \right] \quad (A-1.3)$$

A energia específica de fratura  $G_f$  é considerada um parâmetro do material e está relacionada a resistência média de compressão do material  $f_{cm}$  e do tamanho máximo do agregado ( $d_{máx}$ ) de acordo com a seguinte fórmula:

$$G_f = G_{fo} (f_{cm}/f_{cmo})^{0.7} \left[ N/mm^2 \right] \quad (A-1.4)$$

onde  $f_{cmo} = 10 \left[ Nmm/mm^2 \right]$ . O valor básico para a energia específica de fratura  $G_{fo}$  depende do tamanho máximo do agregado como se mostra na tabela (A-1).

Cabe aclarar que os valores assim obtidos devem ser tomados só como indicativos, dada a grande quantidade de fatores que influem na determinação dos mesmos e que não estão sendo levados em conta.

Tabela A-1.1: Valores de energia de fratura básicos  $G_{fo}$  [ $Nmm/mm^2$ ] (CEB-FIP código modelo)

$d_{noz}$ [mm]	$G_{fo}$ [ $Nmm/mm^2$ ]
8	0.025
16	0.030
32	0.058

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABAQUS/Explicit 1995. The Theorie Manual, (internal HKS distribution) HIBITT, Karlson & Sorensen, INC.
- ABSI, E. 1971. Théorie des Equivalences-Determination de quelques Elements Types. Anales de L'institut Technique Du Balument el des Travau Publics. N°281pp.83 – 86.
- AMMANN, W.J (editor) 1988. Impact: Effects of fast transient loadings. Int. conf. on effects of fast transient loading. Lausanne-August. Ed. A.A. Balkema, Rotterdam.
- ARGYRIS, J., BALMER, H. J. & DOLTISNIS, I. 1990. A Simple But Subtle Model for Analysis of Shell-Like Structures, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 85,(pp1-20), North Holland.
- BALMER, L. M. 1964. Theoretical - experimental correlation of large dynamic and permanent deformations of impulsively loaded simple structure, Research and Tech. Div., Wright - Patterson AFB, Rept.FDL-TDR-(pp64-104).
- BAZANT, Z.P., 1992. Fracture Mechanics of Concrete: Concepts, Models and Determination of Material Properties. Report by ACI Committee 446. Fracture Mechanics 1R-91. Detroit.
- BAZANT, Z.P, 1976. Instability, Ductility and Size Effects in Strain-Softening Concrete. J. of the Engng. Mech. Dir., ASCE, V.102, N°2, pp.331 – 344.
- BAZANT, Z.P., & OH, B.H., 1983. Crack Band Theory for Fracture of Concrete. Mater and Struct., V.16, N°93, pp.155 – 177
- BELYTSCHKO, T. An overview of Semidiscretization and Time Integration Procedure, in T. Belytscho and T.J.R. Hughe (Eds.), Computational Methods for Transient Analysis, North Holland, Amsterdam, 1983.
- BRANDES, K., LINDERGER, E., HERTER, J. 1981. Kinetische Grenztragfähigkeit von StoBartig belasteten Bauteilen, Technische Bericht RS 121, BAM, Berlin.
- BRÜHWILER, E, ROKUGO, K. & WITTMANN, F.H., 1973. Influence of Rate of Loading on Fracture Energy and Strain Softening of Concrete, in F.H. Wittmann (Ed.), Transaction of the SMIRT-9, Lausanne, Rotterdam, etc., Vol. H, pp-25-33
- BUSH, H. G., MIKULAS, M. M. & HEARD, W. L., 1977. Some Design Considerations for Large Space Structures, AIAA Journal, Vol. 16, N°4 – ASME, N.Y.
- CHURCHILL, R.V. 1960. Complex Variables and Applications. McGrawHill-N.Y 297p.

- CRUSE, T.A. 1988. *Boundary Element Analysis in Computational Fracture Mechanics*. Kluwer Academic Publishes-London.
- CUNDALL, P.A. & STRACK, O.D.L. 1979. A Discrete Numerical Model for Granular Assemblies. *Géotechnique* 29, No.1, 47-65.
- CURBACH, M., 1987. *Festigkeitssteigerung Von Beton bei Hohen Belastungsgeschwindigkeiten*, Dissertation, Heft 1, Schriftenreihe des Instituts für Massivbau und Baustofftechnologie, Universität Karlsruhe.
- FEENSTRA, P.H. & BORST, R., 1993. Aspects of Robust Computational Modeling for Plain and Reinforced Concrete. *Heron* 38 (4). pp.1-76
- FLANAGAN & BELYTSCHKO, 1984. Eigenvalues and Stable Time Steps for the Uniform Strain Hexahedron and Quadrilateral, *Jour. Appl. Mech.*, 84-APM-5.
- GRIFFITH, A., 1924. Theory of Rupture. *Proc., 1st Int. Congress on Appl. Mech.*, Deft, pp.55-63.
- GUPTA, B. A. K. & MAESTRINI, J. R. 1985. Tension Stiffness model for reinforced concrete bars. *Journal of Structural Engineering*. Vol 116 n 3 , March (pp 769-789).
- HAYASHI, Y. 1982. *Sobre um modelo de discretização de estruturas tridimensionais aplicado em dinâmica não linear*. Tese M.Sc., CPGEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Dez.
- HILLERBORG, A. 1978, A Model for Fracture Analysis, Cod LUTVDG/TV BM-3005/1-8.
- HILLERBORG, A., MODEER, M. & PETERSSON, P.E., 1976. Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Means of Fract. Mech. and Finite Elements. *Cem. and Concr. Res.*, V.6, pp.773-782.
- HRENNIKOFF, A. 1941. Solution of problems of elasticity by the framework method, *Journal of Applied Mechanics*, 12, pp.169-175.
- INGLIS, C.E., 1913. Stress in a Plate to the Presence of Cracks and Sharp Corners. *Trans. Inst. Naval Architects*, pp.219-241.
- IRWIN, G. R., 1958. Fracture, *Handbuch der Physik*, vol VI, Ed. Flugge, Springer, pp.551-590.
- ITURRIOZ, I. and RIERA, J. D. 1995. Determination of the impulsive response of elastoplastic plates and shells by means of discrete element models. To be published in *Trans, Div J SMIRT13*.

- KACHANOV, M.. Introduction to continuum damage mechanics: Martins Nyhoff Publishes- Boston, 1986.135p.
- KANNINEN ,M., F. & POPELAR, C.H., 1985. Advanced Fracture Mechanics. Oxford University press-NY. Clarendon press. Oxford.pp5633.
- KAPLAN, M.F.,1961. Crack Propagation and the Fracture of Concrete. American Concrete Institute Journal, Vol.58, N°11.
- KRUTZIK, N., VINKIER, D. 1983. Verifikation von Rechenmethoden und Programmen fur dreidimensionale nichtlineare Untersuchungen von Stahlbetonstrukturen anhand von MEPPEN-Versuchen, Arbeitsbericht R621/83/064, Siemens AG UB KWU.
- KUPFER, H.B. & GERSTLE K.H., 1973. Behavior of Concrete Under Biaxial Stresses. Journal of the Eng. Mech. div. ASCE. Vol. 99 N°EM4.Aug.pp853 – 866.
- LINDE, P.1993. Numerical modelling and capacity design of earthquake-resistant reinforced concrete walls. Inst. fur Baustatik und Konstruktion, ETH Zurich, Ag, Bericht 200.
- LINDEBERG, H. E. & KENNEDY, T. C. 1975. Dynamics Plastic pulse Buckling Beyond Strain-Rate Reversal, Journal of Applied Mechanics, Trans.ASME , (pp.411-416).
- MARTIN, J. & CUNDALL, P. 1982. Mixed discretization procedure for accurate modelling of Plastic collapse. International Journal for Numerical and analytical methods in geomechanics, vol6,129.
- MORINO, L., LEECH, J. W. & WITMER, E. A. 1971.An improved Numerical Calculation Technique for Large Elastic-Plastic Transient Deformations of Thin shells. Journal of Applied Mechanics. June,(pp429-439)ASME, N. Y.
- MSC/DYTRAN, Version 2.1, User's Manual. The Macneal-Schwendler Corporation-1993
- NAGTEGAAL,J. C., PARKS, D. M. & RICE, J. R. 1974. On numerically accurate finite element solutions in the fully Plastic Range. Computer Methods in App. Mech. and Eng. 4 (1974) pp 153-177, North- Holland Publishing Company.
- NAYFEH, A. H. & HEFZY, M. S. 1978. Continuum modeling of three dimensional truss-like space structures. AIAA Journal, 16(8):(pp779-787).
- NOOR, A. K. & MIKULAS, M. M., 1988. Continuum Modeling of Large Lattice Structures Status and Projections. Springer Series in Computational Mechanics. Atluri, S. N., Amos A. K. (Eds.) Large Space Structures: Dynamics and Control. Springer Verlag Berlin Heidelberg 1988.
- OLIVER, J.,1990. Modelado de la Fisuración en Estructuras de Hormigón. Publicación Interna del Centro Internacional de Metodos Numéricos en Ingeniería. Barcelona.

- OSTOJA-STARZEWSKI, M., 1995. Spring-Networks in Thermomechanics: Effective Properties and fracture phenomena. Applied Mechanics in the Americas Vol.III, pp.179-184 edited by L.A. Godoy, S.R. Idelsohn, P.A.A. Laura and D.T. Mook AAM and AMCA, Santa Fé, Argentina.
- OWEN, D.R.J., FAWKES, A.J., 1982. Engineering Fracture Mechanics: Numerical Methods and Applications. Pineridge Press Ltd. Swansea, U.H.
- RECHT, R. F. 1978. Int J. Sci,16,809
- RIERA, J. D. 1980. A critical reappraisal of nuclear power plant safety against accidental aircraft impact. Nuclear Engineering and Design (57) pp 193-206, North Holland Publishing Company.
- RIERA, J. D. 1984. Local effects in impact problems on concrete structures. Proceedings, Conference on Structural Analysis and Design of Nuclear Power Plants, Porto Alegre, Brasil, Oct., CPGEC/UFRGS, Porto Alegre V. III, (pp57-79).
- RIERA, J. D. & ITURRIOZ, I. 1995. Discrete elements model for evaluating impact and impulsive response of reinforced concrete plates and shells, Communications in Numerical Methods in Engineering, to be published, Ed Lewis, R. W. & Carey, G. F., Wiley & Sons, U.K.
- RIERA, J. D. & ITURRIOZ, I. 1995. Discrete elements dynamic Response of Elastoplastic Shells subjected to impulsive Loading, Communications in Numerical Methods in Eng., to be published, Ed Lewis, R. W. & Carey, G. F., Wiley & Sons, U.K.
- RIERA, J. D. & ZORN, N. F., 1982. A Model for the Deformation and Failure Characteristics of Concrete. A progress Report. CT-33/82-UFRGS-Porto Alegre.
- RIZKALLA, S.H., HWANG, L.S., 1984. Crack Prediction for Members in Uniaxial Tension. ACI Journal Nov-Dic 1984.pp572-579.
- ROCHA, M. M. 1989. Ruptura e Efeito de Escala em Materiais não Homogeneos. Tese M. Sc., CPGEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil, Set.
- ROCHA, M. M. & RIERA, J. D. 1990. On size effects and rupture of nonhomogeneous materials. In Proceedings, Congress in Fracture Processes in Concrete, Rock and Ceramics, Eds. J. G. M. Van Mier, J. G. Rots & A. Bakker, Chapman & Hall/Ed.Fn Spon, London, (pp451-460).
- ROCHA, M. M., RIERA, J. D. & KRUTZIK, N. J. 1991. Extension of a Model that Aptly Describes Fracture of Plain Concrete to the Impact Analysis of Reinforced Concrete. Int. Conf. and Structural Mechanics in Reactor Technology, SMIRT 11, Trans. Vol. J August, Tokyo Japan.

- ROOKE, D.P. & CARTWRIGHT, D.J., 1976. Compendium of Stress Intensity Factors. Her Majesty's Station Office, London
- SCHLANGEN, E. 1993. Experimental and Numerical Analysis of Fracture Processes in Concrete. Heron 38(3), pp.1-118.
- TAMAGNA, A 1994. Penetração em sólidos a baixa velocidade. Tese D. Sc., CPGEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil, May.
- TRUESDELL, G. 1966. The Elements of Continuum Mechanics, Berlin, Springer.
- UCHIDA, T. & TSUBOTA, H & YAMADA, T. 1985. Experimental investigation on reinforced concrete slabs subjected to impact loading. Transactions of the 8th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology J5/1:173-178.
- VONK, R.A., 1993. A Micromechanical Investigation of Softening of Concrete Loaded in Compression. Heron 38 (3).
- WALSH, P.F., 1972. Fracture of plain concrete. Indian Concrete Journal, 46(11), 469-476.
- WEIBULL, W., 1939. The Phenomenon of Rupture in Solids. Generalstabers Litografiska Anstalts Förlag.-46AT Katalog.
- ZUKAS, J. A. 'et al' 1982. Impact Dynamics. ch 2, (pp29-53), John Wiley & Sons, U.S.A.