

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Radiação de ondas em água por obstáculos finos usando a Parte Finita de Hadamard

por

Juliana Sartori Ziebell

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Leandro Farina
Orientador

Porto Alegre, dezembro de 2008.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Ziebell, Juliana Sartori

Radiação de ondas em água por obstáculos finos usando a Parte Finita de Hadamard / Juliana Sartori Ziebell.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2008.

91 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2008.

Orientador: Farina, Leandro

Dissertação: Matemática Aplicada
dinâmica dos fluidos, escoamentos potenciais

Radiação de ondas em água por obstáculos finos usando a Parte Finita de Hadamard

por

Juliana Sartori Ziebell

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em
Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade
Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a
obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Dinâmica de Fluidos

Orientador: Prof. Dr. Leandro Farina

Banca examinadora:

Prof. Dr. André Nachbin
IMPA-RJ

Prof. Dr. Manuela Longoni de Castro
PPGMAp/UFRGS-RS

Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke
PPGMAT/UFRGS-RS

Dissertação apresentada em
dezembro de 2008.

Profa. Dra. Maria Cristina Varriale
Coordenadora

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu pai, pela grande ajuda em muitas horas difíceis e à minha mãe e à minha irmã pelo apoio e amor que sempre me deram. Também agradeço ao meu namorado, Lucas, pela compreensão e carinho nos momentos de muito trabalho e a todos os amigos pelo companheirismo e pela amizade.

Quero também agradecer ao meu orientador, professor Leandro Farina, pelo incentivo e pela grande ajuda no desenvolvimento deste trabalho, e a todos os professores do instituto que me ajudaram durante o curso.

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro e ao PPGMAp pela oportunidade que me foi dada para a realização deste trabalho.

Conteúdo

AGRADECIMENTOS	iv
LISTA DE FIGURAS	viii
RESUMO	ix
ABSTRACT	x
1 INTRODUÇÃO	1
2 INTEGRAIS SINGULARES	6
2.1 Parte Finita de Hadamard	11
2.1.1 Breve nota histórica	11
2.1.2 Integral de Hadamard para fluidos bidimensionais	12
2.1.3 Generalização das integrais de parte finita de Hadamard com uma variável	13
2.1.4 Integrais de parte finita de Hadamard com mais de uma variável	16
3 DISCO HORIZONTAL SUBMERSO EM UM FLUIDO COM SUPERFÍCIE LIVRE	21
3.1 Introdução	21
3.1.1 O problema	23
3.2 Equações integrais de fronteira: corpos submersos	23
3.3 Formulação do problema	23
3.4 Equação integral de fronteira: placas finas	26
3.5 Disco horizontal submerso	28
3.6 Equações uni-dimensionais	29
3.7 Equações uni-dimensionais mais simples	32
3.8 O disco oscilante nas ondas	33

3.9	Força hidrodinâmica	35
3.10	Alguns casos especiais	36
3.10.1	Profundidade infinita: $b \rightarrow \infty$	36
3.10.2	Equação de Love: $K = 0$	37
3.10.3	$K = \infty$	37
4	UM ESCOAMENTO DE FLUIDO QUE PASSA POR UM DISCO RUGOSO	38
4.1	Formulação	38
4.1.0.1	Energia cinética	39
4.2	Equações integrais governantes	40
4.2.1	Representação integral	40
4.2.2	Equação integral	41
4.3	Discos rugosos	43
4.3.1	A correção de primeira ordem	46
4.3.2	A massa adicional	46
5	DISCO RUGOSO EM UM FLUIDO COM SUPERFÍCIE LIVRE	48
5.1	Expressão para W_0	54
5.2	Expressão para W_1	55
5.3	Expressão para W_2	56
5.4	Novas equações aproximadas	58
5.5	Expressões alternativas	60
6	MÉTODO NUMÉRICO	74
6.1	Solução do problema de um disco liso submerso em um fluido com superfície livre	75

6.2	Solução do problema de um disco rugoso submerso em um fluido com superfície livre	76
6.3	Definição da rugosidade	78
7	CONCLUSÃO	80
APÊNDICE A CÁLCULO DAS DERIVADAS PARCIAIS DA FUNÇÃO $G(P, Q)$		81
A.1	Derivada de $\frac{\partial G}{\partial n_q}$ em relação a n_q	81
A.2	Derivada de $G_1(p, q)$ em relação a n_q e a n_p	82
A.3	Derivada em relação a n_q	83
A.4	Derivadas em relação a n_p	84
A.5	Derivadas parciais de W_0 em relação a ϵ	85
A.6	Derivadas parciais de W_1 em relação a ϵ	85
A.7	Derivadas parciais de W_2 em relação a ϵ	86
APÊNDICE B EXPANSÕES EM SÉRIE DE TAYLOR		87
B.1	Função $(X^2 + Y^2)^{-j/2}$, para $j \in \{1, 3, 5\}$	87
B.2	Expansões das Integrais	88
BIBLIOGRAFIA		89

Lista de Figuras

Figura 1.1	Plataforma TLP <i>Mars</i> [29].	2
Figura 1.2	Plataforma TLP <i>Mars</i> após a passagem do furacão Katrina em agosto de 2005 [29].	2
Figura 1.3	Exemplo de um quebra-mar; Eles criam portos seguros mas também são armadilhas para os sedimentos que se movem ao longo da costa; Península de Balboa na praia Newport, Califórnia, Abril, 1998 [28].	3
Figura 1.4	A imagem mostra três dos quatro quebra-mares formando o ancoradouro Portland (<i>Portland Harbour</i>) [28].	4
Figura 1.5	Exemplo de um moderno dique em Ventor na ilha de Wight no Reino Unido [30].	4
Figura 3.1	caminho da integral em G_1	25

RESUMO

Nesse trabalho estudamos as integrais de parte finita de Hadamard e aplicações envolvendo discos submersos em escoamentos potenciais. Estas aplicações são formuladas através de equações integrais. São estudados casos em que um disco é liso, na presença de uma superfície livre, e casos em que o disco é rugoso em um fluido ilimitado. A combinação destes dois casos é considerada e tratada por um método de perturbação, que resulta em uma sequência de equações integrais simplificadas. Um método numérico é proposto para a solução destas equações.

ABSTRACT

In this work we study Hadamard's finite part integrals and applications involving submerged discs in a potential flow. These applications are formulated using integral equations. We study cases in which the disc is flat, in the presence of a free surface, and in which the disc is wrinkled in an unbounded fluid. The combination of these two cases is considered and treated using a perturbation method, resulting in a sequence of simplified integral equations. A numerical method is proposed for the solution of these equations.

1 INTRODUÇÃO

A *parte finita de Hadamard*, também denominada Integral Hipersingular, foi estudada por Hadamard em [7]. Nesse trabalho estudamos esta integral [15, 23, 13] e aplicamos em alguns problemas que envolvem interações de ondas com obstáculos. Nesses problemas consideramos que o escoamento é potencial. Calculamos em três problemas os coeficientes de massa adicional e amortecimento, que são a parte real e imaginária da força hidrodinâmica, respectivamente. Esses coeficientes são muito importantes em diversas aplicações.

A relevância desses estudos dá-se em muitos problemas de interesse de engenheiros oceânicos e arquitetos navais, onde precisamos saber as forças que atuam em objetos submersos na água. Nas atividades industriais, científicas, comerciais e militares no mar, é importante entender a influência que as ondas exercem nas grandes estruturas flutuantes ou submersas na água. Por exemplo, na exploração do petróleo e gás em águas profundas, sendo o Brasil um dos principais líderes, existem plataformas de tensão (*Leg Plataform, TLP*) que normalmente possuem quatro colunas flutuantes que são presas por cabos até o fundo do mar, o que elimina quase todo o seu movimento vertical. Se as forças não são estudadas com o devido cuidado, podem acontecer sérios danos como os que ocorreram na plataforma *TLP Mars* na passagem do furacão Katrina nos EUA, em agosto de 2005 (figuras 1.1 e 1.2).

As plataformas flutuantes também são utilizadas em lançamentos de satélites, em pontes, em alguns países como a Noruega e o Japão, em aeroportos e bases militares flutuantes.

Placas horizontais porosas foram utilizadas em [16], onde é estudada a interação das ondas em um novo tipo de quebra-mares com paredes perfuradas, estruturas construídas na costa marítima como parte da defesa costeira ou para proteger um ancoradouro dos efeitos do tempo, como as das figuras 1.3 e 1.4.



Figura 1.1: Plataforma TLP *Mars* [29].



Figura 1.2: Plataforma TLP *Mars* após a passagem do furacão Katrina em agosto de 2005 [29].



Figura 1.3: Exemplo de um quebra-mar; Eles criam portos seguros mas também são armadilhas para os sedimentos que se movem ao longo da costa; Península de Balboa na praia Newport, Califórnia, Abril, 1998 [28].

Estas estruturas reduzem a intensidade da ação das ondas e assim reduzem a erosão da costa. Esse quebra-mar consiste de uma parede fronteira perfurada, uma parede traseira sólida e uma placa porosa horizontal submersa instalada entre elas. Em [16] foi calculado o momento e a força das ondas e constatado que eles diminuem com o aumento da porosidade.

No artigo [9] o coeficiente de massa adicional foi considerado na avaliação dos danos causados em uma plataforma do tipo *offshore jacket* no mar do sul da China, que sofreu um impacto de um grande guindaste e de uma barcaça durante a instalação. Essas plataformas são usadas na exploração de óleo e gás *offshore* em ambientes oceânicos complicados. Além das operações de peso normais, elas são sujeitas a outras forças, como ventos e ondas. Ainda podem sofrer colisões de embarcações, entre outras. Portanto, o estudo destes danos se torna muito importante.

Um estudo sobre o que acontece quando uma onda quebra violentamente em uma praia ou em diques (figura 1.5) é feito em [1]. A força que é realizada pode ser estudada dado o coeficiente de massa adicional.



Figura 1.4: A imagem mostra três dos quatro quebra-mares formando o ancoradouro Portland (*Portland Harbour*) [28].



Figura 1.5: Exemplo de um moderno dique em Ventnor na ilha de Wight no Reino Unido [30].

O primeiro dos problemas que estudamos é o caso em que uma placa lisa está submersa em um fluido com superfície livre, considerado em [21]. Calculamos a radiação que essa placa gera na superfície de um fluido. Reduzimos este problema para uma equação integral hipersingular de fronteira. Primeiramente tomamos o caso em que a placa é horizontal e circular. Depois consideramos que as oscilações são verticais. Com isso, reduzimos o problema bi-dimensional para um conjunto de equações uni-dimensionais.

Outro caso, discutido em [19], trata de um disco rugoso em um fluido, mas dessa vez sem a superfície livre. Como no primeiro caso, reduzimos o problema de valor de contorno a uma equação integral hipersingular. Porém nesse caso, a equação integral se torna mais complicada. Para resolvê-la, utilizamos a técnica de perturbação da fronteira. Assim, obtemos um conjunto de equações integrais que nos possibilitam calcular o potencial do fluido.

Estudamos também um problema que une os dois casos anteriores, isto é, um disco rugoso em um fluido com superfície livre. Usando um método perturbativo análogo ao empregado no problema anterior, reformulamos este problema através de uma sequência de equações integrais cuja solução aproxima a solução exata. Um método numérico para a resolução destas equações é proposto e resultados numéricos preliminares são apresentados.

2 INTEGRAIS SINGULARES

Nesse capítulo definiremos a parte finita de Hadamard de uma integral e estudaremos algumas de suas propriedades. Para isso, começamos com algumas definições [15].

Todos os caminhos que consideraremos nesse capítulo pertencem ao plano Cartesiano xy . Algumas vezes os pontos poderão ser complexos, e, nesse caso, serão denotados por $t = x + iy$.

Dizemos que L é uma *curva suave aberta* se é definida a partir das seguintes relações paramétricas:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad s_a \leq s \leq s_b,$$

onde s_a e s_b são constantes finitas e $x(s), y(s)$ são funções continuamente diferenciáveis em $[s_a, s_b]$. As derivadas $x'(s), y'(s)$ não podem ser ambas iguais a 0 no mesmo ponto e assumimos que valores diferentes do parâmetro s correspondem a pontos diferentes da curva L .

A relação $t = x(s) + iy(s)$ para os pontos da curva L estabelece uma correspondência bijetora entre $t \in L$ e $s \in [s_a, s_b]$. Além disso temos $t'(s) = x'(s) + iy'(s)$.

Dizemos que L é uma *curva suave fechada* se L é uma curva suave tal que

$$x(s_b) = x(s_a), \quad y(s_b) = y(s_a)$$

$$x'(s_b) = x'(s_a), \quad y'(s_b) = y'(s_a).$$

Nesse caso, podemos considerar as funções $x(s), y(s)$ e $x'(s), y'(s)$ como periódicas de período $T = s_b - s_a$.

Um *caminho suave* é uma união finita de curvas fechadas ou abertas mutuamente disjuntas. Em particular, essas curvas não tem pontos finais em comum, ou seja, não se intersectam.

Uma curva é suave por partes se é formada por um número finito de curvas abertas sem nenhum ponto em comum, exceto possivelmente nos pontos finais. Se o ângulo entre quaisquer duas curvas em cada nó, ou seja, em cada ponto final da curva, for diferente de zero, dizemos que tal curva só tem *nós angulares*.

Definição 2.1. *Uma função definida em um conjunto D , normalmente no plano complexo, satisfaz a condição de Hölder com expoente μ , ou seja, é da classe $H(\mu)$ em D , se $\forall t_1, t_2 \in D$,*

$$|\phi(t_1) - \phi(t_2)| \leq A|t_1 - t_2|^\mu,$$

onde $A > 0$ e $0 < \mu \leq 1$. A e μ são chamados, respectivamente, de coeficiente e de expoente da condição de Hölder. Se μ não for de interesse, podemos dizer que $\phi(t)$ satisfaz a condição H ou pertence à classe H no conjunto D .

Note que se $\phi(t) \in H(\mu)$ então

$$||\phi(t_1)| - |\phi(t_2)|| \leq |\phi(t_1) - \phi(t_2)| \leq A|t_1 - t_2|^\mu,$$

$\forall t_1, t_2 \in D$. Logo, $|\phi(t)| \in H(\mu)$.

Podemos estender a condição H para funções de várias variáveis. Uma função $\phi(t_1, \dots, t_n)$ definida para $(t_1, \dots, t_n) \in D$ é da classe $H(\mu_1, \dots, \mu_n)$ (ou satisfaz a condição H) em um conjunto D , se para quaisquer pontos $(t'_1, \dots, t'_n), (t''_1, \dots, t''_n) \in D$ a desigualdade

$$|\phi(t''_1, \dots, t''_n) - \phi(t'_1, \dots, t'_n)| \leq A_1|t''_1 - t'_1|^{\mu_1} + \dots + A_n|t''_n - t'_n|^{\mu_n} \quad (2.1)$$

vale com constantes $A_j > 0$ e $0 < \mu_j \leq 1, j = 1, \dots, n$.

De (2.1), se $\phi(t_1, \dots, t_n) \in H$ então a função ϕ pertence à classe $H(\mu_k)$ uniformemente em relação ao resto das variáveis $\forall t_k, k = 1, \dots, n$, ou seja,

$$\begin{aligned} |\phi(t_1, \dots, t_k, \dots, t_n) - \phi(t_1, \dots, t''_k, \dots, t_n)| &\leq A|t_1 - t_1|^{\mu_1} + \dots + A|t_k - t''_k|^{\mu_k} \\ &+ \dots + A|t_n - t_n|^{\mu_n} = A|t_k - t''_k|^{\mu_k} \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde A é uma constante independente de t_1, \dots, t_n . Note que a recíproca também é verdadeira.

Definição 2.2. *Seja t_0 um ponto de uma curva aberta L que não é extremidade de L . Consideramos um círculo de centro t_0 e raio $\epsilon > 0$ tão pequeno que a intersecção com L se dá nos pontos t' e t'' . Denotamos por l o arco $t't'' \subset L$. Se a integral*

$$\int_{L \setminus l} \frac{\phi(t)}{t - t_0} dt$$

tem limite finito $\Phi(t_0)$ quando $\epsilon \rightarrow 0$, esse limite é chamado de valor principal de Cauchy da integral

$$\Phi(t_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{L \setminus l} \frac{\phi(t)}{t - t_0} dt = \int_L \frac{\phi(t)}{t - t_0} dt. \quad (2.3)$$

Agora, consideramos uma integral singular no segmento $L = [a, b]$ no eixo real x . Então, de acordo com o valor principal de Cauchy (2.3) temos,

$$\begin{aligned} \Phi(x_0) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{L \setminus l} \frac{\phi(x)}{x - x_0} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{x_0 - \epsilon} \frac{\phi(x)}{x - x_0} dx + \int_{x_0 + \epsilon}^b \frac{\phi(x)}{x - x_0} dx \right] \\ &= \int_a^b \frac{\phi(x)}{x - x_0} dx, \quad x_0 \in (a, b). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Para mostrar que (2.4) faz sentido, considere primeiramente o caso em que $\phi(x) = 1$ e tome $x_0 = a$. Assim,

$$\int_{x_0}^b \frac{1}{x - x_0} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{x_0 + \delta}^b \frac{1}{x - x_0} dx = \log(b - x_0) - \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \log \delta$$

A parte finita da integral vai ser definida como apenas a parte finita da soma acima, ou seja,

$$\int_{x_0}^b \frac{1}{x - x_0} dx := \log(b - x_0).$$

Analogamente, para $x_0 = b$ temos

$$\int_a^{x_0} \frac{1}{x - x_0} dx := -\log(x_0 - a).$$

E, para $a < x_0 < b$,

$$\int_a^b \frac{1}{x - x_0} dx = \int_a^{x_0} \frac{1}{x - x_0} dx + \int_{x_0}^b \frac{1}{x - x_0} dx := -\log(x_0 - a) + \log(b - x_0).$$

Logo,

$$\int_a^b \frac{1}{x - x_0} dx = \log\left(\frac{b - x_0}{x_0 - a}\right) \quad (2.5)$$

Agora, para o caso em que $\phi(x)$ é uma função qualquer que satisfaz a condição $H(\mu)$ precisamos da seguinte propriedade:

Propriedade 2.1. *Seja $\phi(s)$ função de variável real s , definida no intervalo $s_1 \leq s \leq s_2$ com derivada contínua nesse intervalo. Defina*

$$F(s_0, s) = \frac{\phi(s) - \phi(s_0)}{s - s_0}, \quad s_1 \leq s, \quad s_0 \leq s_2$$

e então a função de duas variáveis s_0, s acima é contínua para $s_1 \leq s, s_0 \leq s_2$. Se, além disso, $\phi'(s)$ satisfaz a condição $H(\mu)$, então $F(s_0, s)$ satisfaz a condição $H(\mu)$ para ambas as variáveis.

Dem: Note que

$$\phi(s) - \phi(s_0) = \int_{s_0}^s \phi'(\sigma) d\sigma$$

Através da seguinte mudança de variável

$$\sigma = s_0 + u(s - s_0)$$

temos

$$\begin{aligned} |\phi(s) - \phi(s_0)| &= \left| (s - s_0) \int_0^1 \phi'[s_0 + u(s - s_0)] du \right| \leq |s - s_0| A |s_0 + u(s - s_0) - s_0| \\ &= |s - s_0| A |u(s - s_0)| \end{aligned} \quad (2.6)$$

pois ϕ' é função de Hölder por hipótese. Logo,

$$\left| \frac{\phi(s) - \phi(s_0)}{s - s_0} \right| \leq A |u(s - s_0)| \quad (2.7)$$

Portanto, $F(s_0, s)$ é função de Hölder e a propriedade está demonstrada.

Assim,

$$\int_b^a \frac{\phi(x)}{(x-x_0)} dx = \int_b^a \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{(x-x_0)} dx + \int_b^a \frac{\phi(x_0)}{(x-x_0)} dx \quad (2.8)$$

$$= \int_b^a \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{(x-x_0)} dx + \phi(x_0) \int_b^a \frac{1}{(x-x_0)} dx. \quad (2.9)$$

Note que a primeira integral do lado direito existe pela propriedade (2.1), supondo que $\phi' \in H$. A segunda integral do lado direito também existe pelos cálculos acima no caso em que $\phi = 1$. Logo, (2.4) faz sentido como integral de parte finita de Hadamard.

Tratamos agora do caso em que precisamos fazer mudanças de variáveis em integrais singulares. Para isso, temos que ter uma relação bijetora entre os pontos t de uma curva suave por partes L e os pontos τ de uma curva Γ tal que $t = t(\tau)$ e a derivada $t'(\tau) = \frac{dt}{d\tau}$ exista, e seja diferente de zero, e $t'(\tau) \in H(\alpha)$ em Γ .

Suponhamos que $\phi(t) \in H$ em uma vizinhança de um ponto t_0 no interior de L e que $\phi(t)$ é integrável em L . Então, definindo

$$\Psi(\tau, \tau_0) = \frac{(\tau - \tau_0)t'(\tau)}{t(\tau) - t(\tau_0)} \phi(t(\tau)),$$

temos que

$$\begin{aligned} \int_L \frac{\phi(t)}{t-t_0} dt &= \int_{\Gamma} \frac{\phi(t(\tau))}{t(\tau) - t(\tau_0)} dt(\tau) \\ &= \int_{\Gamma} \frac{t'(\tau)}{t(\tau) - t(\tau_0)} \phi(t(\tau)) \frac{dt(\tau)}{t'(\tau)} \\ &= \int_{\Gamma} \frac{(\tau - \tau_0)t'(\tau)}{t(\tau) - t(\tau_0)} \phi(t(\tau)) \frac{1}{\tau - \tau_0} d\tau \\ &= \int_{\Gamma} \frac{\Psi(\tau, \tau_0)}{\tau - \tau_0} d\tau. \end{aligned} \quad (2.10)$$

2.1 Parte Finita de Hadamard

2.1.1 Breve nota histórica

A parte finita de Jacques Hadamard, também conhecida como *integral hiper-singular*, foi introduzida em 1923 por Jacques Hadamard [7]. Esta integral vem despertando maior interesse devido à sua importância nos métodos de integrais na fronteira, utilizados em diversas áreas.

O objetivo de Hadamard foi estudar as integrais singulares que não eram Riemann integráveis. Ele pensou, então, que deveria dar um novo sentido à integrais singulares.

Ele considerou o seguinte caso como exemplo:

$$\int_a^b \frac{A(x)}{\sqrt{b-x}} dx. \quad (2.11)$$

Se tentarmos diferenciar essa integral com respeito a b teríamos

$$-\frac{1}{2} \int_a^b \frac{A(x)}{(b-x)^{\frac{3}{2}}} dx + \left[\frac{A(x)}{\sqrt{b-x}} \right]_{x=b}, \quad (2.12)$$

o que seria um absurdo, já que o primeiro termo é uma integral que contém um termo infinito na ordem de $3/2$ e o segundo não tem sentido.

A nova técnica foi trocar b por x e, ao invés de tomar a integral (2.11), considerar a soma algébrica

$$\int_a^x \frac{A(s)}{(b-s)^{\frac{3}{2}}} ds - 2 \frac{A(x)}{\sqrt{b-x}},$$

que define um limite quando x se aproxima de b . Esse limite é a parte finita da integral (2.12).

2.1.2 Integral de Hadamard para fluidos bidimensionais

Em problemas de fluidos ideais, bidimensionais, incompressíveis e irrotacionais é conveniente reduzir o potencial a uma integral singular mais forte da forma

$$F(x_0) = \int_b^a \frac{\phi(x)}{(x-x_0)^2} dx, \quad x_0 \in (a, b).$$

Seguindo as considerações de Hadamard, esta integral é definida como a *parte finita no sentido de Hadamard* como:

$$F(x_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{x_0-\epsilon} \frac{\phi(x)}{(x-x_0)^2} dx + \int_{x_0+\epsilon}^b \frac{\phi(x)}{(x-x_0)^2} dx - \frac{2\phi(x_0)}{\epsilon} \right]. \quad (2.13)$$

Note que estamos subtraindo a quantidade $\frac{2\phi(x_0)}{\epsilon}$, de maneira a cancelar as contribuições infinitas que resultam quando é feito o limite das duas integrais.

Agora, iremos mostrar que (2.13) está bem definida.

Teorema 2.1. *Seja $\phi(x)$ uma função definida em $[a, b]$ tal que $\phi'(x) \in H(\alpha)$ em $[a, b]$. Então a integral $F(x_0)$ em (2.13) existe $\forall x_0 \in (a, b)$.*

Dem: Tomamos $\phi(x) = 1$. Assim, substituindo em (2.13),

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{x_0-\epsilon} \frac{1}{(x-x_0)^2} dx + \int_{x_0+\epsilon}^b \frac{1}{(x-x_0)^2} dx - \frac{2}{\epsilon} \right] &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{a-x_0} - \frac{1}{b-x_0} + \frac{1}{\epsilon} - \frac{2}{\epsilon} \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{a-x_0} - \frac{1}{b-x_0} \right] \\ &= \frac{1}{a-x_0} - \frac{1}{b-x_0} \\ &= \int_a^b \frac{dx}{(x-x_0)^2}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Agora, tomamos $\phi(x)$ qualquer, satisfazendo as hipóteses do Teorema. Assim, de maneira análoga ao caso da integral de Cauchy, obtemos

$$\int_a^b \frac{\phi(x)}{(x-x_0)^2} dx = \int_a^b \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{(x-x_0)^2} dx + \phi(x_0) \int_a^b \frac{1}{(x-x_0)^2} dx. \quad (2.15)$$

Note que, a segunda integral do lado direito da equação acima existe e é uma integral com forte singularidade, por (2.14). Já a primeira, pela propriedade (??), tomando $\lambda = 1$, temos que $(\phi(x) - \phi(x_0))/(x - x_0) \in H(\alpha)$ como uma função de duas variáveis. Logo, a primeira integral do lado direito também existe. Portanto, $F(x_0)$ existe.

Em problemas envolvendo fluidos tridimensionais, encontramos integrais da forma

$$\int_{\Omega} w \frac{1}{R^3} d\Omega,$$

onde $R = ((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2)^{1/2}$.

A respectiva integral de Hadamard pode ser definida da seguinte maneira: seja Ω uma região limitada no plano- xy . Então, para uma função w suficientemente suave temos

$$\int_{\Omega} w(\xi, \eta) \frac{d\Omega}{R^3} \equiv \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\Omega} w(\xi, \eta) \left[\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + (z - \zeta)^2}} \right) \right] d\Omega,$$

onde $d\Omega = d\xi d\zeta$, com $\xi, \eta \in \Omega$. Ou, podemos definir equivalentemente por

$$\int_{\Omega} w(\xi, \eta) \frac{d\Omega}{R^3} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Omega \setminus \Omega_{\epsilon}} w(\xi, \eta) \frac{d\Omega}{R^3} - \frac{2\pi w(x, y)}{\epsilon} \right], \quad (2.16)$$

onde Ω_{ϵ} é um disco pequeno de raio ϵ centrado em um ponto singular (x, y) .

2.1.3 Generalização das integrais de parte finita de Hadamard com uma variável

Iremos tratar agora de uma generalização das equações (2.3) e (2.14). Essa generalização foi estudada em [13]. Considere a integral

$$I_{x_0} \phi := \int_a^b \frac{\phi(x)}{(x - x_0)^{\alpha+1}} dx, \quad x_0 \in [a, b], \quad (2.17)$$

onde ϕ é uma função Riemann integrável em $[a, b]$ em uma vizinhança de $x = x_0$, e $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Se $\alpha + 1$ é negativo, então a integral $I_{x_0}\phi$ existe como uma integral de Riemann. Mas, para valores não negativos de $\alpha + 1$ a integral geralmente não existe. Assim, torna-se necessário definir uma nova integral para o qual (2.17) exista $\forall \alpha \geq 0$. Essa nova integral deve ser uma extensão da integral de Riemann no sentido usual, ou seja, sempre que (2.17) existir no sentido de Riemann, ela deve existir também no novo sentido, e as duas devem coincidir. Além do mais, essa integral que iremos definir deverá satisfazer as propriedades de aditividade e linearidade como as integrais de Riemann. Note que os casos particulares $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$ já foram mencionados nas seções anteriores. Agora vamos generalizar o procedimento com $\alpha > 0$ qualquer.

Caso 1: $\phi = 1$ e $\alpha > 0$

Tomando $x_0 = a$,

$$I_{x_0}\phi = \int_{x_0}^b \frac{1}{(x - x_0)^{\alpha+1}} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{x_0+\delta}^b \frac{1}{(x - x_0)^{\alpha+1}} dx = -\frac{1}{\alpha(b - x_0)^\alpha} + \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha\delta^\alpha}.$$

Assim, a parte finita da integral é

$$\int_{x_0}^b \frac{1}{(x - x_0)^{\alpha+1}} dx := -\frac{1}{\alpha(b - x_0)^\alpha}.$$

Analogamente, calculamos a parte finita da integral para $x_0 = b$ e para $a < x_0 < b$ e temos

$$\int_a^b \frac{1}{(x - x_0)^{\alpha+1}} dx := \begin{cases} -\frac{1}{\alpha(b - x_0)^\alpha} & \text{para } x_0 = a, \\ -\frac{1}{\alpha(x_0 - a)^\alpha} & \text{para } x_0 = b, \\ -\frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{(b - x_0)^\alpha} - \frac{1}{(x_0 - a)^\alpha} \right) & \text{para } a < x_0 < b. \end{cases} \quad (2.18)$$

Caso 2: ϕ qualquer e $\alpha > 0$

Seja ϕ uma função Riemann-integrável qualquer definida em $[a, b]$ $k := \alpha \in \mathbb{Z}$ vezes continuamente diferenciável em uma vizinhança de x_0 . Iremos supor ainda que $\phi^{(k)}$ é Hölder contínua em x_0 . Considere o polinômio de Taylor de ϕ de grau k

$$T_k(\phi; x_0)(x) := \sum_{l=0}^k \frac{\phi^{(l)}(x_0)}{l!} (x - x_0)^l.$$

Como estamos supondo que a parte finita da integral preserva a propriedade da linearidade podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\phi(x)}{(x - x_0)^{\alpha+1}} dx &= \int_a^b \frac{\phi(x) - T_k(\phi; x_0)(x)}{(x - x_0)^{\alpha+1}} dx + \int_a^b \frac{T_k(\phi; x_0)(x)}{(x - x_0)^{\alpha+1}} dx \\ &= \int_a^b \frac{\phi(x) - T_k(\phi; x_0)(x)}{(x - x_0)^{\alpha+1}} dx \\ &\quad + \sum_{l=0}^k \frac{\phi^{(l)}(x_0)}{l!} \int_a^b \frac{dx}{(x - x_0)^{\alpha+1-l}}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Veja que, se expandirmos ϕ em série de Taylor,

$$\phi(x) = \phi(x_0) + \phi'(x_0)(x - x_0) + \frac{\phi''(x_0)(x - x_0)^2}{2} + \dots + \frac{\phi^{(m)}(x_0)(x - x_0)^m}{m!} + \dots$$

teremos

$$\phi(x) - T_k(\phi; x_0)(x) = \frac{\phi^{(\alpha+1)}(x_0)(x - x_0)^{(\alpha+1)}}{(\alpha + 1)!} + \frac{\phi^{\alpha+2}(x_0)(x - x_0)^{\alpha+2}}{(\alpha + 2)!} + \dots,$$

ou seja, na primeira integral do lado direito não temos singularidades. Logo ela existe e é uma integral de Riemann. Já as restantes integrais de parte finita foram definidas em (2.5) e (2.18).

Portanto, podemos definir a parte finita da integral para funções suaves como

$$\int_a^b \frac{\phi(x)}{(x - x_0)^{\alpha+1}} dx = \int_a^b \frac{\phi(x) - T_k(\phi; x_0)(x)}{(x - x_0)^{\alpha+1}} dx + \sum_{l=0}^k \frac{\phi^{(l)}(x_0)}{l!} \int_a^b \frac{1}{(x - x_0)^{\alpha+1-l}} dx.$$

Note que essa definição implica que a parte finita da integral é um funcional linear no argumento da função pois

$$\int_a^b \frac{cf(x) + dg(x)}{(x - y)^{\alpha+1}} dx = c \int_a^b \frac{f(x)}{(x - y)^{\alpha+1}} dx + d \int_a^b \frac{g(x)}{(x - y)^{\alpha+1}} dx,$$

sempre que as duas integrais do lado direito existirem, onde f e g são funções Riemann integráveis quaisquer.

2.1.4 Integrais de parte finita de Hadamard com mais de uma variável

Seja $\phi : B \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ ilimitada em uma vizinhança de um ponto interior \bar{x} de uma região limitada e mensurável B . Assumimos que, para qualquer $\delta \in \mathfrak{R}^+$, a função ϕ é Riemann integrável em $B \setminus S(\bar{x}; \delta)$, onde $s(\bar{x}; \delta)$ é uma esfera de centro \bar{x} e raio δ com respeito a norma usual.

Consideramos a integral

$$I_{x_0}(\phi) := \int_B k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}_0 \in B,$$

onde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$, $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, \dots, x_{0k})$ e $k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ é suave em B menos no ponto de singularidade de ordem $\alpha + N$ em $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$.

Se $\alpha + N$ é negativo, então a integral acima existe no sentido de Riemann, supondo ϕ Riemann-integrável própria ou imprópria em B e limitada em uma vizinhança de $x = x_0$. Por outro lado, se $\alpha + N$ for não negativo, a integral $I_{x_0} \phi$ geralmente não existe no sentido de Riemann. Como no caso de dimensão um, iremos agora introduzir uma extensão da integral de Riemann para que $I_{x_0} \phi$ faça para valores não negativos de $\alpha + N$.

Vamos supor que ϕ é $k = [\alpha]$ vezes continuamente diferenciável em uma vizinhança de \mathbf{x}_0 , onde $[\alpha] =$ a parte inteira de α . Se α for um inteiro, vamos assumir ainda que a derivada parcial de α -ordem da ϕ é Hölder contínua em \mathbf{x}_0 . Denotamos

o polinômio de Taylor de ϕ de grau k em \mathbf{x}_0 por $T_k(\phi; \mathbf{x}_0)$, ou seja,

$$\begin{aligned} T_k(\phi; \mathbf{x}_0) &= \phi(\mathbf{x}_0) + \sum_{i_1=1}^N \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}_{i_1}}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_{i_1} - \mathbf{x}_{0i_1}) \\ &+ \sum_{i_1, i_2=1}^N \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \mathbf{x}_{i_1} \partial \mathbf{x}_{i_2}}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_{i_1} - \mathbf{x}_{0i_1})(\mathbf{x}_{i_2} - \mathbf{x}_{0i_2}) \\ &+ \dots + \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^N \frac{1}{k!} \frac{\partial^k \phi}{\partial \mathbf{x}_{i_1} \dots \partial \mathbf{x}_{i_k}}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_{i_1} - \mathbf{x}_{0i_1}) \dots (\mathbf{x}_{i_k} - \mathbf{x}_{0i_k}). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Novamente, vamos querer que a parte finita da integral seja linear. Logo, a relação

$$\int_B k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_B k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) (\phi(\mathbf{x}) - T_k(\phi; \mathbf{x}_0)(\mathbf{x})) d\mathbf{x} + \int_B k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) T_k(\phi; \mathbf{x}_0)(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

deve ser satisfeita.

A primeira integral do lado direito existe no sentido de Riemann. Já a segunda, tomando uma bola $S(\mathbf{x}_0; \delta)$ centrada em \mathbf{x}_0 de raio δ , podemos ver que a integral

$$I_{\mathbf{x}_0; \delta} T_k(\phi; \mathbf{x}_0) = \int_{S(\mathbf{x}_0; \delta)} k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) T_k(\phi; \mathbf{x}_0)(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

existe $\forall \delta \in \mathfrak{R}^+$, mas não converge quando $\delta \rightarrow 0^+$. Para analisar o comportamento de $I_{\mathbf{x}_0; \delta} T_k(\phi; \mathbf{x}_0)$ quando $\delta \rightarrow 0^+$, vamos parametrizar $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ com coordenadas polares. Assim,

$$\begin{aligned} T_k(\phi; \mathbf{x}_0)(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}) &= p_0(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}) + p_1(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1})r + p_2(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1})r^2 \\ &+ \dots + p_k(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1})r^k, \end{aligned} \quad (2.21)$$

onde $p_j(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1})$, $j = 1, \dots, k$, são polinômios trigonométricos em $\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}$. Ainda, vamos supor que a fronteira de B tem a seguinte representação

$$\partial B = \{(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}) : (\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1})^T \in \Phi, r = R(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1})\},$$

onde

$$R : \Omega \subseteq [0, \pi] \times \dots \times [0, \pi] \times [1, 2\pi] \rightarrow \mathfrak{R}_0^+.$$

Vamos analisar dois casos:

Caso 1: $k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = r^{-\alpha-N}g(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N-1})$, onde g é suave, periódica, de período π em $\varphi_1, \dots, \varphi_{N-2}$ e de período 2π em φ_{N-1} .

Consideramos a seguinte transformação das coordenadas cartesianas N -dimensionais $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^N$ em coordenadas esféricas N -dimensionais

$$(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{N-2}, \varphi_{N-1})^T \in \mathfrak{R}_0^+ \times [0, \pi] \times \dots \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$$

de acordo com

$$\begin{aligned} x_1 &= r \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2 \dots \operatorname{sen} \varphi_{N-3} \operatorname{sen} \varphi_{N-2} \operatorname{sen} \varphi_{N-1}, \\ x_2 &= r \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2 \dots \operatorname{sen} \varphi_{N-3} \operatorname{sen} \varphi_{N-2} \cos \varphi_{N-1}, \\ x_3 &= r \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2 \dots \operatorname{sen} \varphi_{N-3} \cos \varphi_{N-2}, \\ &\vdots \\ x_{N-1} &= r \operatorname{sen} \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ x_N &= r \cos \varphi_1. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Nesse caso, temos a relação

$$\det J(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}) = r^{N-1} q(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}), \tag{2.23}$$

onde

$$q(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}) = (\operatorname{sen} \varphi_1)^{N-2} (\operatorname{sen} \varphi_2)^{N-3} \dots (\operatorname{sen} \varphi_{N-3})^2 \operatorname{sen} \varphi_{N-2}. \tag{2.24}$$

Usando a representação (2.21) do polinômio de Taylor e as relações (2.22) e (2.23), temos

$$I_{\mathbf{x}_0; \delta} T_k(\phi; \mathbf{x}_0) = \sum_{j=0}^k \int_{\Omega} (g q p_j)(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}) h_j(\delta, \varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}) d\varphi_1 \dots d\varphi_{N-1}$$

com

$$h_j(\delta, \varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}) = \int_{\delta}^{\max[\delta, R(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1})]} \frac{1}{r^{\alpha-j+1}} dr.$$

Claramente, $h_j = 0$ se $\delta > R$. Caso contrário,

$$h(\delta, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}) = \begin{cases} \log R(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}) - \log \delta & \text{para } j = \alpha, \\ (j - \alpha)^{-1}(R(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1})^{j-\alpha} - \delta^{j-\alpha}) & \text{para } j \neq \alpha. \end{cases}$$

Logo, temos a seguinte expansão assintótica

$$I_{\mathbf{x}_0; \delta} T_k(\phi; \mathbf{x}_0) = a_0 + a_1 \log \delta + a_2 \delta^{k-1-\alpha} + \dots + a_{k+1} \delta^{k-\alpha} + O(1) \quad (2.25)$$

quando $\delta \rightarrow 0^+$, onde $a_0, a_1, \dots, a_{k+1} \in \mathfrak{R}$ são constantes e $O(1)$ indica os termos que convergem a zero quando $\delta \rightarrow 0^+$. Então a parte finita da integral de $T_k(\phi; \mathbf{x}_0)$ é obtida tomando os termos divergentes em (2.25) e tomando o limite da parte finita restante quando $\delta \rightarrow 0^+$:

$$\int_B k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) T_k(\phi; \mathbf{x}_0)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} := a_0.$$

Caso 2: k geral.

A partir da expansão assintótica, vamos considerar a seguinte definição

Definição 2.3. (*Parte Finita de uma Função Real*): Seja a função $I : \delta \rightarrow I(\delta)$ definida $\forall \delta \in (0, \delta_0)$, $\delta_0 > 0$. Assumimos que a seguinte expansão assintótica é válida:

$$I(\delta) = a_0 + a_1 \log \delta + a_2 \delta^{-\alpha_1} + \dots + a_{k+1} \delta^{-\alpha_k} + o(1) \text{ quando } \delta \rightarrow 0^+,$$

onde a_0, a_1, \dots, a_{k+1} e $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k$ são constantes reais. Então, a parte finita, *p.f.* $I(\delta)$, de I é definida por

$$p.f.I(\delta) := a_0.$$

Então, se supusermos que a definição acima vale para a função

$$I : \delta \rightarrow \int_{B \setminus S(\mathbf{x}_0; \delta)} k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (2.26)$$

então temos a seguinte definição para a parte finita da integral:

$$\int_B k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} := p.f.I(\delta). \quad (2.27)$$

Se tivermos uma função f suficientemente suave, a definição acima se aplica para qualquer núcleo $k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ singular, o qual pode ser expresso como uma combinação linear de acordo com o caso 1.

Note que a definição dada para a parte finita da integral de uma só variável é apenas um caso particular da definição (2.27). Além disso, se \mathbf{x}_0 é um ponto interior de B e se os coeficientes a_1, \dots, a_{k+1} na expansão assintótica da função $I_{\mathbf{x}_0; \delta} T_k(\phi; \mathbf{x}_0)$ desaparecerem, isto é,

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{k+1} = 0,$$

então a parte finita da integral (2.27) coincide com o valor principal de Cauchy.

3 DISCO HORIZONTAL SUBMERSO EM UM FLUIDO COM SUPERFÍCIE LIVRE

3.1 Introdução

Neste capítulo iremos estudar o potencial de velocidade de um fluido que passa por um disco plano. A abordagem vai ser bastante baseada em um trabalho de Martin e Farina, publicado em 1997 [21]. Antes, definiremos os seguintes conceitos.

Consideramos um fluido irrotacional e definimos o vetor velocidade por

$$\mathbf{V} = (u_1, u_2, u_3).$$

Tomemos a integral definida

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} u_i dx_i,$$

onde o limite inferior é uma posição arbitrária e o limite superior é o ponto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Assim, podemos notar que essa integral independe do caminho de integração entre os pontos \mathbf{x}_0 e \mathbf{x} , uma vez que a diferença entre quaisquer duas integrais, entre os mesmos pontos, é igual à circulação ao redor do caminho fechado de \mathbf{x}_0 à \mathbf{x} e ao redor do caminho de volta a \mathbf{x}_0 que é igual à zero, pois o fluido é irrotacional. Assim, se escolhermos o caminho que aproxima o ponto \mathbf{x} ao longo de uma reta paralela ao eixo x_1 então ao longo da parte final do caminho de integração temos que $u_i dx_i = u_1 dx_1$. Logo,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{x_0}^x u_1 dx_1 = u_1.$$

Aplicando o mesmo argumento às outras coordenadas temos

$$u_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

ou

$$\mathbf{V} = \nabla\phi.$$

Como em [21], vamos definir ϕ como o potencial de velocidade. A vantagem de estudarmos o potencial de velocidade ϕ ao invés da velocidade é que o vetor velocidade tem três componentes escalares enquanto o potencial de velocidade é um escalar do qual podemos calcular as três componentes da velocidade.

Vamos supor que temos um corpo que se move em um fluido ideal e infinito perto de uma superfície livre. As seis componentes da força e do momento hidrodinâmico podem ser escritas na forma matricial [26]

$$F_i = Re \left\{ \sum_{j=1}^6 \xi_j e^{i\omega t} f_{ij} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, 6, \quad (3.1)$$

onde

$$f_{ij} = -r \int \int_{S_b} \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \phi_i dS. \quad (3.2)$$

O coeficiente f_{ij} é a força complexa na direção i devido ao movimento senoidal de amplitude um na direção j e tanto a parte real quanto a parte imaginária dependem da frequência angular ω . Logo,

$$f_{ij} = \omega^2 a_{ij} - i\omega b_{ij}.$$

Assim, podemos expressar (3.1) como

$$F_i = - \sum_{j=1}^6 (a_{ij} \dot{V}_j + b_{ij} V_j).$$

Vemos que as componentes da força e do momento apresentam uma parte proporcional à velocidade do fluido e uma parte proporcional à aceleração do fluido. O coeficiente da parte proporcional à aceleração, a_{ij} , desempenha o papel de uma massa, sendo conhecido como *coeficiente da massa adicional*. Já o coeficiente da parte proporcional à velocidade, b_{ij} , é conhecido como *coeficiente de amortecimento* [26].

3.1.1 O problema

Considere uma radiação de pequena amplitude da superfície de ondas aquáticas, harmônica no tempo, gerada por uma oscilação de uma placa-rígida em 3 dimensões. O problema proposto é calcular a radiação das ondas e as forças hidrodinâmicas na placa.

O caso em que a placa está na superfície já foi extensivamente estudado e é conhecido como *problema da doca*. Assim, nesse capítulo foi tomado o caso em que a placa está submersa.

3.2 Equações integrais de fronteira: corpos submersos

Consideramos, o sistema coordenado cartesiano, onde z é o eixo vertical, positivo para baixo, e a superfície livre não perturbada se localiza em $z = 0$. Nesse problema temos um corpo submerso em um fluido com superfície livre S suave, fechada e limitada. Supomos que os movimentos do fluido são de pequena amplitude, harmônicos no tempo, que o fluido é incompressível e não viscoso, e que o movimento é irrotacional. Denotamos ϕ como o potencial do fluido e $[\phi]$ como a descontinuidade do fluido, através de S .

3.3 Formulação do problema

As equações que formulam o problema são as seguintes.

- ϕ satisfaz a Equação de Laplace:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi = 0 \quad \text{no fluido;}$$

- A condição da superfície livre é:

$$K\phi + \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \text{ em } z = 0;$$

onde $K = \omega^2/g$, g é a aceleração da gravidade e ω é a frequência.

- Na superfície do corpo a velocidade normal é descrita como

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = V \text{ em } S$$

onde V é uma função dada;

Além disso, temos que ter uma condição para o potencial no infinito. Sabemos que em uma dimensão a solução da equação da onda é dada por funções do tipo

$$f(x) = \cos(kx - \omega t) \text{ e } \sin(kx - \omega t)$$

ou ainda, podemos tomar a representação complexa como

$$\phi(x) = Ae^{i(kx - \omega t)}.$$

Assim, em três dimensões, temos que

$$\phi(\rho, t) = \frac{Ae^{-i(Kr - \omega t)}}{\sqrt{r}},$$

onde a equação é dividida por \sqrt{r} , pois a amplitude da onda deve ser cada vez menor à medida que a onda se distancia da fonte e se espalha por uma superfície cada vez maior. Ou seja,

$$\phi \approx \frac{e^{-irK}}{\sqrt{r}}. \quad (3.3)$$

De acordo com a *condição de Sommerfeld* [27], as ondas devem se comportar no infinito como ondas progressivas saindo da fonte de perturbação. Ou seja,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int \int_S \left| \frac{\partial\phi}{\partial r} - iK\phi \right|^2 ds = 0. \quad (3.4)$$

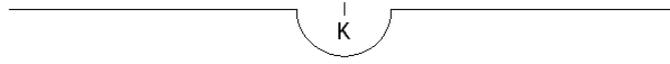


Figura 3.1: caminho da integral em G_1 .

Essa é a forma fraca da condição de radiação de Sommerfeld. Vamos tomar a forma forte, ou seja, tomamos ϕ satisfazendo a condição de radiação.

$$r^{1/2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} - iK\phi \right) \rightarrow 0 \text{ quando } r = (x^2 + y^2)^{1/2} \rightarrow \infty. \quad (3.5)$$

Note que, (3.5) implica (3.4). Iremos impor a condição (3.5) ao problema.

Ainda, vamos denotar os pontos P, Q como pontos no fluido e os pontos p, q como pontos do corpo submerso.

Para resolver o problema, iremos reduzi-lo a uma equação integral de fronteira sobre S .

Para águas profundas, uma forma da função de Green é dada [3] por

$$G(P, Q) \equiv G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = (R^2 + (z - \zeta)^2)^{-1/2} + G_1(R, z + \zeta), \quad (3.6)$$

onde

$$R = ((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2)^{1/2} \quad (3.7)$$

e

$$G_1(R, z + \zeta) = \int_0^\infty e^{-k(z+\zeta)} J_0(kR) \frac{k+K}{k-K} dk, \quad (3.8)$$

e J_0 é a função de Bessel e o caminho da integral contorna a singularidade $k = K$. A integral de G_1 é uma integral de contorno como em (figura 3.1). A função G satisfaz a condição de superfície livre de ϕ e a equação de Laplace e tem uma singularidade simples em $P = Q$, isto é, $\Delta G(P, Q) = -4\pi\delta(P - Q)$, onde δ é uma delta de Dirac.

De acordo com [3] pode-se mostrar que a função (3.8) satisfaz

$$\frac{\partial G}{\partial r} - iKG = O(r^{-3/2}),$$

e portanto satisfaz a equação (3.5). Logo, $G \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$.

Assim, aplicando o Teorema de Green [5] em ϕ e G obtemos

$$\frac{1}{4\pi} \int_B \phi(Q) \Delta G(P, Q) dQ = \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ \phi(q) \frac{\partial G(P, q)}{\partial n_q} - G(P, q) \frac{\partial \phi}{\partial n_q} \right\} ds_q.$$

Como $\Delta G(P, Q) = -4\pi\delta(P - Q)$, segue que

$$-\phi(P) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ \phi(q) \frac{\partial G(P, q)}{\partial n_q} - G(P, q) \frac{\partial \phi}{\partial n_q} \right\} ds_q.$$

Pela condição de fronteira,

$$-\phi(P) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ \phi(q) \frac{\partial G(P, q)}{\partial n_q} - G(P, q) V(q) \right\} ds_q. \quad (3.9)$$

Por outro lado, fazendo $P \rightarrow p$, obtemos

$$\begin{aligned} -\phi(P) &= \frac{1}{4\pi} \int_B \phi(q) \Delta G(P, q) dx \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_B \phi(q) (-4\pi\delta(P - q)) dx = \frac{1}{2} \phi(p), \end{aligned} \quad (3.10)$$

pela propriedade da função de δ , onde B é o volume que contém o fluido.

$$\text{Logo,} \quad \frac{1}{2} \phi(p) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ \phi(q) \frac{\partial G(p, q)}{\partial n_q} - G(p, q) V(q) \right\} ds_q, \quad (3.11)$$

ou seja,

$$2\pi\phi(p) - \int_S \phi(q) \frac{\partial G(p, q)}{\partial n_q} ds_q = - \int_S G(p, q) V(q) ds_q,$$

que é uma equação integral de fronteira para ϕ em S . Essa equação tem solução única para todos os valores de K . E assim, pela equação (3.11), obtemos ϕ para todos os pontos do fluido.

3.4 Equação integral de fronteira: placas finas

Supomos que o corpo se degenera em uma fina placa rígida, ou seja, S se degenera em uma superfície aberta, suave, finita e limitada Ω , com fronteira $\partial\Omega$, curva simples, suave e fechada. Denotamos os dois lados de Ω por: Ω^+ e Ω^- .

Portanto, agora a condição de fronteira é

$$\frac{\partial \phi}{\partial n^+} = V(p^+) \text{ para } p^+ \text{ em } \Omega^+,$$

e

$$\frac{\partial \phi}{\partial n^-} = V(p^-) \text{ para } p^- \text{ em } \Omega^-.$$

Como o potencial de velocidade é descontínuo através de Ω , definimos a descontinuidade do potencial através de Ω por

$$[\phi(p)] = \phi(p^+) - \phi(p^-).$$

Como a placa é rígida, $V(p^+) = -V(p^-)$. Assim, a representação integral se torna

$$\begin{aligned} \phi(P) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \left\{ \phi(q^+) \frac{\partial G(P, q^+)}{\partial n_q^+} - \phi(q^-) \frac{\partial G(P, q^-)}{\partial n_q^-} \right. \\ &\quad \left. - G(P, q^+) V(q^+) - G(P, q^-) V(q^-) ds_q \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_{\Omega} [\phi(q)] \frac{\partial G(P, q)}{\partial n_q} ds_q \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Omega} V(q^+) [G(p, q^+) - G(p, q^-)] ds_q \right\}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Portanto,

$$\phi(p) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} [\phi(q)] \frac{\partial G}{\partial n_q} ds_q,$$

pois $G(p, q^+) - G(p, q^-) = 0$.

Derivando em ambos os lados e usando a condição de fronteira anterior,

$$\frac{\partial \phi(p)}{\partial n_p^+} = \frac{\partial}{\partial n_p^+} \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} [\phi(q)] \frac{\partial G(p^+, q)}{\partial n_q^+} ds_q$$

Logo,

$$V(p^+) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n_p^+} \int_{\Omega} [\phi(q)] \frac{\partial G(p^+, q)}{\partial n_q^+} ds_q, \quad p^+ \in \Omega^+.$$

De maneira análoga, aplicamos a condição de fronteira em Ω^- . A equação íntegro-diferencial acima para $[\phi(q)]$, $q \in \Omega$ deve ser resolvida de acordo com a condição de contorno

$$[\Omega] = 0, \text{ ao redor de } \partial\Omega.$$

Invertendo a ordem de integração e diferenciação, supondo que $[\phi(q)]$ satisfaz a condição de Hölder, obtemos

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} [\phi(q)] \frac{\partial^2}{\partial n_p^+ \partial n_q^+} G(p^+, q) ds_q = V(p^+), \quad p^+ \in \Omega^+. \quad (3.13)$$

Observe que a inversão é válida pois a integral pode ser interpretada como uma integral de parte finita. Ao fazermos isso podemos avaliar a integral de Hadamard analiticamente. Note ainda que essa integral foi definida anteriormente em (2.16). A equação integral acima pode ser resolvida de acordo com a condição de contorno $[\phi] = 0$.

3.5 Disco horizontal submerso

Vamos supor que Ω é um disco circular. A partir de agora, o objetivo é simplificar a equação integral (3.13).

Supomos que Ω é um disco horizontal centrado em $(x, y, z) = (0, 0, b/2)$ de raio $a = 1$. Tomamos Ω^+ como o lado inferior do disco tal que $\partial/\partial n^+ = \partial/\partial z$ é avaliado em $z = b/2$.

Então, derivando em ambos os lados em (3.6) e (3.8), temos

$$\frac{\partial G}{\partial n_q^+} = -\frac{1}{2}(R^2 + (z - \zeta)^2)^{-3/2} \cdot 2(z - \zeta) + \frac{\partial}{\partial z} G_1(R, z + \zeta),$$

onde

$$\frac{\partial}{\partial z} G_1(R, z + \zeta) = \int_0^{\infty} -k e^{-k(z+\zeta)} J_0(kR) \frac{k+K}{k-K} dk.$$

Derivando mais uma vez,

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial n_p^+ \partial n_q^+} &= -\frac{3}{2}(R^2 + (z - \zeta)^2)^{-5/2} 2(z - \zeta) \\ &\quad - (R^2 + (z - \zeta)^2)^{-3/2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} G_1(R, z + \zeta). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial n_p^+ \partial n_q^+} &= 3(R^2 + (z - \zeta)^2)^{-5/2}(z - \zeta) - (R^2 + (z - \zeta)^2)^{-3/2} \\ &\quad + \frac{\partial^2}{\partial z^2} G_1(R, z + \zeta), \end{aligned}$$

onde

$$\frac{\partial}{\partial z} G_1(R, z + \zeta) = \int_0^\infty k^2 e^{-k(z+\zeta)} J_0(kR) \frac{k+K}{k-K} dk.$$

Tomando $z = \zeta = b/2$,

$$\frac{\partial G}{\partial n_p^+ \partial n_q^+} = -\frac{1}{R^3} + M,$$

com

$$M = \int_0^\infty k^2 e^{-k(z+\zeta)} J_0(kR) \frac{k+K}{k-K} dk. \quad (3.14)$$

Portanto (3.13) se torna

$$\frac{1}{4\pi} \int_\Omega [\phi] \frac{d\Omega}{R^3} + \frac{1}{4\pi} \int_\Omega [\phi(q)] M(p, q) d\Omega = V(p^+). \quad (3.15)$$

Essa é uma integral hipersingular bidimensional. Ela é válida quando Ω é um disco plano horizontal.

3.6 Equações uni-dimensionais

Podemos transformar a equação anterior em um conjunto de equações não acopladas uni-dimensionais. De fato, introduzindo coordenadas polares r e θ para o ponto $p = (x, y)$ no disco temos:

$$x = r \cos \theta \quad \text{e} \quad y = r \sin \theta,$$

tal que

$$\Omega = \{(r, \theta) : 0 \leq r < 1, \pi \leq \theta < \pi\}$$

e

$$q = (\xi, \eta) \text{ onde } \xi = \rho \cos \phi \text{ e } \eta = \rho \operatorname{sen} \phi,$$

com $d\Omega = \rho d\rho d\phi$.

Expandindo as funções em série de Fourier podemos supor que

$$V(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(r) \cos n\theta.$$

Usando

$$J_0(kR) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n J_n(kr) J_n(k\rho) \cos n(\theta - \phi),$$

onde $\epsilon_0 = 1$ e $\epsilon_n = 2$ para $n > 1$ de acordo com [2] e R é dado por (3.7), obtemos

$$M(r, \theta; \rho, \phi) = \sum \epsilon_n M_n(r, \rho) \cos n(\theta - \phi), \quad (3.16)$$

onde

$$M_n(r, \rho) = \int_0^{\infty} e^{-kb} J_n(kr) J_n(k\rho) \frac{k^2(k+K)}{k-K} dk. \quad (3.17)$$

Segue de (3.15) que $[\phi]$ pode ser escrito como

$$[\phi(r, \theta)] = \sum w_n(r) \cos n\theta.$$

Note que isso é possível pois, como o problema é axissimétrico, podemos tomar soluções pares em θ . No caso geral, poderíamos supor a expansão para ϕ em termos de senos e cossenos.

Além disso, podemos ver que w_n satisfaz uma equação integral unidimensional.

De fato, escrevendo (3.15) como

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} [\phi] \frac{d\Omega}{R^3} = f(p), \quad p \in \Omega,$$

onde

$$f(r, \theta) = V(r, \theta) - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} [\phi(q)] M(p, q) d\Omega.$$

Substituindo $V(r, \theta)$ e $M(r, \rho)$ pelas suas expansões na equação acima, obtemos

$$f(r, \theta) = \sum f_n(r) \cos n\theta,$$

onde

$$f_n(r) = V_n(r) - \frac{1}{2} \int_0^1 w_n(\rho) M_n(r, \rho) \rho d\rho.$$

De acordo com [6], w_n e f_n são relacionados pela seguinte fórmula,

$$w_n(r) = -\frac{4}{\pi} r^n \int_r^1 \frac{1}{t^{2n}(t^2 - r^2)^{1/2}} \int_0^t \frac{s^{n+1} f_n(s)}{(t^2 - s^2)^{1/2}} ds dt,$$

onde $n = 0, 1, 2, \dots$

Substituindo f_n na equação acima temos,

$$w_n(r) = -\frac{4}{\pi} r^n \int_r^1 \frac{1}{t^{2n}(t^2 - r^2)^{1/2}} \int_0^t \frac{s^{n+1} V_n(r) - \frac{1}{2} \int_0^1 w_n(\rho) M_n(r, \rho) \rho d\rho}{(t^2 - s^2)^{1/2}} ds dt.$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} w_n(r) &= r^n \int_r^1 \frac{1}{(t^{2n}(t^2 - r^2)^{1/2})} \left[-\frac{4}{\pi} \int_0^t \frac{s^{n+1} V_n(s)}{(t^2 - s^2)^{1/2}} ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{s^{n+1}}{(t^2 - s^2)^{1/2}} \int_0^1 w_n(\rho) M_n(s, \rho) \rho d\rho ds \right] dt. \end{aligned}$$

Logo,

$$w_n(r) = w_n^\infty(r) + \int_0^1 w_n(\rho) L_n(r, \rho) d\rho,$$

que é uma equação integral de Fredholm do segundo tipo para w_n , onde

$$w_n^\infty(r) = -\frac{4}{\pi} r^n \int_r^1 \frac{1}{t^{2n}} (t^2 - r^2)^{1/2} \int_0^t \frac{s^{n+1} V_n(s)}{(t^2 - s^2)^{1/2}} ds dt \quad (3.18)$$

e

$$L_n(r, \rho) = \frac{2}{\pi} \rho r^n \int_r^1 \int_0^t \frac{s^{n+1}}{(t^2 - s^2)^{1/2}} M_n(s, \rho) ds dt. \quad (3.19)$$

A equação (3.18) é uma equação de Fredholm do segundo tipo para w_n . Note que, se (3.19) for zero, fisicamente não temos superfície livre.

3.7 Equações uni-dimensionais mais simples

O objetivo dessa seção é simplificar as equações (3.18) e (3.19).

Note que podemos reescrever as equações (3.18) e (3.19) como

$$w_n^\infty = r^n \int_r^1 \frac{1}{t^{2n}(t^2 - r^2)^{1/2}} \left[\frac{-4}{\pi D_n} t^{-n} \int_0^t \frac{s^{n+1} V_n(s)}{(t^2 - s^2)^{1/2}} ds + \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{s^{n+1}}{(t^2 - s^2)^{1/2}} \left(\frac{1}{D_n} \int_0^1 w_n(\rho) M_n(s, \rho) \rho d\rho \right) \right]. \quad (3.20)$$

Assim temos as seguintes equações para w_n :

$$w_n(r) = D_n r^n \int_r^1 \frac{\psi_n(t) dt}{t^n (t^2 - r^2)^{1/2}}, \quad (3.21)$$

onde D_n é um fator normalizante e

$$\psi_n(t) = \psi_n^\infty(t) + \frac{2}{\pi} t^{-n} \int_0^t \frac{s^{n+1} F_n(s)}{(t^2 - s^2)^{1/2}} ds, \quad (3.22)$$

com

$$\psi_n^\infty(t) = -\frac{4}{\pi D_n} t^{-n} \int_0^1 \frac{s^{n+1} V_n(s)}{(t^2 - s^2)^{1/2}} ds$$

e

$$F_n(s) = \frac{1}{D_n} \int_0^1 w_n(\rho) M_n(s, \rho) \rho d\rho. \quad (3.23)$$

Substituindo (3.21) em (3.23) temos

$$\begin{aligned} F_n(s) &= \int_0^1 \frac{\psi_n(t)}{t^n} \int_0^t \frac{\rho^{n+1}}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}} M_n(s, \rho) d\rho dt \\ &= \int_0^1 \rho^{n+1} M_n(s, \rho) \int_\rho^1 \frac{\psi_n(t)}{t^n (t^2 - \rho^2)^{1/2}} dt d\rho. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Vamos agora analisar a integral

$$I_n(t) = \int_0^t \frac{s^{n+1} F_n(s)}{(t^2 - s^2)^{1/2}} ds. \quad (3.25)$$

Substituindo (3.17) em (3.25) temos

$$\begin{aligned}
I_n(t) &= \int_0^t \frac{s^{n+1}}{(t^2 - s^2)^{1/2}} ds \int_0^1 \frac{\psi_n(T)}{T^n} dT \int_0^T \frac{\rho^{n+1}}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}} M_n(s, \rho) d\rho \\
&= \int_0^1 \frac{\psi_n(T)}{T^n} dT \int_0^\infty dk \int_0^t \frac{s^{n+1}}{(t^2 - s^2)^{1/2}} J_n(ks) ds \\
&\times \int_0^T \frac{\rho^{n+1}}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}} J_n(k\rho) \frac{k^2(k+K)}{k-K} e^{-kb} d\rho.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Usando [?] com $\mu = -1/2$, $y = k$, $a = y$ e $\nu = n$,

$$\frac{1}{y^n} \int_0^y \frac{\rho^{n+1} J_n(k\rho)}{(y^2 - \rho^2)^{1/2}} d\rho = y j_n(ky),$$

onde $j_n(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right) J_{(n+1)/2}$ é a função de Bessel esférica, temos

$$I_n(t) = \int_0^1 \psi_n(T) dT \int_0^\infty T t^{n+1} j_n(kt) j_n(kT) k^2 \frac{k+K}{k-K} e^{-kb} dk$$

Fazendo a mudança de variável $T \rightarrow y$ e $t \rightarrow x$ e substituindo a equação acima em (5.41) temos

$$\begin{aligned}
\psi_n(x) &= \psi_n^\infty(x) \\
&+ \frac{2}{\pi} x^{-n} \int_0^1 \psi_n(y) dy \int_0^\infty y x^{n+1} j_n(kx) j_n(ky) k^2 \frac{k+K}{k-K} e^{-kb} dk.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\psi_n(x) = \psi_n^\infty(x) + \int_0^1 \psi_n(y) \frac{2}{\pi} xy N_n(x, y) dy, \tag{3.27}$$

onde

$$N_n(x, y) = \int_0^\infty e^{-kb} j_n(kx) j_n(ky) k^2 \frac{k+K}{k-K} dk \tag{3.28}$$

é um núcleo simétrico contínuo.

3.8 O disco oscilante nas ondas

Vamos tomar $V(r, \theta) = 1$, pois isso corresponde às oscilações verticais do disco plano. Assim a solução é axissimétrica:

$$[\phi] = w_0.$$

pois o ângulo não varia.

Escolhendo $D_0 = -4/\pi$ quando $\psi_0^\infty(x) = x$, escrevendo $\psi \equiv \psi_0$ e substituindo na equação para w_0 , isto é

$$w_0(r) = D_0 r^0 \int_r^1 \frac{\psi_0(t) dt}{t^0 (t^2 - r^2)^{1/2}},$$

temos

$$w_0(r) = -\frac{4}{\pi} \int_r^1 \frac{\psi(t) dt}{(t^2 - r^2)^{1/2}},$$

onde, por (3.27), ψ resolve

$$\psi(x) - \int_0^1 \psi(y) N_0(x, y) dy = x, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (3.29)$$

Tomando $j_0(z) = z^{-1} \text{sen} z$,

$$\begin{aligned} N_0(x, y) &= \frac{2}{\pi} xy \int_0^\infty e^{-kb} k^{-1} x^{-1} \text{sen} kx \ k^{-1} y^{-1} \text{sen} ky k^2 \frac{k+K}{k-K} dk \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-kb} \frac{1}{2} [\cos(kx - ky) - \cos(kx + ky)] \frac{k+K}{k-K} dK, \end{aligned}$$

pois

$$\cos(kx - ky) - \cos(kx + ky) = \cos kx \cos ky + 2 \text{sen} kx \text{sen} ky - \cos kx \cos ky.$$

Assim, o núcleo se torna

$$N_0(x, y) = L(x - y) - L(x + y),$$

onde

$$L(X) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-kb} \cos(kX) \frac{k+K}{k-K} dk.$$

Note que $L(x)$ é uma função par e $N_0(x, y)$ é uma função ímpar de x , isto é,

$$L(-x) = L(x) \quad \text{e} \quad N_0(-x, y) = -N_0(x, y).$$

Como o lado direito de (3.29) é ímpar, temos que a $\psi(x)$ da equação integral pode ser estendida como uma função ímpar. Assim, podemos escrever a equação

integral (3.29) como uma equação sobre o intervalo $-1 \leq x \leq 1$. Ou seja,

$$\psi(x) - \int_{-1}^1 \psi(y)L(x-y)dy = x, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (3.30)$$

Essa é uma equação integral de Fredholm do segundo tipo com ψ uma solução ímpar e contínua dessa equação.

Podemos separar o núcleo em duas partes usando

$$\frac{k+K}{k-K} = 1 + \frac{2K}{k-K}. \quad (3.31)$$

Assim,

$$L(X) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-kb} \cos kX dk + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-kb} \cos kX \frac{2K}{k-K} dk,$$

ou seja,

$$L(x) = \underbrace{\frac{b}{\pi} \frac{1}{b^2 + X^2}}_{L_0} + \underbrace{\frac{2K}{\pi} \Phi_0(X, b)}_{L_1},$$

onde

$$\Phi_0(X, Y) = \int_0^\infty e^{-kY} \cos kX \frac{dk}{k-K}$$

é um potencial de força de onda bi-dimensional.

Substituindo $L(X)$ pela sua nova expressão em (5.42), temos,

$$\psi(x) - \frac{b}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi(y)}{b^2 + (x-y)^2} dy - \frac{2K}{\pi} \int_{-1}^1 \psi(y) \Phi_0(x-y, b) dy = x, \quad (3.32)$$

com $-1 \leq x \leq 1$.

Essa é a forma final para ψ , que depende do número de onda K e da profundidade b , ou seja, $\psi(x) = \psi(x; K, b)$.

3.9 Força hidrodinâmica

A força hidrodinâmica é dada por $Re\{\mathbf{F}e^{-i\omega t}\}$, onde

$$\mathbf{F} = -i\omega\rho \int_{\Omega} [\phi(q)] \mathbf{n}^+(q) ds_q,$$

com ρ denotando a densidade do fluido e \mathbf{n}^+ o vetor unitário normal a Ω^+ apontando para dentro do fluido. Logo, a força é dada por uma integral de $[\phi]$ sobre a placa.

Vamos supor que o centro do disco está em

$$z = \frac{1}{2}b - (\mathcal{U}/\omega) \cos \omega t,$$

onde \mathcal{U} é constante. Então a força hidrodinâmica vertical no disco é dada por

$$F = \rho a^3 \mathcal{U} \omega \{ \mathcal{A} \cos \omega t + \mathcal{B} \sin \omega t \},$$

onde a é o raio do disco e \mathcal{A} e \mathcal{B} são coeficientes de massa adicionada e de amortecimento, respectivamente. Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(K, b) + i\mathcal{B}(K, b) &= - \int_D [\phi] ds \\ &= -2\pi \int_0^1 w_0(r) r dr = 8 \int_0^1 \psi(x) x dx, \end{aligned} \quad (3.33)$$

onde D é um disco unitário.

3.10 Alguns casos especiais

3.10.1 Profundidade infinita: $b \rightarrow \infty$

Quando $b \rightarrow \infty$ temos que o núcleo

$$L(X) = \frac{b}{\pi} \left(\frac{1}{b^2 + X^2} \right) + \frac{2K}{\pi} \int_0^\infty e^{-kb} \cos kX \frac{dk}{k - K} \rightarrow 0$$

e portanto, por (3.32), $\psi(x) = x$.

Assim, de (3.33) podemos ver que

$$A = \frac{8}{3} \text{ e } B = 0 \text{ quando } b \rightarrow \infty.$$

Fisicamente, isso corresponde a um único disco oscilando em um fluido não limitado, já que a profundidade é infinita, ou seja, não temos superfície livre.

3.10.2 Equação de Love: $K = 0$

Assim temos $L_1 = \frac{2K}{\pi}\Phi_0(X, b) = 0$. Tomando $f(x) = \psi(x; 0, b)$, temos

$$f(x) - \frac{b}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(y)}{b^2 + (x-y)^2} dy = x, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Essa é a equação de Love. Ela surge do problema eletrostático de uma placa circular. Podemos ver que tomarmos $K = 0$ na condição de superfície livre é equivalente a ter um par idêntico de discos co-axiais em um fluido não limitado com $\partial\phi/\partial z = +1$ em um disco, $\partial\phi/\partial z = -1$ no outro, sendo b a separação desses discos.

3.10.3 $K = \infty$

Nesse caso, não podemos fazer a separação da fração como (3.31). Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{K \rightarrow \infty} L(X) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-kb} \cos(kX) \frac{k+K}{k-K} dk \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-kb} \cos(kX) dk. \end{aligned}$$

Logo,

$$L(X) = -b(b^2 + X^2)^{-1}.$$

Assim, tomando $g(x) = \psi(x; \infty, b)$ e substituindo em (5.42), temos que g satisfaz

$$g(x) + b \int_{-1}^1 \frac{g(y)}{b^2 + X^2} dy = x, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Note que essa equação difere da anterior por um sinal.

4 UM ESCOAMENTO DE FLUIDO QUE PASSA POR UM DISCO RUGOSO

Esse capítulo apresenta uma análise do problema de escoamento de um fluido que passa por um disco rugoso, análise essa bastante baseada na Ref. [19]. Considere um escoamento de fluido que passa por uma rígida esfera de raio a . Normalmente esse problema é resolvido pelo método de separação de variáveis. Entretanto esse método não é aplicável quando a esfera é perturbada. Assim, podemos usar a técnica de perturbação da fronteira, onde a condição na fronteira S é expandida como uma série de Taylor sobre a fronteira não perturbada $r = a$. Então a expansão do potencial é

$$\phi = \phi_0 + \epsilon\phi_1 + \epsilon^2\phi_2 + \dots,$$

que conduz a uma sequência do problema de valor da fronteira para ϕ_n no domínio não perturbado ($r > a$); ϕ_0 é a solução não perturbada e posteriormente ϕ_n é forçado por ϕ_m com $m < n$.

O artigo [19] mostra um método alternativo. Primeiro se reduz o problema de valor da fronteira sobre S . Depois, reescrevemos esta equação projetando sobre a superfície não perturbada. A seguir introduzimos a perturbação da expansão, chegando a uma sequência de equações integrais da fronteira.

4.1 Formulação

Consideramos que o fluido passa por uma rígida separação fina Ω . Modelamos a separação como uma conexão lisa de uma superfície limitada com uma fronteira $\partial\Omega$. Assim, o problema é resolver a equação de Laplace em 3 dimensões

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0,$$

sujeito a,

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} + \frac{\partial \phi_0}{\partial n} = 0 \text{ em } \Omega, \quad (4.1)$$

e $\phi = O(r^{-1})$ com $r \rightarrow \infty$, onde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, ϕ_0 é o potencial de velocidade dado pelo escoamento ambiente, e $\frac{\partial}{\partial n}$ denota a diferenciação normal.

Estamos interessados em situações onde o escoamento ambiente é uniforme, logo,

$$\phi_0(x, y, z) = U(x \operatorname{sen} \beta - z \operatorname{cos} \beta), \quad (4.2)$$

onde U e β são constantes dadas.

4.1.0.1 Energia cinética

Quando um corpo rígido está em movimento não rotacional por um fluido incompressível de densidade ρ , a energia cinética do movimento do fluido é dado em [14] por

$$T = \frac{\rho}{2} \int_S \phi \frac{\partial \phi_0}{\partial n} dS. \quad (4.3)$$

Aqui, S é a superfície do corpo e $\frac{\partial}{\partial n}$ denota a derivada na direção normal sobre S , na direção de S para dentro do fluido.

Agora, suponhamos que S se degenera em um fino corpo com volume zero, chamado Ω . Denotamos os dois lados de Ω como Ω^+ e Ω^- , e definimos o vetor normal unitário n de Ω^+ para dentro do volume. Finalmente, definimos a descontinuidade em Ω por

$$[\phi(q)] = \lim_{Q \rightarrow q^+} \phi(Q) - \lim_{Q \rightarrow q^-} \phi(Q), \quad (4.4)$$

onde $q \in \Omega$, $q^+ \in \Omega^+$, $q^- \in \Omega^-$ e Q é um ponto no fluido. Logo (4.3) se torna,

$$T = \frac{\rho}{2} \int_{\Omega} [\phi] \frac{\partial \phi}{\partial n} dS. \quad (4.5)$$

4.2 Equações integrais governantes

4.2.1 Representação integral

Para qualquer função ϕ , satisfazendo $\phi = O(r^{-1})$ quando $r \rightarrow \infty$, temos a seguinte representação integral:

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi r} \int_S \left(\phi(q) \frac{\partial}{\partial n_q} G(P, q) - G(P, q) \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS_q \quad (4.6)$$

onde $G(P, q) = |\mathbf{r} - \mathbf{q}|^{-1}$, $q \in S$ tem posição vetor \mathbf{q} em relação à origem O , e P tem posição vetor \mathbf{r} e coordenadas esféricas polares (r, θ, ϕ) . Assim, para uma fina separação Ω , (4.6) se reduz

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi r} \int_{\Omega} [\phi(q)] \frac{\partial}{\partial n_q} G(P, q) dS_q. \quad (4.7)$$

Supomos que a superfície Ω é dada por

$$\Omega : z = F(x, y), \quad (x, y) \in D.$$

onde D é um disco unitário no plano xy . Definimos o vetor normal de Ω por

$$\mathbf{N} = \left(-\frac{\partial F}{\partial x}, -\frac{\partial F}{\partial y}, 1 \right),$$

e então, $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}$ é o vetor normal unitário. Suponha que P e $q \in \Omega$ são denotados por (x_0, y_0, z_0) e (x, y, z) respectivamente. Seja

$$[\phi(q)] = w(x, y). \quad (4.8)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial n_q} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{q}|}, \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{q}|}, \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{q}|} \right) \\ &= \frac{(x - x_0, y - y_0, z - z_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{q}|^{3/2}} \cdot \mathbf{N}(\mathbf{q}) \\ &= (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \frac{\mathbf{N}(\mathbf{q})}{R_2^3} \\ &= \mathbf{R}_2 \cdot \frac{\mathbf{N}(\mathbf{q})}{R_2^3}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde $\mathbf{R}_2 = (x_0 - x, y_0 - y, z_0 - F(x, y))$ e $R_2 = |\mathbf{R}_2|$.

Logo, substituindo (4.8) e (4.9) em (4.7), temos

$$\phi(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \int_D w(x, y) \mathbf{N}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{R}_2 \frac{dA}{R_2^3},$$

onde $dA = dx dy$.

4.2.2 Equação integral

Derivando (4.7) em relação a n_p e aplicando a condição de fronteira (4.1) temos

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} [\phi(q)] \frac{\partial^2}{\partial n_p \partial n_q} G(p, q) dS_q = -\frac{\partial \phi_0}{\partial n_p}, \quad (4.10)$$

onde $p \in \Omega$ e a integral deve ser interpretada no sentido de parte finita de Hadamard, já que o integrando da equação (4.10) é hipersingular. A equação (4.10) é uma equação integral hipersingular para $[\phi]$; deve ser resolvida sujeita à condição de fronteira

$$[\phi(q)] = 0 \quad \forall q \in \partial\Omega$$

Derivando $G(P, q)$ em relação a n_p e n_q (A.7), temos

$$\frac{\partial^2 G(P, q)}{\partial n_p \partial n_q} = (r - q)^{-3} (\mathbf{N}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{q})) - \frac{3}{R_1^5} (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{q}) \quad (4.11)$$

Assim, projetando sobre D , (4.10) se torna

$$\frac{1}{4\pi} \int_D K(x_0, y_0; x, y) w(x, y) dA = b(x_0, y_0), \quad (4.12)$$

onde $(x_0, y_0) \in D$ e

$$\begin{aligned} K &= R_1^{-3} (\mathbf{N}(p) \cdot \mathbf{N}(q)) - 3R_1^{-5} (\mathbf{N}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{R}_1) (\mathbf{N}(q) \cdot \mathbf{R}_1) \\ \mathbf{R}_1 &= (x - x_0, y - y_0, F(x, y) - F(x_0, y_0)), \quad R_1 = |\mathbf{R}_1| \end{aligned} \quad (4.13)$$

e

$$\begin{aligned}
b(x, y) &= -\frac{\partial \phi_0}{\partial N} = -\frac{\partial}{\partial N}(U(x \sin \beta - z \cos \beta)) \\
&= U(\sin \beta, 0, -\cos \beta) \left(-\frac{\partial F}{\partial x}, -\frac{\partial F}{\partial y}, 1 \right) \\
&= U \left(\cos \beta + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \sin \beta \right) \right), \tag{4.14}
\end{aligned}$$

com ϕ_0 dado por (4.2).

A equação (4.12) deve ser resolvida de acordo com a condição de fronteira

$$w(x, y) = 0 \text{ para } r = \sqrt{x^2 + y^2} = 1.$$

Sejam

$$F_1 = \frac{\partial F}{\partial x} \text{ e } F_2 = \frac{\partial F}{\partial y} \tag{4.15}$$

avaliadas em (x, y) onde F_1^0 e F_2^0 são as quantidades correspondentes em (x_0, y_0) .

Logo, $\mathbf{N}(q) = (-F_1, -F_2, 1)$ e $\mathbf{N}(p) = (-F_1^0, -F_2^0, 1)$. Seja $\mathbf{R} = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{\frac{1}{2}}$ e $\Lambda = [F(x, y) - F(x_0, y_0)]/R$.

Também, defina o ângulo Θ por

$$x - x_0 = R \cos \Theta \text{ e } y - y_0 = R \sin \Theta,$$

onde $\mathbf{R}_1 = R(\cos \Theta, \sin \Theta, 1)$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
K(x_0, y_0; x, y) &= \frac{1}{R^3} \frac{1}{(1 + \Lambda^2)^{3/2}} \{F_1^0 F_1 + F_2 F_2^0 + 1\} \\
&- \frac{3}{R^5} \frac{1}{(1 + \Lambda^2)^{5/2}} \{-(F_1^0(x - x_0) + F_2^0(y - y_0) + F(x_0, y_0) - F(x, y)) \\
&\times (-(F_1(x - x_0) + F_2(y - y_0) + F(x_0, y_0) - F(x, y)))\} \\
&= \frac{1}{R^3} \left\{ \frac{1 + F_1 F_1^0 + F_2 F_2^0}{(1 + \Lambda^2)^{3/2}} \right. \\
&- \frac{3}{(1 + \Lambda^2)^{5/2}} \frac{1}{R^2} (F_1^0(x - x_0) + F_2^0(y - y_0) + F(x_0, y_0) - F(x, y)) \\
&\times (F_1(x - x_0) + F_2(y - y_0) + F(x_0, y_0) - F(x, y)) \} \\
&= \frac{1}{R^3} \left\{ \frac{1 + F_1 F_1^0 + F_2 F_2^0}{(1 + \Lambda^2)^{3/2}} \right. \\
&- \left. \frac{3}{(1 + \Lambda^2)^{5/2}} \left\{ \frac{R}{R^2} (F_1^0 \cos \Theta + F_2^0 \sin \Theta - \Lambda) R (F_1 \cos \Theta + F_2 \sin \Theta - \Lambda) \right\} \right\} \\
&= \frac{1}{R^3} \left\{ \frac{1 + F_1 F_1^0 + F_2 F_2^0}{(1 + \Lambda^2)^{3/2}} \right. \\
&- \left. 3 \frac{(F_1^0 \cos \Theta + F_2^0 \sin \Theta - \Lambda)(F_1 \cos \Theta + F_2 \sin \Theta - \Lambda)}{(1 + \Lambda^2)^{3/2}} \right\}. \tag{4.16}
\end{aligned}$$

Logo,

$$K = \frac{1}{R^3} \left(\frac{1 + F_1 F_1^0 + F_2 F_2^0}{(1 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3(F_1 \cos \Theta + F_2 \sin \Theta - 1)(F_1^0 \cos \Theta + F_2^0 \sin \Theta - 1)}{(1 + \Lambda^2)^{\frac{5}{2}}} \right). \tag{4.17}$$

4.3 Discos rugosos

Suponhamos que

$$F(x, y) = \epsilon f(x, y), \tag{4.18}$$

onde ϵ é um parâmetro de pequena dimensão e f é independente de ϵ . Definimos

$$\Lambda = \epsilon \lambda \text{ com } \lambda = [f(x, y) - f(x_0, y_0)]/R. \tag{4.19}$$

Portanto, substituindo em (4.17) temos,

$$K = R^{-3} \left[\frac{1 + \epsilon^2 f_1 f_1^0 + \epsilon^2 f_2 f_2^0}{(1 + \epsilon^2 \lambda^2)^{\frac{3}{2}}} - 3 \frac{(\epsilon f_1 \cos \Theta + \epsilon f_2 \sin \Theta - \epsilon \lambda)(\epsilon f_1^0 \cos \Theta + \epsilon f_2^0 \sin \Theta - \epsilon \lambda)}{(1 + \epsilon^2 \lambda^2)^{\frac{5}{2}}} \right].$$

Defino $x = \epsilon^2 \lambda^2$. Logo, por série de Taylor, temos

$$(1 + \epsilon^2 \lambda^2)^{\frac{3}{2}} \simeq (1 + x)^{\frac{3}{2}} \Big|_{x=0} + \frac{3}{2} (1 + x)^{\frac{3}{2}} \Big|_{x=0} x + O(\epsilon^4).$$

Portanto,

$$(1 + \epsilon^2 \lambda^2)^{\frac{3}{2}} \simeq 1 + \frac{3}{2} x = 1 + \frac{3}{2} \epsilon^2 \lambda^2.$$

Do mesmo modo,

$$(1 + \epsilon^2 \lambda^2)^{\frac{5}{2}} \simeq 1 + \frac{5}{2} \epsilon^2 \lambda^2.$$

Além disso, sabemos que $\frac{1}{1+x} \simeq 1 - x$ se $|x| \ll 1$. Logo,

$$\begin{aligned} K &= R^{-3} \left[1 - \frac{3}{2} \epsilon^2 \lambda^2 + \epsilon^2 (f_1 f_1^0 + f_2 f_2^0) \left(1 - \frac{3}{2} \epsilon^2 \right) \right. \\ &\quad - 3 \epsilon^2 (f_1 \cos \Theta + f_2 \sin \Theta - \lambda) \\ &\quad \left. \times (f_1^0 \cos \Theta + f_2^0 \sin \Theta - \lambda) \left(1 - \frac{3}{2} \epsilon^2 \lambda^2 \right) \right] + O(\epsilon^4). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Assim,

$$K = R^{-3} [1 + \epsilon^2 K_2 + O(\epsilon^4)] \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0,$$

onde

$$K_2 = f_1 f_1^0 + f_2 f_2^0 - \frac{3}{2} \lambda^2 - 3(f_1 \cos \Theta + f_2 \sin \Theta - \lambda)(f_1^0 \cos \Theta + f_2^0 \sin \Theta - \lambda) \quad (4.21)$$

e f_j, f_j^0 são definidos similarmente a F_j, F_j^0 para $j \in \{1, 2\}$.

Expandimos b similarmente. Assumindo que ϕ_0 não depende de w , temos

$$b(x, y) = b_0(x, y) + \epsilon b_1(x, y). \quad (4.22)$$

De fato, para um fluido em ambiente uniforme, (4.14) nos dá

$$b_0 = U \cos \beta \text{ e } b_1 = U f_1 \sin \beta.$$

Então se expandirmos w como

$$w(x, y) = w_0 + \epsilon w_1 + \epsilon^2 w_2 + \dots$$

temos de (4.12) que

$$Hw_0 = b_0, \quad Hw_1 = b_1 \quad \text{e} \quad Hw_2 = -\mathcal{K}_2 w_2, \quad (4.23)$$

onde

$$(Hw)(x_0, y_0) = \frac{1}{4\pi} \int_D w(x, y) \frac{dA}{R^3}$$

é o operador básico hipersingular para o potencial de fluido que passa por um disco rígido circular e

$$(\mathcal{K}_2 w)(x_0, y_0) = \frac{1}{4\pi} \int_D K_2(x, y; x_0, y_0) w(x, y) \frac{dA}{R^3}. \quad (4.24)$$

Esta sequência de equações (4.23) é o principal resultado deste capítulo. A solução w_0 de ordem zero fornece o potencial através do disco sem rugosidade, não perturbado. As soluções w_1 e w_2 , de ordem 1 e 2, respectivamente, corrigem a solução de ordem zero para um disco rugoso. Em particular, w_1 pode ser obtido para qualquer escoamento ambiente b e para qualquer perturbação f .

As equações (4.23) podem ser resolvidas numericamente para uma perturbação (4.18) arbitrária. Soluções analíticas para alguns casos particulares de (4.18) foram obtidas em [20] e [18].

Como supomos inicialmente, estamos considerando fluidos em ambiente uniforme e assim, $b_0 = U \cos \beta$ é constante. De acordo com [18], podemos determinar w_0 resolvendo $Hw_0 = b_0$ e obtemos

$$w_0(x, y) = -\frac{4}{\pi} b_0 \sqrt{(1 - r^2)}.$$

De maneira análoga, podemos calcular w_1 . Já para w_2 , podemos notar que a parte mais difícil do cálculo vai envolver a avaliação de $\mathcal{K}_2 w_0$. Essa avaliação depende de como é $f(x, y)$. Se torna mais fácil se $f(x, y)$ for um polinômio.

4.3.1 A correção de primeira ordem

A solução de primeira ordem w_1 pode ser encontrada analiticamente para uma perturbação arbitrária no disco. Introduzindo coordenadas polares no disco D temos

$$x = r \cos \theta \quad \text{e} \quad y = r \sin \theta,$$

temos que a expansão de b se torna

$$b(r, \theta) = B_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n(r) \cos(n\theta) + \tilde{B}_n(r) \sin(n\theta) \right].$$

Do mesmo modo, a solução de $Hw = b$ é dada por

$$w(r, \theta) = W_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[W_n(r) \cos(n\theta) + \tilde{W}_n(r) \sin(n\theta) \right],$$

onde

$$W_n(r) = \frac{-4}{\pi} r^n \int_r^1 \frac{1}{t^{2n} \sqrt{t^2 - r^2}} \left(\int_0^t \frac{B_n(s) s^{n+1} ds}{\sqrt{t^2 - s^2}} \right) dt$$

com uma relação similar entre \tilde{W}_n e \tilde{B}_n .

Essa fórmula é conveniente, mas a soma sobre n pode ser avaliada para dar

$$w(r, \theta) = \frac{-2}{\pi^2} \int_1^r \frac{1}{\sqrt{t^2 - r^2}} \int_0^t \frac{s(t^4 - r^2 s^2)}{\sqrt{t^2 - s^2}} \int_0^{2\pi} \frac{b(s, \phi) d\phi ds dt}{t^4 + r^2 s^2 - 2t^2 r s \cos(\theta - \phi)}.$$

Todas essas fórmulas vieram de Guidera & Lardner (1975).

4.3.2 A massa adicional

Substituindo (4.14) em (4.5) temos que

$$T = \frac{1}{2} \rho U \int_D [\phi] (\cos(\beta) + F_1 \sin(\beta)) dS.$$

Portanto,

$$T = \frac{1}{2} \rho U \int_D w(x, y) ((\cos(\beta) + F_1 \sin(\beta))) dA.$$

Logo, calculando a expansão de T ,

$$T = T_0 + \epsilon T_1 + \epsilon^2 T_2 + \dots$$

temos

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \rho U \int_D (w_0 + \epsilon w_1 + \epsilon^2 w_2 + \dots) (\cos(\beta) + \epsilon f_1 \sin(\beta)) dA \\ &= \frac{1}{2} \rho U \left[\int_D w_0 \cos(\beta) dA + \epsilon \int_D (w_0 f_1 \sin(\beta) + w_1) dA \right. \\ &\quad \left. + \epsilon^2 \int_D (w_1 f_1 \sin(\beta) + w_2) dA \right] + O(\epsilon^3). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Assim,

$$T_0 = \frac{1}{2} \rho U \cos(\beta) \int_D w_0 dA \quad (4.26)$$

$$T_1 = \frac{1}{2} \rho U \int_D (w_1 \cos(\beta) + w_0 f_1 \sin(\beta)) dA \quad (4.27)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \rho U \int_D (w_2 \cos(\beta) + w_1 f_1 \sin(\beta)) dA, \quad (4.28)$$

onde T_0 é a energia cinética do fluido ao redor de um disco unitário.

5 DISCO RUGOSO EM UM FLUIDO COM SUPERFÍCIE LIVRE

Nesse capítulo consideraremos um objeto rugoso submerso em um fluido com superfície livre. A análise a ser desenvolvida representa um trabalho original, seguindo procedimentos similares àqueles apresentados nos capítulos anteriores. Como no caso do capítulo 3, iremos considerar um fluido com superfície livre média em $z = 0$. Neste fluido, temos um corpo totalmente submerso de superfície S fechada, limitada e suave. Também iremos considerar movimentos de pequena amplitude harmônicos no tempo. O fluido é invíscido, incompressível e o movimento é irrotacional. Assim, introduzimos o potencial de velocidade $Re\{\phi(x, y, z)e^{-i\omega t}\}$, onde ω é a frequência angular.

As equações que formulam o problema são as seguintes.

- ϕ satisfaz a Equação de Laplace:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi = 0 \text{ no fluido } D;$$

- A condição da superfície livre é:

$$K\phi + \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \text{ em } z = 0;$$

onde $K = \omega^2/g$, g é a aceleração da gravidade e ω é a frequência.

- Na superfície do corpo a velocidade normal é descrita como

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = V \text{ em } S,$$

onde V é uma função dada;

- ϕ satisfaz a condição de radiação

$$r^{1/2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial r} - iK\phi \right) \rightarrow 0 \text{ quando } r = (x^2 + y^2)^{1/2} \rightarrow \infty.$$

Os pontos P, Q denotam pontos no fluido e os pontos p, q denotam pontos do corpo submerso.

Para resolver o problema, vamos reduzir o problema de valor de fronteira para ϕ a uma equação integral de fronteira sobre S . Nosso objetivo é conseguir uma sequência de equações integrais para formular o problema analiticamente e depois obter fórmulas convenientes para a solução numérica.

Novamente iremos considerar a função de Green para o caso de águas profundas dada por

$$G(P, Q) \equiv G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = G_0(R, z + \zeta) + G_1(R, z + \zeta), \quad (5.1)$$

onde $R = ((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2)^{1/2}$, $G_0(R, z - \zeta) = (R^2 + (z - \zeta)^2)^{-1/2}$ e

$$G_1(R, z + \zeta) = \int_0^\infty e^{-k(z+\zeta)} J_0(kR) \frac{k + K}{k - K} dk, \quad (5.2)$$

e J_0 é a função de Bessel. G satisfaz a condição de superfície livre, a equação de Laplace e tem uma singularidade fraca em $P = Q$.

Suponhamos que a superfície Ω é dada por

$$\Omega : z = F(x, y) + \frac{b}{2}, \quad (x, y) \in D,$$

onde D é um disco unitário e $\frac{b}{2}$ é a profundidade a que o corpo está submetido.

Sejam $p, q \in \Omega$ tal que

$$p = (\xi, \eta, \zeta), \quad q = (x, y, z).$$

De maneira análoga ao capítulo 3, temos a seguinte equação integral,

$$\frac{1}{4\pi} \int_\Omega [\phi(q)] \frac{\partial^2}{\partial n_q \partial n_q} G(p, q) ds_q = V(p), \quad p \in \Omega. \quad (5.3)$$

Por (A.5) temos

$$\frac{\partial G_0}{\partial n_q} = \frac{1}{(R^2 + (z - \zeta)^2)^{3/2}} \mathbf{N}(q) \cdot \mathbf{R}_1,$$

onde $\mathbf{R}_1 = (\xi - x, \eta - y, \zeta - z)$.

E, por (A.7), temos que

$$\frac{\partial^2 G_0(P, q)}{\partial n_p \partial n_q} = \mathbf{R}_1^{-3} (\mathbf{N}(p) \cdot \mathbf{N}(q)) - \frac{3}{R_1^5} (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \mathbf{N}(q)$$

Agora, derivando G_1 , mostramos no apêndice A que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G_1}{\partial n_p \partial n_q} &= \int_0^\infty e^{-k(z+\zeta)} k \left[\frac{(x-\xi)^2}{R^3} J_0'(kR) - \frac{1}{R} J_0'(kR) - \frac{k}{R^2} (x-\xi)^2 J_0''(kR) \right] \frac{k+K}{k-K} dk \\ &\times \left(-\frac{\partial F}{\partial x} \right) \left(-\frac{\partial F}{\partial \xi} \right) \\ &+ \int_0^\infty e^{-k(z+\zeta)} k (x-\xi)(y-\eta) \left[\frac{1}{R^3} J_0'(kR) - \frac{k}{R^2} J_0''(kR) \right] \frac{k+K}{k-K} dk \left(-\frac{\partial F}{\partial y} \right) \left(-\frac{\partial F}{\partial \xi} \right) \\ &+ \int_0^\infty -k e^{-k(z+\zeta)} (-k) \frac{x-\xi}{R} J_0'(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \left(-\frac{\partial F}{\partial \xi} \right) \\ &+ \int_0^\infty e^{-k(z+\zeta)} \frac{k}{R^2} (x-\xi)(y-\eta) \left[\frac{1}{R} J_0'(kR) - \frac{k}{R} J_0''(kR) \right] \frac{k+K}{k-K} dk \left(-\frac{\partial F}{\partial x} \right) \left(-\frac{\partial F}{\partial \eta} \right) \\ &+ \int_0^\infty e^{-k(z+\zeta)} \frac{k}{R} \left[\frac{(y-\eta)^2}{R^2} J_0'(kR) - J_0'(kR) - \frac{k}{R} (y-\eta)^2 J_0''(kR) \right] \frac{k+K}{k-K} dk \\ &\times \left(-\frac{\partial F}{\partial y} \right) \left(-\frac{\partial F}{\partial \eta} \right) \\ &+ \int_0^\infty e^{-k(z+\zeta)} k^2 \frac{y-\eta}{R} J_0'(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \left(-\frac{\partial F}{\partial \eta} \right) \\ &+ \int_0^\infty -e^{-k(z+\zeta)} \frac{k^2}{R} (x-\xi) J_0'(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \left(-\frac{\partial F}{\partial x} \right) \\ &+ \int_0^\infty -e^{-k(z+\zeta)} \frac{k^2}{R} (y-\eta) J_0'(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \left(-\frac{\partial F}{\partial y} \right) \\ &+ \int_0^\infty e^{-k(z+\zeta)} k^2 J_0(kR) \frac{k+K}{k-K} dk. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Assim, do mesmo modo que o caso do capítulo 3, temos a seguinte equação integral governante

$$\frac{1}{4\pi} \int_\Omega [\phi(q)] \frac{d\Omega}{R^3} + \frac{1}{4\pi} \int_\Omega [\phi(q)] \frac{\partial^2 G_1}{\partial n_p \partial n_q} d\Omega = 1, \tag{5.5}$$

que é obtida supondo novamente que as oscilações são somente verticais, isto é, $V(r, \theta) = 1$.

Iremos agora reformular (5.5) através de uma sequência de equações similares àquelas que aparecem em (4.23).

Denotamos $F_1 = \frac{\partial F}{\partial x}$, $F_2 = \frac{\partial F}{\partial y}$, $F_1^0 = \frac{\partial F}{\partial \xi}$ e $F_2^0 = \frac{\partial F}{\partial \eta}$ e $w = [\phi]$.

Sejam $\Lambda = \frac{\{F(x,y)-F(\xi,\eta)\}}{R}$ e $\bar{\Lambda} = \frac{\{F(x,y)+F(\xi,\eta)\}}{R}$. Definimos ainda o ângulo θ por

$$x - \xi = R \cos \theta \quad \text{e} \quad y - \eta = R \sin \theta.$$

Empregando um procedimento análogo ao do capítulo 3, podemos reescrever (5.5) como

$$\frac{1}{4\pi} \int_D H w(q) dA + \frac{1}{4\pi} \int_D W w(q) dA = 1, \quad (5.6)$$

onde, por (4.17),

$$H(\xi, \eta; x, y) = \frac{1}{R^3} \left(\frac{1 + F_1 F_1^0 + F_2 F_2^0}{(1 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3(F_1 \cos \theta + F_2 \sin \theta - 1)(F_1^0 \cos \theta + F_2^0 \sin \theta - 1)}{(1 + \Lambda^2)^{\frac{5}{2}}} \right), \quad (5.7)$$

e

$$W = \frac{\partial^2 G_1}{\partial n_q \partial n_p} \Big|_D.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
W &= \left\{ F_1 F_1^0 \int_0^\infty e^{-k(F(x,y)+F(\xi,\eta))} e^{-kb} \frac{k}{R} [\cos^2 \theta J_0'(kR) - J_0'(kR) - kR \cos^2 \theta J_0'(kR)] \frac{k+K}{k-K} dk \right\} \\
&+ F_2 F_1^0 \int_0^\infty e^{-k(F(x,y)+F(\xi,\eta))} e^{-kb} \frac{k}{R^2} R^2 \cos \theta \text{sen} \theta \left[\frac{J_0'(kR)}{R} - k J_0'(kR) \right] \frac{k+K}{k-K} dk \\
&- F_1^0 \int_0^\infty e^{-k(F(x,y)+F(\xi,\eta))} e^{-kb} k^2 \cos \theta J_0'(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \\
&+ F_1 F_2^0 \int_0^\infty e^{-k(F(x,y)+F(\xi,\eta))} e^{-kb} \frac{k}{R^2} R^2 \cos \theta \text{sen} \theta \left[\frac{J_0'(kR)}{R} - k J_0'(kR) \right] \frac{k+K}{k-K} dk \\
&+ F_2 F_2^0 \int_0^\infty e^{-k(F(x,y)+F(\xi,\eta))} e^{-kb} \frac{k}{R} [\text{sen}^2 \theta J_0'(kR) - J_0'(kR) - kR \text{sen}^2 \theta J_0'(kR)] \frac{k+K}{k-K} dk \\
&- \int_0^\infty e^{-k(F(x,y)+F(\xi,\eta))} e^{-kb} k^2 \text{sen} \theta J_0'(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \\
&+ F_1 \int_0^\infty e^{-k(F(x,y)+F(\xi,\eta))} e^{-kb} k^2 \cos \theta J_0'(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \\
&+ F_2 \int_0^\infty e^{-k(F(x,y)+F(\xi,\eta))} e^{-kb} k^2 \text{sen} \theta J_0'(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \\
&+ \left\{ \int_0^\infty e^{-k(F(x,y)+F(\xi,\eta))} e^{-kb} k^2 J_0(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \right\}. \tag{5.8}
\end{aligned}$$

De maneira análoga ao capítulo 4, seja

$$F(x, y) = \epsilon f(x, y), \tag{5.9}$$

onde ϵ é um parâmetro pequeno e f é independente de ϵ . Tomamos

$$\bar{\Lambda} = \epsilon \bar{\lambda} \text{ com } \bar{\lambda} = [f(x, y) + f(\xi, \eta)]/R.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
W = & \left\{ \epsilon^2 f_1 f_1^0 \int_0^\infty e^{-k\epsilon\bar{\lambda}R} e^{-kb} \frac{k}{R} [-\text{sen}^2 \theta J_0'(kR) - kR \cos^2 \theta J_0'(kR)] \frac{k+K}{k-K} dk \right. \\
& + \epsilon^2 f_2 f_1^0 \int_0^\infty e^{-k\epsilon\bar{\lambda}R} e^{-kb} \frac{k}{R^2} R^2 \frac{\text{sen } 2\theta}{2} \left[\frac{J_0'(kR)}{R} - k J_0'(kR) \right] \frac{k+K}{k-K} dk \\
& - \epsilon f_1^0 \int_0^\infty e^{-k\epsilon\bar{\lambda}R} e^{-kb} k^2 \cos \theta J_0'(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \\
& + \epsilon^2 f_1 f_2^0 \int_0^\infty e^{-k\epsilon\bar{\lambda}R} e^{-kb} \frac{k}{R^2} R^2 \frac{\text{sen } 2\theta}{2} \left[\frac{J_0'(kR)}{R} - k J_0'(kR) \right] \frac{k+K}{k-K} dk \\
& + \epsilon^2 f_2 f_2^0 \int_0^\infty e^{-k\epsilon\bar{\lambda}R} e^{-kb} \frac{k}{R} [-\cos^2 \theta J_0'(kR) - kR \text{sen}^2 \theta J_0'(kR)] \frac{k+K}{k-K} dk \\
& - \epsilon f_2^0 \int_0^\infty e^{-k(\epsilon\bar{\lambda}R} e^{-kb} k^2 \text{sen } \theta J_0'(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \\
& + \epsilon f_1 \int_0^\infty e^{-k\epsilon\bar{\lambda}R} e^{-kb} k^2 \cos \theta J_0'(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \\
& + \epsilon f_2 \int_0^\infty e^{-k\epsilon\bar{\lambda}R} e^{-kb} k^2 \text{sen } \theta J_0'(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \\
& \left. + \int_0^\infty e^{-k\epsilon\bar{\lambda}R} e^{-kb} k^2 J_0(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \right\}. \tag{5.10}
\end{aligned}$$

Separando os termos de ordem ϵ^0 , ϵ^1 e ϵ^2 , temos

$$\begin{aligned}
W = & \int_0^\infty e^{-k\epsilon\bar{\lambda}R} e^{-kb} k^2 J_0(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \\
& + \epsilon \left\{ (f_1 - f_1^0) \int_0^\infty e^{-k\epsilon\bar{\lambda}R} e^{-kb} k^2 \cos \theta J_0'(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \right. \\
& + \left. (f_2 - f_2^0) \int_0^\infty e^{-k\epsilon\bar{\lambda}R} e^{-kb} k^2 \text{sen } \theta J_0'(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \right\} \\
& + \epsilon^2 \left\{ f_1 f_1^0 \int_0^\infty e^{-k\epsilon\bar{\lambda}R} e^{-kb} \frac{k}{R} [-\text{sen}^2 \theta J_0'(kR) - kR \cos^2 \theta J_0'(kR)] \frac{k+K}{k-K} dk \right. \\
& + f_2 f_2^0 \int_0^\infty e^{-k\epsilon\bar{\lambda}R} e^{-kb} \frac{k}{R} [-\cos^2 \theta J_0'(kR) - kR \text{sen}^2 \theta J_0'(kR)] \frac{k+K}{k-K} dk \\
& \left. + (f_2 f_1^0 + f_1 f_2^0) \int_0^\infty e^{-k\epsilon\bar{\lambda}R} e^{-kb} k \frac{\text{sen } 2\theta}{2} \left[\frac{J_0'(kR)}{R} - k J_0'(kR) \right] \frac{k+K}{k-K} dk \right\}. \tag{5.11}
\end{aligned}$$

Logo, definindo

$$W_0 = \int_0^\infty e^{-k\epsilon\bar{\lambda}R} e^{-kb} k^2 J_0(kR) \frac{k+K}{k-K} dk, \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned}
W_1 &= [(f_1 - f_1^0) \cos \theta + (f_2 - f_2^0) \text{sen } \theta] \\
&\times \int_0^\infty \frac{k+K}{k-K} e^{-k\epsilon(f(x,y)+f(\xi,\eta))+b} k^2 J_0'(kR) dk, \tag{5.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_2 &= \left[\frac{-\text{sen}^2 \theta}{R} f_1 f_1^0 - \frac{\cos^2 \theta}{R} f_2 f_2^0 + (f_2 f_1^0 + f_1 f_2^0) \frac{\text{sen}(2\theta)}{2R} \right] \int_0^\infty e^{-k\epsilon\bar{\lambda}R} e^{-kb} \frac{k}{R} J_0'(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \\
&+ \left[-\cos^2 \theta f_1 f_1^0 - \text{sen}^2 \theta f_2 f_2^0 - (f_2 f_1^0 + f_1 f_2^0) \frac{\text{sen}(2\theta)}{2R} \right] \\
&\times \int_0^\infty e^{-k\epsilon\bar{\lambda}R} e^{-kb} \frac{k^2}{R} J_0'(kR) \frac{k+K}{k-K} dk, \tag{5.14}
\end{aligned}$$

podemos escrever

$$W = W_0 + \epsilon W_1 + \epsilon^2 W_2, \tag{5.15}$$

para ϵ pequeno.

Note que ϵ está presente também em W_0 , W_1 e W_2 . Para tratar esse problema, iremos expandir $e^{-k\epsilon\bar{\lambda}R+b} = e^{-k\epsilon(f(x,y)+f(\xi,\eta))+b}$ em série de Taylor. Queremos obter expressões alternativas para as integrais em (5.12), (5.13) e (5.14).

5.1 Expressão para W_0

Agora queremos expandir W_0 em série de Taylor, ou seja,

$$W_0 = W_0 \Big|_{\epsilon=0} + \epsilon \frac{\partial W_0}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} + \frac{\epsilon^2}{2} \frac{\partial^2 W_0}{\partial \epsilon^2} \Big|_{\epsilon=0} + O(\epsilon^3).$$

Calculando as derivadas em (A.17) e (A.18), obtemos,

$$\begin{aligned}
W_0 &= \int_0^\infty \frac{k+K}{k-K} e^{-kb} k^2 J_0(kR) dk \\
&- \epsilon(f(x,y) + f(\xi,\eta)) \int_0^\infty \frac{k+K}{k-K} e^{-kb} k^3 J_0(kR) dk \\
&+ \frac{\epsilon^2}{2} (f(x,y) + f(\xi,\eta))^2 \int_0^\infty \frac{k+K}{k-K} e^{-kb} k^4 J_0(kR) dk. \tag{5.16}
\end{aligned}$$

Logo, podemos escrever

$$W_0 = W_{00} + \epsilon W_{01} + \epsilon^2 W_{02},$$

onde

$$W_{00} = \int_0^\infty \frac{k+K}{k-K} e^{-kb} k^2 J_0(kR) dk, \quad (5.17)$$

$$W_{01} = -(f(x, y) + f(\xi, \eta)) \int_0^\infty \frac{k+K}{k-K} e^{-kb} k^3 J_0(kR) dk \quad (5.18)$$

e

$$W_{02} = \frac{1}{2} (f(x, y) + f(\xi, \eta))^2 \int_0^\infty \frac{k+K}{k-K} e^{-kb} k^4 J_0(kR) dk. \quad (5.19)$$

Além disso, observe que a integral (5.56) é idêntica à integral (3.14) tomando $b = z + \zeta$.

5.2 Expressão para W_1

Por (5.13), temos que

$$W_1 = [(f_1 - f_1^0) \cos \theta + (f_2 - f_2^0) \sin \theta] \int_0^\infty \frac{k+K}{k-K} e^{-k\epsilon(f(x,y)+f(\xi,\eta))+b} k^2 J_0'(kR) dk.$$

Expandindo a integral acima em série de Taylor,

$$W_1 = W_1 \Big|_{\epsilon=0} + \epsilon \frac{\partial W_1}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} + \frac{\epsilon^2}{2} \frac{\partial^2 W_1}{\partial \epsilon^2} \Big|_{\epsilon=0} + O(\epsilon^3).$$

Logo, substituindo (A.19) e (A.20) na expressão acima temos que

$$\begin{aligned} W_1 &= [(f_1 - f_1^0) \cos \theta + (f_2 - f_2^0) \sin \theta] \left[\int_0^\infty \frac{k+K}{k-K} k^2 e^{-kb} J_0'(kR) dk \right. \\ &\quad - \epsilon (f(x, y) + f(\xi, \eta)) \int_0^\infty \frac{k+K}{k-K} k^3 e^{-kb} J_0'(kR) dk \\ &\quad \left. + \frac{\epsilon^2}{2} (f(x, y) + f(\xi, \eta))^2 \int_0^\infty \frac{k+K}{k-K} k^4 e^{-kb} J_0'(kR) dk \right], \end{aligned} \quad (5.20)$$

para ϵ pequeno.

Logo, podemos expressar W_1 como

$$W_1 = W_{10} + \epsilon W_{11} + \epsilon^2 W_{12},$$

onde

$$W_{10} = [(f_1 - f_1^0) \cos \theta + (f_2 - f_2^0) \text{sen} \theta] \int_0^\infty \frac{k+K}{k-K} k^2 e^{-kb} J_0'(kR) dk, \quad (5.21)$$

$$W_{11} = -[(f_1 - f_1^0) \cos \theta + (f_2 - f_2^0) \text{sen} \theta] (f(x, y) + f(\xi, \eta)) \int_0^\infty \frac{k+K}{k-K} k^3 e^{-kb} J_0'(kR) dk, \quad (5.22)$$

e

$$W_{12} = \frac{1}{2} [(f_1 - f_1^0) \cos \theta + (f_2 - f_2^0) \text{sen} \theta] (f(x, y) + f(\xi, \eta))^2 \int_0^\infty \frac{k+K}{k-K} k^4 e^{-kb} J_0'(kR) dk. \quad (5.23)$$

5.3 Expressão para W_2

Por (5.14), temos

$$\begin{aligned} W_2 &= \left[\frac{-\text{sen}^2 \theta}{R} f_1 f_1^0 - \frac{\cos^2 \theta}{R} f_2 f_2^0 + (f_2 f_1^0 + f_1 f_2^0) \frac{\text{sen}(2\theta)}{2R} \right] \int_0^\infty e^{-k\epsilon \bar{\lambda} R} e^{-kb} \frac{k}{R} J_0'(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \\ &+ \left[-\cos^2 \theta f_1 f_1^0 - \text{sen}^2 \theta f_2 f_2^0 - (f_2 f_1^0 + f_1 f_2^0) \frac{\text{sen}(2\theta)}{2R} \right] \\ &\times \int_0^\infty e^{-k\epsilon \bar{\lambda} R} e^{-kb} \frac{k}{R} J_0'(kR) \frac{k+K}{k-K} dk. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Como fizemos nas duas seções anteriores, expandindo W_2 em série de Taylor, temos

$$W_2 = W_2 \Big|_{\epsilon=0} + \epsilon \frac{\partial W_2}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} + \frac{\epsilon^2}{2} \frac{\partial^2 W_2}{\partial \epsilon^2} \Big|_{\epsilon=0} + O(\epsilon^3).$$

Por (A.21) e (A.22), obtemos

$$\begin{aligned}
W_2 &= \left[\frac{-\text{sen}^2 \theta}{R} f_1 f_1^0 - \frac{\cos^2 \theta}{R} f_2 f_2^0 + (f_2 f_1^0 + f_1 f_2^0) \frac{\text{sen}(2\theta)}{2R} \right] \int_0^\infty e^{-kb} \frac{k^2}{R} J_0'(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \\
&+ \left[-\cos^2 \theta f_1 f_1^0 - \text{sen}^2 \theta f_2 f_2^0 + (f_2 f_1^0 + f_1 f_2^0) \frac{\text{sen}(2\theta)}{2R} \right] \int_0^\infty e^{-kb} \frac{k^3}{R} J_0''(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \\
&+ \epsilon \left\{ - \left[\frac{-\text{sen}^2 \theta}{R} f_1 f_1^0 - \frac{\cos^2 \theta}{R} f_2 f_2^0 + (f_2 f_1^0 + f_1 f_2^0) \frac{\text{sen}(2\theta)}{2R} \right] (f(x, y) + f(\xi, \eta)) \right. \\
&\times \int_0^\infty e^{-kb} \frac{k^3}{R} J_0'(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \\
&- \left[-\cos^2 \theta f_1 f_1^0 - \text{sen}^2 \theta f_2 f_2^0 + (f_2 f_1^0 + f_1 f_2^0) \frac{\text{sen}(2\theta)}{2R} \right] (f(x, y) + f(\xi, \eta)) \\
&\times \left. \int_0^\infty e^{-kb} \frac{k^4}{R} J_0''(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \right\} \\
&+ \frac{\epsilon^2}{2} \left\{ \left[\frac{-\text{sen}^2 \theta}{R} f_1 f_1^0 - \frac{\cos^2 \theta}{R} f_2 f_2^0 + (f_2 f_1^0 + f_1 f_2^0) \frac{\text{sen}(2\theta)}{2R} \right] (f(x, y) + f(\xi, \eta))^2 \right. \\
&\times \int_0^\infty e^{-kb} \frac{k^4}{R} J_0'(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \\
&+ \left[-\cos^2 \theta f_1 f_1^0 - \text{sen}^2 \theta f_2 f_2^0 + (f_2 f_1^0 + f_1 f_2^0) \frac{\text{sen}(2\theta)}{2R} \right] (f(x, y) + f(\xi, \eta))^2 \\
&\times \left. \int_0^\infty e^{-kb} \frac{k^5}{R} J_0''(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \right\}. \tag{5.25}
\end{aligned}$$

Assim, podemos escrever W_2 como

$$W_2 = W_{20} + \epsilon W_{21} + \epsilon^2 W_{22},$$

onde

$$\begin{aligned}
W_{20} &= \left[\frac{-\text{sen}^2 \theta}{R} f_1 f_1^0 - \frac{\cos^2 \theta}{R} f_2 f_2^0 + (f_2 f_1^0 + f_1 f_2^0) \frac{\text{sen}(2\theta)}{2R} \right] \int_0^\infty e^{-kb} \frac{k^2}{R} J_0'(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \\
&+ \left[-\cos^2 \theta f_1 f_1^0 - \text{sen}^2 \theta f_2 f_2^0 + (f_2 f_1^0 + f_1 f_2^0) \frac{\text{sen}(2\theta)}{2R} \right] \\
&\times \int_0^\infty e^{-kb} \frac{k^3}{R} J_0''(kR) \frac{k+K}{k-K} dk, \tag{5.26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{21} &= \left\{ - \left[\frac{-\text{sen}^2 \theta}{R} f_1 f_1^0 - \frac{\cos^2 \theta}{R} f_2 f_2^0 + (f_2 f_1^0 + f_1 f_2^0) \frac{\text{sen}(2\theta)}{2R} \right] (f(x, y + f(\xi, \eta))) \right. \\
&\times \int_0^\infty e^{-kb} \frac{k^3}{R} J_0'(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \\
&- \left[-\cos^2 \theta f_1 f_1^0 - \text{sen}^2 \theta f_2 f_2^0 + (f_2 f_1^0 + f_1 f_2^0) \frac{\text{sen}(2\theta)}{2R} \right] (f(x, y) + f(\xi, \eta)) \\
&\times \left. \int_0^\infty e^{-kb} \frac{k^4}{R} J_0''(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \right\} \quad (5.27)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
W_{22} &= \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{-\text{sen}^2 \theta}{R} f_1 f_1^0 - \frac{\cos^2 \theta}{R} f_2 f_2^0 + (f_2 f_1^0 + f_1 f_2^0) \frac{\text{sen}(2\theta)}{2R} \right] (f(x, y + f(\xi, \eta)))^2 \right. \\
&\times \int_0^\infty e^{-kb} \frac{k^4}{R} J_0'(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \\
&+ \left[-\cos^2 \theta f_1 f_1^0 - \text{sen}^2 \theta f_2 f_2^0 + (f_2 f_1^0 + f_1 f_2^0) \frac{\text{sen}(2\theta)}{2R} \right] (f(x, y) + f(\xi, \eta))^2 \\
&\times \left. \int_0^\infty e^{-kb} \frac{k^5}{R} J_0''(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \right\}. \quad (5.28)
\end{aligned}$$

5.4 Novas equações aproximadas

Do mesmo modo que no capítulo 4, expandimos w como

$$w = w_0 + \epsilon w_1 + \epsilon^2 w_2 + \dots \quad (5.29)$$

Substituindo (5.29) em (5.6) e expandindo W como (5.15) temos que

$$\frac{1}{4\pi} \int_D H (w_0 + \epsilon w_1 + \epsilon^2 w_2) dA + \frac{1}{4\pi} \int_D (W_0 + \epsilon W_1 + \epsilon^2 W_2) (w_0 + \epsilon w_1 + \epsilon^2 w_2) dA + O(\epsilon^3) = 1. \quad (5.30)$$

Assim, separando os termos de ordem 0, 1 e 2,

$$\frac{1}{4\pi} \int_D H w_0 dA + \frac{1}{4\pi} \int_D W_0 w_0 dA = 1, \quad (5.31)$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_D H w_1 dA + \frac{1}{4\pi} \int_D (W_0 w_1 + W_1 w_0) dA = 0, \quad (5.32)$$

e

$$\frac{1}{4\pi} \int_D H w_2 dA + \frac{1}{4\pi} \int_D (W_0 w_2 + W_1 w_1 + W_2 w_0) dA = 0. \quad (5.33)$$

Nas seções anteriores vimos que W_0 , W_1 e W_2 envolvem o parâmetro ϵ , e portanto podem ser expandidos. Logo, as equações (5.31), (5.32) e (5.33) podem ser escritas como

$$\frac{1}{4\pi} \int_D H w_0 dA + \frac{1}{4\pi} \int_D (W_{00} + \epsilon W_{01} + \epsilon^2 W_{02}) w_0 dA = 1, \quad (5.34)$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_D H w_1 dA + \frac{1}{4\pi} \int_D ((W_{00} + \epsilon W_{01} + \epsilon^2 W_{02}) w_1 + (W_{10} + \epsilon W_{11} + \epsilon^2 W_{12}) w_0) dA = 0, \quad (5.35)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_D H w_2 dA &+ \frac{1}{4\pi} \int_D (W_{00} + \epsilon W_{01} + \epsilon^2 W_{02}) w_2 dA \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_D (W_{10} + \epsilon W_{11} + \epsilon^2 W_{12}) w_1 dA \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_D (W_{20} + \epsilon W_{21} + \epsilon^2 W_{22}) w_0 dA = 0. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Note que (5.35) era a equação de ordem 1, ou seja, já está sendo multiplicada por ϵ . Assim como (5.36) está sendo multiplicada por ϵ^2 . Logo, os termos de ordem 0 de (5.34), (5.35) e (5.36) são, respectivamente,

$$\frac{1}{4\pi} \int_D W_{00} w_0 dA + \frac{1}{4\pi} \int_D w_0 \frac{dA}{R^3} = 1, \quad (5.37)$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_D W_{00} w_1 dA + \frac{1}{4\pi} \int_D w_1 \frac{dA}{R^3} = -\frac{1}{4\pi} \int_D (W_{10} + W_{01}) w_0 dA \quad (5.38)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_D (W_{00}) w_2 dA + \frac{1}{4\pi} \int_D w_2 \frac{dA}{R^3} &= -\frac{1}{4\pi} \int_D (W_{02} + W_{11} + W_{20}) w_0 dA - \frac{1}{4\pi} \int_D (W_{01} + W_{10}) w_1 dA \\ &- \frac{1}{4\pi} \int_D \mathcal{K}_2 w_0 \frac{dA}{R^3}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Assim, temos

$$\bar{H}_{00}w_0 + Hw_0 = 1, \quad (5.40)$$

$$\bar{H}_{00}w_1 + Hw_1 = -(\bar{H}_{10} + \bar{H}_{01})w_0, \quad (5.41)$$

$$\bar{H}_{00}w_2 + Hw_2 = -(\bar{H}_{01} + \bar{H}_{10})w_1 - \mathcal{K}_2w_0, \quad (5.42)$$

onde,

$$\bar{H}_{ij}w_l = \int_D W_{ij}w_l dA \quad \forall i, j, l \in \{0, 1, 2\}, \quad (5.43)$$

$$Hw_l = \int_D w_l \frac{dA}{R^3} \quad \forall l \in \{0, 1, 2\} \quad (5.44)$$

e

$$\mathcal{K}_2w_0 = \int_D K_2w_0 \frac{dA}{R^3}. \quad (5.45)$$

As equações (5.40), (5.41) e (5.42) formam uma sequência de equações integrais que aproximam a equação (5.6) de sua solução.

5.5 Expressões alternativas

Nosso objetivo agora é transformar as equações integrais (5.40), (5.41) e (5.42) em equações que nos facilitem resolver o problema numericamente. Expressaremos as integrais de caminho nas funções W_0 , W_1 e W_2 em termos de funções de Bessel e funções de Struve que podem ser eficientemente calculadas. Iremos começar, calculando uma nova expressão para (5.2).

Assim, tomando (5.1) e usando $\frac{k+K}{k-K} = 1 + \frac{2K}{k-K}$, temos

$$\begin{aligned} G_1 &= \int_0^\infty e^{-k(z+\zeta)} J_0(kR) dk + 2K \int_0^\infty \frac{1}{k-K} e^{-k(z+\zeta)} J_0(kR) dk \\ &= \frac{1}{(R^2 + (z+\zeta)^2)^{1/2}} + 2K \left[\int_0^\infty \frac{1}{k-K} e^{-k(z+\zeta)} J_0(kR) dk \right] - 2\pi i K e^{-K(z+\zeta)} J_0(KR) \end{aligned}$$

Mudando as variáveis na integral acima como

$$\mu = \frac{k}{K} \text{ e } \frac{dk}{d\mu} = K,$$

obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{k-K} e^{-k(z+\zeta)} J_0(kR) dk &= \int_0^\infty \frac{1}{\mu K - K} e^{-\mu K(z+\zeta)} J_0(\mu K R) K d\mu \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\mu - 1} e^{-\mu K(z+\zeta)} J_0(\mu K R) d\mu \end{aligned}$$

Definindo as novas variáveis

$$X = KR \text{ e } Y = K(z + \zeta)$$

e chamando μ de k temos

$$\begin{aligned} 2 \int_0^\infty \frac{1}{k-K} e^{-k(z+\zeta)} J_0(kR) dk &= 2 \int_0^\infty \frac{1}{k-1} e^{-kY} J_0(kX) dk \\ &= -2 \int_0^Y e^{t-Y} (X^2 + t^2)^{-1/2} dt - \pi e^{-Y} [H_0(X) + Y_0(X)] \end{aligned} \quad (5.46)$$

por [25], onde H_0 é a função de Struve e Y_0 é a função de Bessel do segundo tipo.

Portanto,

$$\begin{aligned} G_1 &= \int_0^\infty \frac{k+K}{k-K} e^{-k(z+\zeta)} J_0(kR) dk \\ &= K \left[(X^2 + Y^2)^{-1/2} + K - \pi e^{-Y} (H_0(x) + Y_0(x)) - 2 \int_0^Y e^{t-Y} (X^2 + t^2)^{-1/2} dt \right] \\ &\quad - 2\pi i K e^{-Y} J_0(X) \end{aligned} \quad (5.47)$$

com $X = KR$ e $Y = K(z + \zeta)$. Ainda escrevendo G_1 como

$$G_1 = \int_0^\infty \frac{k+K}{k-K} e^{-k\frac{Y}{K}} J_0(kR) dk$$

temos

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial Y^2} = \frac{1}{K^2} \int_0^\infty \frac{k+K}{k-K} e^{-k(z+\zeta)} k^2 J_0(kR) dk. \quad (5.48)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_1}{\partial Y} &= K \left[\frac{-1}{2}(X^2 + Y^2)^{-3/2}2Y + \pi e^{-Y}(H_0(X) + Y_0(X)) \right. \\ &\quad \left. - 2 \left(\int_0^Y (-1)e^{t-Y}(X^2 + t^2)^{-1/2}dt + e^{Y-Y}(X^2 + Y^2)^{-1/2} \right) \right] \\ &\quad + 2\pi i K J_0(X) e^{-Y} \end{aligned} \quad (5.49)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G_1}{\partial Y^2} &= K \left[\frac{3}{2}(X^2 + Y^2)^{-5/2}2Y^2 - (X^2 + Y^2)^{-3/2} - \pi e^{-Y}(H_0(X) + Y_0(X)) \right. \\ &\quad \left. - 2 \left(\int_0^Y e^{t-Y}(X^2 + t^2)^{-1/2}dt - (X^2 + Y^2)^{-1/2} - \frac{1}{2}(X^2 + Y^2)^{-3/2}2Y \right) \right] \\ &\quad - 2\pi i K J_0(X) e^{-Y} \end{aligned} \quad (5.50)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G_1}{\partial Y^2} &= K \left[3Y^2(X^2 + Y^2)^{-5/2} - (X^2 + Y^2)^{-3/2} - \pi e^{-Y}(H_0(X) + Y_0(X)) \right. \\ &\quad \left. - 2 \left(\int_0^Y e^{t-Y}(X^2 + t^2)^{-1/2}dt + 2(X^2 + Y^2)^{-1/2} + 2(X^2 + Y^2)^{-3/2}Y \right) \right] \\ &\quad - 2\pi i K e^{-Y} J_0(X) \end{aligned} \quad (5.51)$$

Comparando (5.48) e (5.50) temos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{k+K}{k-K} e^{-k(z+\zeta)} k^2 J_0(kR) dk &= K^3 \left[3Y^2(X^2 + Y^2)^{-5/2} - (X^2 + Y^2)^{-3/2} \right. \\ &\quad \left. - \pi e^{-Y}(H_0(X) + Y_0(X)) - 2 \left(\int_0^Y e^{t-Y}(X^2 + t^2)^{-1/2}dt \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2(X^2 + Y^2)^{-1/2} + 2(X^2 + Y^2)^{-3/2}Y \right) \right] \\ &\quad - 2\pi i K^3 e^{-Y} J_0(X) \end{aligned} \quad (5.52)$$

Tomando $Y = K\epsilon(f(x, y) + f(\xi, \eta)) + b$ temos de (5.52)

$$\begin{aligned}
W_0 &= \int_0^\infty \frac{k+K}{k-K} e^{-k(\epsilon(f(x,y)+f(\xi,\eta))+b)} k^2 J_0(kR) dk \\
&= K^3 [3Y^2(X^2+Y^2)^{-5/2} - (X^2+Y^2)^{-3/2} \\
&\quad - \pi e^{-Y}(H_0(X) + Y_0(X)) - 2 \int_0^Y e^{t-Y} (X^2+t^2)^{-1/2} dt \\
&\quad + 2(X^2+Y^2)^{-1/2} + 2(X^2+Y^2)^{-3/2}Y] \\
&\quad - 2\pi i K^3 e^{-Y} J_0(X)
\end{aligned} \tag{5.53}$$

Agora, para obtermos uma expressão que nos possibilite resolver o problema numericamente, podemos expandir a expressão (5.53) em série de Taylor para $w = \epsilon(f(x, y) + f(\xi, \eta))$ em torno de $w = 0$. Note que

$$e^{-Y} = e^{-K(w+b)} = e^{-Kw} e^{-Kb} = e^{-K(f(x,y)+f(\xi,\eta))\epsilon} e^{-Kb}.$$

Assim, expandindo e^{-Kw} ,

$$e^{-Kw} = 1 - Kw + \frac{K^2 w^2}{2} = 1 - K\epsilon(f(x, y) + f(\xi, \eta)) + K^2 (f(x, y) + f(\xi, \eta))^2 \frac{\epsilon^2}{2} + O(\epsilon^3)$$

Além disso, expandindo $(X^2 + Y^2)^{-1/2}$, $(X^2 + Y^2)^{-3/2}$ e $(X^2 + Y^2)^{-5/2}$ (B.1), (B.2), (B.3) e expandindo a integral em série de Taylor em torno de $\epsilon = 0$ (B.7)

para depois substituir as expansões em (5.53) temos:

$$\begin{aligned}
W_0 &= \int_0^\infty \frac{k+K}{k-K} e^{-k(\epsilon(f(x,y)+f(\xi,\eta))+b)} k^2 J_0(kR) dk \\
&= K^3 \left\{ 3K^2 [\epsilon^2 (f(x,y) + f(\xi,\eta))^2 + 2\epsilon (f(x,y) + f(\xi,\eta))b + b^2] [(X^2 + K^2b^2)^{-5/2} \right. \\
&+ \epsilon [-5(X^2 + K^2b^2)^{-7/2} K^2 (f(x,y) + f(\xi,\eta))b] \\
&+ \frac{\epsilon^2}{2} [35(X^2 + K^2b^2)^{-5/2} K^4 b^2 (f(x,y) + f(\xi,\eta))^2 \\
&- 5(X^2 + K^2b^2)^{-7/2} K^2 (f(x,y) + f(\xi,\eta))^2] \\
&- (X^2 + K^2b^2)^{-3/2} - \epsilon [-3(X^2 + K^2b^2)^{-5/2} K^2 (f(x,y) + f(\xi,\eta))b] \\
&- \frac{\epsilon^2}{2} [15(X^2 + K^2b^2)^{-7/2} K^4 b^2 (f(x,y) + f(\xi,\eta))^2 - 3(X^2 + K^2b^2)^{-5/2} K^2 (f(x,y) + f(\xi,\eta))^2] \\
&- \pi e^{-Kb} \left(1 - K\epsilon (f(x,y) + f(\xi,\eta)) + \frac{\epsilon^2}{2} K^2 (f(x,y) + f(\xi,\eta))^2 \right) (H_0(X) + Y_0(X)) \\
&- 2 \left[\int_0^{Kb} e^t (X^2 + t^2)^{-1/2} + e^{Kb} (X^2 + K^2b^2)^{-1/2} K (f(x,y) + f(\xi,\eta)) \epsilon \right. \\
&+ \left. e^{Kb} K^2 (f(x,y) + f(\xi,\eta))^2 [(X^2 + K^2b^2)^{-1/2} - Kb (X^2 + K^2b^2)^{-3/2}] \frac{\epsilon^2}{2} \right] \\
&\times \left(1 - K\epsilon (f(x,y) + f(\xi,\eta)) + \frac{\epsilon^2}{2} K^2 (f(x,y) + f(\xi,\eta))^2 \right) \\
&+ 2 \left[(X^2 + K^2b^2)^{-1/2} + \epsilon [-(X^2 + K^2b^2)^{-3/2} K^2 (f(x,y) + f(\xi,\eta))b] \right. \\
&+ \left. \frac{\epsilon^2}{2} [3(X^2 + K^2b^2)^{-5/2} K^4 b^2 (f(x,y) + f(\xi,\eta))^2 - (X^2 + K^2b^2)^{-3/2} K^2 (f(x,y) + f(\xi,\eta))^2] \right] \\
&+ 2[(X^2 + K^2b^2)^{-3/2} + \epsilon [-3(X^2 + K^2b^2)^{-5/2} K^2 (f(x,y) + f(\xi,\eta))b] \\
&+ \frac{\epsilon^2}{2} [15(X^2 + K^2b^2)^{-7/2} K^4 b^2 (f(x,y) + f(\xi,\eta))^2 \\
&- 3(X^2 + K^2b^2)^{-5/2} K^2 (f(x,y) + f(\xi,\eta))^2] (K(\epsilon(f(x,y) + f(\xi,\eta)) + b)) \left. \right\} \\
&- 2\pi i K^3 e^{-Kb} \left(1 - K\epsilon (f(x,y) + f(\xi,\eta)) + \frac{\epsilon^2}{2} K^2 (f(x,y) + f(\xi,\eta))^2 \right) J_0(X) \tag{5.54}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
W_0 = & \left\{ K^3[3K^2b^2(X^2 + K^2b^2)^{-5/2} - (X^2 + K^2b^2)^{-3/2} - \pi e^{-Kb}(H_0(X) + Y_0(X)) \right. \\
& - 2 \int_0^{Kb} e^{t-Kb}(X^2 + t^2)^{-1/2} dt + 2(X^2 + K^2b^2)^{-1/2} + 2(X^2 + K^2b^2)^{-3/2} \left. \right] - 2\pi i K^3 e^{-Kb} J_0(X) \left. \right\} \\
& + \epsilon \left\{ K^3 \left[6K^2b(f(x, y) + f(\xi, \eta))(X^2 + K^2b^2)^{-5/2} \right. \right. \\
& - 15K^4b^3((X^2 + K^2b^2)^{-7/2}(f(x, y) + f(\xi, \eta)) + 3(X^2 + K^2b^2)^{-5/2}K^2(f(x, y) + f(\xi, \eta))b] \\
& + \pi e^{-Kb}K(f(x, y) + f(\xi, \eta))(H_0(X) + Y_0(X)) - 2e^{Kb}(X^2 + K^2b^2)^{-1/2}K(f(x, y) + f(\xi, \eta)) \\
& - 2(X^2 + K^2b^2)^{-3/2}K^2b(f(x, y) + f(\xi, \eta)) - 6(X^2 + K^2b^2)^{-5/2}K^2(f(x, y) + f(\xi, \eta))b^2 \\
& + 2(X^2 + K^2b^2)^{-3/2}K(f(x, y) + f(\xi, \eta)) + 2K(f(x, y) + f(\xi, \eta)) \int_0^{Kb} e^{t-Kb}(X^2 + t^2)^{-1/2} dt \left. \right] \\
& + 2\pi i K^4 e^{-Kb}(f(x, y) + f(\xi, \eta))J_0(X) \left. \right\} \\
& + \frac{\epsilon^2}{2} \left\{ K^3 \left[3K^2(f(x, y) + f(\xi, \eta))^2(X^2 + K^2b^2)^{-5/2} \right. \right. \\
& + 6K^2(f(x, y) + f(\xi, \eta))b(-5(X^2 + K^2b^2)^{-7/2}K^2(f(x, y) + f(\xi, \eta))b) \\
& + 105K^6b^4(f(x, y) + f(\xi, \eta))(X^2 + K^2b^2)^{-9/2} \\
& - [15(X^2 + K^2b^2)^{-7/2}K^4b^2(f(x, y) + f(\xi, \eta))] \\
& + \pi e^{-Kb}K^2(f(x, y) + f(\xi, \eta))^2(H_0(x) + Y_0(X)) \\
& - 2e^{Kb}K^2(f(x, y) + f(\xi, \eta))^2[(X^2 + K^2b^2)^{-1/2} - Kb(X^2 + K^2b^2)^{-3/2}] \\
& + 2[15(X^2 + K^2b^2)^{-7/2}K^4b^2(f(x, y) + f(\xi, \eta))^2 - 3(X^2 + K^2b^2)^{-5/2}K^2(f(x, y) + f(\xi, \eta))^2 \left. \right] \left. \right\} \\
& - 2\pi i K^5(f(x, y) + f(\xi, \eta))^2 e^{-Kb} J_0(X) \left. \right\}
\end{aligned} \tag{5.55}$$

Separando os termos de ordem 0, 1 e 2 temos, respectivamente,

$$\begin{aligned}
W_{00} = & K^3 \left[3K^2b^2(X^2 + K^2b^2)^{-5/2} - (X^2 + K^2b^2)^{-3/2} - \pi e^{-Kb}(H_0(X) + Y_0(X)) \right. \\
& - 2 \int_0^{Kb} e^{t-Kb}(X^2 + t^2)^{-1/2} dt + 2(X^2 + K^2b^2)^{-1/2} + 2(X^2 + K^2b^2)^{-3/2} Kb \left. \right] \\
& - 2\pi i K^3 e^{-Kb} J_0(X),
\end{aligned} \tag{5.56}$$

$$\begin{aligned}
W_{01} = & K^3 \left[6K^2 b (f(x, y) + f(\xi, \eta)) (X^2 + K^2 b^2)^{-5/2} \right. \\
& - 15K^4 b^3 (((X^2 + K^2 b^2)^{-7/2} (f(x, y) + f(\xi, \eta)))) \\
& + 3(X^2 + K^2 b^2)^{-5/2} K^2 (f(x, y) + f(\xi, \eta)) b \\
& + \pi e^{-Kb} K (f(x, y) + f(\xi, \eta)) (H_0(x) + Y_0(X)) - 2e^{Kb} (X^2 + K^2 b^2)^{-1/2} K (f(x, y) + f(\xi, \eta)) \\
& - 2(X^2 + K^2 b^2)^{-3/2} K^2 b (f(x, y) + f(\xi, \eta)) - 6(X^2 + K^2 b^2)^{-5/2} K^2 (f(x, y) + f(\xi, \eta)) b^2 \\
& + 2(X^2 + K^2 b^2)^{-3/2} K (f(x, y) + f(\xi, \eta)) + 2K (f(x, y) + f(\xi, \eta)) \int_0^{Kb} e^{t-Kb} (X^2 + t^2)^{-1/2} dt \left. \right] \\
& + 2\pi i K^4 (f(x, y) + f(\xi, \eta)) e^{-Kb} J_0(X)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
W_{02} = & \frac{1}{2} \left\{ K^3 [3K^2 (f(x, y) + f(\xi, \eta))^2 (X^2 + K^2 b^2)^{-5/2} \right. \\
& + 6K^2 (f(x, y) + f(\xi, \eta)) b (-5(X^2 + K^2 b^2)^{-7/2} K^2 (f(x, y) + f(\xi, \eta)) b) \\
& - [15(X^2 + K^2 b^2)^{-7/2} K^4 b^2 (f(x, y) + f(\xi, \eta)) - 3(X^2 + K^2 b^2)^{-5/2} K^2 (f(x, y) + f(\xi, \eta))^2] \\
& - \pi e^{-Kb} K^2 (f(x, y) + f(\xi, \eta))^2 (H_0(x) + Y_0(X)) \\
& - -2e^{Kb} K^2 (f(x, y) + f(\xi, \eta))^2 [(X^2 + K^2 b^2)^{-1/2} - Kb(X^2 + K^2 b^2)^{-3/2}] \\
& - 3(X^2 + K^2 b^2)^{-5/2} K^2 (f(x, y) + f(\xi, \eta))^2 b - 15K^4 b^3 (X^2 + K^2 b^2)^{-7/2} (f(x, y) + f(\xi, \eta))^2 \\
& + 2\pi i K^3 (f(x, y) + f(\xi, \eta)) e^{Kb} J_0(X) \left. \right\} \\
& - 2\pi i K^5 (f(x, y) + f(\xi, \eta))^2 J_0(X). \tag{5.57}
\end{aligned}$$

Agora, vamos calcular uma expressão para W_1 . Novamente, queremos obter uma expressão que nos facilite resolver o problema numericamente. Analogamente ao caso anterior, consideramos

$$\begin{aligned}
G_1 &= \int_0^\infty \frac{k+K}{k-K} e^{-k\frac{Y}{K}} J_0(kR) dk \\
&= \int_0^\infty \frac{k+K}{k-K} e^{-k\frac{Y}{K}} J_0\left(k\frac{X}{K}\right) dk, \quad X = KR \text{ e } Y = K(z + \zeta).
\end{aligned}$$

Logo, derivando G_1 com respeito a Y ,

$$\frac{\partial G_1}{\partial Y} = \int_0^\infty \frac{k+K}{k-K} e^{-k\frac{Y}{K}} \left(\frac{-k}{K}\right) J_0\left(k\frac{X}{K}\right) dk. \tag{5.58}$$

Derivando com respeito a X ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 G_1}{\partial X \partial Y} &= \int_0^\infty \frac{k+K}{k-K} e^{-k\frac{Y}{K}} \left(\frac{-k}{K}\right) \left(\frac{k}{K}\right) J'_0\left(k\frac{X}{K}\right) dk \\ &= -\frac{1}{K^2} \int_0^\infty \frac{k+K}{k-K} k^2 e^{-k\frac{Y}{K}} J'_0\left(k\frac{X}{K}\right) dk.\end{aligned}\quad (5.59)$$

Por outro lado, derivando (5.47) com respeito a Y ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_1}{\partial Y} &= K \left[-(X^2 + Y^2)^{-3/2} Y + \pi e^{-Y} (H_0(X) + Y_0(X)) + 2 \int_0^Y e^{t-Y} (X^2 + t^2)^{-1/2} dt \right. \\ &\quad \left. - 2(X^2 + Y^2)^{-1/2} \right] + 2\pi i K J_0(X) e^{-Y}.\end{aligned}\quad (5.60)$$

E derivando G_1 com respeito a X ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 G_1}{\partial X \partial Y} &= K \left[3(X^2 + Y^2)^{-5/2} Y X + \pi e^{-Y} (H'_0(X) + Y'_0(X)) - 2 \int_0^Y e^{t-Y} (X^2 + t^2)^{-3/2} X dt \right. \\ &\quad \left. + 2(X^2 + Y^2)^{-3/2} X \right] + 2\pi i K J'_0(X) e^{-Y} \\ &= -\frac{1}{K^2} \int_0^\infty \frac{k+K}{k-K} e^{-k\frac{Y}{K}} k^2 J'_0\left(k\frac{X}{K}\right) dk.\end{aligned}\quad (5.61)$$

Logo, comparando (5.59) e (5.61), temos

$$\begin{aligned}W_1 &= [(f_1 - f_1^0) \cos \theta + (f_2 - f_2^0) \text{sen } \theta] \int_0^\infty \frac{k+K}{k-K} k^2 e^{-k(\epsilon(f(x,y)+f(\xi,\eta))+b)} J'_0(kR) dk \\ &= [(f_1 - f_1^0) \cos \theta + (f_2 - f_2^0) \text{sen } \theta] (-K^3) \left[3(X^2 + Y^2)^{-5/2} Y X - \pi e^{-Y} (H'_0(X) + Y'_0(X)) \right. \\ &\quad \left. - 2 \int_0^Y e^{t-Y} (X^2 + Y^2)^{-3/2} X dt + 2(X^2 + Y^2)^{-3/2} X \right] - 2\pi i K^3 J'_0(X) e^{-Y}.\end{aligned}\quad (5.62)$$

Substituindo as expansões (B.4),(B.5),(B.6) e (B.7) em (5.62) temos

$$\begin{aligned}
W_1 = & [(f_1 - f_1^0) \cos \theta + (f_2 - f_2^0) \text{sen } \theta] (-K^3) \left\{ 3[(X^2 + K^2 b^2)^{-5/2}] \right. \\
& + \epsilon [-5(X^2 + K^2 b^2)^{-7/2} K^2 (f(x, y) + f(\xi, \eta)) b] \\
& + \frac{\epsilon^2}{2} [35(X^2 + K^2 b^2)^{-5/2} K^2 b^2 (f(x, y) + f(\xi, \eta))^2 \\
& - 5(X^2 + K^2 b^2)^{-7/2} K^2 (f(x, y) + f(\xi, \eta))^2] X [(1 - K\epsilon(f(x, y) + f(\xi, \eta))) \\
& + K^2 \frac{\epsilon^2}{2} (f(x, y) + f(\xi, \eta))^2 + \pi e^{-Kb} (1 - K\epsilon(f(x, y) + f(\xi, \eta))) \\
& + K^2 \frac{\epsilon^2}{2} (f(x, y) + f(\xi, \eta))^2] (H'_0(X) + Y'_0(X)) - 2 \left[\int_0^{Kb} e^{t-Kb} (X^2 + t^2)^{-3/2} X dt \right. \\
& + e^{Kb} (X^2 + K^2 b^2)^{-3/2} X K (f(x, y) + f(\xi, \eta)) \epsilon \\
& \left. + e^{Kb} K^2 (f(x, y) + f(\xi, \eta))^2 [(X^2 + K^2 b^2)^{-3/2} 3 - Kb (X^2 + K^2 b^2)^{-5/2}] \frac{\epsilon^2}{2} \right] \\
& \times (1 - K\epsilon(f(x, y) + f(\xi, \eta)) + K^2 \frac{\epsilon^2}{2} (f(x, y) + f(\xi, \eta))^2) \\
& + 2[(X^2 + Y^2)^{-3/2} + \epsilon[-(X^2 + K^2 b^2)^{-5/2} K^2 (f(x, y) + f(\xi, \eta)) b] \\
& + \frac{\epsilon^2}{2} [15(X^2 + K^2 b^2)^{-7/2} K^2 b^2 (f(x, y) + f(\xi, \eta))^2 \\
& - 3(X^2 + K^2 b^2)^{-5/2} K^2 (f(x, y) + f(\xi, \eta))^2] X \left. \right\} \\
& - 2\pi i K^3 J'_0(X) e^{-Kb} (1 - K\epsilon(f(x, y) + f(\xi, \eta)) + K^2 \frac{\epsilon^2}{2} (f(x, y) + f(\xi, \eta))^2). \quad (5.63)
\end{aligned}$$

Separando os termos de ordem um e zero de W_1 temos, respectivamente,

$$\begin{aligned}
W_{10} = & [(f_1 - f_1^0) \cos \theta + (f_2 - f_2^0) \text{sen } \theta] (-K^3) \left[3(X^2 + K^2 b^2)^{-5/2} X \right. \\
& + \pi e^{-Kb} (H'_0(X) + Y'_0(X)) - 2 \int_0^{Kb} e^{t-Kb} (X^2 + t^2)^{-3/2} X dt + 2[(X^2 + Y^2)^{-3/2} X] \\
& \left. - 2\pi i K^3 J'_0(X) e^{-Kb} \right] \quad (5.64)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
W_{11} = & [(f_1 - f_1^0) \cos \theta + (f_2 - f_2^0) \text{sen} \theta](-K^3) \left(3 \left[-5(X^2 + K^2b^2)^{-7/2} K^2(f(x, y) + f(\xi, \eta))bX \right. \right. \\
& + \left. \left. (X^2 + K^2b^2)^{-5/2} X K(f(x, y) + f(\xi, \eta)) \right] \right. \\
& - \left. \pi e^{-Kb} K(f(x, y) + f(\xi, \eta))(H_0'(X) + Y_0'(X)) \right. \\
& - \left. 2e^{Kb}(X^2 + K^2b^2)^{-1/2} K(f(x, y) + f(\xi, \eta)) - 2(X^2 + K^2b^2)^{-5/2} K^2(f(x, y) + f(\xi, \eta))bX \right. \\
& + \left. K(f(x, y) + f(\xi, \eta)) 2 \int_0^{Kb} e^{t-Kb} (X^2 + t^2)^{-3/2} X dt \right) \\
& - \left. 2\pi i K^4 J_0'(X) e^{-Kb} (f(x, y) + f(\xi, \eta)) \right]. \tag{5.65}
\end{aligned}$$

Do mesmo modo que o caso anterior, os termos de ordem 1 da equação (5.12) são os termos de ordem 1 de W_0 mais os termos de ordem 0 de W_1 , ou seja,

$$\begin{aligned}
W_{10} + W_{01} = & [(f_1 - f_1^0) \cos \theta + (f_2 - f_2^0) \text{sen} \theta](-K^3) \left[\left(3(X^2 + K^2b^2)^{-5/2} X \right. \right. \\
& - \left. \left. \pi e^{-Kb} (H_0'(X) + Y_0'(X)) - 2 \int_0^{Kb} e^{t-Kb} (X^2 + t^2)^{-3/2} X dt \right. \right. \\
& + \left. \left. 2[(X^2 + Y^2)^{-3/2} X] \right) - 2\pi i K^3 J_0'(X) e^{-Kb} \right] \\
& + K^3 \left[6K^2b(f(x, y) + f(\xi, \eta))(X^2 + K^2b^2)^{-5/2} \right. \\
& - \left. 15K^4b^3(X^2 + K^2b^2)^{-7/2}(f(x, y) + f(\xi, \eta)) \right. \\
& + \left. 3(X^2 + K^2b^2)^{-5/2} K^2(f(x, y) + f(\xi, \eta))b \right. \\
& + \left. \pi e^{-Kb} K(f(x, y) + f(\xi, \eta))(H_0(x) + Y_0(X)) \right. \\
& - \left. 2e^{Kb}(X^2 + K^2b^2)^{-1/2} K(f(x, y) + f(\xi, \eta)) - 2(X^2 + K^2b^2)^{-3/2} K^2b(f(x, y) + f(\xi, \eta)) \right. \\
& - \left. 6(X^2 + K^2b^2)^{-5/2} K^2(f(x, y) + f(\xi, \eta))b^2 + 2(X^2 + K^2b^2)^{-3/2} K(f(x, y) + f(\xi, \eta)) \right. \\
& + \left. 2K(f(x, y) + f(\xi, \eta)) \int_0^{Kb} e^{t-kb} (X^2 + t^2)^{-1/2} dt \right] \\
& + \left. 2\pi i K^4 (f(x, y) + f(\xi, \eta)) e^{-Kb} J_0(X) \right] \tag{5.66}
\end{aligned}$$

Para o cálculo de W_2 , iremos reorganizar a expressão (5.14). Assim,

$$\begin{aligned}
W_2 &= f_1 f_1^0 \int_0^\infty e^{-k\epsilon\bar{\lambda}R} e^{-kb} \frac{k}{R} [-\text{sen}^2 \theta J_0'(kR) - kR \cos^2 \theta J_0'(kR)] \frac{k+K}{k-K} dk \\
&+ f_2 f_2^0 \int_0^\infty e^{-k\epsilon\bar{\lambda}R} e^{-kb} \frac{k}{R} [-\cos^2 \theta J_0'(kR) - kR \text{sen}^2 \theta J_0'(kR)] \frac{k+K}{k-K} dk \\
&+ (f_2 f_1^0 + f_1 f_2^0) \int_0^\infty e^{-k\epsilon\bar{\lambda}R} e^{-kb} \frac{k}{R^2} R^2 \frac{\text{sen} 2\theta}{2} \left[\frac{J_0'(kR)}{R} - k J_0'(kR) \right] \frac{k+K}{k-K} dk \\
&= f_1 f_1^0 \left[\frac{-\text{sen}^2 \theta}{R} \int_0^\infty e^{-k\epsilon\bar{\lambda}R} e^{-kb} J_0'(kR) K \frac{k+K}{k-K} dk \right. \\
&\quad \left. - \cos^2 \theta \int_0^\infty e^{-k\epsilon\bar{\lambda}R} e^{-kb} \frac{k}{R} J_0''(kR) k^2 \frac{k+K}{k-K} dk \right] \\
&+ f_2 f_2^0 \left[\frac{\cos^2 \theta}{R} \int_0^\infty e^{-k\epsilon\bar{\lambda}R} e^{-kb} \frac{k}{R} J_0'(kR) k \frac{k+K}{k-K} dk \right. \\
&\quad \left. - \text{sen}^2 \theta \int_0^\infty e^{-k\epsilon\bar{\lambda}R} e^{-kb} \frac{k}{R} J_0''(kR) k^2 \frac{k+K}{k-K} dk \right] \\
&+ (f_2 f_1^0 + f_1 f_2^0) \frac{\text{sen}(2\theta)}{2} \left[\frac{1}{R} \int_0^\infty e^{-k\epsilon\bar{\lambda}R} e^{-kb} J_0'(kR) k \frac{k+K}{k-K} dk \right. \\
&\quad \left. - \int_0^\infty e^{-k\epsilon\bar{\lambda}R} e^{-kb} J_0''(kR) k^2 \frac{k+K}{k-K} dk \right] \\
&= \left[\frac{-\text{sen}^2 \theta}{R} f_1 f_1^0 - \frac{\cos^2 \theta}{R} f_2 f_2^0 + (f_2 f_1^0 + f_1 f_2^0) \frac{\text{sen}(2\theta)}{2R} \right] \\
&\times \int_0^\infty e^{-k\epsilon\bar{\lambda}R} e^{-kb} \frac{k}{R} J_0'(kR) k \frac{k+K}{k-K} dk \\
&+ \left[-\cos^2 \theta f_1 f_1^0 - \text{sen}^2 \theta f_2 f_2^0 + (f_2 f_1^0 + f_1 f_2^0) \frac{\text{sen}(2\theta)}{2R} \right] \\
&\times \int_0^\infty e^{-k\epsilon\bar{\lambda}R} e^{-kb} \frac{k}{R} J_0''(kR) k^2 \frac{k+K}{k-K} dk. \tag{5.67}
\end{aligned}$$

Vamos calcular a primeira integral do lado direito de (5.14). Novamente, considere G_1 definido por (5.2). Assim, derivando (5.2) em relação a X ,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G_1}{\partial X} &= \int_0^\infty \frac{k+K}{k-K} e^{-k\frac{y}{K}} \frac{k}{K} J_0' \left(X \frac{k}{K} \right) dk \\
&= \frac{1}{K} \int_0^\infty \frac{k+K}{k-K} e^{-k(\epsilon(f(x,y)+f(\xi,\eta))+b)} k J_0'(kR) dk. \tag{5.68}
\end{aligned}$$

Por outro lado, derivando em relação a X a expressão do lado direito da equação (5.47),

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G_1}{\partial X} &= K \left[\frac{-1}{2}(X^2 + Y^2)^{-3/2} 2X - \pi e^{-Y}(H'_0(X) + Y'_0(X)) - 2 \int_0^Y e^{t-Y} \frac{-1}{2}(X^2 + t^2)^{-3/2} 2X dt \right] \\
&\quad - 2\pi i K e^{-Y} J'_0(X) \\
&= K \left[-(X^2 + Y^2)^{-3/2} X - e^{-Y}(H'_0(X) + Y'_0(X)) \right. \\
&\quad \left. + \int_0^Y e^{t-Y} (X^2 + t^2)^{-3/2} X dt \right] - 2\pi i K e^{-Y} J'_0(X). \tag{5.69}
\end{aligned}$$

Então por (5.68) e (5.69), temos a primeira integral que estamos procurando.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{k+K}{k-K} e^{-k(\epsilon(f(x,y)+f(\xi,\eta))+b)} k J'_0(kR) dk &= K^2 \left[-(X^2 + Y^2)^{-3/2} X - \pi e^{-Y}(H'_0(X) + Y'_0(X)) \right. \\
&\quad \left. + 2 \int_0^Y e^{t-Y} (X^2 + t^2)^{-3/2} X dt \right] \\
&\quad - 2\pi i K^2 e^{-Y} J'_0(X). \tag{5.70}
\end{aligned}$$

Para calcular a segunda integral podemos derivar ambos os lados da equação acima em relação a X , obtendo:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{k+K}{k-K} e^{-k(\epsilon(f(x,y)+f(\xi,\eta))+b)} k^2 J''_0(kR) dk &= K^3 \left[3(X^2 + Y^2)^{-5/2} X^2 - \pi e^{-Y}(H''_0(X) + Y''_0(X)) \right. \\
&\quad \left. + 2 \int_0^Y e^{t-Y} (X^2 + t^2)^{-3/2} dt \right. \\
&\quad \left. - 6 \int_0^Y e^{t-Y} (X^2 + t^2)^{-5/2} X^2 dt \right] \\
&\quad - 2\pi i K^2 e^{-Y} J''_0(X). \tag{5.71}
\end{aligned}$$

Substituindo (5.70) e (5.71) em (5.14), temos

$$\begin{aligned}
W_2 &= \left[\frac{-\text{sen}^2 \theta}{R} f_1 f_1^0 - \frac{\cos^2 \theta}{R} f_2 f_2^0 + (f_2 f_1^0 + f_1 f_2^0) \frac{\text{sen}(2\theta)}{2R} \right] \left\{ K^2 \left[-(X^2 + Y^2)^{-3/2} X \right. \right. \\
&\quad \left. - \pi e^{-Y}(H'_0(X) + Y'_0(X)) + 2 \int_0^Y e^{t-Y} (X^2 + t^2)^{-3/2} X dt \right] - 2\pi i K^2 e^{-Y} J'_0(X) \left. \right\} \\
&\quad + \left[-\cos^2 \theta f_1 f_1^0 - \text{sen}^2 \theta f_2 f_2^0 + (f_2 f_1^0 + f_1 f_2^0) \frac{\text{sen}(2\theta)}{2R} \right] \left\{ K^3 \left[3(X^2 + Y^2)^{-5/2} X^2 \right. \right. \\
&\quad \left. - \pi e^{-Y}(H''_0(X) + Y''_0(X)) + 2 \int_0^Y e^{t-Y} (X^2 + t^2)^{-3/2} dt - 6 \int_0^Y e^{t-Y} (X^2 + t^2)^{-5/2} X^2 dt \right] \\
&\quad \left. - 2\pi i K^2 e^{-Y} J''_0(X) \right\}. \tag{5.72}
\end{aligned}$$

Observamos que, como estamos interessados em calcular apenas os termos até ordem 2, precisamos calcular apenas os termos de ordem 0 de W_2 . Assim, substituindo os termos de ordem 0 de cada expansão em série de Taylor em W_2 temos

$$\begin{aligned}
W_2 &= \left[\frac{-\operatorname{sen}^2 \theta}{R} f_1 f_1^0 - \frac{\cos^2 \theta}{R} f_2 f_2^0 + (f_2 f_1^0 + f_1 f_2^0) \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2R} \right] \left\{ K^2 [-(X^2 + Y^2)^{-3/2} X \right. \\
&\quad \left. - \pi e^{-Kb} (H_0'(X) + Y_0'(X)) + 2 \int_0^{Kb} e^{t-Kb} (X^2 + t^2)^{-3/2} X dt \right] - 2\pi i K^2 e^{-Kb} J_0'(X) \left. \right\} \\
&+ \left[-\cos^2 \theta f_1 f_1^0 - \operatorname{sen}^2 \theta f_2 f_2^0 + (f_2 f_1^0 + f_1 f_2^0) \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2R} \right] \left\{ K^3 [3(X^2 + Y^2)^{-5/2} X^2 \right. \\
&\quad \left. - \pi e^{-Kb} (H_0''(X) + Y_0''(X)) + 2 \int_0^{Kb} e^{t-Kb} (X^2 + t^2)^{-3/2} dt - 6 \int_0^{Kb} e^{tKb} (X^2 + t^2)^{-5/2} X^2 dt \right] \\
&\quad \left. - 2\pi i K^2 e^{-Kb} J_0''(X) \right\}. \\
&= W_{20}
\end{aligned} \tag{5.73}$$

Substituindo as expansões que calculamos anteriormente, obtemos

$$\begin{aligned}
W_{02} + W_{11} + W_{20} &= \frac{1}{2} \left\{ K^3 [3K^2(f(x, y) + f(\xi, \eta))^2 (X^2 + K^2b^2)^{-5/2} \right. \\
&+ 6K^2(f(x, y) + f(\xi, \eta))b(-5(X^2 + K^2b^2)^{-7/2}K^2(f(x, y) + f(\xi, \eta))b) \\
&- [15(X^2 + K^2b^2)^{-7/2}K^4b^2(f(x, y) + f(\xi, \eta)) - 3(X^2 + K^2b^2)^{-5/2}K^2(f(x, y) \\
&+ f(\xi, \eta))^2] - \pi e^{-Kb}K^2(f(x, y) + f(\xi, \eta))^2(H_0(x) + Y_0(X)) \\
&- 2e^{Kb}K^2(f(x, y) + f(\xi, \eta))^2[(X^2 + K^2b^2)^{-1/2} - Kb(X^2 + K^2b^2)^{-3/2}] \\
&+ 2[15(X^2 + K^2b^2)^{-7/2}K^4b^2(f(x, y) + f(\xi, \eta))^2 \\
&- 3(X^2 + K^2b^2)^{-5/2}K^2(f(x, y) + f(\xi, \eta))^2] \left. \right\} \\
&+ 2\pi i K^3(f(x, y) + f(\xi, \eta))e^{Kb}J_0(X) \left. \right\} \\
&- 2\pi i K^5(f(x, y) + f(\xi, \eta))^2 J_0(X) \\
&+ [(f_1 - f_1^0) \cos \theta + (f_2 - f_2^0) \text{sen} \theta] [K^3 [3 [-5(X^2 + K^2b^2)^{-7/2}K^2(f(x, y) \\
&+ f(\xi, \eta))bX - (X^2 + K^2b^2)^{-5/2}XK(f(x, y) + f(\xi, \eta))] \\
&- \pi e^{-Kb}K(f(x, y) + f(\xi, \eta))(H_0'(X) + Y_0'(X)) \\
&+ 2e^{Kb}(X^2 + K^2b^2)^{-1/2}K(f(x, y) + f(\xi, \eta)) \\
&- 2(X^2 + K^2b^2)^{-5/2}K^2(f(x, y) + f(\xi, \eta))b] \\
&- 2\pi i K^4 J_0'(X) e^{-Kb}(f(x, y) + f(\xi, \eta))] \\
&+ \left[\frac{-\text{sen}^2 \theta}{R} f_1 f_1^0 - \frac{\cos^2 \theta}{R} f_2 f_2^0 + (f_2 f_1^0 + f_1 f_2^0) \frac{\text{sen}(2\theta)}{2R} \right] \\
&\times \left\{ K^2 [-(X^2 + Y^2)^{-3/2}X - \pi e^{-Kb}(H_0'(X) + Y_0'(X)) \right. \\
&+ 2 \int_0^{Kb} e^{t-Kb}(X^2 + t^2)^{-3/2}X dt \left. \right] - 2\pi i K^2 e^{-Kb} J_0'(X) \left. \right\} \\
&+ \left[-\cos^2 \theta f_1 f_1^0 - \text{sen}^2 \theta f_2 f_2^0 + (f_2 f_1^0 + f_1 f_2^0) \frac{\text{sen}(2\theta)}{2R} \right] \\
&\times \left\{ K^3 [3(X^2 + Y^2)^{-5/2}X^2 - \pi e^{-Kb}(H_0''(X) + Y_0''(X)) \right. \\
&+ 2 \int_0^{Kb} e^{t-Kb}(X^2 + t^2)^{-3/2}dt - 6 \int_0^{Kb} e^{tKb}(X^2 + t^2)^{-5/2}X^2 dt \left. \right] \\
&- 2\pi i K^2 e^{-Kb} J_0''(X) \left. \right\}. \tag{5.74}
\end{aligned}$$

6 MÉTODO NUMÉRICO

Para resolvermos numericamente as equações integrais que obtivemos nos capítulos 3 e 5 aplicaremos alguns desenvolvimentos analíticos de maneira a escrevê-las em uma mais forma mais conveniente. Especificamente, mostraremos que as integrais de parte finita de Hadamard, que aparecem nessas equações, podem ser escritas como uma série envolvendo polinômios associados de Legendre [4]. Isso nos permite resolver as integrais de Hadamard analiticamente.

Para isso, tomaremos a seguinte base de funções:

$$B_k^m(r, \theta) = P_{m+2k+1}^m(\sqrt{1-r^2}) \cos m\theta, \quad (6.1)$$

onde P_n^m são as funções de Legendre associadas.

Consideramos a equação hipersingular

$$Hw(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_D w(x, y) \frac{dA}{R^3}. \quad (6.2)$$

Para resolvermos os problemas dos capítulos 4 e 5, usaremos a fórmula [10, 11, 12]

$$\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{R^3} B_k^m(s, \alpha) ds d\alpha = C_k^m \frac{B_k^m(r, \theta)}{\sqrt{1-r^2}}, \quad (6.3)$$

onde

$$C_k^m = -\frac{\pi}{4} \frac{[P_{m+2k+1}^{m+1}(0)]^2}{(2m+2k+1)!(2k+1)!}.$$

A equação (6.3) nos permite resolver integrais de parte finita de Hadamard numericamente. Expandiremos $[\phi]$ em termos de (6.1) como

$$[\phi] = w(x, y) \approx \sum_{k,m}^N a_k^m B_k^m(r, \theta) \quad (6.4)$$

e substituindo em (6.2) a expansão de $[\phi]$ (6.4) e (6.1) temos que

$$\begin{aligned}
Hw(x, y) &= \frac{1}{4\pi} \int_D \sum_{k,m}^N a_k^m B_k^m(r, \theta) \frac{dA}{R^3} \\
&= \sum_{k,m}^N a_k^m C_k^m \frac{B_k^m(r, \theta)}{\sqrt{1-r^2}} \\
&= \sum_{k,m}^N a_k^m C_k^m \frac{P_{m+2k+1}^m(\sqrt{1-r^2}) \cos m\theta}{\sqrt{1-r^2}}, \tag{6.5}
\end{aligned}$$

onde $(r, \theta) \in D$. Temos que determinar quem são a_k^m , $\forall k, m \in \{1, \dots, N\}$.

6.1 Solução do problema de um disco liso submerso em um fluido com superfície livre

A equação integral governante para o problema do capítulo 3 tomando um disco unitário no plano xy é, de acordo com (3.15), dada por

$$\frac{1}{4\pi} \int_D [\phi] \frac{dA}{R^3} + \frac{1}{4\pi} \int_D [\phi(q)] W dA = 1, \tag{6.6}$$

onde W é dado por

$$\begin{aligned}
W &= W_{00} = \int_0^\infty \frac{k+K}{k-K} e^{-kb} k^2 J_0(kR) dk \\
&= K^3 \left[3K^2 b^2 (X^2 + K^2 b^2)^{-5/2} - (X^2 + K^2 b^2)^{-3/2} - \pi e^{-kb} (H_0(X) + Y_0(X)) \right. \\
&\quad \left. - 2 \int_0^{Kb} e^{t-kb} (X^2 + t^2)^{-1/2} dt + 2(X^2 + K^2 b^2)^{-1/2} + 2(X^2 + K^2 b^2)^{-3/2} Kb \right] \\
&\quad + 2\pi i K^4 e^{-Kb} (f(x, y) + f(\xi, \eta)) J_0(X) \tag{6.7}
\end{aligned}$$

conforme (5.56).

Substituindo (6.5) em (6.6), obtemos

$$\sum_{k,m}^N a_k^m C_k^m \frac{P_{m+2k+1}^m(\sqrt{1-r^2}) \cos m\theta}{\sqrt{1-r^2}} + \int_D w_0 W_{00} dA = 1 \tag{6.8}$$

Escrevendo w_0 de acordo com (6.4), temos

$$\sum_{k,m}^N a_k^m C_k^m \frac{P_{m+2k+1}^m(\sqrt{1-r^2}) \cos m\theta}{\sqrt{1-r^2}} + \sum_{k,m}^N \left\{ \int_D W_{00} a_k^m B_k^m(r, \theta) d\Omega \right\} = 1 \quad (6.9)$$

6.2 Solução do problema de um disco rugoso submerso em um fluido com superfície livre

Como vimos anteriormente no capítulo 5, as equações que resolvem esse problema são:

$$\frac{1}{4\pi} \int_D w_0 \frac{dA}{R^3} + \frac{1}{4\pi} \int_D W_{00} w_0 dA = 1, \quad (6.10)$$

$$\int_D w_1 \frac{dA}{R^3} + \int_D W_{00} w_1 dA = - \int_D (W_{10} + W_{01}) w_0 dA \quad (6.11)$$

e

$$\begin{aligned} \int_D w_2 \frac{dA}{R^3} + \int_D W_{00} w_2 dA &= - \int_D (W_{02} + W_{11} + W_{20}) w_0 dA - \int_D (W_{01} + W_{10}) w_1 dA \\ &\quad - \int_D \mathcal{K}_2 w_0 \frac{dA}{R^3}, \end{aligned} \quad (6.12)$$

onde W_{00} , $(W_{10} + W_{01})$, $(W_{02} + W_{11} + W_{20})$ e \mathcal{K}_2 são dados em (5.56), (5.66), (5.74) e (5.45), respectivamente.

Note que, as equações acima são todas do tipo

$$(\bar{H} + H)u = g, \quad (6.13)$$

onde \bar{H} e H são dadas em (5.43) e (5.44), respectivamente, u é uma função w e g é o lado direito das equações. Como já conhecemos $B_k^m(r, \theta)$, basta encontrarmos os coeficientes a_k^m . Ou seja, temos um sistema do tipo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, onde a matriz A é dada pelo lado esquerdo das equações e é sempre igual, o vetor \mathbf{x} são os coeficientes a_k^m de (6.4) e o vetor \mathbf{b} é a função g .

Como fizemos na seção anterior, substituiremos (6.5) e (6.4) em (6.10) para obtermos uma expressão para a equação de ordem 0. Assim

$$\sum_{k,m}^N a_k^m C_k^m \frac{P_{m+2k+1}^m(\sqrt{1-r^2}) \cos m\theta}{\sqrt{1-r^2}} + \sum_{k,m}^N \left\{ \int_D W_{00} a_k^m B_k^m(r, \theta) dA \right\} = 1, \quad (6.14)$$

que é idêntica a expressão (6.9).

Podemos reescrever esta equação da seguinte maneira:

$$\sum_{k,m}^N a_k^m \left[C_k^m \frac{P_{m+2k+1}^m(\sqrt{1-r_i^2}) \cos m\theta_i}{\sqrt{1-r_i^2}} + \int_D W_{00} B_k^m(r_i, \theta_i) dA \right] = 1, \quad (6.15)$$

De acordo com o que foi dito anteriormente, esta equação discretizada origina um sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ onde as incógnitas são a_j com $j = (n+1)m + k + 1$ e os elementos da matriz A são da forma:

$$(A)_{ij} = \frac{C_j P_j(\sqrt{1-r_i^2}) \cos m\theta_i}{\sqrt{1-r_i^2}} + \int_D W_{00} B_j(r_i, \theta_i) dA, \quad (6.16)$$

onde $C_j = C_k^m$, com $j = (N+1)m + k + 1$, $m = 0, \dots, N$, $k = 0, \dots, N$ e $b_i = g(r_i, \theta_i) = 1$.

Do mesmo modo, para a equação de ordem 1, substituiremos (6.5) e (6.4) em (6.11). Portanto,

$$\begin{aligned} & \sum_{k,m}^N a_k^m C_k^m \frac{P_{m+2k+1}^m(\sqrt{1-r^2}) \cos m\theta}{\sqrt{1-r^2}} + \sum_{k,m}^N \left\{ \int_D W_{00} a_k^m B_k^m(r, \theta) dA \right\} \\ &= - \sum_{k,m}^N \left\{ \int_D (W_{10} + W_{01}) a_k^m B_k^m(r, \theta) dA \right\}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Analogamente, para a equação de ordem 2, substituiremos (6.5) e (6.4) em (6.12). Logo,

$$\begin{aligned}
& \sum_{k,m}^N a_k^m C_k^m \frac{P_{m+2k+1}^m(\sqrt{1-r^2}) \cos m\theta}{\sqrt{1-r^2}} + \sum_{k,m}^N \left\{ \int_D a_k^m B_k^m(r, \theta) W_{00} dA \right\} \\
= & - \int_D \sum_{k,m}^N a_k^m B_k^m(r, \theta) (W_{02} + W_{11} + W_{20}) dA - \int_D \sum_{k,m}^N a_k^m B_k^m(r, \theta) (W_{01} + W_{10}) dA \\
& - \sum_{k,m}^N \int_D K_2 a_k^m C_k^m dA. \tag{6.18}
\end{aligned}$$

A discretização das equações (6.17) e (6.18) são iguais as da equação (6.14). Apenas temos o lado direito diferente $b_i = g(r_i, \theta_i)$.

Ainda, de acordo com o capítulo 3, por (3.33),

$$\mathcal{A}(K, b) + i\mathcal{B}(K, b) = - \int_D [\phi] ds$$

Assim, para o cálculo do coeficiente da massa adicional e do coeficiente de amortecimento, teremos que

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \epsilon \mathcal{A}_1 + \epsilon^2 \mathcal{A}_2 \tag{6.19}$$

e

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 + \epsilon \mathcal{B}_1 + \epsilon^2 \mathcal{B}_2, \tag{6.20}$$

onde \mathcal{A}_0 , \mathcal{B}_0 , \mathcal{A}_1 , \mathcal{B}_1 , \mathcal{A}_2 e \mathcal{B}_2 são os termos da massa adicional e do amortecimento de ordem 0,1 e 2, respectivamente.

6.3 Definição da rugosidade

Tomaremos a função que determina a rugosidade (5.9), de acordo com [8], como uma superposição de um número finito de superfícies duplamente corrugadas

que são randomicamente transladadas e rotacionadas uma com respeito a outra, ou seja,

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n 2\omega_i \text{sen}((\rho \cos(\phi - \phi_1)) - X_i a) / \lambda_i \times \text{sen}((\rho \text{sen}(\phi - \phi_i) - Y_i a) / \lambda_i). \quad (6.21)$$

Aqui, X_i , Y_i e ϕ_i são números randomicamente gerados tais que $0 \leq X_i \leq 1$, $0 \leq Y_i \leq 1$ e $0 \leq \phi_i \leq \pi$. Os números λ_i 's são números de comprimento de escala e os pesos ω_i são normalizados de acordo com

$$\sum \omega_i^2 = 1.$$

7 CONCLUSÃO

Estudamos a parte finita de Hadamard com funções Hölder contínuas. Definições e propriedades destas integrais foram apresentadas para uma e também no caso de n variáveis.

Para o problema de um disco liso submerso em um escoamento potencial com superfície livre apresentamos a dedução, no capítulo 2, de uma formulação integral usando integrais de Hadamard. Ainda, estudamos o caso em que as oscilações do disco são apenas verticais, o problema se torna axisimétrico e se reduz a integrais unidimensionais.

No capítulo 3, onde temos o problema de um disco rugoso em um escoamento potencial sem superfície livre, chegamos em três equações integrais hipersingulares, através do método de perturbação. Estudamos também, a partir dessas equações, a força hidrodinâmica exercida no fluido.

Já no capítulo 4, unimos os dois problemas e novamente, também usando o método de perturbação, obtemos três equações integrais hipersingulares. Mas, desta vez, essas equações contém o termo que aparece devido a existência da superfície livre. Esta parte da dissertação representa uma contribuição original.

Para os problemas do capítulo 2 e do capítulo 4, utilizamos um método numérico envolvendo expansões de polinômios de Legendre e discretizamos as equações integrais.

Para trabalhos futuros, planejamos estudar o fenômeno de ressonância exibido nos picos dos gráficos dos coeficientes da força hidrodinâmica, usando aproximações assintóticas.

Apêndice A CÁLCULO DAS DERIVADAS PARCIAIS DA FUNÇÃO $G(P, Q)$

A.1 Derivada de $\frac{\partial G}{\partial n_q}$ em relação a n_q

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 G(P, q)}{\partial n_p \partial n_q} &= \frac{\partial}{\partial n_p} \left(\mathbf{N}(\mathbf{q}) \cdot \frac{\mathbf{R}_2}{R_2^3} \right) = \frac{\partial}{\partial n_p} \left(\mathbf{N}(\mathbf{q}) \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{q})}{(r - q)^3} \right) \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial n_p} (\mathbf{N}(\mathbf{q}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{q})) \right] (r - q)^3 + \mathbf{N}(\mathbf{q}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial n_p} (r - q)^{-3} \\
&= (r - q)^{-3} \left[\frac{\partial}{\partial n_p} ((x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{q})) \right] \\
&\quad + (\mathbf{N}(\mathbf{q}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{q})) \left(\frac{\partial}{\partial n_p} (r - q)^{-3} \right) \tag{A.1}
\end{aligned}$$

Calculando as derivadas,

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \left((x_0 - x) \frac{-\partial F}{\partial x} + (y_0 - y) \frac{-\partial F}{\partial y} + z_0 - z \right) = \frac{-\partial F}{\partial x} \tag{A.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_0} \left((x_0 - x) \frac{-\partial F}{\partial x} + (y_0 - y) \frac{-\partial F}{\partial y} + z_0 - z \right) = \frac{-\partial F}{\partial y} \tag{A.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial z_0} \left((x_0 - x) \frac{-\partial F}{\partial x} + (y_0 - y) \frac{-\partial F}{\partial y} + z_0 - z \right) = \frac{-\partial F}{\partial z} \tag{A.4}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial n_p} [(x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{q})] &= \left(-\frac{\partial F}{\partial x}, -\frac{\partial F}{\partial y}, 1 \right) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{p}) \\
&= \mathbf{N}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{q}). \tag{A.5}
\end{aligned}$$

Ainda,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial n_p}(r-q)^{-3} &= \frac{\partial}{\partial n_p} \left[\frac{1}{((x_0-x)^2 + (y_0-y)^2 + (z_0-z)^2)^{3/2}} \right] \\
&= \left(-3 \frac{(x_0-x)}{(r-q)^5}, -3 \frac{(y_0-y)}{(r-q)^5}, -3 \frac{(z_0-z)}{(r-q)^5} \right) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{q}) \\
&= \frac{3}{(r-q)^5} (x-x_0, y-y_0, z-z_0) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{q}) \tag{A.6}
\end{aligned}$$

Então, substituindo (A.5) e (A.6) em (A.1), temos

$$\frac{\partial^2 G(P, q)}{\partial n_p \partial n_q} = (r-q)^{-3} (\mathbf{N}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{q})) - \frac{3}{R_1^5} (x-x_0, y-y_0, z-z_0) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{q}) \tag{A.7}$$

A.2 Derivada de $G_1(p, q)$ em relação a n_q e a n_p

Derivando em relação a n_q ,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G_1}{\partial n_q} &= \frac{\partial}{\partial n_q} \left\{ \int_0^\infty e^{-k(z+\zeta)} J_0(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \right\} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\infty e^{-k(z+\zeta)} J_0(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \right), \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_0^\infty e^{-k(z+\zeta)} J_0(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \right), \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial}{\partial z} \left(\int_0^\infty e^{-k(z+\zeta)} J_0(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \right) \right) \cdot \mathbf{N}(q)
\end{aligned}$$

Calculando cada derivada e substituindo (A.10), (A.11) e (A.12) em (A.8),

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G_1}{\partial n_q} &= \left(\int_0^\infty e^{-k(z+\zeta)} \frac{k}{R} J_0'(kR) (x-\xi) \frac{k+K}{k-K} dk, \int_0^\infty e^{-k(z+\zeta)} \frac{k}{R} J_0'(kR) (y-\eta) \frac{k+K}{k-K} dk \right. \\
&\quad \left. , \int_0^\infty -k e^{-k(z+\zeta)} J_0(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \right) \cdot \vec{N}(q) \tag{A.8}
\end{aligned}$$

Derivando em relação a n_p ,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 G_1}{\partial n_p \partial n_q} &= \frac{\partial}{\partial n_p} \left[\left(\int_0^\infty e^{-k(z+\zeta)} \frac{k}{R} J'_0(kR) (x - \xi) \frac{k+K}{k-K} dk, \right. \right. \\
&\quad \left. \int_0^\infty e^{-k(z+\zeta)} \frac{k}{R} J'_0(kR) (y - \eta) \frac{k+K}{k-K} dk, \int_0^\infty -k e^{-k(z+\zeta)} J_0(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \right) \\
&\quad \cdot \left(-\frac{\partial F}{\partial x}, -\frac{\partial F}{\partial y}, 1 \right) \Big] \\
&= \frac{\partial}{\partial n_p} \left(\int_0^\infty e^{-k(z+\zeta)} \frac{k}{R} J'_0(kR) (x - \xi) \frac{k+K}{k-K} dk \left(-\frac{\partial F}{\partial x} \right) \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\infty e^{-k(z+\zeta)} \frac{k}{R} J'_0(kR) (y - \eta) \frac{k+K}{k-K} dk \left(-\frac{\partial F}{\partial y} \right) + \int_0^\infty -k e^{-k(z+\zeta)} J_0(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial n_p} W(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial \xi} W, \frac{\partial}{\partial \eta} W, \frac{\partial}{\partial \zeta} W \right) \cdot \left(-\frac{\partial F}{\partial \xi}, -\frac{\partial F}{\partial \eta}, 1 \right) \tag{A.9}
\end{aligned}$$

A.3 Derivada em relação a n_q

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\infty e^{-k(z+\zeta)} J_0(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \right) &= \int_0^\infty e^{-k(z+\zeta)} \frac{\partial}{\partial x} J_0(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \\
&= \int_0^\infty e^{-k(z+\zeta)} \frac{k}{R} J'_0(kR) (x - \xi) \frac{k+K}{k-K} dk \tag{A.10}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\int_0^\infty e^{-k(z+\zeta)} J_0(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \right) = \int_0^\infty e^{-k(z+\zeta)} \frac{k}{R} J'_0(kR) (y - \eta) \frac{k+K}{k-K} dk \tag{A.11}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} \left(\int_0^\infty e^{-k(z+\zeta)} J_0(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \right) &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial z} e^{-k(z+\zeta)} J_0(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \\
&= \int_0^\infty -k e^{-k(z+\zeta)} J_0(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \tag{A.12}
\end{aligned}$$

A.4 Derivadas em relação a n_p

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial \xi} &= \int_0^\infty e^{-k(z+\zeta)} k \left[\frac{(x-\xi)^2}{R^3} J_0'(kR) - \frac{1}{R} J_0'(kR) + \frac{1}{R^2} (x-\xi)^2 (-k) J_0''(kR) \right] \frac{k+K}{k-K} dk \left(-\frac{\partial F}{\partial x} \right) \\
&+ \int_0^\infty e^{-k(z+\zeta)} k \left[\frac{(x-\xi)}{R^3} (y-\eta) J_0'(kR) + \frac{1}{R^2} (y-\eta) (-k) (x-\xi) J_0''(kR) \right] \frac{k+K}{k-K} dk \left(-\frac{\partial F}{\partial y} \right) \\
&+ \int_0^\infty -k e^{-k(z+\zeta)} (-k) \frac{x-\xi}{R} J_0'(kR) \frac{k+K}{k-K} dk
\end{aligned} \tag{A.13}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial \xi} &= \int_0^\infty e^{-k(z+\zeta)} \frac{k}{R} \left[\frac{(x-\xi)^2}{R^2} J_0'(kR) - J_0'(kR) - \frac{k}{R} (x-\xi)^2 J_0''(kR) \right] \frac{k+K}{k-K} dk \left(-\frac{\partial F}{\partial x} \right) \\
&+ \int_0^\infty e^{-k(z+\zeta)} \frac{k}{R^2} (x-\xi) (y-\eta) \left[\frac{1}{R} J_0'(kR) - k J_0''(kR) \right] \frac{k+K}{k-K} dk \left(-\frac{\partial F}{\partial y} \right) \\
&+ \int_0^\infty e^{-k(z+\zeta)} k^2 \frac{x-\xi}{R} J_0'(kR) \frac{k+K}{k-K} dk
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial \eta} &= \int_0^\infty e^{-k(z+\zeta)} \frac{k}{R^2} (x-\xi) (y-\eta) \left[\frac{1}{R} J_0'(kR) - k J_0''(kR) \right] \frac{k+K}{k-K} dk \left(-\frac{\partial F}{\partial x} \right) \\
&+ \int_0^\infty e^{-k(z+\zeta)} \frac{k}{R} \left[\frac{(y-\eta)^2}{R^2} J_0'(kR) - J_0'(kR) - \frac{k}{R} (y-\eta)^2 J_0''(kR) \right] \frac{k+K}{k-K} dk \left(-\frac{\partial F}{\partial y} \right) \\
&+ \int_0^\infty e^{-k(z+\zeta)} k^2 \frac{y-\eta}{R} J_0'(kR) \frac{k+K}{k-K} dk
\end{aligned} \tag{A.15}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial \zeta} &= \int_0^\infty -e^{-k(z+\zeta)} \frac{k^2}{R} (x-\xi) J_0'(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \left(-\frac{\partial F}{\partial x} \right) \\
&+ \int_0^\infty -e^{-k(z+\zeta)} \frac{k^2}{R} (y-\eta) J_0'(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \left(-\frac{\partial F}{\partial y} \right) \\
&+ \int_0^\infty e^{-k(z+\zeta)} k^2 J_0(kR) \frac{k+K}{k-K} dk
\end{aligned} \tag{A.16}$$

A.5 Derivadas parciais de W_0 em relação a ϵ

$$\begin{aligned}\frac{\partial W_0}{\partial \epsilon} &= \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left[\int_0^\infty \frac{k+K}{k-K} k^2 [-k e^{-k(\epsilon(f(x,y)+f(\xi,\eta))+b)} J_0(kR) dk] \right] \\ &= -(f(x,y) + f(\xi,\eta)) \int_0^\infty \frac{k+K}{k-K} e^{-k(\epsilon(f(x,y)+f(\xi,\eta))+b)} k^3 J_0(kR) dk \quad (\text{A.17})\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 W_0}{\partial \epsilon^2} = (f(x,y) + f(\xi,\eta))^2 \int_0^\infty \frac{k+K}{k-K} e^{-k(\epsilon(f(x,y)+f(\xi,\eta))+b)} k^4 J_0(kR) dk \quad (\text{A.18})$$

A.6 Derivadas parciais de W_1 em relação a ϵ

$$\begin{aligned}\frac{\partial W_1}{\partial \epsilon} &= -[(f_1 - f_1^0) \cos \theta + (f_2 - f_2^0) \sin \theta] K^3 (f(x,y) + f(\xi,\eta)) \\ &\times \int_0^\infty \frac{k+K}{k-K} k^3 e^{-k(f(x,y)+f(\xi,\eta)+b)} J_0'(kR) dk \quad (\text{A.19})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 W_1}{\partial \epsilon^2} &= [(f_1 - f_1^0) \cos \theta + (f_2 - f_2^0) \sin \theta] K^3 (f(x,y) + f(\xi,\eta))^2 \\ &\times \int_0^\infty \frac{k+K}{k-K} k^4 e^{-k(f(x,y)+f(\xi,\eta)+b)} J_0'(kR) dk \quad (\text{A.20})\end{aligned}$$

A.7 Derivadas parciais de W_2 em relação a ϵ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W_2}{\partial \epsilon} &= - \left[\frac{-\sin^2 \theta}{R} f_1 f_1^0 - \frac{\cos^2 \theta}{R} f_2 f_2^0 + (f_2 f_1^0 + f_1 f_2^0) \frac{\sin(2\theta)}{2R} \right] (f(x, y + f(\xi, \eta))) \\
&\times \int_0^\infty e^{-k(\epsilon(f(x,y)+f(\xi,\eta))+b)} \frac{k^3}{R} J_0'(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \\
&- \left[-\cos^2 \theta f_1 f_1^0 - \sin^2 \theta f_2 f_2^0 + (f_2 f_1^0 + f_1 f_2^0) \frac{\sin(2\theta)}{2R} \right] (f(x, y) + f(\xi, \eta)) \\
&\times \int_0^\infty e^{-k(\epsilon(f(x,y)+f(\xi,\eta))+b)} \frac{k^4}{R} J_0''(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \tag{A.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 W_2}{\partial \epsilon^2} &= \left[\frac{-\sin^2 \theta}{R} f_1 f_1^0 - \frac{\cos^2 \theta}{R} f_2 f_2^0 + (f_2 f_1^0 + f_1 f_2^0) \frac{\sin(2\theta)}{2R} \right] (f(x, y + f(\xi, \eta)))^2 \\
&\times \int_0^\infty e^{-k(\epsilon(f(x,y)+f(\xi,\eta))+b)} \frac{k^4}{R} J_0'(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \\
&+ \left[-\cos^2 \theta f_1 f_1^0 - \sin^2 \theta f_2 f_2^0 + (f_2 f_1^0 + f_1 f_2^0) \frac{\sin(2\theta)}{2R} \right] (f(x, y) + f(\xi, \eta))^2 \\
&\times \int_0^\infty e^{-k(\epsilon(f(x,y)+f(\xi,\eta))+b)} \frac{k^5}{R} J_0''(kR) \frac{k+K}{k-K} dk \tag{A.22}
\end{aligned}$$

Apêndice B EXPANSÕES EM SÉRIE DE TAYLOR

B.1 Função $(X^2 + Y^2)^{-j/2}$, para $j \in \{1, 3, 5\}$

$$\begin{aligned}
(X^2 + Y^2)^{-1/2} &= (X^2 + K^2(\epsilon^2(f(x, y) + f(\xi, \eta))^2 + 2\epsilon(f(x, y) + f(\xi, \eta))b + b^2))^{-1/2} \\
&= (X^2 + K^2)^{-1/2} + \epsilon \left[\frac{\partial}{\partial \epsilon} (X^2 + Y^2)^{-1/2} \right] \\
&\quad + \frac{\epsilon^2}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \epsilon^2} (X^2 + Y^2)^{-1/2} \right] \Big|_{\epsilon=0} \tag{B.1}
\end{aligned}$$

Calculando cada derivada,

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial}{\partial \epsilon} (X^2 + Y^2)^{-1/2} \right] \Big|_{\epsilon=0} &= \left\{ \frac{-1}{2} (X^2 + K^2(\epsilon^2(f(x, y) + f(\xi, \eta))^2 + 2\epsilon(f(x, y) + f(\xi, \eta))b + b^2))^{-3/2} \right. \\
&\quad \times \left. [2K^2\epsilon(f(x, y) + f(\xi, \eta))^2 + 2K^2(f(x, y) + f(\xi, \eta))b] \right\} \Big|_{\epsilon=0} \\
&= \frac{-1}{2} (X^2 + K^2b^2)^{-3/2} 2K^2(f(x, y) + f(\xi, \eta))b \\
&= -(X^2 + K^2b^2)^{-3/2} K^2(f(x, y) + f(\xi, \eta))b \tag{B.2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial^2}{\partial \epsilon^2} (X^2 + Y^2)^{-1/2} \right] \Big|_{\epsilon=0} &= \left\{ \frac{3}{4} (X^2 + K^2(\epsilon^2(f(x, y) + f(\xi, \eta))^2 + 2\epsilon(f(x, y) + f(\xi, \eta))b + b^2))^{-5/2} \right. \\
&\quad \times K^4 [2\epsilon(f(x, y) + f(\xi, \eta))^2 + 2(f(x, y) + f(\xi, \eta))b]^2 \\
&\quad - \frac{1}{2} (X^2 + K^2(\epsilon^2(f(x, y) + f(\xi, \eta))^2 + 2\epsilon(f(x, y) + f(\xi, \eta))b + b^2))^{-3/2} \\
&\quad \times \left. [2K^2(f(x, y) + f(\xi, \eta))^2] \right\} \Big|_{\epsilon=0} \\
&= \frac{3}{4} (X^2 + K^2b^2)^{-5/2} K^4 [2(f(x, y) + f(\xi, \eta))b]^2 \\
&\quad - \frac{1}{2} (X^2 + K^2b^2)^{-3/2} K^2 2(f(x, y) + f(\xi, \eta))^2 \\
&= 3(X^2 + K^2b^2)^{-5/2} K^4 (f(x, y) + f(\xi, \eta))^2 b^2 \\
&\quad - (X^2 + K^2b^2)^{-3/2} K^2 (f(x, y) + f(\xi, \eta))^2 \tag{B.3}
\end{aligned}$$

Substituindo (B.2) e (B.3) em (B.1), temos

$$\begin{aligned}
(X^2 + Y^2)^{-1/2} &= (X^2 + Y^2)^{-1/2} + \epsilon[-(X^2 + K^2b^2)^{-3/2}K^2(f(x, y) + f(\xi, \eta))b] \\
&+ \frac{\epsilon^2}{2} [3(X^2 + K^2b^2)^{-5/2}K^2b^2(f(x, y) + f(\xi, \eta))^2 \\
&- (X^2 + K^2b^2)^{-3/2}K^2(f(x, y) + f(\xi, \eta))^2] \tag{B.4}
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
(X^2 + Y^2)^{-3/2} &= (X^2 + Y^2)^{-3/2} + \epsilon[-3(X^2 + K^2b^2)^{-5/2}K^2(f(x, y) + f(\xi, \eta))b] \\
&+ \frac{\epsilon^2}{2} [15(X^2 + K^2b^2)^{-7/2}K^4b^2(f(x, y) + f(\xi, \eta))^2 \\
&- 3(X^2 + K^2b^2)^{-5/2}K^2(f(x, y) + f(\xi, \eta))^2], \tag{B.5}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(X^2 + Y^2)^{-5/2} &= (X^2 + Y^2)^{-5/2} + \epsilon[-5(X^2 + K^2b^2)^{-7/2}K^2(f(x, y) + f(\xi, \eta))b] \\
&+ \frac{\epsilon^2}{2} [35(X^2 + K^2b^2)^{-5/2}K^4b^2(f(x, y) + f(\xi, \eta))^2 \\
&- 5(X^2 + K^2b^2)^{-7/2}K^2(f(x, y) + f(\xi, \eta))^2] \tag{B.6}
\end{aligned}$$

B.2 Expansões das Integrais

$$\begin{aligned}
\int_0^{K(\epsilon(f(x,y)+f(\xi,\eta))+b)} e^t(X^2 + t^2)^{-1/2} dt &= \int_0^{Kb} e^t(X^2 + t^2)^{-1/2} dt \\
&+ \frac{\partial}{\partial \epsilon} \int_0^{K(\epsilon(f(x,y)+f(\xi,\eta))+b)} e^t(X^2 + t^2)^{-1/2} dt \Big|_{\epsilon=0} \epsilon \\
&+ \frac{\partial^2}{\partial \epsilon^2} \int_0^{K(\epsilon(f(x,y)+f(\xi,\eta))+b)} e^t(X^2 + t^2)^{-1/2} dt \Big|_{\epsilon=0} \frac{\epsilon^2}{2} \\
&= \int_0^{Kb} e^t(X^2 + t^2)^{-1/2} dt \\
&+ e^{Kb}(X^2 + K^2b^2)^{-1/2}K(f(x, y) + f(\xi, \eta))\epsilon \\
&+ e^{Kb}K^2(f(x, y) + f(\xi, \eta))^2[(X^2 + K^2b^2)^{-1/2} \\
&- Kb(X^2 + K^2b^2)^{-3/2}]\frac{\epsilon^2}{2} \tag{B.7}
\end{aligned}$$

Bibliografia

- [1] COX, S.J.; COOKER, M.J. *The motion of a rigid body impelled by sea-wave impact*. Applied Ocean Research 21, 113-125, 1999.
- [2] ERDÉLYI, A.; MAGNUS, W.; OBERHETTINGER, F. G.; TRICOMI, F.G. *Higher Transcendental Functions*. Bateman Manuscript Project, California Institute of Technology, **2**, 1954, 26, eq.33, 101, eq. 7.15(31).
- [3] FARINA, L. *Ondas Ocênicas de Superfície*. Notas em Matemática Aplicada, SBMAC, **25**, 2006.
- [4] FARINA, L.; MARTIN, P. A.. *Scattering of water waves by a submerged disc using a hypersingular integral equation*. Applied Ocean Research 20, 121-134, 1998.
- [5] GUENTHER, R. B.; LEE, J.W. *Partial Differential Equations of Mathematical Physics and Integral Equations*. New York: Dover Publications
- [6] GUIDERA, J.T.; LARDNER, R.W. *Penny-shaped cracks*. J.Elast., **5**, 59-73, 1975.
- [7] HADAMARD, J. *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*. New York: Dover Publications, 1952.
- [8] JANSSON, P-A *Acoustic scattering from a rough circular disk*. J. Acoust. Soc. Am. **99**(2),672-681, 1996.
- [9] JIN, W-I; SONG, JIAN; G., SHUN-FENG; LU, Yong *Evaluation of damage to offshore platform structures due to collision of large barge*. Engineering Structures 27, 1317-1326, 2005.
- [10] KRENK, S. *A circular crack under asymmetric loads and some related integral equations*. J. Appl. Mech., **46**, 821-826, 1979.

- [11] KRENK, S. *Polynomial solutions to integral equations*. Doctoral Thesis, Riso National Laboratory, Denmark, 1981.
- [12] KRENK, S. *Some integral relations of Hankel transform type and applications to elasticity theory*. *Integral Eqns Operator Theory*, **5**, 548-561, 1982.
- [13] KROMMER, A. R.; UEBERHUBER, C. W. *Computational Integration*. SIAM, 1998, 15-23.
- [14] LAMB, H. *Hydrodynamics*. Cambridge: University Press, 6a ed., 1932.
- [15] LIFANOV, I. K.; POLTAVSKII, L.N.; VAINIKKO, G.M., *Hypersingular Integrals Equations and their Applications*. Series Editor: A.D. Polyanin, Chapman and Hall/CRC, 2004, p. 1-4, 9-16.
- [16] LIU, Y.; Li, YU-CHENG; TENG, BIN *Wave interaction with a perforated wall breakwater with a submerged horizontal porous plate*. *Ocean Engineering* **34**, 2364-2373, 2007.
- [17] MANDAL, B.N. *Mathematical Techniques for Water Waves*. Computational Mechanics Publications, 1997.
- [18] MARTIN, P.A. *Mapping flat cracks onto penny-shaped cracks, with application to somewhat circular tensile cracks*. *Quart. Appl. Math.*, **54**, 663-675, 1996.
- [19] MARTIN, P.A. *On potential flow past wrinkled disc*. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A - Mathematical Physical and Engineering*, **454**, 2209-2221, 1998.
- [20] MARTIN, P.A. *On the added mass of rippled discs* University of Manchester, 1998.

- [21] MARTIN, P.A.; FARINA, L.; *Radiation of water waves by a heaving submerged horizontal disc*. J. Fluid Mech., **337**, 365-379, 1997.
- [22] MC IVER, P. *Complex resonances in the water-wave problem for a floating structure*. J. Fluid Mechanics, **536**, 365-443, 2005.
- [23] MUSKHELISHVILI, N.-I. *Singular Integral Equations*. 2a ed., Moscow, 1946.
- [24] NEWMAN, J.N. *Approximations for the Bessel and Struve Functions*. Mathematics of Computation, **43**, 551-556, 1994.
- [25] NEWMAN, J.N. *Double-precision evaluation of the oscillatory source potential*. Journal of Ship Research, **28**, 151-154, 1984.
- [26] NEWMAN, J.N. *Marine Hydrodynamics*. MIT Press, 1977.
- [27] STOKER, J.J. *Water Waves - The Mathematical Theory with Applications*. Pure and Applied Mathematics, v.4, New York: New York University, 1957.
- [28] WIKIPEDIA. Disponível em
< [http : //en.wikipedia.org/wiki/Breakwater_\(Structure\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Breakwater_(Structure)) >. Acesso em: 16 de nov. de 2008.
- [29] WIKIPEDIA. Disponível em
< [http : //en.wikipedia.org/wiki/Mars_Tension_-_leg_Plataform](http://en.wikipedia.org/wiki/Mars_Tension_-_leg_Plataform) >. Acesso em: 16 de nov. de 2008.
- [30] WIKIPEDIA. Disponível em
< [http : //en.wikipedia.org/wiki/Sea_wall](http://en.wikipedia.org/wiki/Sea_wall) >. Acesso em: 16 de nov. de 2008.