

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA**

RICARDO DE SOUZA SANTOS

**TECNOLOGIAS DIGITAIS NA SALA DE AULA PARA
APRENDIZAGEM DE CONCEITOS DE GEOMETRIA
ANALÍTICA: MANIPULAÇÕES NO SOFTWARE GRAFEQ**

**PORTO ALEGRE
2008**

RICARDO DE SOUZA SANTOS

**TECNOLOGIAS DIGITAIS NA SALA DE AULA PARA
APRENDIZAGEM DE CONCEITOS DE GEOMETRIA
ANALÍTICA: MANIPULAÇÕES NO SOFTWARE GRAFEQ**

Dissertação realizada sob a orientação do Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso, apresentada ao Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

PORTO ALEGRE
2008

AGRADECIMENTOS

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul, por mais uma oportunidade oferecida.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação, pelos exemplos.

Aos colegas no mestrado, em especial os que me acompanham desde a graduação.

Aos colegas das escolas onde leciono, principalmente aos da área da Matemática, por servirem de ouvintes para os meus anseios, frustrações e reflexões.

Aos meus alunos, por me causarem inquietações acerca da Educação Matemática.

Aos meus familiares e amigos em geral, pela compreensão das excessivas faltas – no sentido mais geral que a palavra reserva.

Ao Arthur, que nasceu durante o mestrado, trazendo felicidade para o seu pai em momentos de fraqueza e servindo como exemplo próximo de desenvolvimento e interação com o meio ao seu redor.

À Cristina, pelo apoio em todos os momentos, pela paciência e, principalmente, pela companhia.

Ao meu orientador, Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso, responsável direto pela minha formação (acadêmica, profissional e humanitária) desde a graduação e, sem dúvida, pelo exemplo de profissional competente, sensível e feliz com o seu trabalho.

RESUMO

Este estudo aborda a utilização de recursos disponibilizados pelas tecnologias digitais no ensino-aprendizagem de Matemática. Mais especificamente, o objeto de estudo é a introdução do software GrafEq no ensino de Geometria Analítica no Ensino Médio da Escola Básica, com reflexões acerca das contribuições identificadas. Para verificar o alcance destas contribuições, foi implantada uma sequência de atividades em duas turmas do segundo ano do nível médio em uma escola da rede privada de Porto Alegre. A análise dos resultados foi obtida de forma empírica utilizando-se, como método, o Estudo de Caso. Para isso, o estudo foi fundamentado pelas teorias de James J. Kaput sobre introdução das tecnologias digitais na Educação Matemática. Os resultados encontrados apontam para o uso de tecnologias digitais como uma possível contribuição no ensino-aprendizagem de Geometria Analítica, a qual se constitui em um importante tópico de Matemática do Ensino Médio. Como elementos integrantes dessa dissertação foram elaborados um tutorial para uso do programa, na forma de páginas para web (linguagem html), e um conjunto de atividades envolvendo tópicos de Geometria Analítica e uso do software.

Palavras chave: Educação Matemática. Geometria Analítica. Tecnologias Digitais. Software Educacional. GrafEq.

ABSTRACT

This study approaches the use of available resources by digital technologies in teaching-learning Mathematics. Specifically, the object of study is the introduction of the software GrafEq in teaching Analytical Geometry in High School in Secondary Education, with considerations about the identified contributions. To check the reach of these contributions, a sequence of activities was introduced in two Second Grade classes from Secondary Education in a private school in Porto Alegre. The analysis of the results was obtained by empirical form when the Case Study was used as method. For that, the study was substantiated by James J. Kaput theories on introduction of the digital technologies in the Mathematical Education. The considered results point to the use of digital technologies as a possible contribution in the teaching-learning of Analytical Geometry, which constitute an important topic of Mathematics in Secondary Education. As integral elements of that dissertation were elaborated a tutorial for using the program, in the form of web pages (html language), and a group of activities involving topics of Analytical Geometry and use of the software.

Words key: Mathematical Education. Analytical Geometry. Digital Technologies. Education Software. GrafEq.

RESUMEN

Este estudio aborda la utilización de recursos disponibilizados por las tecnologías digitales en la enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Más específicamente, el objeto de estudio es la introducción del software GrafEq en la enseñanza de la Geometría Analítica en la Enseñanza Secundaria de la Escuela Básica, con reflexiones acerca de las contribuciones identificadas. Para verificar el alcance de estas contribuciones, fue implantada una secuencia de actividades en dos grupos del cuarto año de la enseñanza secundaria en una escuela de la red privada de Porto Alegre. El análisis de los resultados fue obtenido de forma empírica utilizándose, como método, el Estudio de Caso. Para ello, el estudio fue fundamentado por las teorías de James J. Kaput sobre introducción de las tecnologías digitales en la Educación Matemática. Los resultados encontrados apuntan para el uso de tecnologías digitales como una posible contribución en la enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica, la cual se constituye en un importante tópico de la Matemática de la enseñanza secundaria. Como elementos integrantes de esa disertación fueron elaborados una tutoría para el uso del programa, en forma de páginas web (lenguaje html), y un conjunto de actividades envolviendo tópicos de Geometría Analítica y uso del software.

Palabras clave: Educación Matemática. Geometría Analítica. Tecnologías Digitales. Software Educativo. GrafEq.

LISTA DE FIGURAS

Número	Nome	Página
Figura 01 -	Interface do GrafEq	16
Figura 02 -	Reta x	19
Figura 03 -	Retas verticais	20
Figura 04 -	Ponto G (Demonstração Sintética)	20
Figura 05 -	Ponto G (Demonstração Analítica)	21
Figura 06 -	Operações físicas e mentais	28
Figura 07 -	Sistema de Notação X Cognições Associadas	30
Figura 08 -	Sistemas de Notação	31
Figura 09 -	Sistema resposta	32
Figura 10 -	Transferências entre sistemas de notação	32
Figura 11 -	Contribuição Computacional	33
Figura 12 -	Processos Mentais/ Tall	40
Figura 13 -	Atividade 1/ DAG	49
Figura 14 -	Atividade 2/ DAG	50
Figura 15 -	Atividade 3/ DAG (imagem 1 do vídeo)	51
Figura 16 -	Atividade 3/ DAG (imagem 4 do vídeo)	52
Figura 17 -	Atividade4/ DAG: Sol e mar	53
Figura 18 -	Carrinho/ DAG	53
Figura 19 -	Atividade 7/ DAG - Lula Molusco	55
Figura 20 -	Atividades iniciais/ DAL	57
Figura 21 -	Atividade 3/ DAL	58
Figura 22 -	Atividade 4/ DAL – cruz	59
Figura 23 -	Atividade 4/ DAL – casa	60
Figura 24 -	$y = \sin x < 0$	60
Figura 25 -	Atividade 4/ DAL - sol e mar	61
Figura 26 -	Atividade 4/ DAL - carro	61
Figura 27 -	Atividade 5/ DAL	63
Figura 28 -	Atividade 1/ DEB	65
Figura 29 -	Atividade 1/ DEB	66
Figura 30 -	Atividade 3/ DEB	66
Figura 31 -	Atividade 4/ DEB - casa	67
Figura 32 -	Atividade 4/ DEB - sol e mar	68
Figura 33 -	Atividade 4/ DEB - carro (imagem 11)	71
Figura 34 -	Atividade 4/ PAC - sol e mar	74
Figura 35 -	Atividade 4/ PAC - carro	74
Figura 36 -	Atividade 5/ PAC	75
Figura 37 -	Atividade 6/ PAC - relações	76
Figura 38 -	Atividade 6/ PAC - arquivo salvo	77
Figura 39 -	Atividade 6/ PAC - vídeo (imagem 1)	77
Figura 40 -	Atividade 6/ PAC - vídeo (imagem 2)	78
Figura 41 -	Atividade 6/ PAC - vídeo (imagem 3)	78
Figura 42 -	Atividade 6/ PAC - vídeo (imagem 4)	79
Figura 43 -	Atividade 6/ PAC - vídeo (imagem 5)	79
Figura 44 -	Atividade 6/ PAC - vídeo (imagem 6)	80
Figura 45 -	Atividade 6/ PAC - vídeo (imagem 7)	80
Figura 46 -	Atividade 8/ PAC	82
Figura 47 -	Atividade 8/ PAC - construção 1	82

Figura 48 - Atividade 8/ PAC - construção 2	83
Figura 49 - Atividade 9/ PAC - relação	84
Figura 50 - Atividade 9/ PAC - gráfico	84
Figura 51 - Atividade 1/ GIU - construção	86
Figura 52 - Atividade 3/ GIU - vídeo (imagem 1)	87
Figura 53 - Atividade 3/ GIU - vídeo (imagem 4)	88
Figura 54 - Atividade 3/ GIU - vídeo (imagem 5)	88
Figura 55 - Atividade 4/ GIU - casa	89
Figura 56 - Atividade 7/ GIU	90
Figura 57 - Atividade 1/ MAU	92
Figura 58 - Atividade 2/ MAU - retângulos	92
Figura 59 - Atividade 2/ MAU - triângulo	93
Figura 60 - Atividade 3/ MAU	93
Figura 61 - Atividade 4/ MAU - cruz	94
Figura 62 - Atividade 4/ MAU - sol e mar	94
Figura 63 - Atividade 4/ MAU - carro	95
Figura 64 - Atividade 4/ MAU - casa	95
Figura 65 - Atividade 4/ MAU - casa/telhado	96
Figura 66 - Atividade 5/ MAU - disco que não invade o 1º quadrante	97
Figura 67 - Atividade 5/ MAU - disco X retas	98
Figura 68 - Atividade 6/ MAU	98
Figura 69 - Atividade 1/ AKE	101
Figura 70 - Atividade 2/ AKE	102
Figura 71 - Atividade 7/ AKE - manipulações trigonométricas	103
Figura 72 - Atividade 7/ AKE - Emotion (relações)	104
Figura 73 - Atividade 4/ PED - carro	106
Figura 74 - Atividade 1 e 2/ JEA	108
Figura 75 - Atividade 3/ JEA - imagem 1	109
Figura 76 - Atividade 3/ JEA - imagem 2	109
Figura 77 - Atividade 7/ JEA - figura original	110
Figura 78 - Atividade 7/ JEA - réplica	110
Figura 79 - Atividade 1/ GAB	111
Figura 80 - Atividade 2/ GAB	112
Figura 81 - Atividade 1/ JUL	114
Figura 82 - Atividade 4/ JUL - casa	114
Figura 83 - Atividade 4/ BON - casa	116
Figura 84 - Guia de Estudos para o GrafEq/ tela inicial	134
Figura 85 - Guia de Estudos para o GrafEq/ navegação	134
Figura 86 - GeoGebra/ interface	135

LISTA DE QUADROS

Número	Nome	Página
Quadro 01 -	Hipótese e tese para a proposição 1	19
Quadro 02 -	Evolução: Geometria Analítica/ <i>Computação</i>	25
Quadro 03 -	Mudanças no perfil do professor	37
Quadro 04 -	Exemplos de atividades da fase de coleta de dados	44
Quadro 05 -	Estudantes observados (siglas para identificação)	47
Quadro 06 -	Atividade 3/ DAG (imagens 2 e 3 do vídeo)	51
Quadro 07 -	Atividade 3/ DAG (imagem 5 e 6 do vídeo)	52
Quadro 08 -	Atividade 4/ DAL - carro (imagens da construção)	61
Quadro 09 -	Atividade 4/ DAL - carro (imagens da construção 2)	62
Quadro 10 -	Atividade 4/ DAL - carro (imagens da construção 3)	63
Quadro 11 -	Atividade 4/ DEB - carro (imagens 1 e 2)	68
Quadro 12 -	Atividade 4/ DEB - carro (imagens 3 e 4)	69
Quadro 13 -	Atividade 4/ DEB - carro (imagens 5 e 6)	69
Quadro 14 -	Atividade 4/ DEB - carro (imagens 7 e 8)	70
Quadro 15 -	Atividade 4/ DEB - carro (imagens 9 e 10)	70
Quadro 16 -	Atividade 2/ PAC	73
Quadro 17 -	Atividade 7/ PAC	81
Quadro 18 -	Atividade 1/ GIU - relações	86
Quadro 19 -	Atividade 3/ GIU - vídeo (imagens 2 e 3)	87
Quadro 20 -	Diálogo: Pesquisador e MAU	96
Quadro 21 -	Atividade 7/ MAU - Bandeira da Grécia	99
Quadro 22 -	Atividade 1/ AKE - mensagem	101
Quadro 23 -	Atividade 7/ AKE - Emotion (original e réplica)	104
Quadro 24 -	Atividade livre/ JEA - mensagem	110
Quadro 25 -	Contribuições da proposta	118
Quadro 26 -	Respostas frequentes	120
Quadro 27 -	Coleta de dados/ Atividade 1	130
Quadro 28 -	Coleta de dados/ Atividade 2	130
Quadro 29 -	Coleta de dados/ Atividade 3	131
Quadro 30 -	Coleta de dados/ Atividade 4	131
Quadro 31 -	Coleta de dados/ Atividade 8	133

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	10
1.1. Justificativa da Pesquisa	10
1.2. Objetivos – Questão da Pesquisa	14
2 BASES TEÓRICAS	18
2.1. Geometria Analítica	18
2.2. Tecnologias Digitais e Educação Matemática	26
3 MÉTODO PARA COLETA E INTERPRETAÇÃO DOS DADOS	42
3.1. Estudo de Caso	42
3.2. Caracterização da Amostra	43
3.2.1. Delineamento do estudo	43
3.2.1. Local de realização do estudo	43
3.2.3. População em estudo	43
3.2.4. Coleta de dados	43
3.2.5. Considerações éticas	44
3.3. Material Utilizado	44
4 ANÁLISE DOS DADOS	46
4.1. Descrição	46
4.2. Análise das produções individuais dos estudantes	48
4.3. Análise geral das produções: principais contribuições	118
5 CONCLUSÃO	121
6 REFERÊNCIAS.....	125
7 APÊNDICES.....	130
7.1. APÊNDICE A: Atividades utilizadas na coleta de dados	130
7.2. APÊNDICE B: Amostra do Tutorial - Guia de Estudos para o GrafEq	134
7.3. APÊNDICE C: Interface do GeoGebra	135
7.4. APÊNDICE D: Guia de Estudos para o GrafEq (CD)	136

1 INTRODUÇÃO

1.1. Justificativa da Pesquisa

A Geometria é parte importante dos currículos de Matemática da Educação Básica, pois pode desenvolver no estudante capacidades como compreensão, espírito de investigação, representação e resolução de problemas - habilidades contempladas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs). Esta matéria se desdobra em vários ramos, mas, para efeito deste estudo, trataremos da Geometria Analítica, que tem como função tratar algebricamente as propriedades e os elementos geométricos. Neste âmbito, o estudante pode perceber outros modelos que explicam o espaço de forma mais elaborada com linguagens e raciocínios diferentes dos utilizados na geometria euclidiana.

Segundo EVES (1969), a base para a geometria analítica moderna foi concebida no século XVII, simultaneamente, por Descartes e Fermat, sendo que a diferença entre os dois estudos é que o primeiro é um ramo da geometria e no segundo, ao menos no início, temos um método geométrico. Os estudos de Descartes foram importantes por mostrar uma outra forma de pensar Matemática e contribuir para o desenvolvimento histórico do conhecimento, ou seja, mesmo que alguns historiadores defendam que outros matemáticos já haviam empregado coordenadas para representar pontos e equações relacionadas a curvas, a evolução do simbolismo algébrico fazendo equivalências com situações geométricas no plano cartesiano e a forma atual da geometria analítica se deve, ao mesmo tempo, a Descartes e Pierre de Fermat – origina-se o que foi chamado cartesianismo.

Deixando de lado tais diferenças fica a certeza de que a geometria analítica ocupa lugar de destaque como ramo da matemática por um motivo simples – a relação Álgebra-Geometria. Problemas geométricos podem ser resolvidos por métodos algébricos, muitas vezes simples, ou propriedades algébricas podem ser facilmente verificadas geometricamente. Em suma, ela estabelece uma equivalência entre enunciados geométricos e proposições relativas a equações ou desigualdades algébricas.

Também é preciso registrar que a importância da geometria analítica não está apenas em estudos avançados da mesma. Já no Ensino Médio tem se abordado

conceitos de grande valor como as igualdades e desigualdades lineares, base do estudo para um ramo das matemáticas aplicadas – a programação linear – com aplicações na Economia e para a Teoria dos Jogos.

O que a geometria analítica propõe é vincular a representação geométrica a uma representação algébrica equivalente. Esta propriedade de permutar entre a geometria e a álgebra já aparece em meio aos conceitos tratados no Ensino Médio – os PCNs citam representações no plano cartesiano, intersecções e posições relativas de figuras como retas e circunferências. Desde a simples localização de pontos no plano cartesiano determinando coordenadas até o estudo de retas e circunferências, através de suas respectivas equações, o estudante, ao estudar geometria analítica, lida conjuntamente com as representações algébrica e geométrica.

Em termos de aprendizado o estudante aumenta sua capacidade de se expressar sobre problemas geométricos (ou problemas que se utilizam da geometria) através de uma linguagem matemática (álgebra) assim como podem valer-se da geometria para comprovar resultados algébricos vistos anteriormente ou que possam surgir na sequência de seus estudos. Este fato representa, ao estudante, uma percepção de que um problema matemático pode ser abordado de diversas maneiras. Também ressaltamos que a Geometria Analítica, às vezes chamada de método, não consiste apenas em um conjunto de fórmulas ou “receitas matemáticas”, mas consiste em um sistema de raciocínios e deduções geométricos ligados à álgebra, devendo assim, esta ideia estar clara aos estudantes. Segundo os PCNs+ (2006, p. 124), “... mais importante do que memorizar diferentes equações para um mesmo ente geométrico, é necessário investir para garantir a compreensão do que a geometria analítica propõe.”

Além disso, a Geometria Analítica alcança outros objetivos da Matemática no Ensino Médio para geração de aprendizado significativo como: compreensão de conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas e aplicação de conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades contemporâneas. Este último objetivo aliado à habilidade de interpretar ou aplicar modelos analíticos, envolvendo equações algébricas, inequações ou sistemas lineares, favorece a compreensão de fenômenos naturais ou processos de produção tecnológica. Há também o desenvolvimento e aprimoramento de outras competências como leitura, interpretação e utilização de representações matemáticas e transcrição de mensagens matemáticas da linguagem corrente para a linguagem simbólica (Representação e Comunicação). Fazer e validar

conjecturas, recorrendo a modelos e esboços (Investigação e Compreensão), desenvolve a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção do real, isto é, aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial, em outras áreas do conhecimento.

Os PCNs+, em relação a este tema, listam uma série de conteúdos e habilidades a serem desenvolvidos:

- representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras;
- Interpretar e fazer uso de modelos para a resolução de problemas geométricos;
- Reconhecer que uma mesma situação pode ser tratada com diferentes instrumentais matemáticos, de acordo com suas características;
- Associar situações e problemas geométricos a suas correspondentes formas algébricas e representações gráficas e vice-versa;
- Construir uma visão sistemática das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre eles. (PCNs+, 2006, p. 122)

O estudo de inequações complementa o de equações, pois acaba representando regiões no plano limitadas por curvas. Essas regiões representam possibilidades de soluções em muitos problemas práticos e também justificam resultados algébricos encontrados no ensino fundamental.

Porém, contrariando a riqueza do método analítico, o que ditam os PCNs e os atuais padrões mundiais de ensino, há uma séria deficiência na rede de ensino brasileira a respeito da aprendizagem destes conteúdos, assim como outros tópicos matemáticos no Ensino Médio. Um estudo, que pode servir de parâmetro, de instância internacional, é o PISA (Programa para Avaliação Internacional de Alunos) organizado desde 1997 pela OCDE (Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico). Esse Programa representa o compromisso dos países membros de examinar – através de um teste – os resultados de seus sistemas educativos, medidos em função das avaliações alcançadas por seus estudantes de 15 anos. O número de países que estavam no Programa em 2006 era de 56 países, representando 90% da economia mundial e reforçando a representatividade do Programa em relação a dados educacionais mundiais. Infelizmente, preciso relatar o (alarmante) dado de que o Brasil ficou abaixo da 50ª posição.

Os especialistas envolvidos no programa defendem que é essencial que os estudantes desenvolvam habilidades de caráter mais amplo como comunicação, adaptabilidade, flexibilidade, capacidade de solucionar problemas e utilização das

Tecnologias da Informação. O texto determina, a respeito do conhecimento matemático mais amplo para a vida adulta, que:

... ser capaz de racionar quantitativamente e de representar relações ou dependências tem maior valor na hora de aplicar as habilidades matemáticas na vida cotidiana que a capacidade de responder as perguntas que só figuram nos livros textos. (PISA: Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura, 2006, p. 10)

O Programa divide o conteúdo matemático em quantidade, espaço e forma, relações e probabilístico. Define como processos matemáticos o emprego da linguagem matemática, a criação de modelos e solução de problemas. Estas habilidades têm aplicação em diversas situações do cotidiano como pessoais, educativas, profissionais, públicas, científicas e tecnológicas. A competência matemática é vista como a capacidade que tem um indivíduo de identificar e compreender o papel que desempenha as matemáticas no mundo, emitir juízos bem fundamentados e utilizar e implicar-se nas matemáticas de uma maneira que satisfaça suas necessidades vitais como um cidadão construtivo, comprometido e reflexivo. O que vemos na Educação Básica nacional é a omissão de tais situações didáticas no ensino-aprendizagem de Geometria Analítica, incluindo uma grande deficiência nas relações entre os aspectos algébricos e geométricos em circunstâncias propostas.

Reafirmando esta realidade, Elon Lages Lima (LIMA, 2007) faz uma análise crítica dos principais livros didáticos que estão nas salas de aula brasileiras. Segundo esse autor, além de ignorar a existência de calculadoras e computadores, os livros – que servem como guia para os professores e, por conseguinte, determinam a qualidade de ensino destes – são carentes de situações-problema que ressaltem a aplicabilidade e a importância da Matemática. Em relação a esta discrepância com a realidade, o autor aponta o seguinte:

O livro deve ajudar a preparação do aluno para tarefas relevantes na sociedade de hoje. Para isso, ele deve libertar-se de tópicos e métodos ultrapassados, substituindo-os por outros que correspondam aos dias de hoje. (LIMA, 2007, p. 4)

Em geral, no tópico de geometria analítica, LIMA vê uma série de falhas. Primeiramente existe uma demasiada fragmentação do conteúdo, tornando complicado o seu entendimento mais global. Existe também o excesso de problemas de caráter mais manipulativo e de fórmulas (problemas estritamente algébricos),

contrastando com a falta de demonstrações de resultados importantes. Um bom exemplo é o uso do determinante para justificar o alinhamento entre três pontos. De acordo com o autor, o determinante surge sem maiores explicações e perde-se a oportunidade de introduzir a ideia de coeficiente angular. Há também a ausência de demonstrações de situações em geometria plana utilizando o método analítico e uma introdução de vetores, delegando este último tópico, mais uma vez, para a disciplina de física. Para Lima (2007), é importante salientar que estes livros simulam o conhecimento matemático difundido nas escolas brasileiras. Percebemos então o quanto está prejudicada a Educação Matemática, resumida nela mesma e ao vestibular, como nas palavras do autor:

... as escolas ocupam boa parte do tempo adestrando seus alunos para o exame vestibular... ... Como já dissemos antes, isso contribui para fortalecer no aluno (e, por extensão, na sociedade) a crença de que a Matemática que se estuda na escola serve apenas para passar no exame vestibular. Na verdade, do modo como as coisas estão, essa crença é bastante justificada. Mas não deveria ser assim. (LIMA, 2007, p. 370)

Essa realidade também foi constatada pelo autor desta dissertação em análise dos livros oferecidos pelas editoras nas escolas da rede particular de ensino de Porto Alegre. Portanto, é necessária uma proposta, para o estudo de Geometria Analítica, que contemple um real aprendizado das relações entre curvas no plano e suas representações algébricas. Desta forma, apresenta-se a seguir uma proposta de pesquisa nesta área de ensino.

1.2. Objetivos – Questão da Pesquisa

Os problemas identificados acima também são notórios na prática do autor desse texto como professor de Ensino Médio e como professor de cursos pré-vestibular. Estes últimos propiciam uma troca de experiências com estudantes provenientes de diversas realidades escolares, ampliando a representatividade das reflexões. O quadro se resume em uma falta de conexão entre as representações algébrica e geométrica, desqualificando o ensino-aprendizagem de geometria analítica e resumindo-o a memorizações de fórmulas. Dessa forma, em grande parte dos casos, os

estudantes que possuem algum conhecimento estão limitados à reprodução de fórmulas sem ter ideia de como essas soluções algébricas se refletem num plano coordenado. Talvez uma causa plausível para a formação desse quadro é o fato de que há uma dificuldade em, por métodos tradicionais como giz e quadro negro, régua e compasso etc., proporcionar um ambiente que torne natural esta via álgebra-geometria e que a evolução dos estudantes no domínio da álgebra, da geometria e das equivalências entre estas se torne expressivo.

Com base na importância do estudo de Geometria Analítica e das dificuldades no ensino ressaltadas acima se propõe neste trabalho uma análise da aplicação do software gráfico GrafEq como recurso didático no estudo de Geometria Analítica, analisando, através de testagem no contexto de uma sala de aula normal no Ensino Médio, a flutuação entre as representações geométrica e algébrica. Além disso, será apresentada uma sequência de atividades – na forma de módulo de ensino – incluída em um tutorial para uso do software. A expectativa é que esse material poderá ser utilizado por professores no ensino-aprendizagem de Geometria Analítica fazendo uso do GrafEq.

Para esta investigação, entre os recursos informáticos disponibilizados atualmente escolhemos o software **GrafEq** pela sua interface apurada e didática quanto à disponibilidade de equações e sinais algébricos – em contraponto a softwares como Maple ou o Derive, que funcionam como ferramentas de computação para matemática e estão distantes, na sua forma, dos estudantes do Ensino Médio. Estes sistemas são ideais para desenvolvimento e aplicação da matemática. “Para engenheiros, são as ferramentas ideais para um rápido e eficiente acesso a numerosas operações e funções matemáticas, para visualização dos problemas e de suas soluções em diversas formas.” (KUTZLER e KOKOL-VOLJC, 2001, p.1).

O software coloca os estudantes em situações que permitam a exploração de acordo com a sua necessidade (descoberta dos menus, modificação/sobreposição de cores ou alterações nas configurações dos eixos, por exemplo) e semelhança da escrita das equações com a escrita no caderno. O dinamismo encontrado no uso do GrafEq é notado quando o estudante altera os parâmetros da relação algébrica e verifica diferenças na representação geométrica equivalente. Entretanto, a clareza para digitar equações e verifica-las no plano cartesiano (também há a opção de se utilizar coordenadas polares), o acréscimo de um menu especial com expressões e funções conhecidas e outras atribuições, parece garantir, servindo aos

objetivos desta pesquisa, uma navegação rápida e prática, por parte do usuário, pelas relações entre as equações (álgebra) e suas representações gráficas (geometria).

Por exemplo, quando o estudante começa a fazer inferências, alterando e refletindo sobre uma relação algébrica $R(x)$, verificando as transformações ocasionadas por estas ações nas representações gráficas, sugere um desenvolvimento quanto ao seu conhecimento e manuseio de expressões algébricas e suas equivalências geométricas. As variações em $R(x)$ podem envolver operações com constantes ($R(x) + c$ ou $c.R(x)$ - seja c uma constante qualquer), mudanças de coeficientes ou expoentes, entre outras. As transformações nas representações gráficas podem ser exemplificadas por translações, simetrias, paralelismos, perpendicularidades, (de)crecimentos etc.

Assim, o objetivo desta pesquisa é verificar, analisando o alcance destas, as seguintes questões:

A manipulação de igualdades e desigualdades no GrafEq, verificando suas representações no plano cartesiano, ajudará aos estudantes na apropriação da linguagem algébrica representativa de situações no plano? Quais problemas ou atividades serão geradores desta situação de aprendizagem?

Também se acrescenta o fato de que este estudo trará benefícios tanto para as escolas, estendendo o conhecimento para os colegas da área, como para os estudantes. Entre os fatores benéficos aos estudantes cabe ressaltar a apropriação da tecnologia para aprender Matemática, a disseminação da cultura informática e a apropriação da escrita em Matemática.

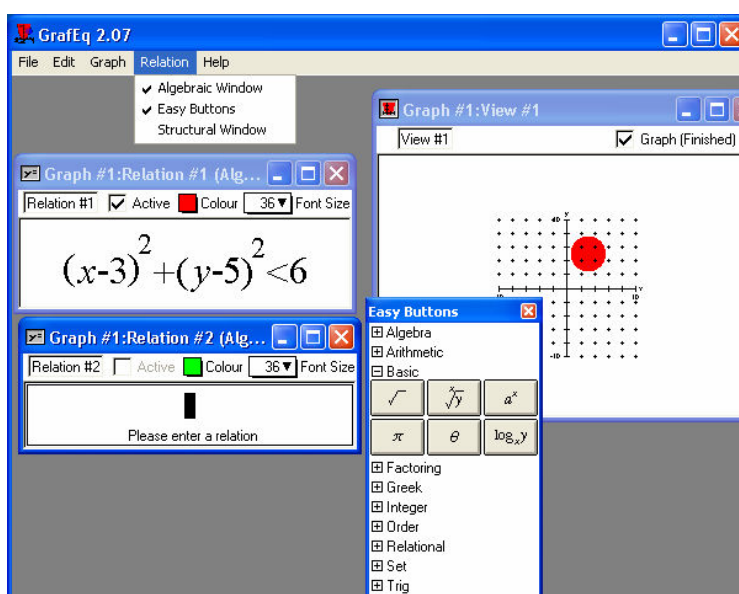


Figura 01 – Interface do GrafEq

No próximo capítulo, abordo as concepções que subsidiam e fundamentam esta pesquisa, no campo da Geometria Analítica e das Tecnologias Digitais, mostrando o alcance e/ou os avanços para a Educação Matemática. Primeiramente temos um breve resumo da evolução histórica da geometria analítica, pontuando suas características peculiares e suas conexões com o desenvolvimento da Matemática como ciência até a chegada da era da informação. Em seguida exponho teorias que analisam as tecnologias digitais – especificamente informática – e sua introdução no ensino, relacionando os seus aspectos ao Ensino de Matemática.

No capítulo seguinte, explico o método para coleta e interpretação dos dados. Temos a definição de pesquisas empíricas como o Estudo de Caso e a caracterização das atividades que foram analisadas bem como os estudantes envolvidos na pesquisa.

O quarto capítulo contém a análise das produções dos estudantes. Aqui estão colocadas as reflexões sobre os avanços no conteúdo de geometria analítica obtidos, pelos estudantes, nas suas interações com o GrafEq ao longo das atividades propostas.

Na conclusão, são retomadas, em paralelo, as questões norteadoras do estudo e a resultante do capítulo anterior. Embasado no referencial teórico, apresenta-se também as expectativas para a utilização do tutorial elaborado, inclusive por outros professores de Matemática. Também é contemplada a possibilidade de futuras complementações das atividades com a introdução de outro software – o GeoGebra.

Finalmente, temos as referências utilizadas neste estudo e os apêndices que fornecem, na íntegra, as atividades utilizadas na testagem e extratos elucidários do tutorial (Guia de Estudos para o GrafEq), incluindo as atividades propostas.

2 BASES TEÓRICAS

2.1. Geometria Analítica

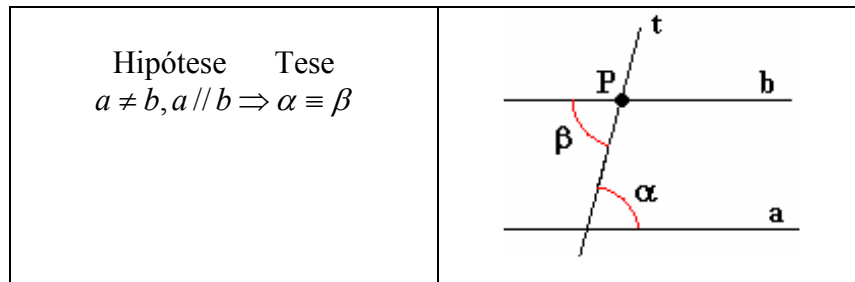
Deve-se oportunizar ao estudante do Ensino Médio o conhecimento desse método que transforma problemas geométricos em algébricos através de equações ou inequações, pela sua importância no processo histórico de construção do conhecimento matemático (e em outras áreas que fazem uso de resultados matemáticos como: Física, Astronomia,...) e como ferramenta para resolução de problemas matemáticos. Uma abordagem correta também serve para desvincular a álgebra da simples e retroativa ideia de aritmética simbólica.

A essência da Geometria Analítica, de acordo com EVES (2004), consiste em estabelecer equivalência entre pontos do plano e coordenadas reais (pares ordenados), em um sistema referencial de eixos, viabilizando correspondência entre equações e curvas no plano e suas respectivas propriedades algébricas e geométricas. Dessa forma, transfere-se a tarefa de demonstrar um teorema em geometria (que chamaremos Geometria Sintética) para a de provar esta mesma proposição em álgebra.

Podemos notar esta facilidade adquirida com o uso de processos analíticos comparando com a Geometria Sintética. Enquanto que nesta primeira exige-se em suas demonstrações habilidade, experiência e prática adquiridas com o tempo na resolução de problemas, os procedimentos com o uso da geometria analítica podem se mostrar mais claros aos estudantes. Tal clareza se deve ao fato de que, com a Geometria Analítica, se tem um procedimento mais concreto, por meio de resultados e técnicas algébricas.

Para comparar estas ideias vamos demonstrar, por meios sintéticos e analíticos, duas proposições.

Proposição 1: *Se duas retas paralelas distintas interceptam uma transversal, então os ângulos alternos (ou os ângulos correspondentes) são congruentes.*



Quadro 01 – Hipótese e tese para a proposição 1

Se α e β não fossem congruentes, existiria uma reta x , distinta de b , passando por P , $\{P\} = b \cap t$, tal que:

$$x\hat{t} = \beta' \text{ é alterno de } \alpha \quad \text{e} \quad \beta' \equiv \alpha$$

Pelo teorema da existência¹, $\alpha \equiv \beta' \Rightarrow x // a$.

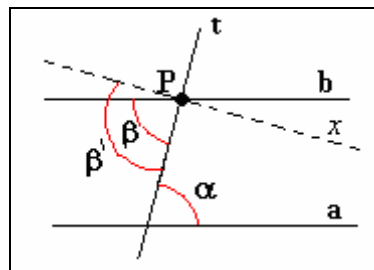


Figura 02 – Reta x

Por P teríamos duas retas *distintas* x e b , ambas paralelas à reta a , o que é absurdo, pois contraria o postulado das paralelas². Logo, α é congruente a β , isto é, $\alpha \equiv \beta$. Demonstração encontrada em DOLCE e POMPEO (1998, p. 64).

O estilo da demonstração acima, apesar de simples e bem fundamentado dentro do método sintético, às vezes, encontra resistência até em alunos no início da graduação. No entanto, com conceitos analíticos abordados no Ensino Médio, podemos chegar à prova da seguinte maneira:

Sejam duas retas paralelas de equações $y = ax + b$ (1) e $y = ax + c$ (2) e uma transversal de equação $y = dx + e$ (3).

¹ Existência da paralela (Recíproca da proposição em questão): Se duas retas distintas e uma reta transversal, todas coplanares, determinam ângulos alternos congruentes, então essas duas retas são paralelas.

² Unicidade da paralela: Por um ponto passa uma única reta paralela a uma reta dada.

Sabemos que os coeficientes angulares das retas (1), (2) e (3) são, respectivamente, \mathbf{a} , \mathbf{a} e \mathbf{d} e que a relação $tg\theta = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} \right|$ nos fornece a tangente do ângulo agudo entre duas retas a partir dos coeficientes angulares m_1 e m_2 .

Assim, temos que os ângulos agudos θ (para simplificar, utilizei o mesmo símbolo) entre as retas (1) e (3) e entre as retas (2) e (3) possuem a mesma tangente $\left(tg\theta = \left| \frac{d - a}{1 + ad} \right| \right)$. Logo, estes ângulos agudos (que são os alternos internos) são congruentes. Para não perdermos em generalidade, devemos considerar os casos onde as retas são verticais. Em um primeiro caso, onde as retas paralelas são verticais e formam um ângulo reto (tangente inexistente) com o eixo das abscissas e a transversal um ângulo θ , temos que o ângulo agudo entre as retas paralelas e a transversal é $90^\circ - \theta$ (figura 03 – à esquerda). Da mesma forma, se a reta transversal é vertical e as retas paralelas formam um ângulo θ com o eixo das abscissas, então o ângulo entre elas também será $90^\circ - \theta$ (figura 03 – à direita).

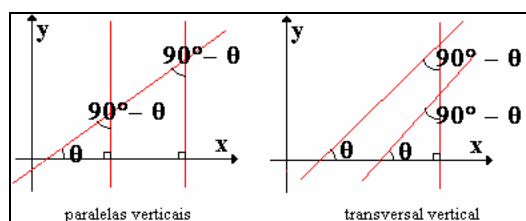


Figura 03 – Retas verticais

Proposição 2: *As medianas de um triângulo concorrem em um ponto que trisecta a cada uma delas.* Demonstração encontrada em EVES (1969, p. 3).

Analisemos a figura 1.

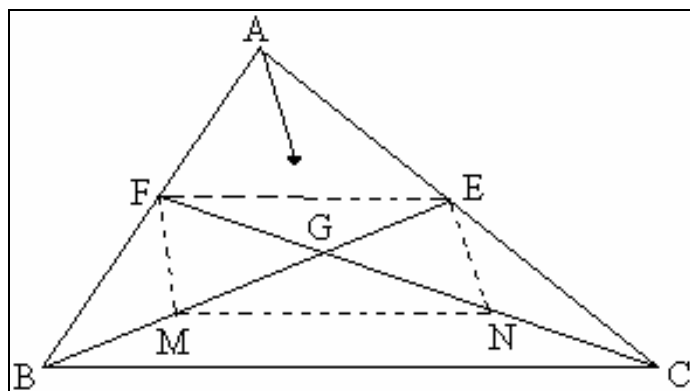


Figura 04 – Ponto G (Demonstração Sintética)

Seja G o ponto de intersecção das medianas BE e CF do triângulo ABC e sejam M e N os pontos médios de BG e CG , respectivamente. Traça-se FE , MN , FM e EM . Então FE é paralelo a BC e igual a sua metade (teorema da base média). De forma análoga, MN é paralelo a BC e igual a sua metade. Por conseguinte, FE é paralelo e igual à MN , sendo por tanto, $FENM$ um paralelogramo. Deduz-se então que $MG = GE$ e $NG = GF$. As medianas BE e CF se cortam em um ponto G que está a dois terços da distância de uma ou outra aos vértices B e C e a um terço desta distância do ponto médio do lado oposto. Dado que isto é válido para um par qualquer de medianas do triângulo ABC , deduz-se que as três medianas concorrem em um ponto que triseca a cada uma delas.

A demonstração anterior não é difícil, mas exige experiência para decidir por onde começar, que segmentos traçar ou qual enfoque abordar (diagonais do paralelogramo). Agora abordaremos o problema por métodos analíticos. Colocamos o triângulo ABC em uma situação geral de um sistema cartesiano (ver figura 2). Então (a_1, a_2) , (b_1, b_2) e (c_1, c_2) serão as coordenadas dos vértices A , B e C no sistema.

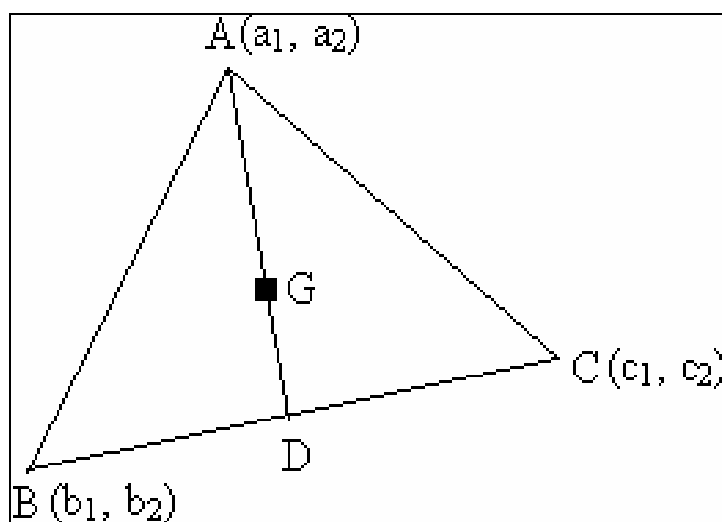


Figura 05 - Ponto G (Demonstração Analítica)

Determinemos as coordenadas (g_1, g_2) do segundo ponto de triseção G da mediana AD . Usaremos a chamada *fórmula da razão* da geometria analítica, que diz que as coordenadas (p_1, p_2) de um ponto P que divide um segmento de reta MN de modo que $MP/PN = r/s$ são $p_1 = (s.m_1 + r.n_1) / (s + r)$ e $p_2 = (s.m_2 + r.n_2) / (s + r)$, sendo (m_1, m_2) e (n_1, n_2) as coordenadas de M e N , respectivamente.

Pela fórmula vemos que as coordenadas de D são

$$d_1 = (b_1 + c_1) / 2 \quad \text{e} \quad d_2 = (b_2 + c_2) / 2.$$

Utilizando novamente a fórmula temos as coordenadas de G:

$$g_1 = (a_1 + 2d_1) / 3 = (a_1 + b_1 + c_1) / 3,$$

$$g_2 = (a_2 + 2d_2) / 3 = (a_2 + b_2 + c_2) / 3.$$

De forma análoga, também vemos que G é o segundo ponto de triseção de BE e CF.

Esta demonstração nos mostra uma vantagem do método analítico. Primeiro situamos a figura em um sistema de coordenadas e depois, simplesmente, determinamos as coordenadas do ponto G, fazendo uso de um resultado analítico (fórmula da razão), assim como na demonstração sintética utilizamos o teorema da base média (resultado da geometria plana).

Os exemplos acima, de forma alguma são para invalidar o método sintético, mas sim para apresentar, aos estudantes, a Geometria Analítica como opção potente na prova de resultados geométricos. A seguir, retrato alguns fatos que marcam a evolução desse campo da Matemática.

A “invenção” da Geometria Analítica, mesmo que alguns autores digam que outros matemáticos já haviam se utilizado do método analítico, se deve a Descartes e Fermat. Segundo EVES,

Os gregos dedicaram-se consideravelmente à álgebra geométrica e a ideia de coordenadas foi usada no mundo antigo pelos egípcios e os romanos, na agrimensura, e pelos gregos na confecção de mapas. Apolônio (grego) deduziu o cerne de sua geometria das seções cônicas de equivalentes geométricos de certas equações cartesianas dessas curvas – ideia que parece ter-se originado com Menaecmo. Nicole Oresme (sec XIV) representou graficamente certas leis, confrontando a variável dependente com a independente. (EVES, 2004, p. 382)

De acordo com esse autor, os dois matemáticos nunca trabalharam juntos, mas estavam avançando nestes estudos a mesma época. A contribuição de Descartes foi escrita em um tratado filosófico sobre a ciência universal. O Tratado intitulado *Discours de la Méthode pour Bien Conduire sa Raison et Chercher la Vérité dans les Sciences* (Discurso do Método para Bem Conduzir a Razão e Procurar a Verdade nas Ciências, publicado em 1637) continha três apêndices e coube ao terceiro, *La géométrie*, tratar da Geometria Analítica. Apesar de avançar muito em relação a matemáticos anteriores e este apêndice (única publicação de conteúdo matemático de

Descartes) ter aproximadamente cem páginas, Descartes não desenvolveu sistematicamente o método analítico até a forma que conhecemos hoje. Palavras como *coordenadas*, *abscissas* e *ordenadas* foram utilizadas pela primeira vez, no sentido técnico atual, por Leibniz em 1692.

A diferença entre estes estudos e os de Pierre de Fermat é que, onde Descartes partia de um lugar geométrico para encontrar sua equação, Fermat partia de uma equação e então buscava o lugar geométrico correspondente. É essa reciprocidade o princípio fundamental da Geometria Analítica.

A relevância da Geometria Analítica pode ser justificada por três grandes contribuições históricas para o desenvolvimento da Matemática. A primeira delas foi servir de apoio ao Cálculo (século XVII). Com ele e com a Geometria Analítica se atacou problemas que não poderiam ser solucionados anteriormente.

Outra contribuição, impulsionada pela criação da Geometria Analítica, foi a adaptação frente a diversos outros problemas matemáticos. Como exemplo, temos a criação de coordenadas polares para se trabalhar com curvas impraticáveis em coordenadas cartesianas – os espirais são ótimos exemplos. Em 1829, Julius Plücker notou que o elemento fundamental não precisa ser um ponto, podendo ser qualquer ente geométrico, e explorou a geometria analítica das *coordenadas lineares*.

Sem dúvida, a Geometria Analítica contribuiu com diversos avanços na Matemática Pura. Sem desconsiderar a evolução da Matemática e da Tecnologia como um todo, não podemos deixar de citar a Matemática Aplicada – em especial a Computacional – e a Educação Matemática.

No campo computacional, diversos matemáticos, como Pascal e Leibniz, concentraram esforços na construção de máquinas para calcular e acumular instruções iniciando uma busca pelo aperfeiçoamento que culminou em máquinas de computar, protótipos das atuais máquinas de calcular. Outro matemático que contribuiu para esta revolução foi o inglês Charles Babbage. A máquina construída por ele e denominada *máquina analítica*, gerou descendentes como o ASCC (convênio entre a IBM, a Universidade de Harvard e o Departamento Naval dos Estados Unidos, em 1944) e o ENIAC (convênio entre a Universidade da Pensilvânia e o Laboratório de Pesquisas Balísticas do Exército dos Estados Unidos, 1945).

A evolução dessas máquinas acompanhou a revolução tecnológica, as válvulas foram substituídas pelos transistores e estes pelos microchips, tornando-as mais leves, mais rápidas e capazes de realizar diferentes tarefas. Segundo EVES (2004),

Dana S. Scott, em 1958, programou o MANIAC para procurar todas as soluções de um problema consistindo em juntar um conjunto completo de doze *pentaminós*³ de modo a formar um quadrado oito por oito com um quadrado vazio dois por dois no meio. Mas não só na Matemática Recreativa houve avanços impulsionados pela tecnologia computacional. Em 1976, Kenneth Appel e Wolfgang Haken comprovaram o problema das quatro cores da topologia⁴, utilizando recursos computacionais para verificar o exame de 1960 configurações redutíveis, cada uma envolvendo o estudo de meio milhão de opções lógicas para verificar a redutibilidade.

Assim, os computadores deixaram de servir exclusivamente a propósitos militares e começaram a ser projetados para auxiliar nas mais diversas áreas, sejam elas comerciais, empresariais, da administração pública ou de setores da engenharia. Nos dias de hoje, os microcomputadores já são artigos domésticos servindo a tarefas comuns em lares de todo o globo. A realidade é que há gerações de indivíduos que nasceram já na presença destas máquinas e que a interação com estas fez parte do seu desenvolvimento infantil até a idade pré-escolar e continua durante sua escolaridade.

Então esta presença também surge na escola, o lugar onde colocamos o nosso desejo humanitário da continuação do desenvolvimento. Será esta inclusão o objeto de análise do próximo tópico. Aqui cabem apenas algumas indagações: Se a computação ajudou em descobertas no campo da Matemática Pura e Aplicada, por que não utilizá-la na Educação Matemática? Será que as descobertas que a criança faz frente sua interação com a máquina não causam o mesmo impacto nelas que os impactos causados na Matemática e na Sociedade por grandes descobertas como a Geometria Analítica e a Computação?

³ Um pentaminó é um arranjo plano de cinco quadrados unitários unidos ao longo de seus lados.

⁴ A conjectura afirmava que é possível pintar qualquer mapa plano ou sobre uma superfície de uma esfera sem que se usem mais do que quatro cores, sem que regiões vizinhas possuam a mesma cor.

Evolução: Geometria Analítica/ Computação

Ano	Matemático/ Acontecimento	Geometria Analítica/ Computação
1360	Nicole Oresme	Coordenadas
1635	Fermat	Geometria Analítica
1637	Descartes	Geometria Analítica
1640	De Beaune	Geometria Cartesiana
1650	<i>Blaise Pascal</i>	<i>Máquinas de Calcular</i>
1682	<i>Leibniz</i>	<i>Máquinas de Calcular</i>
1731	Aléxis Clairaut	Geometria Analítica Sólida
1748	Agnesi	Geometria Analítica
1829	Plücker	Geometria Analítica Superior
1830	<i>Babbage</i>	<i>Máquinas de Computar</i>
1937	<i>John V. Atanasoff designou o primeiro computador eletrônico digital</i>	
1939	<i>Atanasoff e Clifford Berry demonstraram o protótipo ABC</i>	
1941	<i>Konrad Zuse, na Alemanha, desenvolveu em segredo o Z3.</i>	
1943	<i>Na Inglaterra, o Colossus foi designado em segredo para decodificar mensagens alemãs.</i>	
1944	<i>IBM Automatic Sequence Controlled Calculator (ASCC).</i>	
1945	<i>Eletronic Numerical Integrator and Computer (ENIAC).</i>	
1948	<i>Instalado no Campo de Provas da Marinha (Dahlgren, Virgínia) um computador ASCC aprimorado.</i>	
1953	<i>IBM introduziu o modelo 604 computer, o primeiro com transistor.</i>	
1955	<i>IBM introduziu o 702 business computer.</i>	
1959	<i>Texas Instruments patenteou o primeiro circuito integrado.</i>	
1971	<i>Micro Computer Co. patenteou o microprocessador.</i>	
1971	<i>À venda a primeira calculadora portátil.</i>	
1973	<i>IBM desenvolveu o primeiro disco rígido (Winchester)</i>	
1976	<i>Jobs e Wozniak desenvolveram o computador pessoal Apple.</i>	
1984	<i>Apple Computer introduziu o Macintosh.</i>	
1985	<i>Entram em uso os supercomputadores.</i>	
1991	<i>Desenvolvida a WWW.</i>	
1994	<i>Netscape Navigator 1.0.</i>	
1996	<i>Microsoft Explorer 3.0.</i>	

H. Eves (2004) e David B. Zandvliet (2006)
 Quadro 02 – Evolução: Geometria Analítica/ Computação

2.2. Tecnologias Digitais e Educação Matemática

A pertinência do uso da tecnologia informática é justificada por diversos fatores. A disponibilidade de recursos como internet e softwares educacionais abrem um leque de possibilidades didáticas, modificando as relações entre professor e aluno. D'AMBRÓSIO e BARROS (1990) acrescentam que estas mudanças causam grandes impactos na sociedade, gerando reflexos conceituais e curriculares na Educação Básica e na Educação Superior. À Matemática cabe o papel de desenvolver nos estudantes, também nesse âmbito, habilidades como selecionar e analisar informações, tomar decisões, resolver problemas e transcrevê-los em linguagem correta.

Dessa forma, nos deparamos com a necessidade social gerada pela evolução de tais tecnologias. Cada vez mais os indivíduos precisam aumentar sua interação com as máquinas, conhecendo suas vantagens e limites, utilizando-as em benefício do aprender e do trabalho. Assim, não podemos ignorar a intersecção entre estas duas áreas (Educação Matemática e Informática), objetivando o Ensino de Matemática para a utilização dos recursos tecnológicos, de forma racional e vinculada ao saber matemático.

Os PCNs (2006) determinam, para a Educação Matemática e os recursos tecnológicos, uma relação de reciprocidade. A Matemática deve servir para entender e se apropriar das tecnologias digitais assim como esta deve ser ferramenta para entender a Matemática. Outra habilidade contemplada é a utilização adequada de calculadoras e computadores, reconhecendo suas limitações e potencialidades. Mais especificamente sobre computadores há a sugestão de se utilizar softwares matemáticos, que caracterizem e influenciem o pensar matemático, e a Internet. Em relação à contextualização sócio-cultural, os PCNs+ (2006, p. 118) ditam que “a Matemática deve acompanhar criticamente o desenvolvimento tecnológico contemporâneo, tomando contato com os avanços das novas tecnologias nas diferentes áreas do conhecimento para se posicionar frente às questões de nossa atualidade”.

Porém, o uso das tecnologias digitais na sala de aula deve ser antecedido por reflexões consistentes sobre o alcance destas e o papel da escola. Uma questão, levantada por Kaput (1992), é sobre a utilização do verdadeiro potencial das tecnologias computacionais no Ensino de Matemática. É preciso rever os processos de ensino tradicionais de Matemática que visam à aquisição de técnicas aritméticas e

aplicação demasiada de fórmulas para chegar a valores numéricos sem significado, desprezando o real fazer matemático. Deve-se oportunizar ao aluno a chance de desenvolver e utilizar o raciocínio lógico para testar e validar suas hipóteses – evolução natural do conhecimento matemático, “escondido” pela escola tradicional. Assim, defende-se uma reforma nas práticas tradicionais, revisando o impacto das novas tecnologias em tais práticas e no currículo matemático.

De acordo com Kaput (1992), historicamente o uso do computador na escola vem apenas reenergizando velhas práticas, transferindo o livro texto, suas questões fechadas e os alunos ouvintes e receptores para uma sala de aula com computadores – os laboratórios de informática. Segundo o autor, houve uma disseminação dos CAI (Computer Assisted Instruction), que foram as primeiras tentativas do uso do computador na Educação:

Basicamente, estes programas davam instruções para os alunos e indicava o acerto (ou erro) do estudante nas questões propostas. Os tutoriais matemáticos tendem a se basear no ensino guiado de sistemas de notações, tanto aritméticos, algébricos ou geométricos. Designers transferiram o sistema tradicional de ensino para um novo meio usando a característica visual do computador, porém estes programas se mostram fracos em termos curriculares e pedagógicos. (KAPUT, 1992, p. 519)

Papert (1988), criador da linguagem de programação LOGO (“linguagem da tartaruga”)⁵, e Kaput (1992) criticam essa tendência, apontando novas possibilidades e mudança de paradigmas. Para o primeiro, a criança deve programar o computador para ir em busca de conhecimentos, ressaltando que na ação haverá o real aprendido caracterizado por descobertas e reorganização destas, construindo e se apropriando de significados. Nessa linha, o segundo aponta que um aspecto dos computadores que os distingue de outras mídias utilizadas na educação é a capacidade de servir como ferramenta de produção/ construção. Acerca disto, Basso (2003, p. 49) assinala que “uma utilização mais significativa da tecnologia, a favor da educação, deva incluir dimensões do desenvolvimento como: interação, troca, intercâmbio, comunicação bi ou multilateral, negociação, colaboração e cooperação”.

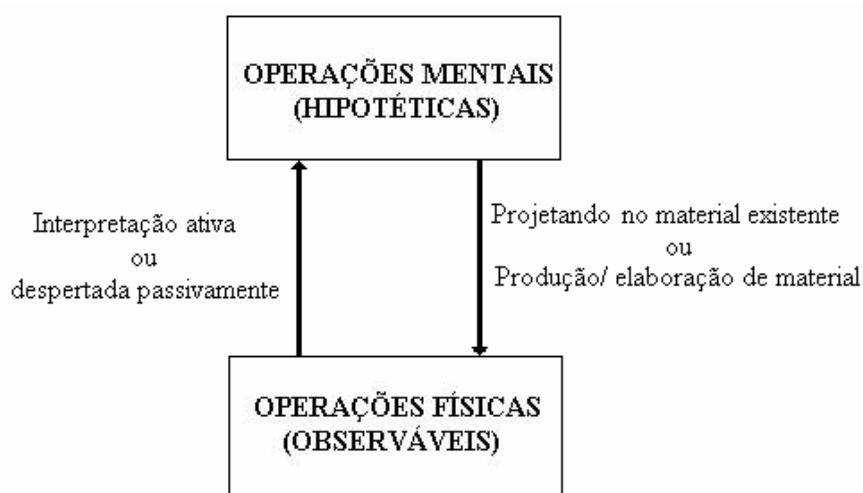
Kaput (1992) defende que para refletirmos melhor sobre a contribuição das tecnologias digitais na Educação Matemática, precisamos inicialmente entender como funcionam as interações humanas com o conhecimento. Dentre essas interações, o autor determina qual ou quais são particularmente relacionadas com o

⁵ Também existem outras linguagens de programação como BASIC e Pascal. (PAPERT, 1988)

aprender matemático, bem como quais são as possibilidades significativas da utilização de tecnologias digitais como interferência positiva na aprendizagem matemática. Segundo ele (KAPUT, 1992, p. 522), “nosso aparato mental, embora muito limitado no processamento e manipulação da capacidade de memória, é notavelmente efetivo em levantar ideias complexas e processos, concretos ou abstratos.” Esta força está baseada na interação entre duas origens da organização da experiência:

- (i) As estruturas inerentes ao nosso conhecimento construído, e
- (ii) Nossa habilidade para explorar meios físicos da experiência organizada – no caso da experiência matemática, utilizaremos sistemas de notação (definidos mais a frente) como formas de externalizar uma estrutura conceitual. O autor faz a seguinte analogia: “Nós usamos isto na nossa atividade matemática como um carpinteiro utiliza um esquadro na carpintaria.” (KAPUT, 1992, p. 522)

Assim, Kaput argumenta que apoiamos nossa exploração sobre uma estrutura organizacional à força do pensamento, o que coloca a nossa discussão acerca da experiência numa relação entre pensamento e linguagem – construída para incluir algum tipo de linguagem matemática. Com isso, nós produzimos um senso para dar continuidade pela experiência via interações entre o meio físico (objeto da experiência) e as estruturas mentais. Consequentemente nos colocamos entre dois mundos: (i) o mundo das operações mentais, sempre hipotético, e (ii) o mundo das operações físicas, frequentemente observável. Na figura abaixo, extraída de Kaput (1992, p. 523), vemos que estes dois mundos interagem em direções opostas, sugerindo um fenômeno cíclico.



KAPUT, 1992, p. 523

Figura 06 – Operações físicas e mentais

Na seta apontada para cima temos os atos interpretativos na base do objeto do processo, que chamamos de interpretação ativa (ou deliberada). Na outra seta concentramos o processo do fenômeno mental evocado pela matéria física. Kaput determina que neste caso temos a ação de projetar a estrutura material existente mentalmente e de produzir novas estruturas, incluindo elaborações físicas sobre as pré-existentes, testando a viabilidade de suposições.

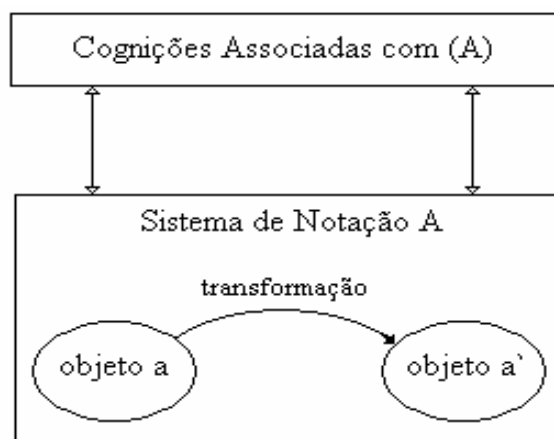
Para produzir percepção das interações entre processos físicos e mentais, Kaput (1992) cria uma linguagem para organizar e ligar registros dessas interações. Para avaliar estas linguagens no âmbito da Educação Matemática, ele utiliza o termo *sistema de notação*. Na Matemática há uma grande familiaridade com os variados sistemas de notações, incluindo neste conjunto o sistema numérico de base dez, o sistema de notação algébrico para uma ou mais variáveis, os sistemas de coordenadas gráficas de diferentes dimensões, os sistemas de tabelas de dados, entre outros. Segundo o autor, um sistema de notação é definido como um conjunto de regras para:

- (i) Identificar ou criar caracteres,
- (ii) Operá-los entre eles, e
- (iii) Determinar relações com outros sistemas de notações – principalmente relações equivalentes. (KAPUT, 1992, p.523)

Transformações dentro e através de sistemas de notações podem ser exemplificadas com atividades típicas de manipulação algébrica, operando com expressões e mudando a sua forma. Analisemos as seguintes ações:

- (i) Subtrair $6x$ de $(x^2 + 6x + 9)$, e
- (ii) Expandir a binomial $(x + 3)^2$ para $(x^2 + 6x + 9)$. (KAPUT, 1992, p.524)

No primeiro caso, nós estamos agindo inteiramente com o mesmo sistema de notação, efetuando transformações. No segundo caso, nós sucedemos para uma transformação da expressão para outra forma equivalente (uma identidade), mudando a visualização do objeto fixado, enquanto que no item (i) transformamos o objeto em uma representação diferente. Tais mudanças dentro de um mesmo sistema de notação podem ser visualizadas na seguinte figura:



KAPUT, 1992, p. 524.

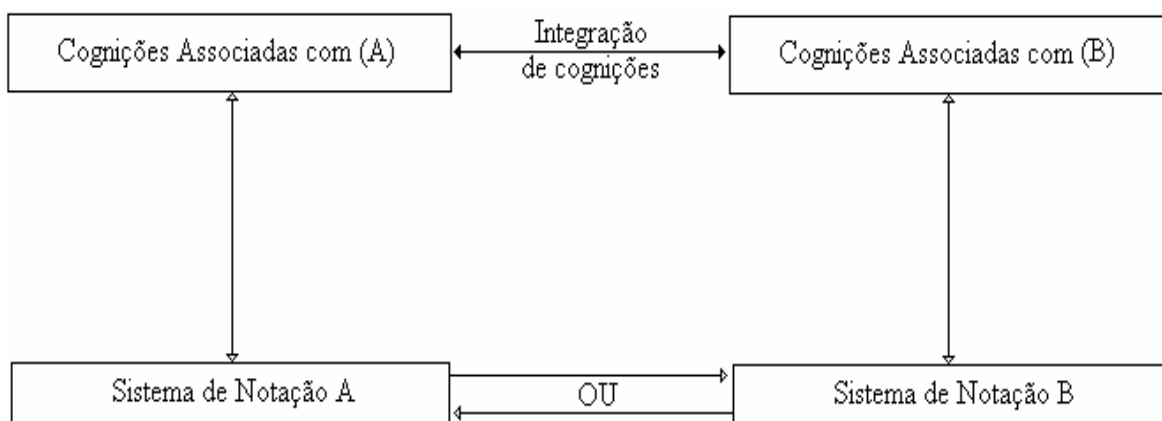
Figura 07 – Sistema de Notação X Cognições Associadas

No exemplo, tanto em (i) como em (ii), poderíamos acoplar uma mudança na transformação vista em outro sistema de notação, que poderia ser um sistema de coordenadas gráficas. De acordo com o autor, isso acontece em grande parte da Matemática presente na Educação Básica, onde as atividades envolvem constantes traduções de um sistema de notação para outro.

Um dos exemplos mais comuns de se usar traduções entre sistemas de notações diferentes é a representação algébrica de uma função e o seu respectivo gráfico, facilmente verificáveis no GrafEq. Mais genericamente, podemos estender este arquétipo para as relações de equivalência entre entes algébricos (relações) e suas representações geométricas, base do estudo da Geometria Analítica.

Estas traduções são diretas, dependendo da interação e das operações mentais realizadas pelo estudante. Kaput (1992) exemplifica que para “transferir” a função $y=x^2+6x+9$ para o sistema de coordenadas gráficas podemos utilizar o processo de computação dos valores da função e plotar os pares ordenados resultantes. Ou, iniciar com o gráfico de um modelo e, através de conhecimento de parábolas e funções quadráticas, desenvolver inferências mais sofisticadas que resultam numa translação do gráfico para a função quadrática desejada. Podemos identificar situações como manipular a expressão algébrica e encontrar valores para plotar o gráfico. Ou identificar no gráfico o intercepto-y, por exemplo, e procurar uma equivalência na notação algébrica (termo independente).

Estas relações entre sistemas de notação diferentes (no exemplo, algébrico e geométrico) e a integração de cognições associadas estão descritas, genericamente, na figura abaixo:



KAPUT, 1992, p. 524.

Figura 08 – Sistemas de Notação

Kaput também defende que se alguma variação precisa ser projetada para permitir que o estudante a leia e a interprete, são necessários meios dinâmicos que facilitem essa projeção – difícil de ser desenvolvida em uma mídia estática. Por exemplo, se um professor ou estudante, utilizando a lousa ou papel e caneta, quer descrever a variação de um ente geométrico qualquer (ponto, reta etc.) através de uma figura geométrica, ele deverá incluir várias instâncias da situação talvez com o auxílio da indicação da direção do movimento do objeto. Mas esta ilustração, utilizando um software como o Cabri Geometry⁶, pode ser mais interessante e mais representativa em termos cognitivos na aprendizagem matemática. Sobre isso, Kaput diz:

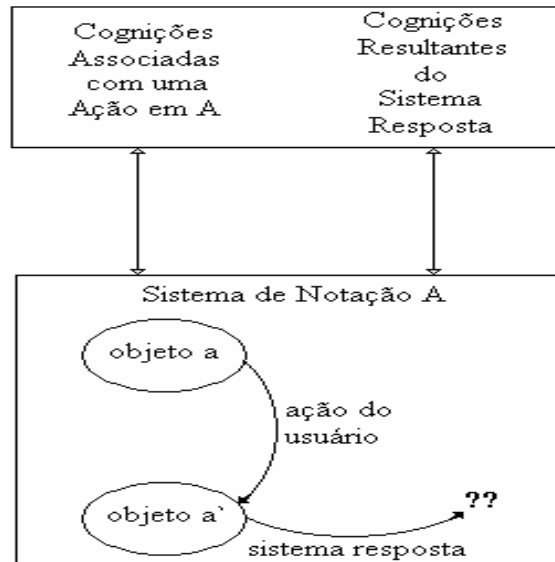
Um aspecto muito importante do pensamento matemático é a abstração da invariância. Mas é claro que reconhecemos invariância quando estudamos variações. A mídia dinâmica é inerente à produção de variações. (KAPUT, 1992, p. 526)

E ainda:

Assim, podemos dizer que a transição contínua do estágio intermediário é uma importante característica cognitiva do sistema dinâmico, aqui entendido como um sistema que permite variações do objeto estudado. Já pela mídia interativa, a possibilidade de construir interações envolvendo contribuições físicas (ações do sujeito) e os sistemas de notação é instantânea. (KAPUT, 1992, p. 526)

⁶ Software de geometria dinâmica. Uma espécie de “régua e compasso eletrônicos” que permite movimento nas construções geométricas. Desenvolvido pelo Institut d’Informatique et de Mathematiques Appliquees em Grenoble - IMAG. Site de origem: <http://www-cabri.imag.fr/index-e.html>

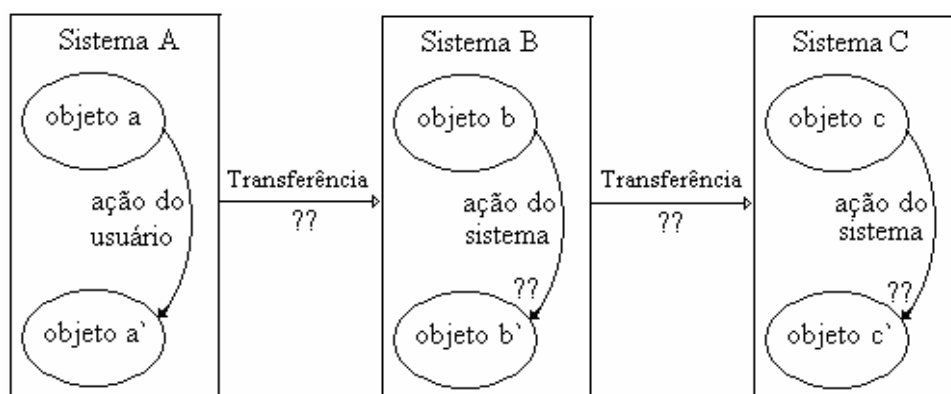
Dessa forma, as tecnologias digitais podem performar as ações do usuário vistas na figura abaixo, fazendo uma ligação mais densa entre as cognições associadas com uma ação e as cognições resultantes do sistema resposta.



KAPUT, 1992, p. 526.

Figura 09 – Sistema resposta

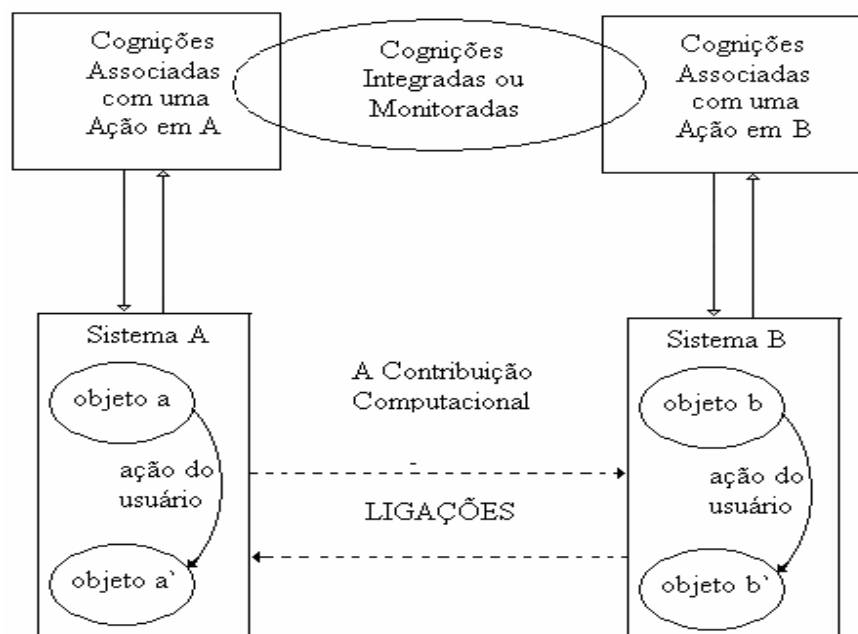
Um recurso computacional pode fazer equivalências entre sistemas de notação a partir da ação do usuário em um sistema, como por exemplo, faz o GrafEq - o usuário pode manipular como desejar as informações algébricas de um objeto (relação) enquanto que o software retorna as equivalências geométricas, potencializando a situação exposta no esquema da figura 08. Essas transferências de um sistema para outro são verificadas na ilustração a seguir:



KAPUT, 1992, p. 529.

Figura 10 – Transferências entre sistemas de notação

O usuário realiza uma sequência de ações no meio digital que podem ser ligadas a outros recursos (diversos programas), modificadas e incluídas em outra sequência de ações e formando uma rede de ações, em vários sistemas de notações. Segundo Kaput (1992), esta característica do meio digital causa influências nas estruturas mentais do estudante e pode ser resumida nos termos construção, recordação e visualização. No exemplo do GrafEq, um sistema de forma algébrica em A de duas variáveis (funções, por exemplo) ligadas com os gráficos em B fazendo a equivalência *expressão algébrica em A constitui um gráfico em B*. Se as ações em A incluem simplificações e outras mudanças na forma fixa da função, gerará outros pares ordenados e outro gráfico em B. Assim estas ações em A são refletidas em B. A contribuição do software, neste caso, é que para o estudante analisar e construir inferências a respeito do sistema algébrico (onde suas ações foram empregadas), ele possa, antes de criar suas associações cognitivas, visualizar esta situação em outro meio (geométrico) ou, ao contrário, utilizar estas inferências para modificar o campo algébrico e obter um resultado geométrico. Lembramos que, no caso deste estudo, o mais importante é a construção, compreensão e aplicação das equivalências entre estas relações algébricas e geométricas – princípio norteador do estudo da Geometria Analítica. Estas relações estão descritas, de forma geral, na figura abaixo.



KAPUT, 1992, p. 530.

Figura 11 – Contribuição Computacional

Acerca desta interferência do meio digital, Gravina (1998) aponta que o computador (nome recebido quando a máquina ainda só fazia grandes operações) permite ao estudante explorar objetos na tela como se fossem concretos. Estes objetos podem ser manipulados, junto com relações mentais, chegando-se à abstração de forma mais natural, ou seja, expansão do conhecimento através das reestruturações de pensamento permitidas com a interação entre o estudante e os objetos de estudo na interface informática.

Para esta pesquisa, usamos como apoio ou facilitador de aprendizagem o software GrafEq, que é utilizado para a plotagem de gráficos de funções em coordenadas cartesianas e polares. Para as atividades propostas na coleta de dados, os estudantes não precisavam ser experientes no manejo do software, portanto, bastava seguir as atividades (apêndice A). A diferença entre o GrafEq e outros softwares existentes no mercado para engenheiros e matemáticos (puros e aplicados), como o Derive e o Maple, é que este foi projetado para fins educacionais, com um layout e ferramentas que se adaptam à matemática estudada no ensino básico.

De acordo com o site de origem do GrafEq⁷, o software se caracteriza como “intuitivo, flexível, preciso e robusto programa de produção de gráficos de equações implícitas e desigualdades.” A página também determina que o GrafEq foi projetado para promover um visual para forte compreensão da matemática, disponibilizando gráficos confiáveis e incentivando a exploração. Além disso, o software oferece interfaces em Inglês, Alemão, Espanhol, Francês, Coreano e Japonês, sugerindo fácil adaptação em diferentes países e culturas.

A seguir, temos algumas características específicas do GrafEq:

- (i) O GrafEq pode salvar e abrir arquivos em diferentes formatos.
- (ii) Suporte para a plotagem de vários gráficos na mesma janela, para que os efeitos das diversas transformações possam ser claramente visualizados.
- (iii) GrafEq prevê / suporta outras características distintivas como: botões fáceis, funções e relações, equações e desigualdades, plano cartesiano e polar, fácil utilização de expressões trigonométricas, exponenciais e logarítmicas, valor absoluto, módulo, zoom-in / zoom-out, pontos, encostas, distâncias e ângulos.
- (iv) GrafEq é um programa fácil de usar para apresentar graficamente as equações encontradas no currículo matemático da educação básica, que inclui: funções lineares, polinômios, cônicas, funções trigonométricas, funções exponenciais, relações envolvendo valor absoluto, etc.
- (v) Respeita convenções matemáticas e fornece pistas para entradas incorretas de equações. Também sugere correções mais diretas como quando parênteses não são corretamente empregados.

⁷ www.peda.com/grafeq

- (vi) O GrafEq foi concebido com/para a matemática da Educação Básica. (www.peda.com/grafeq - acessado em dezembro de 2008)

No GrafEq as interseções das relações, entre si e com os eixos ordenados, podem ser descobertas visualmente, sendo uma ferramenta bastante importante no estudo de desigualdades e regiões no plano cartesiano. Além disso, coordenadas de pontos do plano podem ser encontradas por zoom. No estudo de equações lineares podem se abordar vários aspectos importantes através de ferramentas como, por exemplo, a determinação do coeficiente angular através de dois pontos quaisquer da reta.

A utilização do computador nas atividades propostas neste material, conforme análise apresentada no capítulo 4 serviu para que os estudantes testassem suas hipóteses, refutações e outros processos que fazem parte do ato de estudar matemática e resolver problemas. Por isso, o software nem a dinâmica das aulas se deram somente sobre os erros e acertos dos alunos, privilegiando os procedimentos exploratórios dos alunos associados às suas ações mentais. A dinâmica interativa que permeou o trabalho dos estudantes durante as atividades foi a manipulação dos objetos algébricos com instantânea visualização das representações geométricas, dando suporte às suas estruturas cognitivas e contribuindo para uma aprendizagem significativa em Geometria Analítica. A principal contribuição do GrafEq é a possibilidade de alteração das equações já utilizadas dando a chance ao aluno de ir revendo, durante o processo de construção, o que mais se ajusta à resolução do problema proposto. Assim, o aluno trabalha simultaneamente com conceitos geométricos e algébricos indo de encontro ao que diz Gravina:

Os programas que fazem ‘traduções’ entre diferentes sistemas de representação apresentam-se como potentes recursos pedagógicos, principalmente porque o aluno pode concentrar-se em interpretar o efeito de suas ações frente as diferentes representações, até de forma simultânea,... (GRAVINA, 1998, p. 1)

Não podemos esquecer de que na escola está arraigado um sistema de ditar do mestre e escrita manuscrita do aluno⁸ junto a algum material impresso (apostila, livro,...). É preciso levar em conta estes fatores, pois fazem parte da cultura dos nossos estudantes de Ensino Médio – e até mesmo neste fato a escola tem um pouco de culpa,

⁸ Aristóteles, que era inclusive professor, dizia que seus discípulos eram alunos, porque essa palavra é a junção de *a* com *luno*, ou seja, segundo ele, eram pessoas sem luz, mas que a receberiam através do conhecimento das coisas. Fonte: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Aluno>, acessado em 10 de Janeiro de 2008.

pois estes já nasceram na era da informação e ainda estão habituados com a tradicional forma de avançar nos estudos. Assim, este trabalho visa ajudar, levando os estudantes a raciocinarem (neste caso, sobre matemática) com o uso da máquina, situação comum no mercado de trabalho hoje e que aumenta com a velocidade da era da informação, reservando-lhes um mercado que já não aceita indivíduos desprovidos de tais habilidades.

Contudo, depois de defendermos a implantação das tecnologias digitais na educação, é preciso refletir sobre as práticas pedagógicas envolvidas neste processo. Ponte (2000), pesquisador das influências e desafios trazidos, para as licenciaturas, pelas tecnologias de informação e comunicação (TIC), determina que estes avanços geram mudanças tecnológicas e pedagógicas.

O autor diz que temos aqui um problema de terminologia. Durante muitos anos falava-se apenas no *computador*. Depois, com a proeminência que os periféricos começaram a ter (impressoras, *plotters*, *scanners*, etc.), começou a falar-se em *novas tecnologias de informação (NTI)*. Com a associação entre informática em telecomunicações generalizou-se o termo *tecnologias de informação e comunicação (TIC)*.

Qualquer das designações é redutora, porque o que é importante não é a máquina, nem o fato de lidar com informação, nem o de possibilitar a sua comunicação à distância em condições francamente vantajosas. Mas não há, por enquanto, melhor termo para designar estas tecnologias. (Ponte, 2000, p.3)

Citando Canavarro, o autor destaca três perspectivas diferentes dos professores para a utilização do computador no ensino da Matemática:

- i. Como elemento de animação, com capacidade para melhorar o ambiente geral da aula;
- ii. Como elemento facilitador, permitindo realizar determinadas tarefas tradicionalmente realizadas à mão; e
- iii. Como elemento de possibilidade, permitindo equacionar a realização de atividades que seriam difíceis de efetuar de outro modo. (Ponte, 2000, p. 3)

Recordando as relações entre mídia eletrônica e educação matemática, realizadas anteriormente, percebemos que apenas a última das perspectivas representam inovações efetivas na introdução das TIC na escola. Entretanto, precisamos analisar que para muitos profissionais é mais fácil optar pelas opções mais imediatas, menos trabalhosas e, principalmente, que não interfiram em suas concepções.

Este último ponto é mais delicado, pois representa mudanças nas práticas dos professores e isso só se resolve com formação continuada e quebra de paradigmas. No quadro abaixo, Ponte assinala algumas mudanças necessárias no perfil (papel) dos professores para a implantação, na sala de aula, das TIC.

Velhos papéis	Novos papéis
Fornecer informação	Criar situações de aprendizagem
Controlar	Desafiar, apoiar
Uniformizar	Diversificar

Ponte, 2003, p.5

Quadro 03 – Mudanças no perfil do professor

Com aceitação dos papéis identificados acima e com o conhecimento de softwares – específicos a sua disciplina e ferramentas de uso geral – e familiaridade com Internet, os professores estarão aptos a lecionar de forma moderna e, especialmente, significativa. Dessa maneira, favorece-se, segundo Ponte (2003, p.1), “o desenvolvimento nos alunos de importantes competências, bem como de atitudes mais positivas em relação à matemática e estimula uma visão mais completa sobre a natureza desta ciência”.

Segundo Kaput (2007), a gradual evolução do emprego da tecnologia na Educação Matemática acontece de forma lenta devido a problemas infraestruturais. O foco são os gastos ambíguos nas formas de TIC nas escolas, seus impactos e a falta de uma coevolução nas formas de ensinar e no currículo. Então, primeiramente deve-se resolver estes problemas, encontrando soluções mais efetivas e práticas, para que possamos construir relações simbióticas mais produtivas entre a Matemática e Educação Matemática com as TIC.

Por exemplo, relacionando a geometria dinâmica e os CAS (Computer Algebra System) vemos florescer, no meio computacional, as ideias de Descartes, uniformizando ainda mais a prática matemática. As TIC criam novas formas de prática e, conseqüentemente, novas matemáticas surgem com a utilização de softwares mais interativos e que servem como ferramentas que potencializam e incrementam as capacidades humanas. Isto acontece com a redistribuição das operações práticas do ser humano para a máquina.

Entre as matemáticas e as TIC, os mais importantes avanços são representacionais – os meios pelos quais as pessoas pensam, computam, se comunicam etc. Em particular, os procedimentos matemáticos são decodificados nos sistemas de notação e nas ações entre estes. Em outras palavras, os indivíduos precisam externalizar seus pensamentos variados em sistemas escritos – na Matemática, exemplos de sistemas de notação operatórios, sintaticamente estruturados e que suportam a ação humana, são as infraestruturas representacionais algébricas e aritméticas. Assim, forma-se uma classe diferente de relações entre humanos e ferramentas, diminuindo os limites entre suas cognições internas e os objetos.

Porém, há a estrutura educacional conservadora, com problemas rígidos, fixos e descontextualizados. Um exemplo deste retardo é a insistência da implantação de tecnologias computacionais na escola através de laboratórios, sugerindo a necessidade de um “local mais avançado tecnologicamente” e evitando que as TIC cheguem às salas de aula (ZANDVLIET, 2006).

Para isso, precisamos nos concentrar no epicentro da educação matemática – a sala de aula. Mudanças ocorrem na natureza do ensino pela fundamental alternância das estruturas de participação. Além de habilitar os estudantes para utilizarem diversos tipos de softwares, o professor deve implantar e desenvolver atividades, segundo Kaput, como:

- (i) A mobilidade de múltiplas representações como reflexos na habilidade para passar informação bi-direcionada e flexível entre professor e estudantes e entre estudantes, usando múltiplos esquemas.
- (ii) A habilidade de flexionar, agregar, manipular e visualizar representacionalmente as ricas construções dos estudantes na sala de aula.
- (iii) Construir estruturas sociais participativas. (Kaput, 2007, p. 181)

Engenhar e inserir estas novas atividades estruturais com as matemáticas para ensinar, ativando uma conectividade na sala de aula e suscitando novos problemas matemáticos, representa uma visualização da mídia computacional na Educação Matemática. Os estudantes, familiarizando-se com os objetos, entendem uma criação através da matemática, gerando novas atividades de estudo e resolvendo problemas matematicamente. As combinações matemáticas podem emergir nas interações entre múltiplos estudantes e a mídia computacional, criando uma infraestrutura tecnológica. Assim, estudantes observando matematicamente suas experiências no espaço social da sala de aula agregam representações em comum.

O papel do professor não desaparece, apenas muda. Este é responsável, por exemplo, por causar inquietações nos estudantes, estruturar as atividades e fazer intervenções como utilizar uma descoberta de um estudante para discutir com a classe. Usando estratégias dessa forma, ocorrerá instigação, aprendizado e atividades investigativas de novas ideias matemáticas que servirão como problemas de motivação na matemática escolar – pela personificação das matemáticas nas realidades sociais dos estudantes. Na educação básica, para Kaput,

... essas são possibilidades de rápidos avanços, com surgimento de novos tipos de interação social e pensamento – e novos caminhos para produzir matemáticas menos abstratas e mais acessíveis para uma larga população de estudantes. (KAPUT, 2007, p. 191)

Sem desviar-se do objetivo específico deste estudo, é preciso algumas considerações sobre as contribuições das TIC para as relações entre os meios algébrico e geométrico. Como o arrolamento entre estes meios é a base do estudo da Geometria Analítica, se faz necessário entender como a manipulação de equações (ou inequações), seguida da visualização destas representações num plano cartesiano $R \times R$, interfere no aprendizado de conceitos e técnicas analíticas.

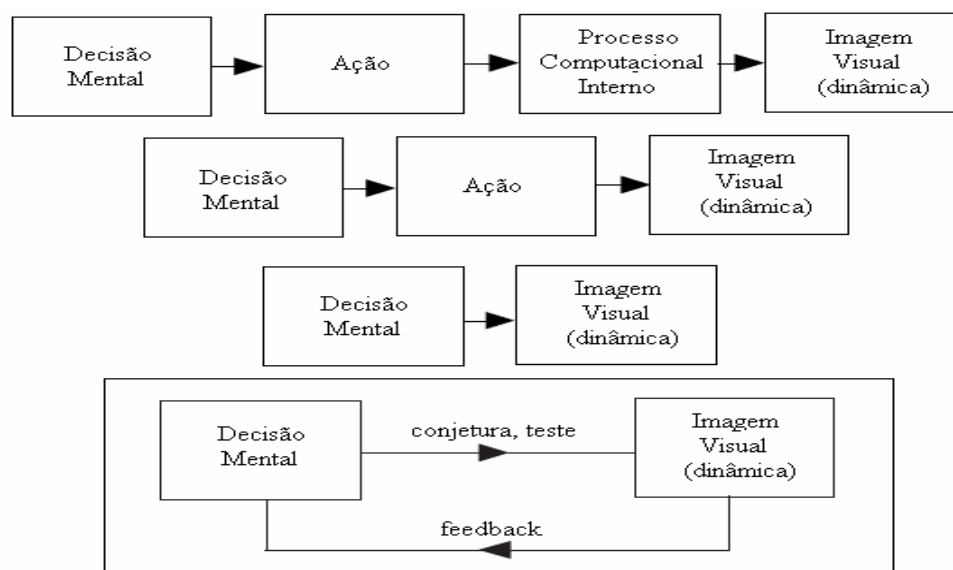
De acordo com TALL (1992)

“O cérebro humano é fortemente equipado para processar informações visuais. Pelo uso de gráficos computacionais é possível desenvolver esta força para ajudar estudantes a obter uma grande compreensão de muitos conceitos matemáticos.” (TALL, 1992, p. 1)

Representações de processos matemáticos no meio digital, e aliado às explorações e manipulações dos estudantes, desencadeiam um real aprendizado que dificilmente pode ser obtido com textos e figuras estáticos. O emprego de softwares gráficos na Educação Matemática aumenta as capacidades natas de exploração, gerando introspecção de conceitos matemáticos envolvidos nas construções de sala de aula.

A interface entre usuário e computador requer que o usuário tome decisões mentais para escolher uma ação (física) que determine dados para que o computador construa, por exemplo, um gráfico (gerando imagem visual). Na figura abaixo, temos esquemas que representam a interferência do computador nos processos mentais do estudante e na evolução destes. Por fim, temos um esquema semelhante ao

de Kaput (figura 11), determinando – a partir das decisões mentais – conjecturas e testes sobre a imagem visual que retornam, por sua vez, feedbacks para o campo mental.



TALL, 1993, p. 11

Figura 12 – Processos Mentais/ Tall

Visualizações de uma curva qualquer permitem explorações gerais e mais pontuais, com recursos de zoom, mudando o foco da figura para melhor observá-la. Neste caminho do ensino podemos desenvolver noções intuitivas acerca do objeto estudado – neste caso, uma equação (com suas características e propriedades algébricas) e sua representação geométrica (igualmente detentora de propriedades), “unindo simbolismo matemático (álgebra) e representação gráfica” (TALL, 1998, p. 3). A pergunta “Quais são as ligações entre o simbolismo e o visual na Educação Matemática?” é respondida por Tall (1999, p. 11) da seguinte forma: “É uma evidência considerar que a exposição de valores nas representações visuais ajuda na conceitualização”.

Para retornarmos à utilização do GrafEq, cito aqui duas propostas de atividades já realizadas. A primeira consiste no uso do GrafEq para reproduzir a obra do artista abstrato Miró, realizada em 2005 pela professora Marlusa Benedetti da Rosa, no Colégio Aplicação (CAp) da UFRGS, com a ajuda de Maira Leandra Alves (na época, mestranda em Educação em Ciências e Matemática na PUCRS). As autoras descrevem o sucesso da atividade dizendo que:

O GrafEq é um desses programas que permite contemplar grande parte das características apontadas anteriormente, na medida em que oportuniza aos alunos

interagir e reformular suas ações quantas vezes achar necessário. Outra característica importante desse programa é que ele utiliza a linguagem matemática corrente, o que facilita aos alunos a utilização e a aplicação de conhecimentos matemáticos adquiridos previamente. Dessa forma, o programa não exige dos alunos a compreensão de uma linguagem de programação, ao contrário apresente-lhes uma interface familiar ao utilizar a linguagem corrente. (Rosa e Alves, 2005, p. 2).

Foi durante a graduação, na UFRGS, que conheci a ideia de ligar arte e matemática através do GrafEq. Primeiro, na disciplina de Educação Matemática e Novas Tecnologias, ministrada pela professora Maria Alice Gravina. Depois, como monitor na disciplina de Laboratório de Prática de Ensino III. Na pós-graduação, um novo contato com o software amadureceu ideias para iniciar este trabalho. A utilização das artes na matemática inspirou um colega a também fazer uso do GrafEq. Na sua dissertação, Marcelio Diogo (DIOGO, 2006) defende a proposta de se utilizarem problemas geradores – de motivação e de necessidade de aprendizagem – para iniciar conteúdos de Matemática no Ensino Médio. O uso do software se faz com a reprodução de obras de diversos artistas abstratos para justificar a aprendizagem de Geometria Analítica. Outro trabalho que inspirou o trato entre equações e representações algébricas foi a dissertação de Oliveira (2001), que defende a importância da construção e estudo de gráficos no ensino de funções.

Traçar gráficos de funções é uma atividade fundamental no ensino e no aprendizado de conceitos algébricos. Esse tópico pode ser observado em todos os níveis de ensino. (OLIVEIRA, 2001, p. 60)

O autor também defende a ideia de que não basta apenas iniciar o uso de tais ferramentas sem pensar em novo formato para a aula e novas ações por parte dos professores. O ambiente de pesquisa e colaboração influencia uma nova classe de ensino, providenciando novas experimentações e alcance de um aprendizado significativo, estando de acordo com o que dizem os teóricos citados neste capítulo.

3 MÉTODO PARA COLETA E INTERPRETAÇÃO DOS DADOS

3.1. Estudo de Caso

Os estudos de caso vêm sendo amplamente utilizados como método de investigação em Educação Matemática. O objetivo é conhecer a natureza da situação investigada, seja ela uma instituição, um curso, uma disciplina ou qualquer outra unidade social e no caso desta pesquisa, uma sequência didática para o ensino-aprendizagem de geometria analítica.

Em outras palavras, o estudo de caso procura identificar, em uma situação específica, aspectos essenciais e característicos que contribuam para a sua compreensão geral. Na Educação Matemática, segundo Ponte (2006), os estudos de caso têm sido utilizados na investigação de questões de aprendizagem dos alunos bem como do conhecimento e das práticas de ensino dos professores, programas de formação de professores, projetos de inovação curricular, etc. Em qualquer uma destas situações, um caso constitui-se numa unidade definida e inserida num determinado contexto, explicada pelas variáveis internas e externas, pela sua história, natureza e propriedades. Estes são elementos essenciais ao se realizar um estudo de caso. O estudo pode ser exploratório (para se obter informações acerca do objeto de interesse), descritivo (simplesmente para explicar o caso) ou analítico (para problematizar o objeto de estudo, desenvolvendo uma nova teoria ou confrontando com uma existente).

As características fundamentais deste método de pesquisa são as possibilidades de uma variabilidade dos procedimentos de coleta de dados, a natureza empírica da investigação, as diversas fontes de evidências (entrevistas, observações, documentos e artefatos) e um apelo essencialmente descritivo, podendo chegar a um estado analítico, questionando e confrontando a situação de interesse com novas ou já existentes teorias. Cabe ressaltar que o estudo de caso não é uma investigação experimental, pois não serve para modificar o objeto de estudo e sim para compreendê-lo. Não se tem o controle nem a manipulação dos sujeitos observados, portanto, é necessário um distanciamento por parte do pesquisador, garantindo a veracidade e um perfeito julgamento dos resultados que possam surgir.

3.2. Caracterização da Amostra

3.2.1. Delineamento do estudo

Trata-se de um estudo empírico, com levantamento das reações, construções e interações dos estudantes pesquisados com o software em questão frente à sequência didática proposta.

3.2.2. Local de realização do Estudo

A pesquisa foi desenvolvida em uma escola da rede privada de ensino básico de Porto Alegre.

3.2.3. População em estudo

As atividades foram ministradas com estudantes do segundo ano do Ensino Médio, série em que leciono a disciplina de Matemática. As turmas eram compostas, em média, por 30 estudantes, no entanto, para efeito deste estudo de caso, foi escolhida uma amostra de doze estudantes para aprofundamento das observações. A escolha da amostra foi feita em conjunto com o orientador para garantir, tanto quanto possível, a representatividade da amostra, evitando selecionar apenas estudantes com alto rendimento escolar. Um fator importante que ajudou nesta escolha é que os indivíduos já eram alunos do pesquisador, possibilitando comentários sobre as características destes estudantes, em sala de aula, anterior à implantação da proposta.

Cabe aqui ressaltar que, no programa da escola, a Geometria Analítica consta no terceiro ano do Ensino Médio. Portanto, estes estudantes tiveram o primeiro contato com o conteúdo, antecipando sua formação e discutindo conceitos que seriam retomados e formalizados na próxima série.

3.2.4. Coleta de dados

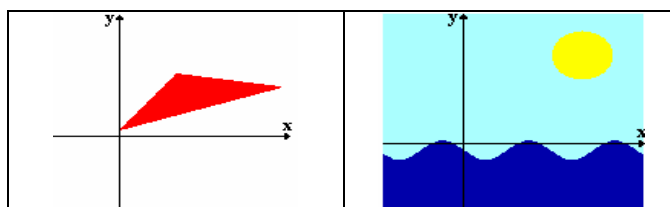
Durante as atividades foram colhidas observações feitas pelo investigador acerca dos comentários e interações dos estudantes com as atividades bem como respostas destes diante de questionamentos do pesquisador. As gravações dos arquivos construídos no software, arquivos de áudio e vídeo e um questionário respondido pelos estudantes também foram utilizados como objetos de análise.

3.2.5. Considerações éticas

A coleta de dados foi precedida da Autorização da Comissão de Ética em Pesquisa da instituição, com a apresentação de um termo de responsabilidade para análise sigilosa sobre os dados recolhidos durante a investigação. Este termo foi assinado pelo pesquisador responsável e autor deste estudo, no qual este se comprometeu com o anonimato dos estudantes e o uso dos dados somente para este estudo, com ciência da instituição onde ocorreu a investigação. A privacidade dos estudantes foi mantida, já que apenas as observações e comentários de sua autoria foram transcritos.

3.3. Material Utilizado

O material utilizado consiste em tarefas, divididas em atividades conforme apêndice A, a serem realizadas no software GrafEq. Para realizá-las, os estudantes precisaram fazer uso da escrita algébrica, cujo aprendizado iniciou no Ensino Fundamental, para fazer as representações geométricas propostas nas atividades. Como os estudantes ainda não possuíam formalizados os conceitos de Geometria Analítica, as tarefas foram desenvolvidas para que estes conceitos fossem questionados durante a interação do estudante com o software. O objetivo era permitir ao indivíduo o desenvolvimento do seu raciocínio, utilizando-o na resolução de problemas e construção de novos conceitos. Anterior ao início das tarefas, foi disponibilizado aos estudantes um período para uma breve exploração do software entendendo o seu funcionamento e as principais ferramentas, sem desconsiderar que este primeiro contato já implicou descobertas no campo da Matemática.



Quadro 04 – Exemplos de atividades da fase de coleta de dados

Para exemplificar, farei a análise de duas construções exigidas durante as atividades e que estão no quadro acima. À esquerda temos uma figura

extraída da Atividade 2 e à direita uma construção retirada da atividade 4 (ver apêndice A). Para construir (ou *desenhar*, termo mais utilizado por estudantes do Ensino Básico) o triângulo, os estudantes deveriam tratar de intersecções entre retas e/ou regiões no plano limitadas por inequações lineares. O GrafEq não permite pintar espaços como pode se fazer em softwares de edição de imagens, obrigando os estudantes a compreenderem as regiões limitadas e as inequações que as representam para realizar suas construções. Também é notável que o triângulo não possa ser retângulo com catetos paralelos aos eixos do sistema cartesiano, representando um nível maior de dificuldade por envolver equações e inequações mais sofisticadas.

Já na segunda construção temos uma função trigonométrica e uma equação de circunferência, abordando equações que não são lineares e aspectos como translações e, novamente, inequações e as regiões geradas por estas no plano (sol e mar).

A realização das tarefas foi acompanhada pelo professor pesquisador em dois aspectos. No primeiro, com importância para os estudantes, com o respaldo matemático e didático necessário a um clima que propicie construção de novos conceitos em matemática. O outro aspecto foi a coleta direta de comentários, observações, vídeo, áudio e outras situações de sala de aula, utilizadas na análise desta proposta.

4 ANÁLISE DOS DADOS

4.1. Descrição

Neste capítulo transcrevo as observações feitas durante as atividades com comentários, novas observações e análises. Também estão inseridas ressalvas feitas posteriormente acerca dos vídeos e áudio gravados durante as atividades. Primeiro temos a descrição do grupo de estudantes que serviu de amostra para esta pesquisa e depois, separadamente, o que aconteceu com cada um durante as atividades – permitindo, nas considerações finais, um cruzamento das informações presentes entre si para uma análise mais geral da aplicação do software e da produção dos estudantes em Geometria Analítica, à luz das teorias presentes no capítulo 2.

Como já pontuei no capítulo anterior, todos os participantes são estudantes do segundo ano do Ensino Médio da escola em que leciono. Este foi o primeiro contato dos estudantes com o conteúdo geometria analítica – pelo menos em forma de módulo dentro do cronograma escolar – e com este tipo de atividade no laboratório de informática da escola. Os estudantes desconheciam o software e ele apenas foi lhe apresentado com as funções mais simples (digitar equações, cores etc.) antes de iniciarem as atividades. Entretanto, aprender novas funções e relações já faz parte das atividades e interações com o GrafEq. Outro fator é que as atividades estavam desvinculadas das avaliações escolares da série, permitindo analisar, com mais representatividade, o envolvimento dos estudantes com o software. O tempo utilizado pelas atividades foi de quinze (15) períodos.

As primeiras atividades eram mais para exploração de ferramentas do software do que propriamente lúdicas. No entanto, o interesse do grupo (inclusive de estudantes que nunca haviam demonstrado tal entusiasmo pela disciplina antes) motivou reflexões de conceitos matemáticos simples que pareciam não ter significado antes de serem manipulados e questionados durante o trabalho (quadrantes, diferença entre reta e segmento de reta, crescimento de reta e a relação com a equação etc.) – é o fenômeno da interação entre estudantes e as TIC, defendida por Ponte (2000).

Neste início, alguns estudantes estavam com dificuldades em salvar e enviar os seus arquivos, atrasando um pouco a realização das tarefas. Este é um fato interessante, pois estamos numa era dominada pelas TIC ainda existem estudantes,

pertencentes às classes A e B e em fase de conclusão da escola básica, que não dominam as atuais formas de comunicação. Assim, a atividade, além de tratar de conteúdos específicos à disciplina, também contemplou objetivos mais globais do campo educacional, como valer-se das TIC para produzir material e comunicar-se (com envio de suas produções), atendendo a recomendações dos PCNs+ (2006, p. 118).

As atividades foram preparadas para analisar a evolução dos estudantes em Geometria Analítica através da interação com o GrafEq. Portanto, cada estudante obteve seus resultados através de suas capacidades e experiências diante das atividades. Neste grupo há doze estudantes sendo que apenas sete fizeram um conjunto considerável das atividades, pois participaram da totalidade do período de pesquisa. Os outros cinco serão citados porque mesmo saindo do estudo no início das atividades já produziram materiais e comentários passíveis de análise.

Como forma de preservação dos envolvidos, os estudantes não foram nomeados, tendo seus nomes substituídos, para identificação somente do autor deste estudo, por anagramas de três letras (conforme quadro abaixo). Para orientação do leitor, as observações dos estudantes seguem a ordenação deste quadro.

1. DAG	2. DAL	3. DEB	4. PAC	5. GIU	6. MAU
7. AKE	8. PED	9. JEA	10. GAB	11. JUL	12. BON

Quadro 05 – Estudantes observados (siglas para identificação)

Também com o fim de facilitar a leitura, comentários sobre algum estudante fora da sua descrição no texto estarão acompanhados do número que representa sua ordenação no corpo desta análise. Isto é, caso exista um comentário a respeito do estudante DEB, por exemplo, durante a análise da produção do estudante AKE, o estudante citado conterà a sua ordenação (**DEB(3)**) para dar ao leitor a possibilidade de consultar, mais agilmente, trechos anteriores do texto.

Os questionamentos e comentários dos estudantes foram transcritos na íntegra, sem cortes e sem correções, para não perdermos em verossimilhança. Para identificação e para evitar excesso de expressões SIC⁹, estas transcrições estão em *itálico*.

⁹ SIC é um termo da língua latina cuja tradução literal é "assim". A palavra *Sic* é usada frequentemente em português para indicar *é desta forma (Sic et simpliciter)*. É possível, de fato, que a palavra "sim" do português tenha origem neste termo. O "sic" é usado por editores, numa citação, para evidenciar que determinada palavra ou frase foi utilizada no texto original escrito ou falado por outrem, não sendo um

Na sua composição, as análises estão distribuídas de maneira que indiquem o progresso de cada estudante pelas atividades, com uma posterior conclusão individual acerca da sua produção e das respostas do questionário proposto. Após, traço conclusões gerais sobre os resultados obtidos com a proposta na sua totalidade, isto é, um exame de todo o grupo pesquisado e sua interação com a proposta. As atividades encontram-se resumidas (apenas na análise do primeiro estudante) para explicar as produções, mas estão na íntegra no apêndice A deste texto. As análises estão inculcadas nas teorias do capítulo 2, cujas citações foram identificadas.

4.2. Análise das produções individuais dos estudantes

1. DAG

O estudante demonstrou desde o início bastante interesse em realizar as tarefas – motivação causada pela utilização do computador. Durante as atividades nesta modalidade de aula, que privilegia as construções individuais dos estudantes, DAG, recém chegado dos EUA e ainda aprendendo o português, não encontrou as dificuldades de compreensão identificadas em sala de aula.

Atividade 1 (retas, inequações lineares): O estudante não entendeu como era para salvar o arquivo e então usou o comando print scream e me enviou, por e-mail, a imagem da tela com a atividade feita. Esta saída encontrada por ele é um exemplo da autonomia que os estudantes dispõem sobre suas construções nesta estrutura de aula e, além disso, a interação com tecnologias permite o uso de várias ferramentas (KAPUT, 2007) – neste caso, DAG utilizou um software para tratamentos de imagens (possivelmente Paint) para salvar a imagem abaixo com a sua construção e a Internet para enviá-la.

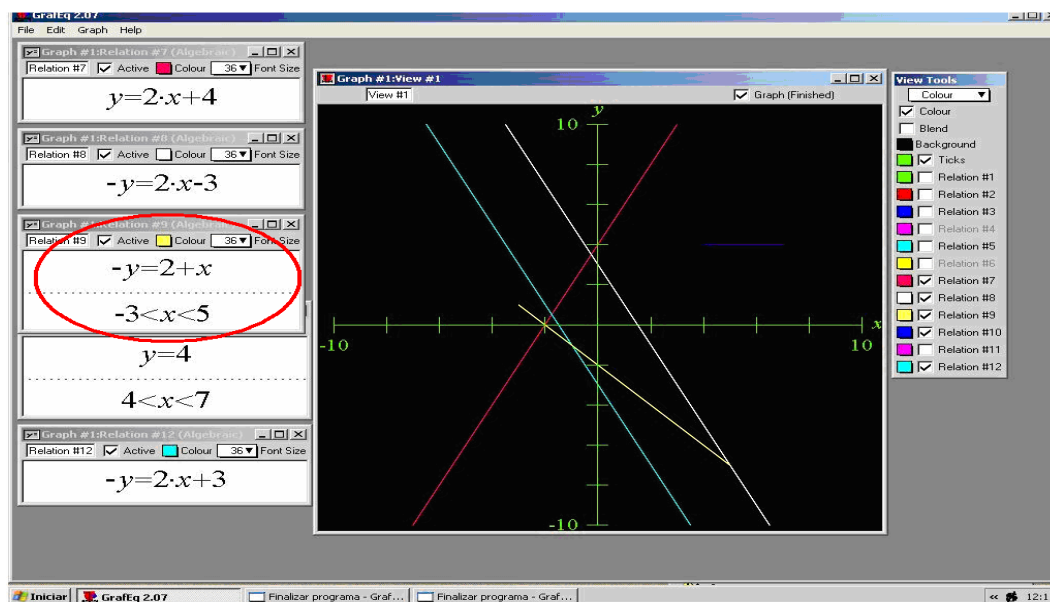


Figura 13 – Atividade 1/ DAG

Nesta atividade, com objetivo de permitir aos estudantes um aprendizado das principais ferramentas do software (via manipulações), DAG precisava construir retas crescentes e decrescentes, retas paralelas e segmentos de reta. Como podemos notar na figura enviada por ele, a atividade foi realizada com sucesso. Na relação¹⁰ circulada (e em outras relações da figura), que é referente ao segmento amarelo no gráfico, notamos que o estudante utilizou equações lineares sem preocupações com a forma (note que o y aparece negativo) que lhe foi apresentada no primeiro ano. Essa foi a sua maneira de trabalhar com equações lineares, demonstrando que o clima da aula era propício às produções individuais, incentivadas tanto pela conduta do professor (este pesquisador) como pela interface do GrafEq. Também percebemos uma boa utilização de restrições de domínio como $-3 < x < 5$ para construir o segmento de reta.

Atividade 2: Construção de dois retângulos (um deles com localização pré-determinada) e um triângulo qualquer não retângulo e com os lados não paralelos aos eixos. Aqui, o estudante não conseguiu realizar o triângulo com todos os lados não paralelos aos eixos, mas já utilizou inequações de forma consistente e natural para representação de uma região no plano, conceito que se mostra difícil na sala de aula com giz e quadro¹¹.

¹⁰ Relação, neste caso, são as janelas que servem para digitar as expressões algébricas no software.

¹¹ Para facilitar a leitura, a expressão sala de aula sempre estará associada à situação com giz e quadro negro, sem desqualificá-la e reafirmando que a proposta deste estudo é outra estrutura de aula.

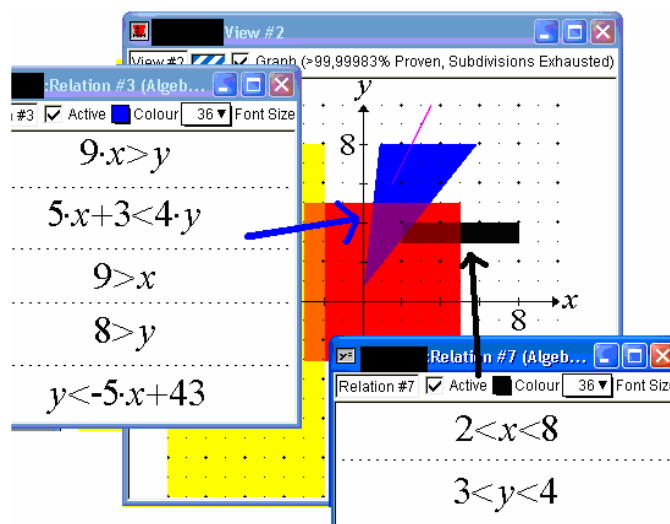


Figura 14 – Atividade 2/ DAG

Notemos também que ele ainda apresenta despreocupação em colocar o y no primeiro membro das (in)equações, pois não faz diferença alguma nem para ele e nem para o software. Na evolução do conhecimento matemático, isto é perfeitamente normal. Só é necessário algum tipo de organização para inferências mais sofisticadas se a estrutura utilizada não resolver o problema em questão, assim como, por exemplo, surgiu historicamente a geometria analítica e outros campos da Matemática (EVES, 2004). Na figura acima, temos o recorte do seu arquivo.

Atividade 3: Construção de discos. Aqui DAG acaba de conhecer a equação do círculo e já mostra, novamente, compreensão do sinal de desigualdade para conceber discos ou regiões fora deles. O fato é que com naturalidade, ele utilizou um novo conhecimento (equação do círculo) aliado à noção de regiões no plano desenvolvida na atividade anterior.

Durante esta atividade foi gerado um pequeno vídeo em uma câmera digital. Analisemos as imagens abaixo capturadas do vídeo e, a seguir, a sua explicação acerca da sua construção.

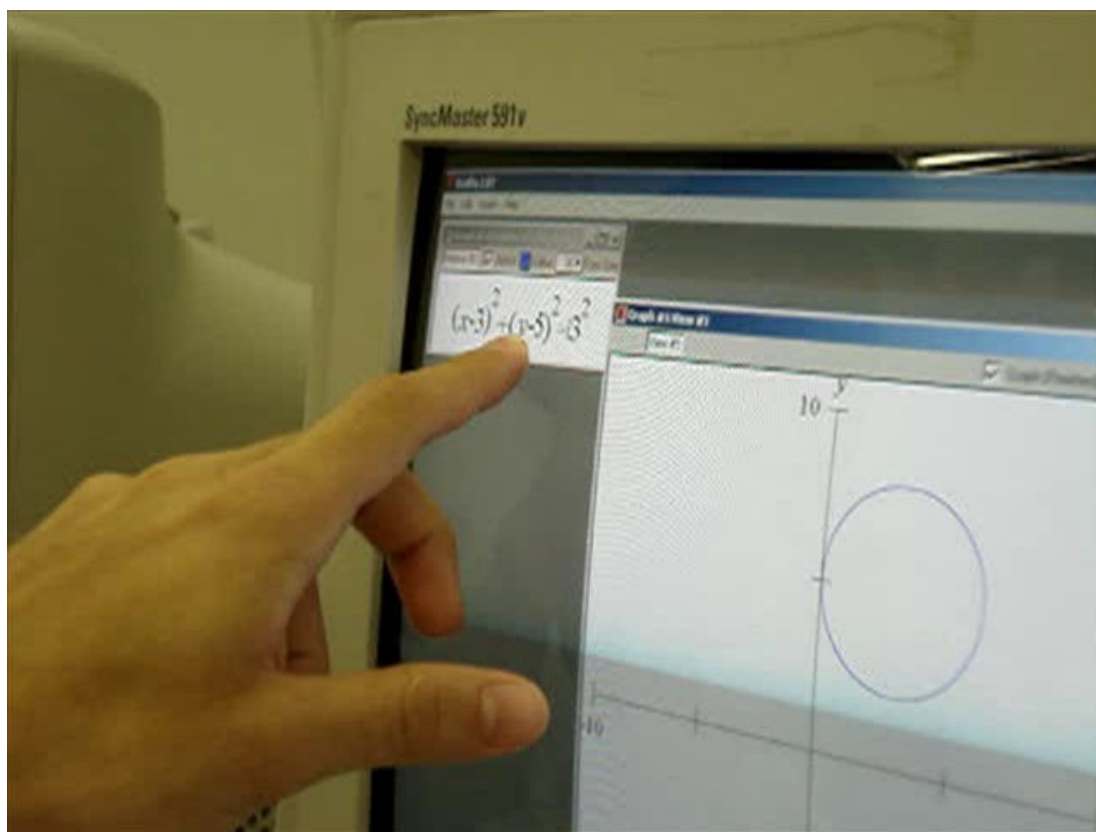
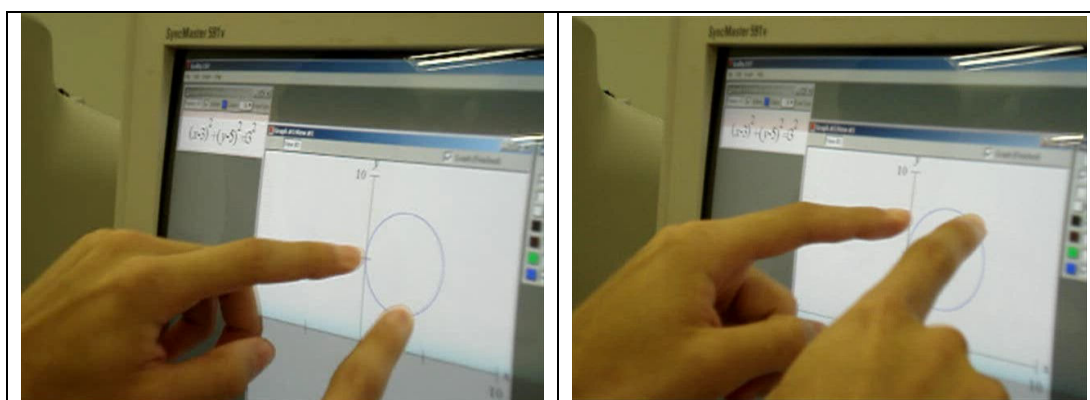


Figura 15 – Atividade 3/ DAG (imagem 1 do vídeo)

Na imagem acima, DAG está apontando a equação e identificando, como ele mostra no quadro abaixo (à esquerda), as coordenadas do centro da circunferência. À direita, mostra conhecimento da definição de raio girando os dedos sobre a equação e dizendo que os pontos estão a uma mesma distância do ponto central.



Quadro 06 – Atividade 3/ DAG (imagens 2 e 3 do vídeo)

DAG fez este comentário antecipando sua próxima ação, que era variar a igualdade da equação para as desigualdades $<$ e $>$. A ação foi capturada na figura abaixo:

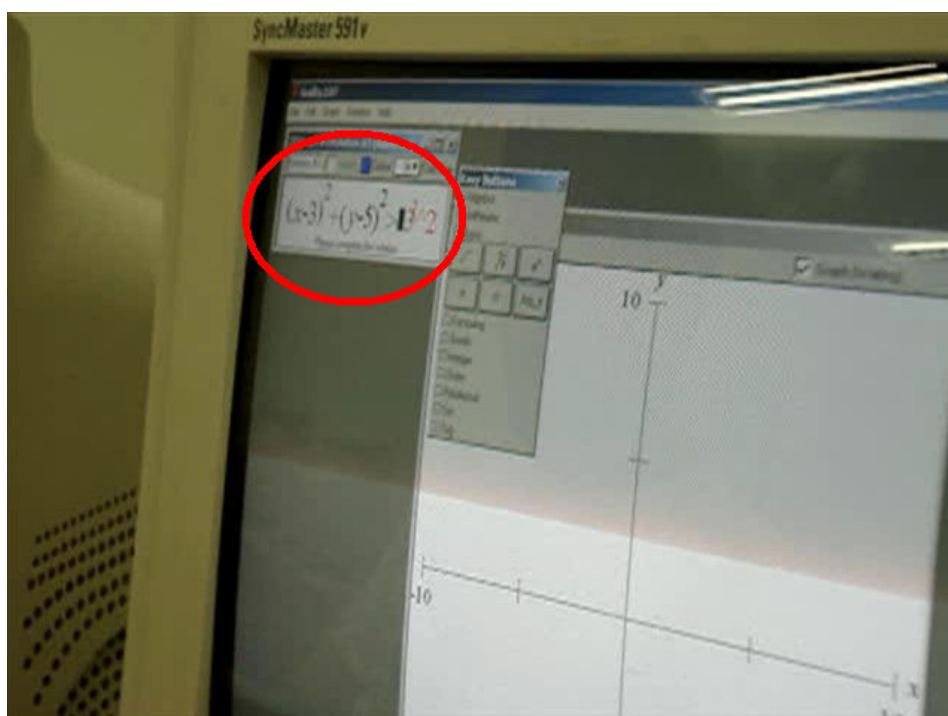
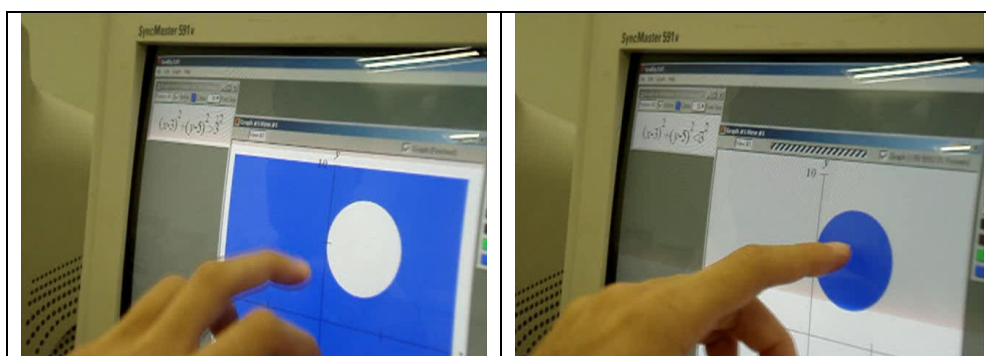


Figura 16 – Atividade 3/ DAG (imagem 4 do vídeo)

Abaixo, no quadro, temos a explicação de DAG para os resultados encontrados. Nesse momento, o estudante utiliza uma linguagem bastante correta, identificando que as regiões estão *fora e dentro do raio*. Este vídeo demonstra o quanto DAG flutua com desenvoltura entre as representações algébrica e geométrica (segundo KAPUT (1992), sistemas de notação distintos), absorvendo a ideia chave da Geometria Analítica.



Quadro 07 – Atividade 3/ DAG (imagens 5 e 6 do vídeo)

Atividade 4: É proposta aos estudantes a construção de quatro figuras pré-definidas (uma cruz, uma casa, um sol sobre o mar e um carrinho). Para fazer a cruz, DAG sobrepôs dois retângulos, que ele já fazia na atividade 2 e para construir a

casa, o desafio de fazer um triângulo apareceu novamente. A figura original de sol e mar era retangular, mas o estudante, demonstrando criatividade, avanço no domínio das inequações e autonomia sobre sua construção, a construiu na forma abaixo (veja as relações):

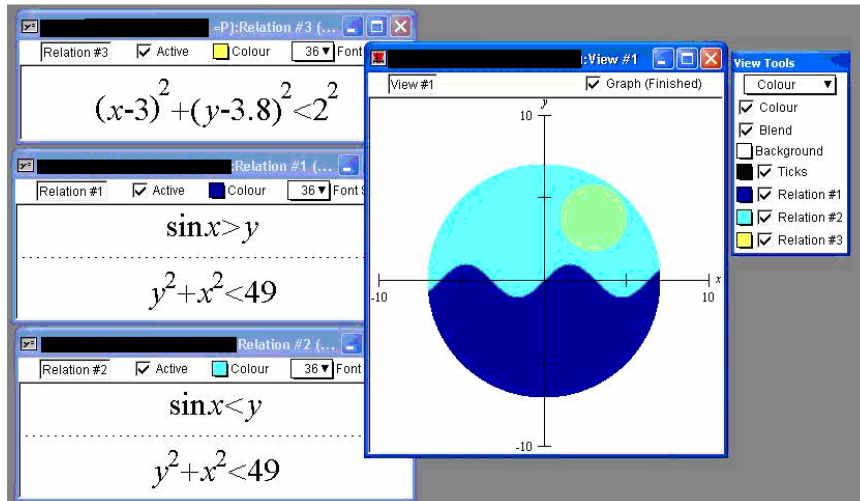


Figura 17 – Atividade 4/ DAG: Sol e mar

Na construção do carrinho, a criatividade e o fator lúdico impulsionaram novas descobertas matemáticas. Aqui o estudante começou a variar os expoentes da equação da circunferência encontrando uma inequação que gerou uma roda especial para o carro. Veja:

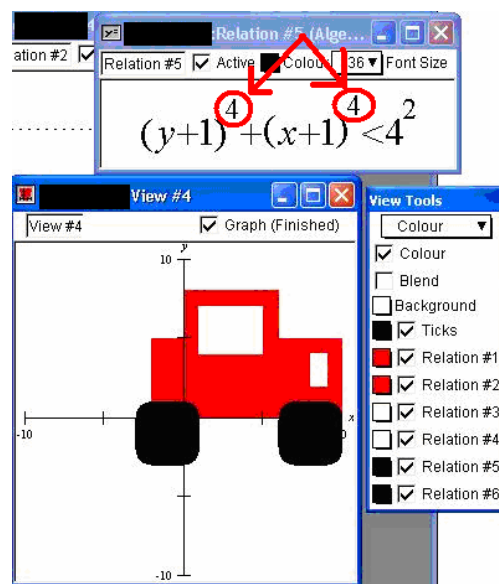


Figura 18 – Carrinho/ DAG

Este tipo de descoberta é comum num meio que permite manipulações dos objetos. No caso, para melhorar sua construção, DAG achou a inequação de outra região no plano, semelhante a um disco.

Atividade 5 (círculos x retas): Ao iniciar a atividade, DAG havia esquecido a equação da circunferência mas lembrou rapidamente vendo arquivos anteriores – o estudante numa sala de aula é mais dependente do professor, diferente desta situação. Ao digitar a equação, DAG esqueceu do expoente dois no x e ficou espantado com o que *parecia uma parábola* (de fato, era) *de lado* (eixo de simetria paralelo ao eixo das abscissas). Ele construiu um gráfico com maior visualização ($-100 < x < 100$ e $-100 < y < 100$) e concluiu que era infinita sua construção – conceito que não foi bem construído em séries anteriores, pois mesmo o estudante conhecendo uma parábola e a função quadrática, a noção de infinito na curva pela primeira vez estava clara aos seus olhos. Também existia o fato de que, no início, o estudante não aceitava a existência da parábola com simetria no eixo das abscissas, confundindo com a ideia de que parábola servia apenas para representar uma função (quadrática). Logo, percebeu o erro inicial, um erro que gerou muitas reflexões sobre conceitos matemáticos – especificamente sobre curvas cônicas.

Atividade 6: Esta atividade exigia a construção de algumas figuras planas (quadrado, triângulo retângulo, triângulo equilátero, trapézio, trapézio retângulo e losango). Ele não chegou a construir as duas últimas figuras e justificou com duas falas importantes: (i) queria ir logo para a próxima atividade que era mais divertida, e; (ii) as figuras que estavam faltando poderiam ser construídas facilmente juntando as construídas anteriormente.

Na primeira justificativa vemos claramente impulso motivacional, gerado pelo ambiente tecnológico. Entretanto, mais importante para a matemática, foi sua segunda preleção. Nela, presenciou-se uma construção do conceito de figuras decomponíveis e a sua percepção de que precisaria apenas reunir retângulos (construídos em atividades anteriores) e triângulos. Permite o avanço, porém somente após a construção de um triângulo equilátero.

Para a construção do triângulo equilátero, o estudante curiosamente começou com um quadrado e então pedi para que ele descrevesse seus passos. Como

estava terminando o período e este pesquisador atendia a outro estudante, sem que fosse exigido, DAG me mandou sua resposta por e-mail.

DAG <DAG@yahoo.com> escreveu: oi sor, e o DAG da XXX. eu terminei o triangulo equilatero so que o grafeq nao salvou, entao eu vou te escrever como eu fiz ta, pra te ajudar com a tua pesquisa. =D eu comecei com aquele quadrado sabe, e dai e criei a forma (as retas) do triangulo equilatero dentro desse quadrado para criar um triangulo. usando essa forma como referencia eu fiquei brincando com as formulas ate chegar nessa mesma forma. e assim como eu fiz o meu triangulo equilatero, mas eu sei que nao e prq o topo dele deveria ser maior, mas eu CHEGEI PERTO!

O que podemos entender na sua descrição, é que primeiro ele criou as retas (através de suas equações) que dão suporte aos lados do triângulo e, depois, manipulou essas equações transformando em desigualdades para formar o triângulo, que segundo ele, era *aproximadamente equilátero*. Para a Geometria Analítica é muito importante que o estudante já faça estas relações entre igualdades/ desigualdades e suas representações, contudo, o fato de encontrar uma solução aproximada (diante da impossibilidade de obter a resposta correta) é de muito interesse para a Matemática como ciência.

Atividade 7: Esta atividade se constituía em uma construção livre com um número mínimo de relações. Aqui o estudante demonstrou grande afinidade com o software e muita criatividade. Na sua construção, o Lula Molusco¹² baixa as pálpebras quando ativadas duas relações (que contêm as equações de dois semi-discos).

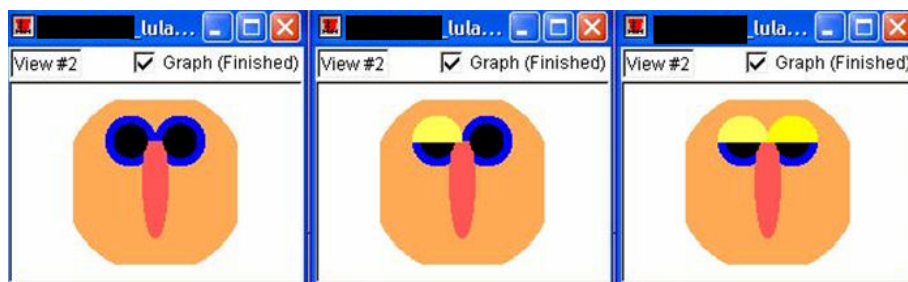


Figura 19 – Atividade 7/ DAG - Lula Molusco

¹² Personagem do desenho animado infantil Bob Esponja, da Disney.

A Atividade 8 (triângulos) e a Atividade 9 (arte abstrata) não foram realizadas pelo estudante por conta da falta de tempo. Antes da construção do Lula Molusco (que despendeu bastante tempo), o estudante realizou outras construções que não foram salvas.

Questionário

1) Qual foi a maior dificuldade encontrada na realização das construções no programa? *na construcao da programa nao tinha nada que realmente dificultava.*

2) Descreva, com suas palavras, qual foi a matemática envolvida na realização dos exercícios? *a matematica envolvida era dificil prq a maioria das formulas que nos utilizamos eram formulas que a gente nem aprendemos ainda, mas eu acho isso uma coisa boa prq isso nos (os alunos) ja com uma idea com que a gente vamos trabalhar depois, e ter mais ou menos uma idea de como eles foncionam.*

3) O que você achou de interessante nas atividades? Qual a atividade que mais lhe interessou? *o fatos mais interessante nas atividades era como o grafico mudava com a mudancas na formula como mudando um negativa para positivo, um quadrado para cubico. a atividade que mais me interessou foi aquele de criar o mar com o sol porque isso demonstrou com as ondas como uma pessoa pode usar ou construir essa formulas de tal jeito para ter tanto liberdade da forma ou estrutura do grafico.*

4) Faltou algo para a realização das atividades? *computadores boms e a sabedoria de usar e-mail =P*

5) Se existir algum comentário, crítica ou sugestão para esta sequência de atividades com o uso do GrafEq, escreva-as. *nao nao, nada de ideias. mas eu achei essa atividade muito tri.*

Considerações individuais: O estudante se mostrou bastante motivado pela possibilidade de manipular o software de acordo com a sua criatividade e tempo para aquisição dos conceitos envolvidos nas construções. Dessa forma, as atividades foram realizadas de forma quase linear e apontam para a aquisição e utilização da linguagem algébrica nas construções geométricas. Essa compreensão da

proposta da Geometria Analítica (relação álgebra-geometria) por parte do estudante pode ser identificada na sua resposta à questão três (3) do questionário.

2. DAL

Diferente do anterior, este estudante não possui prática com o computador, mas, lentamente, chegou ao início da atividade cinco (5). Outra particularidade de DAL é que ele sempre apresentou dificuldades na disciplina (existem registros desse problema, na escola, desde a educação infantil).

Na Atividade 1 e na Atividade 2 a identificação e uso das principais ferramentas do software foi regular mas as tarefas foram cumpridas satisfatoriamente. Na atividade 1, DAL encontrou algumas soluções para otimização do tempo.

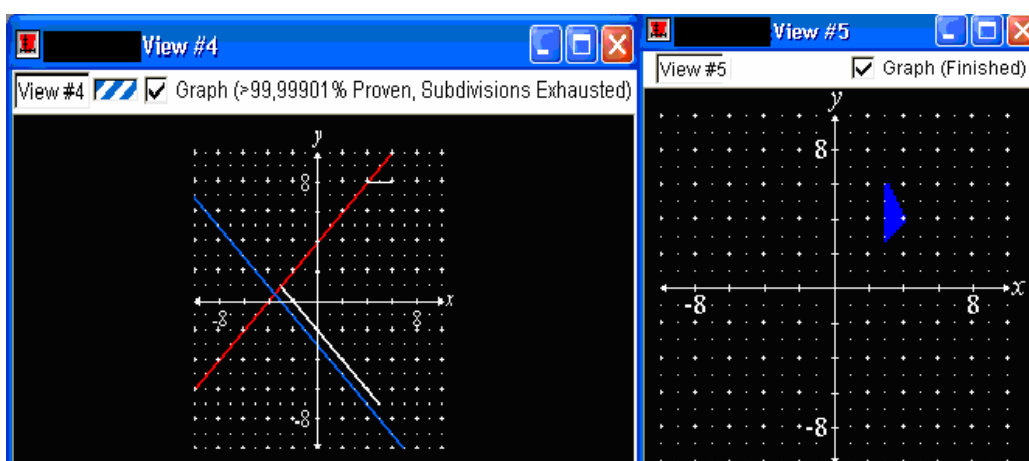


Figura 20 – Atividades iniciais/ DAL

Na figura anterior (à esquerda), notamos que ele utilizou a reta branca (paralela à reta azul) para construir seu segmento de reta, diferente do que fez DAG(1). Na atividade 2 podemos notar (à direita, na figura) que o triângulo não foi construído com todos os lados não paralelos aos eixos ordenados. A ideia de inequações para representar regiões demorou em ser usada, justificando o tempo levado para a realização da tarefa.

Atividade 3 (discos): Para iniciar a atividade, DAL foi informado da equação da circunferência pelo professor. Ao digitar a equação na relação, esqueceu de

um quadrado e construiu uma parábola (como DAG(1) havia feito). Entendeu o erro e, sem os questionamentos feitos pelo colega, o consertou. Mostrando conhecimento de regiões no gráfico e da expressão referente a uma circunferência, utilizou logo a desigualdade $<$ e construiu discos pelos quadrantes antes de iniciar a atividade. Para construir a segunda figura (discos concêntricos) tentou utilizar apenas uma relação, mas desistiu, justificando que não poderia utilizar duas cores – aqui DAL já demonstra perspicácia com as ferramentas do GrafEq. Por um momento, confundiu tamanho (raio) com local (centro), mas o lapso foi logo contornado com a consulta da construção anterior. Analisando a construção (Figura 21), é perceptível que DAL construiu primeiramente os discos concêntricos para, posteriormente, ajustar o tamanho do retângulo acoplado aos discos.

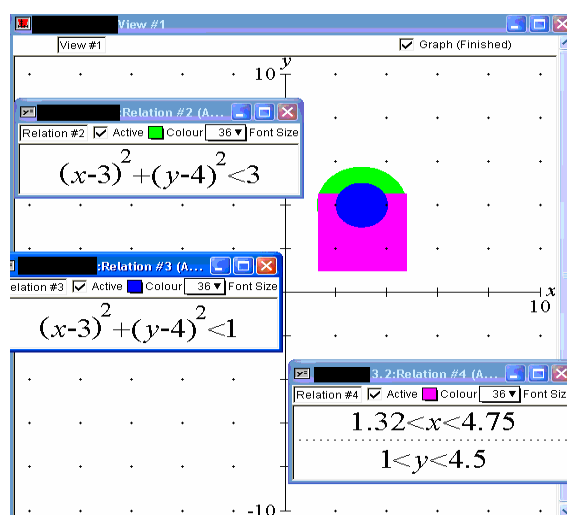


Figura 21 – Atividade 3/ DAL

Na relação da parte inferior da figura, percebemos a aproximação por decimais. Com esta atitude, o estudante demonstrou noção de regiões retangulares e seus limites (nos eixos coordenados), de números decimais e da ideia, também levantada por DAG, de fazer uso de aproximações para solucionar problemas sem solução exata com as ferramentas disponíveis – neste caso, seu aparato matemático.

Novamente ele apresenta a ideia de aproveitamento de figuras para ganhar tempo. As figuras originais da atividade são dois círculos concêntricos e um círculo com um retângulo acoplado. A sua justificativa foi a seguinte: *assim fica mais bonitinho, parece aqueles aparelhos antigos de som*. É claro que ele queria convencer o pesquisador a seguir para outras atividades, ganhando tempo. Entretanto, por trás desta

atitude, percebemos a assimilação do aluno com a sua construção e não podemos esquecer que isto, neste caso, significa identificação com a aula de matemática.

Atividade 4: Atividade na qual DAL levou mais tempo (mais do que outros colegas também). Vejamos a análise de alguns acontecimentos durante a construção das figuras.

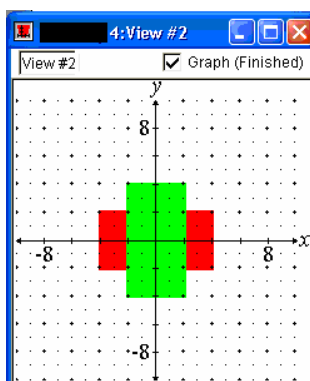


Figura 22 – Atividade 4/ DAL – cruz

Para construir a cruz, o estudante demorou tanto para sobrepor dois retângulos que até esqueceu de mudar a cor de um deles. A demora justifica-se pelas tentativas, segundo ele, *de encontrar apenas uma equação que desse conta da cruz*. Saliento aqui o envolvimento e o espírito de pesquisa alcançado com a atividade, pois o simples fato de tentar apenas uma equação implica grande exercício de raciocínio acerca de expressões algébricas. Na construção da casa, o grande desafio era o telhado. Após tentativas com retas (ajustando-as para formar um triângulo isósceles), o estudante se dá conta que deve transformar as equações encontradas em desigualdades (da mesma forma que na atividade 1 – Figura 20). Depois de variadas tentativas, concluiu que era necessário colocá-las em uma mesma relação para representar um sistema de inequações e, conseqüentemente, preencher o seu telhado (até esqueceu de corrigir sua janela e construir uma porta – itens da figura original).

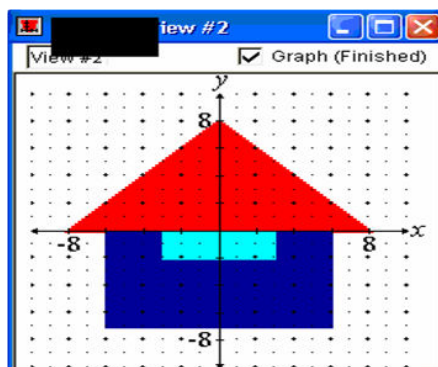


Figura 23 – Atividade 4/ DAL – casa

Para formar o mar, primeiramente o estudante tentou a equação (com uma desigualdade no final) $y = \text{sen } x < 0$ e com $y = \text{sen } x < 3$ até comparar com a inequação do disco e utilizar $y < \text{sen } x$. O instigante, para ele, foram as descobertas matemáticas com os primeiros “erros”. O aluno não salvou, mas o que ele construiu, inicialmente, foi esta curva:

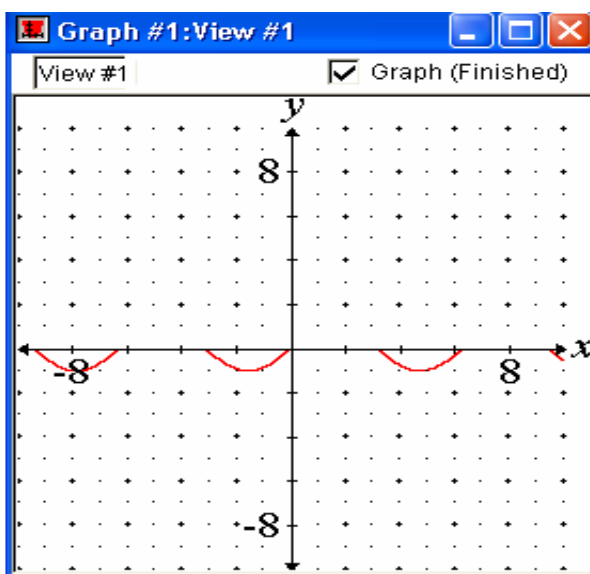


Figura 24 – $y = \text{sen } x < 0$

Visualizando a construção “errada”, DAL pôde compreender o significado de < 0 na sua expressão.

Mais uma vez a atividade, baseada na manipulação de objetos no meio digital, interfere nas refutações do estudante, dispensando respostas prontas e sem significado do professor e auxiliando na construção do significado de desigualdades e suas representações no plano cartesiano. Abaixo, temos a construção final de DAL.

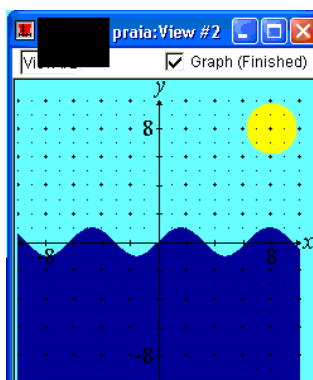


Figura 25 – Atividade 4/ DAL - sol e mar

Na construção do carro, note que não houve preocupação em fazer o carro semelhante ao proposto na atividade. O estudante apenas entendeu como proposta de construção um carro e começou a fazê-lo – o seu carro.

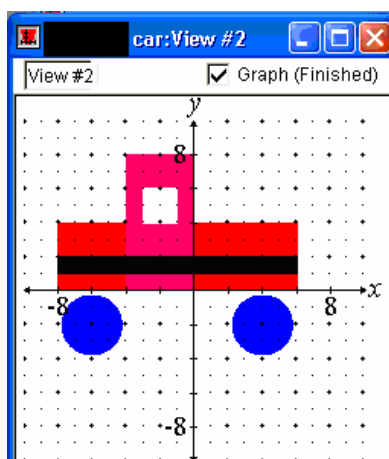


Figura 26 – Atividade 4/ DAL - carro

Nesta construção, o estudante ainda mostrou dificuldades em utilizar restrições e apresentou falta de estratégias para resolução do problema, mas aos poucos, continuando com a manipulação, ele chegou ao resultado exposto acima. A seguir, alguns extratos e análises da filmagem no início dessa construção.



Quadro 08 – Atividade 4/ DAL – carro (imagens da construção)

Quando cheguei à máquina onde DAL trabalhava, me deparei com a imagem à esquerda do quadro acima. Percebi que ele queria fazer a parte de cima do carro com três retângulos (dois laterais e um superior). Não fiz nenhuma correção e perguntei por que estava tão estreito, cumprindo com a minha função de instigar o estudante. Ele entendeu que eu o questionava sobre como ele fez aquela construção e iniciou uma explicação (imagens central e à direita no quadro), demonstrando domínio das restrições. Respondeu-me que colocou o x entre zero e um (1), mostrando a relação contendo a restrição $0 < x < 1$.

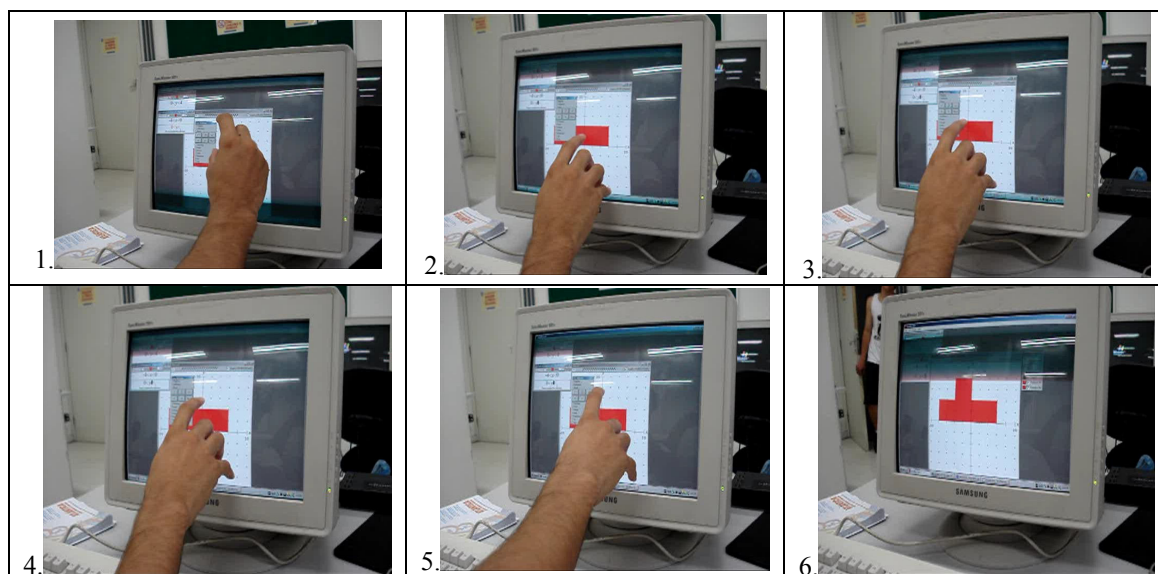
Com o meu questionamento, DAL achou que estava errado e mudou sua estratégia para construção do “topo” do carro.



Quadro 09 – Atividade 4/ DAL – carro (imagens da construção 2)

No quadro acima, está a tentativa do estudante, já com a estratégia modificada, de construir o “topo” do carro com apenas um retângulo. Porém, percebendo os valores atribuídos a y por DAL, questionei se não estava “infinita” sua construção (me referindo à sua construção, que apresentava uma região não limitada). Ele me compreendeu e começou a explicar *que iria só até o oito*, enquanto apontava a localização no monitor e modificava a relação (quadro 10).

O fator importante à Educação Matemática, a ser analisado nesta construção, é que interagindo com o software, o estudante modificou estratégias para “atacar” o problema – uma característica do trabalho matemático. A descrição de suas ideias também é rica no domínio das relações álgebra-geometria, sem desconsiderar que o exercício de relatar os passos da construção, formando um diálogo em termos matemáticos, serviu de avaliação para o pesquisador.



Quadro 10 – Atividade 4/ DAL – carro (imagens da construção 3)

Atividade 5: DAL apenas iniciou a atividade, construindo um disco em cada quadrante, usando quatro relações.

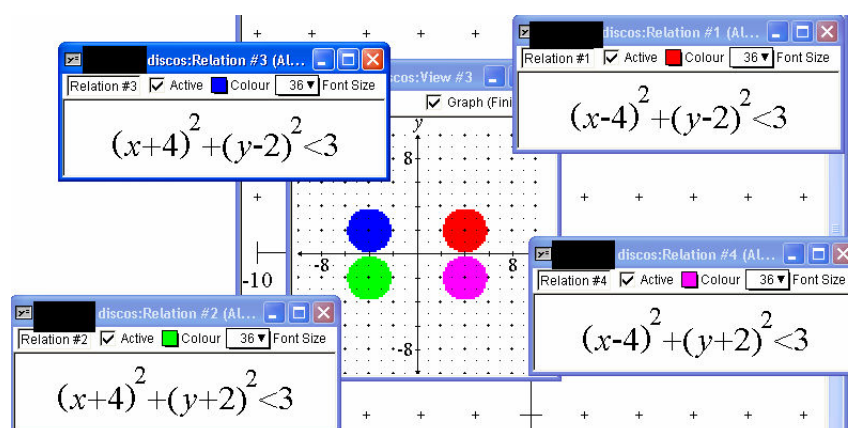


Figura 27 – Atividade 5/ DAL

As Atividades 6, 7, 8 e 9 não foram realizadas pelo estudante.

Questionário

1) Qual foi a maior dificuldade encontrada na realização das construções no programa? *A minha maior dificuldade foi na construção da casa, especificamente no telhado que é um triângulo relativamente grande.*

2) Descreva, com suas palavras, qual foi a matemática envolvida na realização dos exercícios? *Se não me falha a memória foram equações de primeiro e segundo grau*

3) O que você achou de interessante nas atividades? Qual a atividade que mais lhe interessou? *Foi quando eu consegui pegar a "manha" (raciocínio) do programa, tudo ficou mais fácil. A atividade que mais gostei foi a construção do carro*

4) Faltou algo para a realização das atividades? *Tempo*

5) Se existir algum comentário, crítica ou sugestão para esta sequência de atividades com o uso do GrafEq, escreva-as. *Crítica: Logo que você abre o GrafEq, você primeiro tem que digitar uma equação para depois ver os quadrantes, eu acho que deveria aparecer os quadrantes primeiro, para você poder calcular o local exato que deseja colocar a figura, para só depois digitar a equação. Comentário: Apesar do pouco tempo que utilizei o programa, pude perceber que meu raciocínio ficou mais rápido, tanto é que resolvi baixar o programa para ver se continuo obtendo estes resultados.*

Considerações individuais: Apesar das dificuldades e limitações enfrentadas, o estudante realizou satisfatoriamente as tarefas. Nas imagens captadas na construção do carro percebemos a clareza dos seus argumentos e tentativas usando as relações algébricas que constituíam partes da sua construção. Na resposta 2 do questionário, DAL pontua que a matemática envolvida nas atividades foram *equações de primeiro e segundo grau*. Aqui, temos um sinal de que a utilização de equações da circunferência, bem como restrições de domínio e imagem, parece ser tomada como aspectos do software e não como matemática – ou seja, para o estudante, aspectos lúdicos ligados à proposta. O fato de que DAL fez o download do software para continuar explorando, demonstra um fator motivador desencadeado com a proposta.

3. DEB

As Atividades 1 e 2 foram realizadas rapidamente sugerindo fácil apropriação, por parte do estudante, das ferramentas principais do software.

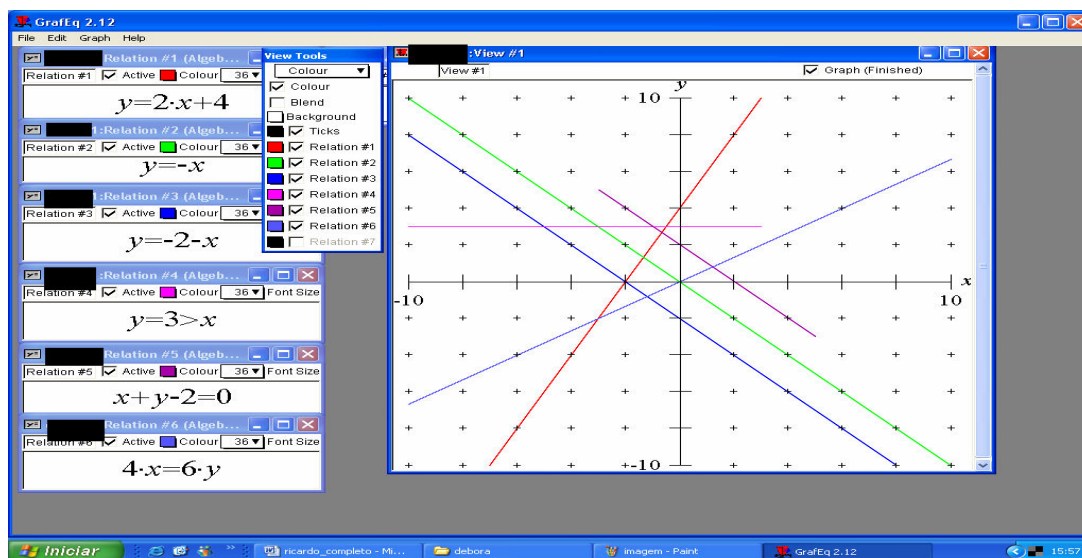


Figura 28 – Atividade 1/ DEB

Nas relações da figura acima – muito bem organizadas por DEB (compare a ordenação das cores das relações com a ordenação da pequena janela entre o gráfico e as relações, que mostra a ordem das relações construídas), percebemos – até a quarta relação – a preocupação em colocar somente o y no primeiro membro da igualdade, fato que DEB considerava necessário, pois não aceitava que pudesse decorrer de outra forma.

Nas relações e construções posteriores ele já percebeu que as relações entre x e y se mantinham as mesmas, independente da localização das variáveis nas equações – construindo um resultado muito importante. Na figura abaixo, além destas constatações em geometria analítica, percebemos uma melhor mobilidade, gerada por explorações, com as ferramentas do software, através da cor do fundo do gráfico e da utilização da função *Blend* (que não deixa as figuras sobrepostas).

No triângulo amarelo, o estudante utiliza um sistema de desigualdades, apesar de este triângulo ter um lado paralelo ao eixo das abscissas – contrariando a proposta inicial.

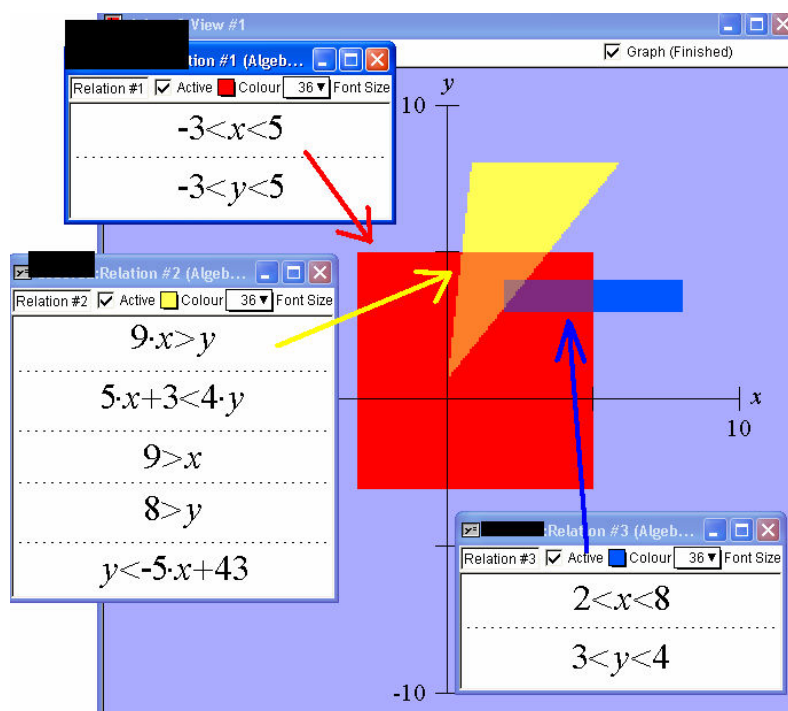


Figura 29 – Atividade 2/ DEB

Atividade 3: O estudante iniciou a atividade reclamando da pouca variedade de cores – isto demonstra que DEB queria personalizar suas construções, reforçando a ideia de autoria nos trabalhos dos estudantes proporcionada pela proposta.

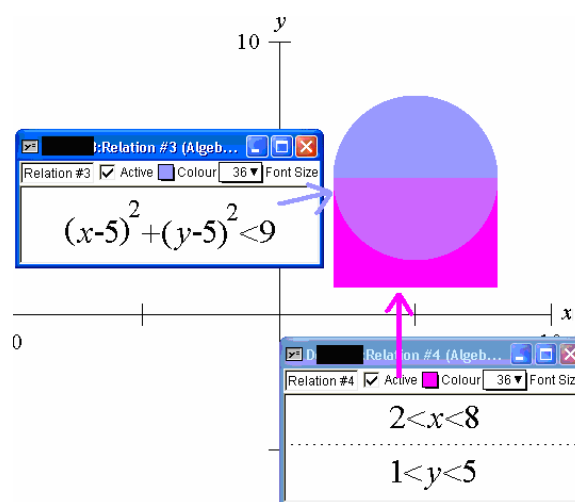


Figura 30 – Atividade3/ DEB

Após ter sido informado da equação da circunferência, DEB construiu logo as três figuras propostas utilizando, já na primeira tentativa (estratégia contendo a noção de região no plano cartesiano), desigualdades (figura acima). Ressalto que, diferente de DAG(1) e DAL(2), o estudante não aproximou o retângulo do disco, mas usou a estratégia de pensar em números inteiros para o centro e raio da

circunferência que gerassem um diâmetro também inteiro, utilizando-o como base do seu retângulo, ou seja, como $x = 5$ era a abscissa do centro da circunferência e $r = 3$ foi o raio escolhido, DEB apenas variou a distância do raio no eixo das abscissas para formar a base do retângulo ($2 < x < 8$).

Atividade 4: Iniciou a construção da cruz, primeiramente, com cinco retângulos mas, percebendo a demora, mudou para dois retângulos sobrepostos. Identifico aqui uma mudança de estratégia – fator importante do trabalho matemático que, baseado no que percebo na minha prática, os estudantes pouco demonstram. Na construção da casa surge a dificuldade para fazer o triângulo (aproximadamente meio período). Dificuldade esta justificada pelo pouco domínio de equações lineares e, portanto, uma necessidade de muitas tentativas para que as retas formassem um telhado (triângulo isósceles). Isto se reflete na discussão que DEB tentou iniciar comigo – inclinação das retas e como isso se traduz em suas equações? – mas deixei para que ele descobrisse utilizando o software. Como podemos ver na figura seguinte, DEB resolveu o problema com boas escolhas para equações lineares. Também foi bastante astuto na construção e concordância dos retângulos que representam a casa, a porta e a janela.

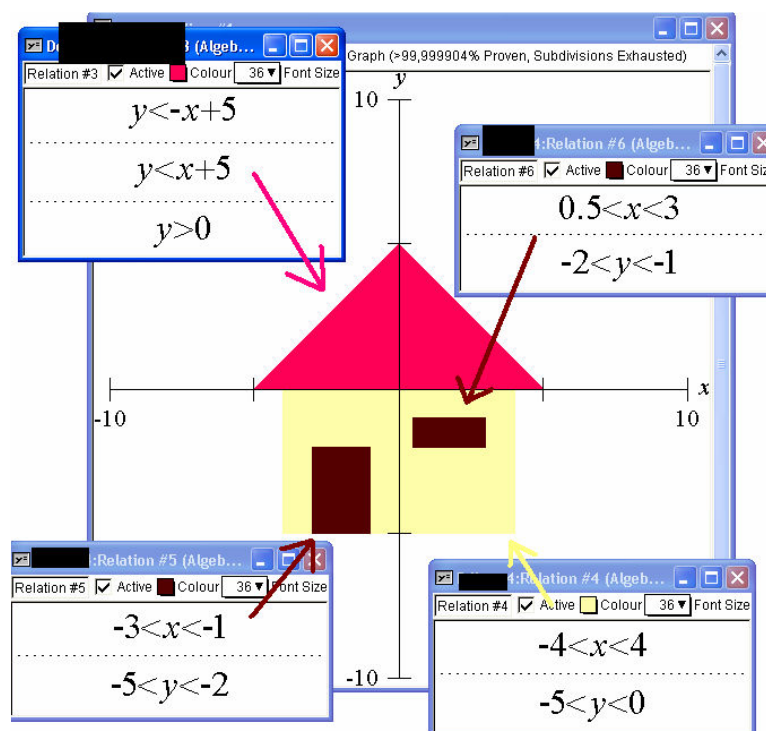


Figura 31 – Atividade 4/ DEB - casa

Como as desigualdades já estavam sedimentadas nas suas ideias, as próximas construções (sol/mar e carro) foram realizadas com facilidade, da mesma forma que aconteceu com DAG(1). Na construção seguinte, DEB utilizou translação para deixar o mar *mais para baixo*.

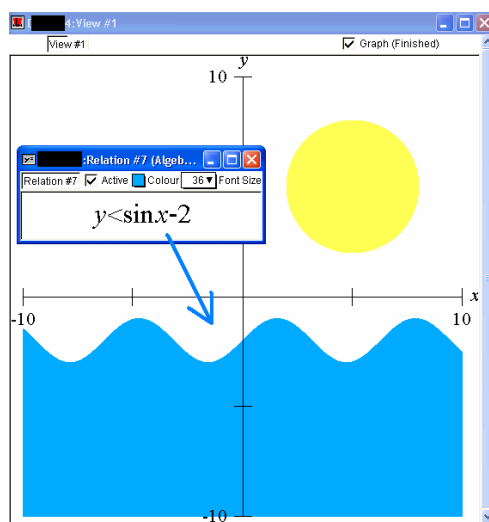


Figura 32 – Atividade 4/ DEB - sol e mar

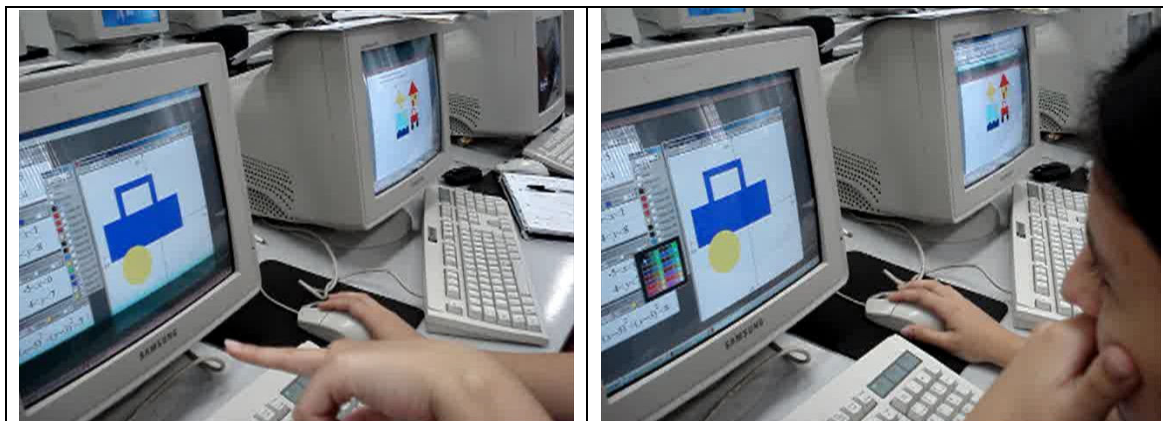
A seguir, temos extratos de um vídeo feito durante a construção do carro onde mostra a naturalidade com inequações (em especial a que representa um disco) que o estudante alcançou ao longo das atividades.



Quadro 11 – Atividade 4/ DEB - carro (imagens 1 e 2)

Nas imagens 1 e 2 do quadro acima, DEB está construindo uma roda do carro. Note que ele está decidindo o tamanho e o local, mudando valores na equação. Diferente de DAL(2), o estudante consegue visualizar simultaneamente a figura que está construindo e as mudanças necessárias nas relações. O estudante continua, nas imagens abaixo, realizando as mudanças de forma muito detalhista – demonstrando que entende

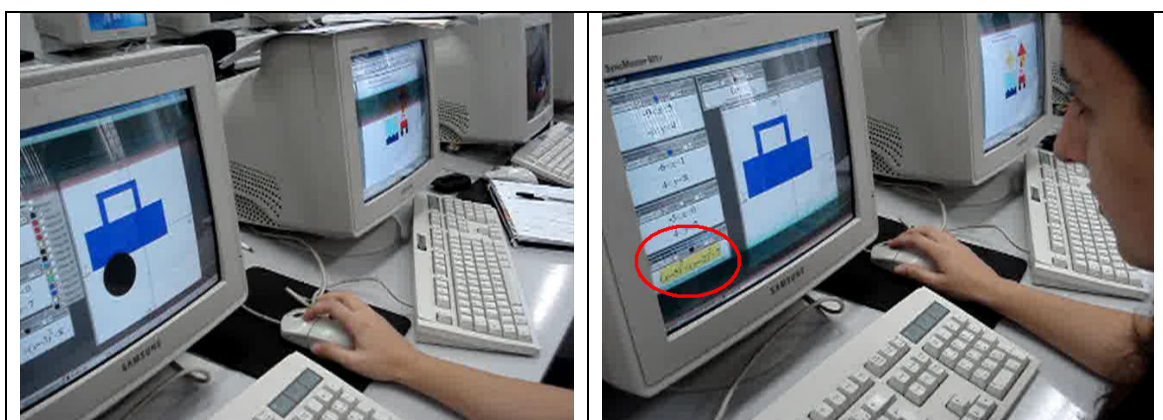
como funcionam as translações nos sentidos verticais e horizontais com suas respectivas variações na equação. Note que na imagem 4 (à direita) quadro seguinte DEB escolhe uma cor para a roda.



Quadro 12 – Atividade 4/ DEB - carro (imagens 3 e 4)

Já com a primeira roda construída e de cor preta, o estudante parte para a outra. Até então, DEB não havia percebido que estava sendo filmada.

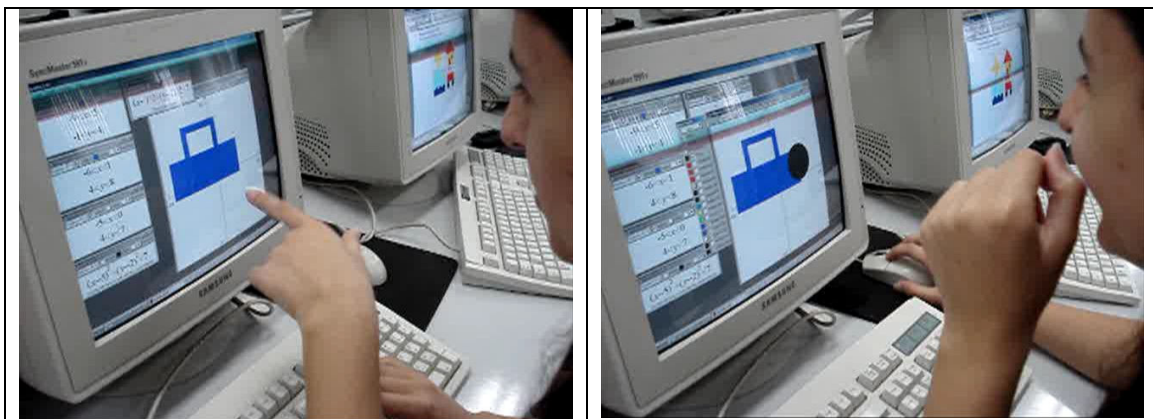
Aqui temos uma situação que ilustra a familiaridade das novas gerações com tecnologias digitais. Mencionei rapidamente que o software aceitava CTRL-C (comando para copiar uma seleção) e CTRL-V (comando para colar uma seleção) e, instantaneamente, DEB selecionou a equação anterior (imagem 6, de amarelo) para utilizá-la na próxima relação (já aberta).



Quadro 13 – Atividade 4/ DEB - carro (imagens 5 e 6)

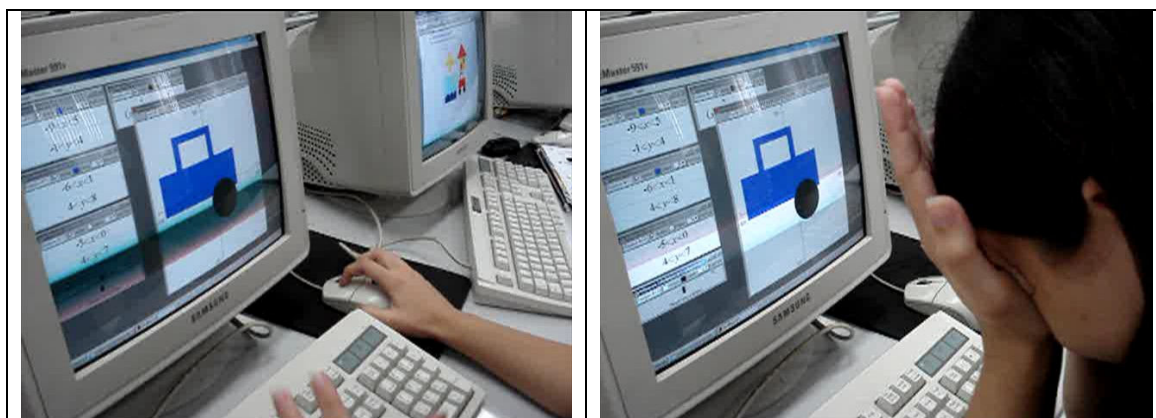
Nas imagens 7, 8, 9 e 10, o estudante continua buscando precisão na sua construção, demonstrando o conhecimento matemático adquirido e divertimento

com a atividade. Ao olhar para a construção da imagem 8, a conclusão de que a ordenada deve se manter negativa é instantânea.



Quadro 14 – Atividade 4/ DEB - carro (imagens 7 e 8)

Não sei se o leitor notou mas, desde a imagem 6, a primeira roda não aparece – DEB também só foi notar na imagem 10. Após uma breve e chateada reação, o estudante refaz a relação e finda sua construção (imagem 11, na página seguinte).



Quadro 15 – Atividade 4/ DEB - carro (imagens 9 e 10)

Na imagem 11 (abaixo), temos uma comprovação de que DEB, assim como outros colegas, teve uma participação ativa nas atividades – assumindo autoria de suas construções, realizando-as com o seu jeito. O estudante estava utilizando o monitor ao lado para visualizar a atividade – note que o carro, originalmente, era vermelho.

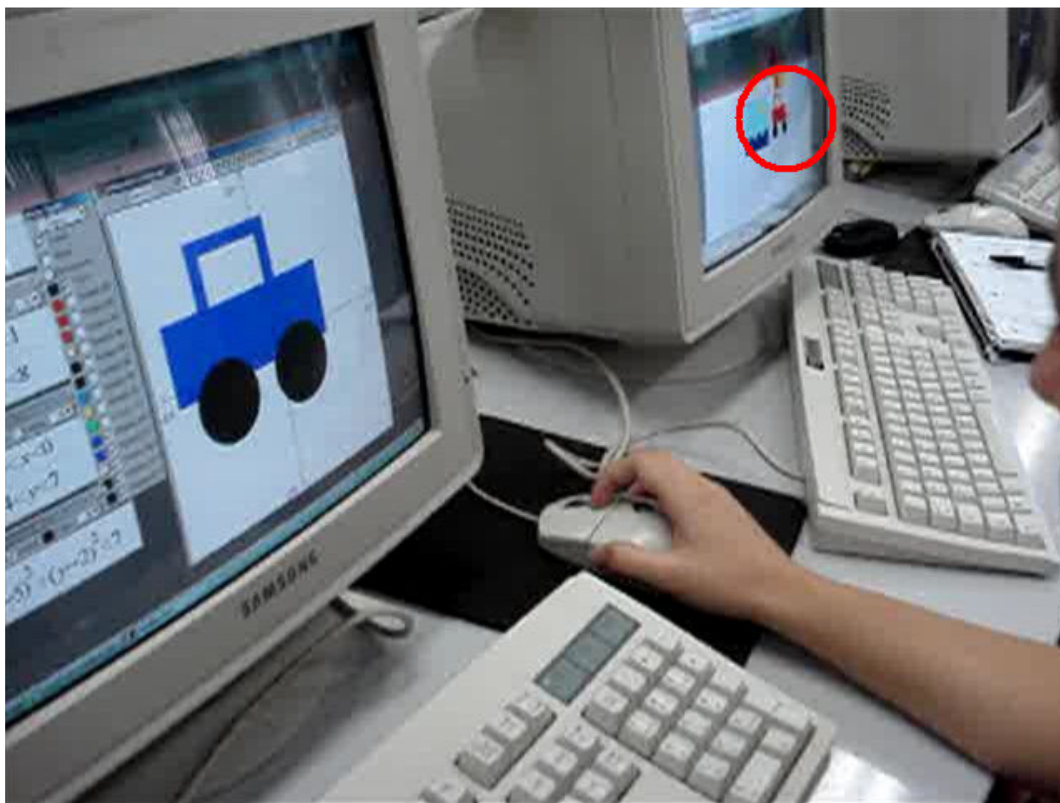


Figura 33 – Atividade 4/ DEB - carro (imagem 11)

As Atividades 5, 6, 7, 8 e 9 não foram realizadas.

Questionário (*Soor, não so muito boa nessas perguntinhas desse tipo, mas vou tentar hehe*)

1) Qual foi a maior dificuldade encontrada na realização das construções no programa? *Foi mais difícil no começo, descobrir o que era necessário pra criar cada forma, como fazer pra ficar colorido dentro das formas, como colocar as imagens no lugar necessário.*

2) Descreva, com suas palavras, qual foi a matemática envolvida na realização dos exercícios? *Ah, quando a gente botava as fórmulas pra formar as figuras, porque tinha que saber como criar cada uma e relacionar o x e o y*

3) O que você achou de interessante nas atividades? Qual a atividade que mais lhe interessou? *Achei legal que, com o tempo, dá pra aprender a criar realmente figuras, como a casinha e o carrinho que a gente fez, que foram as mais legais, até porque, uma vez que a gente pega o jeito de como fazer um retângulo ou um quadrado por exemplo, a maior parte da casinha já fica fácil de ser feito, daí a gente percebe que na verdade era mais fácil do que parecia.*

4) Faltou algo para a realização das atividades? *Hmmmmmm... não, acho que tava tudo bem*

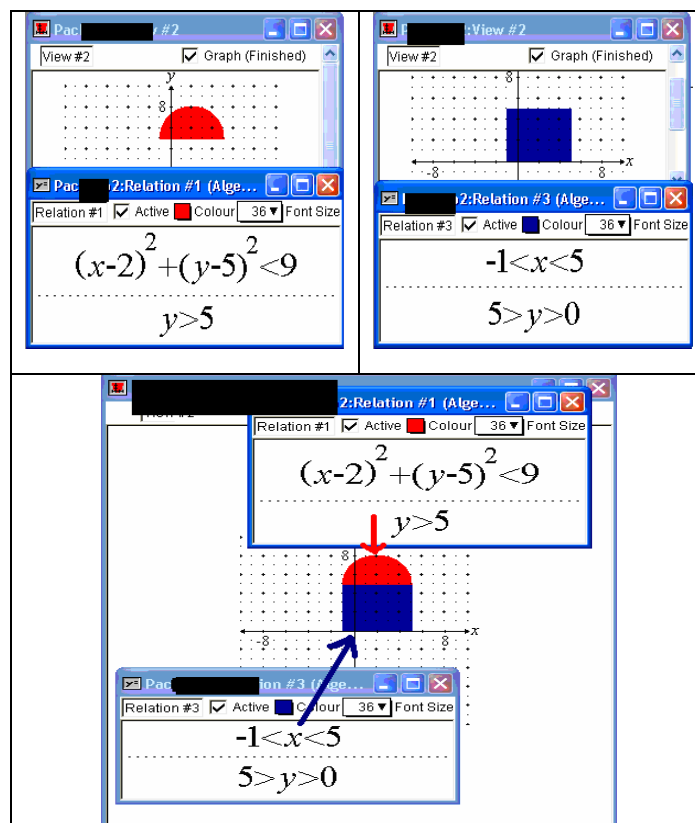
5) Se existir algum comentário, crítica ou sugestão para esta sequência de atividades com o uso do GrafEq, escreva-as. *Bom, se eu falar mal, tu vai mudar alguma coisa realmente? brincadeira sor, não sei, gostei de tudo, gostaria de ter tido mais tempo pra aprender a mexer no programinha.*

Considerações individuais: Apesar de ter faltado três períodos (e talvez por isso não tenha realizado todas as tarefas), DEB demonstrou grande desenvolvimento na habilidade de escolher e manipular corretamente relações algébricas para realizar construções geométricas – apropriando-se de conceitos analíticos. Além disso, a interatividade a que estava sujeito proporcionou momentos de exercício na produção de estratégias para resolução de problemas. Nas respostas 1 e 2 do questionário percebe-se, como exemplos de aprendizagem, o entendimento de regiões no plano e suas representações algébricas (...*fazer pra ficar colorido dentro das formas...*), de translações através de mudanças nas equações (...*colocar as imagens no lugar necessário...*) e a noção principal de uma representação gráfica e sua equivalência algébrica (... *a gente botava as fórmulas pra formar as figuras, porque tinha que saber como criar cada uma e relacionar o x e o y*).

4. PAC

Atividade 1: PAC iniciou a construção com $x = y + 3$. Depois, mudou de ideia e resolveu começar com o y para utilizar conhecimentos de funções. Nos itens 1 e 2 o estudante utilizou translações para fazer as retas paralelas e observou que o coeficiente angular (que ele chamava de *o número na frente do x*) não mudava. O resto da atividade aconteceu bem rápido, já fazendo uso das restrições para a construção dos segmentos de reta e compreendendo as regiões no plano definidas no item 6.

Atividade 2: Já bem familiarizado com as restrições e ao contrário dos outros colegas, este estudante construiu a “janelinha” abaixo sem sobrepôr uma região retangular e um disco.



Quadro 16 – Atividade 2/ PAC

Ele teve o cuidado de construir um semi-disco que fizesse fronteira com uma região retangular de base igual ao diâmetro do mesmo. Para ressaltar sua construção deixou as “partes” das figuras com cores diferentes, como é visto nas visualizações do seu arquivo.

Atividade 3: O pesquisador informou a equação do círculo e o estudante já a digitou com o símbolo de menor (<) para construir logo o disco. Aqui, PAC demonstra uma apropriação e domínio rápido de uma inequação e sua respectiva representação no plano.

Atividade 4: Para fazer a cruz, o estudante cruzou dois retângulos com a mesma cor, da mesma maneira que DAG(1) e DEB(3). Para fazer a casinha partiu da identidade $y = x$ e com translações e mudanças no coeficiente angular chegou às inequações.

As translações também foram utilizadas para fazer o sol e o mar. Na figura abaixo, vemos a inequação utilizada por PAC na construção do mar ($\sin x > y+4$). Por que o estudante não utilizou $y < \sin x - 4$? Quando ele começou a construção, sabia

que deveria usar o seno e então começou com isto, até mesmo porque, nesta atividade (para resolver este problema), ele entendeu que o -4 geraria um $+4$ no outro membro da desigualdade. O estudante não utilizou a forma usual, pois, para ele, nesta proposta, não existe. Como descrevi no início deste capítulo, os estudantes desconheciam o conteúdo e, portanto, a expressão **usual** (ou **não usual**) não faz sentido. PAC estava construindo sua própria matemática e apenas nós, que já a dominamos, sabemos que, de acordo com o avanço de suas explorações, ele concluirá que é necessário o que determinamos como **usual** para seguir em inferências mais evoluídas. Isso faz parte da construção da Matemática como ciência.

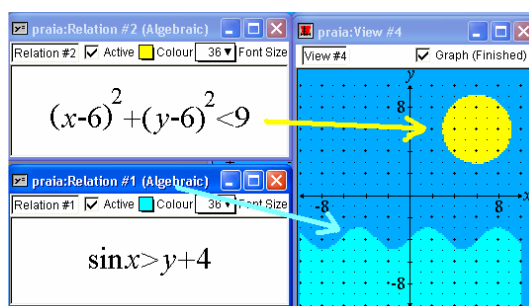


Figura 34 – Atividade 4/ PAC - sol e mar

Na construção do carro surge novamente a criatividade, no domínio do software e das desigualdades com suas representações geométricas. Também é notável a relação de posse com a construção, isto é, um clima de autonomia e autoria visível também nos outros colegas.

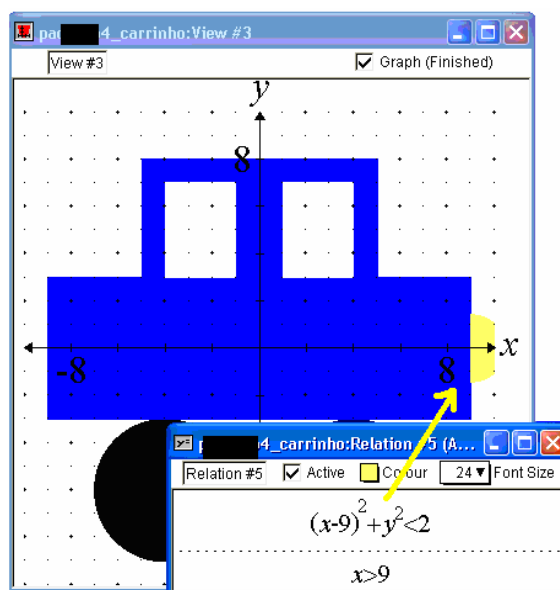


Figura 35 – Atividade 4/ PAC - carro

A motivação para construir de uma forma esteticamente boa, impulsiona descobertas e aplicações matemáticas. Além disso, isso faz com que os estudantes queiram e consigam construir seus conhecimentos do conteúdo – neste caso, geometria analítica – para realizar suas ideias de construção. Eram comuns, após a tarefa, comentários entre os estudantes a respeito de suas construções (... *o meu carro é assim! Já o meu tem uma...*). Analise o “moderno” farol e a janela dupla do carro de PAC.

Atividade 5: Como o estudante já dominava a equação da circunferência, as explorações mais ricas foram acerca das posições relativas entre retas e uma circunferência. Analisemos a sua construção a seguir:

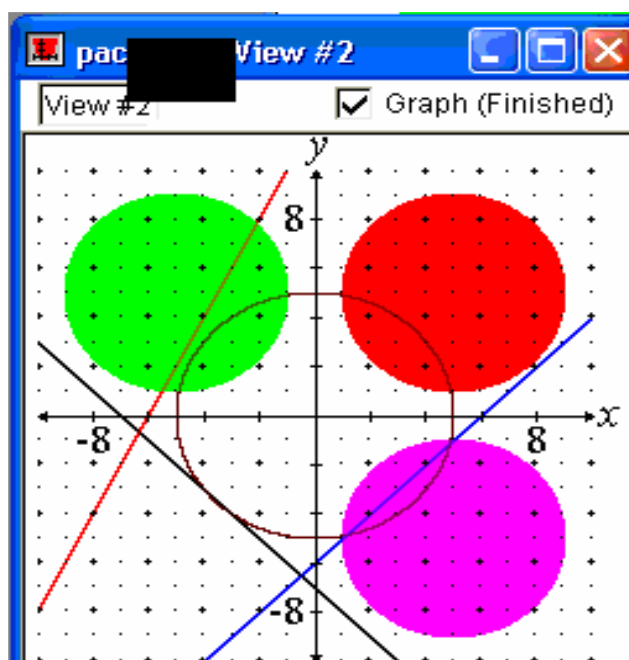


Figura 36 – Atividade 5/ PAC

Para construir uma reta tangente, PAC utilizou uma boa estratégia e obteve, por tentativas, uma aproximação (fato reconhecido por ele). O estudante construiu uma circunferência com centro na origem e uma bissetriz dos quadrantes pares ($y = -x$). A partir daí, com translações da reta, ele chegou à construção da figura anterior.

Atividade 6: Construção de figuras planas. Foi onde o estudante encontrou mais dificuldades segundo suas próprias palavras.

Na figura 37, temos sua construção com as relações referentes a cada figura exigida na atividade (triângulo retângulo, trapézio, quadrado, losango, triângulo equilátero e trapézio retângulo). Nesta construção, PAC precisou transladar todas as suas figuras para mostrá-las no mesmo plano – tarefa que ele conseguiu sem tentativas, já utilizando um raciocínio anterior às suas ações. Para construir o quadrado (vermelho), o triângulo retângulo (verde claro) e o trapézio retângulo (azul claro), o estudante não encontrou dificuldades, pois a primeira figura era trivial e as outras duas foram construídas com a determinação de uma desigualdade seguida de restrições no domínio e na imagem.

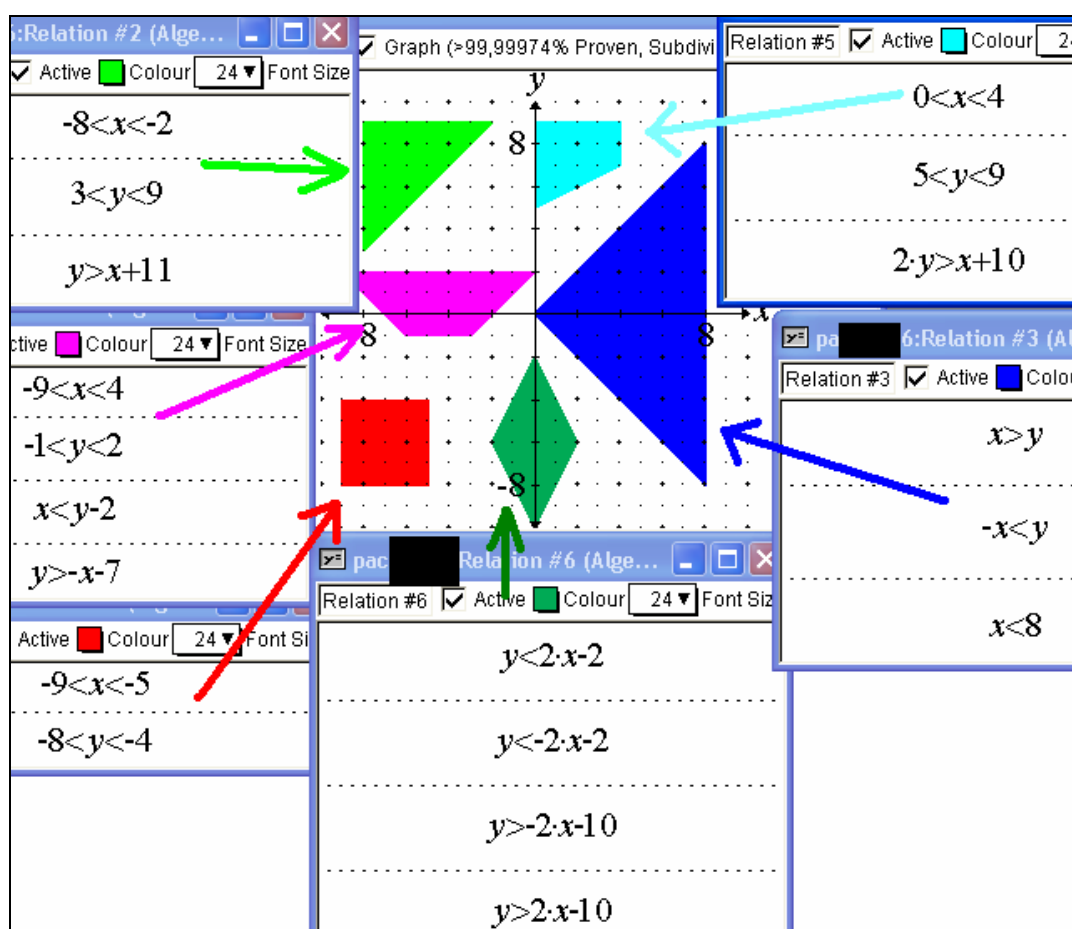


Figura 37 – Atividade 6/ PAC - relações

Na construção do trapézio (rosa), a estratégia utilizada foi de pré-determinar uma região retangular para uma posterior limitação com retas, conseguidas através de tentativas. Já o losango (verde) exigiu a translação de retas, como podemos ver na sua relação.

A construção do triângulo equilátero foi o palco do maior número de explorações. Quando PAC me chamou para dizer que o arquivo estava finalizado (figura anterior), pedi para que salvasse e registrei a imagem abaixo.

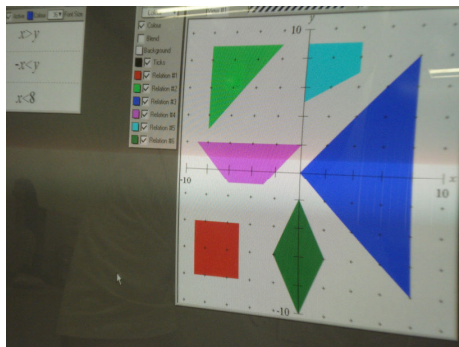


Figura 38 – Atividade 6/ PAC - arquivo salvo

Feito isto, perguntei se o triângulo azul era realmente equilátero. O estudante revelou estar convencido de que não era, mas que estava com algumas ideias para uma melhor aproximação. A explicação da sua estratégia gerou um pequeno filme, cujos extratos e transcrições da sua fala vemos a seguir:

Na próxima figura, PAC aponta com a seta do mouse o seu triângulo (indicando como resultado de *relações de x com y*) e a relação utilizada (Figura 40).

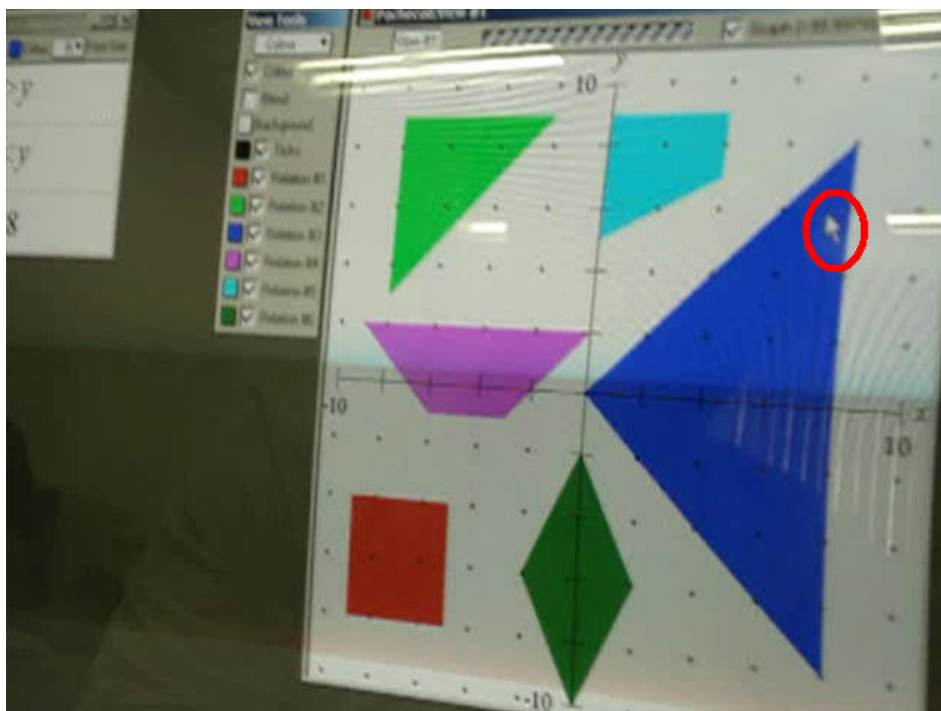


Figura 39 – Atividade 6/ PAC - vídeo (imagem 1)

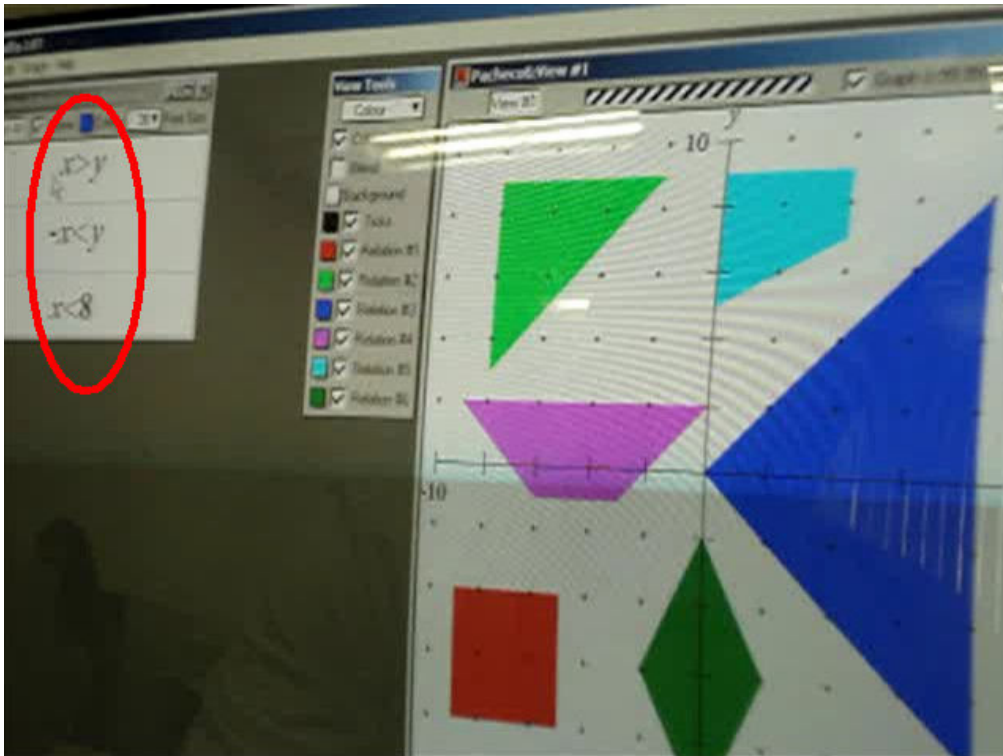


Figura 40 – Atividade 6/ PAC - vídeo (imagem 2)

Neste momento, ele inicia uma série de variações nos coeficientes angulares das desigualdades (que ele chama de *o número que multiplica o x*), como pode ser visto na próxima imagem.

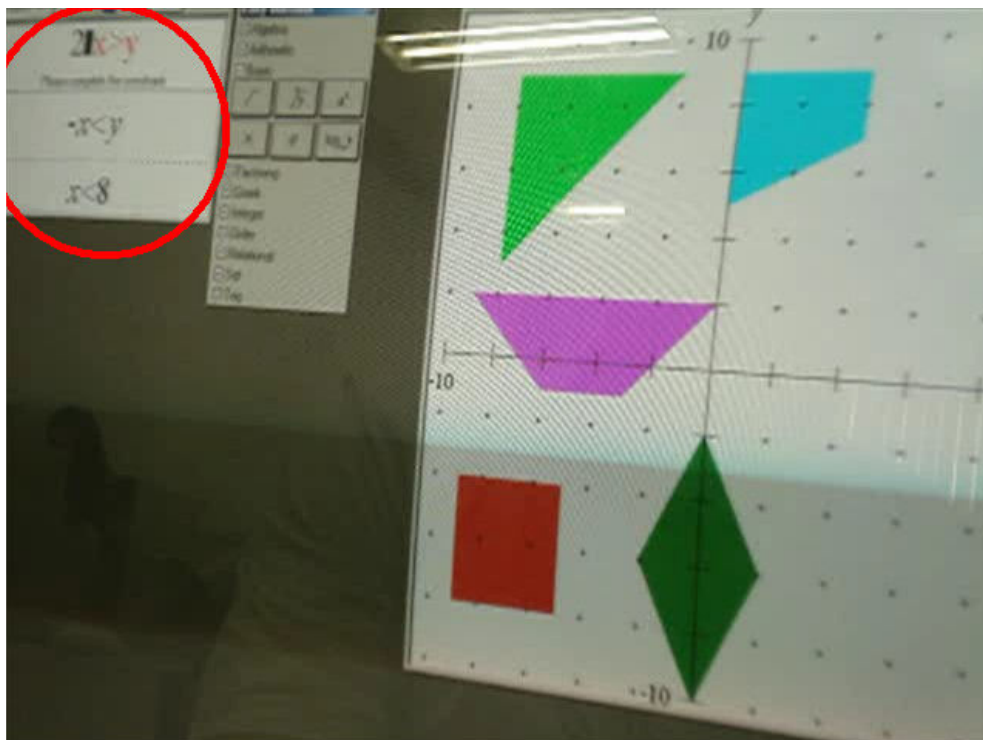


Figura 41 – Atividade 6/ PAC - vídeo (imagem 3)

Com a mudança do coeficiente angular de 1 para 2, o estudante chega à seguinte conclusão: *ele* (o triângulo) *aumentou!*

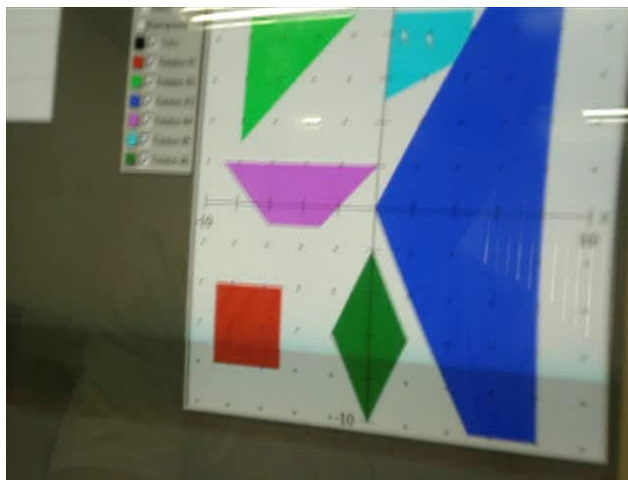


Figura 42 – Atividade 6/ PAC - vídeo (imagem 4)

Assim, PAC deduz que precisa de um coeficiente angular menor do que 1. A sua próxima tentativa, captada na imagem abaixo, é coeficiente angular igual a $\frac{1}{2}$, obtendo um abatimento no seu triângulo.

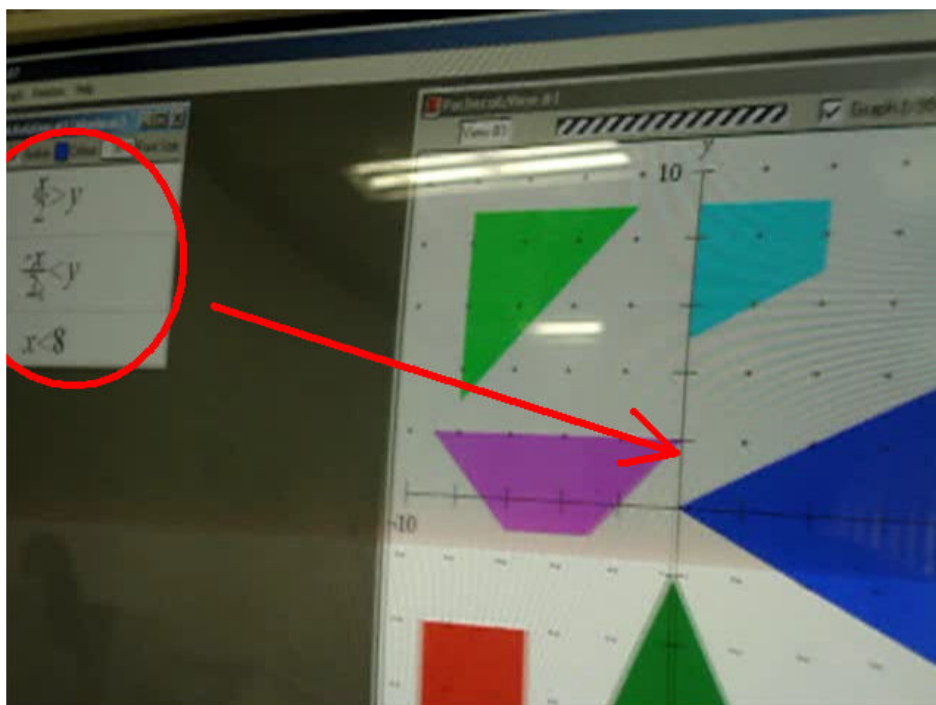


Figura 43 – Atividade 6/ PAC - vídeo (imagem 5)

Com isso, pela sua estratégia de aproximação, ele utilizou 0,75 ($0,5 < 0,75 < 1$).

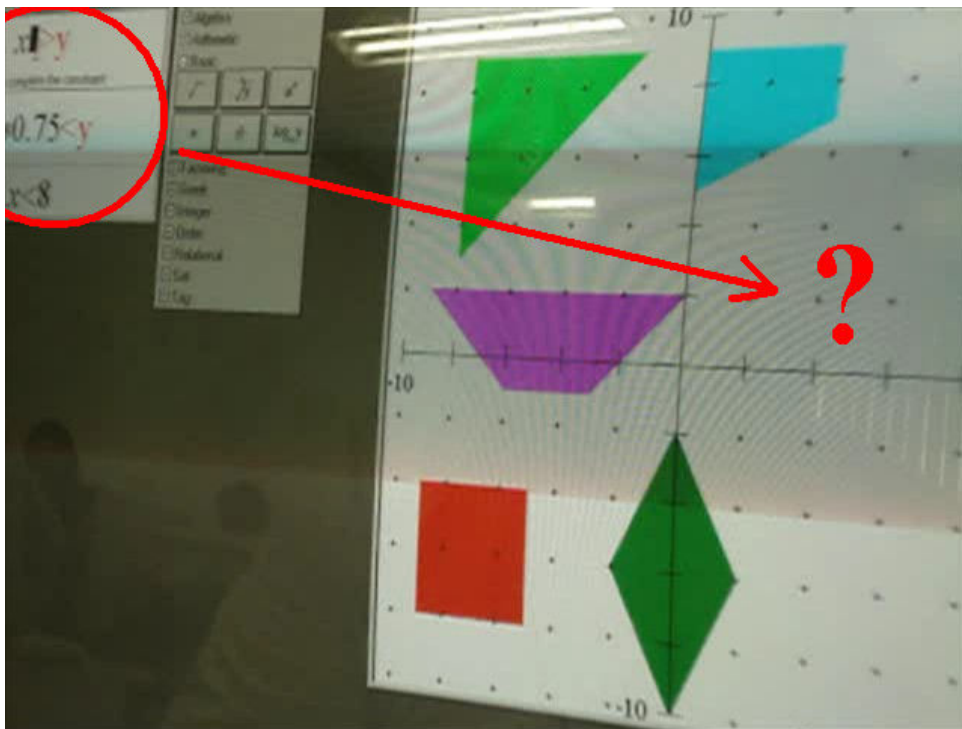


Figura 44 – Atividade 6/ PAC - vídeo (imagem 6)

E chegou ao seguinte triângulo:

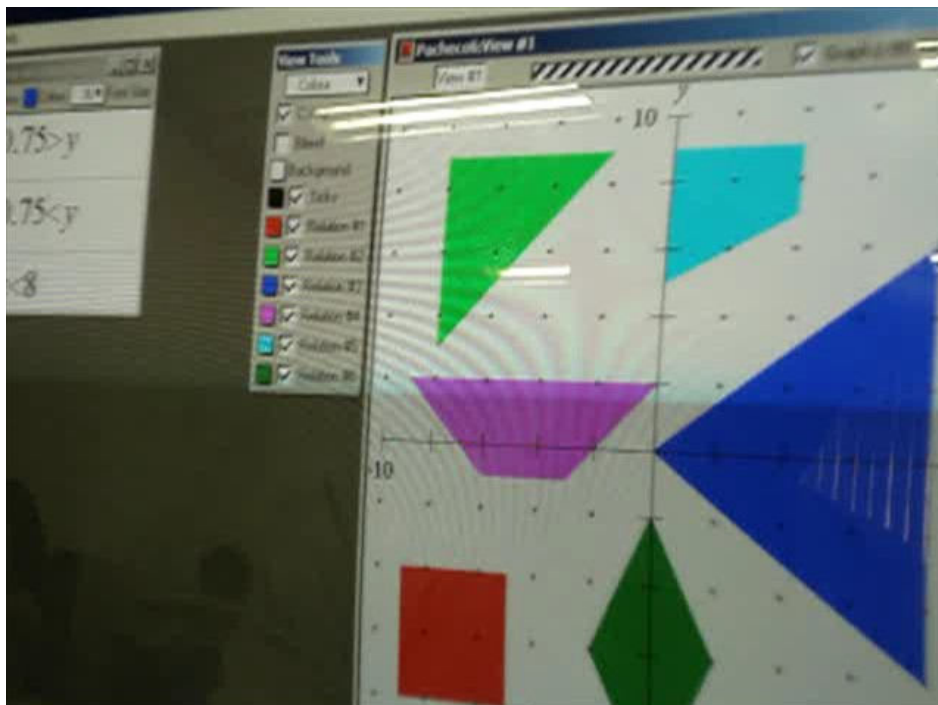
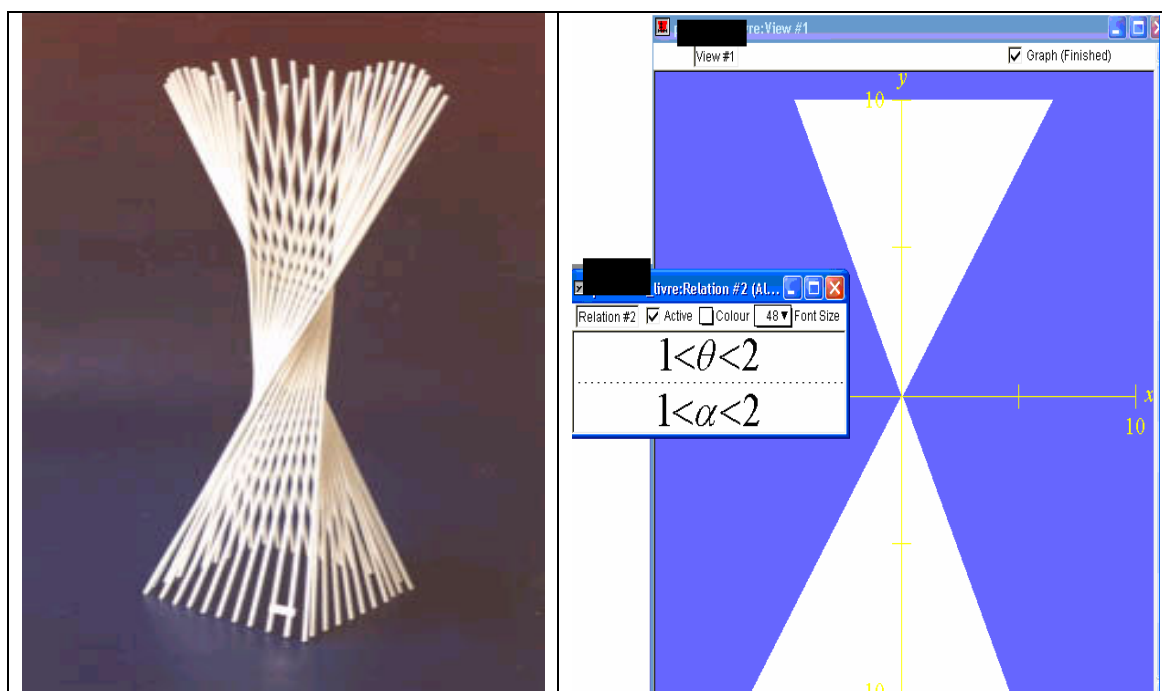


Figura 45 – Atividade 6/ PAC - vídeo (imagem 7)

A sua conclusão, nas suas palavras, é a seguinte: *Vendo pelos lados não ficou equilátero, mas se aproximou. Aí tem que descobrir qual o número que*

multiplica o x para (...) até fechar equilátero. Notoriamente, ficou claro para PAC que existe um número real (coeficiente angular) que formaria na sua relação uma região limitada por um triângulo equilátero. Um pouco depois disto, já encerrada a gravação, ele descobriu uma ferramenta do software para ver a aproximação do seu triângulo de um triângulo equilátero – esta ferramenta fornece as coordenadas e a distância entre dois pontos quaisquer do gráfico.

Atividade 7: Como essa atividade era livre, PAC deixou as construções de lado e começou a explorar as ferramentas e símbolos contidos no software, principalmente a janela “Easy Buttons”, que surge como auxiliar às relações. Analisando a construção do quadro abaixo, percebemos que ele descobriu uma região determinada pelo ângulo θ (em radianos) e procurou na internet uma imagem com essas características (imagem à esquerda). Este fato mostra o alcance de um estudante neste tipo de proposta de aula, onde o conteúdo a ser passado não está pré-determinado. O objetivo era que os estudantes explorassem relações algébricas e suas representações geométricas, em outras palavras, um estudo inicial em geometria analítica, porém, a interação com o software levou PAC a manipular relações que geralmente não estão presentes na educação básica.



Quadro 17 – Atividade 7/ PAC

Atividade 8: Triângulos com vértices pré-determinados.

PAC (único a realizar a tarefa), precisava novamente construir triângulos. Só que nesta atividade, os triângulos estavam com os vértices pré-determinados. Precisamos nos ater aqui às estratégias utilizadas pelo estudante, pois ele não conhece a técnica analítica que fornece a equação da reta a partir de dois pontos.

A saída encontrada por ele foi utilizar novamente a ferramenta que fornecia as coordenadas dos pontos e ir aproximando as retas para, posteriormente, organizar um sistema de desigualdades.



Figura 46 – Atividade 8/ PAC

Analisando as duas figuras seguintes, que são as construções de PAC, notamos que ele restringiu a região para o seu triângulo em x e em y e, depois, começou a inserir as retas que serviriam de suporte aos lados dos triângulos.

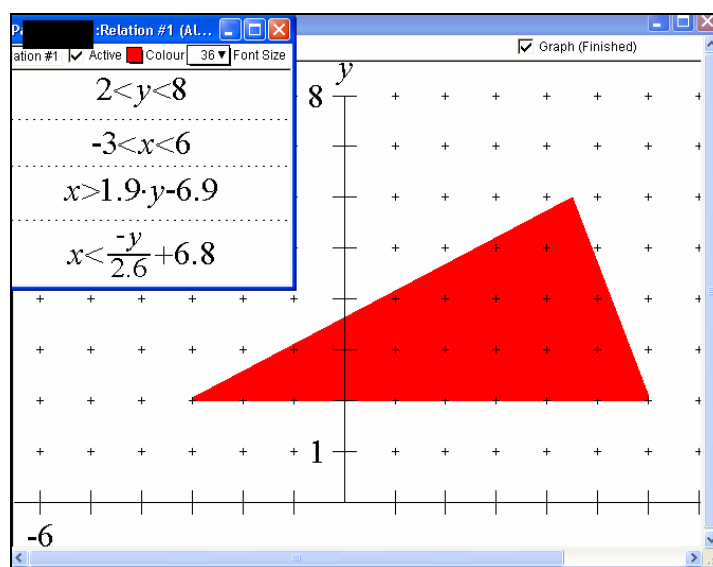


Figura 47 – Atividade 8/ PAC - construção 1

Em ambas as construções, pode-se notar que o estudante já procura por uma generalização na equação da reta, na medida em que coloca o x no primeiro membro de suas desigualdades. Aliás, sendo o x a letra que os estudantes mais têm contato no ensino básico, é natural que ele apareça como primeira opção aqui.

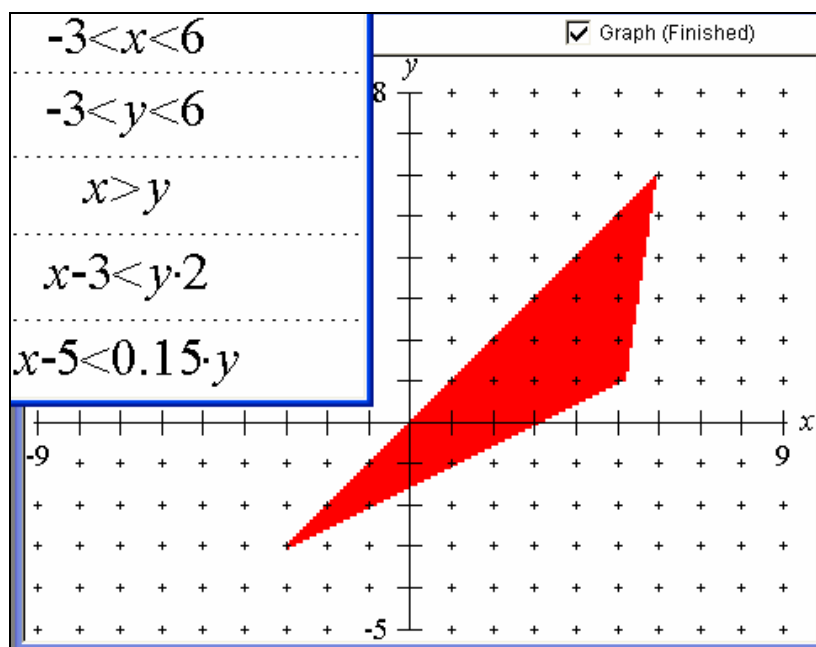


Figura 48 – Atividade 8/ PAC - construção 2

Atividade 9: A atividade desta proposta era encontrar, na internet, um quadro de arte abstrata e reproduzi-la no GrafEq. Porém, durante a pesquisa na rede e para motivá-los, sugeri a todos os estudantes a navegação no site de origem do GrafEq¹³. PAC ficou muito animado com as visualizações de construções diferentes e resolveu copiar uma.

Numa situação normal, esta construção não teria quase que validade alguma e quase pedi para que ele não o fizesse. Quando vi que a relação era maior que o gráfico (Figura 49), repleta de uma linguagem desconhecida por PAC e este muito motivado, autorizei a construção e o liberei da tarefa de criar uma réplica de um quadro de arte.

¹³ <http://www.peda.com/grafeq>

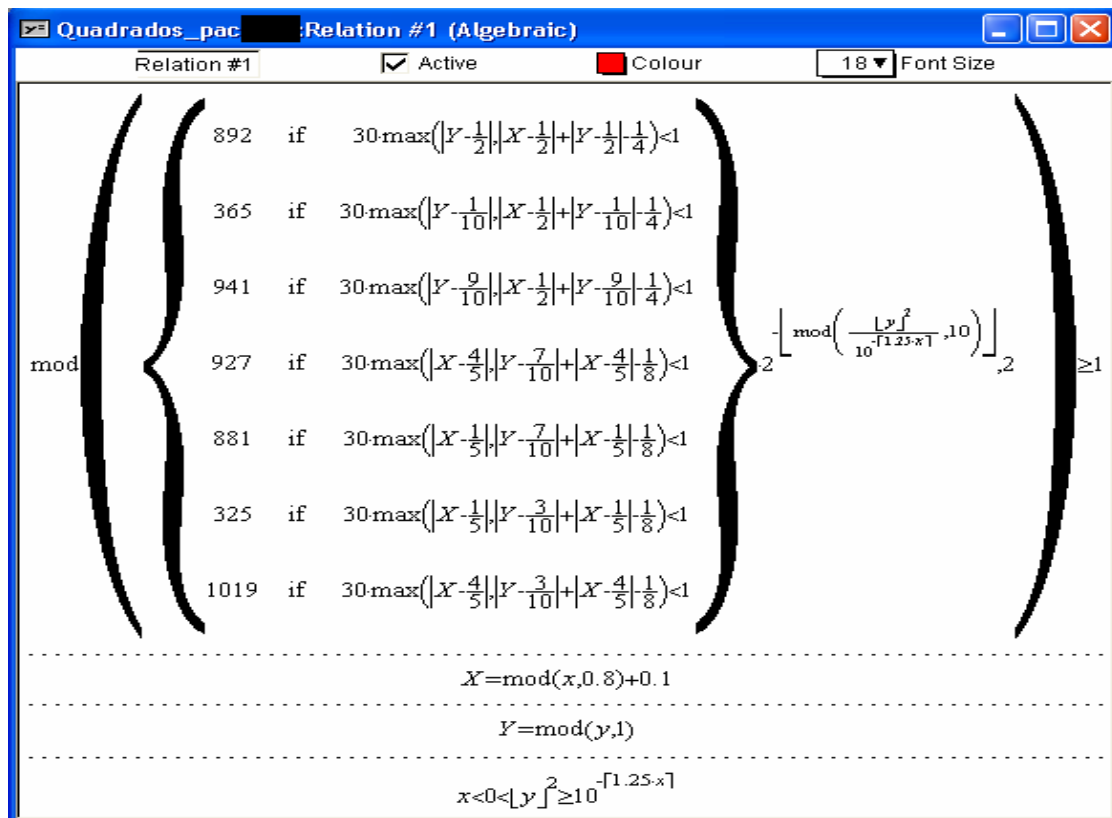


Figura 49 – Atividade 9/ PAC - relação

A seguir, temos o gráfico que tanto aguçou a curiosidade de PAC – são os quadrados perfeitos até 100.

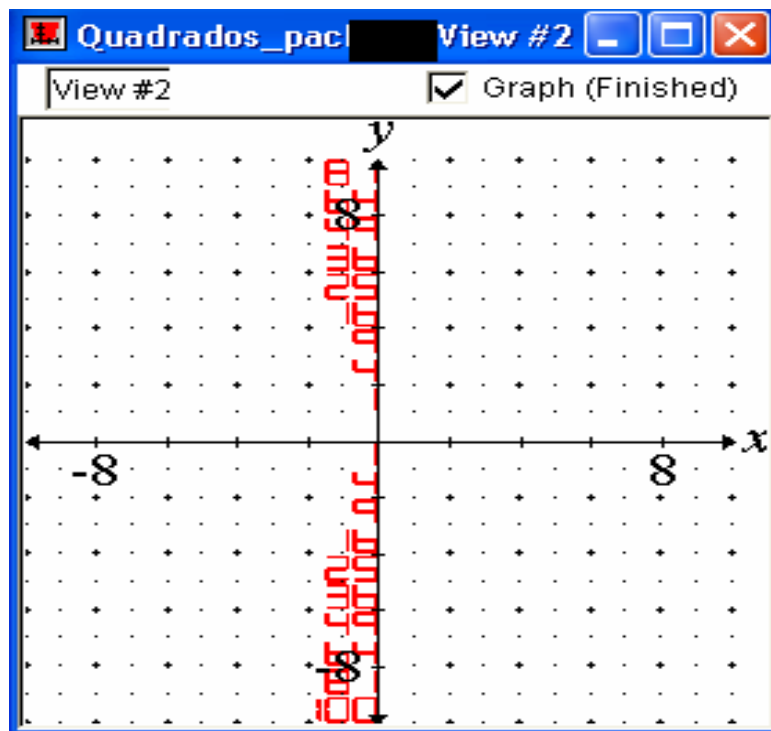


Figura 50 – Atividade 9/ PAC - gráfico

Passando-se uma semana do final desta coleta de dados, encontrei com PAC e ele me disse que havia adaptado a relação e chegado aos quadrados perfeitos até 1000. Infelizmente, ele não me enviou.

Questionário

1) Qual foi a maior dificuldade encontrada na realização das construções no programa? *A maior dificuldade foi descobrir as fórmulas e o seu uso no gráfico.*

2) Descreva, com suas palavras, qual era a matemática envolvida na realização dos exercícios? *O uso de funções entre x e y para montar formas geométricas planas.*

3) O que você achou de interessante nas atividades? Qual a atividade que mais lhe interessou? *O mais interessante é montar figuras como nas atividades de montar casa, praia, etc.*

4) Faltou algo para a realização das atividades? *Não. Achei interessante pois já estou com matéria que eu ainda não tive.*

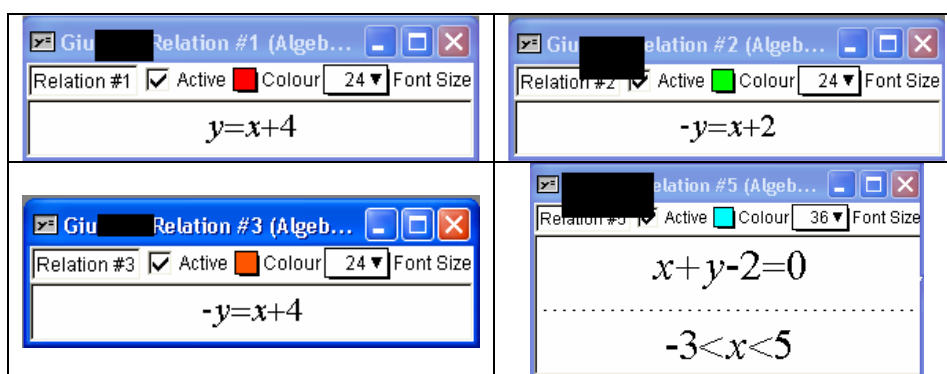
5) Se existir algum comentário, crítica ou sugestão para esta sequência de atividades com o uso do GrafEq, escreva-as. *Seria interessante ter um projeto como esse em aula, pois mostra a parte prática da matemática no cotidiano.*

Considerações Individuais: PAC foi além das minhas expectativas. Não só por ter chegado até a atividade 9 mas, principalmente, pela qualidade de suas estratégias na resolução de problemas encontrados nas suas construções, feitas com muita vontade e dedicação, como se não estivesse na escola. Esta propriedade lhe gerou muitas reflexões sobre as relações entre entes algébricos e geométricos, principalmente, sobre equações de retas (fazendo menção direta dos coeficientes) e equação de circunferências. A ideia da geometria analítica transpareceu na sua resposta 2 do questionário, apesar de classificar – talvez por força de expressão, devido à informalidade do questionário – todas as relações utilizadas como funções. Também devemos considerar a sua interação com as ferramentas do software e a aplicação na resolução dos problemas encontrados.

5. GIU

As Atividades 1 e 2 foram realizadas rapidamente sugerindo fácil exploração e apropriação das principais ferramentas do GrafEq, como é visto no quadro e figura abaixo. O estudante utiliza fundo preto, eixos roxos e a função Blend.

Matematicamente, conceitos como retas paralelas e as propriedades algébricas de suas equações não foram barreiras para a sua evolução na atividade. No quadro abaixo, temos algumas relações utilizadas por GIU na atividade 1. Nas relações 2 e 3, a forma de tornar as retas decrescentes foi alterar o sinal do y, mesmo que ele estivesse no primeiro membro da equação – ao contrário de PAC(4), que iniciava suas equações com x. O segmento (relação 5) foi construído através da equação de uma reta qualquer seguida da restrição $-3 < x < 5$ no domínio, percebendo que não é necessário restringir a imagem.



Quadro 18 – Atividade 1/ GIU - relações

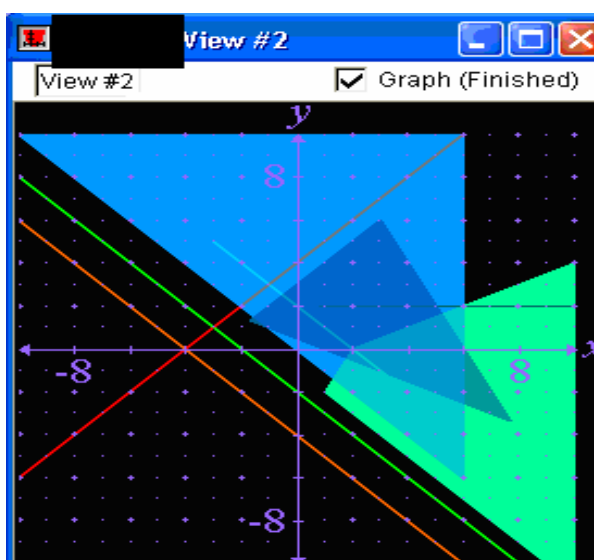


Figura 51 – Atividade 1/ GIU - construção

Atividade 3: Durante a realização desta atividade, foi gerado um pequeno filme que retrata a compreensão do estudante, sobre a equação da circunferência e desigualdades, enquanto ele explica sua construção. Na figura abaixo, GIU começa apontando para o sinal $>$ utilizado na desigualdade, que segundo ele, estava errado.

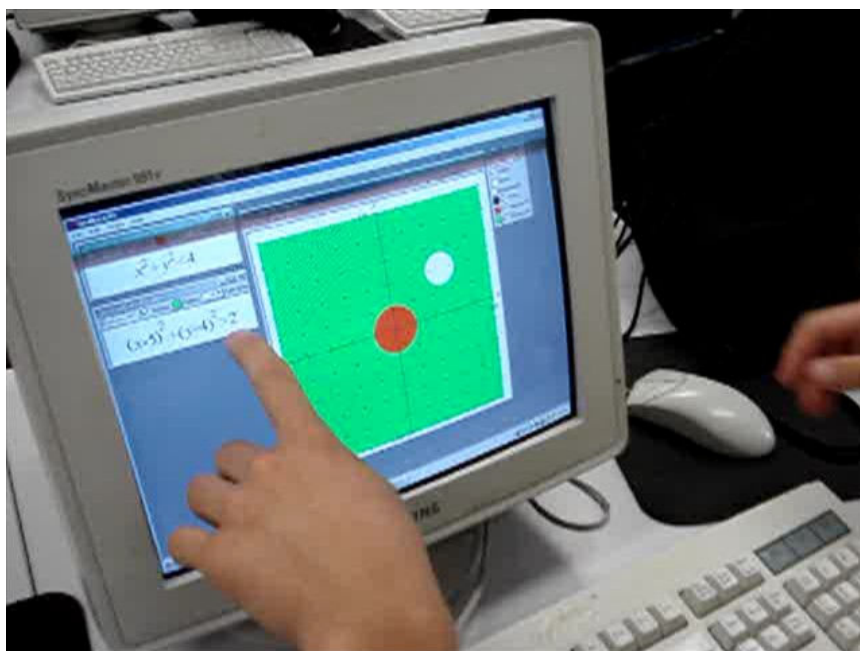
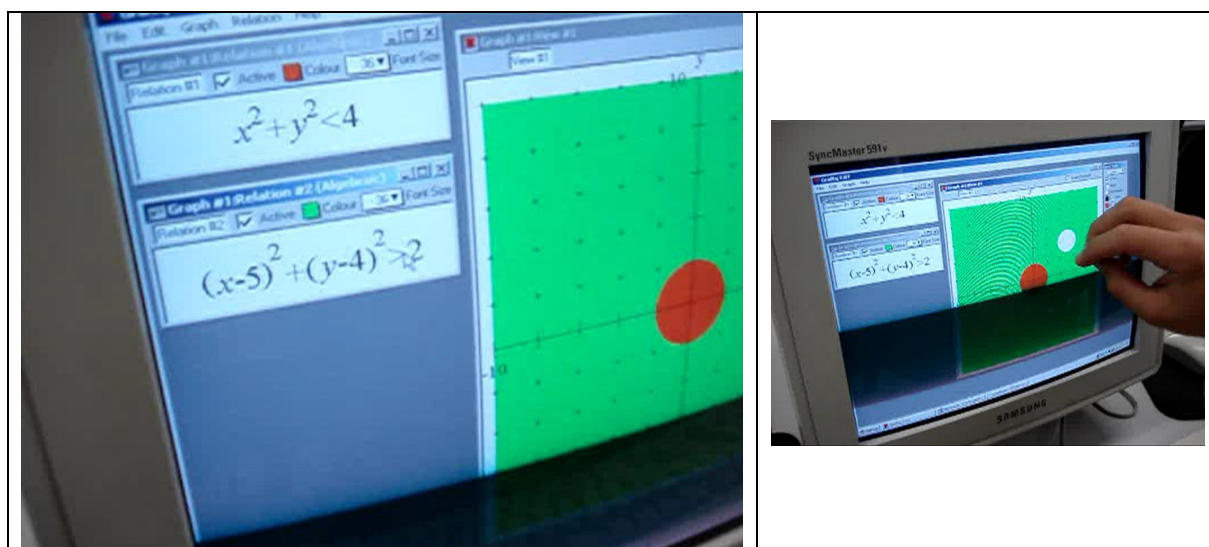


Figura 51 – Atividade 3/ GIU - vídeo (imagem 1)

No quadro abaixo, nas imagens 1 e 2, temos uma melhor visualização (à esquerda) da desigualdade e, à direita, de GIU indicando sua representação geométrica – pontos externos à circunferência de equação $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 2$.



Quadro 19 – Atividade 3/ GIU - vídeo (imagens 2 e 3)

Logo após, o estudante modifica o sinal da desigualdade e aponta o disco construído.

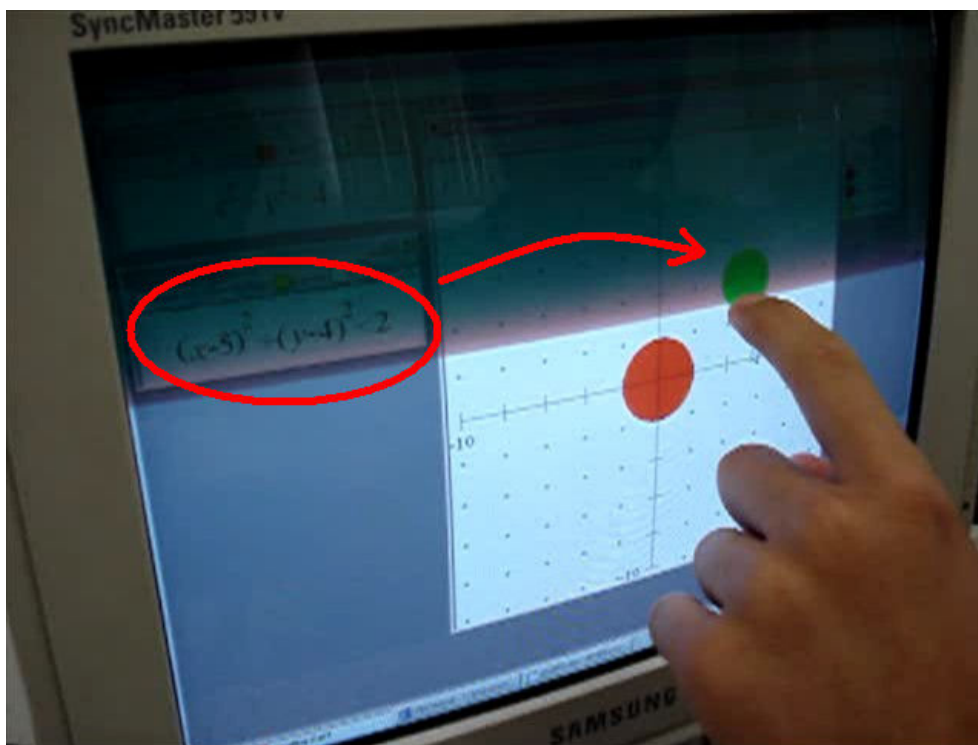


Figura 53 – Atividade 3/ GIU - vídeo (imagem 4)

Na imagem abaixo, GIU me pergunta como fazer para que o retângulo fique *do mesmo tamanho do disco*. Na verdade, ele estava pensando como faria uma relação para o retângulo de maneira que este tivesse como base o diâmetro do disco. Logo após, ele usou aproximações como os outros colegas, mas a sua primeira tentativa foi, analisando a desigualdade do disco, prever a relação correta.



Figura 54 – Atividade 3/ GIU - vídeo (imagem 5)

Atividade 4: Nesta atividade, o estudante construiu a cruz, o sol e o mar e o carro da mesma forma que os colegas, porém, para fazer a casa, ele encontrou algumas dificuldades. A sua estratégia inicial foi construir os segmentos de reta que serviriam como lados para o triângulo (telhado da casa). Com relações diferentes e sem utilizar desigualdades, não teria como preencher o triângulo. Ele não conseguiu avançar a partir deste ponto e até me perguntou como deveria proceder, mas, como ele já havia utilizado desigualdades em atividades anteriores, deixei-o exercitar seu raciocínio. GIU não quis mudar sua construção e a salvou assim mesmo, justificando que *peelo menos o triângulo estava certinho* (ele tentou dizer isósceles).

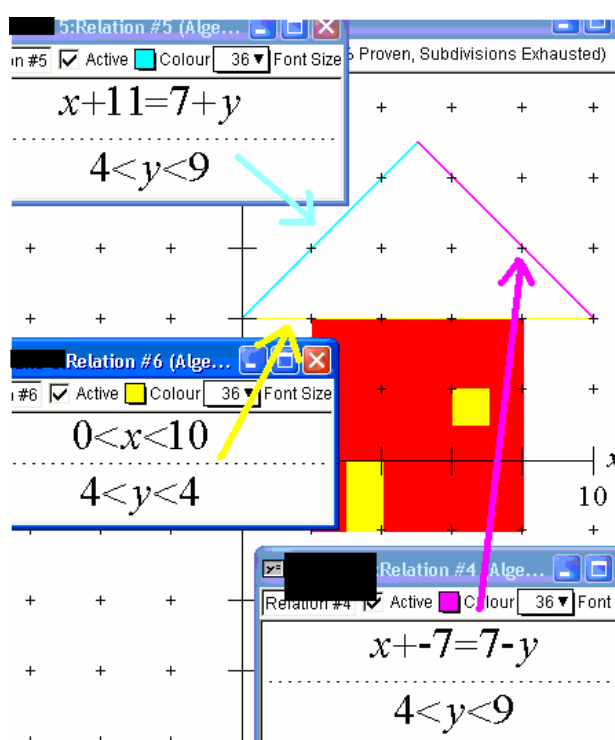


Figura 55 – Atividade 4/ GIU - casa

O estudante resolveu não realizar as Atividades 5 e 6, justificando que era mais divertido ir para a atividade livre. Como já disse antes, essas atividades não faziam parte das tarefas escolares e os estudantes eram voluntários. Além disso, também não quis interferir nas escolhas dos estudantes para garantir um pequeno afastamento, necessário em um estudo de caso (Ponte, 2006).

Atividade 7 (atividade livre): GIU não fez nenhuma construção, mas ficou digitando equações e inequações diferentes para ver o que acontecia – o estudante se mostrou muito curioso e me mostrou vários resultados a cerca de desigualdades e

equações diferentes. Neste momento, o estudante poderia exercitar sua criatividade e escolher qualquer figura ou imagem para reproduzir no GrafEq. No entanto, ele preferiu explorar e confrontar formas matemáticas diferentes, encontrando resultados curiosos e expandindo seus conhecimentos através das visualizações. Como exemplo de descobertas de GIU, temos a imagem abaixo:

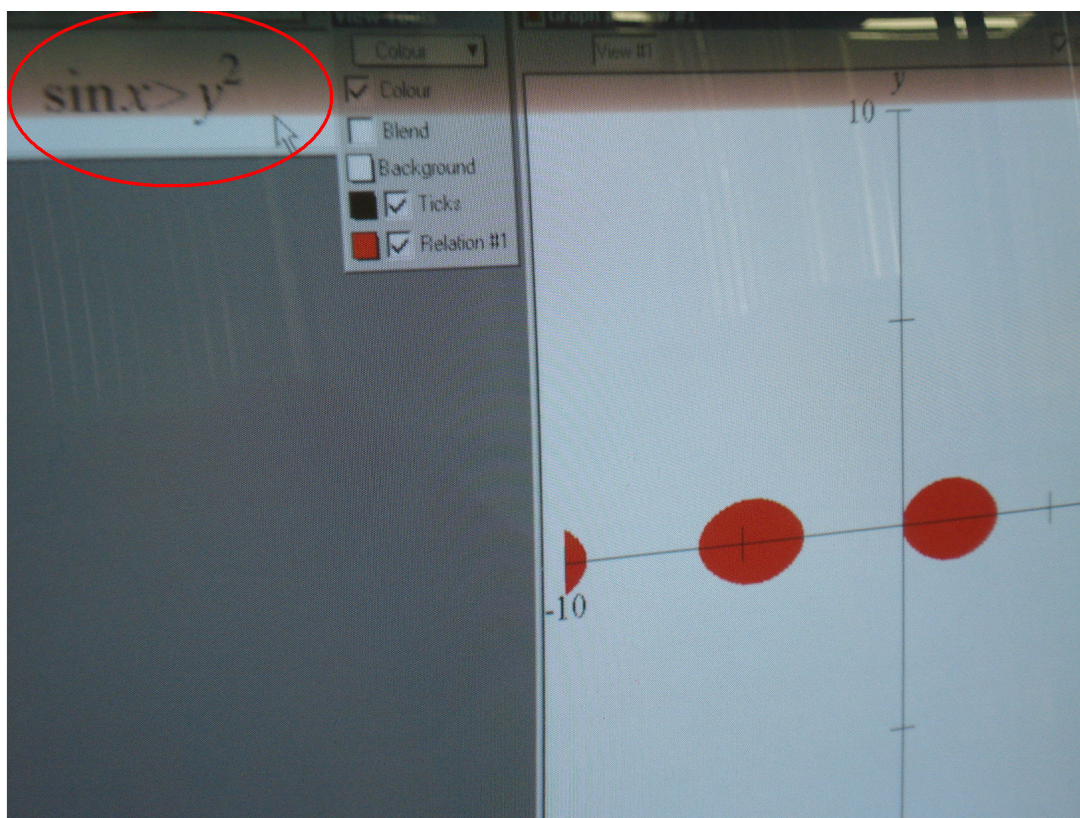


Figura 56 – Atividade 7/ GIU

As Atividade 8 e 9 não foram realizadas por GIU.

Questionário

1) Qual foi a maior dificuldade encontrada na realização das construções no programa? *conceguir encontrar a fórmula certa para os determinados desenhos e formas que tínhamos de fazer, fora isso nenhuma dificuldade.*

2) Descreva, com suas palavras, qual foi a matemática envolvida na realização dos exercícios? *Muito o uso da lógica pois aprendíamos umas fórmulas e com base nestas arriscávamos alterações para conceguir o resultado esperado*

3) O que você achou de interessante nas atividades? Qual a atividade que mais lhe interessou? *achei interessante poder fazer de cálculos e fórmulas desenhos e*

formas geometricas, o que eu mais gostei de fazer foi a casa que por mais difícil que parecia ser no começo depois de aprender ficou divertido fazer

4) Faltou algo para a realização das atividades? *nao tudo o que precisei foi prestar atenção e utilizar a criatividade nao foi preciso de nada que eu ja nao tivece no hara*

5) Se existir algum comentário, crítica ou sugestão para esta sequência de atividades com o uso do GrafEq, escreva-as. *nao foi difícil fazer as atividades propostas e sei que com um dominio melhor das formulas matematicas sei que meu desempenho mnelhorara muito.*

Considerações individuais: A evolução de GIU em geometria analítica foi, principalmente, na descoberta e entendimento do que esse campo da matemática propõe. Nas suas respostas 1 e 3, do questionário, ele demonstra concordância de equivalências entre expressões algébricas e representações geométricas, enquanto que na resposta 2, o estudante levantou o uso da lógica para, e gerada pelas, manipulações nas expressões algébricas.

6. MAU

Atividade 1:

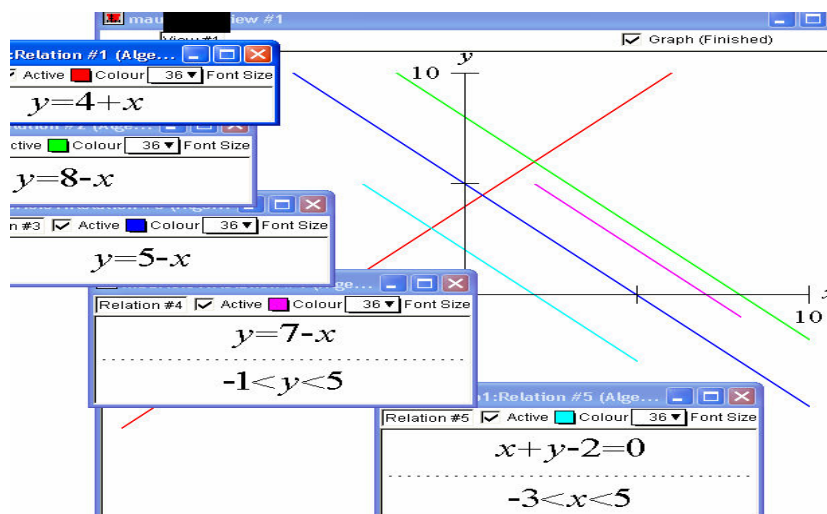


Figura 57 – Atividade 1/ MAU

Na figura acima, notamos que MAU utiliza as equações das retas na forma reduzida, mostrando que conteúdos estudados na série anterior continuam presentes em suas ideias. As restrições no domínio das retas também foram utilizadas com propriedade, para confecção dos segmentos de reta.

Atividade 2: Para construir os retângulos desta atividade, o estudante iniciou com uma estratégia ruim, tentando colocar o x e o y na mesma linha da relação. No entanto, ele utilizou a tecla TAB, que abre mais uma linha na relação (agindo como um sistema de igualdades e/ou desigualdades), para corrigir seu erro. Também, astutamente, MAU empregou o sinal de diferente, encontrado na janela “Easy Buttons”.

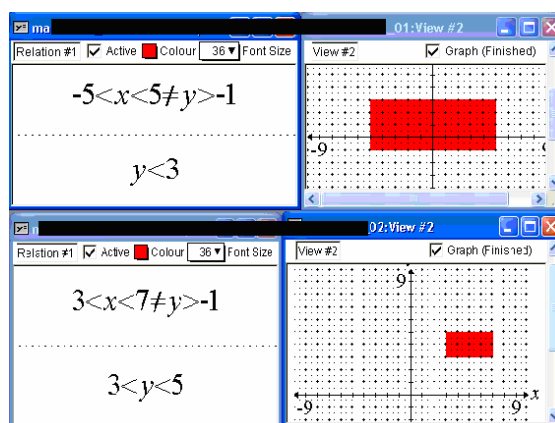


Figura 58 – Atividade 2/ MAU - retângulos

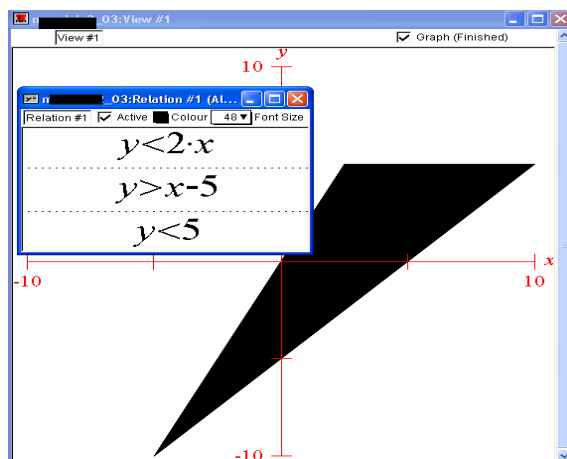


Figura 59 – Atividade 2/ MAU - triângulo

Na figura acima, já vemos um bom uso de sistemas de desigualdades para construir uma região triangular. Porém, este triângulo contém um lado paralelo ao eixo das abscissas, contrariando a proposta da atividade.

Atividade 3: Novamente MAU inicia com estratégias diferentes para fazer o retângulo, antes de utilizar restrições. A primeira tentativa foi com quatro retas formando um retângulo não preenchido. Algum tempo depois, e analisando a construção anterior, o estudante define seu retângulo como na figura abaixo, mostrando um pouco de despreocupação quanto ao encaixe com o disco.

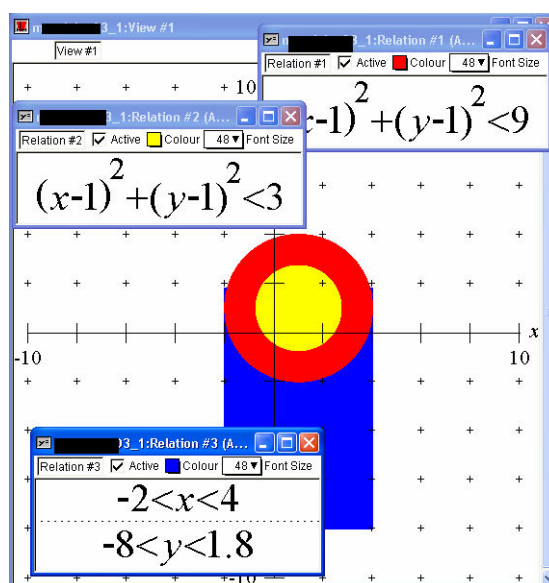


Figura 60 – Atividade 3/ MAU

Atividade 4: Para construção da cruz, o estudante sobrepôs dois retângulos, descuidando-se do formato original (cruz com “extremidades” iguais).

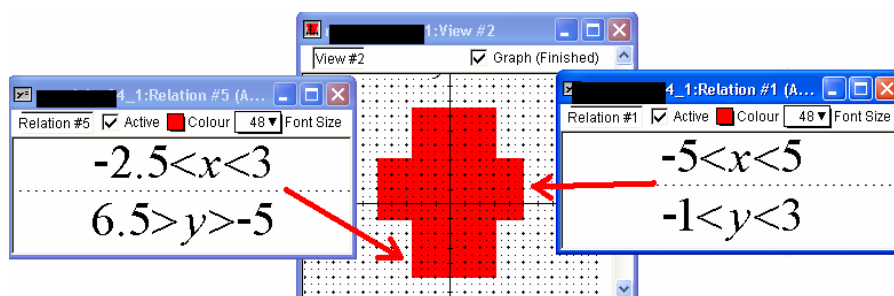


Figura 61 – Atividade 4/ MAU - cruz

Na figura seguinte – o sol e o mar – MAU descobriu algo que os outros colegas não utilizaram. Para construir o mar, ele aumentou o período do senoide, dando a impressão *que o mar estava mais calmo* – palavras do estudante.

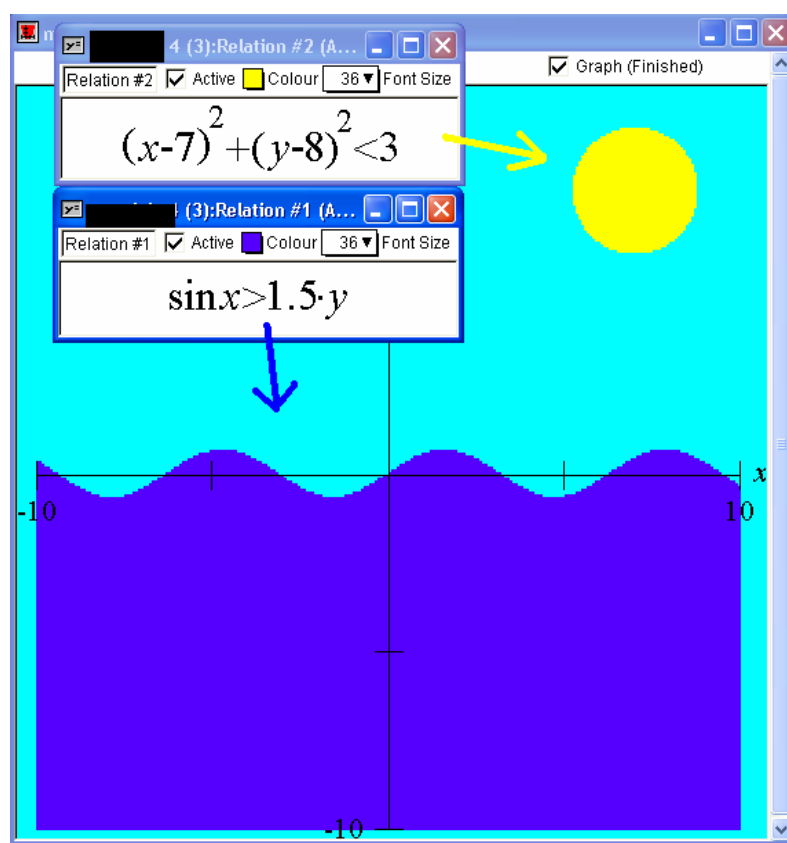


Figura 62 – Atividade 4/ MAU - sol e mar

A construção do carro nos mostra que, quando o estudante está motivado, não importa o tamanho e o tempo despendido na tarefa. Na figura a seguir, percebemos que as oito relações foram pensadas para dar um perfeito acabamento,

como podemos notar, no uso de decimais – tão pouco utilizados numa sala de aula, onde grande parte dos problemas é com números inteiros, distantes da realidade (LIMA, 2007).

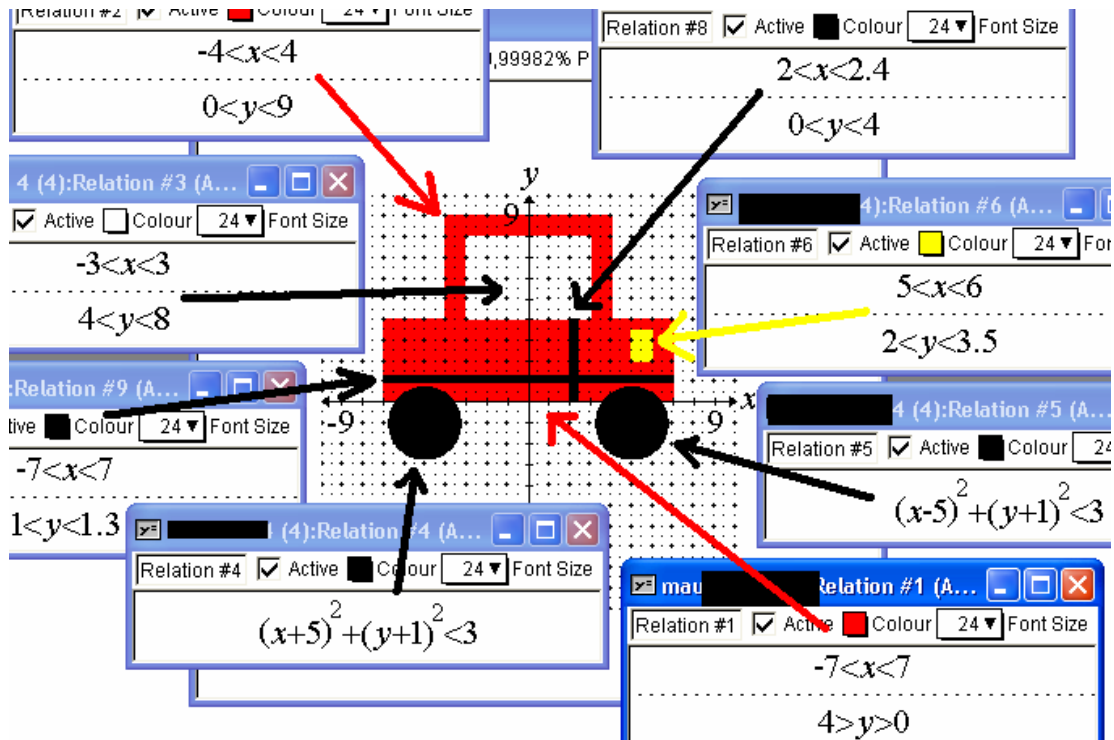


Figura 63 – Atividade 4/ MAU - carro

Durante a construção da casa, foi gerada a imagem da figura 64 – que mostra as relações utilizadas por MAU – e a gravação, em mp3, de um diálogo entre MAU e o autor deste trabalho, pesquisador e coletor dos dados. Logo abaixo, temos o resultado final da construção.

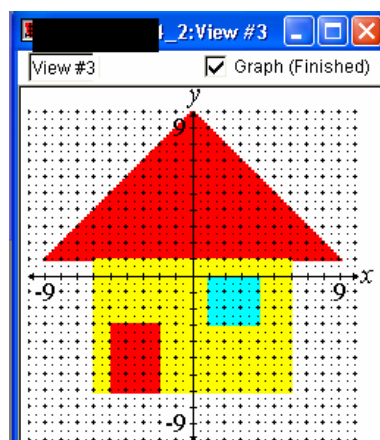


Figura 64 – Atividade 4/ MAU - casa

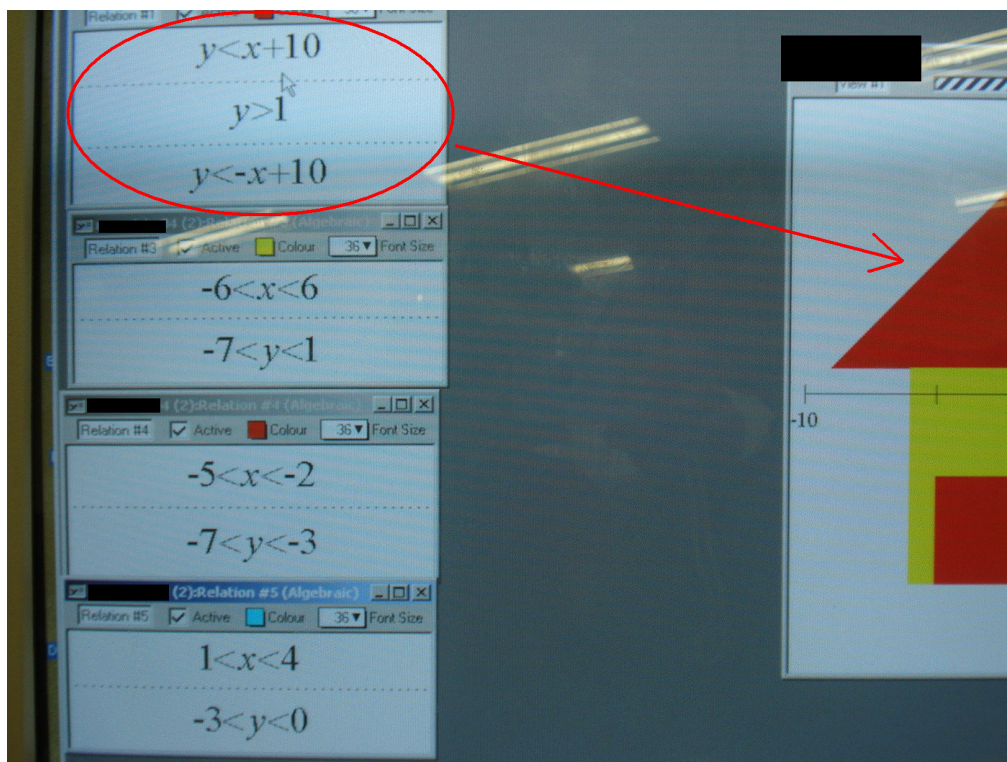


Figura 65 – Atividade 4/ MAU - casa/telhado

A seguir, temos a transcrição do diálogo, onde MAU explica como fez o telhado da casa, representado pela relação circulada na figura acima.

Pesquisador: Explica-me como você fez esta questão do triângulo. Como que você fez estas escolhas do sinal de maior e menor? Como você decidiu isto?

MAU: Bom, eu fui testando para ver os sinais que se encaixavam com o objetivo da questão que seria montar um triângulo todo pintadinho para ser o telhado da casa (...) e aí, eu cheguei num momento que eu tinha algumas relações feitas que era $y - 10 > x$ e aí, eu fui modificando para isolar o y , deixar ele sempre isolado num canto..., coitado... Aí eu ia testando as relações até que chegasse ao ponto correto que é o ponto que a gente queria que era com o telhadinho no lugar correto do desenho.

Pesquisador: Mas em algum momento tudo “sumiu” (a construção estava em branco). O que você acha que aconteceu?

MAU: Na hora que sumiu tudo foi quando o y tava..., quando as relações tavam indicando que o triângulo tinha que ficar fora do gráfico..., porque o gráfico só tá tratando as relações entre 10 e -10 nos eixos x e y . E aí, o y ficou que era maior que $-x + 10$ ($y > -x + 10$) e isso gerou um..., uma posição que era fora do gráfico... Por isso que ficou assim. E aí a gente teve que modificar, colocar que o y era menor que $-x + 10$ ($y < -x + 10$) para encaixar corretamente no gráfico, para ele ficar ok.

Quadro 20 – Diálogo: Pesquisador e MAU

Atividade 5: (círculos x retas) Atividade onde o estudante manipula com clareza e precisão as equações das circunferências e se utiliza de desigualdades para construir regiões circulares, ou seja, segundo MAU, nas suas palavras, *ele brincou com os sinais do círculo*.

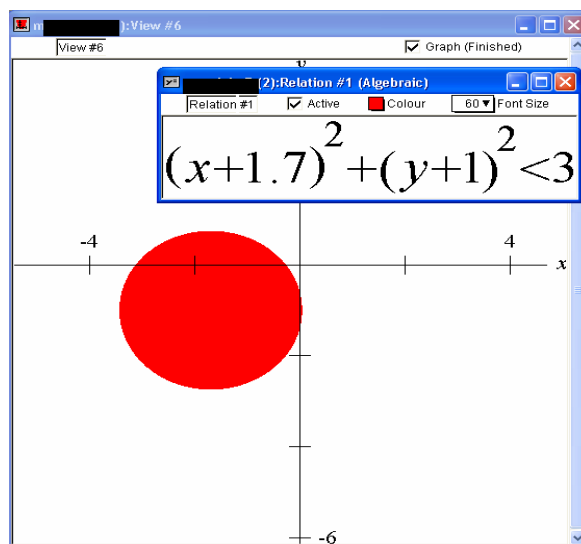


Figura 66 – Atividade 5/ MAU - disco que não invade o 1º quadrante

Na figura acima, MAU construiu, como determinava a tarefa, um disco que contém pontos em todos os quadrantes exceto no primeiro. O decimal utilizado sugere que ele fez aproximações.

Questionei se o disco continha pontos no quarto quadrante. O estudante, mostrando excelente interação com o programa e suas ferramentas, tentou me justificar utilizando zoom. Esta saída, além de astuta, demonstra o quanto MAU percebe, neste momento, a existência de pontos com coordenadas infinitesimais.

No início da atividade que exigia a construção de uma circunferência e três retas (representando as relações entre elas), o estudante desconhecia os termos secante, tangente e exterior, entretanto, realizou a tarefa, por testes e aproximações. Estas aproximações podem ser vistas na figura anterior, onde MAU constrói a reta de equação $y = 5x - 2$ e, por translações, chega à reta de equação $y = 5x - 0,7$. Para justificar a tangência da reta, o estudante utilizou novamente o zoom e admitiu estar errado. Porém, não conseguiu pensar em outra estratégia e partiu para a próxima atividade.

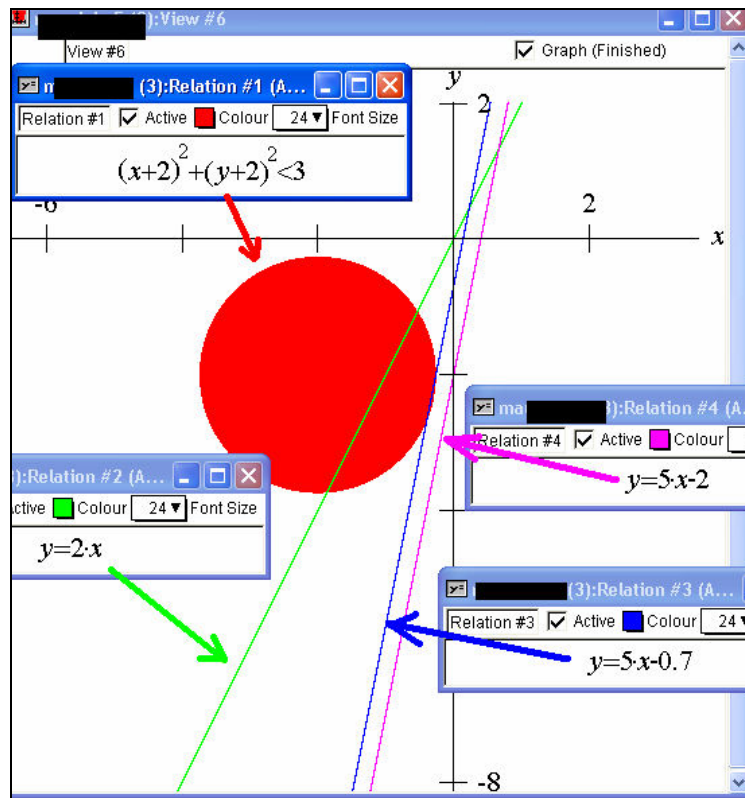


Figura 67 – Atividade 5/ MAU - disco X retas

Atividade 6: Como se vê na figura abaixo, MAU apenas iniciou a construção das figuras planas, limitando-se ao quadrado e ao triângulo retângulo. Ele encontrou muitas dificuldades ao para fazer o triângulo equilátero, com testagens sem lógica e/ou dedução. Desistiu da tarefa e foi para a próxima.

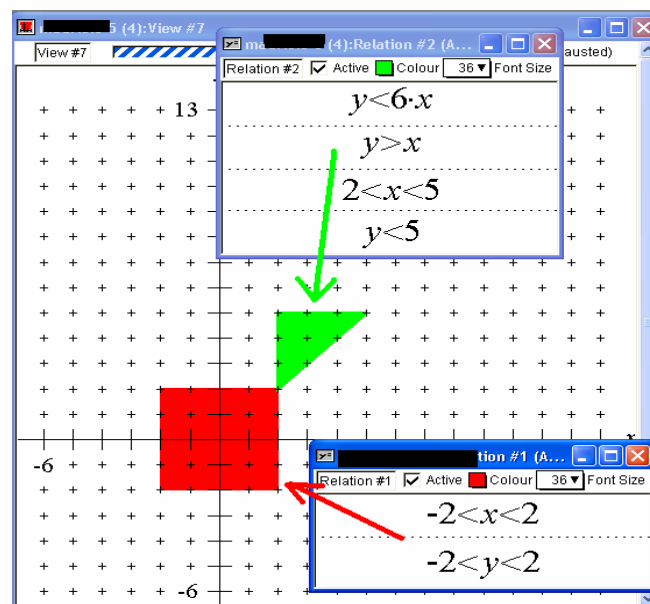
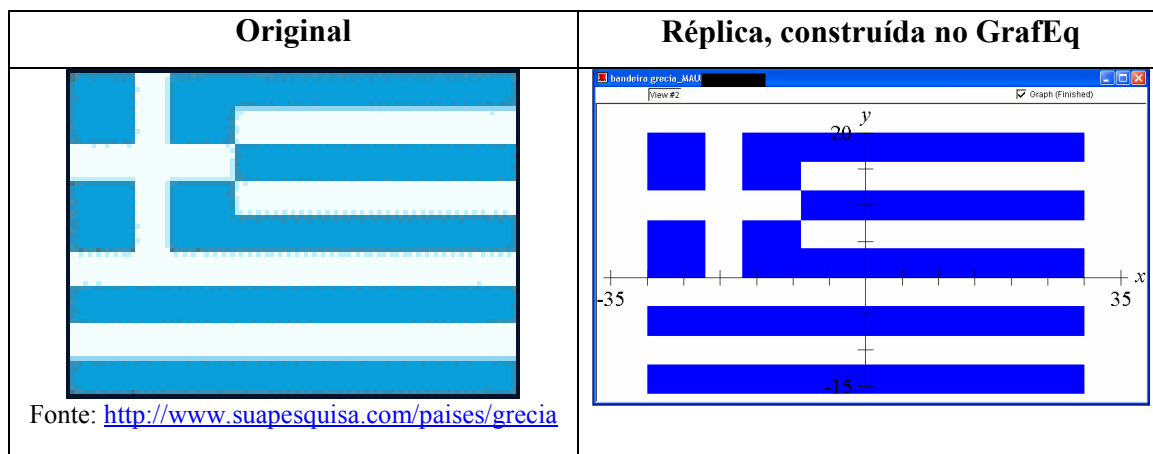


Figura 68 – Atividade 6/ MAU

Atividade 7: Nesta atividade, que era livre, o estudante resolveu confeccionar a bandeira de um país – sem sugestão do professor, ou seja, ideia sua. Acompanhei um pouco a pesquisa da bandeira na Internet e MAU havia escolhido outra, mas, talvez por simplicidade, resolveu fazer a da Grécia. Veja o que ele me escreveu no e-mail quando enviou os arquivos: *E ai sor...tá ai os arquivos em anexo da bandeira (mudei pra da grécia que é chatinha igual de fazer).*



Quadro 21 – Atividade 7/ MAU - Bandeira da Grécia

As atividades 8 e 9 não foram realizadas por MAU.

Questionário

1) Qual foi a maior dificuldade encontrada na realização das construções no programa? *A grande dificuldade é a de relembrar as fórmulas ou descobrir as que não conhecemos. Lembrar as fórmulas vistas há tempos ou não conhecidas complica um pouco no início.*

2) Descreva, com suas palavras, qual foi a matemática envolvida na realização dos exercícios? *tendo um conhecimento básico das fórmulas para criarmos as figuras, foi uma matemática lógica... utilizamos a lógica para criarmos as figuras sejam elas abstratas ou figuras pré definidas.*

3) O que você achou de interessante nas atividades? Qual a atividade que mais lhe interessou? *achei interessante a atividade que devíamos construir figuras pré definidas. achei legal esse desafio de criar esses desenhos.*

4) Faltou algo para a realização das atividades? *no início, faltou memória para lembrar das fórmulas, mas após o início da mesma e o conhecimento das*

fórmulas, foi tranquilo.

5) Se existir algum comentário, crítica ou sugestão para esta sequência de atividades com o uso do GrafEq, escreva-as. *Acho que o trabalho no programa é bem fácil. o programa é bem didático, mas acho que a tela vai ficando muito poluída com as fórmulas. deveria existir um método mais fácil de colocar as fórmulas.*

Considerações individuais: A interação entre MAU e o GrafEq foi tão construtiva quanto a constatada com PAC(4), pois implicaram em mudanças de estratégias na resolução das atividades. Por exemplo, a atividade 3 e a construção do telhado da casa demonstram uma maturação no estudante. Um outro exemplo que serve para verificarmos as relações feitas pelo estudante entre as expressões e suas representações geométricas está no uso de transformações como a utilizada para deixar o “mar mais calmo” na atividade 4. Entre outras apropriações das ferramentas do software, houve a descoberta do zoom, aplicada para verificar propriedades geométricas e justificar algumas construções. Nas respostas 2 e 3 do questionário, quando MAU diz se sentir desafiado na construção de figuras (*desenho*), notamos que este tipo de atividade matemática consegue, ao mesmo tempo, instruir e divertir os estudantes.

7. AKE

Atividade 1: No quadro abaixo, temos a mensagem que acompanhava o e-mail de AKE no envio da construção 1. Aqui, percebemos a naturalidade com que o estudante, desta faixa etária, flutua no meio digital, reafirmando o que dizem D'Ambrósio e Barros (1990), Papert (1994) e Kaput (1992, 2007) a cerca da participação das TIC na sua evolução.

*oi sor!!
vai em anexo o meu grafico
abraço*

Quadro 22 – Atividade 1/ AKE - mensagem

A seguir, vemos a construção de AKE para a atividade 1. Na figura percebemos que, como PAC(4), o estudante também constrói relações entre x e y , não importando qual membro da igualdade contém a variável dependente ou independente.

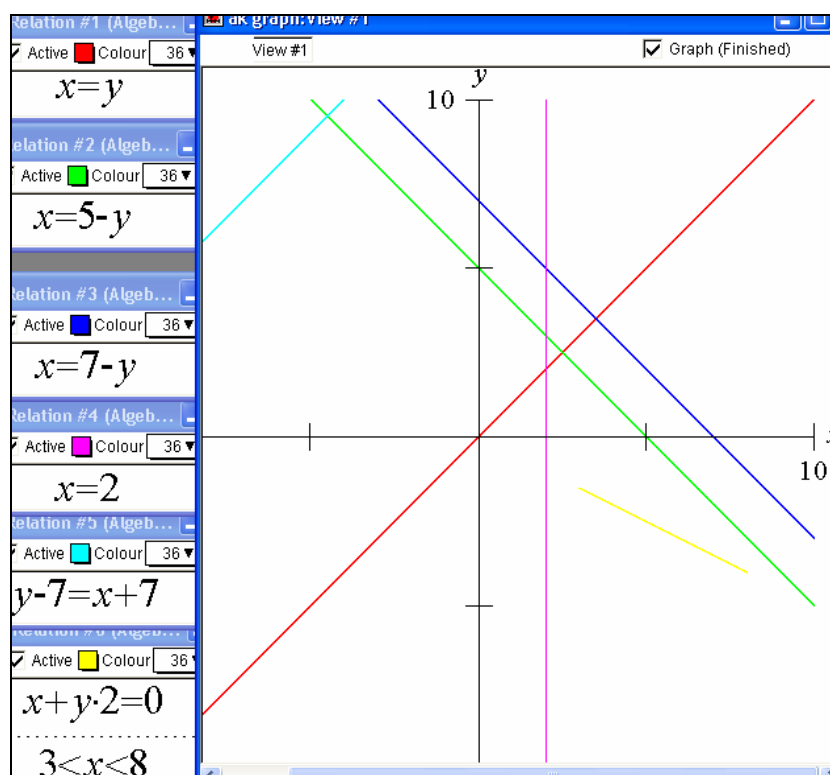


Figura 69 – Atividade 1/ AKE

Na atividade 2, o estudante mostra novamente desprendimento em relação a alguma matemática imposta ao escrever suas restrições para x e y , na construção dos retângulos, usando o sinal de $>$ e, por conseguinte, colocando-as na ordem decrescente. Este fato poderia ser discutido em uma sala de aula com todo o grupo, porém, não era o objetivo desta coleta de dados. Também notamos, na relação rosa da figura abaixo (que representa o triângulo), que AKE deu um bom emprego às desigualdades ao escrever a desigualdade dupla $y < 4x < 6y$. Neste caso, temos a construção, por parte do estudante, de uma matemática que resolve os problemas encontrados e contém significado para ele, em específico a geometria analítica – como afirmam teóricos como Papert (1994) e Kaput (2007).

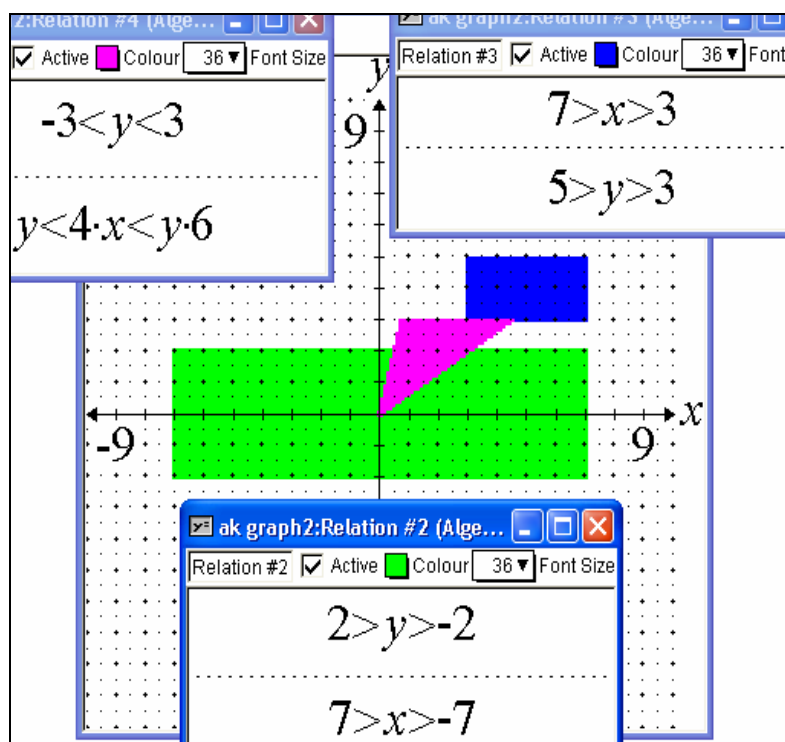


Figura 70 – Atividade 2/ AKE

Este estudante não se sentiu atraído pelas atividades iniciais e, após realizar as atividades 1 e 2, partiu para a atividade livre (atividade 7), dedicando seu tempo em pesquisa, na Internet, por figuras interessantes e navegando pelo site de origem do GrafEq. AKE construiu várias regiões no plano usando expressões trigonométricas. Abaixo, temos uma das construções salvas por ele.

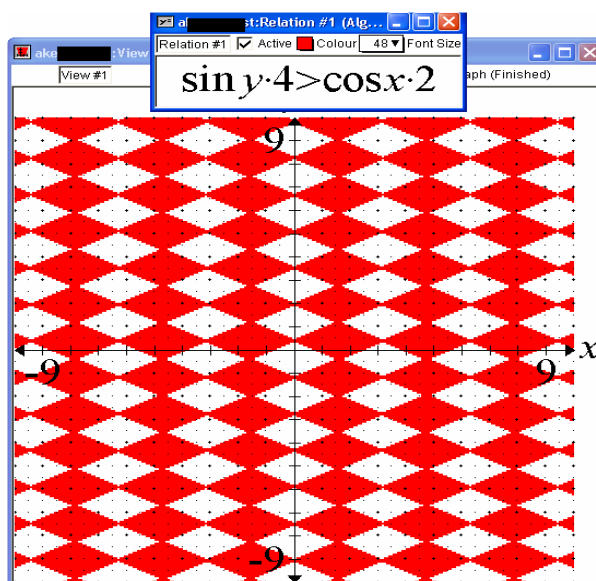


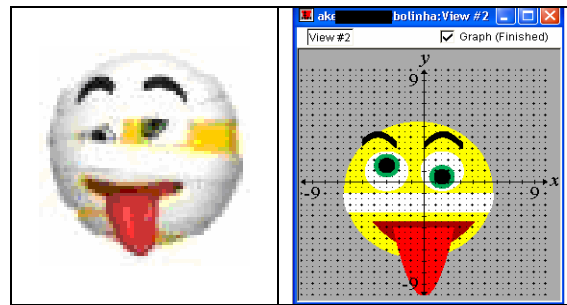
Figura 70 – Atividade 7/ AKE - manipulações trigonométricas

Dessa forma, percebemos que a autonomia dada ao estudante gerou um momento de criatividade que não existe (ou é raro) em uma sala de aula. Com essas manipulações, AKE explorou ao máximo as funções trigonométricas e as representações algébricas destas e de desigualdades, conforme seu interesse. Quando o estudante se negou a realizar as tarefas de uma forma linear, um pensamento comum na escola diria que ele estaria sendo relapso, mas, no entanto, esta atividade proporciona uma aproximação com a vivência dos nossos estudantes atuais da educação básica – estudantes habituados a interagir com os computadores na realização das mais variadas tarefas (escolares ou não).

Hoje em dia, as *tecnologias de informação e comunicação* (TIC) representam uma força determinante do processo de mudança social, surgindo como a trave-mestra de um novo tipo de sociedade, a sociedade de informação. (PONTE, 2000, p. 3)

Atividade 7 (livre): Como o estudante preferiu não fazer as outras tarefas e iniciou esta com tema livre pois disse ser mais interessante, pedi para que, após suas construções trigonométricas, escolhesse uma imagem na rede para construir uma réplica. Quando AKE encontrou o Emotion¹⁴ do quadro abaixo (à esquerda), identificou rapidamente a língua como uma parábola e se motivou para construir a réplica.

¹⁴ Emotions são bonecos (apenas cabeça), em forma esférica, que representam emoções e estão muito difundidos em chats, outras formas de correspondência on-line na Internet e em celulares. São muito populares entre os adolescentes.



Quadro 23 – Atividade 7/ AKE - Emotion (original e réplica)

Ao analisarmos a complexidade e a quantidade das relações utilizadas nesta construção (Figura 72), percebemos que quando há motivação, neste caso, gerada por uma escolha de AKE, não há limites para o trabalho que os estudantes podem realizar. Em geometria analítica, vários conceitos foram abordados por AKE. Além das regiões limitadas por parábolas, onde o aluno trabalhou com translações realizadas com a mudança de parâmetros nas inequações, houve também translações de expressões trigonométricas modulares.

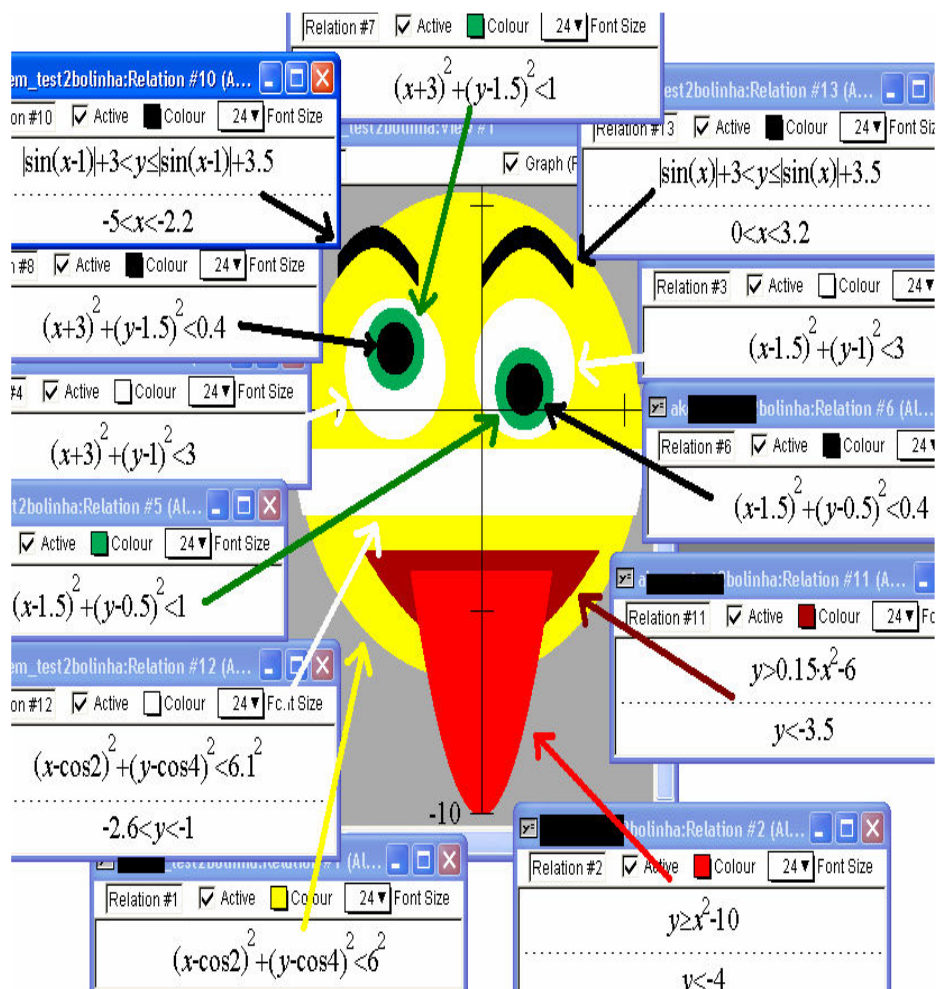


Figura 72 – Atividade 7/ AKE - Emotion (relações)

Ainda atraído pelas expressões trigonométricas, AKE utilizou valores envolvendo cossenos para construir as relações que formavam a “cabeça” do boneco (amarela) e a faixa branca acima da boca (branca). Normalmente os estudantes têm dificuldades em compreender o significado destas expressões, entretanto, AKE a utilizou muito bem para o seu objetivo.

As atividades 8 e 9 não foram realizadas.

Questionário

1) Qual foi a maior dificuldade encontrada na realização das construções no programa? *Acho que na parte de escrever as formulas para dar forma ao que eu queria.*

2) Descreva, com suas palavras, qual era a matemática envolvida na realização dos exercícios? *muito de equacoes de primeiro e segundo grau, algebra(eu acho) e inequacoes.*

3) O que você achou de interessante nas atividades? Qual a atividade que mais lhe interessou? *a atividade que mais me interessou foi a de fazer qualquer desenho livre, e o interessante nas atividades e de pensar em fazer tal formula para obter um pedaço do desenho!*

4) Faltou algo para a realização das atividades? *não.*

5) Se existir algum comentário, crítica ou sugestão para esta sequência de atividades com o uso do GrafEq, escreva-as. *a unica critica que faço e o problema em que nos nao conseguimos copiar e colar da internet para o grafeq.*

Considerações individuais: A construção do significado do que propõe a geometria analítica por AKE, além das suas construções, está exposto na resposta 3 do questionário, quando ele identifica as relações algébricas (que ele chamou de *fórmulas*) como sendo representantes de curvas ou regiões no plano (*pedaços do desenho*), somado às reflexões sobre a reciprocidade dessas equivalências durante as construções. Além disso, em todas as suas construções houve a determinação de estratégias para modificar parâmetros nas relações para gerar as regiões requeridas.

Os estudantes a seguir (PED, JEA, GAB, JUL e BON) participaram apenas do início da coleta de dados. Estão incluídos neste texto pois geraram material para análise, principalmente ao responderem o questionário.

8. PED

Assim como AKE (7), PED não realizou as primeiras atividades. Ele seguiu diretamente para a Atividade 4 (figuras pré-definidas) onde construiu o carro. Para fazer o carro, o estudante manipulou bem as equações, mas não sabia preencher as regiões (utilizar desigualdades). Após vencer esta dificuldade com tentativas (primeiro tentou uma equação para cada “lado” do carro – com segmentos), se divertiu inventando detalhes para o carro, mas não salvou todos. Na imagem abaixo, notamos que este foi o único carro com sinaleira traseira e volante, demonstrando a questão da apropriação da atividade vista também nas construções de outros colegas – como PAC(4) e MAU(6).

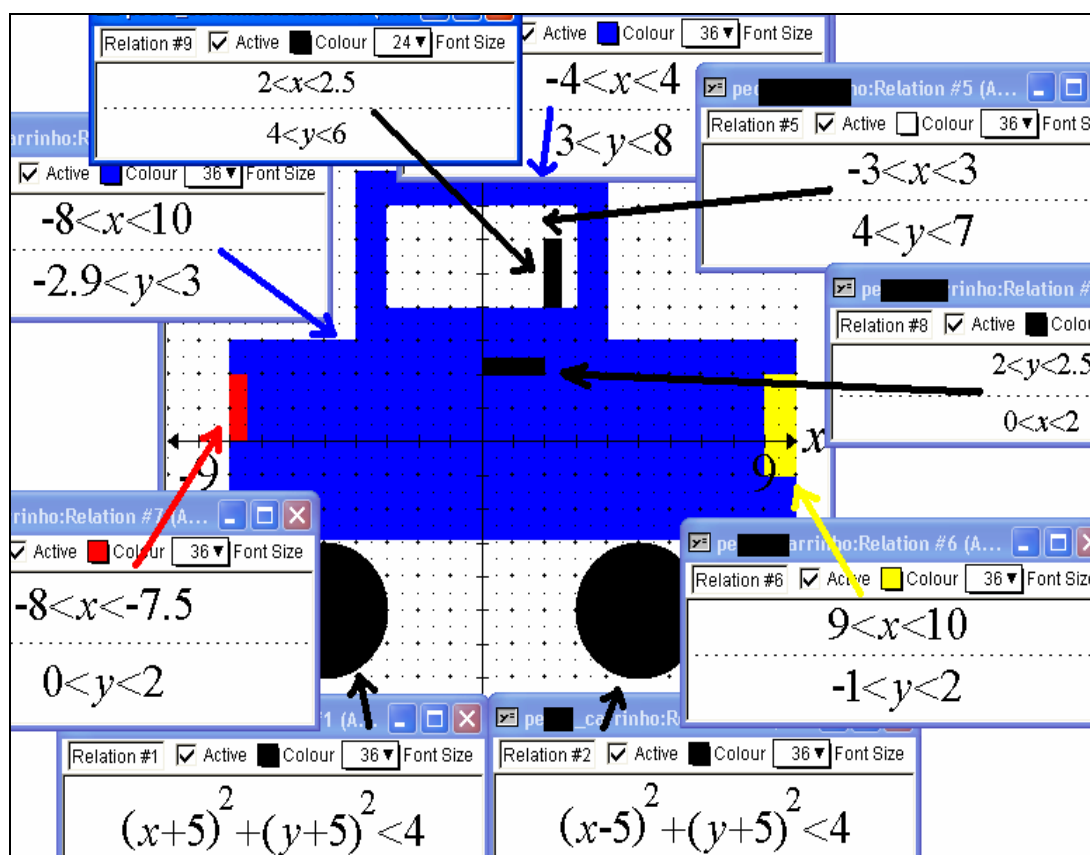


Figura 73 – Atividade 4/ PED - carro

Questionário

1) Qual foi a maior dificuldade encontrada na realização das construções no programa? *Saber qual fórmula ou equação usar.*

2) Descreva, com suas palavras, qual foi a matemática envolvida na realização dos exercícios? *Havia geometria, usando as formulas com equações e inequações para desenvolver o desenho.*

3) O que você achou de interessante nas atividades? Qual a atividade que mais lhe interessou? *Utilizar o computador e formulas de geometria para criar imagens. Gostei mãos de fazer o “carrinho”.*

4) Faltou algo para a realização das atividades? *Só entender direito o que estava fazendo.*

5) Se existir algum comentário, crítica ou sugestão para esta sequência de atividades com o uso do GrafEq, escreva-as. *Nada, apenas entender melhor e porque se cria imagens através de fórmulas.*

Considerações individuais: Na resposta 2 percebe-se o quanto PED se questionou sobre a utilização de equações e inequações para formação de regiões no plano, determinado assim um ganho na compreensão da Geometria Analítica. Também reconhecemos traços motivacionais, já encontrados (e comentados) com os colegas DAL(2), PAC(4), GIU(5) e AKE(7), impulsionados pelo formato das atividades.

9. JEA

Atividades 1 e 2: JEA realizou as construções das duas atividades no mesmo arquivo, como podemos ver na figura 74.

Este estudante já utiliza o y no primeiro membro das igualdades para a construção das retas. Nas retas paralelas ao eixo das abscissas notamos que JEA conclui sobre as mudanças necessárias à construção, porém não realiza a operação e deixa para que o GrafEq o faça. Por exemplo, a relação verde foi construída inicialmente como $y = 4$, mas o estudante quis subtrair uma unidade para que o segmento fosse para o local escolhido por ele. Poderia digitar $y = 3$, mas, na sua lógica,

4-1 era equivalente e como o software aceitava, estava pronta sua construção. No entanto, ele não se deu conta de que havia construído uma semi-reta na medida em que o software entendeu a restrição $-2 < x > 5$ (escrita incorreta) apenas como $x > 5$. Na relação marrom temos a mesma situação.

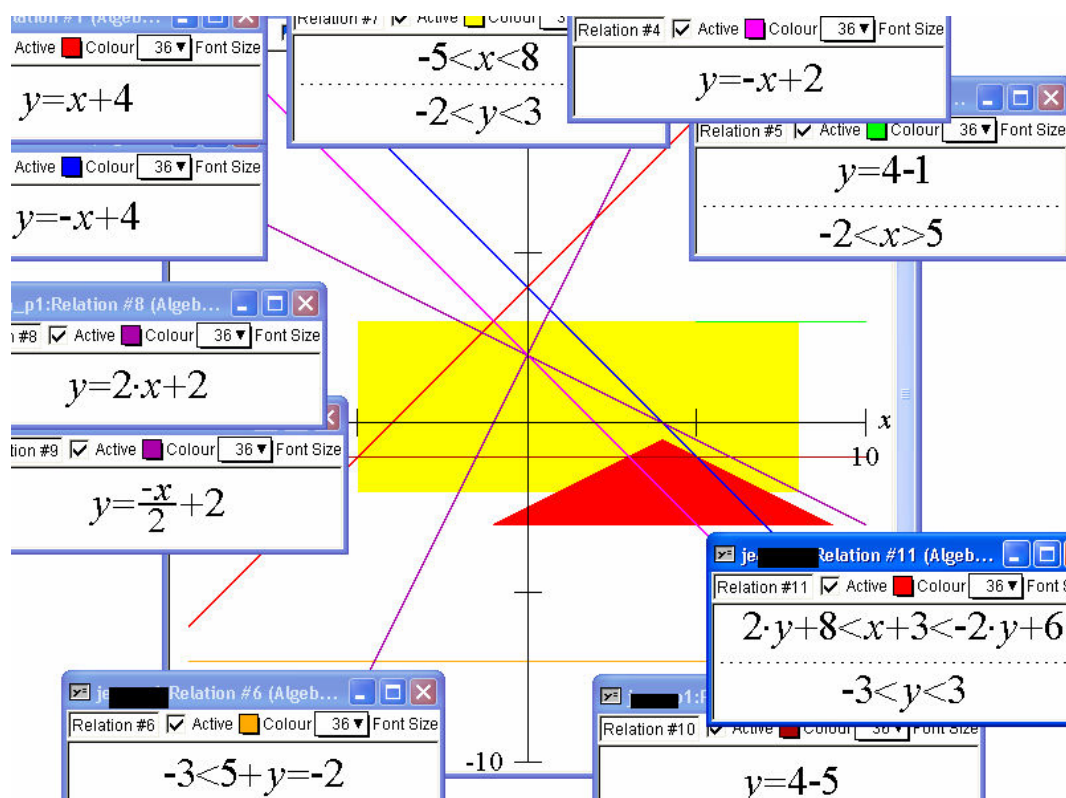


Figura 74 – Atividade 1 e 2/ JEA

Na construção do triângulo vermelho percebemos a mesma economia nas desigualdades utilizada por AKE (7). Aqui temos um exemplo de significado dado, pelo estudante, a uma desigualdade dupla – ou seja, a forma encontrada por JEA para construir uma região determinada por um sistema de desigualdades lineares. Este é um resultado bastante difícil de construir em uma sala de aula e nesta atividade, de acordo com as explorações dos estudantes, se mostrou com naturalidade.

Atividade 3: A partir da equação fornecida $((x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2)$, JEA concluiu bem rápido o caso especial para centro na origem $(x^2 + y^2 = r^2)$. Ele segue na construção de discos, ainda por tentativas mas já tendo conclusões relacionando as desigualdades.

Na figura a seguir temos duas construções que ilustram as explorações do estudante sobre as influências dos sinais de $<$ e $>$ nas regiões do plano. Conclusões que ocorreram de forma semelhante com DAG(1) e GIU(5).

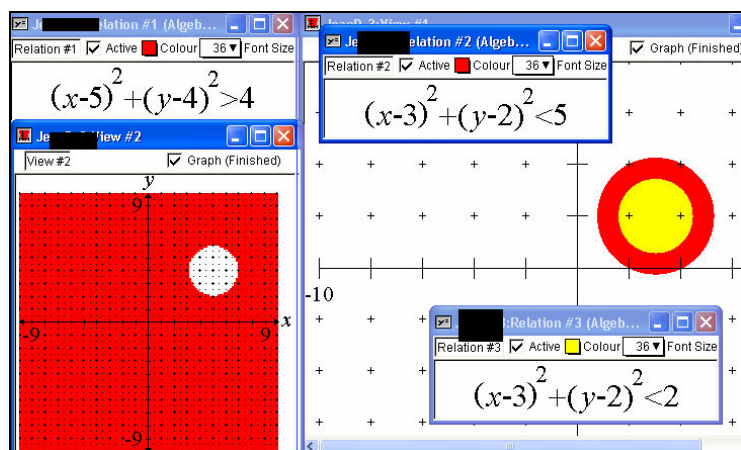


Figura 75 – Atividade 3/ JEA - imagem 1

Como outros colegas já haviam feito, JEA realizou a construção abaixo sobrepondo o disco azul sobre o retângulo de mesma cor. Esta saída para o problema não é tão sofisticada quanto a encontrada por PAC(4), mas, em termos de aplicação da geometria analítica, é válida. Para realizá-la, o estudante pensou em um disco com diâmetro igual à base do retângulo e desenvolveu as desigualdades corretamente, isto é, o estudante pensou algebricamente para resolver o seu problema geométrico de coesão entre o disco e o retângulo.

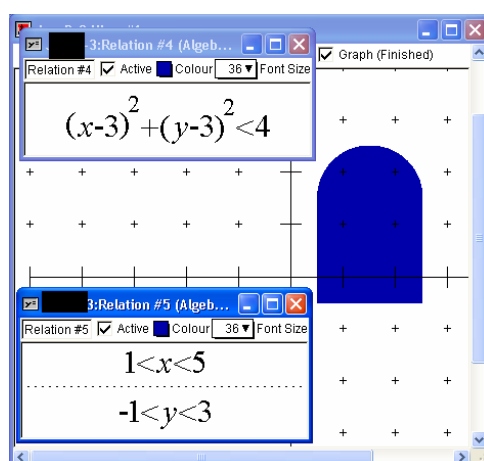


Figura 76 – Atividade 3/ JEA - imagem 2

As atividades 4, 5 e 6 não foram realizadas por JEA.

Atividade 7 (livre): Esta atividade também motivou JEA, como aconteceu com os demais participantes desta pesquisa. Ele pesquisou a figura na Internet e me enviou o e-mail com a construção no GrafEq em anexo e o link para a figura escolhida. Esta ação mostra o nível de interação do estudante com as TIC, já comentado anteriormente.

oi ricardo, eis o meu super martelo e aqui a foto do google. <http://cpc.com.pt/IN/images/Martelo.jpg>

Quadro 24 – Atividade livre/ JEA - mensagem



Figura 77 – Atividade 7/ JEA - figura original

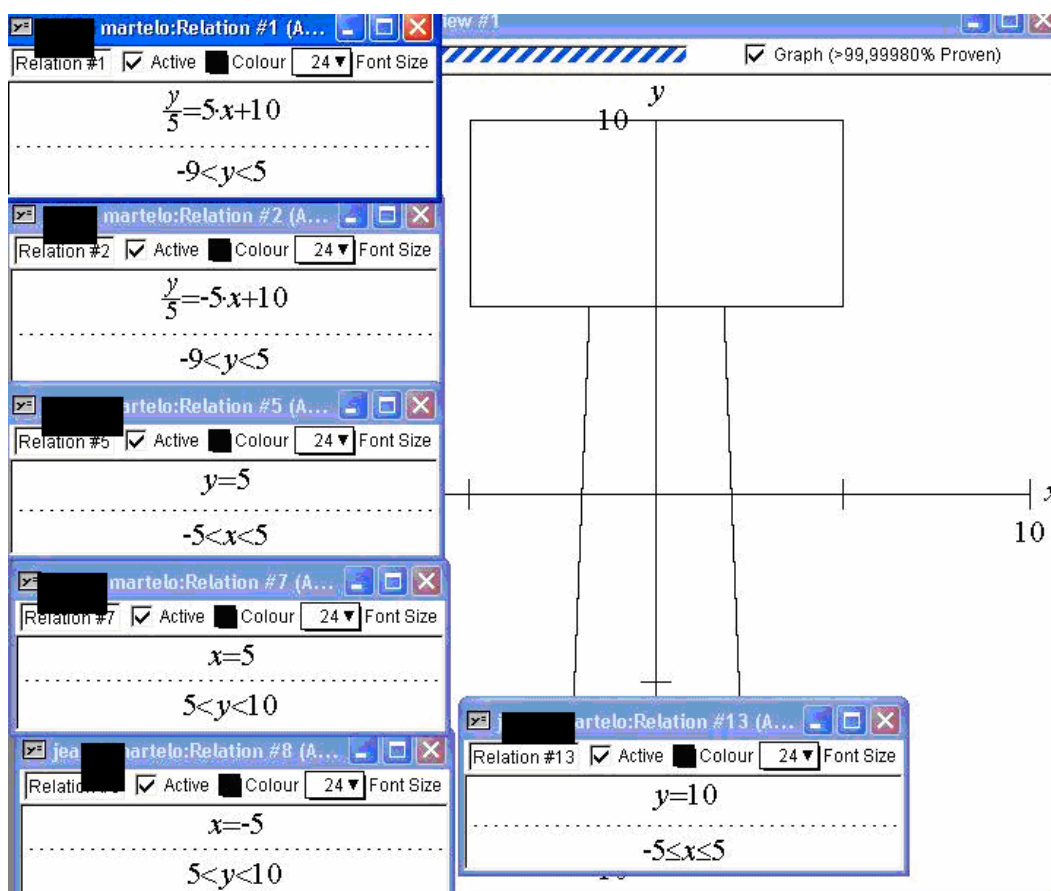


Figura 78 – Atividade 7/ JEA - réplica

Esta construção é simples e não faz uso de desigualdades (para preencher o martelo). No entanto, é notável a organização do estudante para a construção dos segmentos que compõem a figura, iniciando sempre com a variável y e trabalhando com mudanças nos parâmetros da equação de uma reta inicial.

As atividades 8 e 9 não foram realizadas e JEA não enviou as respostas do questionário.

Considerações individuais: O estudante notoriamente se apropriou da prática analítica. Isso se confirma nas suas construções, principalmente no processo de construção, onde houve em diversos momentos manipulações nas relações para resolução dos problemas geométricos (dar forma às figuras). Tais manipulações permitiram descobertas de propriedades algébricas nas relações e de propriedades geométricas nas figuras, bem como as equivalências entre estas, essência da geometria analítica.

10. GAB

Atividade 1:

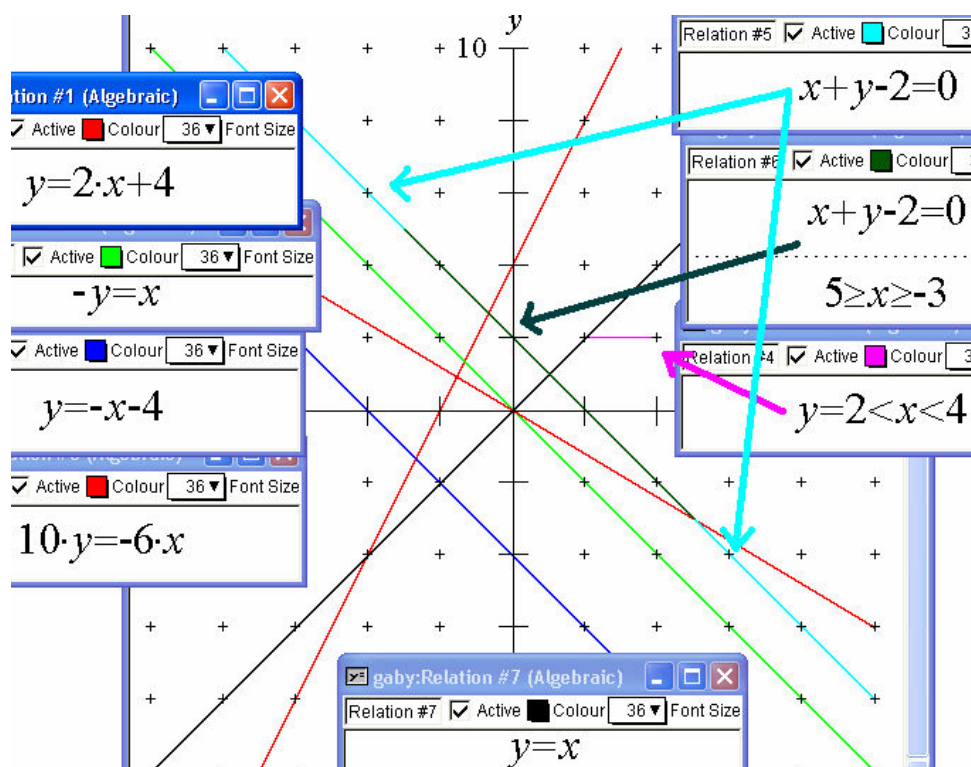


Figura 79 – Atividade 1/ GAB

Na figura acima, percebemos que as relações, apesar de iniciadas com y no primeiro membro foram alteradas de acordo com a necessidade de mudanças nas retas do plano – veja a relação verde e a relação vermelha. Na relação verde escuro temos uma boa conceitualização para um segmento de reta. Enquanto que a primeira relação determina a reta $x + y - 2 = 0$ (suporte ao segmento), a segunda determina um segmento desta reta, aquele que possui pontos com abscissas pertencentes ao intervalo $[-3,5]$. Na relação rosa, GAB também foi bastante criativo ao escrever $y = 2 < x < 4$ para construir o segmento pertencente à reta $y = 2$ com pontos de abscissas pertencentes ao intervalo $[2,4]$, mostrando o quanto esta proposta deixa os estudantes livres para construção de sua própria matemática, ou melhor, construção da matemática de forma significativa para eles e para resolução de problemas.

Atividade 2: Como a maioria dos colegas, GAB não encontrou maiores dificuldades, inclusive para utilização de um sistema de desigualdades para construir o triângulo verde (figura abaixo).

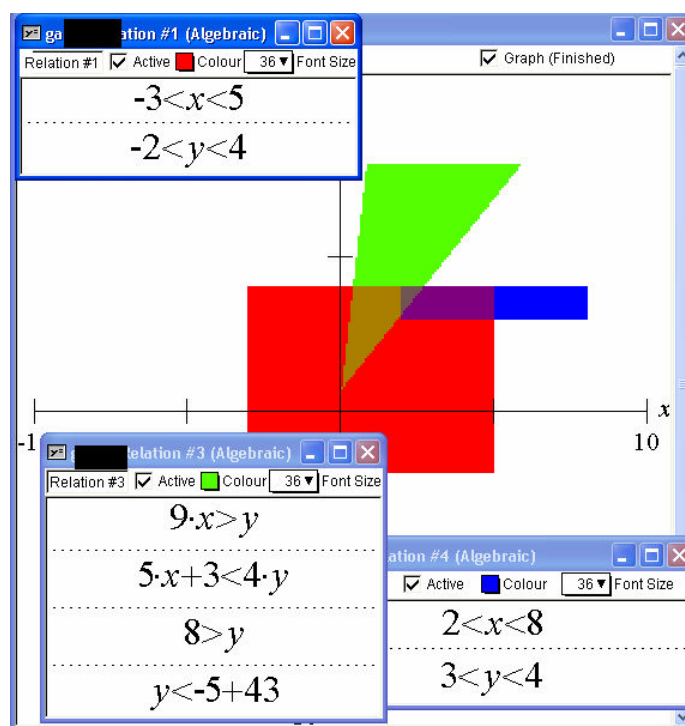


Figura 80 – Atividade 2/ GAB

As demais atividades não foram realizadas.

Questionário

1) Qual foi a maior dificuldade encontrada na realização das construções no programa? *eu nao sabia o que eu teria que escrever para conseguir a reta onde eu precisava*

2) Descreva, com suas palavras, qual foi a matemática envolvida na realização dos exercícios? *nao sei ao certo, nao entendi direito a moral do exercicio*

3) O que você achou de interessante nas atividades? Qual a atividade que mais lhe interessou? *honestamente, nao gostei, achei chato. talvez se eu tivesse entendido melhor como funcionava eu me empolgasse mais.*

4) Faltou algo para a realização das atividades? *nao sei... em que sentido?*

5) Se existir algum comentário, crítica ou sugestão para esta sequência de atividades com o uso do GrafEq, escreva-as. *achei complexo, talvez nao seja tanto para um futuro Mestre da matematica, mas para uma mera aluna de 2º ano, nao curti mto..*

Considerações individuais: Apesar de não ter continuado na pesquisa, GAB demonstrou avanços na primeira atividade, embora ele não gostasse muito do tempo que levou para realizá-la. Como foi dito no início desta coleta de dados, o pesquisador é também professor destes estudantes. Essa lembrança é revisitada para pontuar que GAB é um daqueles estudantes que estão sempre afirmando que não gostam de matemática – o que também pode ser notado nas suas respostas ao questionário. Porém, este sentimento pela disciplina não influenciou de forma negativa o princípio de produção do estudante. Mesmo que o estudante tenha dito que *nao entendeu direito a moral do exercicio, que achou chato e complexo*, ele explorou corretamente as relações algébricas para descobrir suas propriedades e, conseqüentemente, solucionar os problemas geométricos representados pelas curvas e regiões exigidas na atividade.

11. JUL

Como não iria participar de todas as atividades, o estudante resolveu, após realizar a atividade 1 (figura abaixo) para apropriação das ferramentas do software, construir a figura que mais lhe motivou: a casinha da atividade 4. Notem que o fundo preto nas construções sugere exploração, por parte de JUL, de outras ferramentas do software.

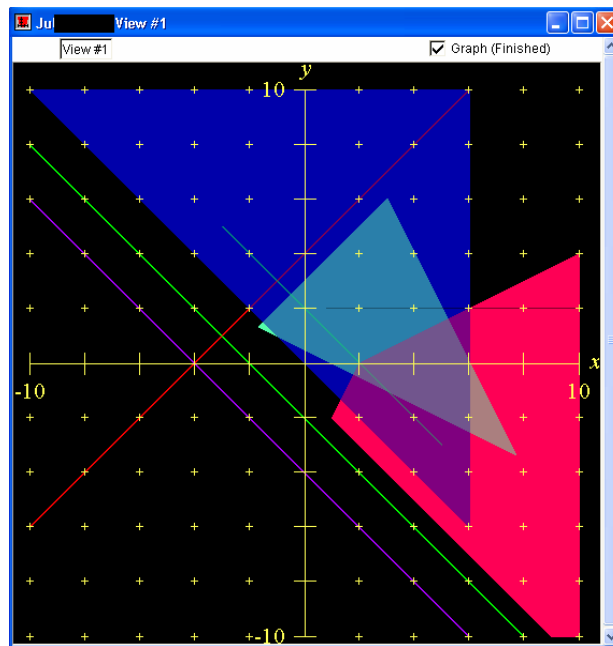


Figura 81 – Atividade 1/ JUL

Atividade 4:

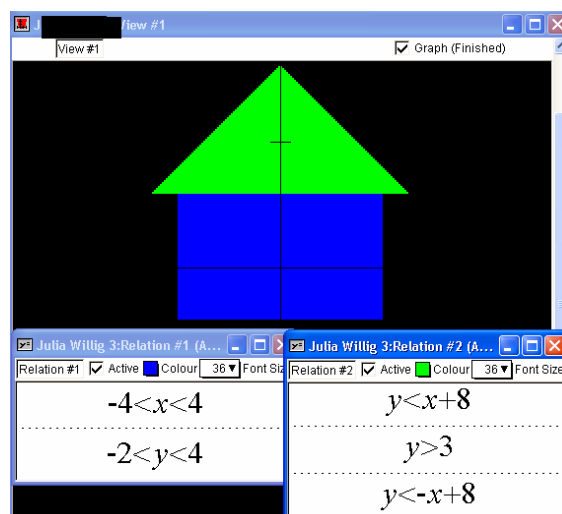


Figura 82 – Atividade 4/ JUL - casa

Construção da casa. De acordo com a primeira resposta do questionário, JUL havia construído uma casa com mais detalhes (portas e janelas talvez), mas não salvou o arquivo. Mesmo assim, foram muito boas as escolhas de retas para compor o sistema que gerou o telhado da casa.

As demais atividades não foram realizadas.

Questionário

1) Qual foi a maior dificuldade encontrada na realização das construções no programa? *No começo assim não sabia mexer muito no software, mas depois de algumas idas no laboratório fui meio que pegando o jeito de mexer, claro não sei fazer muitas figuras geométricas, desenhos, mas sai alguma coisa! E ainda quando eu tava conseguindo fazer uma casinha bonitinha eu fechei o programa sem salvar!*

2) Descreva, com suas palavras, qual foi a matemática envolvida na realização dos exercícios? *Pra usar o software tínhamos que meio que saber alguns conteúdos, geometria plana, formas geométricas, análise de gráficos, trigonometria (seno, cosseno,...), montagem de gráficos, função de segundo grau.*

3) O que você achou de interessante nas atividades? Qual a atividade que mais lhe interessou? *Não sei qual atividade que mais me interessou, gostei de trabalhar no programa e de ver que uma equação pode aparecer uma figura geométrica! Na aula livre eu fiquei brincando colocando qualquer equação e apareciam umas coisas nada a vê!*

4) Faltou algo para a realização das atividades? *acho que nao!*

5) Se existir algum comentário, crítica ou sugestão para esta sequência de atividades com o uso do GrafEq, escreva-as. *Gostei de trabalhar com esse programa, nunca tinha mexido antes nem sabia que existia!*

Considerações individuais: *...gostei de trabalhar no programa e de ver que uma equação pode aparecer uma figura geométrica!* Este comentário feito por JUL mostra que, mesmo participando apenas do início da sequência testada, ele se apropriou do fundamento da geometria analítica. Outro fator que merece destaque, mais uma vez, foi o motivacional.

12. BON

De todos os estudantes que participaram das atividades, este foi o que teve menos contato com o software. Não estava nos períodos iniciais desta coleta de dados mas, afirmando ouvir comentários interessantes dos colegas sobre o software, se fez presente em um dos dias de atividades. Ao ver as construções iniciais dos colegas, BON partiu para a construção da casa. Já encontrou uma boa estratégia centralizando a casa e se preocupou em construir um telhado com a mesma largura da casa. Este fato já demonstrou bastante trabalho, por parte de BON, para modificar as relações conforme o resultado geométrico e estético almejado por ele.

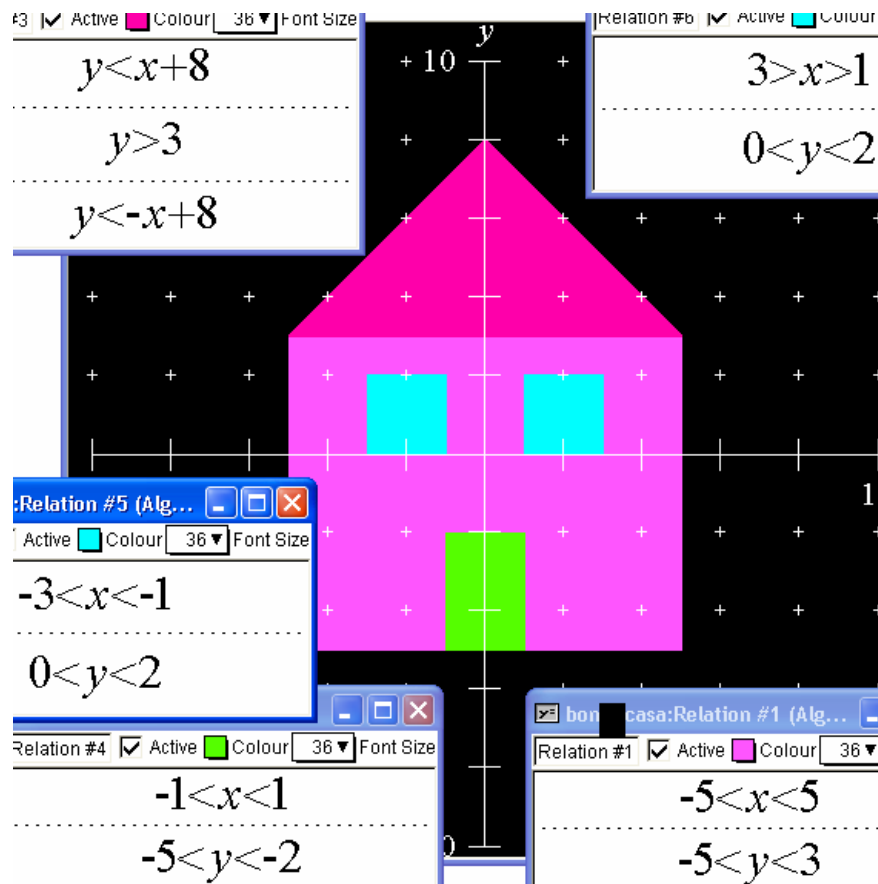


Figura 83 – Atividade 4/ BON - casa

Questionário

1) Qual foi a maior dificuldade encontrada na realização das construções no programa? *Acho que a maior dificuldade era tentar achar as fórmulas certas pra realizar cada coisa.*

2) Descreva, com suas palavras, qual era a matemática envolvida na realização dos exercícios? *Era aquela matemática com retas.*

3) O que você achou de interessante nas atividades? Qual a atividade que mais lhe interessou? *A atividade que mais me interessou era aquela que foi livre, eu fiz uma casinha. ;D. mas gostei de todas. era divertido tentar achar uma linha específica com fórmulas.*

4) Faltou algo para a realização das atividades? *acho que não faltou nada.*

5) Se existir algum comentário, crítica ou sugestão para esta sequência de atividades com o uso do GrafEq, escreva-as. *seria melhor se cada pessoa tivesse a própria folha de exercícios... era difícil fazer sem saber o que tinha que fazer quando terminasse.*

Considerações individuais: Motivação é a palavra chave para a pequena produção de BON. Ele conseguiu, realizando apenas uma tarefa, se interar da proposta e fazer conjecturas no campo da geometria analítica. As suas respostas no questionário enaltecem isto de forma bastante positiva. Um comentário que não surgiu nas impressões dos outros estudantes foi sobre o “incômodo” sentido por BON ao ter que procurar no computador as atividades a serem feitas. Isso contrariava a sua vontade de ter as figuras desenhadas em um papel para refletir sobre elas. Este fato aponta para uma cultura ainda existente entre os estudantes – não utilizar o computador de forma global para realizar suas atividades e simular situações cada vez mais comuns na vida profissional e pessoal adulta. Neste caso, o estudante (e isso seria completamente normal) poderia utilizar lápis e papel para fazer suas especulações acerca da construção, mas precisaria buscar as informações iniciais no local (no computador) indicado pelo professor.

4.3. Análise geral das produções: principais contribuições

Com a finalidade de qualificar as conclusões são apresentados dois quadros distintos. O primeiro consiste num levantamento por categorias das principais contribuições da proposta para a educação dos estudantes envolvidos. No segundo quadro há uma síntese das repostas mais frequentes dos estudantes frente ao questionário proposto na coleta de dados.

Durante a evolução pelas atividades os estudantes vivenciaram diversas situações tanto no campo da Matemática como no da educação de forma mais geral. Após a descrição do progresso de cada um pelas atividades foi possível montar um quadro com as contribuições/ circunstâncias de aprendizagem protagonizadas pelo grupo. Para isto, como podemos ver no quadro a seguir, tais situações foram divididas em (i) Conteúdo Matemático – explicitando as contribuições sobre os tópicos matemáticos existentes no currículo da escola básica e contemplados durante a realização da proposta; (ii) Educação e Ensino de Matemática – habilidades e competências inerentes à atividade de estudo em geral e ao estudo na disciplina de Matemática e (iii) Informática na Educação – retratando situações de aprendizagem ocorridas durante as atividades que ilustram e inserem a proposta dentro de um programa adaptado às exigências dos dias atuais.

<p>Conteúdo Matemático</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Relacionar expressões algébricas com representações no plano cartesiano; • Cônicas; • Decomposição de figuras planas; • Entender e fazer uso de aproximações; • Aquisição e utilização da linguagem algébrica representativa de situações no plano cartesiano; • Translações; • Declividade de retas; • Equação linear / reta; • Figuras e elementos geométricos: segmentos de reta, reta, parábola, quadriláteros, triângulos, circunferências e discos; • Domínio e imagem das relações; • Inequações e regiões no plano cartesiano;
----------------------------	--

	<ul style="list-style-type: none"> • Paralelismo/ perpendicularismo.
Educação e Ensino de Matemática	<ul style="list-style-type: none"> • Apropriação da escrita em Matemática; • Ampliação da criatividade; • Autonomia nos estudos; • Autoria; • Experimentação em Matemática.
Informática na Educação	<ul style="list-style-type: none"> • Disseminação da cultura informática; • Apropriação da tecnologia para aprender Matemática; • Motivação com a utilização do computador; • Utilização de correio eletrônico; • Utilização de software de imagem; • Pesquisa na Internet.

Quadro 25 – Contribuições da proposta

No item 4.2 já foram descritas as respostas formuladas pelos estudantes para o questionário composto de cinco questões. Entretanto, para o próximo capítulo, o das conclusões, se faz necessário um quadro sintético com as respostas dos alunos objetivando a análise destas. Para o alvo principal da proposta foram muito importantes as constatações feitas pelos estudantes e ilustradas nas suas respostas às questões dois e três, onde eles exprimiram os tópicos matemáticos abordados e principalmente a consciência de uma equivalência entre as expressões algébricas e regiões no plano cartesiano. Os estudantes demonstraram o interesse pelo estudo despertado pelas atividades, seja no clima de trabalho descontraído (sem perda de seriedade), na qualidade, autonomia e autoria das produções ou respondendo às últimas questões.

Perguntas	Respostas Frequentes
1) Qual foi a maior dificuldade encontrada na realização das construções no programa?	<ul style="list-style-type: none"> • Encontrar a fórmula (equação) certa para as construções; • Como colorir; • Como colocar as imagens no lugar certo.
2) Descreva, com suas palavras, qual foi a matemática envolvida na realização dos exercícios?	<ul style="list-style-type: none"> • Fórmulas; • Equações de 1° e 2° graus; • Relações entre x e y; • Funções; • Lógica; • Inequações; • Geometria com fórmulas e equações para desenhar; • Geometria plana; • Formas geométricas; • Construção e análise de gráficos; • Trigonometria.
3) O que você achou de interessante nas atividades? Qual a atividade que mais lhe interessou?	<ul style="list-style-type: none"> • Como o gráfico mudava com mudanças na fórmula; • Construção de figuras como carrinho, casinha, praia e desenho livre; • Ver que uma equação pode representar uma figura geométrica.
4) Faltou algo para a realização das atividades?	Resposta negativa em todos os casos exceto por um estudante que sinalizou uma falta de tempo para realizar suas construções.
5) Se existir algum comentário, crítica ou sugestão para esta sequência de atividades com o uso do grafequation, escreva-as.	<ul style="list-style-type: none"> • Muito legal; • Download do programa; • Ter mais projetos como este em aula; • Quanto mais conhecer sobre as fórmulas melhor é o desempenho; • O programa é bem didático; • Gostei de explorar (n)o programa.

Quadro 26 – Respostas frequentes

5 CONCLUSÃO

Analisando a produção dos estudantes ao longo das atividades, bem como os quadros sintéticos que finalizam o capítulo anterior, identificam-se diversos pontos de aprendizagem em Matemática. Entre estes está a aquisição de conceitos em Geometria Analítica por parte dos alunos, manifestada no estabelecimento de relações entre conceitos tratados de forma algébrica e geométrica, evidenciado nas respostas ao questionário proposto. Também foi perceptível, durante a coleta de dados, a constatação e/ou construção de resultados algébricos e geométricos da sua vida escolar anterior e o desenvolvimento de aptidões inerentes à ciência Matemática. Desenvolveram-se habilidades como elaboração de estratégias para resolução de problemas, formas diferentes de visualizar uma situação-problema, permuta entre linguagens matemáticas distintas e experiência com o erro (aproximação). Tais habilidades, além de típicas a um estudo em Matemática, são importantes para a formação profissional, acadêmica e pessoal do estudante. Nas produções de alguns estudantes vimos, com frequência, a formação de raciocínios anteriores às ações, denotando um bom grau de abstração.

Equações de reta e de circunferência, bem como seus parâmetros, são exemplos do campo conceitual da Geometria Analítica que foram largamente discutidos pelos estudantes na realização das atividades propostas. Em meio a esses tópicos está o estudo do plano cartesiano que, cumprindo com o objetivo da proposta, faz com que os estudantes liguem a álgebra à geometria de forma sólida e com significado. Outro fator importante alcançado com o implemento da proposta foi a diferenciação entre equações e inequações, com suas respectivas equivalências no plano cartesiano. Em suma, a riqueza do estudo se deu nas reflexões dos estudantes que ora eram feitas sobre as expressões algébricas para obtenção de representações geométricas, ora se davam com o uso dessas representações para buscar inferências acerca dos parâmetros e padrões das igualdades e desigualdades algébricas. Isso também resultou em um reforço, para os estudantes, do ato de comunicar-se matematicamente.

Também se ressalta que os estudantes vivenciaram situações didáticas importantes à resolução de problemas. A preparação de estratégias para realizar as construções gerou trocas entre as linguagens algébrica e geométrica, apontando para alternâncias entre diferentes sistemas de notação. Este enlace é identificado por Kaput (1992) como uma importante classe da atividade matemática.

Temos aqui uma importante visão permitida pela Geometria Analítica e experimentada pelos estudantes, a conclusão de que problemas matemáticos (podendo generalizar apenas para problemas) podem ser resolvidos com diferentes olhares, que neste caso são o algébrico e o geométrico.

Ponderando as construções dos estudantes, descritas no capítulo anterior, percebemos ainda o emprego e a reflexão de duas importantes características do estudo matemático. A primeira diz respeito aos tópicos de Matemática em si, que surgiram na produção de alguns estudantes, como as cônicas e as coordenadas polares ou situações algébricas não comuns em sala de aula, como sistemas com desigualdades duplas. Por outro lado, temos o exercício de uma importante ferramenta própria da Geometria Analítica e defendida por LIMA (2007) – a escolha de um sistema de eixos conveniente para a resolução de um problema geométrico. Isso se traduz nessa proposta na medida em que os estudantes estabeleçam a origem do sistema cartesiano como centro para as suas construções (ou os eixos coordenados como eixos de simetrias). Estas ações pormenorizam as relações algébricas equivalentes e facilitam sua manipulação.

A respeito das contribuições das TIC implantadas nessa proposta precisamos destacar dois possíveis caminhos. Primeiramente, se faz necessária a identificação de habilidades mais gerais desenvolvidas pelos estudantes como a apropriação de ferramentas potentes para o estudo, matemático ou não. O uso de correio eletrônico e a utilização da máquina para (re) organização de ideias no processo de construção, modificando padrões de ensino-aprendizagem de conteúdos, são exemplos cada vez mais frequentes na atualidade.

Mais especificamente, a implantação do GrafEq no estudo de Geometria Analítica ampliou a percepção dos estudantes sobre os objetos algébricos, geométricos e as equivalências entre eles. De acordo com a teoria de Kaput (1992), o distanciamento existente entre as estruturas de pensamento dos sujeitos (estudantes) e os objetos de estudo (expressões algébricas, representações gráficas) foi reduzido. Dessa forma, a utilização do software gráfico, segundo o que dita Tall (1992), aumentou a capacidade de exploração dos estudantes. Isto é, a visualização quase que imediata da representação geométrica de uma expressão algébrica, com a possibilidade de modificar e verificar parâmetros nesta última, aproxima ações sobre o objeto estudado às operações mentais dos sujeitos – modificando a forma como o estudante estrutura o seu juízo sobre o problema que está à sua frente. No capítulo 2, vimos que Kaput (1992)

defende o estudo de variações como uma propriedade importante para a compreensão de invariâncias em Matemática.

Por outro lado, também temos uma validação da proposta no sentido didático da estruturação das atividades, de acordo com Kaput (2007) e Ponte (2000). Houve uma mudança na rotina de sala de aula para os estudantes pesquisados na medida em que eles estavam à frente da sua produção, fazendo seus próprios questionamentos. Tais conjecturas eram confrontadas com o professor, parcialmente com os colegas e, frequentemente, com novas construções (ou ajustes das anteriores) no GrafEq.

Nesta esfera, a sequência didática escolhida se mostrou bastante coesa e durante a coleta de dados surgiram vários exemplos dessas interações. Em muitos casos, houve motivação pela utilização do computador, explicitada pelo fato de que alguns estudantes fizeram o download do software em suas casas. Entretanto, os episódios que mais ilustram o empenho dos estudantes na realização das tarefas, com ganhos para o ensino-aprendizagem de Geometria Analítica, são as construções de figuras com caráter lúdico (casa, carro etc.), a busca pelo estudo de transformações geométricas para aprimorar estas construções e a identificação de curvas e regiões em figuras extraídas da Internet.

Porém, é importante afirmar que não são abandonados os conteúdos curriculares, mas sim a forma como usualmente eles são trabalhados, criando novas perspectivas de aprendizagem. Essa metodologia de ensino é defendida por Kaput da seguinte forma:

Usando estratégias dessa forma, nós temos visto extraordinárias ocorrências de instigação e aprendizado. Desse modo, temos atividades não somente investigativas de novas ideias matemáticas, mas que nos levam a caminhos de motivação na matemática escolar – pelo aprofundamento e personificação das matemáticas nas realidades sociais dos estudantes. (KAPUT, 2007, p. 191)

Tudo isso aponta para as respostas das questões que permearam esta pesquisa. A utilização do GrafEq potencializou as reflexões dos estudantes em Geometria Analítica, aproximando a álgebra da geometria e resultando em aprendizagem da linguagem algébrica representativa de situações no plano cartesiano.

O produto final desta dissertação (Apêndice D) é um tutorial para uso do GrafEq, contendo uma sequência de atividades em Geometria Analítica que evoluem da mesma forma que o usuário vai aprendendo as ferramentas do software. Este tutorial está em linguagem html (próprio para web) e também pode ser utilizado por outros

professores, na sua totalidade ou parcialmente. Exemplos de uso parcial deste tutorial é a exploração de uma atividade que se adapte ao tópico trabalhado pelo professor ou como problema gerador, de acordo com a dissertação de Diogo (2007). Como nesse formato as atividades avançam com a explanação das ferramentas, este tutorial pode também ser utilizado em Educação à Distância (EaD). Com isto também atendemos a uma recomendação da CAPES¹⁵, entregando à comunidade um material produzido em um mestrado profissionalizante em Educação Matemática.

Finalmente, como sugestão de extensão da utilização de softwares gráficos no estudo de Geometria Analítica temos o GeoGebra, cuja interface pode ser encontrada no Apêndice C. Nele, ao contrário do GrafEq, os estudantes realizam construções geométricas e obtêm suas equivalências algébricas. Novas pesquisas podem atrelar o GeoGebra e o GrafEq, formando mais uma alternativa para o ensino-aprendizagem de Geometria Analítica.

¹⁵ Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

6 REFERÊNCIAS

1. BASSO, Marcus Vinicius de A. et al. **Educação Tecnológica e/ na Educação Matemática: Aplicações da Matemática Elementar na Sala de Aula.** Revista Informática na Educação – Teoria e Prática. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. Outubro. 1999.
2. _____. **Espaços de Aprendizagem em Rede: Novas Orientações na Formação de Professores de Matemática.** Tese de Doutorado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2003.
3. BORBA, Marcelo de Carvalho. **Calculadoras Gráficas e Educação Matemática.** Série Reflexão em Educação Matemática. MEM/USU, Editora Art Bureau, 1999.
4. D'AMBRÓSIO; BARROS. **Computadores, Escola e Sociedade.** Editora Scipione. 1990.
5. DIOGO, Marcelio A. **Problemas Geradores no Ensino-Aprendizagem de Matemática no Ensino Médio.** Dissertação de Mestrado (Educação Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.
6. DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Geometria Plana.** Coleção Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 9. 7ª edição. Editora Atual. São Paulo. 1998.
7. EVES, Howard. **Estudio de las geometrias.** Vol. 2, p.1-16. México. 1969. Tradução da publicação original em inglês A SURVEY OF GEOMETRY, VOLUME TWO.
8. _____. **Introdução à História da Matemática.** Campinas-SP. 2004. Tradução de Higinio H. Domingues da publicação original AN INTRODUCTION TO THE HISTORY OF MATHEMATICS.
9. GRAVINA, M. Alice. **Geometria Dinâmica: Uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria.** Artigo publicado nos Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, p.1-13, Belo Horizonte, Brasil, 1996. Disponível em <http://www.edumatec.mat.ufrgs.br>. Acesso em 20 de Setembro de 2007.

10. GRAVINA, M. Alice. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. 2001. Tese de Doutorado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.
11. IEZZI, Gelson. **Geometria Analítica**. Coleção Fundamentos de Matemática Elementar. 5ª edição. Editora Atual. São Paulo. 2005.
12. KAPUT, James. **Technology and Mathematics Education**. University of Massachusetts - Dartmouth. In: GROUWS, Douglas A. **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. National Council of Teachers of Mathematics. 1992.
13. _____; HEGEDUS, Stephen; LESH, Richard. **Technology Becoming Infrastructural in Mathematics Education**. In **Foundations for the Future in Mathematics Education**. Capítulo 8, p. 173-191. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. New Jersey. 2007.
14. KUTZLER, Bernhard; KOKOL-VOLJC, Vlasta. **Introdução ao DERIVE 5: O Assistente em Matemática para o seu PC**. Texas Instruments. Áustria, 2000. Traduzido para o português por Waldir L. Roque. Porto Alegre. 2001.
15. LIMA, Elon Lages. **Coordenadas no Plano**. Coleção Professor de Matemática. SBM. 2002.
16. _____. **Análise de Textos**. Disponível em <http://www.ensinomedioimpa.br>. Acesso em 30 de Dezembro de 2007.
17. OLIVEIRA, Sinval de. **Design de Um Ambiente Computadorizado Para Introdução à Aprendizagem de Álgebra**. Dissertação de Mestrado (Ciência da Computação). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2001.
18. PAPERT, S. **LOGO: Computador e Educação**. Editora Brasiliense. 1988.
19. _____. **A Máquina das Crianças: Repensando a Escola na Era da Informática**. Editora Artes Médicas. Porto Alegre. RS. 1994.

20. PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais). **Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. (Orientações curriculares para o ensino médio; volume 2).
21. PCNs+ (Ensino Médio). Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. **Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006.
22. PEDAGOGUERY SOFTWARE. GrafEq 2.12. Disponível em <http://www.peda.com/grafeq>. Acesso em 01 de Outubro de 2007.
23. PISA. **Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura**. OECD (Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico.). 2006. Disponível em <http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/59/2/39732471.pdf>. Acesso em 26 de Dezembro de 2007.
24. _____. **Pisa Released Items – Mathematics**. OECD (Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico.). 2006. Disponível em <http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/14/10/38709418.pdf>. Acesso em 26 de Dezembro de 2007.
25. PONTE, João P. **Estudos de Caso em Educação Matemática**. 2006. Disponível em [http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/06-Ponte%20\(Estudo%20caso\).pdf](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/06-Ponte%20(Estudo%20caso).pdf) Acesso em 20 de Outubro de 2007.
26. _____. OLIVEIRA, H.; VARANDAS, J. M. **O contributo das tecnologias de informação e comunicação para o desenvolvimento do conhecimento e da identidade profissional**. In D. Fiorentini (Ed.), Formação de professores de Matemática: Explorando novos caminhos com outros olhares (p. 159-192). Campinas: Mercado de Letras. 2003. Disponível em [http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte-Oli-Var\(TIC-Dario\).doc](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte-Oli-Var(TIC-Dario).doc). Acesso em 02 de Janeiro de 2008.
27. _____. **Tecnologias de Informação e Comunicação na Formação de professores: Que Desafios?** Revista Iberoamericana de Educación. Nº 24 (p. 63-90). 2000. Disponível em [http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/00-Ponte-TIC%20\(rie24a03\).pdf](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/00-Ponte-TIC%20(rie24a03).pdf). Acesso em 02 de Janeiro de 2008.

28. PONTE, João P.; RIBEIRO, M. J. B. **A formação em novas tecnologias e as concepções e práticas dos professores de Matemática.** Quadrante, 9(2), P. 3-26. 2000. Disponível em <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/00-Ribeiro%20e%20Ponte.doc>. Acesso em 02 de Janeiro de 2008.
29. _____; OLIVEIRA, H. **A Internet como recurso para o ensino da Matemática.** NOESIS. N°55 (p.41-5). 2000. Disponível em [http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/00-Ponte-Oliveira%20\(NOESIS\).doc](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/00-Ponte-Oliveira%20(NOESIS).doc). Acesso em 02 de Janeiro de 2008.
30. ROSA, Marlusa Benedetti da; ALVES, Maira Leandra. **Construindo releituras de Miro com o auxílio do software grafequation.** 2005. Disponível em <http://www.edumatec.mat.ufrgs.br>. Acesso em 20 de Setembro de 2007.
31. SANTAROSA, Lucila M.; GRAVINA, M. Alice. **A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados.** IV Congresso RIBIE, Brasília, 1998. Disponível em <http://www.edumatec.mat.ufrgs.br>. Acesso em 20 de Setembro de 2007.
32. SOLODÓVNIKOV, A. S. **Sistemas de Desigualdades Lineales.** Coleção Lecciones Populares de matemáticas. Editora MIR. 1980. Traduzido do russo para o espanhol por Cristóbal Garcia Galal.
33. TALL, David. **Graphic Insight into Mathematical Concepts.** In The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching (p. 117–123). Ed. Cornu, B., & Ralston, A. UNESCO. Paris. 1992. Disponível em <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1992j-west-graphic-ins.pdf>. Acesso em 10 de Janeiro de 2008.
34. _____. **Interrelationships between mind and computer: processes, images, symbols.** In Advanced Technologies in the Teaching of Mathematics and Science (p. 385–413). Ed. David L. Ferguson. New York: Springer-Verlag. 1993. Disponível em <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1993i-nato.pdf>. Acesso em 10 de Janeiro de 2008.
35. _____. **A Versatile Theory of Visualisation and Symbolisation in Mathematics.** Plenary Presentation at the Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques. Toulouse. França. Junho de 1994. Disponível em <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1996b-plenary-cieaem.pdf>. Acesso em 10 de Janeiro de 2008.

36. TALL, David. **Information Technology and Mathematics Education: Enthusiasms, Possibilities and Realities.** 1998. Disponível em <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1998c-icme-plenary.pdf>. Acesso em 10 de Janeiro de 2008.

37. _____. **Technology and Cognitive Growth in Mathematics.** A discussion paper for the Conference on Mathematics and New Technologies. Thessaloniki. Grécia. 18-20 de Junho de 1999. Disponível em <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1999u-tech-thessaloniki.pdf>. Acesso em 10 de Janeiro de 2008.

38. ZANDVLIET, David B. **Education is Not Rocket Science: The Case for Deconstructing Computer Labs in Schools.** Sense Publishers. Rotterdam. 2006.

7 APÊNDICES

7.1. APÊNDICE A: Atividades utilizadas na coleta de dados¹⁶

ATIVIDADE 1

Instruções: Faça as construções em um mesmo arquivo e salve como *nome1*. Envie o arquivo para profcardosantos@yahoo.com.br.

01. Construa uma reta crescente que cruze o eixo y no valor 4.
02. Crie duas retas paralelas e decrescentes.
03. Construa um segmento de reta qualquer.
04. Construa o segmento da reta $x + y - 2 = 0$ com extremidades em $x = -3$ e $x = 5$.
05. Construa duas retas que se intersectam no 2º quadrante.
06. Determine as regiões representadas pelos seguintes sistemas de inequações e explique-as com suas palavras.

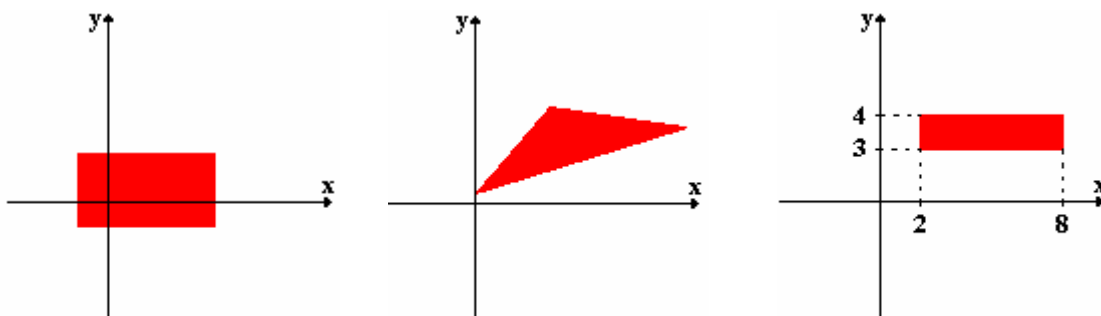
$\begin{cases} x+y>0 \\ x-2x+6>0 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y+1>0 \\ x-2y-2>0 \\ 2x-y-4>0 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y-1>0 \\ x-y+3>0 \\ 2x+y-12<0 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y-1>0 \\ -x-y+2>0 \\ 2x+2y+3>0 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-y>0 \\ -4x+2y>0 \\ x+y>0 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y-1<0 \\ x-y+3<0 \\ 2x+y-12>0 \end{cases}$
---	---	--	--	---	--

Quadro 27 – Coleta de dados/ Atividade 1

ATIVIDADE 2

Instruções: Faça as construções em um mesmo arquivo e salve como *nome2*. Envie o arquivo para profcardosantos@yahoo.com.br.

01. Construa as seguintes figuras no GrafEq:



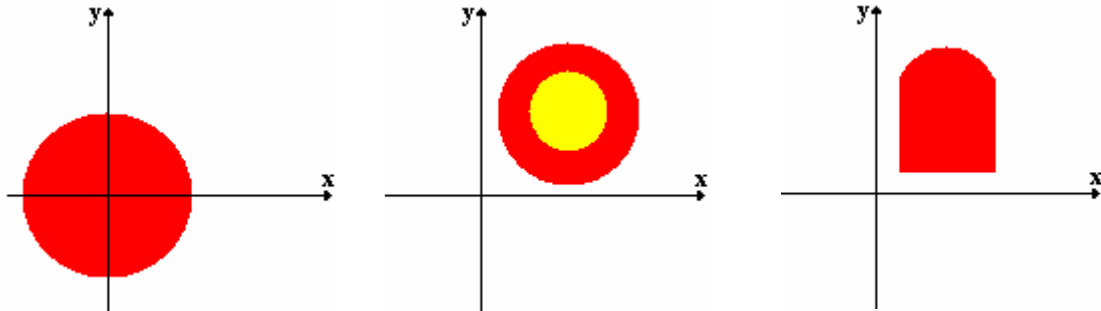
Quadro 28 – Coleta de dados/ Atividade 2

¹⁶ Base para as atividades que constam no tutorial.

ATIVIDADE 3

Instruções: Faça as construções em um mesmo arquivo e salve como *nome3*. Envie o arquivo para profcardosantos@yahoo.com.br.

01. Construa as seguintes figuras no GrafEq:

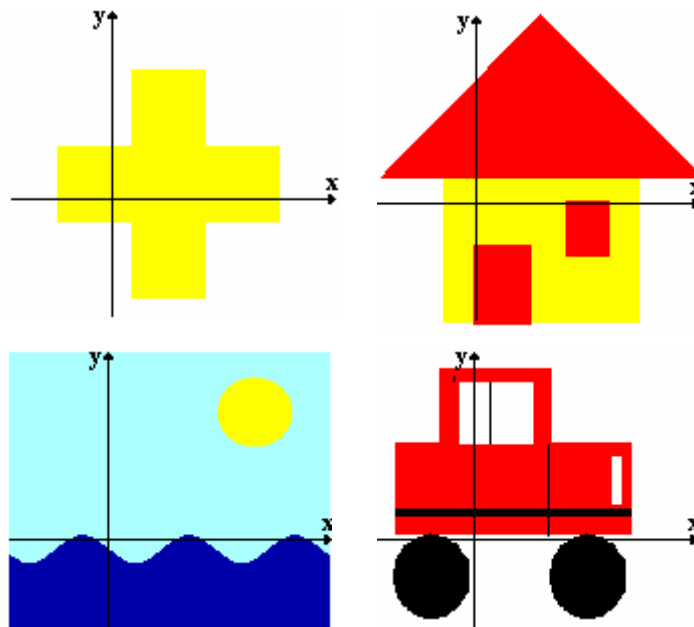


Quadro 29 – Coleta de dados/ Atividade 3

ATIVIDADE 4

Instruções: Faça as construções em um mesmo arquivo e salve como *nome4*. Envie o arquivo para profcardosantos@yahoo.com.br.

01. Construa as seguintes figuras no GrafEq:



Quadro 30 – Coleta de dados/ Atividade 4

ATIVIDADE 5

Instruções: Faça as construções em um mesmo arquivo e salve como *nome5*. Envie o arquivo para profcardosantos@yahoo.com.br.

01. Construa quatro discos. Um em cada quadrante.
02. Construa um disco com centro no 3º quadrante e que não possua partes de sua região no 1º quadrante, mas invada os 2º e 4º quadrantes.
03. Crie as três possibilidades de uma reta em relação a uma circunferência (reta secante, reta tangente e reta externa à circunferência.).

ATIVIDADE 6

Instruções: Faça as construções em um mesmo arquivo e salve como *nome6*. Envie o arquivo para profcardosantos@yahoo.com.br.

01. Construa:

- | | |
|----------------------------|---------------------------|
| a) um quadrado | b) um triângulo retângulo |
| c) um triângulo equilátero | d) um trapézio |
| e) um trapézio retângulo | f) losango |

ATIVIDADE 7

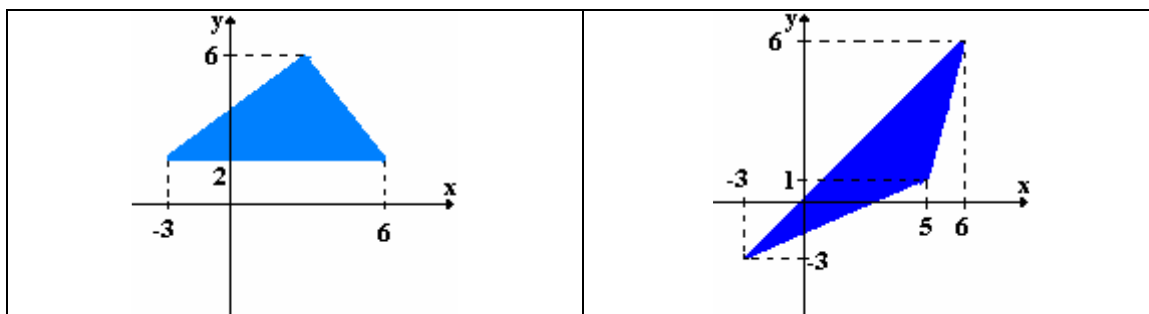
Instruções: Salve suas construções e envie os arquivos para profcardosantos@yahoo.com.br.

01. Realize uma construção no GrafEq com um mínimo de 5 relações diferentes.
(Salve como *cinco_nome*)
02. Escolha uma figura ou imagem (internet, livro etc.) e reproduza o mais fiel possível, no GrafEq.
(Salve como *imagem_nome*)

ATIVIDADE 8

Instruções: Salve suas construções em um mesmo arquivo chamado *nome8* e envie os arquivos para proflicardosantos@yahoo.com.br.

01. Construa as seguintes figuras no GrafEq:



Quadro 31 – Coleta de dados/ Atividade 8

ATIVIDADE 9

Instruções: Salve sua construção e envie o arquivo para proflicardosantos@yahoo.com.br.

01. Arte abstrata. Escolha um quadro de arte abstrata (pode-se pesquisar na internet) e reproduza-o no GrafEq.
(Salve como *arte_nome*)

7.2. APÊNDICE B: Guia de Estudos para o GrafEq (Interface)

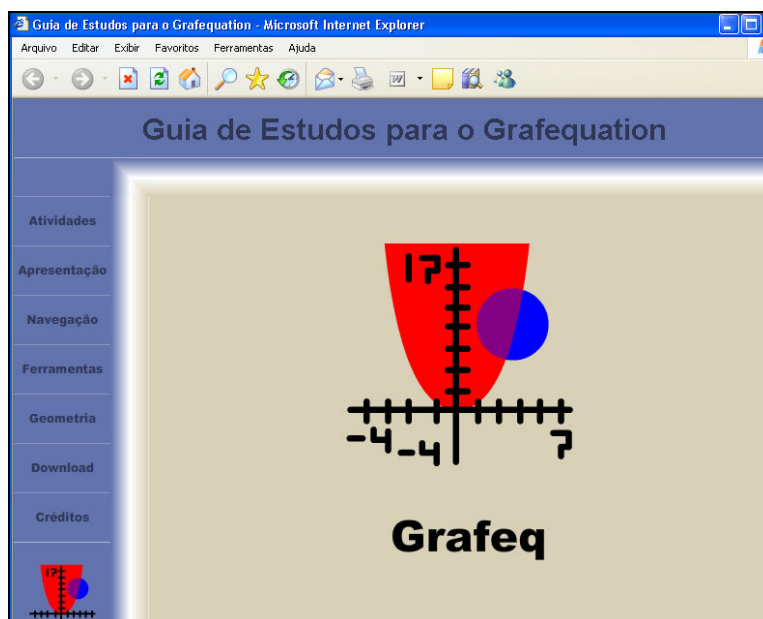


Figura 84 – Guia de Estudos para o GrafEq/ tela inicial

Enquanto o usuário segue pelas atividades, de acordo com sua necessidade, pode consultar a página com conceitos de Geometria e/ou a página que explica o funcionamento das ferramentas do software.

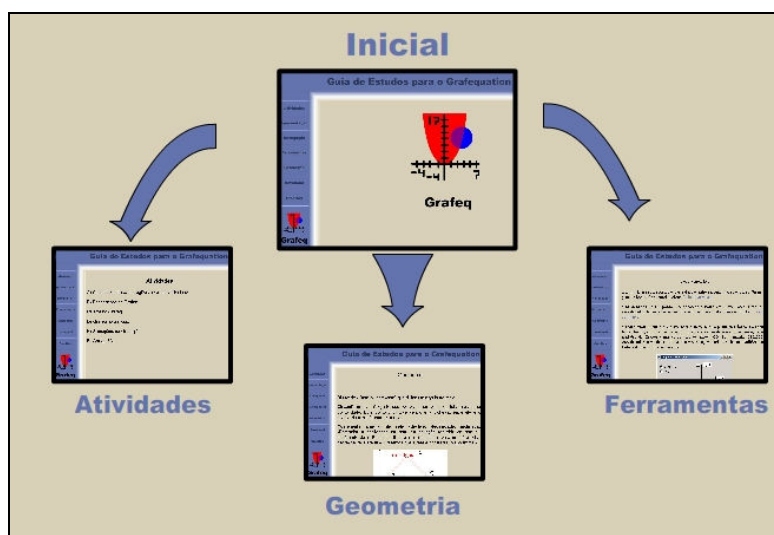


Figura 85 – Guia de Estudos para o GrafEq/ navegação

Para conhecer as atividades navegue pelo tutorial que está no Apêndice D, em forma de CD.

7.3. APÊNDICE C: Interface do GeoGebra

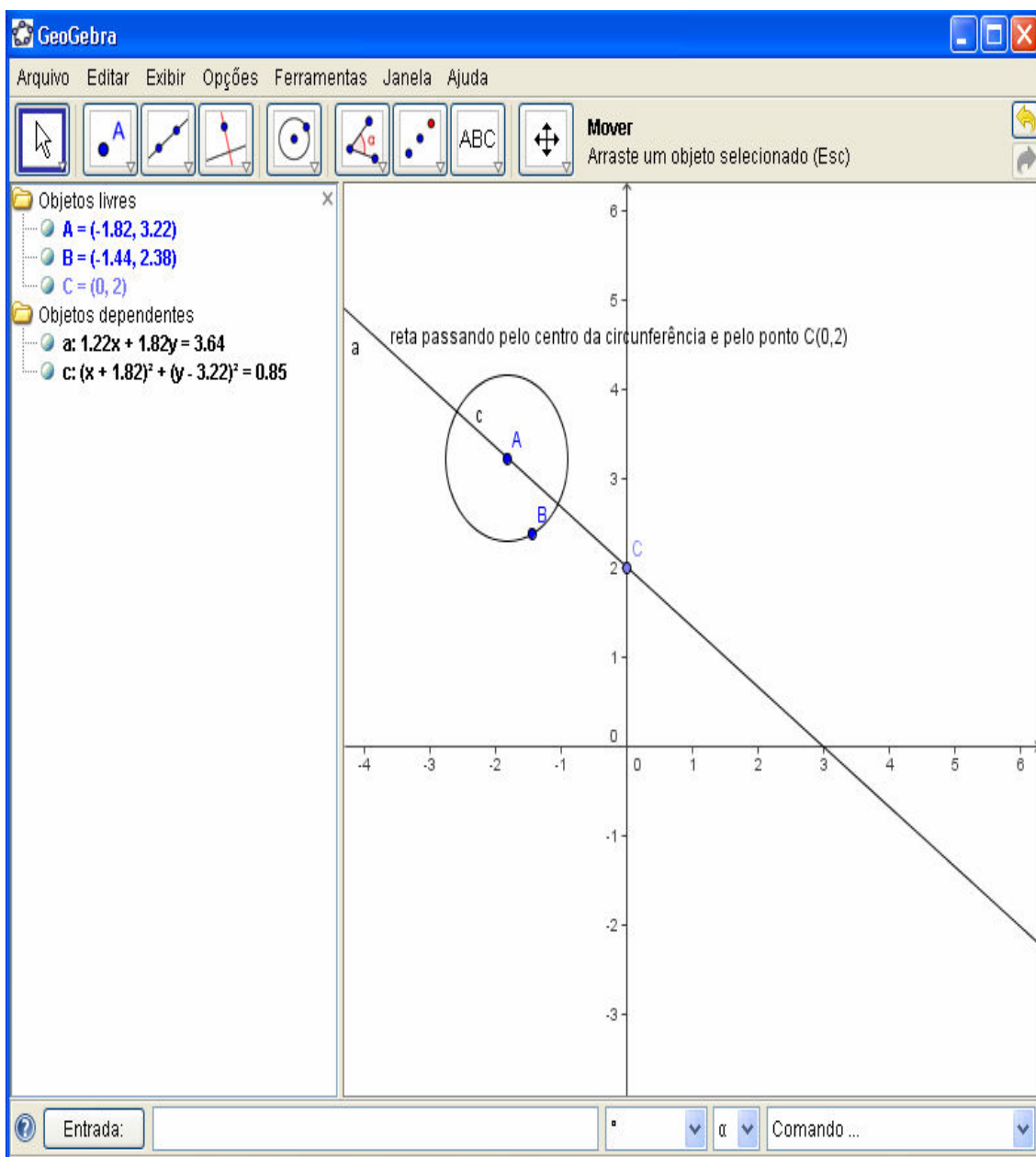


Figura 86 – GeoGebra/ interface

No GeoGebra, o usuário realiza as construções geométricas (ponto, reta, circunferência etc) e o software retorna as respectivas equivalências algébricas (coordenadas, equações etc). Na figura acima, podemos notar no lado esquerdo as coordenadas dos pontos A, B e C e as equações da reta e da circunferência que estão na construção à direita.

7.4. APÊNDICE D: Guia de Estudos para o GrafEq (CD)

Para acessar o Guia de Estudos do GrafEq basta inserir no seu computador o CD abaixo. Caso ele não inicie automaticamente, abra o arquivo **index.html** em seu navegador.

Alguns navegadores bloqueiam animações ou vídeos próprios da web. Apenas modifique as configurações do seu navegador, normalmente clicando na mensagem que surge na parte superior da janela do navegador.

CD